



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA**

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD  
NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

**Magister en Tecnología Química**

EN EL CAMPO DE: **Control Óptimo de Procesos**

TÍTULO DE LA TESIS:

**Control Óptimo de Procesos Industriales Utilizando  
Desigualdades Lineales Matriciales**

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Departamento de Ingeniería Química – FIQ – UNL  
Instituto Tecnológico (INTEC)

AUTOR:

**Carlos Alberto Cappelletti**

DIRECTOR DE TESIS:

**Dr. Eduardo J. Adam**

CODIRECTOR DE TESIS:

**Dr. Jacinto L. Marchetti**

MIEMBROS DEL JURADO:

**Dr. Julio E. Normey-Rico**

**Dr. Pio A. Aguirre**

**Dr. José G. García Clúa**

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2016



## Dedicatoria

*A mis Viejitos Lindos, Roberto Epsilon y Lidia Maria Reina.*

*A mi Amada Esposa, Patricia Gorit Amosh.*

*A mis Hermanos y Amigos, Roberto, Adrián y Beritivil.*

*A mi Dios y mi Madre del Cielo, por tantas y tantas Bendiciones...*

*Gracias!*



# Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) por haberme incentivado a realizar esta tesis apoyándome con la Beca de PROMEI para el mejoramiento de enseñanza en ingeniería, y a la Facultad de Ingeniería Química (FIQ) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), por brindarme un lugar donde poder desarrollar y concluir el presente trabajo.

Especialmente quiero agradecer a mis directores Eduardo y Jacinto, por su constante orientación, empeño y dedicación a lo largo de todo esta tesis, y por la infinidad de horas dedicadas al intercambio constructivo de ideas. Sin su paciente ayuda no hubiera sido posible concluir este trabajo.

Por último quiero agradecer a mi colega, amigo y compañero de cátedra Gustavo Yarce y a todas las personas, que de algún modo, me han animado y apoyado durante el desarrollo de esta Tesis de Maestría.

Carlos A. Cappelletti.



# Contenido

<b>1. Introducción a la Tesis</b>	<b>1</b>
1.1. Valor Científico – Técnico del Trabajo a Realizar . . . . .	3
1.2. Análisis de la principal bibliografía relacionada con el tema pro- puesto . . . . .	5
1.2.1. Breve reseña histórica de la teoría de control moderna . . . . .	5
1.2.2. Breve reseña histórica de las LMIs en la teoría de control . . . . .	8
1.3. Aspectos que lo hacen diferente de lo ya existente y conocido en el área . . . . .	10
<b>2. Revisión de conceptos Básicos de Control Óptimo</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.1.1. Sistemas Invariantes en el Tiempo . . . . .	13
2.1.2. Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI) . . . . .	15
2.1.3. Relación entre los modelos: Entrada/Salida y Variables de Estado . . . . .	16
2.1.4. Estabilidad Asintótica . . . . .	17
2.1.5. Sistemas LTI Estrictamente Propios . . . . .	18
2.1.6. Sistema Autónomo . . . . .	19
2.2. Criterio de Estabilidad según Lyapunov . . . . .	20
2.2.1. Interpretación Física del Teorema de Lyapunov . . . . .	26
2.2.2. Interpretación gráfica del Teorema de Lyapunov . . . . .	37
2.3. Regulador Óptimo LQR . . . . .	39
2.3.1. Sistema LTI no autónomo . . . . .	39
2.4. Minimización de la norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .	51
2.5. Resumen . . . . .	54
<b>3. Rechazo a perturbaciones desconocidas</b>	<b>57</b>
3.1. Introducción . . . . .	57
3.2. Norma $\mathcal{H}_2$ y Norma $\mathcal{H}_\infty$ de un sistema LTI . . . . .	57
3.2.1. Norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .	57
3.2.2. Norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	59

3.3. Evaluación de la norma $\mathcal{H}_\infty$	60
3.4. Regulador óptimo en $\mathcal{H}_\infty$	66
3.4.1. Atenuación de perturbaciones vía realimentación de estado	66
3.5. Resumen	73
<b>4. Introducción Teórica a las LMI</b>	<b>75</b>
4.1. Introducción	75
4.2. Teoría Básica de LMI	75
4.3. Representación gráfica de las LMI	77
4.3.1. Ejemplo de Programación Lineal	77
4.3.2. Restricciones no lineales	80
4.3.3. Múltiples LMIs, Intersección de Regiones	82
4.3.4. Restricciones en las variables de decisión	85
4.4. Transformación de Desigualdades Matriciales Cuadráticas en LMI	88
4.4.1. Variables Matriciales	88
4.4.2. Complemento de Schur	89
4.4.3. Uso de LMIs en problemas de control	91
4.5. Resumen	95
<b>5. Regulador <math>\mathcal{H}_2</math> y <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>99</b>
5.1. Introducción	99
5.2. Especificaciones	100
5.3. Formulación $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_\infty$ en variables de estado	102
5.3.1. Especificaciones $\mathcal{H}_2$	103
5.3.2. Desempeño $\mathcal{H}_\infty$	106
5.4. Controladores por Realimentación de Estado	111
5.4.1. Síntesis del controlador $\mathcal{H}_2$	111
5.4.2. Síntesis del controlador $\mathcal{H}_\infty$	113
5.4.3. Síntesis del controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	115
5.5. Ejemplo de diseño de un regulador de estado con desempeño $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_\infty$	117
5.6. Resumen	125
<b>6. Regulador multiobjetivo y robustez</b>	<b>127</b>
6.1. Introducción	127
6.2. Regiones LMI	127
6.2.1. Otras regiones LMI	132
6.3. Diseño $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ y ubicación de Polos	137
6.4. Polítopo de incertidumbres	140
6.5. Resumen	146

<b>7. Restricciones en la variable manipulada</b>	<b>149</b>
7.1. Introducción	149
7.2. Minimización $\mathcal{H}_2$ vía Matriz Gramiano de Observabilidad	149
7.3. LQR vía LMI con Restricción en la Acción de Control	152
7.3.1. Control de Nivel en Sistema Hidráulico	154
7.3.2. Simulaciones Numéricas	157
7.4. Resumen	158
<b>8. Seguimiento de consigna via LMI</b>	<b>161</b>
8.1. Introducción	161
8.1.1. Problema de seguimiento	162
8.2. Ejemplo de Aplicación. Control de un CSTR	163
8.3. Resumen	170
<b>9. Conclusiones</b>	<b>173</b>
9.1. Resumen y Conclusiones de la Tesis	173
9.2. Alcances y Futuros Desarrollos	176
<b>A. Herramientas Matemáticas Básicas</b>	<b>177</b>
A.1. Conceptos básicos del álgebra lineal	177
A.1.1. Formas cuadráticas	177
A.1.2. Norma infinito de una matriz	179
A.2. Rechazo a perturbaciones desconocidas	180
A.2.1. Formulación $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas MIMO	180
A.2.2. Demostración del teorema (3.1)	183
A.2.3. Procedimiento para obtener $\gamma_{\min}$ de un sistema realimentado	186
A.3. Procedimiento para obtener $\gamma_{\min}$ de un sistema realimentado vía LMI	187
A.4. Regulador multiobjetivo y robustez	188
A.4.1. Polítopo	188
<b>B. Códigos de Matlab</b>	<b>191</b>
B.1. LMI y el toolbox de matlab	191
B.2. Ejemplo de Programación	194
<b>C. Artículos Publicados</b>	<b>199</b>



# Índice de figuras

2.1. Sistema autónomo masa-resorte . . . . .	21
2.2. Evolución de los estados del Sistema masa-resorte . . . . .	22
2.3. Evolución de los estados del Sistema masa-resorte con rozamiento . . . . .	23
2.4. Circuito RLC. . . . .	29
2.5. Evolución de los estados y enrgía almacenada del circuito RLC. . . . .	32
2.6. Circuito RLC. . . . .	33
2.7. Evolución de los estados . . . . .	35
2.8. Energía disipada por cada salida en funcion del tiempo . . . . .	36
2.9. Energía disipada por cada salida en el espacio de estados. . . . .	36
2.10. Ejemplo de función de Lyapunov para $V(x) = x'Px$ con $P =$ diag(1,5 ; 4). . . . .	38
2.11. Evolución de los estados y curvas de energía constante . . . . .	39
2.12. Diagrama en bloque del sistema con dos entradas $x_0\delta(t)$ y $u(t)$ . . . . .	40
2.13. Sistema LTI SISO con realimentación de estados. . . . .	41
2.14. Sistema masa-resorte . . . . .	46
2.15. Sistema oscilante . . . . .	47
2.16. Frenado óptimo, posición y velocidad del bloque $M$ . . . . .	50
2.17. Diagrama de estados. Curva de nivel y gradiente de la función de Lyapunov. . . . .	50
2.18. Disipación de energía en el espacio de estados. . . . .	51
2.19. Sistema realimentado con selección de $z_2$ . . . . .	53
3.1. Diagrama en bloque del sistema con entrada $w(t)$ . . . . .	61
3.2. Perturbación modelada como realimentación de estado. . . . .	62
3.3. Realimentación negativa del sistema perturbado . . . . .	68
3.4. Respuesta en frecuencia de $G(s)$ . . . . .	71
3.5. Respuesta en frecuencia en escala logarítmica . . . . .	72
3.6. Respuesta en frecuencia en escala lineal . . . . .	72
4.1. Restricciones lineales, región convexa poligonal . . . . .	78
4.2. Restricciones lineal, cuadrática y cúbica, y sus curvas de nivel. . . . .	82

4.3. Región Factible . . . . .	82
4.4. Región Factible $\mathcal{F}_B(x) \prec 0$ . . . . .	83
4.5. Múltiples LMIs. Intersección de regiones convexas. . . . .	84
4.6. Región Factible $\mathcal{F}(x) \prec 0$ y $X(x) \prec 0$ . . . . .	84
4.7. Dominios rectangular y cónico de las variables de decisión . . . . .	87
4.8. Respuesta en frecuencia de $G(s)$ . . . . .	93
4.9. Curvas de nivel y región factible. . . . .	97
5.1. Diagrama en bloque de dos puertos para el control $\mathcal{H}_2$ y $H_\infty$ . . . . .	100
5.2. Diagrama en bloque de dos puertos para el control $\mathcal{H}_2$ y $H_\infty$ . . . . .	102
5.3. Sistema con posicionamiento angular $\theta$ . . . . .	117
5.4. Diagrama del sistema de control con el regulador $\mathcal{H}_2/H_\infty$ . . . . .	120
5.5. Desempeño nominal $\mathcal{H}_2$ . . . . .	122
5.6. Desempeño nominal $\mathcal{H}_2$ . . . . .	122
5.7. Desempeño nominal $\mathcal{H}_2/H_\infty$ . . . . .	123
5.8. Desempeño nominal $\mathcal{H}_2/H_\infty$ . . . . .	124
6.1. Ubicación de polos . . . . .	131
6.2. Región cónica . . . . .	133
6.3. Región circular . . . . .	135
6.4. Intersección de regiones . . . . .	136
6.5. Desempeño nominal $\mathcal{H}_2/H_\infty$ y ubicación de polos. . . . .	139
6.6. Desempeño nominal $\mathcal{H}_2/H_\infty$ y ubicación de polos. . . . .	139
6.7. Incertidumbre paramétrica y polítopo de sistemas . . . . .	143
6.8. Posición angular del péndulo . . . . .	146
6.9. Posición del carro . . . . .	146
6.10. Señal de control . . . . .	147
6.11. Ubicación de los polos . . . . .	147
6.12. Magnitud de la respuesta en frecuencia . . . . .	147
7.1. Sistema de control de nivel implementado en el laboratorio y tomado como ejemplo para las simulaciones . . . . .	155
7.2. a) Diferentes saltos escalón al problema de control de nivel. b) Cambios sin restricciones en la variable manipulada para satisfacer los cambios escalón pedidos. . . . .	158
7.3. a) Diferentes saltos escalón al problema de control de nivel. b) Cambios en la variable manipulada para satisfacer los cambios escalón pedidos. . . . .	159

7.4. a) Distintos cambios del punto de operación del sistema (línea azul) aplicados al problema de seguimiento de control de nivel. La línea roja indica el nivel de líquido $h_2(t)$ . b) Movimientos de la variable manipulada para los cambios pedidos en el set-point.	160
8.1. Sistema de seguimiento con integrador	161
8.2. Diagrama ilustrativo del CSTR	164
8.3. Caudal manipulado en el reactor en lazo abierto	165
8.4. Concentración del producto A en el reactor en lazo abierto	166
8.5. Temperatura a la salida del reactor en lazo abierto	166
8.6. Región para los Polos del Sistema Lineal Realimentado.	167
8.7. Referencia y concentración del producto A. Modelo nominal.	168
8.8. Temperatura a la salida del reactor. Modelo nominal.	168
8.9. Caudal manipulado en el reactor realimentado. Modelo nominal.	168
8.10. Referencia y concentración del producto A. Modelo Politópico.	170
8.11. Temperatura a la salida del reactor. Modelo Politópico	171
8.12. Caudal manipulado en el reactor realimentado. Modelo Politópico.	171
8.13. Reactor realimentado con controlador robusto.	172
A.1. Punto interior al segmento $x_1x_2$ , representado mediante combinación lineal de sus extremos.	189
A.2. Polítopos en 2 dimensiones. Punto interior representado mediante combinación lineal de sus vértices.	189
A.3. Polítopos en 3 dimensiones. Punto interior representado mediante combinación lineal de sus vértices.	190



# Indice de tablas

2.1. Datos del problema Masa-Resorte. . . . .	46
5.1. Valores asumidos para el problema del péndulo invertido. . . . .	118
5.2. Ganancias de los controladores para cada estado. . . . .	124
5.3. $\mathcal{H}_2$ , $\mathcal{H}_\infty$ , Tiempo de establecimiento y el Control máximo. . . . .	125
6.1. Ganancias de los controladores. . . . .	140
6.2. $\mathcal{H}_2$ , $\mathcal{H}_\infty$ , Tiempo de establecimiento y el control máximo. . . . .	140
7.1. Sistema de control de nivel implementado en el laboratorio y tomado como ejemplo para las simulaciones . . . . .	155
8.1. <i>Parámetros del Reactor</i> . . . . .	165
8.2. <i>Sistemas Vértices del Polítopo</i> . . . . .	170



# Capítulo 1

## Introducción a la Tesis

En el diseño de un sistema de control, es fundamental disponer de un modelo matemático que represente lo mejor posible a la planta o sistema físico a controlar, de lo contrario, es poco probable que los resultados obtenidos sean los deseados.

Construir un modelo representativo del proceso no es una tarea trivial, porque al modelar se linealizan y simplifican las ecuaciones de equilibrio de manera de tener una estructura matemática manejable. Esta estructura o modelo matemático se denomina planta nominal.

En general los procesos además de no ser lineales, poseen otras limitaciones, como ser, no son invariantes en el tiempo, tienen límites en sus estados, y límites en los componentes físicos que intervienen en el lazo de control, como son los sensores y actuadores. Estas limitaciones producen, por ejemplo, saturaciones en la variables manipuladas.

Otras problemáticas inherente a los sistemas en general y en los químicos en particular, son los tiempos muertos, el ruido del proceso y el ruido de medición, como así también las perturbaciones externas que por su propia naturaleza, no son a priori conocidas.

Por último y como si fuera poco, ante todo este conjunto de incertezas inherentes a un proceso real, que no son tenidas en cuenta por el modelo o planta nominal, se debe implementar un sistema de control que lo gobierne, es decir, un sistema de control que lo estabilice y que le obligue a cumplir las especificaciones de diseño.

Entre las distintas técnicas de control, la técnica de control robusto busca encerrar todo lo que está fuera del modelo nominal, en un modelo de incertidumbres, de forma tal que la planta real que se quiere gobernar, está incluida dentro de una familia de modelos formada por la planta nominal más las incertidumbres.

En las décadas del '80 y '90, algunos investigadores [Sánchez, 1992, Green and Limeber, 1995, Sánchez and Sznaier, 1998, Zhou and Doyle, 1998, entre muchos otros] plantearon como dominio natural para el estudio del problema anteriormen-

te expuesto el espacio de la frecuencia, donde las especificaciones de diseño están definidas.

Sin embargo, el planteo del modelo en variables de estado, cuyo dominio natural es el temporal, presenta algunas ventajas respecto al dominio frecuencial como por ejemplo, (i) trata con la misma estructura un sistema MIMO que un sistema SISO, (ii) permite trabajar tanto con señales determinísticas como estocástica, y (iii) computacionalmente es mucho más amigable porque solo requiere de cuatro matrices constantes para su representación independientemente del tamaño del sistema [Sánchez, 1992].

A partir de la década del 90, las ventajas mencionadas se hicieron mucho más notorias cuando se advirtió que el conjunto de especificaciones robustas en variables de estado encontraban un marco común de formulación, llamada Desigualdades Lineales Matriciales (LMI, del anacronismo del idioma Inglés, *Linear Matrix Inequality*) [Boyd et al., 1994]. Esta herramienta matemática (las LMIs) tiene como ventaja adicional definir regiones convexas, con lo cual, el conjunto de especificaciones de diseño robusto es transformado en una intersección de regiones convexas, y por lo tanto, el conjunto resultante de dicha intersección es convexo.

Es esta convexidad la gran ventaja que tienen las LMIs respecto a otras técnicas de control, ya que los problemas de optimización convexa pueden ser resueltos numéricamente eliminando la necesidad de encontrar una solución analítica. Además la convexidad garantiza encontrar, si es que existe, una única solución al problema de control.

Resumiendo, el objetivo es reformular el problema de control como un problema de optimización convexo y así, mediante esta reformulación y posterior solución, se encuentra, si es que existe, la solución del problema original.

En las última décadas se ha intensificado el esfuerzo de muchos académicos en utilizar herramientas de optimización para el diseño de sistemas de control que permita satisfacer estas restricciones operativas. Así es que la utilización de las LMIs, se ha empezado a tomar en cuenta como una poderosa herramienta para el diseño de sistemas de control con y sin restricciones [Boyd et al., 1994, Iwasaki and Skelton, 1994, Khotare et al., 1996, entre otros].

El elevado poder computacional alcanzado recientemente y la aparición de poderosos algoritmos de optimización convexa, junto con poderosos softwares de cálculo, han contribuido fuertemente a la creciente popularidad de esta herramienta matemática. Como se dijo, mediante las LMIs es posible obtener en el sistema de control, características dinámicas que cumplan satisfactoriamente con seguimiento de consignas, rechazo de perturbaciones, robustez, restricciones operativas, etc.

Sin embargo, a pesar de todas estas bondades, esta poderosa herramienta aún no se ha popularizado lo suficiente en el área del control de procesos químicos y

no muchas aplicaciones se pueden encontrar en la literatura [Wu, 2001], [Park and Rhee, 2001], [Boasová et al., 2005], [Suplin and Shaked, 2008], entre otros].

Por todas las ventajas mencionadas y por su incipiente difusión, se ha elegido esta técnica como objeto del trabajo de investigación, para justamente, tratar de conocerla y dominarla, a fin de poder implementarla en procesos típicos de la tecnología química.

## 1.1. Valor Científico – Técnico del Trabajo a Realizar

La presente tesis de maestría aborda el problema de control de sistemas típicos de la tecnología química, que como se mencionó, además de no ser lineales ni invariantes en el tiempo, tienen restricciones en sus estados, saturaciones en la variable manipulada, etc. Esencialmente, la idea de diseño de controladores persigue la obtención de un sistema de control que funcione en forma óptima. Para lograr este óptimo funcionamiento es necesario que se garantice características dinámicas adecuadas ante diversas situaciones, tales como,

1. cambios de consigna, donde se busca reducir o eliminar el error de seguimiento y acotar el tiempo de respuesta dentro de ciertos valores límites razonables,
2. buen rechazo de perturbaciones, donde se busca reducir al mínimo la variabilidad que se produce en las señales de salidas controladas ante entradas no deseadas, o reducir la sensibilidad al ruido de proceso, o el ruido producido en los sensores de las variables medidas y,
3. lograr cierta robustez en el sistema de control ante las incertidumbres propias del modelado al usar aproximaciones lineales para representar al sistema.

En este último aspecto se puede decir que los modelos utilizados en procesos de Ingeniería Química provienen, mayoritariamente, de la formulación matemática de sus principios físico-químicos, en general de ecuaciones de balance adecuadamente simplificadas o bien, del tratamiento numérico de datos experimentales y de la elección de una forma analítica simplificada para expresar la dinámica y posterior ajuste de sus parámetros. Un claro ejemplo de esto son los reactores químicos donde a pesar de disponer de modelos matemáticos rigurosos existen incertidumbres o errores en el modelado.

Así, al diseñar sistemas de control, nuestro diseño se basa en el modelo matemático de una planta específica y tal modelo no es de ninguna manera exacto

sino sólo una aproximación a la dinámica real de la planta. La diferencia entre la dinámica real y la del modelo se debe a los errores de modelado.

Además, aunque los valores nominales de los parámetros sean muy precisos, los puntos de operación de la planta cambian, debido a la inevitable desviación con respecto al punto equilibrio del sistema cuando está en funcionamiento, o bien se ven afectados por perturbaciones externas, o simplemente varían con el tiempo. Por tanto, los parámetros del modelo, es decir, las constantes involucradas en el modelo adoptado, cambian y necesitarán por lo general ser corregidas. Todos estos factores pueden causar, si no se toman los recaudos necesarios, un pobre desempeño, y más aún, inestabilidad en el sistema de control a lazo cerrado.

A pesar de los inconvenientes antes mencionados, la importancia de modelos lineales es fundamental, ya que no sólo sirven para la representación local de sistemas no lineales, sino que dan lugar a numerosas técnicas en el diseño de controladores. Si bien al linealizar una planta se sacrifica información, se tiene la posibilidad de utilizar una gran cantidad de resultados teóricos ya existentes.

Como se mencionó en la introducción, se ha observado que una amplia gama de problemas de diseño de controladores robustos que satisfacen restricciones pueden ser reducidos a un problema de optimización convexa estándar utilizando Desigualdades Lineales Matriciales (LMIs), y que justamente el objetivo de esta tesis radica en utilizar esta técnica con fines prácticos. En tal sentido, resulta importante mencionar que uno de los primeros trabajos que realiza un gran aporte en el área es el trabajo realizado por Boyd y colaboradores [Boyd et al., 1994].

Así, la plataforma teórica de la tesis resulta ser:

- La teoría de control clásico y moderna.
- La teoría de programación matemática lineal y programación semidefinida.
- La conexión entre las teorías de control moderna y optimización convexa vía LMI.
- El diseño óptimo de controladores sujeto a restricciones de diseño.

Por lo enunciado anteriormente, se puede decir que el objetivo de este trabajo apunta al diseño de controladores lineales, mediante el uso de herramientas matemáticas modernas (LMI), capaces de lograr en un sistema o proceso químico un óptimo funcionamiento, cumpliendo con las condiciones dinámicas especificadas, respetando restricciones operativas, y asegurando las condiciones de robustez necesarias de manera que se garantice estabilidad asintótica en el sistema controlado a pesar de las incertidumbres y limitaciones del proceso real.

## 1.2. Análisis de la principal bibliografía relacionada con el tema propuesto

### 1.2.1. Breve reseña histórica de la teoría de control moderna

Muchas de las técnicas modernas de diseño de sistemas de control han mostrado ser exitosas en aplicaciones de la ingeniería electrónica, robótica o aeroespacial. Sin embargo, inconvenientes adicionales propios de la industria de procesos impiden alcanzar buenos desempeños con estas técnicas. La razón de esto se debe a los problemas que se presentan en la mayoría de los sistemas hallados en la ingeniería química, estos son, sistemas lentos (grandes constantes de tiempo), fuertemente acoplados y con claras características no lineales. Además, debe mencionarse que la región de operación de una planta química está generalmente limitada por una serie de restricciones que el sistema de control debe tener explícitamente en cuenta, y éstas restricciones no solamente se deben a condiciones para una operación conveniente sino frecuentemente a razones de seguridad.

Básicamente podemos decir que existen dos formas muy utilizadas para representar y analizar sistemas lineales de control.

La primera, conocida como la teoría de control clásica [Kuo, 2009, Ogata, 2009, Stephanopoulos, 1984, Smith and Corripio, 2004, entre muchos otros] utiliza funciones de transferencias o función respuesta en frecuencia entre la salida controlada y la entrada manipulada, y un análisis en el espacio transformado por Laplace o por Fourier, donde el sistema queda caracterizado por un cociente de polinomios cuyas raíces determinan su comportamiento. Así, modificar el comportamiento dinámico del sistema implica tener algún grado de libertad para reubicar las raíces del polinomio del denominador del sistema controlado. A medida que el orden de la planta aumenta, la representación matemática del sistema y su posterior análisis y control se complican.

La segunda, llamada teoría de control moderna [Kuo, 2009, Ogata, 2009, Sontag, 1990, Rautenberg and Dáttellis, 2004, entre muchos otros], utiliza el recurso de representar a la planta mediante ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden haciéndose necesario el uso funciones matriciales.

La teoría de control moderna se basa en un sistema de control que tiene en cuenta las llamadas variables de estados. A diferencia de la teoría clásica que considera una descripción entrada-salida del sistema, esta teoría utiliza tres tipos de variables, la entradas, la salidas y los estados, donde la cantidad de estados determina el orden del sistema.

El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática del sistema de ecuaciones, el incremento en la cantidad de variables de estados, de entradas y/o salidas, prácticamente no aumenta la complejidad de la

formulación. De hecho, el análisis de sistemas complicados con entradas y salidas múltiples (sistema MIMO) se realiza mediante procedimientos sólo ligeramente más complicados que los requeridos para el análisis de sistemas de simple entrada simple salida (SISO).

La ventaja que representa esta descripción frente a la descripción clásica radica en que sus métodos permiten obtener soluciones óptimas más generales, tanto para sistemas SISO como MIMO.

En particular, la representación de un sistema y su posterior análisis mediante métodos matriciales resulta útil por los siguientes motivos:

1. Permite el análisis de sistemas lineales cuyos parámetros varían con el tiempo (LTV) abordándolos en forma similar que a los sistemas LTI.
2. Los sistemas descritos por variables de estados son fácilmente discretizados y programados en computadoras.
3. Utiliza los mismos procedimientos al tratar con sistemas SISO o sistemas MIMO.
4. Sirven de fundamento para el análisis posterior de sistemas con variables aleatorias (útil para el modelado de perturbaciones), sistemas no lineales de control y sistemas óptimos de control.

En una representación por variable de estados el sistema lineal queda caracterizado por cuatro matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .

Las matrices  $A$  y  $C$  describen el comportamiento no forzado del sistema, mientras que la matriz  $B$  caracteriza el efecto de la entrada (o control) sobre la dinámica del sistema, y la matriz  $D$  representa la transmisión directa de la entrada a la salida sin que se involucren los estados.

En la teoría moderna, dada la representación matricial, es necesario responder ciertas preguntas que brinden información elemental sobre la característica del sistema a la hora de construir un mecanismo de control, si se pretende tener cierto manejo eficiente sobre él. Estas preguntas son:

1. ¿Existe siempre una entrada de control (variable que se pueda “manejar” de alguna manera) la cual pueda transferir al sistema desde un estado inicial  $x_0$  a cualquier otro estado  $x_i$  deseado en un tiempo finito?
2. ¿El estado inicial  $x_0$  del que parte un sistema, puede siempre identificarse mediante la observación de la salida y de la entrada sobre un tiempo finito?

Estas dos preguntas llevan a dos conceptos fundamentales, el de controlabilidad y el de observabilidad, que fueron introducidos por Kalman a principio de los

años 60. Ellos condicionan la relación que existe entre la entrada y el estado (la controlabilidad) y entre el estado y la salida (la observabilidad) respectivamente.

Gracias a esta teoría, las preguntas antes formuladas pueden ser contestadas mediante la inspección de las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Las matrices  $A$  y  $B$  relacionan las entradas con los estados y se las conoce como el par de controlabilidad. En cambio, las matrices  $A$  y  $C$  relacionan a los estados con las salidas, y se las conoce como el par de observabilidad.

La gran ventaja que tiene la teoría de control moderna es que previo al diseño del sistema de control es posible chequear la controlabilidad del sistema, ya que disponer de un sistema controlable garantiza poder realizar un control individual de cada uno de los estados mediante una realimentación o feedback de estado, lo que literalmente significa que se puede (al menos teóricamente) manejar la dinámica del sistema en lazo cerrado con extrema simplicidad.

El desarrollo de la teoría del *control óptimo* se inició en la década de los '60 con el inicio de la carrera espacial. El problema a resolver era el de llevar un vehículo espacial de algún punto en la tierra a algún otro en el espacio en tiempo mínimo y consumiendo la menor cantidad de combustible posible. Es decir, se trataba de encontrar trayectorias óptimas en espacios tridimensionales.

El control óptimo tiene que ver con el cálculo de *variaciones* que es el nombre dado a la optimización de integrales o funcionales respecto a algún criterio dado. Los criterios de optimización suelen ser muy diversos y determinados por el problema a resolver. Éstos pueden ser, la minimización del tiempo transcurrido al transferir el sistema desde un estado a otro, la minimización de la energía consumida para realizar dicha transferencia, o la maximización o minimización de otros indicadores de la economía del proceso, en los que es frecuente utilizar índices de desempeño cuadráticos. Así, al diseñar un sistema de control óptimo interesa determinar el vector de control tal que un índice de desempeño determinado se minimice, por ejemplo como ya hemos dicho, cuando se desea minimizar la energía consumida para llevar al sistema a su punto estacionario luego de ser perturbado. En este caso estamos ante un regulador óptimo cuadrático (LQR), que lleva a una ley de control lineal. Por lo tanto, el diseño de los sistemas de control óptimo y los reguladores óptimos basados en tales índices de desempeño cuadráticos se reducen a la determinación de los elementos de una matriz (ganancias) de realimentación que reubicará los polos del sistema controlado en las posiciones óptimas deseadas. Una ventaja de usar el esquema de control óptimo cuadrático es que el sistema diseñado será asintóticamente estable, (excepto en el caso de que el sistema original no sea controlable), y mediante la simple resolución de las ecuaciones de Ricatti se calculan las ganancias de realimentación.

Las técnicas clásicas (dentro de la teoría de control moderno) que resuelven esta ecuación son bien conocidas y en principio, utilizar otra técnica diferente para resolverlas (en nuestro caso, LMI) parecería que no aporta ninguna ventaja adi-

cional frente a lo ya existente. No obstante, los sistemas reales tienen limitaciones y una matriz de ganancias teórica podría conducir a excesivos movimientos de la variable manipulada y saturar el elemento de control final. Lograr el control óptimo sin que se produzca saturaciones o desborde en las variables físicas implica condicionar el diseño con ciertas restricciones, y es este uno de los casos donde las LMI tienen sus ventajas, ya que un sistema de control óptimo con múltiples restricciones (múltiples LMIs) puede ser tratado como una única LMI de mayor tamaño, (sin que ello implique alguna complejidad adicional en su resolución).

### 1.2.2. Breve reseña histórica de las LMIs en la teoría de control

Las LMIs son desigualdades lineales donde las variables son matrices. A su vez una desigualdad lineal define una región convexa, y varias LMIs determinan una región que es la intersección de varias regiones convexas, la cual por propiedad de convexidad, sigue siendo convexa. Por lo tanto, si se pretende minimizar o maximizar alguna función dentro de dicha región convexa, se tiene garantía de encontrar un óptimo global y único.

En su forma canónica, la desigualdad matricial puede ser representada por  $F(x) \succ 0$ , donde  $F(x)$  es una combinación lineal de matrices simétricas conocidas, pesadas por las variables de decisión (variables a determinar), de tal manera que  $F(x)$  resulta ser también una matriz simétrica. La condición  $F(x) \succ 0$  significa que  $F(x)$  es positiva definida, con todas las propiedades que esto implica.

En 1890 Lyapunov demostró que el sistema modelado por el par de ecuaciones en variables de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t), \quad (1.1)$$

$$\dot{y}(t) = Cx(t) + Dx(t), \quad (1.2)$$

es estable, si y sólo si, existe una matriz  $P$  positiva definida tal que cumpla la siguiente desigualdad [Rautenberg and Dattellis, 2004]:

$$A'P + PA \prec 0. \quad (1.3)$$

El requerimiento simultáneo de  $A'P + PA \prec 0$  y  $P \succ 0$ , es lo que se conoce desigualdad de Lyapunov en la matriz  $P$ , la cual es una forma especial de LMI.

Es decir, que históricamente hablando la primera LMI usada para analizar la estabilidad de un sistema que evoluciona en el tiempo fue la desigualdad de Lyapunov, la cual puede ser resuelta analíticamente al resolver un conjunto de ecuaciones lineales como se muestra en muchos textos clásicos [Ogata, 2009].

En 1940 se utilizó la desigualdad de Lyapunov para analizar la estabilidad de un sistema de control que poseía una no linealidad en el actuador, el criterio de

estabilidad tenía la forma LMI, pero con la particularidad de que la condición de estabilidad y la restricción del actuador fueron posibles de ser reducidas a un conjunto de desigualdades polinómicas, estas LMIs fueron resueltas analíticamente en forma manual, por lo que su aplicación estaba limitada a sistemas pequeños de segundo o tercer orden.

En 1960 se logró reducir la solución de las LMIs a un simple criterio gráfico, este criterio podía ser aplicado a sistemas de alto orden, pero que no contengan más de una no linealidad. Su contribución, desde el punto de vista histórico de la aplicación de estos métodos en sistemas de control, fue mostrar como resolver ciertas familias LMI por procedimientos gráficos. Al comienzo de los '70, los investigadores observando ciertas simetrías en la ecuación algebraica de Riccati relacionadas con el control cuadrático óptimo en estado estacionario, vieron que se trataba de otra forma de LMI, si la condición de positiva definida se expresa en términos del complemento de Schur [Boyd et al., 1994], entre otros]. Por tanto, algunos tipos especiales de LMI pueden ser resueltas utilizando métodos analíticos como los utilizados para resolver la ecuación algebraica de Riccati (ARE).

Existen entonces, para esta fecha, distintos métodos para la solución de algunos tipos de LMI:

1. Métodos directos y métodos gráficos (aplicables a sistemas de bajo orden) y,
2. métodos analíticos de forma cerrada para la resolución de las ecuaciones de Lyapunov y Riccati.

En 1971, Willen<sup>1</sup> dijo,

*“la importancia de las LMI parece estar ampliamente despreciada, debe ser interesante ver si éstas pueden ser o no explotadas con nuevos algoritmos computacionales”.*

Willen mismo sugirió que las LMI deben tener alguna ventaja computacional comparando, por ejemplo, con los algoritmos utilizados para resolver la ecuación de Riccati.

El siguiente gran avance, fue la simple observación de que las LMIs utilizadas con la teoría de sistemas de control podían ser formuladas como un problema de optimización convexa, el que resulta amigable para ser resuelto en forma computacional.

Así, en la década de los '80 se desarrollaron algoritmos de punto interior que se aplica directamente a problemas de optimización convexo que involucran LMI.

Como se dijo, los problemas de optimización convexa pueden ser resueltos numéricamente eliminando la necesidad de encontrar una solución analítica, y es

---

<sup>1</sup>Extraído del texto [Boyd et al., 1994].

esta la gran ventaja que tienen las LMIs, ya que la convexidad garantiza encontrar la única solución, si es que esta existe.

De manera que la idea es reformular el problema de control como uno de optimización convexa y así esta reformulación y posterior solución constituyan la solución del problema original.

A continuación se mencionan algunos de los problemas de control que se relacionan con las LMIs.

- Estabilidad robusta de sistemas LTI con incertidumbres
- Estabilidad de Lyapunov de sistemas dependientes de parámetros.
- Control LQG óptimo.
- Control robusto  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$ .
- Ubicación de polos garantizando robustez.
- Síntesis  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  multi-objetivo.
- Estabilidad cuadrática.

Además de los tipos de problemas que se ha mencionado y que pueden resolverse vía LMI, esta técnica permite manejar restricciones asociadas a la operación de los sistemas como pueden ser los valores máximos permitidos para alguna variables dentro del proceso, por ejemplo, restricciones en el valor de las señales de entrada (actuadores), restricciones en el valor de las señales de salida (sensores) y condición de elipsoide inicial mínima la cual obliga a los valores futuros de los estados a permanecer dentro de una región que puede ser minimizada para garantizar valores reducidos de los mismos. En [\[Khotare et al., 1996\]](#) se presentan condiciones para introducir estas restricciones en el problema de la realimentación de estados.

### **1.3. Aspectos que lo hacen diferente de lo ya existente y conocido en el área**

La idea del diseño óptimo de un sistema de control persigue la obtención de plantas que funcionen garantizando robustez ante incertidumbres paramétricas y adecuadas características dinámicas ante las diversas situaciones tales como, cambios de consigna o bien rechazo de perturbaciones, cumpliendo con restricciones operativas en la variable de control y evitando saturaciones en los sensores y las variables manipuladas.

En las últimas décadas se ha intensificado el esfuerzo de muchos académicos en utilizar herramientas de optimización para el diseño de sistemas de control que permita satisfacer restricciones en la variable de control, la manipulada, etc.

Así es que, la utilización de desigualdades matriciales lineales (LMI) se ha empezado a tomar en cuenta como una poderosa herramienta para el diseño de sistemas de control con y sin restricciones ( [Boyd et al., 1994]; [Iwasaki and Skelton, 1994]; [Khotare et al., 1996]; entre otros).

Como se mencionó antes, el elevado poder computacional alcanzado recientemente y la aparición de poderosos algoritmos de optimización convexa junto con poderosos softwares de cálculo, han contribuido fuertemente a la creciente popularidad de las LMIs. Así, es posible obtener en el sistema de control características dinámicas que cumplen satisfactoriamente con seguimiento de consignas, rechazo de perturbaciones, robustez, restricciones operativas, etc.

A pesar de todas las bondades de esta poderosa herramienta, aún no se ha popularizado lo suficiente en el área del control de procesos químicos y no muchas aplicaciones se pueden encontrar en la literatura ( [Wu, 2001]; [Park and Rhee, 2001]; [Boasová et al., 2005]; [Suplin and Shaked, 2008]; entre otros). Por tal motivo, en este trabajo de tesis de maestría se buscará justamente conocer, dominar y utilizar ésta técnica con fines prácticos, para así poder implementarla en procesos típicos de la tecnología química (reactores, columnas de destilación, sistemas hidráulicos, etc.).



# Capítulo 2

## Revisión de conceptos Básicos de Control Óptimo

### 2.1. Introducción

La teoría de control moderno surge como una descripción alternativa de los sistemas dinámicos mediante el uso de variables de estado.

A diferencia de los modelos de representación entrada(s)/salida(s), la descripción de los sistemas en variables de estado tiene el siguiente modelo general:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t], \quad (2.1)$$

$$\tilde{y}(t) = g[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t]. \quad (2.2)$$

Esta forma general de representación es válida para cualquier sistema continuo, no lineal y variantes en el tiempo.

Las variables  $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{(n \times 1)}$ ,  $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^{(m \times 1)}$  e  $\tilde{y}(t) \in \mathbb{R}^{(p \times 1)}$ , representan el vector de estados, el vector de entradas y el vector de salidas respectivamente<sup>1</sup>.

La Ec. (2.1) se denomina ecuación de estados y determina la dinámica del sistema, mientras que la Ec. (2.2) se denomina ecuación de salida del sistema.

#### 2.1.1. Sistemas Invariantes en el Tiempo

Si los parámetros del sistema representado por las ecuaciones (2.1) y (2.2) son constantes, el sistema es invariante en el tiempo (TI)<sup>2</sup>, es decir, las funciones  $f$  y  $g$  dejan de depender explícitamente de la variable temporal, y en tal caso, el

---

<sup>1</sup>En lo que resta del texto se considerarán estas variables con las dimensiones indicadas arriba.

<sup>2</sup>TI: acrónimo inglés de Invariante en el Tiempo.

sistema no lineal queda representado por:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= f[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)], \\ \tilde{y}(t) &= g[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)].\end{aligned}\tag{2.3}$$

### Aproximación Lineal

Las ecuaciones anteriores pueden linealizarse alrededor de un punto de operación definido como,

$$\Omega \triangleq (\tilde{x}_{oper}, \tilde{u}_{oper}),$$

mediante una expansión por serie de Taylor del siguiente modo:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}f(\tilde{x}, \tilde{u}) - f(\Omega) &= \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{\Omega} (\tilde{x} - \tilde{x}_{oper}) + \left. \frac{\delta f}{\delta u} \right|_{\Omega} (\tilde{u} - \tilde{u}_{oper}) + tos, \\ g(\tilde{x}, \tilde{u}) - g(\Omega) &= \left. \frac{\delta g}{\delta x} \right|_{\Omega} (\tilde{x} - \tilde{x}_{oper}) + \left. \frac{\delta g}{\delta u} \right|_{\Omega} (\tilde{u} - \tilde{u}_{oper}) + tos,\end{aligned}\tag{2.4}$$

definiendo a las variables de desviación como:

$$\begin{aligned}x &\triangleq \tilde{x} - \tilde{x}_{oper}, \\ u &\triangleq \tilde{u} - \tilde{u}_{oper}, \\ \dot{x} &\triangleq f(\tilde{x}, \tilde{u}) - f(\Omega), \\ y &\triangleq g(\tilde{x}, \tilde{u}) - g(\Omega),\end{aligned}\tag{2.5}$$

las Ecs. (2.4) se reescriben como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{\Omega} x + \left. \frac{\delta f}{\delta u} \right|_{\Omega} u + tos, \\ y &= \left. \frac{\delta g}{\delta x} \right|_{\Omega} x + \left. \frac{\delta g}{\delta u} \right|_{\Omega} u + tos.\end{aligned}\tag{2.6}$$

En estas ecuaciones las variables de entrada, de estado y de salida, son desviaciones respecto del punto de operación de las mismas variables originales del sistema no lineal.

Las derivadas parciales evaluadas en el punto de operación  $\Omega$ , son matrices cuyos elementos son constantes y cuyas dimensiones son consistentes con las

<sup>3</sup>El término *tos* significa términos de orden superior, e involucran a las variables de desviación elevadas a un orden mayor a 1.

dimensiones de los vectores que relacionan, en efecto se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}|_{\Omega} &= \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \frac{\delta f_n}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n} \end{pmatrix}^{(n \times n)}_{|\Omega}, & \frac{\delta f}{\delta u}|_{\Omega} &= \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u_1} & \frac{\delta f_1}{\delta u_2} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta u_m} \\ \frac{\delta f_2}{\delta u_1} & \frac{\delta f_2}{\delta u_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta u_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta u_1} & \frac{\delta f_n}{\delta u_2} & \cdots & \frac{\delta f_n}{\delta u_m} \end{pmatrix}^{(n \times m)}_{|\Omega}, \\ \\ \frac{\delta g}{\delta x}|_{\Omega} &= \begin{pmatrix} \frac{\delta g_1}{\delta x_1} & \frac{\delta g_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta g_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta g_2}{\delta x_1} & \frac{\delta g_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta g_2}{\delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\delta g_p}{\delta x_1} & \frac{\delta g_p}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta g_p}{\delta x_n} \end{pmatrix}^{(p \times n)}_{|\Omega}, & \frac{\delta g}{\delta u}|_{\Omega} &= \begin{pmatrix} \frac{\delta g_1}{\delta u_1} & \frac{\delta g_1}{\delta u_2} & \cdots & \frac{\delta g_1}{\delta u_m} \\ \frac{\delta g_2}{\delta u_1} & \frac{\delta g_2}{\delta u_2} & \cdots & \frac{\delta g_2}{\delta u_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\delta g_p}{\delta u_1} & \frac{\delta g_p}{\delta u_2} & \cdots & \frac{\delta g_p}{\delta u_m} \end{pmatrix}^{(p \times m)}_{|\Omega}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Definiendo a estas matrices como,

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}|_{\Omega} &\triangleq A, & \frac{\delta f}{\delta u}|_{\Omega} &\triangleq B, \\ \frac{\delta g}{\delta x}|_{\Omega} &\triangleq C, & \frac{\delta g}{\delta u}|_{\Omega} &\triangleq D, \end{aligned} \quad (2.8)$$

de la Ec. (2.6) se desprende que las dimensiones de estas cuatro matrices son:

$$A \in \mathbb{R}^{(n \times n)}, B \in \mathbb{R}^{(n \times m)}, C \in \mathbb{R}^{(p \times n)}, D \in \mathbb{R}^{(p \times m)},$$

y las ecuaciones del sistema no lineal desarrolladas en un entorno  $\Delta\Omega$  del punto de operación, lo suficientemente pequeño como para despreciar los términos de orden superior (*tos*), quedan expresadas como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\cong Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &\cong Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.1.2. Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI)

Si el sistema es lineal, los términos de orden superior en la Ec. (2.4) son nulos y las derivadas parciales son independientes del punto de operación  $\Omega$ . En consecuencia, para un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI)<sup>4</sup>, la formulación que sigue es válida tanto para los incrementos de las variables alrededor de un punto  $\Omega$ , como para los valores totales de las mismas,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

<sup>4</sup>LTI: acrónimo inglés de Lineal e Invariante en el Tiempo.

El desarrollo de esta tesis está centrada en sistemas lineales e invariantes en el tiempo, por lo tanto y a continuación se exponen los resultados más importantes para los sistemas LTI.

### 2.1.3. Relación entre los modelos: Entrada/Salida y Variables de Estado

En la representación entrada/salida de un sistema LTI SISO<sup>5</sup>, la función de transferencia  $G(s)$  se define como el cociente entre la señal de salida escalar  $y(s)$ , y la señal de entrada escalar  $u(s)$ , siendo la variable  $s$  la frecuencia compleja o dominio de la transformada de Laplace [Rautenberg and Dátellis, 2004],

$$G(s) \triangleq \frac{y(s)}{u(s)}. \quad (2.11)$$

Para un sistema LTI MIMO<sup>6</sup>, de  $m$  entradas escalares y  $p$  salidas escalares, la relación entre el vector de entradas y el vector de salidas en el dominio transformado, viene dada por la siguiente matriz de transferencia  $G(s)$ :

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_i(s) \\ \vdots \\ y_p(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & \cdot & G_{1j}(s) & \cdot & G_{1m}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{i1}(s) & \cdot & G_{ij}(s) & \cdot & G_{im}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{p1}(s) & \cdot & G_{pj}(s) & \cdot & G_{pm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ \cdot \\ u_j(s) \\ \cdot \\ u_m(s) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

donde cada elemento  $G_{ij}(s)$  de esta matriz, es una función de transferencia que relaciona salida escalar  $y_i(s)$  y la señal de entrada escalar  $u_j(s)$ , con todas las demás entradas nulas. Por lo tanto, cada salida escalar  $y_i(s)$  puede ser obtenida a partir del principio de superposición, esto es,

$$y_i(s) = \sum_{j=1}^m G_{ij}(s)u_j(s). \quad (2.13)$$

De la Ec. (2.12) se desprende que el vector de entradas  $u \in \mathbb{R}^{(m \times 1)}$ , el vector de salidas  $y \in \mathbb{R}^{(p \times 1)}$ , y la matriz de transferencia  $G \in \mathbb{R}^{(p \times m)}$ .

Para obtener la matriz de transferencia  $G(s)$  en el espacio de estados, tanto en los sistemas SISO como en los sistemas MIMO, se aplica la transformada de

<sup>5</sup>SISO: acrónimo inglés de Una Entrada Una salida.

<sup>6</sup>MIMO: acrónimo inglés de Multiples Entradas Multiples Salidas.

Laplace a las Ecs. (2.10) como se muestra a continuación<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} s x(s) - x(0) &= Ax(s) + Bu(s), \quad x(0) = 0, \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s), \end{aligned} \quad (2.14)$$

de las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)u(s). \quad (2.15)$$

Por lo tanto, la matriz de funciones de transferencias del sistema resulta:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2.16)$$

La matriz  $C^{(p,n)}$  es la matriz de salida del sistema, cada uno de sus vectores fila  $C_i^{(1,n)}$ , selecciona a cada salida escalar  $y_i(s)$  con  $i = 1, \dots, p$ , y sus  $n$  columnas dan peso a los  $n$  estados del sistema.

La matriz  $B^{(n,m)}$  es la matriz de entrada del sistema, cada uno de sus vectores columna  $b_j^{(n,1)}$  selecciona y da peso a cada entrada escalar  $u_j(s)$  que ingresa a cada uno de los  $n$  estados del sistema.

Por último, la matriz  $D^{(p,m)}$  representa la acción directa que el vector de entrada tiene sobre el vector de salida sin ser filtrado por el sistema, en efecto, cada una de sus columnas selecciona y pesa cada una de sus  $m$  entradas, y cada una de sus filas selecciona cada una de sus  $p$  salidas.

De esta manera, cada función de transferencia  $G_{ij}(s)$  en el espacio de estados queda expresada como:

$$G_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)} = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}. \quad (2.17)$$

De la ecuación anterior se desprende que  $C_i \in \mathbb{R}^{(1 \times n)}$ ,  $(sI - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ ,  $B_j \in \mathbb{R}^{(n \times 1)}$  y  $D_{ij} \in \mathbb{R}^{(1 \times 1)}$ .

#### 2.1.4. Estabilidad Asintótica

De la teoría del control clásico ([Adam, 2014], [Ogata, 2009]), entre otros), se sabe que un sistema LTI SISO es asintóticamente estable, si y solo si, todos los polos de la función de transferencia están en semiplano izquierdo del plano complejo. Para un sistema LTI MIMO este requisito debe ser satisfecho en cada una de las funciones  $G_{ij}(s)$  de la matriz  $G(s)$  de la Ec. (2.12).

<sup>7</sup>La condición  $x(0) = 0$ , significa que el sistema está inicialmente en reposo.

De manera equivalente, para que un sistema LTI SISO o MIMO representado mediante variables de estado sea asintóticamente estable, todos los autovalores de la matriz de estado  $A$  deben tener parte real negativa.

En efecto, según se ha visto la matriz de transferencia  $G(s)$  del sistema (2.10) está representada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad (2.18)$$

donde

$$(sI - A)^{-1} = \frac{Adj(sI - A)}{\det(sI - A)}. \quad (2.19)$$

Siendo  $C$ ,  $B$  y  $D$  matrices cuyos elementos son constantes, toda la dinámica del sistema (2.18) se encuentra en la Ec. (2.19), y los polos de esta matriz se obtienen al resolver la ecuación polinómica

$$\det(sI - A) = 0, \quad (2.20)$$

cuya raíces son los autovalores de  $A$ .

Por lo tanto, si los autovalores de la matriz  $A$  tienen parte real negativa, todas las funciones de transferencias  $G_{ij}(s)$ , de la Ec. (2.18) o de la Ec. (2.12) son estables.

### 2.1.5. Sistemas LTI Estrictamente Propios

Una función de transferencia  $G_{ij}(s)$  se denomina estrictamente propia, cuando el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, es decir, su número de ceros es menor que el número de polos.

Para este caso la función tiene cero(s) implícito(s) en  $s \rightarrow \infty$ , es decir,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_{ij}(s) = 0. \quad (2.21)$$

Por el contrario cuando la función no es estrictamente propia, es decir, el grado del polinomio del numerador y el grado del polinomio del denominador son iguales, se tiene

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_{ij}(s) = cte. \quad (2.22)$$

La mayoría de los procesos o sistemas físicos quedan representados de manera natural como filtros pasa banda o pasa bajos, y en ambos casos resulta

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_{ij}(\omega)| = 0, \quad (2.23)$$

es decir, la mayoría de los sistema físicos son estrictamente propios.

De manera equivalente en el modelo de variables de estado, para que un sistema sea estrictamente propio es necesario que la matriz  $D$  sea cero, de lo contrario el numerador y el denominador de alguna(s) de las funciones de transferencia serán del mismo orden, como se deduce de la siguiente ecuación:

$$G(s) = \frac{C \text{Adj}(sI - A) B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)}. \quad (2.24)$$

Por lo tanto, para la mayoría de los procesos o sistema físicos la matriz de transferencia  $G(s)$  resulta

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (2.25)$$

lo cual significa que cualquier entrada  $u_j(s)$ , pasa por la dinámica (los estados) del sistema antes de alcanzar cualquier salida  $y_i(s)$ .

### 2.1.6. Sistema Autónomo

Un sistema se denomina autónomo cuando no tiene ninguna entrada externa o exógena, es decir,  $u(t) = 0$ .

Por lo tanto, si su vector de salidas es distinto de cero solo puede deberse a la energía almacenada en su interior, es decir, el sistema se encuentra perturbado respecto de su posición de equilibrio en el instante inicial  $t = 0$ , esto es,  $x(0) \neq 0$ .

Para aplicar la definición de función (o matriz) de transferencia a un sistema autónomo, se recurre al uso de función generalizada  $\delta(t)$  (delta de Dirac).

Para ver esto, considérese el sistema de la Ecs. (2.10) con  $u(t) = 0$ , que a continuación se reescribe

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), & x_0 &= x(0), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

La solución del sistema autónomo, resulta:

$$y(t) = Ce^{At}x_0. \quad (2.27)$$

Considérese ahora, el sistema de la Ecs. (2.10) con condiciones iniciales nulas, es decir,  $x(0) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B u(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

La solución de este sistema, resulta<sup>8</sup>

$$y(t) = Ce^{At}B * u(t). \quad (2.29)$$

<sup>8</sup>Aquí el símbolo (\*) representa la operación convolución.

Si se piensa a la Ec. (2.28), como un sistema estrictamente propio cuya entrada es un vector  $u(t) = x_0 \delta(t)$ , y cuya matriz de entrada es la matriz identidad  $B = I$ , esto es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + I x_0 \delta(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

la solución (2.29), resulta

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At} I * x_0 \delta(t), \\ y(t) &= Ce^{At} x_0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

la cual coincide con la del sistema autónomo, Ec. (2.28).

Por lo tanto, la matriz de transferencia del sistema autónomo puede representarse como:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} I, \quad (2.32)$$

o simplemente

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}. \quad (2.33)$$

## 2.2. Criterio de Estabilidad según Lyapunov

En esta subsección se analiza la estabilidad de un sistema LTI SISO o MIMO de una manera alternativa al mero hecho de calcular directamente los autovalores de la matriz de estado  $A$ . En efecto, se utiliza el teorema de Lyapunov para determinar cuáles requisitos debe satisfacer un sistema LTI, modelado en el espacio de estado, de manera que esté garantizada su estabilidad asintótica.

Antes de analizar el teorema de Lyapunov para sistemas LTI, téngase en cuenta que el análisis de estabilidad en el modelo de representación por variables de estado se realiza en el dominio temporal y que el vector de estado  $x(t)$  del sistema, está asociado a aquellos elementos físicos capaces de almacenar algún tipo de energía. Ejemplos de variables de estado son:

- La tensión  $v_C(t)$  en los bornes de un capacitor cuya capacidad es  $C$ .

El capacitor almacena energía electrostática expresada mediante  $E(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t)$ , y su tasa de almacenamiento (o entrega) de energía, es decir, su potencia instantánea está dada por:  $\dot{E}(t) = \dot{v}_c(t) C v_c(t)$ .

- La corriente  $i_L(t)$  que circula a través un inductor cuya inductancia es  $L$ .

