



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

**DISEÑO A FATIGA MULTIAXIAL Y DESGASTE
EN COMPONENTES MECANICOS A ELEVADA
TEMPERATURA**

Federico José CAVALIERI

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado

como parte de los requisitos para la obtención

del grado de

DOCTOR EN INGENIERIA

Mención Mecánica Computacional

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2010

Comisión de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria, Paraje

“El Pozo”, S3000, Santa Fe, Argentina.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Como miembros del Jurado Evaluador de la Tesis de Doctorado titulada
**DISEÑO A FATIGA MULTIAXIAL Y DESGASTE EN COMPONENTES
MECANICOS A ELEVADA TEMPERATURA**

preparada por

Federico José CAVALIERI

certificamos que hemos evaluado la Tesis y recomendamos que sea aceptada como
parte de los requisitos para la obtención del grado de
DOCTOR EN INGENIERIA

Dr. Carlos García Garino
Presidente

Dr. Norberto Nigro
Miembro del Jurado

Dr. Alfredo E. Huespe
Miembro del Jurado

Dr. Gustavo Sánchez Sarmiento
Miembro del Jurado

La aprobación final y aceptación de esta disertación estará condicionada a la
presentación de dos copias encuadernadas de la versión final de la Tesis ante el
Comité Académico del Doctorado en Ingeniería.

Certificamos que hemos leído esta Tesis preparada bajo nuestra dirección y
recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del
título de **DOCTOR EN INGENIERIA**

Dr. Alberto CARDONA
Director

Dr. Víctor Luis FACHINOTTI
Codirector

30 de Agosto de 2010

DECLARACION LEGAL DEL AUTOR

Esta tesis ha sido remitida a la Comisión de Posgrado de la Universidad Nacional del Litoral como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería - Mención Mecánica Computacional y será depositada en las Bibliotecas de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas y del Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), para que esté disponible a sus lectores bajo las condiciones estipuladas por el Reglamento de las mencionadas Bibliotecas.

No se requiere autorización alguna para la reproducción, copia, distribución o citación de la presente tesis.

Federico José CAVALIERI

Agradecimientos

Mencionar a todas las personas que han hecho posible la finalización de esta Tesis es una cuestión no menor por la cantidad de gente a la que me debo. Primero quisiera agradecer a aquellas personas que me apoyaron desde los inicios en la determinación de encarar un doctorado de estas características: Miguel Bavaro y especialmente, a mis recordados profesores, Carlos Carlassare y Paulo Porta. No puedo dejar de mencionar a mi amigo Pablo Caron, Pablín, junto a quien durante largas horas de charlas y discusiones, encontramos en los elementos finitos un camino apasionante para volar. Agradecer a mis padres y a mi hermana, quienes nunca impedirían que dejara de disfrutar de aquello que me apasiona; a todas las personas que integran el CIMEC, grupo de una calidad humana y profesional excepcional. Agradecer muy especialmente a Martín Pucheta, César Luengo y Andrés Anca, amigos que Dios me ha ofrecido para que disfrute y aprenda de ellos de toda su grandeza; a Pablo Tassi, con quien compartí seis meses de risas y maravillosos viajes en Francia; a Claude Bathias y Nicolas Ranc por haberme recibido en la Université Paris X y enseñarme las cosas más interesantes del universo de la fatiga; a Hugo A. Tosone y Rudy Grether de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Santa Fe por permitirme realizar el viaje a Francia sin condicionamiento alguno; a Víctor Fachinotti, a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT), al Consejo de Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET) y a AlBan por la financiación de mis estudios; a las empresas MAHLE Argentina y MAHLE Alemania, y aquí quiero mencionar muy especialmente a Fernando Zenklusen, quien siempre me ha ayudado a través de su experiencia en el desarrollo de los ensayos experimentales; a *Pepe* Risso, quien siempre me ha ayudado con sus conocimientos profesionales, académicos, y ojo clínico, propio de un avezado *ferrero* y fundamentalmente a mi director, Alberto Cardona, persona por la quien tengo un gran respeto y profunda admiración por su capacidad de entender y generar nuevas ideas, agradecerle profundamente toda la confianza que ha depositado en mí y su inagotable (y cuando digo inagotable es porque es inagotable), paciencia por explicarme y transmitirme todo su conocimiento. Finalmente, quiero agradecerle a la persona que siempre estuvo a mi lado compartiendo risas, preocupaciones, sueños, proyectos, Laura Battaglia.

Resumen

En esta Tesis se considera el estudio de predicción de fallas en componentes mecánicos que se encuentran sujetos a cargas de muy alta frecuencia y elevada temperatura.

En una primera etapa, uno de los fenómenos estudiados fue el de fatiga de materiales metálicos, abordado desde dos puntos de vista: i) el experimental, con la obtención de curvas de tensión vs. número de ciclos en el régimen gigacíclico y ii) el numérico, con el análisis de criterios de fatiga multiaxial y realización de modelos de aplicación por medio del método de los elementos finitos. Los ensayos experimentales fueron realizados a través de la técnica de fatiga ultrasónica, la que permite alcanzar 10^9 ciclos en tan sólo 14 horas. Se obtuvieron las curvas tensión vs. número de ciclos a temperatura ambiente y a elevada temperatura, 600°C y 700°C , de un acero austenítico típicamente utilizado en válvulas de motores de combustión interna. El diseño de las probetas fue realizado mediante ecuaciones analíticas y por medio del método de elementos finitos. Utilizando la información obtenida de los ensayos experimentales, específicamente las curvas de tensión vs. número de ciclos, se generaron nuevas geometrías de válvulas de motores de combustión interna por medio de la simulación numérica, con el objetivo de evaluar la capacidad del diseño propuesto desde un punto de vista de fatiga. Posteriormente, se llevaron a cabo ensayos experimentales a elevada temperatura en una máquina de fatiga especialmente construida para ensayar este tipo de componentes.

En una segunda etapa, se abordó el análisis y desarrollo de diferentes algoritmos de contacto con el objetivo de determinar cuál proveería un campo de tensiones sin oscilaciones de origen numérico en la zona de contacto, lo que permitiría realizar estudios más precisos de otros fenómenos, como ser el desgaste, que producirían una falla del componente. Primero se desarrolló un algoritmo de contacto flexible rígido con un esquema de regularización basado en un lagrangiano aumentado, con la incorporación de dos multiplicadores de Lagrange. Con el algoritmo propuesto, se llevaron a cabo ejemplos de validación y aplicación, incluyendo en algunos de ellos el efecto de la fricción según una ley regularizada de Coulomb. La imposibilidad de modelar un segundo cuerpo flexible hace que este algoritmo se encuentre limitado a pocas aplicaciones de interés. Esto motivó el direccionamiento de la línea de investigación hacia los algoritmos de contacto flexible-flexible. El primer algoritmo implementado fue uno del tipo nodo-segmento con una técnica de interpolación de interfaces de contacto basada en subdivisión de superficies y dos esquemas de regularización i) penalidad y ii) lagrangiano aumentado. Si bien a un nivel global los resultados de los desplazamientos y tensiones en los ejemplos que se han propuestos han sido satisfactorios, tanto con el esquema de penalidad como con el lagrangiano aumentado, han mostrado que el campo de tensiones en la zona de contacto no es lo suficientemente regular como para resolver, por ejemplo, problemas de desgaste. Finalmente, se trabajó en un esquema tipo mortero, donde además de superar los test de la parcela para algoritmos de contacto, las tensiones en la zona de contacto mantienen una gran uniformidad. El algoritmo propuesto fue validado con soluciones analíticas, numéricas y utilizado en un ejemplo de aplicación de una válvula de motor de combustión interna.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Fatiga en componentes mecánicos	2
1.3. Contacto mecánico	3
1.4. Objetivos	4
1.5. Metodología	5
I EL FENOMENO DE FATIGA	7
2. Conceptos y definiciones preliminares	9
2.1. Introducción	9
2.1.1. Representación tensorial e invariantes	10
2.1.2. El criterio de von Mises	11
2.1.3. Medidas asociadas a los invariantes del tensor de tensiones	13
2.2. Conclusiones	16
3. Fatiga en materiales metálicos	17
3.1. Estado del arte.	17
3.1.1. Tipos de sollicitaciones por fatiga	19
3.1.2. Diagrama de Wöhler	20
3.1.3. Iniciación de fisura por fatiga	21
3.1.4. Fatiga multiaxial. Estado del arte	21
3.1.4.1. Clasificación de los criterios de fatiga multiaxial	23
3.2. Influencia de las tensiones de corte en fatiga multiaxial.	25
3.3. Influencia de la tensión hidrostática en fatiga multiaxial.	25
3.4. El criterio de Crossland	26
3.5. Ejemplo	27
3.6. Conclusiones	28
4. Análisis experimental de fatiga	31
4.1. Introducción	31
4.2. Máquina de ensayos de fatiga ultrasónica	32
4.3. Material ensayado	34
4.4. Diseño de las probetas	36
4.4.1. Diseño de probetas para elevada temperatura	38

4.4.1.1.	Diseño mediante un método semianalítico	39
4.4.1.2.	Diseño por el método de los elementos finitos	39
4.5.	Procedimiento experimental para los ensayos de fatiga	41
4.6.	Resultados experimentales y discusión	42
4.6.1.	Curva S-N a temperatura ambiente	42
4.6.2.	Curva S-N a 600°C	45
4.6.3.	Curva S-N a 700°C	48
4.7.	Conclusiones	50
5.	Fatiga en válvulas de motores de combustión interna	51
5.1.	Introducción	51
5.2.	Máquina de ensayos de fatiga	54
5.2.1.	Descripción.	54
5.2.2.	Simulación numérica de la máquina de ensayos	56
5.2.3.	Resultados	57
5.3.	Análisis térmico del ensayo en la máquina de fatiga	58
5.3.1.	Definición del problema de transferencia de calor	60
5.3.2.	Simulación numérica	61
5.4.	Análisis termomecánico VTR	63
5.4.1.	Definición del problema mecánico	64
5.4.2.	Integración temporal	64
5.5.	Resultados numéricos	66
5.5.1.	Análisis modal	69
5.5.2.	Análisis a fatiga por medio de un criterio de fatiga multiaxial	70
5.6.	Discusión	71
5.7.	Conclusiones	73
II	EL PROBLEMA DE CONTACTO	75
6.	Contacto mecánico	77
6.1.	Estado del arte	77
6.1.1.	Modelo mecánico	77
6.1.2.	Cinemática del contacto	78
6.1.3.	Métodos de regularización	80
6.1.4.	Algoritmos de integración	82
6.1.5.	Fricción	82
6.2.	Descripción del problema de contacto	83
6.2.1.	Ecuaciones de gobierno para el contacto entre dos cuerpos flexibles	83
6.3.	Contacto entre un cuerpo flexible y otro rígido	86
6.3.1.	Tratamiento de las desigualdades	87
6.3.2.	Versión <i>slack</i> del lagrangiano aumentado	88
6.3.3.	Cinemática del contacto	89
6.3.4.	Contacto con fricción	89
6.3.5.	Contacto tangencial	91

6.3.6.	Descripción del algoritmo de <i>stick/slip</i>	92
6.3.7.	Vector de fuerzas internas y matriz de rigidez tangente	93
6.4.	Ejemplos numéricos	94
6.4.1.	Validación: ejemplo 3D con fricción.	94
6.4.2.	Validación: ejemplo 3D de grandes deslizamientos con fricción.	98
6.4.3.	Ejemplo de contacto de una válvula de motor de combustión interna	100
6.5.	Conclusiones	100
6.6.	Contacto suave	102
6.6.1.	Introducción	102
6.6.2.	Métodos de interpolación de superficies	104
6.6.3.	Descripción del problema	106
6.6.4.	Ecuaciones para la cinemática del contacto suave	106
6.6.5.	Variación del vector normal	108
6.6.6.	Método de penalidad. Vector de fuerzas internas.	109
6.6.7.	Linealización de la contribución del contacto	109
6.6.8.	Método de penalidad. Matriz tangente.	110
6.6.9.	Contacto suave con regularización por medio de un lagrangiano aumentado con dos multiplicadores de Lagrange y variable <i>slack</i> .	111
6.6.9.1.	Vector de fuerzas internas	112
6.6.9.2.	Matriz tangente. Método lagrangiano aumentado con dos multiplicadores de Lagrange	114
6.6.10.	Ejemplos numéricos	115
6.6.10.1.	Cubos de dimensión diferente	115
6.6.10.2.	Cubos de igual dimensión	116
6.6.10.3.	Válvula de motor de combustión interna	118
6.6.11.	Conclusiones	119
6.7.	Método mortar	120
6.7.1.	Descripción del problema	122
6.7.2.	Trabajo virtual asociado al contacto	123
6.7.3.	Regularización de las restricciones normales	124
6.7.4.	Cómputo de los factores de peso. Proyecciones	126
6.7.5.	Algoritmo para el cálculo de los factores de peso	126
6.7.6.	Linealización de las fuerzas de contacto. Matriz tangente	128
6.7.7.	Linealización de las funciones de forma	129
6.7.8.	Linealización del área de los triángulos	130
6.7.9.	Linealización de los factores de peso	130
6.7.10.	Linealización del huelgo	131
6.7.11.	Linealización del vector normal promedio	131
6.7.12.	Variación del vector de coordenadas globales $\Delta\Phi_{KL}$	132
6.7.13.	Ejemplos numéricos	132
6.7.13.1.	El test de la parcela para contacto. Ejemplo de validación.	132
6.7.13.2.	Contacto de Hertz. Ejemplo de validación.	135

6.7.13.3. Contacto elástico entre dos cuerpos cilíndricos.	136
6.7.13.4. Contacto entre una válvula de motor de combustión interna y el asiento.	140
6.7.13.5. Contacto entre una válvula de motor de combustión interna y el asiento. Comparación.	141
6.7.14. Conclusiones	143
7. El fenómeno de desgaste	145
7.1. Desgaste y ley de Archard	145
7.2. Modelo numérico	146
7.3. Conclusiones	147
III CONCLUSIONES FINALES	149
8. Conclusiones	151
8.1. Fatiga de muy alto número de ciclos a elevada temperatura	151
8.2. Algoritmos de contacto	153
8.3. Problemas abiertos	155
A. Representación matricial y operaciones vectoriales	157
A.1. Vector	157
A.2. Producto interno	157
A.3. Producto vectorial	157
A.4. Definición de un tensor cartesiano	158
A.4.1. Producto tensorial	158
A.4.2. Transformación lineal y tensores cartesianos de segundo orden	158
A.5. Producto interno y proyección ortogonal	158
B. Contacto suave	161
C. Método mortar	163
C.1. Matriz de transformación H_A^α	163
C.1.0.1. Variación de la normal	163
C.2. Intersección de dos rectas	165
C.3. La matriz D_{KL}^P	166
D. Geometría de válvula para ensayos en la VTR	167
Bibliografía	169

Índice de figuras

1.1. Componentes principales de un tren de válvulas en un motor de combustión interna.	6
2.1. Las figuras (a) y (b) representan definiciones de $\sqrt{J_{2a}}$ y la figura (c) el mecanismo para obtener $\sqrt{J_{2a}}$ utilizando el algoritmo incremental de Dang Van <i>et al.</i> [DVGGM89].	16
3.1. Efecto de la torsión media en el límite de fatiga. Son τ_a el límite de fatiga en torsión, $\bar{\tau}$ la tensión media en torsión y τ_e el límite elástico en torsión.	23
3.2. (a) las irregularidades retardan el crecimiento de la fisura por tensiones de corte; en el caso (b), la tensión normal la acelera.	23
3.3. Cargas y condiciones de borde.	27
3.4. Cargas aplicadas a la probeta.	28
3.5. Camino de las tensiones.	29
4.1. Esquema para una máquina de fatiga ultrasónica.	33
4.2. Máquina de fatiga ultrasónica utilizada para los ensayos.	34
4.3. Estructura austenítica del H854.	35
4.4. Módulo de Young en función de la temperatura para el material H854.	35
4.5. Geometría de una probeta ultrasónica.	36
4.6. Topología de malla, condiciones de borde y propiedades termomecánicas utilizadas.	38
4.7. Temperatura ambiente. Comparación de los desplazamientos y tensiones utilizando ecuaciones analíticas y el MEF.	38
4.8. Puntos de medición de temperaturas.	39
4.9. Comparación de los desplazamientos y tensiones para el caso de temperatura de 600°C utilizando un método semianalítico y el MEF.	40
4.10. Comparación de los desplazamientos y tensiones para el caso de temperatura de 700°C utilizando un método semianalítico y el MEF.	40
4.11. Medición de la amplitud de la señal.	41
4.12. Curva S-N a temperatura ambiente del material H854.	42
4.13. Imagen de la microestructura obtenida con el SEM en una probeta que alcanzó 10^9 ciclos con 370 MPa sin evidenciar rotura.	43
4.14. Superficie de fractura obtenida con un microscopio óptico en una probeta que falló a 337 MPa y 1.85×10^5 ciclos.	44

4.15. Superficie de fractura obtenida con el SEM en una probeta que falló a 337 MPa y 1.85×10^5 ciclos.	44
4.16. Elevación de temperatura observada en el H854 para el punto 2, ubicado según la imagen de la izquierda.	45
4.17. Curva S-N a 600°C para el material H854.	45
4.18. Superficie de fractura debido a una inclusión.	46
4.19. Amplificación en la zona de la inclusión.	46
4.20. Diagrama espectral de la inclusión indicando la presencia de Nb.	47
4.21. Iniciación de roturas por fatiga.	47
4.22. Curva S-N a 700°C para el material H854.	48
4.23. Imagen obtenida con un microscopio óptico de la superficie de fractura de una probeta que falló a 345 MPa en 3×10^8 ciclos a 700°C.	49
4.24. Imagen obtenida con un SEM de la superficie de fractura de una probeta que falló a 345 MPa en 3×10^8 ciclos a 700°C.	49
5.1. Denominación de las partes de una válvula de motor de combustión interna y el asiento.	52
5.2. Rotura por fatiga de una válvula de motor de combustión interna.	53
5.3. Máquina de ensayos a fatiga VTR.	55
5.4. Curva del seguidor: desplazamiento [mm] vs. ángulo [°]. Experimental.	56
5.5. Modelo numérico del tren de válvula de la máquina de ensayos.	57
5.6. Curva del seguidor: desplazamiento [mm] vs. tiempo [seg.] obtenida por simulación numérica.	58
5.7. Velocidad [mm/seg.] vs. tiempo [seg.] para un nodo del seguidor.	58
5.8. Validación. Velocidad de asentamiento vs. velocidad de la leva obtenido numérica y experimentalmente.	59
5.9. Coeficientes de transferencia de calor, conductancias de contacto y temperaturas de referencia para el modelo de elementos finitos utilizado.	61
5.10. Temperatura de una válvula testigo de la máquina de ensayos.	62
5.11. Triangulación y temperaturas obtenidas por medio del MEF.	63
5.12. Componentes y condiciones de borde del modelo	65
5.13. Curva de fatiga: tensión vs. número ciclos obtenida en la máquina de fatiga ultrasónica a 600°C.	67
5.14. Modelo tridimensional de válvula. Topología de malla.	68
5.15. Evolución de la tensión en la dirección axial en la zona de sección reducida.	68
5.16. Excentricidad lateral.	69
5.17. Evolución de la tensión en la dirección axial en la zona de sección reducida.	70
5.18. Análisis modal de la válvula ensayada en la VTR.	70
5.19. Análisis modal de un válvula de la máquina de ensayos.	72
5.20. Modificación de la válvula en la zona de transición entre el cuello y el vástago.	72
5.21. Imagen de la válvula luego de haber sido ensayada en la VTR.	73
5.22. Imagen de la cabeza de la válvula luego de haber sido ensayada en la VTR.	73

6.1. Notación utilizada para la descripción de los cuerpos en contacto. Únicamente se muestra la configuración actual.	84
6.2. Contacto entre un cuerpo elástico y una fundación rígida.	86
6.3. Definición del vector normal \mathbf{n}	90
6.4. Regularización de la ley de Coulomb.	90
6.5. Definición del vector tangencial en la trayectoria de un punto sobre la superficie de contacto.	92
6.6. Cuerpo elástico comprimido contra una superficie rígida y traccionado tangencialmente.	95
6.7. Desplazamientos nodales en la dirección Y	96
6.8. Tensiones normales en la dirección Y	96
6.9. Tensiones tangenciales $X - Z$	97
6.10. Variación de la tensión normal y tangencial en la interfase de contacto. Comparación con los resultados de Armero y Petocz [AP99].	97
6.11. Dibujo esquemático del cubo sobre la fundación rígida.	98
6.12. Comparación de la variación de la fuerza normal de contacto en los puntos F y H con los resultados de Joli y Feng [JF08].	99
6.13. Comparación de la variación de los desplazamientos U_x y U_y con los resultados de Joli y Feng [JF08].	99
6.14. Topología de malla y propiedades mecánicas para el material utilizado.	100
6.15. Campo de desplazamiento de una válvula de motor de combustión interna resuelto mediante un algoritmo de contacto flexible rígido.	101
6.16. Campo de tensiones en una válvula de un motor de combustión interna resuelto mediante un algoritmo de contacto flexible rígido.	101
6.17. Distribución de tensiones por elemento en la zona de contacto de una válvula de motor de combustión interna utilizando el algoritmo flexible-rígido con dos multiplicadores de Lagrange.	102
6.18. Malla de soporte e interpolación de una superficie con la técnica Clough-Tocher.	104
6.19. Malla de soporte e interpolación de una superficie con la técnica de Loop.	105
6.20. Definición de la distancia mínima para un problema de contacto suave.	106
6.21. Parche triangular regular definido por 12 vértices de control.	107
6.22. Contacto entre dos cubos de diferente dimensión. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.	116
6.23. Campo de tensiones en dirección de la carga aplicada para una sección en la zona central. Comparación con el software SAMCEF.	116
6.24. Tensión en la interface de contacto. Comparación entre el software SAMCEF y el algoritmo de contacto suave.	117
6.25. Cubos de igual dimensión. Topología de las mallas, condiciones de borde y propiedades mecánicas utilizadas.	118
6.26. Tensión normal en la interface de contacto.	118
6.27. Tensiones de contacto en una válvula de motor de combustión interna.	119

6.28. Comparación de la distribución de las tensiones por elemento en la zona de contacto de una válvula de motor de combustión interna utilizando el algoritmo de contacto suave y el software SAMCEF.	120
6.29. Notación utilizada en el método mortar para los cuerpos en contacto.	123
6.30. Vector normal promedio ν_A definido por los elementos: $(J - 1)$, (J) y $(J + 1)$ en el nodo A	125
6.31. (a) Elemento no-mortar k , elemento mortar l , plano de proyección \mathbf{p} , base $\mathcal{V} = \{\check{\mathbf{e}}_1, \check{\mathbf{e}}_2, \check{\mathbf{e}}_3\}$; (b) proyección de los elementos k y l en el plano \mathbf{p} , (c); polígono \mathcal{P} formado con el algoritmo de intersección; (d) división de \mathcal{P} en triángulos.	127
6.32. Test de la parcela. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.	133
6.33. Test de la parcela. Comparación del campo de desplazamientos en la dirección Z entre el método nodo-segmento y el método mortar propuesto en esta Tesis.	134
6.34. Distribución de presión en la interfase de contacto.	134
6.35. Contacto de Hertz. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.	135
6.36. Contacto entre dos cilindros elásticos. Campo de desplazamientos.	136
6.37. Contacto entre dos cilindros elásticos. Distribución de tensiones por nodo en la dirección \mathbf{Y}	136
6.38. Contacto entre dos cilindros elásticos. Distribución de tensiones por elemento. Comparación con solución analítica de Hertz.	137
6.39. Condiciones de borde y propiedades mecánicas de dos cuerpos cilíndricos elásticos en contacto.	137
6.40. Comparación del campo de desplazamiento en la dirección Z de dos cuerpos cilíndricos elásticos en contacto.	138
6.41. Comparación del campo de desplazamiento en la dirección Z de dos cuerpos cilíndricos elásticos en contacto.	139
6.42. Válvula de motor de combustión interna. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.	140
6.43. Distribución de tensiones en la dirección Z en una válvula de motor de combustión interna con una malla de hexahedros.	141
6.44. Distribución de tensiones por elemento en la zona de contacto para el ejemplo de la válvula de motor de combustión interna.	142
6.45. Comparación de la distribución de tensiones en la zona de contacto utilizando el algoritmo de contacto suave, SAMCEF y el método mortar.	142
7.1. Evolución del desgaste acumulado.	147
C.1. Definición del plano de proyección.	164
C.2. Intersección entre dos segmentos en el plano.	165
C.3. Notación utilizada para los cuerpos en contacto.	166
D.1. Geometría de la válvula ensayada en la VTR.	167

Índice de Tablas

3.1. Datos de ensayos y límites de endurancia para un acero típico de alta resistencia tomadas del trabajo de Nishihara y Kawamoto [NK45]. . .	27
4.1. Composición química del acero analizado.	34
4.2. Propiedades termomecánicas del acero analizado.	34
5.1. Coeficientes de transferencia de calor obtenidos.	62
5.2. Conductancias obtenidas.	62
5.3. Temperaturas de referencia adoptadas.	63
5.4. Diferencia de temperaturas entre el modelo numérico y el experimental.	63

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Los fenómenos de fatiga y desgaste, a los que se ven sometidos numerosos componentes mecánicos que se utilizan actualmente en diferentes aplicaciones, constituyen una de las principales causas de falla de un sistema. La elevada confiabilidad demandada a los diseños por parte de las nuevas normativas hacen que la predicción de fallas sea cada vez más exigente y precisa.

