

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL
LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

Doctor en Matemática

EN EL CAMPO DE: **Análisis Numérico**

TÍTULO DE LA TESIS:

**Convergencia y Optimalidad de Métodos de Elementos Finitos
Adaptativos para leyes de conservación estacionarias no lineales
y para problemas elípticos de autovalores.**

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral
(CONICET – UNL)

AUTOR:

Eduardo Mario Garau

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Pedro Morin

DEFENDIDA ANTE EL JURADO COMPUESTO POR:

Dr. Gabriel Acosta

Dr. Hugo Aimar

Dr. Claudio Padra

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2010

*A la memoria de mi padre,
que me acompaña y protege cada día.*

*A la vida, por la fortaleza,
porque estoy dispuesto a seguir adelante,
siempre, pase lo que pase.*

Agradecimientos

A Pedro, mi director de tesis, por el constante apoyo, tanto a nivel personal como académico, desde que llegué a Santa Fe. Los consejos y el aliento en los momentos oportunos fueron de gran importancia.

A Carlos Zuppa, por haber sido la principal fuente de los problemas que hemos estudiado en esta tesis. Valoro los momentos en que hemos podido reunirnos a trabajar en grupo.

A CONICET por el subsidio económico durante estos años, con el cual pude dedicarme a estudiar para el doctorado. A Pedro nuevamente, y a Hugo Aimar, por haber aceptado ser mis directores de beca.

Al Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, el IMAL, y a todos sus integrantes, que generan cada día un ambiente de trabajo agradable. En especial a los becarios, entre los que he conseguido muy buenos amigos, por el compañerismo y por su amistad.

A las personas que conocí en Santa Fe a lo largo de estos cinco años con las que he compartido el tiempo libre, y muchas de las cuales ahora son mis amigos. En especial a Gustavo, Mariana y Santiago, por perdurar en el tiempo y por estar siempre a mi lado.

A mi esposa Marisa, con quien he aprendido que el amor se basa en compartir y que es posible amar en libertad, por su compañía, por el apoyo y por darme fuerzas cada día.

A mi madre, a mis hermanos, a mis tíos y a mis amigos de Tucumán, por su apoyo incondicional y por haber estado siempre presentes a pesar de la distancia.

Resumen

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la convergencia y la optimalidad de los métodos de elementos finitos adaptativos para la resolución numérica de problemas no lineales que surgen de leyes de conservación estacionarias y de problemas de autovalores asociados a operadores simétricos y elípticos.

Se establecen resultados de convergencia sin orden de algoritmos adaptativos generales, que parten de triangulaciones iniciales conformes arbitrarias, y marcan los elementos a refinar solamente en base a estimadores de error a posteriori de tipo residual clásicos, usando cualquiera de las estrategias de marcado conocidas, y pidiendo sólo un nivel de refinamiento minimal sobre estos elementos marcados. Cabe mencionar que la convergencia para problemas de autovalores se cumple tanto para autovalores simples como múltiples.

Se demuestra la optimalidad suponiendo la estrategia de Dörfler para el marcado, esto es, demostramos que el algoritmo adaptativo produce una sucesión de mallas y soluciones aproximadas con la misma complejidad (cantidad de elementos) que las óptimas. El sentido que damos a la palabra optimalidad está basado en el número de grados de libertad o incógnitas necesarios para representar con un cierto error la solución exacta del problema, y no en el tamaño global usual de la malla. En el caso de problemas de autovalores, la optimalidad se demuestra solamente para autovalores simples.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Introducción	1
Capítulo 1. Métodos de elementos finitos adaptativos	5
1.1. Triangulaciones	5
1.2. Espacios de Sobolev	8
1.3. Espacios de elementos finitos conformes y aproximaciones mediante interpolación	12
1.4. Adaptatividad en métodos de elementos finitos	13
1.5. Métodos de elementos finitos adaptativos para ecuaciones elípticas	27
1.6. Miscelánea	31
Parte 1. LEYES DE CONSERVACIÓN ESTACIONARIAS NO LINEALES	35
Capítulo 2. Leyes de conservación estacionarias no lineales	37
2.1. Leyes de conservación estacionarias en medios no isotrópicos	38
2.2. Ecuaciones asociadas a operadores Lipschitz y fuertemente monótonos	44
Capítulo 3. Convergencia de MEF adaptativos para problemas no lineales	49
3.1. Formulación variacional de problemas no lineales	49
3.2. Discretización por elementos finitos	50
3.3. Lazo adaptativo	51
3.4. Convergencia del lazo adaptativo	52
3.5. Apéndice I. Estimadores de error a posteriori para el Problema modelo (2.6)	56
Capítulo 4. Análisis a posteriori y optimalidad de un MEF adaptativo para problemas no lineales	61
4.1. Estimaciones de error a posteriori	62

4.2.	Reducción del estimador y de la oscilación	65
4.3.	Optimalidad del error total y marcado óptimo	67
4.4.	Propiedad de contracción del error	71
4.5.	Casi-optimalidad del MEF adaptativo	73
4.6.	Apéndice I. Sobre la Hipótesis 4.5 de acotación de g_T para el Problema modelo (2.6)	76
4.7.	Apéndice II. Sobre la Hipótesis 4.13 para el Problema modelo (2.6): Una noción equivalente para el error	78
Capítulo 5. El método de Kačanov y un algoritmo de aproximación inexacto para problemas no lineales		81
5.1.	La iteración de Kačanov	81
5.2.	Un algoritmo inexacto convergente	82
5.3.	Experimentos numéricos	87
5.4.	Apéndice I. Estimadores de error a posteriori para el Problema modelo (2.6)	98
5.5.	Apéndice II. Sobre la Hipótesis 5.4 para el Problema modelo (2.6)	101
Parte 2. PROBLEMAS ELÍPTICOS DE AUTOVALORES		103
Capítulo 6. Algunos problemas de autovalores asociados a operadores elípticos		105
6.1.	Problema de autovalores tipo Dirichlet	106
6.2.	Problema de autovalores de Steklov para un operador de tipo Schrödinger	108
6.3.	Problema de autovalores de Steklov \mathcal{A} -armónico	111
Capítulo 7. El problema de autovalores y su aproximación numérica		113
7.1.	Formulación variacional abstracta de problemas elípticos de autovalores	113
7.2.	Caracterización de los autovalores	118
7.3.	Un enfoque alternativo para la demostración de existencia de soluciones de problemas de autovalores	120
7.4.	Aproximaciones del Problema de autovalores: Problemas discretos	123
Capítulo 8. Estimaciones de error a priori para problemas de autovalores		127
8.1.	Estimaciones de convergencia para autovalores	128
8.2.	Separación de los autovalores	130
8.3.	Autoespacios y autoespacios discretos: La noción de aproximación	132
8.4.	Otras estimaciones de error importantes	134

8.5. Apéndice I. Sobre la Hipótesis 8.1: Regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales elípticas	138
Capítulo 9. Convergencia de MEF adaptativos para problemas de autovalores	143
9.1. Confiabilidad y estabilidad de los estimadores de error	145
9.2. Convergencia del algoritmo adaptativo	146
9.3. Apéndice I. Algunos comentarios sobre la no degeneración de problemas de autovalores	152
9.4. Apéndice II. Estabilidad de los estimadores de error para problemas de autovalores particulares	154
Capítulo 10. Estimaciones de error a posteriori para problemas de autovalores	157
10.1. Estimaciones de error a posteriori	158
10.2. Reducción del estimador y de la oscilación	163
10.3. Apéndice I. Sobre la Hipótesis 10.9 de acotación de $g_{\mathcal{T}}$ para problemas de autovalores particulares	165
Capítulo 11. Casi-optimalidad de un MEF adaptativo para problemas de autovalores	169
11.1. Optimalidad del error total y marcado óptimo	170
11.2. Propiedad de contracción del error	174
11.3. Casi-optimalidad del MEF adaptativo	176
Capítulo 12. Adaptatividad en la aproximación de funciones con singularidades	181
Conclusiones generales	185
Bibliografía	189
Índice alfabético	193

Introducción

Los métodos de elementos finitos (MEF) adaptativos son una herramienta efectiva para hacer un uso eficiente de los recursos computacionales, y resultan indispensables para la resolución numérica de ciertos problemas. La versión adaptativa más conocida del método de elementos finitos clásico consiste en un lazo de la forma

RESOLVER → ESTIMAR → MARCAR → REFINAR.

En primer lugar, encontramos la solución del problema discreto sobre una malla, luego calculamos indicadores locales de error y *marcamos* estos elementos para subdividirlos y obtener una nueva malla. La idea básica de los métodos adaptativos consiste en buscar la forma de equidistribuir el error para lograr una sucesión de mallas con complejidad óptima, es decir, con la menor cantidad de elementos posible.

En general, el primer paso para lograr la optimalidad es entender la convergencia de los métodos adaptativos.

En un trabajo reciente, Morin, Siebert y Veerer demostraron la convergencia de métodos adaptativos para problemas lineales [MSV08], y posteriormente, Siebert simplificó dicha prueba [Sie08].

Por otro lado, Stevenson inició el camino hacia la optimalidad de las mallas para problemas lineales, demostrando la complejidad óptima para la ecuación de Poisson [Ste07], y luego Cascón, Kreuzer, Nochetto y Siebert completaron esta tarea, demostrando el mismo tipo de resultado para ecuaciones simétricas elípticas generales [CKNS08].

Basado en las ideas que se usaron para demostrar la convergencia y la optimalidad para problemas lineales, el objetivo central de esta tesis es demostrar resultados de convergencia general y de optimalidad para métodos adaptativos aplicados a la resolución numérica de problemas no lineales que surgen de leyes de conservación estacionarias y de problemas de autovalores de operadores simétricos elípticos.

Es importante notar que, dada la naturaleza no lineal de las leyes de conservación estacionarias y de los problemas de autovalores que abordamos en esta tesis, la generalización de los resultados mencionados para ecuaciones elípticas lineales no es inmediata.

Hasta el momento no se conocen resultados de convergencia ni de complejidad óptima para aproximaciones mediante algoritmos adaptativos para los problemas de leyes de conservación estacionarias no lineales; y por lo tanto, podemos considerar este trabajo de tesis como el primero en esta clase de resultados.

Por otra parte, en el caso de problemas de autovalores, los únicos trabajos de convergencia existentes al momento [GG09, Gia08, DXZ08], establecen la convergencia para autovalores simples de un método adaptativo basado en el marcado de Dörfler, bajo la hipótesis de que la malla inicial sea suficientemente fina—en un sentido no verificable—mientras que en esta tesis probamos la convergencia partiendo de cualquier malla inicial, usando cualquiera de las estrategias de marcado conocidas, no sólo la de Dörfler, tanto para autovalores simples como múltiples.

Más aún, en [GG09, Gia08] la convergencia se demuestra utilizando un marcado adicional para términos de oscilación y bajo la exigencia de que el refinamiento genere un nodo interior en cada elemento marcado y en cada uno de sus lados (*propiedad del nodo interior*). En nuestro caso, el marcado se hará solamente de acuerdo a estimadores de error a posteriori de tipo residual, que son los más utilizados en la práctica. Aún cuando existen términos de oscilación en la cota que da la eficiencia del estimador, que son de orden superior, demostramos la convergencia sin necesidad de marcar de acuerdo a estos términos. Además, sólo se pedirá un refinamiento minimal de los elementos marcados, es decir, al menos una bisección; evitando el requerimiento de la mencionada propiedad del nodo interior.

En cuanto a la optimalidad para problemas de autovalores, sólo podemos citar el resultado dado en [DXZ08], donde se demuestra la complejidad óptima para problemas elípticos de autovalores, suponiendo que la malla inicial es suficientemente fina, y haciendo una hipótesis (superflua) sobre las autofunciones discretas, que resulta imposible de verificar en la práctica. Este trabajo fue publicado mientras estábamos terminando de escribir una leve generalización del mismo que establece la complejidad óptima partiendo de *cualquier malla inicial*, y eliminando la mencionada hipótesis utilizando el hecho que sólo consideramos autovalores simples, al igual que en dicho trabajo. Al eliminar esta hipótesis logramos probar el resultado para un algoritmo práctico, en el cual es posible usar cualquier método para el cálculo de autovalores

discretos. Posteriormente, extendimos este resultado a un contexto más general de problemas de autovalores de varios tipos que presentamos unificado en este trabajo.

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera:

- El Capítulo 1, donde se exponen resultados preliminares importantes para esta presentación. En particular, se describen resultados existentes sobre métodos de elementos finitos y la teoría de aproximación adaptativa.

- Una primera parte, que abarca los Capítulos 2 al 5, donde se estudia la convergencia y optimalidad de métodos adaptativos para ciertos tipos de problemas no lineales. Más precisamente:

En el Capítulo 2 se plantea un problema no lineal modelo que surge de leyes de conservación estacionarias, y se presentan los resultados que garantizan la existencia y unicidad de soluciones.

En el Capítulo 3 se demuestra la convergencia (sin orden) de MEF adaptativos que usan cualquier estrategia de marcado, para la aproximación de soluciones de problemas no lineales como el presentado en el Capítulo 2.

Independientemente de este último resultado, en el Capítulo 4 se demuestra la convergencia lineal y posteriormente la optimalidad de un MEF adaptativo donde se utiliza la estrategia de Dörfler para el marcado.

Finalmente, para cerrar el estudio de este tipo de problemas no lineales, en el Capítulo 5 se demuestra la convergencia de un algoritmo adaptativo de tipo Kačanov. Este algoritmo resulta muy útil en la práctica debido a que no se resuelven los problemas no lineales que surgen de la discretización de Galerkin, sino sólo un sistema lineal en cada iteración adaptativa. También se realizan experimentos numéricos a fin de estudiar el orden experimental de convergencia.

- Una segunda parte, que abarca los Capítulos 6 al 12, donde se estudia la convergencia y optimalidad de métodos adaptativos para problemas elípticos de autovalores. Más específicamente:

En el Capítulo 6 se comienza presentando algunos problemas de autovalores conocidos asociados a operadores elípticos, como problemas de tipo Dirichlet y problemas de Steklov.

En el Capítulo 7 se presenta la teoría conocida de existencia de soluciones para problemas elípticos de autovalores de una forma general, con los fines de abordar de manera conjunta los casos presentados en el Capítulo 6 y de postular condiciones sobre un problema de autovalores que garanticen la aplicación de dicha teoría.

En el Capítulo 8 se presentan estimaciones de error a priori conocidas para problemas de autovalores, nuevamente con un enfoque general.

Luego, en el Capítulo 9, se demuestra la convergencia (sin orden) de algoritmos adaptativos para este tipo de problemas, que parten de cualquier malla inicial y utilizan cualquier estrategia de marcado.

Es importante remarcar que esta prueba de convergencia es válida para la aproximación de autovalores tanto simples como múltiples.

En el Capítulo 10 se presentan estimaciones de error a posteriori, algunas de ellas conocidas para este tipo de problemas, que servirán para demostrar la optimalidad de un MEF adaptativo en el Capítulo 11. La prueba de optimalidad supone que el marcado en el algoritmo adaptativo se hace según el criterio de Dörfler, y vale para la aproximación de autovalores simples.

Por último, se concluye la segunda parte de esta tesis con algunos experimentos numéricos en el Capítulo 12, donde se ilustra brevemente las ventajas de usar adaptatividad cuando la solución de un problema tiene singularidades.

CAPÍTULO 1

Métodos de elementos finitos adaptativos

En este capítulo introducimos algunas nociones básicas del método de elementos finitos y algunos resultados relacionados que necesitamos para el desarrollo de esta tesis. La teoría general del método de elementos finitos puede hallarse, por ejemplo, en [BS94, Bra01].

Por otro lado, explicamos el concepto de *adaptatividad* y conceptos nuevos como optimalidad en términos del número de grados de libertad.

1.1. Triangulaciones

1.1.1. Simplexes en \mathbb{R}^d . Sea $d \in \mathbb{N}$. Sean $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^d$ tales que $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_d - a_0\}$ es linealmente independiente. Entonces, la cápsula convexa de $\{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ dada por $\left\{ \sum_{i=0}^d \alpha_i a_i \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=0}^d \alpha_i = 1 \right\}$, se llama *d-simplex* o *simplex en \mathbb{R}^d* . En particular, un simplex en \mathbb{R}^2 es un triángulo y en \mathbb{R}^3 un tetraedro; y por esto en general, denotamos un simplex con la letra T .

Para $k < d$, la cápsula convexa de $\{a'_0, a'_1, \dots, a'_k\}$, donde $\{a'_0, a'_1, \dots, a'_k\} \subset \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$, se llama un *k-subsimplex* de T . En particular,

- un 0-subsimplex se llama *vértice*,
- un 1-subsimplex se llama *arista*,
- un 2-subsimplex se llama *cara*.

Cuando $d = 2$ o $d = 3$, llamamos *lado* de un d -simplex T , a un $(d - 1)$ -subsimplex de T .

Dado un simplex T en \mathbb{R}^d , $\text{diam}(T)$ es la longitud de la arista más larga de T , esto es,¹

$$\text{diam}(T) := \max\{|x - y| : x, y \in T\};$$

y ρ_T es el diámetro de la bola más grande contenida en T .

1.1.2. Triangulaciones. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ el interior de un intervalo, polígono o poliedro, según sea d igual a 1, 2 o 3. Sea \mathcal{T} un conjunto de d -simplexes tales que el interior de $\cup_{T \in \mathcal{T}} T$ es

¹Para $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \cdot y$ denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^d , y $|x|$ denota la norma 2 de x , es decir, la norma inducida por este producto escalar dada por $|x| := \sqrt{x \cdot x}$.

Ω . Decimos que \mathcal{T} es una *triangulación (o malla) conforme* del dominio Ω , si siempre que dos elementos de \mathcal{T} se intersectan, lo hacen en un subsimplex de ambos.

Sea \mathcal{T} una triangulación conforme. Dado $T \in \mathcal{T}$, decimos que $T' \in \mathcal{T}$ es un *vecino* de T , si $T' \cap T \neq \emptyset$; y denotamos por $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$ al conjunto de vecinos de T , esto es,

$$\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T) := \{T' \in \mathcal{T} \mid T' \cap T \neq \emptyset\}.$$

Además, denotamos con $\omega_{\mathcal{T}}(T)$ a la *vecindad* de T , esto es, a la región de Ω cubierta por los vecinos de T ,

$$\omega_{\mathcal{T}}(T) := \bigcup_{T' \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)} T'.$$

Cuando estemos considerando una triangulación fija \mathcal{T} , denotaremos por \mathcal{S} al conjunto de lados de los elementos de \mathcal{T} . Además, \mathcal{S}_{Ω} denotará el conjunto de lados *interiores*, es decir, lados que están en el interior de Ω ; y $\mathcal{S}_{\partial\Omega}$ el conjunto de lados *frontera*, es decir, aquellos que están sobre la frontera de Ω . Así, en particular, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\Omega} \cup \mathcal{S}_{\partial\Omega}$.

Por otro lado, cuando consideramos un lado interior $S \in \mathcal{S}_{\Omega}$, denotamos por T_1 y T_2 a los elementos de \mathcal{T} que comparten S , y por \vec{n}_i al versor normal sobre S exterior a T_i , para $i = 1, 2$; y $\omega_{\mathcal{T}}(S) := T_1 \cup T_2$. En el caso en que $S \in \mathcal{S}_{\partial\Omega}$ es un lado sobre la frontera de Ω , denotamos por \vec{n} al versor normal sobre S exterior a Ω ; y $\omega_{\mathcal{T}}(S)$ es el único elemento de \mathcal{T} que tiene a S por lado.

Dada una triangulación \mathcal{T} , sea $\Sigma_{\mathcal{T}} := \cup_{T \in \mathcal{T}} \partial T = \cup_{S \in \mathcal{S}} S$, el *esqueleto de \mathcal{T}* , y notemos que $\Sigma_{\mathcal{T}}$ tiene medida de Lebesgue d -dimensional igual a cero.

La *regularidad* de una triangulación \mathcal{T} se denota por $\kappa_{\mathcal{T}}$ y está definida por

$$\kappa_{\mathcal{T}} := \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{\text{diam}(T)}{\rho_T}.$$

Una familia de triangulaciones $\mathbb{F} = \{\mathcal{T}\}$ es *regular* si

$$\sup_{\mathcal{T} \in \mathbb{F}} \kappa_{\mathcal{T}} < \infty.$$

Esta condición implica que los elementos de las triangulaciones de la familia *no se degeneran*, es decir, que no se “aplastan” ni se “estiran” indefinidamente. Se puede demostrar que si \mathbb{F} es una familia regular de triangulaciones, se cumplen las siguientes propiedades:

1. La cantidad máxima de elementos que pueden compartir un mismo vértice en una triangulación dada de la familia está uniformemente acotada.

2. La cantidad máxima de vecinos que tiene un elemento en una triangulación dada de la familia está uniformemente acotada, es decir,

$$(1.1) \quad \sup_{\mathcal{T} \in \mathbb{F}} \max_{T \in \mathcal{T}} \#\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T) < \infty.$$

3. Si $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d , que llamaremos *área* por simplicidad, existe una constante uniforme $C_{\mathbb{F}} > 0$ tal que

$$\frac{1}{C_{\mathbb{F}}} \text{diam}(T)^d \leq |T| \leq C_{\mathbb{F}} \text{diam}(T)^d, \quad \forall T \in \mathcal{T}, \forall \mathcal{T} \in \mathbb{F},$$

es decir que

$$H_T := |T|^{1/d},$$

es una medida equivalente al diámetro de T , para todo elemento T en cualquier triangulación de la familia \mathbb{F} .

4. Dos vecinos en cualquier triangulación de la familia tienen área equivalente con una constante de equivalencia uniforme, es decir,

$$\sup_{\mathcal{T} \in \mathbb{F}} \max_{T \in \mathcal{T}} \max_{T' \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)} \frac{|T|}{|T'|} < \infty.$$

5. El área de la vecindad de cualquier elemento de cualquier triangulación de la familia es equivalente al área del elemento mismo, esto es,

$$\sup_{\mathcal{T} \in \mathbb{F}} \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{|\omega_{\mathcal{T}}(T)|}{|T|} < \infty.$$

El *tamaño global* $H_{\mathcal{T}}$ de una triangulación \mathcal{T} viene dado por

$$H_{\mathcal{T}} := \max_{T \in \mathcal{T}} H_T,$$

donde $H_T = |T|^{1/d}$ es el *tamaño local* de la triangulación.

1.1.3. Refinamiento por bisección y generación de familias regulares. De aquí en adelante, a menos que se indique explícitamente otra cosa, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ denotará el interior de un polígono si $d = 2$, o de un poliedro si $d = 3$, cuya frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz. Dada una triangulación conforme \mathcal{T}_0 de Ω , denotamos por $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$ al conjunto de todas las triangulaciones conformes de Ω obtenidas de \mathcal{T}_0 por refinamiento usando el procedimiento de *bisección del vértice más nuevo* en dos dimensiones y el de bisección de Kossaczky en tres dimensiones [SS05], que coinciden con los presentados por Stevenson [Ste08], después de una posible reenumeración de

los vértices de \mathcal{T}_0 (ver Definición 1.11 debajo). Estos métodos de refinamiento garantizan que la familia \mathbb{T} es regular, es decir,

$$\kappa_{\mathbb{T}} := \sup_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \kappa_{\mathcal{T}} < \infty,$$

donde esta constante uniforme sólo depende de la triangulación inicial \mathcal{T}_0 .

1.2. Espacios de Sobolev

En esta sección introducimos brevemente los espacios de Sobolev y algunas de sus propiedades importantes. En [Ada75, Eva98, Bra01] pueden consultarse resultados sobre esta teoría.

Dado un subconjunto medible $\omega \subset \bar{\Omega}$, que en general en esta tesis será un conjunto abierto o cerrado, definimos el espacio de Lebesgue $L^2(\omega)$ como el espacio de las funciones medibles $u : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ que son de cuadrado integrable respecto de la medida de Lebesgue, es decir,

$$L^2(\omega) := \left\{ u : \omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ es medible, y } \int_{\omega} |u|^2 < \infty \right\}.$$

Identificamos como un mismo objeto de $L^2(\omega)$ a aquellas funciones que son iguales en casi todo punto de ω , es decir, a aquellas cuyos valores difieren en un conjunto de medida nula. Sabemos que $L^2(\omega)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno está dado por

$$(1.2) \quad (u, v)_{\omega} := \int_{\omega} uv, \quad \forall u, v \in L^2(\omega),$$

y la norma correspondiente por

$$\|u\|_{\omega} := \left(\int_{\omega} |u|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall u \in L^2(\omega).$$

Por otro lado, consideraremos eventualmente los espacios $L^p(\omega)$ para $p \geq 1$, formados por las funciones medibles $u : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\|u\|_{L^p(\omega)} := \left(\int_{\omega} |u|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

que son espacios de Banach.

En el caso $p = \infty$, $L^{\infty}(\omega)$ es el espacio de las funciones $u : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ esencialmente acotadas, cuya norma está dada por el supremo esencial de $|u(x)|$, es decir,

$$\|u\|_{L^{\infty}(\omega)} := \sup_{x \in \omega} |u(x)|, \quad \forall u \in L^{\infty}(\omega).$$

Cuando las funciones u definidas sobre ω toman valores vectoriales, las definiciones de los espacios $L^p(\omega)$ son análogas; solamente el valor absoluto $|\cdot|$ debe interpretarse como la norma

euclídeana de vectores, y el producto uv que aparece en (1.2) debe reemplazarse por el producto escalar usual $u \cdot v$.

Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, el *espacio de Sobolev* $H^k(\omega)$ está formado por las funciones $u : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada multi-índice α de orden $\leq k$, la derivada de orden α de u , denotada por $D^\alpha u$, existe en sentido débil y pertenece a $L^2(\omega)$, es decir,

$$H^k(\omega) := \{u \in L^2(\omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in L^2(\omega)\}.$$

La norma en $H^k(\omega)$ viene dada por

$$(1.3) \quad \|u\|_{H^k(\omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\omega^2 \right)^{1/2}, \quad \forall u \in H^k(\omega);$$

y

$$|u|_{H^k(\omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_\omega^2 \right)^{1/2}, \quad \forall u \in H^k(\omega).$$

define una seminorma en este espacio.

El espacio $H^k(\omega)$ es completo respecto de la norma dada en (1.3), y puesto que ésta proviene del producto interno

$$(u, v)_{H^k(\omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_\omega, \quad \forall u, v \in H^k(\omega),$$

el espacio $H^k(\omega)$ es un espacio de Hilbert.

Si $\mathcal{C}^\infty(\omega)$ denota el conjunto de las funciones $u : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables, se tiene que

$$\mathcal{C}^\infty(\omega) \cap H^k(\omega) \text{ es denso en } H^k(\omega).$$

Por otro lado, si $\mathcal{C}_0^\infty(\omega)$ denota el subconjunto de $\mathcal{C}^\infty(\omega)$ formado por las funciones con soporte compacto en ω , definimos

$$H_0^k(\omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\omega)}^{H^k(\omega)},$$

es decir, $H_0^k(\omega)$ es el espacio completado de $\mathcal{C}_0^\infty(\omega)$ respecto de la norma (1.3).

El siguiente resultado es muy conocido, y como consecuencia de éste, $|\cdot|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla \cdot\|_\Omega$ resulta ser una norma equivalente a $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

TEOREMA 1.1 (Desigualdad de Poincaré-Friedrichs). *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ está contenido en un cubo d -dimensional de lado L , entonces*

$$\|v\|_{\Omega} \leq L \|\nabla v\|_{\Omega}, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Por otro lado, las funciones de $H^1(\Omega)$ pueden “restringirse” a $\partial\Omega$ en el siguiente sentido:²

TEOREMA 1.2 (Teorema de Trazas). *Existe un operador lineal $\text{tr} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ tal que*

- $\text{tr}(u) \equiv u|_{\partial\Omega}$, siempre que $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.³
- Existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$(1.4) \quad \|\text{tr}(u)\|_{\partial\Omega} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

En este trabajo usamos la notación $C = C(\square)$ para indicar la dependencia de una constante C de los parámetros \square . Esta constante C puede ser distinta en diferentes apariciones, pero en cada caso se indica la dependencia explícitamente.

Dada $u \in H^1(\Omega)$, $\text{tr}(u)$ se llama la *traza* de u , y frecuentemente se denota por $u|_{\partial\Omega}$ o simplemente por u .

Se puede mostrar que el espacio $H_0^1(\Omega)$ queda caracterizado como el subespacio de $H^1(\Omega)$ formado por las funciones cuya traza es cero, es decir,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ en } L^2(\partial\Omega)\}.$$

Por otro lado, si $\Gamma \subset \Omega$,⁴ consideramos las funciones $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, que se anulan en un entorno de Γ . La clausura de este conjunto respecto de la $H^1(\Omega)$ -norma se denota por $H_\Gamma^1(\Omega)$, y es claro que

$$H_0^1(\Omega) \subset H_\Gamma^1(\Omega) \subset H^1(\Omega).$$

Se puede demostrar que

$$H_\Gamma^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ en } L^2(\Gamma)\}.$$

²El espacio $L^2(\partial\Omega)$ puede definirse de manera análoga a los anteriores considerando la medida de Lebesgue $(d-1)$ -dimensional definida sobre $\partial\Omega$. Éste está formado por las funciones $u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\|u\|_{\partial\Omega} := (\int_{\partial\Omega} |u|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

³ $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ denota el conjunto de las funciones continuas sobre $\overline{\Omega}$.

⁴En el caso en que Γ sea un subconjunto propio de $\partial\Omega$ suponemos que éste es la unión de lados de elementos de una triangulación inicial \mathcal{T}_0 de Ω que se considere.

OBSERVACIÓN 1.3. En la desigualdad de Poincaré-Friedrichs (Teorema 1.1) es suficiente requerir condiciones de frontera nula sólo sobre una parte de ella. Más precisamente, si $\Gamma \subset \partial\Omega$ es un conjunto de medida $(d-1)$ -dimensional positiva, el resultado vale para las funciones que se anulan sobre Γ . En consecuencia, $\|\nabla \cdot\|_{\Omega}$ y $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ son normas equivalentes en $H_{\Gamma}^1(\Omega)$.

Usando un argumento de escala y la estimación (1.4) se puede demostrar el siguiente

TEOREMA 1.4 (Teorema de Trazas en un simplex). *Sea $T \subset \mathbb{R}^d$ un simplex. Sea $S \subset \partial T$ un $(d-1)$ -subsimplex, es decir, una cara de T si $d=3$, o una arista de T si $d=2$. Entonces, existe una constante positiva $C = C\left(d, \frac{\text{diam}(T)}{\rho_T}\right)$ tal que*

$$\|v\|_S \leq C \left(H_T^{-1/2} \|v\|_T + H_T^{1/2} \|\nabla v\|_T \right), \quad \forall v \in H^1(T).$$

En particular, si \mathbb{F} es una familia regular de triangulaciones, la desigualdad vale con una constante independiente de $T \in \mathcal{T}$, para toda $T \in \mathbb{F}$.

Cuando se utilizan métodos de elementos finitos conformes para tratar problemas elípticos de segundo orden, en general, los espacios discretos deben ser subespacios de $H^1(\Omega)$. El siguiente resultado establece que es posible usar funciones que son continuas y no necesariamente continuamente diferenciables. En [Bra01] se puede encontrar una demostración del mismo.

TEOREMA 1.5. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y \mathcal{T} una triangulación conforme de Ω . Si $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función infinitamente diferenciable en el interior de cada $T \in \mathcal{T}$, entonces, $u \in H^k(\Omega)$ si y sólo si $u \in \mathcal{C}^{k-1}(\overline{\Omega})$.⁵*

Concluimos esta sección estableciendo una estimación inversa a la dada en el Teorema 1.1. Para demostrarla se utiliza que todas las normas son equivalentes en un espacio de dimensión finita y argumentos de escala.

TEOREMA 1.6 (Desigualdad inversa). *Sea T un simplex en \mathbb{R}^d y sea $\ell \in \mathbb{N}$. Entonces, existe $C = C\left(d, \frac{\text{diam}(T)}{\rho_T}, \ell\right) > 0$ tal que*

$$(1.5) \quad \|\nabla v\|_T \leq C H_T^{-1} \|v\|_T, \quad \forall v \in \mathcal{P}_{\ell}(T),$$

donde $\mathcal{P}_{\ell}(T)$ denota el conjunto de polinomios de grado $\leq \ell$ definidos sobre T .

⁵ $\mathcal{C}^{k-1}(\overline{\Omega})$ denota el conjunto de las funciones $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $D^{\alpha}u$ puede definirse sobre $\partial\Omega$ de manera que resulte continua sobre $\overline{\Omega}$, para todo multi-índice α de orden $\leq k-1$.

OBSERVACIÓN 1.7. Del Teorema 1.6 se sigue también que existe $C = C\left(d, \frac{\text{diam}(T)}{\rho_T}, \ell\right) > 0$ tal que

$$\|D^2v\|_T \leq CH_T^{-1}\|\nabla v\|_T, \quad \forall v \in \mathcal{P}_\ell(T),$$

donde D^2v denota la matriz hessiana de v .

1.3. Espacios de elementos finitos conformes y aproximaciones mediante interpolación

Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω , y sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$. El espacio de elementos finitos de Lagrange $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ está formado por las funciones continuas sobre Ω , que restringidas a cada elemento de \mathcal{T} son polinomios de grado $\leq \ell$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$ fijo, es decir,

$$(1.6) \quad \mathbb{V}_{\mathcal{T}} := \{v \in \mathcal{C}(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_\ell(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

Se tiene que $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset H^1(\Omega)$ y si $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ es un refinamiento de \mathcal{T} , entonces $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$.

El siguiente teorema establece la existencia de un operador de interpolación que es muy útil para obtener estimaciones de error para métodos de elementos finitos. Las afirmaciones del siguiente teorema están demostradas en [SZ90].

TEOREMA 1.8 (Interpolante de Scott-Zhang). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y consideremos el espacio $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ definido en (1.6). Existe un operador lineal $\mathcal{P} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ que satisface:*

- (1) \mathcal{P} es una proyección sobre $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, es decir, $\mathcal{P}v_{\mathcal{T}} = v_{\mathcal{T}}$, para toda $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$.
- (2) \mathcal{P} preserva las condiciones de borde homogéneas, es decir, $\mathcal{P} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \cap H_0^1(\Omega)$.
- (3) Existe una constante $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell) > 0$ tal que

$$(1.7) \quad \|v - \mathcal{P}v\|_{H^m(T)} \leq CH_T^{k-m}|v|_{H^k(\omega_{\mathcal{T}}(T))}, \quad \forall v \in H^k(\Omega),$$

si $1 \leq k \leq \ell + 1$ y $0 \leq m \leq k$.

OBSERVACIÓN 1.9 (Consecuencias del Teorema 1.8). Como consecuencia de (1.7) y del Teorema de Trazas 1.4 tenemos que existe una constante $C_{SZ} = C_{SZ}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell) > 0$ tal que

$$(1.8) \quad \|v - \mathcal{P}v\|_T \leq C_{SZ}H_T\|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}, \quad \text{y} \quad \|v - \mathcal{P}v\|_{\partial T} \leq C_{SZ}H_T^{1/2}\|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

siempre que $v \in H^1(\Omega)$.

Por otro lado, como consecuencia de (1) y (2), tenemos que \mathcal{P} preserva los valores de borde en el siguiente sentido:

Si $v \in H^1(\Omega)$ y existe $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tal que $v = v_{\mathcal{T}}$ sobre $\partial\Omega$, entonces $\mathcal{P}v = v$ sobre $\partial\Omega$.

En efecto, definiendo $w := v - v_{\mathcal{T}} \in H_0^1(\Omega)$, por (1) tenemos que $\mathcal{P}w = \mathcal{P}v - \mathcal{P}v_{\mathcal{T}} = \mathcal{P}v - v_{\mathcal{T}}$, y de (2) se sigue que $\mathcal{P}w = 0$ sobre $\partial\Omega$. En consecuencia, $\mathcal{P}v = v_{\mathcal{T}} = v$ sobre $\partial\Omega$.

Concluimos esta sección estableciendo un resultado de aproximación para funciones en espacios con índice de regularidad no entero. Para esto, definimos el espacio de Sobolev $H^{1+r}(\Omega)$, donde $0 < r < 1$, formado por las funciones u tales que

$$\|u\|_{H^{1+r}(\Omega)}^2 := \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_i(x) - u_i(y)|^2}{|x - y|^{d+2r}} dx dy < \infty,$$

donde u_i denota la derivada parcial de u respecto de la i -ésima variable en sentido débil. Éste es un espacio intermedio entre los espacios de Sobolev de índice entero, es decir,

$$H^2(\Omega) \subset H^{1+r}(\Omega) \subset H^1(\Omega), \quad 0 < r < 1.$$

Si consideramos el operador $\mathcal{I} := I - \mathcal{P}$, donde I denota el operador Identidad y \mathcal{P} el operador de Scott-Zhang, la estimación (1.7) con $m = 1$ y $k = 2$, implica que

$$\mathcal{I} : H^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \text{ es acotado,}$$

y con $m = 1$ y $k = 1$, que

$$\mathcal{I} : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \text{ es acotado.}$$

Utilizando resultados de interpolación [BS94] podemos demostrar que $\mathcal{I} : H^{1+r}(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ es acotado, y más aún, podemos estimar su norma, y así tenemos el siguiente

TEOREMA 1.10 (Aproximación global). *Sea $\mathcal{P} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ el operador de interpolación de Scott-Zhang y sea $r \in (0, 1)$. Entonces, existe una constante $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell) > 0$ tal que*

$$\|v - \mathcal{P}v\|_{H^1(\Omega)} \leq CH_{\mathcal{T}}^r \|v\|_{H^{1+r}(\Omega)}, \quad \forall v \in H^{1+r}(\Omega),$$

donde $H_{\mathcal{T}} = \max_{T \in \mathcal{T}} H_T$ denota el tamaño global de \mathcal{T} .

1.4. Adaptatividad en métodos de elementos finitos

En esta sección presentamos nociones fundamentales sobre métodos de elementos finitos adaptativos que utilizamos en el desarrollo de esta tesis.

En la Subsección 1.4.1 establecemos un algoritmo adaptativo básico de la forma

$$\text{RESOLVER} \rightarrow \text{ESTIMAR} \rightarrow \text{MARCAR} \rightarrow \text{REFINAR},$$

y explicamos en detalle cada uno de estos módulos. En general, los métodos adaptativos se basan en estimadores de error *a posteriori*, que son cantidades calculables a partir de una solución discreta y de los datos del problema, e indican la distribución del error en la malla donde la solución discreta ha sido calculada (ver Subsección 1.4.2).

Los primeros resultados de convergencia de métodos de elementos finitos adaptativos para problemas lineales estuvieron basados en el resultado de reducción del error demostrado inicialmente por Dörfler [Dör96]. Estos resultados exigen marcar elementos para que tanto los estimadores de error como la oscilación satisfagan el criterio de Dörfler [MNS00, MNS02, MN05], que no parece ser necesario en la práctica. Otra hipótesis (artificial) impuesta al algoritmo para demostrar la convergencia, es que el refinamiento genere un nodo interior en cada elemento marcado y en cada uno de sus lados.

Posteriormente, se obtuvo un resultado general de convergencia para problemas lineales en [MSV08], donde se establecen condiciones sobre los problemas y los métodos adaptativos que garantizan convergencia. En este trabajo se eliminan las dos hipótesis artificiales mencionadas en el párrafo anterior, y se demuestra la convergencia para todas las estrategias de marcado conocidas y utilizadas ampliamente, como ser la estrategia del máximo y la de equidistribución.

La optimalidad para métodos adaptativos, la cual explicamos en la Subsección 1.4.3, ha sido probada inicialmente en [Ste07] para el problema de Poisson usando para el marcado la estrategia de Dörfler, y extendida a problemas elípticos simétricos con coeficientes más generales en [CKNS08]. En este último trabajo se mejora el tratamiento de los términos de oscilación y se eliminan las hipótesis artificiales aún presentes en el primero.

1.4.1. Iteración adaptativa básica. Consideramos un problema (P) planteado en un espacio de funciones $\mathbb{V} := \mathbb{V}(\Omega)$ y supongamos que $u \in \mathbb{V}$ es una solución de (P). Dada una triangulación conforme \mathcal{T}_0 del dominio Ω , para cada malla $\mathcal{T} \in \mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, consideramos un espacio de elementos finitos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ asociado a esta malla, y suponemos que $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ es solución de una discretización del problema (P) planteada en el espacio $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$. La iteración adaptativa clásica para aproximar la solución u del problema (P) con las soluciones de estos problemas discretos se describe en el siguiente algoritmo.

Algoritmo 1.

(Iteración adaptativa básica)

Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω . Poner $k = 0$.

1. $u_k := \text{RESOLVER}(\mathcal{T}_k)$.
2. $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k} := \text{ESTIMAR}(u_k, \mathcal{T}_k)$.
3. $\mathcal{M}_k := \text{MARCAR}(\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}, \mathcal{T}_k)$.
4. $\mathcal{T}_{k+1} := \text{REFINAR}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k, n)$.
5. Incrementar k y volver al paso 1.

Describamos ahora cada uno de los módulos de este algoritmo. Dada la triangulación conforme \mathcal{T}_k de Ω , el módulo RESOLVER calcula y devuelve la solución u_k del problema discreto planteado en $\mathbb{V}_k := \mathbb{V}_{\mathcal{T}_k}$.

Dada \mathcal{T}_k y la correspondiente salida u_k de RESOLVER, el módulo ESTIMAR calcula ciertos estimadores de error local $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}$, que dependen de la solución calculada u_k . En general, se construyen estimadores de error a posteriori buscando que cumplan ciertas propiedades de confiabilidad, esto es, que realmente sean una cota superior para el error; y de eficiencia, en el sentido de que no sobreestimen demasiado el error local, y en particular, que un estimador local grande implique que realmente el error local lo es. Presentaremos construcciones de estimadores en cada uno de los problemas que estudiamos en esta tesis y analizaremos sus propiedades.

Basados en los estimadores $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}$, el módulo MARCAR selecciona un subconjunto \mathcal{M}_k de \mathcal{T}_k de *elementos marcados* mediante alguna *estrategia de marcado*, eligiendo los elementos donde el error de aproximación es grande. Existen varias estrategias de marcado conocidas [SS05]:

1. Estrategia del Máximo: Dado un umbral $\theta \in (0, 1)$, \mathcal{M}_k es el conjunto de elementos $T \in \mathcal{T}_k$ que satisfacen

$$\eta_k(T) \geq \theta \max_{T' \in \mathcal{T}_k} \eta_k(T').$$

2. Estrategia de Equidistribución: Dado un parámetro $\theta \in (0, 1)$, $\theta \approx 1$, y dada una tolerancia tol , el conjunto de elementos marcados \mathcal{M}_k está formado por todos los elementos $T \in \mathcal{T}_k$ tales que

$$\eta_k(T) > \theta \frac{\text{tol}}{(\#\mathcal{T}_k)^{1/2}}.$$

La razón que motiva esta estrategia se basa en el hecho de que si quisiéramos equidistribuir el error, en el sentido de que todos los estimadores de error local fueran iguales, tendríamos para $T \in \mathcal{T}_k$ que

$$\left(\sum_{T' \in \mathcal{T}_k} \eta_k^2(T') \right)^{1/2} = (\#\mathcal{T}_k)^{1/2} \eta_k(T) \leq \text{tol},$$

y de aquí que $\eta_k(T) \leq \text{tol} / (\#\mathcal{T}_k)^{1/2}$. De este modo, esta estrategia elige los elementos que no satisfacen esta condición. El parámetro θ se utiliza para hacer más robusto el procedimiento de marcado.

3. Estrategia de Equidistribución modificada: Dado un parámetro $\theta \in (0, 1)$, $\theta \approx 1$, el conjunto de elementos marcados \mathcal{M}_k está formado por todos los elementos $T \in \mathcal{T}_k$ tales que

$$\eta_k(T) > \theta \frac{\eta_k}{(\#\mathcal{T}_k)^{1/2}},$$

donde $\eta_k := \left(\sum_{T' \in \mathcal{T}_k} \eta_k^2(T') \right)^{1/2}$ es el estimador de error global.

4. Estrategia de Reducción Garantizada del Error o estrategia de Dörfler [Dör96]: Dado un parámetro de marcado $\theta \in (0, 1]$, seleccionamos un subconjunto *minimal* de elementos $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k$ que satisface

$$\eta_k(\mathcal{M}_k) \geq \theta \eta_k(\mathcal{T}_k),$$

donde $\eta_k^2(\mathcal{M}_k) := \sum_{T \in \mathcal{M}_k} \eta_k^2(T)$ es el estimador sobre los elementos marcados y $\eta_k^2(\mathcal{T}_k) := \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k^2(T)$ es el estimador de error total.

En general, diremos que una estrategia de marcado es *razonable* si el conjunto de elementos marcados \mathcal{M}_k contiene al menos un elemento de \mathcal{T}_k que tiene el máximo valor de los estimadores locales, esto es,

$$(1.9) \quad \text{si existe } T_k^{\text{máx}} \in \mathcal{M}_k \text{ tal que } \eta_k(T_k^{\text{máx}}) = \max_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k(T).$$

Ésto es lo que se hace usualmente en la práctica para tratar de maximizar la reducción del error con un esfuerzo mínimo. Notemos que todas las estrategias de marcado descritas arriba son razonables.

Finalmente, el módulo REFINAR toma la malla \mathcal{T}_k y el conjunto $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k$ como argumentos de entrada. Utilizando el proceso de bisección descrito en [Ste08], este módulo refina (subdivide) cada elemento de \mathcal{M}_k al menos n veces (con $n \geq 1$ fijo), para obtener una nueva

triangulación conforme \mathcal{T}_{k+1} de Ω , la cual es un refinamiento de \mathcal{T}_k y la salida de este módulo. Aquí $n \in \mathbb{N}$ es un número elegido por el “usuario”; usualmente se toma $n = d$. Los procedimientos de *bisección del vértice más nuevo* en \mathbb{R}^2 y el de bisección de Kossaczky en \mathbb{R}^3 , utilizados en [SS05], coinciden con el dado por Stevenson [Ste08], solo reenumerando posiblemente la triangulación inicial \mathcal{T}_0 .

DEFINICIÓN 1.11. Decimos que una triangulación conforme \mathcal{T}_0 está *enumerada adecuadamente* si satisface la condición (b) de la Sección 4 de [Ste08], donde se establece una numeración local de los vértices.

En el caso $d = 2$, esta definición coincide con la condición descrita en [BDD04, Lema 2.1], que dice esencialmente que siempre que un lado sea de refinamiento de un triángulo también es de refinamiento del vecino con quien lo comparte. En este último trabajo se demuestra que dicha enumeración es siempre posible en dos dimensiones.

Para el caso $d = 3$, basado en la construcción dada en [Kos94], en [Ste08] se ha mostrado que cualquier triangulación conforme tiene un refinamiento conforme que satisface una condición más fuerte que estar enumerada adecuadamente.

El siguiente resultado, que enunciamos sin demostración, acota la complejidad de una malla \mathcal{T}_k en términos del número de elementos que fueron marcados desde el principio del proceso iterativo (ver [BDD04] para $d = 2$ y [Ste08] para $d > 2$). Este resultado es fundamental al momento de demostrar la optimalidad de los métodos adaptativos.

LEMA 1.12 (Complejidad del módulo REFINAR). *Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme enumerada adecuadamente. Sea $\{\mathcal{T}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de refinamientos de \mathcal{T}_0 , donde \mathcal{T}_{k+1} se obtiene de \mathcal{T}_k mediante $\mathcal{T}_{k+1} := \text{REFINAR}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k)$, para algún $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k$. Entonces, existe una constante $C > 0$ que depende solamente de \mathcal{T}_0 y del número de refinamientos n realizados a los elementos marcados, tal que*

$$\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0 \leq C \sum_{i=0}^{k-1} \#\mathcal{M}_i, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado que da una cota para la complejidad de la superposición de dos triangulaciones \mathcal{T}^1 y \mathcal{T}^2 obtenidas por refinamiento de \mathcal{T}_0 . En [Ste07, CKNS08] pueden encontrarse pruebas del mismo.

LEMA 1.13 (Superposición de triangulaciones). *Si $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2 \in \mathbb{T}$, la superposición $\mathcal{T} := \mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^2 \in \mathbb{T}$, definida como la menor triangulación conforme que es refinamiento de \mathcal{T}^1 y \mathcal{T}^2 ,*

satisface

$$\#\mathcal{T} \leq \#\mathcal{T}^1 + \#\mathcal{T}^2 - \#\mathcal{T}_0.$$

1.4.2. Estimadores de error a posteriori. En esta sección hacemos una presentación general sobre estimadores de error para problemas variacionales que surgen de ecuaciones de segundo orden. Presentamos resultados de confiabilidad y de eficiencia local discreta que servirán como base para los problemas tratados en esta tesis.

Consideramos el problema (P) de la sección anterior, y suponemos que el espacio donde se plantea es

$$(1.10) \quad \mathbb{V} := H_{\Gamma}^1(\Omega),$$

donde $\Gamma \subset \partial\Omega$. En particular, cuando $\Gamma = \emptyset$, $\mathbb{V} = H^1(\Omega)$; y cuando $\Gamma = \partial\Omega$, $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$. Como antes, dada una triangulación conforme \mathcal{T}_0 de Ω , consideramos $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, y el espacio de elementos finitos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}$ definido por

$$(1.11) \quad \mathbb{V}_{\mathcal{T}} := \{v \in \mathbb{V} \mid v|_T \in \mathcal{P}_{\ell}(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\},$$

donde $\ell \in \mathbb{N}$ es un grado polinomial fijo. Esta aproximación se llama *conforme* porque los espacios discretos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ son subconjuntos del espacio \mathbb{V} . Por otro lado, si $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ es un refinamiento de \mathcal{T} , $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$, lo que significa que los espacios discretos están *anidados*.

Suponemos que para las aproximantes $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ podemos definir un *residuo interior* $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \in L^2(\Omega)$, y un *residuo de salto* $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \in L^2(\Sigma_{\mathcal{T}})$, de modo que el *residuo* $\mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}) \in \mathbb{V}'$ se vincula con éstos a través de la siguiente relación fundamental:⁶

$$(1.12) \quad \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), w \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})w + \int_{\partial T} J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})w \right), \quad \forall w \in \mathbb{V}.$$

OBSERVACIÓN 1.14. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de \mathcal{T} . Si $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ y $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ están definidos para $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, de la relación (1.12) se sigue que

$$R_{\mathcal{T}_*}(v_{\mathcal{T}})|_{T_*} = R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_{T_*}, \quad \forall T_* \in \mathcal{T}_*,$$

⁶En general, $\langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), w \rangle$ indica por cuánto $v_{\mathcal{T}}$ no satisface la forma variacional del problema (P) con la función de prueba w . Por otro lado, $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_T$ mide por cuánto $v_{\mathcal{T}}$ no satisface la ecuación diferencial subyacente en T y $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_S$ regula el comportamiento de $v_{\mathcal{T}}$ a través del lado S . Se presentan ejemplos concretos de estos residuos para problemas elípticos en la Sección 1.5; y para los problemas tratados en esta tesis, más precisamente, para un problema no lineal en las Secciones 3.5 y 5.4, y para distintos problemas elípticos de autovalores en las Secciones 6.1.2, 6.2.2 y 6.3.1.

y que

$$J_{\mathcal{T}^*}(v_{\mathcal{T}})|_{S_*} = \begin{cases} J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_{S_*} & \text{para todo } S_* \in \Sigma_{\mathcal{T}^*} \text{ tal que } S_* \subset S, \text{ para algún } S \in \Sigma_{\mathcal{T}} \\ 0 & \text{para todo } S_* \in \Sigma_{\mathcal{T}^*} \text{ tal que } S_* \not\subset S, \text{ cualquiera sea } S \in \Sigma_{\mathcal{T}}. \end{cases}$$

En base al residuo interior $R_{\mathcal{T}}$ y al residuo de salto $J_{\mathcal{T}}$, definimos *estimadores de error local* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T)$ por

$$(1.13) \quad \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T) := H_T^2 \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T^2 + H_T \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}^2, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y el *estimador de error global* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ como

$$(1.14) \quad \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T).$$

Siempre que Υ sea un subconjunto de \mathcal{T} , $\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; \Upsilon)$ denotará la suma $\sum_{T \in \Upsilon} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T)$.

La siguiente estimación provee una cota superior para el residuo.

TEOREMA 1.15 (Confiabilidad de los estimadores). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si para alguna $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ se cumple que*

$$(1.15) \quad \langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v_{\mathcal{T}} \rangle = 0, \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}},$$

donde \mathbf{R} está definido por la relación fundamental (1.12), entonces

$$(1.16) \quad |\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v \rangle| \leq \sqrt{2} C_{SZ} \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; T) \|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)},$$

para toda $v \in \mathbb{V}$, donde $C_{SZ} = C_{SZ}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell) > 0$ es la constante dada en (1.8); y más aún,

$$(1.17) \quad \|\mathbf{R}(u_{\mathcal{T}})\|_{\mathbb{V}} := \sup_{0 \neq v \in \mathbb{V}} \frac{\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v \rangle}{\|v\|_{\mathbb{V}}} \leq C \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}),$$

donde $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell) > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y supongamos que $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ satisface (1.15). Sea $v \in \mathbb{V}$ y sea $v_{\mathcal{T}} := \mathcal{P}v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ la interpolante de Scott-Zhang de v .⁷ Puesto que $\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v_{\mathcal{T}} \rangle = 0$, usando (1.12), tenemos

$$\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v \rangle = \langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v - v_{\mathcal{T}} \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})(v - v_{\mathcal{T}}) + \int_{\partial T} J_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})(v - v_{\mathcal{T}}) \right).$$

⁷Se puede construir el operador de Scott-Zhang de manera que preserve condiciones de borde homogéneas en una parte del borde de Ω en el caso en que Γ sea un subconjunto propio de $\partial\Omega$ [SZ90].

Aplicando la desigualdad de Hölder y usando (1.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v \rangle| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} (\|R_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})\|_T \|v - v_{\mathcal{T}}\|_T + \|J_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})\|_{\partial T} \|v - v_{\mathcal{T}}\|_{\partial T}) \\
&\leq C_{SZ} \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\|R_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})\|_T H_T \|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + \|J_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})\|_{\partial T} H_T^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} \right) \\
&\leq \sqrt{2} C_{SZ} \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; T) \|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)},
\end{aligned}$$

y así, (1.16) se cumple.

Finalmente, (1.17) sigue de (1.16) aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y utilizando (1.1). \square

En general, si el error está controlado por el residuo, es decir, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$(1.18) \quad \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} \leq C \|\mathbf{R}(u_{\mathcal{T}})\|_{\mathbb{V}'},$$

donde $u \in \mathbb{V}$ es solución del problema (P), del teorema anterior se sigue que

$$(1.19) \quad \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} \leq C \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}),$$

esto es, el estimador global es *confiable*, puesto que es una cota superior para el error. En la prueba del Teorema 1.21 demostramos (1.18) para problemas elípticos lineales y por lo tanto, que el estimador global es, en efecto, una cota superior para el error.

Por otro lado, el siguiente resultado provee una herramienta para estudiar la *eficiencia* de los estimadores.

Notemos que definiendo $n_d := 3$ si $d = 2$ y $n_d := 6$ si $d = 3$, se garantiza que después de realizar n_d bisecciones a un elemento T de una triangulación, aparecen nuevos nodos sobre cada lado y en el interior. Esto permite construir una *burbuja discreta* en T y sobre cada lado de T .

TEOREMA 1.16 (Eficiencia local discreta de los estimadores). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y fijemos $T \in \mathcal{T}$. Sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ el refinamiento de \mathcal{T} que se obtiene bisectando n_d veces cada elemento de $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$. Sea \mathbb{V}_* un subespacio cerrado de \mathbb{V} tal que $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*} \subset \mathbb{V}_*$. Si $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $u_* \in \mathbb{V}_*$ satisfacen*

$$(1.20) \quad \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), v \rangle \leq C_{\mathbf{R}} \|v_{\mathcal{T}} - u_*\|_{\mathbb{V}(\omega)} \|v\|_{\mathbb{V}(\omega)}, \quad \forall v \in \mathbb{V}_*, \text{ sop}(v) \subset \omega,$$

para alguna constante $C_{\mathbf{R}} > 0$, donde ω puede ser cualquier $T' \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$ o $\omega_{\mathcal{T}}(S)$, para cualquier lado S de T , entonces

$$\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) \leq C \left(\|v_{\mathcal{T}} - u_*\|_{\mathbb{V}(\omega_{\mathcal{T}}(T))} + H_T \|R_{\mathcal{T}} - \overline{R_{\mathcal{T}}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}} - \overline{J_{\mathcal{T}}}\|_{\partial T} \right),$$

para alguna $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, C_{\mathbf{R}}) > 0$, donde $\overline{R_{\mathcal{T}}|_{T'}}$ denota la proyección de $R_{\mathcal{T}} := R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(T')$ en $L^2(T')$, para todo $T' \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$, y para cada lado $S \subset \partial T$, $\overline{J_{\mathcal{T}}|_S}$ la proyección de $J_{\mathcal{T}} := J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(S)$ en $L^2(S)$.

Antes de demostrar este teorema hacemos algunas observaciones.

OBSERVACIÓN 1.17. En general, la cantidad $\|v_{\mathcal{T}} - u_*\|_{\mathbb{V}(\omega)}$ puede ser:

- Un error local discreto. Esto es, cuando \mathbb{V}_* es un espacio discreto asociado a un refinamiento de \mathcal{T} , y u_* es solución de la discretización del problema (P) en \mathbb{V}_* , el resultado será una estimación llamada *eficiencia local discreta de los estimadores*.
- Una medida de error local. Es decir, si u es solución del Problema (P) en \mathbb{V} , tomando $\mathbb{V}_* = \mathbb{V}$ y $u_* = u$, el resultado será una estimación llamada *eficiencia local de los estimadores*.

OBSERVACIÓN 1.18. En la demostración del Teorema 1.16 haremos uso de las siguientes propiedades, en donde $\ell \in \mathbb{N}$ es un grado polinomial fijo:

1. Para cada simplex T en \mathbb{R}^d , existe una *burbuja* ϕ_T sobre T tal que

$$\int_T v^2 \phi_T \approx \int_T v^2, \quad \forall v \in \mathcal{P}_{\ell-1}(T).$$

2. Para cada lado S de un simplex T en \mathbb{R}^d , existe una *burbuja* ϕ_S sobre S tal que

$$\int_S v^2 \phi_S \approx \int_S v^2, \quad \forall v \in \mathcal{P}_{\ell-1}(S).$$

La prueba de estas propiedades se basa en el hecho de que todas las normas son equivalentes en un espacio de dimensión finita y en la construcción de burbujas por escalamiento de una burbuja en una configuración de referencia. Las constantes de equivalencia dependen de d , de $\frac{\text{diam}(T)}{\rho_T}$ y de ℓ .⁸

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.16. Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema. Utilizaremos el símbolo “ \lesssim ” para indicar “ $\leq C$ ”, con $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, C_{\mathbf{R}}) > 0$.

⁸En la demostración del Teorema 1.16 se muestra explícitamente la construcción de las burbujas ϕ_T y de ϕ_S .

[1] Analizamos primero el residuo interior $R_T := R_T(v_T)$. Puesto que

$$(1.21) \quad \|R_T\|_T \leq \|\overline{R_T}\|_T + \|R_T - \overline{R_T}\|_T,$$

será suficiente estimar $\|\overline{R_T}\|_T$.

