

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

Doctor en Matemática

EN EL CAMPO DE: **Análisis Numérico**

TÍTULO DE LA TESIS:

**Aproximación No-lineal con Elementos Finitos:
Optimalidad y Espacios Asociados**

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Departamento de Matemática, FIQ (UNL)

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET, UNL)

AUTOR:

Fernando Gaspoz

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Pedro Morin

JURADO DE LA TESIS COMPUESTO POR:

Dr. Hugo Aimar

Dr. Ricardo Durán

Dr. Claudio Padra

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2008

Resumen

Los métodos de elementos finitos adaptativos (MEFA) para la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales (PDE) comenzaron en los 70's y ahora son una herramienta estándar en ciencia e ingeniería. El propósito último de la adaptatividad es el de reducir el costo computacional mediante la construcción automática de una sucesión de mallas que deberían, eventualmente, equidistribuir los errores de aproximación, resultando en mallas (casi-)óptimas. Los métodos adaptativos para problemas estacionarios usualmente consisten en lazos de la forma

RESOLVER \rightarrow ESTIMAR \rightarrow MARCAR \rightarrow REFINAR.

La experiencia sugiere fuertemente que, partiendo de una malla gruesa, una iteración tal converge, dada cualquier tolerancia de error prescrita, en un número finito de pasos, y lo hace de una forma óptima, utilizando estimadores del error a posteriori confiables y eficientes. Lo que se observa en la práctica, es que para una gran clase de problemas y datos, las soluciones $u_{\mathcal{T}}$ y las mallas \mathcal{T} obtenidas con métodos adaptativos de la forma descrita satisfacen

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1} \leq C(\#\mathcal{T})^{-r/d},$$

donde u denota la solución exacta, r el grado polinomial del espacio de elementos finitos sobre la malla \mathcal{T} , y d la dimensión del espacio subyacente. Esta es la misma cota del error que se obtiene con mallas refinadas uniformemente para soluciones suaves (regulares) $u \in H^{r+1}$, mediante la aplicación de estimaciones de interpolación clásicas (ver [Cia78]). La velocidad de decaimiento dictada por la desigualdad anterior —que es también observada en la práctica para las llamadas soluciones *singulares* pertenecientes a $H^\alpha(\Omega)$ para $1 < \alpha < 2$ — es usualmente llamada *velocidad óptima de decaimiento del error*.

El estudio del orden de convergencia de MEFA para ecuaciones diferenciales se divide esencialmente en tres etapas claramente diferenciadas fuertemente relacionadas:

1. Demostración de que si la solución exacta de la ecuación diferencial pertenece a la clase \mathbb{A}_s de funciones que pueden aproximarse (idealmente) con un error de orden $(\#\mathcal{T})^{-s}$, entonces el algoritmo adaptativo genera una sucesión de mallas $\{\mathcal{T}_k\}_k$ y soluciones discretas $\{u_k\}_k$ que satisfacen

$$\|u - u_k\|_{H^1} \leq C(\#\mathcal{T}_k)^{-s}.$$

Resultados de este tipo han sido demostrados en los trabajos [Ste07, CKNS08] y una descripción más precisa se encuentra en el Capítulo 1.

2. Descripción de las clases \mathbb{A}_s utilizando nociones de regularidad de funciones conocidas: Hölder, Sobolev, Besov, etc., y/o descomposiciones de las funciones en componentes con diferentes propiedades como las que se obtienen en los resultados de regularidad de ecuaciones diferenciales.
3. Demostración de resultados de regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales que indiquen bajo qué hipótesis sobre el dominio, los coeficientes y los datos de la ecuación, la solución pertenecerá al espacio de regularidad hallado en la segunda etapa. Resultados de este tipo se han obtenido, por ejemplo, en [Kel92, Dau88] y son los resultados clásicos de regularidad de ecuaciones diferenciales.

En este trabajo nos enfocamos en la segunda etapa. Más precisamente, presentamos dos familias de funciones, descritas de manera diferente, que están contenidas en $\mathbb{A}_{r/d}$. Nuestro objetivo principal de comprender por qué en la práctica se observa siempre el orden óptimo $(\#\mathcal{T})^{-\frac{r}{d}}$ y demostrar de manera rigurosa en qué casos dicho orden está garantizado. Por ello nos concentramos en el caso $s = \frac{r}{d}$.

Después de introducir en el Capítulo 1 los conceptos básicos de los MEFA y una serie de resultados conocidos, fuertemente relacionados con nuestro trabajo, en el Capítulo 2 presentamos una primera familia de funciones que pueden aproximarse de manera óptima: es la familia de funciones que pueden escribirse como suma de una función regular más funciones con singularidades localizadas en puntos. Este resultado está lejos de ser una

caracterización de la clase de funciones para las que se obtiene dicho decaimiento, pero muchos teoremas de regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales están expresados de esta manera (ver [Kel92, Dau88] y referencias), lo que le da gran aplicabilidad.

En el Capítulo 4 —luego de una descripción, en el Capítulo 3, de los espacios de Besov y de su relación con la velocidad de aproximación polinomial— describimos otra clase de funciones, en términos de regularidad Besov, para las cuales se obtiene el decaimiento óptimo del error. Tampoco aquí se obtiene una caracterización, pero este resultado es más completo, dado que se demuestra también una especie de resultado recíproco para una clase de funciones levemente mayor. Si bien este resultado es más ajustado desde el punto de vista del Análisis, para su aplicación a ecuaciones diferenciales, debería complementarse con resultados de regularidad Besov de soluciones diferenciales, que son aún escasos en comparación con los mencionados en el párrafo anterior.

Los resultados principales de nuestro trabajo se obtienen a través de la construcción de mallas óptimas, utilizando información sobre la función a aproximar u y de sus derivadas o normas de Besov locales. Se logra, por lo tanto una aproximación constructiva a una función conocida, estableciendo el orden de convergencia por aproximación adaptativa, es decir, la pertenencia a una clase \mathbb{A}_s . En vistas de los resultados de [Ste07, CKNS08] concluimos que si la solución u de una ecuación elíptica pertenece a alguna de las familias que presentamos, entonces el orden óptimo está garantizado al resolver la ecuación utilizando métodos de elementos finitos adaptativos.

Índice general

1. Elementos Finitos Adaptativos	1
1.1. Formulación Variacional y Método de Galerkin	2
1.2. El Método de Elementos Finitos	4
1.3. La regla de bisección del vértice nuevo	9
1.3.1. Bisección de un único simplicial	9
1.3.2. Particiones Admisibles	11
1.3.3. Particiones creadas por bisección	11
1.4. Clases de Aproximación	13
1.5. Adaptatividad	15
2. Una condición suficiente	19
2.1. Resultado Principal del Capítulo	19
2.2. Heurística de la construcción	22
2.3. Algoritmo constructivo	24
2.4. Propiedades del algoritmo y de las mallas	27
2.5. Acotación del Error	31
2.5.1. Estimación de la Parte Regular	31
2.5.2. Estimación de la Parte Singular	32
2.5.3. Demostración del Resultado Principal del Capítulo	35
2.6. Aplicaciones a EDP elípticas en polígonos	36
2.6.1. Ecuación de Poisson	36
2.6.2. Problema de la Interfase para el Laplaciano	37

3. Espacios de Besov y Aproximación Polinomial	41
3.1. Módulos de Suavidad	41
3.2. Aproximación por Polinomios	51
3.3. Espacios de Besov vía Módulo de Suavidad	53
4. Espacios de Besov y Clases de Aproximación	57
4.1. Base y Casi-interpolador	57
4.2. Espacios de Besov vía Descomposición Multiescala	64
4.3. Resultados de Inmersión y Aproximación	66
4.4. Resultados Auxiliares	68
4.5. Teoremas Directos	74
4.6. Teoremas Inversos	78

Capítulo 1

Introducción: Aproximación por Elementos Finitos Adaptativos

En este capítulo haremos un breve repaso sobre el método de elementos finitos, las estimaciones a priori, el concepto clásico de *aproximación óptima* (Lema de Céa), y el nuevo concepto de optimalidad en *aproximación no lineal*. Nuestro interés principal es estudiar velocidades de aproximación medidas en términos del número de grados de libertad necesarios para representar las aproximantes, que es equivalente al número de elementos de la malla o triangulación. Un concepto importante que definiremos en la sección 1.4 es el de *clases de aproximación*, donde definiremos las clases de funciones que pueden aproximarse por elementos finitos adaptativos con una cierta velocidad prescripta.

También presentamos los espacios de elementos finitos que consideraremos a lo largo de toda la tesis, que son los conocidos como *Elementos de Lagrange*, e introduciremos lo que se conoce usualmente como bucle adaptativo para problemas elípticos. Para introducir el método de elementos finitos y presentar algunas propiedades básicas consideraremos como problema modelo a la ecuación de Poisson, sin que esto quite generalidad a nuestros resultados, que pertenecen más al área de teoría de aproximación que a la de resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

1.1. Formulación Variacional y Método de Galerkin

Sea Ω un dominio poliedral acotado en \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$). Consideremos el problema modelo:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{en } \Omega, \\ u &= 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$.

Dado un conjunto $G \subset \mathbb{R}^d$ denotamos $H^1(G)$ al espacio de Sobolev de funciones en $L^2(G)$ cuyas derivadas débiles de primer orden están en $L^2(G)$, con la norma

$$\|f\|_{H^1(G)} = \left(\|f\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(G)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Denotamos además por $H_0^1(G)$ a la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, que cuando la frontera es poligonal (lo que ocurrirá siempre en esta tesis) coincide con el espacio de funciones en $H^1(G)$ con traza nula en la frontera de G . Definimos $\mathbb{V} := H_0^1(\Omega)$ y denotamos su norma por $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$. Una solución débil de (1.1) es una función u satisfaciendo:

$$u \in \mathbb{V} : \quad B[u, v] = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{V}, \tag{1.3}$$

donde $\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v$ para toda $f, v \in L^2(\Omega)$, y la forma bilineal $B[\cdot, \cdot]$ se define en $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ como $B[u, v] = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se prueba fácilmente la continuidad de la forma bilineal

$$|B[u, v]| \leq \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}, \tag{1.4}$$

y utilizando la desigualdad de Poincaré se prueba la coercitividad en \mathbb{V}

$$B[v, v] \geq c_B \|v\|_{\mathbb{V}}^2 \tag{1.5}$$

donde c_B no depende de v , sino sólo del dominio Ω .

La existencia y unicidad del problema (1.3) se sigue del teorema de Lax-Milgram, o, en este caso en que B es simétrica, del teorema de representación de Riesz.

Hemos presentado aquí el problema de Poisson, pero lo que sigue se aplica a cualquier problema que pueda escribirse en forma débil como (1.3) con \mathbb{V} espacio de Hilbert, $B[\cdot, \cdot]$ bilineal acotada y coercitiva, y $f \in \mathbb{V}'$, el dual topológico de \mathbb{V} .

Consideremos ahora un subespacio de dimensión N (finita), \mathbb{V}_N de \mathbb{V} . Formulamos el método de Galerkin restringiendo la ecuación (1.3) a \mathbb{V}_N

$$u_N \in \mathbb{V}_N : \quad B[u, v] = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{V}_N. \quad (1.6)$$

La existencia y unicidad del problema (1.6) también se sigue del teorema de Lax-Milgram en V_N . Además si $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ es una base de \mathbb{V}_N , entonces podemos escribir $u_N(x) = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j(x)$ y (1.6) resulta equivalente al sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{j=1}^N U_j B[\phi_j, \phi_i] = \langle f, \phi_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.7)$$

La matriz $(B[\phi_j, \phi_i])_{j,i=1}^N$ es definida positiva y simétrica. La función de error $u - u_N$ satisface la propiedad crucial, usualmente llamada **ortogonalidad de Galerkin**:

$$B[u - u_N, v] = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_N. \quad (1.8)$$

Esta es una propiedad fundamental para el análisis del error y el diseño de métodos de elementos finitos (adaptativos), la cual no es válida para diferencias finitas.

El próximo lema es un resultado clásico que se utilizará recurrentemente sin mencionarse:

Lema 1 (Céa). *Sean u y u_N las soluciones de (1.3) y (1.6), respectivamente, y c_B la constante de la coercitividad (1.5). Entonces*

$$\inf_{v \in \mathbb{V}_N} \|u - v\|_{\mathbb{V}} \leq \|u - u_N\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{1}{c_B} \inf_{v \in \mathbb{V}_N} \|u - v\|_{\mathbb{V}} =: \frac{1}{c_B} \text{dist}(u, \mathbb{V}_N). \quad (1.9)$$

Antes de pasar a la sencilla demostración de este resultado, vale la pena interpretarlo. El mismo dice que la solución u_N de (1.6) es una aproximación *óptima* a u desde \mathbb{V}_N , pues salvo la constante $1/c_B$, el error entre u y u_N está acotado por $\text{dist}(u, \mathbb{V}_N)$. Luego, si \mathbb{V}_N es una sucesión de espacios tales que $\overline{\cup_N \mathbb{V}_N} = \mathbb{V}$, entonces $u_N \rightarrow u$. Más aún, si para un ϵ dado existe $v \in \mathbb{V}_N$ tal que $\|u - v\|_{\mathbb{V}} \leq \epsilon$, entonces $\|u - u_N\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{\epsilon}{c_B}$.

Demostración. Es suficiente probar la estimación derecha ya que la otra es trivial. Puesto que para todo $v \in \mathbb{V}_N$ vale:

$$\begin{aligned} c_B \|u - u_N\|_{\mathbb{V}} &\leq B[u - u_N, u - u_N] = B[u - u_N, u - v] + B[u - u_N, v - u_N] = \\ &= B[u - u_N, u - v] \leq \|u - u_N\|_{\mathbb{V}} \|u - v\|_{\mathbb{V}}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Vale la pena mencionar, por último, que este lema nos dice que la solución por el método de Galerkin es **casi la mejor aproximación** a u por medio de funciones de \mathbb{V}_N en la norma de $H^1(\Omega)$, pero no provee información *cuantitativa* del tamaño de $\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)}$. Dicha información cuantitativa estará disponible una vez que definamos la clase de espacios \mathbb{V}_N a utilizar.

1.2. El Método de Elementos Finitos

En esta sección definimos los espacios de elementos finitos que utilizaremos en el resto de la tesis, y enunciaremos los resultados clásicos de estimación a priori que miden el error en términos del tamaño *máximo* de los elementos de la malla.

Llamaremos malla \mathcal{T} a una partición de Ω en finitos **elementos** simpliciales (triángulos en dimensión dos o tetraedros en dimensión tres) T de tamaño $h_T := \text{diam}(T)$. Consideraremos como mallas *admisibles*, a aquellas tales que la intersección de dos T distintos es siempre una cara, un lado o un vértice de ambos.

Consideremos ahora $r \in \mathbb{N}$ y el subespacio $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}^r \subset \mathbb{V}$ de las funciones continuas en Ω y polinomiales a trozos, de grado $\leq r$, sobre la malla \mathcal{T} , es decir

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}}^r = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}^r, \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

Cuando esté claro que el coeficiente r está fijo escribiremos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ en lugar de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}^r$. En este trabajo consideramos sólo elementos finitos de este tipo, que son conocidos como *Elementos Finitos de Lagrange* de grado r . Si el grado polinomial es uno entonces la base estándar de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ que se utiliza se define por sus valores en los vértices, y la *base nodal* consiste de las funciones $\phi_i \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tal que $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y $\{x_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}}$ son los vértices de la malla. Cuando el grado polinomial es mayor a uno, existen en cada elemento un número finito de *nodos* donde están ubicados los *grados de libertad* que definen a cada función de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$. Las funciones de la base nodal siguen siendo aquellas que cumplen $\phi_i \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, pero esta vez el conjunto $\{x_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}}$ es el conjunto de nodos de la malla.

El **Método de Elementos Finitos (MEF)** clásico o conforme es el método de Galerkin con los subespacios de dimensión finita $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ definidos antes, es decir, la solución

por elementos finitos $u_{\mathcal{T}}$ es la única

$$u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} : \quad B[u, v] = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}. \quad (1.10)$$

Es importante notar que las bases utilizadas son locales, es decir, cada función base está soportada en un entorno del nodo asociado a la misma. Más precisamente, $\text{sop}(\phi_i) \subset \cup_{x_i \in T} T$. Por esto, las matrices que se obtienen son *ralas* (sparse), lo que resulta conveniente para la implementación y resolución numérica del problema.

Dada una malla admisible \mathcal{T} , se define la *regularidad de la malla* por

$$\gamma^*(\mathcal{T}) = \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{h_T}{\rho_T},$$

donde ρ_T es el diámetro de la mayor bola contenida en T .

Una herramienta importante para el análisis del Método de Elementos Finitos son las estimaciones para el error por aproximación por polinomios, por esta razón colocamos aquí este lema de interpolación por polinomios:

Lema 2. *Sea \mathcal{T} una malla admisible de forma regular y $h_{\mathcal{T}} = \max_{T \in \mathcal{T}} \text{diam}(T)$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que si $u \in H^{r+1}(\Omega)$ entonces:*

$$\inf_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \|u - v\|_{\mathbb{V}} \leq Ch_{\mathcal{T}}^r$$

donde la constante C depende del grado polinomial r , la dimensión d y la regularidad de la malla $\gamma^*(\mathcal{T})$.

Combinando este último resultado con el Lema 1 obtenemos que:

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} \leq Ch_{\mathcal{T}}^r \|u\|_{H^{r+1}(\Omega)} \quad (1.11)$$

para alguna constante independiente de u .

Sea ahora $\{\mathcal{T}_k\}_{k=1}^{\infty}$ una familia de mallas admisible de **forma regular**, sobre Ω , esto es: que existe una constante γ^* tal que

$$\sup_{k \in \mathcal{N}} \max_{T \in \mathcal{T}_k} \frac{h_T}{\rho_T} = \sup_{k \in \mathcal{N}} \gamma^*(\mathcal{T}) =: \gamma^* < \infty.$$

Si suponemos además que $h_{\mathcal{T}_k} \rightarrow 0$, entonces con la ecuación (1.11) es fácil ver que la sucesión de soluciones aproximadas $u_{\mathcal{T}_k}$ converge a la solución u en $H^1(\Omega)$ si $u \in H^{r+1}(\Omega)$. Más aún, el error tiende a cero como $h_{\mathcal{T}_k}^r$.

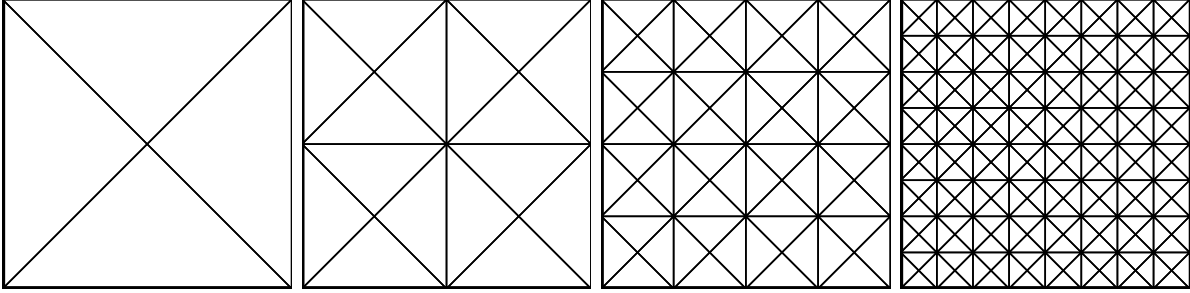


Figura 1.1: Mallas uniformes sobre el cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ para el ejemplo 1.

h	lineales	cuadráticos	cúbicos
1/4	3.93	6.89	4.66
1/8	0.55	1.80	3.08
1/16	1.05	2.02	2.79
1/32	1.02	2.00	3.00
1/64	1.01	2.00	3.00
1/128	1.00	2.00	2.99
1/256	1.00	2.00	

Cuadro 1.1: Órdenes de convergencia experimentales para la solución sobre mallas uniformes del ejemplo 1, donde la solución es suave (está en H^∞)

Para ilustrar este concepto, consideremos a continuación dos ejemplos numéricos sencillos en dimensión dos:

Ejemplo 1: Consideremos $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y la solución exacta $u(x, y) = e^{-20(x^2+y^2)}$, tomando f y u_0 apropiadas para que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.12)$$

Consideramos una sucesión de mallas uniformes como las de la figura 1.1. Resolviendo con elementos finitos de grado uno, dos y tres, se obtienen los errores y órdenes de convergencia experimental de la tabla 1.1, y son siempre aproximadamente h^r .

Ejemplo 2: En este ejemplo consideramos el dominio $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1) \times (-1, 0]$, con forma de “L” y la solución exacta dada en coordenadas polares (r, φ) por

$$u(r, \varphi) = r^{2/3} \text{sen}(2\varphi/3) - r^2/4.$$

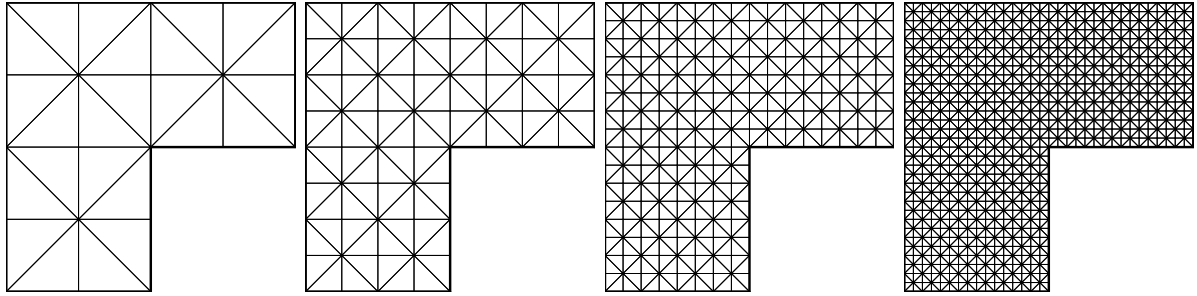


Figura 1.2: Mallas uniformes sobre el dominio con forma de “L” $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1) \times (-1, 0]$ para el ejemplo 2.

h	lineales	cuadráticos	cúbicos
1/4	1.14	9.64	9.89
1/8	0.74	0.67	0.67
1/16	0.68	0.67	0.67
1/32	0.66	0.67	0.67
1/64	0.66	0.67	0.67
1/128	0.66	0.67	0.67

Cuadro 1.2: Órdenes de convergencia experimentales para la solución sobre mallas uniformes del ejemplo 2, donde la solución tiene una singularidad en el origen (está en $H^{1+2/3}$).

Tomando $f \equiv 1$ en Ω y $u_0 = u$ en $\partial\Omega$, esta función u es solución de (1.12). Consideramos una sucesión de mallas uniformes como las de la figura 1.2. Resolviendo con elementos finitos de grado uno, dos y tres, se obtienen los errores y órdenes de convergencia experimental de la tabla 1.2.

Se observa que para este ejemplo, el orden de convergencia que resulta al utilizar una sucesión de mallas obtenidas por medio de refinamientos uniformes, es siempre aproximadamente $2/3$, aun cuando r crezca. Esto se debe a que la solución u no se encuentra en $H^{s+1}(\Omega)$ para ningún $s \geq 2/3$.

Otra manera de medir el orden de convergencia, que es la que más nos interesa en este trabajo, es en términos del número de elementos de las mallas. Cuando consideramos una sucesión de mallas *casi uniformes* donde el tamaño de todos los elementos de cada malla es comparable, es decir: existe c tal que

$$\max_{T \in \mathcal{T}_k} h_T = h_{\mathcal{T}_k} \leq c \min_{T \in \mathcal{T}_k} h_T, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

entonces $h_{\mathcal{T}_k}^d \#\mathcal{T}_k \leq C|\Omega|$, donde C es una constante que depende de la regularidad de la sucesión de mallas y de la constante c de la expresión anterior. Por lo tanto, si la solución u que se quiere aproximar pertenece a H^{1+r} (como en el ejemplo 1), el error se puede acotar por

$$\|u - u_{\mathcal{T}_k}\|_{\mathbb{V}} \leq C(\#\mathcal{T}_k)^{-r/d}.$$

Cuando la solución no tiene tal regularidad, y pertenece, digamos, a $H^{1+2/3}$, como la del ejemplo 2, entonces el error se puede acotar sólo por

$$\|u - u_{\mathcal{T}_k}\|_{\mathbb{V}} \leq C(\#\mathcal{T}_k)^{-2/(3d)}.$$

En los siguientes capítulos mostraremos cómo el refinamiento selectivo permite evitar esta pérdida de velocidad de aproximación, logrando en muchos casos una velocidad $(\#\mathcal{T}_k)^{-r/d}$ aún cuando la función presenta singularidades y pertenece a $H^{1+\epsilon}$ para $\epsilon > 0$ pequeño.

Al realizar refinamiento selectivo se desean tres propiedades:

- Que se mantenga la admisibilidad de las mallas, es decir, que no haya *nodos colgantes*.
- Que los elementos que se refinan mantengan la regularidad, de manera que la sucesión de mallas obtenidas resulte con una regularidad γ^* finita.
- Que los elementos adicionales a los *seleccionados para refinar* que se deban refinar para mantener la admisibilidad y la regularidad, no sean *demasiados*. Este concepto de *refinamiento extra* será clarificado en la próxima sección.

En la próxima sección presentaremos el llamado *refinamiento del vértice más nuevo*, que permite cumplir con estos requerimientos. Un resultado importante es el Teorema 1 que controla la *complejidad* de las mallas creadas, en términos de todos los elementos marcados en las iteraciones anteriores, dando una respuesta al tercer ítem. Este resultado es crucial para poder establecer los resultados de complejidad de los capítulos 2 y 4 que son las principales contribuciones de esta tesis.

Existen otras reglas de bisección, como la del *lado más largo*, pero no son tan fácilmente extendibles a dimensiones superiores a dos. Además, los resultados de complejidad

existentes que controlan el refinamiento extra existentes no son satisfactorios para el tipo de análisis que realizamos.

1.3. La regla de bisección del vértice nuevo

El primer algoritmo de bisección del vértice más nuevo fue introducido en 1991 por Bänsch [Bän91], donde se demuestra que si la malla inicial no tiene *ciclos*, entonces el algoritmo se detiene siempre en un número finito de pasos, pero no se demuestra ninguna cota para este número de pasos, o refinamientos extra. Más tarde, Kossaczky [Kos94] generaliza el algoritmo a dimensión tres, obteniendo resultados similares a los de Bänsch. Binev, Dahmen y DeVore [BDD04] demuestran una cota para la complejidad como la del Teorema 1 para el algoritmo de Bänsch, y finalmente Stevenson [Ste08] presenta una regla de bisección general para cualquier dimensión $d \geq 2$. Esta regla coincide con la de Bänsch y Kossaczky, salvo cambio de notación, y había sido introducida por Traxler [Tra97] y con diferente notación por Maubach [Mau95]. La novedad de Stevenson es que logra demostrar la cota de complejidad del Teorema 1 que, como ya dijimos, es crucial para estudiar los órdenes de convergencia en términos del número de elementos de las mallas, en lugar del parámetro clásico h .

A continuación introducimos el algoritmo de bisección siguiendo la presentación de Stevenson, culminando con el resultado de complejidad que acota el número de *refinamientos extra* para mantener admisibilidad y regularidad. Todos los detalles y demostraciones de las afirmaciones hechas en esta sección pueden encontrarse en [Ste08].

1.3.1. Bisección de un único simplicial

Sean $d, n \in \mathbb{N}$, con $2 \leq n \leq d$, un n -simplicial T en \mathbb{R}^d es la capsula convexa de $n + 1$ puntos $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ que no pertenecen a un mismo espacio afín $(n - 1)$ -dimensional. Identificaremos T con el conjunto de sus vértices $\{x_0, \dots, x_n\}$. Para $0 \leq k \leq d - 1$, un simplicial por $k + 1$ vértices de T se llamará hipercara de T . Para $k = n - 1$ la llamaremos hipercara verdadera, y para $k \leq n - 2$ la llamaremos hipercara de dimensión menor. Cuando $n = d$ los n -simpliciales o d -simpliciales se llamarán directamente *simpliciales*.

Correspondiente a cada simplicial $\{x_0, \dots, x_n\}$ distinguiremos entre $n(n+1)!$ simpliciales indexados, dados por todas las posibles secuencias ordenadas $(x_0, \dots, x_n)_\kappa$ y los tipos $\kappa \in \{0, \dots, n-1\}$. Dado un simplicial $T = (x_0, \dots, x_n)_\kappa$ sus hijos se definen como los simpliciales indexados:

$$\left(x_0, \frac{x_0 + x_n}{2}, x_1, \dots, x_\kappa, x_{\kappa+1}, \dots, x_{n-1}\right)_{(\kappa+1) \bmod n} \quad (1.13)$$

y

$$\left(x_n, \frac{x_0 + x_n}{2}, x_1, \dots, x_\kappa, x_{n-1}, \dots, x_{\kappa+1}\right)_{(\kappa+1) \bmod n} \quad (1.14)$$

donde las sucesiones $(x_{\kappa+1}, \dots, x_{n-1})$ y (x_1, \dots, x_κ) deben tomarse como vacías cuando $\kappa = n-1$ y $\kappa = 0$ respectivamente.