Algunos problemas en los cuales se requiere estudiar los fenómenos de fatiga y desgaste son, por ejemplo, los que se describen a continuación,

- *engranajes*, donde los dientes de las ruedas dentadas están sujetos a cargas variables de muy alta frecuencia;
- *ruedas de trenes de alta velocidad*, puesto que en el punto de contacto entre la rueda del tren y el riel se generan cargas alternadas provenientes del peso de la formación;
- *válvulas de motores de combustión interna*, ya que entran en contacto alternado con el asiento de válvula, soportando cargas variables en el tiempo con una frecuencia y condiciones de temperatura muy elevada relacionadas con el ciclo de funcionamiento del motor.

El estudio de las tensiones y deformaciones a los que se ve sometido este tipo de componentes es lo que motiva el desarrollo de esta Tesis; más específicamente, se pretende predecir las fallas que pudieran producirse en un componente mecánico durante el ciclo de funcionamiento por medio de métodos computacionales, en particular, el Método de Elementos Finitos (MEF) y con el apoyo de experiencias de laboratorio.

La simulación computacional permite obtener mejores diseños y reglas de predicción sin que sea necesario llevar a cabo una gran cantidad de ensayos experimentales que adicione costos y tiempos considerables al proceso de diseño. Por otra parte, las soluciones analíticas para la mecánica del sólido se encuentran limitadas a geometrías y condiciones de borde relativamente sencillas. Es por ello que la simulación por medio del MEF se presenta como una técnica muy atractiva para el diseño y verificación de componentes mecánicos. Aún así, para la obtención de parámetros

y coeficientes que alimenten a los modelos numéricos de aplicación propuestos, al igual que para su validación, resulta imprescindible la realización de ensayos experimentales.

1.2. Fatiga en componentes mecánicos

Los componentes de máquinas, vehículos y diferentes estructuras están frecuentemente solicitados a cargas oscilatorias donde las tensiones resultantes pueden llevar a la degradación de las propiedades mecánicas del material con la consecuente rotura. Este proceso es denominado *fatiga*.

Originalmente, el conocimiento de este fenómeno se produjo por mera observación de la rotura de componentes y probetas cuando eran sometidas a cargas de intensidad variable. La falla debido a fatiga ha sido objeto de investigación por más de 200 años, siendo Whöler, en 1864, uno de los investigadores pioneros en la materia. Los primeros aspectos teóricos fueron presentados en los trabajos de Ewing y Rosenhain [ER00] y Ewing y Humfrey [EH03] en 1900 y 1903, respectivamente. Estos estudios se focalizaron principalmente en la investigación del accidente ferroviario que tuvo lugar en cercanías de Versailles (Francia), en 1842, que se produjo por fatiga de uno de los componentes de la locomotora, causando la pérdida de vidas humanas.

Schültz [Sch93] presenta un trabajo en el cual relata diversos accidentes aéreos causados, a fines de la segunda guerra mundial, por fatiga. Un caso de mayor impacto asociado a tragedias de aeronaves es el del avión Comet, primer jet comercial producido en el mundo entre 1953 y 1954. Estas aeronaves se desintegraban en el aire de manera misteriosa. Las investigaciones concluyeron que los ciclos de presurización y despresurización en la cabina de pasajeros provocaban en las ventanillas, de forma rectangular, daños por fatiga.

Los métodos basados en un criterio de vida infinita fueron desarrollados en los siglos XIX y gran parte del siglo XX, donde los sistemas mecánicos tales como la máquina de vapor tenían un período de operación más limitado que las máquinas actuales, como ser turbinas de avión, motores de automóviles o trenes de alta velocidad, cuyos componentes requieren una vida útil de 10^8 a 10^{10} ciclos. Restricciones de tiempo y costo hacen que muy pocos resultados experimentales se encuentren disponibles más allá de 10^7 ciclos, donde se predice el límite estándar de fatiga por medio de aproximaciones estadísticas. Recientemente, los sistemas de fatiga que utilizan piezoeléctricos permiten acelerar los ensayos de carga cíclica por su capacidad de trabajar con excitaciones del orden de 20 kHz [Bat06]. Los resultados de las experiencias obtenidas con este tipo de máquinas han demostrado que la fractura por fatiga puede ocurrir más allá de 10^7 ciclos, con lo cual el concepto de vida infinita deja de ser correcto, es decir, las curvas tensión vs. número de ciclos (S-N) de la mayoría de los materiales metálicos, asumidas del tipo hiperbólica, no tienen una asíntota horizontal y la resistencia a fatiga a 10^8 ciclos resulta ser menor que a 10^7 ciclos [BDLF01].

Los sistemas de análisis de fatiga piezoeléctricos permiten estudiar el comportamiento en diferentes tipos de materiales con costos y tiempos considerablemente

más bajos comparados con las típicas máquinas servo hidráulicas, donde la frecuencia máxima nominal de operación se encuentran en el orden de los 100 Hz. Además, su utilización puede ser extendida al estudio de fatiga con diferentes temperaturas o al desgaste, entre otros fenómenos. Los resultados de fatiga que se consiguen con este tipo de técnicas se encuentran en el rango de 10^7 a 10^9 ciclos, donde operan la mayoría de los componentes mecánicos actuales. Una revisión muy citada de este tipo de máquinas se presenta en [BdMB02, BP05].

Por otro lado, los métodos para el análisis computacional de estructuras y componentes mecánicos sujetos a fatiga se pueden clasificar en dos categorías,

- *Métodos de postratamiento de los resultados.* Los resultados de análisis estáticos y/o dinámicos permiten determinar los ciclos de tensiones a los que se encuentra sometida la pieza, estimando la duración del componente mediante distintos criterios que combinan las tensiones actuantes en diferentes direcciones con coeficientes provistos por ensayos experimentales en máquinas de fatiga [PDG⁺97].
- *Métodos de inclusión de variables de daño.* En este caso, se incorpora al modelo una variable escalar de daño en el modelo material. Mediante una integración de la respuesta de la pieza a lo largo de su vida útil con la progresión de dicha variable, se alcanzaría la condición de falla, considerada como la de inicio de la fisura. Estos métodos requieren un análisis preciso del ciclo de cargas a la cual se somete la pieza y una integración temporal de la ecuación de daño [PDBBDV96].

En la mayoría de los componentes mecánicos, la vida útil es afectada a partir del momento en que se genera un daño en algún sector. Por lo tanto, un método basado en inclusión de variables de daño no es adecuado para el diseño de estos componentes. Desde esta óptica, muchos métodos y criterios de análisis de fatiga han sido desarrollados para la determinación de la vida útil de componentes mecánicos sujetos a un número muy alto de ciclos de carga, entre los que se pueden citar dos ampliamente difundidos, los criterios de Crossland [Cro56] y de Dang Van [DV73] desarrollados para fatiga de alto número de ciclos y que toman como variables fundamentales las tensiones de corte y las normales. El empleo conjunto de estrategias de cálculo numérico y experimental mediante estos criterios ha demostrado ser una metodología apropiada para determinar con buena aproximación la vida útil de un componente mecánico [GAM05, PDG⁺97, CCR06, CCR07].

1.3. Contacto mecánico

El contacto mecánico se define como el estudio de las tensiones y deformaciones de sólidos que se tocan entre sí, en uno o más puntos. Las aplicaciones del contacto mecánico en problemas de ingeniería son de lo más diversas, como ser el diseño de engranajes, el análisis de contacto entre una válvula de un motor de combustión interna y el asiento, estudios de desgaste y tribología, procesos de conformado, o aplicaciones en bioingeniería, entre otras [MKW⁺09, SH04].

Los primeros estudios de contacto datan del año 1882 con la publicación de Heinrich Hertz titulada *Acerca del contacto mecánico*. Hertz, discípulo de Helmholtz, presentó su teoría en la Sociedad Física de Berlín, donde los miembros de la audiencia percibieron la importancia tecnológica de su trabajo e instaron a Hertz a publicar un segundo trabajo, relacionado con aplicaciones de ingeniería. Sin embargo, los desarrollos de su teoría no aparecieron en la literatura hasta comienzos del siglo XX. En aquel entonces, los estudios se realizaban mediante condiciones de borde muy simples, ya que las soluciones analíticas carecían de generalidad como para considerar aplicaciones del mundo real [Jho87]. La teoría de Hertz se restringe a sólidos sin fricción y perfectamente elásticos.

En la actualidad, el método de elementos finitos (MEF) es la técnica de simulación numérica más popular para el análisis de procesos que involucran el contacto mecánico. A través de los años, han sido propuestos diferentes tipos de algoritmos, entre los que pueden mencionarse los basados en penalidad, los del tipo multiplicadores de Lagrange y los esquemas lagrangiano aumentado [ACdSCA04, CCRF07, PL04]. Los esquemas de *penalidad* son ampliamente utilizados debido a que el desplazamiento es la única variable y, consecuentemente, no resulta muy difícil su implementación, pero tienen como desventaja la penetración que se produce entre los cuerpos en contacto, de manera que el usuario debe adoptar un valor apropiado de un parámetro (factor de penalidad) en forma relativamente arbitraria a los efectos de arribar a resultados aceptables. En estos métodos, con el incremento del factor de penalidad se alcanzaría la solución exacta, pero en aplicaciones computacionales esto no es posible, pues con valores muy grandes se generaría un mal condicionamiento de las matrices introduciendo errores en la solución. Los métodos basados en *multiplicadores de Lagrange* evitan el problema del mal condicionamiento, no generan penetración entre los cuerpos en contacto y hacen cumplir las restricciones de manera exacta, pero para ello introducen variables adicionales que generan un incremento en la dimensión de las matrices. Los métodos del tipo *lagrangiano aumentado* son una combinación de los de penalidad y multiplicadores de Lagrange y toman características de ambos. A pesar de la gran cantidad de métodos desarrollados, es difícil encontrar un algoritmo lo suficientemente robusto que sea aplicable a problemas de ingeniería sin una participación sustancial de un operador con experiencia en el tema.

Una detallada descripción de los algoritmos mencionados pueden ser encontrada en el libro de Wrigger [Wri02] y en las referencias que allí se citan, al igual que en el Cap. 6 de esta Tesis.

1.4. Objetivos

El objetivo de esta Tesis consiste en el desarrollo de métodos numéricos y algoritmos computacionales destinados al análisis y diseño de componentes mecánicos que se encuentran sometidos a la aplicación repetida de cargas en un muy alto número de ciclos en condiciones de elevada temperatura.

Se propone mejorar y generar programas de computación y modelos numéricos que consideren los efectos de fatiga y contacto en piezas mecánicas.

Asimismo, para el desarrollo y posterior validación de los modelos numéricos propuestos, esta Tesis tiene como objetivo adicional la utilización de máquinas de laboratorio especialmente diseñadas que intentan reproducir las condiciones de operación del componente en estudio.

Como objetivo particular, se propone estudiar el fenómeno de fatiga en aceros de alta resistencia y componentes mecánicos, como el de una válvula de motor de combustión interna, a través de ensayos experimentales y técnicas numéricas de simulación mediante el MEF.

Por otro lado, el desgaste es un fenómeno que, al igual que el de fatiga, condiciona sustancialmente la vida y operación de un componente mecánico. Actualmente, los modelos relacionados con el desgaste se basan en modificaciones más o menos complejas a la ley de Archard [Arc53], cuya dificultad está asociada a la precisión con que se requiera ajustar las constantes propias del modelo y, fundamentalmente, a los algoritmos de contacto utilizados. En este sentido, se han desarrollado e implementado diferentes algoritmos de contacto con el objetivo de conseguir tensiones sin oscilaciones de origen numérico, de modo que permitan reproducir con precisión un proceso tal como el de desgaste.

1.5. Metodología

La metodología de trabajo se divide en dos partes principales. En la primera se desarrollan los aspectos teóricos y experimentales relacionados con el efecto de fatiga a elevada temperatura y su aplicación a válvulas de motores de combustión interna, en tanto que en la segunda parte ha sido dedicada al estudio de algoritmos de contacto.

En cuanto a la primera parte, en el Cap.3 se presenta el estado del arte relacionado con el estudio de fatiga en general, como así también una descripción de los criterios de fatiga multiaxial más utilizados. En el Cap. 4 se describe la metodología empleada para la obtención de las curvas tensión vs. número de ciclos a elevada temperatura de un acero austenítico y la máquina de fatiga utilizada. Como se detalla en el Cap. 5, a partir de los resultados obtenidos de los ensayos experimentales y mediante el MEF se generaron nuevas geometrías de válvulas de motores de combustión interna para evaluar su capacidad de resistencia a fatiga. Los modelos numéricos de válvulas han sido estudiados y analizados en el programa comercial de elementos finitos SAMCEF Mecano [SAM07, CCRL09]. En el Cap. 5 se presenta un diseño de válvula obtenido por simulación numérica y que ha sido ensayado en una máquina de fatiga especialmente construida para este tipo de experiencias. La válvula fue manufacturada en la empresa MAHLE S.A de Argentina en tanto que los ensayos fueron realizados en MAHLE de Alemania.

La segunda etapa se desarrolla a partir del Cap. 6, en el cual se resume el estado del arte de los algoritmos de contacto. En esta Tesis, se propone un algoritmo del tipo flexible rígido basado en dos multiplicadores de Lagrange cuya base ha sido tomada del trabajo de Areias *et al.* [ACdSCA04]. Luego, debido a la imposibilidad de simular el contacto entre cuerpos flexibles, se decidió implementar un algoritmo del tipo flexible-flexible con técnicas de interpolación de superficies basadas en los algo-

1. INTRODUCCIÓN

ritmos de subdivisión de superficies, con un esquema del tipo nodo-segmento como así también con el lagrangiano de dos multiplicadores de Lagrange. Los resultados que se obtuvieron de la tensión, indicaron oscilaciones de origen numérico en la zona de contacto, lo que motivó el desarrollo de un esquema tipo mortar; cuyas soluciones mostraron un buen desempeño del algoritmo en relación a la calidad de las tensiones obtenidas. Esta característica hace que sean muy útiles para un estudio de desgaste. En el Cap. 7 se presenta un ejemplo sencillo para simular efectos de desgaste utilizando el algoritmo de contacto flexible-rígido propuesto con dos multiplicadores de Lagrange.

Aplicaciones

Los algoritmos y modelos numéricos desarrollados en esta Tesis, junto con las constantes propias del material obtenidas en forma experimental, fueron aplicados específicamente al diseño de válvulas de motores de combustión interna donde se requiere una vida útil superior a 10^9 ciclos. Estos componentes se encuentran sometidos a condiciones de trabajo extremadamente severas, que incluyen elevadas temperaturas y fuertes gradientes térmicos en conjunto con la aplicación de fuerzas producto de la presión interna en el cilindro y de los efectos inerciales. El contacto alternativo que se produce entre la válvula y el asiento genera tensiones variables en el tiempo con alta frecuencia que reducen su vida útil por efecto de la fatiga y desgaste, condiciones bajo las cuales la simulación es casi imprescindible para llegar a determinar una historia de tensiones y generar nuevos diseños. La Fig. 1.1 muestra los componentes principales de un tren de válvulas de un motor de combustión interna. En ella se puede apreciar las válvulas de admisión y escape haciendo contacto con las levas y asiento. Además se detallan los resortes de retorno.

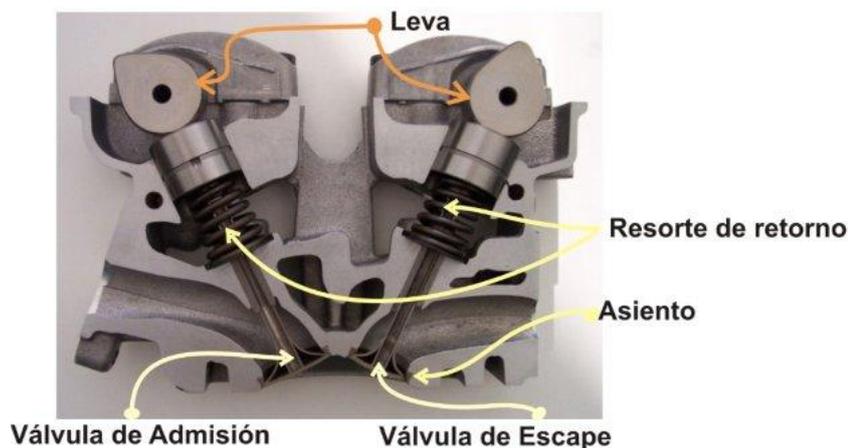


Figura 1.1: Componentes principales de un tren de válvulas en un motor de combustión interna.

Parte I

EL FENOMENO DE FATIGA

Capítulo 2

Conceptos y definiciones preliminares

2.1. Introducción

En un estado triaxial de cargas, la teoría clásica de elasticidad asume una ley generalizada de Hooke en la cual las tensiones representadas por el tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ son una combinación lineal de todas las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$. Éstas se relacionan a través de la ley constitutiva $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$, donde el tensor de constantes elásticas \mathbf{C} contiene un total de 81 coeficientes, no todos independientes entre sí. No obstante, debido a la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$, el número de coeficientes independientes se reduce a 36.

Para materiales utilizados comúnmente en la mayoría de las aplicaciones civiles, mecánicas o aeronáuticas, entre otras, estas ecuaciones describen el comportamiento del material con suficiente aproximación asumiendo la hipótesis de que los procesos son isotérmicos y adiabáticos.

Un material es denominado elástico cuando recobra su estado original una vez que las cargas causantes de la deformación han sido removidas. Si además se asume un comportamiento isotrópico, todas las constantes elásticas de \mathbf{C} pueden ser expresadas con tan sólo dos constantes independientes, las conocidas constantes de Lamé λ y μ . En términos de estas constantes, la ley de Hooke para un material isotrópico puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

o su equivalente en notación indicial,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (2.2)$$

Estas ecuaciones definen un material isótropo de Hooke.

En lo siguiente, se presenta una lista de las relaciones entre las constantes de Lamé, λ y μ , el módulo de Young E , el coeficiente de Poisson ν , el módulo de corte

G y el módulo volumétrico K ,

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\
 \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, \\
 E &= \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \\
 \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \\
 G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} = \mu, \\
 K &= \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Con la ley de Hooke, Ec.(2.2) e igualando $i = j$, se obtiene:

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii}. \tag{2.4}$$

Luego, despejando ε_{ij} de la Ec.(2.2) y sustituyendo con $\varepsilon_{kk} = \sigma_{kk}/(3\lambda + 2\mu)$, se obtiene una expresión tensorial que vincula las deformaciones con las tensiones:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}. \tag{2.5}$$

Utilizando las Ecs.(2.3), la expresión de la Ec.(2.5) adquiere la siguiente forma:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij}. \tag{2.6}$$

2.1.1. Representación tensorial e invariantes

El tensor de Cauchy define completamente el estado de tensiones en un instante de tiempo t para un punto dado y se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{yx}(t) & \tau_{zx}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{zy}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

La tensión hidrostática puede ser calculada por medio de la media aritmética de la tensión normal,

$$p_h(t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}(t), \tag{2.8}$$

y corresponde a un estado de tensiones donde las tres componentes principales de la tensión son iguales. A este estado se lo denomina *estado esférico de tensiones*.

Cada estado de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ puede ser dividido en una parte esférica y en otra desviadora a través del tensor desviador \boldsymbol{S} definido de la siguiente manera,

$$\boldsymbol{S}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) - \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))}{3} \boldsymbol{I}. \tag{2.9}$$

Cabe resaltar que un tensor de tensiones desviador $\mathbf{S}(t)$ tiene traza nula,

$$\text{tr}(\mathbf{S}(t)) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) - \text{tr}(p_h(t)\mathbf{I}) = 0, \quad (2.10)$$

por lo tanto una de sus componentes puede ser escrita en función de las otras:

$$S_{xx}(t) + S_{yy}(t) + S_{zz}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{zz}(t) = -[S_{xx}(t) + S_{yy}(t)]. \quad (2.11)$$

A partir de ahora se considera que todas las cantidades son variables en el tiempo evitando incluir la letra t para facilitar la interpretación de las ecuaciones.

De manera análoga a la Ec.(2.9) se puede hacer lo propio con el tensor de deformación,

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}, \quad (2.12)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}'$ es el tensor desviador de deformación.