Sea x_T^{int} el vértice de \mathcal{T}_* que es interior a T . Sea φ_T la función continua y lineal a trozos sobre \mathcal{T}_* tal que $\varphi_T(x_T^{int}) = 1$ y φ_T es nula sobre todos los otros vértices de \mathcal{T}_* . Entonces

$$(1.22) \quad \|\overline{R_T}\|_T^2 \lesssim \int_T \overline{R_T}^2 \varphi_T = \int_T \overline{R_T} (\overline{R_T} \varphi_T) = \int_T R_T (\overline{R_T} \varphi_T) + \int_T (\overline{R_T} - R_T) \overline{R_T} \varphi_T.$$

Si definimos $v := \overline{R_T} \varphi_T \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*} \subset \mathbb{V}_*$, teniendo en cuenta que v se anula sobre ∂T , para la primera integral en el lado derecho de (1.22) se tiene que

$$\int_T R_T v = \langle \mathbf{R}(v_T), v \rangle \leq C_{\mathbf{R}} \|v_T - u_*\|_{\mathbb{V}(T)} \|v\|_{\mathbb{V}(T)},$$

y para la segunda,

$$\int_T (\overline{R_T} - R_T) \overline{R_T} \varphi_T \leq \|\overline{R_T} \varphi_T\|_T \|\overline{R_T} - R_T\|_T \leq \|\overline{R_T}\|_T \|\overline{R_T} - R_T\|_T.$$

Usando la desigualdad inversa (1.5) y que $\|v\|_T \leq \|\overline{R_T}\|_T$ obtenemos

$$(1.23) \quad H_T \|\overline{R_T}\|_T \lesssim \|v_T - u_*\|_{\mathbb{V}(T)} + H_T \|\overline{R_T} - R_T\|_T.$$

Finalmente, de (1.21) y (1.23) se sigue que

$$(1.24) \quad H_T \|R_T\|_T \lesssim \|v_T - u_*\|_{\mathbb{V}(T)} + H_T \|R_T - \overline{R_T}\|_T.$$

La misma cota se cumple cambiando T por T' , para cualquier $T' \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$.

[2] En segundo lugar estimamos el residuo de salto $J_T := J_T(v_T)$. Sea S un lado de T . Como antes, acotamos primero la proyección $\overline{J_T}$ de J_T , puesto que

$$(1.25) \quad \|J_T\|_S \leq \|\overline{J_T}\|_S + \|J_T - \overline{J_T}\|_S.$$

Sea x_S^{int} un vértice de \mathcal{T}_* interior a S . Sea φ_S la función continua y lineal a trozos sobre \mathcal{T}_* tal que $\varphi_S(x_S^{int}) = 1$ y φ_S se anula sobre los otros vértices de \mathcal{T}_* . Entonces

$$(1.26) \quad \|\overline{J_T}\|_S^2 \lesssim \int_S \overline{J_T}^2 \varphi_S = \int_S \overline{J_T} (\overline{J_T} \varphi_S) = \int_S J_T (\overline{J_T} \varphi_S) + \int_S (\overline{J_T} - J_T) \overline{J_T} \varphi_S.$$

Supongamos que S es un lado interior. El caso en que S es un lado frontera se puede tratar con la misma técnica. Sean T_1 y T_2 los elementos que comparten S , uno de los cuales obviamente es T . Extendemos $\overline{J_T}$ a $\omega_{\mathcal{T}}(S)$ como constante a lo largo de la dirección de una arista de cada

T_i , para $i = 1, 2$, y denotamos a esta extensión nuevamente $\overline{J_T}$. Notemos que $\overline{J_T}$ es continua sobre $\omega_T(S)$ y $\overline{J_T}|_{T_i} \in \mathcal{P}_{\ell-1}(T_i)$, para $i = 1, 2$.

Puesto que $v := \overline{J_T}\varphi_S \in \mathbb{V}_{T_*} \subset \mathbb{V}_*$ y teniendo en cuenta que v se anula sobre $\partial(\omega_T(S))$, para la primera integral en el lado derecho de (1.26) tenemos que

$$2 \int_S J_T v = \langle \mathbf{R}(v_T), v \rangle - \int_{T_1 \cup T_2} R_T v \lesssim \|v_T - u_*\|_{\mathbb{V}(\omega_T(S))} \|v\|_{\mathbb{V}(\omega_T(S))} + \|R_T\|_{\omega_T(S)} \|v\|_{\omega_T(S)},$$

mientras que para la segunda,

$$\int_S (\overline{J_T} - J_T) \overline{J_T} \varphi_S \leq \|\overline{J_T} \varphi_S\|_S \|\overline{J_T} - J_T\|_S \leq \|\overline{J_T}\|_S \|\overline{J_T} - J_T\|_S.$$

Así, usando nuevamente la desigualdad inversa (1.5), que $\|v\|_{\omega_T(S)} \leq \|\overline{J_T}\|_{\omega_T(S)}$ y que $\|\overline{J_T}\|_{\omega_T(S)} \lesssim H_T^{1/2} \|\overline{J_T}\|_S$ se sigue que

$$(1.27) \quad H_T^{1/2} \|\overline{J_T}\|_S \lesssim \|v_T - u_*\|_{\mathbb{V}(\omega_T(S))} + H_T \|R_T\|_{\omega_T(S)} + H_T^{1/2} \|\overline{J_T} - J_T\|_S.$$

Finalmente, de (1.25) y (1.27) se tiene

$$H_T^{1/2} \|J_T\|_S \lesssim \|v_T - u_*\|_{\mathbb{V}(\omega_T(S))} + H_T \|R_T\|_{\omega_T(S)} + H_T^{1/2} \|\overline{J_T} - J_T\|_S.$$

Sumando la última ecuación sobre los lados $S \subset \partial T$, obtenemos

$$H_T^{1/2} \|J_T\|_{\partial T} \lesssim \|v_T - u_*\|_{\mathbb{V}(\omega_T(T))} + H_T \|R_T\|_{\omega_T(T)} + H_T^{1/2} \|J_T - \overline{J_T}\|_{\partial T}.$$

□ Se completa la prueba del teorema teniendo en cuenta (1.24) y la última desigualdad. □

Supongamos que se cumple la estimación (1.20) para todo $\omega \subset \overline{\Omega}$, con $u_* = u$ solución del problema (P) en $\mathbb{V}_* = \mathbb{V}$, como ocurre en el caso de problemas elípticos lineales, según veremos en la prueba del Teorema 1.24 debajo. Entonces, el Teorema 1.16 implica que

$$(1.28) \quad \eta_T(v_T; T) \leq C \left(\|v_T - u\|_{\mathbb{V}(\omega_T(T))} + H_T \|R_T - \overline{R_T}\|_{\omega_T(T)} + H_T^{1/2} \|J_T - \overline{J_T}\|_{\partial T} \right),$$

para todo $T \in \mathcal{T}$, donde C es una constante positiva. Notemos que esta estimación nos permite concluir que los estimadores de error local son eficientes, siempre que los dos últimos términos del lado derecho de esta desigualdad, llamados *términos de oscilación*, sean pequeños.

Definimos la *oscilación local* $\text{osc}_T(v_T; T)$ como

$$(1.29) \quad \text{osc}_T^2(v_T; T) := H_T^2 \|R_T - \overline{R_T}\|_T^2 + H_T \|J_T - \overline{J_T}\|_{\partial T}^2, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

donde, como antes, $\overline{R_{\mathcal{T}}}|_T$ denota la proyección de $R_{\mathcal{T}} := R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(T)$ en $L^2(T)$, y para cada lado $S \subset \partial T$, $\overline{J_{\mathcal{T}}}|_S$ denota la proyección de $J_{\mathcal{T}} := J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(S)$ en $L^2(S)$; y la *oscilación global* $\text{osc}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ por

$$(1.30) \quad \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T).$$

Siempre que Υ sea un subconjunto de \mathcal{T} , $\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; \Upsilon)$ denotará la suma $\sum_{T \in \Upsilon} \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T)$.

Finalmente, si sumamos (1.28) sobre todo $T \in \mathcal{T}$, usando (1.1) obtenemos que

$$(1.31) \quad \eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \leq C(\|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} + \text{osc}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})),$$

para alguna constante $C > 0$.

OBSERVACIÓN 1.19. Si u es solución del problema (P) y $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ es solución de una discretización de (P) en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, puesto que $\text{osc}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \leq \eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$, de las estimaciones (1.19) y (1.31) se sigue

$$\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) \approx \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} + \text{osc}_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}).$$

Esto significa que el estimador de error $\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})$ en realidad estima la cantidad $\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} + \text{osc}_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})$, que llamamos *error total*.

1.4.3. Optimalidad del error de aproximación. En esta sección introducimos el concepto de *optimalidad* de un método adaptativo en términos de los grados de libertad, lo que significa que la sucesión generada por el algoritmo converge con la velocidad óptima en el sentido que precisamos a continuación.

Supongamos que queremos aproximar la solución u del problema (P) mediante un método adaptativo, y supongamos que $\text{error}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ es una medida del error entre u y $v_{\mathcal{T}}$.

Para $N \in \mathbb{N}_0$, definimos \mathbb{T}_N como el conjunto de todas las posibles triangulaciones conformes generadas por refinamiento de \mathcal{T}_0 con a lo sumo N elementos más que \mathcal{T}_0 , es decir,

$$\mathbb{T}_N := \{\mathcal{T} \in \mathbb{T} : \#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0 \leq N\}.$$

Los elementos \mathcal{T} de este conjunto se llaman triangulaciones de *complejidad* $\leq N$. El error de la mejor aproximación de la solución u del problema (P) al utilizar funciones discretas sobre

mallas de complejidad $\leq N$ está dado por⁹

$$\sigma(u; N) := \inf_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N} \inf_{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \text{error}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}),$$

Para $s > 0$, decimos que $u \in \mathbb{A}_s$ si

$$|u|_s := \sup_{N \in \mathbb{N}_0} (N+1)^s \sigma(u; N) < \infty,$$

esto es, u está en la clase \mathbb{A}_s si puede ser aproximada sobre mallas adaptativas con una rapidez $(DOFs)^{-s}$.¹⁰ El siguiente resultado elemental es útil.

LEMA 1.20. *Supongamos que $u \in \mathbb{A}_s$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existen una triangulación $\mathcal{T}_{\varepsilon} \in \mathbb{T}$ y una función $v_{\varepsilon} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_{\varepsilon}}$ tales que*

$$\#\mathcal{T}_{\varepsilon} - \#\mathcal{T}_0 \leq |u|_s^{\frac{1}{s}} \varepsilon^{-\frac{1}{s}} \quad \text{y} \quad \text{error}_{\mathcal{T}_{\varepsilon}}(v_{\varepsilon}) < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $u \in \mathbb{A}_s$. Sea $\varepsilon > 0$ y elijamos el único $N \in \mathbb{N}_0$ que satisface

$$N \leq |u|_s^{\frac{1}{s}} \varepsilon^{-\frac{1}{s}} < N+1.$$

Puesto que $(N+1)^s \sigma(u; N) \leq |u|_s$, de la elección de N se sigue que $\sigma(u; N) < \varepsilon$. Finalmente, teniendo en cuenta la definición de $\sigma(u; N)$, existen $\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N$ y $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tales que $\text{error}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) < \varepsilon$; y como $\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N$,

$$\#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0 \leq N \leq |u|_s^{\frac{1}{s}} \varepsilon^{-\frac{1}{s}},$$

lo que completa la demostración. □

El estudio de las clases de funciones que permiten aproximación con ciertas velocidades está fuera del alcance de esta tesis. Algunos resultados sobre esto pueden encontrarse en [BDDP02, GM08, GM09].

La *optimalidad* de un algoritmo adaptativo significa que si la solución u de un problema puede aproximarse con mallas adaptativas de manera que el error decrezca como N^{-s} , donde N es la cantidad de grados de libertad de las mallas y $s > 0$ es un número real, o sea, si $u \in \mathbb{A}_s$,

⁹Aquí utilizamos $\text{error}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ para indicar una cierta noción de error de aproximación para una función discreta $v_{\mathcal{T}}$ asociada a la malla \mathcal{T} .

¹⁰DOFs denota la cantidad de *grados de libertad* (degrees of freedom), es decir, la dimensión del espacio discreto $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$.

entonces el algoritmo adaptativo genera una sucesión de mallas $\{\mathcal{T}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y de aproximaciones $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfacen

$$\text{error}_{\mathcal{T}_k}(u_k) \leq C(\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0)^{-s},$$

para alguna constante $C > 0$, es decir, el algoritmo genera una sucesión de mallas donde el error de las aproximaciones a la solución del problema decrece con la mayor rapidez posible.

Hasta el momento, para lograr un resultado de este tipo en [CKNS08] para problemas lineales elípticos, y en esta tesis para problemas no lineales que surgen de leyes de conservación estacionarias en el Teorema 4.16, y para problemas elípticos de autovalores en el Teorema 11.9 y su corolario, se han utilizado los siguientes resultados:

1. El Lema 1.12 que acota la complejidad de la malla en un nivel en términos de la cantidad de elementos marcados en los niveles anteriores, para lo cual necesitamos enumerar la malla inicial adecuadamente, según la Definición 1.11.
2. Una cota para la cantidad de elementos marcados en cada paso en términos del error cometido en ese paso en los Lemas 4.15 y 11.8, la cual se basa a su vez en lo siguiente:
 - Utilizar para el marcado una estrategia de Dörfler *eficiente*, eligiendo el parámetro θ suficientemente pequeño.
 - Un *Lema de Cea*, es decir, un resultado que establezca una casi-optimalidad del error de la aproximación $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ en el siguiente sentido:

$$\text{error}_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) \leq C \inf_{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \text{error}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}),$$

para alguna constante $C > 0$ independiente de \mathcal{T} .

- Un resultado de *marcado óptimo*, lo que significa si algún refinamiento da una cierta reducción del error, entonces el marcado necesariamente se hizo satisfaciendo el criterio de Dörfler.
 - La regularidad de la solución exacta.
3. Una *propiedad de contracción* para alguna noción equivalente del error (ver Teoremas 4.14 y 11.7) que se basa en:
 - Un resultado de *(casi) ortogonalidad para el error* de dos soluciones discretas consecutivas.
 - Un resultado de *reducción del estimador* debido al refinamiento.
 - El uso de la estrategia de Dörfler para el marcado.
 - Una *cota superior global* para el error en términos del estimador de error global.

1.5. Métodos de elementos finitos adaptativos para ecuaciones elípticas

En esta sección presentamos una formulación variacional clásica asociada a ecuaciones diferenciales elípticas y establecemos estimaciones de error a posteriori ya conocidas para este tipo de problemas, algunas de cuales serán útiles al momento de demostrar estimaciones a posteriori para problemas no lineales en el Capítulo 4.

Sea $\mathbb{V} := H^1_{\Gamma}(\Omega)$ definido en (1.10), y consideremos el

Problema elíptico

Dado $L \in \mathbb{V}'$, hallar $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$(1.32) \quad a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

donde la forma bilineal $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes propiedades:

- Simetría: Esto es, $a(v, w) = a(w, v)$, para toda $v, w \in \mathbb{V}$.
- Acotación: Existe una constante $C > 0$ tal que $|a(v, w)| \leq C\|v\|_{\mathbb{V}}\|w\|_{\mathbb{V}}$, para toda $v, w \in \mathbb{V}$.
- Coercitividad: Existe una constante $c_a > 0$ tal que $c_a\|v\|_{\mathbb{V}}^2 \leq |a(v, v)|$, para toda $v \in \mathbb{V}$.

De estas propiedades se sigue que $a(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en \mathbb{V} y que la norma inducida $\|\cdot\|_a$ definida por

$$\|v\|_a := a(v, v)^{1/2}, \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

es equivalente a $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$.

Por el Teorema de Representación de Riesz se tiene que el problema (1.32) tiene una única solución $u \in \mathbb{V}$.

Como ejemplo, podemos considerar el problema de Dirichlet:

Dada f , hallar u tal que

$$(1.33) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cuya forma débil es:

Caso particular: Problema de Dirichlet

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Notemos que este problema tiene la forma (1.32) tomando $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$, y

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad L(v) = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dado un grado polinomial fijo $\ell \in \mathbb{N}$, y dada una triangulación conforme \mathcal{T}_0 de Ω , para cada $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$ consideremos el espacio de elementos finitos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ definido en (1.11), y la siguiente discretización del problema (1.32):

Problema discreto

Hallar $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tal que

$$(1.34) \quad a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) = L(v_{\mathcal{T}}), \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}.$$

En este caso, el *residuo* de $v \in \mathbb{V}$ está dado por

$$\langle \mathbf{R}(v), w \rangle := a(v, w) - L(w), \quad \forall w \in \mathbb{V},$$

y suponemos definidos un *residuo interior* $R_{\mathcal{T}}$ y un *residuo de salto* $J_{\mathcal{T}}$ de manera que se satisfaga la relación fundamental (1.12).

Por ejemplo, para el problema de Dirichlet (1.33), si $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$,

$$R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_T := -\Delta v_{\mathcal{T}} - f, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y

$$J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_S := \frac{1}{2} \left(\nabla v_{\mathcal{T}}|_{\tau_1} \cdot \vec{n}_1 + \nabla v_{\mathcal{T}}|_{\tau_2} \cdot \vec{n}_2 \right), \quad \forall S \in \mathcal{S}_{\Omega},$$

y $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_S := 0$, si $S \in \mathcal{S}_{\partial\Omega}$.

Consideremos los estimadores de error local $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T)$ definidos como en (1.13) y el estimador de error global $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ como en (1.14). A continuación establecemos dos estimaciones a posteriori muy conocidas para el problema (1.32), que necesitaremos luego para probar las estimaciones análogas para los problemas no lineales presentados en la primera parte de esta tesis.

TEOREMA 1.21 (Cota superior global). *Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema elíptico (1.32). Entonces existe $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell) > 0$ tal que*

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_a \leq C\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}),$$

donde $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ es la solución del Problema discreto (1.34), para cualquier $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ la solución de (1.34). Si $u \in \mathbb{V}$ es solución del Problema elíptico (1.32), entonces

$$\begin{aligned} \|u_{\mathcal{T}} - u\|_a^2 &= a(u_{\mathcal{T}} - u, u_{\mathcal{T}} - u) = a(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u) - a(u, u_{\mathcal{T}} - u) \\ &= a(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u) - L(u_{\mathcal{T}} - u) = \langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), u_{\mathcal{T}} - u \rangle \leq \|\mathbf{R}(u_{\mathcal{T}})\|_{\mathbb{V}'} \|u_{\mathcal{T}} - u\|_a, \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_a \leq \|\mathbf{R}(u_{\mathcal{T}})\|_{\mathbb{V}'}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v_{\mathcal{T}} \rangle = 0$, para toda $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, del Teorema 1.15 se sigue lo que afirma este teorema. \square

TEOREMA 1.22 (Cota superior local). *Existe $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, c_a) > 0$ tal que para toda $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y para todo refinamiento $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ de \mathcal{T} ,*

$$\|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_a \leq C\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}),$$

donde \mathcal{R} denota el conjunto de elementos de \mathcal{T} que se refinaron para obtener \mathcal{T}_* , y $u_{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*}$ son las soluciones de (1.34) en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ respectivamente.

OBSERVACIÓN 1.23. Dada una triangulación $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, si \mathcal{R} es el conjunto de elementos de \mathcal{T} que se refinan para obtener una triangulación $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$, por lo expuesto en la Sección 1.3, para cada $v_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ podemos construir, utilizando el operador de interpolación de Scott-Zhang, una aproximación $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ de modo que $v_{\mathcal{T}} \equiv v_{\mathcal{T}_*}$ sobre los elementos no refinados $\mathcal{T} \setminus \mathcal{R}$, y que se cumpla

$$(1.35) \quad \|v_{\mathcal{T}_*} - v_{\mathcal{T}}\|_T \leq C_{SZ} H_T \|\nabla v_{\mathcal{T}_*}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}, \quad \text{y} \quad \|v_{\mathcal{T}_*} - v_{\mathcal{T}}\|_{\partial T} \leq C_{SZ} H_T^{1/2} \|\nabla v_{\mathcal{T}_*}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)},$$

sobre los elementos refinados $T \in \mathcal{R}$, donde $C_{SZ} = C_{SZ}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell) > 0$ (ver Observación 1.9).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.22. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}_*$ y \mathcal{R} como en las hipótesis del teorema. Sean $u_{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*}$ soluciones de (1.34) en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ respectivamente. Puesto que $u_{\mathcal{T}_*}$ es solución de (1.34) en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ y que $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_a^2 &= a(u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) = a(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) - a(u_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) \\ &= a(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) - L(u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) = \langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*} \rangle. \end{aligned}$$

Para el error $e_{\mathcal{T}_*} := u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ consideremos la aproximación $e_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ que satisface (1.35).

Análogamente a la demostración del Teorema 1.15, teniendo en cuenta que $\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), e_{\mathcal{T}} \rangle = 0$, usando la relación fundamental (1.12), y considerando que $e_{\mathcal{T}} \equiv e_{\mathcal{T}_*}$ sobre todos los elementos de $\mathcal{T} \setminus \mathcal{R}$, obtenemos

$$\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*} \rangle = \langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), e_{\mathcal{T}_*} - e_{\mathcal{T}} \rangle \leq \sqrt{2}C_{SZ} \sum_{T \in \mathcal{R}} \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; T) \|\nabla e_{\mathcal{T}_*}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)},$$

donde hemos usado también las estimaciones (1.35). Finalmente, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, utilizando que $\|\cdot\|_a$ y que $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ son equivalentes, se sigue el resultado de este teorema. \square

Finalmente, podemos demostrar una cota inferior global para el error, si la forma a satisface la siguiente propiedad de acotación local: Existe una constante $C_a > 0$ tal que

$$a(v, w) \leq C_a \|v\|_{\mathbb{V}(\omega)} \|w\|_{\mathbb{V}(\omega)}, \quad \forall v, w \in \mathbb{V},$$

siempre que $\text{sop}(w) \subset \omega$, para $\omega \subset \overline{\Omega}$.

TEOREMA 1.24 (Cota Inferior Global). *Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema elíptico (1.32). Existe una constante $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, c_a, C_a) > 0$ tal que*

$$C\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) \leq \|v_{\mathcal{T}} - u\|_a^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}),$$

para toda $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, para cualquier $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$.¹¹

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema elíptico (1.32) y sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Puesto que para toda $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, y para toda $v \in \mathbb{V}$ con $\text{sop}(v) \subset \omega \subset \overline{\Omega}$,

$$\langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), v \rangle = a(v_{\mathcal{T}}, v) - L(v) = a(v_{\mathcal{T}}, v) - a(u, v) = a(v_{\mathcal{T}} - u, v) \leq C_a \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}(\omega)} \|v\|_{\mathbb{V}(\omega)},$$

¹¹Aquí la oscilación $\text{osc}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ se define como en (1.30).

del Teorema 1.16 (tomando $\mathbb{V}_* = \mathbb{V}$, $u_* = u$, y siguiendo su notación) se sigue que

(1.36)

$$\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) \leq C(\|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}(\omega_{\mathcal{T}}(T))} + H_T \|R_{\mathcal{T}} - \overline{R_{\mathcal{T}}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + H_T^{\frac{1}{2}} \|J_{\mathcal{T}} - \overline{J_{\mathcal{T}}}\|_{\partial T}), \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

con $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, C_a) > 0$. Sumando la desigualdad (1.36) sobre todos los elementos $T \in \mathcal{T}$ se completa la demostración de este teorema. \square

1.6. Miscelánea

Finalizamos este capítulo haciendo algunos comentarios que serán de gran utilidad en el desarrollo de ambas partes de esta tesis. Concretamente, presentamos dos subsecciones. En la primera, establecemos una clasificación de los elementos de las mallas de una sucesión adaptativa que resulta útil para demostrar la convergencia (sin orden) de métodos adaptativos (ver Capítulo 3 para problemas no lineales y Capítulo 9 para problemas de autovalores). En particular, en el Lema 3.3 y en el Teorema 3.4 de la Parte I, y en el Lema 9.4 y en el Teorema 9.5 de la Parte II. Esta clasificación fue introducida en [MSV08] para demostrar la convergencia de problemas lineales, y simplificada posteriormente en [Sie08]. Por otro lado, en la segunda subsección, introducimos la notación correspondiente para estimar adecuadamente los cambios que sufren los estimadores a posteriori y los términos de oscilación debido al refinamiento. Estos resultados son claves al momento de demostrar la optimalidad de métodos adaptativos (ver Capítulo 4 para problemas no lineales y Capítulo 11 para problemas de autovalores). En particular, la *reducción del estimador* resulta fundamental para probar una contracción del error (ver Teoremas 4.14 y 11.7), mientras que la *perturbación de la oscilación* se utiliza para probar resultados de casi-optimalidad del error o lemas de tipo Cea (ver Lemas 4.10 y 11.3) y resultados de marcado óptimo (ver Lemas 4.12 y 11.6).

1.6.1. Clasificación de los elementos de una malla. Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω . Comenzamos introduciendo la siguiente

DEFINICIÓN 1.25 (Función de tamaño de la malla). Dada una triangulación $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, $h_{\mathcal{T}} \in L^\infty(\Omega)$ es la función constante a trozos tal que

$$h_{\mathcal{T}|_T} := H_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}.$$

Así, el *tamaño global de la malla* $H_{\mathcal{T}}$ viene dado por

$$H_{\mathcal{T}} = \|h_{\mathcal{T}}\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{T \in \mathcal{T}} H_T,$$

donde $H_T = |T|^{1/d}$ es el *tamaño local de la malla*.

Por otro lado, del refinamiento por bisección descrito en la Sección 1.1.3 se sigue que la función de tamaño de la malla es monótona; esto es, si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ es un refinamiento de \mathcal{T} , entonces $h_{\mathcal{T}_*} \leq h_{\mathcal{T}}$, y se reduce estrictamente en las regiones refinadas, más precisamente,

$$\forall T \in \mathcal{T}_* \setminus \mathcal{T}, \quad h_{\mathcal{T}_*|_T} \leq 2^{-\frac{1}{d}} h_{\mathcal{T}|_T}.$$

En la siguiente definición establecemos la clasificación mencionada de los elementos de una malla.

DEFINICIÓN 1.26. Dada la sucesión de triangulaciones $\{\mathcal{T}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{T}$, donde \mathcal{T}_{k+1} es un refinamiento de \mathcal{T}_k , para cada $k \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$\mathcal{T}_k^+ := \{T \in \mathcal{T}_k \mid T \in \mathcal{T}_m, \quad \forall m \geq k\}, \quad \mathcal{T}_k^0 := \mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_k^+,$$

y

$$\Omega_k^+ := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_k^+} \omega_k(T), \quad \Omega_k^0 := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_k^0} \omega_k(T),$$

para $k \in \mathbb{N}_0$, donde $\omega_k(T) := \omega_{\mathcal{T}_k}(T)$. En palabras, \mathcal{T}_k^+ es el conjunto de elementos de \mathcal{T}_k que no se refinan en el proceso adaptativo, y \mathcal{T}_k^0 está formado por aquellos que son refinados en alguna iteración posterior. La región Ω_k^+ está formada por los elementos que no se refinan y sus vecinos inmediatos, y Ω_k^0 es la cubierta por los elementos que se refinan en algún momento y sus vecinos.

Puesto que \mathcal{T}_{k+1} es siempre un refinamiento de \mathcal{T}_k , para casi todo $x \in \Omega$ se tiene que $\{h_{\mathcal{T}_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 0. Así,

$$h_\infty(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} h_{\mathcal{T}_k}(x)$$

está bien definida en casi todo $x \in \Omega$ y define una función en $L^\infty(\Omega)$. Más aún, la convergencia es uniforme como lo afirma el siguiente lema, cuya demostración puede encontrarse en el Lema 4.3 y el Corolario 4.1 de [MSV08].

LEMA 1.27. *La sucesión de funciones de tamaño de la malla $\{h_{\mathcal{T}_k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge a h_∞ uniformemente, es decir,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|h_{\mathcal{T}_k} - h_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} = 0,$$

y si $\chi_{\Omega_k^0}$ denota la función característica de Ω_k^0 entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|h_{\mathcal{T}_k} \chi_{\Omega_k^0}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

1.6.2. Reducciones del estimador y de los términos de oscilación. Sea $\mathbb{V} := H_{\Gamma}^1(\Omega)$ y dada una triangulación conforme \mathcal{T}_0 de Ω , para cada $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, consideremos el espacio $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ definido en (1.11). Supongamos definidos un residuo interior $R_{\mathcal{T}}$ y un residuo de salto $J_{\mathcal{T}}$, y en base a éstos los estimadores de error local por (1.13) y la oscilación local por (1.29), como explicamos en la Sección 1.4.2. Si los residuos están bien definidos para ciertas $v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, entonces

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}}; T) &= \left(H_T^2 \|R_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_T^2 + H_T \|J_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(H_T^2 \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T^2 + H_T \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left((H_T \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - R_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_T)^2 + (H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - J_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_{\partial T})^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) + H_T \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - R_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_T + H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - J_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}, \end{aligned}$$

para todo $T \in \mathcal{T}$. Definamos

$$g_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}; T) := H_T \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - R_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_T + H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - J_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y notemos que la última desigualdad se transforma en

$$(1.37) \quad \eta_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}}; T) \leq \eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) + g_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}; T), \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y análogamente,

$$(1.38) \quad \text{osc}_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}}; T) \leq \text{osc}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) + g_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}; T), \quad \forall T \in \mathcal{T}.$$

Así, la cantidad $g_{\mathcal{T}}$ mide la diferencia entre los indicadores de error y los términos de oscilación de dos funciones discretas. En general, buscaremos una estimación de la forma

$$(1.39) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}} g_T^2(v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}; T) \leq C \|v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2,$$

donde $C > 0$ es una constante.

Para obtener resultados de optimalidad en métodos adaptativos es necesario tener un control de las perturbaciones que sufren los estimadores y los términos de oscilación en los sucesivos refinamientos. Las estimaciones (1.37) y (1.38) serán útiles para este análisis, considerando $v_{\mathcal{T}}$

en una malla, y $w_{\mathcal{T}}$ en un refinamiento de ésta. Estimaciones como (1.39) se demostrarán para los problemas específicos.

Parte 1

**LEYES DE CONSERVACIÓN
ESTACIONARIAS NO LINEALES**

CAPÍTULO 2

Leyes de conservación estacionarias no lineales

En este capítulo iniciamos el estudio de ecuaciones diferenciales elípticas casi lineales de la forma

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha(|\nabla u|^2)\nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde α y f están dadas.¹ Problemas de este tipo describen leyes de conservación estacionarias que aparecen frecuentemente en física matemática. En el caso particular en que $\alpha(t) = 1$ para todo $t > 0$, el problema (2.1) es el clásico problema de Dirichlet (1.33). En consecuencia, desde un punto de vista matemático, podemos interpretar al problema (2.1) como la generalización no lineal más simple del problema clásico de Dirichlet; y desde un punto de vista físico, este modelo no lineal es más abarcativo.

Problemas del tipo (2.1) contemplan varias situaciones físicas completamente diferentes en hidrodinámica y dinámica de gases (flujos subsónicos y supersónicos), electrostática, magnetostática, conducción del calor, elasticidad y plasticidad (por ejemplo, la torsión plástica de barras), etc [Zei88].

En particular, si suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un cuerpo, podemos considerar a $u(x)$ como la temperatura del cuerpo en el punto $x \in \Omega$. Así, la cantidad $-\alpha(|\nabla u|^2)\nabla u$ en (2.1) representa el campo vectorial de densidad del flujo de calor estacionario en Ω . El dato f describe posibles fuentes exteriores de calor. La condición de frontera prescribe la temperatura u en el borde del cuerpo. La densidad del flujo de calor $-\alpha(|\nabla u|^2)\nabla u$ se rige por una ley constitutiva que depende de las propiedades específicas del material. Cuando α es constante este número se llama la conductividad del calor y la ley constitutiva es la ley de Fourier de la conductividad del calor. El caso general en el que α no es constante corresponde a una ley constitutiva no lineal en donde la conductividad del calor depende del gradiente de la temperatura en cada punto.

¹Si $F : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es un campo vectorial de componentes F_i , para $i = 1, 2, \dots, d$, $\nabla \cdot$ denota el operador Divergencia, dado por $\nabla \cdot F := \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} F_i$.

En la siguiente sección consideraremos un problema más general que (2.1), donde α puede depender también del punto $x \in \Omega$, y donde la densidad del flujo está dada por

$$-\alpha(x, |\nabla u(x)|_{\mathcal{A}(x)}^2) \mathcal{A}(x) \nabla u(x),$$

donde la matriz \mathcal{A} tiene las propiedades descriptas debajo.

2.1. Leyes de conservación estacionarias en medios no isotrópicos

Recordamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ denota el interior de un polígono si $d = 2$, o de un poliedro si $d = 3$, cuya frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz.

Sea $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ tal que $\mathcal{A}(x)$ es simétrica para todo $x \in \Omega$, y uniformemente definida positiva, es decir, existen constantes $\underline{a}, \bar{a} > 0$ tales que

$$(2.2) \quad \underline{a}|\xi|^2 \leq \mathcal{A}(x)\xi \cdot \xi \leq \bar{a}|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Por otro lado, suponemos que \mathcal{A} es Lipschitz a trozos sobre una triangulación inicial conforme \mathcal{T}_0 de Ω , esto es, existe $C_{\mathcal{A}} > 0$ tal que²

$$(2.3) \quad \|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)\|_2 \leq C_{\mathcal{A}}|x - y|, \quad \forall x, y \in T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_0.$$

Dado $x \in \Omega$, para cada $\xi \in \mathbb{R}^d$, definimos $|\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2 := \mathcal{A}(x)\xi \cdot \xi$.

Sea $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función de clase \mathcal{C}^1 en su segunda variable. Suponemos que existen α_{\min} y α_{\max} positivos tales que

$$(2.4) \quad \alpha_{\min} \leq \alpha(x, t) \leq \alpha_{\max}, \quad \forall x \in \Omega, t > 0.$$

Consideramos la siguiente ley de conservación estacionaria:

Dada f , hallar u tal que

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notemos que en el caso en que α depende de $x \in \Omega$ sólo a través del flujo en x , y $\mathcal{A}(x) = I \in \mathbb{R}^{d \times d}$ es la matriz identidad para todo $x \in \Omega$, el problema (2.5) se reduce a (2.1).

Una formulación variacional del problema (2.5) resulta en el siguiente:

²Recordamos que $\|\cdot\|_2$ denota la norma 2 de matrices, inducida por la norma usual de vectores $|\cdot|$.

Problema modelo (no lineal)

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(2.6) \quad \int_{\Omega} \alpha(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Si definimos $\mathbb{V} := H_0^1(\Omega)$,

$$(2.7) \quad a(w; u, v) := \int_{\Omega} \alpha(\cdot, |\nabla w|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v, \quad \forall w, u, v \in \mathbb{V},$$

y

$$L(v) := \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

entonces la ecuación (2.6) puede escribirse como

$$a(u; u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Si $\mathbb{V}' = H^{-1}(\Omega)$ denota el espacio dual de \mathbb{V} , y si definimos el operador $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ por

$$\langle Au, v \rangle := a(u; u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{V},$$

es claro que el Problema modelo (2.6) es equivalente a hallar $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$Au = L,$$

donde $L \in \mathbb{V}'$ está dado. En la sección siguiente veremos que problemas de este tipo están bien planteados cuando el operador A es Lipschitz y fuertemente monótono. El resto de esta sección está destinado a demostrar que el operador A que estamos considerando en este caso satisface estas dos propiedades.

Introducimos primero dos funciones auxiliares β y γ que se definen en base a la función α y que serán útiles para hacer más clara esta presentación. Sea $\beta : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$(2.8) \quad \beta(x, s) := \frac{1}{2} \int_0^{s^2} \alpha(x, t) dt,$$

y notemos que de la Regla de Leibniz se sigue que la derivada de β con respecto a su segunda variable es

$$(2.9) \quad D_2 \beta(x, s) := \frac{\partial \beta}{\partial s}(x, s) = s \alpha(x, s^2).$$

Además definimos $\gamma : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$(2.10) \quad \gamma(x, \xi) := \beta(x, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}).$$

En el siguiente lema, cuya demostración es elemental, establecemos una fórmula para derivar la función γ .

LEMA 2.1. Si $\nabla_2 \overline{\gamma}$ denota el gradiente de $\overline{\gamma}$ como función de su segunda variable, entonces

$$(2.11) \quad \nabla_2 \overline{\gamma}(x, \xi) = \alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) \mathcal{A}(x) \xi, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in \Omega$ y $\xi \in \mathbb{R}^d$. Puesto que $\gamma(x, \xi) = \frac{1}{2} \int_0^{|\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2} \alpha(x, t) dt$, tenemos que

$$(2.12) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i}(x, \xi) = \frac{1}{2} \alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) \frac{\partial}{\partial \xi_i} |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Teniendo en cuenta que \mathcal{A} es simétrica, si $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, y $e_i \in \mathbb{R}^d$ es el versor unitario en la dirección positiva del eje ξ_i ,

$$\frac{1}{h} (\mathcal{A}(x)(\xi + he_i) \cdot (\xi + he_i) - \mathcal{A}(x)\xi \cdot \xi) = 2\mathcal{A}(x)\xi \cdot e_i + h\mathcal{A}(x)e_i \cdot e_i, \quad i = 1, 2, \dots, d,$$

y en consecuencia, $\frac{\partial}{\partial \xi_i} |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2 = 2\mathcal{A}(x)\xi \cdot e_i$. Finalmente, considerando (2.12) concluimos la demostración de este lema. \square

Demostremos ahora que el operador A es Lipschitz y fuertemente monótono si $D_2\beta$ definida en (2.9) lo es. En vista de la desigualdad de Poincaré-Friedrichs (Teorema 1.1), consideramos $\|\cdot\|_{\mathbb{V}} := \|\nabla \cdot\|_{\Omega}$, que es una norma equivalente a la norma en $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$ heredada de $H^1(\Omega)$.

TEOREMA 2.2 (Propiedades del operador A). Consideremos β definida por (2.8).

(i) Si $D_2\beta$ es Lipschitz en su segunda variable, entonces el operador A es Lipschitz. Más precisamente, si existe una constante $C_A > 0$ tal que

$$(2.13) \quad |D_2\beta(x, t) - D_2\beta(x, s)| \leq \frac{C_A}{3\bar{a}} |t - s|, \quad \forall x \in \Omega, t, s \in \mathbb{R}_+,$$

entonces

$$(2.14) \quad \|Au - Av\|_{\mathbb{V}} \leq C_A \|u - v\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

(ii) Si $D_2\beta$ es fuertemente monótona en su segunda variable, entonces el operador A es fuertemente monótono. Más precisamente, si existe una constante $c_A > 0$ tal que

$$(2.15) \quad D_2\beta(x, t) - D_2\beta(x, s) \geq \frac{c_A}{\underline{a}} (t - s), \quad \forall x \in \Omega, t, s \in \mathbb{R}_+, t \geq s,$$

entonces

$$(2.16) \quad \langle Au - Av, u - v \rangle \geq c_A \|u - v\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

OBSERVACIÓN 2.3 (Sobre las hipótesis del Teorema 2.2). Si $\tilde{C}_A := \frac{C_A}{3a}$ y $\tilde{c}_A := \frac{c_A}{a}$, es sencillo verificar si $D_2\beta$ satisface las hipótesis (2.13) y (2.15) del Teorema 2.2. En efecto, $D_2\beta$ es Lipschitz y fuertemente monótona en su segunda variable si y sólo si

$$(2.17) \quad \tilde{c}_A(t-s) \leq D_2\beta(x, t) - D_2\beta(x, s) \leq \tilde{C}_A(t-s), \quad \forall x \in \Omega, t, s \in \mathbb{R}_+, t \geq s;$$

y si $D_2\alpha$ denota la derivada de α respecto de su segunda variable, esto último se cumple si y sólo si

$$\tilde{c}_A \leq \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}(x, t) = \alpha(x, t^2) + 2t^2 D_2\alpha(x, t^2) \leq \tilde{C}_A, \quad \forall x \in \Omega, t > 0.$$

Por otro lado, puesto que $D_2\beta(x, t) - D_2\beta(x, 0) = t\alpha(x, t^2)$, de (2.17) se sigue que

$$\tilde{c}_A \leq \alpha(x, t) \leq \tilde{C}_A, \quad \forall x \in \Omega, t > 0.$$

En resumen, para garantizar que las hipótesis del Teorema 2.2 se satisfacen, es suficiente que existan constantes c_1 y c_2 positivas tales que

$$(2.18) \quad c_1 \leq \alpha(x, t^2) + 2t^2 D_2\alpha(x, t^2) \leq c_2, \quad \forall x \in \Omega, t > 0.$$

La condición (2.18) se satisface si, por ejemplo, α es acotada, $\alpha(x, \cdot)$ es monótona no decreciente para todo $x \in \Omega$, y

$$\inf_{x \in \Omega} \alpha(x, 0) > 0, \quad \sup_{x \in \Omega} \lim_{t \rightarrow 0^+} D_2\alpha(x, t^2)t^2 < \infty, \quad \sup_{x \in \Omega} \lim_{t \rightarrow \infty} D_2\alpha(x, t^2)t^2 < \infty.$$

Si consideramos $\alpha(x, |\nabla u(x)|_{\mathcal{A}(x)}^2)$ como la conductividad en el punto x , y u como la temperatura, entonces un tal comportamiento de α es razonable desde el punto de vista físico. Por otro lado, es importante remarcar que estas últimas son condiciones suficientes para que se cumpla la condición (2.18), pero que sin embargo, esta condición puede satisfacerse aún si $\alpha(x, \cdot)$ es monótona no creciente para todo $x \in \Omega$. Esta última condición sobre α será requerida para la convergencia de un algoritmo inexacto en el Capítulo 5.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2. (i) Supongamos que se satisface (2.13), es decir, $D_2\beta$ es Lipschitz en su segunda variable. Veremos primero que $\nabla_2\gamma$ es Lipschitz en su segunda variable. Sean $x \in \Omega$ y $\xi, \zeta, \psi \in \mathbb{R}^d$. Usando el Lema 2.1 tenemos que³

$$\begin{aligned} [\nabla_2\gamma(x, \xi) - \nabla_2\gamma(x, \zeta)] \cdot \psi &= [\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2)\mathcal{A}\xi - \alpha(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}^2)\mathcal{A}\zeta] \cdot \psi \\ &= \alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2)\mathcal{A}(\xi - \zeta) \cdot \psi + (\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2) - \alpha(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}^2))\mathcal{A}\zeta \cdot \psi. \end{aligned}$$

³En lo que sigue escribiremos simplemente \mathcal{A} para significar $\mathcal{A}(x)$ en el punto $x \in \Omega$ que corresponde.

Para el segundo término del lado derecho de la última igualdad tenemos que

$$\begin{aligned}
|(\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2) - \alpha(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}^2))\mathcal{A}\zeta \cdot \psi| &\leq |\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2) - \alpha(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}^2)| |\zeta|_{\mathcal{A}} |\psi|_{\mathcal{A}} \\
&= |\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2)(|\zeta|_{\mathcal{A}} - |\xi|_{\mathcal{A}}) + \alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2)|\xi|_{\mathcal{A}} - \alpha(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}^2)|\zeta|_{\mathcal{A}}| |\psi|_{\mathcal{A}} \\
&\leq (\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2)|\zeta - \xi|_{\mathcal{A}} + |D_2\beta(x, |\xi|_{\mathcal{A}}) - D_2\beta(x, |\zeta|_{\mathcal{A}})|) |\psi|_{\mathcal{A}} \\
&\leq \left(\frac{C_A}{3\bar{a}} |\zeta - \xi|_{\mathcal{A}} + \frac{C_A}{3\bar{a}} |\xi - \zeta|_{\mathcal{A}} \right) |\psi|_{\mathcal{A}},
\end{aligned}$$

donde hemos usado (2.9), que α está acotada por $\frac{C_A}{3\bar{a}}$ y (2.13). Insertando la última estimación en lo anterior y usando nuevamente que α está acotada por $\frac{C_A}{3\bar{a}}$ tenemos que

$$(2.19) \quad |[\nabla_2\gamma(x, \xi) - \nabla_2\gamma(x, \zeta)] \cdot \psi| \leq \frac{C_A}{\bar{a}} |\zeta - \xi|_{\mathcal{A}} |\psi|_{\mathcal{A}} \leq C_A |\zeta - \xi| |\psi|,$$

y así, $\nabla_2\gamma$ es Lipschitz en su segunda variable.

Finalmente, si $u, v, w \in \mathbb{V}$, usando (2.7), (2.11), (2.19) y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle Au - Av, w \rangle| &= |a(u; u, w) - a(v; v, w)| \\
&= \left| \int_{\Omega} (\alpha(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2)\mathcal{A}\nabla u - \alpha(\cdot, |\nabla v|_{\mathcal{A}}^2)\mathcal{A}\nabla v) \cdot \nabla w \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} (\nabla_2\gamma(\cdot, \nabla u) - \nabla_2\gamma(\cdot, \nabla v)) \cdot \nabla w \right| \\
&\leq C_A \|u - v\|_{\mathbb{V}} \|w\|_{\mathbb{V}},
\end{aligned}$$

de donde se sigue (2.14), y así, A es Lipschitz.

(ii) Supongamos ahora que se cumple (2.15), esto es, $D_2\beta$ es fuertemente monótona en su segunda variable. Probamos primero que $\nabla_2\gamma$ es fuertemente monótona en su segunda variable; o más precisamente que

$$(\nabla_2\gamma(x, \xi) - \nabla_2\gamma(x, \zeta)) \cdot (\xi - \zeta) \geq c_A |\xi - \zeta|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi, \zeta \in \mathbb{R}^d.$$

Sean $x \in \Omega$ y $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^d$. Puesto que $\tilde{c}_A = \frac{c_A}{\bar{a}}$ es una cota inferior para α como vimos en la Observación 2.3, usando (2.11) se tiene que

$$\begin{aligned}
&[(\nabla_2\gamma(x, \xi) - \tilde{c}_A\mathcal{A}\xi) - (\nabla_2\gamma(x, \zeta) - \tilde{c}_A\mathcal{A}\zeta)] \cdot (\xi - \zeta) \\
&= [(\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2)\mathcal{A}\xi - \tilde{c}_A\mathcal{A}\xi) - (\alpha(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}^2)\mathcal{A}\zeta - \tilde{c}_A\mathcal{A}\zeta)] \cdot (\xi - \zeta) \\
&= [(\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2) - \tilde{c}_A)\mathcal{A}\xi - (\alpha(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}^2) - \tilde{c}_A)\mathcal{A}\zeta] \cdot (\xi - \zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq [(\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2) - \tilde{c}_A)|\xi|_{\mathcal{A}} - (\alpha(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}^2) - \tilde{c}_A)|\zeta|_{\mathcal{A}}] (|\xi|_{\mathcal{A}} - |\zeta|_{\mathcal{A}}) \\
&= [(\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}}^2)|\xi|_{\mathcal{A}} - \tilde{c}_A|\xi|_{\mathcal{A}}) - (\alpha(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}^2)|\zeta|_{\mathcal{A}} - \tilde{c}_A|\zeta|_{\mathcal{A}})] (|\xi|_{\mathcal{A}} - |\zeta|_{\mathcal{A}}) \\
&= (D_2\beta(x, |\xi|_{\mathcal{A}}) - D_2\beta(x, |\zeta|_{\mathcal{A}}))(|\xi|_{\mathcal{A}} - |\zeta|_{\mathcal{A}}) - \tilde{c}_A(|\xi|_{\mathcal{A}} - |\zeta|_{\mathcal{A}})^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente (2.9), y en consecuencia,

$$(2.20) \quad (\nabla_2\gamma(x, \xi) - \nabla_2\gamma(x, \zeta)) \cdot (\xi - \zeta) \geq \frac{c_A}{\underline{a}}|\xi - \zeta|_{\mathcal{A}}^2 \geq c_A|\xi - \zeta|^2,$$

y así, $\nabla_2\gamma$ es fuertemente monótona en su segunda variable.

Finalmente, si $u, v \in \mathbb{V}$, usando (2.20), del mismo modo que antes tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} (\nabla_2\gamma(\cdot, \nabla u) - \nabla_2\gamma(\cdot, \nabla v)) \cdot \nabla(u - v) \\
&\geq c_A \int_{\Omega} |\nabla(u - v)|^2 = c_A \|u - v\|_{\mathbb{V}}^2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, se cumple (2.16), y así, A es fuertemente monótono. \square

OBSERVACIÓN 2.4 (Propiedades de $\nabla_2\gamma$). De la demostración del Teorema 2.2 se sigue que si $D_2\beta$ es Lipschitz y fuertemente monótona en su segunda variable, entonces también lo es $\nabla_2\gamma$. En particular, teniendo en cuenta (2.19) y (2.20) tenemos que

$$c_A \leq \frac{|\nabla_2\gamma(x, \xi) - \nabla_2\gamma(x, \zeta)|}{|\zeta - \xi|} \leq C_A, \quad \forall x \in \Omega, \xi, \zeta \in \mathbb{R}^d, \xi \neq \zeta.$$

Por otro lado, usando nuevamente (2.19) y (2.20) obtenemos

$$c_A h^2 |\zeta|^2 \leq [\nabla_2\gamma(x, \xi + h\zeta) - \nabla_2\gamma(x, \xi)] \cdot (h\zeta) \leq C_A h^2 |\zeta|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi, \zeta \in \mathbb{R}^d, h > 0,$$

y en consecuencia,

$$c_A |\zeta|^2 \leq \frac{\nabla_2\gamma(x, \xi + h\zeta) - \nabla_2\gamma(x, \xi)}{h} \cdot \zeta \leq C_A |\zeta|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi, \zeta \in \mathbb{R}^d, h > 0.$$

Finalmente, si $D_2^2\gamma$ denota la matriz hessiana de γ como función de su segunda variable, de la última desigualdad se sigue que

$$(2.21) \quad c_A |\zeta|^2 \leq D_2^2\gamma(x, \xi)\zeta \cdot \zeta \leq C_A |\zeta|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi, \zeta \in \mathbb{R}^d,$$

y por lo tanto, $D_2^2\gamma$ es uniformemente definida positiva.

2.2. Ecuaciones asociadas a operadores Lipschitz y fuertemente monótonos

En esta sección nos proponemos estudiar la existencia de soluciones del siguiente problema:

$$(2.22) \quad \text{Hallar } u \in \mathbb{V} \text{ tal que } Au = L,$$

donde $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ es un operador (en general no lineal) sobre el espacio de Hilbert real \mathbb{V} , y $L \in \mathbb{V}'$ está dado [Zei90]. Notemos que el Problema modelo (2.6) de la sección anterior puede plantearse en la forma del problema (2.22).

Suponemos que el operador A satisface las dos propiedades siguientes:

- A es *Lipschitz*: Existe una constante $C_A > 0$ tal que

$$(2.23) \quad \|Au - Av\|_{\mathbb{V}'} \leq C_A \|u - v\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

- A es *fuertemente monótono*: Existe una constante $c_A > 0$ tal que

$$(2.24) \quad \langle Au - Av, u - v \rangle \geq c_A \|u - v\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

Debido al Teorema 2.2 y a la Observación 2.3 se tiene que el operador A asociado al Problema modelo (2.6) satisface estas dos propiedades siempre que α sea de clase \mathcal{C}^1 en su segunda variable y que existan constantes c_1 y c_2 positivas tales que

$$c_1 \leq \alpha(x, t^2) + 2t^2 D_2 \alpha(x, t^2) \leq c_2, \quad \forall x \in \Omega, t > 0.$$

El siguiente teorema (Zarantonello (1960)) establece la existencia y unicidad de soluciones del problema (2.22).

TEOREMA 2.5 (Existencia y unicidad). *Si $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ es Lipschitz y fuertemente monótono (esto es, si A satisface (2.23) y (2.24)), entonces para cada $L \in \mathbb{V}'$ existe una única $u \in \mathbb{V}$ tal que $Au = L$. Más aún, el problema (2.22) es estable; esto es, si $Au_1 = L_1$ y $Au_2 = L_2$ entonces*

$$(2.25) \quad \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{V}} \leq c_A^{-1} \|L_1 - L_2\|_{\mathbb{V}'}$$

En particular, el operador inverso A^{-1} es Lipschitz con constante de Lipschitz c_A^{-1} .

DEMOSTRACIÓN. Sea $J : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ el operador lineal de dualidad entre \mathbb{V} y \mathbb{V}' , esto es, $\langle Jv, w \rangle := (v, w)_{\mathbb{V}}$, para todo $v, w \in \mathbb{V}$. Mostraremos que existe $t > 0$ tal que el operador $B_t : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definido por

$$B_t v := v - tJ^{-1}(Av - L), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

es una contracción. En efecto, para $v, w \in \mathbb{V}$ se tiene que

$$(2.26) \quad \|B_t v - B_t w\|_{\mathbb{V}}^2 = \|v - w\|_{\mathbb{V}}^2 - 2t(v - w, J^{-1}(Av - Aw))_{\mathbb{V}} + t^2 \|J^{-1}(Av - Aw)\|_{\mathbb{V}}^2.$$

Puesto que A es fuertemente monótono, tenemos que

$$(v - w, J^{-1}(Av - Aw))_{\mathbb{V}} = \langle Av - Aw, v - w \rangle \geq c_A \|v - w\|_{\mathbb{V}}^2,$$

y usando que J es una isometría y que A es Lipschitz se sigue que

$$\|J^{-1}(Av - Aw)\|_{\mathbb{V}}^2 = \|Av - Aw\|_{\mathbb{V}'}^2 \leq C_A^2 \|v - w\|_{\mathbb{V}}^2.$$

Así, insertando estas dos últimas desigualdades en (2.26), obtenemos

$$\|B_t v - B_t w\|_{\mathbb{V}}^2 \leq (1 - 2tc_A + t^2 C_A^2) \|v - w\|_{\mathbb{V}}^2.$$

Definiendo $k^2(t) := 1 - 2tc_A + t^2 C_A^2$, se tiene que B_t es una contracción (es decir, $0 < k(t) < 1$), si $0 < t < 2c_A/C_A^2$.

En consecuencia, por el Teorema del punto fijo de Banach, B_t tiene un único punto fijo, esto es, existe un único $u \in \mathbb{V}$ tal que $B_t u = u$, o equivalentemente, la ecuación $Au = L$ tiene una única solución.

Supongamos ahora que $Au_1 = L_1$ y $Au_2 = L_2$. Entonces,

$$c_A \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|Au_1 - Au_2\|_{\mathbb{V}'} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{V}} = \|L_1 - L_2\|_{\mathbb{V}'} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{V}},$$

de donde se sigue que (2.25) vale. Además,

$$\|A^{-1}L_1 - A^{-1}L_2\|_{\mathbb{V}} \leq c_A^{-1} \|L_1 - L_2\|_{\mathbb{V}'}, \quad \forall L_1, L_2 \in \mathbb{V}' ,$$

lo que completa la prueba del teorema. □

OBSERVACIÓN 2.6. Notemos que para obtener la estabilidad (2.25) del problema (2.22) es suficiente la propiedad de monotonía fuerte (2.24) del operador A ; y que por otro lado, la estabilidad significa la dependencia continua de los datos.

Concluimos este capítulo relacionando el problema (2.22) con un problema de minimización de funcionales.

Decimos que $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ es un *operador potencial*, si existe un funcional $\mathcal{J} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{J}' = A$, donde $\mathcal{J}' : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ denota la derivada de Gâteaux de \mathcal{J} ; esto es, si

$$\langle \mathcal{J}'u, v \rangle := \frac{d}{dt} \mathcal{J}(u + tv)|_{t=0} = \langle Au, v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

En este caso, \mathcal{J} se llama *un potencial* de A .

En general, si A es un operador potencial, el funcional $\mathcal{J} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{J}(v) := \int_0^1 \langle A(sv), v \rangle ds, \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

es un potencial de A (ver [Zei90]).

Finalmente establecemos la siguiente caracterización de la solución del problema (2.22).

TEOREMA 2.7 (Problema de minimización). *Supongamos que $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ es un operador monótono,⁴ que tiene un potencial $\mathcal{J} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, $\mathcal{J}' = A$. Dado $L \in \mathbb{V}'$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $u \in \mathbb{V}$ es solución de (2.22), es decir, $Au = L$.

(ii) $u \in \mathbb{V}$ minimiza el funcional $\mathcal{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre \mathbb{V} , donde

$$\mathcal{F}(v) := \mathcal{J}(v) - L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

DEMOSTRACIÓN. [1] Supongamos que $Au = L$, para algún $u \in \mathbb{V}$. Puesto que A es monótono, \mathcal{J} es convexo [Zei90], y ya que L es lineal, \mathcal{F} también es convexo. Para $v \in \mathbb{V}$ y $0 < t < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(u + t(v - u)) - \mathcal{F}(u)}{t} &= \frac{\mathcal{F}((1 - t)u + tv) - \mathcal{F}(u)}{t} \leq \frac{(1 - t)\mathcal{F}(u) + t\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u)}{t} \\ &= \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $t \rightarrow 0$, obtenemos

$$\langle \mathcal{F}'u, v - u \rangle \leq \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u).$$

Puesto que L es lineal se tiene que $\mathcal{F}'u = \mathcal{J}'u - L$, y dado que $\mathcal{J}' = A$, tenemos que $\mathcal{F}'u = 0$, y así,

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v),$$

y por lo tanto, u minimiza el funcional \mathcal{F} sobre \mathbb{V} .

[2] Supongamos ahora que $u \in \mathbb{V}$ minimiza \mathcal{F} sobre \mathbb{V} . Dado $v \in \mathbb{V}$ arbitrario, tenemos que

$$f(t) := \mathcal{F}(u + tv), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

tiene un mínimo en $t = 0$, y así,

$$0 = f'(0) = \langle \mathcal{F}'u, v \rangle = \langle \mathcal{J}'u, v \rangle - L(v) = \langle Au, v \rangle - L(v).$$

⁴ $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ es monótono, si $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$, para todo $u, v \in \mathbb{V}$.

Puesto que $v \in \mathbb{V}$ es arbitrario, tenemos que $Au = L$. □

En la Sección 4.7 demostraremos que el operador A asociado al Problema modelo (2.6) es un operador potencial, y en consecuencia, la caracterización dada en Teorema 2.7 será aplicable en este caso.

Convergencia de MEF adaptativos para problemas no lineales

En este capítulo consideramos una formulación variacional general que surge de problemas no lineales como el modelo de leyes de conservación estacionarias dado en (2.6) en el capítulo anterior. Proponemos un algoritmo adaptativo clásico para la aproximación de la solución de este problema y demostramos la convergencia (sin orden) bajo ciertas hipótesis generales que se satisfacen, en particular, para el problema mencionado del capítulo anterior.

3.1. Formulación variacional de problemas no lineales

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, que denota el interior de un polígono si $d = 2$, o de un poliedro si $d = 3$, cuya frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz, consideramos el espacio $\mathbb{V} := H^1_\Gamma(\Omega)$, donde $\Gamma \subset \partial\Omega$.¹ En particular, cuando $\Gamma = \emptyset$, $\mathbb{V} = H^1(\Omega)$; y cuando $\Gamma = \partial\Omega$, $\mathbb{V} = H^1_0(\Omega)$.

Consideramos el

Problema 1. (Problema no lineal general)

Dado $L \in \mathbb{V}'$, hallar $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$a(u; u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

donde $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal y simétrica en la segunda y tercera variable que satisface las siguientes propiedades:

- *Acotación:* Existe una constante $C_a > 0$ tal que

$$(3.1) \quad |a(w; u, v)| \leq C_a \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall w, u, v \in \mathbb{V}.$$

- *Coercitividad:* Existe una constante $c_a > 0$ tal que

$$(3.2) \quad c_a \|u\|_{\mathbb{V}}^2 \leq a(w; u, u), \quad \forall w, u \in \mathbb{V}.$$

Para el Problema modelo (2.6) dado en el capítulo anterior, donde $\mathbb{V} = H^1_0(\Omega)$, se tiene que la forma a definida en (2.7) es lineal en la segunda y tercera variable, y puesto que la matriz

¹En el caso en que Γ sea un subconjunto propio de $\partial\Omega$ suponemos que éste es la unión de lados de elementos de la triangulación inicial \mathcal{T}_0 que se considere.

\mathcal{A} es simétrica, a es simétrica con respecto a la segunda y tercera variable. Por otro lado, de la propiedad (2.2) de la matriz \mathcal{A} y de la acotación (2.4) de la función α se sigue que la forma a es acotada y coercitiva.