En palabras, los hijos se definen bisectando el lado $\overline{x_0x_n}$ de T , i.e., conectando su punto medio con los otros vértices x_1, \dots, x_{n-1} ; por un ordenamiento apropiado y por tener tipo $(\kappa+1) \bmod n$. Esta regla de bisección define una única forma de dividir un elemento en dos sub-elementos hijos, y será la única permitida en nuestros algoritmos constructivos.

Vale la pena observar que a cada simplicial indexado $T = (x_0, \dots, x_n)_\kappa$ le podemos hacer corresponder el simplicial:

$$T_R = (x_n, x_1, \dots, x_\kappa, x_{n-1}, \dots, x_{\kappa+1}, x_0)_\kappa, \quad (1.15)$$

que es el simplicial indexado que tiene los mismos hijos que T , y en este sentido es igual a T . Por lo tanto en realidad sólo distinguimos $\frac{1}{2}(n(n+1)!)$ simpliciales indexados.

El lado $\overline{x_0x_n}$ es llamado *lado de refinamiento* de T . En el caso $n=2$, si T es un elemento hijo de algún otro, el vértice opuesto al lado $\overline{x_0x_n}$ es el último vértice creado. Por esta razón el procedimiento descrito se conoce como *bisección del vértice más nuevo*, aunque sólo cuando $n=2$. Nosotros hemos decidido darle ese nombre para cualquier n para unificar y simplificar la nomenclatura.

Un simplicial indexado que se crea aplicando recursivamente ℓ bisecciones a T se llama *descendiente de nivel ℓ* de T . Se puede verificar fácilmente que el lado de refinamiento de un simplicial indexado de tipo 0 no se volverá a dividir hasta la creación de $n+1$ descendientes. Generalmente esto no es cierto para un simplicial indexado de tipo distinto de 0. A pesar de esto un lado nunca será dividido en dos niveles consecutivos.

1.3.2. Particiones Admisibles

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) un conjunto abierto. Una colección localmente finita \mathcal{T} de d -simpliciales esencialmente disjuntos dos a dos en \mathbb{R}^d se llama partición de Ω cuando $\bar{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}} T$. Usualmente se entiende que una partición \mathcal{T} es *admisibile* cuando la intersección de dos elementos distintos $T, T' \in \mathcal{T}$ es vacía o una hipercara (completa) de ambos simpliciales. En el caso en que Ω está simultáneamente a ambos lados de una parte $(d - 1)$ -dimensional de su frontera (dominio *slit*), esta condición es innecesariamente restrictiva. Por esto llamaremos a \mathcal{T} admisible si:

(C1) Para cualquier $T \in \mathcal{T}$, $\partial\Omega \cap T$ es una unión de hipercaras de T .

(C2) Si $x \in T \cap T'$ ($T, T' \in \mathcal{T}$) y para cualquier bola abierta $B \ni x$, cualesquiera $y \in T \cap B \cap \Omega$ e $y' \in T' \cap B \cap \Omega$ están conectados por una curva a través de $B \cap \Omega$, entonces pertenece a una hipercara conjunta de T y T' .

1.3.3. Particiones creadas por bisección

Dados dos simpliciales indexados vecinos $T = (x_0, \dots, x_n)_\kappa$, $T' = (x'_0, \dots, x'_n)_{\kappa'}$ diremos que son *vecinos reflejados* si la secuencia ordenada de vértices de T o de T_R coincide con la de T' en todas las posiciones menos una.

Definición 1. *Decimos que una malla inicial \mathcal{T}_0 está indexada apropiadamente si además de ser admisible satisface la siguiente condición:*

Si dos elementos indexados vecinos cualesquiera $T = (x_0, \dots, x_n)_\kappa$, $T' = (x'_0, \dots, x'_n)_{\kappa'}$ de \mathcal{T}_0 se tocan en el sentido de que si $\overline{x_0 x_n}$ o $\overline{x'_0 x'_n}$ está en $T \cap T'$, entonces T y T' son vecinos reflejados. En otro caso, el par de descendientes vecinos de T y T' son vecinos reflejados.

En dos dimensiones esto es equivalente a requerir que cada vez que un lado interior es un lado de refinamiento, es el lado de refinamiento común para los dos elementos adyacentes a ese lado, o es un lado en la frontera del dominio.

Observación 1. Una propiedad importante de la regla de bisección del vértice nuevo es que con esta regla, las mallas obtenidas con una secuencia arbitraria de refinamientos

selectivos tendrán constantes de regularidad acotadas uniformemente, que dependerán sólo de la malla inicial \mathcal{T}_0 y del indexado de la malla inicial.

El siguiente teorema fue probado para $d = 2$ en [BDD04] y para d arbitrario en [Ste08], y es crucial para controlar el refinamiento extra necesario para mantener mallas admisibles y de forma regular.

Teorema 1. *Sea $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0^c$ una malla inicial admisible de un dominio poligonal (poliédrico) Ω en \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^d), que está propiamente indexada. Si la sucesión $\{\mathcal{T}_\ell^c\}_{\ell \geq 1}$ se obtiene por sucesivos llamados a:*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\ell+1} &\leftarrow \text{refinar}(\mathcal{T}_\ell^c, \mathcal{M}_\ell), \\ \mathcal{T}_{\ell+1}^c &\leftarrow \text{completar}(\mathcal{T}_{\ell+1}),\end{aligned}$$

entonces para $k \geq 1$ tenemos que

$$\#\mathcal{T}_k^c - \#\mathcal{T}_0 \leq \mathcal{C} \left(\sum_{\ell=1}^k (\#\mathcal{T}_{\ell+1} - \#\mathcal{T}_\ell^c) \right) = \mathcal{C} \left(\sum_{\ell=1}^k \mathcal{M}_\ell \right),$$

donde \mathcal{C} es una constante que sólo depende de \mathcal{T}_0 .

El algoritmo hace uso de dos rutinas que necesitan una explicación más amplia. El primero,

$$\mathcal{T}_{\text{nuevo}} \leftarrow \text{refinar}(\mathcal{T}_{\text{viejo}}, \mathcal{M})$$

recibe una malla $\mathcal{T}_{\text{viejo}}$, usualmente admisible, y un conjunto \mathcal{M} de elementos *marcados* de $\mathcal{T}_{\text{viejo}}$. Retorna una nueva malla $\mathcal{T}_{\text{nuevo}}$ que se obtiene luego de dividir una vez los elementos marcados acorde a la regla de la bisección del vértice nuevo. La nueva malla no es necesariamente admisible.

La rutina,

$$\mathcal{T}^c \leftarrow \text{completar}(\mathcal{T})$$

recibe una malla \mathcal{T} que no es necesariamente admisible, y retorna una nueva malla \mathcal{T}^c que ha sido construida refinando la menor cantidad necesaria de elementos con la regla de la bisección del vértice nuevo.

El estudio de la complejidad de esta rutina resulta bastante difícil, y **no es cierto** que exista una constante \mathcal{C} tal que

$$\#\mathcal{T}_{\text{nuevo}}^c \leq \#\mathcal{T}_{\text{viejo}}^c + \mathcal{C}(\#\mathcal{T}_{\text{nuevo}} - \#\mathcal{T}_{\text{viejo}}^c).$$

El resultado de complejidad que vale—teniendo en cuenta los *refinamientos extras* realizados por el algoritmo de completación—es el Teorema 1, que es un poco más débil, pero fundamental y suficiente para los propósitos del estudio de la optimalidad de MEFA.

El resultado dice esencialmente que la cantidad de elementos de la última malla (\mathcal{T}_k) menos la cantidad de elementos de la malla inicial (\mathcal{T}_0) está acotado (salvo una constante fija) por la suma de todos los elementos marcados en total desde el paso 0 al paso $k - 1$, dado por $\sum_{\ell=1}^k \mathcal{M}_\ell$.

1.4. Clases de Aproximación

Consideremos una malla inicial \mathcal{T}_0 del dominio Ω , y consideremos las *mallas admisibles* obtenidas partiendo desde \mathcal{T}_0 con el procedimiento de bisección descrito en la sección anterior. Es decir, consideraremos las mallas \mathcal{T} que pueden obtenerse a partir de \mathcal{T}_0 con una secuencia finita de llamados a **refinar/completar**. Para cada malla \mathcal{T} consideraremos el espacio de elementos finitos de Lagrange

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} = \{v \in H^1(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}^r, \forall T \in \mathcal{T}\},$$

donde, para $r \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}^r denota el espacio de polinomios de grado $\leq r$.

Sea B_0 un espacio funcional normado (o casi-normado) tal que $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset B_0$. Definimos la cantidad llamada *mejor error de aproximación* a f por funciones de elementos finitos de grado $\leq r$ de complejidad N en B_0 como:

$$\sigma_N^r(u)_{B_0} = \min_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N} \inf_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \|u - v\|_{B_0},$$

donde $\mathbb{T}_N := \{\mathcal{T} \text{ admisible} : (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0) \leq N\}$ esto es, el mínimo sobre \mathcal{T} se toma sobre todas las mallas admisibles obtenidas con a lo sumo N bisecciones (notar que cada bisección de un elemento incrementa en uno el cardinal de la malla). En síntesis, $\sigma_N^r(u)_{B_0}$ es el ínfimo de todos los errores posibles con aproximaciones por funciones de

elementos finitos sobre mallas de *complejidad* N . Este conjunto de funciones no es un espacio vectorial (lineal), dado que en general, si tomamos dos de ellas correspondientes a diferentes mallas (de complejidad N), la suma de ellas será una función del espacio de elementos finitos correspondiente a una malla que se obtiene “superponiendo” ambas y tiene, por lo tanto, complejidad mayor (y a lo sumo $2N$). En este sentido, $\sigma_N^r(u)_{B_0}$ es la distancia entre u y un *espacio de aproximación no lineal*. La no linealidad de estos espacios de aproximación dan origen al nombre de *aproximación no lineal* y producen también mayores dificultades para el estudio teórico.

Definiremos ahora, para $s > 0$ las clases de aproximación [Osw94]:

$$\mathbb{A}_s^r(B_0) = \{v \in B_0 : \exists C \text{ tal que } \sigma_N^r(v)_{B_0} \leq CN^{-s}, \forall N \in \mathbb{N}\},$$

o, equivalentemente,

$$\mathbb{A}_s^r(B_0) = \{v \in B_0 : |v|_{\mathbb{A}_s^r(B_0)} < \infty\} \quad \text{con} \quad |v|_{\mathbb{A}_s^r(B_0)} := \sup_{N \in \mathbb{N}} N^s \sigma_N^r(v)_{B_0}.$$

A su vez esta definición es equivalente a decir que existe una constante C tal que para todo $\epsilon > 0$, existe una malla \mathcal{T} que satisface

$$\inf_{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \|v - v_{\mathcal{T}}\|_{B_0} \leq \epsilon \quad \text{y} \quad (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0) \leq C\epsilon^{-\frac{1}{s}},$$

y además $|v|_{\mathbb{A}_s^r(B_0)}$ será el ínfimo de todas las constantes C que satisfacen esta condición.

Esta escala de espacios puede aumentarse agregando un parámetro $0 < q < \infty$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{A}_{s,q}^p(B_0) = \{v \in B_0 : |v|_{\mathbb{A}_{s,q}^p(B_0)} < \infty\} \quad \text{con} \quad |v|_{\mathbb{A}_{s,q}^p(B_0)} := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} [\sigma_{2^n}^r(v)_{B_0} 2^{ns}]^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

La extensión obvia de esta definición al caso $q = \infty$ resulta $\mathbb{A}_{s,\infty}^r(B_0) = \mathbb{A}_s^r(B_0)$.

Vale la pena mencionar que a pesar de estar considerando el concepto de aproximación no lineal, las clases de funciones $\mathbb{A}_{s,q}^p(B_0)$ sí resultan espacios vectoriales (lineales), como consecuencia de que $\sigma_N^r(u+v)_{B_0} \leq \sigma_N^r(u)_{B_0} + \sigma_N^r(v)_{B_0}$.

Para ecuaciones elípticas de orden 2, usualmente se considera $B_0 = H^1(\Omega)$ y en este caso escribiremos $\mathbb{A}_{s,q}^r$ para denotar $\mathbb{A}_{s,q}^r(H^1(\Omega))$.

Aplicando la desigualdad (1.11) a una sucesión de mallas obtenidas al refinar uniformemente, y utilizando el hecho de que en este caso $\#\mathcal{T} \simeq \frac{1}{h^d}$, resulta claro que

$H^{1+r}(\Omega) \subset \mathbb{A}_{\frac{r}{d}}^r$. Si $\ell \leq r$, entonces $H^{1+r}(\Omega) \subset H^{1+\ell}(\Omega)$ y $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}^{\ell} \subset \mathbb{V}_{\mathcal{T}}^r$ y por lo tanto concluimos que también

$$H^{1+\ell}(\Omega) \subset \mathbb{A}_{\frac{\ell}{d}}^r, \quad \forall \ell \leq r.$$

Sin embargo, al usar adaptatividad, y construir mallas a través de refinamiento selectivo, se puede demostrar que ciertos espacios de Besov con regularidad $1 + r$, con integrabilidad menor a 2, y en algunos casos menor a 1, están contenidos en $\mathbb{A}_{\frac{r}{d}}^r$. Es decir, usando adaptatividad para funciones con menos regularidad (en un cierto sentido, ya que estos espacios de Besov contienen a los espacios H^{r+1}) se recupera la velocidad que se obtiene con refinamientos uniformes para funciones con más regularidad. Un resultado similar se puede demostrar para funciones con regularidad Sobolev $1 + r$ si se conocen más detalles sobre la forma de la función a aproximar, como por ejemplo, que las singularidades están localizadas en un número finito de puntos. Este es el contenido de los capítulos 4 y 2, respectivamente.

1.5. Adaptatividad

Los métodos adaptativos para problemas estacionarios usualmente consisten en lazos de la forma

$$\text{RESOLVER} \rightarrow \text{ESTIMAR} \rightarrow \text{MARCAR} \rightarrow \text{REFINAR}.$$

El módulo **RESOLVER** consiste en calcular la solución discreta del sistema lineal (1.7). El módulo **ESTIMAR** consiste en calcular los *estimadores a posteriori* del error, que son cantidades calculables en términos de la solución discreta ya obtenida y de los datos del problema, y usualmente se distribuyen en cantidades locales asignadas a cada elemento o a uniones de unos pocos elementos cercanos. El módulo **MARCAR** consiste en elegir algunos elementos con estimadores grandes para refinar, con la esperanza de que el refinamiento selectivo de ellos conduzca a un gran decrecimiento del error y un buen balance costo-beneficio. Existen varias estrategias de refinamiento, pero sólo para ilustrar una, mencionamos la de Dörfler: Si $\{\eta(T)\}_{T \in \mathcal{T}}$ son los estimadores de error asignados a cada elemento T de una malla \mathcal{T} , dado un parámetro $0 < \theta < 1$, se elige el conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$

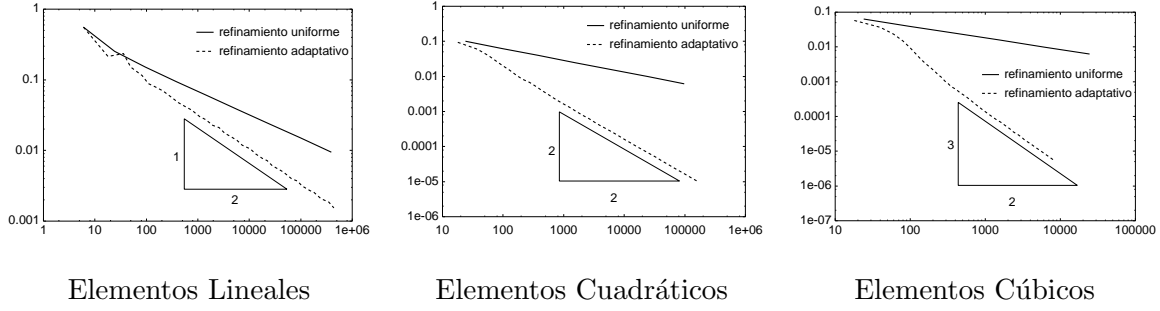


Figura 1.3: Decaimiento del error en términos del número de elementos de las mallas. Gráfico del error versus número de elementos en escala logarítmica en ambos ejes. La pendiente de las curvas corresponde al índice s en el decaimiento CN^{-s} . En todos los casos las líneas sólidas corresponden al refinamiento uniforme y las líneas de trazos al refinamiento adaptativo. Es de destacar la diferencia en orden de convergencia al aumentar el grado polinomial. Con el refinamiento uniforme se observa siempre un decaimiento como $N^{-2/6}$, en cambio con adaptatividad se observa $N^{-1/2}$, $N^{-2/2}$, $N^{-3/2}$ con elementos lineales, cuadráticos y cúbicos, respectivamente.

de elementos marcados de manera que se cumpla la siguiente condición

$$\sum_{T \in \mathcal{M}} \eta(T)^2 \geq \theta \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta(T)^2. \quad (1.16)$$

Es decir, el estimador asignado a la región $\cup_{T \in \mathcal{M}} T$ es más grande que un cierto porcentaje del error total. El módulo REFINAR consiste en aplicar las rutinas

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{nuevo}} &\leftarrow \text{refinar}(\mathcal{T}, \mathcal{M}), \\ \mathcal{T}_{\text{nuevo}}^c &\leftarrow \text{completar}(\mathcal{T}_{\text{nuevo}}), \end{aligned}$$

obteniendo la nueva malla $\mathcal{T}_{\text{nuevo}}^c$.

Aplicando adaptatividad al ejemplo 1 de la sección 1.2 se obtienen los mismos resultados que para mallas refinadas uniformemente, dado que la solución está en $H^\infty(\Omega)$.

Aplicando adaptatividad al ejemplo 2 los resultados son realmente sorprendentes. En la figura 1.3 observamos el decaimiento del error como función del cardinal de las triangulaciones cuando se utilizan elementos de grado $r = 1, 2, 3$. En todos los casos se observa que la adaptatividad produce mallas que cumplen

$$\|u - u_{\mathcal{T}_k}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\#\mathcal{T}_k)^{-r/d},$$

y por lo tanto la solución exacta $u(r, \varphi) = r^{2/3} \text{sen}(2\varphi/3) - r^2/4$ parece pertenecer a $\mathbb{A}_{\frac{r}{d}}^r$, para todo $r \in \mathbb{N}$ a pesar de no pertenecer a ningún espacio de Sobolev $H^{1+s}(\Omega)$ para $s > 2/3$. Esto se observa en numerosos ejemplos de ecuaciones diferenciales con soluciones que tienen poca regularidad Sobolev, y es lo que motivó el estudio teórico de la optimalidad de los métodos de elementos finitos adaptativos, junto con la *caracterización* de las funciones que pueden aproximarse con diferentes velocidades medidas en términos de complejidad de las mallas.

Resultados recientes de Stevenson para la ecuación de Poisson [Ste07], y Cascón, Kreuzer, Nochetto y Siebert para ecuaciones más generales [CKNS08], prueban que para un Método de Elementos Finitos Adaptativo estándar bajo condiciones débiles de aproximabilidad para la función fuente vale que:

$$u \in \mathbb{A}_s^r \implies \|u - u_{\mathcal{T}_k}\|_{\mathbb{V}} \leq C (\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0)^{-s}$$

donde $\{\mathcal{T}_k\}_{k=0}^{\infty}$ es la sucesión de mallas obtenidas al aplicar el método adaptativo. Es decir, siempre que la solución exacta u pueda aproximarse idealmente con un error que tiende a cero como $(\#\mathcal{T})^{-s}$, el método de elementos finitos adaptativo genera una sucesión de mallas con el mismo orden de decaimiento del error. Este resultado se prueba para la estrategia de marcado de Dörfler (1.16), cuando el parámetro θ es suficientemente pequeño.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar cuándo $u \in \mathbb{A}_s^r$, con especial énfasis en el caso $s = \frac{r}{d}$, que es el denominado orden óptimo. En el próximo capítulo demostramos que si u es la suma de una función regular más funciones con singularidades localizadas del tipo $\text{dist}(x, x_0)^\gamma$ con $\gamma > 0$, entonces $u \in \mathbb{A}_{r/d}^r$. Esta descomposición es muy usual en resultados de regularidad de ecuaciones diferenciales, y es por eso que el resultado obtenido es inmediatamente aplicable a casos particulares. Sin embargo, este resultado está muy lejos de ser una caracterización de las clases $\mathbb{A}_{r/d}^r$. En el capítulo 4 mostraremos una casi-caracterización de estos espacios en términos de la regularidad Besov, y por eso en el capítulo 3 presentaremos estos espacios y mostraremos algunos resultados de aproximación local que serán necesarios para la construcción de las aproximaciones óptimas.

Capítulo 2

Una condición suficiente para obtener velocidad óptima

En este capítulo se probará la convergencia con velocidad óptima para una cierta clase de funciones, aquellas que son suma de una función regular más funciones con singularidades puntuales. En otras palabras, se demostrará que dichas funciones pertenecen a los espacios de aproximación $\mathbb{A}_{\frac{r}{d}}^r$. En la última sección de este capítulo se presentarán dos aplicaciones de este resultado a ecuaciones diferenciales sobre polígonos.

2.1. Resultado Principal del Capítulo

De ahora en adelante, para cualquier malla admisible \mathcal{T} del dominio Ω , denotaremos por $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ al espacio de elementos finitos de polinomios continuos a trozos de grado $\leq r$, donde r es un entero positivo fijo, es decir

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}^r, \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

El siguiente es el resultado principal del capítulo, que dice que una gran familia de funciones, como la obtenida cuando se resuelven EPD elípticas en dominios poligonales, pertenece a $\mathbb{A}_{\frac{r}{d}}^r$.

Teorema 2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio poligonal ($d = 2$) o poliedral ($d = 3$), no necesari-*

amente Lipschitz, \mathcal{T}_0 una malla inicial de Ω y supongamos que

$$u = \sum_{i=0}^N u_i \quad (2.1)$$

donde:

- $u_0 \in H^1(\Omega)$, con $u_0|_T \in H^{r+1}(T)$, para todo $T \in \mathcal{T}_0$;
- para $i = 1, 2, \dots, N$, u_i puede expresarse en coordenadas polares alrededor de x_i como

$$u_i = c_i (\ln(\rho_i))^{k_i} \rho_i^{\gamma_i} g_i(\vec{\theta}_i) \chi_i, \quad (2.2)$$

donde:

1. $\{x_i\}_{i=1}^N =: \mathcal{N}$ es un conjunto de puntos en $\bar{\Omega}$, que son vértices de \mathcal{T}_0 ;
2. c_i son constantes reales y k_i son enteros no-negativos.
3. ρ_i denota la distancia a x_i , y:
 - $\vec{\theta}_i = \theta_i \in [0, 2\pi)$ es la coordenada angular de x con respecto a x_i y una semirrecta comenzando en x_i , cuando $d = 2$;
 - $\vec{\theta}_i = (\theta_i, \phi_i) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$, donde ϕ_i es la coordenada angular de x con respecto a x_i y una semirrecta R comenzando en x_i , y siendo P el plano ortogonal a R que contiene a x_i , θ_i es la coordenada angular de la proyección de x en el plano y una semirrecta S que comienza en x_i contenida en P , cuando $d = 3$.
4. γ_i son constantes positivas;
5. las funciones g_i satisfacen las siguientes condiciones dependiendo de la dimensión d :
 - $g_i \in W_\infty^1(0, 2\pi)$, satisface la condición de periodicidad $g_i(0) = g_i(2\pi)$ y es W_∞^{r+1} a trozos en el siguiente sentido: existe una partición \mathfrak{P}_i de $[0, 2\pi]$ en segmentos tal que $g_i|_S \in W_\infty^{r+1}(S)$ para todo $S \in \mathfrak{P}_i$, cuando $d = 2$;
 - $g_i \in W_\infty^1((0, 2\pi) \times (0, \pi))$, satisface las condiciones de periodicidad $g_i(0, \phi_i) = g_i(2\pi, \phi_i)$, $0 < \phi_i < \pi$, y $g_i(0, 0) = g_i(\theta_i, 0)$, $g_i(0, 2\pi) = g_i(\theta_i, 2\pi)$, $0 < \theta_i <$

2π , y es W_∞^{r+1} a trozos en el siguiente sentido: existe una partición \mathfrak{P}_i de $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$ en triángulos tal que $g_i|_S \in W_\infty^{r+1}(S)$ para todo $S \in \mathfrak{P}_i$, cuando $d = 3$;

6. χ_i son funciones de corte $C^\infty(\overline{\Omega})$;

7. los saltos de ∇u_i (si existen) están alineados con los lados (o caras) de la malla inicial \mathcal{T}_0 .

Entonces, para una tolerancia dada $\varepsilon > 0$, existe una malla conforme \mathcal{T} , obtenida por bisección del vértice nuevo, partiendo de \mathcal{T}_0 tal que:

$$\inf_{u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{1,\Omega} \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0 \leq \mathbf{C}_{u,\mathcal{T}_0} \frac{1}{\varepsilon^{d/r}}, \quad (2.3)$$

donde $\mathbf{C}_{u,\mathcal{T}_0}$ depende de todos los parámetros que figuran en la definición de la parte singular $\sum_{i=1}^N u_i$ en (2.2), de \mathcal{T}_0 , y de u a través de la seminorma quebrada $|u_0|_{H_{\mathcal{T}_0}^{r+1}(\Omega)} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_0} \|D^{r+1}u_0\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2}$, pero no de ε . Por lo tanto $u \in \mathbb{A}_{r/d}^r$.

Es importante mencionar que, si u satisface las condiciones del teorema, entonces sólo podemos asegurar que $u \in H^{1+\epsilon}(\Omega)$ para todo $0 < \epsilon < \min_{1 \leq i \leq N} \gamma_i$. Refinamientos globales uniformes sólo nos permitirán concluir que $u \in \mathbb{A}_{\epsilon/d}^r$, pero ϵ puede ser muy pequeño, y este decaimiento es muy pesimista con respecto al que puede ser obtenido con adaptatividad.

Observación 2. Con el objetivo de clarificar las hipótesis del teorema, y enunciar claramente algunas desigualdades que utilizaremos en la demostración, observemos que implican lo siguiente:

- Si $\gamma = \frac{\min_i \gamma_i}{2}$, es posible controlar el término singular por medio de la siguiente cota,

$$C\rho_i^\gamma > \ln(\rho_i)^{k_i} \rho_i^{\gamma_i}. \quad (2.4)$$

obteniendo a su vez que para cada término singular u_i , $i = 1, 2, \dots, N$, existe una constante C , tal que

$$|u_i| \leq C\rho_i^\gamma, \quad |\nabla u_i| \leq C\rho_i^{\gamma-1}, \quad \text{y} \quad |D^{r+1}u_i| \leq C\rho_i^{\gamma-r-1}. \quad (2.5)$$

La última desigualdad vale sólo en el interior de los elementos de \mathcal{T}_0 , y por lo tanto también en el interior de cualquier elemento de cualquier refinamiento de \mathcal{T}_0 . La constante C depende de c_i, k_i, γ_i , la W_∞^{r+1} -norma de χ_i , la W_∞^1 -norma de g_i , y la W_∞^{r+1} -norma a trozos de g_i , esto es, de la $W_\infty^{r+1}(S)$ -norma de g_i , para todo $S \in \mathfrak{P}_i$.

- El factor $\frac{1}{2}$ en la definición de γ se impuso para controlar el término logarítmico. Si todos los $k_i = 0, i = 1, \dots, N$, entonces γ puede ser elegida igual a $\min_i \gamma_i$, y la misma cota vale.
- si \mathcal{T} es cualquier refinamiento de \mathcal{T}_0 , y $T \in \mathcal{T}$ con $T \cap \mathcal{N} = \emptyset$ entonces $u_i|_T \in H^{r+1}(T), i = 0, 1, \dots, N$;
- como $r \geq 1$, y $d \leq 3$, el teorema de inmersión de Sobolev y el hecho que $\gamma_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$ implica que cada componente $u_i, i = 0, \dots, N$, es continua en $\bar{\Omega}$, y consecuentemente también u es continua;

Estas consecuencias de las condiciones son los ingredientes principales que usaremos en la demostración de los resultados del capítulo.

Notación 1. De ahora en más, la letra C indicará una constante, no siempre igual, dependiente de la función dada u a través de las condiciones del Teorema 2, de la $H^1(\Omega)$ -norma de u_0 , la seminorma quebrada $|u_0|_{H_{\mathcal{T}_0}^{r+1}(\Omega)} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_0} \|D^{r+1}u_0\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2}$, y los parámetros y las funciones que definen los términos singulares $u_i, i = 1, 2, \dots, N$ de u como en el primer ítem de la observación previa. Reservaremos la notación $a \lesssim b$ para indicar $a \leq cb$ con una constante c dependiente sólo de la regularidad de la malla, o de la geometría del dominio, $a \simeq b$ indicará que $a \lesssim b$ y $b \lesssim a$.