Los tensores de segundo orden $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{S} poseen tres invariantes definidos por funciones escalares obtenidos a partir de una ecuación cúbica en x , denominada ecuación característica:

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - x\mathbf{I}) = 0, \quad \det(\mathbf{S} - x\mathbf{I}) = 0, \quad (2.13)$$

Luego, los invariantes asociados al tensor $\boldsymbol{\sigma}$ pueden ser calculados por,

$$\begin{aligned} \Sigma_I &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \\ \Sigma_{II} &= \frac{1}{2}[\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)], \\ \Sigma_{III} &= \det(\boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

o en notación indicial,

$$\begin{aligned} \Sigma_I &= \sigma_{ii}, \\ \Sigma_{II} &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji}, \\ \Sigma_{III} &= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

y para el caso del tensor desviador \mathbf{S} ,

$$\begin{aligned} J_1 &= S_{ii} = 0, \\ J_2 &= \frac{1}{2}S_{ij}S_{ji}, \\ J_3 &= \frac{1}{3}S_{ij}S_{jk}S_{ki}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.1.2. El criterio de von Mises

La energía de deformación elástica se define como,

$$w_e = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^e} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.17)$$

2. CONCEPTOS Y DEFINICIONES PRELIMINARES

donde el superíndice e es para enfatizar la deformación elástica. La ley de Hooke para un estado desviador es,

$$\mathbf{S} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}', \quad (2.18)$$

o bien,

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{\mathbf{S}}{2\mu}. \quad (2.19)$$

Luego, w_e puede ser escrito en términos del tensor desviador y el esférico de la siguiente manera,

$$w_e = \int_0^{\varepsilon^e} [\mathbf{S} + \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}] : [d\boldsymbol{\varepsilon}'^e + \frac{1}{3}\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^e)\mathbf{I}], \quad (2.20)$$

que también puede ser expresado como la suma de una energía de corte w_d , y una energía de deformación volumétrica w_v ,

$$w_e = \underbrace{\int_0^{\varepsilon^e} \mathbf{S} : d\boldsymbol{\varepsilon}'^e}_{w_d} + \underbrace{\int_0^{\text{tr}(\varepsilon^e)} \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^e)}_{w_v}. \quad (2.21)$$

Diferenciando la Ec.(2.19), $d\boldsymbol{\varepsilon}'^e = 1/2\mu d\mathbf{S}$, la energía por corte puede ser calculada según,

$$w_d = \int_0^{\mathbf{S}} \frac{1}{2\mu} \mathbf{S} : d\mathbf{S} = \frac{1}{4\mu} \mathbf{S} : \mathbf{S}. \quad (2.22)$$

Considerando un estado de tensión uniaxial en fluencia, esto es,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

su tensor desviador resulta,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_s \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Igualando la energía de un estado de tensiones tridimensional con el correspondiente al de un estado de tensiones uniaxial como el de la Ec.(2.23) se tiene $(1/4\mu) \mathbf{S} : \mathbf{S} = (1/6\mu) \sigma_s^2$ y finalmente,

$$\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} = \frac{1}{3} \sigma_s^2. \quad (2.25)$$

El segundo invariante del tensor desviador es de la forma,

$$J_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{S} : \mathbf{S}), \quad (2.26)$$

luego, con las Ecs.(2.25, 2.26),

$$J_2 - \frac{1}{3} \sigma_s^2 = 0, \quad (2.27)$$

o bien,

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_s^2 = \frac{1}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S}. \quad (2.28)$$

Finalmente,

$$\sigma_s = (3J_2)^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S}\right)^{1/2}. \quad (2.29)$$

Expandiendo la expresión del criterio de von Mises [LC90],

$$\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2)] - \sigma_s^2 = 0, \quad (2.30)$$

o en términos de las tensiones principales, el criterio inicial de fluencia puede ser escrito como,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]^{\frac{1}{2}} = \sigma_s^2. \quad (2.31)$$

Esta es la ecuación de un cilindro circular con su eje igualmente inclinado respecto de los tres ejes de referencia $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$.

2.1.3. Medidas asociadas a los invariantes del tensor de tensiones

Para un estado de cargas variable en el tiempo de período P , la amplitud de la tensión hidrostática y su valor medio son definidos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} p_{h_a} &= \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in P} \left[\frac{\sigma_{ii}(t)}{3} \right] - \min_{t \in P} \left[\frac{\sigma_{ii}(t)}{3} \right] \right\}, \\ p_{h_m} &= \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in P} \left[\frac{\sigma_{ii}(t)}{3} \right] + \min_{t \in P} \left[\frac{\sigma_{ii}(t)}{3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Luego, el valor máximo de la tensión hidrostática es,

$$p_{h_{max}} = p_{h_a} + p_{h_m}. \quad (2.33)$$

Denotando a Dev^3 como el espacio de los tensores desviadores simétricos de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 y \mathbf{N}_i una base arbitraria ortonormal con $i = 1, \dots, 5$, cualquier estado de tensiones $\mathbf{S}(t)$ puede ser escrito como,

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{i=1}^5 s_i(t) \mathbf{N}_i. \quad (2.34)$$

2. CONCEPTOS Y DEFINICIONES PRELIMINARES

ver Zouain *et al.* [ZMC06]. Si la base de Dev^3 es por ejemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= \begin{bmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, & \mathbf{N}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{N}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

las componentes $s_i(t)$ de $\mathbf{S}(t)$ en esta base son calculadas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} S_{xx}(t), & s_2(t) &= \frac{1}{2}(S_{yy}(t) - S_{zz}(t)), & s_3(t) &= S_{xy}(t), \\ s_4(t) &= S_{xz}(t), & s_5(t) &= S_{yz}(t). \end{aligned} \quad (2.36)$$

A partir de las Ecs.(2.36), denominadas reglas de transformación, es posible describir el camino de las tensiones en términos de una curva en \mathbb{R}^5 , donde cada punto $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^5$ puede ser expresado por el siguiente vector,

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad s_3(t) \quad s_4(t) \quad s_5(t)]^T. \quad (2.37)$$

La raíz cuadrada del segundo invariante del tensor desviador es también una medida de la tensión de mucho interés. Su definición está dada por,

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}, \quad (2.38)$$

que además puede ser descrito por medio del vector \mathbf{s} en un campo euclidiano de cinco dimensiones como,

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}. \quad (2.39)$$

Durante un ciclo de carga periódica, el extremo del vector \mathbf{s} describe en \mathbb{R}^5 una curva cerrada Ψ . La raíz cuadrada de la amplitud del segundo invariante del tensor desviador, denotado como $\sqrt{J_{2a}}$, es igual al radio de la hiper-esfera que circunscribe a Ψ .

Una forma general de calcular $\sqrt{J_{2a}}$ es por medio de la definición de la cuerda más larga del camino de las tensiones, ver [BCH90],

$$\sqrt{J_{2a}} = \frac{1}{2} \max_{t_i \in P} \left\{ \max_{t_j \in P} \|\mathbf{s}(t_i) - \mathbf{s}(t_j)\| \right\}. \quad (2.40)$$

Con la definición de la Ec.(2.40) existen algunas curvas para las cuales esta cuerda no es única, por lo tanto, podría existir una múltiple definición de la tensión de corte media.

Una mejor definición de $\sqrt{J_{2a}}$ es a través del radio de la hiper-esfera que circunscribe al camino de las tensiones,

$$\sqrt{J_{2a}} = \max_{t \in P} \|\mathbf{s}(t) - \mathbf{s}_m\|, \quad (2.41)$$

donde \mathbf{s}_m es el denominado vector de tensión media. La Fig. 2.1-a muestra un esquema de la cuerda más larga al camino de tensiones y la Fig. 2.1-b la hiper-esfera que circunscribe a dicho camino de las tensiones.

A continuación se presenta un algoritmo del tipo incremental propuesto por Dang Van *et al.* [DVGM89] capaz de resolver el problema de la Ec.(2.41). El procedimiento consiste en evaluar en cada paso de tiempo $D = \|\mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{s}_{m,i}\|$ en i puntos de 1 a N y modificar el radio del círculo desplazándolo a su centro en la dirección de \mathbf{s}_{i+1} por medio de un parámetro κ . Con valores apropiados de κ , el algoritmo converge rápidamente a un círculo límite que circunscribe el camino de las tensiones Ψ , ver Fig. 2.1-c.

Algoritmo Incremental

```

function [R, sm, N] = incremental(κ, s)
RAD := 0;
DES := 0;
for j = 1 a N,
    smj-1 := RAD;
    Rmj-1 := DES;
    for i = 1 a N,
        Di := \| si - smi-1 \|;
        dist := Di - Ri-1;
        if (dist ≤ 0)
            Ri := Ri-1;
            smi := smi-1;
            break
        else
            Ri := Ri-1 + κ * (Di - Ri-1);
            smi := smi-1 + (1 - κ) * (1 -  $\frac{R_{i-1}}{D_i}$ ) * (si - smi-1);
            RAD := Ri;
            DES := smi;
        end;
    end;
end;
end;
```

La Ec.(2.41) puede ser considerada como la correcta definición de la amplitud de la tensión de corte, como lo menciona Papadopoulos [Pap98], quien demostró que el círculo circunscrito es el único que siempre arroja resultados correctos en términos de la amplitud de la tensión y el valor medio de ésta en un plano material para cualquier camino de carga.

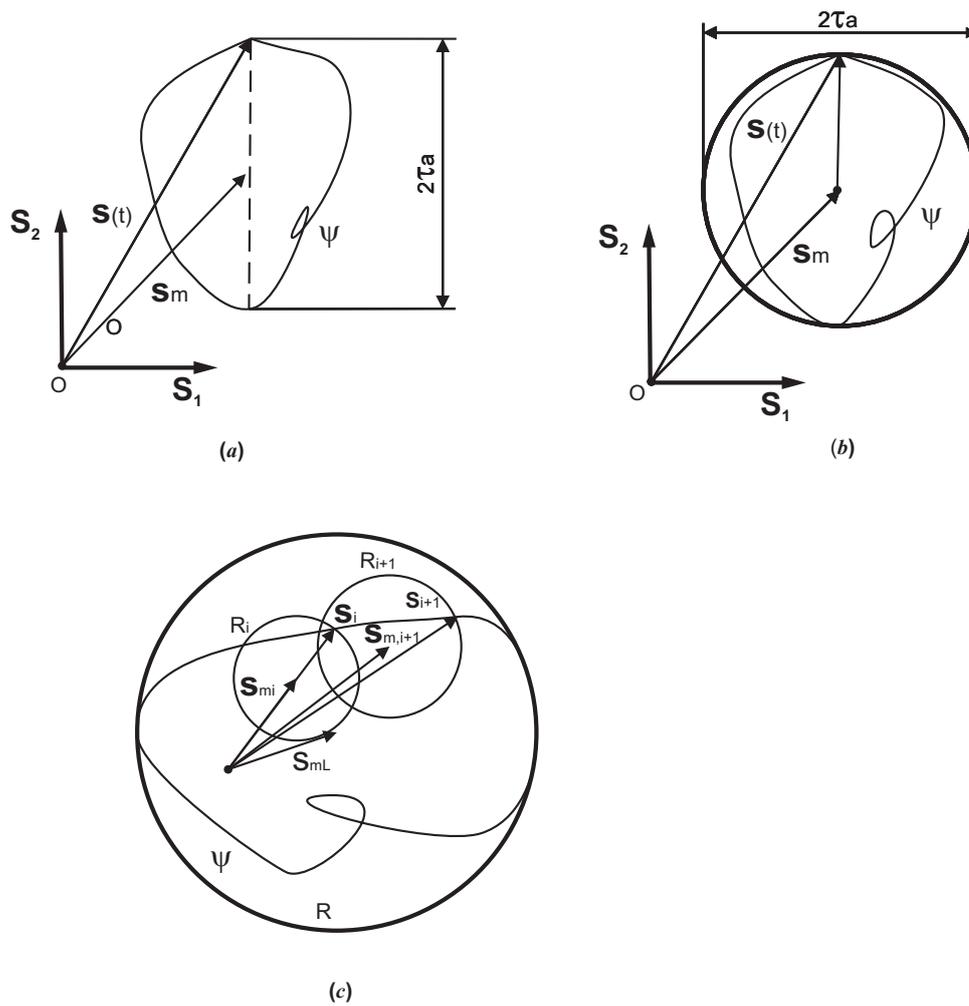


Figura 2.1: Las figuras (a) y (b) representan definiciones de $\sqrt{J_{2a}}$ y la figura (c) el mecanismo para obtener $\sqrt{J_{2a}}$ utilizando el algoritmo incremental de Dang Van *et al.* [DVGM89].

2.2. Conclusiones

Las ecuaciones presentadas en esta sección se utilizarán a lo largo de la primera parte de esta Tesis y servirán para establecer la uniformidad de la nomenclatura empleada.

Por otra parte, se presentó un algoritmo del tipo incremental propuesto por Dang Van *et al.* [DVGM89] que permite el cálculo de $\sqrt{J_{2a}}$ y que interviene de manera esencial en las ecuaciones de fatiga multiaxial que se desarrollarán en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Fatiga en materiales metálicos

3.1. Estado del arte.

Los primeros estudios de fatiga fueron realizados inicialmente por Wöhler y datan del año 1864. En lo que respecta a esta problema, se han propuesto diversos modelos y teorías para analizar el fenómeno y poder justificar sus causas. La rotura por fatiga ya sea en materiales dúctiles o frágiles es del tipo frágil, similar a las encontradas en materiales frágiles por efecto de la aplicación de cargas estáticas. Debido a ello, se creía que la repetición alternada de cargas en un componente originaba algún cambio en la microestructura del material; en otras palabras, se suponía que existía algún proceso de cristalización. Con la aparición del microscopio electrónico, se pudo comprobar que esa suposición era falsa ya que, en la superficie de rotura no había evidencia alguna de ningún cambio en la estructura cristalina. Si se observa la estructura de un determinado material a un tamaño lo suficientemente pequeño, se puede reconocer una estructura no homogénea y anisotrópica. Por otro lado, se encuentran presentes homogeneidades debido a pequeñas partículas de composición química diferente de la composición principal del material, provenientes mayormente de los procesos de fabricación. Como resultado se tiene una estructura no uniforme con zonas o puntos de fuerte concentración de tensiones que dan origen usualmente a una fractura progresiva o rotura por fatiga [Poo62]. Esta característica junto con la terminación superficial, tensiones residuales, condiciones ambientales, defectos internos, conducen a mecanismos de iniciación y propagación de fisuras. Por ejemplo, bajo tensiones unidireccionales, aparecen escalones en la superficie y eventualmente, se producen fisuras superficiales bajo pequeñas cantidades de deformación plástica [For69].

Las sollicitaciones elastoplásticas cíclicas a nivel de grano producen una degradación mecánica del material. La iniciación de una fisura por fatiga en un material dúctil es una consecuencia de una microplasticidad dentro de un grano en una escala de 10^{-3} mm [Poo07] que ocurre a niveles de tensiones mucho más baja que la tensión de fluencia [Cot64]. Bajo tensiones uniaxiales, un plano máximo de corte se encuentra a 45° del eje longitudinal y el deslizamiento toma lugar en direcciones orientadas favorablemente alrededor de este ángulo culminando con una microfisura a nivel de grano.

3. FATIGA EN MATERIALES METÁLICOS

La descripción del fenómeno de fatiga puede abordarse desde dos puntos de vista diferentes: una visión metalúrgica y otra mecánica. La descripción metalúrgica se relaciona con el estado del metal antes, durante y después de la aplicación de las cargas y usualmente es utilizada para el estudio de los mecanismos de falla. La descripción mecánica se relaciona con la respuesta mecánica, por ejemplo, la determinación del número de ciclos de carga necesarios para alcanzar la rotura. Esta última descripción es más útil desde un punto de vista ingenieril, donde el comportamiento en servicio para un determinado componente debe ser predicho, y es en ésta donde se pondrá énfasis en esta Tesis. La mejor recopilación de la descripción mecánica de fatiga es dada en [Sch93], donde se incluyen más de 500 referencias.

Las fisuras en un determinado componente mecánico pueden originarse inicialmente debido a procesos de fabricación, o pueden desarrollarse durante el tiempo de servicio. Existen diversos métodos para el estudio de fatiga clasificados fundamentalmente en dos grandes grupos: i) *los criterios de iniciación de fisuras*, donde se estima la vida del componente en términos del número de ciclos necesarios para la aparición de una fisura y ii) *los criterios de propagación de fisuras*, en los cuales se admite la existencia de fisuras, y la vida del componente se estima en función del número de ciclos necesarios para que las fisuras evolucionen hasta conseguir la rotura. En esta Tesis se aborda la línea de investigación de los métodos basados en la definición de criterios de iniciación de fisuras que, a su vez se subdividen en otros dos grupos: i) fatiga policíclica o de alto número de ciclos y ii) fatiga oligocíclica o de bajo número de ciclos. Tradicionalmente, se ha diferenciado a la fatiga oligocíclica de la policíclica simplemente por el número de ciclos de carga, es decir, si el número de ciclos de carga es menor a 10^4 , entonces corresponde al rango de fatiga oligocíclica, en tanto que, si el número de ciclos de carga es mayor a 10^7 , entonces este rango define la fatiga policíclica [Poo07]. Sin embargo, trabajos recientes de fatiga en alto número de ciclos han mostrado que la fatiga policíclica y la fatiga oligocíclica también se diferencian por los niveles de plasticidad observados [Pap98]. Una característica de la fatiga policíclica es la iniciación de fisuras con niveles de tensión sin deformación plástica macroscópica. Pero a escalas mesoscópicas (nivel intermedio entre las descripciones microscópicas y macroscópicas), la plasticidad se manifiesta en cierto número de granos generando una deformación plástica heterogénea y con posterior iniciación de microfisuras. La iniciación de la primera fisura visible a niveles macroscópicos representa una gran parte de la vida a fatiga del material. En cambio, en la fatiga oligocíclica se produce una deformación macroscópica significativa conduciendo a deformaciones irreversibles detectables a este nivel. A una escala mesoscópica, los granos del material están sujetos a una deformación plástica más homogénea que en fatiga de alto número de ciclos y la primer microfisura ocurre de una manera muy rápida.

En fatiga de bajo número de ciclos, la iniciación de las fisuras normalmente se ubica en múltiples puntos sobre la superficie, mientras que en fatiga de alto número de ciclos la iniciación es a menudo originada desde el interior. Tal como lo reporta Miller y O'donnell [MO99], para el análisis de fallas después de 10^6 ciclos es necesario un estudio de la mecánica de fractura microestructural. En fatiga policíclica,

los defectos internos y el tamaño de los granos juegan un rol preponderante en la competencia del punto donde se produce la iniciación de fisuras. Murakami y sus colaboradores [Mur02] concluyeron que la iniciación de una fisura por fatiga en la mayoría de los aceros de alta resistencia se origina desde la superficie, cuando la rotura ocurre en 10^6 ciclos y desde el interior en 10^8 ciclos. El mecanismo de iniciación de una fisura en el régimen gigacíclico (10^9 ciclos) es fuertemente dependiente de la concentración de tensiones debido a una microestructura no homogénea, por ejemplo, cuando se encuentran inclusiones minerales en aceros de alta resistencia, aceros martensíticos, aceros de resortes, entre otros. Sin embargo, esta hipótesis no es siempre generalizable a todos los materiales. Si en la microestructura no hay inclusiones o defectos internos, como por ejemplo en los aceros de bajo carbono o aceros austeníticos, la iniciación de la fisura se ubica en la superficie de la probeta a partir de 10^6 ciclos [CBR⁺08].

El proceso de fatiga es de alguna manera un proceso aleatorio, con consecuencias de dispersión en los resultados, aún cuando los experimentos son llevados a cabo con extremo cuidado. Esto complica tanto el análisis experimental como su subsecuente aplicación a problemas prácticos. La teoría estadística provee de información para un cálculo más racional sobre el número de probetas requeridas para dar un grado específico de seguridad en los resultados de los ensayos [Sch05, Ano03, MNU99], pero no evita la necesidad de realizar un juzgamiento subjetivo en alguna etapa, o el incremento de la cantidad de información presente para un conjunto dado de datos.

3.1.1. Tipos de solicitaciones por fatiga

Se diferencian dos tipos fundamentales de carga: i) cargas pulsatorias, en las cuales la tensión varía entre los valores máximos sin cambiar de signo, y ii) cargas oscilantes cuyos valores máximos son de signos opuestos.

Se denomina $\Delta\sigma$ a la variación de la tensión obtenida como la diferencia entre la tensión máxima σ_{max} y la mínima σ_{min} en un ciclo. La tensión media se calcula como,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}, \quad (3.1)$$

y la amplitud de la tensión de la siguiente manera,

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \quad (3.2)$$

donde: $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$ y $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$.

Los signos de σ_a y $\Delta\sigma$ son siempre positivos, pues $\sigma_{max} > \sigma_{min}$, en tanto que las cantidades σ_{max} , σ_{min} y σ_m pueden ser tanto positivas como negativas.

Se define coeficiente del ciclo R , a la relación entre la tensión máxima y mínima, esto es:

$$R = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}. \quad (3.3)$$

Un ciclo de tensión puede ser considerado como superposición de dos tensiones: una constante de valor σ_m y otra oscilante alternada (la tensión dinámica oscila entre dos valores iguales pero de signo opuesto) de amplitud σ_a .

El caso de una carga oscilante alternada pura se presenta cuando $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $\sigma_m = 0$ y $\sigma_a = \sigma_{max} = -\sigma_{min}$. Para este caso el coeficiente del ciclo será igual a $R = -1$.

3.1.2. Diagrama de Wöhler

En 1870 Wöhler publicó un reporte final, citado en [Sch93], que contiene las siguientes conclusiones conocidas como las leyes de Wöhler: a) los materiales pueden ser inducidos a fallar luego de muchas repeticiones de tensiones, todas ellas más bajas que la resistencia estática; b) las amplitudes de las tensiones son decisivas para la destrucción y decohesión del material (en la moderna terminología, éste es el rango de tensiones); c) el incremento de la tensión media decrece el número de ciclos para la falla.

La resistencia a fatiga, o límite de durabilidad, es la máxima amplitud de una tensión variable que, superpuesta a una tensión media estática puede actuar un número ilimitado de ciclos (teóricamente infinitos), sin provocar la rotura de la probeta ni una deformación plástica superior a la admisible. Para el caso de sollicitación axil alternada, $R = -1$, el límite de durabilidad se expresa simbólicamente con: σ_{-1} .