Definiendo el operador (no lineal) $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ por

$$(3.3) \quad \langle Au, v \rangle := a(u; u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{V},$$

resulta evidente que el Problema 1 es equivalente a la ecuación (2.22), y en consecuencia, podemos utilizar el Teorema 2.5 para concluir que el Problema 1 tiene una única solución siempre que el operador $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ sea Lipschitz y fuertemente monótono. En este caso, las definiciones dadas en (2.23) y (2.24) pueden reescribirse como

- (A es *Lipschitz*) Existe una constante $C_A > 0$ tal que

$$(3.4) \quad |a(u; u, w) - a(v; v, w)| \leq C_A \|u - v\|_{\mathbb{V}} \|w\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}.$$

- (A es *fuertemente monótono*) Existe una constante $c_A > 0$ tal que

$$(3.5) \quad a(u; u, u - v) - a(v; v, u - v) \geq c_A \|u - v\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

Si consideramos nuevamente el Problema modelo (2.6) dado en el capítulo anterior, del Teorema 2.2 y de la Observación 2.3, se tiene que el correspondiente operador A satisface (3.4) y (3.5) siempre que α sea de clase \mathcal{C}^1 en su segunda variable y que existan constantes c_1 y c_2 positivas tales que

$$c_1 \leq \alpha(x, t^2) + 2t^2 D_2 \alpha(x, t^2) \leq c_2, \quad \forall x \in \Omega, t > 0.$$

3.2. Discretización por elementos finitos

En esta sección presentamos la discretización por elementos finitos conformes del Problema 1. Dada una triangulación conforme \mathcal{T}_0 de Ω , para cada triangulación $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$ consideramos el espacio de elementos finitos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}$, definido por

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} := \{v \in \mathbb{V} \mid v|_T \in \mathcal{P}_{\ell}(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\},$$

donde $\ell \in \mathbb{N}$ es un grado polinomial fijo. Así, la versión discreta del Problema 1 es el

Problema 2. (Discretización del Problema no lineal general)

Hallar $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tal que

$$a(u_{\mathcal{T}}; u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) = L(v_{\mathcal{T}}), \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}.$$

Puesto que $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar heredado de \mathbb{V} , el Teorema 2.5 se aplica nuevamente para concluir que el Problema 2 tiene una única solución si el operador A definido en (3.3) es Lipschitz y fuertemente monótono. En la siguiente observación establecemos la estabilidad de esta discretización.

OBSERVACIÓN 3.1 (Acotación uniforme de las soluciones de los problemas discretos). Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ es la solución del Problema 2, usando la coercitividad de a dada en (3.2), tenemos que

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \frac{1}{c_a} a(u_{\mathcal{T}}; u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{c_a} L(u_{\mathcal{T}}) \leq \frac{\|L\|_{\mathbb{V}'}}{c_a} \|u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}},$$

y luego,

$$(3.6) \quad \|u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{\|L\|_{\mathbb{V}'}}{c_a}.$$

3.3. Lazo adaptativo

Consideramos el siguiente algoritmo adaptativo para aproximar la solución u del Problema 1 mediante las soluciones de problemas discretos de la forma del Problema 2.

Algoritmo 2.

Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω . Poner $k = 0$.

1. $u_k := \text{RESOLVER}(\mathcal{T}_k)$.
2. $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k} := \text{ESTIMAR}(u_k, \mathcal{T}_k)$.
3. $\mathcal{M}_k := \text{MARCAR}(\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}, \mathcal{T}_k)$.
4. $\mathcal{T}_{k+1} := \text{REFINAR}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k, n)$.
5. Incrementar k y volver al paso 1.

A continuación describimos los pasos de este algoritmo:

Dada la triangulación conforme \mathcal{T}_k de Ω , el módulo RESOLVER calcula la solución $u_k \in \mathbb{V}_k := \mathbb{V}_{\mathcal{T}_k}$ del Problema 2 con $\mathcal{T} := \mathcal{T}_k$, es decir, $u_k \in \mathbb{V}_k$ satisface

$$(3.7) \quad a(u_k; u_k, v_k) = L(v_k), \quad \forall v_k \in \mathbb{V}_k.$$

Dadas \mathcal{T}_k y la correspondiente salida u_k de RESOLVER, el módulo ESTIMAR calcula y devuelve estimadores de error local $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}$, que satisfacen las siguientes propiedades:²

²En toda la Parte I de esta tesis, utilizaremos “ \lesssim ”, para indicar “ $\leq C$ ”, donde la constante C puede depender de la dimensión d , de la triangulación inicial \mathcal{T}_0 y de su regularidad $\kappa_{\mathbb{T}}$, del grado polinomial ℓ , y de constantes asociadas a los datos del Problema 1.

- Confiabilidad:³

$$(3.8) \quad |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k(T) \|\nabla v\|_{\omega_k(T)}, \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

donde $\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle := a(u_k; u_k, v) - L(v)$ denota el residuo de u_k .

- Estabilidad:

$$(3.9) \quad \eta_k(T) \lesssim \|\nabla u_k\|_{\omega_k(T)} + \|D_L\|_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_k,$$

donde $D_L \in L^2(\Omega)$ depende del funcional L .

En el Apéndice I de este capítulo presentamos estimadores de error a posteriori para el Problema modelo (2.6) dado en el Capítulo 2 y mostramos que éstos satisfacen (3.8) y (3.9).

En este punto es importante notar que para demostrar la convergencia del Algoritmo 2, sólo suponemos que los estimadores son *confiables*, es decir, que éstos pueden sobreestimar el error de manera drástica, y así es que en efecto, sólo garantizamos la convergencia de la sucesión adaptativa $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, y no necesariamente la convergencia de $\eta_k(\mathcal{T}_k) := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k^2(T)\right)^{\frac{1}{2}}$ a cero. Ésto último es importante en la práctica ya que los estimadores se usan como criterio de parada del Algoritmo 2; y para demostrarlo, en general es necesario suponer además la *eficiencia local* de los estimadores que es consecuencia del Teorema 4.1 (ver por ejemplo [Sie08] para el caso de problemas lineales).

Basado en los indicadores de error local, el módulo MARCAR elige un subconjunto \mathcal{M}_k de elementos de \mathcal{T}_k , utilizando una estrategia de marcado razonable (ver (1.9)), y finalmente, REFINAR realiza al menos n bisecciones sobre cada elemento de \mathcal{M}_k para obtener la nueva triangulación conforme \mathcal{T}_{k+1} (ver Sección 1.4.1).

De este modo, partiendo de la triangulación inicial \mathcal{T}_0 , la iteración de los pasos 1–5 genera una sucesión $\{\mathcal{T}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ y las correspondientes salidas u_k , $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}$, \mathcal{M}_k de los módulos RESOLVER, ESTIMAR y MARCAR, respectivamente.

3.4. Convergencia del lazo adaptativo

En esta sección mostramos que la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ generada por el Algoritmo 2 converge a la solución u del Problema 1. Recordamos que $u \in \mathbb{V}$ satisface

$$a(u; u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

³Recordemos que $\omega_k(T)$ denota $\omega_{\mathcal{T}_k}(T)$, para $T \in \mathcal{T}_k$.

donde $L \in \mathbb{V}'$ y la forma $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y simétrica en la segunda y tercera variable, y satisface (3.1)–(3.2), es decir, es acotada y coercitiva. Suponemos además que el operador $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ definido por (3.3) es Lipschitz y fuertemente monótono (ver (3.4)–(3.5)).

En primer lugar mostramos que la sucesión dada por el Algoritmo 2 es convergente. En particular, veremos que converge a una función del espacio límite $\mathbb{V}_\infty := \overline{\cup \mathbb{V}_k}^{\mathbb{V}}$. Notemos que \mathbb{V}_∞ es un espacio de Hilbert con el producto escalar heredado de \mathbb{V} .

TEOREMA 3.2 (La sucesión adaptativa es convergente). *Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 2. Si $u_\infty \in \mathbb{V}_\infty$ denota la solución de*

$$(3.10) \quad a(u_\infty; u_\infty, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_\infty.$$

entonces

$$u_k \longrightarrow u_\infty \quad \text{en } \mathbb{V}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 2. Sea $u_\infty \in \mathbb{V}_\infty$ la solución de (3.10) y sea $\mathcal{P}_k : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}_k$ la proyección ortogonal sobre \mathbb{V}_k . Puesto que A es fuertemente monótono (ver (3.5)), usando (3.10) y (3.7), tenemos que

$$\begin{aligned} c_A \|u_k - u_\infty\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \langle Au_k - Au_\infty, u_k - u_\infty \rangle = \langle Au_k, u_k - u_\infty \rangle - L(u_k - u_\infty) \\ &= \langle Au_k, u_k - \mathcal{P}_k u_\infty \rangle + \langle Au_k, \mathcal{P}_k u_\infty - u_\infty \rangle - L(u_k - \mathcal{P}_k u_\infty) - L(\mathcal{P}_k u_\infty - u_\infty) \\ &= \langle Au_k, \mathcal{P}_k u_\infty - u_\infty \rangle - L(\mathcal{P}_k u_\infty - u_\infty) \leq (C_a \|u_k\|_{\mathbb{V}} + \|L\|_{\mathbb{V}'}) \|\mathcal{P}_k u_\infty - u_\infty\|_{\mathbb{V}}, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$, donde para la última desigualdad hemos usado (3.1). Teniendo en cuenta que $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es acotada en \mathbb{V} (ver (3.6)), que los espacios \mathbb{V}_k están anidados y que $\cup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{V}_k$ es denso en \mathbb{V}_∞ , concluimos que $u_k \rightarrow u_\infty$ en \mathbb{V} . \square

Para ver que u_∞ es en realidad la solución del Problema 1 demostraremos que el residuo $\mathbf{R}(u_\infty)$ es cero, donde $\langle \mathbf{R}(u_\infty), v \rangle := a(u_\infty; u_\infty, v) - L(v)$, para toda $v \in \mathbb{V}$. Utilizamos la idea de Siebert [Sie08] que consiste en probar primero que los estimadores sobre elementos marcados tienden a cero, y luego la convergencia a cero de $\mathbf{R}(u_k)$ (débilmente en \mathbb{V}').

LEMA 3.3 (Estimador sobre los elementos marcados). *Sea $\{\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de estimadores locales calculados a través del Algoritmo 2, y sea $\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de conjuntos de elementos marcados en cada malla. Entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{T \in \mathcal{M}_k} \eta_k(T) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ y $\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ como en las hipótesis. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, elijamos $T_k \in \mathcal{M}_k$ tal que $\eta_k(T_k) = \max_{T \in \mathcal{M}_k} \eta_k(T)$. Usando la estabilidad de los estimadores (3.9) tenemos que

$$(3.11) \quad \eta_k(T_k) \lesssim \|\nabla u_k\|_{\omega_k(T_k)} + \|D_L\|_{T_k} \lesssim \|\nabla u_k - \nabla u_\infty\|_\Omega + \|\nabla u_\infty\|_{\omega_k(T_k)} + \|D_L\|_{T_k}.$$

Ahora bien, el primer término del lado derecho de (3.11) tiende a cero por el Teorema 3.2, y puesto que $T_k \in \mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k^0$, por el Lema 1.27 tenemos que⁴

$$|T_k| \leq |\omega_k(T_k)| \lesssim H_{T_k}^d \leq \|h_k \chi_{\Omega_k^0}\|_{L^\infty(\Omega)}^d \rightarrow 0, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

y así, los dos últimos términos en el lado derecho de (3.11) también tienden a cero. \square

TEOREMA 3.4 (Convergencia débil del Residuo). *Si $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es la sucesión generada por el Algoritmo 2,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle = 0, \quad \text{para toda } v \in \mathbb{V}.$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero el resultado para $v \in H^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$ y luego utilizaremos un argumento de densidad. Sean $p \in \mathbb{N}$ y $k > p$. Por la Definición 1.26 tenemos que $\mathcal{T}_p^+ \subset \mathcal{T}_k^+ \subset \mathcal{T}_k$. Sea $v_k \in \mathbb{V}_k$ el interpolante de Scott-Zhang de v dado en la Sección 1.3. Puesto que $\langle \mathbf{R}(u_k), v_k \rangle = 0$, usando la confiabilidad de los estimadores (3.8), y la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que⁵

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| &= |\langle \mathbf{R}(u_k), v - v_k \rangle| \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k(T) \|\nabla(v - v_k)\|_{\omega_k(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_p^+} \eta_k(T) \|\nabla(v - v_k)\|_{\omega_k(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_p^+} \eta_k(T) \|\nabla(v - v_k)\|_{\omega_k(T)} \\ &\lesssim \eta_k(\mathcal{T}_p^+) \|\nabla(v - v_k)\|_{\Omega_p^+} + \eta_k(\mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_p^+) \|\nabla(v - v_k)\|_{\Omega_p^0}. \end{aligned}$$

De la estabilidad de los estimadores de error local (3.9) y de la acotación uniforme de las soluciones discretas (3.6), se sigue que $\eta_k(\mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_p^+) \leq \eta_k(\mathcal{T}_k) \lesssim 1$, y por lo tanto, usando la propiedad (1.7) tenemos que

$$|\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \lesssim \left(\eta_k(\mathcal{T}_p^+) + \|h_p \chi_{\Omega_p^0}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) |v|_{H^2(\Omega)}.$$

⁴Recordemos que $h_k := h_{T_k} \in L^\infty(\Omega)$ es la función constante a trozos tal que $h_k|_T := H_T$, para todo $T \in \mathcal{T}_k$ (ver Definición 1.25).

⁵ $\eta_k(\Upsilon)$ denota $(\sum_{T \in \Upsilon} \eta_k^2(T))^{1/2}$, para todo $\Upsilon \subset \mathcal{T}_k$.

Para demostrar que $\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ consideramos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Debido al Lema 1.27, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|h_p \chi_{\Omega_p^0}\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon.$$

Por otro lado, puesto que $\mathcal{T}_p^+ \subset \mathcal{T}_k^+ \subset \mathcal{T}_k$ y que la estrategia de marcado es razonable (ver (1.9)),

$$\eta_k(\mathcal{T}_p^+) \leq (\#\mathcal{T}_p^+)^{1/2} \max_{T \in \mathcal{T}_p^+} \eta_k(T) \leq (\#\mathcal{T}_p^+)^{1/2} \max_{T \in \mathcal{M}_k} \eta_k(T).$$

Ahora, por el Lema 3.3, podemos elegir $K > p$ tal que $\eta_k(\mathcal{T}_p^+) < \varepsilon$, para todo $k > K$.

Resumiendo, hemos probado que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle = 0, \quad \text{para toda } v \in H^2(\Omega) \cap \mathbb{V}.$$

Ya que $H^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$ es denso en \mathbb{V} , este límite también es cero para toda $v \in \mathbb{V}$. \square

Finalmente, como consecuencia de la convergencia débil a cero de $\mathbf{R}(u_k)$ probamos ahora que u_∞ es la solución del Problema 1.

TEOREMA 3.5 (La función límite es la solución). *Sea u_∞ la solución de (3.10). Entonces u_∞ es la solución del Problema 1, esto es,*

$$a(u_\infty; u_\infty, v) = L(v), \quad \text{para toda } v \in \mathbb{V}.$$

OBSERVACIÓN 3.6. El teorema estaría claro si supiéramos que $\mathbb{V}_\infty = \mathbb{V}$, pero esto podría no ser cierto en algunas situaciones “degeneradas”.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.5. Sea u_∞ la solución de (3.10). Si $v \in \mathbb{V}$, y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ denota la sucesión generada por el Algoritmo 2, entonces

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{R}(u_\infty), v \rangle| &= |\langle \mathbf{R}(u_\infty) - \mathbf{R}(u_k), v \rangle + \langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \leq |a(u_\infty; u_\infty, v) - a(u_k; u_k, v)| + |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \\ &= |\langle Au_\infty - Au_k, v \rangle| + |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \leq \|Au_\infty - Au_k\|_{\mathbb{V}'} \|v\|_{\mathbb{V}} + |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \\ &\leq C_A \|u_\infty - u_k\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} + |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle|, \end{aligned}$$

ya que A es Lipschitz (ver (2.23)). De los Teoremas 3.2 y 3.4 se sigue que el lado derecho de la última desigualdad tiende a cero cuando k tiende a infinito. Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{R}(u_\infty), v \rangle = 0, \quad \text{para toda } v \in \mathbb{V},$$

y en consecuencia, u_∞ es solución del Problema 1. \square

3.5. Apéndice I. Estimadores de error a posteriori para el Problema modelo (2.6)

En este apéndice consideramos el Problema modelo dado en (2.6), esto es,

Problema modelo (no lineal)

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \alpha(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Presentaremos estimadores de error a posteriori asociados a este problema, y mostraremos que son confiables y estables, es decir, se cumplen las propiedades que hemos requerido para demostrar la convergencia del Algoritmo 2.

Dada la triangulación conforme \mathcal{T}_0 de Ω , para cada malla $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, el espacio discreto $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, en este caso, está formado por las funciones continuas sobre Ω , que restringidas a cada elemento de \mathcal{T} son polinomios de grado $\leq \ell$, y que se anulan sobre $\partial\Omega$, es decir,

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_{\ell}(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

El *residuo* de una función $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ en este caso está dado por

$$\langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), v \rangle := \int_{\Omega} (\alpha(\cdot, |\nabla v_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v - f v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Integrando por partes en cada elemento $T \in \mathcal{T}$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), v \rangle &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T (\alpha(\cdot, |\nabla v_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v - f v) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T -\nabla \cdot (\alpha(\cdot, |\nabla v_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}}) v + \int_{\partial T} v \alpha(\cdot, |\nabla v_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}} \cdot \vec{n} - \int_T f v \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) v + \int_{\partial T} J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) v \right), \end{aligned}$$

donde $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ es el *residuo interior* definido por

$$R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_T := -\nabla \cdot (\alpha(\cdot, |\nabla v_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}}) - f, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ es el *residuo de salto* que está dado por

$$J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_S := \frac{1}{2} \left[(\alpha(\cdot, |\nabla v_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}})|_{T_1} \cdot \vec{n}_1 + (\alpha(\cdot, |\nabla v_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}})|_{T_2} \cdot \vec{n}_2 \right], \quad \text{si } S \in \mathcal{S}_{\Omega},$$

y $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_S := 0$, si $S \in \mathcal{S}_{\partial\Omega}$. Aquí, T_1 y T_2 son los elementos de \mathcal{T} que comparten S , y \vec{n}_i el versor normal sobre S exterior a T_i , para $i = 1, 2$.

En base a estos residuos, como vimos en la Sección 1.4.2, definimos el *estimador de error local* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T)$ por

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T) := H_T^2 \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T^2 + H_T \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}^2,$$

para todo $T \in \mathcal{T}$, y el *estimador de error global* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ por

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T).$$

Si $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ denota la solución del Problema 2, el Teorema 1.15 implica que los estimadores son confiables, esto es,

$$|\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v \rangle| \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; T) \|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el Lema 2.1, definimos

$$(3.12) \quad \Gamma_{v_{\mathcal{T}}}(x) := \nabla_2 \gamma(x, \nabla v_{\mathcal{T}}(x)) = \alpha(x, |\nabla v_{\mathcal{T}}(x)|_{\mathcal{A}(x)}^2) \mathcal{A}(x) \nabla v_{\mathcal{T}}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

donde γ es la función definida en (2.10), y notamos que

$$R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_T = -\nabla \cdot \Gamma_{v_{\mathcal{T}}} - f, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y

$$J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_S = \frac{1}{2} \left[\Gamma_{v_{\mathcal{T}}|_{T_1}} \cdot \vec{n}_1 + \Gamma_{v_{\mathcal{T}}|_{T_2}} \cdot \vec{n}_2 \right], \quad \forall S \in \mathcal{S}_{\Omega}.$$

Para probar la estabilidad de los estimadores de error local necesitamos el siguiente resultado auxiliar, en cuya demostración usamos que

$$(3.13) \quad |\nabla_2 \gamma(x, \xi) - \nabla_2 \gamma(y, \xi)| \lesssim |\xi| |x - y|, \quad \forall x, y \in T, \xi \in \mathbb{R}^d,$$

para todo $T \in \mathcal{T}_0$. Demostramos esta propiedad al final de este apéndice en el Lema 3.10.

LEMA 3.7 (La función Γ_v es localmente Lipschitz). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y fijemos $T \in \mathcal{T}$. Entonces, para todo $v \in \mathcal{P}_{\ell}(T)$, se tiene que*

$$(3.14) \quad |\Gamma_v(x) - \Gamma_v(y)| \lesssim (\|\nabla v\|_{L^{\infty}(T)} + \|D^2 v\|_{L^{\infty}(T)}) |x - y|, \quad \forall x, y \in T.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y fijemos $T \in \mathcal{T}$. Sea $v \in \mathcal{P}_{\ell}(T)$ y sean $x, y \in T$. Teniendo en cuenta (3.13) y que $\nabla_2 \gamma$ es Lipschitz en su segunda variable (ver Observación 2.4) tenemos que

$$\begin{aligned} |\Gamma_v(x) - \Gamma_v(y)| &\leq |\nabla_2 \gamma(x, \nabla v(x)) - \nabla_2 \gamma(y, \nabla v(x))| + |\nabla_2 \gamma(y, \nabla v(x)) - \nabla_2 \gamma(y, \nabla v(y))| \\ &\lesssim |\nabla v(x)| |x - y| + |\nabla v(x) - \nabla v(y)|. \end{aligned}$$

De esta última desigualdad se sigue (3.14). \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar la estabilidad de los estimadores.

TEOREMA 3.8 (Estabilidad de los estimadores de error local). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si $v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, entonces*

$$\eta_{\mathcal{T}}(v; T) \lesssim \|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + \|f\|_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Sean $v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $T \in \mathcal{T}$ fijos.

\square Considerando primero el término correspondiente al residuo interior $R_{\mathcal{T}}(v)$, tenemos que

$$(3.15) \quad \|R_{\mathcal{T}}(v)\|_T = \|-\nabla \cdot \Gamma_v - f\|_T \leq \|\nabla \cdot \Gamma_v\|_T + \|f\|_T.$$

Para el primer término en el lado derecho de (3.15) se tiene que

$$\|\nabla \cdot \Gamma_v\|_T \leq H_T^{d/2} \|\nabla \cdot \Gamma_v\|_{L^\infty(T)} \lesssim H_T^{d/2} \sup_{\substack{x, y \in T \\ x \neq y}} \frac{|\Gamma_v(x) - \Gamma_v(y)|}{|x - y|},$$

y usando el Lema 3.7,

$$\|\nabla \cdot \Gamma_v\|_T \lesssim H_T^{d/2} \|\nabla v\|_{L^\infty(T)} + H_T^{d/2} \|D^2 v\|_{L^\infty(T)}.$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{P}_\ell(T)$ es de dimensión finita, y usando la desigualdad inversa dada en la Observación 1.7 tenemos que

$$\|\nabla \cdot \Gamma_v\|_T \lesssim \|\nabla v\|_T + \|D^2 v\|_T \lesssim \|\nabla v\|_T + H_T^{-1} \|\nabla v\|_T.$$

En consecuencia, de (3.15) se sigue que

$$(3.16) \quad H_T \|R_{\mathcal{T}}(v)\|_T \lesssim \|\nabla v\|_T + \|f\|_T.$$

\square Ahora analizamos el residuo de salto $J_{\mathcal{T}}(v)$. Si S es un lado de T interior a Ω y si T_1 y T_2 son los elementos que comparten S , entonces

$$\|J_{\mathcal{T}}(v)\|_S = \left\| \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \Gamma_v|_{T_i} \cdot \vec{n}_i \right\|_S \leq \sum_{i=1,2} \|\Gamma_v|_{T_i}\|_S \lesssim \sum_{i=1,2} \left(H_T^{-1/2} \|\Gamma_v\|_{T_i} + H_T^{1/2} \|\nabla \Gamma_v\|_{T_i} \right),$$

donde hemos utilizado el Teorema 1.4 de traza. Usando el mismo argumento que en la parte anterior, tenemos que $\|\nabla \Gamma_v\|_{T_i} \lesssim \|\nabla v\|_{T_i} + H_T^{-1} \|\nabla v\|_{T_i}$, y teniendo en cuenta que $\|\Gamma_v\|_{T_i} \lesssim \|\nabla v\|_{T_i}$ concluimos que

$$(3.17) \quad H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v)\|_{\partial T} \lesssim \|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}.$$

Considerando (3.16) y (3.17) obtenemos la afirmación de este teorema. \square

3.5.1. Sobre el comportamiento de $\nabla_2\gamma$ en su primera variable. Finalizamos este apéndice demostrando la estimación (3.13) (ver Lema 3.10 debajo), para lo que establecemos primero el siguiente resultado auxiliar.

LEMA 3.9. *Se cumple*

$$\left| \alpha(y, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) \mathcal{A}(x)\xi - \alpha(y, |\xi|_{\mathcal{A}(y)}^2) \mathcal{A}(y)\xi \right| \lesssim |\xi| |x - y|, \quad \forall x, y \in T, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

para todo $T \in \mathcal{T}_0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in \mathcal{T}_0$ fijo. Sean $x, y \in T$ y $\xi \in \mathbb{R}^d$. Para simplificar la notación, llamamos $A_x := \mathcal{A}(x)$ y $A_y := \mathcal{A}(y)$. Puesto que A_x y A_y son simétricas y definidas positivas, tenemos que

$$A_x \xi \cdot \xi = A_x^{\frac{1}{2}} \xi \cdot A_x^{\frac{1}{2}} \xi = (A_y^{-\frac{1}{2}} A_y A_y^{-\frac{1}{2}} A_x^{\frac{1}{2}} \xi) \cdot A_x^{\frac{1}{2}} \xi = (A_y A_y^{-\frac{1}{2}} A_x^{\frac{1}{2}} \xi) \cdot (A_y^{-\frac{1}{2}} A_x^{\frac{1}{2}} \xi),$$

y definiendo $\zeta := A_y^{-\frac{1}{2}} A_x^{\frac{1}{2}} \xi$, obtenemos

$$|\xi|_{A_x}^2 = |\zeta|_{A_y}^2.$$

Así, usando esta igualdad, que α está acotada y que $\nabla_2\gamma$ es Lipschitz en su segunda variable, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \alpha(y, |\xi|_{A_x}^2) A_x \xi - \alpha(y, |\xi|_{A_y}^2) A_y \xi \right| &\leq \left| \alpha(y, |\xi|_{A_x}^2) A_x \xi - \alpha(y, |\xi|_{A_x}^2) A_y \zeta \right| \\ &\quad + \left| \alpha(y, |\zeta|_{A_y}^2) A_y \zeta - \alpha(y, |\xi|_{A_y}^2) A_y \xi \right| \\ &= \left| \alpha(y, |\xi|_{A_x}^2) \right| |A_x \xi - A_y \zeta| + |\nabla_2\gamma(y, \zeta) - \nabla_2\gamma(y, \xi)| \\ (3.18) \quad &\lesssim |A_x \xi - A_y \zeta| + |\zeta - \xi|. \end{aligned}$$

Ahora bien, por un lado, de la definición de ζ , y del hecho que $\|A_x^{\frac{1}{2}} - A_y^{\frac{1}{2}}\|_2 \leq \|A_x^{-\frac{1}{2}}\|_2 \|A_x - A_y\|_2$ (ver [HJ90, Pág. 411]), se sigue que

$$|A_x \xi - A_y \zeta| = |A_x \xi - A_y^{\frac{1}{2}} A_x^{\frac{1}{2}} \xi| \leq \|A_x^{\frac{1}{2}}\|_2 \|A_x^{\frac{1}{2}} - A_y^{\frac{1}{2}}\|_2 |\xi| \leq \|A_x^{\frac{1}{2}}\|_2 \|A_x^{-\frac{1}{2}}\|_2 \|A_x - A_y\|_2 |\xi|,$$

y de (2.2) y (2.3) se sigue que

$$(3.19) \quad |A_x \xi - A_y \zeta| \lesssim |x - y| |\xi|.$$

Por otro lado,

$$|\zeta - \xi| = |\xi - A_y^{-\frac{1}{2}} A_x^{\frac{1}{2}} \xi| \leq \|I - A_y^{-\frac{1}{2}} A_x^{\frac{1}{2}}\|_2 |\xi| \leq \|A_y^{-\frac{1}{2}}\|_2 \|A_y^{\frac{1}{2}} - A_x^{\frac{1}{2}}\|_2 |\xi|$$

$$\leq \|A_y^{-\frac{1}{2}}\|_2 \|A_x^{-\frac{1}{2}}\|_2 \|A_y - A_x\|_2 |\xi| \lesssim |x - y| |\xi|.$$

Considerando (3.19) y la última desigualdad en (3.18) completamos la prueba de este lema. \square

Finalmente, como consecuencia del lema anterior, tenemos el siguiente resultado que establece que (3.13) se cumple, siempre que α sea localmente Lipschitz en su primera variable uniformemente en la segunda, esto es, siempre que exista $C_\alpha > 0$ tal que

$$(3.20) \quad |\alpha(x, t) - \alpha(y, t)| \leq C_\alpha |x - y|, \quad \forall x, y \in T, t > 0,$$

para todo $T \in \mathcal{T}_0$.

LEMA 3.10. *Supongamos que α satisface (3.20). Entonces $\nabla_2 \gamma$ es localmente Lipschitz en su primera variable con constante de Lipschitz dependiendo linealmente de su segundo argumento. Más precisamente,*

$$|\nabla_2 \gamma(x, \xi) - \nabla_2 \gamma(y, \xi)| \lesssim |\xi| |x - y|, \quad \forall x, y \in T, \xi \in \mathbb{R}^d,$$

para todo $T \in \mathcal{T}_0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in \mathcal{T}_0$ fijo. Sean $x, y \in T$ y $\xi \in \mathbb{R}^d$. Usando el Lema 3.9 y que α es Lipschitz en su primera variable, tenemos que

$$\begin{aligned} & |\nabla_2 \gamma(x, \xi) - \nabla_2 \gamma(y, \xi)| \\ &= \left| \alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) \mathcal{A}(x) \xi - \alpha(y, |\xi|_{\mathcal{A}(y)}^2) \mathcal{A}(y) \xi \right| \\ &\leq \left| \alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) \mathcal{A}(x) \xi - \alpha(y, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) \mathcal{A}(x) \xi \right| + \left| \alpha(y, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) \mathcal{A}(x) \xi - \alpha(y, |\xi|_{\mathcal{A}(y)}^2) \mathcal{A}(y) \xi \right| \\ &\lesssim \left| \alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) - \alpha(y, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) \right| |\mathcal{A}(x) \xi| + |x - y| |\xi| \\ &\lesssim |x - y| |\xi|, \end{aligned}$$

lo que completa la prueba de este lema. \square

CAPÍTULO 4

Análisis a posteriori y optimalidad de un MEF adaptativo para problemas no lineales

En el capítulo anterior hemos probado la convergencia (sin ningún orden) de la sucesión adaptativa generada por el Algoritmo 2 que utiliza *cualquier* estrategia de marcado. El objetivo principal de este capítulo es probar que, cuando en el módulo MARCAR de dicho algoritmo se usa la estrategia de Dörfler, la sucesión adaptativa converge con el *mayor orden posible*, en el sentido descrito en la Sección 1.4.3. Para esto, seguiremos los pasos mencionados en dicha sección.

Consideramos nuevamente el problema dado en el capítulo anterior planteado en el espacio $\mathbb{V} := H_{\Gamma}^1(\Omega)$, con $\Gamma \subset \partial\Omega$, esto es,

Problema 1. (Problema no lineal general)

Dado $L \in \mathbb{V}'$, hallar $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$a(u; u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Como antes, suponemos que $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal y simétrica en la segunda y tercera variable, y que es acotada y coercitiva, es decir,

$$(4.1) \quad |a(w; u, v)| \leq C_a \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall w, u, v \in \mathbb{V},$$

y

$$(4.2) \quad c_a \|u\|_{\mathbb{V}}^2 \leq a(w; u, u), \quad \forall w, u \in \mathbb{V},$$

donde c_a y C_a son constantes positivas. Adicionalmente, suponemos la siguiente propiedad de localización: Si $u, v, w \in \mathbb{V}$,

$$(4.3) \quad |a(u; u, v) - a(w; w, v)| \leq C_A \|u - w\|_{\mathbb{V}(\omega)} \|v\|_{\mathbb{V}(\omega)}, \quad \text{siempre que } \text{sop}(v) \subset \omega, \text{ para } \omega \subset \overline{\Omega},$$

donde $C_A > 0$ es una constante.

Por otro lado, suponemos como antes que el operador A asociado a este problema definido en (3.3) es Lipschitz y fuertemente monótono (ver (3.4) y (3.5)).

Notemos que estas propiedades de linealidad, simetría, acotación (4.1), coercitividad (4.2), localización (4.3), y las correspondientes al operador A , se satisfacen para la forma a del Problema modelo (2.6) definida en (2.7).

Recordamos que dada una triangulación conforme \mathcal{T}_0 de Ω , para cada triangulación $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, el espacio de elementos finitos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}$ está dado por

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} := \{v \in \mathbb{V} \mid v|_T \in \mathcal{P}_{\ell}(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\},$$

donde $\ell \in \mathbb{N}$ es un grado polinomial fijo; y la discretización del Problema 1 es el

Problema 2. (Discretización del Problema no lineal general)

Hallar $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tal que

$$a(u_{\mathcal{T}}; u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) = L(v_{\mathcal{T}}), \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}.$$

4.1. Estimaciones de error a posteriori

En esta sección estudiamos la confiabilidad y la eficiencia de estimadores de error a posteriori para la aproximación adaptativa de la solución del Problema 1, que serán útiles para probar un resultado de optimalidad. En particular, establecemos una cota inferior global y cotas superiores (global y local) para el error en términos de los estimadores.

El *residuo* \mathbf{R} está dado por

$$\langle \mathbf{R}(v), w \rangle := a(v; v, w) - L(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{V}.$$

Suponemos que para cada $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ podemos definir un *residuo interior* $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \in L^2(\Omega)$, y un *residuo de salto* $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \in L^2(\Sigma_{\mathcal{T}})$, de modo que se cumpla la relación fundamental:

$$(4.4) \quad \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), w \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) w + \int_{\partial T} J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) w \right), \quad \forall w \in \mathbb{V}.$$

En la Sección 3.5, hemos definido $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ y $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ de manera que (4.4) se satisface, para el caso del Problema modelo (2.6).

En base al residuo interior y al residuo de salto, como explicamos en la Sección 1.4.2, definimos los *estimadores de error local* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T)$ de $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ por

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T) := H_T^2 \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T^2 + H_T \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}^2, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y el *estimador de error global* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ como $\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T)$.

Por otro lado, definimos también los términos de oscilación en base a estos residuos como lo indicamos en la Sección 1.4.2 (ver (1.29) y (1.30)).

El primer resultado que presentamos establece la eficiencia local discreta de los estimadores de error a posteriori.

TEOREMA 4.1 (Cota inferior local discreta). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y fijemos $T \in \mathcal{T}$. Sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ el refinamiento de \mathcal{T} que se obtiene realizando n_d bisecciones¹ en cada elemento de $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$. Sea $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$. Sea \mathbb{V}_* un subespacio cerrado de \mathbb{V} tal que $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*} \subset \mathbb{V}_*$. Si $u_* \in \mathbb{V}_*$ es solución de*

$$(4.5) \quad a(u_*; u_*, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_*,$$

entonces

$$\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) \lesssim \|u_* - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}(\omega_{\mathcal{T}}(T))} + H_T \|R_{\mathcal{T}} - \overline{R_{\mathcal{T}}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + H_T^{\frac{1}{2}} \|J_{\mathcal{T}} - \overline{J_{\mathcal{T}}}\|_{\partial T},$$

donde $\overline{R_{\mathcal{T}}}|_{T'}$ denota la proyección de $R_{\mathcal{T}} := R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(T')$ en $L^2(T')$, para todo $T' \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$, y para cada lado $S \subset \partial T$, $\overline{J_{\mathcal{T}}}|_S$ la proyección de $J_{\mathcal{T}} := J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(S)$ en $L^2(S)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in \mathbb{V}_*$ tal que $\text{sop}(v) \subset \omega$, para algún $\omega \subset \overline{\Omega}$. Usando (4.5) y la propiedad de localización (4.3) tenemos que

$$|\langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), v \rangle| = |a(v_{\mathcal{T}}; v_{\mathcal{T}}, v) - L(v)| = |a(v_{\mathcal{T}}; v_{\mathcal{T}}, v) - a(u_*; u_*, v)| \leq C_A \|v_{\mathcal{T}} - u_*\|_{\mathbb{V}(\omega)} \|v\|_{\mathbb{V}(\omega)},$$

y por lo tanto, del Teorema 1.16 se sigue la afirmación de este teorema. \square

Considerando $u_* = u$ la solución del Problema 1 en $\mathbb{V}_* = \mathbb{V}$, como consecuencia del último resultado tenemos el

TEOREMA 4.2 (Cota Inferior Global). *Si $u \in \mathbb{V}$ denota la solución del Problema 1, existe una constante $C_L = C_L(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, C_A) > 0$ tal que*

$$C_L \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) \leq \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}), \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}, \quad \forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}.$$

Concluimos esta sección estableciendo dos estimaciones superiores para el error, cuyas demostraciones se basan en los resultados análogos para problemas elípticos lineales demostrados en la Sección 1.5.

¹Recordemos que n_d es el número de bisecciones necesarias sobre un elemento para garantizar que aparecerán nuevos nodos sobre cada lado y en el interior del mismo.

TEOREMA 4.3 (Cota superior global). *Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ la solución del Problema 2. Entonces existe $C_U = C_U(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, C_a, c_a, c_A) > 0$ tal que*

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} \leq C_U \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ la solución del Problema 2. Consideremos $w_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}$ la solución del problema elíptico lineal

$$(4.6) \quad a(u_{\mathcal{T}}; w_{\mathcal{T}}, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Puesto que A es fuertemente monótono, usando que u es solución del Problema 1, (4.6), y que a es acotada, tenemos que

$$\begin{aligned} c_A \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \langle Au_{\mathcal{T}} - Au, u_{\mathcal{T}} - u \rangle = a(u_{\mathcal{T}}; u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u) - a(u; u, u_{\mathcal{T}} - u) \\ &= a(u_{\mathcal{T}}; u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u) - a(u_{\mathcal{T}}; w_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u) = a(u_{\mathcal{T}}; u_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u) \\ &\leq C_a \|u_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}, \end{aligned}$$

y así,

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{C_a}{c_A} \|u_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}.$$

Puesto que $u_{\mathcal{T}}$ es la solución de la discretización de (4.6) en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ (ver Problema 2), usando la confiabilidad del estimador para el caso lineal (ver Teorema 1.21), tenemos que existe $C_U = C_U(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, C_a, c_a, c_A) > 0$ tal que

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} \leq C_U \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}).$$

□

TEOREMA 4.4 (Cota superior local). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de \mathcal{T} . Denotemos con \mathcal{R} al conjunto de elementos de \mathcal{T} que se refinaron para obtener \mathcal{T}_* , es decir, $\mathcal{R} := \{T \in \mathcal{T} \mid T \notin \mathcal{T}_*\}$. Sean $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ las soluciones del Problema 2 en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ respectivamente. Entonces existe una constante $C_{LU} = C_{LU}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, C_a, c_a, c_A) > 0$ tal que*

$$\|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_{\mathbb{V}} \leq C_{LU} \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}_*, \mathcal{R}, u_{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*}$ como en las hipótesis del teorema. Consideremos $w_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ la solución del problema elíptico lineal

$$(4.7) \quad a(u_{\mathcal{T}}; w_{\mathcal{T}_*}, v_{\mathcal{T}_*}) = L(v_{\mathcal{T}_*}), \quad \forall v_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}.$$

Del mismo modo que en el teorema anterior, puesto que A es fuertemente monótono, usando que $u_{\mathcal{T}_*}$ es solución del Problema 2 en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$, (4.7) y que a es acotada, tenemos que

$$\begin{aligned} c_A \|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \langle Au_{\mathcal{T}} - Au_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*} \rangle = a(u_{\mathcal{T}}; u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) - a(u_{\mathcal{T}_*}; u_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) \\ &= a(u_{\mathcal{T}}; u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) - a(u_{\mathcal{T}}; w_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) = a(u_{\mathcal{T}}; u_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}) \\ &\leq C_a \|u_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}_*}\|_{\mathbb{V}} \|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_{\mathbb{V}}, \end{aligned}$$

y así,

$$\|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{C_a}{c_A} \|u_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}_*}\|_{\mathbb{V}}.$$

Puesto que $u_{\mathcal{T}}$ y $w_{\mathcal{T}_*}$ son las soluciones de la discretización de (4.6) en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ respectivamente (ver Problema 2 y (4.7)), usando la confiabilidad local del estimador para el caso lineal (ver Teorema 1.22), tenemos que existe $C_{LU} = C_{LU}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, C_a, c_a, c_A) > 0$ tal que

$$\|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_{\mathbb{V}} \leq C_{LU} \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}).$$

□

4.2. Reducción del estimador y de la oscilación

En esta sección estudiamos los efectos del refinamiento en los estimadores de error y en los términos de oscilación. Para los resultados que establecemos ahora suponemos que vale la siguiente hipótesis. En el Apéndice I de este capítulo, demostraremos que la misma se cumple cuando consideramos el Problema modelo (2.6) y su aproximación con polinomios lineales a trozos ($\ell = 1$).

HIPÓTESIS 4.5. Existe una constante $C_E > 1$ (que puede depender de d , $\kappa_{\mathbb{T}}$, ℓ y de los datos del Problema 1), tal que si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, entonces

$$(4.8) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}} g_T^2(v_T, w_T; T) \leq C_E \|v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \forall v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}},$$

donde $g_T(v_T, w_T; T) = H_T \|R_T(v_T) - R_T(w_T)\|_T + H_T^{1/2} \|J_T(v_T) - J_T(w_T)\|_{\partial T}$, es la función que relaciona los indicadores de error y los términos de oscilación de dos funciones discretas (ver (1.37) y (1.38) en la Sección 1.6.2).

Comenzamos estableciendo un resultado referido al estimador de error, el cual será útil para demostrar una propiedad de contracción del error de un algoritmo adaptativo (ver Teorema 4.14).

PROPOSICIÓN 4.6 (Reducción del estimador). Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ cualquier subconjunto de \mathcal{T} . Sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ obtenida de \mathcal{T} refinando al menos $n \geq 1$ veces cada elemento de $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$. Si $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $v_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ entonces

$$\eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}_*}) \leq (1 + \delta) \left\{ \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) - (1 - 2^{-\frac{n}{d}}) \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; \mathcal{M}_{\mathcal{T}}) \right\} + (1 + \delta^{-1}) C_E \|v_{\mathcal{T}_*} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2,$$

para todo $\delta > 0$, donde $C_E > 1$ es la constante dada en (4.8).

DEMOSTRACIÓN. Sean \mathcal{T} , $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ y \mathcal{T}_* como en la hipótesis y sean $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $v_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ arbitrarias. Aplicando la desigualdad de Young² con parámetro δ a (1.37) tenemos que

$$\eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}_*}; T) \leq (1 + \delta) \eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}; T) + (1 + \delta^{-1}) g_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}_*}; T),$$

para $T \in \mathcal{T}_*$. Sumando sobre todos los elementos $T \in \mathcal{T}_*$, y teniendo en cuenta (4.8) obtenemos

$$(4.9) \quad \eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}_*}) \leq (1 + \delta) \eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}) + (1 + \delta^{-1}) C_E \|v_{\mathcal{T}_*} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2.$$

Ahora, para cada $T \in \mathcal{T}$, definimos $\mathcal{T}_{*,T} := \{T' \in \mathcal{T}_* \mid T' \subset T\}$. Teniendo en cuenta la Observación 1.14, para $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{T' \in \mathcal{T}_{*,T}} \eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}; T') &= \sum_{T' \in \mathcal{T}_{*,T}} (H_{T'}^2 \|R_{\mathcal{T}_*}(v_{\mathcal{T}})\|_{T'}^2 + H_{T'} \|J_{\mathcal{T}_*}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T'}^2) \\ &\leq 2^{-\frac{n}{d}2} H_T^2 \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T^2 + 2^{-\frac{n}{d}} H_T \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}^2 \leq 2^{-\frac{n}{d}} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T), \end{aligned}$$

ya que el refinamiento por bisección implica que $H_{T'} = |T'|^{\frac{1}{d}} \leq (2^{-n}|T|)^{\frac{1}{d}} = 2^{-\frac{n}{d}} H_T$, para todo $T' \in \mathcal{T}_{*,T}$.

Considerando esta estimación para $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ y que $\sum_{T' \in \mathcal{T}_{*,T}} \eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}; T') \leq \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T)$ para $T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{M}_{\mathcal{T}}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}) &= \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{M}_{\mathcal{T}}} \sum_{T' \in \mathcal{T}_{*,T}} \eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}; T') + \sum_{T \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}} \sum_{T' \in \mathcal{T}_{*,T}} \eta_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}; T') \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{M}_{\mathcal{T}}} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T) + \sum_{T \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}} 2^{-\frac{n}{d}} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T) \\ &= \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) - (1 - 2^{-\frac{n}{d}}) \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; \mathcal{M}_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Finalmente, usando esto en (4.9) se completa la demostración. \square

²Si $0 \leq a \leq b + c$, entonces $a^2 \leq (1 + \delta)b^2 + (1 + \delta^{-1})c^2$, para todo $\delta > 0$.

Concluimos esta sección estableciendo un resultado que cuantifica el cambio en los términos de oscilación debido al refinamiento, el cual será necesario para establecer la *casi-optimalidad del error* en la sección siguiente (ver Lema 4.10).

PROPOSICIÓN 4.7 (Perturbación de la oscilación). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ es un refinamiento de \mathcal{T} , $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, y $v_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$, entonces*

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*) \leq 2 \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}_*}; \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*) + 2C_E \|v_{\mathcal{T}_*} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2,$$

donde $C_E > 1$ es la constante dada en (4.8).

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de \mathcal{T} . Sean $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $v_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ arbitrarias. Aplicando la desigualdad de Young a (1.38) se sigue

$$\text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}; T) \leq 2 \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}_*}; T) + 2g_{\mathcal{T}_*}^2(v_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}_*}; T),$$

para todo $T \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*$. Usando que $\text{osc}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) = \text{osc}_{\mathcal{T}_*}(v_{\mathcal{T}}; T)$, sumando sobre los elementos $T \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*$ y considerando (4.8) completamos la demostración. \square

4.3. Optimalidad del error total y marcado óptimo

En esta sección introducimos la noción de *error total*, mostramos su casi-optimalidad (ver Lema 4.10) y un resultado de *marcado óptimo* (ver Lema 4.12). Ambos resultados serán claves para establecer un control sobre los elementos marcados en cada paso de un algoritmo adaptativo (ver Lema 4.15 en la Sección 4.5).

Los dos siguientes resultados auxiliares nos permitirán demostrar luego el resultado de casi-optimalidad del error.

LEMA 4.8 (Lema de Cea). *Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ denota la solución del Problema 2, entonces*

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{C_A}{c_A} \inf_{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}},$$

donde C_A y c_A son las constantes de Lipschitz y de monotonía fuerte, respectivamente, del operador A asociado al Problema 1.

DEMOSTRACIÓN. Sean $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1 y $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ la solución del Problema 2 para alguna $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, puesto que A es fuertemente monótono y Lipschitz

tenemos que

$$\begin{aligned} c_A \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \langle Au_{\mathcal{T}} - Au, u_{\mathcal{T}} - u \rangle = \langle Au_{\mathcal{T}} - Au, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}} \rangle + \langle Au_{\mathcal{T}} - Au, v_{\mathcal{T}} - u \rangle \\ &\leq C_A \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\langle Au_{\mathcal{T}} - Au, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}} \rangle = 0$, debido a que u es solución del Problema 1 y $u_{\mathcal{T}}$ del Problema 2. La demostración concluye teniendo en cuenta que $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ es arbitraria. \square

LEMA 4.9 (Casi ortogonalidad en una malla). *Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ denota la solución del Problema 2 entonces*

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2 \leq C_O \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}},$$

$$\text{donde } C_O := \left(\sqrt{\frac{C_A^2}{c_A^2} + 1} + \frac{C_A}{c_A} \right)^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Sean $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ la solución del Problema 2. Si $0 < \varepsilon < 1$ y si $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz en \mathbb{V} , tenemos

$$\begin{aligned} \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + 2\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} \\ &\leq \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \varepsilon \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2, \end{aligned}$$

y de aquí,

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + (1 - \varepsilon) \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2.$$

Por el Lema de Cea (Lema 4.8) tenemos que

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + (1 - \varepsilon) \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \frac{C_A^2}{\varepsilon c_A^2} \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2,$$

y así, para $0 < \varepsilon < 1$,

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \frac{1 + C_A^2/(\varepsilon c_A^2)}{(1 - \varepsilon)} \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2.$$

Finalmente, tomando $\varepsilon := \frac{C_A}{c_A} \left(\sqrt{\frac{C_A^2}{c_A^2} + 1} + \frac{C_A}{c_A} \right)^{-1}$ se completa la demostración. \square

Puesto que el estimador domina la oscilación, es decir, $\text{osc}_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) \leq \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})$, usando la cota superior global (Teorema 4.3), tenemos que

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq (C_U^2 + 1) \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}),$$

siempre que $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ sea solución del Problema 2, y teniendo en cuenta la cota inferior global (Teorema 4.2) llegamos a que

$$\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) \approx (\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}))^{1/2}.$$

La cantidad del lado derecho se llama *error total*, y puesto que los métodos adaptativos se controlan en base al estimador, la velocidad de convergencia se caracteriza en base a propiedades del error total. El siguiente resultado establece que las soluciones discretas $u_{\mathcal{T}}$ son aproximaciones óptimas (salvo una constante) de la solución u desde $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$.

LEMA 4.10 (Lema de Cea para el error total). *Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ denota la solución del Problema 2 entonces*

$$\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq 2C_E C_O \inf_{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} (\|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}})).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ la solución del Problema 2. Sea $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$. Usando la Proposición 4.7 con $\mathcal{T}_* = \mathcal{T}$ y el Lema 4.9 tenemos que³

$$\begin{aligned} \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) &\leq \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + 2 \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) + 2C_E \|v_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2 \\ &\leq 2C_E C_O \|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + 2 \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) \\ &\leq 2C_E C_O (\|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}})). \end{aligned}$$

Puesto que $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ es arbitraria se sigue la afirmación de este lema. \square

Para demostrar el resultado de marcado óptimo debemos hacer la siguiente restricción sobre el parámetro de marcado θ , relacionada con la constante C_L de la cota inferior global (Teorema 4.2), C_{LU} de la cota superior local (Teorema 4.4) y C_E de la Hipótesis 4.5.

HIPÓTESIS 4.11 (El parámetro de marcado θ). El parámetro de marcado θ en la estrategia de Dörfler, descrita en la Sección 1.4.1, satisface $0 < \theta < \theta_0$ donde

$$\theta_0^2 := \frac{C_L}{1 + 2C_{LU}^2(1 + C_E)}.$$

El siguiente resultado establece la existencia de un umbral ν tal que, si se obtiene una reducción ν del error total después de algún refinamiento de \mathcal{T} , entonces la cantidad de elementos refinados es mayor o igual que los que habrían sido marcados por la estrategia de Dörfler.

³Notemos que hemos elegido $C_E > 1$ y por definición $C_O > 1$.

Este resultado, conocido como *optimal marking* (*marcado óptimo*), fue probado primero para problemas elípticos lineales por Stevenson [Ste07] para el error suponiendo oscilación pequeña, y luego para la noción de error total que incluye a los términos de oscilación en [CKNS08].

LEMA 4.12 (Marcado óptimo). *Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de \mathcal{T} . Sea \mathcal{R} el conjunto de elementos de \mathcal{T} que se refinaron para obtener \mathcal{T}_* . Supongamos que la Hipótesis 4.11 sobre la restricción del parámetro de marcado θ vale, y definamos $\nu := \frac{1}{2}(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2}) > 0$. Sean $u_{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*}$ las soluciones del Problema 2 en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ respectivamente. Si*

$$(4.10) \quad \|u_{\mathcal{T}_*} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}) \leq \nu (\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}})),$$

entonces

$$\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) \geq \theta \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean u , \mathcal{T} , \mathcal{T}_* , \mathcal{R} , $u_{\mathcal{T}}$, $u_{\mathcal{T}_*}$ y ν como en las hipótesis. Usando (4.10) y la cota inferior global (Teorema 4.2) obtenemos

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu)C_L\eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) &\leq (1 - 2\nu) (\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}})) \\ &\leq \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 - 2\|u_{\mathcal{T}_*} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) - 2\text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}). \end{aligned}$$

Ya que $\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}} \leq \|u_{\mathcal{T}_*} - u\|_{\mathbb{V}} + \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}$, tenemos que

$$(4.11) \quad \|u_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 \leq 2\|u_{\mathcal{T}_*} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + 2\|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2.$$

Usando la Proposición 4.7 y que $\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; T) \leq \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; T)$, si $T \in \mathcal{R} = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_*$; para los términos de oscilación obtenemos

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) - 2\text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}) \leq 2C_E\|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}}^2 + \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}).$$

Así, de la última desigualdad y de (4.11) se obtiene

$$(1 - 2\nu)C_L\eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq 2\|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_{\mathbb{V}}^2 + 2C_E\|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_{\mathbb{V}}^2 + \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}),$$

y usando la cota superior local (Teorema 4.4) tenemos que

$$(1 - 2\nu)C_L\eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq 2(1 + C_E)C_{LU}^2\eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) + \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) = (1 + 2C_{LU}^2(1 + C_E))\eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}).$$

Finalmente,

$$\frac{(1 - 2\nu)C_L}{1 + 2C_{LU}^2(1 + C_E)}\eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}),$$

lo cual completa la prueba ya que de la definición de ν se tiene que $\frac{(1-2\nu)C_L}{1+2C_U^2(1+C_E)} = \theta^2$. \square

4.4. Propiedad de contracción del error

En esta sección demostramos la convergencia lineal del

Algoritmo 3.

Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω y sea θ un parámetro tal que $0 < \theta < 1$. Poner $k = 0$.

1. $u_k := \text{RESOLVER}(\mathcal{T}_k)$.
2. $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k} := \text{ESTIMAR}(u_k, \mathcal{T}_k)$.
3. $\mathcal{M}_k := \text{MARCAR}(\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}, \mathcal{T}_k, \theta)$.
4. $\mathcal{T}_{k+1} := \text{REFINAR}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k, n)$.
5. Incrementar k y volver al paso 1.

Los pasos de este algoritmo son idénticos a los del Algoritmo 2, definiendo los estimadores de error local $\eta_k(T) := \eta_{\mathcal{T}_k}(u_k; T)$, y considerando la estrategia de marcado de Dörfler con parámetro θ (ver Sección 1.4.1) en el módulo MARCAR para la elección del subconjunto \mathcal{M}_k de elementos de \mathcal{T}_k .

En [CKNS08] para demostrar una propiedad de contracción del error para problemas elípticos lineales se usa la conocida *ortogonalidad de Galerkin*. En nuestro caso, debido a la no linealidad del problema que estudiamos, no tenemos esta propiedad, pero construimos una noción equivalente del error para la que podemos establecer una propiedad análoga a la ortogonalidad. Esta noción se establece en la siguiente hipótesis que, por el Teorema 4.20 dado en el Apéndice II al final de este capítulo, resulta válida para el Problema modelo (2.6) presentado en el Capítulo 2.

HIPÓTESIS 4.13. Sea u la solución del Problema 1 y sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 3. Existe una constante $C_{\mathcal{F}} > 1$ que depende de los datos del problema tal que

$$\frac{1}{C_{\mathcal{F}}} \|u_k - u_p\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u_p) \leq C_{\mathcal{F}} \|u_k - u_p\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \forall k, p \in \mathbb{N}_0, k < p,$$

donde $\mathcal{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es el funcional definido por $\mathcal{F}(v) := \int_0^1 \langle A(sv), v \rangle ds - L(v)$,⁴ para toda $v \in \mathbb{V}$. La misma equivalencia es válida reemplazando u_p por u .

⁴Ver Teorema 2.7.

Como consecuencia de la reducción del estimador, de la cota superior global y de la suposición anterior, demostramos que una noción equivalente al error total se contrae en cada paso del Algoritmo 3, y así se garantiza la convergencia lineal del mismo.

TEOREMA 4.14 (Propiedad de Contracción). *Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1 y sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 3. Entonces, existen constantes $0 < \rho, \mu < 1$ que dependen de $d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell$, de los datos del problema, del número de refinamientos n realizado sobre cada elemento marcado y del parámetro de marcado θ tales que*

$$[\mathcal{F}(u_{k+1}) - \mathcal{F}(u)] + \mu \eta_{k+1}^2 \leq \rho^2([\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u)] + \mu \eta_k^2), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

donde $\eta_k^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k^2(T)$ denota el cuadrado del estimador de error global en \mathcal{T}_k .

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1 y sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 3. Usando el hecho que

$$\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u_{k+1}) + \mathcal{F}(u_{k+1}) - \mathcal{F}(u),$$

y la reducción del estimador dada en la Proposición 4.6 con $\mathcal{T} = \mathcal{T}_k$ y $\mathcal{T}_* = \mathcal{T}_{k+1}$ tenemos que para todo $\delta, \mu > 0$,

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(u_{k+1}) - \mathcal{F}(u)] + \mu \eta_{k+1}^2 &\leq [\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u)] - [\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u_{k+1})] \\ &\quad + (1 + \delta)\mu \{ \eta_k^2 - \xi \eta_k^2(\mathcal{M}_k) \} + (1 + \delta^{-1})C_E \mu \|u_{k+1} - u_k\|_{\mathbb{V}}^2, \end{aligned}$$

donde $\xi := 1 - 2^{-\frac{n}{d}}$ y $\eta_k^2(\mathcal{M}_k) := \sum_{T \in \mathcal{M}_k} \eta_k^2(T)$. Eligiendo $\mu := \frac{1}{(1 + \delta^{-1})C_E C_{\mathcal{F}}}$, tenemos que

$$[\mathcal{F}(u_{k+1}) - \mathcal{F}(u)] + \mu \eta_{k+1}^2 \leq [\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u)] + (1 + \delta)\mu \{ \eta_k^2 - \xi \eta_k^2(\mathcal{M}_k) \}.$$

La estrategia de marcado de Dörfler implica que $\eta_k(\mathcal{M}_k) \geq \theta \eta_k$ y así

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(u_{k+1}) - \mathcal{F}(u)] + \mu \eta_{k+1}^2 &\leq [\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u)] + (1 + \delta)\mu \eta_k^2 - (1 + \delta)\mu \xi \theta^2 \eta_k^2 \\ &= [\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u)] + (1 + \delta)\mu \eta_k^2 - (1 + \delta)\mu \frac{\xi \theta^2}{2} \eta_k^2 - (1 + \delta)\mu \frac{\xi \theta^2}{2} \eta_k^2. \end{aligned}$$

Usando la cota superior global (Teorema 4.3) y que $\mu(1 + \delta) = \frac{\delta}{C_E C_{\mathcal{F}}}$ se sigue que

$$[\mathcal{F}(u_{k+1}) - \mathcal{F}(u)] + \mu \eta_{k+1}^2 \leq [\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u)] - \frac{\delta \xi \theta^2}{2C_U^2 C_E C_{\mathcal{F}}^2} [\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u)] + (1 + \delta)\mu \left(1 - \frac{\xi \theta^2}{2}\right) \eta_k^2.$$

Si definimos

$$\rho_1^2(\delta) := \left(1 - \frac{\delta \xi \theta^2}{2C_U^2 C_E C_{\mathcal{F}}^2}\right), \quad \rho_2^2(\delta) := \left(1 - \frac{\xi \theta^2}{2}\right) (1 + \delta),$$

se tiene

$$[\mathcal{F}(u_{k+1}) - \mathcal{F}(u)] + \mu\eta_{k+1}^2 \leq \rho_1^2(\delta)[\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u)] + \mu\rho_2^2(\delta)\eta_k^2.$$

La demostración concluye eligiendo δ de modo que

$$0 < \rho := \max\{\rho_1(\delta), \rho_2(\delta)\} < 1.$$

□

El resultado anterior muestra que la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ generada por el Algoritmo 3 converge a la solución u del Problema 1, más aún, que existe $\rho \in (0, 1)$ tal que

$$\|u_k - u\|_{\mathbb{V}} \leq C\rho^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

para alguna constante $C > 0$. Por otro lado, los estimadores de error global $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ tienden a cero, y en particular,

$$\eta_k \leq C\rho^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

para alguna constante $C > 0$.

4.5. Casi-optimalidad del MEF adaptativo

En esta sección establecemos el resultado principal de este capítulo, esto es, que la convergencia del Algoritmo 3, demostrada en la sección anterior, es casi-óptima en el sentido de aproximación no lineal descrito en la Sección 1.4.3.

Recordemos que para $N \in \mathbb{N}_0$, denotamos por \mathbb{T}_N al conjunto de todas las triangulaciones conformes que se obtienen por refinamiento de \mathcal{T}_0 y que tienen a lo sumo N elementos más que \mathcal{T}_0 . El menor error que se puede cometer al aproximar la solución u del Problema 1 con elementos definidos sobre particiones en \mathbb{T}_N está dado por

$$\sigma(u; N) := \inf_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N} \inf_{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}} (\|v_{\mathcal{T}} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}))^{\frac{1}{2}}.$$

Dado $s > 0$, decimos que $u \in \mathbb{A}_s$ si

$$|u|_s := \sup_{N \in \mathbb{N}_0} (N + 1)^s \sigma(u; N) < \infty,$$

esto es, $u \in \mathbb{A}_s$ si puede ser aproximada por mallas adaptativas con una rapidez $(DOFs)^{-s}$.