De ahora en más supondremos que u cumple las condiciones del Teorema 2 y presentaremos un algoritmo para construir vía bisección del vértice nuevo una malla que satisfaga todas las propiedades mencionadas en el teorema.

2.2. Construcción de la Malla Óptima. Heurística

Antes de introducir el algoritmo presentaremos una idea heurística con las propiedades ideales que debería tener la malla óptima. Esto motivará la definición precisa del algo-

ritmo, que es más técnica, y que permite obtener una *equidistribución* del error con complejidad controlada.

Todo en esta sección será heurístico, y se presenta aquí—siguiendo argumentos inicialmente presentados en [Gri85, NhL03, BAG⁺96]— con el objetivo de motivar las propiedades que la malla óptima debería satisfacer. La demostración precisa y rigurosa será dada en las secciones siguientes, luego de presentar el algoritmo para construir la malla.

Con el objetivo de introducir la idea básica consideremos el caso más simple de una función u escrita en coordenadas polares como $u = \rho^\gamma \sin(\gamma\theta)$ en un dominio bidimensional con una esquina reentrante de ángulo interior π/γ en el origen. Supongamos que aproximamos u con elementos finitos lineales a trozos ($r = 1$) y continuos en una malla \mathcal{T} . La seminorma $|u - I_{\mathcal{T}}u|_{1,T}$ del error entre u y su interpolante de Lagrange $I_{\mathcal{T}}u$ en cada elemento esta acotado por $h\|D^2u\|_{L^2(T)}$ si $0 \notin T$ y por $\|Du\|_{L^2(T)}$ si $0 \in T$. Estas cantidades (al cuadrado) también satisfacen lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_T^2 \|D^2u\|_{L^2(T)}^2 &\cong h_T^2 \rho_T^{2(\gamma-2)} |T| \cong h_T^4 \rho_T^{2(\gamma-2)}, & \text{si } 0 \notin T, \\ \|Du\|_{L^2(T)}^2 &\cong \int_0^{h_T} \rho^{2(\gamma-1)} \rho d\rho \cong h_T^{2\gamma}, & \text{si } 0 \in T, \end{aligned}$$

donde ρ_T denota la distancia de T al origen y $h_T := |T|^{1/2} \cong \text{diam}(T)$. En busca de obtener la equidistribución de las cotas locales del error requeriremos para la malla \mathcal{T} que, dado un parámetro $h > 0$, los elementos satisfagan

$$h_T^4 \rho_T^{2(\gamma-2)} \cong h^{2\gamma}, \quad \text{si } 0 \notin T, \quad \text{y} \quad h_T \cong h, \quad \text{si } 0 \in T.$$

Supongamos por ahora que este objetivo se puede conseguir. Más precisamente, que podemos clasificar los elementos en anillos a distancia diádica del origen, definiendo

$$D_k = \{T \in \mathcal{T} : 2^{-k-1} \leq \rho_T < 2^{-k}\},$$

para $k \in \mathbb{N}$, $k < K := \lfloor \log_2(1/h) \rfloor$, y $D_K = \{T \in \mathcal{T} : \rho_T < 2^{-K}\}$.

Luego, los elementos $T \in D_k$, tienen tamaño $|T| = h_T^2 \cong h^\gamma \rho_T^{-(\gamma-2)} \cong h^\gamma 2^{k(\gamma-2)}$, y de aquí que $\#D_k \cong \frac{2^{-2k}}{h^\gamma 2^{k(\gamma-2)}} = h^{-\gamma} 2^{-k\gamma}$ lo que implica que

$$\#\mathcal{T} \cong \sum_{k \leq K} \#D_k \cong h^{-\gamma} \sum_k 2^{-k\gamma} \cong h^{-\gamma}.$$

Además, el error satisface

$$|u - u_h|_{1,\Omega}^2 \cong \#\mathcal{T} h^{2\gamma} \cong h^{-\gamma} h^{2\gamma} = h^\gamma \cong (\#\mathcal{T})^{-1}.$$

Y esto implica finalmente que $|u - u_h|_{1,\Omega} \lesssim (\#\mathcal{T})^{-1/2}$, y por ello $u \in \mathbb{A}_{1/2}^1$.

En el caso $d = 3$ si u tiene singularidades del tipo ρ^γ como en el ejemplo anterior, la cota $|u - u_h|_{1,\Omega} \lesssim (\#\mathcal{T})^{-1/3}$, se obtiene si

$$h_T^5 \rho_T^{2(\gamma-2)} \cong h^{2\gamma+1}, \quad \text{si } 0 \notin T, \quad \text{y} \quad h_T \cong h, \quad \text{si } 0 \in T.$$

Estas condiciones de graduación de malla coinciden con las presentadas en [WSA96, Sec. 3.1] reemplazando h por h^μ , con $\mu = \frac{\gamma}{2}$ si $d = 2$ y $\mu = \frac{2\gamma+1}{5}$ si $d = 3$.

2.3. Algoritmo para Construir la Malla Óptima

En la sección anterior consideramos un caso muy particular, y además supusimos que podíamos construir una malla admisible, a partir de \mathcal{T}_0 , con una graduación determinada. En esta sección introduciremos el algoritmo que obtendrá, usando bisección del vértice nuevo, una malla con la graduación precisa expuesta en la sección previa, generalizado a polinomios de grado r .

De ahora en más usaremos la notación

$$\rho_X = \min_{x_i \in \mathcal{N}} \text{dist}(x_i, X)$$

definida para X compacto (típicamente X será un simplicial T o un punto x), donde \mathcal{N} denota el conjunto finito de puntos donde se localizan las singularidades (como en las hipótesis del Teorema 2).

Elegimos y fijamos $\gamma = \frac{\min_i \gamma_i}{2}$. Esta elección nos permite acotar los términos singulares como en (2.5).

Sea \mathcal{T}_0 la malla inicial dada y $\delta > 0$ un parámetro pequeño tal que $\#\mathcal{T}_0 \leq \delta^{-d}$. Luego δ será elegido de forma tal que $\delta^r \approx \varepsilon$, donde ε es el error a ser obtenido entre u y $u_{\mathcal{T}}$, una aproximación discreta a u en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, y \mathcal{T} la malla generada por el algoritmo (ver la demostración del Teorema 2 en la sección 2.5.3). Tomemos $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{-\frac{(K+1)(2\gamma+d-2)}{2r+d}} \leq \delta < 2^{-\frac{K(2\gamma+d-2)}{2r+d}}. \quad (2.6)$$

Denotaremos para todo elemento T su tamaño por $h_T = |T|^{1/d}$, el algoritmo constructivo se lee:

```

 $\mathcal{T}_{0,0}^c \leftarrow \mathcal{T}_0$ 
 $j = 0$ 
% refinamiento inicial (global) para controlar el error de  $u_0$ 
% PRIMER LOOP
hacer
   $\mathcal{M}_{0,j} = \{T \in \mathcal{T}_{0,j}^c : h_T > \delta\}$ 
   $\mathcal{T}_{0,j+1} \leftarrow \text{refinar}(\mathcal{T}_{0,j}^c, \mathcal{M}_{0,j})$ 
   $\mathcal{T}_{0,j+1}^c \leftarrow \text{completar}(\mathcal{T}_{0,j+1})$ 
   $j \leftarrow j + 1$ 
hasta que  $\mathcal{M}_{0,j-1} = \emptyset$ 
 $J = j$ 
 $\mathcal{T}_1^c \leftarrow \mathcal{T}_{0,j}^c$ 
 $\ell = 1$ 
% refinamiento selectivo acorde a la distancia a las singularidades
% SEGUNDO LOOP
mientras ( $\ell < d(K + 1)$ )
   $\Omega_\ell = \bigcup \{T \mid T \in \mathcal{T}_\ell^c \wedge \rho_T \leq 2^{-\frac{\ell}{d}}\}$ 
   $\mathcal{M}_\ell = \{T \subset \Omega_\ell : h_T > \delta 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{d(2r+d)}}\}$ 
   $\mathcal{T}_{\ell+1} \leftarrow \text{refinar}(\mathcal{T}_\ell^c, \mathcal{M}_\ell)$ 
   $\mathcal{T}_{\ell+1}^c \leftarrow \text{completar}(\mathcal{T}_{\ell+1})$ 
   $\ell \leftarrow \ell + 1$ 
fin
 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d(K+1)}^c$ 

```

El algoritmo hace uso de las rutinas **refinar** y **completar** descritas en la sección 1.3 y como consecuencia del Teorema 1 tenemos que si $\mathcal{T}_{0,j}$, $\mathcal{T}_{0,j}^c$, \mathcal{T}_ℓ , \mathcal{T}_ℓ^c son las mallas obtenidas

por el algoritmo valdrá que

$$\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0 \leq \mathcal{C} \left(\sum_{\ell=1}^{d(K+1)-1} (\#\mathcal{T}_{\ell+1} - \#\mathcal{T}_{\ell}^c) + \sum_{j=0}^{J-1} (\#\mathcal{T}_{0,j+1} - \#\mathcal{T}_{0,j}^c) \right). \quad (2.7)$$

Observación 3. Antes de proceder con la demostración del resultado, vale la pena observar lo siguiente:

- La idea del algoritmo es obtener la equidistribución del error siguiendo la heurística expuesta en la sección previa. Puesto que el refinamiento es mayor cerca de los puntos singulares, este enfoque considera una sucesión de regiones Ω_{ℓ} alrededor de ellos con decrecimiento geométrico del radio dado por $2^{-\frac{\ell}{d}}$. El denominador d en el exponente se relaciona con el hecho de que en `refinar` sólo hacemos *una* bisección a los elementos marcados y es necesario refinar d veces para reducir h_T a la mitad.
- El algoritmo no tiene en cuenta los diferentes tamaños de las potencias γ_i , sólo observa el peor escenario posible tomando un valor unificado $\gamma = \frac{\min_i \gamma_i}{2}$. Como veremos más adelante, la propiedad $\gamma > 0$ es la única que se usa en la demostración. De la misma manera, la distancia a los puntos singulares x_i es unificada tomando la menor distancia simbolizada por ρ_T . Puede parecer que la simplificación inducida por esta *unificación* nos llevara a obtener mallas sub-óptimas, y es cierto que la constante $\mathbf{C}_{u,\mathcal{T}_0}$ en (2.3) es quizás más grande con este enfoque, pero este es un enfoque a priori donde queremos mostrar la *pertenencia* de ciertas funciones a los espacios $\mathbb{A}_{r/d}^r$, sin preocuparnos por el tamaño de su norma.
- Si se desea una construcción eficiente de la malla, el algoritmo se puede mejorar marcando separadamente acorde a las diferentes fuerzas de las singularidades. Esto nos permitiría obtener una mejor constante $\mathbf{C}_{u,\mathcal{T}_0}$, pero el resultado teórico subyacente será el mismo. Se presenta este enfoque unificado para facilitar la exposición.

2.4. Propiedades del Algoritmo y de las Mallas Resultantes

En esta sección acotaremos mediante una serie de lemas la complejidad de las mallas resultantes $\mathcal{T}_{d(K+1)}^c$, y en la siguiente sección relacionaremos esta complejidad con el error de la mejor aproximación a u mediante funciones de elementos finitos sobre $\mathcal{T}_{d(K+1)}^c$.

El siguiente lema se relaciona con la finalización del primer lazo del algoritmo en un número finito de pasos, y con el control del número de elementos adicionados. La finalización del segundo lazo es directa, puesto que se puede reescribir fácilmente como un lazo *for*.

Lema 3. *El primer lazo del algoritmo finaliza después de J iteraciones, con $J \leq \log_2 \left(\frac{\max_{T \in \mathcal{T}_0} |T|}{\delta^d} \right) + 1$ y existe una constante $\mathbb{C}_1 = 2|\Omega|$ tal que:*

$$\sum_{j=0}^{J-1} (\#\mathcal{T}_{0,j+1} - \#\mathcal{T}_{0,j}^c) \leq \mathbb{C}_1 \delta^{-d}. \quad (2.8)$$

Esto implica que para todo $T \in \mathcal{T}_1^c = \mathcal{T}_{0,J}^c$, $|T| < \delta^d$.

Demostración. Observemos primero que si dividimos un elemento $T \in \mathcal{T}_0$, J veces con $J \geq \log_2 \left(\frac{\max_{T \in \mathcal{T}_0} |T|}{\delta^d} \right) + 1$, entonces la medida de los sub-elementos resultantes será estrictamente menor que δ^d , y el paso de marcado no marcará más. Esto demuestra la primera y la última parte del enunciado.

Con el objetivo de demostrar la cota (2.8) definimos, para $i \geq 0$

$$\mathcal{F}_i = \left\{ T \mid T \in \bigcup_k \mathcal{T}_{0,k}^c \wedge 2^i \delta^d \leq |T| < 2^{i+1} \delta^d \right\}.$$

Es fácil ver que a pesar de que \mathcal{F}_i contiene elementos pertenecientes a diferentes mallas, estos no se solapan, y por lo tanto:

$$|\Omega| \geq \sum_{T \in \mathcal{F}_i} |T| \geq \sum_{T \in \mathcal{F}_i} \delta^d 2^i = \delta^d 2^i (\#\mathcal{F}_i),$$

lo que implica que $\#\mathcal{F}_i \leq |\Omega| \delta^{-d} 2^{-i}$.

Ahora, aplicando estas estimaciones, y usando que

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i = \left\{ T \mid T \in \bigcup_{k=0}^J \mathcal{T}_{0,k} \wedge |T| \geq \delta^d \right\} = \bigcup_{j=0}^{J-1} \mathcal{M}_{0,j},$$

obtenemos que

$$\sum_{j=0}^{J-1} (\#\mathcal{T}_{0,j+1} - \#\mathcal{T}_{0,j}^c) = \sum_{j=0}^{J-1} \#\mathcal{M}_{0,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \#\mathcal{F}_i \leq 2|\Omega|\delta^{-d},$$

lo que concluye la demostración del lema. \square

Observación 4. Esta demostración es un poco complicada dada la forma en que el algoritmo se propone tener en cuenta cualquier graduación previa de la malla. Observemos que en el primer lazo no refinamos todos los elementos sino sólo aquellos que son más grandes que la tolerancia δ , en vez de hacer directamente refinamientos uniformes. Si hiciéramos esto último la demostración sería más simple, pero el número de elementos en \mathcal{T}_1^c podría ser innecesariamente grande.

El siguiente lema es tan sólo una observación del hecho que si un punto z es un vértice de una malla regular, entonces la distancia de un elemento a z es mayor o igual (salvo constantes) que el diámetro de dicho elemento, excepto en el caso en que la distancia sea cero. Esto significa que el diámetro de los elementos puede crecer a lo sumo linealmente con la distancia a un vértice.

Lema 4. *Sea \mathcal{T} una malla regular y z un vértice, entonces $\forall T \in \mathcal{T}$ con $\text{dist}(z, T) \neq 0$ tenemos que $|T| \lesssim \text{dist}(z, T)^d$, o $h_T \lesssim \text{dist}(z, T)$.*

Este resultado puede resultar familiar, pero no es completamente obvio. Un resultado más fuerte fue probado en [NPV91b, NPV91a, Lemma 5.1], pero decidimos incluir una demostración con el objetivo de clarificar.

Demostración. Sea T un elemento de \mathcal{T} y definamos $\omega_T = \bigcup \{\bar{T} \mid \bar{T} \in \mathcal{T} \wedge T \cap \bar{T} \neq \emptyset\}$. Si $z \notin \omega_T$ entonces por regularidad de la malla, $\text{dist}(z, T) \geq ch_T$. Si $z \in \omega_T \setminus T$, entonces z es un vértice de un elemento vecino T' y por lo tanto $\text{dist}(z, T) \approx h_{T'} \approx h_T$. \square

El siguiente resultado dice que el algoritmo propuesto logra efectivamente la graduación deseada.

Lema 5. *Sea $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d(K+1)}^c$, entonces para $0 \leq \ell \leq d(K+1)$ se cumple que:*

$$T \in \mathcal{T} \quad \text{y} \quad \rho_T < 2^{-\frac{\ell}{d}} \quad \implies \quad |T| < \delta^d 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{2r+d}}.$$

Demostración. Primero afirmamos que para cada $0 \leq \ell < d(K + 1)$, vale lo siguiente para las mallas intermedias $\mathcal{T}_{\ell+1}$:

$$T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^c \quad \text{y} \quad \rho_T < 2^{-\frac{\ell}{d}} \quad \implies \quad |T| < \delta^d 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{2r+d}}. \quad (2.9)$$

Probaremos esto por inducción en ℓ : Por el Lema 3 vale para $\ell = 0$. Antes de proceder, observemos que: si $T' \in \mathcal{T}_\ell^c$ y $T \in \mathcal{T}_k^c$ con $k > \ell$:

$$T \subset T' \quad \implies \quad \rho_T \geq \rho_{T'}. \quad (2.10)$$

Supongamos ahora que (2.9) vale para ℓ y probémoslo para $\ell + 1$. Si $T \in \mathcal{T}_{\ell+2}^c$ y $\rho_T < 2^{-\frac{\ell+1}{d}}$, existe $T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^c$ tal que $T \subset T'$, con $\rho_{T'} < 2^{-\frac{\ell}{d}}$, y por la hipótesis inductiva $|T'| < \delta^d 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{2r+d}}$. Ahora, si ya vale $|T'| < \delta^d 2^{\frac{2(\ell+1)(\gamma-r-1)}{2r+d}}$ entonces los resultados valen puesto que $|T| \leq |T'|$. En otro caso, $T' \in \mathcal{M}_{\ell+1}$ y tenemos que

$$|T| \leq \frac{1}{2}|T'| < \frac{\delta^d 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{2r+d}}}{2} < \delta^d 2^{\frac{2(\ell+1)(\gamma-r-1)}{2r+d}},$$

puesto que $\gamma > 0$ y $d \geq 2$. Por lo tanto (2.9) está probada para $\ell + 1$.

Procederemos a demostrar la afirmación inicial de la demostración del lema: Sea $T \in \mathcal{T}$ tal que $\rho_T < 2^{-\frac{\ell}{d}}$, entonces existe $T' \supset T$, $T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^c$, y entonces por (2.10), $\rho_{T'} < 2^{-\frac{\ell}{d}}$, y por (2.9), $|T| \leq |T'| < \delta^d 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{2r+d}}$. \square

El resultado del lema previo podría haber sido logrado trivialmente por medio de refinamientos uniformes, pero esto habría destruido la complejidad de la malla. El próximo lema muestra que con el algoritmo propuesto, el número de elementos marcados en cada iteración está acotado razonablemente, de forma tal que la complejidad total de la malla final queda controlada.

Lema 6. *Existe una constante \mathbb{C}_2 , que depende sólo de la regularidad de la malla, tal que para $1 \leq \ell < d(K + 1)$:*

$$\#\mathcal{M}_\ell = \#\mathcal{T}_{\ell+1} - \#\mathcal{T}_\ell^c \leq \mathbb{C}_2 \delta^{-d} 2^{-\frac{\ell(2\gamma+d-2)}{2r+d}}. \quad (2.11)$$

Demostración. Recordemos que en el algoritmo definimos $\Omega_\ell = \bigcup\{T \mid T \in \mathcal{T}_\ell^c \wedge \rho_T \leq 2^{-\frac{\ell}{d}}\}$, y como $\mathcal{T}_{\ell+1}$ se obtiene de \mathcal{T}_ℓ^c por un solo refinamiento de algunos elementos $T \subset \Omega_\ell$,

tenemos que $\Omega_\ell = \bigcup\{T \mid T \in \mathcal{T}_{\ell+1} : T \subset \Omega_\ell\}$, por lo que

$$|\Omega_\ell| = \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}, T \subset \Omega_\ell} h_T^d = \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1} \setminus \mathcal{T}_\ell^c} h_T^d + \sum_{\substack{T \in \mathcal{T}_{\ell+1} \cap \mathcal{T}_\ell^c \\ T \subset \Omega_\ell}} h_T^d \geq \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1} \setminus \mathcal{T}_\ell^c} h_T^d.$$

Pero si $T \in \mathcal{T}_{\ell+1} \setminus \mathcal{T}_\ell^c$, entonces T es la mitad de un elemento $T' \in \mathcal{M}_\ell$, y por la definición de \mathcal{M}_ℓ en el algoritmo,

$$2h_T^d = h_{T'}^d \geq \delta^d 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{2r+d}},$$

lo que entonces implica que

$$|\Omega_\ell| \geq \frac{\delta^d 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{2r+d}}}{2} (\#\mathcal{T}_{\ell+1} - \#\mathcal{T}_\ell^c) = \frac{\delta^d 2^{-\ell} 2^{\frac{\ell(2\gamma+d-2)}{2r+d}}}{2} (\#\mathcal{T}_{\ell+1} - \#\mathcal{T}_\ell^c).$$

Por el Lema 4 tenemos que $|\Omega_\ell| \leq \mathbb{C}2^{-\ell}$ y entonces:

$$\#\mathcal{T}_{\ell+1} - \#\mathcal{T}_\ell^c \leq 2|\Omega_\ell| 2^\ell \delta^{-d} 2^{-\frac{\ell(2\gamma+d-2)}{2r+d}} \leq \mathbb{C}_2 \delta^{-d} 2^{-\frac{\ell(2\gamma+d-2)}{2r+d}},$$

y el lema está probado. \square

El próximo lema hace uso del resultado de complejidad (2.7) del procedimiento de completación para la regla de bisección del vértice nuevo, para acotar la complejidad de la malla final.

Lema 7. *Existe una constante \mathbb{C}_3 , que depende sólo de la regularidad de la malla, del grado polinomial r , de la dimensión d , de la función u a través de γ , y de \mathcal{T}_0 , tal que:*

$$\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0 = \#\mathcal{T}_{d(K+1)}^c - \#\mathcal{T}_0 \leq \mathbb{C}_3 \delta^{-d}. \quad (2.12)$$

Demostración. Usando (2.7), los lemas 3 y 6 tenemos que

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T}_{d(K+1)}^c - \#\mathcal{T}_0 &\leq \mathcal{C} \left(\sum_{\ell=1}^{d(K+1)-1} (\#\mathcal{T}_{\ell+1} - \#\mathcal{T}_\ell^c) + \sum_{j=0}^{J-1} (\#\mathcal{T}_{0,j+1} - \#\mathcal{T}_{0,j}^c) \right) \\ &\leq \mathcal{C} \left(\sum_{\ell=1}^{d(K+1)-1} \mathbb{C}_2 \delta^{-d} 2^{-\frac{\ell(2\gamma+d-2)}{2r+d}} + \mathbb{C}_1 \delta^{-d} \right) \\ &\leq \mathcal{C} \delta^{-d} \left(\mathbb{C}_2 \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\frac{\ell(2\gamma+d-2)}{2r+d}} + \mathbb{C}_1 \right). \end{aligned}$$

Puesto que $\gamma > 0$ la suma $\sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\frac{\ell(2\gamma+d-2)}{2r+d}}$ es finita, y el resultado se consigue tomando $\mathbb{C}_3 = \mathcal{C} \left(\mathbb{C}_2 \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\frac{\ell(2\gamma+d-2)}{2r+d}} + \mathbb{C}_1 \right)$. \square

2.5. Acotación del Error

En la sección anterior estudiamos las propiedades de graduación de la malla generada por el algoritmo y acotamos la complejidad de la malla final obtenida $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d(K+1)}^c$. En esta sección relacionaremos el error entre u y una función en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ (interpolante) con dicha complejidad, para concluir que $u \in \mathbb{A}_{\frac{r}{d}}^r$.

Teorema 3. *Existen dos constantes $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$, que dependen de u a través de la seminorma quebrada $|u_0|_{H_{\mathcal{T}_0}^{r+1}(\Omega)} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_0} \|D^{r+1}u_0\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2}$, de $c_i, k_i, \gamma_i, \|\chi_i\|_{W_{\infty}^{r+1}(\Omega)}, \|g_i\|_{W_{\infty}^1(\Omega)}$, de la norma $W_{\infty}^{r+1}(S)$ de $g_i, S \in \mathfrak{P}_i, i = 1, \dots, N$, del grado polinomial r , de la dimensión d , de la regularidad de las mallas y de \mathcal{T}_0 , pero independiente de K y δ , tales que, si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d(K+1)}^c$, entonces*

$$\inf_{u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{1,\Omega} \leq \mathbf{A}_1 \delta^r, \quad (2.13)$$

$$\inf_{u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{1,\Omega} \leq \mathbf{A}_2 (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0)^{-\frac{r}{d}}. \quad (2.14)$$

Con el objetivo de demostrar este teorema consideraremos por separado la parte regular u_0 de u y la parte singular dada por $\sum_{i=1}^N u_i$.

En esta sección usaremos el interpolador de Lagrange $I_{\mathcal{T}}u_i$ de u_i , que es la función de elementos finitos que coincide con u_i en todos los nodos, y está bien definido para cada $i = 0, 1, \dots, N$, puesto que por las condiciones del Teorema 1, todas las funciones u_i son continuas en $\bar{\Omega}$; ver Observación 2.

2.5.1. Estimación de la Parte Regular

Teorema 4. *Existen dos constantes $\mathbb{C}_4, \mathbb{C}_5$, que dependen de la seminorma quebrada $|u_0|_{H_{\mathcal{T}_0}^{r+1}(\Omega)} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_0} \|D^{r+1}u_0\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2}$, del grado polinomial r , de la regularidad de las mallas y de \mathcal{T}_0 , pero independiente de K y δ , tal que, si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d(K+1)}^c$, entonces*

$$|u_0 - I_{\mathcal{T}}u_0|_{1,\Omega} \leq \mathbb{C}_4 \delta^r,$$

$$|u_0 - I_{\mathcal{T}}u_0|_{1,\Omega} \leq \mathbb{C}_5 (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0)^{-\frac{r}{d}}.$$

donde $|\cdot|_{1,\Omega}$ denota la seminorma $H^1(\Omega)$, $|v|_{1,\Omega} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$.

Demostración. Puesto que $u_0|_T \in H^{r+1}(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}_0$, y \mathcal{T} fue obtenida sólo por refinamientos, $u_0|_T \in H^{r+1}(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}$. Usando estimaciones estándar de interpolación (ver [Cia78]) vale que

$$\begin{aligned} |u_0 - I_{\mathcal{T}}u_0|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |u_0 - I_{\mathcal{T}}u_0|_{1,T}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^{2r} \|D^{r+1}u_0\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq \delta^{2r} |u_0|_{H_{\mathcal{T}_0}^{r+1}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es una consecuencia del Lema 3 y el primer lazo del algoritmo.

Entonces, por el Lema 7

$$|u_0 - I_{\mathcal{T}}u_0|_{1,\Omega} \leq \mathbb{C}_4 \delta^r \leq \mathbb{C}_5 (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0)^{-\frac{r}{d}},$$

y el teorema está probado. \square

2.5.2. Estimación de la Parte Singular

En esta sección denotaremos con u a uno de los términos singulares u_i que definen u en (2.1). Esto es, u está definida en coordenadas polares alrededor del punto x_i en $\bar{\Omega}$ como

$$u = c_i (\ln(\rho_i))^{k_i} \rho_i^{\gamma_i} g_i(\vec{\theta}_i) \chi_i, \quad (2.15)$$

para algún $i = 1, 2, \dots, N$ y $c_i, \rho_i, k_i, \gamma_i, g_i, \vec{\theta}_i, \chi_i$ como en las hipótesis del Teorema 2.