El inductor almacena energía magnética dada por  $E(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$ , y su tasa de almacenamiento (o entrega) de energía, es decir, su potencia instantánea está dada por:  $\dot{E}(t) = \dot{i}_L(t) L i_L(t)$ .

- La velocidad  $v(t)$  con la que se desplaza un cuerpo cuya masa es  $M$ .

El cuerpo en movimiento almacena energía cinética dada por

$E(t) = \frac{1}{2}Mv^2(t)$ , y su tasa de almacenamiento (o entrega) de energía, es decir, su potencia instantánea está dada por:  $\dot{E}(t) = \dot{v}(t)Mv(t)$ .

- El desplazamiento  $x_p(t)$  respecto de su posición de equilibrio en el que está comprimido o estirado un resorte cuya constante de elasticidad es  $K$ .

El resorte almacena a energía potencial dada por  $E(t) = \frac{1}{2}Kx_p^2(t)$ , y su tasa de almacenamiento (o entrega) de energía, es decir, su potencia instantánea está dada por:  $\dot{E}(t) = \dot{x}_p(t)Kx_p(t)$ , etc.

Todos estos elementos físicos no son disipativos, es decir, los intercambios energéticos que en ellos intervienen son reversibles.

En efecto, durante algún intervalo de tiempo estos elementos son capaces de almacenar energía comportándose como componentes pasivos, pudiendo posteriormente devolver la energía almacenada, comportándose como componentes activos.

Así por ejemplo, un sistema autónomo compuesto por una masa  $M$  y un resorte  $K$ , como el mostrado en la Fig. (2.1), pueden intercambiar una energía potencial inicial, dada por

$$E = \frac{1}{2}Kx_p^2(0), \quad (2.34)$$

en energía cinética y viceversa de manera indefinida, como se muestra en la Fig. (2.2) mientras no exista rozamiento o fricción.

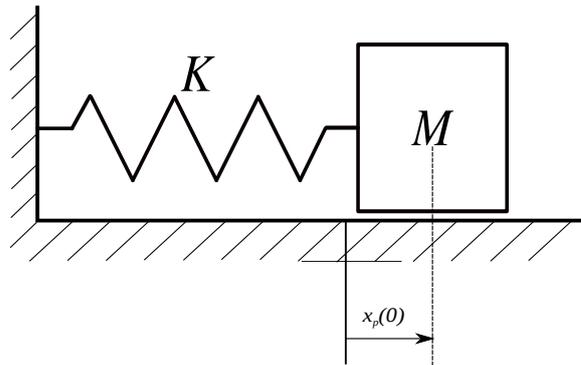


Figura 2.1: Sistema autónomo masa-resorte

Como no hay pérdida durante el intercambio energético, la energía total dentro del sistema permanece constante, esto es:

$$E(t) = \frac{1}{2}Kx_p^2(t) + \frac{1}{2}Mv^2(t) = Cte, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.35)$$

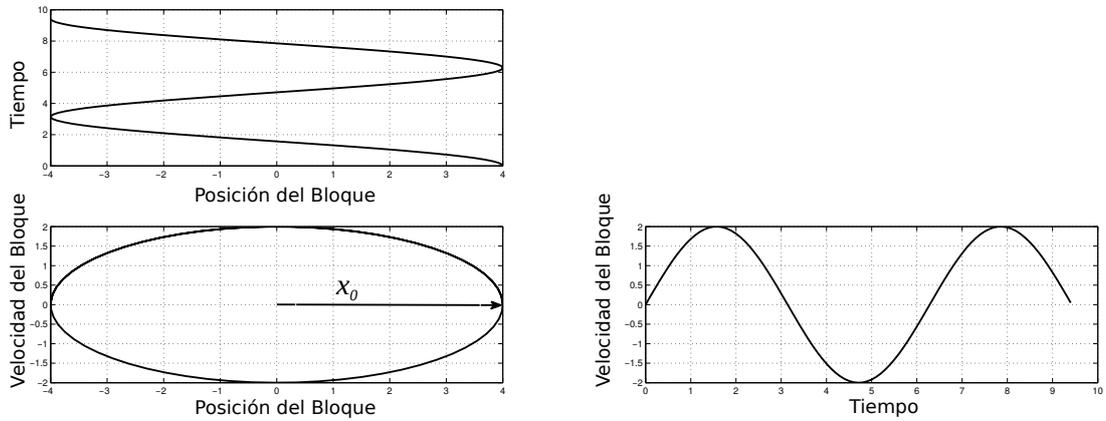


Figura 2.2: Evolución de los estados del Sistema masa-resorte

y por lo tanto, su derivada temporal en todo tiempo debe ser cero, esto es,

$$\dot{E}(t) = \dot{x}_p(t)Kx_p(t) + \dot{v}(t)Mv(t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.36)$$

Matricialmente ambas ecuaciones toman la forma:

$$E(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) & v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K/2 & 0 \\ 0 & M/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = Cte, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.37)$$

$$\dot{E}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_p(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

y en forma compacta estas ecuaciones se pueden reescribir como:

$$E(t) = x'(t)Px(t) = Cte, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.38)$$

$$\dot{E}(t) = \dot{x}Px(t) + x(t)P\dot{x}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

donde se han definido,  $P \triangleq \begin{pmatrix} K/2 & 0 \\ 0 & M/2 \end{pmatrix}$  y  $x(t) \triangleq \begin{pmatrix} x_p(t) & v(t) \end{pmatrix}'$ .

La matriz  $P$  no necesariamente debe ser diagonal<sup>9</sup> como lo es en este caso, pero si debe ser simétrica y positiva definida, simbólicamente  $P \succ 0$ , ya que la energía  $E(t)$  es una función escalar positiva, es decir  $E(t) > 0 \quad \forall t \geq 0$ .

Desde el punto de vista de la estabilidad, este es un sistema marginalmente estable ya que ante una entrada impulsiva, las variables de estado  $x_p(t)$  y  $v(t)$

<sup>9</sup>La diagonalidad de la matriz  $P$  genera una elipse en el espacio de estados cuyos ejes coinciden con los ejes cartesianos según se observa en la Fig(2.2).

oscilan sin amortiguarse, situación que correspondientemente se da cuando los polos del sistema están sobre el eje  $j\omega$ .

Por otro lado, si el sistema fuera asintóticamente estable las variables estados deben converger a cero a medida que  $t \rightarrow \infty$ . Esta situación implicaría la existencia de algún elemento disipativo que pierde la energía almacenada, como se observa en la Fig. (2.3).

En efecto, en los elementos disipativos, como ser el resistor en un circuito eléctrico o la fricción en un sistema mecánico, los procesos energéticos son irreversibles, es decir, la energía que reciben durante algún intervalo de tiempo es consumida o disipada en forma de calor<sup>10</sup>.

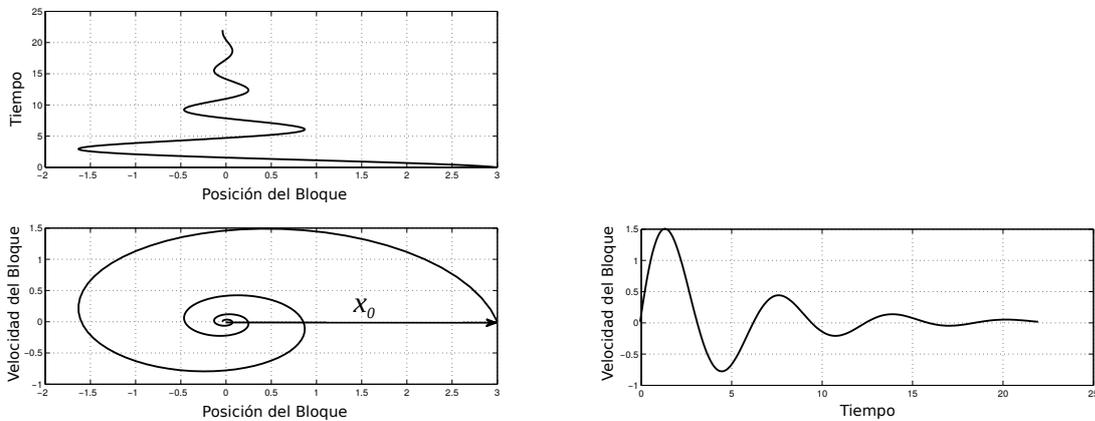


Figura 2.3: Evolución de los estados del Sistema masa-resorte con rozamiento

Si existe algún elemento disipativo en el sistema *masa-resorte* que se está considerando, la energía almacenada dentro del mismo dada por la Ec. (2.34), no permanece constante sino que se reduce conforme el tiempo aumenta, y como consecuencia de esto, su derivada temporal para todo tiempo debe ser negativa.

<sup>10</sup>Por ejemplo, la tasa con que un resistor con resistencia  $R$  disipa energía, toma la forma:

$$\dot{E}(t) = i_R^2(t)R,$$

mientras que la energía disipada por este componente en un tiempo  $t$ , tiene la siguiente expresión:

$$E(t) = R \int_0^t i_R^2(\alpha) d\alpha.$$

Es decir, la Ec. (2.38) se transforma en la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} E(t) &= x'(t)Px(t) > 0, \quad \forall t \geq 0, \\ \dot{E}(t) &= \dot{x}Px(t) + x(t)P\dot{x}(t) < 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por lo dicho, la ecuación anterior equivale a decir que luego de una perturbación de estados inicial, el sistema regresa asintóticamente a su posición de equilibrio, posición en la cual los estados  $x_p = 0$  y  $v = 0$ .

A continuación, el teorema de Lyapunov para sistemas LTI generaliza estos conceptos.

**Teorema 2.1.** *Sea el sistema autónomo*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.40)$$

con una condición inicial dada por  $x(0) = x_0$ .

La matriz de estado  $A$  es asintóticamente estable,  $\iff \exists$  una matriz  $P$  simétrica y positiva definida, tal que si se define con ella una función escalar

$$V[x(t)] \triangleq x(t)'Px(t) > 0, \quad (2.41)$$

su derivada temporal

$$\dot{V}[x(t)] < 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.42)$$

**Desarrollo del teorema**

Desarrollando la desigualdad (2.42),

$$\dot{V}[x(t)] = \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) < 0, \quad (2.43)$$

y reemplazando  $\dot{x}(t)$  por la ecuación de estado (2.40) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}[x(t)] &= [Ax(t)]'Px(t) + x(t)'PAx(t) < 0, \\ \dot{V}[x(t)] &= x(t)'A'Px(t) + x(t)'PAx(t) < 0, \\ \dot{V}[x(t)] &= x(t)'[A'P + PA]x(t) < 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Obsérvese que desde el punto de vista matemático, lo que exige el teorema de Lyapunov para garantizar la estabilidad asintótica del sistema (2.40), es que la matriz  $[A'P + PA]$  sea negativa definida, para toda matriz  $P$  simétrica y positiva definida.

Por lo tanto, si se elige cualquier matriz  $R_x$  simétrica y positiva definida, esto es:  $R_x = R'_x \succ 0$ <sup>[11]</sup>, se puede escribir la desigualdad anterior como una ecuación matricial algebraica que tiene a la matriz  $P$  como incógnita,

$$\begin{aligned} [A' P + P A] &= -R_x \prec 0, \\ A' P + P A + R_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dicha ecuación se llama ecuación de Lyapunov, y es un caso particular de la ecuación lineal matricial de Sylvester [Sánchez, 1992].

De este modo, es posible reformular el problema de estabilidad asintótica en el modelo de variables de estado como un *problema de factibilidad*, de la siguiente manera :

Encontrar  $P = P' \succ 0$ , tal que satisfaga:

$$\begin{aligned} A' P + P A + R_x &= 0, \\ \forall R_x = R'_x \succ 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Como se dijo, si la Ec. (2.46) puede resolverse con  $P$  positiva definida, entonces el sistema autónomo es asintóticamente estable<sup>[12]</sup>.

### Flexibilidad en la elección de $R_x$

Si  $\dot{V}(x) = -x'R_x x$  no se extingue a lo largo de cualquier trayectoria, es decir,  $\dot{V}(x) = 0$  sólo en  $x = 0$ , entonces la restricción  $R_x \succ 0$  en la Ec. (2.46) puede relajarse y solamente pedir que  $R_x$  sea *positiva semidefinida*, con lo cual dicha ecuación queda expresada como

$$\begin{aligned} A' P + P A + R_x &= 0, \\ \forall R_x = R'_x \succeq 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para demostrarlo, supóngase que  $R_x \succeq 0$ , entonces puede escribirse como  $R_x = T'T$ , donde  $T \in \mathbb{R}^{(p \times n)}$  [Rautenberg and Dátellis, 2004].

Siguiendo comentarios de [Ogata, 2009], dado que  $\dot{V}(x)$  se escribe como

$$\dot{V}(x) = -x'R_x x = -x'T'Tx, \quad (2.48)$$

luego, para  $\dot{V}(x) = 0$  significa que

$$Tx = 0. \quad (2.49)$$

<sup>11</sup>Note que la suma  $[A' P + P A]$  es simétrica ya que  $P$  es simétrica.

<sup>12</sup>Si el sistema es asintóticamente estable, la solución a este problema es única para cada elección de  $R_x \succ 0$ .

Al diferenciar la Ec. (2.49) respecto a  $t$ , se obtiene

$$T\dot{x} = TA x = 0, \quad (2.50)$$

diferenciando ahora la Ec. (2.50) respecto a  $t$ , produce

$$TA\dot{x} = TA^2 x = 0, \quad (2.51)$$

y repitiendo este procedimiento  $n - 1$  veces, se obtiene

$$TA^{n-1}x = 0. \quad (2.52)$$

Luego se puede escribir

$$\begin{pmatrix} T \\ TA \\ TA^2 \\ \dots \\ TA^{(n-1)} \end{pmatrix}^{((p \times n) \times n)} x = 0. \quad (2.53)$$

Una condición necesaria y suficiente para que  $x = 0$  sea la única solución de esta última ecuación, es que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} T \\ TA \\ TA^2 \\ \dots \\ TA^{(n-1)} \end{pmatrix}^{((p \times n) \times n)} = n. \quad (2.54)$$

donde  $n$  es la dimensión del espacio de estados.

Por lo tanto, si se satisface la Ec. (2.54),  $\dot{V}(x) = -xT'Tx$  se vuelve cero sólo en  $x = 0$  [Ogata, 2009]. De este modo,  $R_x$  puede ser elegida positiva semidefinida, para plantear la condición de estabilidad del sistema (2.40) expresado en la Ec. (2.47).

### 2.2.1. Interpretación Física del Teorema de Lyapunov

En esta subsección se muestra que si se elige  $R_x = C'C \succeq 0$  en la Ec. (2.47), la función de Lyapunov  $V[x(t)]$  definida en el teorema (2.1), representa la energía almacenada en el sistema en el tiempo  $t$ , disponible para ser disipada por la salida vectorial  $y(t) = Cx(t)$  en un intervalo de tiempo infinito.

Considérese el sistema (2.40) al que se le asigna una salida como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), & x_0 &= x(0), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Nótese en primer lugar, que según la Ec.(2.54), para que  $\dot{V}(x) < 0$ , debe cumplirse

$$\text{rango} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{(n-1)} \end{pmatrix}^{((p \times n) \times n)} = n, \quad (2.56)$$

es decir, como caso particular, para poder utilizar  $R_x = C'C \succeq 0$  es necesario que el sistema sea observable<sup>13</sup>. Además, para esta elección de  $R_x$ , la ecuación de Lyapunov resulta:

$$A'P + PA + C'C = 0, \quad (2.57)$$

y es fácil mostrar que la solución  $P$  de esta ecuación es el gramiano de observabilidad del sistema (2.55) [Colmenares and Tadeo, 2005], el cual resulta:

$$P = W_o = \int_0^\infty e^{A't} C' C e^{At} dt, \quad (2.58)$$

con lo que se ratifica que el sistema (2.55) debe ser observable.

Continuando con la Ec.(2.57), se puede escribir

$$\begin{aligned} A'P + PA &= -C'C, \\ x(t)' (A'P + PA) x(t) &= -x'(t) C' C x(t), \\ \dot{V}[x(t)] &= -y'(t)y(t), \end{aligned} \quad (2.59)$$

e integrando se obtiene

$$V[x(t)] = x(t)' P x(t) = - \int y'(t)y(t) dt. \quad (2.60)$$

Si la integración se realiza en un intervalo de tiempo infinito, se tiene

$$\begin{aligned} [x(t)' P x(t)]|_0^\infty &= - \int_0^\infty y'(t)y(t) dt, \\ x(\infty)' P x(\infty) - x(0)' P x(0) &= - \int_0^\infty y'(t)y(t) dt. \end{aligned} \quad (2.61)$$

<sup>13</sup>Note que la Ec. (2.56) es la matriz de observabilidad ([Ogata, 2009], [Rautenberg and Dáttellis, 2004], entre otros)

Asumiendo que el sistema es asintóticamente estable (de lo contrario no se hubiera podido hallar  $P = P' \succ 0$ ), resulta  $x(\infty)'Px(\infty) = 0$ , obteniéndose

$$x'(0)Px(0) = \int_0^{\infty} y'(t)y(t)dt = \|y\|_2^2. \quad (2.62)$$

Nótese que la salida  $y(t)$  del sistema (2.55), es

$$y(t) = Ce^{At}x_0,$$

por lo que su contenido de energía resulta

$$\|y\|_2^2 = \int_0^{\infty} x_0'e^{A't}C'Ce^{At}x_0 dt = x_0'Px_0,$$

donde la matriz  $P$ , como se dijo, resulta ser el gramiano de observabilidad.

Nótese también que siendo el sistema autónomo, la energía disipada por la salida  $y(t)$  sólo pudo provenir del propio sistema, de manera que el lado izquierdo de la Ec. (2.62) es la energía almacenada por los estados en el instante inicial de la evolución ( $t = 0$ ), que será disipada sobre  $y(t)$  en un intervalo de tiempo infinito.

Si la integración en la Ec. (2.62) se realiza sobre un intervalo de tiempo finito, esto es,  $t \in [0, t^*]$  se tiene,

$$x(t^*)'Px(t^*) - x(0)'Px(0) = - \int_0^{t^*} y'(t)y(t) dt,$$

$$V[x(t^*)] = x(0)' P x(0) - \int_0^{t^*} y'(t)y(t)dt > 0,$$

luego  $\forall t$ , se cumple que

$$V[x(t)] = x(0)' P x(0) - \int_0^t y'(\tau)y(\tau)d\tau > 0. \quad (2.63)$$

En esta ecuación se observa que la función de Lyapunov  $V[x(t)]$ , representa la energía almacenada en el sistema en el tiempo  $t$  que aún no ha sido disipada por la salida  $y(t)$  seleccionada, y por lo tanto  $V[x(t)]$  es un escalar positivo  $\forall t$ .

Mientras que su derivada

$$\dot{V}[x(t)] = -y'(t)y(t) < 0, \quad (2.64)$$

es un escalar negativo  $\forall t$ , ya que muestra como la energía almacenada en el sistema decrece conforme  $t$  aumenta.

**Ejemplo 2.1. Circuito RLC.**

Considérese el circuito de la Fig. (2.4), el mismo trata de un sistema autónomo con condiciones iniciales  $v_C(0)$  y  $i_L(0)$  distintas de cero, es decir, en el instante inicial hay energía almacenada tanto en el capacitor como en el inductor.

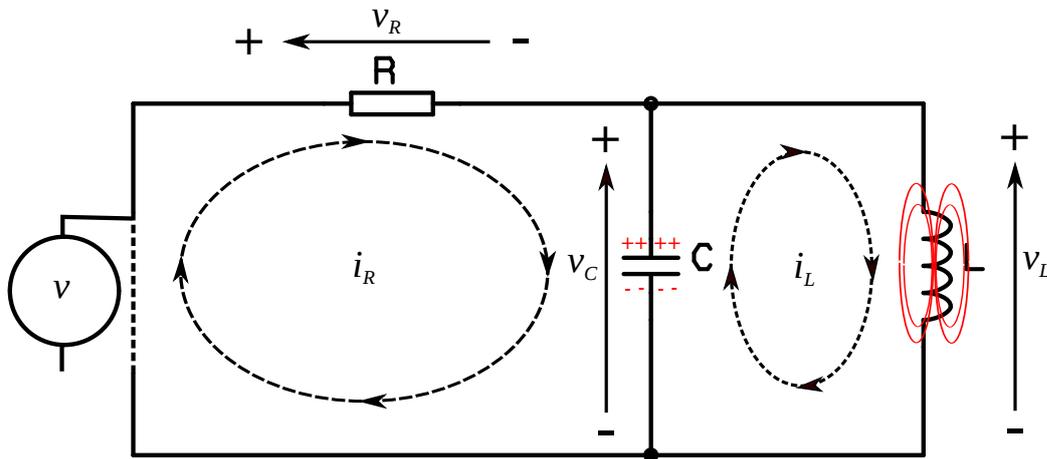


Figura 2.4: Circuito RLC.

**Balace de energía**

Realizando un balance de energía, se tiene

$$\underbrace{C \dot{v}_C v_C}_{i_C} + \underbrace{L \dot{i}_L i_L}_{v_L} + \underbrace{R i_R i_R}_{v_R} = 0, \quad (2.65)$$

por lo que es posible escribir

$$C v_C \dot{v}_C + L i_L \dot{i}_L = -R i_R^2 < 0, \text{ o bien,} \quad (2.66)$$

$$C v_C \dot{v}_C + L i_L \dot{i}_L = -\frac{1}{R} v_C^2 < 0.$$

Dado que el sistema tiene un solo resistor, toda la energía almacenada en el sistema se disipará sobre él.

El término de la izquierda de la Ec. (2.66) representa el ritmo con que el inductor y el capacitor ceden su energía, mientras que el término  $R i_R^2$  o  $\frac{v_C^2}{R}$ , representa el ritmo con el que el resistor la disipa.

Como este último es positivo ya que el resistor siempre se comporta como un elemento pasivo, necesariamente se cumple que:

$$C v_C \dot{v}_C + L i_L \dot{i}_L < 0.$$

Escribiendo la Ec.(2.66) en forma matricial, se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_L \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_c \\ i_L \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_L \end{pmatrix} < 0, \quad (2.67)$$

el lado izquierdo de la Ec.(2.67), puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_c \\ i_L \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} < 0, \quad (2.68)$$

y definiendo

$$P \triangleq \begin{pmatrix} \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} \end{pmatrix} \succ 0, \quad (2.69)$$

toma la forma

$$\dot{x}' P x + x' P \dot{x} < 0. \quad (2.70)$$

Por otro lado, definiendo como matriz de salida del sistema al vector fila<sup>14</sup>

$$C \triangleq \left( \frac{1}{\sqrt{R}} \quad 0 \right), \quad (2.71)$$

el lado derecho de la Ec.(2.67) toma la forma

$$- \begin{pmatrix} v_c \\ i_L \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_L \end{pmatrix} = -x' C' C x < 0, \quad \forall t, \quad (2.72)$$

y siendo  $Cx(t) = y(t)$  la salida del sistema, el balance de energía de la Ec.(2.66) puede representarse como

$$\dot{x}' P x + x' P \dot{x} = -y'y < 0, \quad \forall t. \quad (2.73)$$

Integrando las Ecs.(2.66) y (2.73) en un intervalo de tiempo  $t$  y reordenando los términos, se tiene

$$\left[ \frac{1}{2} C v_C^2(t) + \frac{1}{2} L i_L^2(t) \right] = \left[ \frac{1}{2} C v_C^2(0) + \frac{1}{2} L i_L^2(0) \right] - \int_0^t \frac{1}{R} v_C(t)^2 dt, \quad (2.74)$$

$$x(t)' P x(t) = x(0)' P x(0) - \int_0^t y(t)' y(t) dt.$$

Comparando las Ecs(2.74) se observa que

$$V[x(t)] \triangleq x(t)' P x(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) + \frac{1}{2} L i_L^2(t) > 0, \quad \forall t, \quad (2.75)$$

<sup>14</sup>Aquí la matriz de salida del sistema y el parámetro capacidad del circuito tienen la misma denominación, sin embargo, no se produce ninguna ambigüedad en su interpretación.

es la energía disponible dentro del sistema que aún no ha sido disipada por la salida  $y(t)$ .

Obsérvese que si en el sistema no existen elementos disipativos  $R = 0$ , el balance de energía resulta

$$C v_C \dot{v}_C + L i_L \dot{i}_L = 0, \quad (2.76)$$

y en general

$$\dot{V}(x) = \dot{x}' P x + x' P \dot{x} = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.77)$$

La ecuación anterior conduce a que

$$V(x(t)) = V(x(0)), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.78)$$

es decir, la energía almacenada en el sistema permanece dentro del mismo sin disiparse, oscilando entre energía potencial y electrocinética de manera permanente, obviamente se trata de un sistema con estabilidad marginal.

En la Fig. (2.5) (arriba), se representa la evolución de los estados y la evolución de la energía total del sistema en función del tiempo. Mientras que en la misma figura (abajo), se muestra la evolución de la energía total del sistema en el espacio de estados.

En ambas figuras se destacan con el mismo color los niveles de energía constante y las curvas de nivel sobre la función de Lyapunov.

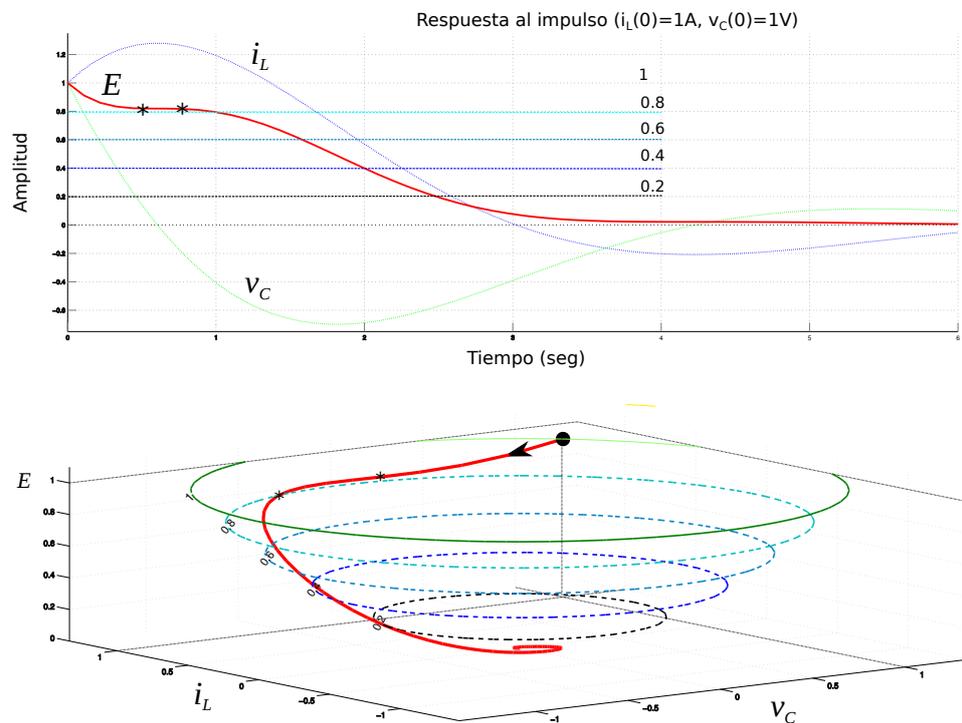


Figura 2.5: Evolución de los estados y energía almacenada del circuito RLC.

*También se delimita con dos marcas (\*) un segmento de tiempo donde la energía decrece muy lentamente, esta situación se corresponde con un cambio en el sentido de la corriente sobre el resistor, teniendo la misma en ese momento, un valor muy próximo a cero.*

*Obsérvese que esta situación se corresponde con una evolución casi tangencial de la energía sobre la curva de nivel.*

El próximo ejemplo refiere a un circuito  $RLC$  con dos elementos disipativos. Se utiliza el teorema de Lyapunov para determinar cuánta energía almacenada en el sistema se disipa sobre cada uno de ellos.

*Ejemplo 2.2. Considérese el circuito de la Fig(2.6), se desea saber qué parte de la energía almacenada en el mismo será disipada sobre  $R_1$ , y qué parte sobre  $R_2$ .*

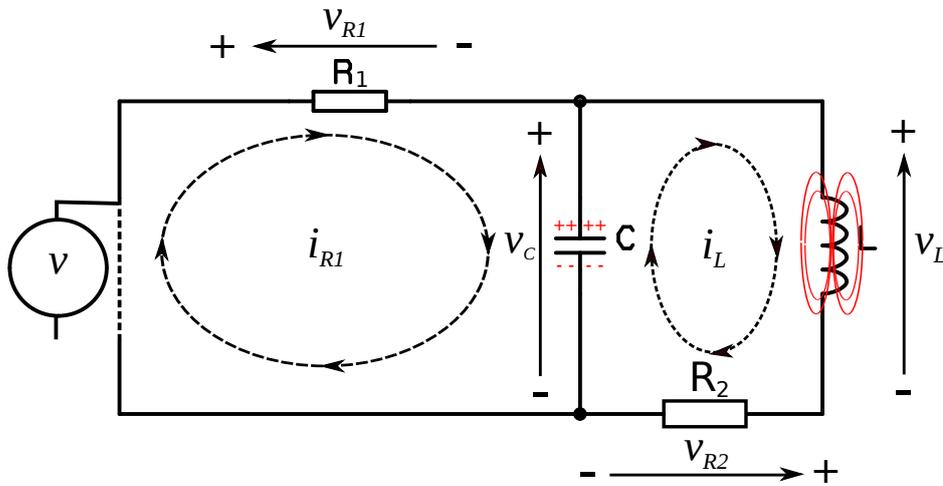


Figura 2.6: Circuito RLC.

Aplicando las leyes de Kirchhoff, el balance de energía resulta

$$C v_C \dot{v}_C + L i_L \dot{i}_L = -\left(\frac{1}{R_1} v_C^2 + R_2 i_L^2\right) < 0. \quad (2.79)$$

Como se ha visto en el ejemplo anterior, el lado izquierdo de estas últimas ecuaciones, representan el ritmo con que el sistema cede su energía almacenada, y el lado derecho el ritmo con el que el sistema la disipa al medio ambiente en forma de calor.

Reescribiendo la Ec. (2.79) en forma matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} < 0. \quad (2.80)$$

Se elegirán tres variables de salidas

$$y_1(t) = C_1 x(t), \quad y_2(t) = C_2 x(t), \quad y(t) = C x(t), \quad (2.81)$$

para las cuales se han definido las siguientes matrices:

$$C_1 \triangleq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{R_1}} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{R_2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Las potencias disipadas sobre cada salida, resultan

$$\begin{aligned} y_1' y_1 &= x' C_1' C_1 x = \frac{1}{R_1} v_C^2, \\ y_2' y_2 &= x' C_2' C_2 x = R_2 i_L^2, \\ y' y &= x' C' C x = \frac{1}{R_1} v_C^2 + R_2 i_L^2, \end{aligned} \quad (2.83)$$

y sobre cada una de ellas se pueden formular las siguientes funciones de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V_1[x(t)] &= x(t)'P_1x(t), \\ V_2[x(t)] &= x(t)'P_2x(t), \\ V[x(t)] &= x(t)'Px(t), \end{aligned} \quad (2.84)$$

siendo las matrices  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P$ , las soluciones respectivas de las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\begin{aligned} A'P_1 + P_1A + C_1'C_1 &= 0, \\ A'P_2 + P_2A + C_2'C_2 &= 0, \\ A'P + PA + C'C &= 0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Premultiplicando y posmultiplicando las mismas por  $x'$  y  $x$  respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}'P_1x + x'P_1\dot{x} &= -x'C_1'C_1x < 0, \\ \dot{x}'P_2x + x'P_2\dot{x} &= -x'C_2'C_2x < 0, \\ \dot{x}'Px + x'P\dot{x} &= -x'C'Cx < 0, \end{aligned} \quad (2.86)$$

e integrando en un intervalo de tiempo infinito, se tiene las energías disipadas por cada salida como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} V_1[x(0)] &= x(0)'P_1x(0) = \int_0^\infty xC_1'C_1x \, dt = \int_0^\infty \frac{1}{R_1} v_C^2 \, dt, \\ V_2[x(0)] &= x(0)'P_2x(0) = \int_0^\infty xC_2'C_2x \, dt = \int_0^\infty R_2 i_L^2 \, dt, \\ V[x(0)] &= x(0)'Px(0) = \int_0^\infty xC'Cx \, dt = \int_0^\infty \left( \frac{1}{R_1} v_C^2 + R_2 i_L^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (2.87)$$

A continuación, se cuantifica este ejemplo con todos los parámetros del circuito y condiciones iniciales valuados en una unidad.

La ecuación de estados para el sistema autónomo es

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_C(t) \\ \dot{i}_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \frac{-1}{R_1C} \right) & \left( \frac{-1}{C} \right) \\ \left( \frac{1}{L} \right) & \left( \frac{-R_2}{L} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_C(0) \\ i_L(0) \end{pmatrix} \delta(t), \quad (2.88)$$

y con  $R_1 = R_2 = C = L = 1$ , la matriz  $A$  resulta

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

Las soluciones para las tres ecuaciones de Lyapunov, Ecs. 2.87 son

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,375 & -0,125 \\ -0,125 & 0,125 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 \\ 0,125 & 0,375 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

y las energías disponibles para cada salida en el instante  $t$ , vienen dadas por

$$\begin{aligned} V_1[x(t)] &= 0,375 v_C(t)^2 - 0,25 v_C(t) i_L(t) + 0,125 i_L(t)^2, \\ V_2[x(t)] &= 0,125 v_C(t)^2 + 0,25 v_C(t) i_L(t) + 0,375 i_L(t)^2, \\ V[x(t)] &= 0,5 v_C(t)^2 + 0,5 i_L(t)^2. \end{aligned} \quad (2.91)$$

cuyos valores en el instante inicial, son

$$\begin{aligned} V_1[x(0)] &= 0,375 - 0,25 + 0,125 = 0,25, \\ V_2[x(0)] &= 0,125 + 0,25 + 0,375 = 0,75, \\ V[x(0)] &= 0,5 + 0,5 = 1. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Las siguientes figuras muestran lo aquí expuesto.

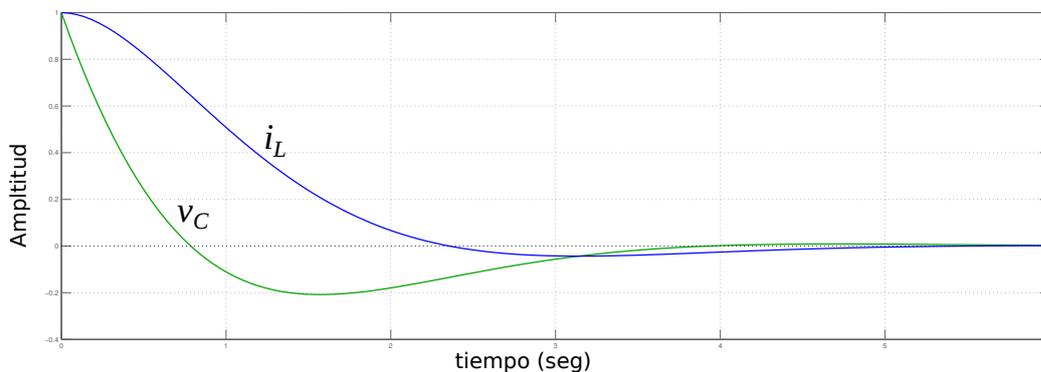


Figura 2.7: Evolución de los estados

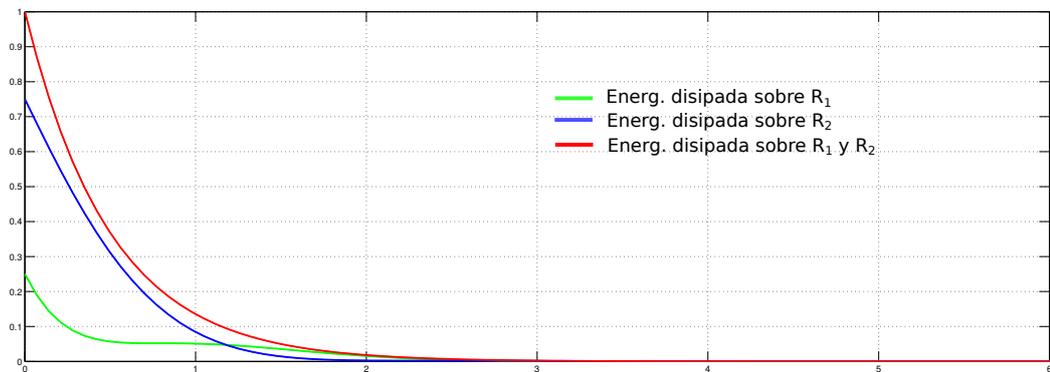


Figura 2.8: Energía disipada por cada salida en función del tiempo

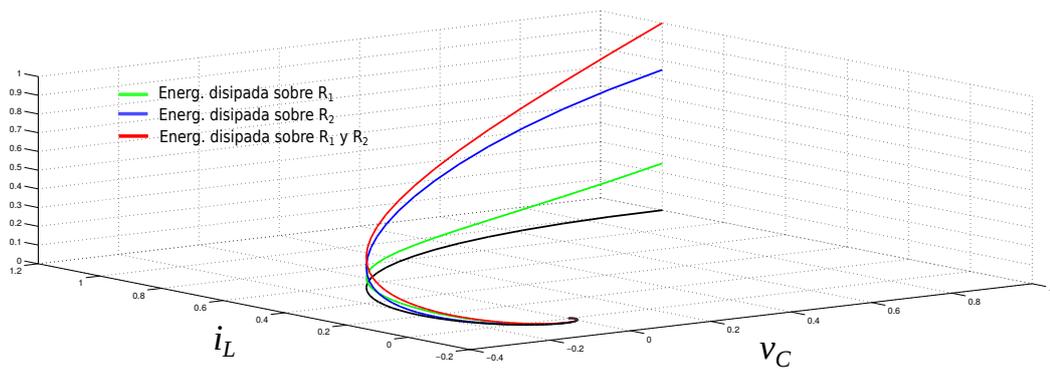


Figura 2.9: Energía disipada por cada salida en el espacio de estados.

De este ejemplo se puede concluir, que en un sistema autónomo asintóticamente estable, con una matriz de estado  $A$ , condiciones iniciales  $x(0)$ , y alguna salida dada  $y_k = C_k x$ , la función

$$V_k[x(t)] = x'(t)P_k x(t) = x'(0)P_k x(0) - \int_0^t y_k(t)' y_k(t) dt \quad (2.93)$$

donde  $P_k$  satisface

$$A'P_k + P_k A = C_k' C_k,$$

representa la energía almacenada en el sistema en el tiempo  $t$ , disponible para ser disipada por la salida  $y_k(t)$  en el intervalo  $(t, \infty)$ .

### 2.2.2. Interpretación gráfica del Teorema de Lyapunov

La función de Lyapunov para sistemas LTI, definida por la Ec.(2.41) es una forma cuadrática, es decir, un polinomio de segundo grado homogéneo de  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Por definición, la función de Lyapunov debe ser una función escalar positiva, lo cuál es equivalente a pedir que la matriz  $P$  sea una matriz positiva definida, es decir, los autovalores de la matriz  $P$  son reales y positivos, como se muestra a continuación [Rautenberg and Dátellis, 2004].

La matriz  $P$  es una matriz simétrica y real, por lo tanto puede diagonalizarse ortonormalmente, es decir, existe una matriz ortonormal  $T$ <sup>15</sup>, tal que,

$$TPT' = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

donde los  $\lambda_i$  son los autovalores de  $P$ , siendo  $\lambda_i \in \mathfrak{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Reescribiendo la Ec.(2.41) como

$$V(x) = x'Px = x'T'\Lambda Tx, \quad (2.95)$$

y definiendo

$$v \triangleq Tx, \quad (2.96)$$

se tiene

$$V(x) = v'\Lambda v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2, \quad (2.97)$$

$$\therefore \text{si } \lambda_i > 0 \forall i, \Rightarrow V(x) > 0.$$

Por ser  $T$  una matriz ortonormal el vector  $v$  es solo una rotación del vector  $x$ , y por lo tanto la transformación preserva su módulo, simplemente se trata de un cambio de base en el sistema de coordenadas.

Las curvas o superficies de nivel ( $V(x(t)) = cte$ ) de este tipo de funciones son elipsoide de revolución en el espacio  $\mathfrak{R}^n$ , y con el cambio de base mencionado sus eje principales tienen la dirección de los autovectores de  $P$  [Hagan et al., 2000].

En la Fig.(2.10) se grafica  $V(x(t))$  para  $n = 2$ , sus curvas de nivel para distintos valores de  $V(x(t)) > 0$ , y su gradiente  $\nabla V(x(t))$  que como se sabe y según se observa es siempre perpendicular a estas.

<sup>15</sup>Una matriz ortonormal tiene las siguientes propiedades:  $T' = T^{-1}$ , sus columnas y sus filas forman un conjunto ortonormal,  $|\det(T)| = 1$ , sus autovalores tienen módulo 1

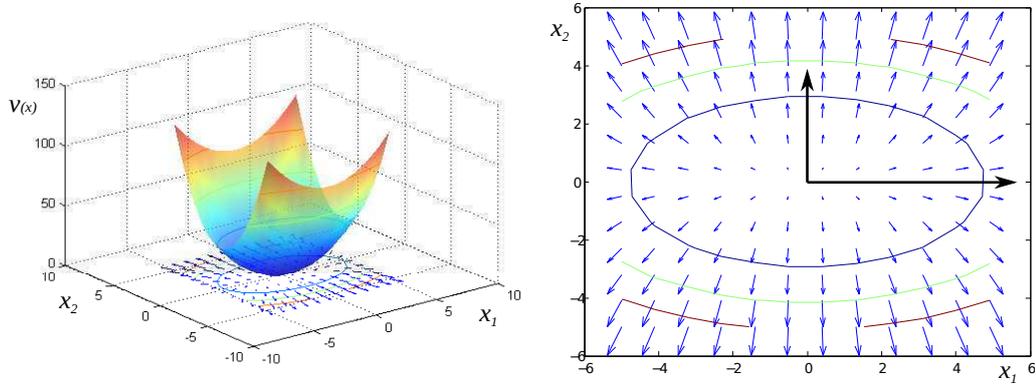


Figura 2.10: Ejemplo de función de Lyapunov para  $V(x) = x'Px$  con  $P = \text{diag}(1,5; 4)$ .

Si siguiendo el análisis con  $n = 2$ , la condición  $\dot{V}(x(t)) < 0, \forall t$  implica:

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} < 0,$$

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) < 0,$$

$$\dot{V}(x(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} < 0,$$

$$\dot{V}(x(t)) = \nabla V(x(t))' \dot{x}(t) = \dot{x}(t)' \nabla V(x(t)) < 0, \quad \forall t. \quad (2.98)$$

Por lo tanto, para que el sistema sea asintóticamente estable, el producto interno entre el gradiente de  $V(x)$  y el vector tangente a la evolución de los estados  $\dot{x}(t)$ , deben formar un ángulo obtuso (mayor a  $90^\circ$ ) para todo instante de tiempo, como se observa en la Fig. (2.11).

Observe que si

$$\dot{V}(x(t)) = \nabla V(x(t))' \dot{x}(t) = 0, \quad \forall t, \quad (2.99)$$

significa que el vector gradiente  $\nabla V(x(t))$  es perpendicular (en todo tiempo) a la evolución del sistema, lo que implica que dicha evolución se desarrolla sobre una curva de nivel (elipse), la cual representa un valor de energía constante.

Siendo que la energía no se disipa (solo cambia su naturaleza entre potencial y cinética), es claro que la dinámica del sistema no convege a  $x(\infty) = 0$ , pero tampoco diverge, se trata de un sistema marginalmente estable.

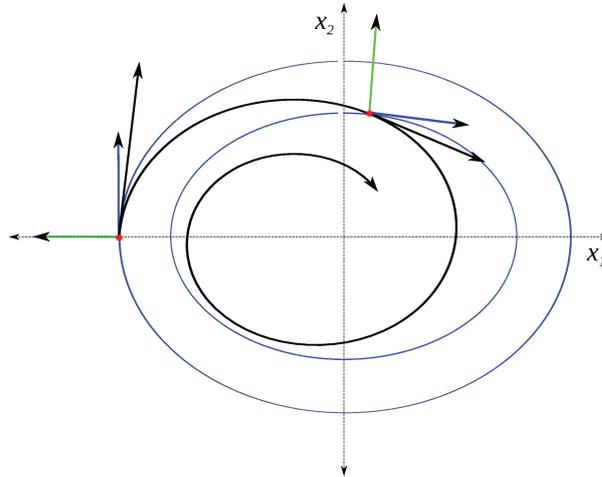


Figura 2.11: Evolución de los estados y curvas de energía constante

## 2.3. Regulador Óptimo LQR

### 2.3.1. Sistema LTI no autónomo

Considérese el siguiente sistema LTI de orden  $n$ ,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t), & x(0) &= x_0 \neq 0, \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{2.100}$$

Aquí  $u(t)$  es una señal vectorial exógena de energía finita<sup>16</sup>, que ingresa al sistema a través de la matriz de entrada  $B_2$ , e  $y(t)$  es la señal vectorial de salida cuyos elementos resultan de la combinación lineal de los estados con cada fila de la matriz de salida  $C$ <sup>17</sup>.

Como se puede observar en la Fig. (2.12), este sistema es excitado por una combinación lineal de dos entradas vectoriales, una del tipo impulsiva debido a las condiciones iniciales, mientras que la otra es la entrada externa mencionada.

Interesa determinar cual es la forma de esta señal  $u(t)$  y cual es su cota mínima de energía tal que haya garantía de que el sistema al cual excita sea estable, aún cuando el sistema autónomo no lo sea.

<sup>16</sup>El hecho de que  $u(t)$  sea una señal de energía finita, o de cuadrado integrable, significa que  $u \in \mathbb{L}_2^n[0, \infty)$ .

<sup>17</sup>Sin pérdida de generalidad se asumirá que el sistema es SISO, es decir, las variables  $u(t)$  e  $y(t)$  son señales escalares, y por lo tanto, las matrices  $B_2$  y  $C$  son vectores columnas y fila respectivamente.

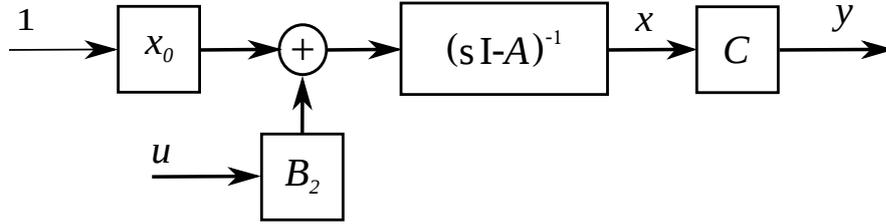


Figura 2.12: Diagrama en bloque del sistema con dos entradas  $x_0\delta(t)$  y  $u(t)$ .

Como ya se ha visto, la garantía de estabilidad del sistema de la Ec. (2.100), está dada por la existencia de una función de Lyapunov,

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t) > 0, \text{ tal que } \dot{V}(x(t)) = \nabla V(x(t))' \dot{x}(t) < 0, \quad \forall t,$$

y su gradiente, el cual resulta

$$\nabla V(x(t)) = 2Px(t),$$

depende tanto de los estados como de la matriz  $P$ , cuyo valor será necesario encontrar para poder determinar la señal de control  $u(t)$ .

Para trabajar con mayor claridad se redefine a este gradiente como<sup>18</sup>:

$$\lambda \triangleq 2Px, \quad (2.101)$$

por lo tanto, es posible reescribir la condición de estabilidad del sistema del siguiente modo

$$\lambda' \dot{x} + x R_x x = 0. \quad (2.102)$$

Dado que el contenido de energía de la acción de control está definido como

$$E_u = \|u\|_2^2 \triangleq \int_0^\infty u(t)'u(t)dt, \quad (2.103)$$

luego, para determinar  $u(t)$  se propone encontrar una acción de control de mínima energía que garantice la estabilidad del sistema realimentado, es decir, se propone resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathbb{L}_2} \{f(u) = u'u\}, \\ & \text{s.a. : } \lambda' \dot{x} + x' R_x x = 0, \end{aligned} \quad (2.104)$$

donde  $\lambda$ ,  $\dot{x}$ , y  $R_x$  fueron definidos previamente al comienzo de esta sección.

<sup>18</sup>Para simplificar la notación, en adelante se omite las dependencias de las variables

Existiendo solamente una restricción de igualdad, es posible resolver el problema anterior como un problema sin restricciones minimizando la función Lagrangeana, la que resulta<sup>19</sup>

$$L(u, x) \triangleq u' u + \{\lambda' \dot{x} + x' R_x x\} \geq 0, \quad (2.105)$$

$$L(u, x) = u' u + \lambda' (Ax + B_2 u) + x' R_x x \geq 0.$$

Para encontrar un mínimo de esta función respecto de  $u$  se busca en primer lugar un punto estacionario, para lo cual se deriva  $L(u, x)$  respecto a  $u$  y se iguala a cero, obteniéndose:

$$\frac{\partial L(u, x)}{\partial u} = 2u^* + B_2' \lambda = 0,$$

resultando

$$u^* = -B_2' \frac{\lambda}{2} = -B_2' P x. \quad (2.106)$$

La Ec.(2.106) muestra que la *forma* de la señal  $u(t)$  buscada, se obtiene realizando una realimentación lineal de estados, cuya ganancia de realimentación  $K$  resulta,  $K = -B_2' P$  y en la Fig.(2.13) se representa esta situación.

Es claro que al ser el sistema estable, la señal  $u^*(t) = Kx(t)$  resulta ser una señal de energía finita. Sin embargo aún no hay garantías de que  $u^*$  minimice la Ec.(2.105), ya que se desconoce el valor de la matriz  $P$ , solo se sabe que debe ser positiva definida.

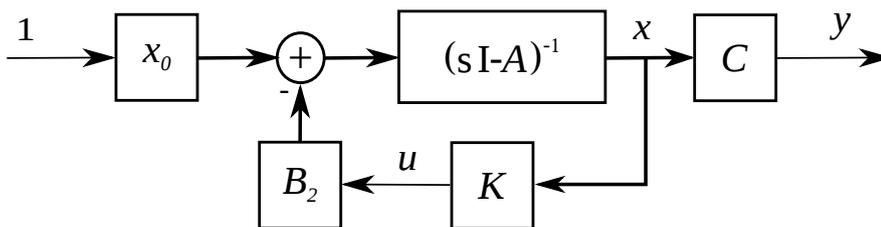


Figura 2.13: Sistema LTI SISO con realimentación de estados.

Siendo que  $u^*$  depende linealmente de  $x$ , se minimizará la función Lagrangeana respecto de esta variable, para lo cual se busca en primer lugar obtener un punto estacionario.

<sup>19</sup>Nótese que la expresión entre llaves es cero ya que es una restricción de igualdad, mientras que  $u'(t)u(t) = |u(t)|^2 \geq 0$ .

Al derivar  $L(u, x)$  respecto a  $x$  e igualar a cero se tiene

$$\frac{\partial L(u, x)}{\partial x} = 2R_x x + \lambda' \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda'}{\partial x} \dot{x} = 0. \quad (2.107)$$

Siendo

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial x} \dot{x} = 2P \dot{x} = \dot{\lambda}, \quad (2.108)$$

se obtiene

$$2R_x x^* + A' \lambda + \dot{\lambda} = 0. \quad (2.109)$$

A partir de la Ec. (2.109) y teniendo en cuenta la ecuación de estados (2.100) evaluada en  $(u^*$  y  $x^*)$ , se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{x}^* = A x^* - B_2 B_2' \frac{\lambda}{2}, \quad (2.110)$$

$$-\frac{\dot{\lambda}}{2} = R_x x^* + A' \frac{\lambda}{2}. \quad (2.111)$$

Utilizando las Ecs. (2.101) y (2.108) se reescriben las ecuaciones anteriores en forma matricial<sup>20</sup> del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} I \\ -P \end{pmatrix} \dot{x}^* = \begin{pmatrix} A & -B_2 B_2' \\ R_x & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} x^*, \quad (2.113)$$

premultiplicando ambos miembros de la Ec. (2.113) por la matriz  $(P \ I)$ , se anula el miembro de la izquierda, resultando:

$$0 = (P \ I) \begin{pmatrix} A & -B_2 B_2' \\ R_x & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} x^* \quad (2.114)$$

por lo que  $\forall x^* \neq 0$ , se cumple

$$PA - PB_2' B_2 P + R_x + A' P = \mathbf{0} \quad (2.115)$$

donde, a esta igualdad matricial se la conoce como Ecuación Algebraica de Riccati (ARE), y tiene como única incognita a la matriz  $P$ <sup>21</sup>.

<sup>20</sup>La matriz:

$$H \triangleq \begin{pmatrix} A & -B_2 B_2' \\ R_x & A' \end{pmatrix}, \quad (2.112)$$

recibe el nombre de Matriz Hamiltoniana del sistema Ec. (2.100).

<sup>21</sup>Es importante destacar que la Ec. (2.115) es cuadrática en la variable matricial  $P$ , es decir, tiene solución para  $P \succ 0$  y  $P \prec 0$ , para mayor claridad obsérvese el caso escalar:

$$b_2^2 p^2 - 2ap - r_x = 0,$$

$$p_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{(2a)^2 + 4b_2^2 r_x}}{2b_2^2}.$$

El punto  $(x^*, u^*)$  obtenido es un punto estacionario de la función Lagrangeana, a continuación se verificará si dicho punto minimiza  $L(u, x)$ .

Si se satisface la ecuación matricial (2.115), se puede escribir

$$x'^*(A'P + PA + R_x - PB_2B_2'P)x^* = 0,$$

$$x'^*(A'P + PA + R_x)x^* - x'^*(PB_2B_2'P)x^* = 0,$$

$$x'^*(A'P + PA + R_x)x^* - u'^*u^* = 0,$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} u'^*u^* &= x'^*(A'P + PA + R_x)x^* \\ &= 2x'^*PAx^* + x'^*R_x x^*, \end{aligned}$$

por lo que es posible escribir

$$u'^*u^* = \lambda'Ax + x'^*R_x x^*. \quad (2.116)$$

Retomando la Ec. (2.105) y reemplazando en ella por la Ec. (2.101), la función Lagrangeana resulta

$$L(u, x) = u' u + [\lambda' Ax + x' R_x x] + \lambda' B_2 u \geq 0, \quad (2.117)$$

$$L(u, x^*) = u' u + [\lambda' Ax^* + x'^* R_x x^*] + \lambda' B_2 u \geq 0.$$

Reemplazando el corchete de la Ec. (2.117) por la Ec. (2.116) y teniendo en cuenta la Ec. (2.106), se tiene

$$\begin{aligned} L(u, x^*) &= u' u + u'^*u^* - 2u'^* u \geq 0, \\ &= (u - u^*)'(u - u^*) \geq 0, \\ &= |u - u^*|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.118)$$

Nótese que, para  $u = u^*$  de la ecuación anterior resulta,  $L(u^*, x^*) = 0$  y por tanto el par  $(u^*, x^*)$  es el óptimo, escrito ahora como  $(u_{\text{ópt}}, x_{\text{ópt}})$ .