Antes de establecer el resultado de optimalidad, necesitamos acotar la cantidad de elementos marcados para refinar en cada paso del Algoritmo 3. Esto se hace en el siguiente

LEMA 4.15 (Cardinalidad de \mathcal{M}_k). *Supongamos que la solución u del Problema 1 pertenece a la clase \mathbb{A}_s . Si $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ denota la sucesión generada por el Algoritmo 3, y si el parámetro de marcado θ cumple la restricción dada en la Hipótesis 4.11, entonces*

$$\#\mathcal{M}_k \leq \left(\frac{2C_E C_O}{\nu} \right)^{\frac{1}{2s}} |u|_s^{\frac{1}{s}} (\|u_k - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_k}^2(u_k))^{-\frac{1}{2s}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

donde $\nu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2}\right)$ como en el Lema 4.12.

DEMOSTRACIÓN. Sea u la solución del Problema 1. Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 3 y consideremos $k \in \mathbb{N}_0$ fijo. Sea $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$ una tolerancia que fijaremos luego. Ya que $u \in \mathbb{A}_s$, del Lema 1.20 se sigue que existen una triangulación $\mathcal{T}_\varepsilon \in \mathbb{T}$ y una función $v_\varepsilon \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ tales que

$$\#\mathcal{T}_\varepsilon - \#\mathcal{T}_0 \leq |u|_s^{\frac{1}{s}} \varepsilon^{-\frac{1}{s}} \quad \text{y} \quad \|v_\varepsilon - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon}^2(v_\varepsilon) < \varepsilon^2.$$

Sea $\mathcal{T}_* := \mathcal{T}_\varepsilon \oplus \mathcal{T}_k$ la superposición de \mathcal{T}_ε y \mathcal{T}_k (ver Lema 1.13). Puesto que $v_\varepsilon \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$, tenemos que $\text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon}(v_\varepsilon) \geq \text{osc}_{\mathcal{T}_*}(v_\varepsilon)$, y por el Lema 4.10, si $u_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ denota la solución del Problema 2 en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$, tenemos que

$$\|u_{\mathcal{T}_*} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}) \leq 2C_E C_O (\|v_\varepsilon - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon}^2(v_\varepsilon)) < 2C_E C_O \varepsilon^2.$$

Elijamos ε de modo que

$$\|u_{\mathcal{T}_*} - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}) < \nu (\|u_k - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_k}^2(u_k)) = 2C_E C_O \varepsilon^2,$$

donde ν es la constante dada en el Lema 4.12. Así, este lema implica que

$$\eta_{\mathcal{T}_k}^2(u_k; \mathcal{R}_k) \geq \theta^2 \eta_{\mathcal{T}_k}^2(u_k),$$

si \mathcal{R}_k es el conjunto de elementos de \mathcal{T}_k que se refinan para obtener \mathcal{T}_* . Teniendo en cuenta que \mathcal{M}_k es un conjunto *minimal* de \mathcal{T}_k que satisface la propiedad de Dörfler, usando el Lema 1.13 y recordando la elección de ε concluimos que

$$\begin{aligned} \#\mathcal{M}_k &\leq \#\mathcal{R}_k \leq \#\mathcal{T}_* - \#\mathcal{T}_k \leq \#\mathcal{T}_\varepsilon - \#\mathcal{T}_0 \leq |u|_s^{\frac{1}{s}} \varepsilon^{-\frac{1}{s}} \\ &= \left(\frac{2C_E C_O}{\nu} \right)^{\frac{1}{2s}} |u|_s^{\frac{1}{s}} (\|u_k - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_k}^2(u_k))^{-\frac{1}{2s}}. \end{aligned}$$

□

Finalmente establecemos el resultado principal de este capítulo que es consecuencia del Lema 1.12, la cota inferior global (Teorema 4.2), la cota para la cardinalidad de \mathcal{M}_k dada en el Lema 4.15 y la propiedad de contracción del Teorema 4.14.

TEOREMA 4.16 (Velocidad casi-óptima de convergencia del Algoritmo 3). *Supongamos que la triangulación inicial \mathcal{T}_0 de Ω está enumerada adecuadamente (ver Definición 1.11). Supongamos además que la solución u del Problema 1 pertenece a la clase \mathbb{A}_s . Si $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ denota la sucesión generada por el Algoritmo 3, y si el parámetro de marcado θ satisface la Hipótesis 4.11, y vale la equivalencia del error dada en la Hipótesis 4.13, entonces*

$$\left(\|u_k - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_k}^2(u_k)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C|u|_s(\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0)^{-s}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

donde la constante $C > 0$ depende de d , $\kappa_{\mathbb{T}}$, ℓ , de los datos del problema, del número de refinamientos n realizado sobre cada elemento marcado, del parámetro de marcado θ , y del índice de regularidad s .

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 3. En esta prueba utilizaremos la letra C para indicar una constante que puede depender de lo enunciado en el teorema, y en cada aparición puede ser distinta. Para $k \in \mathbb{N}$, de los Lemas 1.12 y 4.15, y de la cota inferior global (Teorema 4.2) se sigue que

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0 &\leq C \sum_{i=0}^{k-1} \#\mathcal{M}_i \leq C|u|_s^{\frac{1}{s}} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\|u_i - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_i}^2(u_i)\right)^{-\frac{1}{2s}} \\ (4.12) \quad &\leq C|u|_s^{\frac{1}{s}} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\|u_i - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \mu\eta_{\mathcal{T}_i}^2(u_i)\right)^{-\frac{1}{2s}}, \end{aligned}$$

donde μ es la constante de la propiedad de contracción (Teorema 4.14). Si definimos $z_i^2 := [\mathcal{F}(u_i) - \mathcal{F}(u)] + \mu\eta_{\mathcal{T}_i}^2(u_i)$, esta misma propiedad implica que $z_{i+1} \leq \rho z_i$ y por lo tanto, $z_i^{-\frac{1}{s}} \leq \rho^{\frac{1}{s}} z_{i+1}^{-\frac{1}{s}}$. Puesto que $\rho < 1$, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{k-1} z_i^{-\frac{1}{s}} \leq \sum_{i=0}^{\infty} (\rho^{\frac{1}{s}})^i z_k^{-\frac{1}{s}} = \frac{1}{1 - \rho^{\frac{1}{s}}} z_k^{-\frac{1}{s}},$$

y de (4.12), teniendo en cuenta la Hipótesis 4.13, se sigue que

$$\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0 \leq C|u|_s^{\frac{1}{s}} \left(\|u_k - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \mu\eta_{\mathcal{T}_k}^2(u_k)\right)^{-\frac{1}{2s}}.$$

Finalmente, usando que $\text{osc}_{\mathcal{T}_k}(u_k) \leq \eta_{\mathcal{T}_k}(u_k)$,

$$\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0 \leq C|u|_s^{\frac{1}{s}} \left(\|u_k - u\|_{\mathbb{V}}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_k}^2(u_k)\right)^{-\frac{1}{2s}},$$

y obtenemos la estimación deseada elevando a la potencia s y reordenando. \square

4.6. Apéndice I. Sobre la Hipótesis 4.5 de acotación de g_T para el Problema modelo (2.6)

En este apéndice consideramos el Problema modelo dado en (2.6), esto es,

Problema modelo (no lineal)

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \alpha(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Demostramos que la Hipótesis 4.5 se satisface para

$$g_T(v_T, w_T; T) = H_T \|R_T(v_T) - R_T(w_T)\|_T + H_T^{1/2} \|J_T(v_T) - J_T(w_T)\|_{\partial T},$$

teniendo en cuenta el residuo interior R_T y el residuo de salto J_T que fueron definidos para este problema en la Sección 3.5, cuando el espacio \mathbb{V}_T está formado por polinomios lineales a trozos, es decir, cuando $\ell = 1$. Necesitamos demostrar primero el siguiente resultado auxiliar.

LEMA 4.17. *Sea $T \in \mathcal{T}_0$. Sea $D_2^2\gamma$ la matriz hessiana de γ como función de su segunda variable. Si*

$$\|D_2^2\gamma(x, \xi) - D_2^2\gamma(y, \xi)\|_2 \leq C_\gamma |x - y|, \quad \forall x, y \in T, \xi \in \mathbb{R}^d,$$

para alguna constante $C_\gamma > 0$, entonces, para todo $v, w \in \mathcal{P}_1(T)$,⁵

$$|\Gamma_v(x) - \Gamma_w(x) - \Gamma_v(y) + \Gamma_w(y)| \leq C_\gamma \|\nabla(v - w)\|_{L^\infty(T)} |x - y|, \quad \forall x, y \in T.$$

OBSERVACIÓN 4.18. Teniendo en cuenta el Lema 2.1, tenemos que

$$(D_2^2\gamma(x, \xi))_{ij} = 2D_2\alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2)(\text{col}_i(\mathcal{A}(x)) \cdot \xi)(\text{col}_j(\mathcal{A}(x)) \cdot \xi) + \alpha(x, |\xi|_{\mathcal{A}(x)}^2) \mathcal{A}_{ij}(x),$$

para $1 \leq i, j \leq d$. En consecuencia, si \mathcal{A} es constante sobre los elementos de la triangulación inicial \mathcal{T}_0 , y si $\alpha(\cdot, t)$ y $D_2\alpha(\cdot, t)t$ son Lipschitz sobre cada $T \in \mathcal{T}_0$ (uniformemente en t), se tiene que $D_2^2\gamma(x, \xi)$ es localmente Lipschitz en su primera variable, es decir, que existe una constante $C_\gamma > 0$ tal que

$$\|D_2^2\gamma(x, \xi) - D_2^2\gamma(y, \xi)\|_2 \leq C_\gamma |x - y|, \quad \forall x, y \in T, \xi \in \mathbb{R}^d,$$

para todo $T \in \mathcal{T}_0$.

⁵Aquí, dada $v \in \mathbb{V}_T$, $\Gamma_v(x) := \nabla_2\gamma(x, \nabla v(x))$, para todo $x \in \Omega$ (ver (3.12)).

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.17. Sea $T \in \mathcal{T}_0$. Sean $v, w \in \mathcal{P}_1(T)$ y sean $x, y \in T$. Si denotamos $V := \nabla v(x) = \nabla v(y)$ y $W := \nabla w(x) = \nabla w(y)$,⁶ tenemos que

$$\begin{aligned} |\Gamma_v(x) - \Gamma_w(x) - \Gamma_v(y) + \Gamma_w(y)| &= |\nabla_2 \gamma(x, V) - \nabla_2 \gamma(x, W) - \nabla_2 \gamma(y, V) + \nabla_2 \gamma(y, W)| \\ &= \left| \int_0^1 D_2^2 \gamma(x, W + t(V - W))(V - W) dt - \int_0^1 D_2^2 \gamma(y, W + t(V - W))(V - W) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 [(D_2^2 \gamma(x, W + t(V - W)) - D_2^2 \gamma(y, W + t(V - W)))] (V - W) dt \right| \\ &\leq C_\gamma |x - y| |V - W|, \end{aligned}$$

de donde sigue la afirmación del Lema. \square

Concluimos este apéndice demostrando que la Hipótesis 4.5 se cumple en este caso, y más aún, vale el siguiente resultado local.

TEOREMA 4.19 (Acotación local de $g_{\mathcal{T}}$). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sean $v, w \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$. Entonces,*

$$g_{\mathcal{T}}(v, w; T) \lesssim \|\nabla(v - w)\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

donde $g_{\mathcal{T}}(v, w; T) = H_T \|R_{\mathcal{T}}(v) - R_{\mathcal{T}}(w)\|_T + H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v) - J_{\mathcal{T}}(w)\|_{\partial T}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Sean $v, w \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$. Sea $T \in \mathcal{T}$.

[1] Usando el Lema 4.17, para el término del residuo interior tenemos que

$$\begin{aligned} \|R_{\mathcal{T}}(v) - R_{\mathcal{T}}(w)\|_T &= \|\nabla \cdot (\Gamma_v - \Gamma_w)\|_T \leq H_T^{d/2} \|\nabla \cdot (\Gamma_v - \Gamma_w)\|_{L^\infty(T)} \\ &\lesssim H_T^{d/2} \sup_{\substack{x, y \in T \\ x \neq y}} \frac{|\Gamma_v(x) - \Gamma_w(x) - \Gamma_v(y) + \Gamma_w(y)|}{|x - y|} \\ &\lesssim H_T^{d/2} \|\nabla(v - w)\|_{L^\infty(T)} = \|\nabla(v - w)\|_T, \end{aligned}$$

y así,

$$H_T \|R_{\mathcal{T}}(v) - R_{\mathcal{T}}(w)\|_T \lesssim \|\nabla(v - w)\|_T.$$

[2] Analizamos ahora la parte correspondiente al residuo de salto. Si S es un lado de T interior a Ω y si T_1 y T_2 son los elementos que comparten S , entonces

$$\begin{aligned} \|J_{\mathcal{T}}(v) - J_{\mathcal{T}}(w)\|_S &= \left\| \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\Gamma_v - \Gamma_w)|_{T_i} \cdot \vec{n}_i \right\|_S \leq \sum_{i=1,2} \|(\Gamma_v - \Gamma_w)|_{T_i}\|_S \\ &\lesssim \sum_{i=1,2} \left(H_T^{-1/2} \|\Gamma_v - \Gamma_w\|_{T_i} + H_T^{1/2} \|\nabla(\Gamma_v - \Gamma_w)\|_{T_i} \right) \end{aligned}$$

⁶ v y w son lineales en T .

donde hemos utilizado el Teorema 1.4 de traza. Puesto que $\nabla_2\gamma$ es Lipschitz en su segunda variable, tenemos que

$$|\Gamma_v(x) - \Gamma_w(x)| = |\nabla_2\gamma(x, \nabla v(x)) - \nabla_2\gamma(x, \nabla w(x))| \lesssim |\nabla v(x) - \nabla w(x)|,$$

para todo $x \in T_i$, para $i = 1, 2$, y por lo tanto,

$$\|\Gamma_v - \Gamma_w\|_{T_i} \lesssim \|\nabla(v - w)\|_{T_i}, \quad i = 1, 2.$$

Usando el mismo argumento que en la parte [1](#), tenemos $\|\nabla(\Gamma_v - \Gamma_w)\|_{T_i} \lesssim \|\nabla(v - w)\|_{T_i}$, para $i = 1, 2$, y en consecuencia,

$$H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v) - J_{\mathcal{T}}(w)\|_{\partial T} \lesssim \|\nabla(v - w)\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}.$$

□

4.7. Apéndice II. Sobre la Hipótesis 4.13 para el Problema modelo (2.6): Una noción equivalente para el error

Consideramos nuevamente el Problema modelo dado por la ecuación (2.6). En este apéndice demostramos que la Hipótesis 4.13 se cumple para este problema (ver Teorema 4.20 debajo). El operador $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ asociado a (2.6) está dado por

$$\langle Au, v \rangle = a(u; u, v) = \int_{\Omega} \alpha(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega);$$

y en este caso, el funcional $\mathcal{J} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{J}(u) := \int_0^1 \langle A(su), u \rangle ds, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

puede expresarse en términos de la función γ definida en (2.10) como

$$(4.13) \quad \mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} \gamma(\cdot, \nabla u) dx.$$

En efecto, teniendo en cuenta que $D_2\beta(x, t) = t\alpha(x, t^2)$, para todo $x \in \Omega$ y para todo $t > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \int_0^1 \langle A(su), u \rangle ds = \int_0^1 a(su; su, u) ds = \int_0^1 \int_{\Omega} \alpha(\cdot, s^2 |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) s \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla u dx ds \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} \alpha(\cdot, s^2 |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) s |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2 dx ds = \int_0^1 \int_{\Omega} D_2\beta(\cdot, s |\nabla u|_{\mathcal{A}}) |\nabla u|_{\mathcal{A}} dx ds \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 D_2\beta(\cdot, s |\nabla u|_{\mathcal{A}}) |\nabla u|_{\mathcal{A}} ds dx = \int_{\Omega} (\beta(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}) - \beta(\cdot, 0)) dx, \end{aligned}$$

y puesto que $\beta(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}) = \gamma(\cdot, \nabla u)$ y que $\beta(x, 0) = 0$ para todo $x \in \Omega$, la afirmación queda demostrada.

Por otro lado, veamos que el funcional \mathcal{J} es un potencial para el operador A . Para esto, sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$, y $t > 0$. Puesto que

$$\frac{\mathcal{J}(u + tv) - \mathcal{J}(u)}{t} = \int_{\Omega} \frac{\gamma(\cdot, \nabla u + t\nabla v) - \gamma(\cdot, \nabla u)}{t},$$

cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos

$$\langle \mathcal{J}'(u), v \rangle := \frac{d}{dt} \mathcal{J}(u + tv)|_{t=0} = \int_{\Omega} \nabla_2 \gamma(\cdot, \nabla u) \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \alpha(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v = \langle Au, v \rangle,$$

y por lo tanto,

$$\mathcal{J}' = A,$$

lo que significa que \mathcal{J} es un potencial para el operador A .

Como consecuencia del Teorema 2.7, si \mathbb{W} es un subespacio cerrado de $H_0^1(\Omega)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $w \in \mathbb{W}$ es solución de

$$(4.14) \quad a(w; w, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{W},$$

donde $L(v) = \int_{\Omega} f v$, para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

- $w \in \mathbb{W}$ minimiza el funcional $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sobre \mathbb{W} , donde \mathcal{F} está dado por

$$(4.15) \quad \mathcal{F}(v) := \mathcal{J}(v) - L(v) = \int_{\Omega} (\gamma(\cdot, \nabla v) - f v), \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Finalmente mostramos que la Hipótesis 4.13 vale para el problema que estamos considerando ahora. Recordamos que ésta establece una noción equivalente para el error, que nos permite demostrar una propiedad de contracción del error (ver Teorema 4.14) y posteriormente la optimalidad de una sucesión adaptativa para la aproximación por elementos finitos de problemas no lineales. Una idea similar ha sido usada en [DK08].

TEOREMA 4.20. *Sea \mathbb{W} es un subespacio cerrado de $H_0^1(\Omega)$ y sea \mathcal{F} definido por (4.15). Si $w \in \mathbb{W}$ satisface (4.14), entonces*

$$\frac{c_A}{2} \|\nabla(v - w)\|_{\Omega}^2 \leq \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w) \leq \frac{C_A}{2} \|\nabla(v - w)\|_{\Omega}^2, \quad \forall v \in \mathbb{W}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathbb{W} un subespacio cerrado de $H_0^1(\Omega)$ y sea $w \in \mathbb{W}$ solución de (4.14). Sea $v \in \mathbb{W}$ arbitraria y fija. Para $t \in \mathbb{R}$, definimos $\phi(t) := (1-t)w + tv$, y notamos que

$$\phi'(t) = v - w, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y que

$$\nabla\phi(t) = (1-t)\nabla w + t\nabla v.$$

Si definimos

$$\psi(t) := \mathcal{F}(\phi(t)),$$

del Teorema de Taylor se sigue que

$$(4.16) \quad \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w) = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(0) + \int_0^1 \psi''(t)(1-t) dt.$$

De (4.15) se sigue que

$$(4.17) \quad \psi(t) = \mathcal{F}(\phi(t)) = \int_{\Omega} \gamma(\cdot, \nabla\phi(t)) - \int_{\Omega} f\phi(t),$$

y por lo tanto, para hallar las derivadas de ψ primero calculamos $\frac{\partial}{\partial t}(\gamma(x, \nabla\phi(t)))$, para cada $x \in \Omega$ fijo. En primer lugar, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma(\cdot, \nabla\phi(t)) = \nabla_2\gamma(\cdot, \nabla\phi(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi(t) = \nabla_2\gamma(\cdot, \nabla\phi(t)) \cdot \nabla(v-w),$$

y luego,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma(\cdot, \nabla\phi(t)) = D_2^2\gamma(\cdot, \nabla\phi(t))\nabla(v-w) \cdot \nabla(v-w),$$

donde $D_2^2\gamma$ es la matriz hessiana de γ como función de su segunda variable. Por lo tanto, considerando que $\phi''(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de (4.17) se sigue que

$$(4.18) \quad \psi''(t) = \int_{\Omega} D_2^2\gamma(\cdot, \nabla\phi(t))\nabla(v-w) \cdot \nabla(v-w).$$

Así, puesto que w minimiza \mathcal{F} sobre \mathbb{W} , tenemos que $\psi'(0) = 0$; y usando (4.18), de (4.16) obtenemos que

$$\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w) = \int_0^1 \int_{\Omega} D_2^2\gamma(\cdot, \nabla\phi(t))\nabla(v-w) \cdot \nabla(v-w) dx(1-t) dt.$$

Puesto que $D_2^2\gamma$ es uniformemente elíptica (ver (2.21)) tenemos que

$$\frac{c_A}{2}\|\nabla(v-w)\|_{\Omega}^2 \leq \int_0^1 \int_{\Omega} D_2^2\gamma(\cdot, \nabla\phi(t))\nabla(v-w) \cdot \nabla(v-w) dx(1-t) dt \leq \frac{C_A}{2}\|\nabla(v-w)\|_{\Omega}^2,$$

de donde sigue la afirmación del teorema. \square

El método de Kačanov y un algoritmo de aproximación inexacto para problemas no lineales

En este capítulo proponemos un algoritmo adaptativo para aproximar la solución u del Problema 1, basado en una iteración *inexacta* de tipo Kačanov, que resulta mucho menos costosa comparada con la del Algoritmo 2, propuesto en el Capítulo 3. Demostramos la convergencia (sin orden) de este nuevo algoritmo en el cual se usa cualquier estrategia de marcado *razonable* (ver (1.9)), y realizamos algunos experimentos numéricos para analizar el orden de convergencia.

5.1. La iteración de Kačanov

Dado un espacio de Hilbert real \mathbb{V} , consideramos nuevamente el Problema 1, esto es,

Problema 1. (Problema no lineal general)

Dado $L \in \mathbb{V}'$, hallar $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$a(u; u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Suponemos como antes que $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y simétrica en su segunda y tercera variable, y que es acotada y coercitiva, es decir,

$$(5.1) \quad |a(w; u, v)| \leq C_a \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall w, u, v \in \mathbb{V},$$

y

$$c_a \|u\|_{\mathbb{V}}^2 \leq a(w; u, u), \quad \forall w, u \in \mathbb{V},$$

para algunas constantes C_a y c_a positivas. Suponemos además que el operador $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ asociado al problema definido por (3.3) es Lipschitz y fuertemente monótono, con constantes C_A y c_A , respectivamente (ver (3.4)–(3.5)).

En esta sección presentamos un método iterativo para aproximar la solución del Problema 1, donde las aproximaciones dadas están siempre en \mathbb{V} . Por esto, este método será implementable cuando el espacio \mathbb{V} sea de dimensión finita. Por ejemplo, este método podría utilizarse para

aproximar la solución de cada uno de los problemas discretos (3.7) que generan la sucesión adaptativa casi-óptima del capítulo anterior.

Método de Kačanov: Dada una aproximación inicial $U_0 \in \mathbb{V}$ de la solución u del Problema 1, consideramos la sucesión $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ donde $U_k \in \mathbb{V}$ es la solución del problema lineal

$$(5.2) \quad a(U_{k-1}; U_k, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

El siguiente teorema da un control para el error de la sucesión definida en (5.2) en términos de dos aproximaciones sucesivas.

TEOREMA 5.1 (Estimación del error). *Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1. Si $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{V}$ es la sucesión definida por (5.2), entonces*

$$\|U_k - u\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{C_a}{c_A} \|U_k - U_{k+1}\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \mathbb{V}$ la solución del Problema 1 y sea $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{V}$ la sucesión definida por (5.2). Puesto que el operador A asociado al Problema 1 es fuertemente monótono, usando (5.2) y que a es acotada se tiene que

$$\begin{aligned} c_A \|U_k - u\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \langle AU_k - Au, U_k - u \rangle = a(U_k; U_k, U_k - u) - a(u; u, U_k - u) \\ &= a(U_k; U_k, U_k - u) - a(U_k; U_{k+1}, U_k - u) = a(U_k; U_k - U_{k+1}, U_k - u) \\ &\leq C_a \|U_k - U_{k+1}\|_{\mathbb{V}} \|U_k - u\|_{\mathbb{V}}, \end{aligned}$$

de donde sigue la afirmación del teorema. \square

OBSERVACIÓN 5.2 (Convergencia del Método de Kačanov). Para probar la convergencia de $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ a u , del Teorema 5.1 se sigue que es suficiente mostrar que

$$\|U_k - U_{k+1}\|_{\mathbb{V}} \rightarrow 0,$$

cuando k tiende a infinito. Ésto puede demostrarse como en el Lema 5.5 de la sección siguiente, suponiendo la Hipótesis 5.4 enunciada debajo.

5.2. Un algoritmo inexacto convergente

Consideramos que el espacio \mathbb{V} donde se define el Problema 1 es, como en los capítulos anteriores, el espacio $H_{\Gamma}^1(\Omega)$, para algún $\Gamma \subset \partial\Omega$ adecuado.

En esta sección presentamos un método adaptativo convergente a la solución u del Problema 1 basado en una iteración inexacta de tipo Kačanov. La ventaja de este método con respecto al descrito por el Algoritmo 2 del Capítulo 3 es que en cada malla o nivel de refinamiento, sólo se resuelve un sistema lineal. El algoritmo se llama *inexacto* porque no se resuelve el problema discreto no lineal (3.7).

Como antes, dada una triangulación conforme \mathcal{T}_0 de Ω , para cada triangulación $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$ consideramos el espacio de elementos finitos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}$, definido por

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} := \{v \in \mathbb{V} \mid v|_T \in \mathcal{P}_{\ell}(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\},$$

donde $\ell \in \mathbb{N}$ es un grado polinomial fijo.

El método adaptativo propuesto se describe en el siguiente

Algoritmo 4.

Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω y sea $u_0 \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_0}$ una aproximación inicial. Poner $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0$ y $k = 1$.

1. $u_k := \text{RESOLVER}(u_{k-1}, \mathcal{T}_k)$.
2. $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k} := \text{ESTIMAR}(u_{k-1}, u_k, \mathcal{T}_k)$.
3. $\mathcal{M}_k := \text{MARCAR}(\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}, \mathcal{T}_k)$.
4. $\mathcal{T}_{k+1} := \text{REFINAR}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k, n)$.
5. Incrementar k y volver al paso 1.

Los pasos de este algoritmo son los descritos para el Algoritmo 2, excepto el módulo RESOLVER que en este caso, dada la triangulación conforme \mathcal{T}_k de Ω , y la aproximación u_{k-1} , calcula la solución $u_k \in \mathbb{V}_k := \mathbb{V}_{\mathcal{T}_k}$ del problema *lineal*

$$(5.3) \quad a(u_{k-1}; u_k, v_k) = L(v_k), \quad \forall v_k \in \mathbb{V}_k.$$

Observemos que por lo tanto, en RESOLVER se realiza *sólo una* iteración del algoritmo clásico de Kačanov. Esto hace que el método sea atractivo desde el punto de vista práctico.

Como en el Algoritmo 2, suponemos que los estimadores de error local $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}$ son confiables y estables, es decir, que satisfacen:

- Confiabilidad:

$$(5.4) \quad |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k(T) \|\nabla v\|_{\omega_k(T)}, \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

donde en este caso, $\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle := a(u_{k-1}; u_k, v) - L(v)$.

■ Estabilidad:

$$(5.5) \quad \eta_k(T) \lesssim \|\nabla u_k\|_{\omega_k(T)} + \|D_L\|_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_k,$$

donde $D_L \in L^2(\Omega)$ depende del funcional L .

En el Apéndice I de este capítulo construimos estimadores a posteriori para el Problema modelo (2.6) y mostramos que satisfacen estas propiedades al menos cuando consideramos la aproximación con polinomios lineales a trozos ($\ell = 1$).

OBSERVACIÓN 5.3 (Acotación de la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$). Puesto que a es coercitiva, usando (5.3), para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|u_k\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \frac{1}{c_a} a(u_{k-1}; u_k, u_k) = \frac{1}{c_a} L(u_k) \leq \frac{\|L\|_{\mathbb{V}'}}{c_a} \|u_k\|_{\mathbb{V}},$$

y luego,

$$\|u_k\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{\|L\|_{\mathbb{V}'}}{c_a}.$$

En consecuencia, $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es acotada en \mathbb{V} .

Para demostrar la convergencia de la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ del Algoritmo 4, probamos primero que $\|u_k - u_{k+1}\|_{\mathbb{V}} \rightarrow 0$, cuando k tiende a infinito. Para ésto, necesitamos la siguiente hipótesis, que se satisface para el Problema modelo (2.6) cuando $D_2\alpha(x, t) \leq 0$, para todo $x \in \Omega$ y para todo $t > 0$, como veremos en el Lema 5.9 del Apéndice II al final de este capítulo.

HIPÓTESIS 5.4. Para toda $v, w \in \mathbb{V}$ se satisface

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(w) \leq \frac{1}{2}(a(w; v, v) - a(w; w, w)),$$

donde $\mathcal{J}(v) = \int_0^1 a(sv; sv, v) ds$.

LEMA 5.5. Si la Hipótesis 5.4 se cumple, y si $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ denota la sucesión generada por el Algoritmo 4, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_{k+1}\|_{\mathbb{V}} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 4. Puesto que a es coercitiva, y lineal y simétrica en su segunda y tercera variable,

$$c_a \|u_k - u_{k+1}\|_{\mathbb{V}}^2 \leq a(u_k; u_k - u_{k+1}, u_k - u_{k+1})$$

$$(5.6) \quad = a(u_k; u_k, u_k) - 2a(u_k; u_{k+1}, u_k) + a(u_k; u_{k+1}, u_{k+1}).$$

De (5.3) se sigue que $a(u_k; u_{k+1}, u_k - u_{k+1}) = L(u_k - u_{k+1})$ y luego que

$$a(u_k; u_{k+1}, u_k) = L(u_k - u_{k+1}) + a(u_k; u_{k+1}, u_{k+1}).$$

Reemplazando esta igualdad en (5.6) y teniendo en cuenta la Hipótesis 5.4 obtenemos

$$(5.7) \quad \begin{aligned} c_a \|u_k - u_{k+1}\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq a(u_k; u_k, u_k) - 2L(u_k - u_{k+1}) - a(u_k; u_{k+1}, u_{k+1}) \\ &\leq 2\mathcal{J}(u_k) - 2\mathcal{J}(u_{k+1}) - 2L(u_k) + 2L(u_{k+1}) \\ &= 2(\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u_{k+1})), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{F} := \mathcal{J} - L$, y en consecuencia, $\{\mathcal{F}(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión monótona decreciente.

Por otro lado, $\{\mathcal{F}(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ está acotada inferiormente ya que

$$\mathcal{F}(u_k) = \int_0^1 sa(su_k; u_k, u_k) ds - L(u_k) \geq \frac{1}{2}c_a \|u_k\|_{\mathbb{V}}^2 - \|L\|_{\mathbb{V}'} \|u_k\|_{\mathbb{V}} \geq -\frac{\|L\|_{\mathbb{V}'}^2}{2c_a}.$$

Finalmente, de estas dos últimas conclusiones se sigue que $\{\mathcal{F}(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es convergente.

Considerando (5.7), concluye la demostración de este lema. \square

Mostramos ahora que la sucesión dada por el Algoritmo 4 es convergente, y en particular, que converge a una función del espacio límite $\mathbb{V}_\infty = \overline{\cup \mathbb{V}_k}^{\mathbb{V}}$. Recordemos que \mathbb{V}_∞ es un espacio de Hilbert con el producto escalar heredado de \mathbb{V} .

TEOREMA 5.6 (La sucesión adaptativa es convergente). *Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 4. Si $u_\infty \in \mathbb{V}_\infty$ satisface*

$$(5.8) \quad a(u_\infty; u_\infty, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_\infty,$$

entonces

$$u_k \longrightarrow u_\infty \quad \text{en } \mathbb{V}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión generada por el Algoritmo 4. Sea $u_\infty \in \mathbb{V}_\infty$ la solución de (5.8) y sea $\mathcal{P}_{k+1} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}_{k+1}$ la proyección ortogonal sobre \mathbb{V}_{k+1} . Puesto que A es fuertemente monótono, usando (5.8) y (5.3), tenemos que

$$\begin{aligned} c_A \|u_k - u_\infty\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \langle Au_k - Au_\infty, u_k - u_\infty \rangle = \langle Au_k, u_k - u_\infty \rangle - L(u_k - u_\infty) \\ &= \langle Au_k, u_k - \mathcal{P}_{k+1}u_\infty \rangle + \langle Au_k, \mathcal{P}_{k+1}u_\infty - u_\infty \rangle \\ &\quad - L(u_k - \mathcal{P}_{k+1}u_\infty) - L(\mathcal{P}_{k+1}u_\infty - u_\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a(u_k; u_k - u_{k+1}, u_k - \mathcal{P}_{k+1}u_\infty) + \langle Au_k, \mathcal{P}_{k+1}u_\infty - u_\infty \rangle - L(\mathcal{P}_{k+1}u_\infty - u_\infty) \\
&\leq C_a \|u_k - u_{k+1}\|_{\mathbb{V}} (\|u_k\|_{\mathbb{V}} + \|u_\infty\|_{\mathbb{V}}) + (C_a \|u_k\|_{\mathbb{V}} + \|L\|_{\mathbb{V}'}) \|\mathcal{P}_{k+1}u_\infty - u_\infty\|_{\mathbb{V}},
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$, donde para la última desigualdad hemos usado (5.1). De la Observación 5.3 se tiene que $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es acotada en \mathbb{V} , y usando el Lema 5.5, que los espacios \mathbb{V}_k están anidados y que $\cup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{V}_k$ es denso en \mathbb{V}_∞ , concluimos que $u_k \rightarrow u_\infty$ en \mathbb{V} . \square

Puesto que los estimadores son estables (ver (5.5)), utilizando la convergencia demostrada en el teorema anterior, podemos probar como en Lema 3.3, que si $\{\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ denota la sucesión de estimadores de error local calculados a través del Algoritmo 4, y $\{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión de conjuntos de elementos marcados en cada malla, entonces

$$(5.9) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{T \in \mathcal{M}_k} \eta_k(T) = 0.$$

Usando la confiabilidad y la estabilidad de los estimadores dadas en (5.4)–(5.5), que $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es acotada (ver Observación 5.3), que la estrategia de marcado del Algoritmo 4 es razonable (ver (1.9)), y (5.9), se puede demostrar del mismo modo que demostramos el Teorema 3.4 que

$$(5.10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle = 0, \quad \text{para toda } v \in \mathbb{V},$$

donde recordamos que en este caso $\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle = a(u_{k-1}; u_k, v) - L(v)$.

Finalmente, como consecuencia de (5.10) probamos en el siguiente teorema que u_∞ es la solución del Problema 1.

TEOREMA 5.7 (La función límite es solución). *Sea u_∞ la solución de (5.8). Entonces u_∞ es la solución del Problema 1, esto es,*

$$a(u_\infty; u_\infty, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea u_∞ la solución de (5.8). Si $v \in \mathbb{V}$, y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ denota la sucesión generada por el Algoritmo 4, entonces

$$\begin{aligned}
|a(u_\infty; u_\infty, v) - L(v)| &= |a(u_\infty; u_\infty, v) - L(v) - a(u_k; u_{k+1}, v) + a(u_k; u_{k+1}, v)| \\
&\leq |a(u_\infty; u_\infty, v) - a(u_k; u_{k+1}, v)| + |\langle \mathbf{R}(u_{k+1}), v \rangle| \\
&\leq |a(u_\infty; u_\infty, v) - a(u_k; u_k, v)| + |a(u_k; u_k - u_{k+1}, v)| + |\langle \mathbf{R}(u_{k+1}), v \rangle| \\
&\leq \|Au_\infty - Au_k\|_{\mathbb{V}'} \|v\|_{\mathbb{V}} + C_a \|u_k - u_{k+1}\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} + |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \\
&\leq C_A \|u_\infty - u_k\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} + C_a \|u_k - u_{k+1}\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} + |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle|,
\end{aligned}$$

ya que A es Lipschitz (ver (3.4)) y a es acotada. Usando el Teorema 5.6, el Lema 5.5 y (5.10) se sigue que el lado derecho de la última desigualdad tiende a cero cuando k tiende a infinito. Puesto que $v \in \mathbb{V}$ es arbitraria, u_∞ es solución del Problema 1. \square

De los Teoremas 5.6 y 5.7 se sigue que la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ generada por el Algoritmo 4 converge a la solución u del Problema 1. Observemos que bajo las mismas hipótesis que implican la convergencia del Método de Kačanov clásico, más la confiabilidad y la estabilidad de los estimadores de error local, se cumple la convergencia de este algoritmo inexacto que consiste en realizar *una* sola iteración de Kačanov sobre cada malla.

En la siguiente sección presentamos algunos resultados numéricos en donde estudiamos experimentalmente el orden de convergencia para algunos problemas no lineales particulares.

5.3. Experimentos numéricos

En esta sección consideramos casos particulares del Problema modelo (2.6). Más precisamente, consideramos problemas simplificados de la forma:

$$(5.11) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha(|\nabla u|^2) \nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es el dominio en forma de L dado en la Figura 5.1. En los siguientes ejemplos, a fin de estudiar experimentalmente el comportamiento del Algoritmo 4, consideramos (5.11) con distintas funciones α , y elegimos los datos f y g en cada caso de manera que la solución sea siempre la función u dibujada en la la Figura 5.1, dada en coordenadas polares por:

$$(5.12) \quad u(r, \varphi) = r^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3} \varphi \right).$$

Consideramos el Algoritmo 4 utilizando las siguientes estrategias de marcado:

- *Refinamiento global*: En este caso refinamos todos los elementos de la malla actual para obtener la siguiente.
- *Estrategia del Máximo*: Esta estrategia está descrita en la Sección 1.4.1, y tomamos el parámetro $\theta = 0,7$.
- *Estrategia de Dörfler*: Esta estrategia también está descrita en la Sección 1.4.1, y en este caso tomamos $\theta = 0,5$.

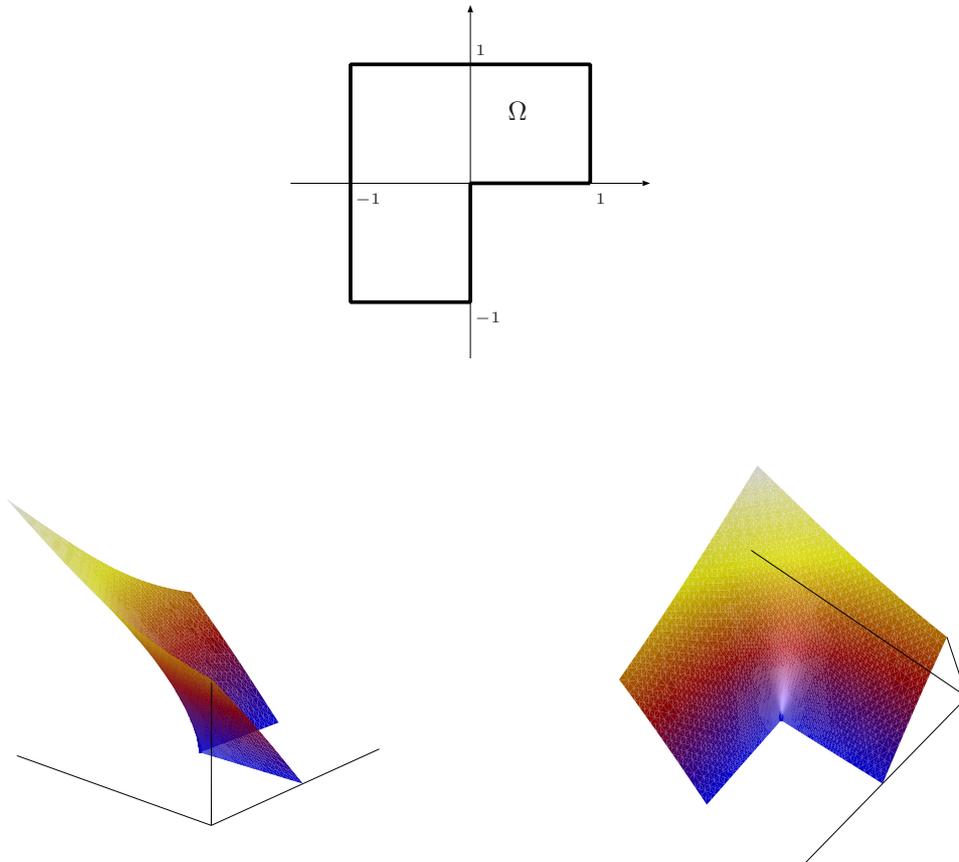


FIGURA 5.1. El dominio Ω donde se plantea el problema (5.11) y la función u que es solución del problema para cada uno de los ejemplos.

Para la implementación del Algoritmo 4 hemos utilizado el *toolbox* de elementos finitos ALBERTA [SS05]. Hemos realizado iteraciones del algoritmo hasta superar los 500.000 grados de libertad o hasta que el estimador de error global sea menor que 10^{-6} .

EJEMPLO 5.1 (Convergencia óptima cuando α satisface las hipótesis de nuestra teoría). Como primer ejemplo, con el objetivo de estudiar experimentalmente el orden de convergencia del Algoritmo 4, consideramos

$$\alpha(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}, \quad t > 0,$$

que satisface las hipótesis de nuestra teoría para garantizar la convergencia (ver Figura 5.2), esto es, α es de clase \mathcal{C}^1 , existen constantes c_1 y c_2 positivas tales que

$$(5.13) \quad c_1 \leq \alpha(t^2) + 2t^2\alpha'(t^2) \leq c_2, \quad \forall t > 0,$$

y

$$(5.14) \quad \alpha \text{ es decreciente, es decir, } \alpha'(t) \leq 0, \text{ para todo } t > 0.$$

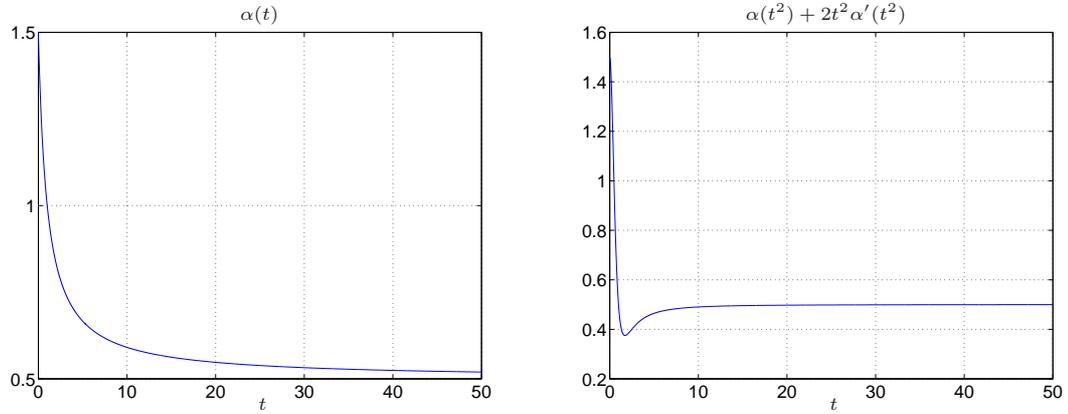


FIGURA 5.2. La función $\alpha(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}$, del Ejemplo 5.1 satisface todas las propiedades requeridas para garantizar la convergencia.

En la Figura 5.3 se muestran los gráficos del error en norma $H^1(\Omega)$ en función de los grados de libertad utilizados, para elementos finitos de grado $\ell = 1, 2, 3, 4$. Vemos que en este caso, la convergencia se da con el orden óptimo para las estrategias adaptativas, esto es, $\|u - u_k\|_{H^1(\Omega)} = O(\text{DOFs}_k^{-\ell/2})$. Para el refinamiento global el orden de convergencia observado es $\text{DOFs}_k^{-1/3}$ para todos los grados polinomiales probados, dado que la solución exacta $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$, para todo $0 < \delta < \frac{2}{3}$. Si bien la teoría sólo garantiza la convergencia (sin orden) del método inexacto de Kačanov para elementos lineales, los resultados numéricos sugieren que el método converge para elementos finitos de cualquier grado polinomial, y además que lo hace con orden óptimo.

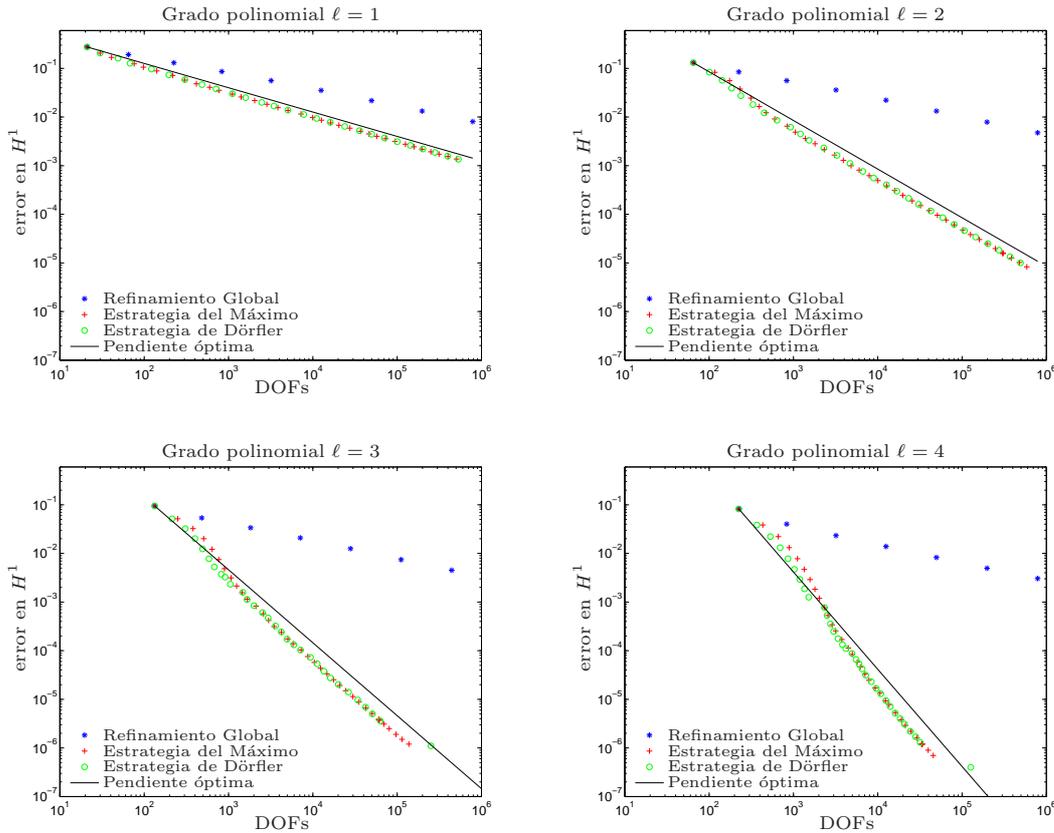


FIGURA 5.3. Error versus DOFs para el Ejemplo 5.1. En las gráficas presentamos el error en norma $H^1(\Omega)$ entre la solución exacta y las soluciones discretas, en función de los grados de libertad (DOFs) utilizados para representar a cada una de éstas. Se observa que el método converge con orden óptimo para las dos estrategias adaptativas consideradas, pero no así para el refinamiento global, dado que la solución exacta u no es suficientemente regular. En este caso, la función $\alpha(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}$ satisface todas las propiedades de nuestra teoría para garantizar la convergencia con elementos lineales. Los experimentos numéricos sugieren que el método converge de manera óptima para elementos finitos de cualquier grado polinomial.

EJEMPLO 5.2 (Sobre la hipótesis (5.13)). En este ejemplo consideramos la función

$$\alpha(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{10}, \quad t > 0,$$

que es decreciente, es decir, satisface (5.14), pero no satisface (5.13), como se muestra en la Figura 5.4. Vimos que esta última propiedad garantiza existencia y unicidad de la solución del problema (5.11), así que en este caso el problema podría tener otras soluciones además de u dada en (5.12).

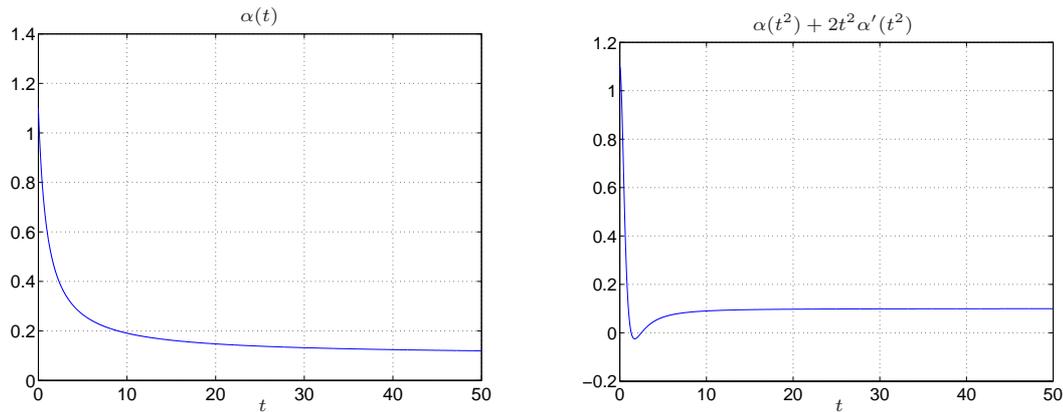


FIGURA 5.4. La función $\alpha(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{10}$, del Ejemplo 5.2 no satisface la condición $\alpha(t^2) + 2t^2\alpha'(t^2) > 0$.

En la Figura 5.5 se muestran los gráficos del error en norma $H^1(\Omega)$ en función de los grados de libertad utilizados, para distintos grados polinomiales. En el caso $\ell = 3$ y $\ell = 4$ el algoritmo se detuvo para las estrategias adaptativas porque el estimador llegó a la tolerancia deseada (10^{-6}), aunque el error sólo alcanzó un orden de 10^{-2} en todos los casos con las estrategias adaptativas. Por otro lado, como puede verse en la Figura 5.6 el estimador de error global decrece con orden óptimo para las estrategias adaptativas.

Basados en estas observaciones, da la impresión de que el algoritmo adaptativo está aproximando una solución u_1 tal que $\|u - u_1\|_{H^1(\Omega)} \approx 10^{-2}$. Recordemos que α no cumple la condición (5.13) que garantiza la unicidad de soluciones.

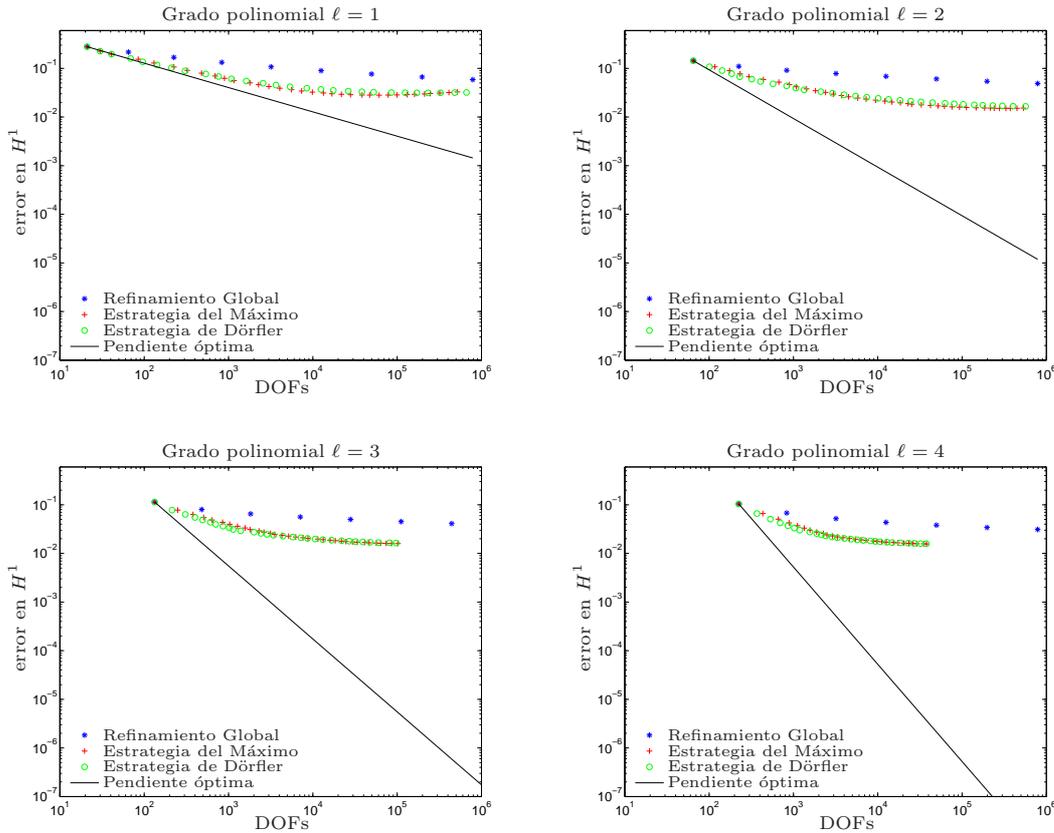


FIGURA 5.5. Error versus DOFs para el Ejemplo 5.2. En las gráficas presentamos el error en norma $H^1(\Omega)$ entre la solución exacta y las soluciones discretas, en función de los grados de libertad (DOFs) utilizados para representar a cada una de éstas. Se observa que el método no converge, sino que el error se estaciona alrededor de 10^{-2} . Esto podría estar indicando que el método converge, pero no a la solución que esperábamos. Dado que en este caso, la función $\alpha(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{10}$ no satisface la condición que garantiza unicidad de soluciones, y basados en que el estimador a posteriori del error sí tiende a cero (ver Figura 5.6) concluimos que el método converge a *otra solución* del mismo problema. Esta afirmación es prematura y requiere un análisis más cuidadoso que será objeto de futuras investigaciones.

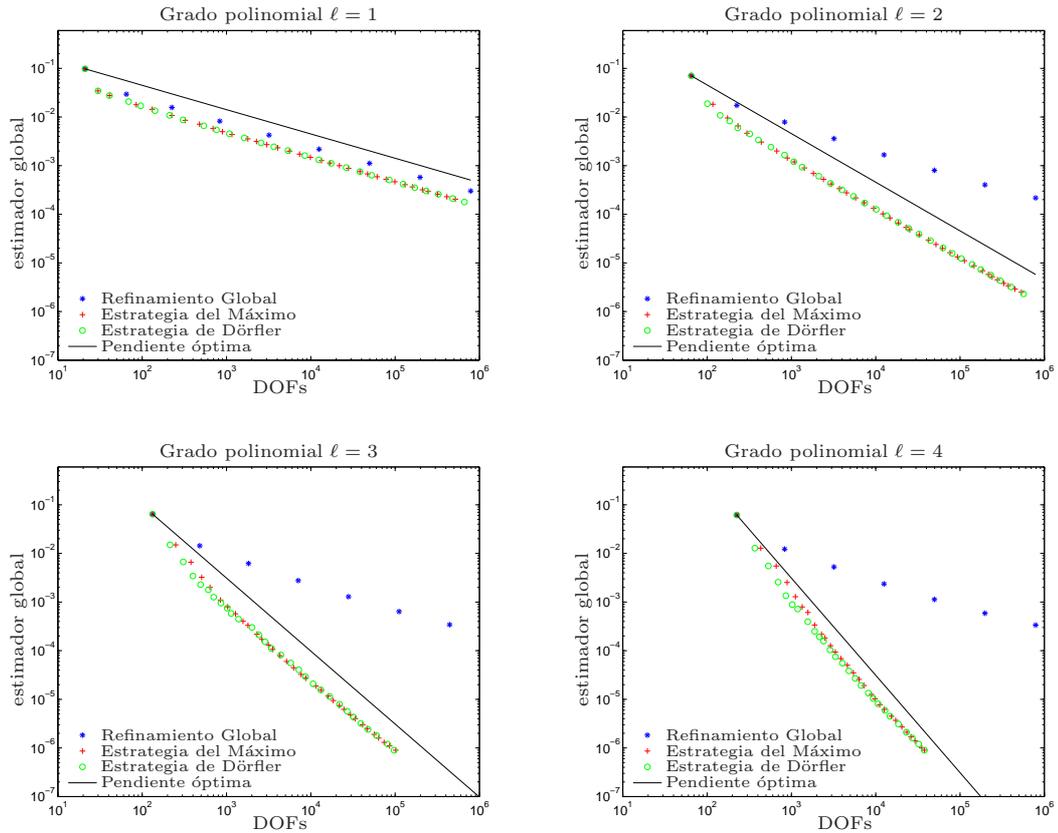


FIGURA 5.6. Estimador versus DOFs para el Ejemplo 5.2. En las gráficas presentamos el estimador global η_k , en función de los grados de libertad (DOFs) utilizados para cada solución discreta. Se observa que para las estrategias adaptativas el estimador global decrece con el orden óptimo para el error en norma H^1 , a pesar de que el error no tiende a cero (ver Figura 5.5). Recordando que en este caso, la función $\alpha(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{10}$ no satisface la condición que garantiza unicidad de soluciones, nos arriesgamos a concluir que el método converge a *otra solución* del mismo problema. Esta afirmación es prematura y requiere un análisis más cuidadoso que será objeto de futuras investigaciones.

EJEMPLO 5.3 (La hipótesis de que α sea decreciente no parece ser necesaria). Consideramos

$$\alpha(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t} + 1, \quad t > 0,$$

que satisface la hipótesis (5.13) pero no (5.14), es decir, en este caso, α es creciente (ver Figura 5.7).

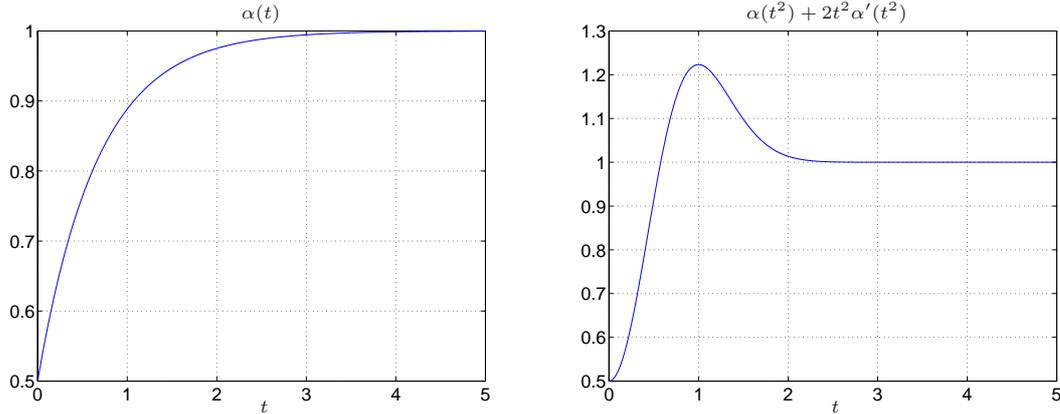


FIGURA 5.7. La función $\alpha(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t} + 1$, del Ejemplo 5.3 satisface la hipótesis (5.13) pero es creciente.

En la Figura 5.8 se muestran los gráficos del error en norma $H^1(\Omega)$ en función de los grados de libertad utilizados, para elementos finitos de grado $\ell = 1, 2, 3, 4$. Vemos que en este caso, la convergencia se da con el orden óptimo $\text{DOFs}^{-\ell/2}$ para las estrategias adaptativas, revelando que la hipótesis de α decreciente puede ser superflua, y sólo una necesidad artificial para la demostración presentada. Un estudio más detallado acerca de esta hipótesis será objeto de trabajo futuro.