Las tres acotaciones de (2.5) son las únicas propiedades de u que serán usadas en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 5. *Existen dos constantes $\mathbb{C}_6, \mathbb{C}_7$, que dependen de los parámetros que definen u en (2.15), la regularidad de la malla y \mathcal{T}_0 , pero independiente de K y δ , tal que, si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d(K+1)}^c$, entonces*

$$\begin{aligned} |u - I_{\mathcal{T}}u|_{1,\Omega} &\leq \mathbb{C}_6 \delta^r, \\ |u - I_{\mathcal{T}}u|_{1,\Omega} &\leq \mathbb{C}_7 (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0)^{-\frac{r}{d}}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $D_\ell = \bigcup \{T \mid T \in \mathcal{T} \wedge 2^{-\frac{\ell+1}{d}} < \text{dist}(x_i, T) \leq 2^{-\frac{\ell}{d}}\}$ para $0 \leq \ell <$

$d(K+1)$ y $D_{d(K+1)} = \bigcup\{T \mid T \in \mathcal{T} \wedge \text{dist}(x_i, T) \leq 2^{-(K+1)}\}$. Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} |u - I_{\mathcal{T}}u|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |u - I_{\mathcal{T}}u|_{1,T}^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^{d(K+1)-1} \sum_{T \subset D_\ell} |u - I_{\mathcal{T}}u|_{1,T}^2 + |u - I_{\mathcal{T}}u|_{1,D_{d(K+1)}}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

El segundo término en (2.16) puede ser acotado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |u - I_{\mathcal{T}}u|_{1,D_{d(K+1)}}^2 &\leq |u|_{1,D_{d(K+1)}}^2 + |I_{\mathcal{T}}u|_{1,D_{d(K+1)}}^2 \\ &= |u|_{1,D_{d(K+1)}}^2 + \sum_{\substack{T \subset D_{d(K+1)} \\ x_i \in T}} |I_{\mathcal{T}}u|_{1,T}^2 + \sum_{\substack{T \subset D_{d(K+1)} \\ x_i \notin T}} |I_{\mathcal{T}}u|_{1,T}^2 \\ &=: B_1 + B_2 + B_3. \end{aligned}$$

Por (2.5) y el Lema 4, obtenemos:

$$\begin{aligned} B_1 &= |u|_{1,D_{d(K+1)}}^2 \leq |u|_{1,B(x_i, c2^{-(K+1)})}^2 \leq 2\pi C \int_0^{c2^{-(K+1)}} \rho^{2(\gamma-1)} \rho^{d-1} d\rho \\ &= 2\pi C \int_0^{c2^{-(K+1)}} \rho^{2\gamma+d-3} d\rho \simeq C 2^{-(K+1)(2\gamma+d-2)}. \end{aligned}$$

Para el término B_2 usamos el hecho de que en un elemento de referencia T^{ref} , $|(I_{\mathcal{T}}u)^{\text{ref}}|_{1,T^{\text{ref}}} \lesssim \|(I_{\mathcal{T}}u)^{\text{ref}}\|_{L^\infty(T^{\text{ref}})} = \|I_{\mathcal{T}}u\|_{L^\infty(T)}$. Por (2.5), si $x_i \in T$, y $T \subset D_{d(K+1)}$, $\|I_{\mathcal{T}}u\|_{L^\infty(T)} \leq Ch_T^\gamma$.

Un escalamiento adecuado nos permite obtener

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{\substack{T \subset D_{d(K+1)} \\ x_i \in T}} |I_{\mathcal{T}}u|_{1,T}^2 \approx \sum_{\substack{T \subset D_{d(K+1)} \\ x_i \in T}} h_T^{d-2} |(I_{\mathcal{T}}u)|_T^{\text{ref}}|^2_{1,T^{\text{ref}}} \lesssim C \sum_{\substack{T \subset D_{d(K+1)} \\ x_i \in T}} h_T^{2\gamma+d-2} \\ &\leq \#\{T \subset D_{d(K+1)} : x_i \in T\} \max_{T \in D_{d(K+1)}} |T|^{\frac{2\gamma+d-2}{d}}. \end{aligned}$$

El Lema 5 y (2.6) nos dicen que para $T \in D_{d(K+1)}$

$$\begin{aligned} |T|^{\frac{2\gamma+d-2}{d}} &\leq \left[\delta^d 2^{\frac{2d(K+1)(\gamma-r-1)}{2r+d}} \right]^{\frac{2\gamma+d-2}{d}} \\ &= \left[\delta 2^{\frac{2(K+1)(\gamma-r-1)}{2r+d}} \right]^{2\gamma+d-2} \\ &\leq \left[2^{-\frac{K(2\gamma+d-2)}{2r+d}} 2^{\frac{2(K+1)(\gamma-r-1)}{2r+d}} \right]^{2\gamma+d-2}. \end{aligned}$$

Ahora

$$\frac{-K(2\gamma+d-2) + 2(K+1)(\gamma-r-1)}{2r+d} = -(K+1) + \frac{2\gamma+d-2}{2r+d},$$

y entonces

$$B_2 \leq 2^{\frac{(2\gamma+d-2)^2}{2r+d}} 2^{-(K+1)(2\gamma+d-2)} = C 2^{-(K+1)(2\gamma+d-2)},$$

donde hemos usado que el número de elementos que tienen a x_i como un vértice está acotado por una constante que sólo depende de la regularidad de la malla.

El término B_3 puede ser acotado usando el hecho que si $\text{dist}(x_i, T) > 0$, entonces, por el Lema 4, $\text{dist}(x_i, T) \simeq |x - x_i| \forall x \in T$ y como también vale (2.5) obtenemos

$$|\nabla I_{\mathcal{T}} u(x)| \lesssim C \text{dist}(x_i, T)^{\gamma-1} \lesssim C |x - x_i|^{\gamma-1} \quad \forall x \in T,$$

lo que implica que $\int_T |\nabla I_{\mathcal{T}} u|^2 \lesssim C \int_T |x - x_i|^{2(\gamma-1)} dx$, y consecuentemente

$$\begin{aligned} B_3 &= \sum_{\substack{T \subset D_{d(K+1)} \\ x_i \notin T}} \int_T |\nabla I_{\mathcal{T}} u|^2 \lesssim C \int_{D_{d(K+1)}} |x - x_i|^{2(\gamma-1)} dx \\ &\lesssim C \int_0^{c2^{-(K+1)}} \rho^{2(\gamma-1)} \rho^{d-1} d\rho \simeq C 2^{-(K+1)(2\gamma+d-2)}. \end{aligned}$$

Combinando las tres estimaciones para B_1 , B_2 y B_3 obtenemos la siguiente cota para el segundo término de (2.16):

$$|u - I_{\mathcal{T}} u|_{1, D_{d(K+1)}}^2 \lesssim C 2^{-(K+1)(2\gamma+d-2)} \leq C \delta^{2r+d}, \quad (2.17)$$

donde en la última desigualdad hemos usado nuevamente (2.6). Usando las estimaciones usuales para el interpolador de Lagrange y el hecho de que $u|_T \in H^{r+1}(T)$, $\forall T \subset \Omega \setminus D_{d(K+1)}$ (ver Observación 2), podemos acotar el primer término de (2.16) por:

$$\sum_{\ell=0}^{d(K+1)-1} \sum_{T \subset D_\ell} |u - I_{\mathcal{T}} u|_{1, T}^2 \lesssim \sum_{\ell=0}^{d(K+1)-1} \sum_{T \subset D_\ell} h_T^{2r} \|D^{r+1} u\|_{L^2(T)}^2. \quad (2.18)$$

Finalmente, por (2.5), si $x \in T$, $|D^{r+1} u(x)| \leq C |x - x_i|^{\gamma-r-1}$, y por lo tanto $\|D^{r+1} u\|_{L^2(T)}^2 \leq C \text{dist}(x_i, T)^{2(\gamma-r-1)} h_T^d$. Por el Lema 5, $h_T < \delta 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{d(2r+d)}}$ si $T \in D_\ell$, y nuevamente por el

Lema 4, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{d(K+1)-1} \sum_{T \subset D_\ell} |u - I_T u|_{1,T}^2 &\lesssim \sum_{\ell=0}^{d(K+1)-1} \sum_{T \subset D_\ell} h_T^{2r} \|D^{r+1} u\|_{L^2(T)}^2 \\
&\lesssim C \sum_{\ell=0}^{d(K+1)-1} \sum_{T \subset D_\ell} \text{dist}(x_i, T)^{2(\gamma-r-1)} h_T^{2r+d} \\
&\lesssim C \sum_{\ell=0}^{d(K+1)-1} \sum_{T \subset D_\ell} 2^{-\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{d}} \delta^{2r+d} 2^{\frac{2\ell(\gamma-r-1)}{d}} \\
&\leq C \delta^{2r+d} \sum_{\ell=0}^{d(K+1)-1} \#D_\ell \leq C \delta^{2r+d} (\#\mathcal{T}).
\end{aligned}$$

Luego, por (2.16), (2.17) y (2.18), y por el Lema 7

$$\begin{aligned}
|u - I_T u|_{1,\Omega}^2 &\lesssim C \delta^{2r+d} (\#\mathcal{T}) = C \delta^{2r+d} ((\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0) + \#\mathcal{T}_0) \\
&\lesssim C \delta^{2r+d} (\delta^{-d} + \#\mathcal{T}_0) \\
&\lesssim C \delta^{2r} \lesssim C (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0)^{-\frac{2r}{d}},
\end{aligned}$$

donde hemos usado que δ fue elegida suficientemente pequeña para que $\#\mathcal{T}_0 \leq \delta^{-d}$. \square

2.5.3. Demostración del Resultado Principal del Capítulo

Demostración del Teorema 3. Usando las estimaciones de los Teoremas 4, 5 y la desigualdad de Poincaré obtenemos:

$$\begin{aligned}
\inf_{u_T \in \mathbb{V}_T} \|u - u_T\|_{1,\Omega} &\lesssim \inf_{u_T \in \mathbb{V}_T} |u - u_T|_{1,\Omega} \leq |u - I_T u|_{1,\Omega} \\
&= \left| \sum_{i=0}^N (u_i - I_T u_i) \right|_{1,\Omega} \\
&\leq \sum_{i=0}^N |(u_i - I_T u_i)|_{1,\Omega} \lesssim CN \delta^r,
\end{aligned}$$

y entonces, usando el Lema 7, tenemos que

$$\inf_{u_T \in \mathbb{V}_T} \|u - u_T\|_{1,\Omega} \lesssim CN (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0)^{-\frac{r}{d}}.$$

\square

Demostración del Teorema 2. Este es un corolario del Teorema 3. Es suficiente elegir $\varepsilon = \mathbf{A}_1 \delta^r$. Esto implica el resultado para ε suficientemente pequeño, lo que inmediatamente implica el resultado para todo $\varepsilon > 0$. \square

Observación 5. Refinamiento Red-Green. Recordando el otro algoritmo habitual para refinamiento de mallas en dos dimensiones, el llamado refinamiento red-green, el resultado principal presentado en este capítulo está todavía abierto. De cualquier manera, el algoritmo presentado aquí puede ser usado para la construcción de mallas casi-óptimas, con las modificaciones obvias dadas por el hecho de que una subdivisión red divide los elementos en cuatro sub-elementos en lugar de dos. El único detalle faltante que se necesita para resolver el problema es el de determinar vale si un resultado de complejidad que acote el número de elementos refinados para mantener conformidad similar al del Teorema 1.

2.6. Aplicaciones a EDP elípticas en polígonos

En esta sección mostraremos dos aplicaciones del Teorema 2 para ecuaciones en derivadas parciales elípticas en dos dimensiones con el objetivo de ilustrar la aplicabilidad de los resultados anteriores.

2.6.1. Ecuación de Poisson

Sea Ω un dominio poligonal en \mathbb{R}^2 , no necesariamente Lipschitz. Y sea u la solución débil de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{en } \Omega, \\ u &= 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.19}$$

Como consecuencia del Teorema 3.1 en [Kel92] (ver también [Dau88], o Teorema 3.1 en [NVV08]) vale que si $f \in H^{r-1+\epsilon}(\Omega)$ para algún $\epsilon > 0$, entonces u puede ser escrita como en el Teorema 2, donde $\mathcal{N} = \{x_i\}_{i=1}^N$ es el conjunto de vértices de Ω , y $k_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

En el caso de $r = 1$, ϵ puede ser tomado igual a cero, i.e. $f \in L^2(\Omega)$, el conjunto \mathcal{N} contiene solo los vértices de Ω con ángulo interior ω_i mayor que π ($c_i = 0$ para lo otros vértices), y $g_i(t) = \sin(\pi t/\omega_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$.

En el caso de $r > 1$, el conjunto \mathcal{N} contiene *todos* los vértices de Ω . Con el objetivo de evitar los casos patológicos donde al menos un ángulo interior α de Ω satisface $\alpha r/\pi \in \mathbb{N}$, supondremos que $f \in H^{r-1+\epsilon}(\Omega)$ para algún $\epsilon > 0$ en vez de $f \in H^{r-1}(\Omega)$, pero esta

no es una gran restricción en la práctica. Más aun, esta hipótesis puede ser debilitada y pedir que $f \in L^2(\Omega)$ y $f|_T \in H^{r-1+\epsilon}(T)$, para todo $T \in \mathcal{T}_0$.

Concluimos entonces que si $f \in H^{r-1+\epsilon}(\Omega)$ (a trozos sobre \mathcal{T}_0) entonces la solución u de la ecuación de Poisson (2.19) pertenece a $\mathbb{A}_{r/2}^r$.

2.6.2. Problema de la Interfase para el Laplaciano

Sea Ω un dominio poligonal, no necesariamente Lipschitz, que puede ser descompuesto en subdominios disjuntos Ω_i , $i = 1, \dots, n_d$ con fronteras poligonales: $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{n_d} \overline{\Omega}_i$. Definimos la interfase $\Gamma = \overline{(\cup_{i=1}^{n_d} (\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega))}$.

Denotamos con $a(x) = \sum_{i=1}^{n_d} a_i \chi_{\Omega_i}(x)$ la función global pesada, que es constante y positiva en cada subdominio Ω_i .

Queremos resolver el siguiente problema escrito en forma variacional:

$$\text{Encontrar } u \in \mathbb{V} : \quad \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in \mathbb{V}, \quad (2.20)$$

donde $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbb{V} = H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$, $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ es la frontera Dirichlet. Este problema es llamado usualmente el *problema de interfase para el Laplaciano* y se corresponde con la siguiente forma fuerte

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a_i \nabla u) &= f, & \text{en } \Omega_i, & \quad i = 1, 2, \dots, n_d, \\ u &= 0, & \text{on } \Gamma_D & \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, & \text{en } \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D, & \\ a_i \frac{\partial u|_{\Omega_i}}{\partial n_i} &= -a_j \frac{\partial u|_{\Omega_j}}{\partial n_j} & \text{en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j, & \end{aligned}$$

donde n denota la normal unitaria exterior de Ω , y n_i la de Ω_i .

Siguiendo las ideas originales de [Kel92], Petzoldt prueba (ver capítulo 2 en [Pet01] y las referencias allí contenidas) que la solución u de (2.20) satisface las condiciones del Teorema 2 para $r = 1$, si la malla \mathcal{T}_0 coincide con las fronteras de los subdominios Ω_i y los puntos de $\partial\Omega$ donde la condición de frontera cambia son vértices de \mathcal{T}_0 . Los puntos x_ℓ corresponden a los vértices de la interfase Γ , a los vértices de $\partial\Omega$, y a aquellos puntos en $\partial\Omega$ donde las condiciones de frontera cambian de tipo Dirichlet a Neumann.

Concluimos que si $f \in L^2(\Omega)$ entonces por el Teorema 2 la solución u pertenece a $\mathbb{A}_{1/2}^1$, y se obtiene el decaimiento óptimo del error para elementos lineales.

Es importante mencionar que para ciertos puntos singulares x_ℓ , el valor de γ_ℓ puede ser tan cercano a cero como se desee, dependiendo de los valores de $a(x)$ alrededor de x_ℓ , proveyendo ejemplos muy singulares para la teoría clásica. Con el objetivo de ilustrar esto, explicitaremos las formulas derivadas en [Kel75] para construir una solución exacta de un problema elíptico con coeficientes constantes a trozos y lado derecho f nulo; para el caso particular $\Omega = (-1, 1)^2$, $a = a_1$ en el primer y tercer cuadrante, y $a = a_2$ en el segundo y cuarto cuadrante. Una solución exacta u de (2.20) para $f \equiv 0$ (y valores de frontera Dirichlet no-homogéneos) es dada en coordenadas polares por $u(r, \theta) = r^\gamma \mu(\theta)$, donde

$$\mu(\theta) = \begin{cases} \cos((\pi/2 - \sigma)\gamma) \cdot \cos((\theta - \pi/2 + \rho)\gamma) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \cos(\rho\gamma) \cdot \cos((\theta - \pi + \sigma)\gamma) & \text{si } \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\ \cos(\sigma\gamma) \cdot \cos((\theta - \pi - \rho)\gamma) & \text{si } \pi \leq \theta < 3\pi/2 \\ \cos((\pi/2 - \rho)\gamma) \cdot \cos((\theta - 3\pi/2 - \sigma)\gamma) & \text{si } 3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

y los números γ, ρ, σ satisfacen las relaciones no-lineales

$$\begin{cases} R := a_1/a_2 = -\tan((\pi/2 - \sigma)\gamma) \cdot \cot(\rho\gamma) \\ 1/R = -\tan(\rho\gamma) \cdot \cot(\sigma\gamma) \\ R = -\tan(\sigma\gamma) \cdot \cot((\pi/2 - \rho)\gamma) \\ 0 < \gamma < 2 \\ \text{máx}\{0, \pi\gamma - \pi\} < 2\gamma\rho < \text{mín}\{\pi\gamma, \pi\} \\ \text{máx}\{0, \pi - \pi\gamma\} < -2\gamma\sigma < \text{mín}\{\pi, 2\pi - \pi\gamma\}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Eligiendo $\gamma = 0,1$, y resolviendo (2.21) para R, ρ y σ usando el método de Newton obtenemos $R = a_1/a_2 \cong 161,4476$, $\rho = \pi/4$, $\sigma \cong -14,92256$. Un γ más pequeño daría un cociente R más grande, pero en principio γ podría ser tan cercano a 0 como deseemos.

Esta función u pertenece al espacio de Sobolev $H^{1+\gamma}(\Omega)$, y está entonces *apenas en* $H^1(\Omega)$, pero—de acuerdo con los resultados previos—todavía está en $\mathbb{A}_{r/2}^r$ para todo $r \geq 1$. Esto es, una aproximación adaptativa con elementos finitos a una solución como

esta, usando elementos finitos de Lagrange de grado r nos dará una sucesión de mallas y soluciones discretas $\{\mathcal{T}_k, u_k\}_k$ satisfaciendo $\|u - u_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\#\mathcal{T}_k)^{-r/2}$. Por otro lado, la regularidad Besov de las soluciones de (2.20) no ha sido bien establecida, y por lo tanto ni los resultados de [BDDP02] ni los del capítulo 4 son aún aplicables al problema de interfase para el Laplaciano. Mientras la regularidad Besov de las soluciones de Ecuaciones en Derivadas Parciales se encuentre en desarrollo, este resultado — que está lejos de ser una caracterización de las clases de funciones que pueden ser aproximadas con decaimiento óptimo $N^{-\frac{r}{d}}$ — provee una herramienta útil para investigar la velocidad de convergencia del MEFA para EDP.

Capítulo 3

Espacios de Besov y Aproximación Polinomial

En el capítulo anterior hemos demostrado que para una cierta clase de funciones, que se pueden escribir como suma de una parte regular (Sobolev) más funciones con singularidades localizadas, se obtiene el decaimiento óptimo con elementos finitos adaptativos. Ese resultado está lejos de ser una *caracterización* de la clase de funciones para las que se obtiene dicho decaimiento. Con el objetivo de lograr un resultado más ajustado (que se presenta en el capítulo 4), introducimos en este capítulo los conceptos de módulo de suavidad, mejor error de aproximación local por polinomios y los espacios de Besov.

En este capítulo introduciremos algunas definiciones y conceptos necesarios para la definición de los espacios de Besov y su estudio con respecto a la aproximación con elementos finitos. Demostraremos sólo algunos de los resultados, que consideramos importantes, o cuyas demostraciones debieron ser adaptados para el caso de elementos simpliciales. Para los otros resultados proveemos la referencia precisa de dónde pueden encontrarse.

3.1. Módulos de Suavidad

Definimos a continuación diferentes nociones de *módulos de suavidad*, basados en *diferencias*, y mostramos algunas relaciones entre las diferentes definiciones. En la próxima sección relacionaremos el módulo de suavidad con la velocidad de aproximación por

polinomios.

Definición 2. Para G un dominio de \mathbb{R}^d y $r \in \mathbb{N}$, llamaremos h -diferencia de orden r de f en G a la función $\Delta_h^r(f, \cdot, G) : G \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta_h^r(f, x, G) := \begin{cases} \sum_{j=0}^r (-1)^{r+j} \binom{r}{j} f(x + jh), & \text{si } [x, x + rh] \subset G, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $[x, x + rh]$ es el prisma $x + [0, rh_1] \times \cdots \times [0, rh_d]$. Es importante notar que si $1 \leq k \leq r - 1$, entonces

$$\Delta_h^r = \Delta_h^1(\Delta_h^{r-1}) = \Delta_h^k(\Delta_h^{r-k}).$$

Definición 3. Sean G un dominio de \mathbb{R}^d , $0 < p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ y $f \in L^p(G)$. Llamaremos módulo de suavidad de f de orden r en $L^p(G)$ a la función $\omega_r(f, \cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\omega_r(f, t)_p = \omega_r(f, t, G)_p := \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^r(f, \cdot)\|_{L^p(G)}$$

Lema 8. Para $0 < p \leq \infty$ valen las siguientes propiedades del módulo de suavidad de orden r :

- $\omega_r(f, t)_p \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, para toda $f \in L^p(G)$;
- $\omega_r(f, t)_p$ es no-negativa y no-decreciente en $t \in \mathbb{R}^+$, para toda $f \in L^p(G)$;
- $\omega_r(f, t)_p$ es continua en \mathbb{R}^+ , para toda $f \in L^p(G)$;
- para toda $f \in L^p(G)$ vale la siguiente desigualdad: $\omega_r(f, \lambda t)_p \leq (\lambda + 1)^r \omega_r(f, t)_p$, para todo $\lambda > 0$.

Demostración. La demostración de este lema puede encontrarse en [DL93]. □

Definición 4. Sean G un dominio de \mathbb{R}^d , $0 < p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ y $f \in L^p(G)$. Llamaremos módulo de suavidad máximo de f de orden r en $L^p(G)$ a:

$$\omega_r(f, G)_p := \sup_{t > 0} \omega_r(f, t, G)_p = \sup_{h \in \mathbb{R}^d} \|\Delta_h^r(f, \cdot)\|_{L^p(G)}.$$

Definición 5. Sean G un dominio de \mathbb{R}^d , $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ y $f \in L^p(G)$. Llamaremos módulo de suavidad q -promediado de f de orden r en $L^p(G)$ a:

$$w_r(f, t)_{p,q} = w_r(f, t, G)_{p,q} := \left[\frac{1}{(2t)^d} \int_{[-t,t]^d} \left(\int_G |\Delta_h^r(f, x, G)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dh \right]^{\frac{1}{q}}$$

Notemos que con la extensión obvia de la definición de $w_r(f, t)_{p,q}$ al caso $q = \infty$ resulta: $w_r(f, t)_{p,\infty} = \omega_r(f, t)_p$.

A partir de ahora consideraremos dominios G que son, o bien el interior de un elemento T de una malla admisible \mathcal{T} o el interior de la unión de los elementos de \mathcal{T} que son adyacentes a T . Sin posibilidad de confusión, diremos que $G = T$ o $G = \widehat{T} := \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$ para considerar cada uno de estos casos. Estos son los dominios con los que necesitaremos trabajar en el capítulo 4

Para $G = T$ o $G = \widehat{T}$ los módulos de continuidad antes definidos son todos equivalentes como muestra el siguiente lema:

Lema 9. Sea $G \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado tal que existan una familia $\{B_j\}_{j=0}^N = \{B(x_j, \rho_j)\}_{j=0}^N$ y otra familia de conos finitos $\{\mathcal{C}_j\}_{j=0}^N$ (todos congruentes a un cono finito fijo \mathcal{C}) tales que:

$$G \subset \cup_{j=0}^N B_j \text{ y } \forall x \in B(x_j, 2\rho_j) \cap G, \ x + \mathcal{C}_j \subset G.$$

Entonces existen tres constantes C_i , $i = 1, 2, 3$ que dependen solo de r , el ángulo de apertura de \mathcal{C} , p , q , N y $\min_{1 \leq j \leq N} \{\rho_j\}$, tales que:

$$C_1 w_r(f, t)_{p,q} \leq \omega_r(f, t)_p \leq C_2 w_r(f, t)_{p,q}$$

para $0 < p, q < \infty$, y $t \leq C_3 \text{diam}(\mathcal{C})$.

Corolario 1. Si G es un dominio acotado Lipschitz existen tres constantes C_i , $i = 1, 2, 3$ tales que:

$$C_1 w_r(f, t)_{p,q} \leq \omega_r(f, t)_p \leq C_2 w_r(f, t)_{p,q}$$

para $0 < p, q < \infty$, y $t \leq C_3$, donde $C_i = C_i(p, q, r, G)$, $i = 1, 2, 3$.

Demostración. Las condiciones del Lema 9 satisfacen la caracterización de los dominios Lipschitz dada en [Sha83, Theorem 1]. □

Corolario 2. Si $G = T$ o $G = \widehat{T} = \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$, entonces existen tres constantes C_i , $i = 1, 2, 3$ tales que:

$$C_1 w_r(f, t)_{p,q} \leq \omega_r(f, t)_p \leq C_2 w_r(f, t)_{p,q} \quad (3.1)$$

para $0 < p, q < \infty$, y $t \leq C_3 \text{diam}(T)$, donde C_i depende de p, q, r , la regularidad de la malla y Ω , para $i = 1, 2, 3$.

Demostración. Sean $\kappa_{\mathcal{T}}$ el máximo cociente entre $\text{diam} T$ y el radio de la mayor bola contenida en T , para todo $T \in \mathcal{T}$, $\{x_j\}_{j=1}^{\ell}$ el conjunto de vértices de G , $R = \sup\{\rho \in \mathbb{R} : B(x_j, \rho) \cap G \text{ es conexo}, 1 \leq j \leq \ell, \forall 0 < s < \rho\}$ y $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, donde $\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctan(\frac{1}{\kappa_{\mathcal{T}}})$ y α_2 es el ángulo máximo para el cual la condición de cono se satisface para todo $x \in \partial\Omega$. Tomando $h = \min\{\min_{E \subset G} \{h_E\}, R\}$, donde el mínimo es tomado sobre todas las aristas de \mathcal{T} incluidos en G , y definimos un cono \mathcal{C} con ángulo α y longitud $\frac{h \sin(\alpha)}{8}$, de la elección de α y h se sigue que para cada $x \in G$ existe una rotación T_x tal que $T_x(\mathcal{C}) + x \subset G$.

Luego, para cada vértice $\{x_j\}_{j=1}^{\ell}$, tomamos $B_j = B(x_j, \frac{h}{4})$ y asignamos a cada B_j el cono $\mathcal{C}_j = x_j + T_{x_j}(\mathcal{C})$. Para completar el cubrimiento tomamos el conjunto $\{y_i\}_{i=1}^m \subset G$ de todos los nodos de Lagrange de grado n tales que $B(y_i, \frac{h \sin \alpha}{16}) \cap (G \setminus \cup_{j=1}^N B_j) \neq \emptyset$, donde $n = \left\lceil \frac{16H}{h \sin(\alpha)} \right\rceil$ y $H = \max_{E \subset G} h_E$. Definimos entonces $B_{\ell+i} = B(y_i, \frac{h \sin \alpha}{16})$, $1 \leq i \leq m$ y asignamos a cada $B_{\ell+i}$ un cono de la siguiente manera:

- si $\exists j$, $1 \leq j \leq \ell$ tal que $B(y_i, \frac{h \sin \alpha}{4}) \cap B_j \neq \emptyset$, asigno $\mathcal{C}_{\ell+i} = \mathcal{C}_j$;
- si $B(y_i, \frac{h \sin \alpha}{4}) \cap B_j = \emptyset$ para todo $j = 1, 2, \dots, \ell$, pero $B(y_i, \frac{h \sin \alpha}{4})$ intersecciona alguna cara entonces asigno $\mathcal{C}_{\ell+i} = \mathcal{C}_j$ para algún x_j que pertenezca a la intersección con esas caras (por la definición de R y α , es claro que ese conjunto de vértices no es vacío);
- en cualquier otro caso asigno $\mathcal{C}_{\ell+i} = \mathcal{C}$.

Por como lo construimos $\{B_j\}_{j=1}^{\ell+m}$ es un cubrimiento de G , que satisface las condiciones del Lema 9 con $N = \ell + m \leq c_1(\kappa_{\mathcal{T}}) + c_2(\kappa_{\mathcal{T}}, \Omega) \frac{1}{(\sin \alpha)^d}$, y el ángulo de apertura de \mathcal{C} dependiendo de $\kappa_{\mathcal{T}}$ y la constante Lipschitz de Ω . Usando el Lema 9 concluimos que (3.1) vale para todo $t \leq C_3 \text{diam}(G)$ y C_1, C_2, C_3 dependen solo de $p, q, r, \kappa_{\mathcal{T}}$ y Ω . \square

Demostración del Lema 9. La desigualdad izquierda es trivial si usamos que $\omega_r(f, t)_p$ es no decreciente y

$$\|\Delta_h^r(f, \cdot)\|_{L^p} \leq \omega_r(f, t)_p,$$

para todo $|h| \leq t$.

Para demostrar la desigualdad derecha supongamos que $\text{diam}(G) = 1$, los otros casos se derivan de este mediante un escalamiento estándar. Primero probaremos el caso $q = 1$.