La resistencia a fatiga es siempre inferior a la resistencia de un ensayo estático. Su determinación en función del número de ciclos de carga aplicado a una probeta se efectúa mediante el trazado del conocido diagrama de Wöhler. Para tal fin, se somete a una probeta manufacturada con el material de interés, a una carga variable de tensión media y amplitud prefijadas y se determina el número de ciclos para el cual se produce la rotura. Luego, se repite el ensayo para otros valores de amplitud y tensión media determinándose el correspondiente valor del número de ciclos para el cual se produjo la rotura. Los pares tensión σ número de ciclos N , se representan en un diagrama, donde el eje de abscisas, generalmente en escala logarítmica, lleva los valores de los números de ciclos N que han conducido a la rotura por fatiga y en ordenadas el valor de la tensión máxima σ_{max} correspondiente a cada caso. Algunos materiales presentan la característica de una asíntota horizontal para un determinado valor de σ_{max} , que es precisamente el límite de durabilidad del material en el tipo de sollicitación para el cual es trazado el diagrama. En otros materiales no se encuentra tal asíntota, sino una reducción continua de σ_{max} conforme aumenta el número de ciclos para los cuales las fallas pueden ocurrir en la región gigacíclica, ver por ejemplo [BDLF01, MNU99, RB03, BDLF01].

Los datos de fatiga son convencionalmente representados en términos del número de ciclos, pues en muchos materiales metálicos ensayados a temperatura ambiente, el número de ciclos es independiente de la frecuencia del ensayo [FMP74]. La independencia de la frecuencia implica que el número de ciclos necesarios para alcanzar la rotura es también independiente de la forma de la onda que conecta los picos positivos y negativos de la carga impuesta.

Debido a que las elevadas temperaturas reducen la resistencia a fatiga, los tratamientos térmicos influyen de manera sustancial en el valor de la tensión de durabilidad, como así también en la posibilidad de corrosión mientras el material es sollicitado alternativamente. La causa de una reducción de la vida a fatiga por corrosión se debe a que el agente corrosivo puede penetrar en el material producto de

la rotura de la capa protectora anticorrosiva [BMGB09].

3.1.3. Iniciación de fisura por fatiga

En la década del 50 se puso en evidencia que la propagación de fatiga en materiales metálicos se divide en dos etapas [Poo02, For69],

- Etapa I: iniciación de una microfisura. La fisura se propaga dentro de una banda de deslizamiento ubicada en un plano de elevadas tensiones de corte. En esta etapa la propagación de la fisura es dominada por la plasticidad [Poo07]. En términos de mecánica de la fractura este es un modo de fisura mixto.
- Etapa II: la longitud de la fisura aumenta hasta alcanzar un valor crítico. Aquí existen cambios de orientación de las fisuras, propagándose en la dirección normal a la tensión axial máxima. En términos de la mecánica de la fractura, se corresponde a un modo de rotura tipo I [LC90]. La longitud crítica es dependiente de las características microestructurales y de las condiciones de tensión.

Luego de la etapa II la fisura se propaga rápidamente hasta alcanzarse la rotura final de la pieza. La vida total de fatiga es la suma de los números de ciclos para iniciar la fisura teniendo en cuenta la etapa I y la etapa II. Bajo un análisis macroscópico de la superficie de fractura creada por la propagación de la fisura en la etapa II, se puede observar la presencia de líneas distintivas, paralelas unas de otras y normales a la dirección local de la propagación de la fisura. Estas líneas son llamadas estricciones. Cada estricción corresponde a un ciclo de tensión [Poo83]. Cabe mencionar que las estricciones no son siempre observadas, pero su ausencia no implica que la fisura por fatiga no haya tenido lugar.

Es comúnmente aceptado que la dispersión de los resultados en la vida de las probetas constituidas por materiales metálicos ensayados a un determinado nivel de tensión se encuentra asociada con la iniciación de la fisura [FMP74]. Los defectos metalúrgicos están inevitablemente presentes en la mayoría de los materiales, y algunas veces la propagación de la fisura por fatiga en la etapa II empieza directamente a partir de un pequeño defecto interno. Cuando esto sucede, en ese instante puede existir un cambio en la pendiente de la curva S-N, tal como lo reporta Bathias *et al.* en [BDLF01]. Este efecto es más notable en materiales metálicos de alta resistencia con elevada vida a fatiga [BP05, Mur02].

3.1.4. Fatiga multiaxial. Estado del arte

Es bastante usual encontrar cargas cíclicas aplicadas a componentes mecánicos en diferentes direcciones que causan un estado de tensión muy complejo. Algunos ejemplos sencillos son: las tensiones biaxiales que se generan en tubos de presurización sujetos a ciclos de presiones internas; cargas de flexión y torsión combinadas, como las que se encuentran sujetos los largueros de las alas en las estructuras aeronáuticas; efectos de triaxialidad por cambios de sección, como el caso de una válvula de motor de combustión interna en la zona de transición cabeza-vástago, etc. Se

puede continuar así, con una lista muy grande de componentes sujetos a estado de tensiones variables en diferentes direcciones y que se diseñan para alcanzar una gran vida útil sin que se produzca la falla.

Debido a que el conocimiento de fatiga uniaxial es un campo de investigación relativamente maduro, con numerosos estudios de comportamientos para diferentes materiales, se busca utilizar toda esa información y volcarla a análisis de fatiga multiaxial. En este sentido, se utilizan los límites de endurancia obtenidos a partir de ensayos de tracción-compresión, flexión pura o corte puro. El propósito usual de un criterio de fatiga multiaxial es calcular una tensión cortante equivalente que luego se compara con las propiedades mecánicas a fatiga del material en cuestión.

En fatiga de alto número de ciclos, el tiempo consumido para iniciar una fisura de tamaño inspeccionable es significativamente mayor que en fatiga de bajo número de ciclos, entonces, el uso de la mecánica de la fractura basada en metodologías para calcular la vida que se necesita para propagar una fisura existente, no resultaría suficientemente preciso. Más útil sería considerar los efectos de fatiga basados en criterios de iniciación de fisuras que consideren además, efectos multiaxiales.

El concepto de fatiga multiaxial se desarrolla con la idea de la separación del espacio de tensiones en dos zonas: una zona segura, donde no habría daño por fatiga en el componente o probeta, y otra zona no segura donde se produciría un daño por fatiga. Bajo esta hipótesis, diferentes criterios de fatiga pueden ser escritos como una desigualdad de la siguiente forma:

$$f(\tau) + g(\sigma) \leq 0, \quad (3.4)$$

donde f y g son funciones de la tensión de corte τ y la tensión normal σ , respectivamente. El estado de tensiones inducido por cargas externas cíclicas permanece en una zona segura del espacio de tensiones si se cumple la desigualdad de la Ec.(3.4). Todos los criterios propuestos se formulan utilizando dos hechos experimentales:

- *Independencia del límite de fatiga en torsión alternativa con respecto a una tensión estática media.*

La amplitud de la tensión de corte a la que se somete una probeta a torsión alternativa para muy alto número de ciclos, es única. Dicho en otras palabras, no existe influencia de la tensión de corte media en el límite de fatiga ya sea a tensión-compresión o a torsión, ver Fig. 3.1. Esta independencia se pierde para números de ciclos menores a $10^4 - 10^5$, tal como lo reporta Sines [Sin55] quien analizó resultados en más de 27 probetas metálicas.

- *El límite de fatiga en flexión alternativa es fuertemente dependiente de una tensión media normal estática.*

Una tensión media normal reduce el límite de fatiga. Este hecho puede ser justificado con la siguiente explicación, las fisuras tienen siempre formas irregulares, dado que pueden crecer a lo largo de los bordes de grano de la microestructura del material. De este modo, un crecimiento de la fisura debido exclusivamente a tensiones de corte se ve dificultado por la presencia de irregularidades microestructurales. Pero las tensiones normales al plano de la fisura tienen un efecto importante en este comportamiento, aceleran su crecimiento por medio de la abertura de la fisura, tal como se muestra en la Fig. 3.2. Los resultados

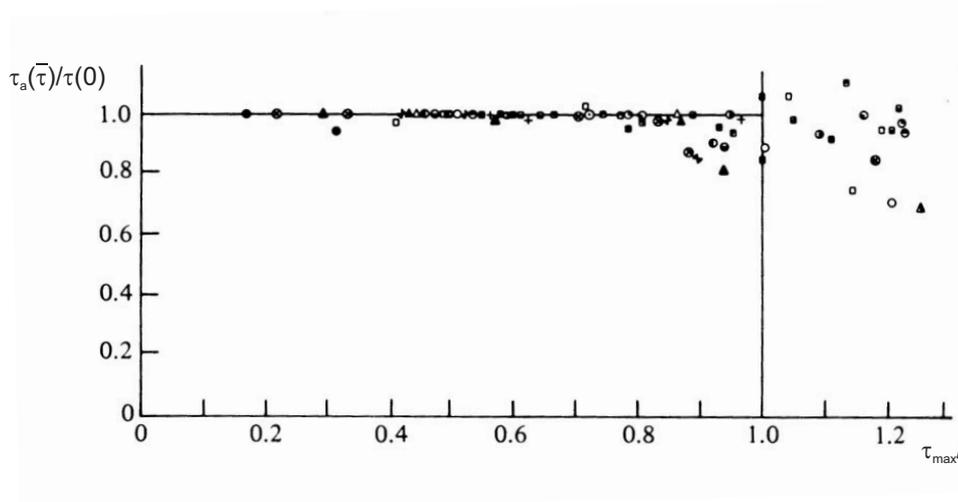


Figura 3.1: Efecto de la torsión media en el límite de fatiga. Son τ_a el límite de fatiga en torsión, $\bar{\tau}$ la tensión media en torsión y τ_e el límite elástico en torsión.

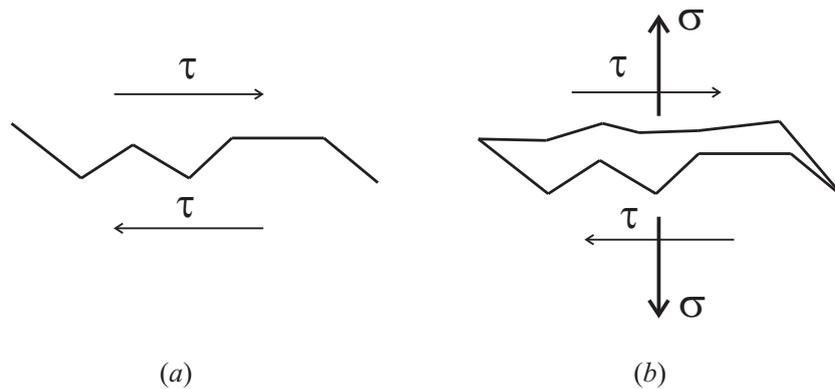


Figura 3.2: (a) las irregularidades retardan el crecimiento de la fisura por tensiones de corte; en el caso (b), la tensión normal la acelera.

experimentales que verifican estas afirmaciones pueden ser encontrados en los trabajos de Davoli *et al.* [DBF⁺03], Sines [Sin55] y en libro de Lemaitre y Chaboche [LC90].

3.1.4.1. Clasificación de los criterios de fatiga multiaxial

Muchos investigadores han propuesto una gran cantidad de criterios de fatiga multiaxial; a pesar de ello, no hay un consenso universalmente aceptado en la comunidad científica acerca de la utilización de algún criterio específico, y constantemente aparecen nuevas teorías y aproximaciones [PDG⁺97]. Los diferentes criterios de fatiga multiaxial pueden ser clasificados fundamentalmente en los siguientes grupos,

- Criterios empíricos.
- Aproximaciones basadas en invariantes de tensión.
- Criterios de energía.

3. FATIGA EN MATERIALES METÁLICOS

- Aproximaciones por un plano crítico.
- Criterios basados en nivel mesoscópico.

Los primeros criterios de fatiga multiaxial fueron esencialmente de naturaleza empírica basados en los extensos trabajos experimentales producidos por Gough [GPC51] y por los investigadores japoneses Nishihara y Kawamoto en 1945 [NK45]. En 1955 Sines [Sin55] concluyó que la presencia de tensiones medias cortantes no produce ningún tipo de efecto en la vida de fatiga, sin embargo, la amplitud de las tensiones normales cíclicas son influyentes en la vida a fatiga de un material. Con esta observación experimental Sines propuso un criterio de fatiga multiaxial basado en tensiones equivalentes. En 1956 Crossland desarrolló un modelo similar al de Sines [Cro56], pero con la diferencia que considera como variable fundamental en el proceso de nucleación de las fisuras el valor máximo de la tensión hidrostática en lugar del valor medio, como lo considera Sines. Más recientemente, Deperris [Dep93], Bin *et al.* [BLF00] y Gonçalves *et al.* [GAM05] presentaron nuevos criterios basados también en invariantes de tensión.

Otros modelos consideran la energía disipada por un material cuando es sometido a cargas cíclicas como parámetro para cuantificar el daño debido a fatiga. Propuestas hechas por Halford [Hal96], Garud, [Gar79] y Ellyin y Kujawski [EK93] se encuadran en esta teoría.

Los criterios de plano crítico consideran que las fisuras por fatiga tienen origen en ciertos planos materiales donde las combinaciones de tensión cortante y normal son particularmente severas. Por lo tanto, estos criterios son capaces de predecir la resistencia a fatiga del componente como así también la orientación con que se podría propagar la fisura. Algunos de los modelos desarrollados bajo esta teoría pueden encontrarse en [CS01, SL02].

La descripción del fenómeno de fatiga a nivel mesoscópico considera que las tensiones y deformaciones a nivel de grano son las variables dominantes del proceso de fatiga. Estos criterios presumen que la falla debido a una carga cíclica es precedida por una deformación plástica localizada que ocurre en granos cuyo planos de deslizamiento están orientados con la máxima tensión cortante. Una acumulación de deformaciones plásticas conduce a un agotamiento de la ductilidad del grano del material y, consecuentemente, a la nucleación de fisuras con la eventual rotura. Sin embargo, si después de esta deformación el material se puede reacomodar elásticamente, “*shakedown elástico*”, la falla no ocurrirá. Notar que el término falla es considerado cuando se produce la rotura completa del material. De esta manera, como la plasticidad posee un papel importante en proceso de iniciación de fisuras, las tensiones cortantes deben ser consideradas como uno de los parámetros dominantes en el proceso. Los modelos mesoscópicos más utilizados por sus excelentes resultados son los propuestos por Dang Van *et al.* [DV73, DVG89] y Papadopoulos *et al.* [PDG⁺97, Pap98].

Un desarrollo completo de los criterios existentes pueden ser encontrado en Papadopoulos *et al.* [PDG⁺97].

3.2. Influencia de las tensiones de corte en fatiga multiaxial.

Para comparar el estado de tensiones obtenido por medio de algún criterio o formulación con datos experimentales, se necesita de una medida escalar que defina completamente el estado de tensiones y que refleje el comportamiento a fatiga del material de manera apropiada.

Como se ha mencionado en la Sec. 3.1.4, la evidencia experimental muestra que no hay ningún tipo de influencia de una tensión de corte media en la iniciación de una fisura por fatiga en el rango de alto número de ciclos. Por lo tanto, el valor medio de la tensión a lo largo de un ciclo de carga debería ser eliminado de alguna manera de las formulaciones teóricas que se propongan.

Si se tiene en cuenta un ciclo de cargas donde las tensiones principales varían con la misma frecuencia de oscilación, la amplitud de dichas tensiones podría ser utilizada junto con el criterio de von Mises (Sec. 2.1.2) para eliminar la influencia de la tensión de corte media y establecer una cantidad escalar de comparación. De esta manera se arriba a un criterio de von Mises modificado,

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{I,a} - \sigma_{II,a})^2 + (\sigma_{II,a} - \sigma_{III,a})^2 + (\sigma_{III,a} - \sigma_{I,a})^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

donde el subíndice a , denota la máxima desviación del valor medio durante un ciclo de carga. Otra forma de escribirlo es utilizando la Ec.(2.29),

$$\tau_{eq} = \left(\frac{3}{2} \mathbf{S}_a : \mathbf{S}_a \right)^{1/2}, \quad (3.6)$$

con \mathbf{S}_a la amplitud máxima del tensor desviador.

3.3. Influencia de la tensión hidrostática en fatiga multiaxial.

Como se ha descrito anteriormente en la Sec. 3.1.4, la tensión hidrostática media es uno de los factores dominantes en fatiga de alto número de ciclos y debe ser considerada de alguna manera en las ecuaciones. Para tener en cuenta su influencia, el criterio de von Mises modificado se escribe como,

$$\tau_{eq} = \left(\frac{3}{2} \mathbf{S}_a : \mathbf{S}_a \right)^{1/2} + f(p_h), \quad \text{donde } p_h = \sigma_{ii}/3. \quad (3.7)$$

Típicamente, $f(p_h)$ puede expresarse como,

$$f = a p_h(t), \quad \text{ó} \quad f = b p_{h,medio}, \quad \text{ó} \quad f = c p_{h,max}, \quad (3.8)$$

donde a , b y c son constantes del material y los índices “*medio*” y “*max*”, denotan los valores medios y máximos en el ciclo de tensión, respectivamente. Debe hacerse notar

que estas expresiones se encuentran limitadas a cargas periódicas y con un mismo ángulo de fase. Una expresión más general que contemple los efectos de diferencia de fase entre las cargas como así también cargas no proporcionales, ha sido formulada originalmente por Sines [Sin55] y luego modificada por Crossland [Cro56].

3.4. El criterio de Crossland

El criterio de Crossland es probablemente el criterio de fatiga multiaxial más conocido y utilizado en la actualidad para el diseño de componentes o partes sujetos a cargas variables en diferentes direcciones. Crossland propuso que el segundo invariante del tensor desviador y la tensión hidrostática máxima sean las variables gobernantes del problema, esto es:

$$\sqrt{J_{2a}} + ap_{h,max} \leq b, \quad (3.9)$$

donde $\sqrt{J_{2a}}$ es la raíz cuadrada de la amplitud del segundo invariante del tensor desviador o, dicho en otras palabras, una media escalar de la tensión cortante. Geométricamente este término tiene una interpretación, es el radio más pequeño de la hiper-esfera (esfera en el espacio de las tensiones desviadoras Dev^3) que circunscribe al camino de las tensiones desviadoras. Su cálculo puede obtenerse de acuerdo al algoritmo incremental presentado en la Sec. 2.1.3. La máxima tensión hidrostática es denotada por $p_{h,max}$, en tanto que a y b son constantes que dependen del material obtenidas a partir de ensayos experimentales de fatiga convencionales, como por ejemplo, tensión-tensión, flexión o torsión pura alternada. Si consideramos un ensayo de fatiga a torsión pura, $p_{h,max} = 0$, el esfuerzo de corte es $\sqrt{J_{2a}} = \tau_{-1}$, donde τ_{-1} es el límite de endurencia a torsión alternativa; entonces, a partir de la Ec.(3.9) $b = \tau_{-1}$. En forma similar, para el caso de flexión alternada pura, $\sigma_a = \sigma_{-1}$, donde σ_a es la amplitud de la tensión de flexión alternada y σ_{-1} el límite de endurencia en flexión alternativa o en tensión-compresión. Para este caso:

$$\sqrt{J_{2a}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{3}}, \quad (3.10)$$

y la tensión hidrostática máxima,

$$p_{h,max} = \frac{\sigma_{-1}}{3}. \quad (3.11)$$

Reemplazando estas dos expresiones en el criterio de Crossland definido por la Ec.(3.9), se obtienen los parámetros a y b que dependen de las características a fatiga del material:

$$a = \frac{\tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sigma_{-1}}{3}}, \quad (3.12)$$

$$b = \tau_{-1}.$$

Por lo tanto, la iniciación de una fisura por fatiga bajo cargas cíclicas se estima cuando en el criterio de Crossland,

$$\sqrt{J_{2a}} + ap_{h,max} \leq b, \quad (3.13)$$

el lado izquierdo de la Ec.(3.13) sea más grande que el lado derecho, o en otras palabras cuando no se cumpla la desigualdad de la Ec.(3.13).

3.5. Ejemplo

Un estado de cargas multiaxial de amplitud diferente y fuera de fase se aplicó a una geometría como la que se muestra en la Fig. 3.3 para producir deformaciones de flexión y torsión simultáneas. La representación matemática de los momentos aplicados es la siguiente,

$$\mathbf{T} = L_1 P_{ba} \sin(\Omega t) \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + L_2 P_{sa} \sin(\Omega t - \delta) (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) \quad [\text{N m}], \quad (3.14)$$

donde P_{ba} y P_{sa} son las amplitudes de las componentes normal y tangencial de las cargas, \mathbf{e}_x y \mathbf{e}_y son los vectores unitarios en las direcciones coordenadas, t el tiempo, ω la frecuencia, δ la diferencia de ángulo de fase, L_2 el diámetro exterior máximo y L_1 longitud total de la probeta. El estado de tensión en un punto de la superficie

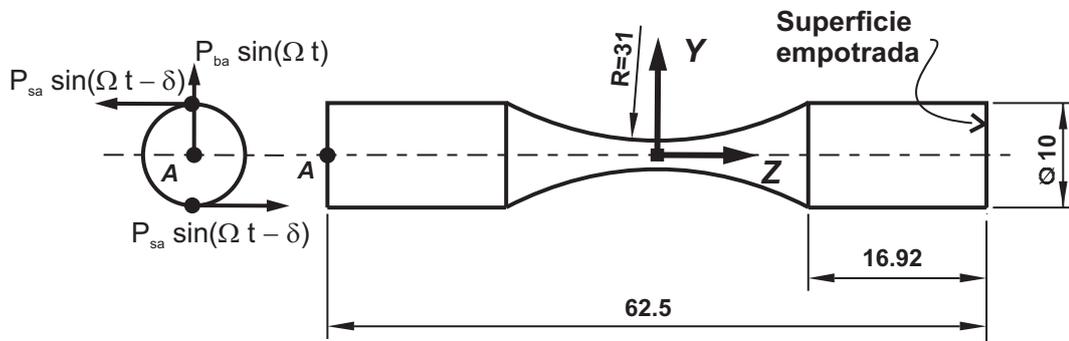


Figura 3.3: Cargas y condiciones de borde.

de la probeta en $Z = 0$ e $Y = 0$ puede ser descrito por el tensor de tensiones en la siguiente forma,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_b & \tau_s & 0 \\ \tau_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \sigma_{ba} \sin(\Omega t) & \tau_{sa} \sin(\Omega t - \delta) & 0 \\ \tau_{sa} \sin(\Omega t - \delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Los valores numéricos de las amplitudes de las cargas utilizadas en este ejemplo que reproducen las tensiones que se muestran en la tabla 3.1, (obtenida de la publicación de Nishihara y Kawamoto [NK45]) y con la geometría de la Fig. 3.3 son,

$$\begin{aligned} P_{ba} &= 36.58 \quad [\text{N}], \\ P_{sa} &= 88.58 \quad [\text{N}]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Las cargas variables en el tiempo se muestran en la Fig. 3.4, donde se puede apreciar

Tabla 3.1: Datos de ensayos y límites de endurencia para un acero típico de alta resistencia tomadas del trabajo de Nishihara y Kawamoto [NK45].