En consecuencia, la realimentación lineal de estados:  $u(t) = Kx(t)$ , con  $K = -B_2'P$ , siendo  $P \succ 0$  solución de la ecuación matricial de Riccati:

$$PA - PB_2B_2'P + R_x + A'P = \mathbf{0},$$

es la acción de control de mínima energía, que garantiza que el sistema perturbado (2.100) tienda a su posición de equilibrio estable en un intervalo de tiempo infinito.

Cabe aclarar que  $u_{\acute{o}pt}(t)$  minimiza el costo cuadrático, el cual se define como

$$J \triangleq \int_0^{\infty} [x(t)' R_x x(t) + u(t)' u(t)] dt. \quad (2.119)$$

En efecto, retomando la función Lagrangeana

$$L[u(t), x(t)] = \dot{V}[x(t)] + u(t)' u(t) + x(t)' R_x x(t) \geq 0, \quad (2.120)$$

y despejando

$$u(t)' u(t) + x(t)' R_x x(t) \geq -\dot{V}[x(t)] > 0. \quad (2.121)$$

Se puede notar que  $u_{\acute{o}pt}(t)$  minimiza el lado izquierdo de la Ec.(2.121)

$$u_{\acute{o}pt}(t)' u_{\acute{o}pt}(t) + x(t)' R_x x(t) = -\dot{V}[x(t)] > 0, \quad (2.122)$$

por lo tanto minimiza el funcional Ec.(2.119), y su valor mínimo es dado por<sup>22</sup>

$$J_{min} = x_0^T P x_0, \quad (2.123)$$

con  $P$  solución de E.(2.115).

Considérese además, que eligiendo  $R_x = C^T C$ , al minimizar el funcional

$$J = \int_0^{\infty} [y(t)' y(t) + u(t)' u(t)] dt, \quad (2.124)$$

se minimiza en forma conjunta la suma de las energías disipadas por la señal de salida y la señal de control,

$$J = \|y\|_2^2 + \|u\|_2^2. \quad (2.125)$$

Es decir, esta acción de control resuelve en forma óptima el compromiso entre la velocidad de respuesta y la energía de control.

La solución a dicho compromiso se debe a que cuanto mayor sea la energía de la señal de control el sistema responderá más rápidamente, pero mayores serán los sobrevalores o sobrepicos de la respuesta, y mayor será el costo de la señal manipulada, produciendo en la mayoría de los casos saturaciones o variables fuera de sus cotas [Sánchez, 1992].

El planteo LQR se resume a continuación:

<sup>22</sup>Lo cual implica que  $u_{\acute{o}pt}$  minimiza la traza de  $P$ , esto se puede ver si se diagonaliza la matriz  $P$  mediante una transformación ortonormal como se hizo en la Ec.(2.41) de la sección (2.2.2).

1. Dadas  $A, B_2, C$  resolver la ARE para encontrar la matriz  $P \succ 0$ ,

$$A^T P + PA + C^T C - PB_2 B_2' P = 0.$$

2. Entonces, la acción de control lineal  $u(t) = Kx(t)$ , con  $K = -B_2' P$ , estabiliza al sistema autónomo realimentado cuya matriz de estados resulta:  $A_{cl} = A + B_2 K$ , y esta estabilización la realiza minimizando la función de costo cuadrático,

$$J = \int_0^{\infty} [y(t)'y(t) + u(t)'u(t)]dt.$$

En un formato más genérico y para agregar algún grado de libertad a diseño del regulador, se expresa el funcional a minimizar del siguiente modo:

$$J = \int_0^{\infty} [x(t)'R_x x(t) + u(t)'R_u u(t)]dt, \quad (2.126)$$

con la condición de que  $R_u = R_u' \succ 0$  y  $R_x = R_x' \succeq 0$ . En este caso y siguiendo el mismo razonamiento, la ecuación de Riccati y la ganancia de realimentación óptima quedan expresadas como:

$$A^T P + PA + R_x - PB_2 R_u^{-1} B_2' P = 0, \quad (2.127)$$

$$K_{opt} = R_u^{-1} B_2' P. \quad (2.128)$$

*Ejemplo 2.3. Problema de Control Óptimo, para un sistema marginalmente estable de segundo orden.*

*Considérese el sistema masa-resorte de la Fig. (2.14). El resorte tiene una constante elástica  $k$ , y el bloque unido a éste tiene una masa  $m$ .*

*Se asume que inicialmente dicho bloque está inmóvil pero no en reposo, ya que el resorte está estirado almacenando energía potencial, es decir, el bloque está desplazado respecto de su posición de equilibrio un valor  $x_0$ .*

*Se asume además, que la superficie donde está apoyado el bloque no tiene rozamiento.*

*La ecuación diferencial que modela el comportamiento dinámico del sistema, y sus estados iniciales son:*

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + kx(t) &= 0, \\ x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.129)$$

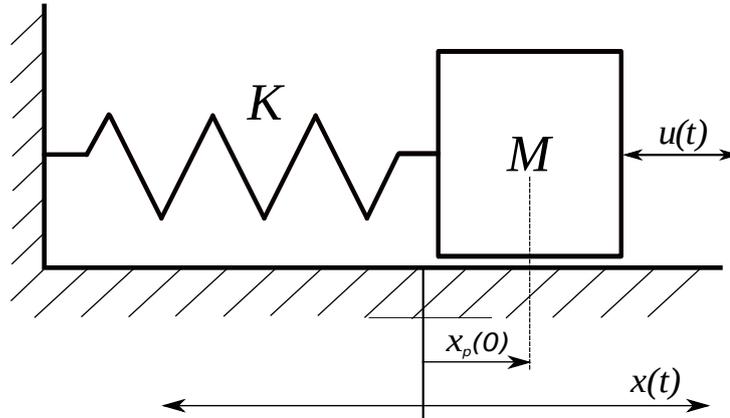


Figura 2.14: Sistema masa-resorte

Tabla 2.1: Datos del problema Masa-Resorte.

<b>Parámetros del sistema</b>	
Masa del carro	$m = 1 \text{ Kg.}$
Cte. elasticidad	$k = 1 \text{ Kg/s}^2.$
<b>Matrices de peso</b>	
Estados	$R_x = I$
Control	$R_u = 1$
<b>Condiciones iniciales</b>	
Posición	$x_1(0) = 1 \text{ m}$
Velocidad	$x_2(0) = 1 \text{ m/s}$

Aquí,  $x(t)$  describe la posición de la masa, mientras que  $\dot{x}(t)$  y  $\ddot{x}(t)$ , son su velocidad y aceleración respectivamente.

Aplicando transformada de Laplace se tiene,

$$m [x(s)s^2 - (x_0s + \dot{x}_0)] + kx(s) = 0. \quad (2.130)$$

Reordenando la ecuación anterior

$$x(s) \left( s^2 + \frac{k}{m} \right) = x_0s + \dot{x}_0 \quad (2.131)$$

y definiendo

$$\omega_0 \triangleq \sqrt{k/m}, \quad (2.132)$$

se puede escribir

$$x(s) = x_0 \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)} + \frac{\dot{x}_0}{(s^2 + \omega_0^2)} \quad (2.133)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis inicial  $\dot{x}(0) = 0$ , ya que el bloque está inicialmente en reposo, resulta

$$x(s) = x_0 \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)}. \quad (2.134)$$

Luego, aplicando transformada inversa se obtiene evolución temporal de la posición del centro de masa del bloque, esto es:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.135)$$

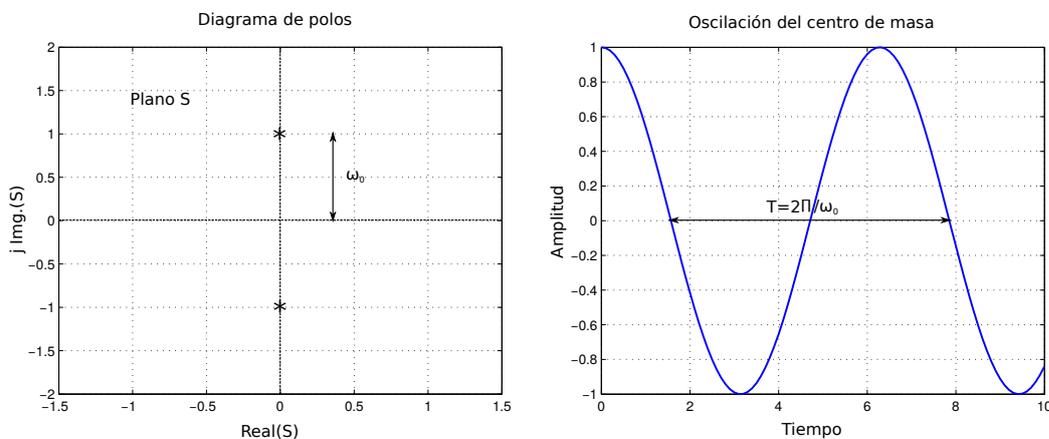


Figura 2.15: Sistema oscilante

La Fig. (2.15) muestra las oscilación sostenida en el tiempo del centro de masa, asociada a los polos imaginarios de la función de transferencia.

Nótese que el bloque oscilará respecto de su posición de equilibrio entre  $\pm x_0$ , con un período dado por  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Al no existir rozamiento la energía inicial no se gastará, es decir, el sistema es no disipativo y por lo tanto el bloque no se detendrá.

### Regulador Lineal Cuadrático (LQR)

Se propone ahora frenar el bloque aplicando una fuerza  $u(t)$  tal que el costo o trabajo necesario para detenerlo sea mínimo.

Para ello, se modela el sistema mediante la representación en variables de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (2.136)$$

Definiendo<sup>23</sup>

$$\begin{aligned}x_1(t) &\triangleq x(t), \\x_2(t) &\triangleq \dot{x}(t),\end{aligned}\tag{2.137}$$

las matrices  $A$ ,  $B_2$ ,  $C$  y  $D$ , resultan ser

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}, \\C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.138}$$

Mediante esta elección de las matrices  $C$  y  $D$ , la salida a regular son los estados del sistema, la posición del bloque y su velocidad.

Por lo visto en esta sección, para lograr la acción de control óptima se debe minimizar la siguiente integral:

$$J = \int_0^{\infty} [x'(t)R_x x(t) + u'(t)R_u u(t)] dt.\tag{2.139}$$

El control óptimo resulta:

$$u(t) = -R_u^{-1} B_2' P x(t),$$

siendo

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \succ 0,\tag{2.140}$$

la matriz que resuelve la siguiente ecuación:

$$A'P + PA + R_x - PB_2 R_u^{-1} B_2' P = 0.$$

### Ejemplo numérico

En este ejemplo se adoptarán los valores de la tabla (2.1), resultando las siguientes matrices de estados y de entrada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\tag{2.141}$$

<sup>23</sup> Ahora  $x(t)$  es el vector de variables de estado, siendo sus componentes los dos estados que tiene el sistema, la posición del centro de masa del bloque y su velocidad.

Utilizando el solver de Matlab<sup>®</sup> se resuelve la ecuación algebraica de Riccati, obteniéndose la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1,9123 & 0,4142 \\ 0,4142 & 1,3522 \end{pmatrix}, \quad (2.142)$$

con la cual se calcula la ganancia de realimentación óptima,

$$K_{\acute{o}pt} = -(0,4142 \ 1,3522). \quad (2.143)$$

La dinámica del sistema realimentado resulta,

$$\dot{x}(t) = A_{cl} x(t), \quad \text{siendo } A_{cl} = (A + B_2 K_{\acute{o}pt}), \quad (2.144)$$

y de acuerdo con los valores numéricos, su dinámica resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1,41 & -1,35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (2.145)$$

El sistema realimentado tiene polos estables ubicados en:

$$s = (-0,675 \pm j0,977),$$

los cuales producen una oscilación decreciente acotada exponencialmente.

La Fig.(2.16) muestra la posición del centro de masa y su velocidad cuando el regulador lineal cuadrático es implementado en ella; también se observa la acción de control.

En la Fig.(2.17) se muestra la evolución de los estados, las curva de nivel y el gradiente de la función de Lyapunov.

De la misma forma que se realizó en el ejemplo (2.2), es posible determinar la energía disipada por los estados y la energía disipada por la señal de control. En efecto, el sistema realimentado con ganancia de estado  $K_{\acute{o}pt}$ , satisface la ecuación de Lyapunov:

$$A'_{cl} P + P A_{cl} = -(C' C + K'_{\acute{o}pt} K_{\acute{o}pt}), \quad (2.146)$$

donde  $P$  y  $K_{\acute{o}pt}$  están determinadas por las Ecs.(2.142) y (2.143) respectivamente, mientras que la matriz  $C$  elegida es la matriz identidad: Ec.(2.138).

Tomando por separado ambas "salidas", se tiene

$$A'_{cl} P_x + P_x A_{cl} = -C' C, \quad (2.147)$$

$$A'_{cl} P_u + P_u A_{cl} = -K'_{\acute{o}pt} K_{\acute{o}pt},$$

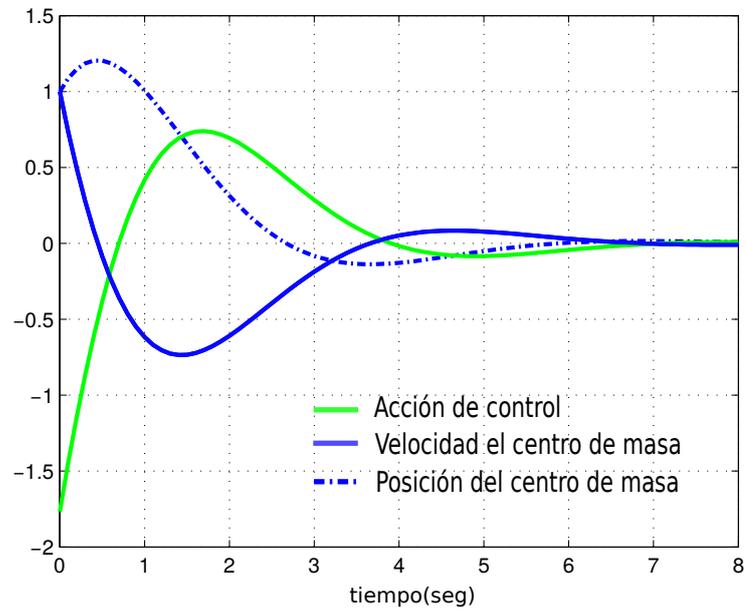


Figura 2.16: Frenado óptimo, posición y velocidad del bloque  $M$ .

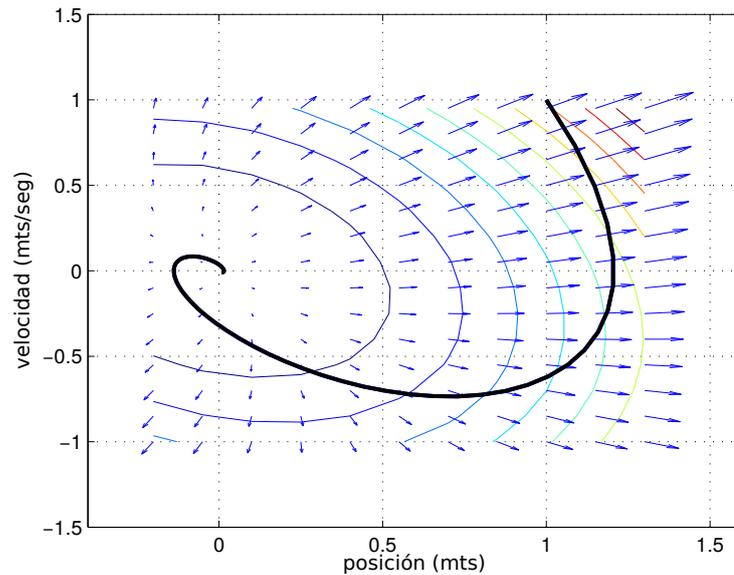


Figura 2.17: Diagrama de estados. Curva de nivel y gradiente de la función de Lyapunov.

resultando

$$P_x = \begin{pmatrix} 1,3708 & 0,3536 \\ 0,3536 & 0,6312 \end{pmatrix}, \quad P_u = \begin{pmatrix} 0,5415 & 0,0607 \\ 0,0607 & 0,7210 \end{pmatrix}. \quad (2.148)$$

Luego, la energía de los estados, la energía del control y la energía total del sistema en cada instante de tiempo, vienen expresadas por:

$$\begin{aligned} V_x[x(t)] &= 1,3708 x_1^2(t) + 0,7072 x_1(t)x_2(t) + 0,6312 x_2^2(t), \\ V_u[x(t)] &= 0,5415 x_1^2(t) + 0,1214 x_1(t)x_2(t) + 0,7210 x_2^2(t), \\ V_T[x(t)] &= 1,9123 x_1^2(t) + 0,8284 x_1(t)x_2(t) + 1,3522 x_2^2(t). \end{aligned} \quad (2.149)$$

Y las energías disipadas en un intervalo de tiempo infinito, resultan:

$$\begin{aligned} V_x[x(0)] &= 1,3708 + 0,7072 + 0,6312 = 2,7091, \\ V_u[x(0)] &= 0,5415 + 0,1214 + 0,7210 = 1,3838, \\ V_T[x(0)] &= 1,9123 + 0,8284 + 1,3522 = 4,0929. \end{aligned} \quad (2.150)$$

En la Fig. (2.18) se muestra como el sistema realimentado (estados y control) disipa su energía. Notar que este sistema tiene más energía que el sistema en lazo abierto, pero es la mínima necesaria para estabilizarlo.

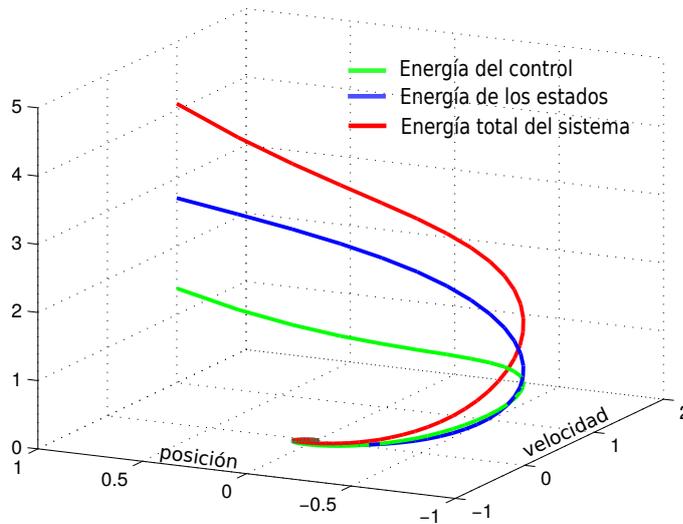


Figura 2.18: Disipación de energía en el espacio de estados.

## 2.4. Minimización de la norma $\mathcal{H}_2$

En esta subsección se verá que eligiendo en forma adecuada una salida auxiliar del sistema, el control óptimo puede tratarse como la minimización de la norma dos del sistema realimentado [Sánchez, 1992].

Considérese el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t), \\ y(t) &= Cx(t), \\ u(t) &= Kx(t). \end{aligned} \quad (2.151)$$

aquí  $y(t)$  es la salida del sistema sobre la que no se hace ninguna especificación, y  $u(t)$  es una función escalar.

Si se elije como salida auxiliar

$$z_2(t) \triangleq C_2x(t) + D_{22}u(t), \quad (2.152)$$

donde para un sistema de  $n$  estados, se definen las matrices  $C_2 \in \mathbb{R}^{((n+1) \times n)}$  y  $D_{22} \in \mathbb{R}^{((n+1) \times 1)}$  del siguiente modo:

$$C_2 \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{22} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.153)$$

Con esta elección, como se observa en la Fig.(2.19), se tiene el vector de salida

$$z_2(t) \triangleq \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{((n+1) \times 1)}, \quad (2.154)$$

y su contenido de energía resulta,

$$\|z_2\|_2^2 = \int_0^\infty [x(t)'x(t) + u(t)'u(t)]dt. \quad (2.155)$$

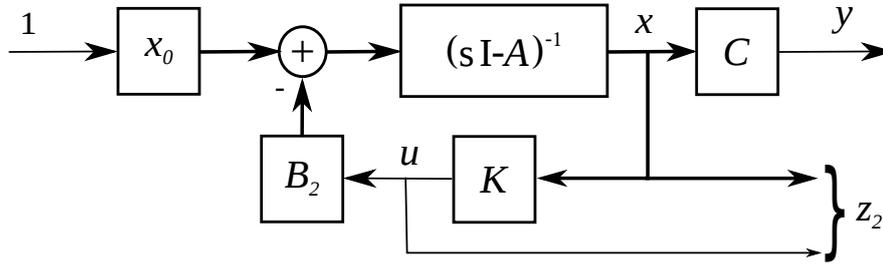
Obsérvese que  $\|z_2\|_2^2$  es el costo cuadrático Ec.(2.126), habiéndose elegido

$$R_x = C_2' C_2 = I^{(n \times n)}, \quad (2.156)$$

$$R_u = D_{22}' D_{22} = 1,$$

siendo además, las matrices  $C_2$  y  $D_{22}$  ortogonales entre sí, esto es:

$$C_2' D_{22} = 0^{(n \times 1)}, \quad D_{22}' C_2 = 0^{(1 \times n)}. \quad (2.157)$$

Figura 2.19: Sistema realimentado con selección de  $z_2$ .

Reemplazando en la ecuación de estado y en la salida  $z_2(t)$  por la acción de control, se tiene

$$\dot{x}(t) = (A + B_2K)x(t), \quad (2.158)$$

$$z_2(t) = (C_2 + D_{22}K)x(t).$$

Definiendo

$$A_{cl} \triangleq (A + B_2K), \quad (2.159)$$

$$C_{cl} \triangleq (C_2 + D_{22}K),$$

y aplicando Laplace al sistema Ec.(2.158), se tiene

$$z_2(s) = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}x(0), \quad (2.160)$$

siendo

$$G_{cl}(s) = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}, \quad (2.161)$$

la función de transferencia del sistema realimentado, y

$$g_{cl}(t) = C_{cl} e^{A_{cl}t}, \quad (2.162)$$

su respuesta al impulso.

La salida  $z_2(t)$  es

$$z_2(t) = g_{cl}(t) x_0, \quad (2.163)$$

y por lo tanto su contenido de energía resulta

$$\begin{aligned} \|z_2\|_2^2 &= x_0' \left[ \int_0^\infty g_{cl}(t)' g_{cl}(t) dt \right] x_0, \\ &= x_0' \|g_{cl}\|_2^2 x_0. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Con esta elección de  $z_2$ , el control óptimo se puede calcular minimizando la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema realimentado.

Note que ahora es posible resolver el problema LQR sin restricciones del siguiente modo:

$$\min_{(K)} \|z_2\|_2^2 \quad (2.165)$$

donde  $z_2$  y  $x$  están definidas en (2.158).

Esta formulación tiene como ventaja adicional poder incorporar restricciones al problema LQR, ventaja con la que no cuenta la simple utilización de la ecuación de Riccati. Particularmente, en esta tesis las restricciones se incorporarán mediante el uso de LMI, lo que se mostrará en capítulos posteriores.

## 2.5. Resumen

En este capítulo se han revisado conceptos básicos de los sistemas LTI, particularmente cuando dichos sistemas están representados mediante el modelo en variables de estados.

El análisis de estabilidad de un sistema LTI utilizando el criterio de Lyapunov fue el eje central de este capítulo. En primer lugar se analizó la condición que debe cumplir un sistema autónomo para ser asintóticamente estable, dándose las interpretaciones físicas y gráficas del teorema de Lyapunov.

Posteriormente se desarrolló el Regulador Lineal Cuadrático (*LQR*), para lo cual se utilizó la condición de estabilidad de Lyapunov como una restricción a ser satisfecha en un problema de optimización. En efecto, el planteo consistió en minimizar la energía de una señal externa de cuadrado integrable, esto es,  $u \in \mathbb{L}_2^n[0, \infty)$ , sujeto a la restricción de que el sistema no autónomo sea asintóticamente estable, aún cuando el sistema autónomo podría no serlo.

Resolver tal problema condujo como solución a que la señal externa  $u(t)$ , se obtiene mediante una realimentación lineal y negativa de los estados del sistema,  $u(t) = Kx(t)$ , y que la ganancia estática de esta realimentación se obtiene resolviendo la Ecuación Algebraica de Riccati (*ARE*).

Por último, se vio que eligiendo en forma adecuada una salida auxiliar  $z_2$  de un sistema al que se le aplica una realimentación lineal de estado, el control óptimo puede tratarse como la minimización de la norma  $\mathcal{H}_2$  de dicho sistema realimentado.

En el siguiente capítulo se analizará la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de un sistema en lazo abierto, y se mostrará la forma de calcularla utilizando el modelo en variable de estado,

también se verá cómo utilizar realimentación para minimizar dicha norma.



# Capítulo 3

## Rechazo a perturbaciones desconocidas

### 3.1. Introducción

En este capítulo se discutirá las normas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  para el rechazo de perturbaciones. Primeramente, se analizarán estas dos normas en el dominio frecuencial para un modelo LTI SISO entrada/salida, y posteriormente se encontrará una manera de evaluar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  en el modelos de espacio de estados.

### 3.2. Norma $\mathcal{H}_2$ y Norma $\mathcal{H}_\infty$ de un sistema LTI

#### 3.2.1. Norma $\mathcal{H}_2$

Se ha visto en la sección (2.4) que el control óptimo minimiza la norma  $\mathcal{H}_2$  de la función de transferencia que relaciona la perturbación de estados  $x_0\delta(t)$  y la salida  $y(t) = Cx + Du$ , siendo  $C$  y  $D$  matrices ortogonales.

Se verá aquí que este es un caso particular de una situación más general, la cual se plantea a continuación en el dominio frecuencial.

Considérese el siguiente sistema<sup>1</sup> a lazo abierto:

$$y(s) = G(s)w(s), \quad (3.1)$$

aquí  $w$  es una señal exógena que ingresa al sistema perturbándolo,  $y$  es la señal de salida, y  $G$  la función de transferencia que las relaciona.

---

<sup>1</sup>Por simplicidad se plantea la norma  $\mathcal{H}_2$  para un sistema SISO.

Asumiendo que el sistema es estable y  $w$  una señal de energía (o potencia media<sup>2</sup>) finita, el contenido de energía del vector de salida  $y(t)$  resulta

$$\|y\|_2^2 = \int_0^\infty |y(t)|^2 dt. \quad (3.2)$$

Haciendo uso de la definición de la transformada de Fourier,  $y(t)$  puede expresarse del siguiente modo:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty z(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega, \quad (3.3)$$

y con esta representación, la Ec.(3.2) queda expresada como<sup>3</sup>

$$\|y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |z(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.4)$$

Evaluando la Ec.(3.1) en  $s = j\omega$  y reemplazando en la ecuación anterior, se tiene

$$\|y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |G(j\omega)|^2 |w(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.5)$$

Si la densidad espectral de energía (o potencia) de la señal  $w(t)$  es constante, y si además se asume, sin pérdida de generalidad, que

$$|w(j\omega)|^2 = 1, \forall \omega,$$

entonces la energía de la señal de salida, resulta

$$\|y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |G(j\omega)|^2 d\omega, \quad (3.6)$$

y de manera equivalente, por el teorema de Parseval, se tiene

$$\|y\|_2^2 = \int_0^\infty |g(t)|^2 dt. \quad (3.7)$$

<sup>2</sup>Si  $w$  es una señal de potencia media finita, su contenido de potencia resulta [Stremler, 1993]:

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|w(t)|^2}{T} dt.$$

<sup>3</sup>Esto es debido a la isometría entre  $\mathbb{L}_2(t)$  y  $\mathbb{L}_2(j\omega)$ , también conocido como el teorema de Parseval [Stremler, 1993].

Definiéndose a

$$\|G(s)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\int_0^{\infty} |g(t)|^2 dt}, \quad (3.8)$$

como la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema  $G(s)$ .

Ejemplo de señales de espectro plano son: el ruido proveniente de los equipos de medición, también llamado ruido blanco o ruido con distribución gaussiana y media cero; y el ruido de proceso  $w(t) = x_0\delta(t)$ , que como se ha visto modela los efectos de las condiciones iniciales del sistema.

Por lo tanto, si se utiliza realimentación para minimizar la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema realimentado, se minimizan los efectos de la potencia de ruido a la salida de este, tal es el caso del control óptimo o LQR.

### 3.2.2. Norma $\mathcal{H}_\infty$

Se destaca nuevamente que la utilidad de la norma  $\mathcal{H}_2$  es para perturbaciones impulsivas o de espectro plano, pero también permite incluir cualquier otra perturbación si su forma es conocida, ya que siempre se puede generar una señal particular como la salida de un sistema dinámico excitado por una  $\delta(t)$ , por ejemplo  $w(t) = w(t) * \delta(t)$  [Sánchez, 1992].

Sin embargo, si se diseña un regulador óptimo para una perturbación dada y en la práctica la perturbación es distinta, se pierde la propiedad de optimalidad.

Cuando la perturbación no es conocida, lo que es habitual, es conveniente trabajar con la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema, ya que esta norma permite realizar un diseño óptimo para cualquier tipo de perturbación [Sánchez, 1992].

La norma  $\mathcal{H}_\infty$  se define como:

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \max_{\omega \in \mathfrak{R}} \{|G(j\omega)|\}, \quad (3.9)$$

y representa para un sistema SISO, el valor máximo del módulo de su función respuesta en frecuencia, mientras que para un sistema MIMO es el mayor valor singular de la matriz de transferencia evaluada en  $s = j\omega$ <sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Por simplicidad se plantea un sistema SISO, el análisis para un sistema MIMO se puede ver en el apéndice A.2.1.

En efecto, retomando la Ec. (3.5) se tiene

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &\leq \|G(s)\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |w(j\omega)|^2 d\omega, \\ \|y\|_2^2 &\leq \|G(s)\|_\infty^2 \|w\|_2^2, \\ \frac{\|y\|_2^2}{\|w\|_2^2} &\leq \|G(s)\|_\infty^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

La desigualdad anterior muestra que el cociente entre la energía de la señal de salida debido a la perturbación de entrada y la energía de la perturbación, está acotada por el cuadrado de la norma  $H_\infty$  del sistema LTI.

En lo que sigue de esta sección se trabajará sobre el concepto anterior pero con el modelo del sistema en el espacio de estados. Por lo tanto, se reformulará la desigualdad (3.10) en el dominio temporal.

### 3.3. Evaluación de la norma $\mathcal{H}_\infty$

Considérese el siguiente sistema LTI de orden  $n$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t), \quad x_0 = 0, \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Aquí  $w(t)$  es una señal vectorial exógena de energía finita, que ingresa al sistema a través de la matriz de entrada  $B_1$ , e  $y(t)$  es la señal vectorial de salida cuyos elementos resultan de la combinación lineal de los estados con cada fila de la matriz de salida  $C$ <sup>5</sup>.

Siendo su matriz de transferencia

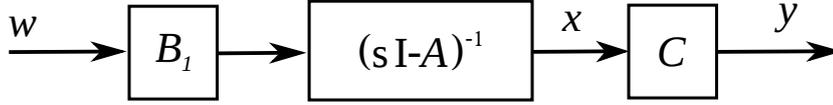
$$G(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = C(sI - A)^{-1} B_1,$$

Partiendo de la Ec. (3.10) y definiendo un escalar positivo  $\gamma$ , tal que

$$\gamma \geq \|G(s)\|_\infty, \tag{3.12}$$

---

<sup>5</sup>Sin pérdida de generalidad se asumirá que el sistema es SISO, es decir, las variables  $w(t)$  e  $y(t)$  son señales escalares, y por lo tanto, las matrices  $B_1$  y  $C$  son vectores columnas y fila respectivamente.

Figura 3.1: Diagrama en bloque del sistema con entrada  $w(t)$ .

se tiene

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &\leq \gamma^2 \|w\|_2^2, \\ \|y\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 &\leq 0, \\ \int_0^\infty [x'(t) C' C x(t) - w'(t) \gamma^2 w(t)] dt &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La comparación de esta última integral con la Ec. (2.126), motiva a realizar un planteo similar al de la Sección (2.3), aunque ahora no se trata de un problema de regulación.

En efecto, si se asume que la matriz  $A$  tiene todos sus autovalores con parte real negativa, es posible utilizar la condición de estabilidad de Lyapunov representada por la Ec. (2.102), que para mayor claridad a continuación se reescribe

$$\lambda' \dot{x} + x' R_x x = 0,$$

siendo

$$\lambda = 2Px(t),$$

el gradiente de la función de Lyapunov, y  $R_x = C' C$ .

Como se dijo, el procedimiento es similar al realizado en la sección (2.3), esto es, se propone resolver el siguiente problema de optimización<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \max_{w \in \mathbb{L}_2} \{f(w) = -w' \gamma^2 w\}, \\ \text{s.a : } \lambda' \dot{x} + x' R_x x = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como antes, se define la función Lagrangeana  $L(x, w)$  cuyo valor se desea maximizar, del siguiente modo<sup>7</sup>:

$$L(x, w) \triangleq -w' \gamma^2 w + \{\lambda' \dot{x} + x' R_x x\} \leq 0, \quad (3.15)$$

$$L(x, w) = -w' \gamma^2 w + \lambda' (Ax + B_1 w) + x' R_x x \leq 0.$$

<sup>6</sup>Se maximiza la energía de la perturbación.

<sup>7</sup>Nótese que la expresión entre llaves es cero ya que es una restricción de igualdad, mientras que  $-w'(t)\gamma^2 w(t) = -\gamma^2 |w(t)|^2 \leq 0$ .

Para encontrar un máximo de esta función respecto de  $w$  se busca en primer lugar un punto estacionario, para lo cual se deriva  $L(x, w)$  respecto a  $w$  y se iguala a cero, obteniéndose,

$$\frac{\partial L(x, w)}{\partial w} = -2w\gamma^2 + B_1'\lambda = 0,$$

resultando

$$w^* = \gamma^{-2} B_1' \frac{\lambda}{2} = \gamma^{-2} B_1' P x. \tag{3.16}$$

La Ec. (3.16) muestra que el problema planteado conduce a modelar a la perturbación  $w(t)$  como una realimentación lineal de estados positiva, cuya ganancia de realimentación  $K_w$  resulta,

$$K_w = \gamma^{-2} B_1' P,$$

en la Fig. (3.2) se representa esta situación.

Es claro que al ser el sistema estable, la señal  $w^*(t) = K_w x(t)$  resulta ser una señal de energía finita.

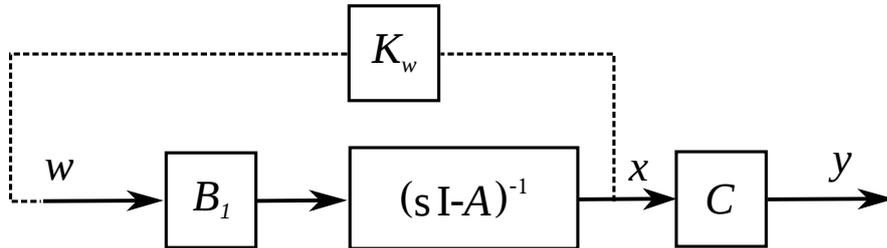


Figura 3.2: Perturbación modelada como realimentación de estado.

Siendo que  $w^*$  depende linealmente de  $x$ , se maximizará la función Lagrangeana respecto de esta variable, para lo cual se busca en primer lugar obtener un punto estacionario.

Al derivar  $L(x, w)$  respecto a  $x$  e igualar a cero se tiene

$$\frac{\partial L(x, w)}{\partial x} = 2R_x x + \lambda' \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda'}{\partial x} \dot{x} = 0. \tag{3.17}$$

Siendo

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial x} \dot{x} = 2P \dot{x} = \dot{\lambda}, \tag{3.18}$$

resulta

$$2R_x x^* + A'\lambda + \dot{\lambda} = 0. \tag{3.19}$$

Junto con la ecuación la Ec.(3.19) y la ecuación de estados Ec.(3.11) evaluada en  $(w^*$  y  $x^*)$ , se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{x}^* = A x^* + B_1 \gamma^{-2} B_1' \frac{\lambda}{2}, \quad (3.20)$$

$$-\frac{\dot{\lambda}}{2} = R_x x^* + A' \frac{\lambda}{2}. \quad (3.21)$$

Siendo  $\lambda = 2Px$ , se reescriben las ecuaciones anteriores en forma matricial

$$\begin{pmatrix} I \\ -P \end{pmatrix} \dot{x}^* = \begin{pmatrix} A & B_1 \gamma^{-2} B_1' \\ R_x & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} x^*, \quad (3.22)$$

luego, premultiplicando ambos lados de la Ec.(3.22) por la matriz  $(P \ I)$ , resulta:

$$0 = (P \ I) \begin{pmatrix} A & B_1 \gamma^{-2} B_1' \\ R_x & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} x^*, \quad (3.23)$$

obteniéndose  $\forall x^* \neq 0$ ,

$$PA + PB_1 \gamma^{-2} B_1' P + R_x + A' P = \mathbf{0}. \quad (3.24)$$

Definiéndose matriz Hamiltoniana del sistema (3.11), a la matriz:

$$H \triangleq \begin{pmatrix} A & B_1 \gamma^{-2} B_1' \\ R_x & A' \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

y a la Ec.(3.24), ecuación de Riccati asociada.

Ambas Ecs. (3.24) y (3.25) son útiles para evaluar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema (3.11).

Previamente a la determinación de esta norma, se verificará si el punto  $(x^*, w^*)$  maximiza la función  $L(w, x)$ .

Si se satisface la ecuación matricial (2.115), se puede escribir

$$x'^*(A'P + PA + R_x + PB_1 \gamma^{-2} B_1' P)x^* = 0,$$

$$x'^*(A'P + PA + R_x)x^* + x'^*(PB_1 \gamma^{-2} B_1' P)x^* = 0,$$

$$x'^*(A'P + PA + R_x)x^* + x'^*(PB_1 \gamma^{-2}) \gamma^2 (\gamma^{-2} B_1' P)x^* = 0,$$

$$x'^*(A'P + PA + R_x)x^* + w'^* \gamma^2 w^* = 0,$$

obteniéndose

$$-w'^* \gamma^2 w^* = x'^*(A'P + PA + R_x)x^*,$$

$$-w'^* \gamma^2 w^* = 2x'^* P A x^* + x'^* R_x x^*,$$

por lo que es posible escribir

$$-w'^* \gamma^2 w^* = \lambda' Ax^* + x'^* R_x x^*. \quad (3.26)$$

Retomando la Ec.(3.15) y reemplazando en ella por la Ec.(3.11), la función Lagrangeana resulta

$$\begin{aligned} L(x, w) &= -w' \gamma^2 w + \lambda' (Ax + B_1 w) + x' R_x x \leq 0, \\ &= -w' \gamma^2 w + [\lambda' Ax + x' R_x x] + \lambda' B_1 w \leq 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

evaluando esta última ecuación en  $x^*$ , resulta

$$L(x^*, w) = -w' \gamma^2 w + [\lambda' Ax^* + x'^* R_x x^*] + \lambda' B_1 w \leq 0. \quad (3.28)$$

Reemplazando la Ec.(3.16) y Ec.(3.26), en la Ec.(3.27) resulta

$$\begin{aligned} L(x^*, w) &= -w' \gamma^2 w - w'^* \gamma^2 w^* + (\lambda' B_1 \gamma^{-2}) \gamma^2 w \leq 0, \\ &= -w' \gamma^2 w - w'^* \gamma^2 w^* + 2w'^* \gamma^2 w \leq 0, \\ &= -\gamma^2 (w - w^*)'(w - w^*) \leq 0, \\ &= -\gamma^2 |w - w^*|^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde evaluando en  $w^*$  se tiene que,

$$L(x^*, w^*) = 0, \quad \Rightarrow (x^*, w^*) = (x_{\acute{o}pt}, w_{\acute{o}pt}). \quad (3.30)$$

con lo que se demuestra que el punto  $(w^*, x^*)$  maximiza la función  $L(x, w)$ .

Observar que  $w_{\acute{o}pt}(t)$  maximiza el siguiente funcional:

$$J \triangleq \int_0^\infty [x(t)' R_x x(t) - w(t)' \gamma^2 w(t)] dt. \quad (3.31)$$

En efecto, retomando la función Lagrangeana

$$L[w(t), x(t)] = -w(t)' \gamma^2 w(t) + \dot{V}[x(t)] + x(t)' R_x x(t) \leq 0, \quad (3.32)$$

donde despejando

$$-w(t)' \gamma^2 w(t) + x(t)' R_x x(t) \leq -\dot{V}[x(t)], \quad (3.33)$$

e integrando

$$\int_0^\infty [x(t)' R_x x(t) - w(t)' \gamma^2 w(t)] dt \leq \underbrace{x(0)' P x(0)}_{\text{energía inicial}} - \underbrace{x(\infty)' P x(\infty)}_{\text{energía final}}. \quad (3.34)$$

Si se considera que las condiciones iniciales son nulas ( $x(0) = 0$ ), ya que se está evaluando la salida como consecuencia de una entrada y no de las condiciones iniciales del sistema, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [x(t)' R_x x(t) - w(t)' \gamma^2 w(t)] dt &\leq -x(\infty)' P x(\infty), \\ \|y\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 &\leq -x(\infty)' P x(\infty), \end{aligned} \quad (3.35)$$

se puede notar que  $w_{\acute{o}pt}(t)$  maximiza el lado izquierdo de la Ec. (3.35)

$$\begin{aligned} J_{\acute{m}ax} &= \|y\|_2^2 - \gamma^2 \|w_{\acute{o}pt}\|_2^2 = -x(\infty)' P x(\infty) \leq 0, \\ J_{\acute{m}ax} &= \|y\|_2^2 - \gamma^2 \|w_{\acute{o}pt}\|_2^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Cumpléndose para cualquier perturbación de energía finita, la siguiente relación:

$$\frac{\|y\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma. \quad (3.37)$$

A continuación se mostrará que este planteo en variables de estado, conduce a obtener una cota superior para la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema, es decir,

$$\|G(s)\|_\infty < \gamma_{min} \quad (3.38)$$

Para la evaluación de esta norma, se presentan los siguientes dos teoremas que son equivalentes.

**Teorema 3.1.** [Colmenares and Tadeo, 2005] Para el sistema (3.11), las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $A$  es una matriz estable y  $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ .
2. Existe una matriz  $P$  positiva definida tal que

$$A'P + PA + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C' C \prec 0. \quad (3.39)$$

**Demostración** El teorema (3.1) se demuestra en el apéndice (A), subsección (A.2.2).  $\square$

**Teorema 3.2.** [Sánchez, 1992] Si el sistema (3.11) es estable y estrictamente propio, entonces su matriz Hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1' \\ C'C & A' \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

no tiene autovalores sobre el eje imaginario  $j\omega$  si y sólo si  $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ .

Como se observa en ambos teoremas la determinación de  $\|G(s)\|_\infty$  se realiza en forma indirecta, la cual consiste en reducir el valor de parámetro  $\gamma$  hasta que cualquiera de estas dos afirmaciones no se cumpla.

### 3.4. Regulador óptimo en $\mathcal{H}_\infty$

#### 3.4.1. Atenuación de perturbaciones vía realimentación de estado

Interesa ahora encontrar la manera de minimizar el efecto de una perturbación externa de energía finita y de forma desconocida sobre la salida de un sistema.

Como se ha visto en la Ec.(3.37) y de acuerdo con los teoremas 3.1 y 3.2, el cociente entre el contenido de energía de la señal de salida y el de la perturbación, tiene un cota superior que es la norma  $H_\infty$  del sistema perturbado.

El objetivo ahora, es determinar una acción de control obtenida mediante realimentación de estado, que garantice la estabilidad del sistema realimentado, y que minimice el efecto de la perturbación  $w(t)$  sobre la salida  $y(t)$ .

#### Minimización del contenido de energía de la salida regulada $y(t)$

Considérese el siguiente sistema LTI SISO de orden  $n$  y condiciones iniciales nulas,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), & x(0) &= 0, \\ y(t) &= Cx(t), \\ u(t) &= K_u x(t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Siendo  $w(t)$  la perturbación, cuyo efecto sobre la salida  $y(t)$  se quiere atenuar mediante la acción de control  $u(t)$ .

Reemplazando  $u(t)$  en la ecuación de estados, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - B_2K_u)x(t) + B_1w(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (3.42)$$

y definiendo

$$A_u \triangleq (A - B_2 K_u), \quad (3.43)$$

el sistema (3.41), para alguna ganancia  $K_u$  dada, queda reformulado del siguiente modo:

$$\dot{x}(t) = A_u x(t) + B_1 w(t), \quad (3.44)$$

$$y(t) = Cx(t).$$

Escrito de este modo, la Ec. (3.44) representa el sistema realimentado sujeto a una perturbación  $w$ . Haciendo una analogía con el sistema estable a lazo abierto de la Ec. (3.11), ahora se busca maximizar la función lagrangeana escrita en (3.15) para el sistema realimentado Ec. (3.44). Por tanto,

$$\begin{aligned} L_u(x, w) &\triangleq -w' \gamma^2 w + \{\lambda' \dot{x} + x' R_x x\} \leq 0, \\ &= -w' \gamma^2 w + \lambda' (A_u x + B_1 w) + x' R_x x \leq 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

y consecuentemente se podrá encontrar un juego de valores  $(x, w)$  tal que,

$$L_u(x_{\acute{o}pt}, w_{\acute{o}pt}) = 0. \quad (3.46)$$

Asumiendo que  $A_u$  es estable y haciendo uso de los resultados obtenidos en la subsección (3.3), la perturbación de energía finita más desfavorable resulta,

$$w_{\acute{o}pt}(t) = K_w x(t),$$

donde se muestra que,

$$K_w = \gamma^{-2} B_1' P,$$

siendo  $P \succ 0$  la que debe satisfacer la siguiente ecuación matricial:

$$A_u' P + P A_u + C' C + P B_1 \gamma^{-2} B_1' P = 0. \quad (3.47)$$

La función de transferencia del sistema relimentado (3.44), que relaciona la salida  $y$  con la perturbación  $w$ , viene dada por:

$$G_u(s) = C(sI - A_u)^{-1} B_1, \quad (3.48)$$

siendo  $\|G_u(s)\|_\infty$  su norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

Recordar que la Ec. (3.47) tiene solución para  $P \succ 0$ , siempre y cuando se cumpla,  $\gamma > \|G_u(s)\|_\infty$ .

Téngase en cuenta también, que este planteo garantiza la siguiente relación para cualquier perturbación,<sup>8</sup>

$$\frac{\|y\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma.$$

El objetivo ahora, es determinar la acción de control obtenida mediante realimentación de estado de mínima energía, para el cual  $G_u(s)$  satisface la Ec.(3.47). En la Fig.(3.3) se representa el sistema que se está analizando.

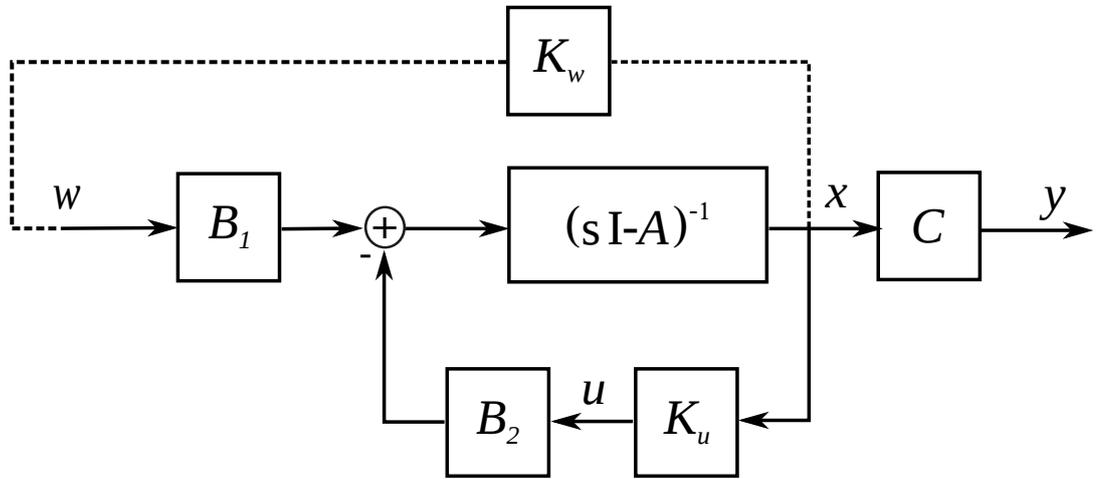


Figura 3.3: Realimentación negativa del sistema perturbado

Con el fin de simplificar la notación se define

$$Q \triangleq C'C + PB_1 \gamma^{-2} B_1'P, \tag{3.49}$$

y se reemplaza en la Ec.(3.47) resultando

$$A_u'P + PA_u + Q = 0. \tag{3.50}$$

Pre y posmultiplicando la Ec.(3.50) por  $x(t)'$  y por  $x(t)$  respectivamente, se obtiene la restricción de estabilidad para el sistema realimentado, la cuál debe ser satisfecha al seleccionar la acción de control, esto es:

$$x(t)' \{A_u'P + PA_u + Q\} x(t) = 0. \tag{3.51}$$

---

<sup>8</sup>Ver Ec.(3.37).

Reemplazando  $A_u$  por (3.43), la Ec.(3.51) queda expresada como:

$$\begin{aligned} x(t)'(A - B_2K_u)'Px(t) + x(t)'P(A - B_2K_u)x(t) + x(t)'Qx(t) &= 0, \\ x(t)'\{A'P + PA + Q\}x(t) - x(t)'K_u'B_2'Px(t) - x(t)'PB_2K_u x(t) &= 0, \\ x(t)'\{A'P + PA + Q\}x(t) + u'(t)B_2'Px(t) + x(t)'PB_2u(t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Como se hizo en la sección (2.3), minimizar la energía de la acción de control sujeta a la restricción (3.52), es equivalente a minimizar la siguiente función Lagrangeana:

$$L_{w_{\acute{o}pt}}(x, u) = u'u + x'\{A'P + PA + Q\}x + u'B_2'Px + x'PB_2u \geq 0, \quad (3.53)$$

y se ha visto en dicha sección, que el valor de  $u$  que la minimiza resulta ser

$$u_{\acute{o}pt}(t) = -B_2'Px(t),$$

con

$$K_u = -B_2'P.$$

Reescribiendo la función (3.53) como

$$\begin{aligned} L_{w_{\acute{o}pt}}(x, u) &= u'u + x'\{A'P + PA + Q\}x + u' \underbrace{B_2'Px}_{u_{\acute{o}pt}} + \underbrace{x'PB_2}_{u'_{\acute{o}pt}} u \geq 0, \\ &= u'u + x'\{A'P + PA + Q\}x + u'u_{\acute{o}pt} + u'_{\acute{o}pt}u \geq 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Resultando en el óptimo,

$$L_{w_{\acute{o}pt}}(x_{\acute{o}pt}, u_{\acute{o}pt}) = x'_{\acute{o}pt}\{A'P + PA + Q\}x_{\acute{o}pt} - u'_{\acute{o}pt}u_{\acute{o}pt} = 0, \quad (3.55)$$

y finalmente reemplazando  $u_{\acute{o}pt}$  y  $Q$ , la función (3.55), resulta

$$L_{w_{\acute{o}pt}}(x_{\acute{o}pt}, u_{\acute{o}pt}) = x'_{\acute{o}pt}\{A'P + PA + C'C + PB_1 \gamma^{-2} B_1'P - PB_2B_2'P\}x_{\acute{o}pt} = 0,$$

y en forma matricial

$$A'P + PA + C'C + PB_1 \gamma^{-2} B_1'P - PB_2B_2'P = 0. \quad (3.56)$$

Luego, el control de mínima energía

$$u_{\acute{o}pt}(t) = -B_2'Px(t), \quad (3.57)$$

donde  $P \succ 0$  resuelve la Ec. (3.56) y  $\gamma$ -atenúa el contenido de energía de la perturbación en la salida.

Sin embargo aún no se tiene el controlador que minimice la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema realimentado, ya que para cada valor de  $\gamma$  se obtiene un valor de  $P$ , y con este último se construye  $G_u(s)$ .

La minimización de  $\gamma$ , y con ella la de  $\|G_u(s)\|_\infty$ , se obtiene mediante ensayo de prueba y error hasta lograr  $\gamma_{min}$ , sabiendo que por debajo de dicho valor no es factible encontrar  $P \succ 0$  que resuelva la Ec. (3.56).

De manera equivalente, según el teorema (3.2), la matriz Hamiltoniana asociada a la Ec.(3.56) que se escribe a continuación

$$H = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2' B_2' \\ C' C & A' \end{pmatrix},$$

no tiene autovalores sobre el eje imaginario  $j\omega$  si y sólo si  $\|G_u(s)\|_\infty < \gamma$ .

En el apéndice (A), subsección A.2.3, se muestra un procedimiento para minimizar esta norma, y así maximizar la atenuación del sistema a este tipo de perturbaciones.

**Nota:** Se arriba al mismo resultado, si para el sistema Ec.(3.41) se plantea optimizar la siguiente función de costo:

$$J(u, w) = \int_0^\infty (y(t)'y(t) + u'u - \gamma^2 w(t)'w(t)) dt, \quad (3.58)$$

y en este caso, optimizar significa hallar los valores de  $w$  y  $u$  óptimos de manera que:

$$J(u_{\acute{o}pt}, w) \leq J(u_{\acute{o}pt}, w_{\acute{o}pt}) \leq J(u, w_{\acute{o}pt}), \quad (3.59)$$

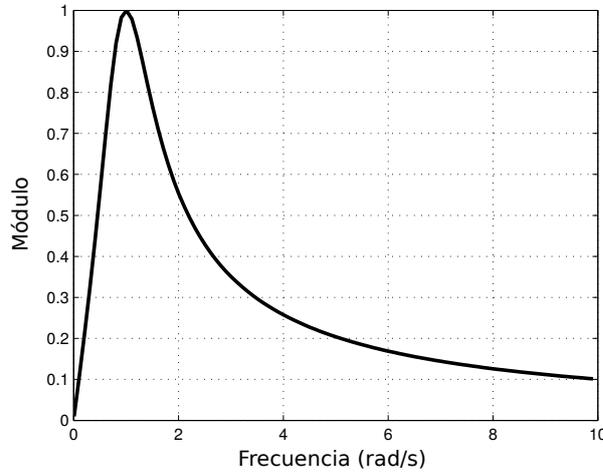
$$J_{\acute{o}pt} = J(u_{\acute{o}pt}, w_{\acute{o}pt}).$$

Es decir, se busca el valor de  $w$  para el cual se maximiza la función (3.58) (la peor perturbación) y el valor de  $u$  que la minimiza (el mejor control).

*Ejemplo 3.1. Considérese un sistema LTI, cuya función de transferencia es*

$$G(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 1}. \quad (3.60)$$

*En la Fig.(3.4) se muestra el módulo de su función respuesta en frecuencia en escala lineal, la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de este sistema SISO es el valor máximo de este módulo que como se observa,  $\|G(s)\|_\infty = 1$ .*

Figura 3.4: Respuesta en frecuencia de  $G(s)$ 

El mismo sistema representado en variable de estado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (3.61)$$

siendo sus matrices de estados, entrada y salida las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0).$$

A continuación se utilizará realimentación de estados, para minimizar su norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

El sistema realimentado resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \\ y(t) &= Cx(t), \\ u(t) &= K_u x(t). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Se elige  $B_2 = B_1$ , de manera que la manipulada actúe directamente sobre el primer estado.