Para un $v \in \mathbb{R}^d$ dado definimos $G_v = \{x \in G : x + v \in G\}$. Notemos que si $h, s \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^r (-1)^{r+\ell} \binom{r}{\ell} \Delta_{h+\ell s}^r(f, x) \\ &= \sum_{\ell=0}^r (-1)^{r+\ell} \binom{r}{\ell} \sum_{j=0}^r (-1)^{r+j} \binom{r}{j} f(x + j(h + \ell s)) \\ &= \sum_{j=0}^r (-1)^{r+j} \binom{r}{j} \sum_{\ell=0}^r (-1)^{r+\ell} \binom{r}{\ell} f(x + jh + j\ell s) \\ &= \sum_{j=1}^r (-1)^{r+j} \binom{r}{j} \Delta_{js}^r(f, x + jh). \end{aligned}$$

siempre que todos los argumentos de f que aparecen en la última expresión pertenezcan a G , i.e. si $x \in G_{rh} \cap G_{rh+r^2s}$. El término correspondiente a $\ell = 0$ en el lado izquierdo es $(-1)^r \Delta_h^r(f, x)$, y obtenemos entonces:

$$\Delta_h^r(f, x) = \sum_{\ell=1}^r (-1)^\ell \binom{r}{\ell} [\Delta_{\ell s}^r(f, x + \ell h) - \Delta_{h+\ell s}^r(f, x)], \quad (3.2)$$

para todo $x \in G_{rh} \cap G_{rh+r^2s}$.

Consideremos la familia $\{G^j\}_{j=1}^N = \{G \cap B_j\}_{j=1}^N$, que es claramente un cubrimiento de G .

Sea $\rho = \min\{\min_{1 \leq j \leq N} \{\rho_j\}, \text{diam}(\mathcal{C})\}$, notemos que si $t \leq \frac{\rho}{k^2}$, $h \in \mathbb{R}^d$, $0 \leq |h| \leq t$ y $s \in \mathcal{C}_j^t = \{x : \frac{x}{t} \in \mathcal{C}_j\}$, entonces $x \in G^j \cap G_{rh}$ implica que $x + \ell h \in G_{r\ell s}$ y por lo tanto $x \in G_{\ell(h+\ell s)}$, para todo $1 \leq \ell \leq r$. Entonces tomando $L^p(G^j)$ -norma en (3.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^r(f)\|_{L^p(G_j \cap G_{rh})} &= \|\Delta_h^r(f)\|_{L^p(G_j)} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}} \sum_{\ell=1}^r \binom{r}{\ell} \left[\|\Delta_{\ell s}^r(f, \cdot + \ell h)\|_{L^p(G_{r\ell s})} + \|\Delta_{h+\ell s}^r(f)\|_{L^p(G_{r(h+\ell s)})} \right]. \end{aligned}$$

Promediando sobre $s \in \mathcal{C}_j^t$, un cambio de variables nos permite obtener:

$$\begin{aligned} & \|\Delta_h^r(f)\|_{L^p(G_j)} \\ & \lesssim \frac{1}{|\mathcal{C}_j^t|} \sum_{\ell=1}^r \left[\int_{\mathcal{C}_j^{\ell t}} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G)} du + \int_{h+\mathcal{C}_j^{\ell t}} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G)} du \right] \\ & \lesssim \frac{1}{t^d} \int_{[-(k+1)t, (k+1)t]^d} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G)} du = (2r+2)^d w_r(f, (r+1)t)_{p,1}, \end{aligned}$$

Donde las constantes dependen de r y del ángulo de apertura de \mathcal{C} . Sumando en j obtenemos

$$\|\Delta_h^r(f)\|_{L^p(G)} \lesssim w_r(f, (r+1)t)_{p,1}, \quad \forall |h| \leq t, \quad t \leq \frac{\rho}{r^2}.$$

Tomando supremo sobre $|h| \leq t$ obtenemos

$$\omega_r(f, t)_p \lesssim w_r(f, (r+1)t)_{p,1},$$

y usando propiedades del módulo de suavidad [DL93], obtenemos que para $0 < t \leq \frac{\rho}{r^2}$:

$$\omega_r(f, (r+1)t)_p \lesssim (r+2)^r \omega_r(f, t)_p \lesssim w_r(f, (r+1)t)_{p,1} \lesssim \omega_r(f, (r+1)t)_p$$

lo que demuestra el resultado para $q = 1$.

Usando la desigualdad de Hölder con $1 < q < \infty$ obtenemos:

$$\begin{aligned} w_r(f, t)_{p,1} &= \frac{1}{(2t)^d} \int_{[-t,t]^d} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G_{ru})} du \\ &\leq \frac{1}{(2t)^d} \left(\int_{[-t,t]^d} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G_{ru})}^q du \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{[-t,t]^d} du \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\frac{1}{(2t)^d} \int_{[-t,t]^d} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G_{ru})}^q du \right)^{\frac{1}{q}} = w_r(f, t)_{p,q}, \end{aligned}$$

y el caso $1 < q < \infty$ queda demostrado.

Para el caso $0 < q < 1$ es fácil ver que:

$$\begin{aligned} w_r(f, t)_{p,1} &= \frac{1}{(2t)^d} \int_{[-t,t]^d} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G_{ru})} du \\ &\leq \frac{1}{(2t)^d} \int_{[-t,t]^d} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G_{ru})}^q \omega_r(f, \sqrt{d}t)_p^{1-q} du \\ &\leq (\sqrt{d}+1)^{r(1-q)} \omega_r(f, t)_p^{1-q} \frac{1}{(2t)^d} \int_{[-t,t]^d} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G_{ru})}^q du \\ &\lesssim w_r(f, t)_{p,1}^{1-q} \left(\frac{1}{(2t)^d} \int_{[-t,t]^d} \|\Delta_u^r(f)\|_{L^p(G_{ru})}^q du \right) \\ &= w_r(f, t)_{p,1}^{1-q} w_r(f, t)_{p,q}^q \end{aligned}$$

donde usamos el caso $q = 1$ en la última desigualdad, obteniendo:

$$w_r(f, t)_{p,1} \lesssim w_r(f, t)_{p,q}, \quad (3.3)$$

y el resultado queda demostrado para el caso $0 < q < 1$. \square

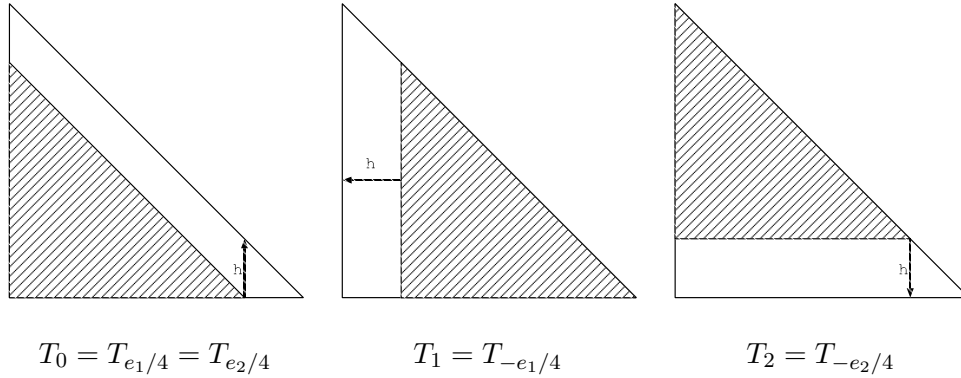


Figura 3.1: Elementos T_h para $d = 2$ y $h = e_1/4$ o $h = e_2/4$ (izquierda), $h = -e_1/4$ (medio), y $h = -e_2/4$ (derecha).

Lema 10. Sea \mathcal{T} una malla admisible, $T \in \mathcal{T}$ y sea $G = T$ o $G = \widehat{T} = \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$. Si $0 < p < \infty$ y $f \in L^p(G)$, entonces existe una constante ϑ tal que:

$$\|f - \vartheta\|_{L^p(G)} \leq C\omega_1(f, |G|^{\frac{1}{d}}, G)_p \quad (3.4)$$

con C que depende sólo de la regularidad de la malla y de p , pero no de la función f o del tamaño de G .

Observación 6. Este resultado es una especie de desigualdad de Poincaré. La diferencia es que el mismo es válido para todo $0 < p < \infty$, y no sólo para $p \geq 1$ como la desigualdad de Poincaré clásica.

Demostración. Si $\tilde{G} = B(0, 2 \text{diam}(G))$ y χ_K denota la función característica sobre el

conjunto K , entonces

$$\begin{aligned}
\int_G \int_G |f(x) - f(y)|^p dx dy &= \int_G \int_{G-x} |f(x+s) - f(x)|^p ds dx \\
&= \int_G \int_{\tilde{G}} |f(x+s) - f(x)|^p \chi_{G-x}(s) ds dx \\
&= \int_{\tilde{G}} \int_G |f(x+s) - f(x)|^p \chi_{G-s}(x) dx ds \\
&\leq \int_{\tilde{G}} \omega_1(f, |G|^{\frac{1}{d}}, G)_p^p ds \\
&= |\tilde{G}| \omega_1(f, |G|^{\frac{1}{d}}, G)_p^p \\
&\leq C |G| \omega_1(f, |G|^{\frac{1}{d}}, G)_p^p
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $4 \operatorname{diam}(G) = \operatorname{diam}(\tilde{G}) \leq C |G|^{\frac{1}{d}}$ por regularidad de la malla.

Reescribiendo esta desigualdad obtenemos:

$$\frac{1}{|G|} \int_G \int_G |f(x) - f(y)|^p dx dy \leq C \omega_1(f, |G|^{\frac{1}{d}}, G)_p^p \quad (3.5)$$

El lado izquierdo de la desigualdad es un promedio de la función $y \rightarrow \int_G |f(x) - f(y)|^p dx$ y por lo tanto existe $y \in G$ tal que

$$\int_G |f(x) - f(y)|^p dx dy \leq C \omega_1(f, |G|^{\frac{1}{d}}, G)_p^p$$

lo que finaliza la demostración tomando $\vartheta = f(y)$. \square

Corolario 3. Dado $0 < p < \infty$ y G como en el Lema 10, f es constante si y sólo si $\omega_1(f, t, G)_p = 0$ para algún $t > 0$.

Lema 11. Sean $0 < p < \infty$ y $r \in \mathbb{N}$. Si $\omega_r(f, t)_p = 0$ para algún $t > 0$ entonces f es un polinomio de grado $\geq r - 1$. Más precisamente, existe un polinomio $P \in \mathcal{P}^{r-1}$ tal que $f = P$ en casi todo punto.

Demostración. La demostración se encuentra en [DL93] y se basa en un resultado similar al anterior. \square

Definición 6. Diremos que un conjunto abierto y conexo $G \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio Lipschitz en \mathbb{R}^d si existe una familia finita de conos finitos $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^N$ de la forma $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i^+ \cup \mathcal{C}_i^-$ con $\mathcal{C}_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, x_{\mathcal{C}_i} \rangle \leq \alpha \|x\|_2 \text{ y } |\langle x, x_{\mathcal{C}_i} \rangle| \leq \beta\}$, $\mathcal{C}_i^- = \{x \in \mathbb{R}^d : -\langle x, x_{\mathcal{C}_i} \rangle \leq$

$\alpha \|x\|_2$ y $|\langle x, x_{C_i} \rangle| \leq \beta$ donde x_{C_i} es el vector unitario de dirección del cono C_i ; tales que para todo punto y de la frontera ∂G vale que $(y + C_i) \cap \partial G = \{y\}$, $(y + C_i) \cap \overline{G} = C_i^+$ y $(y + C_i) \cap G^c = C_i^-$ para algún $1 \leq i \leq N$. La constante α de la definición se llamará constante Lipschitz del dominio.

Observación 7. Hemos elegido esta definición de dominio Lipschitz porque es útil para el desarrollo de la tesis, otras definiciones equivalentes se pueden encontrar en [Sha83].

Lema 12 (Desigualdad de Marchaud). *Supongamos que $G \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio Lipschitz y $0 < p < \infty$, entonces:*

$$\omega_k(f, t)_p \leq Ct^k \left(\|f\|_{L^p(G)}^{p^*} + \int_t^{|G|^{\frac{1}{d}}} \frac{\omega_r(f, s)_p^{p^*}}{s^{kp^*+1}} ds \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (3.6)$$

para todo $0 < k < r$ donde $p^* = \min(p, 1)$ y C depende de p, k, r, d y la constante Lipschitz de G , pero no de f ni del tamaño de G .

Demostración. La demostración se encuentra en [DL93] para $d = 1$ y [Dit88] para $d \geq 2$. □

Lema 13. *Sea \mathcal{T} una malla admisible, $T \in \mathcal{T}$ y sea $G = T$ o $G = \widehat{T} = \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$, $0 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ y $M > 0$. Entonces, si un conjunto $\mathcal{F} \subset L^p(G)$ satisface:*

$$\omega_r(f, t)_p \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0, \text{ uniformemente para } f \in \mathcal{F} \quad (3.7)$$

y $\|f\|_{L^p(G)} \leq M$, entonces \mathcal{F} es precompacto.

Demostración. Demostraremos el resultado para $G = T$ ya que el otro caso es idéntico. Para $n = 1, 2, \dots$ aproximaremos $f \in \mathcal{F}$ por funciones constantes a trozos g que son constantes en los simpliciales que surgen de descomponer G en 2^n simpliciales obtenidos aplicando la regla de bisección del vértice más nuevo (de donde resulta claro que cada uno es regular y de tamaño $\frac{|G|}{2^n}$), que llamaremos G_j^n para $1 \leq j \leq 2^n$.

Por el Lema 10 sabemos que para cada G_j^n existe una constante ϑ_j^n tal que:

$$\|f - \vartheta_j^n\|_{L^p(G_j^n)} \leq C\omega_1(f, |G_j^n|^{\frac{1}{d}}, G_j^n)_p \leq C\omega_1(f, 2^{-\frac{n}{d}} |G|^{\frac{1}{d}}, G_j^n)_p$$

y definiendo $g_f^n(x) = \vartheta_j^n$ para $x \in G_j^n$ obtenemos, luego de elevar a la p y sumar las desigualdades resultantes, que:

$$\|f - g\|_{L^p(G)} \leq Cw_1(f, 2^{-\frac{n}{d}} |G|^{\frac{1}{d}}, G)_p \leq C\omega_1(f, 2^{-\frac{n}{d}} |G|^{\frac{1}{d}}, G)_p. \quad (3.8)$$

Sea ahora $\epsilon > 0$ dado, por (3.7) y (3.8), podemos elegir n suficientemente grande tal que:

$$\|f - g_f^n\|_{L^p(G)} < \epsilon, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Por esto y por (3.7) se sigue que el conjunto \mathcal{F}_1 de todas las funciones g constantes a trozos sobre G (particionando por la regla del vértice más nuevo) satisfaciendo (3.8) es acotado. Es precompacto como subconjunto de un subespacio de dimensión finita de $L^p(G)$. Existe entonces una ϵ -red finita para \mathcal{F}_1 , y por lo tanto una 3ϵ -red finita para \mathcal{F} . Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se sigue que \mathcal{F} es precompacto. \square

Definiremos a continuación el *K funcional*, que es muy útil para definir la interpolación entre espacios funcionales. Para ello hace falta definir lo que se entiende por *espacios compatibles*.

Definición 7. Un par (X_0, X_1) de espacios de casi-Banach X_0 y X_1 se dicen compatible si existe un espacio vectorial topológico de Hausdorff \mathcal{X} en el que X_0 y X_1 están continuamente inmersos.

Observación 8. El espacio vectorial topológico \mathcal{X} mencionado en la definición anterior, puede ser tomado como el espacio $\mathcal{S}'(G)$ de las distribuciones en G para los pares (X_0, X_1) que utilizaremos en este trabajo.

Definición 8. Dado un par de espacios casi-Banach compatibles (X_0, X_1) , llamaremos *K-funcional* al funcional definido para cada $f \in X_0 + X_1$ y $t > 0$ como

$$K(f, t; X_0, X_1) = \inf\{\|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_1} : f = f_0 + f_1\} \quad (3.9)$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de f como $f = f_0 + f_1$ con $f_0 \in X_0$ y $f_1 \in X_1$.

El siguiente lema establece un resultado fundamental que relaciona el K -funcional recién definido, entre espacios de Sobolev con el módulo de continuidad ω_r definido anteriormente.

Lema 14. *Sea $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ y $G \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz, entonces existen dos constantes $c_2 \geq c_1 > 0$, que sólo dependen de la constante Lipschitz de G , r y p , tales que:*

$$c_1 \omega_r(f, t, G)_p \leq K(f, t^r; L^p(G), W_r^p(G)) \leq c_2 \omega_r(f, t, G)_p \quad (3.10)$$

para todo $0 < t < |G|^{\frac{1}{d}}$.

Demostración. La demostración de este lema se puede encontrar en [JS77]. \square

3.2. Aproximación por Polinomios

Definición 9. *Para $0 < p \leq \infty$ llamaremos mejor error por aproximación polinómica de orden r en $L^p(G)$ a:*

$$E_r(f, G)_p := \inf_{g \in \mathcal{P}^{r-1}} \|f - g\|_{L^p(G)}. \quad (3.11)$$

Lema 15 (Lema de Whitney). *Sea \mathcal{T} una malla admisible, $T \in \mathcal{T}$ y sea $G = T$ o $G = \widehat{T} = \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$. Si $f \in L^p(G)$, $0 < p < \infty$ y $r \geq 1$, entonces existe c tal que:*

$$E_r(f, G)_p \leq c \omega_r(f, G)_p \quad (3.12)$$

donde c depende de p , r , d si $G = T$, y de p , r , d y la regularidad de la malla si $G = \widehat{T}$, pero es independiente de la función f y del tamaño de G .

Demostración. Según la definición 4, es suficiente demostrar que

$$E_r(f, G) \leq c \omega_r(f, |G|^{1/d}, G)_p. \quad (3.13)$$

Consideremos primero el caso $1 \leq p < \infty$. Sea $g \in W_p^r(G)$, el espacio de Sobolev de funciones con derivadas débiles de orden $\leq r$ en $L^p(G)$. Por la teoría clásica de interpolación polinomial [BS08] existe un polinomio q de grado $\leq r - 1$ tal que:

$$\|g - q\|_{L^p(G)} \leq C |G|^{\frac{r}{d}} \|D^r g\|_{L^p(G)}.$$

Por lo tanto, para $f \in L^p(G)$

$$\|f - q\|_{L^p(G)} \leq C \left(\|f - g\|_{L^p(G)} + |G|^{\frac{r}{a}} \|D^r g\|_{L^p(G)} \right).$$

Luego tomando ínfimo sobre $g \in W_p^r(G)$ y sobre $q \in \mathcal{P}^{r-1}$ obtenemos, usando (3.10)

$$E_r(f, G)_p \leq CK(f, |G|^{\frac{r}{a}}, L^p(G), W_p^r(G)) \leq C\omega_r(f, |G|^{\frac{1}{a}}, G)_p,$$

lo que termina de demostrar el resultado para $1 \leq p < \infty$.

Para probar el resultado en el caso $0 < p < 1$ supongamos que (3.13) es falso, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá $f_n \in L^p(G)$ tal que $E_r(f_n, G)_p = \|f_n\|_{L^p(G)} = 1$ y $\omega_r(f_n, |G|^{\frac{1}{a}}, G)_p \leq \frac{1}{n}$. Como $\omega_r(f_n, t)_p \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\omega_r(f_n, t)_p \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $0 < t \leq |G|^{\frac{1}{a}}$, esta convergencia es uniforme en n . Por lo tanto el conjunto $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es precompacto por el Lema 13. Luego existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tal que $f_{n_k} \rightarrow f$ cuando $k \rightarrow \infty$ en $L^p(G)$ para algún $f \in L^p(G)$. Entonces $\omega_r(f, t)_p = 0$ para todo $0 < t < |G|^{\frac{1}{a}}$ y por el Lema 11 sabemos que $f = P$ en casi todo punto para algún $P \in \mathcal{P}^{r-1}$. Esto contradice que $E_r(f, G)_p = 1$, lo que concluye la demostración. \square

Lema 16. Sea \mathcal{T} una malla admisible, $T \in \mathcal{T}$ y sea $G = T$ o $G = \widehat{T} = \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$, $0 < p, q \leq \infty$, $r \geq 1$. Entonces existen dos constantes c_4, c_5 tales que:

$$c_4 \|g\|_{L^p(G)} \leq |G|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|g\|_{L^q(G)} \leq c_5 \|g\|_{L^p(G)}, \quad \forall g \in \mathcal{P}^{r-1}, \quad (3.14)$$

donde las constantes c_4, c_5 sólo dependen de p, q, r y la regularidad de la malla, pero son independientes del tamaño de G .

Demostración. La demostración sólo consiste de un argumento estandar de escalamiento a una situación de referencia y la equivalencia de normas en dimensión finita. \square

Definición 10. Dada $f \in L^p(G)$ diremos que una función $g \in \mathcal{P}^{r-1}$ es una casi mejor aproximación L^p de f por \mathcal{P}^{r-1} en G con constante $A > 1$ si:

$$\|f - g\|_{L^p(G)} \leq AE_r(f, G)_p. \quad (3.15)$$

Lema 17. Sean $0 < \rho \leq p \leq \infty$ y $g \in \mathcal{P}^{r-1}$ una casi mejor aproximación L^p de f por \mathcal{P}^{r-1} en G con constante A . Entonces g es una casi mejor aproximación L^p de f por

\mathcal{P}^{r-1} en G con constante cA , donde c depende de r , p , ρ y la regularidad de la malla, pero es independiente del tamaño de G y de las funciones f y g .

Demostración. Sean f y g como en las hipótesis, y sea $h \in \mathcal{P}^{r-1}$ una mejor aproximación L^p de f . Como ρ, p pueden ser menores a 1, la desigualdad triangular se cumple con una constante c , y entonces por el Lema 16,

$$\begin{aligned} \|f - g\|_p &\leq c(E_r(f, G)_p + \|g - h\|_{L^p(G)}) \\ &\leq c(E_r(f, G)_p + |G|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\rho}} \|g - h\|_{L^\rho(G)}) \\ &\leq c(E_r(f, G)_p + |G|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\rho}} [\|f - g\|_{L^\rho(G)} + \|f - h\|_{L^\rho(G)}]) \\ &\leq c(E_r(f, G)_p + |G|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\rho}} (A + 1) \|f - h\|_{L^\rho(G)}) \end{aligned}$$

Ahora, como $\rho \leq p$ la desigualdad de Hölder implica $|G|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\rho}} \|f - h\|_{L^\rho(G)} \leq \|f - h\|_{L^p(G)}$.

Por lo tanto

$$\|f - g\|_{L^p(G)} \leq c(E_r(f, G)_p + (A + 1) \|f - h\|_{L^p(G)}) \leq cAE_r(f, G)_p \quad (3.16)$$

y el lema queda probado. \square

3.3. Espacios de Besov vía Módulo de Suavidad

El espacio de Besov $B_{p,q}^s(\Omega)$, para $s > 0$ y $0 < q, p \leq \infty$, es el conjunto de todas las funciones $f \in L^p(\Omega)$ tales que la semi-(casi)norma:

$$|f|_{B_{p,q}^s(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-s} \omega_r(f, t)_p]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{-s} \omega_r(f, t)_p, & \text{si } q = \infty \end{cases} \quad (3.17)$$

es finita, donde $r > s$ (usualmente $r = [s] + 1$).

La (casi)norma de $B_{p,q}^s(\Omega)$ se define como:

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{B_{p,q}^s(\Omega)} \quad (3.18)$$

La definición (3.17) es independiente de r en el sentido de que si r es reemplazado por $r' > s$, entonces el espacio resultante es el mismo con normas equivalentes. La condición

$r > s$ no debe ser vista como una restricción en s sino como la necesidad de acomodar el valor de r para definir correctamente al espacio $B_{p,q}^s(\Omega)$. Esta situación cambia cuando $p < 1$, donde para un r fijo la definición de la seminorma (3.17) sigue dando normas equivalentes para un mayor rango de s . La restricción $r > s$ en (3.17) ya no es necesaria cuando $p < 1$, sino que basta tomar $0 < s < r - 1 + \frac{1}{p}$.

Suele ser conveniente usar la siguiente equivalencia:

$$|f|_{B_{p,q}^s(\Omega)} \simeq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{msq} \omega_r(f, 2^{-m})_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.19)$$

que es inmediata por (3.17) utilizando las propiedades de decaimiento de $\omega_r(f, t)_p$ (ver lemma 8).

Otra seminorma equivalente en $B_{p,p}^s(\Omega)$ ($p = q$) se deduce de (3.17) usando la equivalencia del Lema 9, obteniendo:

$$|f|_{B_{p,p}^s(\Omega)} \simeq |f|_{B_{p,p}^s(\Omega)}^w := \left(\int_{\Omega} \int_0^{\infty} \int_{[0,t]^d} |\Delta_h^r(f, x, \Omega)|^{pt^{-sp-d-1}} dh dt dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.20)$$

con constantes de equivalencia dependiendo sólo de p , r y la constante Lipschitz del dominio.

A continuación enunciaremos un importante resultado de inmersión para espacios de Besov, cuya demostración se encuentra en los libros [Pee76, Tri78, Tri83, Tri92]:

Teorema 6. Sean Ω un dominio Lipschitz, $\alpha, \beta > 0$, $0 < p, q, \tau, t \leq \infty$. Entonces la siguiente inmersión de espacios

$$B_{p,q}^{\alpha}(\Omega) \longmapsto B_{\tau,t}^{\beta}(\Omega) \quad (3.21)$$

es válida con continuidad si ocurre alguno de los siguientes casos:

1. $p \leq \tau$ y $\alpha - \frac{d}{p} > \beta - \frac{d}{\tau}$
2. $p \leq \tau$, $\alpha - \frac{d}{p} = \beta - \frac{d}{\tau}$ y $q \leq t$.

Observación 9. Este resultado de inmersión dice que cada vez que una función tenga regularidad α con un índice de integración p , también tiene regularidad β ($< \alpha$) con el índice de integración $\tau \geq p$ si $\alpha - \frac{d}{p} > \beta - \frac{d}{\tau}$ independientemente del índice de integración

secundario q de la definición. Este es el mismo resultado de inmersión que se cumple para los espacios de Sobolev, salvando la diferencia de que no se pueden utilizar índices de integración menores a uno.

Demostración. La demostración de este teorema para \mathbb{R}^d o dominios C^∞ se puede encontrar en [Pee76, Tri78, Tri83, Tri92] y su extensión a dominios Lipschitz en los trabajos más recientes [Tri02, Tri06] \square

Definición 11. *Dada una pareja compatible (X_0, X_1) de espacios casi-Banach X_0 y X_1 , $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, definimos la norma de interpolación*

$$\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q}} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(f, t; X_0, X_1)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(f, t; X_0, X_1), & \text{si } q = \infty \end{cases} \quad (3.22)$$

y el espacio de interpolación $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ como el espacio formado por todas las $f \in X_0 + X_1$ tales que $\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q}}$ es finita.

Teorema 7. *Sea $s_0 \in \mathbb{R}$, $s_1 \in \mathbb{R}$, $0 < q_0 \leq \infty$, $0 < q_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < p < \infty$ y G un dominio acotado Lipschitz. Sea $0 < \theta < 1$ y $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$, entonces:*

$$(B_{p, q_0}^{s_0}(G), B_{p, q_1}^{s_1}(G))_{\theta, q} = B_{p, q}^s(G). \quad (3.23)$$

Demostración. La demostración de este teorema para \mathbb{R}^d o dominios C^∞ se puede encontrar en [Pee76, Tri78, Tri83, Tri92] y su extensión a dominios Lipschitz en [Tri02, Tri06] \square

Mencionamos a continuación algunos resultados clásicos de espacios funcionales con el solo fin de clarificar la “ubicación” de los espacios de Besov con respecto a otros espacios clásicos. Lo primero que es importante notar es que:

$$B_{p, q}^s \subset W_p^s, \quad \text{si } q > 2 \text{ y } p \geq 1$$

$$B_{p, q}^s \supset W_p^s, \quad \text{si } q < 2 \text{ y } p \geq 1$$

aunque no es cierto que $W_p^s = B_{p,2}^s$. Este resultado se cumple sólo cuando $p = 2$, es decir, la únicas igualdades entre espacios de Besov y Sobolev son

$$B_{2,2}^s = W_2^s, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3.24)$$

Por otro lado, debemos aquí mencionar a los espacios de Triebel-Lizorkin $F_{p,q}^s$ para los que vale $F_{p,2}^s = W_p^s$ para todo $1 \leq p \leq \infty$, y $F_{p,p}^s = B_{p,p}^s$ para todo $0 < p \leq \infty$.