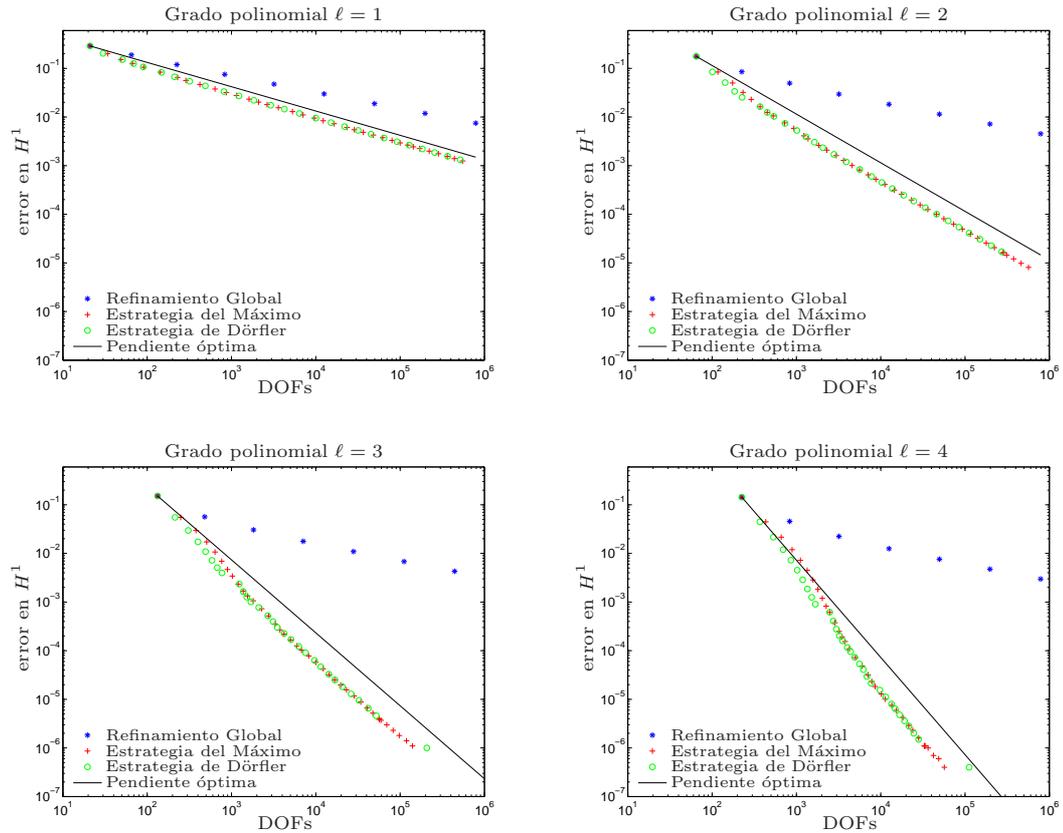


FIGURA 5.8. Error versus DOFs para el Ejemplo 5.3. En las gráficas presentamos el error en norma $H^1(\Omega)$ entre la solución exacta y las soluciones discretas, en función de los grados de libertad (DOFs) utilizados para representar a cada una de éstas. Se observa que el método converge con orden óptimo para las estrategias adaptativas, aunque la función $\alpha(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t} + 1$ no satisface la hipótesis de que sea decreciente. Esto indica que la hipótesis de α decreciente podría ser artificial, y no realmente necesaria para la convergencia del algoritmo.

EJEMPLO 5.4 (α es de clase \mathcal{C}^1 pero no necesariamente Lipschitz). Como último ejemplo, consideramos

$$\alpha(t) = 2 - \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}, \quad t > 0,$$

que satisface las hipótesis (5.13) y (5.14). Notemos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha'(t) = -\infty$, como se muestra en la Figura 5.9; lo que significa que α no es Lipschitz, pero esto está permitido en nuestra teoría, puesto que sólo requerimos que $|t\alpha'(t)|$ esté acotado a través de la hipótesis (5.13).

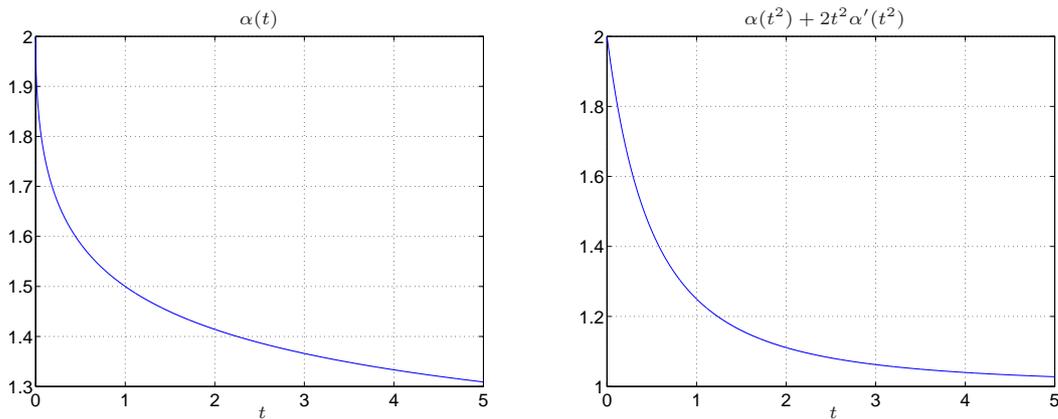


FIGURA 5.9. La función $\alpha(t) = 2 - \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$, del Ejemplo 5.4 satisface las hipótesis de nuestra teoría, las cuales permiten que α no sea Lipschitz.

En la Figura 5.10 se muestran los gráficos del error en norma $H^1(\Omega)$ en función de los grados de libertad utilizados, para elementos finitos de grado $\ell = 1, 2, 3, 4$. Vemos que en este caso, la convergencia se da con el orden óptimo $\text{DOFs}^{-\ell/2}$ para las estrategias adaptativas. Esto indica que la convergencia óptima se obtiene aún cuando α no sea Lipschitz, es decir, que no haría falta introducir hipótesis adicionales para demostrar la optimalidad.

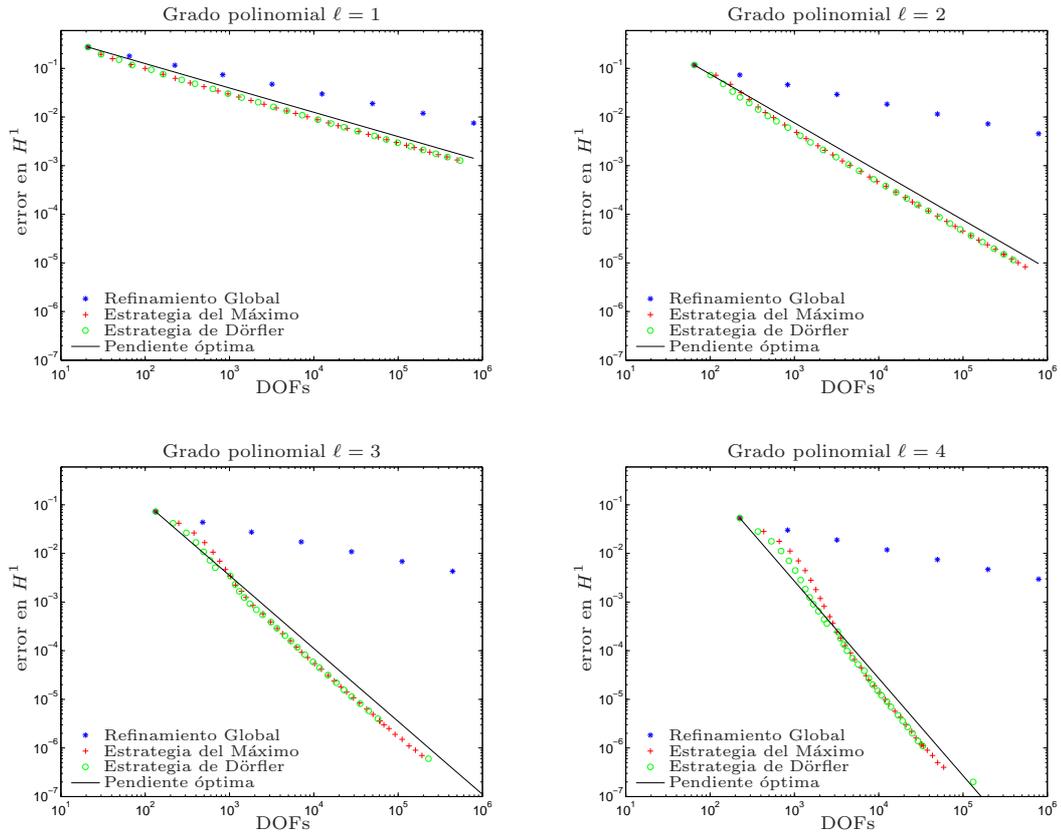


FIGURA 5.10. Error versus DOFs para el Ejemplo 5.4. En las gráficas presentamos el error en norma $H^1(\Omega)$ entre la solución exacta y las soluciones discretas, en función de los grados de libertad (DOFs) utilizados para representar a cada una de éstas. Se observa que el método converge con orden óptimo para las dos estrategias adaptativas consideradas. En este caso, la función $\alpha(t) = 2 - \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$, satisface las hipótesis de nuestra teoría y tiene una derivada infinita en 0, probando que la convergencia óptima se cumple aún en el caso límite de α no Lipschitz.

5.4. Apéndice I. Estimadores de error a posteriori para el Problema modelo (2.6)

Consideremos el Problema modelo dado en (2.6), esto es,

Problema modelo (no lineal)

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \alpha(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Recordemos que α es una función acotada (ver (2.4)), localmente Lipschitz en su primera variable (ver (3.20)) y de clase \mathcal{C}^1 en su segunda variable, y que existen constantes c_1 y c_2 positivas tales que

$$(5.15) \quad c_1 \leq \alpha(x, t^2) + 2t^2 D_2 \alpha(x, t^2) \leq c_2, \quad \forall x \in \Omega, t > 0.$$

Por otro lado, $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ es tal que $\mathcal{A}(x)$ es simétrica para todo $x \in \Omega$, uniformemente definida positiva (ver (2.2)), y Lipschitz a trozos sobre una triangulación inicial conforme \mathcal{T}_0 de Ω (ver (2.3)).

En este apéndice presentamos estimadores de error a posteriori asociados a este problema, y mostramos que son confiables y estables, que son las propiedades que hemos requerido para demostrar la convergencia del Algoritmo 4. Más precisamente, definimos el residuo interior $R_k(u_k)$ y el residuo de salto $J_k(u_k)$ asociados a la ecuación (5.3) y probamos (5.4) y (5.5).

Consideramos elementos lineales a trozos para la aproximación. Más precisamente, el espacio discreto $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ para cada malla $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, está formado por las funciones continuas sobre Ω , que restringidas a cada elemento de \mathcal{T} son polinomios de grado ≤ 1 , y que se anulan sobre $\partial\Omega$, es decir,

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

Dada $u_0 \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_0}$, si $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es la sucesión generada por el Algoritmo 4, entonces

$$\int_{\Omega} \alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k \cdot \nabla v_k = \int_{\Omega} f v_k, \quad \forall v_k \in \mathbb{V}_k := \mathbb{V}_{\mathcal{T}_k},$$

para $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, el *residuo* de u_k está dado por

$$\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle := \int_{\Omega} (\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k \cdot \nabla v - f v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Integrando por partes en cada elemento $T \in \mathcal{T}_k$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle &= \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \int_T (\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k \cdot \nabla v - f v) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \left(\int_T -\nabla \cdot (\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k) v + \int_{\partial T} v \alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k \cdot \vec{n} - \int_T f v \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \left(\int_T R_k(u_k) v + \int_{\partial T} J_k(u_k) v \right), \end{aligned}$$

donde $R_k(u_k)$ es el *residuo interior* definido por

$$R_k(u_k)|_T := -\nabla \cdot (\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k) - f, \quad \forall T \in \mathcal{T}_k,$$

y $J_k(u_k)$ es el *residuo de salto* que está dado por

$$J_k(u_k)|_S := \frac{1}{2} \left[(\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k)|_{T_1} \cdot \vec{n}_1 + (\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k)|_{T_2} \cdot \vec{n}_2 \right],$$

para todo lado S interior a Ω , y $J_k(u_k)|_S := 0$, si S es un lado sobre la frontera de Ω . Aquí, T_1 y T_2 denotan los elementos de \mathcal{T}_k que comparten S , y \vec{n}_i el versor normal sobre S exterior a T_i , para $i = 1, 2$.

Como lo hicimos en la Sección 1.4.2, definimos el *estimador de error local* $\eta_k(T)$ por

$$(5.16) \quad \eta_k^2(T) := H_T^2 \|R_k(u_k)\|_T^2 + H_T \|J_k(u_k)\|_{\partial T}^2,$$

para todo $T \in \mathcal{T}_k$, y el *estimador de error global* η_k por

$$\eta_k^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_k^2(T).$$

Puesto que $\langle \mathbf{R}(u_k), v_k \rangle = 0$, para toda $v_k \in \mathbb{V}_k$, del Teorema 1.15 se sigue que

$$|\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k(T) \|\nabla v\|_{\omega_k(T)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

lo que significa que los estimadores son confiables. Por otro lado, en el siguiente resultado demostramos la estabilidad.

TEOREMA 5.8 (Estabilidad de los estimadores de error local). *Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión generada por el Algoritmo 4. Entonces los estimadores de error local definidos por (5.16) son estables. Más precisamente,*

$$\eta_k(T) \lesssim (\|\nabla u_k\|_{\omega_k(T)} + \|f\|_T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión generada por el Algoritmo 4. Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $T \in \mathcal{T}_k$ fijo. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \|R_k(u_k)\|_T &= \left\| -\nabla \cdot (\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k) - f \right\|_T \\ &\leq \left\| \nabla (\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2)) \cdot (\mathcal{A} \nabla u_k) \right\|_T + \left\| \alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla u_k) \right\|_T + \|f\|_T. \end{aligned}$$

Puesto que α es localmente Lipschitz en su primera variable (ver (3.20)) y que \mathcal{A} es localmente Lipschitz (ver (2.3)), teniendo en cuenta (2.2) y que $|t^2 D_2 \alpha(\cdot, t^2)| \leq (c_2 - c_1)/2$, para todo $t > 0$ (ver (5.15) y Observación 2.3), se sigue que si $\xi_{k-1} := \nabla u_{k-1}$ (constante en T),

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha(x, |\xi_{k-1}|_{\mathcal{A}(x)}^2) \right| &\leq \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x, |\xi_{k-1}|_{\mathcal{A}(x)}^2) \right| + \left| D_2 \alpha(x, |\xi_{k-1}|_{\mathcal{A}(x)}^2) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_i}(x) \xi_{k-1} \cdot \xi_{k-1} \right| \\ &\lesssim 1 + \left| D_2 \alpha(x, |\xi_{k-1}|_{\mathcal{A}(x)}^2) \right| |\xi_{k-1}|_{\mathcal{A}(x)}^2 \\ &\lesssim 1, \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq d$ y $x \in T$, y puesto que α es acotada,

$$\|R_k(u_k)\|_T \lesssim \|\mathcal{A} \nabla u_k\|_T + \|\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla u_k)\|_T + \|f\|_T.$$

Teniendo en cuenta nuevamente que ∇u_k es constante en T , finalmente obtenemos, usando que \mathcal{A} es Lipschitz, que $\|R_k(u_k)\|_T \lesssim \|\nabla u_k\|_T + \|f\|_T$, y en consecuencia,

$$H_T \|R_k(u_k)\|_T \lesssim \|\nabla u_k\|_T + \|f\|_T.$$

Por otro lado, si S es un lado de T interior a Ω , y si T_1 y T_2 son los elementos que comparten S ,

$$\begin{aligned} \|J_k(u_k)\|_S &= \left\| \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k)|_{T_i} \cdot \vec{n}_i \right\|_S \leq \sum_{i=1,2} \left\| (\alpha(\cdot, |\nabla u_{k-1}|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u_k)|_{T_i} \cdot \vec{n}_i \right\|_S \\ &\lesssim \sum_{i=1,2} \left\| \nabla u_k|_{T_i} \right\|_S \lesssim \sum_{i=1,2} H_T^{-1/2} \|\nabla u_k\|_{T_i} \lesssim H_T^{-1/2} \|\nabla u_k\|_{\omega_k(S)}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que α y \mathcal{A} son acotadas, y el Teorema 1.4 de traza. Por lo tanto,

$$H_T^{1/2} \|J_k(u_k)\|_{\partial T} \lesssim \|\nabla u_k\|_{\omega_k(T)},$$

lo que completa la demostración. \square

5.5. Apéndice II. Sobre la Hipótesis 5.4 para el Problema modelo (2.6)

Finalizamos este capítulo demostrando que la propiedad establecida en la Hipótesis 5.4 se satisface para el Problema modelo (2.6) cuando la función α es monótona decreciente en su segunda variable. Recordamos que la Hipótesis 5.4 relaciona el funcional \mathcal{J} con la forma a , y se utiliza en el Lema 5.5 donde se demuestra un resultado previo a la convergencia del Algoritmo 4.

LEMA 5.9. *Si $D_2\alpha(x, t) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$ y para todo $t > 0$, entonces*

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(w) \leq \frac{1}{2}(a(w; v, v) - a(w; w, w)), \quad \forall v, w \in \mathbb{V}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $v, w \in \mathbb{V}$. Usando (4.13), la definición de γ dada en (2.10) y la definición de β dada en (2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(w) &= \int_{\Omega} (\beta(\cdot, |\nabla v|_{\mathcal{A}}) - \beta(\cdot, |\nabla w|_{\mathcal{A}})) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_0^{|\nabla v|_{\mathcal{A}}^2} \alpha(\cdot, t) dt - \int_0^{|\nabla w|_{\mathcal{A}}^2} \alpha(\cdot, t) dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{|\nabla w|_{\mathcal{A}}^2}^{|\nabla v|_{\mathcal{A}}^2} \alpha(\cdot, t) dt dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha(\cdot, |\nabla w|_{\mathcal{A}}^2) (|\nabla v|_{\mathcal{A}}^2 - |\nabla w|_{\mathcal{A}}^2) dx \\ &= \frac{1}{2}(a(w; v, v) - a(w; w, w)), \end{aligned}$$

donde la desigualdad vale ya que $D_2\alpha(\cdot, t) \leq 0$, para todo $t > 0$, implica que $\int_{s_1}^{s_2} \alpha(\cdot, t) dt \leq \alpha(\cdot, s_1)(s_2 - s_1)$, para todo $s_1, s_2 \geq 0$. \square

Parte 2

**PROBLEMAS ELÍPTICOS DE
AUTOVALORES**

CAPÍTULO 6

Algunos problemas de autovalores asociados a operadores elípticos

En muchas aplicaciones prácticas es necesario encontrar buenas aproximaciones de los autovalores y las autofunciones de problemas elípticos. En este capítulo estudiamos algunos tipos particulares de problemas de autovalores conocidos y su discretización por elementos finitos. Para cada problema, presentamos los residuos en base a los cuales se definirán estimadores de error a posteriori, como se describió en la Sección 1.4.2, para el estudio de la aproximación adaptativa que estudiaremos en esta parte de la tesis. En los capítulos siguientes desarrollaremos un marco general que abarca estos problemas, y demostraremos la convergencia y la optimalidad de métodos de elementos finitos adaptativos.

Recordamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ denota el interior de un polígono si $d = 2$, o de un poliedro si $d = 3$, cuya frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz.

Consideramos operadores elípticos cuyo término de segundo orden está dado por $-\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla \cdot)$,¹ donde $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ es tal que $\mathcal{A}(x)$ una matriz simétrica para todo $x \in \Omega$, y uniformemente definida positiva, es decir, existen constantes $\underline{a}, \bar{a} > 0$ tales que

$$(6.1) \quad \underline{a}|\xi|^2 \leq \mathcal{A}(x)\xi \cdot \xi \leq \bar{a}|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Por otro lado, suponemos que \mathcal{A} es Lipschitz continua sobre Ω , esto es, existe una constante $C_{\mathcal{A}} > 0$ tal que²

$$(6.2) \quad \|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)\|_2 \leq C_{\mathcal{A}}|x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

¹Recordamos que si $F : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es un campo vectorial de componentes F_i , para $i = 1, 2, \dots, d$, $\nabla \cdot$ denota el operador Divergencia, dado por $\nabla \cdot F := \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} F_i$.

²Recordamos que $\|\cdot\|_2$ denota la norma 2 de matrices, inducida por la norma usual de vectores $|\cdot|$.

6.1. Problema de autovalores tipo Dirichlet

Como primer ejemplo consideramos el problema de hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y una función no nula $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$(6.3) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla u) = \lambda \mathcal{B}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde \mathcal{B} es una función escalar tal que

$$\underline{b} \leq \mathcal{B}(x) \leq \bar{b}, \quad \forall x \in \Omega,$$

para algunas constantes $\underline{b}, \bar{b} > 0$. La forma variacional de (6.3) es el siguiente

Problema tipo Dirichlet

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ tales que

$$(6.4) \quad \int_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Omega} \mathcal{B}uv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Considerando $\mathbb{V} := H_0^1(\Omega)$ y $\mathbb{W} := L^2(\Omega)$, y definiendo las formas $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v, \quad \text{y} \quad b(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{B}uv,$$

el Problema tipo Dirichlet (6.4) es equivalente al siguiente

Problema de autovalores

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \neq u \in \mathbb{V}$ tales que

$$(6.5) \quad a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

De las propiedades de \mathcal{A} y \mathcal{B} se sigue que las formas $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ son bilineales, simétricas, acotadas y coercitivas. Por otro lado, puesto que \mathbb{V} está densa y compactamente contenido en \mathbb{W} , de la teoría general que desarrollamos en el capítulo siguiente se sigue que el Problema tipo Dirichlet (6.4) tiene una sucesión infinita numerable de soluciones λ que llamamos *autovalores*, que denotamos por $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y que satisface

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \nearrow \infty,$$

y para cada uno de éstos, un espacio de dimensión finita de funciones u , que llamamos *autofunciones*, que satisfacen la ecuación (6.4) (ver el Teorema 7.5 en el capítulo siguiente).

6.1.1. Discretización por MEF. Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω . Dada una triangulación $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, consideramos el espacio de elementos finitos de Lagrange formado por las funciones continuas sobre Ω que se anulan sobre $\partial\Omega$, y que restringidas a cada elemento de \mathcal{T} son polinomios de grado $\leq \ell$, para algún $\ell \in \mathbb{N}$ fijo, es decir,

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} := \{v \in \mathbb{V} \mid v|_T \in \mathcal{P}_{\ell}(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

La discretización del Problema de autovalores (6.5) es el siguiente

Problema discreto de autovalores

Hallar $\lambda_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}$ y $0 \neq u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tales que

$$(6.6) \quad a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) = \lambda_{\mathcal{T}} b(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}), \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}.$$

Este problema resulta equivalente al siguiente problema matricial de autovalores generalizado:

$$\text{Hallar } \lambda_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R} \text{ y } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \text{ tales que } K\mathbf{U} = \lambda_{\mathcal{T}} M\mathbf{U},$$

donde K y M son matrices de $\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}}) \times \dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})$, que llamamos de *rigidez* y *masa*, respectivamente. Aquí, cada $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})}$ se corresponde con una función discreta $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, y recíprocamente. En este caso, las matrices K y M son simétricas y definidas positivas, y por lo tanto, existen $\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})$ autovalores del problema discreto denotados por

$$0 < \lambda_{1,\mathcal{T}} \leq \lambda_{2,\mathcal{T}} \leq \lambda_{3,\mathcal{T}} \leq \dots \leq \lambda_{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}},\mathcal{T}},$$

y podemos elegir un conjunto a -ortogonal de autofunciones asociadas

$$u_{1,\mathcal{T}}, u_{2,\mathcal{T}}, u_{3,\mathcal{T}}, \dots, u_{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}},\mathcal{T}}.$$

6.1.2. Residuo, residuo interior y residuo de salto. Para $v \in \mathbb{V}$ no nula, definimos el *residuo* $\mathbf{R}(v) \in \mathbb{V}'$ por

$$\langle \mathbf{R}(v), w \rangle := a(v, w) - \Lambda(v)b(v, w), \quad \forall w \in \mathbb{V},$$

donde $\Lambda(v) := \frac{a(v,v)}{b(v,v)}$ denota el *cociente de Rayleigh* de v .

Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ es no nula, integrando por partes sobre cada elemento $T \in \mathcal{T}$, para toda $w \in \mathbb{V}$ se tiene que

$$\langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), w \rangle = a(v_{\mathcal{T}}, w) - \Lambda(v_{\mathcal{T}})b(v_{\mathcal{T}}, w)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \mathcal{A} \nabla v_T \cdot \nabla w - \Lambda(v_T) \int_{\Omega} \mathcal{B} v_T w \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla v_T) w + \int_{\partial T} (\mathcal{A} \nabla v_T \cdot \vec{n}) w \right) - \Lambda(v_T) \int_{\Omega} \mathcal{B} v_T w \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_T(v_T) w + \int_{\partial T} J_T(v_T) w \right),
\end{aligned}$$

donde el *residuo interior* $R_T(v_T)$ está dado por

$$R_T(v_T)|_T := -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla v_T) - \Lambda(v_T) \mathcal{B} v_T, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y el *residuo de salto* $J_T(v_T)$ por³

$$J_T(v_T)|_S := \frac{1}{2} \left[(\mathcal{A} \nabla v_T)|_{T_1} \cdot \vec{n}_1 + (\mathcal{A} \nabla v_T)|_{T_2} \cdot \vec{n}_2 \right], \quad \forall S \in \mathcal{S}_{\Omega},$$

y $J_T(v_T)|_S = 0$, si $S \in \mathcal{S}_{\partial\Omega}$, donde T_1 y T_2 denotan los elementos de \mathcal{T} que comparten el lado S , y \vec{n}_i denota el versor normal exterior sobre ∂T_i , para $i = 1, 2$.

Por lo tanto, el residuo $\mathbf{R}(v_{\mathcal{T}})$ se relaciona con el residuo interior $R_T(v_T)$ y con el residuo de salto $J_T(v_T)$ a través de la identidad

$$(6.7) \quad \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), w \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_T(v_T) w + \int_{\partial T} J_T(v_T) w \right), \quad \forall w \in \mathbb{V},$$

que es fundamental para obtener estimadores de error confiables a partir del residuo interior y del residuo de salto (ver Sección 1.4.2).

En [Auc04] se han presentado problemas de autovalores como los de las dos secciones siguientes, y se han estudiado representaciones de las soluciones y los espacios que generan las autofunciones.

6.2. Problema de autovalores de Steklov para un operador de tipo Schrödinger

Como segundo ejemplo de problema de autovalores, consideramos el problema de hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y una función no nula $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$(6.8) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla u) + cu = 0 & \text{en } \Omega \\ (\mathcal{A} \nabla u) \cdot \vec{n} = \lambda \rho u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

³Recordar que \mathcal{S}_{Ω} denota el conjunto de lados interiores y $\mathcal{S}_{\partial\Omega}$ el conjunto de lados que están sobre la frontera de Ω .

6.2 Problema de autovalores de Steklov para un operador de tipo Schrödinger 109

donde $c \in L^\infty(\Omega)$ es una función escalar positiva tal que $\int_\Omega c > 0$, y ρ una función escalar con $0 < \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq \rho_{\max}$ en casi todo $x \in \partial\Omega$. Sin perder generalidad, podemos suponer que

$$\int_{\partial\Omega} \rho = 1.$$

Finalmente, \vec{n} denota el vector unitario normal exterior sobre la frontera de Ω .

Este tipo de problemas surgen, por ejemplo, en el estudio de ondas superficiales [BS53] en Mecánica de Fluidos, en el análisis de estabilidad de osciladores mecánicos inmersos en un fluido viscoso (ver [CPV95] y sus referencias), y en el estudio de modos de vibración de una estructura interactuando con un fluido incompresible [BRS00].

La forma variacional de (6.8) es el

Problema de Steklov

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \neq u \in H^1(\Omega)$ tales que

$$(6.9) \quad \int_{\Omega} (\mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v + cuv) = \lambda \int_{\partial\Omega} \rho uv, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Si consideramos $\mathbb{V} := H^1(\Omega)$ y $\mathbb{W} := L^2(\partial\Omega)$ y definimos las formas $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (\mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v + cuv), \quad \text{y} \quad b(u, v) := \int_{\partial\Omega} \rho uv,$$

el Problema de Steklov (6.9) es equivalente al Problema de autovalores (6.5). En este caso, al igual que para el Problema tipo Dirichlet (6.4), se satisfacen todas las propiedades de a y b y de los espacios \mathbb{V} y \mathbb{W} necesarias para aplicar nuevamente el Teorema 7.5 que veremos en el capítulo siguiente. Así, en este caso también tenemos una sucesión infinita numerable de autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \nearrow \infty,$$

y para cada uno de éstos, un espacio de dimensión finita de autofunciones u , que satisfacen la ecuación (6.9).

6.2.1. Discretización por MEF. En este caso, para $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, el espacio discreto $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ está dado por

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} := \{v \in \mathbb{V} \mid v|_T \in \mathcal{P}_\ell(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\},$$

para algún $\ell \in \mathbb{N}$ fijo, donde a diferencia del caso anterior, las funciones de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ no necesariamente se anulan sobre $\partial\Omega$, es decir, existen grados de libertad sobre $\partial\Omega$. En este espacio $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$

consideramos el Problema discreto de autovalores (6.6) que, como antes, resulta equivalente al siguiente problema matricial de autovalores generalizado:

$$\text{Hallar } \lambda_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R} \text{ y } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \text{ tales que } K\mathbf{U} = \lambda_{\mathcal{T}}M\mathbf{U},$$

donde K y M son matrices simétricas de $\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}}) \times \dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})$. Puesto que en este caso, la matriz de rigidez K es definida positiva y la matriz de masa M es sólo semidefinida positiva,⁴ tenemos que existen $N_{\mathcal{T}} < \dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})$ autovalores del problema discreto denotados por⁵

$$0 < \lambda_{1,\mathcal{T}} \leq \lambda_{2,\mathcal{T}} \leq \lambda_{3,\mathcal{T}} \leq \dots \leq \lambda_{N_{\mathcal{T}},\mathcal{T}},$$

y podemos elegir un conjunto a -ortogonal de autofunciones asociadas

$$u_{1,\mathcal{T}}, u_{2,\mathcal{T}}, u_{3,\mathcal{T}}, \dots, u_{N_{\mathcal{T}},\mathcal{T}}.$$

6.2.2. Residuo, residuo interior y residuo de salto. Si $v \in \mathbb{V} \setminus H_0^1(\Omega)$, el *residuo* $\mathbf{R}(v) \in \mathbb{V}'$ está dado por

$$\langle \mathbf{R}(v), w \rangle := a(v, w) - \Lambda(v)b(v, w), \quad \forall w \in \mathbb{V},$$

donde, como antes, $\Lambda(v) = \frac{a(v,v)}{b(v,v)}$ denota el cociente de Rayleigh de v .

Para $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, si $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus H_0^1(\Omega)$, integrando por partes sobre cada elemento $T \in \mathcal{T}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), w \rangle &= a(v_{\mathcal{T}}, w) - \Lambda(v_{\mathcal{T}})b(v_{\mathcal{T}}, w) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}} \cdot \nabla w + cv_{\mathcal{T}}w) - \Lambda(v_{\mathcal{T}}) \int_{\partial\Omega} \rho v_{\mathcal{T}}w \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T (-\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}}) + cv_{\mathcal{T}})w + \int_{\partial T} (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}} \cdot \vec{n})w \right) - \Lambda(v_{\mathcal{T}}) \int_{\partial\Omega} \rho v_{\mathcal{T}}w \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})w + \int_{\partial T} J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})w \right), \end{aligned}$$

para toda $w \in \mathbb{V}$, donde $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ es el *residuo interior* que está dado por

$$R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_T := -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}}) + cv_{\mathcal{T}}, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

⁴Esto es, $M\xi \cdot \xi \geq 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$.

⁵La cantidad $N_{\mathcal{T}}$ de autovalores discretos está relacionada con el rango de la matriz M y a su vez con la cantidad de nodos sobre $\partial\Omega$.

y $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ es el *residuo de salto* definido por

$$J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_S := \begin{cases} \frac{1}{2} \left[(\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}})|_{T_1} \cdot \vec{n}_1 + (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}})|_{T_2} \cdot \vec{n}_2 \right] & \text{si } S \in \mathcal{S}_{\Omega} \\ (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}}) \cdot \vec{n} - \Lambda(v_{\mathcal{T}})\rho v_{\mathcal{T}} & \text{si } S \in \mathcal{S}_{\partial\Omega}, \end{cases}$$

donde T_1 y T_2 denotan los elementos de \mathcal{T} que comparten el lado interior S , y \vec{n}_i denota el versor normal exterior sobre ∂T_i , para $i = 1, 2$.

Notemos que nuevamente el residuo $\mathbf{R}(v_{\mathcal{T}})$ se relaciona con el residuo interior $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ y el residuo de salto $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ a través de la identidad (6.7).

6.3. Problema de autovalores de Steklov \mathcal{A} -armónico

Como último ejemplo, considerando la notación de la sección anterior, si en el problema de Steklov (6.8), quitamos el término de reacción cu , obtenemos el siguiente problema:

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y una función no nula $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla u) = 0 & \text{en } \Omega \\ (\mathcal{A}\nabla u) \cdot \vec{n} = \lambda \rho u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cuya forma variacional es el

Problema de Steklov \mathcal{A} -armónico

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \neq u \in H^1(\Omega)$ tales que

$$(6.10) \quad \int_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\partial\Omega} \rho uv, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Definiendo nuevamente $\mathbb{V} := H^1(\Omega)$ y $\mathbb{W} := L^2(\partial\Omega)$, consideramos ahora las formas $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} \rho uv, \quad \text{y} \quad b(u, v) := \int_{\partial\Omega} \rho uv.$$

Así, el Problema de Steklov \mathcal{A} -armónico (6.10) es equivalente al siguiente

Problema de autovalores

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \neq u \in \mathbb{V}$ tales que

$$a(u, v) = (1 + \lambda) b(u, v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Notemos que el lado izquierdo de la ecuación (6.10) no define una forma coercitiva en $H^1(\Omega)$. El mismo análisis de la sección anterior sobre la existencia de soluciones vale en este caso, puesto que la forma a que estamos considerando sí es coercitiva [Auc04].

6.3.1. Discretización por MEF, residuo, residuo interior y residuo de salto. En este caso tenemos la misma discretización presentada en la sección anterior para el Problema de Steklov (6.9). Para $v \in \mathbb{V} \setminus H_0^1(\Omega)$, el *residuo* $\mathbf{R}(v) \in \mathbb{V}'$, está dado como antes por

$$\langle \mathbf{R}(v), w \rangle := a(v, w) - \Lambda(v)b(v, w), \quad \forall w \in \mathbb{V},$$

donde $\Lambda(v) = \frac{a(v,v)}{b(v,v)}$ es el cociente de Rayleigh de v .

Dada $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, si $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus H_0^1(\Omega)$, integrando por partes sobre cada elemento $T \in \mathcal{T}$, para cada $w \in \mathbb{V}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), w \rangle &= a(v_{\mathcal{T}}, w) - \Lambda(v_{\mathcal{T}})b(v_{\mathcal{T}}, w) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}} \cdot \nabla w - (\Lambda(v_{\mathcal{T}}) - 1) \int_{\partial\Omega} \rho v_{\mathcal{T}} w \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}}) w + \int_{\partial T} (\mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}} \cdot \vec{n}) w \right) - (\Lambda(v_{\mathcal{T}}) - 1) \int_{\partial\Omega} \rho v_{\mathcal{T}} w \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) w + \int_{\partial T} J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) w \right), \end{aligned}$$

donde el *residuo interior* $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ está dado por

$$R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_T := -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}}), \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y el *residuo de salto* $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ por

$$J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})|_S := \begin{cases} \frac{1}{2} \left[(\mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}})|_{T_1} \cdot \vec{n}_1 + (\mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}})|_{T_2} \cdot \vec{n}_2 \right] & \text{si } S \in \mathcal{S}_{\Omega} \\ (\mathcal{A} \nabla v_{\mathcal{T}}) \cdot \vec{n} - (\Lambda(v_{\mathcal{T}}) - 1) \rho v_{\mathcal{T}} & \text{si } S \in \mathcal{S}_{\partial\Omega}, \end{cases}$$

donde T_1 y T_2 denotan los elementos de \mathcal{T} que comparten el lado interior S , y \vec{n}_i denota el versor normal exterior sobre ∂T_i , para $i = 1, 2$.

CAPÍTULO 7

El problema de autovalores y su aproximación numérica

En este capítulo estudiamos la existencia de autovalores de problemas elípticos y planteamos esquemas discretos para aproximarlos. La teoría abstracta de este capítulo se escribe con el objetivo principal de abarcar los ejemplos dados en el capítulo anterior, y crear un contexto general en el que se puedan estudiar todos a la vez. Las hipótesis que se plantean en este desarrollo se verifican para dichos ejemplos.

7.1. Formulación variacional abstracta de problemas elípticos de autovalores

Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios de Hilbert reales. Supongamos que cada $v \in \mathbb{V}$ puede interpretarse como un objeto de \mathbb{W} , en el sentido de que existe un operador lineal y compacto $I : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$, que no necesariamente es inyectivo. Recordemos que la compacidad significa que si $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{V}$ es una sucesión acotada en \mathbb{V} , entonces existe una subsucesión $\{v_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que $\{Iv_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{W}$ es convergente en \mathbb{W} . En este caso decimos que \mathbb{V} está *compactamente contenido* en \mathbb{W} , y escribimos

$$(7.1) \quad \mathbb{V} \subset\subset \mathbb{W}.$$

Como casos particulares y representativos, en el contexto de los problemas presentados en el capítulo anterior, podemos considerar $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$ y $\mathbb{W} = L^2(\Omega)$ donde I es el operador de inclusión, o $\mathbb{V} = H^1(\Omega)$ y $\mathbb{W} = L^2(\partial\Omega)$ donde I es el operador de traza dado en el Teorema 1.2.

Por otro lado, puesto que I es lineal y compacto se tiene que en particular es acotado, esto es, existe una constante C_I positiva tal que

$$(7.2) \quad \|Iv\|_{\mathbb{W}} \leq C_I \|v\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Suponemos además que

$$(7.3) \quad \mathbb{V} \text{ es denso en } \mathbb{W},$$

es decir, que dado $w \in \mathbb{W}$ existe una sucesión $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{V}$ tal que $Iv_k \rightarrow w$ en \mathbb{W} .

Dado $v \in \mathbb{V}$, cuando no haya riesgo de confusión denotaremos a Iv simplemente por v , considerando en este caso a v como un elemento de \mathbb{W} .

Sean $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ formas bilineales simétricas y acotadas, es decir,

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in \mathbb{V}, \quad \text{y} \quad b(u, v) = b(v, u), \quad \forall u, v \in \mathbb{W},$$

y existen constantes positivas C_a y C_b tales que

$$(7.4) \quad |a(u, v)| \leq C_a \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{V},$$

y

$$(7.5) \quad |b(u, v)| \leq C_b \|u\|_{\mathbb{W}} \|v\|_{\mathbb{W}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{W}.$$

Suponemos también que a y b son coercitivas, esto es, existen constantes positivas c_a y c_b tales que

$$(7.6) \quad c_a \|v\|_{\mathbb{V}}^2 \leq a(v, v), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

y

$$(7.7) \quad c_b \|w\|_{\mathbb{W}}^2 \leq b(w, w), \quad \forall w \in \mathbb{W}.$$

La bilinealidad, la simetría y la coercitividad implican que $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ definen productos internos en \mathbb{V} y \mathbb{W} , respectivamente. La acotación y la coercitividad de las formas implican que las normas inducidas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son equivalentes a $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ y a $\|\cdot\|_{\mathbb{W}}$, respectivamente; ya que

$$(7.8) \quad \sqrt{c_a} \|v\|_{\mathbb{V}} \leq \|v\|_a \leq \sqrt{C_a} \|v\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

y

$$(7.9) \quad \sqrt{c_b} \|w\|_{\mathbb{W}} \leq \|w\|_b \leq \sqrt{C_b} \|w\|_{\mathbb{W}}, \quad \forall w \in \mathbb{W}.$$

Como consecuencia de la acotación de I (ver (7.2)), y de las equivalencias de normas (7.8) y (7.9) tenemos que

$$(7.10) \quad \|v\|_b \leq C_I^{ab} \|v\|_a, \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

donde $C_I^{ab} := \frac{\sqrt{C_b}}{\sqrt{c_a}} C_I$. De ahora en más, consideramos a \mathbb{V} con el producto interno dado por $a(\cdot, \cdot)$ y a \mathbb{W} con el producto interno dado por $b(\cdot, \cdot)$. En particular, tenemos que $(\mathbb{V}, a(\cdot, \cdot))$ y $(\mathbb{W}, b(\cdot, \cdot))$ son espacios de Hilbert, y (7.10) implica que $I : (\mathbb{V}, a(\cdot, \cdot)) \rightarrow (\mathbb{W}, b(\cdot, \cdot))$ es acotado, además de compacto.

A continuación introducimos un concepto fundamental de esta parte de la tesis.

DEFINICIÓN 7.1 (Autovalor y autofunción). Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *autovalor* de la forma a respecto de la forma b si existe $0 \neq u \in \mathbb{V}$ tal que

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

En este caso, u es una *autofunción* asociada a λ , y (λ, u) se llama un *autopar*.¹

En base a esta definición consideramos el siguiente:

Problema 3. (Problema de autovalores)

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{V}$ tales que

$$\begin{cases} a(u, v) = \lambda b(u, v), & \forall v \in \mathbb{V}, \\ \|u\|_b = 1. \end{cases}$$

Nuestro próximo objetivo es estudiar la existencia de soluciones del Problema 3. En el siguiente teorema demostramos la existencia de un operador A cuyos autopares están fuertemente relacionados con los del Problema 3.

TEOREMA 7.2. *Supongamos que \mathbb{V} y \mathbb{W} satisfacen (7.1), y que las formas bilineales a y b son simétricas, acotadas (ver (7.4)–(7.5)) y coercitivas (ver (7.6)–(7.7)). Consideremos \mathbb{V} con el producto interno dado por $a(\cdot, \cdot)$. Entonces existe un operador lineal, compacto y autoadjunto $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que*

$$a(Au, v) = b(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $u \in \mathbb{V}$, tenemos que $f_u : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $f_u(v) = b(u, v)$, para todo $v \in \mathbb{V}$, es un funcional lineal y acotado sobre \mathbb{V} . En efecto, la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $b(\cdot, \cdot)$ y (7.10) implican que

$$|f_u(v)| = |b(u, v)| \leq \|u\|_b \|v\|_b \leq C_I^{ab} \|u\|_b \|v\|_a.$$

Por el Teorema de Representación de Riesz, tenemos que existe un único elemento $Au \in \mathbb{V}$ tal que

$$a(Au, v) = f_u(v) = b(u, v), \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

¹En general, u se llama un *autovector* asociado a λ , pero lo llamamos *autofunción* ya que en general, \mathbb{V} y \mathbb{W} serán espacios de funciones.

Además,

$$(7.11) \quad \|Au\|_a \leq C_I^{ab} \|u\|_b, \quad \forall u \in \mathbb{V}.$$

Es fácil ver que el operador $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ así definido, es lineal. Para ver que es compacto, consideremos una sucesión $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{V}$ acotada en \mathbb{V} . Puesto que $\mathbb{V} \subset \subset \mathbb{W}$, existe una subsucesión $\{v_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\{v_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es convergente en \mathbb{W} . En particular $\{v_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{W} , y de (7.11) se sigue que $\{Av_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{V} , y luego convergente en \mathbb{V} .

Finalmente, puesto que a y b son simétricas, para $u, v \in \mathbb{V}$ se tiene que

$$a(Au, v) = b(u, v) = b(v, u) = a(Av, u) = a(u, Av),$$

y en consecuencia, A es autoadjunto, lo que completa la demostración. \square

OBSERVACIÓN 7.3. Dadas $u, v \in \mathbb{V}$ decimos que $u = v$ en \mathbb{W} si $Iu = Iv$. Además, notemos que si $v = 0$ en \mathbb{W} entonces $b(v, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{W}$.

Antes de establecer la existencia de soluciones del Problema 3, notemos que si (λ, u) es un autopar de este problema, entonces u pertenece al complemento a -ortogonal de $\text{Nu}(I)$. Para ver esto, denotamos con \mathbb{V}_0 al núcleo de I ,

$$\mathbb{V}_0 := \text{Nu}(I) = \{v \in \mathbb{V} \mid Iv = 0\}.$$

En palabras, \mathbb{V}_0 está formado por las funciones de \mathbb{V} que *son cero en* \mathbb{W} .

Sea \mathbb{V}_0^\perp el complemento a -ortogonal en \mathbb{V} del núcleo de I ,

$$(7.12) \quad \mathbb{V}_0^\perp := \{v \in \mathbb{V} \mid a(v, w) = 0, \quad \forall w \in \text{Nu}(I)\}.$$

Así, el espacio \mathbb{V} se puede descomponer como la suma directa de \mathbb{V}_0 y \mathbb{V}_0^\perp .

Cuando $\mathbb{V} := H_0^1(\Omega)$ y $\mathbb{W} := L^2(\Omega)$, tenemos que $\mathbb{V}_0 = \{0\}$ y que $\mathbb{V}_0^\perp = \mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$; mientras que cuando $\mathbb{V} := H^1(\Omega)$ y $\mathbb{W} := L^2(\partial\Omega)$, tenemos que $\mathbb{V}_0 = H_0^1(\Omega)$ y que \mathbb{V}_0^\perp es el complemento a -ortogonal de $\mathbb{V}_0 = H_0^1(\Omega)$ en $\mathbb{V} = H^1(\Omega)$ (ver [**Auc04**]).

Ahora bien, si (λ, u) es un autopar del Problema 3 y si $v \in \mathbb{V}_0 = \text{Nu}(I)$ entonces $v = 0$ en \mathbb{W} , y por lo tanto,

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) = 0,$$

lo que implica que $u \in \mathbb{V}_0^\perp$, como queríamos demostrar. Más aún, la última ecuación implica que el Problema 3 es equivalente al

Problema 4. (Problema de autovalores en \mathbb{V}_0^\perp)

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{V}_0^\perp$ tales que

$$\begin{cases} a(u, v) = \lambda b(u, v), & \forall v \in \mathbb{V}_0^\perp, \\ \|u\|_b = 1. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 7.4. Si se satisfacen las hipótesis del Teorema 7.2 y además \mathbb{V} es denso en \mathbb{W} (ver (7.3)), entonces $\mathbb{V}_0 = \text{Nu}(A)$. En efecto, $v \in \text{Nu}(A)$ si y sólo si $Av = 0$. Puesto que $a(Av, w) = b(v, w)$, para todo $w \in \mathbb{V}$, esto último ocurre si y sólo si $b(v, w) = 0$, para todo $w \in \mathbb{V}$. Por (7.3), esto equivale a $b(v, w) = 0$, para todo $w \in \mathbb{W}$; lo que significa que $Iv = 0$ (es decir, $v = 0$ en \mathbb{W}), y por lo tanto, $v \in \text{Nu}(I) =: \mathbb{V}_0$. En consecuencia,

$$\overline{\text{Im}(A)} = (\text{Nu}(A))^\perp = \mathbb{V}_0^\perp.$$

Finalmente, puesto que

$$a(v, Av) = a(Av, v) = b(v, v) > 0, \quad \text{si } v \in \mathbb{V}_0^\perp \setminus \{0\},$$

tenemos que $A : \mathbb{V}_0^\perp \rightarrow \mathbb{V}_0^\perp$ es inyectivo, y más aún, es definido positivo. Del Teorema 7.2, se sigue que además $A : \mathbb{V}_0^\perp \rightarrow \mathbb{V}_0^\perp$ es compacto y autoadjunto. Por lo tanto, si $\dim(\mathbb{V}_0^\perp) = \infty$, los autovalores de A forman una sucesión monótona decreciente $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a 0, y existe un conjunto ortonormal completo de \mathbb{V}_0^\perp formado por autofunciones de A [BN00].

Ahora estamos en condiciones de demostrar la existencia de soluciones del Problema 3. El siguiente resultado sigue las ideas dadas en [BO91].

TEOREMA 7.5 (Existencia de soluciones del Problema 3). *Supongamos que además de las hipótesis del Teorema 7.2, \mathbb{V} y \mathbb{W} satisfacen (7.3), y que $\dim(\mathbb{V}_0^\perp) = \infty$. Entonces, el Problema 3 tiene una cantidad infinita numerable de autovalores $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \nearrow \infty,$$

y correspondientes autofunciones $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{V}$ que forman un conjunto ortogonal completo en \mathbb{V}_0^\perp . En particular, si $v \in \mathbb{V}_0^\perp$,

$$(7.13) \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a(v, u_i)}{a(u_i, u_i)} u_i,$$

y

$$(7.14) \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} b(v, u_i) u_i.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el operador A dado en el Teorema 7.2. Si $\mu \neq 0$, (μ, u) es un autopar de A si y sólo si $(\frac{1}{\mu}, u)$ es un autopar del Problema 3, pues

$$Au = \mu u \iff \mu a(u, v) = b(u, v), \forall v \in \mathbb{V} \iff a(u, v) = \frac{1}{\mu} b(u, v), \forall v \in \mathbb{V}.$$

De la Observación 7.4 se sigue los autovalores de A forman una sucesión monótona decreciente $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a 0. Así, los autovalores del Problema 3 forman una sucesión $\{\lambda_i := \frac{1}{\mu_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ positiva y monótona creciente tal que $\lambda_i \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Puesto que las autofunciones de A y del Problema 3 coinciden, nuevamente de la Observación 7.4, se sigue que forman un conjunto a -ortogonal completo de \mathbb{V}_0^\perp .

Finalmente, para demostrar (7.13) y (7.14) es suficiente notar que dado que las autofunciones están en \mathbb{V}_0^\perp , y que por lo tanto son no nulas en \mathbb{W} , podemos elegir las de modo que tengan la b -norma igual a 1. \square

7.2. Caracterización de los autovalores

Vimos en el Teorema 7.5 que cuando \mathbb{V} está densa y compactamente contenido en \mathbb{W} , y las formas bilineales a y b son simétricas, acotadas y coercitivas, el Problema 3 tiene una sucesión de autovalores $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, y una sucesión $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{V}$ a -ortogonal de autofunciones asociadas con $\|u_i\|_b = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definimos para cada $i \in \mathbb{N}$, el espacio E_i como²

$$(7.15) \quad E_i := \text{gen}\{u_1, u_2, \dots, u_i\},$$

y $E_0 := \emptyset$.

Definimos además el *cociente de Rayleigh* de $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$ como $\Lambda(v) := \frac{a(v, v)}{b(v, v)}$. Notemos que cuando v es una autofunción del Problema 3, $\Lambda(v)$ es el autovalor correspondiente.

²Notemos que en el caso que $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, el espacio E_i queda definido unívocamente independientemente de la elección de las autofunciones $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$. En cambio, si $\lambda_i = \lambda_{i+1}$, la definición del espacio E_i depende de la particular elección de autofunciones.

TEOREMA 7.6 (Principio del Mínimo). *Para cada $i \in \mathbb{N}$, el autovalor λ_i es el mínimo del cociente de Rayleigh sobre el conjunto de vectores a -ortogonales a E_{i-1} . Más precisamente,*

$$\lambda_i = \Lambda(u_i) = \min_{v \in (\mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0) \cap E_{i-1}^\perp} \Lambda(v), \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

donde E_{i-1}^\perp denota el complemento a -ortogonal de E_{i-1} .

DEMOSTRACIÓN. \square Consideremos primero $i = 1$. Puesto que $\lambda_1 = \Lambda(u_1)$, es suficiente ver que $\lambda_1 \leq \Lambda(v)$, para todo $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$. Para esto, notemos que si $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$, entonces $v = v_0 + v_0^\perp$ con $v_0 \in \mathbb{V}_0$ y $0 \neq v_0^\perp \in \mathbb{V}_0^\perp$. Así,

$$\Lambda(v) = \frac{a(v_0, v_0) + a(v_0^\perp, v_0^\perp)}{b(v_0^\perp, v_0^\perp)} \geq \Lambda(v_0^\perp).$$

Por otro lado, por (7.14) tenemos que $v_0^\perp = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k$, y de aquí que

$$\Lambda(v_0^\perp) = \frac{a(v_0^\perp, v_0^\perp)}{b(v_0^\perp, v_0^\perp)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \lambda_k}{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2} \geq \lambda_1.$$

\square Sea $i > 1$. Puesto que $\lambda_i = \Lambda(u_i)$, y que $u_i \in E_{i-1}^\perp$, es suficiente ver que $\lambda_i \leq \Lambda(v)$, para toda $v \in (\mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0) \cap E_{i-1}^\perp$. Como en \square , si $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$, entonces $v = v_0 + v_0^\perp$ con $v_0 \in \mathbb{V}_0$ y $0 \neq v_0^\perp \in \mathbb{V}_0^\perp$, y $\Lambda(v) \geq \Lambda(v_0^\perp)$.

Si además $v \in E_{i-1}^\perp$, puesto que $E_{i-1} \subset \mathbb{V}_0^\perp$, tenemos que $v_0^\perp \in E_{i-1}^\perp$. Así, de (7.14) se sigue que $v_0^\perp = \sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k u_k$, y de aquí que

$$\Lambda(v_0^\perp) = \frac{a(v_0^\perp, v_0^\perp)}{b(v_0^\perp, v_0^\perp)} = \frac{\sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k^2 \lambda_k}{\sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k^2} \geq \lambda_i,$$

lo que completa la demostración. \square

Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente

TEOREMA 7.7 (Principio Min-Max y Principio del Máximo). *El autovalor λ_i es el máximo del cociente de Rayleigh sobre el espacio E_i generado por $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$, y más aún,*

$$\lambda_i = \min_{\substack{V_i \subset \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0 \\ \dim V_i = i}} \max_{v \in V_i} \Lambda(v) = \max_{v \in E_i} \Lambda(v), \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

donde $V_i \subset \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$ con $\dim V_i = i$ en rigor denota los subespacios V_i de \mathbb{V} que son i -dimensionales tales que $V_i \setminus \{0\} \subset \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$, y los máximos se toman sobre vectores $v \neq 0$.³

³En general, siempre que se evalúe el cociente de Rayleigh $\Lambda(v) = \frac{a(v,v)}{b(v,v)}$ de un vector v , aunque no se aclare explícitamente, suponemos que $v \notin \mathbb{V}_0$, para que $b(v,v)$ sea no nulo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $i \in \mathbb{N}$. Si $v \in E_i$ es no nulo, entonces $v = \sum_{k=1}^i \alpha_k u_k$. Así,

$$\max_{v \in E_i} \Lambda(v) = \max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in \mathbb{R}^i} \frac{\sum_{k=1}^i \alpha_k^2 a(u_k, u_k)}{\sum_{k=1}^i \alpha_k^2 b(u_k, u_k)} = \max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in \mathbb{R}^i} \frac{\sum_{k=1}^i \alpha_k^2 \lambda_k}{\sum_{k=1}^i \alpha_k^2} \leq \lambda_i = \Lambda(u_i) \leq \max_{v \in E_i} \Lambda(v),$$

y en consecuencia,

$$\lambda_i = \max_{v \in E_i} \Lambda(v) \geq \min_{\substack{V_i \subset \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0 \\ \dim V_i = i}} \max_{v \in V_i} \Lambda(v).$$

Resta probar que si V_i es un subespacio de dimensión i tal que $V_i \setminus \{0\} \subset \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$, entonces

$$\lambda_i \leq \max_{v \in V_i} \Lambda(v).$$

Para esto, sea $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ una base de V_i . Puesto que el sistema

$$\sum_{k=1}^i \alpha_k a(v_k, u_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, i-1,$$

tiene $i-1$ ecuaciones e i incógnitas, tenemos que tiene una solución no trivial $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$, y por lo tanto, $w := \sum_{k=1}^i \alpha_k v_k \in V_i$ pertenece a E_{i-1}^\perp . Entonces, usando el Principio del Mínimo (Teorema 7.6),

$$\lambda_i = \min_{v \in (\mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0) \cap E_{i-1}^\perp} \Lambda(v) \leq \Lambda(w) \leq \max_{v \in V_i} \Lambda(v),$$

lo que concluye la demostración. \square

7.3. Un enfoque alternativo para la demostración de existencia de soluciones de problemas de autovalores

En esta sección veremos que podemos demostrar la existencia de soluciones del Problema 3 dada en el Teorema 7.5, sin usar el operador A introducido en el Teorema 7.2. La idea es demostrar la existencia de autopares de una manera constructiva, considerando primero el ínfimo del cociente de Rayleigh sobre $\mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$ y demostrando que éste se alcanza en un elemento u_1 que resulta ser una autofunción asociada a un autovalor $\lambda_1 = \Lambda(u_1)$. Considerando luego el cociente de Rayleigh sobre $(\mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0) \cap \text{gen}\{u_1\}^\perp$, se podrá demostrar que el ínfimo es ahora un autovalor λ_2 , que se alcanza en una autofunción asociada u_2 , y así sucesivamente (ver [LT03]).

Comenzamos estableciendo algunas propiedades de los autovalores y las autofunciones.

LEMA 7.8 (Propiedades de las soluciones del Problema 3). *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- (i) Si λ es un autovalor del Problema 3, entonces λ es positivo.
- (ii) Autofunciones asociados a autovalores distintos del Problema 3 son a -ortogonales y b -ortogonales.

DEMOSTRACIÓN. (i) Si (λ, u) es un autopar del Problema 3, entonces $a(u, u) = \lambda b(u, u)$. Puesto que $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ son productos internos, se tiene que $\lambda > 0$.

(ii) Si (λ_1, u_1) y (λ_2, u_2) son dos autopares del Problema 3 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces

$$0 = a(u_1, u_2) - a(u_1, u_2) = \lambda_1 b(u_1, u_2) - \lambda_2 b(u_1, u_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) b(u_1, u_2).$$

Por lo tanto, u_1 y u_2 son b -ortogonales; y puesto que $a(u_1, u_2) = \lambda_1 b(u_1, u_2) = 0$, tenemos que también son a -ortogonales. \square

Ahora demostramos que el Problema 3 tiene al menos una solución.

TEOREMA 7.9 (Existencia de un autopar). *Supongamos que \mathbb{V} y \mathbb{W} satisfacen (7.1), y que las formas bilineales a y b son simétricas, acotadas (ver (7.4)–(7.5)) y coercitivas (ver (7.6)–(7.7)). Consideremos \mathbb{V} con el producto interno dado por $a(\cdot, \cdot)$. Entonces existe $u_1 \in \mathbb{V}_0^\perp$ (ver (7.12)), tal que $\Lambda(u_1) \leq \Lambda(v)$, para todo $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$. Más aún, $\lambda_1 := \Lambda(u_1)$ es el mínimo autovalor del Problema 3 y u_1 es una autofunción asociada a λ_1 .*

DEMOSTRACIÓN. \square Demostremos primero que

$$(7.16) \quad \inf_{v \in \mathbb{V}_0^\perp} \Lambda(v) = \inf_{v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0} \Lambda(v).$$

Puesto que $\mathbb{V}_0^\perp \setminus \{0\} \subset \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$, tenemos que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}_0^\perp} \Lambda(v) \geq \inf_{v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0} \Lambda(v).$$

Por otro lado, si $w \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$, tenemos que $w = v_0 + v_0^\perp$ con $v_0 \in \mathbb{V}_0$ y $v_0^\perp \in \mathbb{V}_0^\perp$, donde $v_0^\perp \neq 0$. Así,

$$\Lambda(w) = \frac{a(v_0, v_0) + a(v_0^\perp, v_0^\perp)}{b(v_0^\perp, v_0^\perp)} \geq \Lambda(v_0^\perp) \geq \inf_{v \in \mathbb{V}_0^\perp} \Lambda(v),$$

y en consecuencia, (7.16) se cumple.

\square Sea $\lambda_1 := \inf_{v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0} \Lambda(v) = \inf_{v \in \mathbb{V}_0^\perp} \Lambda(v) \geq 0$. Mostramos ahora que existe $u_1 \in \mathbb{V}_0^\perp$ tal que $\Lambda(u_1) = \lambda_1$. Para esto, consideramos una sucesión $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{V}_0^\perp$ tal que $\Lambda(v_k) \rightarrow \lambda_1$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\|v_k\|_b = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, tenemos que $\|v_k\|_a^2 \rightarrow \lambda_1$, y por lo tanto, $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada en \mathbb{V} . Puesto que \mathbb{V} está compactamente contenido en \mathbb{W} , existe una subsucesión de $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente en \mathbb{W} a un elemento $w \in \mathbb{W}$. Denotando a esta subsucesión nuevamente por $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tenemos que $v_k \rightarrow w$ en \mathbb{W} , y ya que $\|v_k\|_b = 1$, tenemos que $\|w\|_b = 1$.