Luego, utilizando la acción de control Ec.(3.57), donde  $P \succ 0$  resuelve la Ec.(3.56), se reduce el valor de  $\gamma$  hasta su valor mínimo.

En las Figs.(3.5) y (3.6) se muestra las respuestas en frecuencia de tres sistemas:

- La traza roja, es el módulo de la respuesta del sistema en lazo abierto.

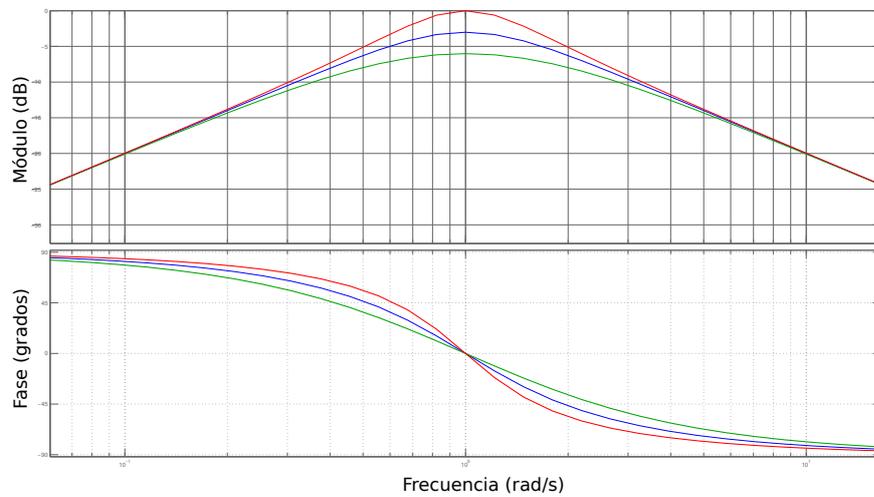


Figura 3.5: Respuesta en frecuencia en escala logarítmica

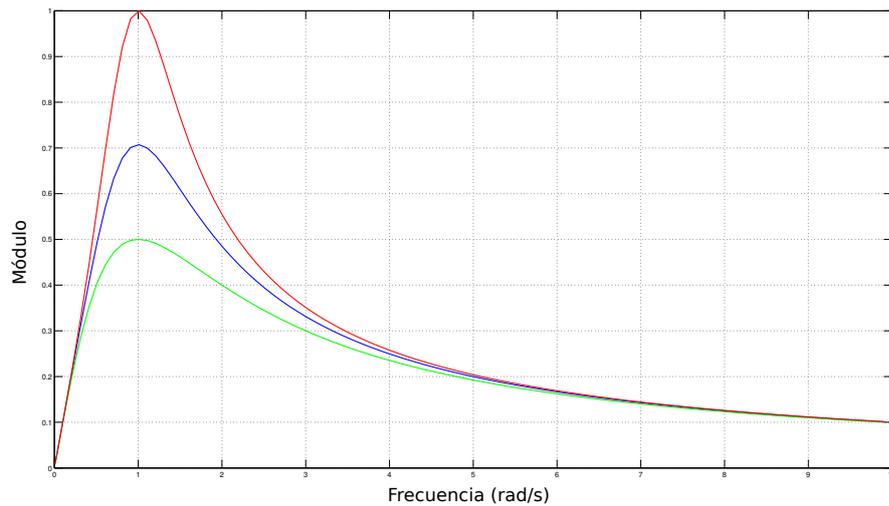


Figura 3.6: Respuesta en frecuencia en escala lineal

- La traza verde, es el módulo de la respuesta del sistema realimentado, donde la matriz  $P \succ 0$  resuelve la Ec. (3.56), con  $\gamma = 0,5$  o bien  $\gamma = -6\text{dB}$ , que es el menor valor de  $\|G_u(s)\|_\infty$  que pudo obtenerse para el sistema realimentado.
- La traza azul, es la respuesta del sistema realimentado LQR. En este sistema la matriz  $P \succ 0$  resuelve la Ec. (3.56), sin el término que incluye el parámetro  $\gamma$ , es decir, no hay restricciones para  $\|G_u(s)\|_\infty$ .

## 3.5. Resumen

En este capítulo se muestra cómo calcular de manera indirecta la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de un sistema LTI representado mediante el modelo de variable de estado.

En la Sección (3.3) se aborda este problema como un problema de optimización. El planteo es similar al  $LQR$ , pero en este caso se busca maximizar la energía de la señal que perturba al sistema en lazo abierto, sujeto a una restricción de estabilidad.

El resultado de este planteo conduce a modelar la perturbación como una realimentación de estado positiva, y la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema en lazo abierto puede calcularse haciendo uso de los teoremas (3.1) o (3.2).

Dado que para reducir los efectos de señales desconocidas sobre la salida del sistemas es necesario reducir la norma  $\mathcal{H}_\infty$ , en la Sección (3.4) se utiliza realimentación de estado para determinar una acción de control que minimice la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema realimentado.

En el siguiente capítulo, se realiza una introducción a las Desigualdades Lineales Matriciales (LMI), y se muestra como éstas están relacionadas con los problemas de sistemas de control.



# Capítulo 4

## Introducción Teórica a las LMI

### 4.1. Introducción

Recientemente se ha comprobado que una amplia gama de problemas de diseño de controladores pueden ser *reducidos* al problema de optimización convexa estándar, utilizando Desigualdades Lineales Matriciales o LMI<sup>1</sup>.

Su principal ventaja radica en que las mismas definen regiones convexas, es decir, el conjunto de especificaciones de diseño para el controlador es transformado en una intersección de regiones convexas.

Planteadas las especificaciones, como restricciones en formato LMI, la solución de encontrar un controlador que las satisfaga se resume a resolver un problema de optimización, y al ser este convexo, se tiene la certeza de que si existe solución esta es única.

En el presente capítulo se realiza una introducción a la teoría de las LMIs, se ejemplifica su convexidad, y se muestra como las LMIs pueden adaptarse a los problemas de diseño en los Sistemas de Control.

### 4.2. Teoría Básica de LMI

Se dice que una matriz  $F$  es negativa (o positiva)<sup>2</sup> definida, si y sólo si es simétrica, y la función cuadrática asociada  $v'Fv$  es menor (o mayor) que cero, para todo  $v \neq 0$  [Boyd et al., 1994], simbólicamente

$$\begin{aligned} F \prec 0, & \iff F = F' \wedge v'Fv < 0, \quad \forall v \neq 0, \\ F \succ 0, & \iff F = F' \wedge v'Fv > 0, \quad \forall v \neq 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

---

<sup>1</sup>LMI por su sigla en inglés, Linear Matrix Inequality.

<sup>2</sup>En el Anexo se demuestra que esta condición se satisface, si los autovalores de  $F$  son negativos (o positivos) respectivamente.

Si la matriz  $F$  depende de un vector  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]'$  en forma afín<sup>3</sup> del siguiente modo:

$$\mathcal{F}(x) \triangleq F_o + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_m F_m, \quad (4.2)$$

donde las matrices  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_m$ , son matrices simétricas, constantes y conocidas, entonces su condición de definida negativa (o positiva), esto es,

$$\mathcal{F}(x) = F_o + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_m F_m \prec 0, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{F}(x) = F_o + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_m F_m \succ 0,$$

recibe el nombre de la desigualdad matricial lineal o LMI.

Las componentes del vector  $x : \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , se llaman variables de decisión, y son las variables a determinar para las cuales se verifican las desigualdades (4.3).

A continuación se demostrará formalmente que las LMIs definen *regiones convexas* en el espacio  $\Re^m$  sobre la variable vectorial  $x$ .

Considere los vectores  $x_a = [x_{a1} \ x_{a2} \ \dots \ x_{am}]'$  y  $x_b = [x_{b1} \ x_{b2} \ \dots \ x_{bm}]'$ , de manera que para ambos vectores se cumple

$$F(x_a) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_{ai} F_i \prec 0, \quad (4.4)$$

y

$$F(x_b) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_{bi} F_i \prec 0. \quad (4.5)$$

Además, considere un escalar  $\lambda$ , tal que  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Multiplicando por  $\lambda$  la Ec.(4.4) y por  $(1 - \lambda)$  la Ec.(4.5), se tiene

$$\lambda F(x_a) = \lambda F_0 + \sum_{i=1}^m \lambda x_{ai} F_i \prec 0, \quad (4.6)$$

y

$$(1 - \lambda) F(x_b) = (1 - \lambda) F_0 + \sum_{i=1}^m (1 - \lambda) x_{bi} F_i \prec 0. \quad (4.7)$$

<sup>3</sup>Una combinación afín, es una combinación lineal más una constante.

Sumando las Ec. (4.6) y (4.7), resulta

$$F_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda x_{a_i} + (1 - \lambda)x_{b_i})F_i \prec 0, \quad (4.8)$$

y definiendo

$$x^* \triangleq (\lambda x_a + (1 - \lambda)x_b) = x_b + \lambda(x_a - x_b), \quad (4.9)$$

un punto cualquiera que pertenece al segmento de recta que une al punto  $x_a$  con el punto  $x_b$ , se cumple que

$$F(x^*) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i^* F_i \prec 0, \quad (4.10)$$

es decir, el punto  $x^*$  también satisface la desigualdad (4.4), quedando demostrada su convexidad.

### 4.3. Representación gráfica de las LMI

Para observar gráficamente cómo las LMIs representan regiones convexas, considere los siguientes ejemplos que se desarrollan a continuación.

#### 4.3.1. Ejemplo de Programación Lineal

En un problema de programación matemática lineal, tanto la función objetivo que se desea optimizar como las restricciones impuestas, son combinaciones lineales de las variables de decisión.

*Ejemplo 4.1. Considérese el siguiente problema de maximización ( [Noble and Daniel, 1989] ):*

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^2} \{f(x) = c'x\}, \\ \text{s.a : } Ax - b \leq 0, \\ x \geq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 40 \\ 90 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

**Resolución.** ▷

Utilizando los valores definidos en Ec.(4.12), el problema Ec.(4.11) puede reescribirse del siguiente modo:

Maximizar la función escalar

$$f(x) = 40x_1 + 60x_2, \quad (4.13)$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 2x_1 + x_2 - 70 \leq 0, \\ g_2(x) &= x_1 + x_2 - 40 \leq 0, \\ g_3(x) &= x_1 + 3x_2 - 90 \leq 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} g_4(x) &= x_1 \geq 0, \\ g_5(x) &= x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

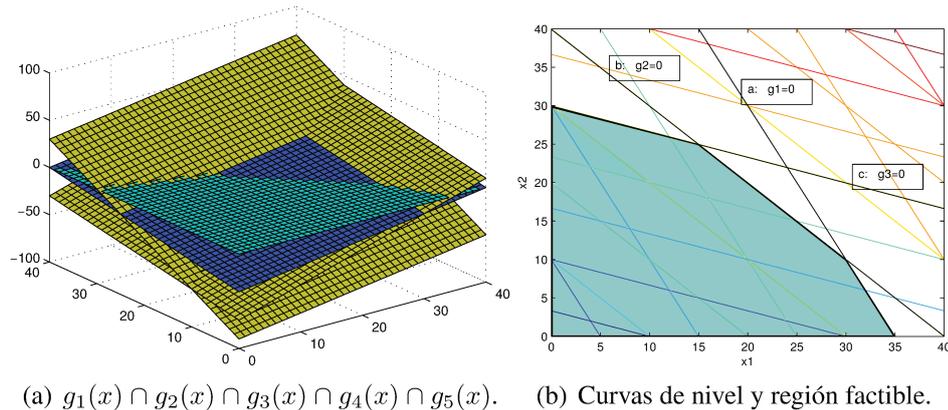


Figura 4.1: Restricciones lineales, región convexa poligonal

Obsérvese en la Fig.(4.1), que las rectas (a), (b) y (c), son las cotas superiores de las desigualdades (4.14), y junto con los ejes  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ , que son las cotas inferiores de las desigualdades (4.15), conforman un polígono que es la frontera de la región convexa en la cual el punto  $(x_1, x_2)$  debe estar confinado.

A esta región poligonal delimitada por las restricciones se la denomina región *factible*.

La solución óptima se puede obtener gráficamente, ya que para distintos valores de  $f(x) = \text{constante}$ , se tiene un conjunto de rectas paralelas, y al alejarse en dirección perpendicular a éstas,  $f(x)$  se maximiza.

Al maximizar  $f(x)$ ,  $x_1$  y  $x_2$  no pueden tomar sino aquellos valores que pertenecen a la región factible.

Es sabido que en los problemas de programación lineal, el óptimo está siempre en un vértice de la frontera, sin embargo, la intención de este ejemplo no es encontrar el óptimo sino mostrar la convexidad de la región factible y su representación mediante una LMI, que se realiza a continuación.

### Representación del interior del polígono mediante LMI

Obsérvese que el interior de la región poligonal, puede expresarse como

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{pmatrix} < 0^{(3 \times 1)}. \quad (4.16)$$

El objetivo ahora es representar la desigualdad anterior como una LMI. Para ello, se premultiplica el lado izquierdo de la desigualdad (4.16) por la matriz identidad ( $I^{(3 \times 3)}$ ), obteniéndose

$$\mathcal{F}(x) = x_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -70 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -90 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

es decir, se tiene

$$\mathcal{F}(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2.$$

A continuación se pide que  $\mathcal{F}(x)$  sea negativa definida, para lo cual se reagrupa la suma (4.17) en una única matriz, y se impone tal condición

$$\mathcal{F}(x) \triangleq \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 70 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 - 40 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + 3x_2 - 90 \end{pmatrix} < 0, \quad (4.18)$$

y como se dijo, esta desigualdad matricial se satisface si los autovalores de  $\mathcal{F}(x)$  son negativos, por tanto los elementos de la diagonal deberán cumplir que,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 70 &< 0, \\ x_1 + x_2 - 40 &< 0, \\ x_1 + 3x_2 - 90 &< 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

De esta manera, parte del conjunto de restricciones que determinan el interior de la región poligonal, quedan definidas por la LMI (4.18).

Por otro lado, la restricción de positividad sobre las variables de decisión, también puede reformularse mediante una LMI, definiendo la matriz

$$X(x) \triangleq \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \succ 0, \quad (4.20)$$

lo cual significa  $x_1 > 0$  y  $x_2 > 0$ . Resultando así la región convexa marcada en color de la Fig. 4.1 ◁

### 4.3.2. Restricciones no lineales

En el ejemplo anterior se ha mostrado como una región poligonal (convexa) puede representarse mediante una LMI, en dicho ejemplo, la matriz además de ser simétrica es diagonal.

Se generalizará este concepto para otras matrices simétricas y negativa definidas que no son diagonales, y como se verá, la región convexa que determinan no es poligonal.

Recuérdese que una matriz  $F(x)$  es negativa definida, si y sólo si, la función escalar  $v'F(x)v < 0$ , para todo  $v \neq 0$ .

Las siguientes proposiciones son equivalentes, y garantizan que  $F(x) \prec 0$ :

1. Todos los autovalores de  $F(x)$  deben ser negativos.
2. Los determinantes de las submatrices principales deben alternar su signo, comenzando con el signo menos.

A esta segunda condición se la conoce como teorema de Sylvester, y se la desarrolla mediante el siguiente ejemplo [Boyd et al., 1994].

*Ejemplo 4.2. Considere la matriz simétrica, en la que sus elementos son combinaciones afines en la variables  $x_1$  y  $x_2$ ,*

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

*Se desea determinar el conjunto de valores de estas variables, para las cuales la matriz  $\mathcal{F}(x)$  es negativa definida.*

*Esto es, encontrar  $x_1$  y  $x_2$  tal que  $\mathcal{F}(x) \prec 0$  ◻*

**Resolución.** ▷

Obsérvese que aunque  $\mathcal{F}(x)$  puede representarse como una combinación afín

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

<sup>4</sup>En este ejemplo no se pondrán restricciones sobre las variables de decisión.

que da lugar a la forma canónica con que se han definido las LMIs,

$$\mathcal{F}(x) = F_0 + \sum_{i=1}^2 x_i F_i \prec 0,$$

no es habitual que dichas desigualdades se presenten con este formato.

Retomando la E.(4.21), las submatrices principales de  $\mathcal{F}(x)$  son:

$$\left( x_1 - 3 \right), \quad \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo uso de la condición 2, se obtienen las siguientes desigualdades polinómicas que deben cumplirse simultáneamente para garantizar que  $\mathcal{F}(x)$  sea definida negativa:

$$\begin{aligned} (x_1 - 3) &< 0, \\ (x_1 - 3)(x_2 - 4) - (x_1 + x_2)(x_1 + x_2) &> 0, \\ x_1[(x_1 - 3)(x_2 - 4) - (x_1 + x_2)(x_1 + x_2)] + (x_2 - 4) &< 0. \end{aligned}$$

Las mismas pueden reescribirse como:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} g_1(x) &\triangleq (x_1 - 3) < 0, \\ g_2(x) &\triangleq (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - 3)(x_2 - 4) < 0, \\ g_3(x) &\triangleq x_1[(x_1 - 3)(x_2 - 4) - (x_1 + x_2)^2] + (x_2 - 4) < 0, \end{aligned} \tag{4.23}$$

y se observa que:

1.  $g_1(x)$  es una función lineal,
2.  $g_2(x)$  es una función cuadrática, y
3.  $g_3(x)$  es una función cúbica.

En la Fig.(4.2) se grafican las tres superficies  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  y  $g_3(x)$ , y también se grafican sus trazas o curvas de nivel, la intersección de las mismas con el plano  $(x_1, x_2)$ , es la frontera o cota superior de la región factible para cada una de las restricciones.

El conjunto factible para  $x_1$  y  $x_2$ , es el interior de la región formada por la intersección de estas tres regiones, y como se observa en la Fig.(4.3) es un conjunto convexo.  $\triangleleft$

<sup>5</sup>Notar que se cambió el signo en la segunda desigualdad, para poder graficarla e interpretarla con mayor comodidad.

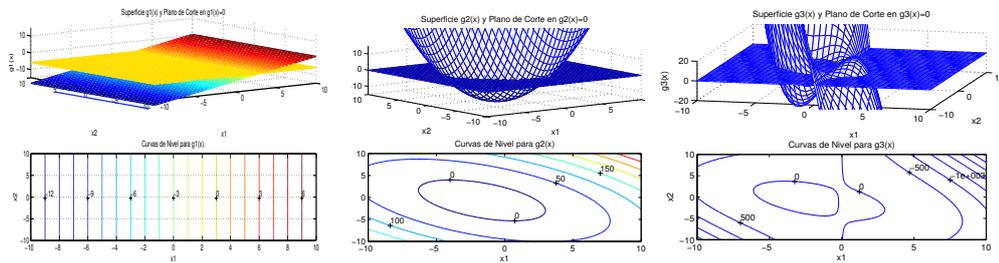


Figura 4.2: Restricciones lineal, cuadrática y cúbica, y sus curvas de nivel.

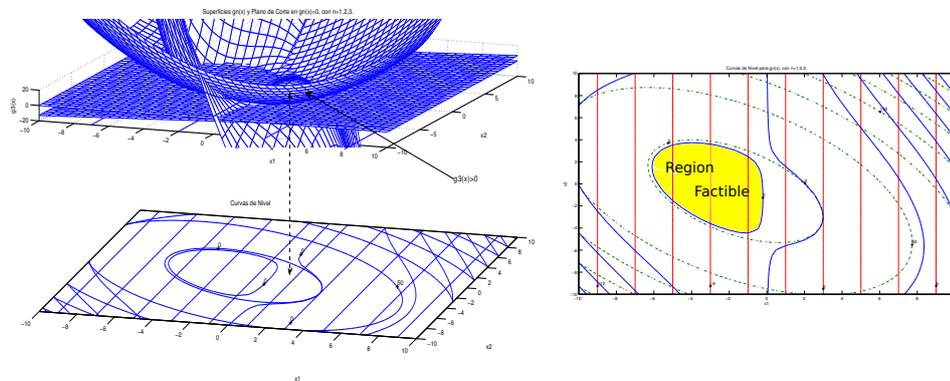


Figura 4.3: Región Factible

### 4.3.3. Múltiples LMIs, Intersección de Regiones

Cuando se tiene múltiples LMIs, éstas pueden ser combinadas en una sola. Sabiendo que cada LMI define una región convexa de valores factibles, la LMI ampliada definirá una región que será la intersección de las regiones individuales.

*Ejemplo 4.3. Considérese las siguientes LMIs:*

$$\mathcal{F}_A(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{F}_B(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 2 & 0 \\ 0 & -x_1 - 5 \end{pmatrix} \prec 0. \quad (4.25)$$

La desigualdad matricial (4.25) implica que

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2 &< 0, \quad y \\ -x_1 - 5 &< 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

En la Fig.4.4 se muestra la región factible generada por segunda LMI, mientras que la región factible generada por  $\mathcal{F}_A(x) \prec 0$ , fue mostrada en el ejemplo anterior.

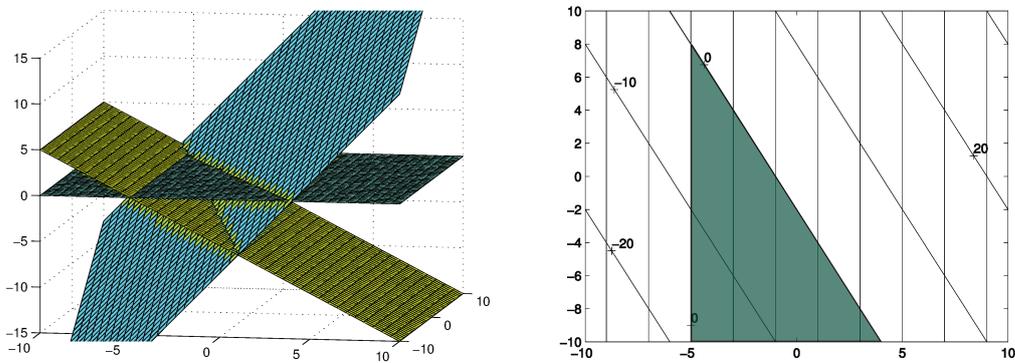


Figura 4.4: Región Factible  $\mathcal{F}_B(x) \prec 0$ .

Las matrices correspondientes a las dos LMIs pueden combinarse en una única matriz, cuya diagonal está formada por bloques simétricos que corresponden a las LMIs individuales, como se muestra a continuación:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 & 0 & 0 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 + x_2 + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 - 5 \end{pmatrix} \prec 0. \quad (4.27)$$

Como establece el teorema de Sylvester, los determinantes de las submatrices principales deben alternar su signo comenzando por el signo menos.

Los primeros tres determinantes correspondiente al primer bloque de la Ec.(4.27), ya fueron calculados en el ejemplo anterior y están dados por las Ecs.(4.23).

Los determinantes correspondientes a las otras dos submatrices principales son los siguientes:

$$\begin{aligned} g_4(x) \triangleq g_3(x)[2x_1 + x_2 + 2] > 0, & \Rightarrow [2x_1 + x_2 + 2] < 0, \\ g_5(x) \triangleq g_4(x)[-x_1 - 5] < 0, & \Rightarrow [-x_1 - 5] < 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Obsérvese que la desigualdades (4.28) se corresponden con la condición expresada en (4.26) para  $\mathcal{F}_B(x)$ .

En la Fig. (4.5) se muestra la región factible para la desigualdad (4.27).

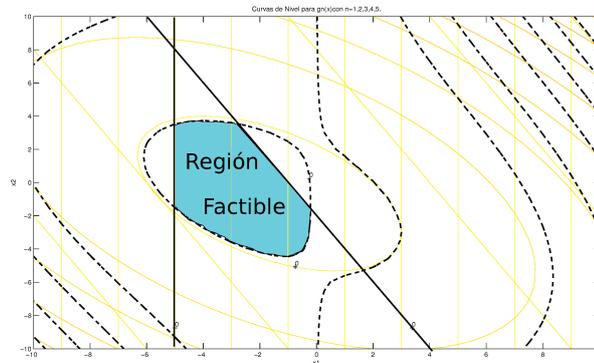


Figura 4.5: Múltiples LMIs. Intersección de regiones convexas.

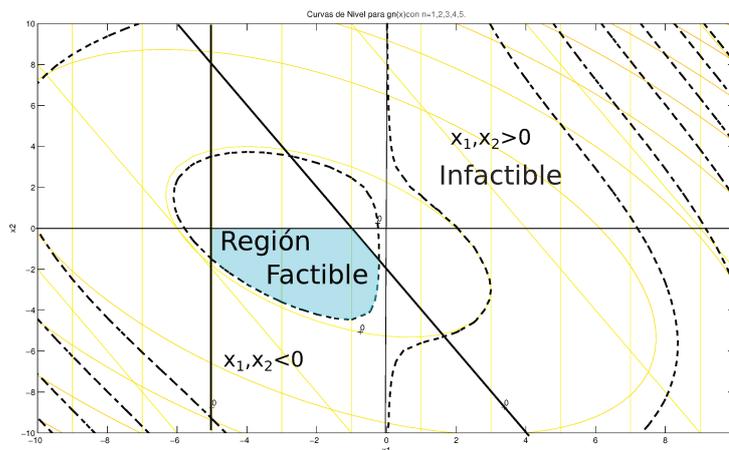


Figura 4.6: Región Factible  $\mathcal{F}(x) \prec 0$  y  $X(x) \prec 0$ .

En la Fig.(4.6), se ha agregado la restricción sobre las variables de decisión

$$X(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.29)$$

la región factible mostrada en esta figura, se corresponde con la condición  $\mathcal{F}(x) \prec 0$  y  $X(x) \prec 0$ .

Nótese que de haberse pedido  $\mathcal{F}(x) \prec 0$  y  $X(x) \succ 0$ , el resultado hubiera sido infactible, porque las dos regiones  $\mathcal{F}(x) \prec 0$  y  $X(x) \succ 0$ , no tienen elementos en común.

Nótese además, que la restricción dada en la LMI (4.29) también podría agregarse como bloque simétrico en la diagonal de  $\mathcal{F}(x)$ , quedando esta última expresada como

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 + x_2 + 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 - 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \prec 0. \quad (4.30)$$

**Nota:** Si la restricción dada en la LMI (4.29) fuese positiva definida, debería multiplicarse por  $(-1)$ , para poder ser agregada en la LMI (4.30).

#### 4.3.4. Restricciones en las variables de decisión

Del mismo modo, en que las matrices diagonales se generalizan a matrices simétricas no diagonales y la región poligonal que las primeras definen, se transforman en regiones no poligonales convexas; el espacio rectangular que forman los ejes de referencias determinados por las variables de decisión, es transformado a un espacio cónico como se verá en el siguiente ejemplo.

*Ejemplo 4.4.* Considérese la siguiente LMI en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , formado por las variables de decisión  $x_1, x_2$  y  $x_3$ ,

$$\mathcal{F}(x) = F_0 + \sum_{i=1}^3 x_i F_i \succ 0, \quad F_i = F_i', \quad \text{con } i = 0, 1, 2, 3. \quad (4.31)$$

Como se vio en la Sección 4.2 esta desigualdad define un espacio convexo.

A continuación, se mostrará que con dicha LMI se puede definir un subespacio rectangular o un subespacio cónico, dependiendo de la elección de las matrices  $F_i$ .

### Subespacio rectangular:

Si se elijen las matrices  $F_i$  como:

$$\begin{aligned} F_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & F_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & F_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

la LMI (4.31) queda expresada del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \succ 0, \\ \mathcal{F}(x) &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \triangleq X \succ 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

La desigualdad (4.32) se satisface si los autovalores de la matriz  $X$ , que son las variables de decisión, son estrictamente positivos, esto es:

$$\lambda_1 = x_1 > 0, \quad \lambda_2 = x_2 > 0, \quad \lambda_3 = x_3 > 0.$$

### Subespacio cónico:

Ahora bien, si se elijen las matrices  $F_i$  como:

$$\begin{aligned} F_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & F_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & F_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

la LMI (4.31) queda expresada del siguiente modo:

$$\mathcal{F}(x) = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \triangleq X \succ 0. \quad (4.33)$$

La desigualdad (4.33) se satisface si los autovalores de la matriz  $X$  son estrictamente positivos, o de manera equivalente según la condición de Sylvester, si los determinantes de las submatrices principales son estrictamente positivos, esto es:

$$g_1(x) = x_1 > 0, \quad g_2(x) = x_1x_2 - x_3^2 > 0.$$

Las dos regiones determinadas por las desigualdades (4.32) y (4.33), se muestran en la Fig. (4.7).

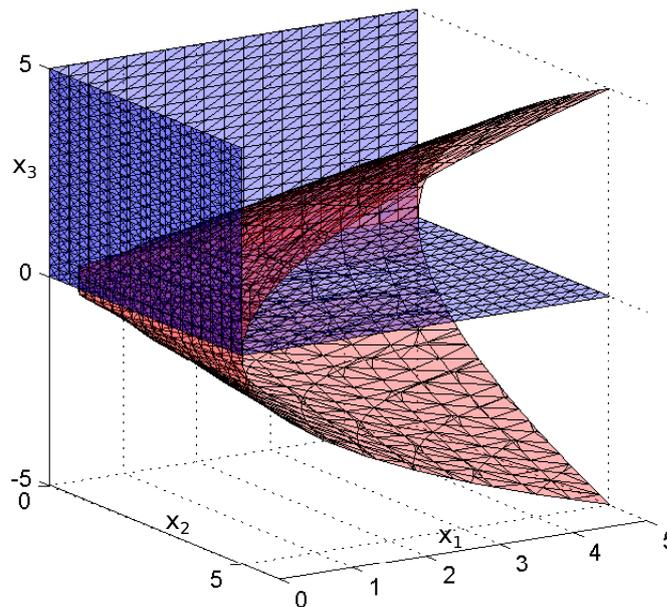


Figura 4.7: Dominios rectangular y cónico de las variables de decisión

Cabe destacar que en los problemas de control que involucran LMIs, las variables de decisión son matrices simétricas como la mostrada en la desigualdad matricial (4.33), por lo que el dominio de búsqueda de la solución es cónico, como se verá en la Sección (4.4.3).

## 4.4. Transformación de Desigualdades Matriciales Cuadráticas en LMI

En esta sección se mostrará a través de un ejemplo, aunque sin pérdida de generalidad, algunas características de las LMIs que permitirán relacionarlas con las desigualdades matriciales cuadráticas, que aparecen frecuentemente en problemas de control.

### 4.4.1. Variables Matriciales

Retomándose la LMI del ejemplo 4.2 de la Sección 4.3.2 se observa que la misma puede ser representada mediante el siguiente formato:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} L(x) & Q(x) \\ Q'(x) & R(x) \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.34)$$

donde,

$$L(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R(x) = (x_1). \quad (4.35)$$

Se observa también, que en los elementos de estos cuatro bloques matriciales, las variables de decisión o no aparecen, o aparecen en combinaciones afines, siendo además  $L(x)$  y  $R(x)$  matrices simétricas.

**Remarca:** La forma en que la desigualdad (4.34) representa una LMI, junto con la fórmula del **complemento de Schur**, que se verá en la próxima subsección, permite transformar Desigualdades Matriciales Cuadráticas en LMI, y esta transformación es la clave para reformular los problemas de control en problemas de optimización convexa.

Si se describen  $L(x)$  y  $R(x)$  del siguiente modo,

$$L(x) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(x) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y definiendo

$$L_0 \triangleq \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad L_1 \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X \triangleq \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix},$$

se tiene,

$$L(x) = L_0 + L_1 X + X L_2, \quad (4.36)$$

$$R(x) = R_1' X R_1.$$

Reemplazando las Ecs. (4.36) en la Ec. (4.34), la LMI (4.21) queda representada como:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} L_0 + L_1 X + X L_2 & Q \\ Q' & R_1' X R_1 \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.37)$$

donde en esta última expresión, se observa que las variables de decisión también pueden estar expresadas como *variables matriciales*, y estas variables o no aparecen, o aparecen en forma afín en cada término de la LMI.

#### 4.4.2. Complemento de Schur

En esta subsección, se darán condiciones equivalentes para determinar cuando una matriz simétrica es positiva definida o negativa definida<sup>6</sup>.

La fórmula del complemento de Schur, establece que las siguientes proposiciones son equivalentes [Colmenares and Tadeo, 2005]:

##### Teorema 4.1.

$$a) \text{ Si } L \succ 0, \quad y \quad R - Q' L^{-1} Q \succ 0, \quad (4.38)$$

ó

$$b) \text{ Si } R \succ 0, \quad y \quad L - Q R^{-1} Q' \succ 0, \quad (4.39)$$

entonces

$$S_1 = \begin{pmatrix} L & Q \\ Q' & R \end{pmatrix} \succ 0. \quad (4.40)$$

##### Demostración.

Téngase en cuenta que una matriz simétrica y positiva definida, tiene todos sus autovalores reales y positivos, es decir, dicha matriz es de rango completo y por lo tanto tiene inversa.

<sup>6</sup>Se recuerda que al tratar con matrices definidas y no semidefinidas, los valores factibles de las variables de decisión son interiores al conjunto delimitado por la LMI, sin alcanzar su frontera.

Considerando la proposición (a), si  $L \succ 0 \Rightarrow \exists L^{-1}$ , y por lo tanto es posible construir la siguiente matriz regular<sup>7</sup>

$$T_1 \triangleq \begin{pmatrix} I & -L^{-1}Q \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Con esta matriz se puede realizar una diagonalización de la matriz  $S_1$ , en efecto, definiendo  $D_1 \triangleq T_1' S_1 T_1$  se tiene

$$D_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Q'L^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & Q \\ Q' & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -L^{-1}Q \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & R - Q'L^{-1}Q \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Según se vió en la subsección (4.3.3),  $D_1$  es una LMI formada por la intersección de dos LMIs, por lo tanto, si la Ec.(4.42) cumple con la proposición (a), entonces  $D_1 \succ 0$ .

Ahora bién,  $S_1$  puede reescribirse como

$$S_1 = (T_1')^{-1} D_1 (T_1)^{-1}, \quad (4.43)$$

y siendo  $T_1$  una matriz regular entonces  $S_1 \succ 0$ .

Procediendo de manera similar con la proposición (b), se define la siguiente matriz regular de transformación:

$$T_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}Q' & I \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Definiendo  $D_2 \triangleq T_2' S_2 T_2$ , se tiene

$$D_2 = \begin{pmatrix} L - QR^{-1}Q' & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

y si se cumple con la proposición (b), resulta que  $D_2 \succ 0$ .

Reescribiendo a  $S_2$  como

$$S_2 = (T_2')^{-1} D_2 (T_2)^{-1}, \quad (4.46)$$

y siendo  $T_2$  una matriz regular, entonces  $S_2 \succ 0$ .  $\square$

Para las matrices *negativas definidas*, se tienen las siguientes proposiciones equivalentes:

<sup>7</sup>No tiene autovalores nulos, es decir, es una matriz cuadrada e invertible.

**Teorema 4.2.**

$$a) \text{ Si } L \prec 0 \quad \text{y} \quad R - Q'L^{-1}Q \prec 0, \quad (4.47)$$

ó

$$b) \text{ Si } R \prec 0 \quad \text{y} \quad L - QR^{-1}Q' \prec 0, \quad (4.48)$$

entonces,

$$c) S_1 = \begin{pmatrix} L & Q \\ Q' & R \end{pmatrix} \prec 0.$$

Su demostración es similar a la realizada anteriormente.

**4.4.3. Uso de LMIs en problemas de control**

En esta subsección se realizará un ejemplo numérico para visualizar como las Desigualdades Matriciales Cuadrática, asociadas a los problemas de control, definen regiones convexas.

De acuerdo con el teorema (3.1) desarrollado en la Sección (3.3), un sistema LTI cuya función de transferencia estable dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.49)$$

y su norma  $\mathcal{H}_\infty$  es menor que un escalar positivo  $\gamma$ , entonces existe una matriz positiva definida  $P$ , que verifica la siguiente desigualdad matricial:

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PBB'P + C'C \prec 0. \quad (4.50)$$

Como se dijo, se trata de un problema de factibilidad, ya que la afirmación anterior garantiza que si existe (es decir, si es factible encontrar)  $P \succ 0$ , tal que satisfaga la desigualdad matricial (4.50), entonces

$$\|G(j\omega)\|_\infty < \gamma, \quad (4.51)$$

para algún  $\gamma > 0$ .

Por el contrario, si  $\gamma < \|G(j\omega)\|_\infty$ , entonces no existe  $P \succ 0$  que la satisfaga.

La Ec. (4.50) es una ecuación matricial cuadrática,<sup>8</sup> que tiene a la matriz  $P$  como incógnita, el objetivo ahora es mostrar que las desigualdades

$$\begin{aligned} A'P + PA + \gamma^{-2}PBB'P + C'C &\prec 0, \\ P &\succ 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

<sup>8</sup>Observar que el tercer término ( $PBB'P$ ), no es lineal.

definen o representan el interior de una región convexa que tiene a la ecuación

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PBB'P + C'C = 0$$

como frontera, siempre y cuando se verifique (4.51).

Para lograr dicho objetivo, el primer paso consiste en transformar la desigualdad cuadrática (4.52) en una LMI, utilizando el complemento de Schur.

Definiendo

$$L(P) \triangleq ( A'P + PA + C'C ), \quad Q(P) \triangleq ( PB ),$$

$$Q(P)' \triangleq ( B'P ), \quad R \triangleq ( -\gamma^2 ),$$

y utilizando la proposición (4.47), la desigualdad cuadrática (4.52) puede reescribirse como

$$\mathcal{F}(P) = \begin{pmatrix} A'P + PA + C'C & PB \\ B'P & -\gamma^2 \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succ 0. \quad (4.53)$$

A continuación se retomará el ejemplo (3.1), para visualizar estos conceptos.

*Ejemplo 4.5. Considérese nuevamente el sistema LTI del ejemplo 3.1 cuya traza de Bode en escala lineal se redibuja en la Fig. (4.8). Como se muestra en dicha figura su norma  $\mathcal{H}_\infty$ , es decir, el valor máximo de su traza es  $\|G(j\omega)\|_\infty = 1$ .*

**Resolución.** ▷

Según lo dicho, si se elige  $\gamma \geq 1$ , las LMIs (4.53) representan una región factible, pero si se elige  $\gamma < 1$ , ya no es posible encontrar  $P \succ 0$  que la satisfaga.

Para comprobar esto, es necesario representar al sistema de la ec. (3.60) en el espacio de estado, en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t), \\ z(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Siendo la función de transferencia,

$$G(s) = \frac{z(t)}{w(t)} = C(sI - A)^{-1}B_1, \quad (4.55)$$

sus valores numéricos de las matrices para este sistema son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = ( 1 \ 0 ),$$

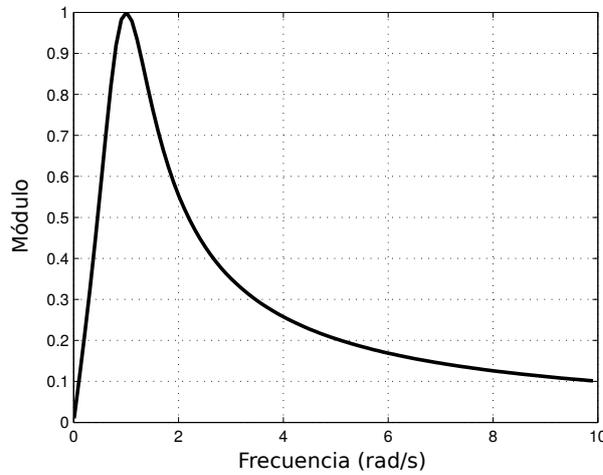


Figura 4.8: Respuesta en frecuencia de G(s)

y la matriz incógnita, cuyos elementos son las variables de decisión es

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \succ 0.$$

Con estos datos, se construyen los 4 bloques matriciales de la LMI (4.53).

**Bloque: 1,1**

$$L(P) = (A'P + PA + C'C),$$

$$L(P) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L(P) = \begin{pmatrix} -p_1 + p_3 & -p_3 + p_2 \\ -p_1 & -p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_1 + p_3 & -p_1 \\ -p_3 + p_2 & -p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resultando

$$L(P) = \begin{pmatrix} 2(-p_1 + p_3) + 1 & -p_3 + p_2 - p_1 \\ -p_1 - p_3 + p_2 & -2p_3 \end{pmatrix}. \tag{4.56}$$

**Bloque: 1,2**

$$Q(P) = (PB),$$

$$Q(P) = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resultando

$$Q(P) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

**Bloque: 2,1**

$$Q'(P) = ( p_1 \ p_3 ). \quad (4.58)$$

**Bloque: 2,2**

$$R = ( -\gamma^2 ). \quad (4.59)$$

Componiendo estos 4 bloques, se reescribe la desigualdad (4.53) del siguiente modo:

$$\mathcal{F}(P) = \begin{pmatrix} 2(p_3 - p_1) + 1 & p_2 - p_1 - p_3 & p_1 \\ p_2 - p_1 - p_3 & -2p_3 & p_3 \\ p_1 & p_3 & -\gamma^2 \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.60)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \succ 0.$$

Planteadas las LMI de esta forma, se puede aplicar el teorema de Sylvester, es decir, la matriz  $\mathcal{F}(P)$  es negativa definida, si y sólo si, los determinantes de las submatrices principales alternan su signo, comenzando con el signo negativo.

Por lo tanto la matriz<sup>9</sup>

$$\mathcal{F}(P) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & -\gamma^2 \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.61)$$

si y sólo si,

$$g_1 \triangleq f_{11} < 0, \quad (4.62)$$

$$g_2 \triangleq -(f_{11}f_{22} - f_{12}^2) < 0, \quad (4.63)$$

$$g_3 \triangleq f_{13}[f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22}] - f_{23}[f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}] - \gamma^2[f_{11}f_{22} - f_{12}^2] < 0. \quad (4.64)$$

Notar, que de manera intencional no se ha reemplazado el elemento  $[f_{33}]$  para dejar en evidencia que solo la desigualdad (4.64) depende del parámetro  $\gamma$ .

<sup>9</sup>  $\mathcal{F}(P)$  se expresa de esta forma para simplificar la notación.

Aplicando el mismo teorema, la matriz  $P$  es positiva definida, si y sólo si los determinantes de las submatrices principales son todos positivos; por lo tanto debe cumplirse que<sup>10</sup>

$$g_4 \triangleq -p_1 < 0, \quad (4.65)$$

$$g_5 \triangleq -(p_1 p_2 - p_3^2) < 0. \quad (4.66)$$

A continuación, se representan gráficamente los subespacios que delimitan estas desigualdades.

Como en el ejemplo bidimensional (4.2), la región factible es el interior de la intersección de todas estas regiones generadas por las desigualdades  $g_i < 0$ , con  $i = 1, \dots, 5$ .

Las superficies mostradas en las figuras: Fig. (4.9) son las cotas superiores para estas desigualdades, es decir, estas superficies se obtienen haciendo  $g_i = 0$ , con  $i = 1, \dots, 5$ .

Obsérvese que solamente la superficie que representa a  $g_3 = 0$  (color amarillo) depende paramétricamente de  $\gamma$ , y es en el interior de esta superficie donde se debe encontrar  $P \succ 0$ , tal que satisfaga la LMI (4.52).

En las sucesivas gráficas se observa, que a medida que el parámetro  $\gamma$  se reduce y se acerca a 1, la superficie  $g_3 = 0$  reduce su volumen dentro de la región factible y comienza a crecer fuera de ésta.

Las subfiguras (e) y (f) representan el problema de infactibilidad.

Para  $\gamma = 1$ , la superficie  $g_3 = 0$  dentro del conjunto factible es un punto (no puede apreciarse en el dibujo), y para este valor de  $\gamma$  la matriz Hamiltoniana asociada tiene autovalores sobre el eje  $j\omega$ , según afirma el teorema (3.2) de la sección(3.3).

Para  $\gamma < 1$ , la superficie  $g_3 = 0$  está fuera de la región delimitada por las otras desigualdades, es decir, para estos últimos dos casos no existe  $P \succ 0$  que satisfaga simultáneamente todas las restricciones, y por lo tanto, el problema no tiene solución o es infactible.  $\triangleleft$

## 4.5. Resumen

En este capítulo se ha realizado una introducción teórica sobre una herramienta matemática denominada Desigualdades Lineales Matriciales (LMI).

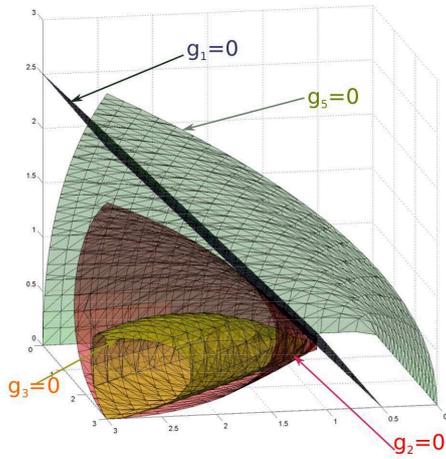
A través de distintos ejemplos y mediante representaciones gráficas se ha mostrado que las LMIs definen regiones convexas, también se ha mostrado que múl-

<sup>10</sup>Obsérvese que tanto en  $g_2$  como en  $g_4$  y  $g_5$ , se ha multiplicado por  $(-1)$  para mantener el mismo tipo de desigualdad.

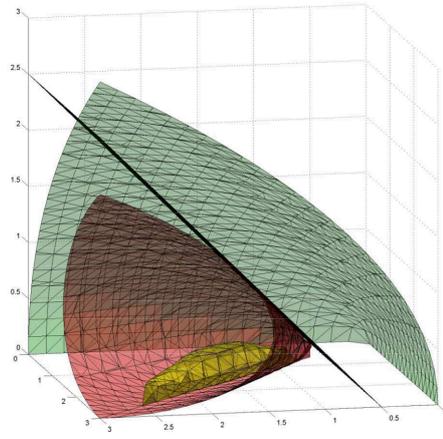
tiples LMIs implica la intersección de dichas regiones, intersección que puede o no, dar como resultado un conjunto vacío.

Además, se ha mostrado cómo el complemento de Schur permite transformar una Desigualdad Matricial Cuadrática en una Desigualdad Matricial Lineal. Y por último, se ha realizado un ejemplo donde se utilizan las LMIs para determinar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de un sistema.

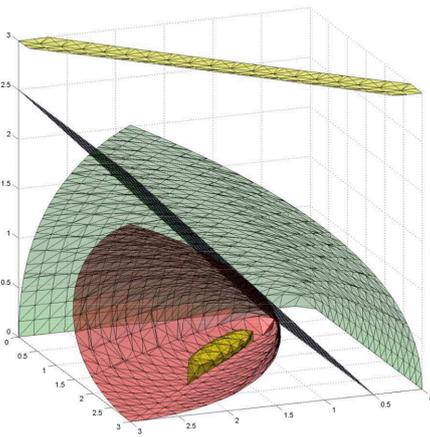
En el siguiente capítulo se analizarán las LMIs utilizadas para resolver un problema de control denominado: síntesis mezclada  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .



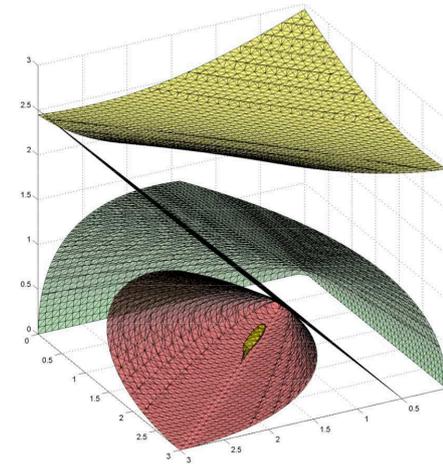
(a)  $\gamma = 1,6$ .



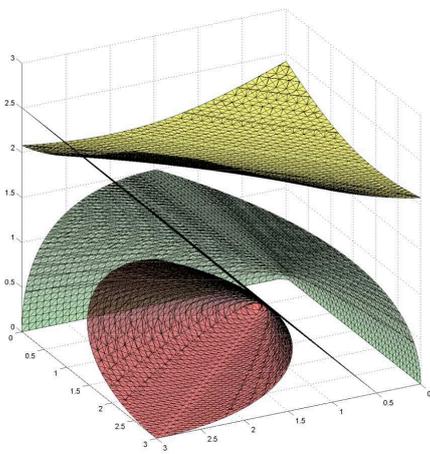
(b)  $\gamma = 1,3$ .



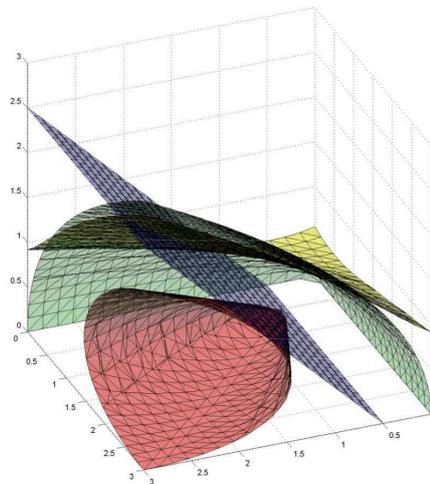
(c)  $\gamma = 1,2$ .



(d)  $\gamma = 1,1$ .



(e)  $\gamma = 1$ . Problema infactible.



(f)  $\gamma = 0,7$ . Problema infactible.

Figura 4.9: Curvas de nivel y región factible.



# Capítulo 5

## Regulador $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_\infty$

### 5.1. Introducción

En la Sección (2.4) se vió que haciendo uso de una adecuada salida auxiliar  $z_2(t)$ , el regulador óptimo podía resolverse minimizando la norma  $\mathcal{H}_2$  de la función de transferencia que relaciona dicha salida con una perturbación de estados impulsiva. Es decir, el regulador óptimo tradicional puede tratarse como un caso particular de la minimización de la norma  $\mathcal{H}_2$ .

También para señales de espectro de energía plano, como lo es el ruido blanco gaussiano que proviene de los sensores de medición, una acción de control que minimice esta norma sobre una determinada función de transferencia, minimiza los efectos del ruido sobre la salida elegida.

Por otro lado, como se vió en la Sección (3.4), cuando la forma de la perturbación es desconocida, minimizar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema realimentado es la mejor opción que se dispone para poder minimizar los efectos de la perturbación sobre alguna salida seleccionada.

En la Sección (5.2), se reven brevemente estos conceptos en el dominio frecuencial sobre un modelo entrada-salida (TLF), representación mediante la cual es posible plantear cualquier sistema de control SISO o MIMO.

En la Sección (5.3), se replantean la formulación  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  bajo el modelo de espacio de estados para poder abordarlos mediante el uso de LMIs.

En la Sección (5.4), se discute la síntesis de controladores por realimentación de estados haciendo uso de restricciones LMIs, que permite satisfacer las especificaciones de diseño citadas anteriormente en forma simultánea, lo que se conoce como *Síntesis Mezclada  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$* .

Por último, en la Sección (5.5) se presenta un ejemplo de aplicación típico de la literatura, donde se muestran distintas simulaciones utilizando estas técnicas para el cálculo del controlador.

## 5.2. Especificaciones

Considérese el sistema LTI representado en la Fig.(5.1), en donde se presentan los dos bloques principales, el proceso y el controlador lineal de estados.

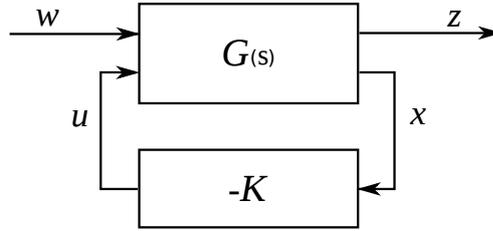


Figura 5.1: Diagrama en bloque de dos puertos para el control  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$ .

La matriz de transferencia de la planta  $G(s)$  tiene la forma

$$\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{zw} & G_{zu} \\ G_{xw} & G_{xu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Aquí, las transferencias de la primera columna están definidas con  $u = 0$ , mientras que las transferencias de la segunda columna están definidas con  $w = 0$ .

La ecuación para el controlador lineal de estados resulta

$$u = -Kx. \quad (5.2)$$

Combinando las Ecs.(5.1) y (5.2), se obtiene la matriz de funciones de transferencias en lazo cerrado que relaciona las salidas reguladas y las entradas exógenas, esto es:

$$T_{zw} = G_{zw} - G_{zu}K(I + G_{xu}K)^{-1}G_{xw}, \quad (5.3)$$

de manera que,

$$z(s) = T_{zw}(s)w(s). \quad (5.4)$$

Asumiendo que  $w$  es un vector de perturbaciones, pues se trata de un problema de regulación, el objetivo que se persigue es encontrar una ganancia de realimentación  $K$ , tal que garantice la estabilidad de la planta y que minimice el contenido de energía del vector de salida, de manera que los efectos de  $w$  sobre  $z$ , en términos energéticos sean mínimos.

El contenido de energía del vector  $z(t)$ , está expresado en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \int_0^\infty z(t)'z(t) dt \\ &= \text{Traza} \int_0^\infty z(t)z(t)' dt, \end{aligned} \quad (5.5)$$

y utilizando la relación de Parseval, su contenido de energía en el dominio frecuencial resulta<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(j\omega)^* z(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{Traza} \int_{-\infty}^{\infty} z(j\omega) z(j\omega)^* d\omega. \end{aligned} \quad (5.6)$$

En la sección (3.2) se vio para sistemas SISO que la minimización del contenido de energía  $\|z\|_2^2$ , se realiza según el tipo de perturbación.

En efecto, si la densidad espectral de potencia de la señal  $w$  es plana dentro del ancho de banda de interés, como es el caso del ruido blanco o señales impulsivas, entonces debe minimizarse la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema realimentado, ya que si  $\|w\|_2$  es constante, se tiene

$$\|z\|_2 = \|T_{zw}\|_2 \|w\|_2. \quad (5.7)$$

Por el contrario, si  $w$  es una perturbación de energía finita de forma o espectro desconocido, entonces debe minimizarse la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema realimentado, ya que siempre ha de cumplirse que

$$\|z\|_2 \leq \|T_{zw}\|_\infty \|w\|_2. \quad (5.8)$$

Estos mismos conceptos se aplican a sistemas MIMO, donde la norma  $\mathcal{H}_2$  de un sistema se define como:

$$\begin{aligned} \|T_{zw}\|_2 &\triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \text{Traza} \int_{-\infty}^{\infty} T_{zw}^*(j\omega) T_{zw}(j\omega) d\omega} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \text{Traza} \int_{-\infty}^{\infty} T_{zw}(j\omega) T_{zw}^*(j\omega) d\omega}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

mientras que su norma  $\mathcal{H}_\infty$  se define del siguiente modo:

$$\|T_{zw}\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \{\sigma_{\text{máx}}(T_{zw}(j\omega))\},$$

siendo  $\sigma_{\text{máx}}$  el máximo valor singular de la matriz  $T_{zw}(j\omega)$ .