Capítulo 4

Espacios de Besov y Clases de Aproximación

En el Capítulo 2 hemos demostrado que las funciones que se pueden escribir como suma de una parte regular (Sobolev) y una parte con singularidades localizadas, se pueden aproximar con decaimiento óptimo con elementos finitos adaptativos. Ese resultado está lejos de ser una *caracterización* de la clase de funciones para las que se obtiene dicho decaimiento. En el presente capítulo describiremos una clase de funciones en términos de regularidad Besov para las cuales se obtiene el decaimiento óptimo del error (Sección 4.5. Teoremas Directos). Si bien tampoco se obtiene una caracterización, se demuestra una especie de resultado recíproco para una clase de funciones levemente mayor (Sección 4.6. Teoremas Inversos).

4.1. Base y Casi-interpolador

En este capítulo, dada una malla admisible \mathcal{T} , llamaremos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ al espacio de elementos finitos de Lagrange de grado $r - 1$,

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} = \{v \in H^1(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}^{r-1}, \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

Para la construcción de un operador de casi-interpolación que resulte una *casi-mejor aproximación* localmente en L^p , aún para $0 < p < \infty$, hará falta utilizar una base dual a la base nodal. Comenzamos definiendo lo que entendemos por base canónica o nodal.

Dado el conjunto $\Xi_{\mathcal{T}} = \{\nu : \nu \text{ es un nodo de } \mathcal{T}\}$ definimos, para cada $\nu \in \Xi_{\mathcal{T}}$, la función base ϕ_{ν} como la única función del espacio de elementos finitos que vale 1 en el nodo ν y cero en el resto de los nodos. Llamaremos base canónica o nodal de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ a $\{\phi_{\nu}\}_{\Xi_{\mathcal{T}}}$.

Lema 18. *Sea $0 < p < \infty$ y $g = \sum_{\nu \in \Xi_{\mathcal{T}}} a_{\nu} \phi_{\nu}$, entonces existen dos constantes c, C tales que:*

$$c \|g\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\sum_{\nu \in \Xi_{\mathcal{T}}} \|a_{\nu} \phi_{\nu}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|g\|_{L^p(\Omega)} \quad (4.1)$$

donde c, C sólo dependen de p , del grado polinomial $r - 1$ del espacio de elementos finitos y de la regularidad de la malla.

Demostración. Este resultado se puede demostrar fácilmente utilizando argumentos estándares de localización. \square

Para construir su base dual (en el sentido de los operadores) nos restringiremos inicialmente a un elemento T y allí generaremos la base biortonormal dual a $\{\phi_{\nu}|_T\}_{\Xi_{\mathcal{T}}}$ que llamaremos $\{\varsigma_{\nu}|_T\}_{\Xi_{\mathcal{T}}}$, donde $\varsigma_{\nu}|_T$ es el polinomio de grado r definido en T tal que $\int_T \varsigma_{\nu}|_T \phi_{\nu'}|_T = \delta_{\nu, \nu'}$ para todo $\nu' \in T$, y con ella construimos la base dual $\{\tilde{\phi}_{\nu}\}_{\Xi_{\mathcal{T}}}$, de la siguiente manera:

$$\tilde{\phi}_{\nu}|_T = \frac{1}{m_{\nu}} \sum_{\nu' \in T} \varsigma_{\nu'}|_T, \quad (4.2)$$

donde $\theta_{\nu} = \text{sop}(\phi_{\nu})$ y $m_{\nu} = \#\{T \in \mathcal{T} : \nu \in T\} = \#\{T \in \mathcal{T} : T \subset \theta_{\nu}\}$. Es fácil comprobar que para esta base dual valen las siguientes propiedades:

$$\langle \phi_{\nu}, \tilde{\phi}_{\nu'} \rangle = \int_{\Omega} \phi_{\nu} \tilde{\phi}_{\nu'} = \delta_{\nu, \nu'}, \quad (4.3)$$

$$\text{sop}(\tilde{\phi}_{\nu}) \subseteq \theta_{\nu} = \text{sop}(\phi_{\nu}) = \bigcup_{T \ni \nu} T, \quad (4.4)$$

y $\tilde{\phi}_{\nu}|_T \in \mathcal{P}^r$ para todo $T \in \mathcal{T}$, aunque en general $\tilde{\phi}_{\nu}$ es discontinua, como se puede apreciar en la figura 4.1.

Observación 10. El resultado del Lema 18 también es válido si reemplazamos $\{\phi_{\nu}\}_{\Xi_{\mathcal{T}}}$ por $\{\tilde{\phi}_{\nu}\}_{\Xi_{\mathcal{T}}}$.

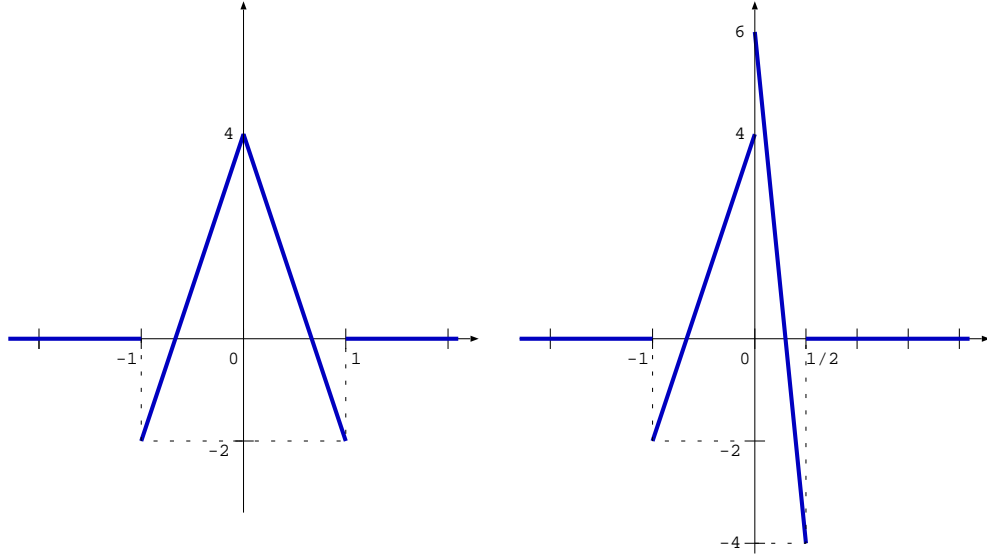


Figura 4.1: Dos posibles funciones $\tilde{\phi}_\nu$ para $d = 1$. En la primera los intervalos tienen la misma longitud y la función resulta continua en el nodo central, mientras que en la segunda los intervalos tienen distinta longitud y la función resulta discontinua en el nodo central. Ambas resultan discontinuas en el dominio puesto para el resto de los elementos su valor es 0.

Definición 12. Llamaremos proyector lineal del espacio de elementos finitos al operador $\mathcal{Q}_T : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_T$ definido por

$$\mathcal{Q}_T(f) := \sum_{\nu \in \Xi_T} \langle f, \tilde{\phi}_\nu \rangle \phi_\nu. \quad (4.5)$$

Observación 11. Vale la pena notar que:

- Si $f \in \mathbb{V}_T$, entonces $\mathcal{Q}_T(f) = f$.
- Si $f = g \chi_{\hat{T}}$, $g \in \mathcal{P}^r$, entonces $\mathcal{Q}_T(f)|_T = g|_T$, donde $\hat{T} = \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$. Es decir, si f es un polinomio en un entorno de elementos de T , entonces la proyección local de f coincide con f en T .

Lema 19. El proyector lineal del espacio de elementos finitos \mathcal{Q}_T posee las siguientes propiedades de acotación local:

1. Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\Omega)$, entonces existe una constante c tal que:

$$\|\mathcal{Q}_T(f)\|_{L^p(T)} \leq c \|f\|_{L^p(\hat{T})} \text{ para todo } T \in \mathcal{T}, \quad (4.6)$$

donde c depende de p , d , r y la regularidad de la malla, y \hat{T} denota al entorno

$$\hat{T} := \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}.$$

2. Si $0 < p < \infty$ y $g = \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T g_T$ con $g_T \in \mathcal{P}^r$, entonces existe una constante c tal que:

$$\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}(g)\|_{L^p(T)} \leq c \|g\|_{L^p(\hat{T})} \quad \text{para todo } T \in \mathcal{T}, \quad (4.7)$$

donde c depende de p , d , r y la regularidad de la malla, pero es independiente de la función g y del tamaño del elemento T .

Observación 12. Es importante notar que el punto 1 del lema anterior no es cierto para $p < 1$. Más aún, si $f \in L^p(\Omega)$ con $p < 1$, entonces $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ podría no estar definido, pues podría suceder que $f \tilde{\phi}_{\nu}$ no sea integrable.

Demostración. Para la primera parte notemos que utilizando (4.2) y (4.3), junto con un escalamiento de las funciones $\varsigma_{\nu}|_T$ a un elemento de referencia T_{ref} , el producto de $\|\tilde{\phi}_{\nu}\|_{L^{p'}(\Omega)}$ por $\|\phi_{\nu}\|_{L^p(\Omega)}$ resulta acotado uniformemente por una constante que sólo depende de p , r y de la regularidad de la malla, por lo tanto podemos obtener:

$$\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}(f)\|_{L^p(T)} \leq \sum_{\nu \in T} |\langle f, \tilde{\phi}_{\nu} \rangle| \|\phi_{\nu}\|_{L^p(T)} \quad (4.8)$$

$$\leq \sum_{\nu \in T} \|f\|_{L^p(\theta_{\nu})} \|\tilde{\phi}_{\nu}\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\phi_{\nu}\|_{L^p(\Omega)} \quad (4.9)$$

$$\leq c \sum_{\nu \in T} \|f\|_{L^p(\theta_{\nu})} \leq C \|f\|_{L^p(\hat{T})} \quad (4.10)$$

donde la última desigualdad se desprende del solapamiento finito de los θ_{ν} .

Para la segunda parte sólo probaremos el caso $0 < p < 1$ (el otro caso es un corolario de la primera parte de este lema). Si $g = \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T g_T$, por la Observación 10 y dado que $g|_{T'} = \sum_{\nu \in T'} \langle g, \varsigma_{\nu}|_{T'} \rangle_{T'} \phi_{\nu}|_{T'}$ para todo $T' \in \mathcal{T}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p(\hat{T})}^p &= \sum_{T' \subset \hat{T}} \|g\|_{L^p(T')}^p \\ &\simeq \sum_{T' \subset \hat{T}} \sum_{\nu \in T'} \|\langle g, \varsigma_{\nu}|_{T'} \rangle_{T'} \phi_{\nu}|_{T'}\|_{L^p(T')}^p \\ &= \sum_{T' \subset \hat{T}} \sum_{\nu \in T'} |\langle g, \varsigma_{\nu}|_{T'} \rangle_{T'}|^p \|\phi_{\nu}|_{T'}\|_{L^p(T')}^p \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}_T(g)\|_{L^p(T)}^p &\leq \sum_{\nu \in T} |\langle g, \tilde{\phi}_\nu \rangle|^p \|\phi_\nu\|_{L^p(\hat{T})}^p \\
&\leq C \sum_{T' \subset \hat{T}} \sum_{\nu \in T'} |\langle g, \varsigma_\nu|_{T'} \rangle_{T'}|^p \|\phi_\nu|_{T'}\|_{L^p(T')}^p \\
&\simeq \|g\|_{L^p(\hat{T})}^p
\end{aligned}$$

donde la constante C sólo depende de p , r y la regularidad de la malla, por lo tanto el teorema queda demostrado. \square

A continuación construiremos un proyector de casi-mejor aproximación local en L^p para $0 < p < \infty$. Dicho proyector cumplirá con ciertas propiedades que serán necesarias en las demostraciones de las secciones siguientes. La dificultad radica en la falta de convexidad de las bolas en L^p para $0 < p < 1$, que implica la probable existencia de múltiples elementos en \mathcal{P}^{r-1} que minimizan la distancia a una f dada.

Definición 13. Para $0 < p < \infty$ y G un dominio de \mathbb{R}^d , llamaremos proyector de casi-mejor aproximación local polinómica, al operador $\Pi_{p,G}^r$ que se define de la siguiente manera para $f \in L^p(G)$: Sean

- $E = \min_{g \in \mathcal{P}^{r-1}} \|f - g\|_{L^p(G)}$,
- $S = \{g \in \mathcal{P}^{r-1} : E = \|f - g\|_{L^p(G)}\}$,
- $\tilde{S} = \text{convexhull}(S)$,
- $W : \mathcal{P}^{r-1} \mapsto \mathbb{R}^k$ la transformación lineal canónica que a cada polinomio le hace corresponder el vector de sus coeficientes (aquí $k = \dim \mathcal{P}^{r-1}$), y
- $\bar{S} = W(\tilde{S})$.

Dado ahora un elemento cualquiera $\zeta \in \bar{S}$ definimos el espacio $X = \text{gen}\{\bar{S} - \zeta\}$ y sea \mathcal{L} la medida de Lebesgue en X (que será la medida de Dirac o de Hausdorff si X es un conjunto puntual). Utilizando este espacio y esta medida, defino el vector $\Lambda = \frac{1}{\mathcal{L}(\bar{S})} \int_{\bar{S}} \bar{\lambda} d\mathcal{L}(\bar{\lambda})$ y el operador se define entonces como $\Pi_{p,G}^r(f) := W^{-1}(\Lambda + \zeta)$.

Observación 13. Es importante notar que:

- El mínimo $\min_{g \in \mathcal{P}^{r-1}} \|f - g\|_{L^p(G)}$ se alcanza pues el espacio \mathcal{P}^{r-1} es de dimensión finita y por lo tanto su intersección con bolas cerradas de L^p son conjuntos compactos.
- Por el comentario anterior sabemos que $S \neq \emptyset$. Si $p > 1$, S resulta unitario. Si $0 < p < 1$, S puede ser un conjunto unitario, o bien un conjunto desconexo de polinomios, pues las bolas en L^p con $0 < p < 1$ son no-convexas. Si $p = 1$ entonces S puede ser un conjunto unitario o un conjunto conexo de polinomios, puesto que si bien las bolas en L^1 son convexas, no son estrictamente convexas.
- La idea de esta construcción es tomar como casi-mejor aproximación al baricentro de la cápsula convexa de S . Por eso consideramos a S y \tilde{S} inmersos en \mathbb{R}^k (a través de W) y definimos Γ de esa manera.
- El objetivo de esta definición es hallar un operador que se comporte como una proyección en el sentido que se cumplan las propiedades del teorema que se enuncia a continuación.

El siguiente teorema nos dice esencialmente que el operador $\Pi_{p,G}^r$ provee una casi-mejor aproximación en $L^p(G)$ y que es lineal con respecto a funciones en \mathcal{P}^{r-1} , si bien no es necesariamente lineal para $p \leq 1$.

Teorema 8. *El operador $\Pi_{p,G}^r$ posee las siguientes propiedades:*

- $\Pi_{p,G}^r$ está bien definido para $0 < p < \infty$ en $L^p(G)$.
- La siguiente acotación vale para $A = (\dim(\mathcal{P}^{r-1}) + 1)^{\frac{1-p}{p}}$ si $0 < p \leq 1$, o $A = 1$ si $1 < p < \infty$

$$\|f - \Pi_{p,G}^r(f)\|_{L^p(G)} \leq AE_r(f, G)_p. \quad (4.11)$$

por lo que $\Pi_{p,G}^r$ es un operador de casi-mejor aproximación en $L^p(G)$

- $\Pi_{p,G}^r$ es un operador acotado en $L^p(G)$ en el siguiente sentido

$$\|\Pi_{p,G}^r(f)\|_{L^p(G)} \leq (A + 1)\|f\|_{L^p(G)}$$

aunque no es necesariamente lineal si $0 < p < 1$.

- $\Pi_{p,G}^r$ es la identidad en \mathcal{P}^{r-1} .
- $\Pi_{p,G}^r$ es lineal con respecto a funciones de \mathcal{P}^{r-1} , esto es:

$$\Pi_{p,G}^r(f + g) = \Pi_{p,G}^r(f) + g \quad \forall f \in L^p(G), \quad \forall g \in \mathcal{P}^{r-1}. \quad (4.12)$$

Demostración. Para probar el primer punto notemos que para $1 < p < \infty$ el operador $\Pi_{p,G}^r$ es tan sólo la mejor aproximación en $L^p(G)$ y por lo tanto está bien definido. En el caso $0 < p \leq 1$, si el conjunto S es un conjunto puntual entonces este elemento será $\Pi_{p,G}^r(f)$ de donde resulta que $\Pi_{p,G}^r$ está bien definido; si el conjunto S tiene más de un punto entonces utilizando que \bar{S} es convexo obtenemos que $\Lambda \in \bar{S}$ por ser un promedio de los elementos de \bar{S} , y puesto que W^{-1} es lineal resulta que $\Pi_{p,G}^r(f) \in \tilde{S}$ y está bien definido.

Por lo visto en el párrafo anterior, el segundo ítem resulta trivial para $1 < p < \infty$. Para demostrarlo en el caso $0 < p \leq 1$ utilizaremos un Teorema Fundamental de Carathéodory [MIT03]. El mismo dice que todo elemento en la cápsula convexa \tilde{S} de un conjunto S de un espacio de dimensión finita k , es combinación convexa de a lo sumo $k+1$ elementos de S . Luego, puesto que $\Pi_{p,G}^r(f) \in \tilde{S}$ existe un conjunto $\{f_i\}_{i=0}^k$ de elementos de S (con $k \leq \dim(\mathcal{P}^{r-1}) + 1$) y un conjunto de números reales no negativos $\{\alpha_i\}_{i=0}^k$ con la propiedad de que $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$, tales que $\Pi_{p,G}^r(f) = \sum_{i=0}^k \alpha_i f_i$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|f - \Pi_{p,G}^r(f)\|_{L^p(G)}^p &= \left\| f - \sum_{i=0}^k \alpha_i f_i \right\|_{L^p(G)}^p = \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i (f - f_i) \right\|_{L^p(G)}^p \\ &\leq \sum_{i=0}^k \alpha_i^p \|f - f_i\|_{L^p(G)}^p = \sum_{i=0}^k \alpha_i^p E_r(f, G)_p^p \\ &= \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i^p \right) E_r(f, G)_p^p \leq (k+1)^{1-p} E_r(f, G)_p^p \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que los $f_i \in S$ para $0 \leq i \leq k$.

La acotación de operador en $L^p(G)$ se sigue del punto anterior haciendo

$$\begin{aligned} \|\Pi_{p,G}^r(f)\|_{L^p(G)} &\leq \|f\|_{L^p(G)} + \|f - \Pi_{p,G}^r(f)\|_{L^p(G)} \\ &\leq \|f\|_{L^p(G)} + A E_r(f, G)_p \leq (A+1) \|f\|_{L^p(G)}. \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{P}^{r-1}$ entonces $E_r(f, G) = 0$, y como $\Pi_{p,G}^r$ es un operador de casi-mejor aproximación, resulta $\|f - \Pi_{p,G}^r f\|_{L^p(G)} = 0$ y luego $\Pi_{p,G}^r$ es la identidad sobre \mathcal{P}^{r-1} .

La propiedad (4.12) es consecuencia del hecho que $S_{f+g} = S_f + g$ siempre que $f \in L^p(G)$ y $g \in \mathcal{P}^{r-1}$, y análogas igualdades se cumplen para el resto de los conjuntos que intervienen en la definición de $\Pi_{p,G}^r$. \square

Definición 14. Llamaremos proyector de casi-mejor aproximación global polinómica sobre \mathcal{T} , al operador $\Pi_{p,\mathcal{T}}^r$ que se define de la siguiente manera para $f \in L^p(\Omega)$:

$$\Pi_{p,\mathcal{T}}^r(f) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T \Pi_{p,T}^r(f)$$

donde χ_T es la función característica de T . Notemos que entonces $\Pi_{p,\mathcal{T}}^r(f)$ resulta una función polinomial a trozos sobre \mathcal{T} , que no es necesariamente continua.

Definición 15. Llamaremos interpolador de aproximación al operador $Q_{p,\mathcal{T}}$ definido como:

$$Q_{p,\mathcal{T}}(f) := \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}(\Pi_{p,\mathcal{T}}(f)) \quad (4.13)$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$, $0 < p < \infty$, donde $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ fue definido en (4.5).

El siguiente lema se deduce del Lema 17 y establece que tal operador $Q_{p,\mathcal{T}} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ resulta en una casi-mejor aproximación localmente. Más aún, el operador $Q_{\rho,\mathcal{T}}$, para $0 < \rho < \infty$, es una casi-mejor aproximación en L^p para todo $p > \rho$.

Lema 20. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $0 < \rho \leq p < \infty$, entonces existe una constante c tal que:

$$\|f - Q_{\rho,\mathcal{T}}(f)\|_{L^p(\mathcal{T})} \leq c E_r(f, \widehat{T})_p \quad (4.14)$$

donde c solo depende de p, ρ y la regularidad de la malla, es decir, la interpolación de aproximantes en L^p es una casi-mejor aproximación localmente en $L^p(\Omega)$ para $p \geq \rho$.

Demostración. El resultado es una consecuencia inmediata del Lema 17, de las definiciones 14 y 15 y del Teorema 8. \square

4.2. Espacios de Besov vía Descomposición Multi-escala

Sea \mathcal{T}_0 la malla inicial y definimos inductivamente la sucesión $\{\mathcal{T}_m\}_{m=0}^{\infty}$ de refinamientos uniformes de \mathcal{T}_0 . Es decir, \mathcal{T}_{m+1} se construye aplicando la bisección del vértice más nuevo d veces a \mathcal{T}_m .

Denotamos por $\Xi_m := \Xi_{\mathcal{T}_m}$ el conjunto de todos los nodos de la malla \mathcal{T}_m y sea $\Xi := \{(\nu, m) : \nu \in \Xi_m, 0 \leq m < \infty\}$ el conjunto de los todos los nodos de la sucesión de mallas $\{\mathcal{T}_m\}_{m=0}^\infty$ con su respectivo nivel, esta definición toma en cuenta que ν puede pertenecer a más de un nivel (cada vez que ν sea un vértice de una malla lo será también de todas las siguientes). Durante el resto de este trabajo se omitirá la mención del nivel y se los nombrará a (ν, m) por ν , y las funciones de base asociadas a (ν, m) se las nombrará como ϕ_ν .

Seleccionamos ρ suficientemente pequeño (luego se aclarará esto de forma más precisa) y denotamos $Q_m := Q_{\rho, \mathcal{T}_m}$. Definimos $q_m = Q_m - Q_{m-1}$, con $Q_{-1} = 0$.

Para $f \in L^p(\Omega)$ sea $\{b_\nu(f)\}_{\nu \in \Xi_m}$ el conjunto de coeficientes de $q_m(f)$ en la base canónica de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m}$, es decir

$$q_m(f) = \sum_{\nu \in \Xi_m} b_\nu(f) \phi_\nu. \quad (4.15)$$

Por la densidad de $\cup_{m=0}^\infty \mathbb{V}_{\mathcal{T}_m}$ en $L^p(\Omega)$, $\|f - Q_m(f)\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ y por lo tanto:

$$f = \sum_{m=0}^\infty q_m(f) = \sum_{m=0}^\infty \left[\sum_{\nu \in \Xi_m} b_\nu(f) \phi_\nu \right] \quad \text{en } L^p(\Omega). \quad (4.16)$$

El siguiente resultado establece expresiones equivalentes para normas de $B_{p,q}^s$ usando esta descomposición multiescala.

Teorema 9. *Sea Ω un dominio poliédrico Lipschitz, y sean b_ν, q_m, Q_m definidos para un $0 < \rho < \infty$ fijo como arriba. Entonces para $\rho < p < \infty$ y $0 < s < 1 + \frac{1}{p}$ las siguientes expresiones son normas equivalentes de $B_{p,q}^s$:*

$$\|f\|_{B_{p,q}^s}^Q := \left(\sum_{\nu \in \Xi} |\theta_\nu|^{-\frac{sq}{d}} \|b_\nu(f) \phi_\nu\|_{L^p(\Omega)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.17)$$

y

$$\|f\|_{B_{p,q}^s}^* := \inf_{f = \sum_{\nu \in \Xi} a_\nu \phi_\nu} \left(\sum_{\nu \in \Xi} |\theta_\nu|^{-\frac{sq}{d}} \|a_\nu \phi_\nu\|_{L^p(\Omega)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.18)$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de f de la forma: $f = \sum_{\nu \in \Xi} a_\nu \phi_\nu$ en $L^p(\Omega)$. Las constantes de equivalencia sólo dependen de p, q, s y la regularidad de la malla.

Demostración. Omitimos la demostración detallada de este resultado, pues es una adaptación inmediata de una que se encuentra en [Osw94, capítulo 2], utilizando las propiedades de casi-mejor aproximación de los operadores Q_m definidos en la sección anterior. La demostración de [Osw94] no utiliza una construcción concreta de Q_m sino solamente sus propiedades de casi-mejor aproximación. Una versión abstracta de este resultado se encuentra en [Pie81] \square

Observación 14. Vale la pena notar que si bien las expresiones (4.17) y (4.18) son equivalentes para $f \in B_{p,q}^s(\Omega)$, *no es cierto* en general que

$$f \in B_{p,q}^s(\Omega) \iff \|f\|_{B_{p,q}^s}^Q < \infty \quad \text{ó} \quad \|f\|_{B_{p,q}^s}^Q < \infty.$$

Esta identificación es cierta sólo cuando $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset B_{p,q}^s(\Omega)$ para toda malla admisible. Dado que sólo usamos elementos finitos C^0 , esta inclusión no es cierta para s grande.

4.3. Resultados de Inmersión y Aproximación

Para demostrar los resultados de este capítulo nos será útil considerar solamente mallas admisibles obtenidas a partir de una malla inicial por el procedimiento de bisección del vértice más nuevo. De esta manera, dada una de estas mallas \mathcal{T} y un elemento $T \in \mathcal{T}$, si $G = T$ o $G = \widehat{T} = \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$, y si definimos G^{ref} como el conjunto que resulta al multiplicarlo por $|G|^{-\frac{1}{d}}$ ($G^{\text{ref}} = |G|^{-\frac{1}{d}}G$), obtenemos (salvo rotaciones y traslaciones) una familia finita de conjuntos de referencia G^{ref} con $|G^{\text{ref}}| \simeq 1$. El escalamiento de las seminormas de Besov es entonces el siguiente para $\beta > 0$, $0 < q < \infty$ y $f \in B_{q,q}^\beta(G)$:

$$\begin{aligned} |f|_{B_{q,q}^\beta(G)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{-\beta} \omega_r(f, t, G)_q \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\simeq |G|^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left(t^{-\beta} \omega_r(f^{\text{ref}}, \frac{t}{|G|^{\frac{1}{d}}}, G^{\text{ref}})_q \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |G|^{\frac{1}{q} - \frac{\beta}{d}} \left(\int_0^\infty \left(s^{-\beta} \omega_r(f^{\text{ref}}, s, G^{\text{ref}})_q \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |G|^{\frac{1}{q} - \frac{\beta}{d}} |f^{\text{ref}}|_{B_{q,q}^\beta(G^{\text{ref}})}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde $f^{\text{ref}} : G^{\text{ref}} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f^{\text{ref}}(x) = f(|G|^{\frac{1}{d}}x)$, para $x \in G^{\text{ref}}$.

El siguiente resultado relaciona el mejor error de aproximación local con la regularidad Besov, y a través de un argumento de escala permite acotar el error con una potencia del tamaño del dominio local considerado.

Lema 21. *Sea \mathcal{T} una malla admisible, y $T \in \mathcal{T}$. Sean $0 < p < \infty$, $s > 0$, $\frac{1}{\tau} \leq \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$, $\delta = \frac{s}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{\tau}$. Si $G = T$ o $G = \widehat{T} = \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$, entonces para $s \leq \max(r + \frac{1}{\tau}, r + 1)$ vale:*

$$E_r(f, G)_p \leq C|G|^\delta |f|_{B_{\tau, \tau}^s(G)}. \quad (4.20)$$

donde C depende de s , τ , p , d y de la regularidad de la malla.