Mostraremos que $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{V} . Por la ley del paralelogramo, tenemos que

$$\|v_k - v_m\|_a^2 = 2\|v_k\|_a^2 + 2\|v_m\|_a^2 - \|v_k + v_m\|_a^2.$$

Si k y m son suficientemente grandes, $\lambda_1 \leq \Lambda(v_k + v_m) = \frac{\|v_k + v_m\|_a^2}{\|v_k + v_m\|_b^2}$, y por lo tanto,

$$\|v_k - v_m\|_a^2 \leq 2\|v_k\|_a^2 + 2\|v_m\|_a^2 - \lambda_1 \|v_k + v_m\|_b^2.$$

Teniendo en cuenta que

$$\|v_k + v_m\|_b^2 \rightarrow \|2w\|_b^2 = 4\|w\|_b^2 = 4, \quad \text{cuando } k, m \rightarrow \infty,$$

y puesto que $\|v_k\|_a^2 \rightarrow \lambda_1$, tenemos que $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{V} , y luego, convergente en \mathbb{V} a un elemento $u_1 \in \mathbb{V}_0^\perp$, ya que \mathbb{V}_0^\perp es cerrado. Tenemos que $u_1 = w$ en \mathbb{W} , y por lo tanto, $\|u_1\|_b = \|w\|_b = 1$. Ya que $\|v_k\|_a^2 \rightarrow \|u_1\|_a^2 = \Lambda(u_1)$, tenemos que $\Lambda(u_1) = \lambda_1$.

[3] Veamos ahora que (λ_1, u_1) es un autopar del Problema 3. Sea $v \in \mathbb{V}_0^\perp$ un vector no paralelo a u_1 . Para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\|u_1 + tv\|_a^2 = \lambda_1 + 2ta(u_1, v) + t^2 \|v\|_a^2,$$

y

$$\|u_1 + tv\|_b^2 = 1 + 2tb(u_1, v) + t^2 \|v\|_b^2.$$

Puesto que $\lambda_1 \leq \Lambda(u_1 + tv)$, tenemos que

$$\lambda_1 + 2t\lambda_1 b(u_1, v) + t^2 \lambda_1 \|v\|_b^2 \leq \lambda_1 + 2ta(u_1, v) + t^2 \|v\|_a^2,$$

y por lo tanto,

$$0 \leq 2t(a(u_1, v) - \lambda_1 b(u_1, v)) + t^2 (\|v\|_a^2 - \lambda_1 \|v\|_b^2),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Puesto que $\|v\|_a^2 - \lambda_1 \|v\|_b^2 \geq 0$, tenemos que

$$a(u_1, v) - \lambda_1 b(u_1, v) = 0,$$

para todo $v \in \mathbb{V}_0^\perp$, que no es paralelo a u_1 . Puesto que para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$a(u_1, \alpha u_1) = \alpha \lambda_1 b(u_1, u_1) = \lambda_1 b(u_1, \alpha u_1),$$

tenemos que

$$a(u_1, v) = \lambda_1 b(u_1, v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_0^\perp.$$

Esto muestra que (λ_1, u_1) es un autopar del Problema 4, por lo tanto, del Problema 3.

□ Finalmente, λ_1 es el mínimo autovalor del Problema 3, ya que si (λ, u) es un autopar del Problema 3,

$$\lambda_1 \leq \Lambda(u) = \lambda.$$

□

OBSERVACIÓN 7.10 (Demostración alternativa del Teorema 7.5). Sea $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$. Supongamos que hemos demostrado la existencia de $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{i-1}$ autovalores del Problema 3, con respectivas autofunciones u_1, u_2, \dots, u_{i-1} que son a -ortogonales. Si $E_{i-1} := \text{gen}\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$, se puede probar con la misma técnica del Teorema 7.9, que existe $u_i \in \mathbb{V}_0^\perp \cap E_{i-1}^\perp$ tal que $\Lambda(u_i) \leq \Lambda(v)$, para todo $v \in (\mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0) \cap E_{i-1}^\perp$. Más aún, $\lambda_i := \Lambda(u_i)$ es el mínimo autovalor $\geq \lambda_{i-1}$ y u_i es una autofunción asociada a λ_i .

Notemos que si \mathbb{V}_0^\perp tiene dimensión finita, este proceso termina en un número finito de pasos, y en este caso, tenemos una cantidad finita de autovalores, y una base de \mathbb{V}_0^\perp formada por autofunciones. Finalmente, en el caso que $\dim(\mathbb{V}_0^\perp) = \infty$, el Principio de Inducción Matemática aplicado al proceso descrito en la Observación 7.10, implica que existe una cantidad infinita numerable de autovalores y un conjunto a -ortogonal completo de \mathbb{V}_0^\perp formado por autofunciones.

7.4. Aproximaciones del Problema de autovalores: Problemas discretos

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, que denota el interior de un polígono si $d = 2$, o de un poliedro si $d = 3$, cuya frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz, de ahora en adelante consideraremos que el espacio de Hilbert \mathbb{V} donde se plantea el Problema 3 es $H_\Gamma^1(\Omega)$, donde $\Gamma \subset \partial\Omega$.⁴ En particular, cuando $\Gamma = \emptyset$, $\mathbb{V} = H^1(\Omega)$; y cuando $\Gamma = \partial\Omega$, $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega)$.

Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω . Para $\mathcal{T} \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$, consideramos el espacio de elementos finitos $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}$, definido por

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}} := \{v \in \mathbb{V} \mid v|_T \in \mathcal{P}_\ell(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\},$$

donde $\ell \in \mathbb{N}$ es un grado polinomial fijo. Así, la versión discreta del Problema 3 es el

⁴En el caso en que Γ sea un subconjunto propio de $\partial\Omega$ suponemos que éste es la unión de lados de elementos de la triangulación inicial \mathcal{T}_0 que se considere.

Problema 5. (Discretización del Problema de autovalores)

Hallar $\lambda_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}$ y $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tales que

$$\begin{cases} a(u_{\mathcal{T}}, v) = \lambda_{\mathcal{T}} b(u_{\mathcal{T}}, v), & \forall v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}, \\ \|u_{\mathcal{T}}\|_b = 1. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 7.11. Sea $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})}\}$ una base de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$. La primera ecuación del Problema 5 es equivalente a

$$a(u_{\mathcal{T}}, \phi_i) = \lambda_{\mathcal{T}} b(u_{\mathcal{T}}, \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, \dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}}).$$

Suponiendo que $u_{\mathcal{T}} = \sum_{j=1}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \mathbf{U}_j \phi_j$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \mathbf{U}_j a(\phi_j, \phi_i) = \lambda_{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \mathbf{U}_j b(\phi_j, \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, \dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}}).$$

Definimos las siguientes matrices asociadas al problema:

- La matriz de *rigidez* $K := (K_{ij})$ donde $K_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$.
- La matriz de *masa* $M := (M_{ij})$ donde $M_{ij} = b(\phi_j, \phi_i)$.

Si llamamos $\mathbf{U} := (\mathbf{U}_i)$ al vector de coordenadas de $u_{\mathcal{T}}$ respecto de $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})}\}$, las ecuaciones anteriores se transforman en el sistema:

$$(7.17) \quad K\mathbf{U} = \lambda_{\mathcal{T}} M\mathbf{U}.$$

Notemos que K y M son simétricas, ya que para $i, j = 1, 2, \dots, \dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})$, se tiene que

$$K_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = a(\phi_i, \phi_j) = K_{ji}, \quad y \quad M_{ij} = b(\phi_j, \phi_i) = b(\phi_i, \phi_j) = M_{ji}.$$

Por otro lado, si $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_i) \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})}$ es no nulo tenemos que

$$K\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \mathbf{V}_i \sum_{j=1}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \mathbf{V}_j a(\phi_j, \phi_i) = a \left(\sum_{j=1}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \mathbf{V}_j \phi_j, \sum_{i=1}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \mathbf{V}_i \phi_i \right) = \left\| \sum_{i=1}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \mathbf{V}_i \phi_i \right\|_a^2 > 0,$$

lo que implica que K es definida positiva. Análogamente,

$$M\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \left\| \sum_{i=1}^{\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})} \mathbf{V}_i \phi_i \right\|_b^2 \geq 0,$$

y así, en general, M es semidefinida positiva.

Podemos analizar la existencia de soluciones del Problema 5 estudiando el problema matricial de autovalores generalizado (7.17), o bien aplicando los resultados de la sección anterior a los espacios $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y \mathbb{W} para concluir, puesto que $\dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}}) < \infty$, que el Problema 5 tiene $N_{\mathcal{T}}$ autovalores que son reales positivos, denotados por

$$0 < \lambda_{1,\mathcal{T}} \leq \lambda_{2,\mathcal{T}} \leq \lambda_{3,\mathcal{T}} \leq \dots \leq \lambda_{N_{\mathcal{T}},\mathcal{T}},$$

donde $N_{\mathcal{T}} \leq \dim(\mathbb{V}_{\mathcal{T}})$, y que podemos elegir un conjunto a -ortogonal de autofunciones asociadas

$$u_{1,\mathcal{T}}, u_{2,\mathcal{T}}, u_{3,\mathcal{T}}, \dots, u_{N_{\mathcal{T}},\mathcal{T}},$$

con $\|u_i\|_b = 1$, para $i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}}$.

Si definimos $E_i^{\mathcal{T}}$ como⁵

$$E_i^{\mathcal{T}} := \text{gen}\{u_{1,\mathcal{T}}, u_{2,\mathcal{T}}, \dots, u_{i,\mathcal{T}}\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}},$$

y $E_0^{\mathcal{T}} := \emptyset$, se tienen las siguientes caracterizaciones:

- Principio del Mínimo:

$$\lambda_{i,\mathcal{T}} = \Lambda(u_{i,\mathcal{T}}) = \min_{v \in (\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0) \cap (E_{i-1}^{\mathcal{T}})^{\perp}} \Lambda(v), \quad i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}}.$$

- Principio Min-Max y Principio del Máximo:

$$(7.18) \quad \lambda_{i,\mathcal{T}} = \min_{\substack{V_{i,\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0 \\ \dim V_{i,\mathcal{T}} = i}} \max_{v \in V_{i,\mathcal{T}}} \Lambda(v) = \max_{v \in E_i^{\mathcal{T}}} \Lambda(v), \quad i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}}.$$

Se sigue de los Principios Min-Max (Teorema 7.7 y (7.18)) y de la conformidad $\mathbb{V}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}$ que

$$(7.19) \quad \lambda_i \leq \lambda_{i,\mathcal{T}}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}},$$

y si $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ es un refinamiento de \mathcal{T} , puesto que $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*} \subset \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$,

$$(7.20) \quad \lambda_{i,\mathcal{T}_*} \leq \lambda_{i,\mathcal{T}}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}}.$$

⁵Análogamente al caso de los espacios E_i , cuando $\lambda_{i,\mathcal{T}} < \lambda_{i+1,\mathcal{T}}$, el espacio $E_i^{\mathcal{T}}$ queda definido unívocamente independientemente de la elección de las autofunciones $\{u_{1,\mathcal{T}}, u_{2,\mathcal{T}}, \dots, u_{i,\mathcal{T}}\}$; mientras que si $\lambda_{i,\mathcal{T}} = \lambda_{i+1,\mathcal{T}}$, la definición del espacio $E_i^{\mathcal{T}}$ depende de la particular elección de autofunciones discretas.

CAPÍTULO 8

Estimaciones de error a priori para problemas de autovalores

Consideremos el Problema 3 con $\mathbb{V} := H_{\Gamma}^1(\Omega)$ para algún $\Gamma \subset \partial\Omega$ adecuado, y la discretización planteada en el Problema 5 que presentamos en el capítulo anterior. En este capítulo empezamos a estudiar de qué manera los autopares del problema discreto aproximan a los del problema original, que llamaremos *continuo*.

Babuška y Osborn [BO89, BO91], Raviart y Thomas [RT83], y Strang y Fix [SF73] han estudiado estimaciones de error a priori para autovalores y autofunciones de problemas de autovalores tipo Dirichlet, como el presentado en (6.4). En este capítulo establecemos algunas de estas estimaciones importantes en el contexto de problemas más generales que estamos desarrollando. La siguiente hipótesis es fundamental para nuestras estimaciones.

HIPÓTESIS 8.1 (Regularidad del problema elíptico asociado). Existe $r \in (0, 1)$ tal que la solución u del problema elíptico:

Dada $w \in \mathbb{W}$, hallar $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$(8.1) \quad a(u, v) = b(w, v), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

pertenece a $H^{1+r}(\Omega)$; y más aún, existe una constante $C_{reg} > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^{1+r}(\Omega)} \leq C_{reg} \|w\|_b.$$

En el Apéndice I al final de este capítulo, mostramos que esta hipótesis de regularidad se cumple para los problemas considerados en el Capítulo 6 para cualquier $r \in (0, \frac{1}{2})$.

OBSERVACIÓN 8.2 (Regularidad de las autofunciones). Si u es una autofunción del Problema 3 asociada a un autovalor λ , entonces satisface (8.1) con $w := \lambda u$, y de la Hipótesis 8.1 se sigue que $u \in H^{1+r}(\Omega)$, y puesto que $\|u\|_b = 1$, que

$$(8.2) \quad \|u\|_{H^{1+r}(\Omega)} \leq C_{reg} \lambda.$$

OBSERVACIÓN 8.3 (Aproximación). Del Teorema 1.10 se sigue que existe una constante $C_{apr} = C_{apr}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, C_a) > 0$ tal que si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$,

$$\|v - \mathcal{P}v\|_a \leq C_{apr} H_{\mathcal{T}}^r \|v\|_{H^{1+r}(\Omega)}, \quad \forall v \in H^{1+r}(\Omega) \cap \mathbb{V},$$

donde $\mathcal{P} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ es el operador de interpolación de Scott-Zhang.¹

8.1. Estimaciones de convergencia para autovalores

En esta sección demostramos que los autovalores de los problemas discretos convergen a los autovalores correspondientes del problema continuo cuando el tamaño de las mallas tiende a cero (ver Teorema 8.7 debajo). Para esto, necesitamos introducir primero la siguiente

DEFINICIÓN 8.4 (Proyección elíptica). Sea $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ el operador de *proyección elíptica* de \mathbb{V} sobre $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$; es decir, para $v \in \mathbb{V}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ satisface $a(v - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}v, w_{\mathcal{T}}) = 0$, para toda $w_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$.

Como en el capítulo anterior, denotamos con $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a la sucesión de autovalores del Problema 3. Recordamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $E_i = \text{gen}\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ es el espacio definido en (7.15) generado por las primeras i autofunciones, y definimos $\tilde{E}_i := \{u \in E_i \mid \|u\|_b = 1\}$. Antes del resultado principal de esta sección establecemos dos resultados auxiliares.

LEMA 8.5. Si para $i \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, definimos $\sigma_i^{\mathcal{T}} := \max_{u \in \tilde{E}_i} |1 - \|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b^2|$, entonces

$$\sigma_i^{\mathcal{T}} \leq C_i H_{\mathcal{T}}^{2r},$$

donde $C_i := C_{apr}^2 C_{reg}^2 i \lambda_i (2 + (C_I^{ab})^2 \lambda_i)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $u \in \tilde{E}_i$, entonces

$$\begin{aligned} |1 - \|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b^2| &= |b(u, u) - b(\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u)| = |b(u + \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u)| \\ &= |2b(u, u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u) - \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b^2| \leq 2|b(u, u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u)| + \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b^2. \end{aligned}$$

Si $u = \sum_{k=1}^i \alpha_k u_k$, para el primer término en el lado derecho de la desigualdad anterior tenemos que

$$(8.3) \quad b(u, u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u) = \sum_{k=1}^i \alpha_k \lambda_k^{-1} a(u_k - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u_k, u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u).$$

¹Se puede construir el operador de Scott-Zhang de manera que preserve condiciones de borde homogéneas en una parte del borde de Ω en el caso en que Γ sea un subconjunto propio de $\partial\Omega$ [SZ90].

En efecto, para todo $k = 1, \dots, i$, puesto que u_k es una autofunción asociada a λ_k , tenemos que

$$b(u_k, u - \mathcal{Q}_T u) = \lambda_k^{-1} a(u_k, u - \mathcal{Q}_T u),$$

y ya que $a(u - \mathcal{Q}_T u, \mathcal{Q}_T u_k) = 0$,

$$b(u_k, u - \mathcal{Q}_T u) = \lambda_k^{-1} a(u_k - \mathcal{Q}_T u_k, u - \mathcal{Q}_T u).$$

Multiplicando por α_k y sumando sobre k se obtiene (8.3). Usando esta igualdad y la Hipótesis 8.1 junto a la Observación 8.2 obtenemos

$$\begin{aligned} 2|b(u, u - \mathcal{Q}_T u)| &= 2 \left| \sum_{k=1}^i \alpha_k \lambda_k^{-1} a(u_k - \mathcal{Q}_T u_k, u - \mathcal{Q}_T u) \right| \\ &\leq 2 \left\| (I - \mathcal{Q}_T) \sum_{k=1}^i \alpha_k \lambda_k^{-1} u_k \right\|_a \|(I - \mathcal{Q}_T)u\|_a \\ &\leq 2C_{apr}^2 H_T^{2r} \left\| \sum_{k=1}^i \alpha_k \lambda_k^{-1} u_k \right\|_{H^{1+r}(\Omega)} \|u\|_{H^{1+r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, puesto que $\|u - \mathcal{Q}_T u\|_b^2 \leq (C_I^{ab} C_{apr})^2 H_T^{2r} \|u\|_{H^{1+r}(\Omega)}^2$, concluimos que

$$|1 - \|\mathcal{Q}_T u\|_b^2| \leq C_{apr}^2 H_T^{2r} \left(2 \left\| \sum_{k=1}^i \alpha_k \lambda_k^{-1} u_k \right\|_{H^{1+r}(\Omega)} \|u\|_{H^{1+r}(\Omega)} + (C_I^{ab})^2 \|u\|_{H^{1+r}(\Omega)}^2 \right).$$

Usando que para $0 \leq k \leq i$, $\|u_k\|_{H^{1+r}(\Omega)} \leq C_{reg} \lambda_k \leq C_{reg} \lambda_i$ (ver (8.2)) y la desigualdad triangular concluimos la demostración tomando $C_i := C_{apr}^2 C_{reg}^2 i \lambda_i (2 + (C_I^{ab})^2 \lambda_i)$.

□

El siguiente lema da una primera localización para los autovalores discretos $\{\lambda_{i,T}\}_{i=1}^{N_T}$ del Problema 5 en términos de los continuos (ver [SF73, Lemma 6.1]).

LEMA 8.6. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $\mathbf{H}_0 := \mathbf{H}_0(C_i, r)$, tal que*

$$\lambda_i \leq \lambda_{i,T} \leq \frac{\lambda_i}{1 - \sigma_i^T},$$

para toda $T \in \mathbb{T}$ con $H_T \leq \mathbf{H}_0$, donde $\sigma_i^T = \max_{u \in \tilde{E}_i} |1 - \|\mathcal{Q}_T u\|_b^2|$ como en el lema anterior.²

DEMOSTRACIÓN. Dado $i \in \mathbb{N}$ fijo, teniendo en cuenta el Lema 8.5, si definimos $\mathbf{H}_0 := (2C_i)^{-\frac{1}{2r}}$, entonces $\sigma_i^T \leq \frac{1}{2}$, si $H_T \leq \mathbf{H}_0$. En este caso, $V_{i,T} := \mathcal{Q}_T E_i$ es un espacio i -dimensional

²En general, siempre suponemos que \mathbf{H}_0 es suficientemente chico como para que $i \leq N_T$, cuando $H_T \leq \mathbf{H}_0$, es decir, para que el problema discreto en \mathbb{V}_T tenga un i -ésimo autovalor.

de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$. En efecto, si $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u = 0$ para algún $u \in E_i$ con $\|u\|_b = 1$ obtendríamos que $1/2 \geq \sigma_i^{\mathcal{T}} \geq |1 - \|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b^2| = 1$, que es una contradicción.

Por otro lado, puesto que $\sigma_i^{\mathcal{T}} \leq \frac{1}{2}$, de la definición de $\sigma_i^{\mathcal{T}}$ y se sigue que

$$\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}v\|_b^2 \geq 1 - \sigma_i^{\mathcal{T}} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

para toda $v \in \tilde{E}_i$; y en consecuencia, $V_{i,\mathcal{T}} \setminus \{0\} \subset \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0$. Finalmente, por el Principio Min-Max (7.18) tenemos que

$$\lambda_{i,\mathcal{T}} \leq \max_{v_{\mathcal{T}} \in V_{i,\mathcal{T}}} \Lambda(v_{\mathcal{T}}) = \max_{v \in \tilde{E}_i} \Lambda(\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}v) = \max_{v \in \tilde{E}_i} \frac{\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}v\|_a^2}{\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}v\|_b^2} = \max_{v \in \tilde{E}_i} \frac{\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}v\|_a^2}{\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}v\|_b^2} \leq \frac{\lambda_i}{1 - \sigma_i^{\mathcal{T}}},$$

donde hemos usado que $\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}v\|_a^2 \leq \|v\|_a^2 \leq \lambda_i$, para toda $v \in \tilde{E}_i$.

Finalmente, teniendo en cuenta la última estimación y (7.19), completamos la demostración de este lema. \square

Concluimos esta sección mostrando la convergencia de los autovalores discretos al autovalor correspondiente cuando el tamaño de las mallas tiende a cero.

TEOREMA 8.7 (Convergencia de los autovalores discretos). *Dado $i \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$0 \leq \lambda_{i,\mathcal{T}} - \lambda_i \leq 2\lambda_i C_i H_{\mathcal{T}}^{2r},$$

para toda $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_0 = (2C_i)^{-\frac{1}{2r}}$, donde C_i es la constante dada en el Lema 8.5.

DEMOSTRACIÓN. Sea $i \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta el Lema 8.5 y la elección de \mathbf{H}_0 , se tiene que $\sigma_i^{\mathcal{T}} \leq \frac{1}{2}$, para toda $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_0$, y así que $\frac{1}{1 - \sigma_i^{\mathcal{T}}} \leq 1 + 2\sigma_i^{\mathcal{T}}$. En consecuencia, usando el Lema 8.6 tenemos que

$$\lambda_i \leq \lambda_{i,\mathcal{T}} \leq \lambda_i(1 + 2\sigma_i^{\mathcal{T}}),$$

y usando nuevamente el Lema 8.5 concluimos la prueba de este teorema. \square

8.2. Separación de los autovalores

En la sección anterior hemos probado que dado un autovalor λ_i del Problema 3, los correspondientes autovalores discretos $\lambda_{i,\mathcal{T}}$ convergen a éste cuando el tamaño de la malla tiende a cero. Ahora mostramos que los otros autovalores discretos están *separados* de λ_i [SF73].

En esta sección consideramos $j \in \mathbb{N}$ fijo, y suponemos que $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+R-1} < \lambda_{j+R}$, y $\lambda_{j-1} < \lambda_j$, cuando $j > 1$, es decir, λ_j es un autovalor con multiplicidad $R \geq 1$.

LEMA 8.8 (Separación de los autovalores). *Existen $\mathbf{H}_1 > 0$ y una constante de separación $\rho_{\lambda_j} > 0$ tal que para toda $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$ se cumple que*

$$\frac{\lambda_j}{|\lambda_{i,\mathcal{T}} - \lambda_j|} \leq \rho_{\lambda_j}, \quad \text{si } i \neq j, j+1, \dots, j+R-1.$$

OBSERVACIÓN 8.9. Si $j = 1$, la constante \mathbf{H}_1 en este lema puede ser arbitraria, es decir que no hay restricciones sobre el tamaño de la malla; y ρ_{λ_j} depende de λ_j y $\lambda_{j+R} - \lambda_j$. En cambio, cuando $j > 1$, la constante \mathbf{H}_1 depende de $j-1$, λ_{j-1} y $\lambda_j - \lambda_{j-1}$; y en este caso, ρ_{λ_j} también depende de $\lambda_j - \lambda_{j-1}$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 8.8. Para $i > j+R-1$, se tiene que $\lambda_j < \lambda_{j+R} \leq \lambda_{j+R,\mathcal{T}} \leq \lambda_{i,\mathcal{T}}$, para todo $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, y

$$|\lambda_{i,\mathcal{T}} - \lambda_j| \geq \lambda_{j+R} - \lambda_j =: \delta_1.$$

Así, si $j = 1$, tomando $\rho_{\lambda_j} := \frac{\lambda_j}{\delta_1}$ obtenemos la afirmación del lema, sin restricciones sobre el tamaño de la malla.

Por otro lado, si $j > 1$, del Teorema 8.7 se sigue que $\lambda_{j-1,\mathcal{T}} \rightarrow \lambda_{j-1}$ cuando $H_{\mathcal{T}} \rightarrow 0$, y así, existe $\mathbf{H}_1 > 0$ tal que si $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$ entonces $\lambda_{j-1} \leq \lambda_{j-1,\mathcal{T}} < \frac{\lambda_{j-1} + \lambda_j}{2}$. En consecuencia, para $i < j$, tenemos que $\lambda_{i,\mathcal{T}} \leq \lambda_{j-1,\mathcal{T}} < \lambda_j$, y así,

$$|\lambda_{i,\mathcal{T}} - \lambda_j| \geq \lambda_j - \lambda_{j-1,\mathcal{T}} \geq \frac{\lambda_j - \lambda_{j-1}}{2} =: \delta_2.$$

En este caso, si $i \neq j, j+1, \dots, j+R-1$, se sigue que

$$|\lambda_{i,\mathcal{T}} - \lambda_j| \geq \min(\delta_1, \delta_2),$$

y podemos elegir $\rho_{\lambda_j} := \frac{\lambda_j}{\min(\delta_1, \delta_2)}$. □

OBSERVACIÓN 8.10. Para $i = 0, 1, \dots, R-1$, del Teorema 8.7 se sigue que $\lambda_{j+i,\mathcal{T}} \rightarrow \lambda_j$ cuando $H_{\mathcal{T}} \rightarrow 0$. Así, redefiniendo \mathbf{H}_1 podemos lograr que $\lambda_j \leq \lambda_{j+i,\mathcal{T}} < \frac{\lambda_j + \lambda_{j+R}}{2}$, siempre que $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$.

LEMA 8.11 (Separación de autovalores discretos). *Si $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ es un refinamiento de $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$, entonces³*

$$\frac{\lambda_{\mathcal{T}_*}}{|\lambda_{i,\mathcal{T}} - \lambda_{\mathcal{T}_*}|} \leq \rho_{\lambda_j}, \quad \text{si } i \neq j, j+1, \dots, j+R-1,$$

donde $\lambda_{\mathcal{T}_*}$ denota cualquiera de los autovalores discretos $\lambda_{j,\mathcal{T}_*}, \lambda_{j+1,\mathcal{T}_*}, \dots, \lambda_{j+R-1,\mathcal{T}_*}$.

³Aquí puede ser necesario redefinir ρ_{λ_j} , pero es independiente de \mathcal{T} y \mathcal{T}_* , sólo depende de λ_{j-1}, λ_j y λ_{j+R} .

DEMOSTRACIÓN. Si $i > j + R - 1$, entonces $\lambda_j \leq \lambda_{\mathcal{T}^*} \leq \frac{\lambda_j + \lambda_{j+R}}{2} < \lambda_{j+R} \leq \lambda_{j+R, \mathcal{T}} \leq \lambda_{i, \mathcal{T}}$, si $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$, y

$$|\lambda_{i, \mathcal{T}} - \lambda_{\mathcal{T}^*}| \geq \frac{\lambda_{j+R} - \lambda_j}{2} =: \delta_1/2.$$

Luego, si $j = 1$, tomando $\rho_{\lambda_j} := \frac{2\lambda_{j+R}}{\delta_1}$ la afirmación del lema vale.

Si $j > 1$, entonces $\lambda_{j-1} \leq \lambda_{j-1, \mathcal{T}} < \frac{\lambda_{j-1} + \lambda_j}{2}$, si $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$. En consecuencia, para $i < j$, tenemos que $\lambda_{i, \mathcal{T}} \leq \lambda_{j-1, \mathcal{T}} < \lambda_j \leq \lambda_{\mathcal{T}^*}$, y así,

$$|\lambda_{i, \mathcal{T}} - \lambda_{\mathcal{T}^*}| \geq \lambda_j - \lambda_{j-1, \mathcal{T}} \geq \frac{\lambda_j - \lambda_{j-1}}{2} =: \delta_2.$$

En este caso, si $i \neq j, j+1, \dots, j+R-1$, se sigue que

$$|\lambda_{i, \mathcal{T}} - \lambda_{\mathcal{T}^*}| \geq \min(\delta_1/2, \delta_2),$$

y podemos elegir $\rho_{\lambda_j} := \frac{\lambda_{j+R}}{\min(\delta_1/2, \delta_2)}$. □

8.3. Autoespacios y autoespacios discretos: La noción de aproximación

Recordemos que $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ denota la sucesión de autovalores del Problema 3. De ahora en adelante, consideramos la aproximación de cierto autovalor fijo $\lambda = \lambda_{j_0}$, y denotamos con $j \in \mathbb{N}$ al índice que satisface $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+R-1} < \lambda_{j+R}$, y $\lambda_{j-1} < \lambda_j$, cuando $j > 1$, es decir, λ es un autovalor con multiplicidad $R \geq 1$, y j es el índice más pequeño que satisface $\lambda = \lambda_j$. Es importante notar que no precisaremos conocer j ni R en nuestros algoritmos adaptativos, pero servirán para establecer los resultados de manera más precisa.

DEFINICIÓN 8.12 (Autoespacios). Denotamos con E_λ al espacio R -dimensional de autofunciones asociadas al autovalor λ del Problema 3, esto es,

$$E_\lambda := \{u \in \mathbb{V} \mid a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in \mathbb{V}\},$$

y con $E_\lambda^{\mathcal{T}} \subset \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, para cada $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, al espacio de aproximación R -dimensional definido por

$$E_\lambda^{\mathcal{T}} := \sum_{i=j}^{j+R-1} E_{\lambda_{i, \mathcal{T}}}^{\mathcal{T}},$$

donde $E_{\lambda_{i, \mathcal{T}}}^{\mathcal{T}} := \{u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \mid a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) = \lambda_{i, \mathcal{T}} b(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}), \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}\}$ es el espacio de autofunciones del Problema 5 asociadas a $\lambda_{i, \mathcal{T}}$. Definimos también los correspondientes conjuntos normalizados como

$$\tilde{E}_\lambda := \{u \in E_\lambda \mid \|u\|_b = 1\}, \quad \text{y} \quad \tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}} := \{u_{\mathcal{T}} \in E_\lambda^{\mathcal{T}} \mid \|u_{\mathcal{T}}\|_b = 1\}.$$

Hemos definido $E_\lambda^{\mathcal{T}}$ y $\tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}}$ de esta forma porque en general cuando λ_{j_0} sea un autovalor múltiple del Problema 3, $\lambda_{j_0, \mathcal{T}}$ no será múltiple para el problema discreto.

OBSERVACIÓN 8.13. Dada $v \in \mathbb{V}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) $u = \arg \max_{\tilde{u} \in \tilde{E}_\lambda} a(\tilde{u}, v)$.
- (ii) $u = \arg \max_{\tilde{u} \in \tilde{E}_\lambda} b(\tilde{u}, v)$.
- (iii) u realiza la a -distancia de v al conjunto solución \tilde{E}_λ ; es decir, $\|u - v\|_a = \text{dist}_a(v, \tilde{E}_\lambda)$.
- (iv) u realiza la b -distancia de v al conjunto solución \tilde{E}_λ ; es decir, $\|u - v\|_b = \text{dist}_b(v, \tilde{E}_\lambda)$.

En efecto, es suficiente notar que

$$a(\tilde{u}, v) = \lambda b(\tilde{u}, v),$$

para toda $\tilde{u} \in \tilde{E}_\lambda$, y que si $u, \tilde{u} \in \tilde{E}_\lambda$,

$$a(\tilde{u}, v) \leq a(u, v) \iff -2a(u, v) \leq -2a(\tilde{u}, v) \iff \|u - v\|_a \leq \|\tilde{u} - v\|_a,$$

y

$$b(\tilde{u}, v) \leq b(u, v) \iff -2b(u, v) \leq -2b(\tilde{u}, v) \iff \|u - v\|_b \leq \|\tilde{u} - v\|_b.$$

En consecuencia, la autofunción u que realiza la distancia de v a \tilde{E}_λ es el elemento de \tilde{E}_λ que forma el ángulo más pequeño con v (en el producto dado por a y/o b).

OBSERVACIÓN 8.14 (Acotaciones para el cociente de Rayleigh).

- Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $\{u_{i, \mathcal{T}}\}_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}}$ un conjunto b -ortonormal de autofunciones discretas, donde $u_{i, \mathcal{T}}$ está asociada al autovalor $\lambda_{i, \mathcal{T}}$ del Problema 5. Si $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}}$, entonces $u_{\mathcal{T}} = \sum_{i=j}^{j+R-1} \alpha_i u_{i, \mathcal{T}}$ con $\sum_{i=j}^{j+R-1} \alpha_i^2 = 1$. En consecuencia,

$$\Lambda(u_{\mathcal{T}}) = a(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}}) = \sum_{i=j}^{j+R-1} \alpha_i^2 a(u_{i, \mathcal{T}}, u_{i, \mathcal{T}}) = \sum_{i=j}^{j+R-1} \alpha_i^2 \lambda_{i, \mathcal{T}};$$

es decir, $\Lambda(u_{\mathcal{T}})$ es una combinación convexa de $\lambda_{j, \mathcal{T}}, \lambda_{j+1, \mathcal{T}}, \dots, \lambda_{j+R-1, \mathcal{T}}$, y así,

$$\lambda_{j, \mathcal{T}} \leq \Lambda(u_{\mathcal{T}}) \leq \lambda_{j+R-1, \mathcal{T}}.$$

Teniendo en cuenta (7.19) y (7.20), y definiendo $\Lambda_0 := \lambda_{j+R-1, \mathcal{T}_0}$, concluimos que

$$(8.4) \quad \lambda \leq \Lambda(u_{\mathcal{T}}) \leq \Lambda_0, \quad \forall u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}}, \quad \forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}.$$

- Sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*} \in \tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}_*}$, usando (8.4) obtenemos

$$|\Lambda(u_{\mathcal{T}_*}) - \Lambda(u_{\mathcal{T}})| = (\sqrt{\Lambda(u_{\mathcal{T}_*})} + \sqrt{\Lambda(u_{\mathcal{T}})}) \|u_{\mathcal{T}_*}\|_a - \|u_{\mathcal{T}}\|_a \leq 2\sqrt{\Lambda_0} \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a.$$

Concluimos esta sección estableciendo la noción para el error de aproximación de las autofunciones.

DEFINICIÓN 8.15. Denotamos por $\tilde{\mathcal{P}}_\lambda : \mathbb{V} \rightarrow \tilde{E}_\lambda$ al operador de proyección (no lineal) sobre \tilde{E}_λ , es decir, para $v \in \mathbb{V}$, la proyección $\tilde{\mathcal{P}}_\lambda v$ es el elemento en \tilde{E}_λ que realiza la distancia de v a \tilde{E}_λ , es decir,

$$\text{dist}_a(v, \tilde{E}_\lambda) = \|v - \tilde{\mathcal{P}}_\lambda v\|_a,$$

(o $\text{dist}_b(v, \tilde{E}_\lambda) = \|v - \tilde{\mathcal{P}}_\lambda v\|_b$, por la Observación 8.13).

8.4. Otras estimaciones de error importantes

Sea $u \in \tilde{E}_\lambda$ y sea $v \in \mathbb{V}$ con $\|v\|_b = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} a(u - v, u - v) &= a(u, u) + a(v, v) - 2a(u, v) = \lambda + \Lambda(v) - 2\lambda b(u, v) \\ &= \Lambda(v) - \lambda + \lambda(2 - 2b(u, v)) = \Lambda(v) - \lambda + \lambda b(u - v, u - v), \end{aligned}$$

y así,

$$(8.5) \quad \|u - v\|_a^2 = \Lambda(v) - \lambda + \lambda \|u - v\|_b^2.$$

Como consecuencia inmediata de (8.4) y de (8.5) obtenemos el siguiente resultado en el que mostramos de qué manera el error de aproximación de los autovalores está controlado por el error de aproximación de las autofunciones.

TEOREMA 8.16. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}}$, entonces $0 \leq \Lambda(u_{\mathcal{T}}) - \lambda \leq \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_\lambda)$.

El siguiente resultado auxiliar, cuya prueba es elemental, es útil para controlar los términos de la forma $\|\Lambda(v)v - \Lambda(w)w\|_b$ que aparecen frecuentemente en las estimaciones para este tipo de problemas.

LEMA 8.17. Si $v, w \in \mathbb{V}$ satisfacen $\|v\|_b = \|w\|_b = 1$, entonces

$$\|\Lambda(v)v - \Lambda(w)w\|_b \leq (C_I^{ab} \Lambda(v) + \sqrt{\Lambda(v)} + \sqrt{\Lambda(w)}) \|v - w\|_a,$$

donde C_I^{ab} es la constante de la desigualdad (7.10).

DEMOSTRACIÓN. Sean $v, w \in \mathbb{V}$ con $\|v\|_b = \|w\|_b = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|\Lambda(v)v - \Lambda(w)w\|_b &\leq \Lambda(v) \|v - w\|_b + |\Lambda(v) - \Lambda(w)| \|w\|_b \\ &= \Lambda(v) \|v - w\|_b + (\sqrt{\Lambda(v)} + \sqrt{\Lambda(w)}) \|v\|_a - \|w\|_a \end{aligned}$$

$$\leq (C_I^{ab} \Lambda(v) + \sqrt{\Lambda(v)} + \sqrt{\Lambda(w)}) \|v - w\|_a,$$

donde en la última desigualdad hemos usado (7.10). \square

OBSERVACIÓN 8.18. De aquí en adelante, varios de los resultados se cumplen para \mathcal{T} suficientemente fina ($H_{\mathcal{T}}$ pequeño). Sin embargo, si el problema de autovalores es no degenerado (ver Definición 9.8 más adelante), $H_{\mathcal{T}}$ tenderá a cero en el proceso adaptativo, y eventualmente las mallas serán suficientemente finas. Notemos también que los resultados conocidos de optimalidad son asintóticos, y a pesar de que las estimaciones se cumplen a partir de un nivel de iteración k_0 , el algoritmo que proponemos converge partiendo de *cualquier malla inicial* a una velocidad casi óptima, como veremos en el Capítulo 11.

A continuación nos proponemos relacionar los errores de aproximación de autofunciones medidos en las diferentes normas (ver Teorema 8.21 debajo). Necesitamos los dos siguientes resultados auxiliares.

LEMA 8.19. Si $u \in \tilde{E}_\lambda$ y $(\lambda_{i,\mathcal{T}}, u_{i,\mathcal{T}})$ son soluciones del Problema 5 para $i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}}$, para alguna $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, entonces,

$$(\lambda_{i,\mathcal{T}} - \lambda)b(\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u_{i,\mathcal{T}}) = \lambda b(u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u_{i,\mathcal{T}}),$$

donde $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ es el operador de proyección elíptica de \mathbb{V} sobre $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ dado en la Definición 8.4.

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \tilde{E}_\lambda$ y sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Sean $\{(\lambda_{i,\mathcal{T}}, u_{i,\mathcal{T}})\}_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}}$ autopares del Problema 5. Puesto que para $i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}}$, $a(\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u_{i,\mathcal{T}}) = a(u, u_{i,\mathcal{T}})$, tenemos que $\lambda_{i,\mathcal{T}}b(\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u_{i,\mathcal{T}}) = \lambda b(u, u_{i,\mathcal{T}})$. Restando $\lambda b(\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u_{i,\mathcal{T}})$ de ambos lados, obtenemos la afirmación del lema. \square

El siguiente lema se prueba con los argumentos usuales de dualidad de Aubin y Nitsche, y usando la Hipótesis 8.1 sobre la regularidad del problema elíptico y la estimación de interpolación en $H^{1+r}(\Omega)$ dada en la Observación 8.3.

LEMA 8.20 (Aubin-Nitsche). Si $u \in \mathbb{V}$ y si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, entonces

$$\|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b \leq C_{apr} C_{reg} H_{\mathcal{T}}^r \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_a,$$

donde C_{reg} y C_{apr} son las constantes dadas en la Hipótesis 8.1 y en la Observación 8.3, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Sean $u \in \mathbb{V}$ y $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Sea $\varphi \in \mathbb{V}$ la solución del problema elíptico

$$(8.6) \quad a(\varphi, w) = b(u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, w), \quad \forall w \in \mathbb{V}.$$

De la Hipótesis 8.1 se sigue que $\varphi \in H^{1+r}(\Omega)$ y que

$$\|\varphi\|_{H^{1+r}(\Omega)} \leq C_{reg} \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b.$$

Si $\varphi_{\mathcal{T}} := \mathcal{P}\varphi \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ denota el interpolante de Scott-Zhang de φ en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, como vimos en la Observación 8.3, $\|\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}\|_a \leq C_{apr} H_{\mathcal{T}}^r \|\varphi\|_{H^{1+r}(\Omega)}$. Así,

$$(8.7) \quad \|\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}\|_a \leq C_{apr} C_{reg} H_{\mathcal{T}}^r \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b.$$

Puesto que $a(u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, \varphi_{\mathcal{T}}) = 0$, de (8.6) se sigue que $\|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b^2 = a(\varphi, u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u) = a(\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}, u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u)$; y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b^2 \leq \|\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}\|_a \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_a.$$

Finalmente, de la última desigualdad y de (8.7) se sigue la afirmación de este lema. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar que en el caso en el que λ es un autovalor simple del Problema 3, el error para las autofunciones medido en norma b es de orden superior al medido en la norma a .

TEOREMA 8.21 (Estimación a priori fundamental). *Si el autovalor $\lambda = \lambda_{j_0}$ del Problema 3 es simple, para $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$, se cumple que⁴*

$$\text{dist}_b(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq C_{ab} H_{\mathcal{T}}^r \text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}), \quad \text{para toda } \mathcal{T} \in \mathbb{T} \text{ con } H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1,$$

donde $C_{ab} := 2(1 + \rho_{\lambda})C_{apr}C_{reg}$, y \mathbf{H}_1 y ρ_{λ} están definidos en la Sección 8.2.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\lambda = \lambda_{j_0}$ es un autovalor simple del Problema 3. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ tal que $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$. Dada $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$, definamos $u := \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}}$ y $\lambda_{\mathcal{T}} := \Lambda(u_{\mathcal{T}})$, donde $\tilde{\mathcal{P}}_{\lambda}$ está dado en la Definición 8.15. De la Observación 8.13 se sigue que $\beta := b(\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{\lambda_{\mathcal{T}}} a(u, u_{\mathcal{T}})$ es no negativo. Sea $\{u_{i,\mathcal{T}} | i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}}\}$ un subconjunto b -ortonormal de $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, tal que $(\lambda_{i,\mathcal{T}}, u_{i,\mathcal{T}})$ son soluciones del Problema 5 para $i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}}$, y $u_{j_0,\mathcal{T}} = u_{\mathcal{T}}$. Así,

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} b(\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u_{i,\mathcal{T}}) u_{i,\mathcal{T}} + v_{\mathcal{T}},$$

⁴Notemos que en este caso \tilde{E}_{λ} consta de dos funciones y $\tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ también.

donde $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \cap \mathbb{V}_0$, y luego

$$\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u - \beta u_{\mathcal{T}}\|_b^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{N_{\mathcal{T}}} b(\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u_{i,\mathcal{T}})^2.$$

De los Lemas 8.19 y 8.8, usando que $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$, se sigue que

$$\|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u - \beta u_{\mathcal{T}}\|_b^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{N_{\mathcal{T}}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{i,\mathcal{T}} - \lambda} \right)^2 b(u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u, u_{i,\mathcal{T}})^2 \leq \rho_{\lambda}^2 \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b^2;$$

y usando la desigualdad triangular y esta estimación, obtenemos $\|u - \beta u_{\mathcal{T}}\|_b \leq \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b + \|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u - \beta u_{\mathcal{T}}\|_b \leq (1 + \rho_{\lambda}) \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b$. Puesto que $|\beta - 1| = \|\beta u_{\mathcal{T}}\|_b - \|u\|_b \leq \|u - \beta u_{\mathcal{T}}\|_b$, concluimos que

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_b \leq \|u - \beta u_{\mathcal{T}}\|_b + \|(\beta - 1)u_{\mathcal{T}}\|_b \leq 2 \|u - \beta u_{\mathcal{T}}\|_b \leq 2(1 + \rho_{\lambda}) \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_b.$$

Finalmente, teniendo en cuenta el Lema 8.20 y la definición de $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$, concluimos que

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_b \leq 2(1 + \rho_{\lambda}) C_{apr} C_{reg} H_{\mathcal{T}}^r \|u - \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}u\|_a \leq 2(1 + \rho_{\lambda}) C_{apr} C_{reg} H_{\mathcal{T}}^r \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a,$$

y la prueba se completa notando que u realiza $\text{dist}_b(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda})$ y $\text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda})$. \square

OBSERVACIÓN 8.22. Si λ es un autovalor simple del Problema 3, y si \mathbf{H}_1 y ρ_{λ} son los dados en la Sección 8.2, entonces para cada refinamiento $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ de $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, la misma técnica de la demostración del Teorema 8.21 permite concluir que si $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$,

$$\text{dist}_b(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}) \leq 2(1 + \rho_{\lambda}) C_{apr} C_{reg} H_{\mathcal{T}}^r \text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}), \quad \text{para cualquier } u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}.$$

En los métodos de elementos finitos adaptativos para problemas elípticos simétricos el error decrece en los sucesivos refinamientos. Para problemas de autovalores esto no ocurre en general, debido a la naturaleza no lineal de los problemas de autovalores. Concluimos esta sección mostrando que en este caso el crecimiento del error está controlado, siempre que estemos considerando autovalores simples.

TEOREMA 8.23 (Estabilidad del error). *Si el autovalor $\lambda = \lambda_{j_0}$ del Problema 3 es simple, existe una constante positiva $\mathbf{H}_2 \leq \mathbf{H}_1$ tal que, si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_2$ y $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ es un refinamiento de \mathcal{T} ,*

$$\text{dist}_a(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq \sqrt{2} \text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}), \quad \text{para toda } u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}} \text{ y } u_{\mathcal{T}_*} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de \mathcal{T} . Si $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}$, usando el Teorema 8.21 tenemos que

$$(8.8) \quad \text{dist}_b(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq C_{ab} H_{\mathcal{T}_*}^r \text{dist}_a(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}),$$

si $H_{\mathcal{T}_*} \leq \mathbf{H}_1$. Ahora, si $\lambda_{\mathcal{T}} := \Lambda(u_{\mathcal{T}})$ y $\lambda_{\mathcal{T}_*} := \Lambda(u_{\mathcal{T}_*})$, usando (8.5) obtenemos

$$\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) = \lambda_{\mathcal{T}_*} - \lambda + \lambda \text{dist}_b^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}),$$

debido al hecho de que la misma autofunción de \tilde{E}_{λ} realiza tanto $\text{dist}_a(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda})$ como $\text{dist}_b(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda})$ (ver Observación 8.13). El hecho de que $\lambda_{\mathcal{T}_*} \leq \lambda_{\mathcal{T}}$, y el Teorema 8.16 implican que

$$\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq \lambda_{\mathcal{T}} - \lambda + \lambda \text{dist}_b^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \lambda \text{dist}_b^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}).$$

Considerando (8.8), si elegimos $\mathbf{H}_2 \leq \mathbf{H}_1$ de manera que $\lambda C_{ab}^2 \mathbf{H}_2^{2r} \leq \frac{1}{2}$, entonces el último término en el lado derecho de la desigualdad anterior puede absorberse a la izquierda y la demostración queda completa. \square

OBSERVACIÓN 8.24. La desigualdad $\lambda_{\mathcal{T}_*} \leq \lambda_{\mathcal{T}}$ en la demostración del teorema anterior, no se cumple en general si λ es múltiple, porque $\lambda_{\mathcal{T}} := \Lambda(u_{\mathcal{T}})$ y $\lambda_{\mathcal{T}_*} := \Lambda(u_{\mathcal{T}_*})$ en este caso no son necesariamente autovalores de los respectivos problemas discretos; sólo sabemos que $\lambda_{j,\mathcal{T}} \leq \lambda_{\mathcal{T}} \leq \lambda_{j+R-1,\mathcal{T}}$ y que $\lambda_{j,\mathcal{T}_*} \leq \lambda_{\mathcal{T}_*} \leq \lambda_{j+R-1,\mathcal{T}_*}$.

8.5. Apéndice I. Sobre la Hipótesis 8.1: Regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales elípticas

En este apéndice establecemos estimaciones sobre la regularidad de las soluciones de problemas elípticos de segundo orden con condiciones de tipo Dirichlet y de tipo Neumann. A partir de estas estimaciones, estudiamos la regularidad de los problemas elípticos asociados a los problemas de autovalores presentados en el Capítulo 6. Más precisamente, demostramos que la Hipótesis 8.1 se satisface para cada uno de estos problemas. Recordemos que en base a esta hipótesis se establece la regularidad de las autofunciones del Problema 3 (ver Observación 8.2).

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema del Gráfico Cerrado, y será útil para el objetivo de esta sección.

LEMA 8.25. Sean X e Y espacios de Hilbert reales y sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado. Sean X_0 e Y_0 espacios de Hilbert continuamente contenidos en X e Y , respectivamente. Si $A(X_0) \subset Y_0$, entonces $A \in \mathcal{L}(X_0, Y_0)$.⁵

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente notar que el gráfico de $A : X_0 \rightarrow Y_0$, $Gr(A) = \{(x, A(x)) \mid x \in X_0\}$ es cerrado. En efecto, si $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X_0$ es tal que $x_k \rightarrow x$ en X_0 y $A(x_k) \rightarrow y$ en Y_0 , puesto que $x_k \rightarrow x$ en X y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, tenemos que $A(x_k) \rightarrow A(x)$ en Y , y ya que también $A(x_k) \rightarrow y$ en Y , se sigue que $A(x) = y$. \square

Recordamos que $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ es tal que $\mathcal{A}(x)$ es una matriz simétrica para todo $x \in \Omega$, y además, uniformemente definida positiva (ver (6.1)) y Lipschitz (ver (6.2)).

Consideramos los dos problemas siguientes:

- Dada f , hallar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cuya forma variacional es el siguiente

Problema de Dirichlet

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(8.9) \quad \int_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teniendo en cuenta que $u \in H_0^1(\Omega)$, se tiene que⁶

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \lesssim \int_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla u = \int_{\Omega} f u \leq \|f\|_{\Omega} \|u\|_{\Omega} \leq \|f\|_{\Omega} \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

y así, el operador $A : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ definido por $Af = u$ es acotado, es decir,

$$\|Af\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\Omega}, \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

⁵Si X e Y son espacios de Hilbert, $\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ es lineal y acotado}\}$.

⁶En toda la Parte II de esta tesis, utilizaremos “ \lesssim ”, para indicar “ $\leq C$ ”, donde la constante C puede depender de la dimensión d , de la triangulación inicial \mathcal{T}_0 y de su regularidad $\kappa_{\mathcal{T}}$, del grado polinomial ℓ , y de constantes asociadas a los datos del Problema 3, que denotamos $\mathbf{D} := \{a, b\}$. Cuando haya dependencia del autovalor que estamos aproximando, ésta se establecerá explícitamente.

De [Sav98, Teorema 3] se sigue que $u \in H^{1+r}(\Omega)$, para cualquier $r \in (0, 1/2)$, y del Lema 8.25, puesto que $A(L^2(\Omega)) \subset H^{1+r}(\Omega)$, se sigue que

$$(8.10) \quad \|u\|_{H^{1+r}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\Omega}.$$

- Dadas f y g , hallar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla u) + \bar{c}u = f & \text{en } \Omega \\ (\mathcal{A}\nabla u) \cdot \vec{n} = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\bar{c} > 0$ es una constante, y \vec{n} denota el versor normal exterior sobre $\partial\Omega$. La forma variacional en este caso es el siguiente

Problema de Neumann

Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\partial\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(8.11) \quad \int_{\Omega} (\mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v + \bar{c}u) = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Usando el Teorema de Trazas (Teorema 1.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &\lesssim \int_{\Omega} (\mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla u + \bar{c}u^2) = \int_{\Omega} f u + \int_{\partial\Omega} g u \leq \|f\|_{\Omega} \|u\|_{\Omega} + \|g\|_{\partial\Omega} \|u\|_{\partial\Omega} \\ &\lesssim (\|f\|_{\Omega} + \|g\|_{\partial\Omega}) \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

y así, el operador $A : L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ definido por $A(f, g) = u$ es acotado, es decir,

$$\|A(f, g)\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\Omega} + \|g\|_{\partial\Omega}, \quad \forall f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\partial\Omega).$$

De [Sav98, Teorema 4] se sigue que $u \in H^{1+r}(\Omega)$, para cualquier $r \in (0, 1/2)$, y del Lema 8.25, puesto que $A(L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)) \subset H^{1+r}(\Omega)$, se sigue que

$$(8.12) \quad \|u\|_{H^{1+r}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\Omega} + \|g\|_{\partial\Omega}.$$

Finalmente mostramos que la condición de regularidad requerida por la Hipótesis 8.1 se satisface para los tres problemas que presentamos en el Capítulo 6. Más precisamente, demostramos que si $u \in \mathbb{V}$ satisface

$$a(u, v) = b(w, v), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

para alguna $w \in \mathbb{W}$ dada, entonces

$$\|u\|_{H^{1+r}(\Omega)} \lesssim \|w\|_b,$$

donde los espacios \mathbb{V} y \mathbb{W} , y las formas bilineales a y b son las definidas para cada uno de los ejemplos en el Capítulo 6.

1. El problema elíptico asociado al Problema tipo Dirichlet (6.4) es:

Dada $w \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \mathcal{B}wv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Este problema se corresponde con el Problema de Dirichlet (8.9), con $f = \mathcal{B}w \in L^2(\Omega)$. De la estimación de regularidad (8.10) se sigue que

$$\|u\|_{H^{1+r}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\Omega} = \|\mathcal{B}w\|_{\Omega} \lesssim \|w\|_{\Omega},$$

para cualquier $r \in (0, 1/2)$.

2. El problema elíptico asociado al Problema de Steklov (6.9) es:

Dada $w \in L^2(\partial\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v + cuv) = \int_{\partial\Omega} \rho wv, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

o equivalentemente,

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v + \bar{c}uv) = \int_{\Omega} (\bar{c} - c)uv + \int_{\partial\Omega} \rho wv, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

donde $\bar{c} := \int_{\Omega} c > 0$. Este problema se corresponde con el Problema de Neumann (8.11), con $f = (\bar{c} - c)u \in L^2(\Omega)$ y $g = \rho w \in L^2(\partial\Omega)$. De la estimación de regularidad (8.12) y del hecho que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|w\|_{\partial\Omega}$ se sigue que

$$\|u\|_{H^{1+r}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\Omega} + \|g\|_{\partial\Omega} \lesssim \|u\|_{\Omega} + \|w\|_{\partial\Omega} \lesssim \|w\|_{\partial\Omega},$$

para cualquier $r \in (0, 1/2)$.

3. Por último, el problema elíptico asociado al Problema de Steklov \mathcal{A} -armónico (6.10) es:

Dada $w \in L^2(\partial\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} \rho uv = \int_{\partial\Omega} \rho wv, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

o equivalentemente,

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}\nabla u \cdot \nabla v + uv) = \int_{\Omega} uv + \int_{\partial\Omega} \rho(w - u)v, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

Este problema se corresponde con el Problema de Neumann (8.11), con $f = u \in L^2(\Omega)$ y $g = \rho(w - u) \in L^2(\partial\Omega)$. De la estimación de regularidad (8.12) y del hecho que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|w\|_{\partial\Omega}$ se sigue que

$$\|u\|_{H^{1+r}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\Omega} + \|g\|_{\partial\Omega} \lesssim \|u\|_{\Omega} + \|w - u\|_{\partial\Omega} \lesssim \|u\|_{\Omega} + \|w\|_{\partial\Omega} + \|u\|_{\partial\Omega} \lesssim \|w\|_{\partial\Omega},$$

para cualquier $r \in (0, 1/2)$.

Convergencia de MEF adaptativos para problemas de autovalores

Consideramos nuevamente el

Problema 3. (Problema de Autovalores)

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{V}$ tales que

$$\begin{cases} a(u, v) = \lambda b(u, v), & \forall v \in \mathbb{V}, \\ \|u\|_b = 1, \end{cases}$$

con $\mathbb{V} = H_{\Gamma}^1(\Omega)$, para algún $\Gamma \subset \partial\Omega$. En el Teorema 7.5 vimos que si \mathbb{V} está densa y compactamente contenido en un espacio de Hilbert \mathbb{W} , y que si $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ son formas bilineales, simétricas, acotadas y coercitivas, este problema tiene una sucesión numerable de autovalores positivos y para cada uno de éstos existe un espacio (de dimensión finita) de autofunciones asociadas, el cual, para cada autovalor fijo, puede ser considerado como la solución del problema. En consecuencia, el análisis de convergencia de métodos de aproximación implica demostrar que la sucesión de autofunciones discretas obtenida por el algoritmo se acerca tanto como se quiera al espacio de autofunciones correspondiente. En particular, buscamos aproximar un autovalor fijo λ del Problema 3 y el autoespacio asociado.

En este capítulo probamos la convergencia (sin orden) de algoritmos adaptativos que usan *cualquiera* de las estrategias de marcado *razonables* descritas en la Sección 1.4.1.

Por otro lado, es importante remarcar que los estimadores de error a posteriori conocidos hasta el momento son una cota superior para el error sólo cuando las mallas son suficientemente finas, como veremos en el Teorema 10.7. Sin embargo, demostraremos la convergencia partiendo de cualquier malla inicial, que es lo que en realidad se observa en la práctica.

Cabe mencionar además, que hasta ahora los únicos resultados de convergencia para métodos de elementos finitos adaptativos para problemas de autovalores han sido presentados en [GG09, Gia08, DXZ08], en donde se demuestra convergencia partiendo de una malla suficientemente fina, utilizando la estrategia de Dörfler para el marcado. Si bien este nuevo resultado por sí solo

no provee un orden de convergencia, es bastante general debido al contexto de hipótesis en el que será demostrado.

Como en el capítulo anterior, consideramos un autovalor fijo $\lambda = \lambda_{j_0}$ del Problema 3. Presentamos el algoritmo adaptativo para aproximar λ y el conjunto de autofunciones normalizadas correspondiente \tilde{E}_λ .

Algoritmo 5.

Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω . Poner $k = 0$.

1. $(\lambda_k, u_k) := \text{RESOLVER}(\mathcal{T}_k)$.
2. $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k} := \text{ESTIMAR}(\lambda_k, u_k, \mathcal{T}_k)$.
3. $\mathcal{M}_k := \text{MARCAR}(\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}, \mathcal{T}_k)$.
4. $\mathcal{T}_{k+1} := \text{REFINAR}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k, n)$.
5. Incrementar k y volver al paso 1.

Ahora describimos en detalle cada paso de este algoritmo. Recordemos que j_0 es el índice del autovalor λ del Problema 3 que deseamos aproximar.¹ Dada la triangulación $\mathcal{T}_k \in \mathbb{T}$, el módulo RESOLVER calcula el j_0 -ésimo autovalor del Problema 5 con $\mathcal{T} = \mathcal{T}_k$, es decir, $\lambda_k := \lambda_{j_0, \mathcal{T}_k}$, y una autofunción correspondiente $u_k \in \mathbb{V}_k := \mathbb{V}_{\mathcal{T}_k}$.² Por lo tanto, λ_k y u_k satisfacen

$$(9.1) \quad \begin{cases} a(u_k, v_k) = \lambda_k b(u_k, v_k), & \forall v_k \in \mathbb{V}_k, \\ \|u_k\|_b = 1. \end{cases}$$

Dada \mathcal{T}_k y la correspondiente salida (λ_k, u_k) de RESOLVER, el módulo ESTIMAR calcula estimadores de error a posteriori $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

- **Confiabilidad:** Esto significa que los estimadores son una cota superior para el residuo.

Más precisamente, si $\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle := a(u_k, v) - \lambda_k b(u_k, v)$ denota el residuo de u_k aplicado a v , se cumple que

$$(9.2) \quad |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k(T) \|\nabla v\|_{\omega_k(T)}, \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

- **Estabilidad:** Esto significa que

$$(9.3) \quad \eta_k(T) \leq C_{est} \|u_k\|_{\mathbb{V}(\omega_k(T))}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_k,$$

¹Recordemos que en la sucesión de autovalores, los que son múltiples aparecen tantas veces como su multiplicidad.