A continuación, se buscarán cotas para estas normas, es decir, se determinarán las condiciones que deben cumplirse en el dominio temporal para garantizar que

$$\|T_{zw}\|_2 < \beta, \quad (5.10)$$

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma,$$

donde  $\beta$  y  $\gamma$  son escalares reales y positivos, utilizados como parámetros de diseño para lograr cierto desempeño del sistema realimentado.

<sup>1</sup>donde,  $z(j\omega)^* = z(-j\omega)'$ .

### 5.3. Formulación $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_\infty$ en variables de estado

Considérese el siguiente sistema MIMO bajo la representación de estados:

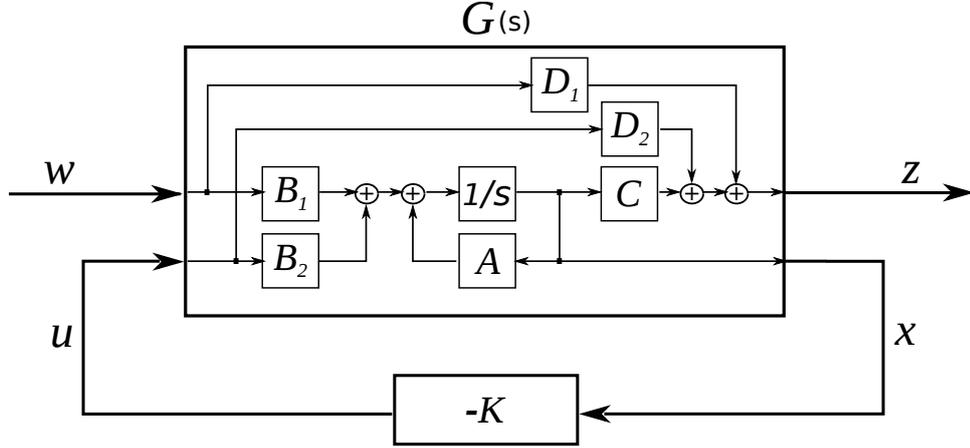


Figura 5.2: Diagrama en bloque de dos puertos para el control  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \\ z(t) &= Cx(t) + D_1w(t) + D_2u(t), \\ u(t) &= -Kx(t). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Comparando con la Fig. (5.1) y la Ec. (5.1), se obtiene las distintas matrices de transferencia en el modelo de variable de estado

$$\begin{aligned} G_{zw} &= C(sI - A)^{-1}B_1 + D_1, & G_{zu} &= C(sI - A)^{-1}B_2 + D_2, \\ G_{xw} &= (sI - A)^{-1}B_1, & G_{xu} &= (sI - A)^{-1}B_2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Sin embargo, en este modelo, para plantear la matriz de transferencia del sistema realimentado  $T_{zw}$  se trabaja previamente en el dominio temporal, en efecto, reemplazando  $u(t)$  en la ecuación de estado y ecuación de salida, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - B_2K)x(t) + B_1w(t), \\ z(t) &= (C - D_2K)x(t) + D_1w(t). \end{aligned} \quad (5.13)$$

y definiendo

$$A_{cl} \triangleq (A - B_2K), \quad y \quad C_{cl} \triangleq (C - D_2K), \quad (5.14)$$

se tiene

$$\dot{x}(t) = A_{cl} x(t) + B_1 w(t), \quad (5.15)$$

$$z(t) = C_{cl} x(t) + D_1 w(t),$$

y finalmente, se obtiene la matriz de funciones de transferencias en lazo cerrado que relaciona las salidas reguladas y las entradas exógenas, esto es,

$$T_{zw} = C_{cl} (sI - A_{cl})^{-1} B_1 + D_1. \quad (5.16)$$

A continuación, para realizar el análisis  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  se particionan las matrices  $C$ ,  $D_1$ , y  $D_2$  del siguiente modo:

$$C \triangleq \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad D_1 \triangleq \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{pmatrix}, \quad D_2 \triangleq \begin{pmatrix} D_{12} \\ D_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

obteniéndose dos vectores de salidas,  $z = (z_\infty \ z_2)'$

$$z_\infty(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t), \quad (5.18)$$

$$z_2(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t).$$

Aquí con  $z_\infty(t)$ , se representa a las variables de salida sobre las que se pedirán especificaciones en  $\mathcal{H}_\infty$ , y con  $z_2(t)$ , se representa a las variables de salida sobre las que se pedirán especificaciones en  $\mathcal{H}_2$ .

De este modo, la matriz de salida del sistema realimentado, queda redefinida como

$$C_{cl} \triangleq \begin{pmatrix} C_{1cl} \\ C_{2cl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 - D_{12}K \\ C_2 - D_{22}K \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

Las matrices  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , etc. son matrices reales, constantes, y de dimensiones apropiadas, como fueron definidas en la subsección (2.1.1).

### 5.3.1. Especificaciones $\mathcal{H}_2$

Si en el sistema (5.11) se selecciona solamente la salida  $z_2(t)$ , el sistema realimentado resulta

$$\dot{x}(t) = A_{cl} x(t) + B_1 w(t), \quad (5.20)$$

$$z_2(t) = C_{2cl} x(t) + D_{21} w(t),$$

y la matriz de transferencia del sistema en lazo cerrado que relaciona  $z_2(s)$  con  $w(s)$ , y su matriz respuesta al impulso resultan

$$T_{z_2w}(s) = C_{2cl} (sI - A_{cl})^{-1} B_1 + D_{21}, \quad (5.21)$$

$$T_{z_2w}(t) = C_{2cl} e^{A_{cl}t} B_1 + D_{21}.$$

Asumiendo que  $A_{cl}$  es asintóticamente estable, para que la norma  $\mathcal{H}_2$  sea finita es necesario que  $D_{21}$  sea cero, es decir, el sistema realimentado debe ser estrictamente propio.

Con esta consideración, las matrices de transferencia y respuesta al impulso del sistema realimentado, resultan

$$\begin{aligned} T_{z_2w}(s) &= C_{2_{cl}} (sI - A_{cl})^{-1} B_1, \\ T_{z_2w}(t) &= C_{2_{cl}} e^{A_{cl}t} B_1. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Según la Ec. (5.9), el cuadrado de la norma  $\mathcal{H}_2$  de este sistema es

$$\begin{aligned} \|T_{z_2w}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \text{Traza} \int_{-\infty}^{\infty} T_{z_2w}^*(j\omega) T_{z_2w}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{Traza} \int_{-\infty}^{\infty} T_{z_2w}(j\omega) T_{z_2w}^*(j\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (5.23)$$

y por el teorema de Parseval, en el dominio temporal, se tiene

$$\begin{aligned} \|T_{z_2w}\|_2^2 &= \text{Traza} \int_0^{\infty} T_{z_2w}(t)' T_{z_2w}(t) dt \\ &= \text{Traza} \int_0^{\infty} T_{z_2w}(t) T_{z_2w}(t)' dt. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Reemplazando  $T_{z_2w}(t)$  por la Ec. (5.22), resultan dos formas para definir  $\mathcal{H}_2$  en el modelo de espacio de estados, estas son:

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 = \text{Traza} \int_0^{\infty} (C_{2_{cl}} e^{A_{cl}t} B_1)' (C_{2_{cl}} e^{A_{cl}t} B_1) dt, \quad (5.25)$$

y

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 = \text{Traza} \int_0^{\infty} (C_{2_{cl}} e^{A_{cl}t} B_1) (C_{2_{cl}} e^{A_{cl}t} B_1)' dt. \quad (5.26)$$

Desarrollando la Ec. (5.25), se tiene

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 = \text{Traza} \{B_1' (\int_0^{\infty} e^{A_{cl}'t} C_{2_{cl}}' C_{2_{cl}} e^{A_{cl}t} dt) B_1\}, \quad (5.27)$$

y reescribiendo a la integral como

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A_{cl}'t} C_{2_{cl}}' C_{2_{cl}} e^{A_{cl}t} dt, \quad (5.28)$$

la norma  $\mathcal{H}_2$  resulta:

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 = \text{Traza} (B_1' W_o B_1). \quad (5.29)$$

Análogamente, al desarrollar la Ec. (5.26) y definiendo

$$W_c \triangleq \int_0^{\infty} e^{A_{cl}t} B_1 B_1' e^{A_{cl}'t} dt, \quad (5.30)$$

se obtiene la otra forma para representar la norma  $\mathcal{H}_2$  en el modelo de espacio de estados, esto es,

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 = \text{Traza} (C_{2cl} W_c C'_{2cl}). \quad (5.31)$$

Las Ecs. (5.28) y (5.30) son respectivamente los gramianos de observabilidad y controlabilidad del sistema realimentado, ambas son matrices simétricas y positiva definidas, y cada uno de ellas satisface las siguientes ecuaciones matriciales [Colmenares and Tadeo, 2005]:

$$A'_{cl} W_o + W_o A_{cl} + C'_{2cl} C_{2cl} = 0, \quad (5.32)$$

$$A_{cl} W_c + W_c A'_{cl} + B_1 B'_1 = 0. \quad (5.33)$$

Para expresar la restricción  $\|T_{z_2w}\|_2 < \beta$  mediante una LMI, se utilizarán las Ecs. (5.31) y (5.33), es decir, se utilizará la matriz gramiano de controlabilidad.

Si se elije  $Q \succ W_c$ <sup>2</sup> y se reemplaza en la Ec. (5.31), resulta razonable escribir

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 < \text{Traza} (C_{2cl} Q C'_{2cl}), \quad (5.34)$$

y si se elije una matriz  $M$ , simétrica y positiva definida, tal que

$$C_{2cl} Q C'_{2cl} \prec M, \quad (5.35)$$

se tiene

$$\text{Traza} (C_{2cl} Q C'_{2cl}) < \text{Traza} M, \quad (5.36)$$

entonces, es posible escribir:

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 = \text{Traza} (C_{2cl} W_c C'_{2cl}) < \text{Traza} (C_{2cl} Q C'_{2cl}) < \text{Traza} M \triangleq \beta^2. \quad (5.37)$$

Mientras que si se reemplaza  $Q \succ W_c$ , en la Ec. (5.33), y siendo  $A_{cl}$  asintóticamente estable, resulta:

$$A_{cl} Q + Q A'_{cl} + B_1 B'_1 \prec 0. \quad (5.38)$$

Notar que, imponer la desigualdad (5.38) implica imponer que  $Q \succ W_c$ , y por lo tanto, se satisface la desigualdad (5.34). Mientras que imponer la desigualdad (5.35), implica satisfacer la desigualdad (5.36). Por lo tanto, si se imponen estas desigualdades como restricciones, es razonable afirmar que la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema realimentado tiene por cota superior al escalar  $\beta$ , según se muestra en Ec. (5.37).

<sup>2</sup>La desigualdad matricial  $Q \succ W_c$  significa que la matriz  $(Q - W_c) \succ 0$ .

**Planteo de las desigualdades (5.35) y (5.38) en formato LMI.**

Reescribiendo la desigualdad (5.35) de la siguiente forma

$$M - C_{2cl} \underbrace{Q Q^{-1} Q}_{Q} C'_{2cl} \succ 0, \quad (5.39)$$

y aplicando la desigualdad de Schur, se tiene la siguiente LMI:

$$\begin{pmatrix} M & C_{2cl} Q \\ Q C'_{2cl} & Q \end{pmatrix} \succ 0. \quad (5.40)$$

Mientras que la desigualdad (5.38), también puede reescribirse utilizando la desigualdad de Schur, como la siguiente LMI:

$$\begin{pmatrix} A_{cl} Q + Q A'_{cl} & B_1 \\ B'_1 & -I \end{pmatrix} \prec 0. \quad (5.41)$$

Obviamente, estas dos restricciones deben satisfacerse con la restricción adicional:

$$Q \succ 0. \quad (5.42)$$

Por lo tanto, se puede concluir diciendo que:

**Remarca 5.1.** Si las LMIs (5.40) y (5.41) son satisfechas simultáneamente con  $Q \succ 0$ , es decir, si es factible encontrar una matriz  $Q \succ 0$  que las resuelva, para una matriz  $M \succ 0$  dada, entonces el sistema realimentado (5.20) es asintóticamente estable y su norma  $\mathcal{H}_2$  no excede el valor escalar  $\sqrt{\text{Traza } M} \triangleq \beta$ .

**Demostración** La demostración surge de los comentarios anteriores.  $\square$

Téngase en cuenta que la ganancia de realimentación  $K$  está implícita en estas LMIs. En la sección (5.4) se retomará este resultado para el diseño del controlador  $\mathcal{H}_2$ .

### 5.3.2. Desempeño $\mathcal{H}_\infty$

Si en el sistema (5.11) se selecciona solamente la salida  $z_\infty(t)$ , el sistema realimentado resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{cl} x(t) + B_1 w(t), \\ z_\infty(t) &= C_{1cl} x(t) + D_{11} w(t), \end{aligned} \quad (5.43)$$

y la matriz de transferencia del sistema en lazo cerrado que relaciona la perturbación  $w$  con la salida  $z_\infty$ , resulta

$$T_{z_\infty w}(s) = C_{1cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_1 + D_{11}. \quad (5.44)$$

Análogamente al caso anterior, se plantea un problema de factibilidad. Esto es, determinar si es factible encontrar una ganancia de realimentación  $K$ , tal que establezca al sistema realimentado, y que la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la matriz de transferencia (5.44) sea menor a un escalar  $\gamma$ .

La norma  $\mathcal{H}_\infty$  fue analizada en la Sección (3.3) para un sistema en lazo abierto. En dicha sección se demostró el teorema (3.1), el cual afirma que si la desigualdad

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PBB'P + C'C \prec 0,$$

se verifica para toda matriz  $P \succ 0$ , entonces la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema en lazo abierto es menor que  $\gamma$ .

Luego, en la Sección (4.4.3) se mostró gráficamente que tal desigualdad puede ser representada mediante la siguientes LMIs,

$$\begin{pmatrix} A'P + PA + C'C & PB \\ B'P & -\gamma^2 \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succ 0,$$

y que estas LMIs definen una región convexa, siempre y cuando, la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema (4.49) sea menor que  $\gamma$ .

A diferencia del sistema de la Ec.(3.44), en el sistema de la Ec.(5.43) la salida  $z_\infty$ , además de ser una combinación lineal de los estados, se ve afectada directamente por la acción de control  $u(t)$  y por la perturbación  $w(t)$ , por lo tanto, aparecen dos nuevas matrices  $D_{11}$  y  $D_{12}$ , que en aquel momento por simplicidad se supusieron nulas.

A continuación, de acuerdo con [Scherer, 1998], se generaliza el teorema (3.1) para transformar la especificación de desempeño  $\mathcal{H}_\infty$  en una LMI.

**Teorema 5.1** ([Scherer, 1998]). *En el sistema (5.43),  $A_{cl}$  es asintóticamente estable y su norma  $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$ , si y sólo si, existe  $P \succ 0$  tal que verifique la siguiente LMI:*

$$\begin{pmatrix} A'_{cl}P + PA_{cl} & PB_1 & C'_{1cl} \\ B'_1P & -\gamma I & D'_{11} \\ C_{1cl} & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0. \quad (5.45)$$

**Demostración:** En esta tesis se presenta sólo la condición necesaria.

Partiendo de la desigualdad de Schur, teorema (4.2), y definiendo:

$$\begin{aligned} L_l &\triangleq \begin{pmatrix} A'_{cl}P + PA_{cl} & PB_1 \\ B'_1P & -\gamma I \end{pmatrix}, & Q_q &\triangleq \begin{pmatrix} C'_{1cl} \\ D'_{11} \end{pmatrix}, \\ Q'_q &\triangleq \begin{pmatrix} C_{1cl} & D_{11} \end{pmatrix}, & R_r &\triangleq -\gamma I, \end{aligned} \quad (5.46)$$

la proposición (b) resulta:

$$\begin{aligned} R_r = -\gamma I &\prec 0, \\ \begin{pmatrix} A'_{cl}P + PA_{cl} & PB_1 \\ B'_1P & -\gamma I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C'_{1cl} \\ D'_{11} \end{pmatrix} (-\gamma I)^{-1} \begin{pmatrix} C_{1cl} & D_{11} \end{pmatrix} &\prec 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

La LMI (5.47) puede ser expresada como

$$\begin{pmatrix} A'_{cl}P + PA_{cl} & PB_1 \\ B'_1P & -\gamma I \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} C'_{1cl}C_{1cl} & C'_{1cl}D_{11} \\ D'_{11}C_{1cl} & D'_{11}D_{11} \end{pmatrix} \prec 0,$$

o bien, como

$$\begin{pmatrix} A'_{cl}P + PA_{cl} & PB_1 \\ B'_1P & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} C'_{1cl}C_{1cl} & C'_{1cl}D_{11} \\ D'_{11}C_{1cl} & D'_{11}D_{11} - \gamma^2 I \end{pmatrix} \prec 0.$$

Notar que el segundo término de la desigualdad anterior, puede factorizarse del siguiente modo:

$$\frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} C'_{1cl}C_{1cl} & C'_{1cl}D_{11} \\ D'_{11}C_{1cl} & D'_{11}D_{11} - \gamma^2 I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C'_{1cl} \\ I & D'_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_{1cl} & D_{11} \end{pmatrix},$$

y de esta manera la desigualdad (5.47), puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} A'_{cl}P + PA_{cl} & PB_1 \\ B'_1P & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C'_{1cl} \\ I & D'_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_{1cl} & D_{11} \end{pmatrix} \prec 0. \quad (5.48)$$

Esta última desigualdad junto con la condición  $\gamma > 0$ , es equivalente a la LMI (5.45).

Para relacionar la LMI (5.45) con el dominio de la frecuencia y verificar la estabilidad del sistema, se pre y posmultiplica la desigualdad (5.48), por las siguientes matrices respectivamente

$$\begin{pmatrix} B'_1\phi^*(s) & I \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \phi(s)B_1 \\ I \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

donde  $\phi(s)$ , es la matriz de transición y se define<sup>3</sup> como

$$\phi(s) \triangleq (sI - A_{cl})^{-1}. \quad (5.50)$$

Al hacerlo, se obtienen los siguientes resultados:

1. Para el primer término, se obtiene<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} B_1' \phi^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{cl}' P + P A_{cl} + (sP - sP) & P B_1 \\ B_1' P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi B_1 \\ I \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} B_1' \phi^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (sI + A_{cl}') P - P(sI - A_{cl}) & P B_1 \\ B_1' P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi B_1 \\ I \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} B_1' \phi^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\phi^*)^{-1} P - P \phi^{-1} & P B_1 \\ B_1' P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi B_1 \\ I \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} B_1' \phi^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\phi^*)^{-1} P \phi B_1 - P B_1 + P B_1 \\ B_1' P \phi B_1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} B_1' \phi^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\phi^*)^{-1} P \phi B_1 - P B_1 + P B_1 \\ B_1' P \phi B_1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} B_1' \phi^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\phi^*)^{-1} P \phi B_1 \\ B_1' P \phi B_1 \end{pmatrix} = (-B_1' P \phi B_1 + B_1' P \phi B_1) = 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

2. Para el segundo término, se obtiene

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} B_1' \phi^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_{1cl}' \\ I & D_{11}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_{1cl} & D_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi B_1 \\ I \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} I \\ C_{1cl} \phi B_1 + D_{11} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ C_{1cl} \phi B_1 + D_{11} \end{pmatrix} \prec 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Obsérvese que en la desigualdad anterior se identifica<sup>5</sup>  $T_{z_\infty w}(s)$ , por lo tanto, se la puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} I & T_{z_\infty w}^*(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ T_{z_\infty w}(s) \end{pmatrix} \prec 0,$$

<sup>3</sup>Se recuerda que el símbolo (\*), significa transpuesto conjugado y la variable ( $s$ ) está valuada sobre el eje  $j\omega$ .

<sup>4</sup>Obsérvese que ha sido necesario sumar y restar ( $sP$ ) en el primer elemento de la matriz del centro.

<sup>5</sup>Compárese con la Ec. (5.44).

obteniéndose

$$\frac{1}{\gamma} T_{z_\infty w}^*(s) T_{z_\infty w}(s) - \gamma I \prec 0, \quad (5.53)$$

$$T_{z_\infty w}'(-j\omega) T_{z_\infty w}(j\omega) \prec \gamma^2 I, \quad \forall \omega.$$

Si se trata de un sistema SISO,  $T_{z_\infty w}(j\omega)$  es una función, por lo tanto la desigualdad (5.53), resulta

$$\|T_{z_\infty w}(j\omega)\|^2 < \gamma^2, \quad \forall \omega,$$

y en consecuencia,

$$\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma.$$

Tratándose de un sistema MIMO, la matriz del lado izquierdo de la desigualdad (5.53) es hermítica, y por lo tanto, sus autovalores son reales y no negativos.

Como es sabido, la raíz cuadrada de los mismos son los valores<sup>6</sup> singulares de la matriz sistema  $T_{z_\infty w}(j\omega)$ , siendo su valor supremo<sup>7</sup> el máximo alcance de esta matriz. Lo anterior conduce a que

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}\{T_{z_\infty w}'(-j\omega) T_{z_\infty w}(j\omega)\} &< \lambda_{\max}\{\gamma^2 I\}, \\ \lambda_{\max}\{T_{z_\infty w}'(-j\omega) T_{z_\infty w}(j\omega)\} &< \gamma^2 \lambda_{\max}\{I\}, \\ \lambda_{\max}\{T_{z_\infty w}'(-j\omega) T_{z_\infty w}(j\omega)\} &< \gamma^2, \\ \sigma_{\max}\{T_{z_\infty w}(j\omega)\} &< \gamma, \quad \forall \omega. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Y siendo, por definición,  $\|T_{z_\infty w}\|_\infty = \sigma_{\max}\{T_{z_\infty w}(j\omega)\} \quad \forall \omega$ , se concluye que

$$\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma. \quad (5.55)$$

□

Comparando con la Ec.(5.8), se tiene

$$\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2,$$

y se verifica que la restricción (5.45) planteada para el cálculo del controlador, asegura que el sistema realimentado  $T_{z_\infty w}(s)$ ,  $\gamma$ -atenúa la energía de la perturbación  $w$  en su salida  $z_\infty$ .

<sup>6</sup>Cabe alarar que no son valores sino funciones de  $(\omega)$ , y además  $\lambda_i(\omega) = \sigma_i^2(\omega)$ .

<sup>7</sup>El valor supremo es el mayor valor escalar, dado por:  $\max\{\sigma_i(\omega)\} \forall i$ , y  $\forall \omega$ .

**Remarca 5.2.** La garantía de estabilidad está dada por la necesidad de que la matriz  $L_l$  definida en la Ec. (5.46) sea negativa definida, ya que aplicándole la fórmula del complemento de Schur, su primer elemento debe ser negativo definido, es decir,

$$A'_{cl}P + PA_{cl} \prec 0,$$

lo cual se corresponde con el teorema de Lyapunov.

## 5.4. Controladores por Realimentación de Estado

En esta sección se muestra la forma de determinar la ganancia estática de realimentación de estados  $K$ , para lograr cierto desempeño  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  en la respuesta del sistema.

En primer lugar se tratan los problemas de manera independiente, comenzando con el problema de minimización de la norma  $\mathcal{H}_2$ , para luego seguir con el problema de factibilidad en la fijación de una cota para la norma  $H_\infty$ .

Finalmente, se presentará un tratamiento unificado en lo que se denomina síntesis mezclada  $\mathcal{H}_2/H_\infty$ .

### 5.4.1. Síntesis del controlador $\mathcal{H}_2$

Partiendo del sistema en lazo cerrado representado en la Ec. (5.20) de la Sección 5.3.1, y reemplazando en las desigualdades (5.40) y (5.41) por las Ecs. (5.14) y (5.19), se tienen las siguientes desigualdades matriciales:

$$\begin{pmatrix} M & (C_2 - D_{22}K)Q \\ Q(C_2 - D_{22}K)' & Q \end{pmatrix} \succ 0, \quad (5.56)$$

$$\begin{pmatrix} (A - B_2K)Q + Q(A - B_2K)' & B_1 \\ B_1' & -I \end{pmatrix} \prec 0. \quad (5.57)$$

Así planteadas, las desigualdades anteriores no son LMIs<sup>8</sup>, porque las variables (matrices) de decisión  $Q$  y  $K$ , no aparecen en forma afín.

Debido a esto, es necesario realizar un cambio de variables en la formulación, y para ello se definen

$$X_2 \triangleq Q, \quad y \quad L \triangleq KQ.$$

<sup>8</sup>Para que la desigualdad sea una LMI, las variables de decisión deben aparecer en forma afín dentro de la matriz simétrica, y el producto  $KQ$  no lo es.

Al reemplazar, se tiene

$$\begin{pmatrix} M & (C_2 X_2 - D_{22} L) \\ (C_2 X_2 - D_{22} L)' & X_2 \end{pmatrix} \succ 0, \quad (5.58)$$

$$\begin{pmatrix} (A X_2 - B_2 L) + (A X_2 - B_2 L)' & B_1 \\ B_1' & -I \end{pmatrix} \prec 0. \quad (5.59)$$

Ahora, las desigualdades (5.58) y (5.59) son LMIs en las variables<sup>9</sup>  $X_2$ ,  $L$  y  $M$ .

Por lo visto en la Sección (5.3.1), cumpliéndose con estas restricciones, se tiene garantía de que la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema en lazo cerrado  $T_{z_2 w}(s)$ , es menor que  $\sqrt{\text{Traza } M} = \beta$ .

Luego, el problema se puede plantear de dos formas:

1. Como un problema de factibilidad, en este caso se fija la traza de  $M$  en un valor  $\beta^2$  determinado, y se verifica si las restricciones (5.58) y (5.59) son satisfechas, presentándose dos casos:

- a) Si el problema es factible, el algoritmo de búsqueda entrega como resultado los valores de las variables de decisión  $X_2$  y  $L$ , obteniéndose luego la ganancia de realimentación de estado

$$K = L X_2^{-1},$$

la cual garantiza que  $\|T_{z_2 w}\|_2 < \sqrt{\text{traza } M} = \beta$ .

- b) Si el problema es infactible, será necesario relajar la restricción aumentando el valor de  $\beta$ , hasta lograr factibilidad.

2. Como un problema de minimización de la norma  $\mathcal{H}_2$ , para ello se resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\min_{X_2 \succ 0, L} \{\text{Traza } M\},$$

$$\text{s.a. (5.58) y (5.59)}.$$

Este problema siempre es factible, y al encontrar la solución el algoritmo de búsqueda entregará los valores óptimos de  $X_2$  y  $L$ , y siendo

$$K_{\text{ópt}} = L_{\text{ópt}} X_{2\text{ópt}}^{-1}. \quad (5.60)$$

Se obtiene así la ganancia óptima de realimentación de estado  $K_{\text{ópt}}$ , que minimiza  $\|T_{z_2 w}\|_2$ .

<sup>9</sup>La misma LMI (5.58) implica las restricciones  $X_2 \succ 0$  y  $M \succ 0$ .

**LQR mediante minimización  $\mathcal{H}_2$  vía LMI**

Como se anticipó en la Sección (2.4), si se eligen <sup>10</sup>

$$C_2 = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}^{n+1,1}, \quad y \quad D_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{n+1,1},$$

se tiene el siguiente vector de salida:

$$z_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^{n+1,1}.$$

Dado que:

$$\begin{aligned} C_2' C_2 &= I, & D_{22}' D_{22} &= 1, \\ C_2' D_{22} &= 0, & D_{22}' C_2 &= 0, \end{aligned}$$

el contenido de energía de  $z_2(t)$ , resulta

$$\|z_2\|^2 = \int_0^\infty x(t)'x(t) + u(t)'u(t) dt.$$

Luego resolver el problema de minimización de la norma  $\mathcal{H}_2$  vía LMI, con la elección de  $C_2$  y  $D_{22}$  indicada arriba, es equivalente a construir un LQR.

Es decir, el valor de la ganancia de realimentación

$$K_{\text{ópt}} = L_{\text{ópt}} X_{2_{\text{ópt}}}^{-1},$$

es la misma solución que se obtiene al resolver la ARE (2.115), lo que se verificará mediante un ejemplo al final del capítulo.

**5.4.2. Síntesis del controlador  $\mathcal{H}_\infty$** 

Partiendo de la expresión del sistema realimentado Ec.(5.43) de la Sección 5.3.2, tomando la desigualdad (5.45), y reemplazando en ella por las Ecs.(5.14) y (5.19), se obtiene la siguiente desigualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} (A - B_2 K)' P + P(A - B_2 K) & P B_1 & (C_1 - D_{12} K)' \\ B_1' P & -\gamma I & D_{11}' \\ (C_1 - D_{12} K) & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0. \quad (5.61)$$

<sup>10</sup> $n$  es el número de variables de estados, y se asume que el control  $u(t)$  es una función escalar.

La desigualdad (5.61) no es una LMI, y obsérvese que en este caso un simple cambio de variables no alcanza para tal fin<sup>11</sup>, para poder transformar esta desigualdad en una LMI es necesario realizar una modificación previa, la cual consiste en pre y posmultiplicarla por  $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$ .

Al hacerlo se tiene<sup>12</sup>

$$\begin{pmatrix} P^{-1}(A - B_2K)' + (A - B_2K)P^{-1} & B_1 & P^{-1}(C_1 - D_{12}K)' \\ B_1' & -\gamma I & D_{11}' \\ (C_1 - D_{12}K)P^{-1} & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.62)$$

y realizando en esta desigualdad el siguiente cambio de variables

$$X_\infty \triangleq P^{-1} \quad Y \triangleq KP^{-1},$$

se obtiene la siguiente LMI en las variables  $X_\infty$  e  $Y$ ,

$$\begin{pmatrix} (AX_\infty - B_2Y)' + (AX_\infty - B_2Y) & B_1 & (C_1X_\infty - D_{12}Y)' \\ B_1' & -\gamma I & D_{11}' \\ (C_1X_\infty - D_{12}Y) & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.63)$$

con  $X_\infty \succ 0$ .

La cual puede ser resuelta utilizando algoritmos de optimización especializados, por ejemplo, *LMI-toolbox* de *Matlab*®.

A continuación se enumeran los siguientes pasos para tratar con el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

1. Se verifica si el problema es factible en las variables  $X_\infty$  e  $Y$ .
2. Si no lo es, significa que la cota superior especificada ( $\gamma$ ) es muy chica y se deberá relajar la restricción (5.63), aumentando su valor.
3. Si es factible, entonces el algoritmo entregará los valores de  $X_\infty$  e  $Y$  resultantes de la solución<sup>13</sup>, finalmente construyendo

$$K = Y X_\infty^{-1}, \quad (5.64)$$

se tiene una matriz ganancia de realimentación de estado  $K$ , cuya aplicación asegura que  $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$ .

<sup>11</sup>Un cambio de variables en estas condiciones, implicaría hacer  $L = PB_2K$ , y despejar  $K$  a partir de  $L$  y  $P$  requiere multiplicar por la pseudoinversa por izquierda de  $B_2$ .

<sup>12</sup>Al pre y posmultiplicar por  $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$ , queda la primer fila de la Ec.(5.45) premultiplicada por  $P^{-1}$ , mientras que su primer columna queda posmultiplicada por dicha matriz.

Al ser  $\text{diag}(P^{-1}, I, I) \succ 0$ , no se afecta el sentido de la desigualdad (5.61).

<sup>13</sup>Recuérdese que no es un problema de optimización sino de factibilidad.

### 5.4.3. Síntesis del controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Se ha visto que las LMIs definen regiones convexas. Cuando las especificaciones de diseño se expresan en términos de varias LMIs, la solución del problema, si es que ésta existe, se encuentra en la intersección de dichas regiones convexas.

Esta característica, es una gran ventaja que tienen las LMIs respecto a otras técnicas de control, porque permite el diseño de controladores multiobjetivos.

A continuación se buscará satisfacer en forma simultánea objetivos de desempeño  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$ , lo que usualmente se denomina síntesis mezclada.

Considérese el sistema representado por la Ec. (5.11), donde los estados son perturbados por el vector de entradas  $w(t) = [d(t) \ n(t)]'$ , el cual contiene tanto las entradas de espectro plano  $n(t)$ , como las perturbaciones desconocidas de energía finita  $d(t)$ .

Supóngase que sobre un grupo de salidas  $z_2$  se desea minimizar los efectos del ruido, y sobre otro grupo de salidas  $z_\infty$  (que pueden ser las mismas o algunas de ellas), se desea acotar el efecto de perturbaciones inciertas.

Las matrices de transferencias en lazo cerrado son<sup>14</sup>,

$$\begin{aligned} T_{z_\infty w}(s) &= C_{1_{cl}}(sI - A_{cl})^{-1}B_1 + D_{11}, \\ T_{z_2 w}(s) &= C_{2_{cl}}(sI - A_{cl})^{-1}B_1. \end{aligned} \quad (5.65)$$

El problema de diseño se plantea como:

$$\begin{aligned} \min_K \quad & \|T_{z_2 w}\|_2, \\ \text{s.a.} \quad & \|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma. \end{aligned}$$

Esto es, se desea determinar las ganancias del controlador de estados que estabilice todas las funciones de transferencias del sistema realimentado, minimice los efectos del ruido sobre la salida  $z_2$  y atenúe el efecto de las perturbaciones externas sobre las salidas  $z_\infty$  en un valor  $\gamma$  dado.

De manera equivalente en términos de LMIs, el problema de diseño se plantea como:

$$\begin{aligned} \min_K \quad & \{ \text{Traza } M \}, \\ \text{s.a.} \quad & (5.58), (5.59) \text{ y } (5.63). \end{aligned}$$

Sin embargo, al ser una única ganancia de realimentación  $K$  la que satisface estas LMIs, de acuerdo a lo expresado por [Scherer, 1998] es necesario unificar

<sup>14</sup>Recuérdese que  $D_{21} = 0$  para que  $\|T_{z_2 w}\|_2$  sea finita.

las variables de decisión  $X_2$  y  $X_\infty$ , y para ello se define:

$$X \triangleq X_2 = X_\infty, \quad (5.66)$$

siendo además,  $L = KX_2$  y  $Y = KX_\infty$ , se tiene que  $L = Y$ .

Con esta modificación, el diseño del controlador  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  se plantea como:

$$\min_{X \succ 0, Y} \{ \text{Traza } M \},$$

sujeto a:

$$\begin{pmatrix} M & C_2X - D_{22}Y \\ XC'_2 - Y'D'_{22} & X \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{pmatrix} (AX - B_2Y) + (AX - B_2Y)' & B_1 \\ B'_1 & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.67)$$

$$\begin{pmatrix} (AX - B_2Y)' + (AX - B_2Y) & B_1 & (C_1X_\infty - D_{12}Y)' \\ B'_1 & -\gamma I & D'_{11} \\ (C_1X - D_{12}Y) & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0.$$

Además, observando detenidamente las desigualdades anteriores, se ve que la segunda LMI, está implícita en la tercera <sup>[5]</sup>, por lo que se puede prescindir de la misma.

Obteniendose finalmente, la siguiente formulación multiobjetivos:

$$\min_{X \succ 0, Y} \{ \text{Traza } M \}, \quad s.a:$$

$$\begin{pmatrix} M & C_2X - D_{22}Y \\ XC'_2 - Y'D'_{22} & X \end{pmatrix} \succ 0 \quad (5.68)$$

$$\begin{pmatrix} AX + XA' - B_2Y - Y'B'_2 & B_1 & XC'_1 - Y'D'_{12} \\ B'_1 & -\gamma I & D'_{11} \\ C_1X - D_{12}Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0. \quad (5.69)$$

Luego, si el problema de optimización es factible, el algoritmo devuelve los valores de  $X_{\text{ópt}}$  e  $Y_{\text{ópt}}$ , y el vector de ganancias de realimentación para el controlador resulta:

$$K_{\text{ópt}} = Y_{\text{ópt}} X_{\text{ópt}}^{-1},$$

<sup>15</sup>Para comprobarlo, téngase en cuenta las equivalencias en la desigualdad de Schur y que  $0 < \gamma \leq 1$ .

que satisface las especificaciones  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  simultáneamente.

Observar que en el problema de optimización,

- si sólo se requiere performance  $H_\infty$  se utiliza la desigualdad (5.69);
- si sólo se requiere performance  $\mathcal{H}_2$  se utiliza la desigualdad (5.68), junto con los elementos de las dos primeras filas y las dos primeras columnas de la desigualdad (5.69) con  $\gamma = 1$ .

## 5.5. Ejemplo de diseño de un regulador de estado con desempeño $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_\infty$

*Ejemplo 5.1. Considere el ejemplo clásico de las literaturas de control, representado en la Fig.(5.3), donde se trata de conservar la posición vertical del péndulo de masa  $m$  ante perturbaciones externas, y ante condiciones iniciales distintas de cero en su posición y/o velocidad.*

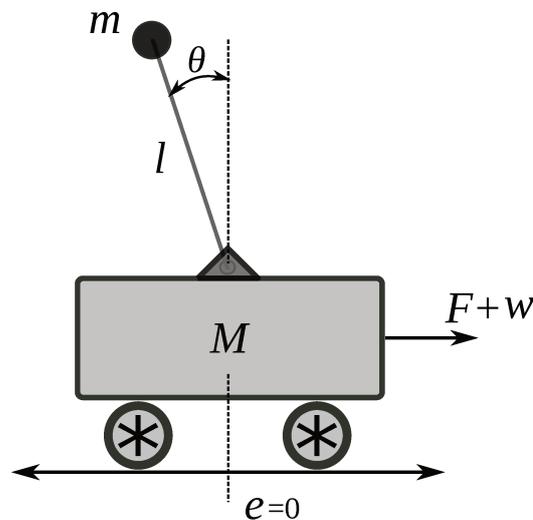


Figura 5.3: Sistema con posicionamiento angular  $\theta$ .

**Resolución.**  $\triangleright$  Frente a la presencia de algún cambio, el péndulo, ahora inclinado, debe regresar a su posición vertical cuando se aplica al carro una fuerza de control  $F(t)$  apropiada.

También, al final de cada proceso de control, el carro debe regresar a su posición de referencia  $e = 0$ , es decir, se trata de un típico problema de regulación.

Las ecuaciones<sup>16</sup> del modelo lineal (ver: [Ogata, 2009], entre otros) que representan a este sistema para un ángulo  $\theta$  pequeño son:

$$\begin{aligned} Ml\ddot{\theta}(t) &= (M + m)g\theta(t) - (F(t) + w(t)), \\ M\ddot{e}(t) &= -mg\theta(t) + (F(t) + w(t)), \end{aligned} \quad (5.70)$$

donde,  $\theta$  es la posición angular de la masa  $m$ ,  $\dot{\theta}$  es la velocidad angular de la masa  $m$ ,  $e$  es la posición del carro de masa  $M$  y  $\dot{e}$  es la velocidad del carro de masa  $M$ .

En la Tabla (5.1) se muestra los parámetros del sistema asumidos para este ejemplo.

Tabla 5.1: Valores asumidos para el problema del péndulo invertido.

Parámetros del sistema	
Masa del carro	$M = 2 \text{ Kg.}$
Masa del péndulo	$m = 0,1 \text{ Kg.}$
Longitud varilla	$l = 0,5 \text{ m.}$
Gravedad	$g = 9,8 \text{ m/s}^2$

De acuerdo con [Ogata, 2009], definiendo a los estados como,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ e \\ \dot{e} \end{pmatrix}, \quad (5.71)$$

a la ley de control como  $u(t) \triangleq F(t)$ , y siendo  $w(t)$  una perturbación que actúa sobre la masa del carro. Se representa el sistema de la Ec.(5.70), mediante la siguiente formulación en el espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t) + B_1w(t), \\ z(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (5.72)$$

<sup>16</sup>Para simplificar el modelo matemático, se considera que la varilla tiene masa despreciable frente a la masa del carro.

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}, \quad (5.73)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

La Fig.(5.4) muestra el diagrama de bloques para el sistema aquí expuesto, obsérvese que la matriz  $C$  selecciona como salida del sistema, a la posición del péndulo y a la posición del carro respectivamente.

A continuación se definen dos salidas auxiliares utilizadas para las especificaciones de diseño  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  del sistema de control,

$$\begin{aligned} z_\infty(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t), \\ z_2(t) &= C_2 x(t) + D_{22} u(t). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Las matrices  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ , y  $D_{22}$ , están definidas para satisfacer dichas especificaciones, y se explicitan oportunamente.

Para el cálculo del regulador de estados, se subdivide el problema en dos incisos, a saber:

- a) Determinar las ganancias de un regulador de estados que estabilice el sistema dado en la Ec.(5.72), ya que el mismo es inestable en lazo abierto, y minimice la energía de vector de salida<sup>17</sup>  $z_2 = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ u]'$ , ante perturbaciones impulsivas, como ser ruido del proceso o condiciones iniciales distintas de cero. Como se ha dicho, este caso es equivalente al diseño de un LQR.
- b) Determinar las ganancias de un regulador de estados que además de satisfacer las especificaciones del inciso a), atenúe la transferencia de energía entre la señal perturbadora  $w$ , que ingresa junto con la acción de control, y la salida  $\theta$  (posición angular del péndulo), un cierto valor  $\gamma^2$ .

Este inciso es equivalente a pedir control óptimo sujeto a que  $\|T_{\theta w}\|_\infty < \gamma$ .

<sup>17</sup>Note que la variable  $z_2$  además de incluir los estados (como es en la forma tradicional) incluye la variable manipulada.

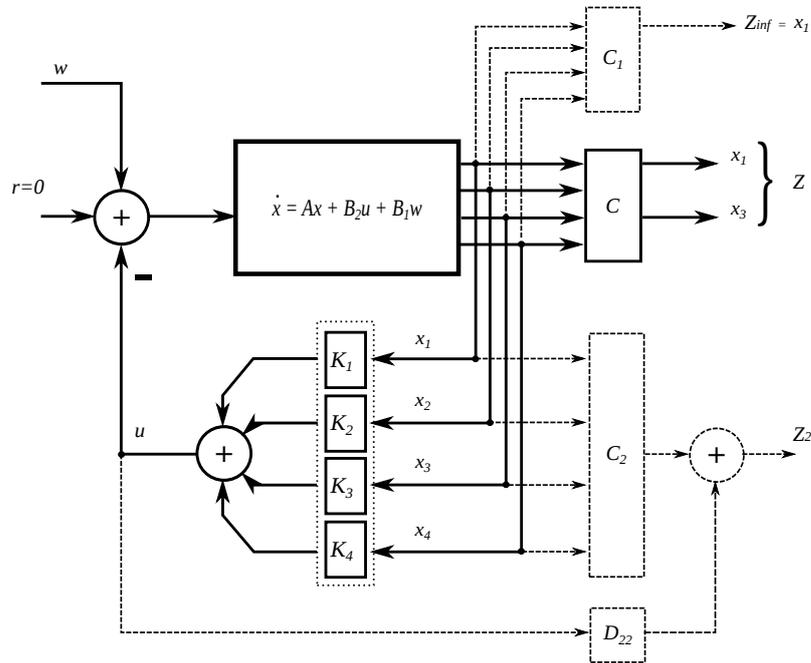


Figura 5.4: Diagrama del sistema de control con el regulador  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

### Resultados numéricos y gráficas

**Inciso (a):** En este punto sólo se desea minimizar el siguiente escalar:

$$\|z_2\|_2^2 = \int_0^\infty x(t)'x(t) + u^2(t) dt.$$

Por lo visto en la Sección (2.3), la señal de realimentación  $u_{\text{opt}}(t) = -K_{\text{opt}}x(t)$  que minimiza este funcional, puede hallarse en forma tradicional, resolviendo la ecuación algebraica de Riccati que a continuación se reescribe:

$$A'P + PA + C'C + PB_2'B_2P = 0, \quad \text{con } C'C = I.$$

Al resolver dicha ecuación se obtiene como solución la matriz  $P \succ 0$ , y con ella se construye

$$K_{\text{opt}} = B_2'P.$$

Resultando para este problema, las siguientes ganancias:

$$k_1 = 52,1238; \quad k_2 = 11,5850; \quad k_3 = 1,0000; \quad k_4 = 2,7252.$$

Por otro lado, el mismo problema puede ser resuelto vía LMI, de acuerdo con lo planteado en la Sección 5.4.1.

En efecto, si se eligen

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.76)$$

y planteando el problema de optimización

$$\begin{aligned} & \min_{X>0, Y} \{ \text{Traza } M \}, \quad \text{s.a:} \\ & \begin{pmatrix} M & C_2 X - D_{22} Y \\ X C_2' - Y' D_{22}' & X \end{pmatrix} \succ 0, \\ & \begin{pmatrix} AX + XA' - B_2 Y - Y' B_2' & B_1 \\ B_1' & -I \end{pmatrix} \prec 0, \end{aligned} \quad (5.77)$$

se obtienen las matrices  $X_{\text{opt}}$  y  $Y_{\text{opt}}$ , para finalmente construir el vector de ganancias para el controlador

$$K_{\text{opt}} = Y_{\text{opt}} X_{\text{opt}}^{-1}.$$

La resolución numérica del problema de optimización anterior lleva al siguiente resultado:

$$k_1 = 52,1113; \quad k_2 = 11,5968; \quad k_3 = 0,9960; \quad k_4 = 2,7207.$$

Observe que dicho solución obtenida resulta numéricamente muy similar al obtenida previamente mediante la resolución de la ARE.

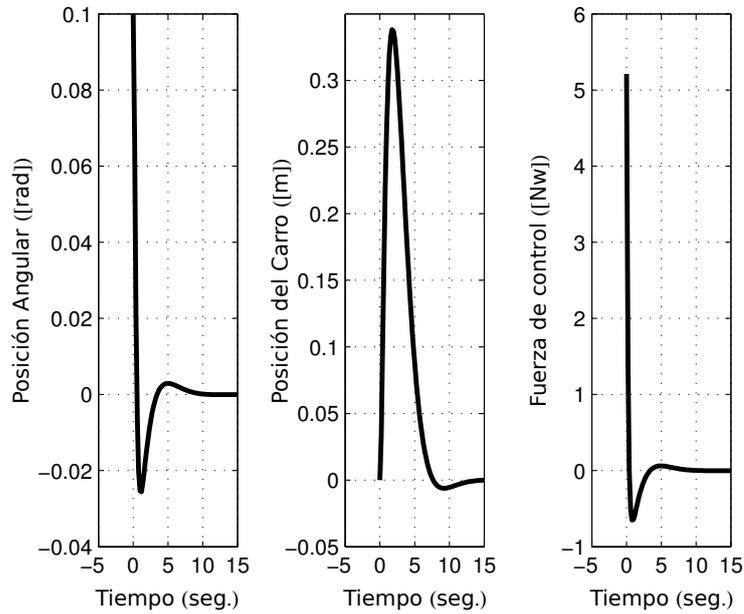
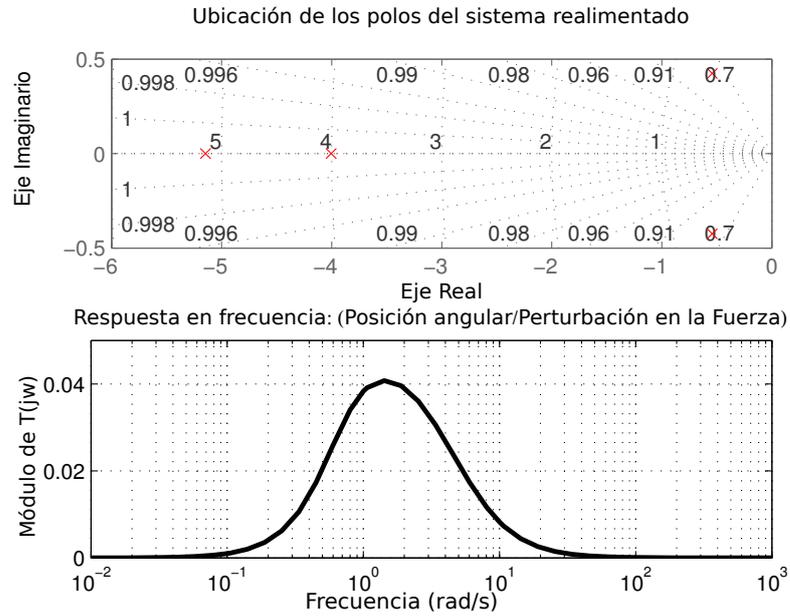
En la Fig. (5.5), se muestra las respuestas dinámicas de la posición del péndulo, del carro y la fuerza de control, para una condición inicial en la posición del péndulo de  $\theta = 0,1$  grados.

En la Fig. (5.6) se muestra la ubicación de los polos del sistema realimentado, y el módulo de la función respuesta en frecuencia que relaciona la perturbación en el carro con la posición del péndulo. Note que la  $\mathcal{H}_\infty \approx 0,004$ .

**Inciso (b):** En este caso se desea cumplir con el objetivo anterior pero con una nueva exigencia, lograr que la norma  $H_\infty$  de la función de transferencia entre  $w$  y  $\theta$ , sea menor que un escalar  $\gamma$ .

Para esto, además de las matrices definidas anteriormente, se agregan las siguientes (ver Fig. 5.4):

1.  $C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ , ya que la salida  $z_\infty$  es el estado  $x_1$ .

Figura 5.5: Desempeño nominal  $\mathcal{H}_2$ .Figura 5.6: Desempeño nominal  $\mathcal{H}_2$ .

2.  $D_{11} = 0$ , se considera que la perturbación afecta a la salida sólo a través de la dinámica del sistema (fuerza espúrea aplicada al carro).
3.  $D_{12} = 0$ , el control no actúa directamente sobre la posición  $x_1 = \theta$ .

Con las matrices ya definidas, la solución se obtiene planteando el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \min_{X>0, Y} \{ \text{Traza } M \}, \text{ s.a:} \\ & \begin{pmatrix} M & C_2 X - D_{22} Y \\ X C_2' - Y' D_{22}' & X \end{pmatrix} \succ 0, \\ & \begin{pmatrix} AX + XA' - B_2 Y - Y' B_2' & B_1 & X C_1' - Y' D_{12}' \\ B_1' & -\gamma I & D_{11}' \\ C_1 X - D_{12} Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Exigiendo como requisito  $\gamma < 0,02$ , se tiene:

$$\frac{\|\theta\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \gamma^2 = 0,0004,$$

es decir, la energía de la perturbación que actúa sobre la posición del péndulo, es menor a un 0,04 % de la energía de la fuerza perturbadora que actúa sobre el carro.

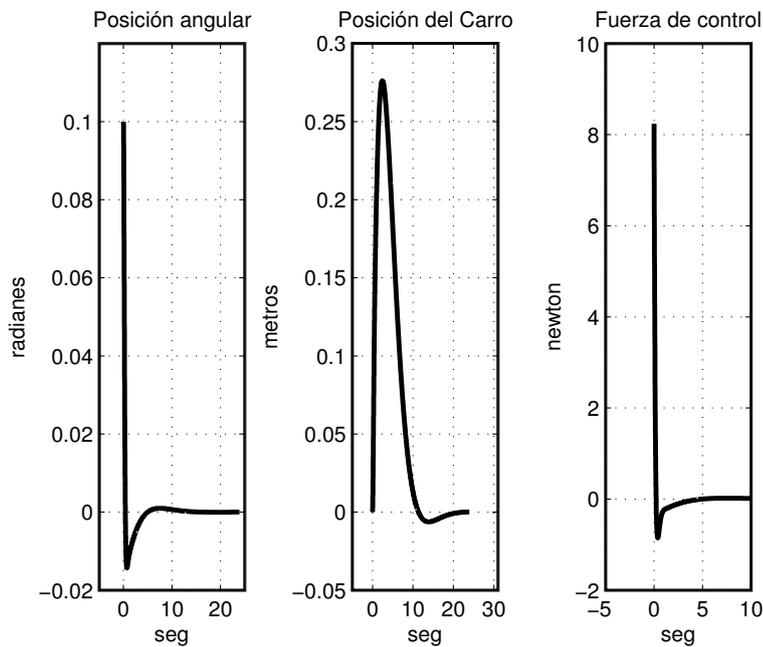


Figura 5.7: Desempeño nominal  $\mathcal{H}_2/H_\infty$ .

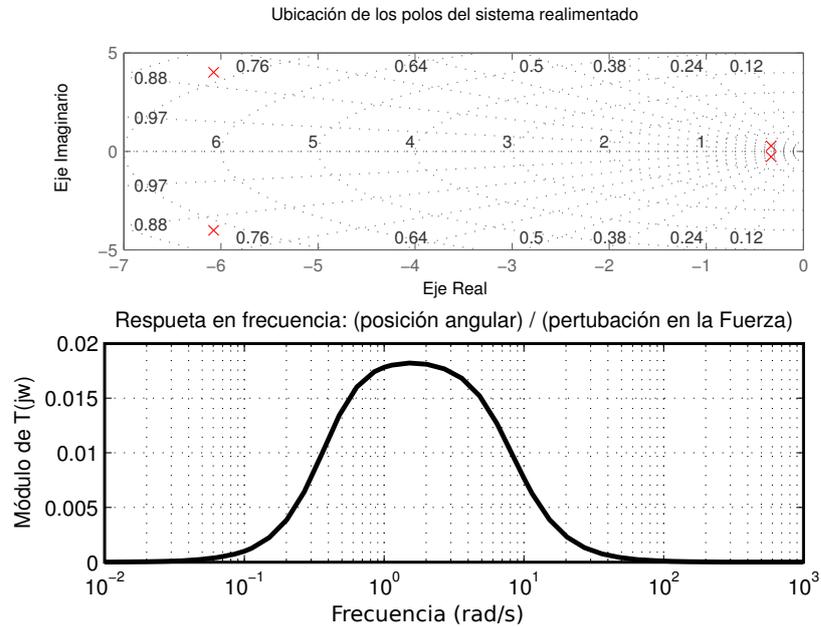
Figura 5.8: Desempeño nominal  $\mathcal{H}_2/H_\infty$ .

Tabla 5.2: Ganancias de los controladores para cada estado.

<b>Ganancias:</b>	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
Inciso (a)	52,1113	11,5968	0,9960	2,7207
Inciso (b)	82,3740	14,7207	1,0028	3,8155

Luego, resolviendo el problema de optimización con las restricciones (5.78), se obtiene el vector de ganancias para el controlador que se muestran a continuación:

$$k_1 = 82,3740; \quad k_2 = 14,7207; \quad k_3 = 1,0028; \quad k_4 = 3,8155.$$

En las Figuras (5.7) y (5.8), se muestran las respuestas dinámicas, la ubicación de polos y el módulo de la respuesta en frecuencia de la transferencia  $T_{\theta w}(s)$ .

En las Tablas (5.1) y (5.3), se muestran los resultados más relevantes.

◁

Tabla 5.3:  $\mathcal{H}_2$ ,  $H_\infty$ , Tiempo de establecimiento y el Control máximo.