Demostración. Supongamos inicialmente que $G = G^{\text{ref}}$ y por lo tanto $|G| \simeq 1$. Por el lema de Whitney, (3.12), sabemos que:

$$E_r(f, G)_\tau \leq C\omega_r(f, 1, G)_\tau \leq C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks\tau} \omega_r(f, 2^{-k}, G)_\tau^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \simeq |f|_{B_{\tau, \tau}^s(G)},$$

por (3.19). Además, para cualquier polinomio $P \in \mathcal{P}^{r-1}$, por el Teorema 6 de inmersión de espacios de Besov,

$$\begin{aligned} E_r(f, G)_p &\leq \|f - P\|_{L^p(G)} \leq C \left(\|f - P\|_{L^\tau(G)} + |f - P|_{B_{\tau, \tau}^s(G)} \right) \\ &= C \left(\|f - P\|_{L^\tau(G)} + |f|_{B_{\tau, \tau}^s(G)} \right) \end{aligned}$$

pues en la definición de la seminorma $|\cdot|_{B_{\tau, \tau}^s(G)}$ se utilizan diferencias de orden r que se anulan para cualquier $P \in \mathcal{P}^{r-1}$. Eligiendo P un mejor aproximante para f en $L^\tau(G)$ obtenemos el resultado deseado para G de referencia. El caso general se sigue de aplicar el escalamiento (4.19) al caso probado, en efecto:

$$\begin{aligned} E_r(f, G)_p &\leq C|G|^{\frac{1}{p}} E_r(f^{\text{ref}}, G^{\text{ref}})_p \\ &\leq C|G|^{\frac{1}{p}} |f^{\text{ref}}|_{B_{\tau, \tau}^s(G^{\text{ref}})} \\ &\leq C|G|^{\frac{1}{p}} |G|^{-\frac{1}{\tau} + \frac{s}{d}} |f|_{B_{\tau, \tau}^s(G)} = C|G|^\delta |f|_{B_{\tau, \tau}^s(G)}, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. \square

Lema 22. *Sea \mathcal{T} una malla admisible, y $T \in \mathcal{T}$. Sean $0 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1 + \frac{1}{p}$, $s > 0$, $\frac{1}{\tau} \leq \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$ y $\delta = \frac{s}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{\tau}$. Si $G = T$ o $G = \widehat{T} = \{T' \in \mathcal{T} : T \cap T' \neq \emptyset\}$, entonces para*

$\alpha + s \leq \max(r + \frac{1}{\tau}, r + 1)$ vale:

$$|f - Q(f)|_{B_{p,p}^\alpha(G)} \leq C|G|^\delta |f|_{B_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(G)}, \quad (4.21)$$

donde $Q(f)$ es $Q_{\rho,\mathcal{T}}$ para algún $\rho \leq \min(p, \tau)$, y C depende de ρ, p, τ, s, α y la regularidad de la malla.

Demostración. Supongamos inicialmente que $G = |T|^{-\frac{1}{d}}T$ y luego $|G| \simeq 1$. Por el Teorema 6 de inmersión de espacios de Besov y por el lema anterior:

$$\begin{aligned} |f - Q(f)|_{B_{p,p}^\alpha(G)} &\leq C(\|f - Q(f)\|_{L^\tau(G)} + |f - Q(f)|_{B_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(G)}) \\ &\leq C(\|f - Q(f)\|_{L^p(G)} + |f|_{B_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(G)}) \\ &\leq C(E_r(f, G)_p + |f|_{B_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(G)}) \\ &\leq C|f|_{B_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(G)}. \end{aligned}$$

Luego el resultado está probado en el caso en que G es un elemento T escalado con $|T|^{-\frac{1}{d}}$. El caso en que T es un elemento cualquiera de \mathcal{T} se sigue mediante argumentos de escalamiento estándar, usando (4.19) a ambos lados de la desigualdad.

Si $G = \widehat{T}$ notemos que utilizando las normas equivalentes de descomposición multi-escala (ver Teorema 9) obtenemos:

$$|f - Q(f)|_{B_{p,p}^\alpha(G)}^p \simeq \sum_{T' \subset G} |f - Q(f)|_{B_{p,p}^\alpha(T')},$$

con constantes de equivalencia que dependerán de la cantidad máxima de elementos que puede haber en \widehat{T} , cantidad que depende a su vez de la regularidad de la malla. A partir de esta equivalencia se obtiene el resultado deseado. \square

4.4. Resultados Auxiliares

Lema 23 (Desigualdad de Hardy discreta). Sean $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, dos sucesiones de números reales positivos tales que para algún $C_0 > 0$ y $\mu > 0$, vale la desigualdad:

$$z_k \leq C_0 \left(\sum_{j=k}^{\infty} a_j^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.22)$$

Entonces para todo $s > 0$ y $q > 0$, existe $C = C(s, q)$ tal que:

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{ks} z_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq CC_0 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{ks} a_k)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.23)$$

Demostración. Si la desigualdad (4.22) vale para μ entonces tiene que valer para valores menores de μ , ya que la norma $\ell^\mu(\mathbb{Z})$ se vuelve más grande cuando μ decrece. Por lo tanto podemos suponer que $\mu < q$. Tomamos $0 < \beta < s$ y escribimos $a_j = 2^{j\beta} a_j 2^{-j\beta}$ en la desigualdad (4.22). Entonces utilizando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{q}{\mu}$ y su conjugado $\frac{q}{\mu - 1} \cdot \frac{1}{\mu} =: \frac{q'}{\mu}$, obtenemos que para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$z_k \leq C_0 \left(\sum_{j=k}^{\infty} [2^{j\beta} a_j]^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\beta q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \quad (4.24)$$

$$\leq CC_0 2^{-k\beta} \left(\sum_{j=k}^{\infty} [2^{j\beta} a_j]^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.25)$$

De donde se sigue que:

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} [2^{ks} z_k]^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq CC_0 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[2^{ks} 2^{-k\beta} \left(\sum_{j=k}^{\infty} [2^{j\beta} a_j]^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.26)$$

$$= CC_0 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{k(s-\beta)q} 2^{j\beta q} a_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.27)$$

$$= CC_0 \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^j 2^{k(s-\beta)q} 2^{j\beta q} a_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.28)$$

$$= CC_0 \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k=-\infty}^j 2^{k(s-\beta)q} \right) 2^{j\beta q} a_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.29)$$

$$\leq CC_0 \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j(s-\beta)q} 2^{j\beta q} a_j^q \right)^{\frac{1}{q}} = CC_0 \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} [2^{js} a_j]^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (4.30)$$

lo que demuestra el lema. \square

Lema 24. Sea $f \in B_{p,p}^\alpha(\Omega)$, con $0 < p < \infty$ y $0 < \alpha < 1 + \frac{1}{p}$. Supongamos que $0 < \rho < p$ y $Q_{\mathcal{T}} = Q_{\rho, \mathcal{T}}$ es el casi-interpolador de la Definición 15. Entonces para cualquier malla admisible \mathcal{T} de Ω tenemos:

$$|f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_{p,p}^\alpha(\Omega)}^p \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}} |f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_{p,p}^\alpha(\hat{T})}^p, \quad (4.31)$$

donde c depende de p, ρ, α, d, r y la regularidad de la malla. Además

$$\|f - Q_{\mathcal{T}}(f)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}} |f - Q_T(f)|_{B_{p,p}^\alpha(\hat{T})}^p, \quad (4.32)$$

donde c depende de $p, \rho, \alpha, d, r, \text{diam}(\Omega)$ y la regularidad de la malla.

Demostración. A los efectos de la demostración de este resultado consideremos \mathcal{T} como una malla inicial \mathcal{T}_0 y $\{\mathcal{T}_m\}_{m=0}^\infty$ una sucesión de refinamientos uniformes como en la Sección 4.2. Entonces

$$f - Q_{\mathcal{T}}(f) = f - q_0(f) = \sum_{m=1}^\infty q_m(f) = \sum_{m=1}^\infty \left(\sum_{\nu \in \Xi_m} b_\nu(f) \phi_\nu \right) \quad \text{en } L^p(\Omega), \quad (4.33)$$

donde $q_m = Q_m - Q_{m-1}$ y $\{b_\nu(f)\}$ son los definidos en (4.15).

Definimos $\Psi_j = \{\nu \in \Xi : 2^{-j-1} < |\theta_\nu|^{\frac{1}{d}} \leq 2^{-j}\}$ y $g_j = \sum_{\nu \in \Psi_j} b_\nu(f) \phi_\nu$. Existe entonces una constante c , que depende sólo de d y de la regularidad de la malla, tal que a lo sumo c entornos θ_ν , con $\nu \in \Psi_j$ se van a superponer, y por lo tanto:

$$\omega_r(g_j, t)_p^p \lesssim \|g_j\|_{L^p(\Omega)}^p \lesssim \sum_{\nu \in \Psi_j} \|b_\nu(f) \phi_\nu\|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (4.34)$$

Como $\|\phi_\nu\|_\infty = 1$ y ϕ_ν es continua Lipschitz con constante Lipschitz $\simeq |\theta_\nu|^{-\frac{1}{d}}$, siempre se cumple que si $|h| \leq t$,

$$|\Delta_h^r \phi_\nu| \lesssim \frac{t}{|\theta_\nu|^{\frac{1}{d}}}.$$

Además, para $|h| \leq t$, el soporte de $\Delta_h^r \phi_\nu$ está contenido en un entorno de radio rt del “esqueleto” de θ_ν , es decir, de la unión de lados de la triangulación que tocan θ_ν , como se observa en el Gráfico 4.2.

Por lo tanto, para $t \leq |\theta_\nu|^{\frac{1}{d}}$,

$$|\text{sop}(\Delta_h^r \phi_\nu)| \lesssim |\theta_\nu|^{\frac{d-1}{d}} t.$$

Finalmente obtenemos la siguiente cota para el módulo de suavidad de ϕ_ν

$$\omega_r(\phi_\nu, t)_p^p = \sup_{|H| \leq t} \|\Delta_H^r \phi_\nu\|_{L^p(\Omega)}^p \lesssim \begin{cases} |\theta_\nu|^{\frac{d-1-p}{d}} t^{1+p}, & \text{si } 0 < t < |\theta_\nu|^{\frac{1}{d}}, \\ |\theta_\nu|, & \text{si } t \geq |\theta_\nu|^{\frac{1}{d}}. \end{cases} \quad (4.35)$$

Entonces si $j < m$, usando el solapamiento finito en Ψ_j , obtenemos:

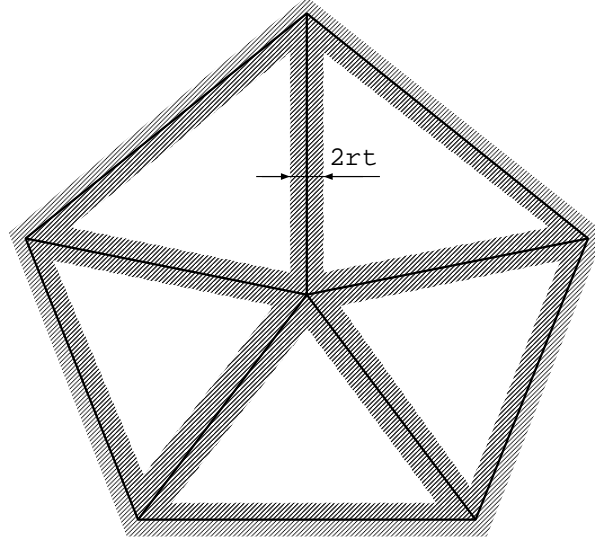


Figura 4.2: “Esqueleto” de θ_ν y entorno de radio rt que contiene al soporte de $\Delta_h^r \phi_\nu$.

$$\begin{aligned} \omega_r(g_j, 2^{-m})_p^p &\lesssim \sum_{\nu \in \Psi_j} \omega_r(b_\nu(f)\phi_\nu, 2^{-m})_p^p \lesssim 2^{-m(1+p)} 2^{-j(d-1-p)} \sum_{\nu \in \Psi_j} |b_\nu(f)|^p \\ &\simeq 2^{-(m-j)(1+p)} \sum_{\nu \in \Psi_j} \|b_\nu(f)\phi_\nu\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde usamos que $\|\phi_\nu\|_{L^p(\Omega)}^p \simeq |\theta_\nu| \simeq 2^{-jd}$ si $\nu \in \Psi_j$.

Tomando $p^* = \min(p, 1)$, usando (4.34) para $j \geq m$ y (4.36) para $j < m$ obtenemos obtenemos que:

$$\begin{aligned} \omega_r(f - Q_T(f), 2^{-m})_p^{p^*} &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega_r(g_j, 2^{-m})_p^{p^*} \\ &\lesssim \sum_{j=m+1}^{\infty} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} \|b_\nu(f)\phi_\nu\|_p^p \right)^{\frac{p^*}{p}} \\ &\quad + \sum_{j=-\infty}^m 2^{-(m-j)(1+p)\frac{p^*}{p}} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} \|b_\nu(f)\phi_\nu\|_p^p \right)^{\frac{p^*}{p}} \\ &\simeq \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-j\alpha p^*} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} |\theta_\nu|^{-\frac{\alpha p}{d}} \|b_\nu(f)\phi_\nu\|_p^p \right)^{\frac{p^*}{p}} \\ &\quad + \sum_{j=-\infty}^m 2^{-(m-j)(1+p)\frac{p^*}{p}} 2^{-j\alpha p^*} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} |\theta_\nu|^{-\frac{\alpha p}{d}} \|b_\nu(f)\phi_\nu\|_p^p \right)^{\frac{p^*}{p}}. \end{aligned}$$

Definimos $K_\nu = |\theta_\nu|^{-\frac{\alpha p}{d}} \|b_\nu(f)\phi_\nu\|_p^p$ y transformamos la estimación anterior en:

$$\begin{aligned}
|f - Q_T(f)|_{B_{p,p}^\alpha(\Omega)}^p &\lesssim \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{m\alpha p} \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-j\alpha p^*} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} K_\nu \right)^{\frac{p^*}{p}} \right]^{\frac{p}{p^*}} \\
&\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{m\alpha p} \left[\sum_{j=-\infty}^m 2^{-(m-j)(1+p)\frac{p^*}{p}} 2^{-j\alpha p^*} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} K_\nu \right)^{\frac{p^*}{p}} \right]^{\frac{p}{p^*}} \\
&\lesssim \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-(j-m)\alpha p^*} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} K_\nu \right)^{\frac{p^*}{p}} \right]^{\frac{p}{p^*}} \\
&\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{j=-\infty}^m 2^{-(m-j)(1+p-\alpha p)\frac{p^*}{p}} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} K_\nu \right)^{\frac{p^*}{p}} \right]^{\frac{p}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1 + \frac{1}{p}$ tenemos que $1 + p - \alpha p > 0$, y utilizando la desigualdad de Hardy con

$$a_j = 2^{-j\alpha} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} K_\nu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad z_m = \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} (2^{-j\alpha} \left(\sum_{\nu \in \Psi_j} K_\nu \right)^{\frac{1}{p}})^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

en la primera suma, y,

$$a_j = 2^{-j\frac{(1+p-\alpha p)}{p}} \left(\sum_{\nu \in \Psi_{-j}} K_\nu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad z_m = \left(\sum_{j=-\infty}^{-m} (2^{-j\frac{(1+p-\alpha p)}{p}} \left(\sum_{\nu \in \Psi_{-j}} K_\nu \right)^{\frac{1}{p}})^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

en la segunda suma, obtenemos que:

$$|f - Q_T(f)|_{B_{p,p}^\alpha(\Omega)}^p \lesssim \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu \in \Psi_j} K_\nu = \sum_{\nu \in \Xi'} |\theta_\nu|^{-\frac{\alpha p}{d}} \|b_\nu(f)\phi_\nu\|_p^p. \quad (4.37)$$

Tomemos ahora $\nu \in \Xi_m$ y $T \in \mathcal{T}^{[m]}$ tal que $T \subset \theta_\nu$ (o equivalentemente $\nu \in T$).

Llamaremos T' al ancestro de T en $\mathcal{T}^{[m-1]}$ (o sea el único $T' \in \mathcal{T}^{[m-1]}$ tal que $T \subset T'$).

Obtenemos entonces que por (4.14):

$$\begin{aligned}
\|b_\nu(f)\phi_\nu\| &\lesssim \|q_m(f)\|_{L^p(T)} \\
&\lesssim \|f - Q_m(f)\|_{L^p(T)} + \|f - Q_{m-1}(f)\|_{L^p(T')} \\
&\lesssim E_r(f, \widehat{T})_p + E_r(f, \widehat{T}')_p
\end{aligned}$$

de donde resulta, sumando (4.37) ahora sobre los elementos, que

$$|f - Q_T(f)|_{B_{p,p}^\alpha(\Omega)}^p \lesssim \sum_{T \in \mathbb{H}} |T|^{-\frac{\alpha p}{d}} E_r(f, \widehat{T})_p^p \quad (4.38)$$

donde $\mathbb{H} = \cup_{m=0}^{\infty} \mathcal{T}^{[m]}$. Dividimos esta suma de la siguiente manera:

$$|f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_{p,p}^{\alpha}(\Omega)}^p \lesssim \sum_{T^* \in \mathcal{T}} \sum_{T \in \mathbb{H}: \widehat{T} \subset \widehat{T}^*} |T|^{-\frac{\alpha p}{d}} E_r(f, \widehat{T})_p^p \lesssim \sum_{T^* \in \mathcal{T}} \sum_{T \in \mathbb{H}: \widehat{T} \subset \widehat{T}^*} |T|^{-\frac{\alpha p}{d}} \omega_r(f, \widehat{T})_p^p$$

donde en la última desigualdad usamos el Lema de Whitney (3.12).

Dejando fijo $T^* \in \mathcal{T}$ llamaremos $\mathcal{I}_j = \{T \in \mathbb{H} : \widehat{T} \subset \widehat{T}^* \text{ y } 2^{-j-1} < |T|^{\frac{1}{d}} \leq 2^{-j}\}$, obtenemos ahora la estimación:

$$\sum_{T \in \mathcal{I}_j} |T|^{-\frac{\alpha p}{d}} \omega_r(f, \widehat{T})_p^p \lesssim 2^{j\alpha p} \sum_{T \in \mathcal{I}_j} w_r(f, 2^{-j}, \widehat{T})_p^p \lesssim 2^{j\alpha p} w_r(f, 2^{-j}, \widehat{T}^*)_p^p \lesssim 2^{j\alpha p} \omega_r(f, 2^{-j}, \widehat{T}^*)_p^p,$$

donde hemos usado que a lo sumo c elementos se pueden solapar, con c sólo dependiendo de la dimensión y de la regularidad de la malla. De aquí que:

$$\sum_{T \in \mathbb{H}: \widehat{T} \subset \widehat{T}^*} |T|^{-\frac{\alpha p}{d}} \omega_r(f, \widehat{T})_p^p \lesssim \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j\alpha p} \omega_r(f, 2^{-j}, \widehat{T}^*)_p^p \lesssim |f|_{B_{p,p}^{\alpha}(\widehat{T}^*)}^p,$$

y por lo tanto

$$|f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_{p,p}^{\alpha}(\Omega)}^p \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} |f|_{B_{p,p}^{\alpha}(\widehat{T})}^p. \quad (4.39)$$

Ahora bien, por la propiedad (4.12) y la construcción de $Q_{\mathcal{T}}$ se sigue que

$$Q_{\mathcal{T}}(f - Q_{\mathcal{T}}(f)) = Q_{\mathcal{T}}f - Q_{\mathcal{T}}(Q_{\mathcal{T}}(f)) = Q_{\mathcal{T}}f - Q_{\mathcal{T}}f = 0.$$

Luego, aplicando (4.39) a $f - Q_{\mathcal{T}}(f)$ obtenemos

$$|f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_{p,p}^{\alpha}(\Omega)}^p = |f - Q_{\mathcal{T}}(f) - Q_{\mathcal{T}}(f - Q_{\mathcal{T}}(f))|_{B_{p,p}^{\alpha}(\Omega)}^p \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} |f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_{p,p}^{\alpha}(\widehat{T})}^p.$$

La segunda estimación se sigue del Lema 21 del siguiente modo:

$$\|f - Q_{\mathcal{T}}(f)\|_{L^p(\Omega)}^p \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} E_r(f - Q_{\mathcal{T}}(f), \widehat{T})_p^p \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} |T|^{\frac{\alpha p}{d}} |f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_{p,p}^{\alpha}(\widehat{T})}^p. \quad (4.40)$$

□

Lema 25. *Sea $f \in B_{p,p}^{\alpha}(\Omega)$ y $0 < p < \infty$. Entonces para cualquier malla admisible \mathcal{T} de Ω , tenemos que*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |f|_{B_{p,p}^{\alpha}(\widehat{T})}^p \lesssim |f|_{B_{p,p}^{\alpha}(\Omega)}^p \quad (4.41)$$

donde c depende de p, s, d y de la regularidad de la malla.

Demostración. La prueba consiste en utilizar la seminorma integral (3.20), elevar a la potencia adecuada y sumar las integrales. □

4.5. Teoremas Directos

En esta sección demostramos, usando todas las herramientas desarrolladas en las secciones anteriores, que ciertos espacios de Besov están contenidos en las clases de aproximación \mathbb{A}_s^{r-1} definidas en la sección 1.4 del capítulo 1. El resultado principal de esta sección se enuncia precisamente en el siguiente

Teorema 10. *Sea $B_0 = B_{p,p}^\alpha(\Omega)$, $0 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1 + \frac{1}{p}$ o $B_0 = L^p(\Omega)$ si $\alpha = 0$. Si $f \in B = B_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega)$ con $\frac{1}{\tau} < \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$, $s > 0$, y $s + \alpha \leq \max(r, 1 + \frac{1}{\tau})$, entonces*

$$\sigma_N^{r-1}(f)_{B_0} \leq cN^{-\frac{s}{d}}|f|_B, \quad N \geq 1, \quad (4.42)$$

donde c sólo depende de p , α , s , τ , d , Ω y la regularidad de la malla inicial \mathcal{T}_0 .

Observación 15. Recordemos que el mejor error de aproximación con complejidad N , $\sigma_N^{r-1}(f)_{B_0}$ se había definido como

$$\sigma_N^{r-1}(u)_{B_0} = \min_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N} \inf_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \|u - v\|_{B_0},$$

donde $\mathbb{T}_N := \{\mathcal{T} \text{ admisible} : (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0) \leq N\}$ esto es, el mínimo sobre \mathcal{T} se toma sobre todas las mallas admisibles obtenidas con a lo sumo N bisecciones a \mathcal{T}_0 . En términos de clases de aproximación, el teorema nos dice que bajo las hipótesis allí enunciadas

$$\begin{aligned} B_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega) &\subset \mathbb{A}_{s/d}^{r-1}(B_{p,p}^\alpha(\Omega)) & (\alpha > 0), \\ B_{\tau,\tau}^s(\Omega) &\subset \mathbb{A}_{s/d}^{r-1}(L^p(\Omega)) & (\alpha = 0). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Es decir, si la función a aproximar tiene regularidad s más que la norma con que se mide el error, aún con integrabilidad τ menor que p se obtiene orden de aproximación no-lineal $N^{-s/d}$. El resultado no se cumple para todo $\tau > 0$ sino para $\tau > \left(\frac{s}{d} + \frac{1}{p}\right)^{-1}$. Este resultado provee una clase muy grande de funciones en $A_{s/d}^{r-1}$.

Antes de proceder a la demostración de este teorema, mencionamos el siguiente corolario, que relaciona algunos espacios de Besov con las clases de aproximación $\mathbb{A}_{r/d}^r$ definidas en la sección 1.4 del capítulo 1, que son las relacionadas con el llamado orden óptimo cuando se consideran ecuaciones elípticas de segundo orden.

Corolario 4 (Aplicación a ecuaciones elípticas de segundo orden). *Consideremos $B_0 = H^1(\Omega) = B_{2,2}^1(\Omega)$, que es el espacio natural para ecuaciones elípticas de segundo orden, y aproximaciones con elementos finitos adaptativos de grado $r \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\text{si } \tau > \left(\frac{r}{d} + \frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ se cumple que } B_{\tau,\tau}^{r+1}(\Omega) \subset \mathbb{A}_{r/d}^r(H^1(\Omega)).$$

Observación 16. Si consideráramos refinamientos uniformes, el orden de decaimiento óptimo con elementos finitos de grado r se lograría en el espacio de Sobolev $H^{r+1} = B_{2,2}^{r+1}$. Lo que nos dice este resultado es que dicho orden de convergencia se logra con refinamientos adaptativos en el espacio más grande $B_{\tau,\tau}^{r+1}(\Omega)$ para cualquier $\tau > \left(\frac{r}{d} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$. El hecho de considerar espacios de Besov con potencia de integrabilidad menor a uno, permite extender al máximo los espacios para los que se puede demostrar dicho decaimiento óptimo.

Demostración del Corolario 4. Basta observar que como se mencionó en (3.24) el espacio $H^1(\Omega)$ coincide con el espacio $B_{2,2}^1(\Omega)$ y por lo tanto el corolario es una consecuencia inmediata del Teorema 10 considerando $\alpha = 1$ y $p = 2$ y $s = r - 1$, y reemplazando luego $r - 1$ por r . \square

La demostración del Teorema 10 se basa principalmente en el siguiente resultado constructivo.

Proposición 1. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 10, para todo $\epsilon > 0$ existe una malla admisible $\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N$, obtenida a partir de \mathcal{T}_0 por N bisecciones de vértice nuevo, tal que:*

$$\|f - Q_{\mathcal{T}}(f)\|_{B_0} \leq N^{\frac{1}{p}} \epsilon \quad (4.44)$$

y

$$N \leq c(\epsilon^{-1} |\Omega|^{\delta} |f|_B)^{\frac{\tau}{1+\delta\tau}} \quad (4.45)$$

donde $Q_{\mathcal{T}}$ es el casi-interpolador de la Definición 15, $\delta = \frac{s}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{\tau}$ y c depende de p , s , τ , d , $\text{diam}(\Omega)$ y de la regularidad de la malla inicial \mathcal{T}_0 .

Demostración. Dada una malla admisible \mathcal{T} y $T \in \mathcal{T}$, el Lema 22 dice que

$$|f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_0(\hat{T})} \lesssim |T|^{\delta} |f|_{B(\hat{T})}.$$

Basados en esta estimación definimos el error local como:

$$e(T, \mathcal{T}) := |T|^\delta |f|_{B(\hat{T})}. \quad (4.46)$$

Para construir la malla deseada fijamos la tolerancia $\epsilon > 0$ y generamos recursivamente la sucesión de mallas $\{\mathcal{T}_k\}_{k \geq 0}$ de la siguiente manera: definimos $\mathcal{M}_0 = \{T \in \mathcal{T}_0 : e(T, \mathcal{T}_0) > \epsilon\}$. Sea \mathcal{T}'_1 la malla obtenida refinando los elementos marcados ($\mathcal{T}'_1 \leftarrow \text{refinar}(\mathcal{T}_0, \mathcal{M}_0)$) y \mathcal{T}_1 la completación de \mathcal{T}'_1 ($\mathcal{T}_1 \leftarrow \text{completar}(\mathcal{T}'_1)$). Luego repetimos este proceso adaptativo en \mathcal{T}_1 o sea que contruimos \mathcal{T}'_2 refinando los elementos $T \in \mathcal{M}_1$, donde $\mathcal{M}_1 = \{T \in \mathcal{T}_1 : e(T, \mathcal{T}_1) > \epsilon\}$, y completamos \mathcal{T}'_2 para obtener \mathcal{T}_2 . Continuamos con este procedimiento hasta que $\mathcal{M}_k = \emptyset$. Más precisamente, podemos describir el algoritmo de la siguiente manera:

$$k = 0$$

$$\mathcal{M}_k = \{T \in \mathcal{T}_k : e(T, \mathcal{T}_k) > \epsilon\}$$

Mientras $\mathcal{M}_k \neq \emptyset$

$$\mathcal{T}'_{k+1} \leftarrow \text{refinar}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k)$$

$$\mathcal{T}_{k+1} \leftarrow \text{completar}(\mathcal{T}'_{k+1})$$

$$k \leftarrow k + 1$$

$$\mathcal{M}_k = \{T \in \mathcal{T}_k : e(T, \mathcal{T}_k) > \epsilon\}$$

Fin Mientras

El proceso termina porque $|f|_{B(\hat{T})} \leq |f|_B < \infty$ y $e(T, \mathcal{T}) \rightarrow 0$ cuando $|T| \rightarrow 0$. Llamemos \mathcal{T} a la malla \mathcal{T}_k final. Por la definición de \mathcal{M}_k en cada paso, para cada $T \in \mathcal{T}$ se satisface $e(T) = e(T, \mathcal{T}) \leq \epsilon$, y por (4.46)

$$|f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_0(\hat{T})} \lesssim |T|^\delta |f|_{B(\hat{T})} \leq \epsilon. \quad (4.47)$$

De aquí que, por el Lema 24

$$\|f - Q_{\mathcal{T}}(f)\|_{B_0(\hat{T})}^p \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} |f - Q_{\mathcal{T}}(f)|_{B_0(\hat{T})}^p \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} |T|^{\delta p} |f|_{B(\hat{T})}^p \lesssim (\#\mathcal{T}) \epsilon^p$$

donde las constantes dependen de $p, s, d, \text{diam}(\Omega)$ y la regularidad de la malla. Esta es la primera desigualdad de la proposición.

Para probar la segunda, contaremos ahora todos los elementos que fueron marcados para obtener la malla final \mathcal{T} . Sea $\mathcal{M} = \cup_{\ell=0}^k \mathcal{M}_\ell$ y para cada $j \in \mathbb{Z}$ definimos $\Gamma_j = \{T \in \mathcal{M} : 2^{-j-1} \leq |T| < 2^{-j}\}$.