σ_{ba} [MPa]	τ_{sa} [MPa]	τ_{-1} [MPa]	σ_{-1} [MPa]	δ [°]
138.1	167.1	196.2	313.9	90

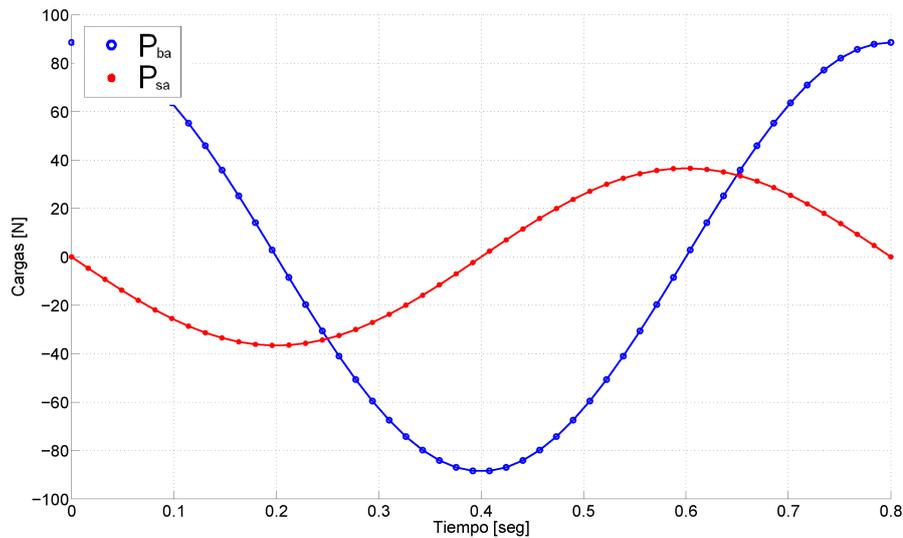


Figura 3.4: Cargas aplicadas a la probeta.

la diferencia de fase y amplitud. Para la obtención de $\sqrt{J_{2a}}$ se aplican las reglas de transformación descritas en la Sec. 2.1.3,

$$\begin{aligned} s_1 = \frac{\sigma_{xx}}{\sqrt{3}} &\Rightarrow s_1 = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right) + \frac{\sigma_m}{\sqrt{3}}, \\ s_3 = \sigma_{xy} &\Rightarrow s_3 = \tau_a \sin\left(\frac{2\pi t}{P} - \delta\right) + \tau_m. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Luego, la raíz cuadrada de la amplitud del J_2 calculado en forma analítica es igual a:

$$\sqrt{J_{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_a^2}{3} + \tau_a^2\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_a^2}{3} + \tau_a^2\right) - \frac{4}{3}\sigma_a^2\tau_a^2 \sin^2 \delta}}, \quad (3.18)$$

ver [PDG+97]. Reemplazando por los valores numéricos de la Tabla 3.1 en la Ec.(3.18), $\sqrt{J_{2a}} = 167.1$. Utilizando el algoritmo incremental, ver Sec. 2.1.3, se obtienen resultados completamente análogos a los calculados con la Ec.(3.18). En la Fig. 3.5 se muestra en el espacio de las tensiones desviadoras, un camino elíptico de las tensiones y la circunferencia que lo circunscribe de radio igual a 167.1 calculada con el algoritmo incremental.

3.6. Conclusiones

En esta sección se ha desarrollado el estado del arte en relación al fenómeno de fatiga. Luego se hizo una descripción de fatiga multiaxial, donde se mencionaron las limitaciones y rango de validez de los diversos criterios de fatiga propuestos hasta el momento. En este sentido, es importante aclarar que, debido a la gran cantidad de criterios existentes, aquí sólo se han detallado los que se formulan con invariantes

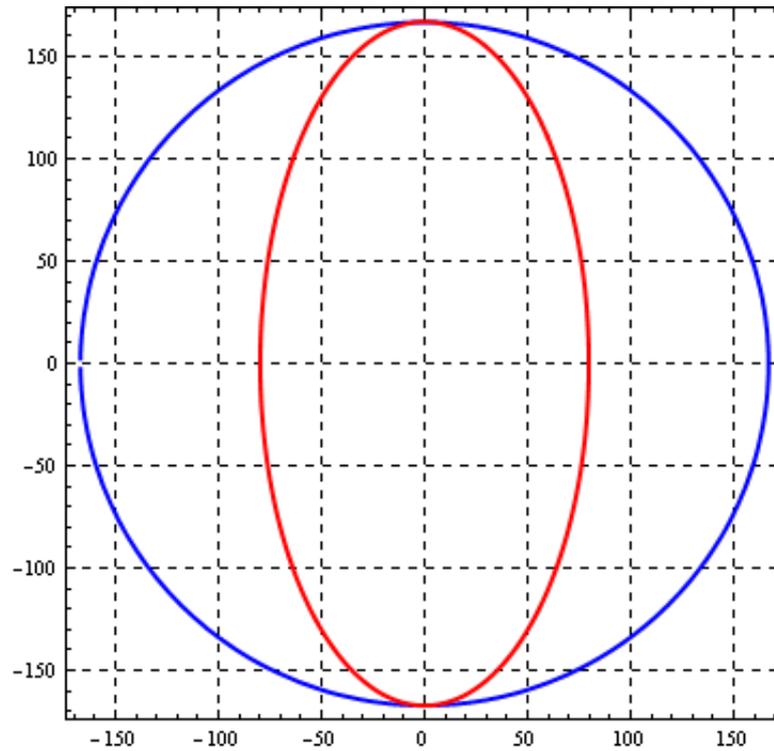


Figura 3.5: Camino de las tensiones.

de tensión y son comúnmente citados en la bibliografía, específicamente el criterio de Crossland.

Por último, se validó el algoritmo del tipo incremental presentado en la Sec. 2.1.3 con una solución analítica provista por la Ec.(3.18). La utilización de la Ec.(3.18) permite arribar a soluciones completamente análogas a los del algoritmo incremental, a pesar de lo cual, el cálculo de $\sqrt{J_{2a}}$ con la Ec.(3.18) se encuentra limitado exclusivamente a cargas que posean una variación de amplitud en igual frecuencia; en tanto que el algoritmo incremental admite la aplicación de cargas completamente generales. Este algoritmo se utilizará en el Cap.5 para el diseño a fatiga de una válvula de motor de combustión interna, en conjunto con los resultados experimentales descritos en la siguiente sección.

Capítulo 4

Análisis experimental de fatiga

4.1. Introducción

Las normas actuales de diseño a fatiga de componentes mecánicos exigen garantizar una vida útil de alrededor 10^9 ciclos sin que se produzca falla alguna. Por ejemplo, en motores diesel de automóviles, se requiere alcanzar una vida de 10^8 ciclos. Aún más exigente es el caso de las turbinas aeronáuticas, donde se necesita una vida de 10^{10} ciclos. Es por ello que, es de interés extender el estudio a fatiga de materiales al rango gigacíclico (10^9), o como también es conocido en la literatura, a fatiga de muy alto número de ciclos.

Desde un punto de vista histórico, a mediados de los años 80, investigadores japoneses establecieron que la mayoría de las aleaciones metálicas pueden fallar más allá de 10^6 ciclos [Mur02]. Más recientemente, el fenómeno de fallas por fatiga en el rango gigacíclico de numerosas aleaciones ha sido estudiado por Bathias y colaboradores (Kong [Kon87]; Ni [Ni91]; Thanigaiyarasu, [Tha91]; Wu, [WNB93]; Cavalieri [CBR+08]).

Tradicionalmente, la curva S-N (tensión-número de ciclos) se asume como una función hiperbólica con un decaimiento asintótico de la resistencia a fatiga conforme aumenta el número de ciclos. Sin embargo, los estudios de fatiga de alto número de ciclos han demostrado que no existe una asíntota horizontal para la mayoría de las aleaciones [BDLF01]. Esto significa que los mecanismos de iniciación de fallas a partir de 10^6 a 10^9 ciclos son un tópico de gran interés para los nuevos diseños mecánicos y estructurales. Consecuentemente, debido a que no se puede garantizar a priori un comportamiento asintótico de la curva S-N, la única forma de establecer correctamente la relación entre la tensión y el número de ciclos es por medio de ensayos experimentales. Llevar a cabo ensayos de fatiga en el orden de 10^9 ciclos con tiempos razonables es posible sólo con la metodología de los ensayos de fatiga ultrasónicos [BP05].

Los ensayos de fatiga ultrasónicos difieren principalmente de los convencionales en la frecuencia de operación. Estos últimos se encuentran limitados a una frecuencia de 100 Hz, en tanto que en una máquina de fatiga ultrasónica el rango de frecuencia con la cual trabaja es de 15 kHz a 30 kHz, con un valor típico de 20 kHz. De esta manera, el tiempo requerido para alcanzar 10^7 ciclos se encuentra en el orden de los

9 minutos, mientras que con una máquina convencional de 100 Hz tomaría 12 días. Para ciclos más elevados, por ejemplo 10^9 ciclos, el método ultrasónico requiere de 14 horas, mientras que a 100 Hz se necesitan más de tres años, tan sólo para una probeta. Bajo estas condiciones, los ensayos de fatiga ultrasónicos se presentan como una técnica novedosa que permite la obtención de resultados con tiempos y costos considerablemente más bajos en comparación con las técnicas tradicionales [BdMB02, ST02].

Numerosos trabajos han mostrado que el comportamiento a fatiga para diferentes materiales en el régimen gigacíclico puede ser obtenido efectivamente mediante el uso de máquinas de fatiga ultrasónicas, y que los efectos de la frecuencia de operación no son determinantes en la calidad de los resultados [BP05, May99, Wil80]. La mayoría de los estudios en esta área han sido reportados con ensayos a temperatura ambiente, razón por la cual la disponibilidad de información a elevada temperatura en 10^8 ciclos es muy escasa.

En este capítulo se presenta una nueva metodología para el estudio del comportamiento a fatiga a elevada temperatura en un acero austenítico, muy utilizado en válvulas de motores de combustión interna, con un régimen de cargas de $R = -1$ en tracción-compresión y en el rango de 10^5 a 10^9 ciclos, empleando una máquina de fatiga ultrasónica y simulación numérica.

La máquina utilizada en este trabajo tiene una frecuencia nominal de operación de 20 kHz, alcanzando 10^9 ciclos en aproximadamente 14 horas. Para llevar a cabo los ensayos con alta temperatura, se utilizó un equipo de inducción para elevar las temperaturas de las probetas a valores de 600°C y 700°C .

Para el diseño de las probetas, se han realizado simulaciones numéricas: térmicas, termomecánicas y modales, mediante el MEF. La superficie de rotura en las probetas fue inspeccionada por medio de un microscopio óptico y de barrido electrónico SEM, por sus siglas en inglés de Scanning Electronic Microscope. Finalmente, se determinaron las curvas de S-N a 20°C , 600°C y 700°C presentadas al final de este capítulo junto con los comentarios y resultados obtenidos.

4.2. Máquina de ensayos de fatiga ultrasónica

Desde un punto de vista histórico, la primera máquina de fatiga ultrasónica fue construida por Mason [Mas50] en 1950 y este hecho marcó el inicio de la fatiga de alto número de ciclos. En las últimas dos décadas los avances de investigación en esta área han sido muy importantes. En el Instituto Tecnológico de Materiales Avanzados (ITMA) de la Universidad Paris X [UPX10], las capacidades de la técnica de fatiga ultrasónica se han extendido a ensayos de torsión, altas y bajas temperaturas y a desgaste [Bat06, SBB01]. En esta Tesis, se ha empleado la máquina de fatiga ultrasónica y los procedimientos del ITMA para llevar a cabo ensayos de fatiga en el régimen de alto número de ciclos a elevada temperatura en un acero austenítico.

Hay diversos diseños de máquinas de fatiga ultrasónica, pero éstas siempre están compuestas de tres componentes principales, ver Fig. 4.1,

1. un generador eléctrico que convierte 60 Hz en un voltaje de señal sinusoidal;

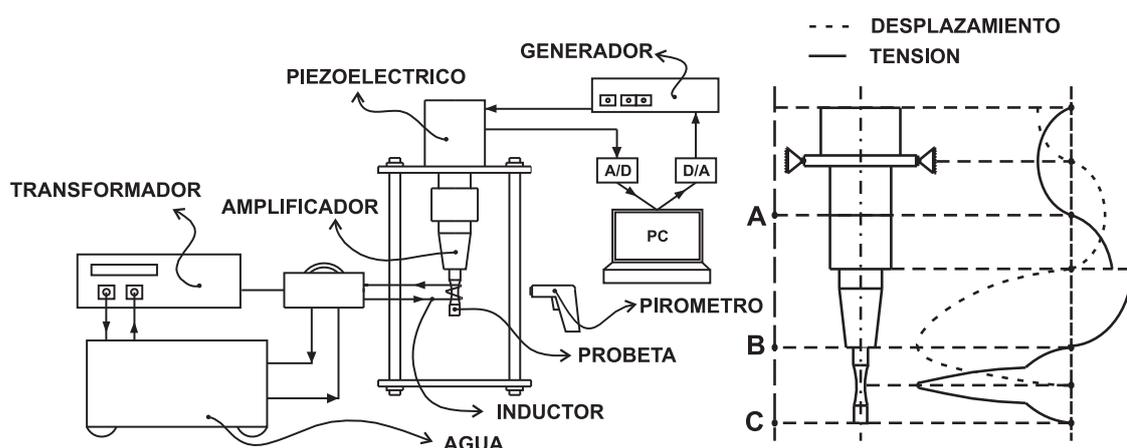


Figura 4.1: Esquema para una máquina de fatiga ultrasónica.

2. un transductor piezoeléctrico, que transforma la señal eléctrica en una vibración mecánica de la misma frecuencia;
3. un amplificador que aumenta la vibración proveniente del transductor, de modo de obtener la amplitud de la tensión requerida en la probeta.

El generador se conecta a una PC y ésta se asocia a una plaqueta de adquisición de datos A/D y D/A para controlar el generador y el piezoeléctrico. El movimiento de la máquina es inducido por el piezoeléctrico. El transductor genera una onda mecánica a una frecuencia natural de 20 kHz y, por esta razón, la probeta debe ser diseñada con esta frecuencia en su primer modo de oscilación para que alcance un desplazamiento máximo (tensión nula) en los extremos y una tensión máxima (desplazamiento nulo) en la sección central, tal como se muestra en la Fig. 4.1.

Los resultados que se obtengan de esta máquina son válidos a partir de los 10^5 ciclos aproximadamente, porque con valores más bajos aparecen fenómenos de plasticidad y, en ese caso correspondería realizar un estudio de fatiga de bajo número de ciclos en un equipo convencional. El rango de frecuencia operativa de esta máquina se encuentra entre 19.5 a 20.5 kHz; si ésta decrece por debajo de los 19.5 kHz, o se incrementa por encima de los 20.5 kHz, el ensayo se detiene automáticamente. La relación entre la tensión y el desplazamiento es lineal, siendo únicamente necesaria la medición de la amplitud del desplazamiento para calcular las tensiones. En contraste con los ensayos de fatiga de bajo número de ciclos, donde la máquina tiene una frecuencia natural de vibración diferente a la de la probeta, en los ensayos de fatiga ultrasónicos, la probeta y la máquina conforman un sistema resonante, en el cual la amplitud de los desplazamientos se mantiene constante durante el ensayo, en un valor pre-seleccionado.

Además de los componentes principales de la máquina de fatiga ultrasónica, otros equipos adicionales pueden ser utilizados como se aprecian en las Figs. 4.1 y 4.2, donde un generador de inducción es utilizado para el calentamiento de las probetas, y los instrumentos de medición, pirómetro infrarrojo y termocuplas, para controlar la temperatura.

Una explicación más detallada acerca de la máquina de fatiga ultrasónica se presenta en [BdMB02] y [BP05].

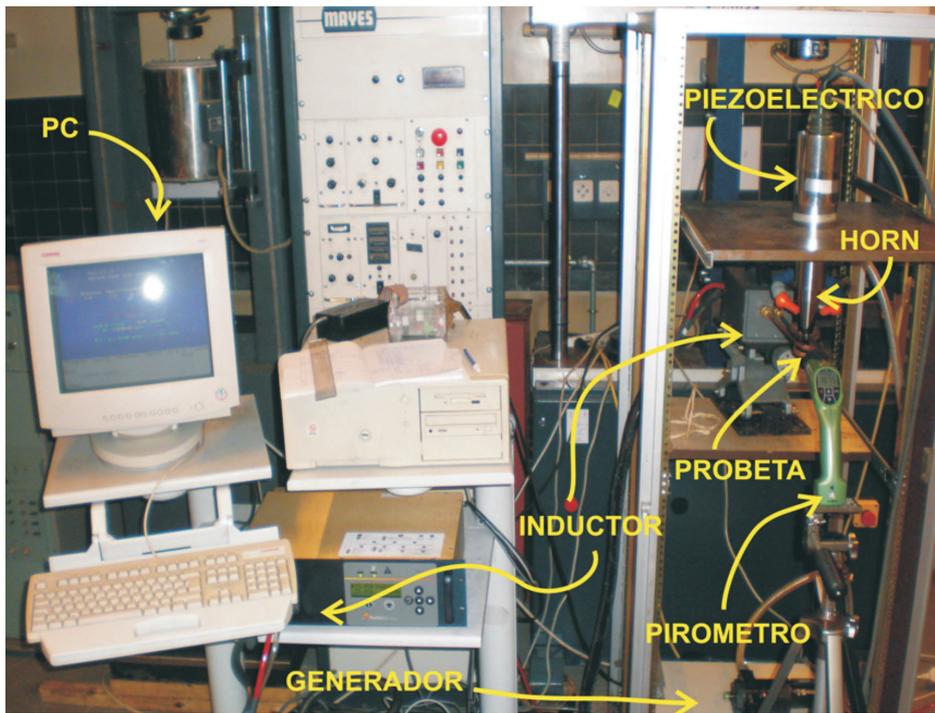


Figura 4.2: Máquina de fatiga ultrasónica utilizada para los ensayos.

4.3. Material ensayado

El material empleado para los ensayos de fatiga ultrasónicos fue un acero austenítico ampliamente utilizado en componentes mecánicos que se encuentran sujetos a elevada temperatura, su denominación es H854. Los datos de la composición química se muestran en la tabla 4.1, en tanto que los valores numéricos a temperatura ambiente de la densidad ρ , módulo de Young E , conductividad térmica k y el coeficiente de expansión térmica α se presentan en la tabla 4.2.

Tabla 4.1: Composición química del acero analizado.

Acero	C	Si	Mn	Cr	Ni	W	Nb	N
H854	0.53	0.25	9.5	21	3.8	1	2.2	0.5

Tabla 4.2: Propiedades termomecánicas del acero analizado.

Acero	ρ (g/cm ³)	E (N/mm ²)	UTS (N/mm ²)	k (W/m.K)	α (m/m.K)
H854	7.7	215×10^3	950 – 1150	14.5	18.8

El análisis metalográfico de la microestructura se realizó por medio de microscopios ópticos y de barrido electrónico. Por medio de estos instrumentos se pudo efectuar un minucioso análisis de las características metalúrgicas del material, esencial para un posterior estudio de los resultados experimentales de fatiga. La Fig. 4.3

muestra una vista general de la microestructura obtenida con un microscopio óptico, donde se aprecia la estructura austenítica del H854. Para el diseño de una probeta

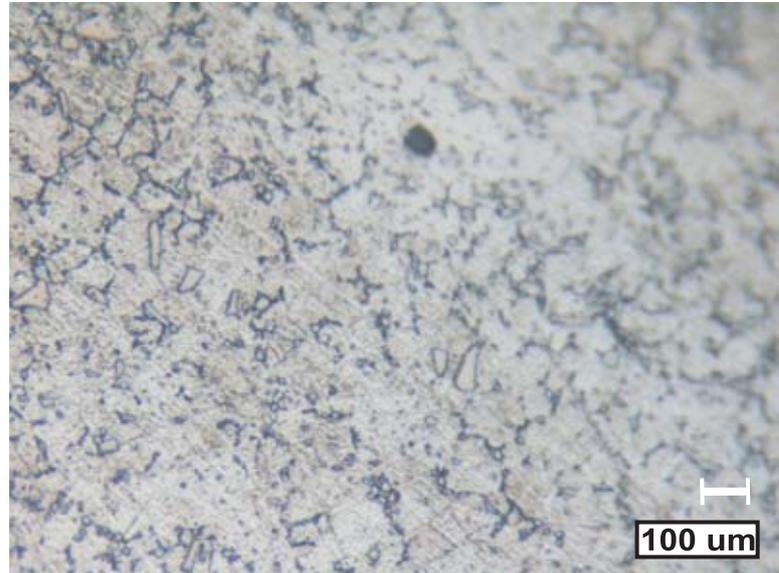


Figura 4.3: Estructura austenítica del H854.

sujeta a un régimen de cargas ultrasónicas y elevada temperatura, se requiere de una función que vincule el módulo de Young con la temperatura, esto es $E(T)$. La variación del módulo de Young con la temperatura para el acero utilizado en esta Tesis se muestra en la Fig. 4.4. Mediante el ajuste de coeficientes de una función

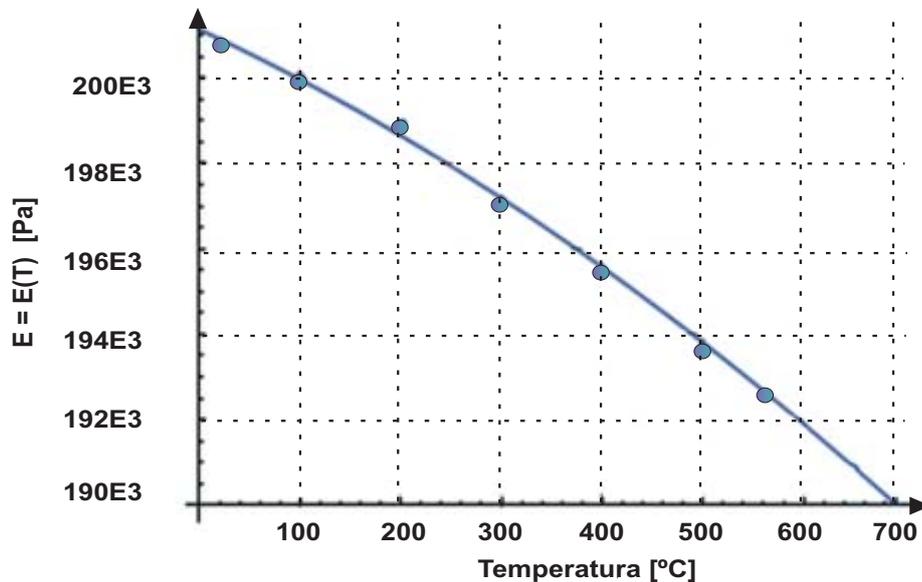


Figura 4.4: Módulo de Young en función de la temperatura para el material H854.

cuadrática, la relación $E(T)$ fue aproximada según la siguiente expresión,

$$E(T) = 2.01134 \times 10^{11} - 1.09468 \times 10^7 T - 7417.87 T^2 \quad [\text{Pa}], \quad (4.1)$$

donde T está dada en °C.