²Recordemos que $\mathbb{V}_\mathcal{T} := \{v \in \mathbb{V} \mid v|_T \in \mathcal{P}_\ell(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}\}$, donde $\ell \in \mathbb{N}$ es un grado polinomial fijo.

y de aquí que,

$$(9.4) \quad \eta_k(\mathcal{T}_k) := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k^2(T) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_\eta,$$

donde las constantes $C_{est}, C_\eta > 0$ pueden depender de $d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}$ y Λ_0 .

Basado en los indicadores de error $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}$, el módulo MARCAR selecciona un subconjunto \mathcal{M}_k de elementos de \mathcal{T}_k , mediante alguna estrategia de marcado *razonable* (ver (1.9)).

Finalmente, el módulo REFINAR es el explicado en la Sección 1.4.1.

Así, partiendo de una triangulación inicial \mathcal{T}_0 , la iteración de los pasos 1–5 genera una sucesión de mallas $\{\mathcal{T}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{T}$ y las correspondientes salidas $(\lambda_k, u_k), \{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}, \mathcal{M}_k$ de los módulos RESOLVER, ESTIMAR y MARCAR, respectivamente.

9.1. Confiabilidad y estabilidad de los estimadores de error

Usando diferentes enfoques, se han construido estimadores de error a posteriori para problemas de autovalores tipo Dirichlet en los trabajos de Verfürth [Ver94, Ver96], de Larson [Lar00], de Durán, Padra y Rodríguez [DPR03], y de Giani y Graham [GG09].

Recordemos que $\mathbb{V}_0 := \{v \in \mathbb{V} \mid b(v, v) = 0\}$. Para $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$, el *residuo* $\mathbf{R}(v) \in \mathbb{V}'$ está dado por

$$\langle \mathbf{R}(v), w \rangle := a(v, w) - \Lambda(v)b(v, w), \quad \forall w \in \mathbb{V},$$

donde recordamos que $\Lambda(v) = \frac{a(v, v)}{b(v, v)}$ denota el cociente de Rayleigh de v .

Dada $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, suponemos que para cada $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0$ podemos definir un *residuo interior* $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \in L^2(\Omega)$, y un *residuo de salto* $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \in L^2(\Sigma_{\mathcal{T}})$, de modo que se cumpla la relación fundamental:

$$(9.5) \quad \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), w \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})w + \int_{\partial T} J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})w \right), \quad \forall w \in \mathbb{V}.$$

Notemos que para cada uno de los problemas presentados en el Capítulo 6, hemos definido $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ y $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ de modo que satisfagan (9.5) (ver Secciones 6.1.2, 6.2.2 y 6.3.1).

En base al residuo interior y al residuo de salto, como explicamos en la Sección 1.4.2, definimos los *estimadores de error local* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T)$ por

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T) := H_T^2 \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T^2 + H_T \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}^2, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y el *estimador de error global* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ como $\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T)$.

Si $(\lambda_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})$ es un autopar del Problema 5, entonces

$$\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v_{\mathcal{T}} \rangle = 0, \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}},$$

y como una consecuencia inmediata del Teorema 1.15 tenemos el siguiente

TEOREMA 9.1 (Confiabilidad de los estimadores). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si $(\lambda_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})$ es un autopar del Problema 5, entonces*

$$|\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), v \rangle| \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; T) \|\nabla v\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}, \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Por otro lado, en el Apéndice II al final de este capítulo demostramos que para los problemas de autovalores presentados en el Capítulo 6 se cumple que

$$(9.6) \quad \eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) \lesssim \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + (1 + \Lambda(v_{\mathcal{T}})) \|v_{\mathcal{T}}\|_T, \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0.$$

De la desigualdad (8.4) se sigue que

$$\Lambda(u_{\mathcal{T}}) \leq \Lambda_0 = \lambda_{j+R-1, \mathcal{T}_0}, \quad \forall u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}},$$

es decir, una vez que fijamos la malla inicial \mathcal{T}_0 y el autovalor λ a aproximar, este cociente está acotado uniformemente para $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. En consecuencia, $\Lambda(v_{\mathcal{T}})$ en la desigualdad (9.6) está acotado para $v_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$, y por lo tanto, se satisface la relación de estabilidad (9.3).

9.2. Convergencia del algoritmo adaptativo

La demostración de convergencia consta esencialmente de dos pasos. Primero demostraremos que la sucesión de autopares discretos $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ tiene una subsucesión que converge a un par límite $(\lambda_{\infty}, u_{\infty}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}$; lo que es una consecuencia del anidamiento de las mallas (ver Teorema 9.2 debajo). En segundo lugar probaremos que el residuo de u_{∞} es cero, y así $(\lambda_{\infty}, u_{\infty})$ será un autopar del problema continuo en \mathbb{V} . En este punto, el uso de una estrategia de marcado razonable es fundamental (ver Teoremas 9.5 y 9.6 debajo).

Finalmente, veremos que la sucesión completa converge a $\tilde{E}_{\lambda_{\infty}}$, es decir, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_a(u_k, \tilde{E}_{\lambda_{\infty}}) = 0.$$

Consideramos el espacio límite $\mathbb{V}_{\infty} := \overline{\bigcup_k \mathbb{V}_k}^{\mathbb{V}}$, y notamos que \mathbb{V}_{∞} es un espacio de Hilbert con el producto escalar heredado de \mathbb{V} . El siguiente resultado será clave para todo este capítulo, y en su demostración se usa la hipótesis de compacidad $\mathbb{V} \subset\subset \mathbb{W}$.

TEOREMA 9.2 (Convergencia a un par límite). Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de autopares calculada mediante el Algoritmo 5. Existen $\lambda_\infty \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k$, y $u_\infty \in \mathbb{V}_\infty$ y una subsucesión $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ tal que

$$u_{k_m} \longrightarrow u_\infty \quad \text{en } \mathbb{V}.$$

Más aún, el par $(\lambda_\infty, u_\infty)$ satisface

$$(9.7) \quad \begin{cases} a(u_\infty, v) = \lambda_\infty b(u_\infty, v), & \forall v \in \mathbb{V}_\infty, \\ \|u_\infty\|_b = 1. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de autopares calculada mediante el Algoritmo 5. Puesto que \mathcal{T}_{k+1} es siempre un refinamiento de \mathcal{T}_k , $\mathbb{V}_k \subset \mathbb{V}_{k+1}$, y por (7.19) y (7.20) tenemos que $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión monótona decreciente acotada inferiormente por el j_0 -ésimo autovalor λ del Problema 3. Por lo tanto, existe $\lambda_\infty \geq \lambda$ tal que $\lambda_k \searrow \lambda_\infty$.

De (9.1) se sigue que

$$(9.8) \quad \|u_k\|_a^2 = a(u_k, u_k) = \lambda_k b(u_k, u_k) = \lambda_k \|u_k\|_b^2 = \lambda_k \rightarrow \lambda_\infty,$$

y por lo tanto $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ está acotada en \mathbb{V}_∞ . Luego, existe una subsucesión $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ débilmente convergente en \mathbb{V}_∞ a una función $u_\infty \in \mathbb{V}_\infty$, esto es,

$$(9.9) \quad u_{k_m} \longrightarrow u_\infty \quad \text{débilmente en } \mathbb{V}.$$

Puesto que \mathbb{V} está compactamente contenido en \mathbb{W} , podemos extraer una subsucesión de $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$, que aún denotamos $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$, tal que

$$(9.10) \quad u_{k_m} \longrightarrow u_\infty \quad \text{en } \mathbb{W}.$$

Probamos ahora que se satisface (9.7), esto es, que $(\lambda_\infty, u_\infty)$ es un autopar en \mathbb{V}_∞ . Sea $K \in \mathbb{N}_0$ y $v_K \in \mathbb{V}_K$. Para $k_m \geq K$, puesto que $\mathbb{V}_K \subset \mathbb{V}_{k_m}$ tenemos que $a(u_{k_m}, v_K) = \lambda_{k_m} b(u_{k_m}, v_K)$; y si $m \rightarrow \infty$, obtenemos $a(u_\infty, v_K) = \lambda_\infty b(u_\infty, v_K)$. Ya que $K \in \mathbb{N}_0$ y $v_K \in \mathbb{V}_K$ son arbitrarios, por la densidad de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{V}_k$ en \mathbb{V}_∞ tenemos que

$$(9.11) \quad a(u_\infty, v) = \lambda_\infty b(u_\infty, v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_\infty.$$

Por otro lado, debido a que $\|u_{k_m}\|_b = 1$, considerando (9.10) concluimos que $\|u_\infty\|_b = 1$. Teniendo en cuenta (9.11) se tiene que $\|u_\infty\|_a^2 = \lambda_\infty \|u_\infty\|_b^2 = \lambda_\infty$, y de (9.8) se sigue que $\|u_{k_m}\|_a^2 = \lambda_{k_m} \rightarrow \lambda_\infty = \|u_\infty\|_a^2$. Finalmente, esta última conclusión junto a (9.9) implican que

$$u_{k_m} \longrightarrow u_\infty \quad \text{(fuertemente) en } \mathbb{V},$$

lo que completa la demostración. \square

OBSERVACIÓN 9.3. Es importante notar que de *cualquier* subsucesión $\{(\lambda_{k_m}, u_{k_m})\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ de la sucesión original $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, podemos extraer otra sucesión $\{(\lambda_{k_{m_p}}, u_{k_{m_p}})\}_{p \in \mathbb{N}_0}$, tal que $u_{k_{m_p}}$ converge en \mathbb{V} a algún elemento $\tilde{u}_\infty \in \mathbb{V}_\infty$ que satisface

$$\begin{cases} a(\tilde{u}_\infty, v) = \lambda_\infty b(\tilde{u}_\infty, v), & \forall v \in \mathbb{V}_\infty, \\ \|\tilde{u}_\infty\|_b = 1. \end{cases}$$

Este hecho será usado en la prueba de nuestro resultado principal de convergencia (ver Teorema 9.7 debajo).

La prueba de que $\mathbf{R}(u_\infty) = 0$ está basada en la idea de Siebert [Sie08] que consiste en probar primero que los estimadores sobre los elementos marcados tienden a cero, y luego la convergencia a cero de $\mathbf{R}(u_{k_m})$ (débilmente en \mathbb{V}').

LEMA 9.4 (Estimador sobre los elementos marcados). *Sea $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ una subsucesión de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ convergente a u_∞ dada por el Teorema 9.2. Entonces,*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{T \in \mathcal{M}_{k_m}} \eta_{k_m}(T) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar la notación, denotamos por $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ a la subsucesión $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$, y por $\{\mathcal{T}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ a la sucesión de mallas correspondientes $\{\mathcal{T}_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$. Sea $T_k \in \mathcal{M}_k$ tal que $\eta_k(T_k) = \max_{T \in \mathcal{M}_k} \eta_k(T)$. Usando la estabilidad de los estimadores (9.3) tenemos que

$$(9.12) \quad \eta_k(T_k) \leq C_{est} \|u_k\|_{\mathbb{V}(\omega_k(T_k))} \leq C_{est} \|u_k - u_\infty\|_{\mathbb{V}} + C_{est} \|u_\infty\|_{\mathbb{V}(\omega_k(T_k))}.$$

Ahora bien, el primer término del lado derecho de (9.12) tiende a cero por el Teorema 9.2, y puesto que $T_k \in \mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k^0$, por el Lema 1.27 tenemos que³

$$|\omega_k(T_k)| \lesssim H_{T_k}^d \leq \|h_k \chi_{\Omega_k^0}\|_{L^\infty(\Omega)}^d \rightarrow 0, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

y así, el segundo término en el lado derecho de (9.12) también tiende a cero, lo que concluye la demostración de este lema. \square

³Recordemos que $h_k := h_{T_k} \in L^\infty(\Omega)$ es la función constante a trozos tal que $h_k|_T := H_T$, para todo $T \in \mathcal{T}_k$ (ver Definición 1.25).

TEOREMA 9.5 (Convergencia débil del Residuo). *Sea $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ una subsucesión de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ convergente a u_∞ dada por el Teorema 9.2. Entonces,*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathbf{R}(u_{k_m}), v \rangle = 0, \quad \text{para toda } v \in \mathbb{V}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como en la demostración del lema anterior, denotamos por $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ a la subsucesión $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$, y por $\{\mathcal{T}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ a la sucesión $\{\mathcal{T}_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$. Primero probamos que el resultado vale para $v \in H^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$, y luego usamos un argumento de densidad para probar el resultado en todo \mathbb{V} . Sean $p \in \mathbb{N}$ y $k > p$. Por la Definición 1.26 tenemos que $\mathcal{T}_p^+ \subset \mathcal{T}_k^+ \subset \mathcal{T}_k$. Sea $v_k \in \mathbb{V}_k$ el interpolante de Scott-Zhang de v dado en la Sección 1.3. Puesto que $\langle \mathbf{R}(u_k), v_k \rangle = 0$, usando la confiabilidad de los estimadores (9.2), y la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que⁴

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| &= |\langle \mathbf{R}(u_k), v - v_k \rangle| \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_k(T) \|\nabla(v - v_k)\|_{\omega_k(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_p^+} \eta_k(T) \|\nabla(v - v_k)\|_{\omega_k(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_p^+} \eta_k(T) \|\nabla(v - v_k)\|_{\omega_k(T)} \\ &\lesssim \eta_k(\mathcal{T}_p^+) \|\nabla(v - v_k)\|_{\Omega_p^+} + \eta_k(\mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_p^+) \|\nabla(v - v_k)\|_{\Omega_p^0}. \end{aligned}$$

De (9.4) se sigue que $\eta_k(\mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_p^+) \leq \eta_k(\mathcal{T}_k) \leq C_\eta$, y por lo tanto, usando la propiedad (1.7),

$$|\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle| \lesssim \left(\eta_k(\mathcal{T}_p^+) + C_\eta \|h_p \chi_{\Omega_p^0}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) |v|_{H^2(\Omega)}.$$

Para demostrar que $\langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Debido al Lema 1.27, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$C_\eta \|h_p \chi_{\Omega_p^0}\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon.$$

Por otro lado, puesto que $\mathcal{T}_p^+ \subset \mathcal{T}_k^+ \subset \mathcal{T}_k$ y que la estrategia de marcado es razonable (ver (1.9)),

$$\eta_k(\mathcal{T}_p^+) \leq (\#\mathcal{T}_p^+)^{1/2} \max_{T \in \mathcal{T}_p^+} \eta_k(T) \leq (\#\mathcal{T}_p^+)^{1/2} \max_{T \in \mathcal{M}_k} \eta_k(T).$$

Ahora, por el Lema 9.4, podemos elegir $K > p$ tal que $\eta_k(\mathcal{T}_p^+) < \varepsilon$, para todo $k > K$, ya que p está fijo, y por lo tanto también $\#\mathcal{T}_p^+$.

Resumiendo, hemos probado que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbf{R}(u_k), v \rangle = 0, \quad \text{para toda } v \in H^2(\Omega) \cap \mathbb{V}.$$

Finalmente, ya que $H^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$ es denso en \mathbb{V} , este límite también es cero para toda $v \in \mathbb{V}$. \square

⁴ $\eta_k(\Upsilon)$ denota $(\sum_{T \in \Upsilon} \eta_k^2(T))^{1/2}$, para todo $\Upsilon \subset \mathcal{T}_k$.

Como consecuencia de la convergencia débil a cero de $\mathbf{R}(u_{k_m})$ probamos ahora que $(\lambda_\infty, u_\infty)$ es un autopar del Problema 3.

TEOREMA 9.6 (El par límite es un autopar). *El par límite $(\lambda_\infty, u_\infty)$ del Teorema 9.2 es un autopar del Problema 3. Esto es, $(\lambda_\infty, u_\infty)$ satisface*

$$\begin{cases} a(u_\infty, v) = \lambda_\infty b(u_\infty, v), & \forall v \in \mathbb{V}, \\ \|u_\infty\|_b = 1. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\lambda_\infty, u_\infty)$ dado por el Teorema 9.2. Puesto que $\|u_\infty\|_b = 1$, resta probar que

$$\langle \mathbf{R}(u_\infty), v \rangle = a(u_\infty, v) - \lambda_\infty b(u_\infty, v) = 0, \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Sea $v \in \mathbb{V}$. Si $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ denota una subsucesión de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ convergente a u_∞ dada por el Teorema 9.2, entonces

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{R}(u_\infty), v \rangle| &= |\langle \mathbf{R}(u_\infty) - \mathbf{R}(u_{k_m}), v \rangle + \langle \mathbf{R}(u_{k_m}), v \rangle| \\ &\leq |a(u_\infty - u_{k_m}, v)| + |b(\lambda_\infty u_\infty - \lambda_{k_m} u_{k_m}, v)| + |\langle \mathbf{R}(u_{k_m}), v \rangle| \\ &\leq \|u_\infty - u_{k_m}\|_a \|v\|_a + \|\lambda_\infty u_\infty - \lambda_{k_m} u_{k_m}\|_b \|v\|_b + |\langle \mathbf{R}(u_{k_m}), v \rangle|. \end{aligned}$$

Puesto que $\lambda_{k_m} \rightarrow \lambda_\infty$ y $u_{k_m} \rightarrow u_\infty$ (en \mathbb{V} y en \mathbb{W}), el Teorema 9.5 implica que el lado derecho de la última desigualdad tiende a cero cuando m tiende a infinito. Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{R}(u_\infty), v \rangle = 0, \quad \text{para toda } v \in \mathbb{V},$$

como queríamos demostrar. \square

Presentamos ahora una primera versión del resultado de convergencia general.

TEOREMA 9.7 (Convergencia del Algoritmo 5). *Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión completa de autopares calculados a través del Algoritmo 5. Entonces existe un autovalor λ_∞ del Problema 3 tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_\infty \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_a(u_k, \tilde{E}_{\lambda_\infty}) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Para λ_∞ dado por el Teorema 9.2, tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_\infty$, y por el Teorema 9.6, λ_∞ es un autovalor del Problema 3. Para demostrar que $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_a(u_k, \tilde{E}_{\lambda_\infty}) = 0$ usamos un argumento de contradicción. Si esto no fuera cierto, existiría un número $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ tal que

$$(9.13) \quad \text{dist}_a(u_{k_m}, \tilde{E}_{\lambda_\infty}) > \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

De la Observación 9.3 se sigue que es posible extraer una subsucesión de $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ que converge a algún elemento $\tilde{u}_\infty \in \mathbb{V}_\infty$. Siguiendo los mismos argumentos del Teorema 9.6, \tilde{u}_∞ es una autofunción del Problema 3 correspondiente al mismo autovalor λ_∞ . Esto es, una subsucesión de $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ converge a un elemento de $\tilde{E}_{\lambda_\infty}$, lo que contradice (9.13) y completa la prueba. \square

Hemos demostrado que la sucesión de autovalores discretos converge a un autovalor del problema continuo, y que la sucesión de autofunciones discretas converge al conjunto de autofunciones correspondientes. Pero aún queda un interrogante: Teniendo en cuenta que hemos elegido λ_k como el j_0 -ésimo autovalor del problema discreto sobre \mathcal{T}_k , ¿es cierto que $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge al j_0 -ésimo autovalor del problema continuo? La respuesta es afirmativa para una amplia clase de problemas, pero no necesariamente para todos. Pueden existir algunos casos patológicos en los que tratando de aproximar el j_0 -ésimo autovalor, la convergencia sea a uno mayor. A continuación establecemos una condición sobre el Problema 3 que resulta suficiente para garantizar la convergencia al autovalor que se desea aproximar.

DEFINICIÓN 9.8 (No degeneración de problemas de autovalores). Decimos que el Problema 3 es *no degenerado* si siempre que u sea una autofunción, no existe un subconjunto abierto no vacío \mathcal{O} de Ω tal que $u|_{\mathcal{O}}$ sea polinomial.

TEOREMA 9.9 (Convergencia del Algoritmo 5). *Supongamos que el Problema 3 es no degenerado. Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de autopares generados por el Algoritmo 5, y sea λ el j_0 -ésimo autovalor del Problema 3. Entonces,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_a(u_k, \tilde{E}_\lambda) = 0.$$

Este teorema es una consecuencia inmediata del Teorema 9.7 y del siguiente lema que establece que si el problema es no degenerado, $h_k \rightarrow 0$ uniformemente. En una primera impresión, puede resultar confuso que un resultado así sea válido para mallas adaptativas. Sin embargo, si analizamos la situación con más detenimiento, nos daremos cuenta que esto es una consecuencia natural de la convergencia del método adaptativo y de la no degeneración del problema. También es importante notar que la convergencia uniforme a cero de h_k no contradice los principios de la adaptatividad y los resultados de aproximación no lineal, puesto que aunque la convergencia es uniforme, la malla puede ser muy fina alrededor de las singularidades en comparación con la situación lejos de las singularidades. Más precisamente, convergencia uniforme del tamaño de

la malla no implica casi uniformidad de la sucesión de mallas. Esta situación de algún modo está reflejada en las construcciones explícitas de mallas óptimas dadas en [Gri85, GM08].

LEMA 9.10. *Sea $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de funciones de tamaño de la malla obtenidas con el Algoritmo 5. Si el Problema 3 es no degenerado, entonces $\|h_k\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Utilizamos un argumento de contradicción. Si $\|h_k\|_{L^\infty(\Omega)}$ no tendiera a cero, existirían $K \in \mathbb{N}_0$ y $T \in \mathcal{T}_K$ tales que $T \in \mathcal{T}_k$, para todo $k \geq K$. Sea $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ una subsucesión de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ convergente a u_∞ dada por el Teorema 9.2. Puesto que $\|u_{k_m} - u_\infty\|_{V(T)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, y que $u_{k_m}|_T \in \mathcal{P}_\ell(T)$, para todo m tal que $k_m \geq K$; usando que $\mathcal{P}_\ell(T)$ es un espacio de dimensión finita concluimos que

$$(9.14) \quad u_\infty|_T \in \mathcal{P}_\ell(T).$$

El Teorema 9.6 afirma que u_∞ es una autofunción del Problema 3 y así (9.14) contradice la hipótesis de que el problema es no degenerado. \square

Es importante notar que la convergencia a cero de h_k no es una hipótesis sino una *consecuencia* del hecho de que una subsucesión converge a una autofunción u_∞ y de que el problema es no degenerado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9.9. Teniendo en cuenta el Teorema 9.7, sólo resta ver que λ_k converge al j_0 -ésimo autovalor del Problema 3. Por el Lema 9.10, ésto sigue de la estimación a priori dada en el Teorema 8.7. \square

9.3. Apéndice I. Algunos comentarios sobre la no degeneración de problemas de autovalores

En este apéndice establecemos algunas condiciones sobre los coeficientes de algunos de los problemas de autovalores que presentamos en el Capítulo 6 que garantizan su no degeneración. Haremos uso del siguiente hecho fundamental [Han94]:

Si u es solución de una ecuación elíptica lineal de segundo orden cuyo coeficiente principal es Lipschitz y uniformemente elíptico, entonces u no puede ser idénticamente cero sobre un conjunto abierto de Ω , a menos que sea nula sobre todo Ω .

LEMA 9.11 (No degeneración de problemas de autovalores). *Consideremos los problemas de autovalores (6.4) y (6.9) dados en el Capítulo 6. Recordemos que \mathcal{A} es Lipschitz y uniformemente definida positiva.*

1. (El problema tipo Dirichlet es no degenerado). Si \mathcal{A} es lineal a trozos y \mathcal{B} es constante a trozos, entonces el problema (6.4), que consiste en hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ tales que

$$\int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Omega} \mathcal{B} uv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es no degenerado.

2. (El problema de Steklov es no degenerado). Si \mathcal{A} es lineal a trozos y c es constante a trozos, entonces el problema (6.9), que consiste en hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \neq u \in H^1(\Omega)$ tales que

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v + cuv) = \lambda \int_{\partial\Omega} \rho uv, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

es no degenerado.

DEMOSTRACIÓN.

1. Supongamos por el contrario que el problema tipo Dirichlet es degenerado. Entonces existe una autofunción u asociada a un autovalor λ , y un subconjunto abierto no vacío \mathcal{O} de Ω tal que $u|_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}_t(\mathcal{O})$, para algún $t \in \mathbb{N}$. Redefiniendo \mathcal{O} si fuera necesario concluimos que $\mathcal{A}|_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{O})$ y que \mathcal{B} es constante sobre \mathcal{O} . Entonces

$$-\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla u) = \lambda \mathcal{B} u, \quad \text{en } \mathcal{O}.$$

Puesto que $u|_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}_t(\mathcal{O})$, tenemos que $-\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla u) \in \mathcal{P}_{t-1}(\mathcal{O})$, y la última ecuación implica que $u|_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}_{t-1}(\mathcal{O})$. Repitiendo este argumento finalmente obtenemos que

$$u|_{\mathcal{O}} \equiv 0,$$

que contradice el resultado de Han.

2. Análogamente, si existiera una autofunción u asociada a un autovalor λ , tal que $u|_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}_t(\mathcal{O})$, para algún $t \in \mathbb{N}$ y para algún subconjunto abierto no vacío \mathcal{O} de Ω , para el cual $\mathcal{A}|_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{O})$ y c es constante sobre \mathcal{O} , entonces

$$-\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla u) + cu = 0, \quad \text{en } \mathcal{O}.$$

Puesto que $u|_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}_t(\mathcal{O})$, tendríamos que $-\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla u) \in \mathcal{P}_{t-1}(\mathcal{O})$, y así que $u|_{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}_{t-1}(\mathcal{O})$. Como antes, concluiríamos que

$$u|_{\mathcal{O}} \equiv 0,$$

lo que nuevamente contradice el resultado de Han. □

OBSERVACIÓN 9.12. El Problema de Steklov \mathcal{A} -armónico (6.10) puede ser degenerado ya que (λ, u) con $\lambda = 1$ y $u(x, y) = xy$, es un autopar de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \vec{n} = \lambda u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$.

9.4. Apéndice II. Estabilidad de los estimadores de error para problemas de autovalores particulares

En este apéndice demostramos que se satisface la estimación (9.6) para los tres problemas de autovalores presentados en el Capítulo 6. Como vimos, esto garantiza la estabilidad de los estimadores de error local dada en (9.3), propiedad que fue necesaria para demostrar la convergencia del Algoritmo 5.

Damos ahora la prueba de la estimación (9.6), donde hacemos uso del Teorema 1.4 de Traza y de las desigualdades inversas dadas en el Teorema 1.6 y en la Observación 1.7.

TEOREMA 9.13 (Estabilidad local de los estimadores para los problemas del Capítulo 6). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Para toda $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0$,*

$$\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) \lesssim \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + (1 + \Lambda(v_{\mathcal{T}}))\|v_{\mathcal{T}}\|_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}.$$

DEMOSTRACIÓN.

[1] *Problema tipo Dirichlet* (6.4). Puesto que \mathcal{A} es Lipschitz y que \mathcal{B} es acotada, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T &= \|-\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}}) - \Lambda(v_{\mathcal{T}})\mathcal{B}v_{\mathcal{T}}\|_T \leq \|-\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}})\|_T + \Lambda(v_{\mathcal{T}})\|\mathcal{B}v_{\mathcal{T}}\|_T \\ &\leq \|(\nabla \cdot \mathcal{A}) \cdot \nabla v_{\mathcal{T}}\|_T + \|\mathcal{A} : D^2 v_{\mathcal{T}}\|_T + \Lambda(v_{\mathcal{T}})\|\mathcal{B}v_{\mathcal{T}}\|_T \\ &\lesssim \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_T + \|D^2 v_{\mathcal{T}}\|_T + \Lambda(v_{\mathcal{T}})\|v_{\mathcal{T}}\|_T, \end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad inversa dada en la Observación 1.7 se sigue que

$$(9.15) \quad H_T \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T \lesssim \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_T + \Lambda(v_{\mathcal{T}})\|v_{\mathcal{T}}\|_T.$$

Por otro lado, si S es un lado de T interior a Ω , y si T_1 y T_2 son los elementos que comparten S ,

$$\begin{aligned} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_S &= \left\| \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}})|_{T_i} \cdot \vec{n}_i \right\|_S \leq \sum_{i=1,2} \left\| (\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}})|_{T_i} \cdot \vec{n}_i \right\|_S \leq \sum_{i=1,2} \|\mathcal{A}|_{T_i}\|_{L^\infty(S)} \|\nabla v_{\mathcal{T}}|_{T_i}\|_S \\ &\lesssim \sum_{i=1,2} H_T^{-1/2} \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_{T_i} \lesssim H_T^{-1/2} \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(S)}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Teorema 1.4 de traza y la desigualdad inversa de la Observación 1.7.

Por lo tanto,

$$(9.16) \quad H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T} \lesssim \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}.$$

Considerando (9.15) y (9.16) obtenemos la afirmación para este caso.

[2] *Problema de Steklov* (6.9). Siguiendo los mismos pasos del caso anterior para el residuo interior obtenemos

$$(9.17) \quad H_T \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T \lesssim \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_T + \|v_{\mathcal{T}}\|_T.$$

Para el residuo de salto, como en **[1]** se tiene que

$$\|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_S \lesssim H_T^{-1/2} \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(S)},$$

si S es un lado de T interior a Ω . Por otro lado, si S es un lado de T que está sobre $\partial\Omega$, usando el Teorema 1.4 de traza y la desigualdad inversa del Teorema 1.6,

$$\begin{aligned} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_S &= \|\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}} \cdot \vec{n} - \Lambda(v_{\mathcal{T}})\rho v_{\mathcal{T}}\|_S \leq \|\mathcal{A}\nabla v_{\mathcal{T}} \cdot \vec{n}\|_S + \|\Lambda(v_{\mathcal{T}})\rho v_{\mathcal{T}}\|_S \\ &\lesssim H_T^{-1/2} \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_T + \Lambda(v_{\mathcal{T}})H_T^{-1/2} \|v_{\mathcal{T}}\|_T. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(9.18) \quad H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T} \lesssim \|\nabla v_{\mathcal{T}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + \Lambda(v_{\mathcal{T}})\|v_{\mathcal{T}}\|_T.$$

Considerando (9.17) y (9.18) concluimos la demostración para este caso.

[3] *Problema de Steklov \mathcal{A} -armónico* (6.10). Este caso sigue de las acotaciones del caso anterior.

□

Estimaciones de error a posteriori para problemas de autovalores

En este capítulo presentamos estimaciones de error a posteriori que serán útiles para demostrar la optimalidad de un MEF adaptativo en la aproximación del

Problema 3. (Problema de Autovalores)

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{V}$ tales que

$$\begin{cases} a(u, v) = \lambda b(u, v), & \forall v \in \mathbb{V} \\ \|u\|_b = 1 \end{cases}$$

donde $\mathbb{V} = H_\Gamma^1(\Omega)$, para algún $\Gamma \subset \partial\Omega$. Como vimos en la Sección 9.1, el *residuo* $\mathbf{R}(v) \in \mathbb{V}'$ de $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_0$ está dado por

$$(10.1) \quad \langle \mathbf{R}(v), w \rangle = a(v, w) - \Lambda(v)b(v, w), \quad \forall w \in \mathbb{V},$$

donde recordamos que $\Lambda(v) = \frac{a(v,v)}{b(v,v)}$ es el cociente de Rayleigh de v .

Dada $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, para cada $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0$ se cumple la relación fundamental:

$$(10.2) \quad \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), w \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})w + \int_{\partial T} J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})w \right), \quad \forall w \in \mathbb{V},$$

donde $R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \in L^2(\Omega)$ denota el *residuo interior*, y $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) \in L^2(\Sigma_{\mathcal{T}})$ el *residuo de salto*. En base a estos últimos, como explicamos en la Sección 1.4.2, los *estimadores de error local* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T)$ vienen dados por

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T) := H_T^2 \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_T^2 + H_T \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})\|_{\partial T}^2, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

y el *estimador de error global* $\eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ por

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T).$$

En general, si $\Upsilon \subset \mathcal{T}$,

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; \Upsilon) := \sum_{T \in \Upsilon} \eta_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T).$$

Por otro lado, la *oscilación local* $\text{osc}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T)$ viene dada por

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T) := H_T^2 \|R_T - \overline{R_T}\|_T^2 + H_T \|J_T - \overline{J_T}\|_{\partial T}^2, \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

donde $\overline{R_T}|_T$ es la proyección en $L^2(T)$ de $R_T := R_T(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(T)$, y para cada lado $S \subset \partial T$, $\overline{J_T}|_S$ es la proyección en $L^2(S)$ de $J_T := J_T(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(S)$. La *oscilación global* $\text{osc}_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ está dada por

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T),$$

y siempre que Υ sea un subconjunto de \mathcal{T} , $\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; \Upsilon)$ denotará la suma $\sum_{T \in \Upsilon} \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T)$.

10.1. Estimaciones de error a posteriori

En la Sección 9.1 establecimos la confiabilidad y la estabilidad de los estimadores de error local, propiedades que resultaron suficientes para demostrar la convergencia de un algoritmo adaptativo general (ver Sección 9.2). En esta sección presentamos algunas propiedades de estos estimadores de error a posteriori que no son necesarias para la convergencia, pero son útiles para probar la optimalidad.

Recientemente en [AP08] para el caso $d = 2$ y en [Zup08] para el caso $d = 3$, se han estudiado estimaciones a posteriori para un Problema de autovalores de Steklov como el que presentamos en la Sección 6.2.

Comenzamos estableciendo una cota superior para el error, pero antes presentamos dos resultados auxiliares cuyas pruebas son elementales.

LEMA 10.1. *Si $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ satisfacen $\|v_1\|_b = \|v_2\|_b = 1$, entonces*

$$b(\mu_1 v_1 - \mu_2 v_2, v_1 - v_2) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} b(v_1 - v_2, v_1 - v_2).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ con $\|v_1\|_b = \|v_2\|_b = 1$. Puesto que b es simétrica,

$$\begin{aligned} b(\mu_1 v_1 - \mu_2 v_2, v_1 - v_2) &= \mu_1 b(v_1, v_1 - v_2) - \mu_2 b(v_2, v_1 - v_2) \\ &= \mu_1 b(v_1, v_1) - \mu_1 b(v_1, v_2) - \mu_2 b(v_2, v_1) + \mu_2 b(v_2, v_2) \\ &= \mu_1 - (\mu_1 + \mu_2) b(v_1, v_2) + \mu_2 \\ &= (\mu_1 + \mu_2) (1 - b(v_1, v_2)) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} (2 - 2b(v_1, v_2)) \\ &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} (b(v_1, v_1) + b(v_2, v_2) - 2b(v_1, v_2)) \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} b(v_1 - v_2, v_1 - v_2).$$

□

Como en los capítulos anteriores, denotamos con $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a la sucesión de autovalores del Problema 3, y en particular, consideramos cierto autovalor fijo $\lambda = \lambda_{j_0}$, y denotamos con $j \in \mathbb{N}$ al índice que satisface $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+R-1} < \lambda_{j+R}$, y $\lambda_{j-1} < \lambda_j$, cuando $j > 1$, es decir, λ es un autovalor con multiplicidad $R \geq 1$, y j es el índice más pequeño que satisface $\lambda = \lambda_j$.

Recordamos que \tilde{E}_λ es el espacio de autofunciones b -normalizadas asociadas a λ , y que $\tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}}$ es el correspondiente espacio de aproximación dados en la Definición 8.12. Por otro lado, recordamos también que $\tilde{\mathcal{P}}_\lambda$ es el operador de proyección sobre \tilde{E}_λ introducido en la Definición 8.15.

LEMA 10.2. *Para toda $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}}$, tenemos que*

$$\frac{\lambda + \Lambda(u_{\mathcal{T}})}{2} \text{dist}_b(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_\lambda)^2 \leq \text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_\lambda)^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_\lambda^{\mathcal{T}}$. Definamos $u := \tilde{\mathcal{P}}_\lambda u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_\lambda$. Entonces, puesto que $b(u, u_{\mathcal{T}})$ es no negativo (ver Observación 8.13) y que $\Lambda(u_{\mathcal{T}}) \geq \lambda$ (ver (8.4)) tenemos que

$$\begin{aligned} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 &= a(u, u) + a(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}}) - 2a(u, u_{\mathcal{T}}) = \lambda + \Lambda(u_{\mathcal{T}}) - 2\lambda b(u, u_{\mathcal{T}}) \\ &\geq \lambda + \Lambda(u_{\mathcal{T}}) - (\lambda + \Lambda(u_{\mathcal{T}}))b(u, u_{\mathcal{T}}) = (\lambda + \Lambda(u_{\mathcal{T}}))(1 - b(u, u_{\mathcal{T}})) \\ &= \frac{\lambda + \Lambda(u_{\mathcal{T}})}{2} b(u - u_{\mathcal{T}}, u - u_{\mathcal{T}}) = \frac{\lambda + \Lambda(u_{\mathcal{T}})}{2} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_b^2. \end{aligned}$$

La prueba de este lema se completa teniendo en cuenta que u realiza tanto la a -distancia como la b -distancia al conjunto \tilde{E}_λ (ver Observación 8.13). □

Usando los dos lemas anteriores podemos demostrar la siguiente estimación superior, cuya prueba para un caso simplificado del Problema tipo Dirichlet (6.4) se encuentra en [DPR03].

LEMA 10.3 (Estimación superior). *Existe una constante $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}) > 0$ tal que para todos los autopares $(\lambda_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})$ del Problema 5,*

$$\text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_\lambda) \leq C \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) + \left(\frac{\lambda + \lambda_{\mathcal{T}}}{2} \right)^{1/2} \text{dist}_b(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_\lambda).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\lambda_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})$ un autopar del Problema 5 y sea $u := \tilde{\mathcal{P}}_\lambda u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_\lambda$. Puesto que $\langle \mathbf{R}(u), u - u_{\mathcal{T}} \rangle = 0$, teniendo en cuenta (10.1) se sigue que

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 = -\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), u - u_{\mathcal{T}} \rangle + b(\lambda u - \lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}, u - u_{\mathcal{T}}),$$

y usando el Lema 10.1 y la confiabilidad de los estimadores dada en el Teorema 9.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 &= -\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), u - u_{\mathcal{T}} \rangle + \frac{\lambda + \lambda_{\mathcal{T}}}{2} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_b^2 \\ &\leq C\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a + \frac{\lambda + \lambda_{\mathcal{T}}}{2} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_b^2, \end{aligned}$$

para alguna constante $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}) > 0$. Finalmente, teniendo en cuenta el Lema 10.2 obtenemos la afirmación de este lema. \square

El siguiente resultado es una estimación superior local para la distancia entre dos soluciones en espacios anidados, y es esencial para demostrar la optimalidad de MEF adaptativos. Stevenson [Ste07] fue el primero en utilizar resultados de este tipo y posteriormente se usaron en [CKNS08, DXZ08].

LEMA 10.4 (Estimación superior local). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, y sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de \mathcal{T} . Sea \mathcal{R} el conjunto de elementos de \mathcal{T} que se refinaron para obtener \mathcal{T}_* , es decir, $\mathcal{R} = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_*$. Sean $(\lambda_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})$ y $(\lambda_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}_*})$ soluciones del Problema 5 en $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ y $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$, respectivamente. Entonces,*

$$\|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a \leq C\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) + \frac{\lambda_{\mathcal{T}_*} + \lambda_{\mathcal{T}}}{2} C_I^{ab} \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_b,$$

para alguna constante $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}) > 0$, donde C_I^{ab} es la constante dada en (7.10).

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}_*, \mathcal{R}, (\lambda_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})$ y $(\lambda_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}_*})$ como en las hipótesis. Si $e_{\mathcal{T}_*} := u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}$, análogamente a la demostración del lema anterior, teniendo en cuenta que $\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}_*}), e_{\mathcal{T}_*} \rangle = 0$, (10.1) y el Lema 10.1, tenemos que

$$(10.3) \quad \|e_{\mathcal{T}_*}\|_a^2 = -\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), e_{\mathcal{T}_*} \rangle + \frac{\lambda_{\mathcal{T}_*} + \lambda_{\mathcal{T}}}{2} \|e_{\mathcal{T}_*}\|_b^2.$$

Para el error $e_{\mathcal{T}_*} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ consideramos la aproximación $e_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ dada en la Observación 1.23. Usando (10.2), teniendo en cuenta que $e_{\mathcal{T}} \equiv e_{\mathcal{T}_*}$ sobre todos los elementos de $\mathcal{T} \setminus \mathcal{R}$, y las estimaciones (1.35), obtenemos

$$-\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), e_{\mathcal{T}_*} \rangle = -\langle \mathbf{R}(u_{\mathcal{T}}), e_{\mathcal{T}_*} - e_{\mathcal{T}} \rangle \leq \sqrt{2}C_{SZ} \sum_{T \in \mathcal{R}} \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; T) \|\nabla e_{\mathcal{T}_*}\|_{\omega_T(T)} \leq C\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) \|e_{\mathcal{T}_*}\|_a,$$

para alguna $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}) > 0$. De (10.3) se sigue que $\|e_{\mathcal{T}_*}\|_a^2 \leq C\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) \|e_{\mathcal{T}_*}\|_a + \frac{\lambda_{\mathcal{T}_*} + \lambda_{\mathcal{T}}}{2} \|e_{\mathcal{T}_*}\|_b^2$, y teniendo en cuenta (7.10) concluye la demostración. \square

Para demostrar la eficiencia de los estimadores de error serán necesarias las siguientes propiedades de localización:

Para todo $\omega \subset \overline{\Omega}$, si $u, v \in \mathbb{V}$ y $\text{sop}(v) \subset \omega$, entonces

$$(10.4) \quad a(u, v) \leq C_a^{loc} \|u\|_{\mathbb{V}(\omega)} \|v\|_{\mathbb{V}(\omega)} \quad \text{y} \quad b(u, v) \leq C_b^{loc} \|u\|_{\mathbb{V}(\omega)} \|v\|_{\mathbb{V}(\omega)},$$

para algunas constantes positivas C_a^{loc} y C_b^{loc} .

Es fácil ver que estas estimaciones se cumplen para las formas bilineales que definen los problemas de autovalores que presentamos en el Capítulo 6.

TEOREMA 10.5 (Cota inferior local discreta). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y fijemos $T \in \mathcal{T}$. Sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ el refinamiento de \mathcal{T} que se obtiene bisectando n_d veces¹ cada elemento de $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$. Sea \mathbb{V}_* un subespacio cerrado de \mathbb{V} tal que $\mathbb{V}_{\mathcal{T}_*} \subset \mathbb{V}_*$. Si $u_* \in \mathbb{V}_*$ satisface*

$$(10.5) \quad \begin{cases} a(u_*, v) = \Lambda(u_*) b(u_*, v), & \forall v \in \mathbb{V}_*, \\ \|u_*\|_b = 1, \end{cases}$$

entonces, para toda $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0$,

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}; T) &\lesssim \|u_* - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}(\omega_{\mathcal{T}}(T))} + \|\Lambda(u_*)u_* - \Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}(\omega_{\mathcal{T}}(T))} \\ &\quad + H_T \|R_{\mathcal{T}} - \overline{R_{\mathcal{T}}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + H_T^{\frac{1}{2}} \|J_{\mathcal{T}} - \overline{J_{\mathcal{T}}}\|_{\partial T}, \end{aligned}$$

donde $\overline{R_{\mathcal{T}}}|_{T'}$ denota la proyección de $R_{\mathcal{T}} := R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(T')$ en $L^2(T')$, para todo $T' \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$, y para cada lado $S \subset \partial T$, $\overline{J_{\mathcal{T}}}|_S$ la proyección de $J_{\mathcal{T}} := J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}})$ sobre $\mathcal{P}_{\ell-1}(S)$ en $L^2(S)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in \mathbb{V}_*$ con $\text{sop}(v) \subset \omega$, para $\omega \subset \overline{\Omega}$. Si $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0$, considerando que $u_* \in \mathbb{V}_*$ satisface (10.5) tenemos que

$$\langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), v \rangle = a(v_{\mathcal{T}}, v) - \Lambda(v_{\mathcal{T}})b(v_{\mathcal{T}}, v) = a(v_{\mathcal{T}} - u_*, v) - b(\Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}} - \Lambda(u_*)u_*, v),$$

y puesto que a y b satisfacen las propiedades de localización (10.4),

$$(10.6) \quad \langle \mathbf{R}(v_{\mathcal{T}}), v \rangle \lesssim (\|u_* - v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}(\omega)} + \|\Lambda(u_*)u_* - \Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}(\omega)}) \|v\|_{\mathbb{V}(\omega)}.$$

Teniendo en cuenta que el término $\|v_{\mathcal{T}} - u_*\|_{\mathbb{V}(\omega)}$ en (1.20) del Teorema 1.16 puede “reemplazarse” por los términos entre paréntesis de (10.6) completamos la demostración. \square

¹Recordemos que n_d es el número de bisecciones sobre un elemento necesarias para garantizar que aparecerán nuevos nodos sobre cada lado y en el interior del mismo.

El siguiente resultado es la cota inferior global para el error, cuya demostración para problemas tipo Dirichlet se encuentra en [DPR03], y para un problema de Steklov en [AP08]. Aquí obtenemos una versión unificada como consecuencia del Teorema 10.5.

TEOREMA 10.6 (Cota inferior global). *Existe una constante $C_L = C_L(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0) > 0$ tal que si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, entonces*

$$C_L \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}), \quad \forall u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Sea $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ y consideremos $u := \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}$. Del Teorema 10.5 con $\mathbb{V}_* = \mathbb{V}$ y $u_* = u$ se sigue que

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; T) &\lesssim \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}(\omega_{\mathcal{T}}(T))} + \|\lambda u - \Lambda(u_{\mathcal{T}})u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}(\omega_{\mathcal{T}}(T))} \\ &\quad + H_T \|R_{\mathcal{T}} - \overline{R_{\mathcal{T}}}\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + H_T^{\frac{1}{2}} \|J_{\mathcal{T}} - \overline{J_{\mathcal{T}}}\|_{\partial T}, \end{aligned}$$

para todo $T \in \mathcal{T}$. Sumando sobre todos los elementos $T \in \mathcal{T}$ obtenemos

$$(10.7) \quad \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) \lesssim \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} + \|\lambda u - \Lambda(u_{\mathcal{T}})u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} + \text{osc}_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|\lambda u - \Lambda(u_{\mathcal{T}})u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} &\leq \|\lambda u - \Lambda(u_{\mathcal{T}})u\|_{\mathbb{V}} + \|\Lambda(u_{\mathcal{T}})u - \Lambda(u_{\mathcal{T}})u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} \\ &= |\lambda - \Lambda(u_{\mathcal{T}})| \|u\|_{\mathbb{V}} + \Lambda(u_{\mathcal{T}}) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{V}} \\ &\lesssim (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\Lambda(u_{\mathcal{T}})}) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a \|u\|_a + \Lambda(u_{\mathcal{T}}) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a \\ &= \left[\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\Lambda(u_{\mathcal{T}})}) + \Lambda(u_{\mathcal{T}}) \right] \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a. \end{aligned}$$

Esta estimación junto al hecho que $\lambda \leq \Lambda(u_{\mathcal{T}}) \leq \Lambda_0 = \lambda_{j+R-1, \mathcal{T}_0}$ en (10.7), completan la demostración. \square

Terminamos esta sección con dos teoremas que establecen cotas superiores (global y local) para el error para mallas suficientemente finas en el caso que el autovalor λ es simple. El Teorema 8.21 nos permitirá absorber a la izquierda los términos de orden superior de los Lemas 10.3 y 10.4.

TEOREMA 10.7 (Cota superior global). *Supongamos que el autovalor $\lambda = \lambda_{j_0}$ del Problema 3 es simple. Entonces, existen una constante $C_U = C_U(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}) > 0$ y una constante positiva $\mathbf{H}_3 \leq \mathbf{H}_1$ tal que si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_3$, entonces*

$$\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq C_U \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}), \quad \text{para toda } u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Sea $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ y $\lambda_{\mathcal{T}} := \Lambda(u_{\mathcal{T}})$. Del Lema 10.3 y del Teorema 8.21 se sigue que

$$\text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq C\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) + \left(\frac{\lambda + \lambda_{\mathcal{T}}}{2}\right)^{1/2} C_{ab}H_{\mathcal{T}}^r \text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}),$$

para $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$, donde $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}) > 0$. La afirmación de este teorema se sigue notando que podemos elegir $\mathbf{H}_3 \leq \mathbf{H}_1$ de modo que $\sqrt{\Lambda_0}C_{ab}\mathbf{H}_3^r < \frac{1}{2}$, y así el segundo término en el lado derecho de la última estimación puede absorberse a la izquierda si $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_3$. \square

TEOREMA 10.8 (Cota superior local). *Supongamos que el autovalor $\lambda = \lambda_{j_0}$ del Problema 3 es simple. Sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea \mathcal{R} el conjunto de elementos de \mathcal{T} que se refinaron para obtener \mathcal{T}_* , es decir, $\mathcal{R} = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_*$. Entonces, existen una constante $C_{LU} = C_{LU}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}) > 0$ y $0 < \mathbf{H}_4 \leq \mathbf{H}_1$ tales que, si $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_4$,*

$$\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}) \leq C_{LU}\eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}), \quad \text{para toda } u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}_*$, y \mathcal{R} como en las hipótesis, y sea $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$. Del Lema 10.4 y de la Observación 8.22 se sigue que

$$\text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}) \leq C\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) + \frac{\lambda_{j_0, \mathcal{T}_*} + \lambda_{j_0, \mathcal{T}}}{2} C_I^{ab} 2(1 + \rho_{\lambda}) C_{apr} C_{reg} H_{\mathcal{T}}^r \text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}),$$

para $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$, con $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}) > 0$. Como en la prueba anterior, podemos elegir $\mathbf{H}_4 \leq \mathbf{H}_1$ de modo que $\Lambda_0 C_I^{ab} 2(1 + \rho_{\lambda}) C_{apr} C_{reg} \mathbf{H}_4^r < \frac{1}{2}$, y en consecuencia, el segundo término del lado derecho de la última estimación se puede absorber en el lado izquierdo, si $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_4$. \square

10.2. Reducción del estimador y de la oscilación

Análogamente a la Sección 4.2 para leyes de conservación, estudiamos los efectos del refinamiento en los estimadores de error y en los términos de oscilación. En el Apéndice I al final de este capítulo mostramos que la siguiente afirmación se cumple para los problemas de autovalores presentados en el Capítulo 6.

HIPÓTESIS 10.9 (Acotación global de $g_{\mathcal{T}}$). Para toda $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} g_T^2(v_T, w_T; T) \lesssim \|v_T - w_T\|_a^2 + \|\Lambda(v_T)v_T - \Lambda(w_T)w_T\|_b^2, \quad \forall v_T, w_T \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0,$$

donde $g_{\mathcal{T}}(v_T, w_T; T) = H_T \|R_{\mathcal{T}}(v_T) - R_{\mathcal{T}}(w_T)\|_T + H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v_T) - J_{\mathcal{T}}(w_T)\|_{\partial T}$, es la función que relaciona los indicadores de error y los términos de oscilación de dos funciones discretas v_T y w_T (ver (1.37) y (1.38) en la Sección 1.6.2).

OBSERVACIÓN 10.10. Utilizando el Lema 8.17 para acotar el segundo término en el lado derecho de la acotación de $g_{\mathcal{T}}$ dada en la Hipótesis 10.9 se sigue que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} g_T^2(v_T, w_T; T) \lesssim \left(1 + (C_I^{ab} \Lambda(v_T) + \sqrt{\Lambda(v_T)} + \sqrt{\Lambda(w_T)})^2\right) \|v_T - w_T\|_a^2,$$

para toda $v_T, w_T \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ con $\|v_T\|_b = \|w_T\|_b = 1$. Teniendo en cuenta (8.4) tenemos que

$$(10.8) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}} g_T^2(v_T, w_T; T) \leq C_E \|v_T - w_T\|_a^2, \quad \forall v_T, w_T \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}},$$

para alguna $C_E = C_E(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0) > 1$.

El siguiente resultado cuantifica la reducción del estimador debido al refinamiento. La prueba es la misma que la de la Proposición 4.6 para problemas no lineales.

PROPOSICIÓN 10.11 (Reducción del estimador). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sea $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ cualquier subconjunto de \mathcal{T} . Sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ obtenida de \mathcal{T} refinando al menos $n \geq 1$ veces los elementos de $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$. Si $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}$ entonces*

$$\eta_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}) \leq (1 + \delta) \left\{ \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) - (1 - 2^{-\frac{n}{d}}) \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{M}_{\mathcal{T}}) \right\} + (1 + \delta^{-1}) C_E \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a^2,$$

para todo $\delta > 0$, donde $C_E > 1$ es la constante dada en (10.8).

Por otro lado, en la siguiente proposición analizamos el cambio de la oscilación debido al refinamiento. La demostración es idéntica a la de la Proposición 4.7 para problemas no lineales.

PROPOSICIÓN 10.12 (Perturbación de la oscilación). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Si $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ es un refinamiento de \mathcal{T} ,*

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*) \leq 2 \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}; \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*) + 2C_E \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a^2, \quad \text{para toda } u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}_*} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*},$$

donde $C_E > 1$ es la constante dada en (10.8).

El próximo resultado es una consecuencia de la estimación (1.38) y de la cota dada en la Hipótesis 10.9, y será útil para probar la optimalidad del error en el Lema 11.3 en el capítulo siguiente.

LEMA 10.13. *Si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $(\lambda_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})$ es una solución del Problema 5, entonces*

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq C_{osc} (\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a^2), \quad \text{para toda } v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \text{ con } \|v_{\mathcal{T}}\|_b = 1,$$

para alguna constante $C_{osc} = C_{osc}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0) > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y $(\lambda_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})$ una solución del Problema 5. Sea $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tal que $\|v_{\mathcal{T}}\|_b = 1$.

□ Supongamos primero que $a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) \geq 0$. De (1.38), se sigue que

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; T) \leq 2(\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}; T) + g_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}}; T)), \quad \forall T \in \mathcal{T}.$$

Después de sumar sobre los elementos $T \in \mathcal{T}$, de la Hipótesis 10.9 se sigue que

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \lesssim \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \|\lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} - \Lambda(v_{\mathcal{T}}) v_{\mathcal{T}}\|_b^2.$$

Así, es suficiente probar que $\|\lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} - \Lambda(v_{\mathcal{T}}) v_{\mathcal{T}}\|_b$ está controlado por $\|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a$. Por un lado, si $\Lambda(v_{\mathcal{T}}) \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} - \Lambda(v_{\mathcal{T}}) v_{\mathcal{T}}\|_b^2 &= \lambda_{\mathcal{T}} + \Lambda(v_{\mathcal{T}}) - 2\lambda_{\mathcal{T}} \Lambda(v_{\mathcal{T}}) b(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) \\ &= \lambda_{\mathcal{T}} + \Lambda(v_{\mathcal{T}}) - 2\Lambda(v_{\mathcal{T}}) a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) \\ &\leq \lambda_{\mathcal{T}} + \Lambda(v_{\mathcal{T}}) - 2a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) = \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $\Lambda(v_{\mathcal{T}}) \leq 1$, el Lema 8.17 implica que

$$\begin{aligned} \|\lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} - \Lambda(v_{\mathcal{T}}) v_{\mathcal{T}}\|_b &\leq (C_I^{ab} \lambda_{\mathcal{T}} + \sqrt{\lambda_{\mathcal{T}}} + \sqrt{\Lambda(v_{\mathcal{T}})}) \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a \\ &\leq (C_I^{ab} \Lambda_0 + \sqrt{\Lambda_0} + 1) \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación de este lema vale cuando $a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) \geq 0$.

□ Si suponemos ahora que $a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) < 0$, usando lo demostrado en □ tenemos que

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq C_{osc} (\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(-v_{\mathcal{T}}) + \|u_{\mathcal{T}} + v_{\mathcal{T}}\|_a^2) = C_{osc} (\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) + \|u_{\mathcal{T}} + v_{\mathcal{T}}\|_a^2).$$

La demostración se completa teniendo en cuenta que $\|u_{\mathcal{T}} + v_{\mathcal{T}}\|_a^2 \leq \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a^2$. □

10.3. Apéndice I. Sobre la Hipótesis 10.9 de acotación de $g_{\mathcal{T}}$ para problemas de autovalores particulares

Recordemos que

$$g_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}; T) = H_T \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - R_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_T + H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - J_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_{\partial T},$$

mide la diferencia entre los estimadores de error y los términos de oscilación de dos funciones discretas $v_{\mathcal{T}}$ y $w_{\mathcal{T}}$ (ver (1.37) y (1.38)).

En este apéndice demostramos que la acotación de $g_{\mathcal{T}}$ requerida en la Hipótesis 10.9 vale para los tres problemas de autovalores presentados en el Capítulo 6. Esta estimación fue importante

para demostrar la reducción del estimador (Proposición 10.11) y la perturbación de la oscilación (Proposición 10.12) al refinar una malla, resultados que serán fundamentales para demostrar la optimalidad de un algoritmo adaptativo en el capítulo siguiente.

Las técnicas necesarias para demostrar la acotación de $g_{\mathcal{T}}$ son similares a las utilizadas en el Teorema 9.13 para demostrar la estabilidad de los estimadores de error. En particular, se utilizan nuevamente el Teorema 1.4 de traza y las desigualdades inversas del Teorema 1.6 y de la Observación 1.7.

TEOREMA 10.14 (Acotación de $g_{\mathcal{T}}$ para los problemas del Capítulo 6). *Si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, entonces para toda $v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus \mathbb{V}_0$, se cumple que*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} g_T^2(v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}; T) \lesssim \|v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \|\Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}} - \Lambda(w_{\mathcal{T}})w_{\mathcal{T}}\|_b^2.$$

DEMOSTRACIÓN.

1 *Problema tipo Dirichlet (6.4).* Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sean $v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ no nulas. Sea $T \in \mathcal{T}$. Por un lado, para el residuo interior tenemos que

$$\|R_T(v_{\mathcal{T}}) - R_T(w_{\mathcal{T}})\|_T \leq \|\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}))\|_T + \|\mathcal{B}(\Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}} - \Lambda(w_{\mathcal{T}})w_{\mathcal{T}})\|_T.$$

Tratamos el primer término del lado derecho de la desigualdad anterior análogamente a como lo hicimos en la demostración del Teorema 9.13, teniendo en cuenta que \mathcal{A} es Lipschitz, para obtener

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}))\|_T &\leq \|(\nabla \cdot \mathcal{A}) \cdot \nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_T + \|\mathcal{A} : D^2(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_T \\ &\lesssim \|\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_T + \|D^2(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_T. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad inversa de la Observación 1.7 obtenemos que

$$(10.9) \quad H_T \|R_T(v_{\mathcal{T}}) - R_T(w_{\mathcal{T}})\|_T \lesssim \|\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_T + \|\Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}} - \Lambda(w_{\mathcal{T}})w_{\mathcal{T}}\|_T.$$

Tratando al residuo de salto análogamente al Teorema 9.13, usando el Teorema 1.4 de traza y la desigualdad inversa mencionada, obtenemos

$$(10.10) \quad H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - J_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_{\partial T} \lesssim \|\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)}.$$

Considerando (10.9) y (10.10), y sumando sobre todos los elementos $T \in \mathcal{T}$, obtenemos la afirmación para este caso.

[2] *Problema de Steklov* (6.9). Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sean $v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \setminus H_0^1(\Omega)$. Sea $T \in \mathcal{T}$. La diferencia entre los residuos interiores se puede acotar con la misma técnica del caso anterior. Así,

$$\begin{aligned} \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - R_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_T &\leq \|\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}))\|_T + \|c(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_T \\ &\lesssim \|\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_T + \|v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_T, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$(10.11) \quad H_T \|R_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - R_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_T \lesssim \|v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_{H^1(T)}.$$

Para la diferencia entre los residuos de salto, teniendo en cuenta la definición, es suficiente notar que

$$H_T^{1/2} \|\mathcal{A}\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_{\partial T} \lesssim \|\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)},$$

y que

$$H_T^{1/2} \|\rho(\Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}} - \Lambda(w_{\mathcal{T}})w_{\mathcal{T}})\|_{\partial T \cap \partial \Omega} \lesssim \|\Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}} - \Lambda(w_{\mathcal{T}})w_{\mathcal{T}}\|_{\partial T \cap \partial \Omega}.$$

En consecuencia,

$$(10.12) \quad H_T^{1/2} \|J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) - J_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}})\|_{\partial T} \lesssim \|\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_{\omega_{\mathcal{T}}(T)} + \|\Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}} - \Lambda(w_{\mathcal{T}})w_{\mathcal{T}}\|_{\partial T \cap \partial \Omega}.$$

Finalmente, considerando (10.11) y (10.12), y sumando sobre todos los elementos $T \in \mathcal{T}$, obtenemos la afirmación para este caso.