Desempeño:	$\mathcal{H}_2$	$H_\infty$	ts= 5 $\tau$ (aprox.)	$u_{m\acute{a}x}$
Inciso (a)	3,2033	0,0408	10 <ts> 15seg.	5,2111
Inciso (b)	3,4391	0,0182	ts> 20seg.	8,2374

**Observaciones:**

- El método de minimizar  $\mathcal{H}_2$  sujeto  $\mathcal{H}_\infty < \gamma$ , es una forma particular de síntesis  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  mezclada, otra forma más general es resolver el siguiente problema de factibilidad:

$$\begin{aligned}
 & \text{determinar } K, \text{ tal que satisfaga} \\
 & \mathcal{H}_2 < \beta, \\
 & \mathcal{H}_\infty < \gamma.
 \end{aligned} \tag{5.79}$$

- Como se puede observar a través del ejemplo anterior, prácticamente no existe diferencias en resolver el LQR vía ecuación algebraica de Ricatti o vía LMIs, por lo que en el inciso (a), no hay ventajas de un método sobre otro. Sin embargo la ventaja de las LMIs, radica en que se puede agregar en forma sencilla otras restricciones, como se ha visto en el inciso (b), y como se verá en los siguientes capítulos.
- Tanto las restricciones para  $\mathcal{H}_2$  como para  $\mathcal{H}_\infty$ , se formularon de manera que el sistema realimentado satisfaga el teorema de Lyapunov. Por lo tanto y como se ha mostrado, la ley de control por realimentación de estados  $u(t) = -Kx(t)$  con  $K = YX^{-1}$  es cuadráticamente estabilizante.

**5.6. Resumen**

Este capítulo tuvo por finalidad mostrar como las especificaciones  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  que surgen naturalmente al analizar los sistemas LTI en el dominio frecuencial, son trasladadas al modelo en variable de estado para luego ser tratadas como restricciones en un problema de optimización convexo, mediante el uso de Desigualdades Lineales Matriciales.

Se ha realizado un ejemplo clásico de diseño de un regulador por realimentación de estado, tal que el sistema realimentado satisfaga características de desempeño  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  simultáneamente, lo que se conoce como síntesis mezclada  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Para ello se formuló el problema de diseño como uno de optimización con restricciones utilizando LMIs.

La principal ventaja de esta formulación es que permite el diseño de controladores multiobjetivos donde las especificaciones  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  son simplemente un par de objetivos más dentro de un conjunto mucho más amplio que se puede especificar al momento de plantear el problema de control, lo que se verá en el siguiente capítulo.

# Capítulo 6

## Regulador multiobjetivo y robustez

### 6.1. Introducción

En este capítulo se extienden los resultados obtenidos en el capítulo (5), incluyendo alternativas de ubicación arbitraria de polos en el plano complejo e incertidumbre en los parámetros del sistema.

Se presenta una breve introducción sobre las *regiones LMI* y la relación que éstas tienen con los autovalores de una matriz.

También se presenta en variables de estados el modelo del sistema con incertidumbre paramétrica bajo una representación *politópica*, y se discuten brevemente condiciones para garantizar que las especificaciones pedidas al sistema nominal se cumplan para todas las posibles plantas que representan al sistema incierto.

Por último se muestra mediante simulaciones numéricas el desempeño del sistema de control cuando se implementa el controlador multiobjetivo sobre un sistema con incertidumbres paramétricas.

### 6.2. Regiones LMI

De acuerdo con [Chilali and Gahinet, 1996], a continuación se introduce las definiciones de región LMI y de función característica, que serán utilizadas oportunamente.

**Definición 1.** Una región LMI es un subconjunto  $D$  del plano complejo que puede ser definido como:

$$D \triangleq \{s \in \mathcal{C} : L + sM + s^*M' \prec 0\}, \quad (6.1)$$

donde  $M$  y  $L$  son matrices reales, y  $L$  además es simétrica, es decir  $L = L'$ .

**Definición 2.** La función matricial  $f_D(s)$  definida como:

$$f_D(s) \triangleq L + sM + s^*M', \quad (6.2)$$

se denomina función característica de la región LMI o subconjunto  $D$ .

Una propiedad de las regiones LMIs es que son regiones convexas y simétricas respecto del eje real del plano complejo.

La intersección de dichas regiones LMIs es otra LMI, por lo tanto, cualquier región convexa y simétrica respecto al eje real, puede ser representada por la intersección de regiones LMIs.

En este punto, cabe aclarar que las matrices  $L$  y  $M$  toman valores según la región  $f_D \prec 0$ , que define la función característica.

El hecho más destacable se expresa en el teorema [Chilali and Gahinet, 1996], que se presenta a continuación.

**Teorema 6.1.** Una matriz  $A$  es  $D$ -estable, es decir tiene todos sus autovalores en el interior de una región  $D$ , si y sólo si, existe una matriz  $P$  simétrica positiva definida, tal que la matriz

$$M_D(A, P) = L \otimes P + M \otimes (AP) + M' \otimes (AP)', \quad (6.3)$$

es negativa definida.<sup>[1]</sup>

**Demostración:** Para su demostración<sup>[2]</sup>, considérese en primer lugar, que si  $\lambda_i(A)$  es un autovalor de la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , y si  $\lambda_i(A) \in \mathcal{C}$ , entonces  $\lambda_i^*(A)$  también será un autovalor de  $A$ , la razón es, que en los sistemas reales los polos (autovalores) son reales o aparecen de a pares conjugados [Lam, 1979].

<sup>1</sup>Note que, el símbolo  $\otimes$ , es el producto Kronecker, que se define como:

$$A \otimes B \triangleq [A_{ij}B]_{ij}. \quad (6.4)$$

Este operador satisface ciertas propiedades, algunas de ellas se exponen a continuación ya que serán de utilidad para la demostración del teorema.

$$a \otimes A = aA, \quad a : \text{escalar}, \quad (6.5)$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C, \quad (6.6)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD. \quad (6.7)$$

<sup>2</sup>Sólo se indican los pasos que conducen a la demostración de la condición suficiente.

Siendo además  $v \in \mathcal{C}$  los autovectores de la matriz  $A$ , por álgebra lineal clásica se sabe que,

$$\begin{aligned} v^* A &= \lambda v^*, \\ (v^* A)^* &= (\lambda v^*)^*, \\ A' v &= v \lambda^*, \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde

$$\lambda \triangleq \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Utilizando directamente la definición (6.4), se puede demostrar que si  $M_D(A, P) \prec 0$ , entonces el producto

$$(I \otimes v^*) M_D(A, P) (I \otimes v) \prec 0. \quad (6.9)$$

Con esta afirmación y reemplazando la Ec. (6.3) en (6.9), se tiene

$$(I \otimes v^*) [L \otimes P + M \otimes (AP) + M' \otimes (AP)'] (I \otimes v) \prec 0. \quad (6.10)$$

Distribuyendo el producto de la desigualdad anterior, y utilizando las Ecs. (6.7) y (6.8), se obtiene para cada uno de sus términos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (I \otimes v^*) (L \otimes P) (I \otimes v) &= L \otimes v^* P v, \\ (I \otimes v^*) (M \otimes (AP)) (I \otimes v) &= M \otimes \lambda v^* P v, \\ (I \otimes v^*) (M' \otimes (AP)') (I \otimes v) &= M' \otimes v^* P v \lambda^*, \end{aligned}$$

lo que permite reescribir a la Ec. (6.9) como sigue:

$$L \otimes v^* P v + M \otimes \lambda v^* P v + M' \otimes v^* P v \lambda^* \prec 0.$$

Siendo el producto  $v^* P v$  un escalar, puede extraerse como factor común,

$$(L \otimes I + M \otimes \lambda + M' \otimes \lambda^*) v^* P v \prec 0,$$

y siendo además  $P = P' \succ 0$ , entonces  $v^* P v$  es un escalar positivo, por lo que necesariamente la matriz

$$(L \otimes I + M \otimes \lambda + M' \otimes \lambda^*) \prec 0. \quad (6.11)$$

La desigualdad anterior puede ser reescrita como sigue:

$$L \otimes \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} + M \otimes \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} + M' \otimes \begin{pmatrix} \lambda_1^* & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_n^* \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{pmatrix} L \otimes 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & L \otimes 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M \otimes \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & M \otimes \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M' \otimes \lambda_1^* & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & M' \otimes \lambda_n^* \end{pmatrix} \prec 0.$$

Es decir, la desigualdad matricial (6.11) puede escribirse como  $n$  desigualdades matriciales, en la forma

$$(L \otimes 1 + M \otimes \lambda_i + M' \otimes \lambda_i^*) \prec 0, \quad \text{con } i = 1, \dots, n.$$

Teniendo en cuenta la Ec.(6.5), se tiene

$$(L + M\lambda_i + M'\lambda_i^*) \prec 0, \quad \text{con } i = 1, \dots, n, \quad (6.12)$$

y por la Def.(2), se concluye que

$$f_D(\lambda_i) = L + sM + s^*M' \prec 0, \quad \text{con } i = 1, \dots, n \text{ y } \forall s = \lambda_i.$$

Por lo que queda demostrado que los autovalores de la matriz  $A$  pertenecen a la región  $D$ , es decir,

$A$  es  $D$ -estable, si  $\exists P \succ 0$  tal que

$$M_D(A, P) = L \otimes P + M \otimes (AP) + M' \otimes (AP)' \prec 0.$$

□

*Ejemplo 6.1* ( [Cappelletti and Adam, 2012] ). *A continuación se muestra que el teorema de Lyapunov es un caso particular del Teorema 6.1. En efecto, el teorema de Lyapunov establece que si  $A$  es estable (tiene todos sus autovalores con parte real negativa)  $\Leftrightarrow \exists P \succ 0$  tal que,  $A'P + PA \prec 0$ .*

**Resolución.**  $\triangleright$  La condición  $\Re(s) < 0$ , puede expresarse mediante la Def.(1) como una región LMI de la forma,

$$D = \{s \in \mathcal{C} : s + s^* < 0\}. \quad (6.13)$$

Entonces, su función característica se expresa como

$$f_D(s) = 0 + s1 + s^*1 < 0, \quad (6.14)$$

donde claramente se tiene que,  $L = 0$  y  $M = M' = 1$ <sup>3</sup>.

Luego, de acuerdo con la Ec.(6.3) y según los valores de  $L$  y  $M$  que definen la región LMI (6.13), debe cumplirse para  $P \succ 0$  que

$$M_D(A, P) = 0 \otimes P + 1 \otimes (AP) + 1' \otimes (AP)' \prec 0, \quad \acute{o}$$

$$M_D(A, P) = (AP) + (AP)' \prec 0.$$

<sup>3</sup>Note que la desigualdad (6.14) está definiendo como región a todo el semiplano complejo izquierdo.

Como se expresó al comienzo, cualquier región convexa que sea simétrica respecto al eje real del plano complejo, puede aproximarse con suficiente precisión mediante regiones LMI.  $\triangleleft$

Basándose en lo hasta aquí expuesto se enuncia la siguiente regla práctica.

**Regla 1.** Una forma práctica para pasar de  $f_D(s)$  a  $M(A, P)$ , es sustituyendo  $(1, s, s^*)$  por  $(P, AP, (AP)')$  respectivamente.

*Ejemplo 6.2.* Para la síntesis de un controlador por realimentación de estados, se desea que los polos del sistema realimentado se ubiquen en el semiplano complejo negativo y cuanto mucho a una distancia  $\alpha$  del eje  $j\omega$ , de manera de garantizar que la respuesta transitoria se extinga en un tiempo  $t_s < 5/\alpha$ .

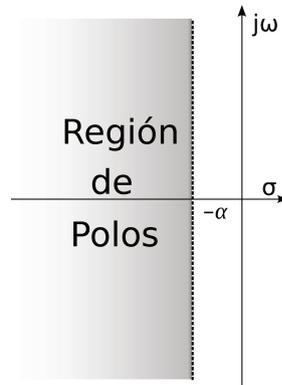


Figura 6.1: Ubicación de polos

**Resolución.**  $\triangleright$  La condición  $\Re(s) < -\alpha$ , puede expresarse mediante la Def. (I) como una región LMI de la forma,

$$D = \{s \in \mathcal{C} : s + s^* < -2\alpha\}.$$

Entonces, la función característica se expresa como:

$$f_D(s) = 2\alpha + s1 + s^*1 < 0,$$

siendo  $L = 2\alpha$ , y  $M = M' = 1$ .

Luego, utilizando la Regla (II) se puede afirmar que: La matriz  $A_{cl}$  tiene sus autovalores en  $D$ ,  $\Leftrightarrow \exists P \succ 0$ , tal que

$$M_D(A_{cl}, P) = 2\alpha \otimes P + 1 \otimes (A_{cl}P) + 1 \otimes (A_{cl}P)' \prec 0,$$

o bien,

$$(A_{cl}P) + (A_{cl}P)' + 2\alpha P \prec 0. \quad (6.15)$$

Reemplazando  $A_{cl} = A - B_2K$ , se obtiene

$$(A - B_2K)P + P(A - B_2K)' + 2\alpha P \prec 0,$$

$$AP - B_2KP + PA' - PK'B_2' + 2\alpha P \prec 0.$$

y  $K$  es el vector de ganancias del controlador por realimentación de estados.

Para escribir a la desigualdad anterior como una LMI (recuérdese que las variables de decisión deben aparecer en forma afín), las matrices incógnitas  $P$  y  $K$ , se sustituyen por la matriz  $Y = KP$ , obteniéndose

$$AP - B_2Y + PA' - Y'B_2' + 2\alpha P \prec 0. \quad (6.16)$$

Esta última desigualdad, es la restricción que debe ser satisfecha para que los autovalores de  $A_{cl}$  pertenezcan al subconjunto:  $\Re_e(s) < -\alpha$ .  $\triangleleft$

Obsérvese que en la desigualdad (6.15), si se pre y posmultiplica por  $x(t)'$  y  $x(t)$  respectivamente, se tiene

$$\dot{V}(x) < -2\alpha V(x), \quad (6.17)$$

para el sistema autónomo

$$\dot{x}(t) = A_{cl}x(t), \quad (6.18)$$

donde  $V(x) < x^T Px$ , según se vio en la Sección 2.2, es la función de Lyapunov.

De la desigualdad (6.17), se obtiene

$$V(x) < e^{-2\alpha t}, \quad (6.19)$$

es decir, la energía del sistema (6.18) se reduce conforme  $t$  aumenta, y su velocidad de decrecimiento tiene una cota superior dada por:

$$\dot{V}(x) < -2\alpha e^{-2\alpha t}. \quad (6.20)$$

Luego, si se satisface la LMI (6.16), se obtiene un vector ganancia de realimentación de estado  $K = YP^{-1}$ , con el que se garantiza que la energía almacenada en el sistema (6.18) se disipa a un ritmo dado por (6.20).

### 6.2.1. Otras regiones LMI

#### Sector cónico

En esta subsección se determinará qué condiciones se deben cumplir, en términos de LMI, para que los polos del sistema realimentado se encuentren en un

sector cónico con vértice en el origen, cuyo ángulo interno sea menor a un valor  $\phi$  dado.

En la Fig.(6.2) se representa este sector, se realizará el análisis sobre la región sombreada ya que en los sistemas reales los polos complejos aparecen de a pares conjugados.

En esta figura se observa que

$$s_1 = \alpha + j\beta, \quad s_1^* = \alpha - j\beta, \quad \cos \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (6.21)$$

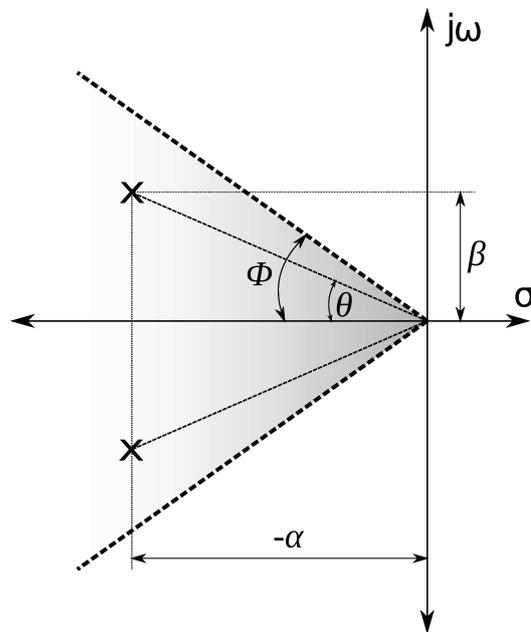


Figura 6.2: Región cónica

También se observa que

$$\theta < \phi, \quad \text{por lo tanto} \quad \cos \theta > \cos \phi. \quad (6.22)$$

Reemplazando (6.21) en (6.22),

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} > \cos \phi,$$

$$\alpha^2 > (\alpha^2 + \beta^2) \cos^2 \phi,$$

$$\alpha^2(1 - \cos^2 \phi) > \beta^2 \cos^2 \phi,$$

se llega a la siguiente desigualdad:

$$\alpha^2 \sen^2 \phi - \beta^2 \cos^2 \phi > 0. \quad (6.23)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} s_1 + s_1^* &= 2\alpha, \\ s_1 - s_1^* &= j2\beta, \end{aligned} \quad (6.24)$$

elevando al cuadrado y reemplazando en (6.23), se obtiene

$$(s_1 + s_1^*)^2 \sen^2 \phi + (s_1 - s_1^*)^2 \cos^2 \phi > 0. \quad (6.25)$$

Dado que

$$\sen \phi > 0, \quad y \quad (s_1 + s_1^*) < 0,$$

se tiene

$$(s_1 + s_1^*) \sen \phi < 0. \quad (6.26)$$

Luego, utilizando el teorema de Sylvester<sup>4</sup>, las desigualdades (6.25) y (6.26) pueden escribirse como la siguiente desigualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} (s_1 + s_1^*) \sen \phi & (s_1 - s_1^*) \cos \phi \\ -(s_1 - s_1^*) \cos \phi & (s_1 + s_1^*) \sen \phi \end{pmatrix} \prec 0. \quad (6.27)$$

Dado que  $s_1$ , es un punto genérico del segundo cuadrante que satisface  $\theta < \phi$ , la región sombreada de la Fig. (6.2) puede ser definida como

$$D(s) \triangleq \begin{pmatrix} (s + s^*) \sen \phi & (s - s^*) \cos \phi \\ (s^* - s) \cos \phi & (s + s^*) \sen \phi \end{pmatrix} \prec 0, \quad (6.28)$$

siendo

$$f_D(s) = \begin{pmatrix} (s + s^*) \sen \phi & (s - s^*) \cos \phi \\ (s^* - s) \cos \phi & (s + s^*) \sen \phi \end{pmatrix}, \quad (6.29)$$

su función característica, es decir,

$$D(s) = \{s / f_D(s) \prec 0\}. \quad (6.30)$$

Aplicando la regla práctica (I), se deduce que restricción debe cumplir el sistema realimentado, para que sus autovalores se encuentren en el semiplano izquierdo, y en un región cónica simétrica respecto al eje  $\Re$ , con vértice en el origen y una apertura menor a  $2\phi$ , y esta es:

$$M_D(A_{cl}, P) \triangleq \begin{pmatrix} (A_{cl}P + PA'_{cl}) \sen \phi & (A_{cl}P - PA'_{cl}) \cos \phi \\ (PA'_{cl} - A_{cl}P) \cos \phi & (A_{cl}P + PA'_{cl}) \sen \phi \end{pmatrix} \prec 0. \quad (6.31)$$

<sup>4</sup>Recordar que para que la matriz (6.27) sea negativa definida, los determinantes de las submatrices principales deben alternar su signo comenzando con el signo (-), condición que es satisfecha por las desigualdades (6.26) y (6.25).

### Sector circular

En esta subsección se determinará que condiciones se deben cumplir, en términos de LMI, para que los polos del sistema realimentado se encuentren en un sector circular con centro en  $(-c, j0)$ , y radio  $r$ .

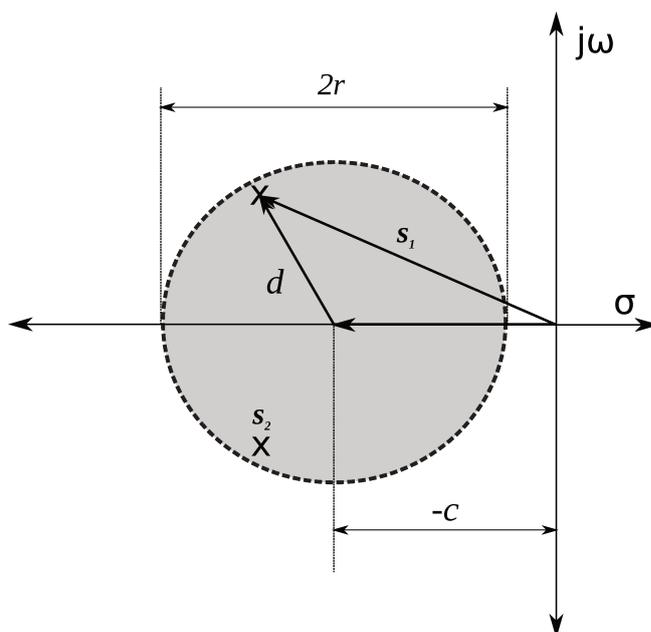


Figura 6.3: Región circular

En la Fig.(6.3) se observa que

$$\begin{aligned} s_1 &= s_2 + d, \\ s_1 &= -c + d, \quad \Rightarrow s_1 + c = d. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Se observa además que

$$|d| < r, \quad \Rightarrow d^*d < r^2, \quad (6.33)$$

por lo tanto, se tiene

$$r^2 - (s_1^* + c)(s_1 + c) > 0. \quad (6.34)$$

Luego, generalizando para todos los puntos en el interior del círculo, la desigualdad (6.34) puede expresarse como

$$f_D(s) = \begin{pmatrix} -r & (s + c) \\ (s^* + c) & -r \end{pmatrix} \prec 0. \quad (6.35)$$

Haciendo uso de la regla (I), se determina que  $A_{cl}$  tiene todos sus autovalores en  $f_D(s) \prec 0$ , si satisface la siguiente LMI:

$$M(P, A_{cl}) = \begin{pmatrix} -rP & (PA_{cl} + cP) \\ (A'_{cl}P + cP) & -rP \end{pmatrix} \prec 0. \quad (6.36)$$

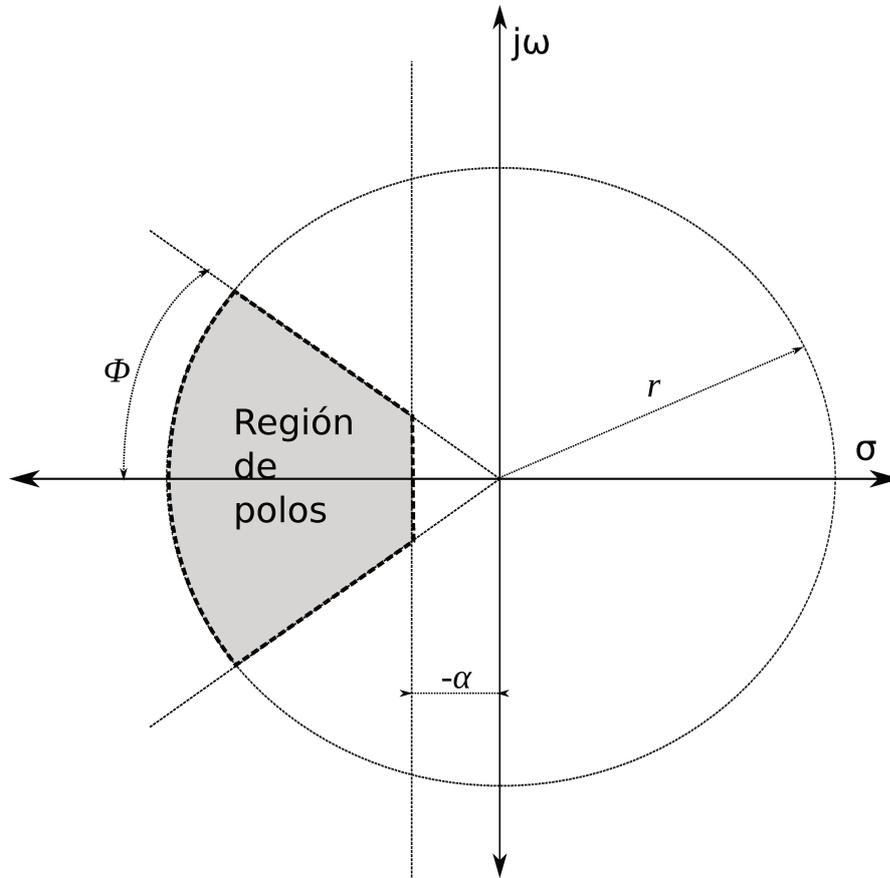


Figura 6.4: Intersección de regiones

### Intersección de LMIs en el plano complejo

Considérese la figura (6.4), en ella se muestra la intersección de:

1. Un sector cónico, con ángulo interno  $< 2\phi$ ,
2. un sector circular centrado en el origen y radio  $r$ ,
3. el semiplano izquierdo, acotado por  $\Re(s) < \alpha$ .

Para que un punto  $s$  del plano complejo pertenezca a este sector, debe satisfacer simultáneamente las siguientes LMIs:

$$\begin{aligned} f_{D1}(s) &= \begin{pmatrix} (s + s^*) \operatorname{sen} \phi & (s - s^*) \operatorname{cos} \phi \\ (s^* - s) \operatorname{cos} \phi & (s + s^*) \operatorname{sen} \phi \end{pmatrix} \prec 0, \\ f_{D2}(s) &= \begin{pmatrix} -r & s \\ s^* & -r \end{pmatrix} \prec 0, \\ f_{D3}(s) &= 2\alpha + s + s^* < 0, \end{aligned} \quad (6.37)$$

y para que la matriz  $A_{cl}$  tenga todos sus autovalores en dicha región, debe satisfacer las siguientes LMIs:

$$\begin{aligned} M_{D1}(P, A_{cl}) &= \begin{pmatrix} (PA_{cl} + A'_{cl}P) \operatorname{sen} \phi & (PA_{cl} - A'_{cl}P) \operatorname{cos} \phi \\ (A'_{cl}P - PA_{cl}) \operatorname{cos} \phi & (PA_{cl} + A'_{cl}P) \operatorname{sen} \phi \end{pmatrix} \prec 0, \\ M_{D2}(P, A_{cl}) &= \begin{pmatrix} -rP & PA_{cl} \\ A'_{cl}P & -rP \end{pmatrix} \prec 0, \\ M_{D3}(P, A_{cl}) &= 2\alpha P + PA_{cl} + A'_{cl}P \prec 0, \\ M_{D4}(P) &= P \succ 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Es decir, la regla (I) mapea regiones LMI del plano  $s$ , en regiones LMI en el espacio  $\mathfrak{R}^n$ , siendo  $n$  el número de estados de  $A_{cl}$ .

**Nota:** Recuérdese que en todos los casos, para encontrar la ganancia del controlador  $K$  es necesario reemplazar  $A_{cl} = A - B_2K$ , y definir  $Y = KP$ .<sup>5</sup>

### 6.3. Diseño $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ y ubicación de Polos

*Ejemplo 6.3.* Basándose en el ejemplo (5.1), adicionalmente se incluirá que los polos del sistema realimentado se ubiquen en una región específica, para lograr la respuesta transitoria deseada.

**Resolución.**  $\triangleright$  Concretamente, los objetivos de diseño son:

- Estabilizar el sistema.

<sup>5</sup> En este punto, se recomienda al lector analizar la función `lmiereg`, que está incluida en el toolbox de *Matlab*®.

- Minimizar la energía de vector de salida  $z_2 = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ u]' = [\theta \ \dot{\theta} \ e \ \dot{e} \ F]'$ , ante perturbaciones impulsivas, como ser ruido y condiciones iniciales distintas de cero.
- Acotar los efectos de las perturbaciones externas  $w$  sobre la posición del péndulo  $\theta$  por debajo de un valor  $\gamma$ .
- Acotar el tiempo de establecimiento de la respuesta temporal por debajo de un valor máximo.

La solución a este problema multiobjetivos se plantea como sigue:

$$\begin{aligned} & \min_{X>0, Y} \{ \text{Traza } M \}, \\ & \text{sa:} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} M & C_2 X - D_{22} Y \\ X C_2' - Y' D_{22}' & X \end{pmatrix} \succ 0, \quad (6.39)$$

$$\begin{pmatrix} AX + XA' - B_2 Y - Y' B_2' & B_1 & X C_1' - Y' D_{12}' \\ B_1' & -I\gamma & D_{11}' \\ C_1 X - D_{12} Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (6.40)$$

$$AX - B_2 Y + XA' - Y' B_2' + 2\alpha X \prec 0. \quad (6.41)$$

Las restricciones (6.39) y (6.40) satisfacen los tres primeros objetivos, mientras que la restricción (6.41) satisface el último.

### Resultados numéricos

Sumado a los objetivos de performance  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  formulados en el ejemplo 5.1, en este ejemplo se pretende que el tiempo de respuesta sea inferior a 3.5 seg, para lograrlo, se exige que la parte real de los polos del sistema realimentado, cumplan con la condición:  $\alpha < -1,5$ .

En la Fig.(6.5) se presenta las respuestas dinámicas mientras que, en la Fig.(6.6) se presenta la ubicación de polos y la respuesta en frecuencia del sistema realimentado.

Las tablas comparativas (6.1) y (6.2) muestran los resultados obtenidos para las ganancias de los controladores y los distintos grados de performance, a medida que se agregan restricciones.

◁

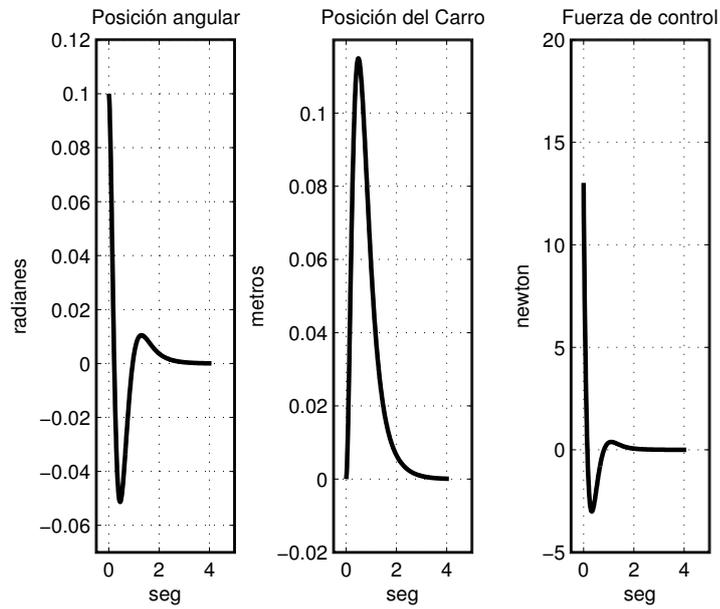


Figura 6.5: Desempeño nominal  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  y ubicación de polos.

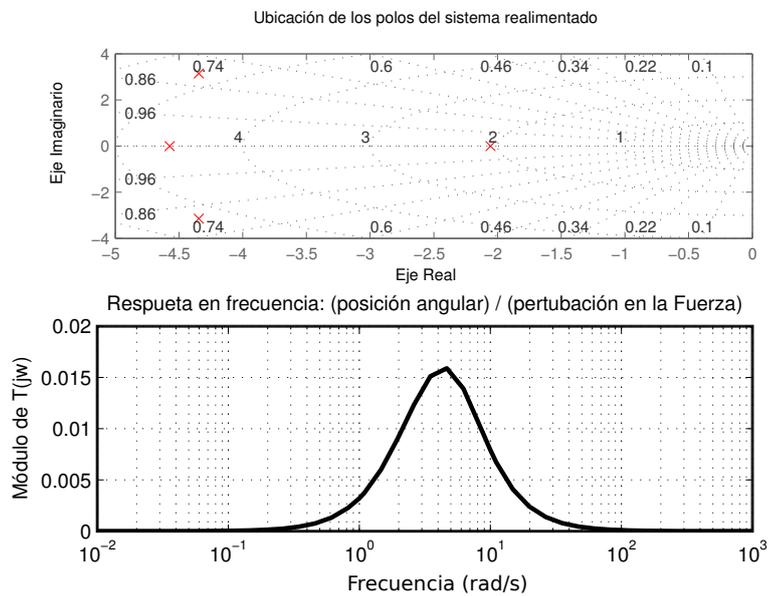


Figura 6.6: Desempeño nominal  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  y ubicación de polos.

Tabla 6.1: Ganancias de los controladores.

Ganancias	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
$\mathcal{H}_2$ :	52,1113	11,5968	0,9960	2,7207
$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ :	82,3740	14,7207	1,0028	3,8155
$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty + Ub. Polos$ :	130,1745	29,2059	27,5804	27,7772

Tabla 6.2:  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ , Tiempo de establecimiento y el control máximo.

Performance	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$	Tiempo de Est.	$u_{m\acute{a}x}$
$\mathcal{H}_2$ :	3,2033	0,0408	$10 < ts < 15\text{seg.}$	5,2111
$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ :	3,4391	0,0182	$ts > 20\text{seg.}$	8,2374
$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty + Ub. Polos$ :	3,9159	0,0159	$ts \approx 3,5\text{seg.}$	13,0175

## 6.4. Polítopo de incertidumbres

En el diseño de un sistema de control, es fundamental disponer de un modelo matemático que represente lo mejor posible a la planta o sistema físico a controlar, de lo contrario, es poco probable que los resultados obtenidos sean los deseados.

Construir un modelo representativo del proceso no es una tarea trivial, porque al modelar se simplifican y linealizan las ecuaciones de manera de tener una estructura matemática manejable, lo que se llama *planta nominal* que aproximará a la planta real.

La técnica de control robusto busca encerrar todo lo que esta fuera del modelo nominal, en lo que se llama *modelo de incertidumbres*, de forma tal que la planta real que se quiere gobernar, esté incluida dentro de una familia de modelos formada por la planta nominal más las incertidumbres.

En esta sección, se verá como las LMI pueden resolver problemas de control sobre sistemas *LTI con incertidumbres paramétricas*, esto es, se considerará un modelo cuyos parámetros no son constantes, y aunque se desconozca sus valores reales, se sabe que los mismos se encuentran acotados dentro de un intervalo determinado.

Supóngase que el sistema que se quiere controlar tiene  $m$  parámetros, representados por el vector

$$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m]', \quad (6.42)$$

y cada parámetro  $\alpha_k$  tiene como cota inferior a  $\underline{\alpha}_k$  y como cota superior a  $\bar{\alpha}_k$ , es decir,

$$\alpha_k \in [\underline{\alpha}_k, \bar{\alpha}_k],$$

con  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Nótese que si se toman estas cotas como los dos posibles estados de una variable binaria, al tener el sistema  $m$  variables distintas, se tendrá  $N = 2^m$  combinaciones diferentes, lo que permitirá construir en forma gráfica un polítopo<sup>6</sup> con  $N$  vértices, dentro y/o sobre el cual se hallan los parámetros inciertos del sistema.

Ahora, considérese el siguiente sistema lineal con incertidumbres paramétricas:

$$\dot{x}(t) = A_{cl}(\alpha)x(t) + B(\alpha)w(t), \quad (6.43)$$

$$z(t) = C_{cl}(\alpha)x(t) + D(\alpha)w(t).$$

Si cada matriz del sistema (6.43), es una combinación afín de  $m$  parámetros, se puede escribir<sup>7</sup>

$$A_{cl}(\alpha) = A_0^{cl} + \sum_{k=1}^m \alpha_k A_k^{cl}, \quad B(\alpha) = B_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k B_k, \quad (6.44)$$

$$C_{cl}(\alpha) = C_0^{cl} + \sum_{k=1}^m \alpha_k C_k^{cl}, \quad D(\alpha) = D_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k D_k,$$

siendo  $A_k, B_k, C_k$ , y  $D_k$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, m$ , matrices constantes.

Si se utilizan los valores extremos de cada parámetro  $\alpha_k$ , para cada una de las cuatro matrices  $A_{cl}(\alpha), B(\alpha), C_{cl}(\alpha)$  y  $D(\alpha)$ , existen  $N$  combinaciones diferentes, por lo tanto, se tiene  $N$  modelos LTI diferentes que se los representa de la siguiente forma:

$$S_i = \begin{pmatrix} A_i^{cl} & B_i \\ C_i^{cl} & D_i \end{pmatrix}, \quad \text{con } i = 1, \dots, N. \quad (6.45)$$

Cada modelo  $S_i$  forma el vértice de un polítopo, llamado polítopo de incertidumbres, el cual define una región convexa, y es la imagen del polítopo de parámetros.

La planta o sistema real  $S(\alpha)$  representado en la Ec. (6.43), se encuentra dentro del polítopo, y aunque existan infinitas plantas dentro del mismo, cada una de ellas puede ser representada como una combinación convexa de sus  $2^m$  vértices, esto es,

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^{2^m} t_i S_i, \quad \text{donde } \sum_{i=1}^{2^m} t_i = 1. \quad (6.46)$$

Por lo tanto, si se garantizan las especificaciones de diseño para cada vértice del polítopo, por convexidad se garantizarán las especificaciones de diseño en todos los puntos de su interior y frontera.

<sup>6</sup> Un polítopo es la generalización a dimensión  $N$ , de lo que en dimensión 2 es un polígono y en dimensión 3 es un poliedro. Ver apéndice A, subsección (A.4.1).

<sup>7</sup> Para mayor claridad en la notación, se reemplaza el subíndice en las matrices  $A_{cl}$  y  $C_{cl}$ , reescribiéndose dichas matrices con supraíndice del siguiente modo:  $A^{cl}$  y  $C^{cl}$ .

*Ejemplo 6.4 ( **Regulador robusto**<sup>8</sup> [Cappelletti and Adam, 2012]). Basándose en el ejemplo (6.3) ahora se incluye, además de los requisitos ya pedidos, incertidumbre en sus parámetros.*

**Resolución.** ▷ Supóngase que el sistema de péndulo invertido tiene dos parámetros inciertos<sup>9</sup>, la masa del carro y la masa del péndulo, esto es,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ m \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

donde los intervalos a los que pertenece cada parámetro son

$$\begin{aligned} M_{\min} &\leq M \leq M_{\max}, \\ m_{\min} &\leq m \leq m_{\max}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Al tener el sistema 2 parámetros inciertos el polítopo tendrá 4 vértices como se muestra en la Fig. (6.7), un vértice por cada extremo de cada intervalo.

A continuación se reescribe la dinámica del sistema,

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} w(t). \quad (6.49)$$

Para que los parámetros  $M$  y  $m$  aparezcan en forma afín dentro de la ecuación de estados, se modifica la Ec. (6.49) del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ml & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (M+m)g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mg & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t),$$

y en forma compacta, se tiene

$$E\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}_2u(t) + \hat{B}_1w(t). \quad (6.50)$$

Note que, a partir de este sistema modificado de la ecuación anterior, las matrices  $\hat{A}$  y  $E$  se pueden expresar mediante una combinación afín de sus parámetros,

<sup>8</sup>Se analiza sólo la ecuación de estado del sistema (6.43).

<sup>9</sup>Se considera que  $l$  y  $g$ , son parámetros constantes.

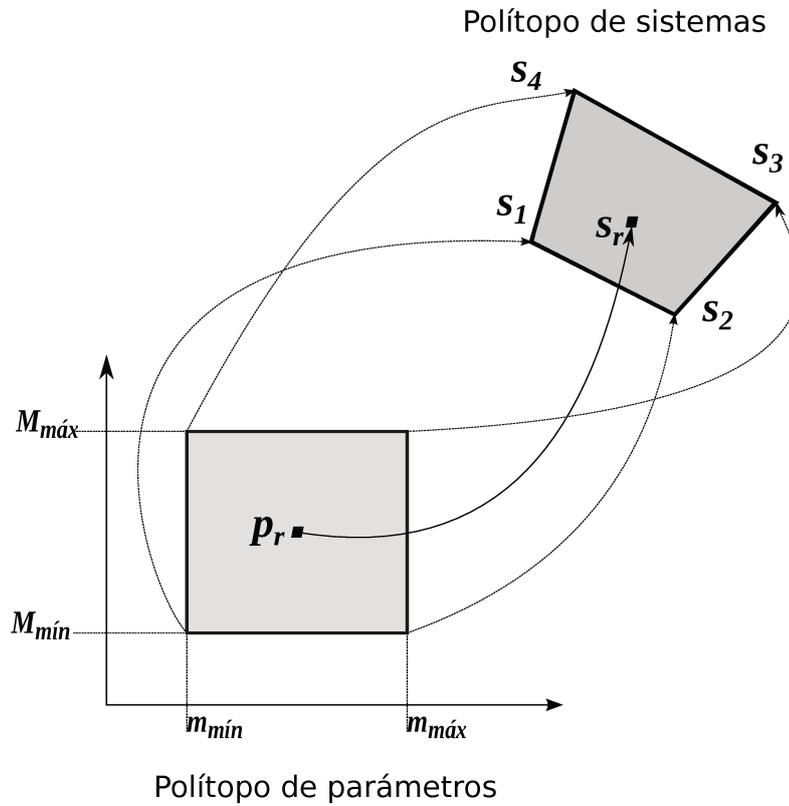


Figura 6.7: Incertidumbre paramétrica y polígono de sistemas

como se muestra a continuación

$$\hat{A}(\alpha) = \hat{A}_0 + \hat{A}_1\alpha_1 + \hat{A}_2\alpha_2,$$

$$\hat{A}_{(M,m)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} m, \quad (6.51)$$

$$E(\alpha) = E_0 + E_1\alpha_1 + E_2\alpha_2,$$

$$E_{(M,m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} m. \quad (6.52)$$

Escritas  $\hat{A}$  y  $E$  de este modo, y dado que

$$M \in [M_{m\acute{a}x}, M_{m\acute{i}n}], \quad y \quad m \in [m_{m\acute{a}x}, m_{m\acute{i}n}], \quad (6.53)$$

se tiene 4 combinaciones posibles para cada una de ellas, a saber

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{A}_0 + \hat{A}_1 M_{m\acute{i}n} + \hat{A}_2 m_{m\acute{i}n}, \\ E_1 &= E_0 + E_1 M_{m\acute{i}n} + E_2 m_{m\acute{i}n}. \\ \\ \hat{A}_2 &= \hat{A}_0 + \hat{A}_1 M_{m\acute{i}n} + \hat{A}_2 m_{m\acute{a}x}, \\ E_2 &= E_0 + E_1 M_{m\acute{i}n} + E_2 m_{m\acute{a}x}. \\ \\ \hat{A}_3 &= \hat{A}_0 + \hat{A}_1 M_{m\acute{a}x} + \hat{A}_2 m_{m\acute{a}x}, \\ E_3 &= E_0 + E_1 M_{m\acute{a}x} + E_2 m_{m\acute{a}x}. \\ \\ \hat{A}_4 &= \hat{A}_0 + \hat{A}_1 M_{m\acute{a}x} + \hat{A}_2 m_{m\acute{i}n}, \\ E_4 &= E_0 + E_1 M_{m\acute{a}x} + E_2 m_{m\acute{i}n}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

De esta manera se obtiene 4 pares de matrices constantes, que se representan del siguiente modo:

$$(\hat{A}, E)_{m\acute{i}n}^{m\acute{i}n}, (\hat{A}, E)_{m\acute{a}x}^{m\acute{i}n}, (\hat{A}, E)_{m\acute{a}x}^{m\acute{a}x} \text{ y } (\hat{A}, E)_{m\acute{i}n}^{m\acute{a}x}.$$

Las matrices  $E_i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$  son diagonales, por lo tanto, a partir de la Ec.(6.50) pueden recuperarse las matrices originales haciendo

$$\begin{aligned} A_i &= E_i^{-1} \hat{A}_i, \\ B_1^i &= E_i^{-1} \hat{B}_1^i, \\ B_2^i &= E_i^{-1} \hat{B}_2^i. \end{aligned}$$

Finalmente, se obtienen los 4 sistemas LTI que forman los vértices del polítopo

$$\begin{aligned} S_1 &\triangleq (A, B_1, B_2)_{m\acute{i}n}^{m\acute{i}n}, & S_2 &\triangleq (A, B_1, B_2)_{m\acute{a}x}^{m\acute{i}n}, \\ S_3 &\triangleq (A, B_1, B_2)_{m\acute{i}n}^{m\acute{a}x}, & S_4 &\triangleq (A, B_1, B_2)_{m\acute{a}x}^{m\acute{a}x}. \end{aligned}$$

De esta manera, las restricciones LMI establecidas anteriormente para el sistema nominal deben ser satisfechas en cada uno de estos sistemas vértices, para asegurar que las infinitas plantas que se pueden representar como combinación

convexa de ellos, también las satisfagan.

Resumiendo, el problema multiobjetivo robusto, queda planeado como:

$$\begin{aligned} & \min_{X \succ 0, Y} \{traza M\}, s.a : \\ & \begin{pmatrix} M & C_2^i X - D_{22}^i Y \\ X(C_2^i)' - Y'(D_{22}^i)' & X \end{pmatrix} \succ 0, \\ & \begin{pmatrix} A_i X + X A_i' - B_2^i Y - Y'(B_2^i)' & B_1^i & X(C_1^i)' - Y'(D_{12}^i)' \\ (B_1^i)' & -I\gamma & (D_{11}^i)' \\ C_1^i X - D_{12}^i Y & D_{11}^i & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0, \\ & (A_i X - B_2^i Y + X A_i' - Y'(B_2^i)' + 2\alpha X) \prec 0. \end{aligned} \tag{6.55}$$

*con  $i=1,2,3,4$ .*

### Resultados numéricos y gráficas

Como se dijo anteriormente, la robustez del controlador radica en su capacidad para cumplir con todas las especificaciones requeridas, aún cuando los parámetros del sistema varíen, o tomen cualquier valor dentro de cierto intervalo.

En este ejemplo numérico se considera que la masa del carro  $M$  y la masa del péndulo  $m$ , pueden tomar algún valor dentro de los siguientes intervalos:

$$\begin{aligned} M & \in [1,7 \ 2,3], \\ m & \in [0,07 \ 0,13]. \end{aligned} \tag{6.56}$$

Resolviendo el problema de minimización con restricciones (6.55), en los 4 sistemas vértices del polítopo en forma simultánea, se obtiene un único controlador de estados  $K = X^{-1}Y$ , cuyo valores de ganancias son:

$$k_1 = 129,1500, \quad k_2 = 28,9460, \quad k_3 = 27,3754 \quad \text{y} \quad k_4 = 27,5542.$$

En las Figs.(6.8), (6.9) y (6.10) se muestran las respuestas dinámicas de los cuatros sistemas realimentados con el mismo controlador, mientras que en la Fig.(6.11) se muestra la ubicación sus polos.

En la Fig.(6.12) se representa los módulos de las respuestas en frecuencia de las transferencias  $(T_{\theta w}(s))_i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ .

◁

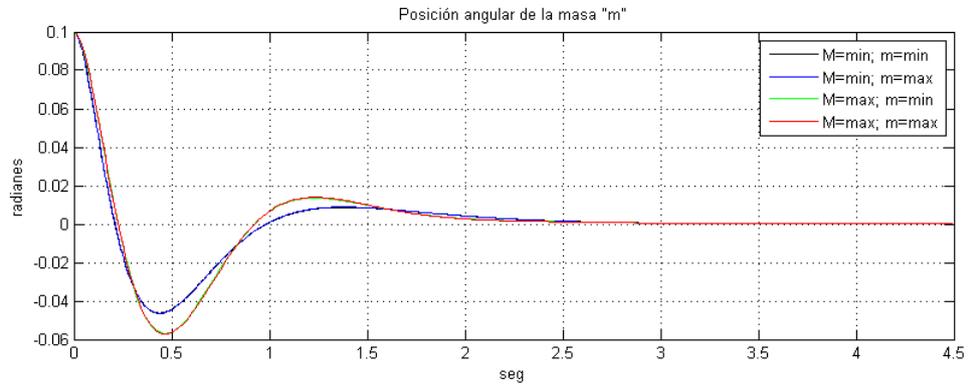


Figura 6.8: Posición angular del péndulo

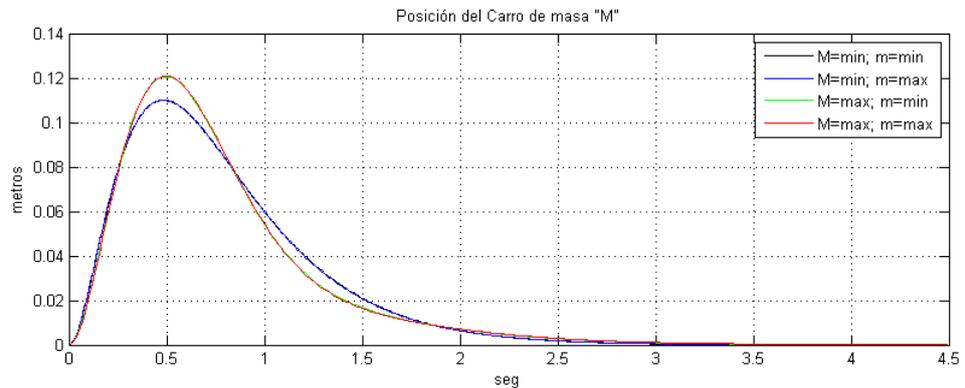


Figura 6.9: Posición del carro

## 6.5. Resumen

Este capítulo presentó la síntesis de un controlador por relimentación de estado que satisface múltiples especificaciones de diseño en forma simultánea.

Todos los objetivos aquí planteados,  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ , ubicación de polos en regiones específicas y robustez ante incertidumbre en los parámetros del sistema, encuentran en el formato LMI un marco común para su formulación.

La lista de especificaciones no se agota con las aquí tratadas sino que adicionalmente pueden agregarse otras, como por ejemplo, restricciones en la amplitud de la manipulada para evitar saturaciones. En efecto, en el próximo capítulo se analizará la manera de establecer una restricción LMI para fijar una cota al valor máximo de la variable manipulada.

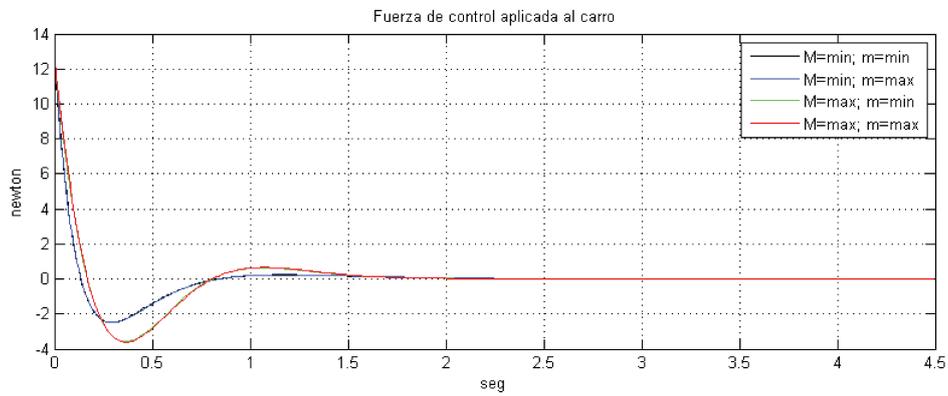


Figura 6.10: Señal de control

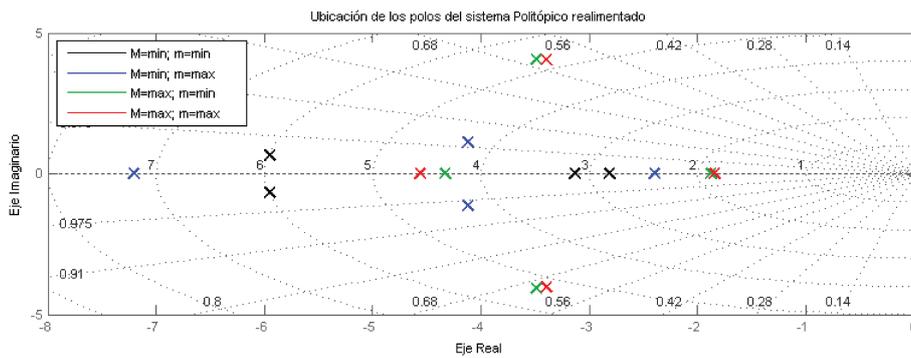


Figura 6.11: Ubicación de los polos

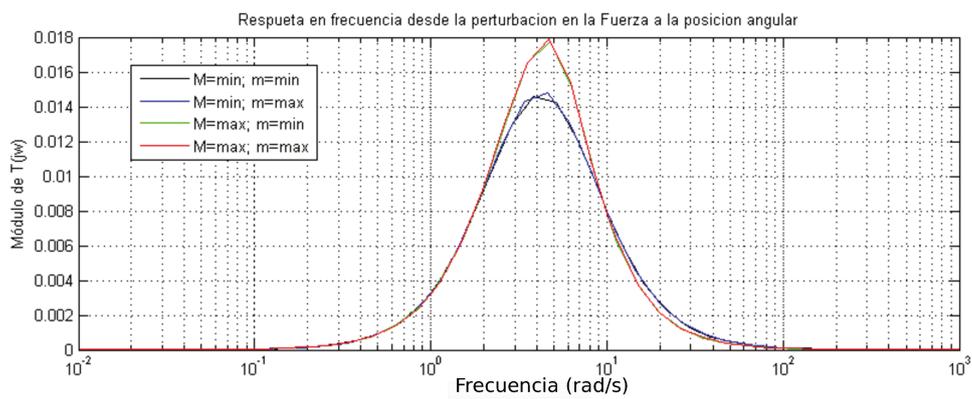


Figura 6.12: Magnitud de la respuesta en frecuencia



# Capítulo 7

## Restricciones en la variable manipulada

### 7.1. Introducción

En la subsección (5.3.1) se minimizó la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema realimentado utilizando la matriz gramiano de controlabilidad. Siguiendo el mismo razonamiento, en esta ocasión se minimiza la norma  $\mathcal{H}_2$  pero utilizando la matriz gramiano de observabilidad.

La razón de hacerlo en esta forma radica en que quedan explicitadas las condiciones iniciales  $x_0$  dentro de la LMI, y ésto permite fijar una cota superior a la amplitud de la variable manipulada, la cual se impone como restricción.

### 7.2. Minimización $\mathcal{H}_2$ vía Matriz Gramiano de Observabilidad

Partiendo del sistema (5.20) y de las Ecs. (5.29) y (5.32), que para facilitar el análisis a continuación se reescriben<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{cl}x(t) + B_1w(t), \\ z_2(t) &= C_{2cl}x(t), \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 = \text{Traza} (B_1' W_o B_1), \quad (7.2)$$

$$A_{cl}' W_o + W_o A_{cl} + C_{2cl}' C_{2cl} = 0, \quad (7.3)$$

se expresará la condición  $\|T_{z_2w}\|_2 < \beta$ , mediante el uso de restricciones LMIs.

---

<sup>1</sup>Como se analiza la norma  $\mathcal{H}_2$ , se ha asumido  $D_{21} = 0$ .