4.4. Diseño de las probetas

El principio de fatiga ultrasónica puede ser explicado a través de un sencillo modelo matemático de dos masas m vibrando y conectadas entre sí por medio de un resorte de rigidez k , donde la frecuencia de resonancia se expresa por $f_{\text{reso}} = 1/(2\pi)\sqrt{k/m}$. Es importante notar que en los extremos donde se localizan las masas, los desplazamientos son máximos, mientras que en la mitad del resorte el desplazamiento es nulo. Este sistema es un simple modelo discreto que presenta una primera idea conceptual acerca de la frecuencia de vibración en una probeta. No obstante, mediante un modelo continuo se obtiene una mejor representación, por ejemplo, en el caso de una barra de sección constante y despreciando la contracción transversal, la frecuencia natural de vibración se encuentra dada por: $f_{\text{reso}} = 1/(2L)\sqrt{E/\rho}$, donde L es longitud de la barra.

En una probeta típica de fatiga ultrasónica, ver por ejemplo Fig. 4.5, la sección transversal cambia a lo largo de su longitud. En este caso, la amplitud de la vibración $U(x)$ en cada punto se calcula resolviendo,

$$\begin{cases} U''(x) + U'(x)p(x) + \frac{\omega^2 \rho}{E}U(x) = 0, \\ U(0) = 0, \\ U(L) = A_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde x corresponde a la coordenada longitudinal, el símbolo $'$ representa d/dx , $p(x) = A'(x)/A(x)$ con $A(x)$ la sección transversal de la probeta, ρ es la densidad del material, $\omega = 2\pi f_{\text{reso}}$ es la frecuencia angular, E es el módulo de Young y $L = L_1 + L_2$, ver Fig. 4.5. Únicamente una mitad de la probeta es considerada para la resolución de la Ec.(4.2) debido a las condiciones de simetría. Por los requerimientos experimentales, la geometría de la probeta debería ser tal que la deformación sea cero en los extremos, $U'(L) = 0$. Esta restricción adicional se verifica ajustando la longitud de la parte cilíndrica de la probeta (la *longitud de resonancia*). Asumiendo

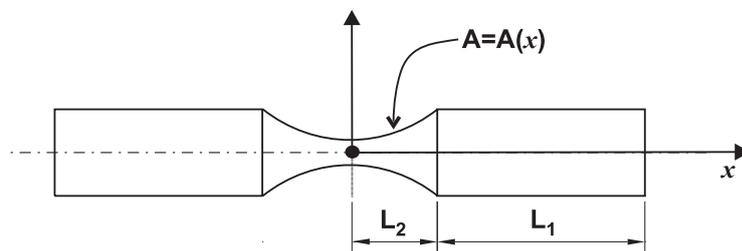


Figura 4.5: Geometría de una probeta ultrasónica.

que la forma de la parte central de la probeta ($L_2 < |x| \leq L$) sigue una función coseno hiperbólico, existe una solución analítica a la Ec.(4.2) [BDLF01]. Consecuentemente, la longitud de resonancia L_1 se obtiene mediante,

$$L_1 = \frac{1}{k} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{k} [\beta \coth(\beta L_2) - \alpha \tanh(\alpha L_2)] \right\}, \quad (4.3)$$

donde,

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad \alpha = \frac{1}{L_2} \cosh^{-1}(R_2/R_1), \quad k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (4.4)$$

con R_2 el radio de la sección central de la probeta en $x = 0$ y R_1 el radio de la sección cilíndrica.

La longitud de resonancia L_1 de las probetas utilizadas en los ensayos a temperatura ambiente se calcula a partir de las Ecs.(4.3-4.4) y con los datos de la tabla 4.2. Luego, L_1 resulta igual a 23.75 mm. Para la determinación de la máxima tensión que se desarrolla en la parte central de la probeta se resuelve,

$$\sigma_{\max} = \frac{EA_0 \cos(kL_1) \cosh(\alpha L_2)}{\sinh(\beta L_2) \beta}, \quad (4.5)$$

donde A_0 es el desplazamiento impuesto en un extremo de la probeta. Una explicación más detallada acerca de estas ecuaciones se desarrolla en el libro de Bathias y Paris [BP05].

Sólo a efectos de comparación, para conocer la influencia del módulo de Poisson no tenido en cuenta en las ecuaciones anteriores, se realizó un análisis modal de la probeta con un modelo numérico axisimétrico de elementos finitos. La topología de la malla se muestra en la Fig. 4.6. La frecuencia de resonancia en el modelo de elementos finitos usando la geometría de las expresiones analíticas fue de 20.0188 Hz. Luego, la longitud de resonancia L_1 fue modificada hasta obtener una frecuencia natural de vibración de exactamente 20 kHz en el modelo numérico. La longitud final obtenida fue de 23.8 mm.

Para los ensayos experimentales se ha adoptado la geometría provista de las soluciones del MEF; no obstante se debe mencionar que la solución analítica y numérica se encuentran en muy buena correlación. Los resultados experimentales obtenidos en la máquina de fatiga ultrasónica mostraron que la probeta diseñada vibró con una frecuencia natural de 19.985 Hz. Luego, las tensiones y desplazamientos fueron calculados utilizando las expresiones analíticas por medio de las Ecs.(4.2-4.5) y soluciones numéricas.

Las soluciones de las tensiones y deformaciones del MEF fueron obtenidas por medio de un análisis transitorio donde un desplazamiento variable en el tiempo $u(t) = A_0 \cos(\omega t)$ fue aplicado en un extremo de la probeta con $\omega = 2\pi 20.000$, mientras que el extremo restante se impuso una posición inicial $u(0) = A_0$, ver Fig. 4.6. El tiempo de integración fue el necesario para alcanzar una condición de respuesta armónica. Los valores numéricos del módulo de Young y de la densidad fueron los correspondientes a temperatura ambiente, ver tabla 4.2.

La Fig. 4.7 muestra una comparación de los desplazamientos y tensiones en diferentes puntos sobre el eje de simetría de la probeta, utilizando el MEF y las ecuaciones analíticas.

Las diferencias obtenidas son debidas a los efectos del coeficiente de Poisson, ya que en las ecuaciones analíticas no se lo ha tenido en cuenta. Sin embargo, la tensión en el centro de la probeta resulta similar.

4. ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE FATIGA

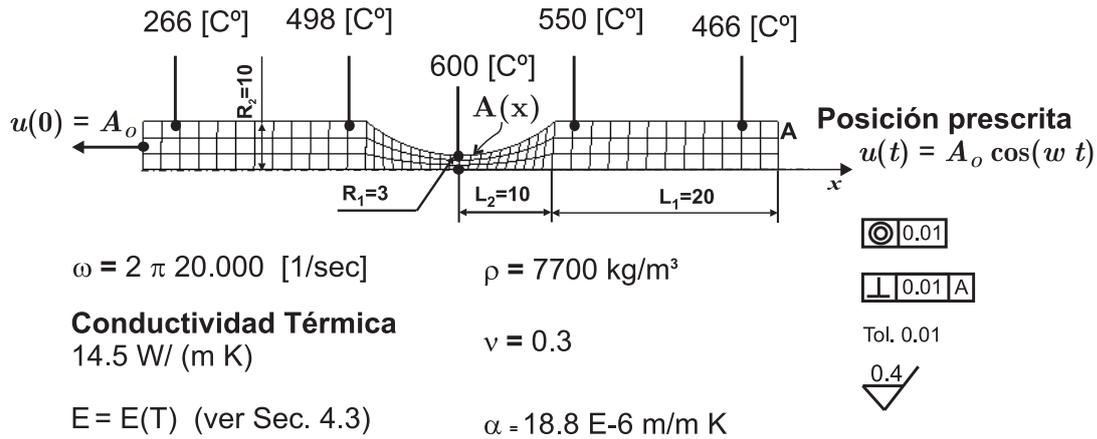


Figura 4.6: Topología de malla, condiciones de borde y propiedades termomecánicas utilizadas.

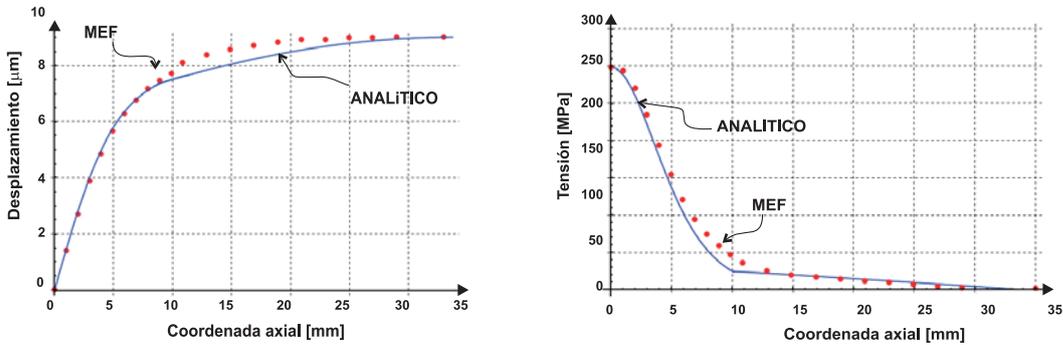


Figura 4.7: Temperatura ambiente. Comparación de los desplazamientos y tensiones utilizando ecuaciones analíticas y el MEF.

4.4.1. Diseño de probetas para elevada temperatura

Cuando una probeta se somete a una carga térmica exterior, la frecuencia de resonancia es afectada por los cambios geométricos y por la disminución del módulo de Young. Consecuentemente, el procedimiento desarrollado en la sección anterior para la determinación de los campos de tensiones y desplazamientos deja de ser válido y, la geometría de la probeta debe ser modificada para mantener una frecuencia de vibración tan cerca como sea posible a los 20 kHz a la temperatura deseada. En otras palabras, la longitud de resonancia de una probeta diseñada para elevada temperatura tiene que ser más corta que aquellas para temperatura ambiente [STJ+04, YTF+07]. Como resultado del calentamiento en la zona central de la probeta, el módulo de Young varía a lo largo de su longitud y entonces la Ec.(4.2) tiene que ser modificada para tener en cuenta este efecto. En este sentido, para el diseño de una probeta de geometría general y con dependencia del módulo de Young respecto de la posición, la ecuación gobernante es la siguiente,

$$U''(x) + U'(x) \left[\frac{A'(x)}{A(x)} + \frac{E'(x)}{E(x)} \right] + \frac{\omega^2 \rho}{E(x)} U(x) = 0. \quad (4.6)$$

Soluciones de los campos de desplazamientos y tensiones para el caso de las probetas ensayadas a elevada temperatura fueron obtenidas por simulación mediante el MEF y resolviendo numéricamente la Ec. (4.6).

4.4.1.1. Diseño mediante un método semianalítico

La distribución de temperatura en la probeta se determinó experimentalmente utilizando un pirómetro óptico y termocuplas conectadas a una probeta cuyas dimensiones no eran las definitivas para los ensayos a elevada temperatura. Para llevar a cabo esta tarea, se utilizó una probeta donde la dimensión L_1 era la de una probeta diseñada para ensayos a temperatura ambiente. Las mediciones experimentales de temperatura fueron registradas, como se muestra en la figura Fig. 4.8, en los puntos: A, B, C, D y E. Finalmente, por un ajuste de datos, la temperatura como función de la posición fue aproximada por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} T_{600}(x) &= 570 + 4.81261 x - 0.231 x^2 \quad [^{\circ}\text{C}], \\ T_{700}(x) &= 660 + 5.70727 x - 0.289 x^2 \quad [^{\circ}\text{C}], \end{aligned} \quad (4.7)$$

para los casos de 600°C y 700°C, respectivamente, donde la coordenada longitudinal x está dada en mm. Utilizando las Ec.(4.7) y el módulo de Young como función de la temperatura, Ec.(4.1), la variación del módulo de Young a lo largo de la longitud de la probeta puede ser establecida en todos los puntos, es decir $E = E[T(x)]$. Luego, la longitud de resonancia se obtiene numéricamente resolviendo iterativamente la Ec.(4.6), lo cual constituye un *método semianalítico*. Los desplazamientos y tensiones

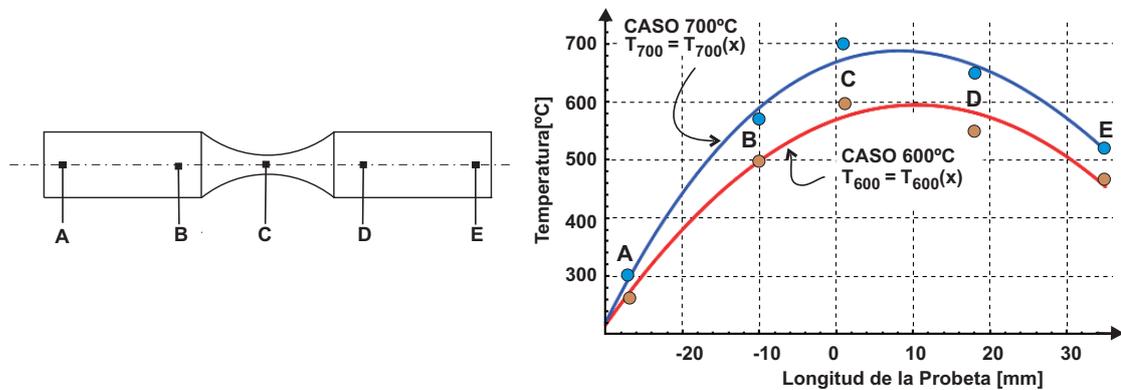


Figura 4.8: Puntos de medición de temperaturas.

obtenidos utilizando las soluciones del MEF y la Ec.(4.6), para los casos de 600°C y 700°C se muestran en las Figs. 4.9 y 4.10.

4.4.1.2. Diseño por el método de los elementos finitos

Para comenzar con el análisis del MEF se decidió utilizar la geometría de la probeta obtenida a partir del desarrollo presentado en la Sec. 4.4.1.1. En el análisis térmico, por ejemplo para el caso de 600°C, la distribución de temperaturas es la que se muestra en la Fig. 4.8.

4. ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE FATIGA

Para estudiar los campos de tensiones y desplazamientos, un análisis termomecánico fue llevado a cabo con las propiedades del material que se muestran en la tabla 4.2. El módulo de Young fue introducido en los modelos como función de la temperatura. La Fig. 4.6 muestra la malla del modelo de elementos finitos con las condiciones de borde para el caso de temperatura de 600°C. En forma completamente análoga se procedió para el caso de 700°C.

La comparación de los desplazamientos y tensiones entre el modelo de elementos finitos y el método semi-analítico para los casos de 600°C y 700°C se muestran en las Figs. 4.9 y 4.10, respectivamente. Los resultados en tensiones para ambos métodos muestran una buena correlación en el centro de la probeta, sector de mayor interés para construir las curvas de fatiga S-N.

La longitud de resonancia de la probeta utilizada para los ensayos de temperatura de 600°C y 700°C fue en ambos casos de $L_1 = 20$ mm.

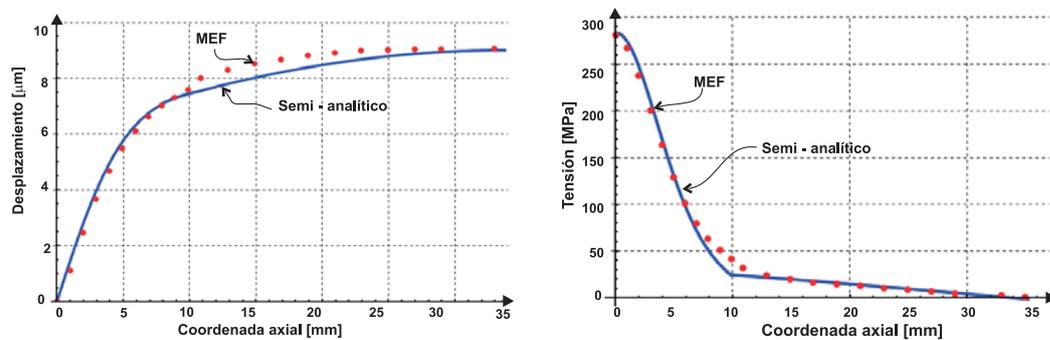


Figura 4.9: Comparación de los desplazamientos y tensiones para el caso de temperatura de 600°C utilizando un método semianalítico y el MEF.

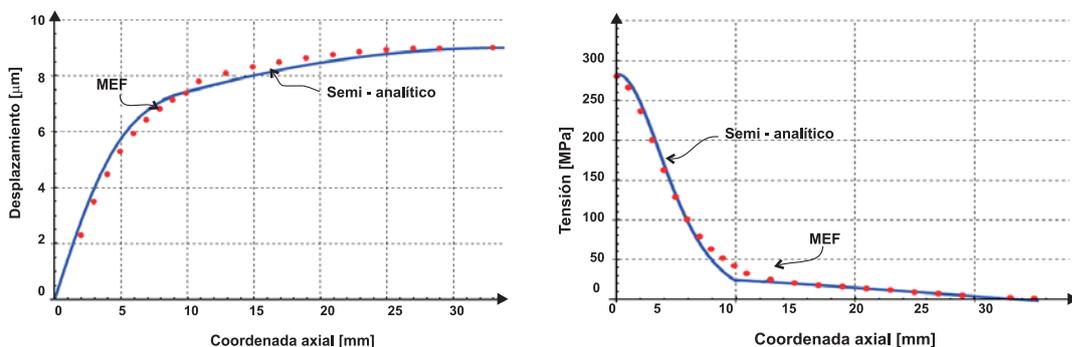


Figura 4.10: Comparación de los desplazamientos y tensiones para el caso de temperatura de 700°C utilizando un método semianalítico y el MEF.

4.5. Procedimiento experimental para los ensayos de fatiga de fatiga

Como se mencionó previamente, para los ensayos a elevada temperatura se utilizó un equipo de inducción. El inductor, diseñado en forma de espiral según [Cur50], fue construido en cobre y situado en torno al centro de la probeta, con el objetivo de alcanzar la temperatura deseada alrededor de la zona media. Un pirómetro óptico y termocuplas fueron los instrumentos de medición utilizados en los ensayos para registrar y controlar la temperatura. Si embargo, el pirómetro presenta ventajas prácticas comparado con las termocuplas, ya que no requiere soldaduras de ningún tipo a la probeta y además permite realizar mediciones en diferentes puntos de una manera muy sencilla.

Una calibración de la máquina de ensayos de fatiga ultrasónica fue requerida para hacer que el sistema vibre con una frecuencia de resonancia en torno a los 20 kHz. Este procedimiento se realizó con una probeta cilíndrica y un sensor laser que registra desplazamientos en el rango de $1 \mu m$ a $199.9 \mu m$ con una resolución de $0.1 \mu m$.

El sistema mecánico trabaja en el régimen elástico y, por consiguiente, la relación entre los desplazamientos, deformaciones y tensiones es lineal. En la máquina utilizada en este trabajo, el voltaje eléctrico es también lineal y proporcional a los desplazamientos. La Fig. 4.11 muestra un registro de la amplitud de los desplazamientos en un extremo de la probeta medido con un sensor óptico en función del voltaje de entrada. El factor que vincula la amplitud del voltaje de entrada y la amplitud de los desplazamientos en la probeta (la constante A_0 en Ec.(4.5)), se obtiene a partir de estas mediciones.

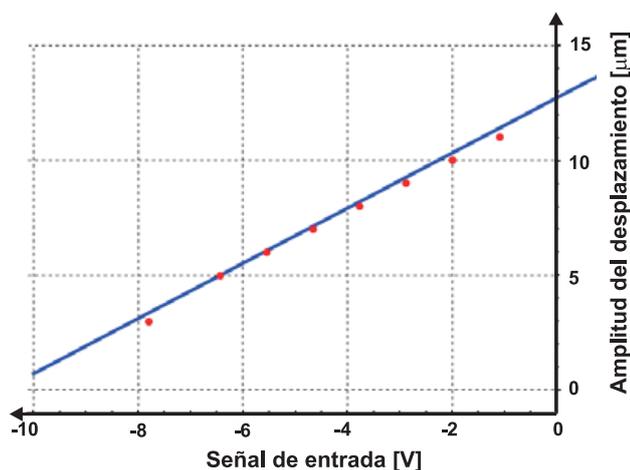


Figura 4.11: Medición de la amplitud de la señal.

Los primeros ensayos fueron realizados a temperatura ambiente y luego se continuaron con los ensayos a las temperaturas de $600^{\circ}C$ y $700^{\circ}C$. Para el caso del acero utilizado en esta Tesis, las mediciones de temperatura en el centro de la probeta indicaron un incremento de la temperatura durante los ensayos. Consecuentemente, fue imperativo enfriar la parte central de la probeta con aire fresco. Para ello se

empleó un sistema de aire comprimido para disminuir la temperatura tanto como fuera posible y mantenerla en un valor constante.

Las probetas que no fallaron hasta 10^9 ciclos fueron consideradas sin daño por fatiga. Luego, fueron ensayadas nuevamente con un incremento de tensión. Este procedimiento fue repetido hasta que se alcanzara la rotura. Según la investigación de Marines *et al.* [MDB⁺03], la resistencia a fatiga en alto número de ciclos en ensayos a temperatura ambiente es muy sensible a la terminación superficial de la probeta, dado que la rugosidad podría generar una pequeña concentración de tensiones contribuyendo a acelerar el daño por fatiga. Por tal motivo, las probetas fueron pulidas para reducir la dispersión tanto como sea posible en los gráficos S-N.

La geometría y la frecuencia de resonancia de las probetas fueron verificadas antes de cada ensayo y una tolerancia de ± 200 Hz fue establecida como el máximo rango de variación. Finalmente, las curvas S-N obtenidas se muestran en la Sec. 4.6. En cada probeta ensayada se determinó el tipo de inicio de fisura: superficial, sub-superficial, interna o combinación de ellas, y si fueron iniciadas por inclusiones no metálicas.