Puesto que claramente los Γ_j son disjuntos obtenemos la siguiente cota:

$$\#\Gamma_j 2^{-j-1} \leq |\Omega| \quad \Rightarrow \quad \#\Gamma_j =: m_j \leq 2^{j+1} |\Omega|. \quad (4.48)$$

Para obtener otra cota para m_j utilizaremos el hecho de que para cada $T \in \Gamma_j$ vale que:

$$\epsilon < |T|^\delta |f|_{B(\widehat{T})} \leq 2^{-j\delta} |f|_{B(\widehat{T})}, \quad (4.49)$$

y entonces obtenemos

$$m_j \epsilon^\tau \leq 2^{-j\delta\tau} \sum_{T \in \Gamma_j} |f|_{B(\widehat{T})}^\tau \leq c 2^{-j\delta\tau} |f|_B^\tau, \quad (4.50)$$

donde en la última desigualdad hemos usado el Lema 22.

Sea j_0 el menor entero tal que $2^{j_0} > |\Omega|$. Entonces obtenemos:

$$\#\mathcal{M} = \sum_{j=j_0}^{\infty} m_j \leq c \sum_{j=j_0}^{\infty} \min(2^j |\Omega|, \epsilon^{-\tau} 2^{-j\delta\tau} |f|^\tau) \leq c (2^k |\Omega| + \epsilon^{-\tau} 2^{-k\delta\tau} |f|^\tau) m$$

donde ahora k es el mayor entero tal que $2^k |\Omega| \leq \epsilon^{-\tau} 2^{-k\delta\tau} |f|^\tau$. Pasando las potencias de 2 a un lado, el resto de los términos al otro y elevando a la potencia $\frac{1}{1+\delta\tau}$ obtenemos que $2^k \simeq (|\Omega|^{-1} \epsilon^{-\tau} |f|^\tau)^{\frac{1}{1+\delta\tau}}$. Luego

$$\begin{aligned} \#\mathcal{M} &\leq c \epsilon^{-\tau} 2^{-k\delta\tau} |f|^\tau \\ &\leq c \epsilon^{-\tau} |f|^\tau \left[(|\Omega|^{-1} \epsilon^{-\tau} |f|^\tau)^{\frac{1}{1+\delta\tau}} \right]^{-\delta\tau} \\ &\leq c (\epsilon^{-(1+\delta\tau)} |f|^{1+\delta\tau})^{\frac{\tau}{1+\delta\tau}} (|\Omega|^\delta \epsilon^{\delta\tau} |f|^{-\delta\tau})^{\frac{\tau}{1+\delta\tau}} \\ &= c (\epsilon^{-1} |f| |\Omega|^\delta)^{\frac{\tau}{1+\delta\tau}}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando el Teorema 1 resulta:

$$N = (\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0) \leq c (\epsilon^{-1} |f| |\Omega|^\delta)^{\frac{\tau}{1+\delta\tau}} \quad (4.51)$$

y la proposición queda demostrada. \square

Demostración del Teorema 4.5. Dado $N \geq N_0$, tomamos \mathcal{T} la malla garantizada por la Proposición 1, con

$$\epsilon = |\Omega|^\delta |f|_B N^{-\frac{1+\delta\tau}{\tau}}. \quad (4.52)$$

Entonces obtenemos

$$\sigma_N(f)_{B_0} \leq \|f - Q_{\mathcal{T}}(f)\| \leq c(N + N_0)^{\frac{1}{p}} \epsilon \leq cN^{-\frac{s}{d}} |f|_B \quad (4.53)$$

donde usamos que $N \geq N_0$. El resultado para $N > 0$ es inmediato a partir del caso $N \geq N_0$. \square

4.6. Teoremas Inversos

El resultado principal de esta sección es una especie de recíproco del Teorema 10, y dice que si una función se puede aproximar con un orden $N^{-s/d}$ entonces pertenece a un cierto espacio de suavidad. Vale la pena observar lo siguiente, si $u \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}^r$ para alguna malla admisible \mathcal{T} , entonces $u \in \mathbb{A}_s^{r'}$ para cualquier $s > 0$ y cualquier $r' \geq r$ pues $\sigma_N^{r'}(u) = 0$ para todo $N \geq \#\mathcal{T}$ (dado que $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}^r \subset \mathbb{V}_{\mathcal{T}}^{r'}$). Por otro lado, los espacios $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}^r$ que consideramos en este trabajo sólo garantizan regularidad C^0 (continuidad), y no están incluidos en espacios de Besov con índice alto de suavidad. Por este motivo, para enunciar y demostrar un resultado recíproco al Teorema 10, deberemos introducir espacios de Besov generalizados, que coincidirán con los clásicos cuando los espacios de elementos finitos estén contenidos en estos, y serán más grandes en caso contrario.

Definimos entonces los espacios de Besov generalizados utilizando directamente la norma multiescala definida en (4.17) de la siguiente manera:

Definición 16. *El espacio de Besov generalizado $\widehat{B}_{p,q}^s(\Omega)$ para $0 < p, q < \infty$ y $s > 0$, se define como el conjunto de las funciones $f \in L^p(\Omega)$ tales que la norma*

$$\|f\|_{\widehat{B}_{p,q}^s(\Omega)} := \left(\sum_{\nu \in \Xi} |\theta_{\nu}|^{-\frac{sq}{d}} \|b_{\nu}(f)\|_{L^p(\Omega)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.54)$$

es finita.

Observación 17. Notemos que dada la equivalencia del Teorema 9, este espacio contiene al espacio de Besov $B_{p,q}^s(\Omega)$, pero también a todas las funciones de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ para cualquier malla admisible \mathcal{T} . Si el parámetro de regularidad s es alto, esto implica que necesariamente $B_{p,q}^s(\Omega) \subsetneq \widehat{B}_{p,q}^s(\Omega)$, pues nosotros sólo consideramos espacios de elementos finitos con regularidad C^0 .

Como anteriormente, a lo largo de esta sección, \mathbb{T}_N denotará el conjunto de mallas admisibles obtenidas a partir de \mathcal{T}_0 por a lo sumo N bisecciones del vértice más nuevo.

El siguiente teorema establece las desigualdades inversas, donde se acota la norma más fuerte de funciones discretas por una norma más débil, y son un ingrediente fundamental para demostrar el resultado fundamental de esta sección, que es el Teorema 12.

Teorema 11 (Desigualdades inversas).

1. Sean $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$, $s > 0$, $\frac{1}{\tau} = \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$ y $\alpha + s < r - 1 + \frac{1}{\tau}$. Si $V \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ para alguna malla $\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N$ entonces:

$$\|V\|_{\widehat{B}_{\tau,\tau}^{s+\alpha}(\Omega)} \leq CN^{\frac{s}{d}} \|V\|_{\widehat{B}_{p,p}^{\alpha}(\Omega)} \quad (4.55)$$

donde C depende de p , α , s , d , y la regularidad de la malla, pero es independiente de la función V y de la malla \mathcal{T} .

2. Sean $0 < p < \infty$, $s > 0$, $\frac{1}{\tau} = \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$ y $s < r - 1 + \frac{1}{\tau}$. Si $V \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ para alguna malla $\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N$ entonces:

$$\|V\|_{\widehat{B}_{\tau,\tau}^s(\Omega)} \leq CN^{\frac{s}{d}} \|V\|_{L^p(\Omega)} \quad (4.56)$$

donde C depende de p , s , d , $|\Omega|$ y la regularidad de la malla.

Demostración. Utilizando la descomposición multiescala comenzando desde la malla inicial \mathcal{T}_0 obtenemos:

$$V = \sum_{m \geq 0} \sum_{\nu \in \Xi_m} b_{\nu}(V) \phi_{\nu} = \sum_{\nu \in \mathcal{M}} b_{\nu}(V) \phi_{\nu}$$

donde $\mathcal{M} \subset \Xi$ es el conjunto de todos los coeficientes distintos de cero.

Es importante conocer cuántos coeficientes son distintos de cero en la representación anterior, para ello consideramos el árbol $\mathbb{T}(\mathcal{T}) = \mathbb{T}_{\mathcal{T}}$ que corresponde a la malla \mathcal{T} sobre la que se definió a V . Sea $N(\mathcal{T})$ el número de bisecciones necesarias para construir \mathcal{T} partiendo de \mathcal{T}_0 . Sabemos que $b_{\nu} \neq 0$ para $\nu \in \Xi_m$ sólo si $Q_{m-1}(V)(\nu) \neq Q_m(V)(\nu)$. En el caso de que $\nu \in \Xi_{m-1}$ esto ocurre sólo si θ_{ν} incluye un elemento T que está subdividido en \mathcal{T} , esto es: T corresponde a un nodo interno del árbol $\mathbb{T}_{\mathcal{T}}$. En el caso de que $\nu \notin \Xi_{m-1}$ esto significa que $\nu \in T$ para algún elemento T con un vértice $\nu' \in \Xi_{m-1}$ tal que $T \in \mathcal{T}_{m-1}$ por lo que T se corresponde con un nodo interno del árbol $\mathbb{T}_{\mathcal{T}}$. De aquí obtenemos:

$$\#\mathcal{M} \leq KN(\mathcal{T}) + Km_0N(\mathcal{T}) + K\#\mathcal{T}_0 \leq CN,$$

donde $K = \#\{\nu : \nu \in T\}$ y m_0 es el número máximo de elementos que pueden tener un nodo en común.

Utilizando la norma multiescala y la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\begin{aligned} \|V\|_{\widehat{B}_{\tau,\tau}^{s+\alpha}(\Omega)} &\simeq \left(\sum_{\nu \in \mathcal{M}} |\theta_\nu|^{-\frac{(\alpha+s)\tau}{d}} \|b_\nu(V)\phi_\nu\|_{L^\tau(\Omega)}^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \\ &\lesssim \left(\sum_{\nu \in \mathcal{M}} (|\theta_\nu|^{-\frac{\alpha}{d}} \|b_\nu(V)\phi_\nu\|_{L^p(\Omega)})^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \\ &\lesssim (\#\mathcal{M})^{\frac{1-\tau}{\tau}} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{M}} (|\theta_\nu|^{-\frac{\alpha}{d}} \|b_\nu(V)\phi_\nu\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim N^{\frac{s}{d}} \|V\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}. \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración de la primera parte del teorema. La segunda parte es análoga. \square

El siguiente resultado de acotación del K -funcional es la última herramienta necesaria para establecer el resultado principal de la sección.

Lema 26. Para $f \in \widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)$ vale:

$$K(f, 2^{-\frac{sn}{d}}, \widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega), \widehat{B}_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega)) \leq C 2^{-\frac{sn}{d}} \left[\left(\sum_{m=0}^n (2^{\frac{sm}{d}} \sigma_{2^m}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)})^{\tau^*} \right)^{\frac{1}{\tau^*}} + \|f\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)} \right],$$

donde $\tau^* = \min(\tau, 1)$ y C depende de los parámetros correspondientes.

Demostración. Sean $g_n \in \mathbb{V}_{\widehat{T}}$ tal que $\|f - f_n\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)} = \sigma_{2^n}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}$ para alguna malla \widehat{T} que se construya con a lo sumo 2^n bisecciones de la malla inicial. Entonces si $g_n = f_n - f_{n-1}$ para $n \geq 0$ con $f_{-1} = 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} K(f, 2^{-\frac{sn}{d}}, \widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega), \widehat{B}_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega)) &\leq \|f_n\|_{\widehat{B}_{\tau,\tau}^{\alpha+s}} + 2^{\frac{sn}{d}} \|f - f_n\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)} \\ &= \left\| \sum_{k=0}^n g_k \right\|_{\widehat{B}_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega)} + 2^{\frac{sn}{d}} \|f - f_n\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^n \|g_k\|_{\widehat{B}_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega)}^{\tau^*} + 2^{\frac{sn\tau^*}{d}} \|f - f_n\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}^{\tau^*} \right)^{\frac{1}{\tau^*}}, \end{aligned}$$

para $\tau^* = \min\{\tau, 1\}$. Utilizando ahora la desigualdad inversa (4.56) obtenemos

$$\begin{aligned} K(f, 2^{-\frac{sn}{d}}, \widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega), \widehat{B}_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega)) &\leq c \left(\sum_{k=0}^n 2^{\frac{sk\tau^*}{d}} \|g_k\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}^{\tau^*} + 2^{\frac{sn\tau^*}{d}} \|f - f_n\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}^{\tau^*} \right)^{\frac{1}{\tau^*}} \\ &\leq c \left(\sum_{k=0}^n 2^{\frac{sk\tau^*}{d}} \left[\sigma_{2^k}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}^{\tau^*} + \sigma_{2^{k-1}}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}^{\tau^*} \right] + 2^{\frac{sn\tau^*}{d}} \sigma_{2^n}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}^{\tau^*} \right)^{\frac{1}{\tau^*}} \\ &\leq c \left(\sum_{k=0}^n 2^{\frac{sk\tau^*}{d}} \sigma_{2^k}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}^{\tau^*} \right)^{\frac{1}{\tau^*}} + \|f\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

El siguiente resultado es el principal de esta sección.

Teorema 12. Sean $0 < p < \infty$, $\alpha \geq 0$, $s > 0$, $\frac{1}{\tau} = \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$ y $\alpha + s < r - 1 + \frac{1}{\tau}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\frac{s}{d}, \tau}^{r-1}(\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)) &\subset \widehat{B}_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega) & (\alpha > 0), \\ \mathbb{A}_{\frac{s}{d}, \tau}^{r-1}(L^p(\Omega)) &\subset \widehat{B}_{\tau,\tau}^s(\Omega) & (\alpha = 0). \end{aligned}$$

Observación 18. Antes de presentar la demostración vale la pena observar que el teorema no es exactamente un recíproco del Teorema 10 por dos razones: la primera es que los espacios involucrados ahora son los de Besov *generalizados* $\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)$ en lugar de los de Besov clásicos, que ya hemos comentado. La segunda es la sutil aparición del segundo subíndice en los espacios de aproximación $\mathbb{A}_{\frac{s}{d}, \tau}^r$. Esto representa otro alejamiento de la *caracterización* de las clases de aproximación, pero dado que $\mathbb{A}_{\frac{s}{d}+\epsilon}^{r-1} \subset \mathbb{A}_{\frac{s}{d}, \tau}^{r-1}$ para todo $\epsilon > 0$, el teorema nos dice que bajo las hipótesis allí enunciadas se cumplen las siguientes inclusiones para todo $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\frac{s}{d}+\epsilon}^{r-1}(\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)) &\subset \widehat{B}_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega), & (\alpha > 0), \\ \mathbb{A}_{\frac{s}{d}+\epsilon}^{r-1}(L^p(\Omega)) &\subset \widehat{B}_{\tau,\tau}^s(\Omega), & (\alpha = 0). \end{aligned} \tag{4.57}$$

Esta inclusión es (casi) la recíproca de (4.43).

Demostración. Sean s_1 y τ_1 tales que $s_1 > s$ y $\frac{1}{\tau_1} = \frac{s_1}{d} + \frac{1}{p}$, y tal que $0 < \alpha + s_1 < r - 1 + \frac{1}{\tau_1}$ con el requerimiento adicional de que $\tau_1 \geq 1$ si $\tau > 1$. Sabemos que $\widehat{B}_{\tau,\tau}^{\alpha+s}(\Omega) = \left[\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega), \widehat{B}_{\tau_1,\tau_1}^{\alpha+s_1}(\Omega) \right]_{\frac{s}{s_1}, \tau}$. Esta última observación se debe a que el operador $S(f) = \{q_m(f)\}_{m=0}^\infty$ que opera de $\widehat{B}_{\zeta,\zeta}^\gamma(\Omega)$ en $\ell_\zeta^\gamma(L^\zeta(\Omega))$ es una corretracción y el operador

$R(\{f_j\}_{j=0}^\infty) = \sum_{j=0}^\infty f_j$ es su retracción correspondiente, por lo que utilizando el resultado de [Pee76] que dice que $[\ell_\alpha^p(L^p(\Omega)), \ell_{\alpha+s_1}^{\tau_1}(L^{\tau_1}(\Omega))]_{\frac{s}{s_1}, \tau} = \ell_{\alpha+s}^\tau(L^\tau(\Omega))$ y el teorema (1.18.2) de [Tri78], obtenemos la equivalencia requerida.

Utilizando que:

$$\|f\|_{[\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega), \widehat{B}_{\tau_1, \tau_1}^{\alpha+s_1}(\Omega)]_{\frac{s}{s_1}, \tau}} \simeq \left(\sum_{k=0}^{\infty} [2^{\frac{sk}{d}} K(f, 2^{-\frac{sk}{d}}, \widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega), \widehat{B}_{\tau_1, \tau_1}^{\alpha+s_1}(\Omega))]^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \quad (4.58)$$

y que:

$$K(f, 2^{-\frac{sk}{d}}, \widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega), \widehat{B}_{\tau_1, \tau_1}^{\alpha+s_1}(\Omega)) \lesssim 2^{-\frac{sk}{d}} \left(\sum_{m=0}^k (2^{\frac{s_1 m}{d}} \sigma_{2^m}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)})^{\tau^*} \right)^{\frac{1}{\tau^*}} + 2^{-\frac{sk}{d}} \|f\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)},$$

puesto que $\|f\|_{\widehat{B}_{\tau, \tau}^{\alpha+s}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{[\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega), \widehat{B}_{\tau_1, \tau_1}^{\alpha+s_1}(\Omega)]_{\frac{s}{s_1}}}$, obtenemos:

$$\|f\|_{\widehat{B}_{\tau, \tau}^{\alpha+s}(\Omega)}^\tau \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{(s-s_1)k\tau}{d}} \left(\sum_{m=0}^k (2^{\frac{s_1 m}{d}} \sigma_{2^m}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)})^{\tau^*} \right)^{\frac{\tau}{\tau^*}} + \sum_{k=0}^{\infty} (2^{\frac{(s-s_1)k}{d}} \|f\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)})^\tau$$

Usando que $\|f\|_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathbb{A}_{\frac{s}{d}, \tau}^r(\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega))}$ y el Lema de Hardy en la primera suma con $\mu = \tau^*$,

$$a_m := \begin{cases} 2^{-\frac{s_1 m}{d}} \sigma_{2^{-m}}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)}, & \text{si } m \leq 0 \\ 0, & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

y

$$z_k := \begin{cases} \left(\sum_{m=0}^{-k} (2^{-\frac{s_1 m}{d}} \sigma_{2^{-m}}(f)_{\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega)})^{\tau^*} \right)^{\frac{1}{\tau^*}}, & \text{si } k \leq 0 \\ 0, & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

obtenemos:

$$\|f\|_{\widehat{B}_{\tau, \tau}^{\alpha+s}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\mathbb{A}_{\frac{s}{d}, \tau}^r(\widehat{B}_{p,p}^\alpha(\Omega))}$$

lo que demuestra el resultado. \square

Conclusiones

Hemos demostrado los siguientes resultados principales:

- Si una función u se puede escribir como $u = \sum_{i=0}^N u_i$, con $u_0 \in H^{r+1}(\Omega)$ y

$$u_i = c_i (\ln(\rho_i))^{k_i} \rho_i^{\gamma_i} g_i(\vec{\theta}_i) \chi_i,$$

con k_i enteros no-negativos y $\gamma_i > 0$ (ver detalles en Teorema 2), entonces $u \in \mathbb{A}_{r/d}^r$, es decir, se puede aproximar adaptativamente con elementos finitos de Lagrange de grado r , con un error de orden $(\#\mathcal{T})^{-r/d}$, llamado orden óptimo.

- Usando resultados de regularidad conocidos, las soluciones de la ecuación de Poisson, con término fuente $f \in H^{r+1}$ en dominios poligonales y las del problema de la interfase para el Laplaciano cumplen la descomposición mencionada en el ítem anterior, y por lo tanto pertenecen a $\mathbb{A}_{r/2}^r$. Por lo tanto, los métodos de elementos finitos adaptativos para estas ecuaciones producen sucesiones con convergencia no-lineal óptima.
- Si Ω es un dominio poligonal o poliédrico en \mathbb{R}^d , los espacios de Besov $B_{r,\tau}^{1+r}(\Omega)$ están contenidos en los espacios de aproximación adaptativa con orden óptimo $\mathbb{A}_{r/d}^r$ si se cumple que $\frac{1}{r} < \frac{r}{d} + \frac{1}{2}$ (ver Corolario 4). Analizando algunos casos particulares de grado polinomial r y dimensión d , se puede ver que los espacios de Besov indicados en la siguiente tabla pertenecen a $\mathbb{A}_{r/d}^r$ para todo $\epsilon > 0$:

<u>Refinamiento adaptativo</u>			<u>Refinamiento uniforme</u>	
	$d = 2$	$d = 3$		$d = 2$ o $d = 3$
$r = 1$	$B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^2(\Omega)$	$B_{\frac{6}{5}+\epsilon, \frac{6}{5}+\epsilon}^2(\Omega)$	$r = 1$	$H^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) = B_{2,2}^2$
$r = 2$	$B_{\frac{3}{2}+\epsilon, \frac{3}{2}+\epsilon}^3(\Omega)$	$B_{\frac{6}{7}+\epsilon, \frac{6}{7}+\epsilon}^3(\Omega)$	$r = 1$	$H^3(\Omega) = W_2^3(\Omega) = B_{2,2}^3$
$r = 3$	$B_{\frac{1}{2}+\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon}^4(\Omega)$	$B_{\frac{6}{9}+\epsilon, \frac{6}{9}+\epsilon}^4(\Omega)$	$r = 1$	$H^4(\Omega) = W_2^4(\Omega) = B_{2,2}^4$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

En la tabla de la izquierda se muestran los espacios más grandes para los que se logra el decaimiento óptimo usando mallas adaptativas, y en la de la derecha aquellos para los que se logra dicho decaimiento usando mallas uniformes. Estos espacios son mucho más chicos que aquellos.

En el caso de polinomios lineales $r = 1$, los resultados mencionados fueron obtenidos en [BDDP02], y dado que el espacio de Sobolev $W_p^2(\Omega) \subset B_{p,p}^2(\Omega) \subset B_{1,1}^2(\Omega)$ para $p > 1$, implican convergencia óptima también en estos espacios más conocidos.

Nuestra contribución principal en esta caracterización fue la generalización de este resultado a elementos finitos de grado polinomial $r \geq 2$. Como se ve en la tabla, la clase más grande de funciones contenida en $\mathbb{A}_{r/d}^r$ contiene a ciertos espacios de Besov $B_{p,p}^s$ con potencias de integración $p < 1$. Esto hace que sea imposible describirlas utilizando los más conocidos espacios de Sobolev, y sea estrictamente necesario utilizar los no tan populares espacios de Besov en su lugar. Un ingrediente fundamental en la demostración de este resultado fue la construcción de un operador de proyección o casi-mejor aproximación que fuera invariante bajo suma de polinomios. La dificultad en la construcción de tal operador radica en que las bolas con la métrica de estos espacios no son convexas y por lo tanto, dada una función, no es cierto que siempre hay un polinomio más cercano, sino que hay muchos a distancia mínima. Sin embargo, la definición del casi-mejor aproximante debe ser única para garantizar que el casi-mejor aproximante de la suma de una función y un polinomio, es la suma de los casi-aproximantes de ambos. Los detalles de esta construcción están en la Definición 13 y en el Teorema 8.

- Para las estimaciones inversas debimos introducir los espacios de Besov generaliza-

dos, los que surgen de considerar como funciones del espacio a todas las funciones de L^p que tengan norma multinivel (4.17) finita. Esto da un espacio, que en general, para índices de suavidad altos, contiene estrictamente al espacio de Besov clásico. Para índices de suavidad bajos, tales que las funciones de elementos finitos pertenecen al espacio de Besov considerado, ambas definiciones coinciden. Un estudio más detallado de estos espacios generalizados es un tema que pretendemos abordar en el futuro. Para comparar los resultados directos y sus recíprocos, vale la pena comparar las inclusiones (4.43) y (4.57), que muestran una casi-caracterización de las clases de aproximación en términos de regularidad Besov.

Bibliografía

- [BAG⁺96] Ivo M. Babuška, Börje Andersson, Ben Qi Guo, Jens Markus Melenk, and Hae Soo Oh. Finite element method for solving problems with singular solutions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 74(1-2):51–70, November 1996.
- [Bän91] Eberhard Bänsch. Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions. *Impact of Computing in Science and Engineering*, 3(3):181–191, 1991.
- [BDD04] Peter G. Binev, Wolfgang A. Dahmen, and Ronald A. DeVore. Adaptive finite element methods with convergence rates. *Numerische Mathematik*, 97(2):219–268, April 2004.
- [BDDP02] Peter G. Binev, Wolfgang A. Dahmen, Ronald A. DeVore, and Pencho P. Petrushev. Approximation classes for adaptive methods. *Serdica Mathematical Journal*, 28(4):391–416, 2002.
- [BS08] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition edition, 2008.
- [Cia78] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
- [CKNS08] J. Manuel Cascón, Christian Kreuzer, Ricardo H. Nochetto, and Kunibert G. Siebert. Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(5):2524–2550, 2008.

- [Dau88] Monique Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains*, volume Lecture Notes in Mathematics, 1341. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Dit88] Z. Ditzian. On the marchaud-type inequality. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 103(1):198–202, 1988.
- [DL93] Ronald A. DeVore and George G. Lorentz. *Constructive Approximation*, volume Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 303. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Gri85] Pierre Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [JS77] Hans Johnen and Karl Scherer. *On the equivalence of the K -functional and moduli of continuity and some applications*, volume 571 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 119–140. Springer, Berlin, 1977.
- [Kel92] R. Bruce Kellogg. Notes on piecewise smooth elliptic boundary value problems. Technical Report BN-1137, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, 1992.
- [Kel75] R. Bruce Kellogg. On the poisson equation with intersecting interfaces. *Applicable Analysis*, 4:101–129, 1974/75.
- [Kos94] Igor Kossaczký. A recursive approach to local mesh refinement in two and three dimensions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 55(3):275–288, November 1994.
- [Mau95] J. Maubach. Local bisection refinement for n -simplicial grids generated by reflection. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 16(1):210–227, 1995.
- [MIT03] G. G. Magaril-II'yaev and Vladimir M. Tikhomirov. *Convex analysis: theory and applications*, volume 222 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, 2003.

- [NhL03] Ricardo H. Nochetto and Xiao hai Liao. Local a posteriori error estimates and adaptive control of pollution effects. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 19(4):421–442, July 2003.
- [NPV91a] Ricardo H. Nochetto, Maurizio Paolini, and Claudio Verdi. An adaptive finite element method for two-phase stefan problems in two space dimensions. ii: Implementation and numerical experiments. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 12(5):1207–1244, 1991.
- [NPV91b] Ricardo H. Nochetto, Maurizio Paolini, and Claudio Verdi. An adaptive finite element method for two-phase stefan problems in two space dimensions. part i: Stability and error estimates. *Mathematics of Computation*, 57(195):73–108, July 1991.
- [NVV08] Ricardo H. Nochetto, Andreas Veerer, and Marco Verani. A safeguarded dual weighted residual method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2008.
- [Osw94] Peter Oswald. *Multilevel finite element approximation*. Teubner Scripts on Numerical Mathematics. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [Pee76] Jaak Peetre. *New thoughts on Besov spaces*. Duke University, 1 edition, 1976.
- [Pet01] Martin Petzoldt. *Regularity and error estimators for elliptic problems with discontinuous coefficients*. PhD thesis, Freie Universität Berlin, Berlin, 2001.
- [Pie81] Albrecht Pietsch. Approximation spaces. *Journal of Approximation Theory*, 32(2):115–134, 1981.
- [Sha83] Robert C. Sharpley. Cone conditions and the modulus of continuity. In *Second Edmonton conference on approximation theory*, volume 3 of *CMS Conference Proceedings*, pages 341–351, Providence, 1983. American Mathematical Society.
- [Ste07] Rob P. Stevenson. Optimality of a standard adaptive finite element method. *Foundations of Computational Mathematics*, 7(2):245–269, 2007.

- [Ste08] Rob P. Stevenson. The completion of locally refined simplicial partitions created by bisection. *Mathematics of Computation*, 77(261):227–241, 2008.
- [Tra97] C. T. Traxler. An algorithm for adaptive mesh refinement in n dimensions. *Computing*, 59(2):115–137, 1997.
- [Tri78] Hans Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland Mathematical Library, 18. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [Tri83] Hans Triebel. *Theory of function spaces*. Monographs in Mathematics, 78. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.
- [Tri92] Hans Triebel. *Theory of function spaces II*. Monographs in Mathematics, 84. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [Tri02] Hans Triebel. Function spaces in lipschitz domains and on lipschitz manifolds. characteristic functions as pointwise multipliers. *Revista Matemática Complutense*, 15(2):475–524, 2002.
- [Tri06] Hans Triebel. *Theory of function spaces III*, volume 100 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [WSA96] John Robert Whiteman, Anna-Margarete Sändig, and Thomas Apel. Graded mesh refinement and error estimates for finite element solutions of elliptic boundary value problems in non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 19(1):63–85, January 1996.