En efecto, si el sistema realimentado es estable y siendo  $W_o \succ 0$ , por el teorema de Lyapunov se debe cumplir que

$$A'_{cl}W_o + W_oA_{cl} \prec 0. \quad (7.4)$$

Eligiendo la matriz  $P \succ 0$ , tal que  $P - W_o \succ 0$ , y reemplazando en la Ec. (7.2) resulta razonable escribir

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 < \text{Traza} (B'_1 P B_1), \quad (7.5)$$

y si se elige una matriz  $M$ , simétrica y positiva definida, tal que verifique

$$(B'_1 P B_1) \prec M, \quad (7.6)$$

se tiene

$$\text{Traza} (B'_1 P B_1) < \text{Traza} M. \quad (7.7)$$

Por lo tanto, es posible escribir

$$\|T_{z_2w}\|_2^2 = \text{Traza} (B'_1 W_o B_1) < \text{Traza} (B'_1 P B_1) < \text{Traza} M \triangleq \beta^2. \quad (7.8)$$

Por otro lado, al reemplazar  $P$  en la Ec. (7.3) se tiene que

$$A'_{cl}P + PA_{cl} + C'_{cl}C_{cl} \prec 0. \quad (7.9)$$

### Planteo de las desigualdades (7.6) y (7.9) en formato LMI

Utilizando el complemento de Schur, la desigualdad (7.6) resulta en la siguiente LMI:

$$\begin{pmatrix} M & B'_1 \\ B_1 & P^{-1} \end{pmatrix} \succ 0, \quad P^{-1} \succ 0. \quad (7.10)$$

Mientras que para desarrollar la desigualdad (7.9) y representarla mediante una LMI, primero se reemplazan  $A_{cl}$  y  $C_{cl}$  por sus definiciones expresadas en la Ec. (5.14), obteniéndose

$$(A - B_2K)'P + P(A - B_2K) + (C_2 - D_{22}K)'(C_2 - D_{22}K) \prec 0. \quad (7.11)$$

Como ya se mencionó, para que la desigualdad anterior sea una restricción convexa, las matrices de decisión  $P$  y  $K$  deben ser escritas en forma afín dentro de la dicha desigualdad. A tal efecto, de acuerdo con [Scherer et al., 1997], se pre y posmultiplica la desigualdad (7.11) por  $Q \triangleq P^{-1}$ , y se define una nueva variable  $Y \triangleq KQ$ , obteniéndose

$$QA' + AQ - Y'B'_2 - B_2Y + (QC'_2 - Y'D'_{22})(C_2Q - D_{22}Y) \prec 0. \quad (7.12)$$

Como se pidió en la sección (2.4)  $C_2$  y  $D_{22}$  deben ser ortogonales, y utilizando las definiciones realizadas en la Ec.(2.156), se tiene

$$QA' + AQ - Y'B_2' - B_2Y + (QR_xQ + Y'R_uY) \prec 0. \quad (7.13)$$

Expresando el paréntesis en forma matricial, la desigualdad (7.13) puede escribirse como

$$QA' + AQ - Y'B_2' - B_2Y + (Q \ Y') \Lambda_{(R_x, R_u)} (Q \ Y')' \prec 0, \quad (7.14)$$

donde  $\Lambda_{(R_x, R_u)}$  indica una matriz diagonal de  $R_x$  y  $R_u$ . Por último, utilizando el complemento de Schur se obtiene:

$$\begin{pmatrix} QA' + AQ - Y'B_2' - B_2Y & Q & Y' \\ Q & -R_x^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R_u^{-1} \end{pmatrix} \prec 0. \quad (7.15)$$

Así mismo, reescribiendo la restricción (7.10) en función de  $Q$ , se tiene

$$\begin{pmatrix} M & B_1' \\ B_1 & Q \end{pmatrix} \succ 0, \quad Q \succ 0. \quad (7.16)$$

Ahora, las desigualdes (7.6) y (7.9) quedan expresadas por las LMIs (7.15) y (7.16), cuyas variables de decisión resultan ser las matrices  $Q$  e  $Y$ .

Por lo tanto, cumpliéndose con estas restricciones se tiene garantía de que la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema en lazo cerrado  $T_{z_2w}(s)$ , es menor que  $\sqrt{\text{Traza } \bar{M}} = \beta$ .

Luego, como se expresó en la subsección (5.4.1), el problema se puede plantear de dos formas:

1. Como un problema de factibilidad, en este caso se fija la traza de  $M$  en un valor  $\beta^2$  determinado, y se verifica si las restricciones (7.15) y (7.16) son satisfechas, presentándose dos casos:

- a) Si el problema es factible, el algoritmo de búsqueda entrega como resultado los valores de las variables de decisión  $Q$  y  $Y$ , obteniéndose luego la ganancia de realimentación de estado

$$K = Y Q^{-1} = Y P,$$

la cual garantiza que  $\|T_{z_2w}\|_2 < \sqrt{\text{traza } \bar{M}} = \beta$ .

- b) Si el problema es infactible, será necesario relajar la restricción aumentando el valor de  $\beta$ , hasta lograr factibilidad.

2. Como un problema de minimización de la norma  $\mathcal{H}_2$ , para ello se resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\min_{Q \succ 0, Y} \{ \text{Traza } M \},$$

$$\text{s.a. (7.15) y (7.16).}$$

Este problema siempre es factible y al encontrar la solución, el algoritmo de búsqueda entregará los valores óptimos de  $Q$  e  $Y$ , resultando

$$K_{\text{ópt}} = Y_{\text{ópt}} Q_{\text{ópt}}^{-1} = Y_{\text{ópt}} P_{\text{ópt}} \quad (7.17)$$

la ganancia óptima de realimentación de estado que minimiza  $\|T_{z_2 w}\|_2$ .

### 7.3. LQR vía LMI con Restricción en la Acción de Control

Si en el sistema (7.1) se reemplaza la matriz de entrada  $B_1$  por el vector de estados inicial  $x_0$ , y la perturbación  $w(t)$  por la perturbación impulsiva  $\delta(t)$ , se tiene un sistema autónomo realimentado, y la acción de control dada en la Ec. (7.17) es la obtenida para el LQR, como ya se ha visto en la sección (2.4).

Utilizando el planteo anterior, en esta sección se pretende encontrar una acción de control para el sistema (7.1) que minimice su norma  $\mathcal{H}_2$  sujeto a que la amplitud de la señal manipulada  $u(t)$  no supere un determinado valor  $\bar{U}$  que se fija como cota. Es decir, a las restricciones (7.15) y (7.16), se le agregará una nueva que se deduce a continuación. [Ge et al., 2002].

Como se ha visto anteriormente, en realimentación estática de estados la acción de control viene dada por

$$u(t) = -Kx(t). \quad (7.18)$$

Siendo  $K = YP$ , véase sección (7.2), se tiene que

$$|u(t)|^2 = x(t)' P Y' Y P x(t). \quad (7.19)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} v(t) &\triangleq P^{1/2} x(t), \\ H &\triangleq Y P^{1/2}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

la Ec. (7.19) puede escribirse como

$$|u(t)|^2 = v(t)' H' H v(t), \quad (7.21)$$

la matriz  $H'H$  es una matriz simétrica, y por lo tanto puede diagonalizarse ortogonalmente en la forma

$$H'H = T'\Lambda T, \quad (7.22)$$

definiendo

$$q(t) \triangleq Tv(t), \quad (7.23)$$

y siendo ( $n$ ) el número de estados, se tiene

$$|u(t)|^2 = q(t)'\Lambda q(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i^2(t), \quad (7.24)$$

donde  $\lambda_i$  (con  $i = 1, \dots, n$ ) son los valores singulares de  $H$ , de manera que se verifica la siguiente desigualdad:

$$|u(t)|^2 \leq \lambda_{\max}(H'H) |q(t)|^2. \quad (7.25)$$

Teniendo en cuenta que la matriz  $T$  solo produce una rotación, resulta que

$$|q(t)|^2 = |v(t)|^2 = x(t)'Px(t), \quad (7.26)$$

y siendo  $\lambda_i(H'H) = \lambda_i(HH')$ , la Ec. (7.25) puede reescribirse como:

$$|u(t)|^2 \leq \lambda_{\max}(YPY')(x(t)'Px(t)). \quad (7.27)$$

Siendo el sistema (7.1) asintóticamente estable, el factor  $x(t)'Px(t)$  tiene un máximo dado por el instante inicial<sup>2</sup>, es decir,

$$x(t)'Px(t) \leq x_0'Px_0, \quad \forall t. \quad (7.28)$$

Al comienzo de esta subsección se estableció que  $B_1 = x_0$ , y según la Ec. (7.8) resulta que

$$\text{Traza}(x_0'Px_0) = x_0'Px_0 < \beta^2, \quad (7.29)$$

por lo tanto,

$$|u(t)|^2 < \lambda_{\max}(YPY') \beta^2. \quad (7.30)$$

Luego, puede aplicarse una cota  $\bar{U}$  para la amplitud máxima de la variable manipulada, del siguiente modo:

$$|u(t)|^2 < \lambda_{\max}(YPY') \beta^2 < \bar{U}^2. \quad (7.31)$$

<sup>2</sup>El factor  $x_0'Px_0$  se denomina elipsoide inicial, y es la energía almacenada en el sistema autónomo en  $t = 0$ . Como se ha visto en la subsección (2.2.1), si el sistema es asintóticamente estable, dicha energía debe decrecer conforme  $t$  aumenta.

De manera que si se satisface

$$\lambda_{\max}(Y P Y') \beta^2 < \bar{U}^2, \quad (7.32)$$

hay garantía de

$$|u(t)| < \bar{U} \quad \forall t. \quad (7.33)$$

Por último, definiendo  $U_\beta \triangleq \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \beta \end{pmatrix}$  y utilizando el complemento de Schur, la desigualdad (7.32) puede describirse como

$$\begin{pmatrix} U_\beta^2 & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} \succ 0, \quad Q = P^{-1} \succ 0. \quad (7.34)$$

Nótese que este problema que involucra las desigualdades (7.34), (7.15) y (7.16), es un problema de factibilidad y no de minimización, la razón es que la cota de la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema autónomo, esto es, el escalar  $\beta$  no aparece en forma afín en la Ec. (7.34) y debe fijarse en un valor constante.

Resumiendo, el problema puede plantearse del siguiente modo:

Dado un valor de  $\beta$  y un valor de  $\bar{U}$ , si existen un par de matrices  $Q$  e  $Y$ , tal que se satisfagan las siguientes desigualdades

$$\begin{pmatrix} \beta^2 & x_0' \\ x_0 & Q \end{pmatrix} \succ 0, \quad Q = P^{-1} \succ 0, \quad (7.35)$$

$$\begin{pmatrix} Q A' + A Q - Y' B_2' - B_2 Y & Q & Y' \\ Q & -R_x^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R_u^{-1} \end{pmatrix} \prec 0, \quad (7.36)$$

$$\begin{pmatrix} U_\beta^2 & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} \succ 0, \quad \text{con } U_\beta = \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

la ganancia de realimentación  $K = Y P$  garantiza que el sistema autónomo realimentado tiene  $\mathcal{H}_2$  menor que el escalar  $\beta$ , y el valor máximo de la señal manipulada no supera  $\bar{U}$ . Además, si se suprime la restricción (7.37), la minimización de  $\beta$  equivale a resolver un LQR.

A continuación, se utilizan estos resultados para realizar un seguimiento de consigna sin saturaciones en la variable manipulada.

### 7.3.1. Control de Nivel en Sistema Hidráulico

Se pretende simular el comportamiento dinámico de un sistema hidráulico experimental de laboratorio de dos tanques con interacción representado en la

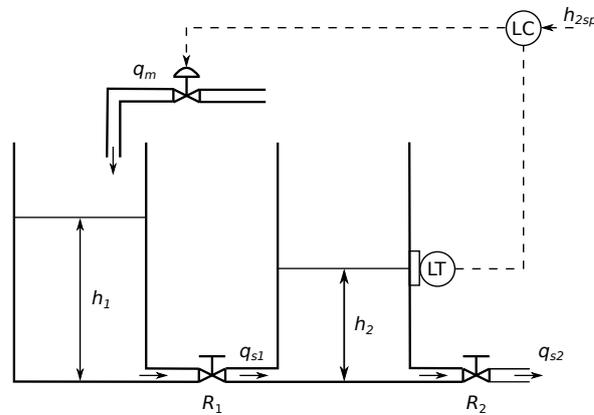


Figura 7.1: Sistema de control de nivel implementado en el laboratorio y tomado como ejemplo para las simulaciones

Tabla 7.1: Sistema de control de nivel implementado en el laboratorio y tomado como ejemplo para las simulaciones

<b>Dimensiones</b>		
Diámetros	$d_1 = 0,04 \text{ m}$	$d_2 = 0,04 \text{ m}$
Rango de caudales de las válvulas	0 y $3,3 \frac{L}{min}$	
Resistencias hidráulicas	$R_1 = 90000 \frac{m \cdot s}{m^3}$	$R_2 = 144000 \frac{m \cdot s}{m^3}$
Alturas máximas	$h_{1máx} = 0,80 \text{ m}$	$h_{2máx} = 0,80 \text{ m}$

Fig. (7.1), donde sus características físicas y operativas se informan en la Tabla (7.1).

Antes de presentar el modelo matemático no lineal y lineal del sistema de tanques con interacción de la Fig.(7.1), resulta importante remarcar la siguiente hipótesis de modelo relacionada con la interacción entre los tanques:

*Hipótesis de Modelo.* Cuando el caudal de líquido se dirige del tanque 1 al 2 (esto es  $h_1 \geq h_2$ ) dicho caudal es función de la diferencia de presión entre ellos y es aceptablemente modelado mediante la expresión,  $q_{s1} = C_{v1} \sqrt{h_1 - h_2}$ . Si hay una inversión de flujo (esto es,  $h_1 < h_2$ ) dicho caudal se modela como,  $q_{e3} = C_{v1} \sqrt{h_2 - h_1}$ .

Las ecuaciones de balance que definen un modelo matemático no lineal en

variables de desviación ([Adam, 2014]) se reducen a:

$$A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} = - \left( C_{v1} \sqrt{h_1 - h_2} - q_{s1}^0 \right) + \bar{q}_m, \quad (7.38)$$

$$A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} = \left( C_{V1} \sqrt{h_1 - h_2} - q_{s1}^0 \right) - \left( C_{V2} \sqrt{h_2} - q_{s2}^0 \right), \quad (7.39)$$

con condiciones iniciales  $h_1(t = 0) = h_1^0$ , y  $h_2(t = 0) = h_2^0$  o bien,  $\bar{h}_1 = 0$  y  $\bar{h}_2 = 0$ , y donde aquella variable indicada como  $\bar{\bullet}$  representa a la variable escrita como desviación del estado estacionario inicial.

Linealizando por serie de Taylor y reordenando las ecuaciones se obtiene el modelo matemático lineal en el dominio del tiempo, resultando éste:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} &= -\frac{1}{R_1} \bar{h}_1 + \frac{1}{R_1} \bar{h}_2 + \bar{q}_m, \\ A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} &= \frac{1}{R_1} \bar{h}_1 - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \bar{h}_2, \end{aligned} \quad (7.40)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son las resistencias hidráulicas de las válvulas manuales indicadas en la Fig. 1 y cuyos valores experimentales se resumen en la Tabla (7.1).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (7.41)$$

donde se definen  $x \triangleq [x_1 x_2]^T$ ,  $x_1(t) \triangleq \bar{h}_1(t)$ ,  $x_2(t) \triangleq \bar{h}_2(t)$  e  $y(t) \triangleq x_2(t)$ , y por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/R_1 A_1 & 1/R_1 A_1 \\ 1/R_1 A_2 & -(1/A_2)(1/R_1 + 1/R_2) \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/A_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ C &= (c_1 \ c_2) = (0 \ 1). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Aquí  $q_m(t)$  es la variable manipulada y los niveles de líquido en los tanques  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$  son los estados del sistema, los cuales son medibles y son monitoreados a lo largo de su operación mediante sensores de nivel.

El problema consiste en diseñar un lazo de control, tal que la salida del sistema (nivel de líquido del segundo tanque) siga a la referencia sin que se alcance el caudal máximo de la válvula control [Cappelletti and Adam, 2014].

Para poder aplicar las restricciones vistas en la subsección (7.3), se debe plantear el problema de seguimiento como un problema de regulación. La metodología utilizada, que requiere aumentar el orden del sistema agregando un integrador, se desarrolla en la sección (8.1).

Según esta técnica, las matrices aumentadas para el sistema con integrador, resultan

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}_2 = \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.43)$$

$$\hat{C} = (C \ 0) = (0 \ 1 \ 0),$$

y las matrices utilizadas para construir la salida auxiliar, cuya norma  $\mathcal{H}_2$  se desea minimizar, resultan

$$\hat{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

### 7.3.2. Simulaciones Numéricas

A continuación, se realiza una simulación numérica a partir del modelo lineal (7.40), con y sin restricciones en la variable manipulada.

En la Fig.(7.2) se muestra el comportamiento dinámico del sistema lineal para el problema de seguimiento de consigna, cuando el controlador es sintonizado para satisfacer control óptimo  $H_2$  resolviendo para esto las desigualdades (7.35) y (7.36). Para este problema se plantea determinar los parámetros del controlador  $\hat{K} = YP$  que minimiza el escalar  $\beta$ . Las simulaciones numéricas muestran que para diferentes cambios de consigna la variable manipulada crece manteniendo el tiempo de establecimiento.

En la Fig.(7.3) se observa cómo el controlador se adapta para satisfacer la restricción en la variable manipulada dando como resultado diferentes tiempos de establecimiento. Para lograr este objetivo se minimiza el escalar  $\beta$  iterativamente resolviendo para esto las desigualdades (7.35) y (7.36) incluyendo la (7.37).

En la Fig.(7.4) se muestra diferentes cambios de consigna para el sistema de tanques. Puede verse una diferencia de dinámica en la respuesta producto del estado inicial en el momento del cambio y el rango disponible en la dirección del movimiento de la válvula de control. Puede verse que cuando el rango disponible en el caudal manipulado es amplio el tiempo de establecimiento es bajo, mientras que, cuando el rango disponible en el caudal manipulado es pequeño el tiempo de establecimiento es alto.

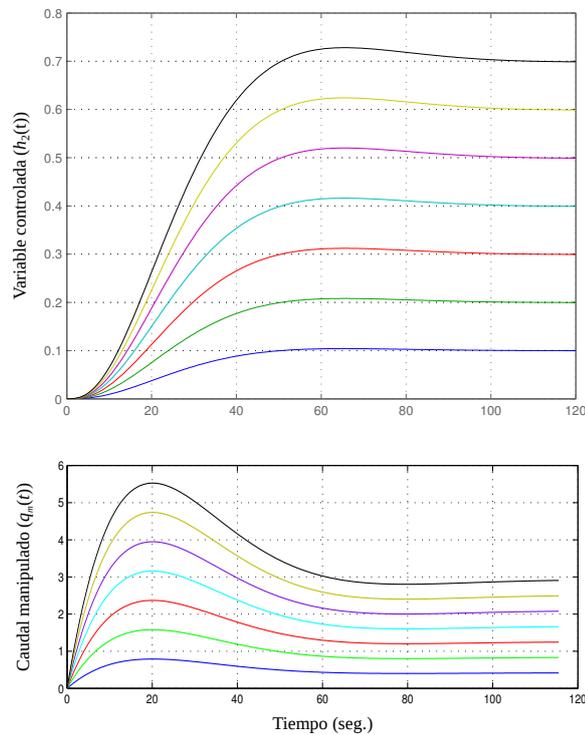


Figura 7.2: a) Diferentes saltos escalón al problema de control de nivel. b) Cambios sin restricciones en la variable manipulada para satisfacer los cambios escalón pedidos.

Usualmente, en el control de sistemas lineales sin restricciones la dinámica es siempre la misma independientemente de los cambios en la referencia y del movimiento de la variable manipulada. En este problema, a pesar de ser lineal, esto último no ocurre ya que en cada movimiento de la variable manipulada se recalcula el controlador para satisfacer las restricciones. Este resultado quedaría enmascarado si se hubiese simulado con el sistema no lineal.

## 7.4. Resumen

En este capítulo se analizó la manera de establecer una restricción LMI para fijar una cota al valor máximo de la variable manipulada. Para ello, se obtuvieron previamente las restricciones necesarias para lograr un control óptimo utilizando la matriz gramiano de observabilidad, ya que de esta manera quedan expuestas las condiciones iniciales de los estados dentro de la LMI.

Posteriormente se realizó la simulación de un sistema hidráulico para un problema de control óptimo que realiza seguimiento de consigna, y a su vez satisface

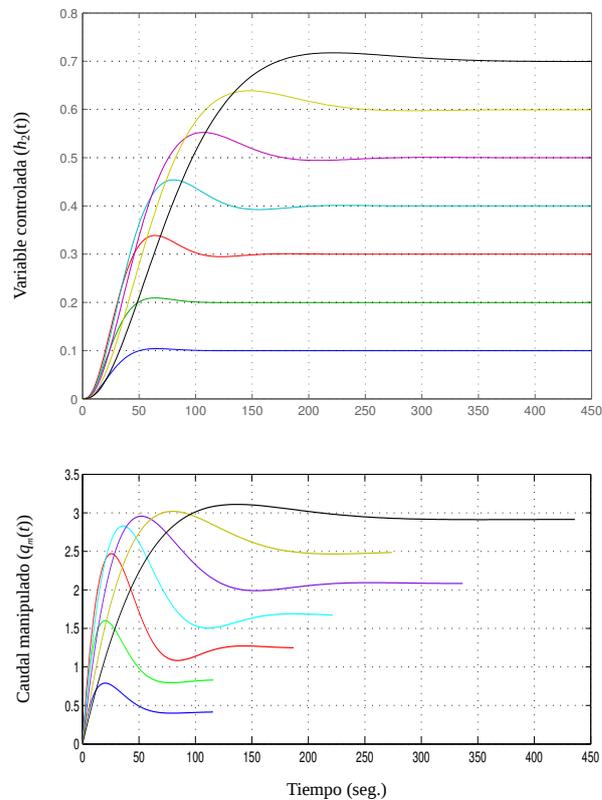


Figura 7.3: a) Diferentes saltos escalón al problema de control de nivel. b) Cambios en la variable manipulada para satisfacer los cambios escalón pedidos.

restricciones en la variable manipulada. La restricción impuesta para no saturar la variable manipulada es escrita como una desigualdad que se actualiza de acuerdo al punto de operación.

Si bien se ha planteado un problema de seguimiento, afín de aportar mayor claridad, la eliminación de offset en estado estacionario no se ha analizado. En efecto, en el próximo capítulo se abordará el problema de seguimiento de consigna de un reactor no lineal, como un problema de regulación de un sistema lineal con incertidumbres paramétricas.

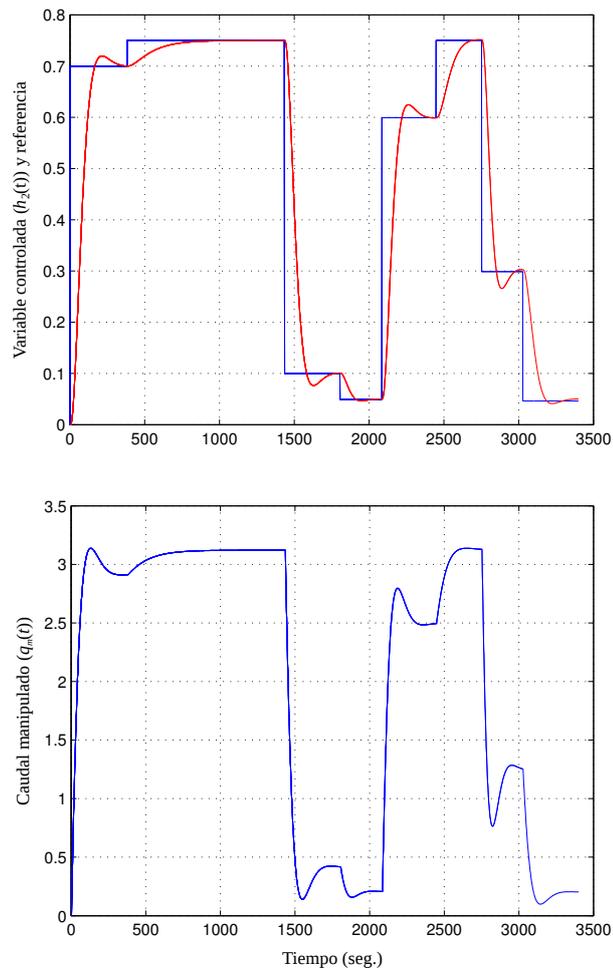


Figura 7.4: a) Distintos cambios del punto de operación del sistema (línea azul) aplicados al problema de seguimiento de control de nivel. La línea roja indica el nivel de líquido  $h_2(t)$ . b) Movimientos de la variable manipulada para los cambios pedidos en el set-point.

# Capítulo 8

## Seguimiento de consigna via LMI

### 8.1. Introducción

En el control de procesos resulta de suma importancia la performance en estado estacionario, es decir, la capacidad que tiene un sistema de rechazar (filtrar) perturbaciones sin alejarse del punto de operación deseado o bien, lograr alcanzar sin error el estado estacionario de nuevos puntos de operación.

En la literatura clásica [Ogata, 2009] aparecen alternativas que combinan el diseño por realimentación de estados y la eliminación de offset.

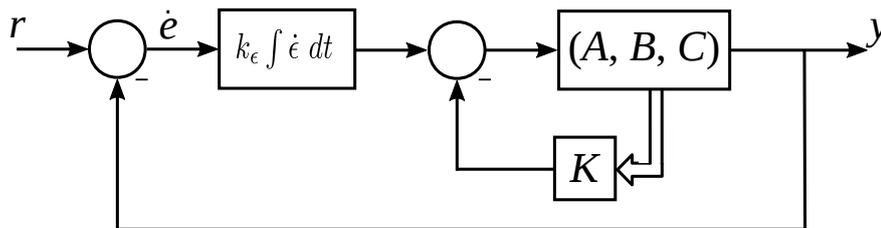


Figura 8.1: Sistema de seguimiento con integrador

La Fig. (8.1) muestra que en el feedback de estados se ha incluido un integrador con el objeto de eliminar offset ante la aplicación de un escalón sobre un sistema del tipo cero.

Por tal motivo siguiendo a autores clásicos, la dinámica del sistema realimentado puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\epsilon}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} \hat{u}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} r(t), \\ \hat{u}(t) &= \begin{pmatrix} -K & k_\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{pmatrix}, \\ y(t) &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

el nuevo estado  $\epsilon(t)$ , es la integral del error dado por

$$\dot{\epsilon}(t) = r(t) - y(t). \quad (8.2)$$

Basado en lo anterior, es posible representar al sistema de la Fig. (8.1) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}_2\hat{u}(t) + B_r r(t), \\ \hat{u}(t) &= -\hat{K}\hat{x}(t), \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t), \end{aligned} \quad (8.3)$$

donde se han definido,

$$\begin{aligned} \hat{A} &\triangleq \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_2 \triangleq \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_r \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{K} &\triangleq \begin{pmatrix} K & -k_\epsilon \end{pmatrix}, \quad \hat{C} \triangleq \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}(t) \triangleq \begin{pmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Con las definiciones previas y la formulación (8.3), el problema de seguimiento al escalón puede ser planteado como un problema de regulación, donde se busca eliminar el error en estado estacionario ante una perturbación del tipo impulsiva, correspondiente a un cambio en el set point, como se verá a continuación.

### 8.1.1. Problema de seguimiento

Como ya se ha expuesto, para aplicar las restricciones LMI se reformula el problema de seguimiento como un problema de regulación, y para ello se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} e_x(t) &\triangleq \hat{x}(t) - \hat{x}(\infty), \\ e_u(t) &\triangleq \hat{u}(t) - \hat{u}(\infty), \\ e_y(t) &\triangleq y(t) - y(\infty). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Donde  $e_x(t)$  es el vector error en los estados,  $e_u(t)$  es el error en la variable manipulada, y es  $e_y(t)$  el error en la variable de salida, todos ellos tomados respecto a sus valores en estado estacionario futuro deseado.

Teniendo en cuenta que  $r(t)$  es una entrada escalón, se tiene que  $r(t) = r(\infty) = r$ , constante  $\forall t > 0$ , por lo tanto, utilizando las Ec. (8.3) y las Ec. (8.5) es posible escribir la dinámica del error de seguimiento como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{e}_x(t) &= \hat{A}e_x(t) + \hat{B}_2e_u(t), \\ e_u(t) &= -\hat{K}e_x(t), \\ e_y(t) &= \hat{C}e_x(t)\end{aligned}\tag{8.6}$$

y el sistema realimentado, queda expresado por

$$\begin{aligned}\dot{e}_x(t) &= \hat{A}_{cl}e_x(t) + e_x(0)\delta(t), \\ e_y(t) &= \hat{C}e_x(t),\end{aligned}\tag{8.7}$$

siendo

$$\hat{A}_{cl} = \hat{A} - \hat{B}_2\hat{K}, \quad \text{y} \quad e_x(0) = \hat{x}(0) - \hat{x}(\infty).\tag{8.8}$$

Resumiendo, la idea básica para diseñar un sistema de seguimiento de tipo 1 con  $n$  estados, es diseñar un sistema regulador de orden  $(n + 1)$  que lleve a cero el nuevo vector error  $e_x(t)$  (con algún criterio de desempeño elegido), dada cualquier condicion inicial  $e_x(0)$ .

## 8.2. Ejemplo de Aplicación. Control de un CSTR

En esta sección se aplica las técnicas de control multiobjetivos a un sistema no lineal que se detalla a continuación [Cappelletti and Adam, 2015a].

Considérese un reactor continuo modelado por las Ecs. (8.9) de acuerdo con [Morningred et al., 1990].

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= q_e(t) - q_s(t), \\ [V\dot{C}_A](t) &= q_e C_{Ae} - q_s C_A - k_0 e^{E/RT(t)} C_A(t)V(t), \\ [V\dot{T}](t) &= q_e(t)T_e - q_s T(t) - k_1 C_A(t)V(t) e^{E/RT(t)} + \\ & q_c(t)k_2(1 - e^{-k_3/q_c(t)}) (T_{ce} - T(t)).\end{aligned}\tag{8.9}$$

En el mismo se lleva a cabo una reacción exotérmica irreversible, en donde el producto  $A$  se convierte en el producto  $B$  y se libera energía a través de la elevación de su temperatura. Esta reacción tiene lugar en un tanque cilíndrico y agitado por una hélice, según se muestra en la Fig. (8.2). El reactor trabaja a volumen constante  $V$  y es refrigerado por el líquido que circula a través de una serpentina que está ubicado en su interior.

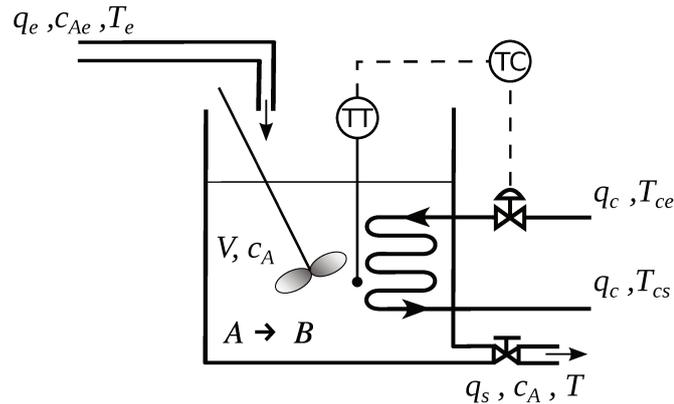


Figura 8.2: Diagrama ilustrativo del CSTR

La salida del sistema es la concentración del producto  $A$  medido a la salida del tanque, esto es,  $y(t) = C_A(t)$ . Esta concentración es controlada manipulando la temperatura de la reacción mediante el caudal refrigerante que circula a través de la serpentina  $u(t) = q_c(t)$ .

### Objetivos de Diseño

Los objetivos que se plantean para el diseño del controlador son los siguientes:

- El controlador debe garantizar la estabilidad del sistema realimentado;
- debe permitir que la variable de salida del sistema siga a la referencia sin offset ante cambios escalonados;
- debe acotar el tiempo de respuesta a un valor preestablecido;
- debe minimizar el ruido de medición y el ruido del proceso;
- además, como se trata de un problema de seguimiento de consigna, se espera que el controlador diseñado mantenga el desempeño del sistema de control dentro de un rango de operación, que se especifica a continuación:

<sup>1</sup>Motivo por el cual en la primera ecuación del sistema (8.9), se tiene que:  $q_e(t) = q_s(t) \quad \forall t$ .

$$\begin{aligned}
 0,05 \leq C_A \leq 0,13 & \quad \text{mol } \text{lt}^{-1}, \\
 430 \leq T_A(t) \leq 455 & \quad \text{°K}, \\
 85 \leq q_c(t) \leq 110 & \quad \text{lt } \text{min}^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{8.10}$$

Los valores de las constantes del reactor dentro del rango de operación, se detallan en la siguiente tabla [Morningred et al., 1990].

Tabla 8.1: *Parámetros del Reactor*

Parámetro	Descripción	Valor
$k_0$	Cte. vel. de reacción	$7,2 \cdot 10^{10}$ L / min
$h_a$	Coef. de transf. de calor	$7 \cdot 10^5$ cal / min K
$E/R$	Energía de activación	$1 \cdot 10^4$ K
$T_c$	Temp. de ent. reactante	350 K
$TC_e$	Temp. de liq. refrigerante	350 K
$\Delta H$	Calor de reacción	$-2 \cdot 10^5$ cal / mol
$C_p, C_{pc}$	Calores específicos	1 cal / g K
$\rho, \rho_c$	Densidad de los líquidos	$1 \cdot 10^3$ g / L
$k_4$	Cte. de la válvula	10 L / min $\text{m}^{3/2}$
$C_{Ae}$	Conc. de A a la entrada	1 mol / L

Las Figs. (8.3), (8.4) y (8.5) muestran el comportamiento del reactor dentro y fuera del rango de operación mencionado.

En las mismas se observa que para un caudal del líquido refrigerante mayor a 112 L/min, el sistema se vuelve inestable y evoluciona a otro estado de equilibrio donde el reactor se apaga, y donde la manipulación del caudal refrigerante ya no produce ningún efecto sobre la concentración.

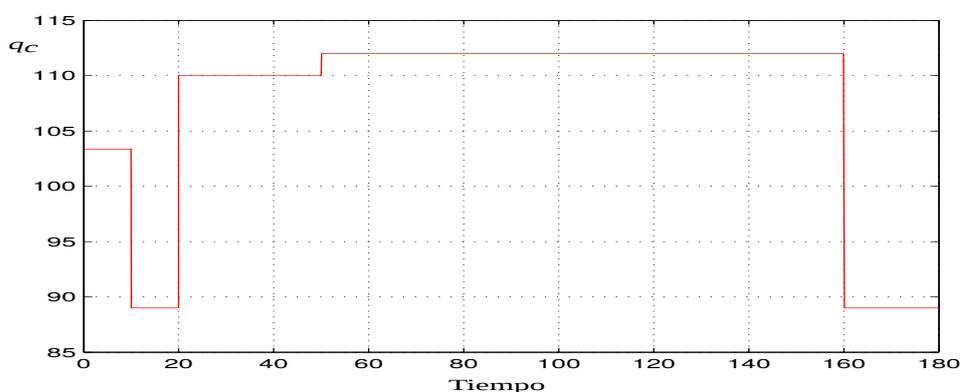


Figura 8.3: Caudal manipulado en el reactor en lazo abierto

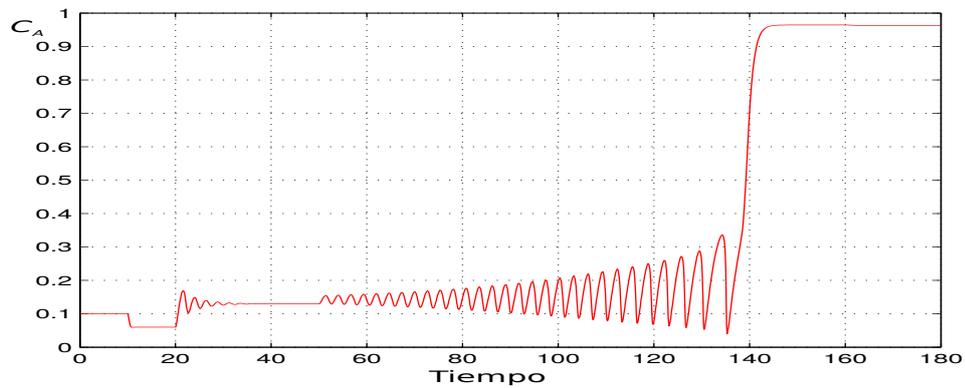


Figura 8.4: Concentración del producto A en el reactor en lazo abierto

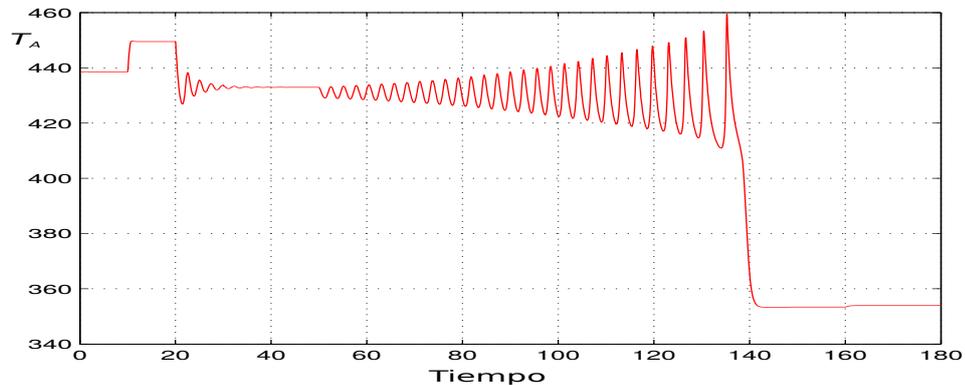


Figura 8.5: Temperatura a la salida del reactor en lazo abierto

Como se ha visto a lo largo de esta tesis el uso de las LMIs, permite reformular un problema de control a uno de optimización convexo, con la ventaja de encontrar la solución única, si es que existe, sujeta a restricciones de diseño, y si no existe se puede relajar estas restricciones hasta obtener una solución factible.

No obstante esta ventaja, esta técnica como muchas otras, tiene como limitación al hecho de que sólo es aplicable a sistemas lineales.

Por esta razón, y con la finalidad de comparar soluciones, para este problema no lineal se resolverá en primer lugar un problema nominal linealizando el modelo en un punto de operación, y posteriormente se generará un polítopo de modelos lineales que permita resolver un problema robusto que contemple la alinealidad del sistema dentro del rango de funcionamiento.

**Modelo nominal**

Considérese un punto de operación estable correspondiente a una concentración del producto  $A$ :  $C_A = 0,1$  mol/l. En dicho punto se linealiza el modelo obteniéndose las siguientes matrices para el sistema lineal:

$$A = \begin{pmatrix} -9,799 & -0,0468 \\ 1,8 \cdot 10^3 & 7,35 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -8,75 \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

$$C = ( 1 \ 0 ), \quad D = 0.$$

La función de transferencia que relaciona la concentración de salida  $c_A(t)$  con el caudal manipulado  $q_c(t)$  alrededor del punto de operación mencionado, viene dada por

$$T_{(c_A, q_c)} = \frac{0,04106}{s^2 + 2,673 s + 10,96} \quad (8.12)$$

Siguiendo los objetivos de diseño, y fijando un tiempo de establecimiento de 5 min, luego resolviendo el problema de optimización presentado en la Sección (6.3) con las LMIs (6.39) y (6.41) las ganancias del controlador, resultan:

$$k_T = 8, \quad k_{C_A} = 734,8, \quad k_c = 1534,7.$$

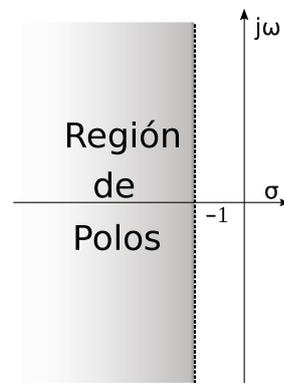


Figura 8.6: Región para los Polos del Sistema Lineal Realimentado.

Las Figs. (8.7), (8.8) y (8.9) muestran el comportamiento del sistema realimentado. En ellas se observa que si bien el sistema realimentado es estable, su desempeño no es satisfactorio<sup>2</sup> cuando el set point se aleja del punto  $C_A = 0,1$  mol / L.

<sup>2</sup>Observar que el tiempo de establecimiento es superior a 5 min para  $C_A = 0,06$  mol / L y  $C_A = 0,14$  mol / L.

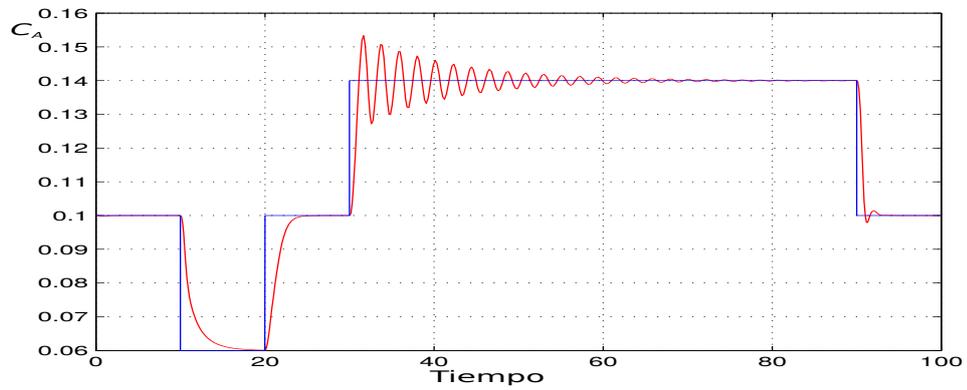


Figura 8.7: Referencia y concentración del producto A. Modelo nominal.

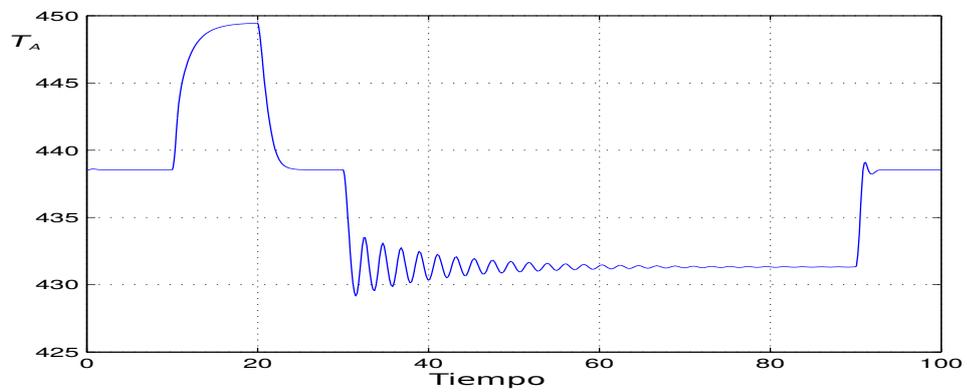


Figura 8.8: Temperatura a la salida del reactor. Modelo nominal.

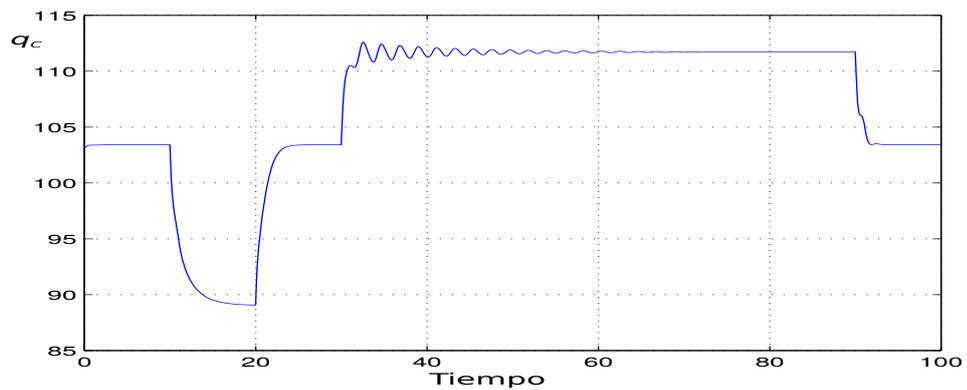


Figura 8.9: Caudal manipulado en el reactor realimentado. Modelo nominal.

### Modelo politópico, sistema con incertidumbres

Considérese el rango de operación estable de la concentración  $C_A$  entre  $[0,06-0,14]$ , tres modelos lineales son obtenidos en los puntos de operación  $C_A = 0,06$ ,

0,1 y 0,14, representados por las siguientes funciones de transferencia:

$$\begin{aligned} C_A = 0,06 : \quad T_{(c_A, q_c)} &= \frac{0,0462}{s^2 + 9,261s + 22,22}, \\ C_A = 0,1 : \quad T_{(c_A, q_c)} &= \frac{0,04106}{s^2 + 2,673s + 10,96}, \\ C_A = 0,14 : \quad T_{(c_A, q_c)} &= \frac{0,03792}{s^2 + 0,05455s + 5,957}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Los parámetros del sistema son los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador de estas funciones, esto es,

$$T(s) = \frac{n_0}{s^2 + d_1s + d_0}. \quad (8.14)$$

Dentro del rango de operación, cada uno de estos parámetros están acotados por un valor mínimo y un valor máximo,

$$n_0 \in [\underline{n}_0, \bar{n}_0], \quad d_0 \in [\underline{d}_0, \bar{d}_0], \quad d_1 \in [\underline{d}_1, \bar{d}_1], \quad (8.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{n}_0 &= 0,3792, \quad \underline{d}_0 = 5,957, \quad \underline{d}_1 = 0,05455, \\ \bar{n}_0 &= 0,462, \quad \bar{d}_0 = 22,22, \quad \bar{d}_1 = 9,261. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Con las dos cotas de estos tres parámetros se pueden construir ocho sistemas LTI, que forman los vértices un polígono como se muestran a continuación en la tabla (8.2).

Ahora, las especificaciones de diseño representadas por las LMIs (6.39) y (6.41) se aplican a estos ocho modelos simultáneamente, obteniéndose las siguientes ganancias de realimentación para el controlador robusto:

$$k_T = 9,2, \quad k_{C_A} = 685,7, \quad k_\epsilon = 1861,6.$$

Los resultados de la simulación sobre el sistema no lineal representado por la Ec.(8.9) se muestran en las figuras (8.10), (8.11) y (8.12), y el diagrama en bloques del sistema realimentado implementado Matlab/Simulink<sup>©</sup> se muestran en la Fig.(8.13).

En las Fig.(8.10) se muestra como la salida del sistema sigue a la referencia, a diferencia a lo ocurrido cuando el controlador se diseñaba sobre un sistema nominal (comparar con la Fig. 8.7), se observa que el diseño del controlador realizado sobre un sistema politópico, tiene un desempeño satisfactorio en todos los puntos de operación.

Tabla 8.2: *Sistemas Vértices del Polítopo*

Comb. Parámetros	Sistemas
$\underline{n}_0 \underline{d}_1 \underline{d}_0$	$T_{(1)} = \frac{0,3792}{s^2+0,05455 s+5,957}$
$\underline{n}_0 \underline{d}_1 \bar{d}_0$	$T_{(2)} = \frac{0,3792}{s^2+0,05455 s+22,22}$
$\underline{n}_0 \bar{d}_1 \underline{d}_0$	$T_{(3)} = \frac{0,3792}{s^2+9,261 s+5,957}$
$\underline{n}_0 \bar{d}_1 \bar{d}_0$	$T_{(4)} = \frac{0,3792}{s^2+9,261 s+22,22}$
$\bar{n}_0 \underline{d}_1 \underline{d}_0$	$T_{(5)} = \frac{0,0462}{s^2+0,05455 s+5,957}$
$\bar{n}_0 \underline{d}_1 \bar{d}_0$	$T_{(6)} = \frac{0,0462}{s^2+0,05455 s+22,22}$
$\bar{n}_0 \bar{d}_1 \underline{d}_0$	$T_{(7)} = \frac{0,0462}{s^2+9,261 s+5,957}$
$\bar{n}_0 \bar{d}_1 \bar{d}_0$	$T_{(8)} = \frac{0,0462}{s^2+9,261 s+22,22}$

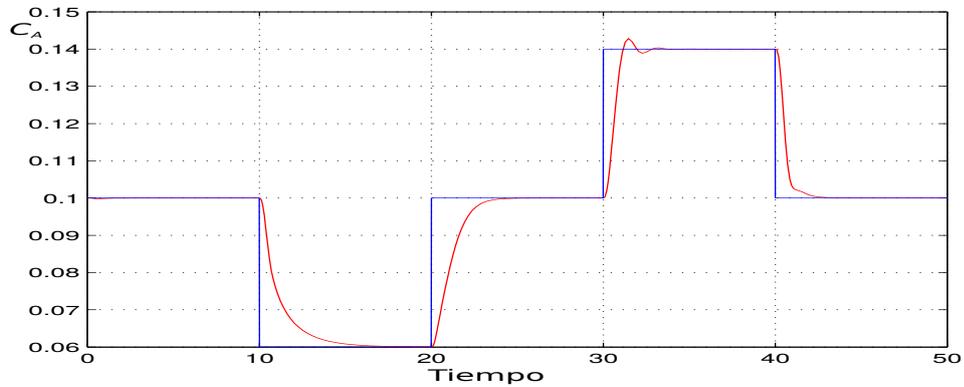


Figura 8.10: Referencia y concentración del producto A. Modelo Politópico.

### 8.3. Resumen

El problema de seguimiento de consigna es formulado en términos de un problema de regulación de control óptimo, donde las condiciones iniciales son re-escritas en base a los errores en estado estacionario de los estados, la variable manipulada y la salida controlada.

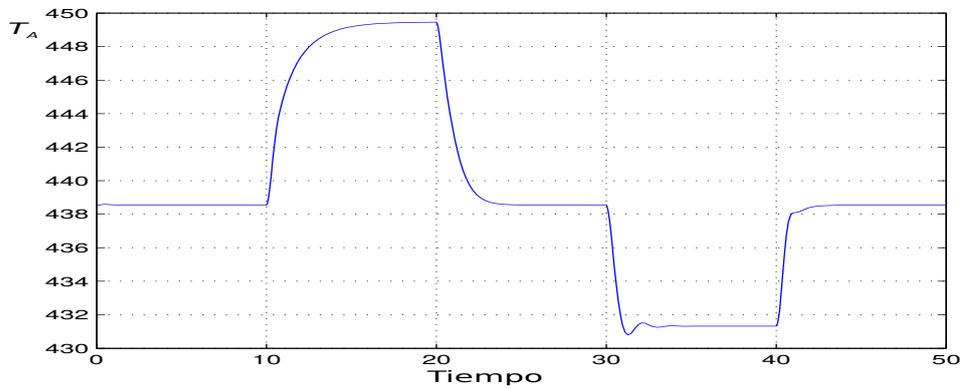


Figura 8.11: Temperatura a la salida del reactor. Modelo Politópico

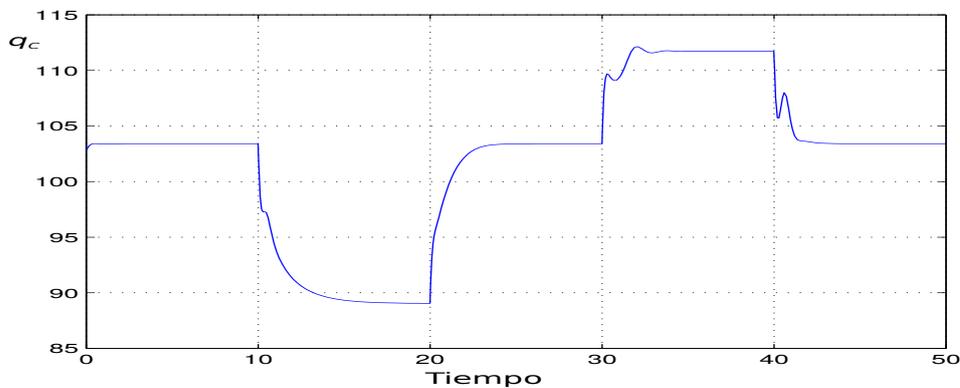


Figura 8.12: Caudal manipulado en el reactor realimentado. Modelo Politópico.

El desempeño del sistema de control es verificado en todo el rango de operación mediante simulaciones numéricas. En ellas se muestra la diferencia de desempeño entre el sistema de control con un controlador en base a un modelo nominal, y el que se obtiene con un controlador robusto sintonizado en base a una familia de plantas con incertidumbres paramétricas.

Particularmente, en este trabajo se modela la no linealidad del sistema utilizando un polítopo de incertidumbres, de manera que los requisitos de estabilidad y desempeño robusto pueden plantearse mediante el uso de desigualdades lineales matriciales.

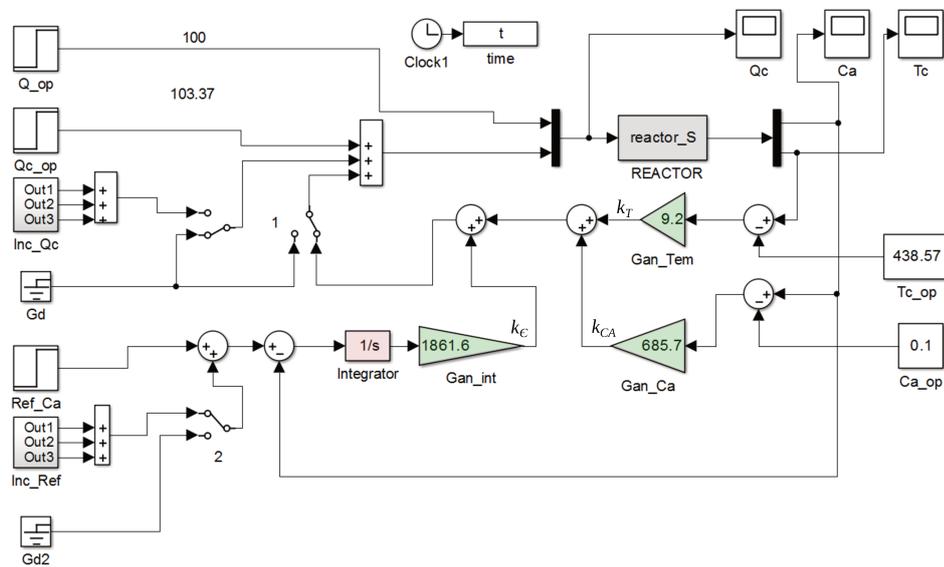


Figura 8.13: Reactor realimentado con controlador robusto.

# Capítulo 9

## Conclusiones

### 9.1. Resumen y Conclusiones de la Tesis

En esta tesis se abordó el problema de diseño de controladores multiobjetivos, para ser aplicados en sistemas típicos de la industria de procesos que son generalmente no lineales, variables en el tiempo y tienen limitaciones en sus estados.

Durante el desarrollo de la tesis se vio que muchos de los objetivos deseados para lograr que el sistema o proceso presente un desempeño aceptable, encuentran un marco común de formulación si se utiliza una herramienta matemática moderna llamada desigualdades lineales matriciales o LMI. También se vio que esta herramienta define regiones convexas y, gracias a esta convexidad, que los objetivos de desempeño de un sistema de control pueden plantearse como un problema de optimización convexa con restricciones, donde se encuentra una solución única si es que ésta existe.

A continuación se resumen los temas tratados en cada capítulo.

En el capítulo 2 se han revisado conceptos básicos de los sistemas LTI, particularmente cuando dichos sistemas están representados mediante el modelo en variables de estados.