4.6. Resultados experimentales y discusión

4.6.1. Curva S-N a temperatura ambiente

La curva de tensión vs. número de ciclos para los ensayos realizados a temperatura ambiente se muestra en la Fig. 4.12 en una escala semi-logarítmica. En esta

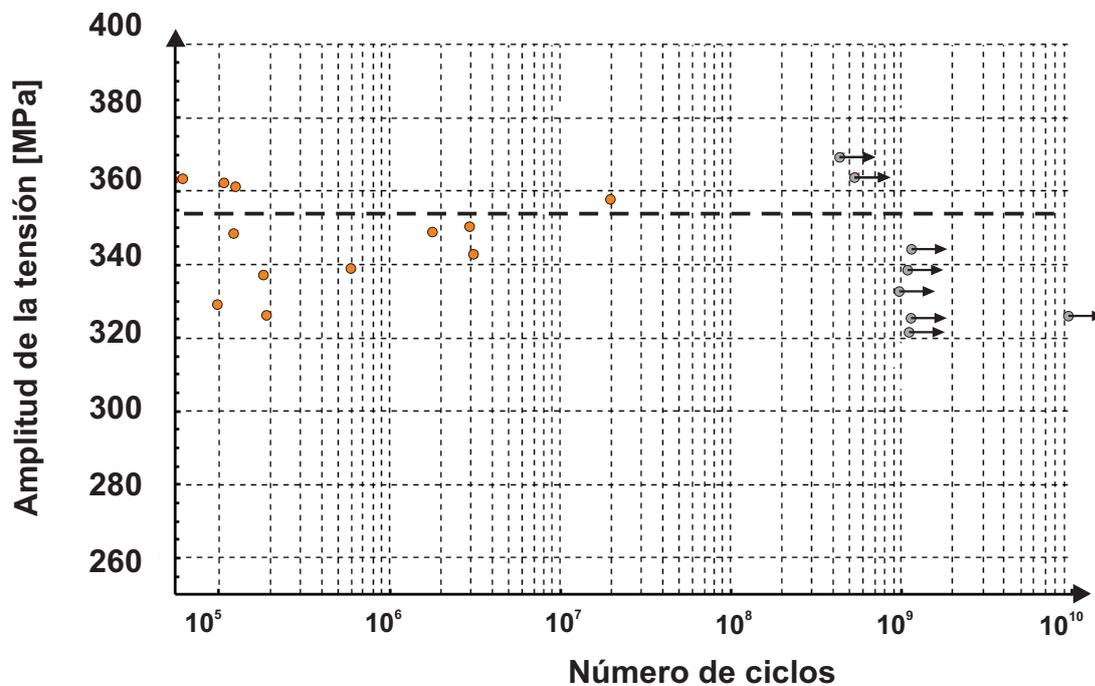


Figura 4.12: Curva S-N a temperatura ambiente del material H854.

4.6 Resultados experimentales y discusión

figura, la línea de trazos muestra el límite de endurencia con un valor de alrededor de 353 MPa. Las flechas en el gráfico indican aquellas probetas que no fallaron. La Fig. 4.13 muestra una imagen obtenida en un SEM de la parte central de una probeta que alcanzó 10^9 ciclos sin rotura. A menudo, en fatiga de alto número de ciclos, la rotura se inicia a partir de defectos internos, inclusiones, poros etc., sin embargo, para este material, en el caso de temperatura ambiente, las fisuras se iniciaron a partir de la superficie y no se encontraron roturas debido a inclusiones internas. El número de ciclos más elevado donde una probeta encontró la rotura fue a 2×10^7 ciclos. En aquellas probetas que alcanzaron 10^9 ciclos, la frecuencia de resonancia no disminuyó durante los ensayos, indicando que no hubo ningún tipo de iniciación de fisuras.

La Fig. 4.14 muestra la superficie de fractura de una probeta tomada con un microscopio óptico. La probeta falló a 337 MPa alcanzando 1.85×10^5 ciclos. La rotura fue normal al eje longitudinal en el centro de la probeta. Los diferentes colores que se pueden observar representan los cambios de temperatura antes de la rotura final. La Fig. 4.15, obtenida utilizando un SEM, muestra la formación de estricciones en la probeta.

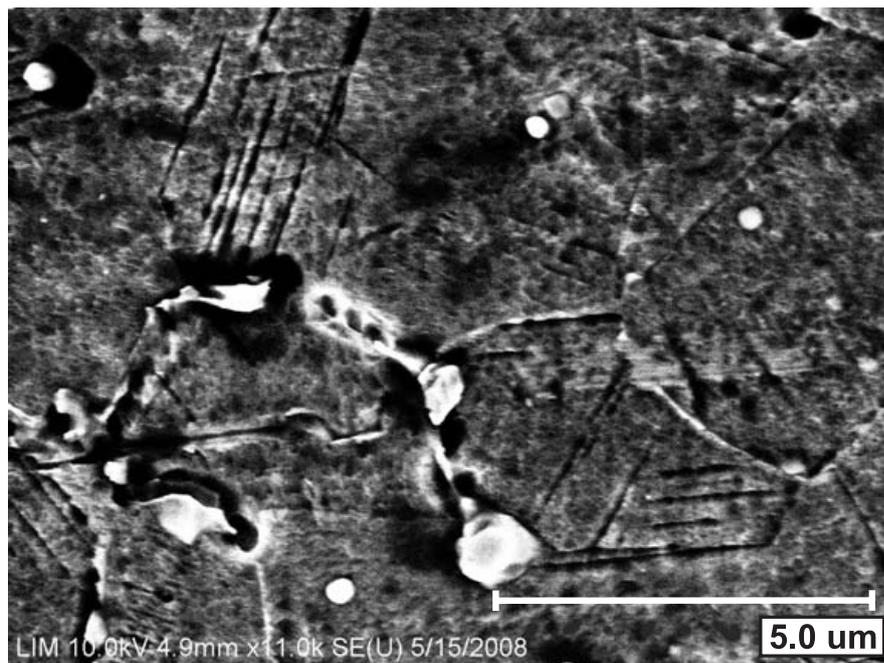


Figura 4.13: Imagen de la microestructura obtenida con el SEM en una probeta que alcanzó 10^9 ciclos con 370 MPa sin evidenciar rotura.

Como se puede observar en la Fig. 4.12 existe una gran dispersión en los resultados. Para los mismos niveles de tensión, existen probetas que fallaron, mientras que otras no. Una posible explicación a este fenómeno se relaciona con la inestabilidad de la microestructura del material debido a la disipación calórica [Bat09]. Se registró un incremento de temperatura durante el comienzo de los ensayos, indicando la existencia de disipación térmica con una estabilización posterior de la temperatura correspondiente al balance entre la energía mecánica transformada en calor, la ener-



Figura 4.14: Superficie de fractura obtenida con un microscopio óptico en una probeta que falló a 337 MPa y 1.85×10^5 ciclos.

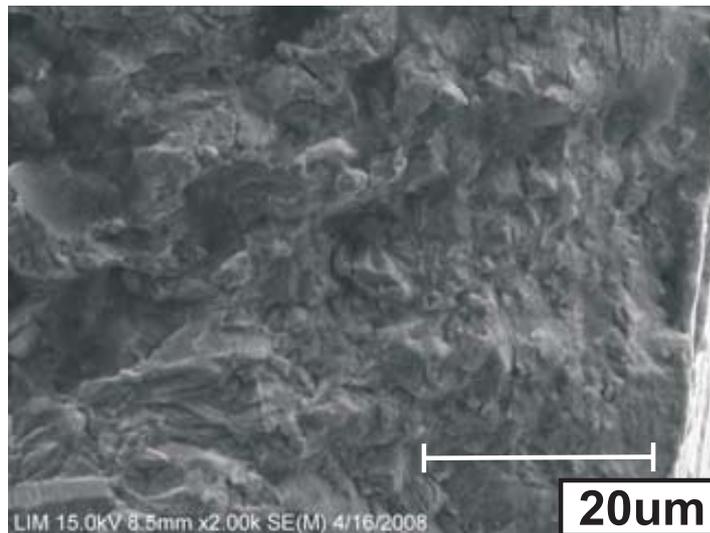


Figura 4.15: Superficie de fractura obtenida con el SEM en una probeta que falló a 337 MPa y 1.85×10^5 ciclos.

gía perdida por convección-radiación en la superficie de la probeta y por conducción en su interior.

Como se reporta en el trabajo de Bathias [Bat09], para el caso de un SAE 51200, la temperatura de una probeta antes de la iniciación de una fisura es de alrededor 235°C y en las mismas condiciones de trabajo pero con un SAE 4240 es de aproximadamente 80°C. Esta diferencia en el comportamiento térmico se debe a un efecto en la microestructura. Los niveles de austenita observados en el 4240 son elevados. Esta fase no es estable cuando se la somete a ciclos de carga en alta frecuencia [Bat09]. La dispersión de los resultados en el material utilizado en esta trabajo (acero austenítico), puede ser explicado por este fenómeno microestructural, tal como lo reporta [Bat09]. En otras palabras, una inestabilidad metalúrgica producto de la

4.6 Resultados experimentales y discusión

elevada frecuencia de los ciclos de carga y descarga, puede justificar la dispersión de los resultados y ésto constituye una limitación a la técnica de fatiga ultrasónica. La Fig. 4.16 muestra el incremento de temperatura en el acero H854, y cómo después de un determinado período de tiempo la temperatura se mantiene constante.

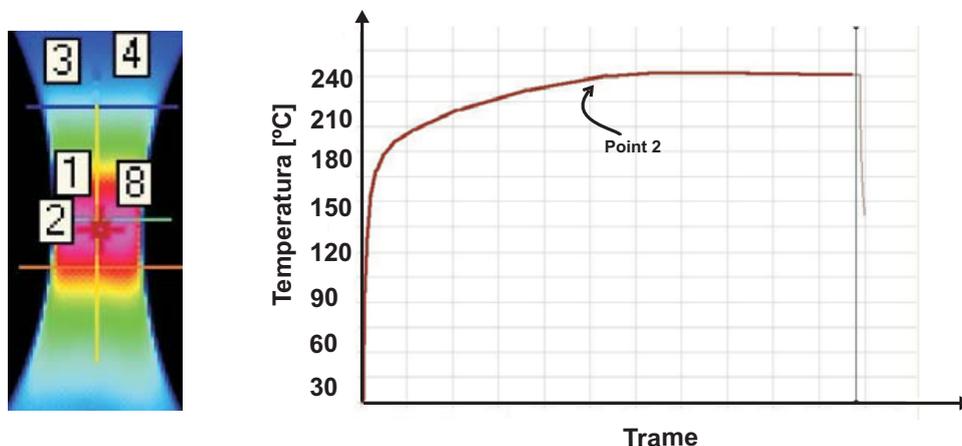


Figura 4.16: Elevación de temperatura observada en el H854 para el punto 2, ubicado según la imagen de la izquierda.

4.6.2. Curva S-N a 600°C

La curva S-N para los ensayos realizados a una temperatura de 600°C se muestra en la Fig. 4.17. En este caso, no se evidencia un límite de endurencia, sino una

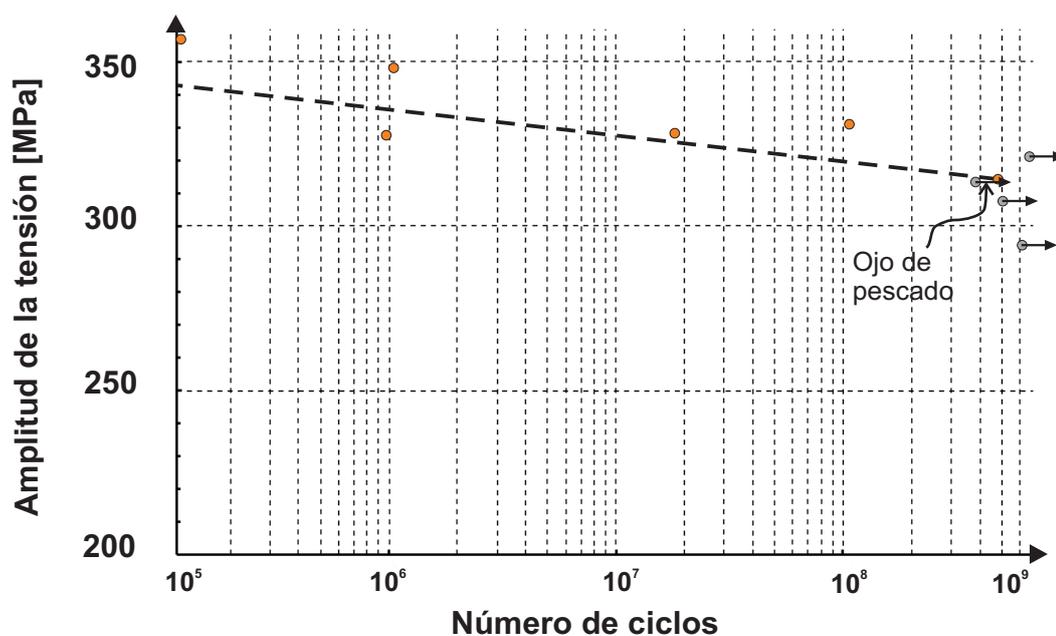


Figura 4.17: Curva S-N a 600°C para el material H854.

4. ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE FATIGA

continua reducción en la tensión de fatiga conforme aumenta el número de ciclos.

En el caso de las probetas que fallaron alrededor de 10^7 ciclos, las fisuras comenzaron en la superficie en una manera similar al ensayo de temperatura ambiente. La superficie de rotura, en el centro de la probeta, presentó una inclinación de alrededor de 40° respecto del eje longitudinal. Las Figs. 4.18 y 4.19 muestran una superficie de fractura examinada mediante un microscopio óptico y el SEM, respectivamente. Para esta probeta, el inicio de la rotura fue del tipo ojo de pescado en 3.74×10^8 ciclos y 315 MPa de tensión. Esta fue la única probeta cuya falla fue generada por una inclusión interna. El diámetro de la inclusión fue de $40\mu\text{m}$. Observaciones por medio del SEM en el sitio de iniciación de la rotura, indicaron que la composición química de la inclusión era Nb, ver Fig. 4.20. El Nb es un generador de carbonos que estabiliza a la aleación cuando es sometido a elevadas temperaturas. Usualmente se lo utiliza en aceros austeníticos como el H854, y por esta razón, si bien el Nb es un elemento nocivo desde un punto de vista de fatiga, debe estar presente en la composición química de este acero.

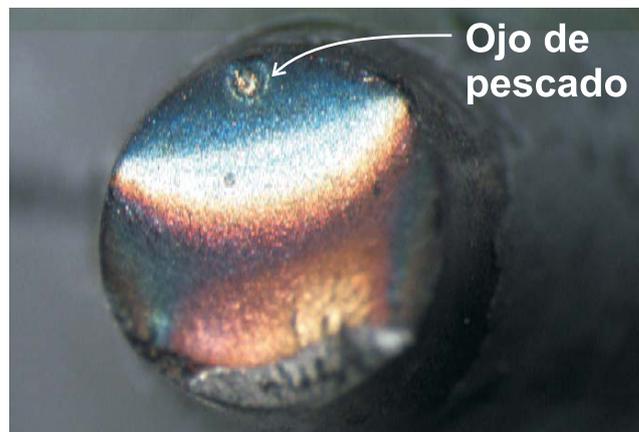


Figura 4.18: Superficie de fractura debido a una inclusión.

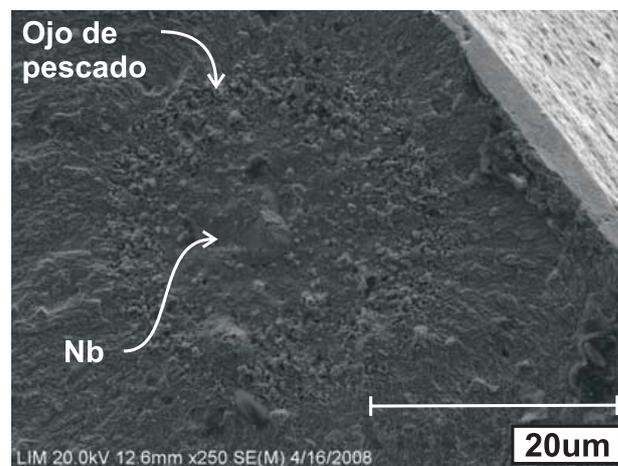


Figura 4.19: Amplificación en la zona de la inclusión.

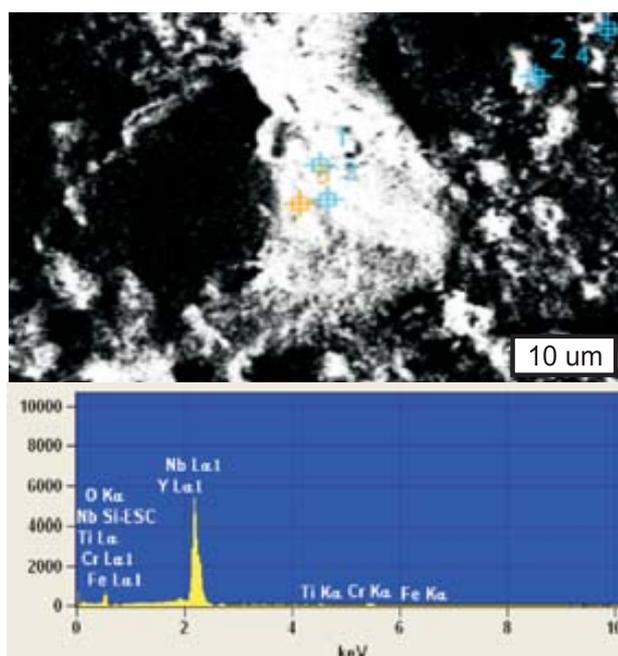


Figura 4.20: Diagrama espectral de la inclusión indicando la presencia de Nb.

La explicación de la formación de un ojo de pescado en el régimen gigacíclico no es obvia. Como se ha mencionado anteriormente, la deformación plástica cíclica es muy pequeña más allá de 10^6 ciclos, de este modo, los defectos internos y el tamaño de los granos son factores que inciden de manera sustancial en el daño acumulado por fatiga. En otras palabras, en fatiga de bajo número de ciclos, la iniciación de las fisuras se produce desde la superficie, y la terminación superficial del componente o probeta es un factor determinante del proceso. En el régimen de transición de fatiga de bajo número de ciclos a alto número de ciclos, la rotura puede comenzar desde el interior de la probeta, desde la superficie, o en ambos sectores, en tanto que en fatiga de alto número de ciclos la rotura se produce normalmente desde el interior. La Fig. 4.21 resume en un dibujo esquemático el proceso de iniciación de fatiga para diferentes regímenes.

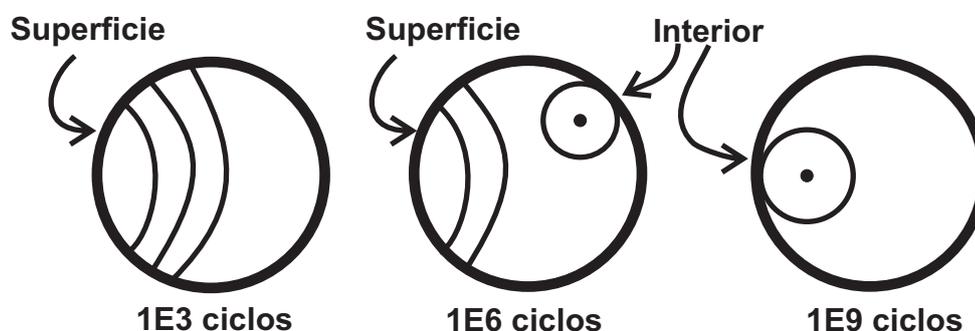


Figura 4.21: Iniciación de roturas por fatiga.

En fatiga de alto número de ciclos, los efectos del ambiente no son de consi-

deración ya que la iniciación de las fisuras es normalmente desde el interior. Por lo tanto, la superficie juega un papel menor si ésta es lo suficientemente suave como para impedir una rotura anticipada. Las inclusiones son puntos en los cuales empieza el proceso fisuración, especialmente si la relación de carga R es elevada. Las porosidades también pueden ser puntos de inicio de la fisura, en competencia con las inclusiones. Es importante mencionar que no es posible generalizar estas observaciones para cualquier tipo de material.

4.6.3. Curva S-N a 700°C

La curva S-N para el material H854 ensayado a 700°C se presenta en la Fig. 4.22. Para las probetas ensayadas, la iniciación de las fisuras se localizó en la superficie

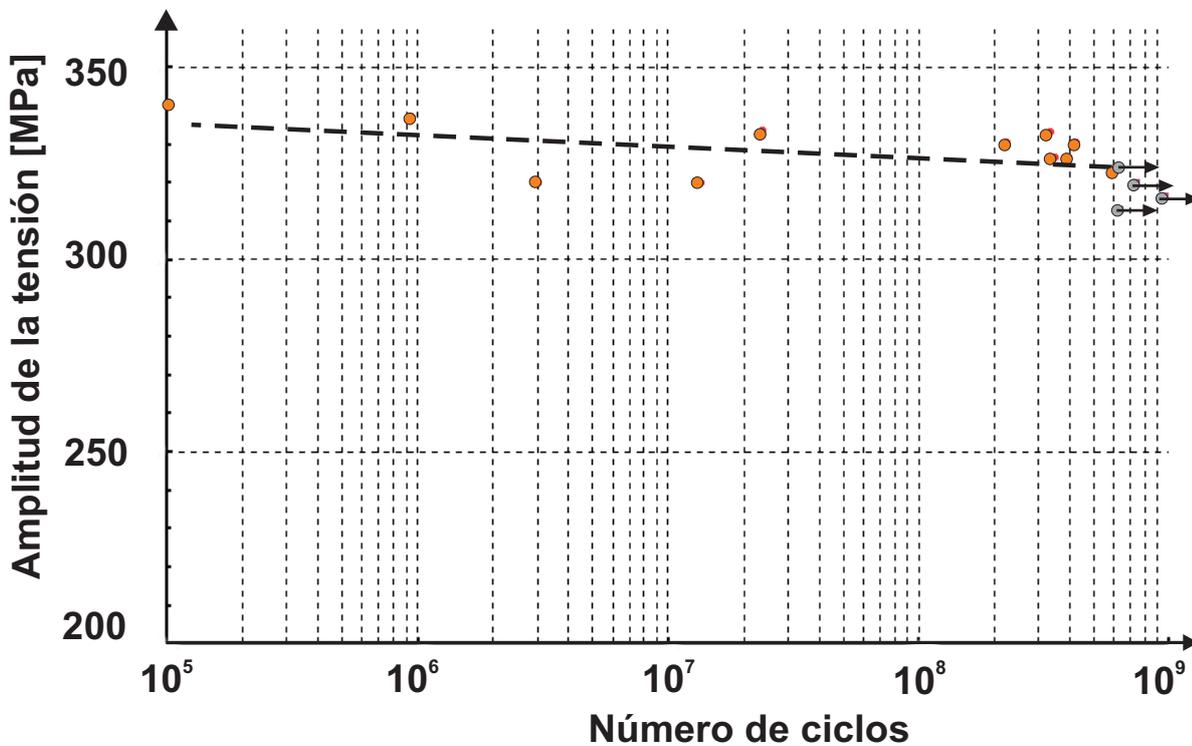


Figura 4.22: Curva S-N a 700°C para el material H854.

de la probeta y no se encontraron roturas originadas por inclusiones o defectos internos. La fractura final se localizó en el centro de la probeta con una inclinación de 40° respecto del eje longitudinal. Las Figs. 4.23 y 4.24 obtenidas utilizando un microscopio óptico y el SEM respectivamente, muestran la superficie de fractura en una probeta que falló a 345 MPa y 3×10^8 ciclos. La curva S-N muestra un leve descenso de la respuesta tensión vs. número de ciclos. En el rango de 10⁶ ciclos, la resistencia a fatiga de las probetas que alcanzaron la rotura es más baja que la curva de 600°C; sin embargo, a 10⁹ ciclos la tensión es casi la misma. Este comportamiento podría ser explicado por dos razones:

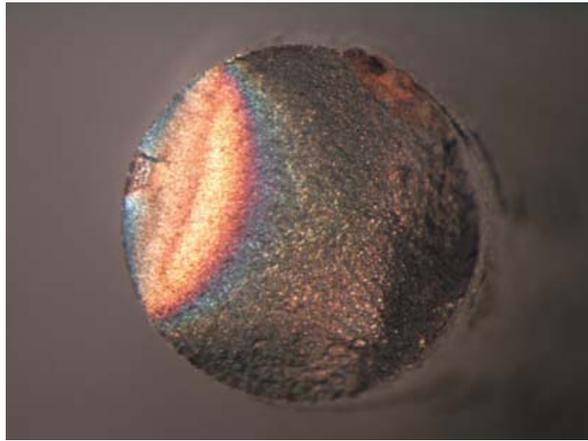


Figura 4.23: Imagen obtenida con un microscopio óptico de la superficie de fractura de una probeta que falló a 345 MPa en 3×10^8 ciclos a 700°C.