[3] *Problema de Steklov \mathcal{A} -armónico* (6.10). Este caso se sigue con los mismos argumentos del caso [2], teniendo en cuenta que

$$\|\rho(\Lambda(v_{\mathcal{T}}) - 1)v_{\mathcal{T}} - \rho(\Lambda(w_{\mathcal{T}}) - 1)w_{\mathcal{T}}\|_{\partial T \cap \partial \Omega} \lesssim \|\Lambda(v_{\mathcal{T}})v_{\mathcal{T}} - \Lambda(w_{\mathcal{T}})w_{\mathcal{T}}\|_{\partial T \cap \partial \Omega} + \|v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_{\partial T \cap \partial \Omega},$$

y que

$$\|v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_{\partial T \cap \partial \Omega} \lesssim H_T^{-1/2} \|v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_T + H_T^{1/2} \|\nabla(v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}})\|_T \lesssim H_T^{-1/2} \|v_{\mathcal{T}} - w_{\mathcal{T}}\|_T,$$

donde hemos usado el Teorema 1.4 de traza y la desigualdad inversa del Teorema 1.6. \square

Casi-optimalidad de un MEF adaptativo para problemas de autovalores

En todo este capítulo suponemos que $\lambda = \lambda_{j_0}$ es un autovalor simple del

Problema 3. (Problema de Autovalores)

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{V}$ tales que

$$\begin{cases} a(u, v) = \lambda b(u, v), & \forall v \in \mathbb{V}, \\ \|u\|_b = 1, \end{cases}$$

donde $\mathbb{V} = H_{\Gamma}^1(\Omega)$, para algún $\Gamma \subset \partial\Omega$. Recordamos que \mathbb{V} está densa y compactamente contenido en un espacio de Hilbert \mathbb{W} , y que $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ son formas bilineales, simétricas, acotadas y coercitivas. Puesto que λ es un autovalor simple, el conjunto de autofunciones b -normalizadas es de la forma $\tilde{E}_{\lambda} = \{u, -u\}$, y para cada $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, el espacio de aproximación está dado por $\tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}} = \{u_{\mathcal{T}}, -u_{\mathcal{T}}\}$, donde $u_{\mathcal{T}}$ es una autofunción asociada al j_0 -ésimo autovalor $\lambda_{j_0, \mathcal{T}}$ del Problema 5, que denotamos por $\lambda_{\mathcal{T}}$.

En el Capítulo 9 hemos presentado el Algoritmo 5 para la aproximación por MEF adaptativos de las soluciones del Problema 3, y hemos demostrado la convergencia del mismo. En este capítulo veremos que cuando el marcado se realiza con la estrategia de Dörfler, este algoritmo adaptativo produce una sucesión de mallas y soluciones aproximadas con la misma complejidad que las óptimas.

Recordamos que el sentido que damos a la palabra optimalidad está basado en el número N de grados de libertad o incógnitas necesarios para representar con un cierto error la autofunción deseada, y no en el tamaño global usual $H_{\mathcal{T}}$ de la malla. Específicamente, demostramos que si una autofunción puede aproximarse con un error de orden N^{-s} para algún $s > 0$, entonces la sucesión de soluciones discretas obtenidas con adaptatividad tiene el mismo orden de decaimiento en el error.

11.1. Optimalidad del error total y marcado óptimo

Comenzamos con el siguiente lema en el que acotamos el término mixto que aparece cuando tratamos de obtener una relación de ortogonalidad similar a la que existe para problemas elípticos lineales.

LEMA 11.1. *Existe una constante $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_\lambda) > 0$ tal que para toda $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$, se satisface que*

$$|a(u - u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}})| \leq C(H_{\mathcal{T}}^{2r} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a \|u - v_{\mathcal{T}}\|_b),$$

para $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ y $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, donde $u := \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}}$.¹

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ tal que $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$. Sea $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$, denotemos $u := \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}}$ y consideremos $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ arbitraria. Puesto que $a(u, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}) = \lambda b(u, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}})$ y que $a(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}) = \lambda_{\mathcal{T}} b(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}})$, del Lema 10.1 y del Teorema 8.21 se sigue que

$$\begin{aligned} |a(u - u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}})| &= |b(\lambda u - \lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}})| \\ &\leq |b(\lambda u - \lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - u)| + |b(\lambda u - \lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}, u - v_{\mathcal{T}})| \\ &= \left(\frac{\lambda + \lambda_{\mathcal{T}}}{2} \right) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_b^2 + |b(\lambda u - \lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}, u - v_{\mathcal{T}})| \\ &\leq \left(\frac{\lambda + \lambda_{\mathcal{T}}}{2} \right) C_{ab}^2 H_{\mathcal{T}}^{2r} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \|\lambda u - \lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}\|_b \|u - v_{\mathcal{T}}\|_b. \end{aligned}$$

La afirmación de este lema se sigue usando el hecho que $\|\lambda u - \lambda_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}\|_b \leq (C_I^{ab} \lambda + \sqrt{\lambda} + \sqrt{\Lambda_0}) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a$, lo cual se cumple por el Lema 8.17. \square

Como consecuencia del lema anterior, establecemos un resultado de casi ortogonalidad que servirá para demostrar luego un lema de Cea.

TEOREMA 11.2. *Existen una constante positiva $\mathbf{H}_5 \leq \mathbf{H}_1$ y $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_\lambda) > 0$ tales que si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ satisface $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_5$,*

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 \leq C \|u - v_{\mathcal{T}}\|_a^2, \quad \text{para toda } v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \text{ y } u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}},$$

donde $u := \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}}$.

¹Recordamos que $\mathbf{D} = \{a, b\}$ denota los datos del Problema 3, $\Lambda_0 = \lambda_{j_0, \tau_0}$ es una cota superior para λ y para $\lambda_{\mathcal{T}} = \lambda_{j_0, \mathcal{T}}$ para toda $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, como vimos en (8.4), y \mathbf{H}_1 y ρ_λ denotan el umbral y la constante de separación introducidos en la Sección 8.2.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ y sean $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$, $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$. Si $u := \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}}$, entonces

$$\|u - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 = \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 + 2a(u - u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}).$$

Por el Lema 11.1, para todo $\delta > 0$, si $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_1$,

$$\begin{aligned} |a(u - u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}})| &\leq C(H_{\mathcal{T}}^{2r} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a \|u - v_{\mathcal{T}}\|_b) \\ &\leq C \left[(\delta + H_{\mathcal{T}}^{2r}) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \frac{1}{\delta} \|u - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 \right], \end{aligned}$$

para alguna constante $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_{\lambda}) > 0$; y así,

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 \leq \|u - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 + C \left[(\delta + H_{\mathcal{T}}^{2r}) \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \frac{1}{\delta} \|u - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 \right].$$

Finalmente, podemos elegir $\delta > 0$ y $0 < \mathbf{H}_5 \leq \mathbf{H}_1$ de modo que

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 \leq C \|u - v_{\mathcal{T}}\|_a^2, \quad \text{si } H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_5.$$

□

Puesto que el estimador de error domina la oscilación, es decir, $\text{osc}_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) \leq \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}})$, usando la cota superior global (Teorema 10.7), tenemos que

$$\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq (C_U + 1) \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}), \quad u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}},$$

siempre que $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_3$, y teniendo en cuenta la cota inferior global (Teorema 10.6) llegamos a que

$$\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) \approx \left(\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \right)^{1/2}, \quad u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}.$$

La cantidad del lado derecho se llama *error total*, y puesto que los métodos adaptativos se controlan en base al estimador, la velocidad de convergencia se caracteriza en base a propiedades del error total. El siguiente resultado establece que las autofunciones discretas $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ son aproximaciones óptimas (salvo una constante) del autoespacio \tilde{E}_{λ} desde $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}$.

LEMA 11.3 (Lema de Cea). *Existe una constante $C_{Cea} = C_{Cea}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_{\lambda}) > 0$ tal que para toda $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_5$, si $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$,*

$$\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq C_{Cea} \inf_{\substack{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \\ \|v_{\mathcal{T}}\|_b=1}} \left(\text{dist}_a^2(v_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_5$, y sea $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$. Sea $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}$ tal que $\|v_{\mathcal{T}}\|_b = 1$. Sin perder generalidad, puesto que λ es un autovalor simple, podemos suponer que $u := \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}} = \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} v_{\mathcal{T}}$. Usando el Lema 10.13 y el Teorema 11.2 tenemos que para alguna $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_{\lambda}) > 0$,

$$\begin{aligned} \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) &\leq \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + C_{\text{osc}}(\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) + \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_a^2) \\ &\leq C(\|u - v_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}})) \\ &= C(\text{dist}_a^2(v_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}})). \end{aligned}$$

La demostración se completa teniendo en cuenta que $v_{\mathcal{T}}$ es arbitraria. \square

El siguiente resultado es una generalización de la ortogonalidad del error observada en problemas lineales simétricos. Este resultado se acerca a una relación de ortogonalidad exacta a medida que $H_{\mathcal{T}}$ se hace más pequeño, y es fundamental al momento de demostrar una propiedad de contracción para el error.

TEOREMA 11.4 (Casi ortogonalidad). *Existe una constante $C_O = C_O(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_{\lambda}) > 0$ tal que si $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ satisface $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_2$ y $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ es un refinamiento de \mathcal{T} , entonces*

$$(11.1) \quad \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq (1 + C_O H_{\mathcal{T}}^r) \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) - \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a^2,$$

para $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}$ satisfaciendo $\tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}} = \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}_*}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_2$ y sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de \mathcal{T} . Sean $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}$ tales que $u := \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}} = \tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}_*}$. Puesto que $\|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 = \|u - u_{\mathcal{T}_*}\|_a^2 + \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + 2a(u - u_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}})$, tenemos que

$$\|u - u_{\mathcal{T}_*}\|_a^2 \leq \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 - \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + 2|a(u - u_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}})|.$$

Puesto que $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$ y que $H_{\mathcal{T}_*} \leq H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_2 \leq \mathbf{H}_1$, del Lema 11.1 se sigue que para alguna $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_{\lambda}) > 0$,

$$|a(u - u_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}})| \leq C(H_{\mathcal{T}_*}^{2r} \|u - u_{\mathcal{T}_*}\|_a^2 + \|u - u_{\mathcal{T}_*}\|_a \|u - u_{\mathcal{T}}\|_b).$$

Finalmente, usando los Teoremas 8.21 y 8.23 y que $H_{\mathcal{T}_*} \leq H_{\mathcal{T}}$ tenemos que

$$|a(u - u_{\mathcal{T}_*}, u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}})| \leq C H_{\mathcal{T}}^r \|u - u_{\mathcal{T}}\|_a^2,$$

lo que completa la demostración. \square

Análogamente al caso de problemas no lineales tratados en la Parte I, hacemos la siguiente restricción sobre el parámetro de marcado θ , relacionada con la constante C_L en la cota inferior global (Teorema 10.6), la constante C_{LU} en la cota superior local (Teorema 10.8), y la constante C_E en la acotación global de $g_{\mathcal{T}}$ en (10.8).

HIPÓTESIS 11.5 (El parámetro de marcado θ). El parámetro de marcado θ en la estrategia de Dörfler descrita en la Sección 1.4.1, satisface $0 < \theta < \theta_0$ donde

$$\theta_0^2 := \frac{C_L}{1 + 2C_{LU}(1 + C_E)}.$$

El siguiente lema es consecuencia de la cota inferior global, de la cota superior local, de la perturbación de la oscilación (Proposición 10.12) y de la restricción anterior sobre el parámetro de marcado; y es el equivalente al Lema 4.12 para problemas no lineales.

LEMA 11.6 (Marcado óptimo). *Sea $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ con $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_4$. Sea $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}$ un refinamiento de \mathcal{T} y sea \mathcal{R} el conjunto de elementos de \mathcal{T} que se refinaron para obtener \mathcal{T}_* . Elijamos el parámetro de marcado θ según la Hipótesis 11.5 y definamos $\nu := \frac{1}{2}(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2}) > 0$. Sean $u_{\mathcal{T}} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}}$ y $u_{\mathcal{T}_*} \in \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}$ tales que $\text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}^{\mathcal{T}_*}) = \|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_a$. Si*

$$(11.2) \quad \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}) \leq \nu \left(\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \right),$$

entonces

$$\eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) \geq \theta \eta_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean \mathcal{T} , \mathcal{T}_* , \mathcal{R} , $u_{\mathcal{T}}$, $u_{\mathcal{T}_*}$ y ν como en las hipótesis del teorema. Usando la cota inferior global dada en el Teorema 10.6 y (11.2) obtenemos

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu)C_L\eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) &\leq (1 - 2\nu) \left(\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \right) \\ &\leq \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) - 2 \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) - 2 \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}). \end{aligned}$$

Puesto que

$$\|\tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a \leq \|\tilde{\mathcal{P}}_{\lambda} u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}_*}\|_a + \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a,$$

tenemos que $\text{dist}_a(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq \text{dist}_a(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) + \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a$, y por lo tanto,

$$(11.3) \quad \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_{\lambda}) \leq 2 \text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_{\lambda}) + 2 \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a^2.$$

Por otro lado, de la Proposición 10.12 se sigue que

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*) - 2 \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}; \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*) \leq 2C_E \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a^2,$$

y como además, $\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; T) \leq \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; T)$, para $T \in \mathcal{R} = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_*$, para los términos de oscilación tenemos que

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) - 2 \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}) \leq 2C_E \|u_{\mathcal{T}_*} - u_{\mathcal{T}}\|_a^2 + \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}).$$

Así, la última desigualdad y (11.3) implican que

$$(1 - 2\nu)C_L \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq 2 \|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_a^2 + 2C_E \|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}_*}\|_a^2 + \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}),$$

y de aquí, puesto que $H_{\mathcal{T}} \leq \mathbf{H}_4$, usando la cota superior local (Teorema 10.8),

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu)C_L \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) &\leq 2(1 + C_E)C_{LU} \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) + \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}) \\ &= (1 + 2C_{LU}(1 + C_E)) \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{(1 - 2\nu)C_L}{1 + 2C_{LU}(1 + C_E)} \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) \leq \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}; \mathcal{R}),$$

lo que completa la prueba ya que de la definición de ν se sigue que $\frac{(1-2\nu)C_L}{1+2C_{LU}(1+C_E)} = \theta^2$. \square

11.2. Propiedad de contracción del error

Siguiendo las ideas de [CKNS08] probamos en esta sección que el Algoritmo 5, usando la estrategia de Dörfler para el marcado, da una contracción de la suma de la energía del error más un múltiplo del estimador a posteriori, a partir de algún nivel de iteración \mathbf{k}_0 .

Concretamente, consideramos el siguiente algoritmo, cuyos pasos son idénticos a los del Algoritmo 5, salvo que en el módulo MARCAR elegimos el subconjunto \mathcal{M}_k de elementos de \mathcal{T}_k , utilizando la estrategia de marcado de Dörfler con parámetro θ descrita en la Sección 1.4.1.

Algoritmo 6.

Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω y sea θ un parámetro tal que $0 < \theta < 1$. Poner $k = 0$.

1. $(\lambda_k, u_k) := \text{RESOLVER}(\mathcal{T}_k)$.
2. $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k} := \text{ESTIMAR}(\lambda_k, u_k, \mathcal{T}_k)$.
3. $\mathcal{M}_k := \text{MARCAR}(\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}, \mathcal{T}_k, \theta)$.
4. $\mathcal{T}_{k+1} := \text{REFINAR}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k, n)$.
5. Incrementar k y volver al paso 1.

Como consecuencia de la casi ortogonalidad (11.1), de la reducción del estimador (Proposición 10.11) y de la cota superior global (Teorema 10.7) tenemos el siguiente

TEOREMA 11.7 (Propiedad de Contracción). *Supongamos que el Problema 3 es no degenerado (ver Definición 9.8). Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de autopares calculados a través del Algoritmo 6. Entonces, existen constantes $0 < \alpha, \gamma < 1$, que dependen de $d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0$, del número de bisecciones n realizadas sobre cada elemento marcado y del parámetro de marcado θ , tal que si $\eta_k := \eta_{\mathcal{T}_k}(u_k)$ denota el estimador de error global,*

$$\text{dist}_a^2(u_{k+1}, \tilde{E}_\lambda) + \gamma \eta_{k+1}^2 \leq \alpha^2 \left(\text{dist}_a^2(u_k, \tilde{E}_\lambda) + \gamma \eta_k^2 \right), \quad \text{si } k \geq \mathbf{k}_0,$$

para algún $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de autopares calculados a través del Algoritmo 6. Definamos la sucesión auxiliar $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ dada por $w_0 := u_0$, y $w_k = u_k$ o $-u_k$ de manera que se cumpla que $\tilde{\mathcal{P}}_\lambda w_k = \tilde{\mathcal{P}}_\lambda u_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual es posible porque λ es un autovalor simple. Notemos que $\text{dist}_a(w_k, \tilde{E}_\lambda) = \text{dist}_a(u_k, \tilde{E}_\lambda)$, $\text{osc}_{\mathcal{T}_k}(w_k) = \text{osc}_{\mathcal{T}_k}(u_k)$, y también que w_k y u_k tienen los mismos estimadores de error a posteriori, es decir, $\eta_{\mathcal{T}_k}(u_k; T) = \eta_{\mathcal{T}_k}(w_k; T)$, para todo $T \in \mathcal{T}_k$. Por lo tanto, podemos pensar que el algoritmo calcula la sucesión $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ en vez de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, puesto que la sucesión de mallas, los estimadores y los errores coincidirían.

Sea $u := \tilde{\mathcal{P}}_\lambda u_0$. Usaremos la notación $e_k := \text{dist}_a(u_k, \tilde{E}_\lambda) = \text{dist}_a(w_k, \tilde{E}_\lambda) = \|u - w_k\|_a$, y $\eta_k(\mathcal{M}_k) := \eta_{\mathcal{T}_k}(u_k; \mathcal{M}_k)$. Combinando la casi ortogonalidad (11.1) junto con la Proposición 10.11 con $\mathcal{T} = \mathcal{T}_k$ y $\mathcal{T}_* = \mathcal{T}_{k+1}$ tenemos para cualquier $\delta > 0$ que

$$\begin{aligned} e_{k+1}^2 + \gamma \eta_{k+1}^2 &\leq e_k^2 - \|w_{k+1} - w_k\|_a^2 + C_O H_{\mathcal{T}_k}^r e_k^2 \\ &\quad + (1 + \delta) \gamma \{ \eta_k^2 - \xi \eta_k^2(\mathcal{M}_k) \} + (1 + \delta^{-1}) C_E \gamma \|w_{k+1} - w_k\|_a^2, \end{aligned}$$

siempre que $H_{\mathcal{T}_k} \leq \mathbf{H}_2$, donde $\xi := 1 - 2^{\frac{n}{d}}$. Definiendo $\gamma := \frac{1}{(1 + \delta^{-1}) C_E}$ se sigue que

$$e_{k+1}^2 + \gamma \eta_{k+1}^2 \leq e_k^2 + (1 + \delta) \gamma \{ \eta_k^2 - \xi \eta_k^2(\mathcal{M}_k) \} + C_O H_{\mathcal{T}_k}^r e_k^2,$$

y la estrategia de Dörfler implica que $\eta_k(\mathcal{M}_k) \geq \theta \eta_k$, y así,

$$\begin{aligned} e_{k+1}^2 + \gamma \eta_{k+1}^2 &\leq e_k^2 + (1 + \delta) \gamma \eta_k^2 - (1 + \delta) \gamma \xi \theta^2 \eta_k^2 + C_O H_{\mathcal{T}_k}^r e_k^2 \\ &\leq e_k^2 + (1 + \delta) \gamma \eta_k^2 - (1 + \delta) \gamma \frac{\xi \theta^2}{2} \eta_k^2 - (1 + \delta) \gamma \frac{\xi \theta^2}{2} \eta_k^2 + C_O H_{\mathcal{T}_k}^r e_k^2. \end{aligned}$$

Ahora, usando la cota superior global (Teorema 10.7) y que $\gamma(1 + \delta) = \frac{\delta}{C_E}$ tenemos que

$$e_{k+1}^2 + \gamma\eta_{k+1}^2 \leq e_k^2 - \frac{\delta\xi\theta^2}{2C_U C_E} e_k^2 + (1 + \delta)\gamma \left(1 - \frac{\xi\theta^2}{2}\right) \eta_k^2 + C_O H_{T_k}^r e_k^2,$$

si $H_{T_k} \leq \min(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3)$. Si definimos

$$\alpha_1^2(\delta) := \left(1 - \frac{\delta\xi\theta^2}{2C_U C_E}\right), \quad \alpha_2^2(\delta) := \left(1 - \frac{\xi\theta^2}{2}\right)(1 + \delta),$$

entonces

$$e_{k+1}^2 + \gamma\eta_{k+1}^2 \leq \alpha_1^2(\delta)e_k^2 + \gamma\alpha_2^2(\delta)\eta_k^2 + C_O H_{T_k}^r e_k^2.$$

Así, el parámetro δ puede elegirse de modo que

$$0 < \alpha := \max\{\alpha_1(\delta), \alpha_2(\delta)\} < 1,$$

y por lo tanto,

$$e_{k+1}^2 + \gamma\eta_{k+1}^2 \leq \alpha^2(e_k^2 + \gamma\eta_k^2) + C_O H_{T_k}^r e_k^2.$$

Del Lema 9.10, sabemos que $H_{T_k} \rightarrow 0$ y en consecuencia, podemos elegir $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $H_{T_{\mathbf{k}_0}} \leq \min(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3)$ y que $C_O H_{T_k}^r \leq \frac{(1-\alpha^2)}{2}$, para todo $k \geq \mathbf{k}_0$.

Redefiniendo $\alpha^2 := \frac{1+\alpha^2}{2}$, finalmente obtenemos que

$$e_{k+1}^2 + \gamma\eta_{k+1}^2 \leq \alpha^2(e_k^2 + \gamma\eta_k^2), \quad \text{para todo } k \geq \mathbf{k}_0.$$

□

11.3. Casi-optimalidad del MEF adaptativo

Concluimos este capítulo demostrando que el Algoritmo 6 converge con velocidad óptima. Recordemos que dado $N \in \mathbb{N}_0$, \mathbb{T}_N denota el conjunto de todas las triangulaciones conformes que se obtienen por refinamiento de \mathcal{T}_0 y que tienen a lo sumo N elementos más que \mathcal{T}_0 . El menor error que se puede cometer al aproximar el conjunto de autofunciones \tilde{E}_λ asociado al autovalor λ del Problema 3 con elementos definidos sobre particiones en \mathbb{T}_N está dado por

$$\sigma(\lambda, \mathbf{D}; N) := \inf_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}_N} \inf_{\substack{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}} \\ \|v_{\mathcal{T}}\|_b = 1}} \left(\text{dist}_a^2(v_{\mathcal{T}}, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2(v_{\mathcal{T}}) \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $\mathbf{D} = \{a, b\}$ es el conjunto de datos del problema. Para $s > 0$, decimos que $(\lambda, \mathbf{D}) \in \mathbb{A}_s$ si

$$|(\lambda, \mathbf{D})|_s := \sup_{N \in \mathbb{N}_0} (N + 1)^s \sigma(\lambda, \mathbf{D}; N) < \infty.$$

En palabras, el autovalor pertenece a la clase \mathbb{A}_s si sus autofunciones se pueden aproximar *idealmente* con mallas adaptativas con una rapidez $(DOF_s)^{-s}$.

Antes del resultado de optimalidad, establecemos el siguiente resultado que es el equivalente al Lema 4.15 para problemas no lineales.

LEMA 11.8 (Cardinalidad de \mathcal{M}_k). *Supongamos que el Problema 3 es no degenerado (ver Definición 9.8). Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de autopares calculados a través del Algoritmo 6. Supongamos que el parámetro de marcado θ cumple la restricción dada en la Hipótesis 11.5. Entonces, si $(\lambda, \mathbf{D}) \in \mathbb{A}_s$, existe $\mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}$ ($\mathbf{k}_1 \geq \mathbf{k}_0$) tal que*

$$\#\mathcal{M}_k \leq \left(\frac{C_{Cea}}{\nu} \right)^{\frac{1}{2s}} |(\lambda, \mathbf{D})|_s^{\frac{1}{s}} \left(\text{dist}_a^2(u_k, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{\mathcal{T}_k}^2(u_k) \right)^{-\frac{1}{2s}}, \quad \text{para todo } k \geq \mathbf{k}_1,$$

donde $C_{Cea} = C_{Cea}(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_\lambda)$ es la constante del Lema 11.3 y $\nu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right) > 0$ la constante dada en el Lema 11.6.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de autopares calculados a través del Algoritmo 6. Sea $k \in \mathbb{N}_0$ fijo y sea $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$ una tolerancia que fijaremos luego. Puesto que $(\lambda, \mathbf{D}) \in \mathbb{A}_s$, del Lema 1.20 se sigue que existen una triangulación $\mathcal{T}_\varepsilon \in \mathbb{T}$ y una función $v_\varepsilon \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ con $\|v_\varepsilon\|_b = 1$ tales que

$$\#\mathcal{T}_\varepsilon - \#\mathcal{T}_0 \leq |(\lambda, \mathbf{D})|_s^{\frac{1}{s}} \varepsilon^{-\frac{1}{s}}, \quad \text{y} \quad \text{dist}_a^2(v_\varepsilon, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon}^2(v_\varepsilon) < \varepsilon^2.$$

Sea $\mathcal{T}_* := \mathcal{T}_\varepsilon \oplus \mathcal{T}_k$ la superposición de \mathcal{T}_ε y \mathcal{T}_k (ver Lema 1.13), y $u_{\mathcal{T}_*} \in \tilde{E}_{\lambda^*}^{\mathcal{T}_*}$ tal que $\text{dist}_a(u_k, \tilde{E}_{\lambda^*}^{\mathcal{T}_*}) = \|u_k - u_{\mathcal{T}_*}\|_a$. Puesto que $v_\varepsilon \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}_*}$, tenemos que $\text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon}(v_\varepsilon) \geq \text{osc}_{\mathcal{T}_*}(v_\varepsilon)$, y del Lema de Cea (Lema 11.3) se sigue que

$$\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}) \leq C_{Cea} \left(\text{dist}_a^2(v_\varepsilon, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon}^2(v_\varepsilon) \right) < C_{Cea} \varepsilon^2,$$

si $H_{\mathcal{T}_*} \leq \mathbf{H}_5$. Elijamos ε de modo que

$$\text{dist}_a^2(u_{\mathcal{T}_*}, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2(u_{\mathcal{T}_*}) < \nu \left(\text{dist}_a^2(u_k, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{\mathcal{T}_k}^2(u_k) \right) = C_{Cea} \varepsilon^2,$$

donde ν es la constante dada en el Lema 11.6. Así, este lema da

$$\eta_{\mathcal{T}_k}^2(u_k; \mathcal{R}_k) \geq \theta^2 \eta_{\mathcal{T}_k}^2(u_k),$$

siempre que $H_{\mathcal{T}_k} \leq \mathbf{H}_4$, donde \mathcal{R}_k es el conjunto de elementos de \mathcal{T}_k que se refinaron para obtener \mathcal{T}_* . Recordando que \mathcal{M}_k es un subconjunto *minimal* de \mathcal{T}_k que satisface la propiedad de Dörfler, usando el Lema 1.13 y teniendo en cuenta la elección de ε obtenemos que

$$\#\mathcal{M}_k \leq \#\mathcal{R}_k \leq \#\mathcal{T}_* - \#\mathcal{T}_k \leq \#\mathcal{T}_\varepsilon - \#\mathcal{T}_0$$

$$\leq |(\lambda, \mathbf{D})|_s^{\frac{1}{s}} \varepsilon^{-\frac{1}{s}} = \left(\frac{C_{Cea}}{\nu} \right)^{\frac{1}{2s}} |(\lambda, \mathbf{D})|_s^{\frac{1}{s}} \left(\text{dist}_a^2(u_k, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{T_k}^2(u_k) \right)^{-\frac{1}{2s}},$$

siempre que $H_{T_k} \leq \min(\mathbf{H}_4, \mathbf{H}_5)$.

Del Lema 9.10 se sigue que $H_{T_k} \rightarrow 0$, y así, podemos elegir $\mathbf{k}_1 \geq \mathbf{k}_0$ suficientemente grande tal que $H_{T_k} \leq \min(\mathbf{H}_4, \mathbf{H}_5)$, cuando $k \geq \mathbf{k}_1$, lo que completa la afirmación de este lema. \square

Ahora establecemos el resultado principal de este capítulo. En su demostración usamos el Lema 1.12, la cota inferior global (Teorema 10.6), la cota para la cardinalidad de \mathcal{M}_k dada en el Lema 11.8 y la propiedad de contracción del Teorema 11.7.

TEOREMA 11.9 (Casi-optimalidad del MEF adaptativo). *Supongamos que el Problema 3 es no degenerado (ver Definición 9.8). Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de autopares obtenida a través del Algoritmo 6, con θ satisfaciendo la restricción dada en la Hipótesis 11.5. Sea \mathbf{k}_1 como en el Lema 11.8. Si $(\lambda, \mathbf{D}) \in \mathbb{A}_s$, entonces*

$$(11.4) \quad \left(\text{dist}_a^2(u_k, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{T_k}^2(u_k) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |(\lambda, \mathbf{D})|_s (\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1})^{-s}, \quad \text{para } k > \mathbf{k}_1,$$

donde $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_\lambda, n, \theta, s) > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de autopares obtenida a través del Algoritmo 6. En esta prueba utilizaremos la letra C para indicar una constante que puede depender de lo enunciado en el teorema, y en cada aparición puede ser distinta. Sea $k > \mathbf{k}_1$. De los Lemas 1.12 y 11.8 y de la cota inferior global (Teorema 10.6) se sigue que

$$(11.5) \quad \begin{aligned} \#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1} &\leq C \sum_{i=\mathbf{k}_1}^{k-1} \#\mathcal{M}_i \leq C |(\lambda, \mathbf{D})|_s^{\frac{1}{s}} \sum_{i=\mathbf{k}_1}^{k-1} \left(\text{dist}_a^2(u_i, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{T_i}^2(u_i) \right)^{-\frac{1}{2s}} \\ &\leq C |(\lambda, \mathbf{D})|_s^{\frac{1}{s}} \sum_{i=\mathbf{k}_1}^{k-1} \left(\text{dist}_a^2(u_i, \tilde{E}_\lambda) + \gamma \eta_{T_i}^2(u_i) \right)^{-\frac{1}{2s}}, \end{aligned}$$

donde γ es la constante de la propiedad de contracción (Teorema 11.7). Si definimos $z_i^2 := \text{dist}_a^2(u_i, \tilde{E}_\lambda) + \gamma \eta_{T_i}^2(u_i)$, esta misma propiedad implica que $z_{i+1} \leq \alpha z_i$ y por lo tanto, $z_i^{-\frac{1}{s}} \leq \alpha^{\frac{1}{s}} z_{i+1}^{-\frac{1}{s}}$. Puesto que $\alpha < 1$, obtenemos

$$\sum_{i=\mathbf{k}_1}^{k-1} z_i^{-\frac{1}{s}} \leq \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha^{\frac{1}{s}})^i z_k^{-\frac{1}{s}} = \frac{1}{1 - \alpha^{\frac{1}{s}}} z_k^{-\frac{1}{s}},$$

y de (11.5) se sigue que

$$\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1} \leq C |(\lambda, \mathbf{D})|_s^{\frac{1}{s}} \left(\text{dist}_a^2(u_k, \tilde{E}_\lambda) + \gamma \eta_{T_k}^2(u_k) \right)^{-\frac{1}{2s}}.$$

Recordando que $\text{osc}_{\mathcal{T}_k}(u_k) \leq \eta_{\mathcal{T}_k}(u_k)$, esta desigualdad implica que

$$\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1} \leq C|(\lambda, \mathbf{D})|_s^{\frac{1}{s}} \left(\text{dist}_a^2(u_k, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{\mathcal{T}_k}^2(u_k) \right)^{-\frac{1}{2s}},$$

y finalmente obtenemos la estimación deseada elevando a la potencia s ambos miembros y reordenando. \square

El lado derecho de (11.4) no es exactamente lo que buscamos, puesto que aparece $\#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1}$ donde debería aparecer $\#\mathcal{T}_0$. Pero si $\mathbf{k}_2 \in \mathbb{N}$ se elige lo suficientemente grande para que $\#\mathcal{T}_k \geq 2\#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1} - \#\mathcal{T}_0$, para todo $k \geq \mathbf{k}_2$, entonces

$$\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0 = (\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1}) + (\#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1} - \#\mathcal{T}_0) \leq 2(\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1}), \quad \text{para todo } k \geq \mathbf{k}_2,$$

y por lo tanto,

$$(\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1})^{-s} \leq 2^s (\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0)^{-s}, \quad \text{para todo } k \geq \mathbf{k}_2.$$

Así, después de cambiar posiblemente la constante, el resultado anterior puede formularse de la siguiente manera:

COROLARIO 11.10. *Bajo las hipótesis del Teorema 11.9, se cumple que*

$$\left(\text{dist}_a^2(u_k, \tilde{E}_\lambda) + \text{osc}_{\mathcal{T}_k}^2(u_k) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C|(\lambda, \mathbf{D})|_s (\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0)^{-s}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

para alguna constante positiva $C = C(d, \kappa_{\mathbb{T}}, \ell, \mathbf{D}, \Lambda_0, \rho_\lambda, n, \theta, s)$.

Adaptatividad en la aproximación de funciones con singularidades

Concluimos esta tesis ilustrando a través de ejemplos las ventajas de usar refinamiento adaptativo en lugar de refinamiento global al aproximar autofunciones que tienen singularidades de diferentes tipos.

Consideramos el cálculo de los autopares del operador de Laplace, es decir, buscamos (λ, u) tales que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es tres cuartos de un círculo, que descrito en coordenadas polares es

$$\Omega = \{(r, \varphi) \mid 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \frac{3}{2}\pi\} \subset \mathbb{R}^2.$$

La formulación variacional es el siguiente problema, que es un caso particular del Problema tipo Dirichlet (6.4):

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Omega} uv, & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \|u\|_{\Omega} = 1. \end{cases}$$

Los autovalores y las autofunciones de este problema son conocidos, y los usaremos para verificar el comportamiento del algoritmo adaptativo e investigar experimentalmente la regularidad y el orden óptimo de la aproximación adaptativa.

Para la implementación del Algoritmo 5 hemos usado el *toolbox* de elementos finitos ALBERTA [SS05] y consideramos la aproximación del primer y segundo autopar.

EJEMPLO 12.1 (Aproximación del primer autovalor). El primer autovalor λ_1 es aproximadamente 11,394747279 y una autofunción correspondiente está dada en coordenadas polares por

$$u_1(r, \varphi) = c_1 J_{\frac{2}{3}}(\sqrt{\lambda_1} r) \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right),$$

donde $J_{\frac{2}{3}}$ es la función de Bessel de primera especie, y c_1 es una constante elegida de modo que $\|u_1\|_{\Omega} = 1$.

La Figura 12.1 muestra la energía del error $\|u_1 - u_{1,\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)}$ en función de los grados de libertad (DOFs) usando espacios de elementos finitos de grado $\ell = 1, 2$. El decrecimiento del error en norma energía usando refinamiento global en ambos casos es aproximadamente de orden $\text{DOFs}^{-1/3}$, indicando que la función u_1 pertenece al espacio de Sobolev $H^{1+\delta}(\Omega)$, para todo $0 < \delta < 2/3$. A pesar de esto, cuando usamos refinamiento adaptativo los órdenes son aproximadamente $\text{DOFs}^{-1/2}$ para elementos lineales y DOFs^{-1} para cuadráticos. Estas velocidades son las mismas que obtendríamos si $u \in H^2(\Omega)$ para $\ell = 1$ o si $u \in H^3(\Omega)$ para $\ell = 2$ con refinamiento uniforme, y usualmente se llaman *velocidades óptimas de convergencia*.

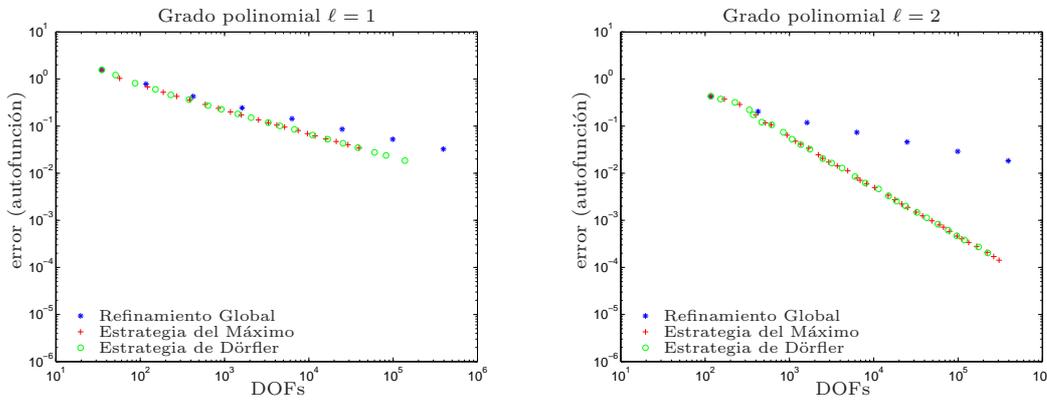


FIGURA 12.1. Decrecimiento del error para el cálculo del primer autovalor correspondiente al Ejemplo 12.1 con elementos finitos lineales y cuadráticos. El decrecimiento de la energía del error $\|u_1 - u_{1,\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)}$ con refinamiento global es aproximadamente $\text{DOFs}^{-1/3}$ en ambos casos, y el decrecimiento con refinamiento adaptativo es $\text{DOFs}^{-1/2}$ para lineales y DOFs^{-1} para cuadráticos.

Estas velocidades coinciden con la teoría, puesto que la autofunción u_1 es una potencia positiva de r veces una función de $H^\infty(\Omega)$ y de acuerdo a los resultados de [GM08] el orden de la aproximación adaptativa debería ser $\text{DOFs}^{-\frac{\ell}{d}}$, como hemos observado en los experimentos.

EJEMPLO 12.2 (Aproximación del segundo autovalor). El segundo autovalor λ_2 es aproximadamente 18,278538262 y una autofunción correspondiente está dada en coordenadas polares por

$$u_2(r, \varphi) = c_2 J_{\frac{4}{3}}(\sqrt{\lambda_2} r) \sin\left(\frac{4}{3}\theta\right),$$

donde $J_{\frac{4}{3}}$ es la función de Bessel de primera especie, y c_2 es la constante que hace que $\|u_2\|_{\Omega} = 1$. Esta segunda autofunción pertenece a $H^{2+\delta}(\Omega)$, para todo $0 < \delta < 1/3$, y así, es regular para la aproximación con elementos lineales. Esto es, el refinamiento global da $\|u_2 - u_{2,\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} = O(\text{DOFs}^{-1/2})$ para elementos lineales. El refinamiento adaptativo presenta el mismo decaimiento, y esto se condice con las curvas de error dadas en la Figura 12.2. Por otro lado, cuando consideramos la aproximación con elementos finitos cuadráticos, el orden de aproximación para la energía del error usando refinamiento global es aproximadamente $\text{DOFs}^{-2/3}$, no alcanzando así la velocidad óptima DOFs^{-1} debido a que $u_2 \notin H^3(\Omega)$. Sin embargo, los métodos adaptativos son capaces de captar esta singularidad y recuperar la velocidad de convergencia óptima $\|u_2 - u_{2,\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} = O(\text{DOFs}^{-1})$, lo que nuevamente está de acuerdo con la teoría de [GM08].

De estas observaciones podemos extraer la siguiente conclusión interesante: A pesar del hecho de que no vale la pena aumentar el grado polinomial cuando usamos refinamiento global y la función no es regular, aumentar el grado polinomial puede mejorar drásticamente la *performance* de los métodos adaptativos, conduciendo a velocidades de convergencia casi óptimas. Más específicamente, dado un grado polinomial fijo, usando métodos adaptativos sobre soluciones singulares se obtiene el mismo orden de convergencia que se obtendría usando refinamiento global si la solución fuera regular.

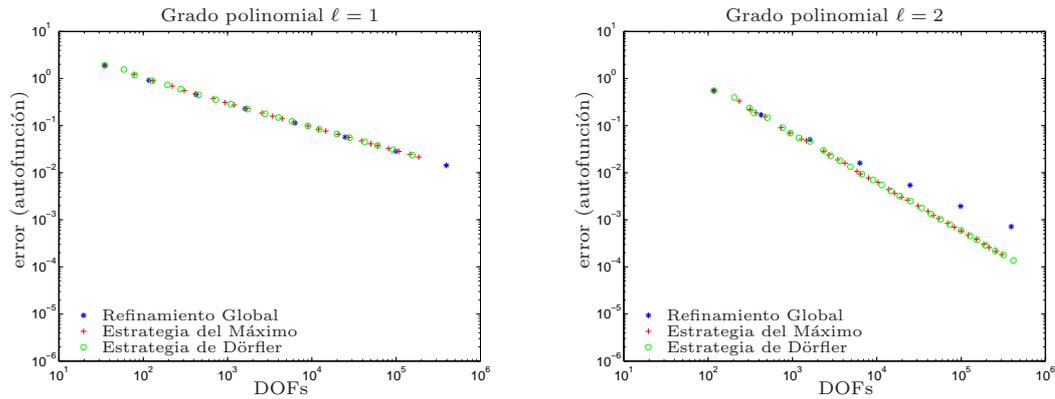


FIGURA 12.2. Decrecimiento del error para el cálculo del segundo autovalor correspondiente al Ejemplo 12.2 con elementos finitos lineales y cuadráticos. Cuando consideramos elementos lineales la energía del error $\|u_1 - u_{1,\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)}$ es $DOFs^{-1/2}$, tanto con refinamiento global como con las estrategias adaptativas. Cuando consideramos elementos cuadráticos el orden para la energía del error es $DOFs^{-2/3}$ para el refinamiento global y $DOFs^{-1}$ para los refinamientos adaptativos, y por lo tanto, en este caso la adaptatividad genera mallas óptimas.

Conclusiones generales

En esta tesis hemos presentado un estudio de convergencia y optimalidad de métodos de elementos finitos adaptativos para la resolución numérica de problemas no lineales que surgen de leyes de conservación estacionarias y de problemas de autovalores asociados a operadores simétricos y elípticos. Hemos dividido el análisis en dos partes, una para cada tipo de problema.

En la primera parte, hemos considerado la siguiente ley de conservación estacionaria como problema modelo, planteado en un dominio poligonal o poliédrico $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) con frontera Lipschitz:

Dada f , hallar u tal que

$$(1) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha(\cdot, |\nabla u|_{\mathcal{A}}^2) \mathcal{A} \nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ es simétrica, uniformemente definida positiva y Lipschitz a trozos sobre una triangulación inicial conforme \mathcal{T}_0 de Ω , y $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función localmente Lipschitz en su primera variable y de clase \mathcal{C}^1 en su segunda variable tal que

$$(2) \quad c_1 \leq \alpha(x, t^2) + 2t^2 D_2 \alpha(x, t^2) \leq c_2, \quad \forall x \in \Omega, t > 0,$$

para algunas constantes $c_1, c_2 > 0$.

La forma variacional del problema (1) es un caso particular del siguiente

Problema no lineal

Dado $L \in \mathbb{V}'$, hallar $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$a(u; u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

donde \mathbb{V} es un espacio de Hilbert real, y $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal en su segunda y tercera variable, que además es acotada y coercitiva. Considerando el operador (no lineal) $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ dado por

$$\langle Au, v \rangle := a(u; u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{V},$$

es sabido que el Problema no lineal tiene una única solución, como vimos en el Capítulo 2, si el operador A es Lipschitz y fuertemente monótono. Esto último se cumple para el problema modelo (1) debido a la hipótesis (2) sobre la función α .

En el Capítulo 3, considerando el Problema no lineal con $\mathbb{V} := H_{\Gamma}^1(\Omega)$, para algún $\Gamma \subset \partial\Omega$, hemos demostrado la convergencia (sin orden) de un algoritmo adaptativo como el siguiente:

Algoritmo 1.

(Iteración adaptativa básica)

Sea \mathcal{T}_0 una triangulación conforme de Ω . Sea $k = 0$.

1. $u_k := \text{RESOLVER}(\mathcal{T}_k)$.
2. $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k} := \text{ESTIMAR}(u_k, \mathcal{T}_k)$.
3. $\mathcal{M}_k := \text{MARCAR}(\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}, \mathcal{T}_k)$.
4. $\mathcal{T}_{k+1} := \text{REFINAR}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k, n)$.
5. Incrementar k y volver al paso 1.

En este algoritmo, $u_k \in \mathbb{V}_k$ satisface

$$(3) \quad a(u_k; u_k, v_k) = L(v_k), \quad \forall v_k \in \mathbb{V}_k,$$

donde \mathbb{V}_k es el espacio de elementos finitos conformes formado por las funciones continuas que son polinomios de grado $\leq \ell$ sobre los elementos de \mathcal{T}_k , para algún $\ell \in \mathbb{N}$ fijo.

Las únicas hipótesis que hemos requerido sobre los estimadores de error local $\{\eta_k(T)\}_{T \in \mathcal{T}_k}$ son la *confiabilidad* y la *estabilidad*.

Para el marcado hemos supuesto cualquier estrategia *razonable*, esto es, que garantice que el conjunto de elementos marcados \mathcal{M}_k contiene al menos un elemento de \mathcal{T}_k que tiene el máximo valor de los estimadores locales.

Finalmente, para el refinamiento hemos considerado el procedimiento de bisección descrito en [Ste08].

Por otro lado, en el Capítulo 4 hemos demostrado la convergencia y optimalidad del algoritmo adaptativo suponiendo la estrategia de Dörfler para el marcado. En otras palabras, hemos demostrado que el algoritmo produce una sucesión de mallas y soluciones aproximadas con la misma complejidad (cantidad de elementos) que las óptimas. El sentido que hemos dado a la palabra optimalidad está basado en el número de grados de libertad o incógnitas necesarios

para representar con un cierto error la solución exacta del problema, y no en el tamaño global usual de la malla.

En este punto es importante mencionar que para demostrar la optimalidad hemos utilizado una propiedad que fue establecida para el caso de elementos lineales ($\ell = 1$) en el Apéndice I del Capítulo 4. La validez de dicha propiedad para otros grados polinomiales será objeto de investigaciones futuras.

Por último, para concluir la primera parte, en el Capítulo 5 hemos demostrado la convergencia (sin orden) de un algoritmo adaptativo de tipo Kačanov. A diferencia del algoritmo anterior en donde $u_k \in \mathbb{V}_k$ es la solución de la ecuación discreta *no lineal* (3), en este caso, $u_k \in \mathbb{V}_k$ es la solución del sistema *lineal*:

$$a(u_{k-1}; u_k, v_k) = L(v_k), \quad \forall v_k \in \mathbb{V}_k.$$

Este algoritmo *inexacto* resulta mucho más interesante desde el punto de vista práctico que la discretización (3). Hemos realizado algunos experimentos numéricos a fin de estudiar el orden de convergencia de este algoritmo, y se han abierto nuevos interrogantes que serán tema de estudios futuros (ver Sección 5.3).

En la segunda parte de esta tesis hemos iniciado el estudio de problemas de autovalores. En el Capítulo 6 hemos presentado algunos problemas conocidos y de importancia en las aplicaciones, como problemas de autovalores elípticos de tipo Dirichlet, de Steklov armónico, y de Steklov asociado a un operador de tipo Schrödinger. Éstos son casos particulares del siguiente:

Problema de autovalores

Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \neq u \in \mathbb{V}$ tales que

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

donde $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ son formas bilineales simétricas, acotadas y coercitivas; y el espacio de Hilbert real \mathbb{V} está denso y compactamente contenido en el espacio \mathbb{W} . Bajo estas condiciones, como vimos en el Capítulo 7, se sabe que el Problema de autovalores tiene una sucesión (creciente) infinita numerable de autovalores positivos, y para cada uno de éstos, existe un espacio de dimensión finita de autofunciones asociadas.

En el Capítulo 8 hemos presentado algunas estimaciones de error conocidas y establecimos la noción de aproximación a considerar (ver Definición 8.12) para el Problema de autovalores tomando $\mathbb{V} = H_{\Gamma}^1(\Omega)$, para algún $\Gamma \subset \partial\Omega$.

En el Capítulo 9 hemos demostrado la convergencia de MEF adaptativos. Más precisamente, dado un autovalor $\lambda = \lambda_{j_0}$ del Problema de autovalores, consideramos una iteración adaptativa básica como la del Algoritmo 1. La única particularidad en este caso, es que el módulo RESOLVER calcula en cada paso el j_0 -ésimo autovalor λ_k del problema discreto correspondiente y una autofunción asociada u_k ; y así, λ_k y u_k satisfacen

$$a(u_k, v_k) = \lambda_k b(u_k, v_k), \quad \forall v_k \in \mathbb{V}_k.$$

Hemos demostrado que la sucesión $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge a un autovalor λ_{∞} del Problema de autovalores, y que la sucesión de autofunciones calculadas $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge al conjunto de autofunciones $\tilde{E}_{\lambda_{\infty}}$ asociadas a λ_{∞} , es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_{\mathbb{V}}(u_k, \tilde{E}_{\lambda_{\infty}}) = 0.$$

Más aún, si el Problema de autovalores es *no degenerado*, entonces λ_{∞} es precisamente el j_0 -ésimo autovalor del problema original. Es importante destacar que no hay restricciones sobre la multiplicidad de λ_{j_0} en este resultado, es decir, éste puede ser un autovalor múltiple.

En el Capítulo 10 hemos presentado algunas estimaciones de error a posteriori conocidas y hemos estudiado propiedades de reducción de los estimadores y de los términos de oscilación.

En base a estas estimaciones, en el Capítulo 11 hemos demostrado la optimalidad de un MEF adaptativo considerando el criterio de Dörfler para el marcado. En este caso, hemos considerado solamente la aproximación de autovalores simples. Sin embargo, cabe mencionar que la notación introducida en los capítulos previos y los resultados presentados, han sido expuestos con la mayor generalidad posible, con el objetivo de estudiar la optimalidad en el caso de autovalores múltiples en futuras investigaciones.

Finalmente, en el Capítulo 12 hemos ilustrado con algunos experimentos numéricos de manera breve, las ventajas de usar refinamiento adaptativo en vez de refinamiento global, cuando se usan métodos de elementos finitos para resolver problemas cuya solución tiene singularidades.

Bibliografía

- [Ada75] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. (Pág. 8)
- [AP08] M. G. Armentano and C. Padra, *A posteriori error estimates for the Steklov eigenvalue problem*, Appl. Numer. Math. **58** (2008), no. 5, 593–601. (Págs. 158 y 162)
- [Auc04] G. Auchmuty, *Steklov eigenproblems and the representation of solutions of elliptic boundary value problems*, Numer. Funct. Anal. Optim. **25** (2004), no. 3-4, 321–348. (Págs. 108, 112 y 116)
- [BDD04] P. Binev, W. Dahmen, and R. DeVore, *Adaptive finite element methods with convergence rates*, Numer. Math. **97** (2004), no. 2, 219–268. (Pág. 17)
- [BDDP02] P. Binev, W. Dahmen, R. DeVore, and P. Petrushev, *Approximation classes for adaptive methods*, Serdica Math. J. **28** (2002), no. 4, 391–416, Dedicated to the memory of Vassil Popov on the occasion of his 60th birthday. (Pág. 25)
- [BN00] G. Bachman and L. Ćirić, *Functional analysis*, Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2000, Reprint of the 1966 original. (Pág. 117)
- [BO89] I. Babuška and J. E. Osborn, *Finite element-Galerkin approximation of the eigenvalues and eigenvectors of selfadjoint problems*, Math. Comp. **52** (1989), no. 186, 275–297. (Pág. 127)
- [BO91] ———, *Eigenvalue problems*, Handbook of numerical analysis, Vol. II, Handb. Numer. Anal., II, North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 641–787. (Págs. 117 y 127)
- [Bra01] D. Braess, *Finite elements*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2001, Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics, Translated from the 1992 German edition by Larry L. Schumaker. (Págs. 5, 8 y 11)
- [BRS00] A. Bermúdez, R. Rodríguez, and D. Santamarina, *A finite element solution of an added mass formulation for coupled fluid-solid vibrations*, Numer. Math. **87** (2000), no. 2, 201–227. (Pág. 109)
- [BS53] S. Bergman and M. Schiffer, *Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics*, Academic Press Inc., New York, N. Y., 1953. (Pág. 109)
- [BS94] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Texts in Applied Mathematics, vol. 15, Springer-Verlag, New York, 1994. (Págs. 5 y 13)
- [CKNS08] J. M. Cascón, C. Kreuzer, R. H. Nochetto, and K. G. Siebert, *Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method*, SIAM J. Numer. Anal. **46** (2008), no. 5, 2524–2550. (Págs. 1, 14, 17, 26, 70, 71, 160 y 174)
- [CPV95] C. Conca, J. Planchard, and M. Vanninathan, *Fluids and periodic structures*, RAM: Research in Applied Mathematics, vol. 38, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1995. (Pág. 109)

- [DK08] L. Diening and C. Kreuzer, *Linear convergence of an adaptive finite element method for the p -Laplacian equation*, SIAM J. Numer. Anal. **46** (2008), no. 2, 614–638. (Pág. 79)
- [Dör96] W. Dörfler, *A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), no. 3, 1106–1124. (Págs. 14 y 16)
- [DPR03] R. G. Durán, C. Padra, and R. Rodríguez, *A posteriori error estimates for the finite element approximation of eigenvalue problems*, Math. Models Methods Appl. Sci. **13** (2003), no. 8, 1219–1229. (Págs. 145, 159 y 162)
- [DXZ08] X. Dai, J. Xu, and A. Zhou, *Convergence and optimal complexity of adaptive finite element eigenvalue computations*, Numer. Math. **110** (2008), no. 3, 313–355. (Págs. 2, 143 y 160)
- [Eva98] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. (Pág. 8)
- [GG09] S. Giani and I. G. Graham, *A convergent adaptive method for elliptic eigenvalue problems*, SIAM J. Numer. Anal. **47** (2009), no. 2, 1067–1091. (Págs. 2, 143 y 145)
- [Gia08] S. Giani, *Convergence adaptive finite element methods for elliptic eigenvalue problems with application to photonic crystal fibers (pcfs)*, PhD Thesis, University of Bath, 2008. (Págs. 2 y 143)
- [GM08] F. D. Gaspoz and P. Morin, *Convergence rates for adaptive finite elements*, IMA Journal of Numerical Analysis, 2008. (Págs. 25, 152, 182 y 183)
- [GM09] ———, *Approximation classes for adaptive higher order finite element approximation*, In preparation, 2009. (Pág. 25)
- [Gri85] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985. (Pág. 152)
- [Han94] Q. Han, *Singular sets of solutions to elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), no. 3, 983–1002. (Pág. 152)
- [HJ90] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, Corrected reprint of the 1985 original. (Pág. 59)
- [Kos94] I. Kossaczky, *A recursive approach to local mesh refinement in two and three dimensions*, J. Comput. Appl. Math. **55** (1994), no. 3, 275–288. (Pág. 17)
- [Lar00] M. G. Larson, *A posteriori and a priori error analysis for finite element approximations of self-adjoint elliptic eigenvalue problems*, SIAM J. Numer. Anal. **38** (2000), no. 2, 608–625 (electronic). (Pág. 145)
- [LT03] S. Larsson and V. Thomée, *Partial differential equations with numerical methods*, Texts in Applied Mathematics, vol. 45, Springer-Verlag, Berlin, 2003. (Pág. 120)
- [MN05] K. Mekchay and R. H. Nochetto, *Convergence of adaptive finite element methods for general second order linear elliptic PDEs*, SIAM J. Numer. Anal. **43** (2005), no. 5, 1803–1827 (electronic). (Pág. 14)
- [MNS00] P. Morin, R. H. Nochetto, and K. G. Siebert, *Data oscillation and convergence of adaptive FEM*, SIAM J. Numer. Anal. **38** (2000), no. 2, 466–488 (electronic). (Pág. 14)

-
- [MNS02] ———, *Convergence of adaptive finite element methods*, SIAM Rev. **44** (2002), no. 4, 631–658 (electronic) (2003), Revised reprint of “Data oscillation and convergence of adaptive FEM” [SIAM J. Numer. Anal. **38** (2000), no. 2, 466–488 (electronic); MR1770058 (2001g:65157)]. (Pág. 14)
- [MSV08] P. Morin, K. G. Siebert, and A. Veiser, *A basic convergence result for conforming adaptive finite elements*, Math. Models Methods Appl. Sci. **18** (2008), no. 5, 707–737. (Págs. 1, 14, 31 y 32)
- [RT83] P. A. Raviart and J. M. Thomas, *Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree], Masson, Paris, 1983. (Pág. 127)
- [Sav98] G. Savaré, *Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **152** (1998), no. 1, 176–201. (Pág. 140)
- [SF73] G. Strang and G. J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973, Prentice-Hall Series in Automatic Computation. (Págs. 127, 129 y 130)
- [Sie08] K. G. Siebert, *A convergence proof for adaptive finite elements without lower bound*, Preprint Universität Duisburg-Essen, 2008. (Págs. 1, 31, 52, 53 y 148)
- [SS05] A. Schmidt and K. G. Siebert, *Design of adaptive finite element software*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol. 42, Springer-Verlag, Berlin, 2005, The finite element toolbox ALBERTA, With 1 CD-ROM (Unix/Linux). (Págs. 7, 15, 17, 88 y 181)
- [Ste07] R. Stevenson, *Optimality of a standard adaptive finite element method*, Found. Comput. Math. **7** (2007), no. 2, 245–269. (Págs. 1, 14, 17, 70 y 160)
- [Ste08] ———, *The completion of locally refined simplicial partitions created by bisection*, Math. Comp. **77** (2008), no. 261, 227–241 (electronic). (Págs. 7, 16, 17 y 186)
- [SZ90] L. R. Scott and S. Zhang, *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions*, Math. Comp. **54** (1990), no. 190, 483–493. (Págs. 12, 19 y 128)
- [Ver94] R. Verfürth, *A posteriori error estimates for nonlinear problems. Finite element discretizations of elliptic equations*, Math. Comp. **62** (1994), no. 206, 445–475. (Pág. 145)
- [Ver96] R. Verfürth, *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, Adv. Numer. Math., John Wiley, Chichester, UK, 1996. (Pág. 145)
- [Zei88] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. IV*, Springer-Verlag, New York, 1988, Applications to mathematical physics, Translated from the German and with a preface by Juergen Quandt. (Pág. 37)
- [Zei90] ———, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B*, Springer-Verlag, New York, 1990, Nonlinear monotone operators, Translated from the German by the author and Leo F. Boron. (Págs. 44 y 46)
- [Zup08] C. Zuppa, *A posteriori error estimates for the finite element approximation of steklov eigenvalue problem*, 724–738. (Pág. 158)

Índice alfabético

- algoritmo adaptativo básico, 15
- autofunción, 106, 115
- autopar, 115
- autovalor, 106, 115

- cociente de Rayleigh, 107, 118

- error total, 24, 69, 171
- espacio de Sobolev, 9, 13
- estimador de error
 - confiabilidad, 19
 - eficiencia discreta, 20
 - estabilidad, 52, 84, 144
 - global, 19
 - local, 19
- estrategia de marcado
 - de Dörfler, 16
 - de Equidistribución, 15
 - de Equidistribución modificada, 16
 - del Máximo, 15
 - razonable, 16

- forma
 - acotada, 49, 114
 - coercitiva, 49, 114

- interpolante de Scott-Zhang, 12

- marcado óptimo, 70, 173
- matriz de masa, 124
- matriz de rigidez, 124

- operador
 - fuertemente monótono, 44, 50
 - Lipschitz, 44, 50
 - monótono, 46
 - potencial, 45

- oscilación
 - global, 24
 - local, 23

- proyección elíptica, 128

- residuo
 - como funcional, 18, 28, 52, 56, 62, 98, 107, 110, 112, 145
 - de salto, 18, 28, 56, 99, 108, 111, 112
 - interior, 18, 28, 56, 99, 108, 110, 112

- simplex, 5
- subsimplex, 5

- traza, 10
- traza en un simplex, 11

- triangulación
 - complejidad, 24
 - conforme, 6
 - esqueleto, 6
 - familia regular, 6
 - regularidad, 6
 - tamaño
 - como función, 31
 - global, 7
 - local, 7

- vecindad, 6
- vecino, 6