El análisis de estabilidad de un sistema LTI utilizando el criterio de Lyapunov fue el eje central de este capítulo. En primer lugar se analizó la condición que debe cumplir un sistema autónomo para ser asintóticamente estable, dándose las interpretaciones física y gráfica del teorema de Lyapunov.

Posteriormente se desarrolló el Regulador Lineal Cuadrático (LQR), para lo cual se utilizó la condición de estabilidad de Lyapunov como una restricción a ser satisfecha en un problema de optimización. En efecto, el planteo consistió en minimizar la energía de una señal externa de cuadrado integrable, esto es,  $u \in \mathbb{L}_2^n[0, \infty)$ , sujeto a la restricción de que el sistema no autónomo sea asintóticamente estable, aún cuando el sistema autónomo podría no serlo.

Resolver tal problema condujo como solución a que la señal externa  $u(t)$  se obtiene mediante una realimentación lineal y negativa de los estados del sistema, esto es,  $u(t) = Kx(t)$ , y que la ganancia estática de esta realimentación se obtiene resolviendo la Ecuación Algebraica de Riccati (*ARE*).

Por último, se vio que eligiendo en forma adecuada una salida auxiliar  $z_2$  de un sistema al que se le aplica una realimentación lineal de estado, el control óptimo puede tratarse como la minimización de la norma dos ( $\mathcal{H}_2$ ) de dicho sistema realimentado.

A diferencia del capítulo 2 en el cual se vio que al reducir la norma  $\mathcal{H}_2$  de un sistema se reducen los efectos de perturbaciones impulsivas, o señales de espectro plano como lo es el ruido de medición, en el capítulo 3 se muestra que para reducir los efectos de señales desconocidas sobre la salida del sistemas es necesario reducir la norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

Este concepto que resulta intuitivo y sencillo de entender en un modelo LTI de entrada/salida, es reformulado para un sistema LTI representado mediante el modelo en variables de estado donde tal claridad se pierde. Sin embargo, es bajo esta representación donde la formulación matemática que permite colocar cotas a la norma  $\mathcal{H}_\infty$ , se puede tratar como una restricción LMI.

A tal efecto, en la subsección (3.3) se aborda este problema como un problema de optimización. El planteo es similar al LQR, pero en este caso se busca maximizar la energía de una señal externa que perturba a un sistema asintóticamente estable, sujeto a la restricción de que el sistema perturbado siga siendo asintóticamente estable. El resultado de este planteo condujo a modelar a la perturbación como una realimentación de estado positiva, y a encontrar una cota para la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema autónomo expresado en los teoremas (3.1) y (3.2).

Finalmente, en la subsección (3.4), se utiliza realimentación de estado para determinar una acción de control que minimice la norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema realimentado.

En el capítulo 4 se ha realizado una introducción teórica de las Desigualdades Lineales Matriciales, se ha dado su definición y representación canónica, y también se ha mostrado como aparecen en los sistemas de control las LMI en formato no canónico.

En forma teórica, a través de distintos ejemplos y mediante representaciones gráficas se ha mostrado que las LMI definen regiones convexas, también se ha mostrado que múltiples LMI implica la intersección de dichas regiones, intersección que puede o no, dar como resultado un conjunto vacío.

Utilizando el complemento de Schur se ha mostrado cómo transformar una Desigualdad Matricial Cuadrática en una Desigualdad Matricial Lineal.

Por último, se ha realizado un ejemplo donde se utilizan las LMIs en un problema de control.

El capítulo 5 tiene por finalidad mostrar cómo las especificaciones  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$

que surgen naturalmente al analizar los sistemas LTI en el dominio frecuencial, son trasladadas al modelo en variable de estado para luego ser tratadas como restricciones en un problema de optimización convexo, mediante el uso de Desigualdades Lineales Matriciales.

Se ha realizado un ejemplo de diseño de un regulador por realimentación de estado, tal que el sistema realimentado satisfaga características de desempeño  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  simultáneamente, lo que se conoce como síntesis mezclada  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

Como se dijo, la principal ventaja de esta formulación es que permite el diseño de controladores multiobjetivos donde la performance  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  son simplemente un par objetivos más, dentro de un conjunto mucho más amplio que se puede especificar al momento de plantear el problema de control.

En el capítulo 6 se presenta la síntesis de un controlador por realimentación de estado que satisface múltiples especificaciones de diseño en forma simultánea.

A los objetivos  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  planteados en el capítulo anterior se les agrega dos objetivos más, estos son,

1. la ubicación de polos del sistema realimentado en regiones específicas del plano complejo, y
2. la robustez del controlador ante incertidumbre en los parámetros del sistema.

Para observar cómo todas estas especificaciones de diseño encuentran en el formato LMI un marco común para su formulación, se continúa el ejemplo del capítulo anterior agregando una por una cada restricción y comparando los resultados obtenidos gráficamente y mediante tablas comparativas.

En el capítulo 7 se analizó la manera de establecer una restricción LMI para fijar una cota al valor máximo de la variable manipulada. Para ello, se obtuvieron previamente las restricciones necesarias para lograr un control óptimo utilizando la matriz gramiano de observabilidad, ya que de esta manera quedan expuestas las condiciones iniciales de los estados dentro de la LMI.

Posteriormente, se realizó la simulación de un sistema hidráulico, para un problema de control óptimo que realiza seguimiento de consigna, y a su vez satisface restricciones en la variable manipulada.

En el capítulo 8 se presenta el problema de control de un reactor químico no lineal mediante un controlador por realimentación de estados libre de offset utilizando LMI.

El problema de seguimiento de consigna es formulado en términos de un problema de regulación de control óptimo, donde las condiciones iniciales son reescritas en base a los errores en estado estacionario de los estados, variable manipulada y salida controlada.

El desempeño del sistema de control es verificado en todo el rango de operación mediante simulaciones numéricas. En ellas se muestra la diferencia de desempeño entre el sistema de control con un controlador en base a un modelo nominal, y el que se obtiene con un controlador robusto sintonizado en base a una familia de plantas con incertidumbres paramétricas.

Particularmente, en este trabajo se modela la no linealidad del sistema utilizando un polítopo de incertidumbres, de manera que los requisitos de estabilidad y desempeño robusto pueden plantearse mediante el uso de desigualdades lineales matriciales.

## 9.2. Alcances y Futuros Desarrollos

Durante el desarrollo de esta tesis se han utilizado las LMIs para desarrollar controladores multiobjetivos que utilizan realimentación estática de estados, lo cual implica que los sistemas regulados o controlados tienen todos sus estados disponibles para ser medidos. Sin embargo, el uso de las LMIs extiende su alcance a sistemas donde no todos los estados están disponibles. Así, esta herramienta puede ser utilizada para el diseño de controladores que utilizan modelos de entrada/salida. Un ejemplo de ello, es la sintonización robusta de los controladores PID<sup>1</sup> industriales vía LMI [Cappelletti and Adam, 2015b], que permite lograr un desempeño satisfactorio del sistema de control, que sin llegar a ser óptimo, tiene un desempeño muy superior al que se obtiene con métodos clásicos ([Ziegler and Nichols, 1942, Cohen and Coon, 1953, entre otros]), o mediante la parametrización IMC<sup>2</sup> ([Morari and Zafiriou, 1989]).

Por otro lado, la creciente utilización de control predictivo en la industria y la plataforma teórica de las LMIs invita a investigadores a dirigir esfuerzos para introducir las dentro de la formulación MPC<sup>3</sup> con el objeto de garantizar estabilidad, cumplimiento de restricciones, y mejorar el desempeño.

---

<sup>1</sup> Acrónimo de Proporcional Integral Derivativo.

<sup>2</sup> Acrónimo en inglés de Control con Modelo Interno.

<sup>3</sup> Acrónimo en inglés de Control Predictivo basado en Modelo.

# Apéndice A

## Herramientas Matemáticas Básicas

### A.1. Conceptos básicos del álgebra lineal

#### A.1.1. Formas cuadráticas

Una forma cuadrática es un polinomio de segundo grado homogéneo de  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

$$\sum_{i,k=1}^n q_{ik} x_i x_k.$$

Este polinomio siempre se puede representar como

$$\sum_{i,k=1}^n p_{ik} x_i x_k,$$

con  $p_{ik} = p_{ki}$ .

En efecto, el polinomio homogéneo tiene el término

$$q_{ik} x_i x_k + q_{ki} x_k x_i = (q_{ik} + q_{ki}) x_i x_k,$$

y definiendo

$$p_{ik} = p_{ki} \triangleq \frac{1}{2} (q_{ik} + q_{ki}),$$

resulta

$$(q_{ik} + q_{ki}) x_i x_k = 2 p_{ik} x_i x_k.$$

Entonces, la forma cuadrática puede escribirse como

$$\sum_{i,k=1}^n p_{ik} x_i x_k = x' P x, \tag{A.1}$$

con  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)'$  y  $P$  simétrica.

**Definiciones**

- Se denomina a la matriz  $P = P'$  como positiva definida, simbólicamente  $P \succ 0$ , si su forma cuadrática asociada es un escalar positivo, es decir,  $x'P x > 0, \forall x \neq 0$ .
- Se denomina a la matriz  $P = P'$  como positiva semidefinida, simbólicamente  $P \succeq 0$ , si su forma cuadrática asociada es un escalar no negativo, es decir,  $x'P x \geq 0, \forall x \neq 0$ .
- Se denomina a la matriz  $P = P'$  como negativa definida, simbólicamente  $P \prec 0$ , si su forma cuadrática asociada es un escalar negativo, es decir,  $x'P x < 0, \forall x \neq 0$ .
- Se denomina a la matriz  $P = P'$  como negativa semidefinida, simbólicamente  $P \preceq 0$ , si su forma cuadrática asociada es un escalar no positivo, es decir,  $x'P x \leq 0, \forall x \neq 0$ .

**Teorema A.1.** *La matriz  $P \succ 0$ , si y sólo si, todos su autovalores son reales positivos.*

**Demostración:**

Considérese primero que si  $\lambda_i(P)$  es un autovalor de  $P \in \mathcal{R}^{n,n}$ , y si  $\lambda_i(P) \in \mathcal{C}$ , entonces  $\bar{\lambda}_i(P)$  también es un autovalor de  $P$ , la razón es que en los sistemas reales los polos (autovalores) son reales o aparecen de a pares conjugados [Lam, 1979].

Siendo  $v \in \mathcal{C}$  sus autovectores, por álgebra lineal clásica se sabe que,

$$\begin{aligned} Pv &= v\lambda, \\ v^*P &= \lambda v^*, \\ (v^*P)^* &= (\lambda v^*)^*, \\ P'v &= v\bar{\lambda}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

luego, siendo  $P = P' \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$ , y  $\therefore \lambda \in \mathfrak{R}$ .

Considérese también que si  $P$  es simétrica y real entonces puede diagonalizarse ortogonalmente, es decir, existe una matriz ortonormal  $T$ , tal que

$$T P T' = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Por lo tanto la condición de positiva definida, que a continuación se reescribe

$$x'P x \geq 0, \forall x \neq 0,$$

puede escribirse como

$$x'T'\Lambda T x \geq 0, \forall x \neq 0,$$

y definiendo  $y \triangleq Tx$ , se tiene

$$y' \Lambda y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0, \quad \forall y \neq 0,$$

lo cual implica que  $\lambda_i > 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $\square$

Como consecuencia de esto, si  $P \succ 0$ , entonces existe  $P^{-1}$ , ya que

$$\det(P) = \det(T' \Lambda T) = \det(\Lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \neq 0.$$

Además, el mismo análisis puede hacerse si  $P$  es negativa definida, y afirmar que si

$$P \prec 0, \Rightarrow \exists P^{-1}.$$

**Teorema A.2.** Si  $Q = CC'$ , entonces  $Q$  es positiva semidefinida, es decir,  $Q \succeq 0$ .

**Demostración:**

Al ser  $Q$  simétrica, se puede formular la siguiente forma cuadrática:

$$x' Q x = x' C C' x = (C' x)' (C' x),$$

definiendo al vector  $y \triangleq C' x$ , se tiene

$$x' Q x = y' y = |y|_2^2 \geq 0,$$

por lo tanto  $Q \succeq 0$ .  $\square$

Notar que, si  $C$  es no singular la matriz  $Q \succ 0$ , ya que  $y = C' x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , por lo tanto  $\forall x \neq 0$ ,  $|y|_2^2 = x' Q x > 0, \Rightarrow Q \succ 0$ .

### A.1.2. Norma infinito de una matriz

Considérese el siguiente vector  $y = Cx$ . Su norma dos o módulo elevado al cuadrado, resulta

$$|y|_2^2 = x' C' C x = x' Q x,$$

siendo  $Q$  simétrica puede diagonalizarse ortonormalmente, es decir,

$$Q = T' \Lambda T,$$

de manera que

$$|y|_2^2 = x' T' \Lambda T x.$$

Definiendo el vector  $v \triangleq Tx$ , se puede escribir

$$|y|_2^2 = v' \Lambda v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2,$$

donde los  $\lambda_i$  los autovalores de  $Q$ , y  $(\sigma_i = +\sqrt{\lambda_i})$  los valores singulares de  $C$ .

Siendo  $\lambda_{\text{máx}}$  el máximo autovalor de  $Q$ , es posible escribir

$$|y|_2^2 \leq \lambda_{\text{máx}} (\sum_{i=1}^n v_i^2) = \lambda_{\text{máx}} |v|_2^2,$$

pero la matriz ortonormal  $T$  produce una rotación del vector  $x$  preservando su módulo, en efecto  $|v|_2^2 = x'T'T x = x'I x = |x|_2^2$ , por lo tanto se tiene

$$|y|_2^2 \leq \lambda_{\text{máx}} |x|_2^2,$$

o bien,

$$|y|_2 \leq \sigma_{\text{máx}} |x|_2.$$

De esta última expresión se deduce que si se toma como dominio el conjunto de vectores  $x$  tal que  $|x|_2 = 1$ , el máximo módulo del conjunto imagen de vectores  $y = Cx$ , tiene como cota superior al máximo valor singular de la matriz de transformación  $C$ , y a este valor  $\sigma_{\text{máx}}(C)$  se lo conoce como norma infinito de la matriz.

También se puede decir que el cociente entre los módulos de los vectores de salida y entrada, se ve acotado por dicha norma. Esto es, si  $y = Cx$  entonces

$$\frac{|y|}{|x|} \leq \sigma_{\text{máx}}(C).$$

## A.2. Rechazo a perturbaciones desconocidas

### A.2.1. Formulación $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas MIMO

Considérese el siguiente sistema a lazo abierto:

$$z(s) = G(s)w(s), \quad (\text{A.3})$$

donde  $z^{(p,1)}$  es el vector de salidas y  $w^{(q,1)}$  el vector de entradas, y  $G^{(p,q)}$  la matriz de transferencia del sistema.

Siendo el sistema estable y  $w(t)$  un vector de energía (o potencia media<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>Si  $w(t)$  es un vector de potencia media finita, su contenido de potencia se define como

$$\|w\|_2^2 \triangleq \int_0^\infty \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{w(t)'w(t)}{T} dt.$$

finita, el contenido de energía del vector de salida  $z(t)$  resulta

$$\|z\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)'z(t) dt. \quad (\text{A.4})$$

Haciendo uso de la definición de la transformada de Fourier,  $z(t)$  puede escribirse como

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty z(j\omega)e^{+j\omega t} d\omega, \quad (\text{A.5})$$

y con esta representación, la Ec. (A.5) resulta<sup>2</sup>

$$\|z\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty z(j\omega)^* z(j\omega) d\omega. \quad (\text{A.6})$$

Evaluando la Ec. (A.3) en  $s = j\omega$ , y reemplazando en las Ec. (A.6) se obtiene

$$\|z\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty w(j\omega)^* G(j\omega)^* G(j\omega) w(j\omega) d\omega. \quad (\text{A.7})$$

A continuación se utilizará la Ec. (A.7) para la formulación de la norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

Definiendo  $H(j\omega) \triangleq G(j\omega)^* G(j\omega)$ , se observa que  $H(j\omega)$  es una matriz hermítica, es decir,  $H(j\omega) = H(j\omega)^*$ .

Similarmente a las matrices simétrica en el espacio real, las matrices hermíticas son unitariamente (ortonormalmente) diagonalizables, y sus autovalores son reales y no negativos. Por lo tanto,  $H(j\omega)$  puede expresarse como:

$$H(j\omega) = U(j\omega)^* \Lambda(j\omega) U(j\omega), \quad (\text{A.8})$$

siendo,

$$U(j\omega)^* U(j\omega) = I, \quad (\text{A.9})$$

y

$$\Lambda(j\omega) = \text{Diag} [\lambda_1(j\omega), \lambda_2(j\omega), \dots, \lambda_p(j\omega)].$$

Los  $\lambda_i(j\omega)$  son los autovalores (dependientes de la frecuencia) de  $H(j\omega)$ , y su raíz cuadrada

$$+\sqrt{\lambda_i(j\omega)} = \sigma_i(j\omega)$$

---

<sup>2</sup> $z(j\omega)^* = z(-j\omega)'$

son los valores singulares de la matriz  $G(j\omega)$ .

Reemplazando la Ec. (A.8) en la Ec. (A.7), y definiendo

$$v(j\omega) \triangleq U(j\omega)w(j\omega)$$

$$v(j\omega)^* = w(j\omega)^*U(j\omega)^*,$$

se obtiene

$$\|z\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(j\omega)^* \Lambda(j\omega) v(j\omega) d\omega, \quad (\text{A.10})$$

y expresando la ecuación anterior en forma escalar, resulta

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^q \lambda_i(j\omega) v_i(j\omega)^* v_i(j\omega) d\omega, \\ &= \sum_{i=1}^q \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_i(j\omega) v_i(j\omega)^* v_i(j\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Definiendo

$$\|G(s)\|_{\infty}^2 \triangleq \max\{\lambda_i(j\omega)\} \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty), \quad e \quad i = \{1, 2, \dots, q\}, \quad (\text{A.12})$$

se tiene

$$\|z\|_2^2 \leq \|G(s)\|_{\infty}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^p v_i(j\omega)^* v_i(j\omega) d\omega,$$

o bien,

$$\|z\|_2^2 \leq \|G(s)\|_{\infty}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(j\omega)^* v(j\omega) d\omega,$$

teniendo en cuenta la Ec. (A.9), se observa que

$$v(j\omega)^* v(j\omega) = w(j\omega)^* w(j\omega),$$

entonces, se puede escribir

$$\|z\|_2^2 \leq \|G(s)\|_{\infty}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(j\omega)^* w(j\omega) d\omega,$$

y se verifica la siguiente desigualdad,

$$\|z\|_2^2 \leq \|G(s)\|_{\infty}^2 \|w\|_2^2, \quad (\text{A.13})$$

$$\|z\|_2 \leq \|G(s)\|_{\infty} \|w\|_2,$$

siendo  $\|G(s)\|_{\infty}$ , el máximo valor singular ( $\sigma_{m\acute{a}x}$ ) de la matriz sistema  $G(j\omega)$ .

### A.2.2. Demostración del teorema (3.1)

**Demostración:** Considérese el sistema de la Fig.(3.2), para el mismo se define la matriz de transición y su matriz transpuesta conjugada<sup>3</sup> como

$$\begin{aligned}\phi(s) &\triangleq (sI - A)^{-1}, \\ \phi(s)^* &\triangleq -(sI + A')^{-1}.\end{aligned}\tag{A.14}$$

Luego, las matrices de transferencia del sistema en lazo abierto  $G(s)$  y la del lazo de realimentación  $L(s)$ , vienen dadas por

$$\begin{aligned}G(s) &= C \phi(s) B_1, \\ L(s) &= K_w \phi(s) B_1,\end{aligned}\tag{A.15}$$

y sus matrices transpuestas conjugadas son

$$\begin{aligned}G(s)^* &= B_1' \phi(s)^* C', \\ L(s)^* &= B_1' \phi(s)^* K_w' .\end{aligned}\tag{A.16}$$

Como primer paso para la demostración, se desarrolla el siguiente producto

$$[I - L(s)]^* \gamma^2 [I - L(s)] = \gamma^2 I - L(s)^* \gamma^2 - \gamma^2 L(s) + L(s)^* \gamma^2 L(s), \tag{A.17}$$

siendo  $[I - L(s)]$ , la matriz de transferencia del sistema en lazo cerrado.

Al reemplazar en la ecuación anterior  $L(s)$  por la igualdad (A.16), se tiene

$$\begin{aligned}[I - L(s)]^* \gamma^2 [I - L(s)] &= \\ &= \gamma^2 I - B_1' \phi(s)^* K_w' \gamma^2 - \gamma^2 K_w \phi(s) B_1 + B_1' \phi(s)^* K_w' \gamma^2 K_w \phi(s) B_1.\end{aligned}\tag{A.18}$$

Restando  $\gamma^2 I$  de (A.18), se obtiene<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}[I - L]^* \gamma^2 [I - L] - \gamma^2 I &= \\ &= -B_1' \phi^* K_w' \gamma^2 - \gamma^2 K_w \phi B_1 + B_1' \phi^* K_w' \gamma^2 K_w \phi B_1.\end{aligned}\tag{A.19}$$

<sup>3</sup>La matriz transpuesta conjugada resulta

$$\phi(s)^* = \overline{\phi(s)'} \triangleq \phi(-s)', \text{ para } s = j\omega.$$

<sup>4</sup>Para mayor claridad a continuación se omite la variable  $s$ .

Recordando que la ganancia óptima del lazo es

$$K_w = \gamma^{-2} B_1' P,$$

y reemplazándola en el lado derecho de la Ec. (A.19), se puede escribir

$$\begin{aligned} & [I - L]^* \gamma^2 [I - L] - \gamma^2 I = \\ & = -B_1' \phi^* P B_1 \gamma^{-2} \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^{-2} B_1' P \phi B_1 + B_1' \phi^* P B_1 \gamma^{-2} \gamma^2 \gamma^{-2} B_1' P \phi B_1. \end{aligned}$$

Simplificando, resulta

$$\begin{aligned} & [I - L]^* \gamma^2 [I - L] - \gamma^2 I = \\ & = -B_1' \phi^* P B_1 - B_1' P \phi B_1 + B_1' \phi^* P B_1 \gamma^{-2} B_1' P \phi B_1. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Como próximo paso, se retoma la desigualdad matricial (3.39), que a continuación se reescribe

$$A'P + PA + \gamma^{-2} PB_1 B_1' P + C'C \prec 0. \quad (\text{A.21})$$

a la cual se le suma y se le resta ( $sP$ ), obteniéndose

$$\begin{aligned} & A'P + sP + PA - Ps + C'C + PB_1 \gamma^{-2} B_1' P \prec 0, \\ & (A' + Is)P + P(A - Is) + C'C + PB_1 \gamma^{-2} B_1' P \prec 0. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Reemplazando la Ec. (A.14) en la ecuación anterior, se obtiene

$$- \{\phi(s)^*\}^{-1} P - P\{\phi(s)\}^{-1} + C'C + PB_1 \gamma^{-2} B_1' P \prec 0. \quad (\text{A.23})$$

A continuación, se premultiplica por  $[B_1' \phi(s)^*]$  y se posmultiplica por  $[\phi(s) B_1]$  cada uno de los términos de la Ec. (A.23), resultando

$$\begin{aligned} & (B_1' \phi(s)^*) (-\{\phi(s)^*\}^{-1} P) (\phi(s) B_1) = -B_1' P \phi(s) B_1, \\ & (B_1' \phi(s)^*) (-P\{\phi(s)\}^{-1}) (\phi(s) B_1) = -B_1' \phi(s)^* P B_1, \\ & (B_1' \phi(s)^*) (C'C) (\phi(s) B_1) = B_1' \phi(s)^* C' C \phi(s) B_1, \\ & (B_1' \phi(s)^*) (PB_1 \gamma^{-2} B_1' P) (\phi(s) B_1) = B_1' \phi(s)^* P B_1 \gamma^{-2} B_1' P \phi(s) B_1. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Observar que utilizando las ecuaciones (A.15) y (A.16), la tercera igualdad en (A.24) puede expresarse como

$$B_1' \phi(s)^* C' C \phi(s) B_1 = G(s)^* G(s),$$

reemplazando este término y recomponiendo la Ec. (A.24), se obtiene

$$-B_1' \phi^* P B_1 - B_1' P \phi B_1 + B_1' \phi^* P B_1 \gamma^{-2} B_1' P \phi B_1 \prec -G^* G. \quad (\text{A.25})$$

Comparando la Ec. (A.25) con la Ec. (A.20), se observa que

$$[I - L]^* \gamma^2 [I - L] - \gamma^2 I \prec -G^* G, \quad (\text{A.26})$$

y finalmente se obtiene,

$$[I - L(s)]^* [I - L(s)] \prec I - \gamma^{-2} G(s)^* G(s). \quad (\text{A.27})$$

### Sistema SISO

Continuando el análisis de la Ec. (A.27) para un sistema LTI SISO, las matrices  $L(s)$  y  $G(s)$  son funciones escalares, por lo tanto

$$\begin{aligned} L(s)^* &= \overline{L(s)}, \\ G(s)^* &= \overline{G(s)}. \end{aligned}$$

Trabajando en  $s = j\omega$ , se tiene

$$\begin{aligned} \overline{[1 - L(j\omega)]} [1 - L(j\omega)] &< 1 - \gamma^{-2} \overline{G(j\omega)} G(j\omega), \\ 1 - \gamma^{-2} |G(j\omega)|^2 &> |1 - L(j\omega)|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Por lo tanto,  $\forall \omega$  se cumple que:

$$\begin{aligned} 1 - \gamma^{-2} |G(j\omega)|^2 &> 0, \\ 1 &> \gamma^{-2} |G(j\omega)|^2, \\ \gamma^2 &> |G(j\omega)|^2, \\ \gamma &> \max_{\omega \in \mathbb{R}} \{|G(j\omega)|\}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Luego, si se satisface la desigualdad (3.39), la cota inferior para el escalar  $\gamma$  resulta

$$\gamma_{min} > \|G(s)\|_{\infty}. \quad (\text{A.30})$$

### Sistema MIMO

Evaluando la Ec. (A.27) sobre el eje  $j\omega$ , se tiene

$$[I - L(j\omega)]^*[I - L(j\omega)] \prec I - \gamma^{-2} G(j\omega)^*G(j\omega), \quad (\text{A.31})$$

la matriz del lado izquierdo de la ecuación anterior es hermítica, esto significa que sus autovalores son reales y no negativos, los mismos son funciones escalares de la variable  $\omega$ .

Las raíz cuadrada de estos autovalores son los valores singulares de la matriz  $[I - L(j\omega)]$ , y obviamente son funciones escalares de la variable  $\omega$ , siendo el valor máximo entre todas estas funciones para algún valor de  $\omega$  dado, el máximo alcance de dicha matriz.

Por lo tanto,

$$0 \leq \lambda_{\text{máx}} \{[I - L(j\omega)]^*[I - L(j\omega)]\} < \lambda_{\text{máx}} \{I - \gamma^{-2} G(j\omega)^*G(j\omega)\}, \quad (\text{A.32})$$

Lo anterior conduce a que:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{máx}} \{I - \gamma^{-2} G(j\omega)^*G(j\omega)\} &> 0, \\ \lambda_{\text{máx}} \{I\} &> \gamma^{-2} (\lambda_{\text{máx}} \{G(j\omega)^*G(j\omega)\}), \\ \gamma^2 &> \lambda_{\text{máx}} \{G(j\omega)^*G(j\omega)\} \\ \gamma &> \sigma_{\text{máx}} \{G(j\omega)\}, \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

siendo

$$\|G(s)\|_{\infty} = \sigma_{\text{máx}} \{G(j\omega)\}, \quad (\text{A.34})$$

se obtiene para un sistema MIMO, la cota inferior para el escalar  $\gamma$ ,

$$\gamma_{\text{mín}} > \|G(s)\|_{\infty}. \quad (\text{A.35})$$

□

### A.2.3. Procedimiento para obtener $\gamma_{\text{mín}}$ de un sistema realimentado

El procedimiento para encontrar la ganancia de realimentación óptima que minimice la norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  del sistema (3.41), consiste en:

1. A partir de su matriz Hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2' B_2' \\ C' C & A' \end{pmatrix},$$

fijar un valor de  $\gamma$  y calcular los autovalores de dicha matriz.

2. Si sus autovalores son estables, reducir el valor de  $\gamma$  hasta que alguno de ellos llegue al límite de la estabilidad, el valor de  $\gamma$  que lleve al sistema a esta condición será  $\gamma_{\text{mín}}$ . Luego, saltar al paso 4.
3. Si al menos uno de los autovalores es inestable, aumentar el valor de  $\gamma$  hasta que todos sean estables y regresar al paso 2.
4. Con el valor  $\gamma_{\text{mín}}$  obtenido, el cual es la cota superior de la norma  $H_\infty$  del sistema realimentado, resolver la ecuación de Ricatti

$$A'P + PA + C'C + PB_1 \gamma_{\text{mín}}^{-2} B_1'P - PB_2B_2'P = 0,$$

para  $P \succ 0$ .

5. Con el valor de  $P$  obtenido construir la ganancia de realimentación estática

$$K_{\text{ópt}} = B_2'P,$$

la cual garantiza que

$$\frac{\|y\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma_{\text{mín}}.$$

### A.3. Procedimiento para obtener $\gamma_{\text{mín}}$ de un sistema realimentado vía LMI

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \overbrace{\begin{pmatrix} x \end{pmatrix}}^{\text{Estados}} & \overbrace{\begin{pmatrix} d & n \end{pmatrix}}^{\text{Perturbaciones}} & \overbrace{\begin{pmatrix} u \end{pmatrix}}^{\text{Control}} \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \text{Ecuación de Estados} \\
 \overbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \end{pmatrix}} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \end{pmatrix}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \text{Especificaciones } \mathcal{H}_\infty \\
 \overbrace{\begin{pmatrix} z_\infty \end{pmatrix}} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{12} \end{pmatrix}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \text{Especificaciones } H_2 \\
 \overbrace{z_2 \triangleq \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{22} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array} \tag{A.36}$$

1. Reducir el valor de  $\gamma$  hasta que el problema se vuelva infactible.

El diseño del controlador  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  vía LMI, se plantea como

$$\min_{X \succ 0, Y} \{ \text{Traza } M \},$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} M & C_2X - D_{22}Y \\ XC'_2 - Y'D'_{22} & X \end{pmatrix} \succ 0, \\ & \begin{pmatrix} (AX - B_2Y) + (AX - B_2Y)' & B_1 \\ B'_1 & -I \end{pmatrix} \prec 0, \\ & \begin{pmatrix} (AX - B_2Y)' + (AX - B_2Y) & B_1 & (C_1X_\infty - D_{12}Y)' \\ B'_1 & -\gamma I & D'_{11} \\ (C_1X - D_{12}Y) & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

## A.4. Regulador multiobjetivo y robustez

### A.4.1. Polítopo

Un politopo define una región convexa, y todos sus puntos pueden representarse como una combinación lineal de sus vértices, en la siguiente forma:

$$p = \sum_{i=1}^{2^m} t_i V_i, \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^{2^m} t_i = 1. \quad (\text{A.38})$$

Las siguientes figuras ilustran este concepto.

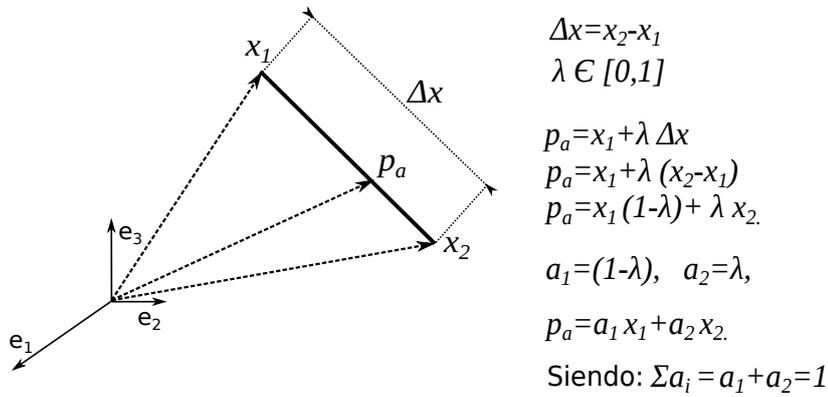


Figura A.1: Punto interior al segmento  $\overline{x_1 x_2}$ , representado mediante combinación lineal de sus extremos.

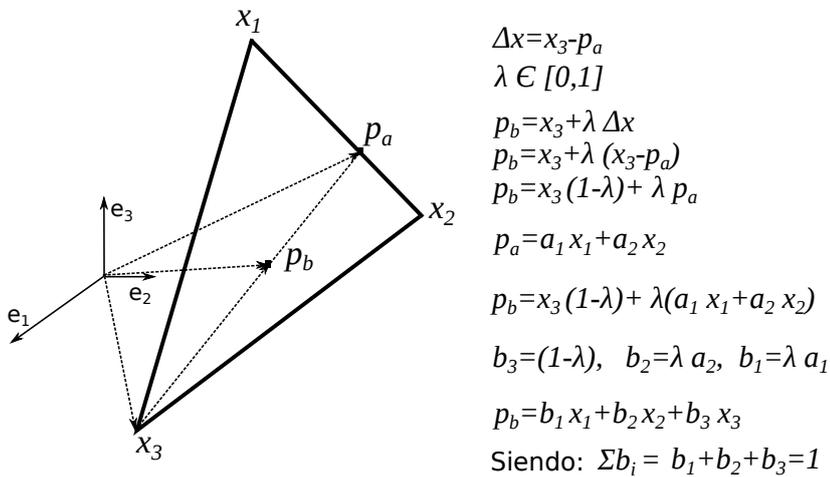


Figura A.2: Polítopos en 2 dimensiones. Punto interior representado mediante combinación lineal de sus vértices.

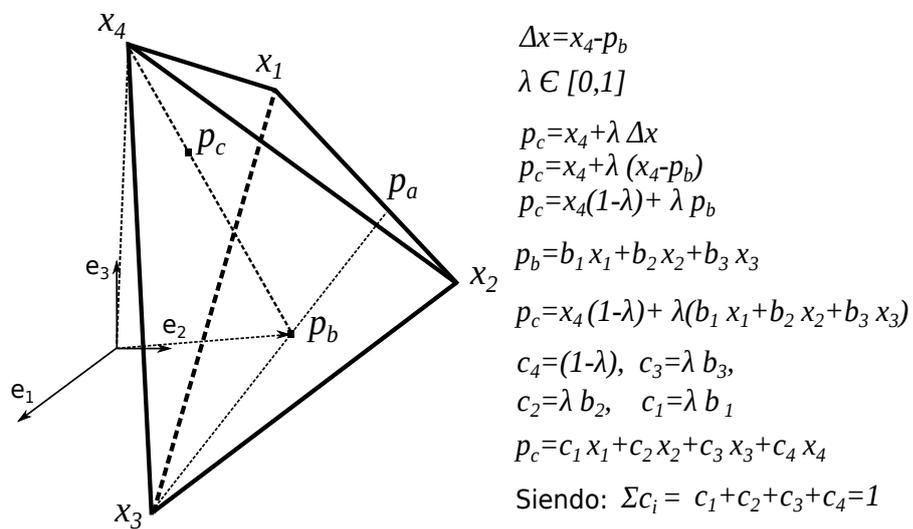


Figura A.3: Polítopos en 3 dimensiones. Punto interior representado mediante combinación lineal de sus vértices.

# Apéndice B

## Códigos de Matlab

### B.1. LMI y el toolbox de matlab

En esta subsección se explica brevemente y mediante un ejemplo, algunos comandos del toolbox de matlab para la solución de problemas que involucran a las LMI [Erkus and Lee, 2004].

#### Problemas que involucran LMI

- Encontrar el vector solución que satisfaga la restricción  $F(x) \prec 0$ , es llamado *problema de factibilidad*.
- Minimizar una función objetivo convexa sujeta a algunas restricciones LMI resulta también un problema convexo. En particular, el siguiente problema de minimización donde la función objetivo es lineal

$$\begin{aligned} & \text{mín}_x c'x, \\ & \text{sujeto a: } F(x) \prec 0, \end{aligned}$$

juega un rol importante en los problemas de diseño basado en LMI. Este problema es llamado, *problema del eigenvalue*.

- Por último, el llamado *problema del eigenvalue generalizado*, el cual se describe a continuación

$$\begin{aligned} & \text{mín}_x \lambda, \\ & \text{sujeto a:} \\ & \left\{ \begin{array}{l} A(x) \prec \lambda B(x), \\ B(x) \succ 0, \\ C(x) \prec 0 \end{array} \right\}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

es otro ejemplo de problema LMI.

Con el toolbox de matlab se pueden resolver los tres tipos de problemas: a continuación se ejemplifica el problema del eigenvalue.

*Ejemplo B.1. Mostrar mediante comandos de Matlab<sup>©</sup> la minimización de la siguiente función objetivo sujeta a restricciones:*

$$\min_{X,Y} \{Tr(X) + Tr(B'YA)\}$$

*sujeto a:*

$$\begin{pmatrix} CXC' + B'YA & XF \\ F'X & Y \end{pmatrix} \prec 0, \quad DXD' \succ 0. \quad (\text{B.2})$$

**Resolución.** ▷

#### Definición de las LMIs

- El primer paso consiste en inicializar el sistema LMI con el siguiente comando, sin parámetros adicionales

```
setlmis([])
```

- El segundo paso consiste en definir las matrices variables de decisión mediante la función

```
lmivar
```

En este ejemplo las matrices variables son  $X$  e  $Y$ , previo a definir estas variables se debe especificar su estructura, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{estructura}X &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \\ X &= \text{lmivar}(1, \text{estructura}X); \end{aligned}$$

el número 1 en el comando `lmivar` indica que  $X$  tiene una estructura simétrica formada por bloques en su diagonal.

La matriz `estructuraX` tiene tantas filas como bloques tiene la matriz  $X$  en su diagonal. La primera columna indica la dimensión del bloque, mientras que la segunda indica el tipo de bloque:

- 1 bloque completo,

- 0 bloque compuesto por escalares, y
  - -1 bloque con todos sus componentes nulos.
- El tercer paso consiste en definir todos los términos de cada LMI, mediante el siguiente comando:

```
lmiterm([1 1 1 1], C, C');
```

Este comando representa el término  $CXC'$  de la primera LMI.

Se observa que el mismo toma tres argumentos. El primero es un vector de dimensión  $(1, 4)$ , la primera columna de este vector indica el número de LMI, y su signo indica que la LMI es negativa definida, si fuera por ejemplo  $(-1)$ , indicaría que la primera LMI es positiva definida.

La segunda y tercer columna indican la posición que ocupa el término dentro de la LMI, la cuarta indica a que variable involucra, en este caso la primer variable definida es  $X$ .

El segundo y tercer argumento de esta función indican los multiplicadores por izquierda y por derecha de la matriz de decisión.

- El último paso para completar la definición de la LMI, es utilizar el siguiente comando:

```
NombreSistemaLMI = getlmis;
```

### Solución del problema

Una vez definida las LMIs, debe utilizarse el comando `mincx` para resolver el problema de minimización. Previo a esto, los elementos de las matrices incógnitas  $X$  e  $Y$  deben representarse como los elementos de un vector de decisión  $x$ , así mismo, debe poder encontrarse el vector  $c$  de manera que la función objetivo a minimizar pueda representarse como el producto escalar  $c'x$ , es decir,

$$\{Tr(X) + Tr(B'YA)\} = c'x.$$

Para poder encontrar el vector  $c$  y definir el vector  $x$ , en Matlab se emplean las siguientes funciones adicionales:

- Primero, encontrar la dimensión de  $x$ , para ello se utiliza

```
nx = decnbr(NombreSistemaLMI);
```

- Segundo, se inicializa el vector  $c$ , el cual tendrá la misma dimensión que el vector  $x$ , para ello se utiliza

$$c = \text{zeros}(nx, 1);$$

- Luego, los términos  $\{Tr(X) + Tr(B'YA)\}$ ,  $c$  y  $x$  son definidos como sigue:

```
for i = 1 : n
[Xi, Yi] = defcx(NombreSistemaLMI, i, X, Y);
c(i) = trace(Xi) + trace(B'YiA);
end
```

Aquí, la función `defcx` asocia los elementos de las matrices  $X$  e  $Y$  al vector  $x$ , y encuentra los elementos correspondiente al vector  $c$ .

- El próximo paso consiste en utilizar el comando `mincx` que entrega como resultado los valores óptimos del vector  $x$ , y el valor mínimo de la función objetivo, esto es:

$$[\text{minvalfobj}, x_{\text{opt}}] = \text{mincx}(\text{NombreSistemaLMI}, c, [1e-5, 0, 0, 0, 0]);$$

Aquí la última entrada es un vector de opciones para el comando `mincx`.

- El último paso consiste en reconstruir las matrices óptimas  $X$  e  $Y$ , a partir del vector  $x_{\text{opt}}$  obtenido, utilizando el comando `dec2mat` del siguiente modo:

$$X_{\text{opt}} = \text{dec2mat}(\text{NombreSistemaLMI}, x_{\text{opt}}, X);$$

$$Y_{\text{opt}} = \text{dec2mat}(\text{NombreSistemaLMI}, x_{\text{opt}}, Y);$$

◁

## B.2. Ejemplo de Programación

A continuación se presentan los códigos y rutinas de matlab que se podrían haber utilizado para resolver el ejemplo numérico (6.3), aunque en dicha oportunidad se utilizó el comando o función `hinflmi`.

*Ejemplo B.2. Objetivo: Minimizar la norma  $\mathcal{H}_2$ , sujeto a  $\mathcal{H}_\infty < g$ , y restricción en la ubicación de polos.*

**Resolución.** ▷

**Restricciones:**

$$\mathcal{H}_\infty < g = 0,02;$$

$$\Re_e(s) > \alpha = 1,5;$$

$$r = (2\alpha)^{-1};$$

**Datos del sistema**

$$M = 2;$$

$$m = 0,1;$$

$$l = 0,5;$$

$$g_r = 9,81;$$

**Constantes**

$$a_{21} = ((M + m)g_r)/(Ml);$$

$$a_{41} = (-mg_r/M);$$

$$b_2 = (-1/(Ml));$$

$$b_4 = (1/M);$$

**Matrices del sistema**

$$A = [0 \ 1 \ 0 \ 0; a_{21} \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1; a_{41} \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$B_1 = [0; b_2; 0; b_4];$$

$$B_2 = [0; b_2; 0; b_4];$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1 \ 0];$$

$$D = [0; 0]; \quad I = \text{eye}(4); \quad I = 1;$$

**Comprobación de la controlabilidad del sistema**

$$M = [B_2 \ AB_2 \ A^2B_2 \ A^3B_2]; \text{rango} = \text{rank}(M);$$

**Salidas auxiliares para el diseño  $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$**

*Matrices para salidas  $z_\infty$*

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad D_{11} = [0]; \quad D_{12} = [0];$$

*Matrices para salidas  $z_2$ , (recordar  $D_{21} = 0$ )*

$$C_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$D_{21} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]'; \quad D_{22} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]';$$

**LMIs a construir:** Ecs. (6.39), (6.40) y (6.41).

$$\begin{bmatrix} M & C_2X - D_{22}Y \\ XC_2' - Y'D_{22}' & X \end{bmatrix} \succ 0, \quad \text{Restricción para la Norma } \mathcal{H}_2.$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' - B_2Y - Y'B_2' & X \\ X' & -rX \end{bmatrix} \prec 0, \quad \text{Restricción para la ubicación de polos.}$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' - B_2Y - Y'B_2' & B_1 & XC_1' - Y'D_{12}' \\ B_1' & -Ig & D_{11}' \\ C_1X - D_{12}Y & D_{11} & -gI \end{bmatrix} \prec 0, \quad \text{Restricción para la Norma } \mathcal{H}_\infty.$$

**Construcción de las LMIs**

*setlmis*([]);

$M = \text{lmivar}(1, [5 \ 1]);$       *Matriz Simétrica bloque completo, dim:5*  
 $X = \text{lmivar}(1, [4 \ 1]);$       *Matriz Simétrica bloque completo, dim:4*  
 $Y = \text{lmivar}(2, [1 \ 4]);$       *Matriz Rectangular dimensión: (1,4)*

$\text{lmiterm}([-1 \ 1 \ 1 \ M], 1, 1);$       *LMI N°1 : M*  
 $\text{lmiterm}([-1 \ 2 \ 1 \ X], 1, C'_2);$       *LMI N°1 :  $XC'_2$*   
 $\text{lmiterm}([-1 \ 2 \ 1 \ -Y], 1, -D'_{22});$       *LMI N°1 :  $-Y'D'_{22}$*   
 $\text{lmiterm}([-1 \ 2 \ 2 \ X], 1, 1);$       *LMI N°1 : X*

$\text{lmiterm}([2 \ 1 \ 1 \ X], A, 1, 's');$       *LMI N°2 :  $AX + XA'$*   
 $\text{lmiterm}([2 \ 1 \ 1 \ Y], B_2, -1, 's');$       *LMI N°2 :  $-B_2Y - Y'B'_2$*   
 $\text{lmiterm}([2 \ 2 \ 1 \ X], 1, 1);$       *LMI N°2 : X*  
 $\text{lmiterm}([2 \ 2 \ 2 \ X], 0, 5r, -1, 's');$       *LMI N°2 :  $-rX$*

$\text{lmiterm}([3 \ 1 \ 1 \ X], A, 1, 's');$       *LMI N°3 :  $AX + XA'$*   
 $\text{lmiterm}([3 \ 1 \ 1 \ Y], B_2, -1, 's');$       *LMI N°3 :  $-B_2Y - Y'B'_2$*   
 $\text{lmiterm}([3 \ 2 \ 1 \ 0], B'_1);$       *LMI N°3 :  $B'_1$*   
 $\text{lmiterm}([3 \ 2 \ 2 \ 0], -gI);$       *LMI N°3 :  $-gI$*   
 $\text{lmiterm}([3 \ 3 \ 1 \ X], C_1, 1);$       *LMI N°3 :  $C_1X$*   
 $\text{lmiterm}([3 \ 3 \ 1 \ Y], D_{12}, -1);$       *LMI N°3 :  $-D_{12}Y$*   
 $\text{lmiterm}([3 \ 3 \ 2 \ 0], D_{11});$       *LMI N°3 :  $D_{11}$*   
 $\text{lmiterm}([3 \ 3 \ 3 \ 0], -gI);$       *LMI N°3 :  $-gI$*

*Region = getlmis*

*(Nombre del sistema de LMIs)*

---

**Minimización de la función objetivo sujeta a restricciones****y obtención de  $K_{\acute{o}pt}$ .**

```

n = decnbr(Region)
c = zeros(n,1);
for j = 1:n,
([Mj, Xj, Yj]) = defcx(Region, j, M, X, Y);
c(j) = trace(Mj);
end
([cópt, xópt]) = mincx(Region, c, []);
Xópt = dec2mat(Region, xópt, X);
Yópt = dec2mat(Region, xópt, Y);
Kópt = Yópt(Xópt)-1

```

---

**Matrices del sistema realimentado**

$$A_{cl} = (A - B_2 K_{\acute{o}pt})$$

$$C_{cl} = (C_2 - D_{22} K_{\acute{o}pt})$$


---

**Resultado del Toolbox**

```

Region
n = 29
Solver for linear objective minimization under LMI
constraints
Iterations : Best objective value so far
1
2
3
4
5
6
7          32.590136
8          8.911308
9          7.164298
10         7.164298
***          new lower bound:          -3.816050
11         6.667116
***          new lower bound:          -0.783075
12         6.667116
***          new lower bound:          -0.183636
13         3.357354

```

```

***          new lower bound:          0.027162
14          3.200734
***          new lower bound:          0.459315
15          2.885763
***          new lower bound:          0.762577
16          2.594215
***          new lower bound:          0.971983
17          2.457431
***          new lower bound:          1.117699
18          2.457431
***          new lower bound:          1.223572
19          1.870364
***          new lower bound:          1.249900
20          1.809568
***          new lower bound:          1.328022
21          1.756683
***          new lower bound:          1.384799
22          1.712452
***          new lower bound:          1.426917
23          1.669216
***          new lower bound:          1.458583
24          1.636785
***          new lower bound:          1.482436
25          1.622244
***          new lower bound:          1.500511
26          1.598053
***          new lower bound:          1.514438
27          1.586406
***          new lower bound:          1.524899
28          1.577747
***          new lower bound:          1.532852
29          1.569527
***          new lower bound:          1.538854
30          1.564269
***          new lower bound:          1.549409

```

```

Result: feasible solution of required accuracy
best objective value: 1.564269
guaranteed relative accuracy: 9.50e-03
f-radius saturation: 0.000 of R = 1.00e+09
K = -130.5304      -29.2889      -27.6667      -27.8909 <

```

# Apéndice C

## Artículos Publicados

Durante el desarrollo de esta tesis de maestría se presentaron a diversos congresos resultados que fueron obteniéndose a lo largo del desarrollo de la misma. A continuación se presenta un listado de los trabajos publicados:

1. C.A. Cappelletti and E.J.Adam. *Diseño de un Control de Nivel de un Sistema Hidráulico con Restricciones Utilizando LMI*. AADECA 2008-Semana del Control Automático- XXI° Congreso Argentino de Control Automático. Buenos Aires, Argentina. Del 1 al 3 de Septiembre de 2008.
2. C.A. Cappelletti and E.J.Adam. *Sintonización Robusta de Controladores Lineales Mediante el Uso de LMI*. AADECA 2012-Semana del Control Automático- XXIII° Congreso Argentino de Control Automático. Buenos Aires, Argentina. Del 3 al 5 de Octubre de 2012.
3. C.A. Cappelletti and E.J.Adam. *Aplicación de Control Por realimentación de Salida a un Sistema Hidráulico con Restricciones de Diseño*. CAIQ2013 - VII Congreso Argentino de Ingeniería Química. Rosario, Argentina. Del 20 al 23 de Octubre de 2013.
4. C.A. Cappelletti and E.J.Adam. *Aplicación de una Estrategia de Control para Seguimiento Sin Saturaciones*. AADECA 2014-Semana del Control Automático- XXIV° Congreso Argentino de Control Automático. Buenos Aires, Argentina. Del 27 al 29 de Octubre de 2014.
5. C.A. Cappelletti and E.J.Adam. *Problema de Seguimiento de Consigna en un Reactor Químico usando LMI*. RPIC 2015- XVI° Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control. Córdoba, Argentina. Del 5 al 9 de Octubre de 2015.

6. C.A. Cappelletti and E.J.Adam. *Control con Restricciones de Diseño por Realimentación de Salida de un Sistema Hidráulico*. ELSEVIER/RIAI- Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial. Publicado por Elsevier España, S.L. 2015.

# Bibliografía

- Adam, E. (2014). *Instrumentacion y Control de Procesos*. Ediciones UNL, ISBN 978-987-657-941-4.
- Boasová, M., Puma, D., and Mészáros, A. (2005). Robust controller design for chemical reactor. In *European Symposium Computer Aided Process Engineering-15*, Barcelona, España.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Cappelletti, C. A. and Adam, E. J. (2012). Sintonización robusta de controladores lineales mediante el uso de lmi. parte i. In *XXIII Congreso Argentino de Control Automático, AADECA 2012*, Buenos Aires, Argentina.
- Cappelletti, C. A. and Adam, E. J. (2014). Aplicación de una estrategia de control para seguimiento sin saturaciones. In *XXIV Congreso Argentino de Control Automático, AADECA 2014*, Buenos Aires, Argentina.
- Cappelletti, C. A. and Adam, E. J. (2015a). Control con restricciones de diseño por realimentación de salida de un sistema hidráulico. *ELSEVIER/RIAI Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*.
- Cappelletti, C. A. and Adam, E. J. (2015b). Problema de seguimiento de consigna en un reactor químico usando lmi. In *XVI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, RPIC 2015*, Córdoba, Argentina.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). Hinf design whit pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367.
- Cohen, G. H. and Coon, G. A. (1953). Theoretical consideration of retarded control. *Trans. ASME*, 75:827–834.
- Colmenares, W. and Tadeo, F. (2005). *Apuntes sobre Control Robusto y Multiobjetivos de Sistemas*. Ed. Equinoccio, ISBN 980-237-233-4.

- Erkus, B. and Lee, Y. (2004). *Linear Matrix Inequalities and MatLab LMI Tool-Box*.
- Ge, M., Chiu, M.-S., and Wang, Q.-G. (2002). Robust pid controller design via lmi approach. *Journal of Process Control*, 12:3–13.
- Green, M. and Limeber, D. J. N. (1995). *Linear Robust Control*. Prentice Hall, Inc.
- Hagan, M., Demuth, H., and Beale, E. (2000). *Neural Network Design*. University of Colorado Bookstore, ISBN 0-9717321-0-8.
- Iwasaki, T. and Skelton, R. E. (1994). All controllers for general hinf control problem: Lmi existence conditions and state space. *Automatica*, 30:1307–1317.
- Khotare, M., Balakrishman, V., and Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10):1361–1379.
- Kuo, B. (2009). *Automatic Control Systems*. John Wiley & Sons, 9th edition.
- Lam, H. Y. F. (1979). *Analog and digital filters; design and realization*. Prentice-Hall.
- Morari, M. and Zafiriou, E. (1989). *Robust Process Control*. Prentice Hall.
- Morningred, J. D., Paden, B. E., Seborg, D. E., and Mellichamp, D. A. (1990). An adaptive nonlinear predictive controller. *in Proc. Amer. Contr.Conf.*, 2:1614–1619.
- Noble, B. and Daniel, J. (1989). *Álgebra Lineal Aplicada*. Prentice-Hall Hispanoamerica S.A.
- Ogata, K. (2009). *Modern Control Engineering (5th Edition)*. Prentice Hall, 5th edition.
- Park, M. J. and Rhee, H. K. (2001). Lmi-based robust model predictive control for a continuous mma polymerization reactor. *Computer and Chemical Engineering*, 25:1513–1520.
- Rautenberg, C. N. and Dáttellis, C. E. (2004). *Control Lineal Avanzado y Control Óptimo*. Asociación Argentina de Control Automático (AADECA).
- Sánchez, R. S. (1992). *Introducción a la Teoría de Control Robusto*. AADECA.

- Sánchez, R. S. and Sznaier, M. (1998). *Robust System. Theory and Applications*. Wiley-Interscience.
- Scherer, C. (1998). *Linear Matrix Inequalities in Control*. Delft University of Technology.
- Scherer, C., A., P. G., and Chilali, M. (1997). Multiobjetivo output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(896–911).
- Smith, C. and Corripio, A. (2004). *Principles and Practice of Automatic Process Control*. Wiley.
- Sontag, E. D. (1990). *Mathematical Control Theory. Deterministic Finite Dimensional System*. Springer - Verlag.
- Stephanopoulos, G. (1984). *Chemical Process Control*. Prentice Hall.
- Stremmer, F. G. (1993). *Introducción a los Sistemas de Comunicación*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Suplin, V. and Shaked, U. (2008). Output-feedback control of system with time delay. *System and Control Letter*, 57:193–199.
- Wu, F. (2001). Lmi-based robust model predictive control and its application to an industrial cstr problem. *Journal of Process Control*, 11:649–659.
- Zhou, K. and Doyle, J. C. (1998). *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, Inc.
- Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Trans. ASME*, 64(11):759–768.