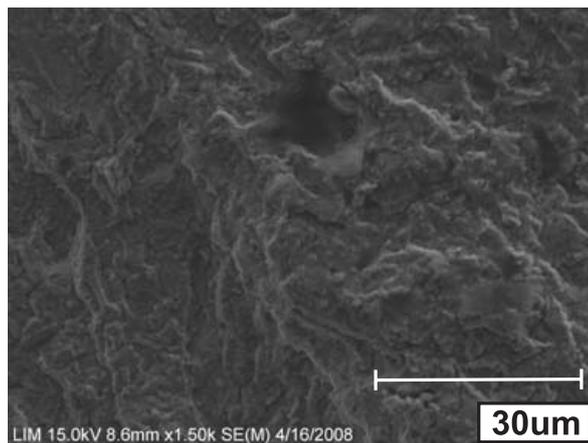


Figura 4.24: Imagen obtenida con un SEM de la superficie de fractura de una probeta que falló a 345 MPa en 3×10^8 ciclos a 700°C.

1. Fenómeno de oxidación en la punta de la fisura.
Se observó oxidación en probetas ensayadas a 600°C y 700°C. A pesar de que la relación de propagación de la fisura se acelera por la elevada temperatura; al mismo tiempo, la oxidación podría hacer decrecer este relación [BdMB02].
2. Rotura ojo de pescado.
Es importante advertir que en la curva de 600°C, una de las probetas ensayadas presentó una fractura del tipo ojo de pescado, con un valor de tensión relativamente bajo, causando que la curva de 600°C obtenida a partir de mínimos cuadrados decrezca muy rápidamente hasta alcanzar valores cercanos a los de las probetas rotas a 700°C.

4.7. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado el fenómeno de fatiga ultrasónica en un acero austenítico sometido a esfuerzos de tracción compresión ($R = -1$) en un rango de 10^5 a 10^9 ciclos por medio de técnicas experimentales, teóricas y numéricas a través del MEF. Una máquina ultrasónica con una frecuencia de funcionamiento de 20 kHz fue utilizada para analizar el comportamiento de fatiga del material tanto a temperatura ambiente como a elevada temperatura con el objetivo de obtener la curva de tensión vs. número de ciclos en el régimen gigacíclico, esto es, analizar si el material posee un límite de durancia o si a medida que se incrementa el número de ciclos de carga se produce una disminución de su vida. Las conclusiones más importantes se describen a continuación.

- El diseño de las probetas por medio de un análisis modal en un modelo de elementos finitos mostró buena concordancia con los registros experimentales, es decir, cuando la probeta alcanzaba la temperatura deseada, *i.e.*, temperatura ambiente, 600°C o 700°C , la frecuencia de resonancia estuvo cercana a los 20 kHz durante los ensayos.
- A temperatura ambiente, fueron ensayadas más de 20 probetas y ninguna falló más allá de 2×10^7 ciclos. Los resultados obtenidos mostraron gran dispersión de los resultados.
- La curva de S-N para 600°C , mostró una continua disminución de la respuesta tensión vs. número de ciclos. Las tensiones de fatiga decrecieron alrededor de 34 MPa comparado con la curva de fatiga a temperatura ambiente. En las probetas ensayadas, la iniciación de las fisuras fue observada en la superficie. Inspecciones mediante el SEM mostraron que sólo una probeta falló por una rotura del tipo ojo de pescado a partir de una inclusión de Nb. En este sentido, se requiere más trabajo experimental para determinar la influencia de las inclusiones sobre la resistencia a fatiga en este tipo de aceros.
- La curva para 700°C mostró una leve disminución de la respuesta en la curva tensión vs. número de ciclos. La iniciación de las fisuras fue identificada en la superficie de las probetas.
- La superficie de rotura en los ensayos a temperatura ambiente fue normal al eje longitudinal de la probeta. No obstante, a elevadas temperaturas, la superficie de fractura presentó una inclinación de 40° con respecto al eje longitudinal de las probetas.

Los resultados obtenidos a través de la técnica de fatiga ultrasónica, específicamente las curvas de tensión vs. número de ciclos, pueden ser utilizados para generar nuevos diseños de válvulas de motores de combustión interna desde el punto de vista de fatiga. En este sentido, el capítulo siguiente describe un ensayo de una válvula de motor de combustión interna donde el diseño fue concebido a partir de los resultados presentados en este capítulo y con el uso de la simulación numérica, mediante el método de los elementos finitos.

Capítulo 5

Análisis de fatiga en válvulas de motores de combustión interna

5.1. Introducción

Una de las causas de falla catastrófica en válvulas de motores de combustión interna se debe a los efectos de fatiga. Este fenómeno genera daños irreversibles en el motor, lo que motiva un estudio exhaustivo en este campo.

Las válvulas de los motores de combustión interna deben soportar tensiones originadas en el impacto con el asiento durante la finalización de la carrera de compresión, presiones en el interior del cilindro y elevadas temperaturas que surgen de los procesos de combustión. Es por ello que las aleaciones utilizadas para su fabricación son seleccionadas por su capacidad de soportar elevadas tensiones, desgaste (por su gran dureza) y además, son altamente resistentes a los efectos corrosivos. Bajo estas condiciones de operación, se produce una degradación de las propiedades mecánicas del material que eventualmente puede contribuir a una rotura por fatiga [Son03].

Las válvulas, durante los ciclos de operación en el motor, se encuentran sujetas a tensiones tanto en la dirección axial como en la radial. Esta característica hace que en los estudios de fatiga de este componente se deba tener en cuenta la multiaxialidad de las cargas, siendo los criterios de fatiga multiaxiales los más adecuados para este estudio, ver Cap. 3.

La tensión mecánica que se desarrolla en la válvula proviene fundamentalmente del impacto que se produce con el asiento, las cargas del resorte de retorno y las de inercia originadas por la masa de trabas, casquillos y resorte. Una excesiva velocidad de asentamiento, resulta en un impacto de gran magnitud generando tensiones variables en el tiempo que se propagan por todo el componente con una frecuencia muy elevada causando luego de un determinado ciclo de operación un daño por fatiga. El inicio de las fisuras es sensible a las condiciones de terminación superficial del material tales como rugosidad, daño superficial, tratamientos superficiales, capas blandas, tensiones y corrosión residuales en la superficie.

Además de la influencia de las cargas mecánicas y la terminación superficial, este componente debe ser capaz de resistir los fuertes gradientes térmicos producto de

5. FATIGA EN VÁLVULAS DE MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA

la combustión que se producen en el interior del cilindro del motor. Las elevadas temperaturas degradan las propiedades resistentes de los materiales, contribuyendo a una reducción sustancial de la vida operativa del componente. La evidencia experimental ha demostrado que las temperaturas más elevadas se dan en la cabeza de la válvula y en la zona de transición de la cabeza con el vástago, ver Fig. 5.1. Es



Figura 5.1: Denominación de las partes de una válvula de motor de combustión interna y el asiento.

evidente que las temperaturas a las que se ve expuesta una válvula de admisión son mucho menores que las de una válvula de escape. Asimismo, las temperaturas en un motor Diesel son menores a las de un motor a gasolina y, por ende, la duración del componente es mayor.

Actualmente las normas ambientales de Europa y EE.UU previstas para los próximos años exigen disminuir los niveles de NOx y un aumento en la duración de la vida útil de los componentes de motores. Por este motivo, los diseños actuales imponen mayores exigencias sobre las válvulas requiriendo de mejores métodos de análisis.

En los motores modernos de combustión interna, una válvula está sujeta a un número de ciclos de carga muy elevada. Si se tienen en cuenta una velocidad promedio de unos 50 km/h, un número de revoluciones del motor de 3000 rpm y una duración especificada de 200.000 km, la cantidad de ciclos que debe soportar este componente supera 10^8 ciclos. Para asegurar su vida útil, en el proceso de diseño es necesario llevar a cabo ensayos muy prolongados y complejos. Mediante modelos computacionales es posible simular y analizar este componente, reduciendo la necesidad de realizar ensayos experimentales extensos y costosos, posibilitando además alternativas de optimización. El método de los elementos finitos es, en general, una técnica de análisis numérico que resulta atractiva para este tipo de análisis. Mediante simulaciones numéricas por el MEF se pueden tener en cuenta diferentes materiales, tensiones de impacto y cargas térmicas provenientes de la combustión [CCR06].

En válvulas de motores, la carga está fuertemente influenciada por los ciclos

de trabajo a los que la somete el motor, es por ello que se requiere conocer su comportamiento, esto es, la historia térmica y dinámica en diferentes condiciones de operación. En la Fig. 5.2 se puede apreciar la falla por fatiga de una válvula de escape de motor de combustión interna en condiciones de normales de operación, [Jon80].



Figura 5.2: Rotura por fatiga de una válvula de motor de combustión interna.

Los elevados esfuerzos a los que se somete una válvula y la alta confiabilidad requerida, hacen que los diseños deban desarrollarse teniendo en cuenta el instante de iniciación de la fisura, de modo que los métodos de fatiga basados en un crecimiento estable de la fisura no son considerados a los fines de esta Tesis.

Para el diseño de cualquier componente mecánico, es necesario contar con las características mecánicas del material con el que se lo va a fabricar. En particular, para un análisis de fatiga es imperativo el uso de las curvas de Wöhler o curvas S-N.

Esta sección tiene por objetivo el estudio a fatiga de válvulas de motores de combustión interna a elevada temperatura a través de herramientas computacionales y ensayos experimentales [CBR⁺08, BP05]. Se estudiaron las condiciones de operación a las que se ve sometida una válvula, esto es, la distribución de temperaturas, su dinámica y la historia de las tensiones desarrolladas producto de la inercia de los componentes, como así también del impacto con el asiento.

Por medio de un análisis térmico de elementos finitos se obtuvo la distribución de temperaturas en una válvula ajustando coeficientes térmicos con los resultados de mediciones experimentales. Finalmente, de un análisis termo-mecánico dinámico se obtuvo la máxima tensión desarrollada en la válvula durante el proceso de asentamiento. Posteriormente se obtuvo un diseño de válvula que luego fue mecanizado a partir de un acero austenítico. Sus características químicas, mecánicas y de fatiga se han descrito en el Cap. 4. Los resultados de los modelos numéricos desarrollados son comparados y analizados con los obtenidos en una máquina de ensayos especialmente diseñada para el estudio de fatiga y desgaste de válvulas de motores de

combustión interna. Las características y diseño de la máquina se describen en la Sec. 5.2.1.

5.2. Máquina de ensayos de fatiga

5.2.1. Descripción.

La máquina utilizada para los ensayos de fatiga fue construida originalmente por la empresa de autopartes MAHLE de Alemania para llevar a cabo estudios de tribología en válvulas de motores de combustión interna. Su denominación es *Valve seat insert Tribo-test-Ring* o VTR como se la designará de aquí en adelante. La máquina consiste de un árbol de leva conectado a un motor eléctrico, el que permite alcanzar revoluciones en orden de los 3000 rpm y una velocidad máxima de la válvula en el instante de cierre de 3.5 m/seg. El árbol de leva se conecta directamente a la válvula que se desea ensayar. Un equipo de inducción es utilizado para elevar las temperaturas de las válvulas hasta valores del orden de los 1000°C. En la Fig. 5.3 se muestran sus componentes principales junto con un corte en la zona donde se coloca la válvula. La temperatura y la velocidad son monitoreadas en forma electrónica y automática a través de un equipo de adquisición de datos conectado a una PC. La velocidad se registra por un medidor láser. Las mediciones de temperatura se realizan a través de un pirómetro óptico donde su emisividad se ajusta por medio de una cámara infrarroja.

En esta máquina, la válvula debe soportar las cargas variables que surgen sólo del impacto con el asiento en cada ciclo de cierre. La ventaja de su utilización comparada a un típico motor de automóvil es la facilidad de adquisición de datos y condiciones estables de funcionamiento. En especial, para el caso de fatiga, si la válvula alcanzara la rotura, no se produce un daño irreversible en la máquina, como sí sucedería en un motor. Sin embargo, llegar a una cantidad muy elevada de número de ciclos, por ejemplo 10^8 ciclos, sigue siendo una tarea costosa y compleja.

5.2 Máquina de ensayos de fatiga

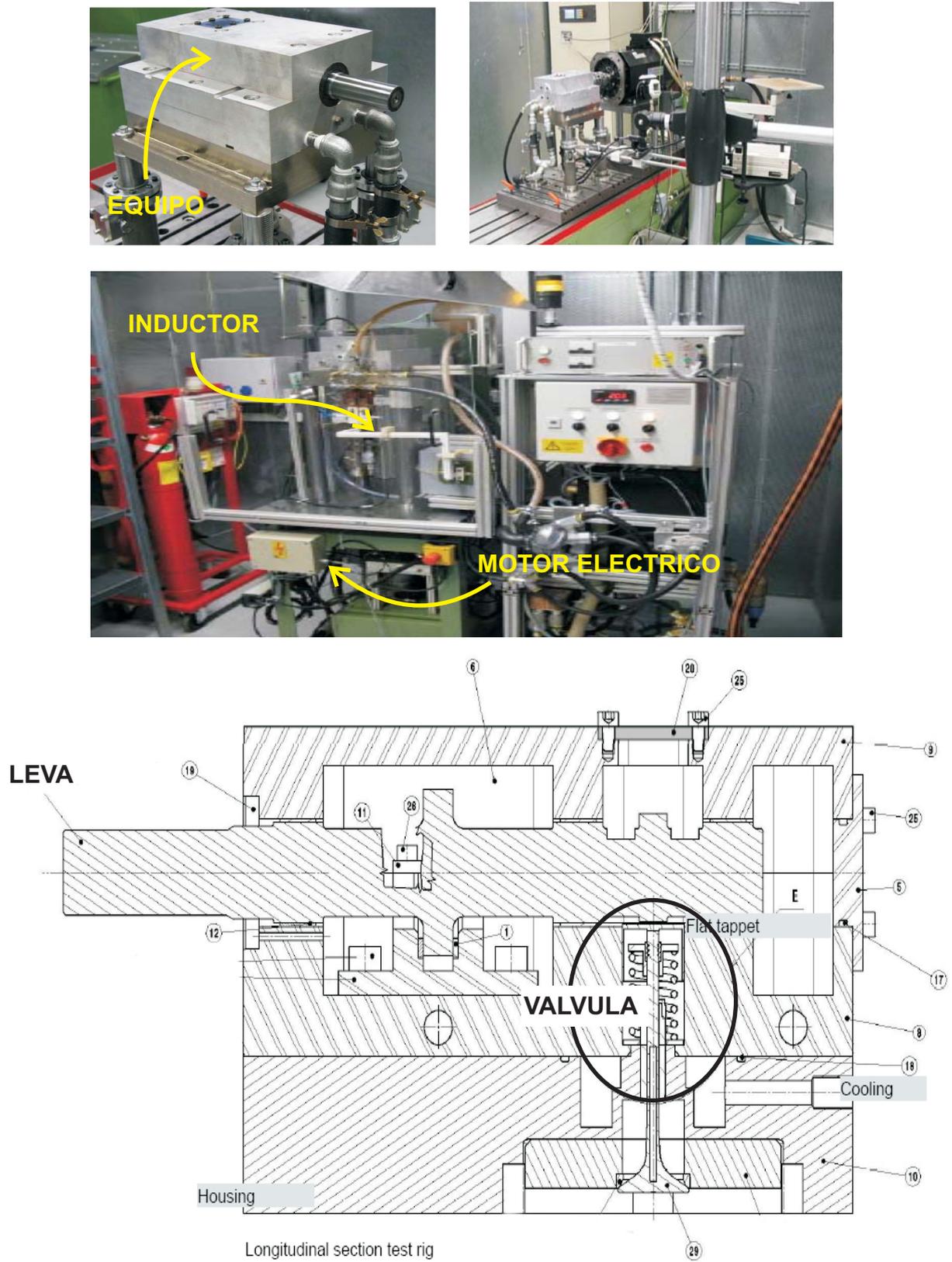


Figura 5.3: Máquina de ensayos a fatiga VTR.

5.2.2. Simulación numérica de la máquina de ensayos

El perfil de la leva, necesario para obtener la velocidad de asentamiento, y utilizada luego en las simulaciones dinámicas de la válvula, Sec. 5.4, fue generado a partir de la curva experimental de alzada del seguidor vs. ángulo de rotación, ver Fig. 5.4. En ella se destaca un desplazamiento máximo del seguidor de 4 mm. Utilizando esta

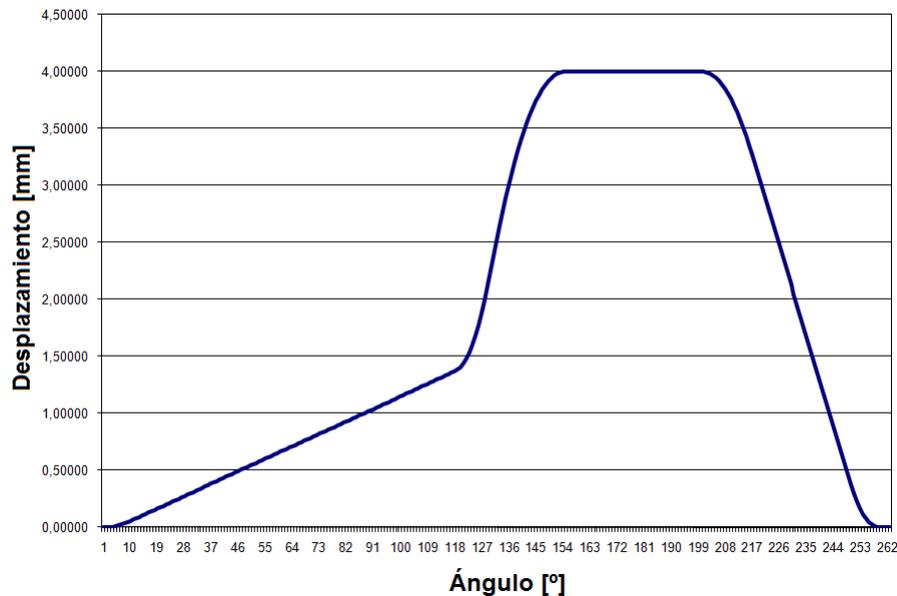


Figura 5.4: Curva del seguidor: desplazamiento [mm] vs. ángulo [°]. Experimental.

curva y con un radio base de 20 mm, se obtiene el perfil de la leva. Su desarrollo fue calculado mediante una curva *spline*. Con el perfil de la leva y las distintas constantes físicas de la VTR, se modeló numéricamente el tren de válvula [CLN02]. A continuación se presenta en forma detallada cada uno de los elementos simulados. La Fig. 5.5 muestra el modelo numérico de la cadena cinemática.

- **Leva-seguidor:** el perfil de la leva está dado por puntos. La leva fue considerada como un cuerpo rígido con rigidez de contacto y amortiguamiento local.
- **Resorte de válvula:** debido a los efectos de inercia de la masa del resorte, muy influyente en un análisis dinámico, se optó por dividirlo en ocho sub-resortes. Con esta discretización, se pretende simular el movimiento independiente que pueden sufrir las espiras, como así también una mejor distribución de su masa. Sus características son: longitud no comprimido de 48 mm, constante de rigidez de 30.8 N/mm, longitud de montaje de 37,4 mm y masa del resorte de 38 gr.
- **Válvula:** considerada como cuerpo rígido. No se tuvo en cuenta la luz de válvula durante la simulación para evitar despegues. Masa: 61.8 gr.
- **Trabas y platinos:** fueron modelados por medio de masas puntuales. Masa total: 11 gr.

Un esquema de integración temporal Hilbert-Hughes-Taylor (HHT) fue utilizado para evaluar la respuesta dinámica del sistema. El intervalo de tiempo para realizar

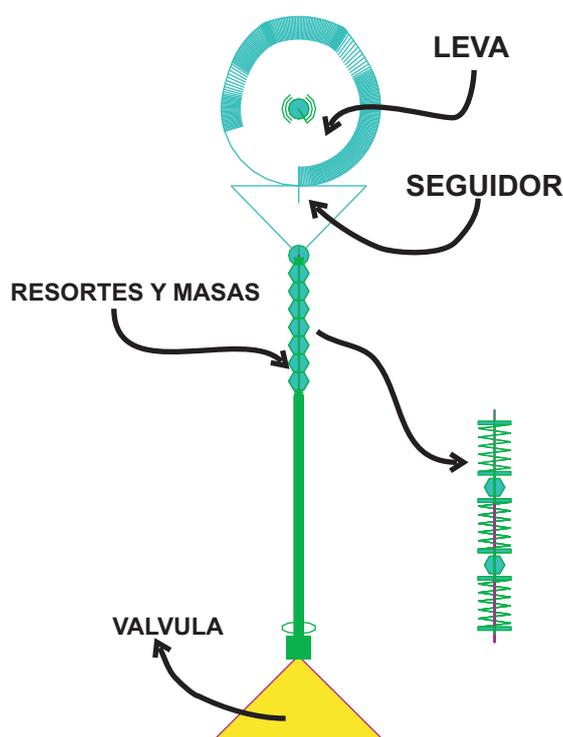


Figura 5.5: Modelo numérico del tren de válvula de la máquina de ensayos.

la simulación fue de $\Delta t = 3 \times 10^{-2}$ seg. con control automático de paso de tiempo, paso mínimo de 10^{-9} seg. y máximo de 10^{-4} seg. Posteriormente, se realizaron simulaciones con diferentes velocidades del árbol de levas para validar el modelo propuesto con los resultados obtenidos en forma experimental, ver Sec. 5.2.3.

5.2.3. Resultados

Las siguientes figuras corresponden a una simulación realizada con una velocidad del árbol de levas de 2500 rpm. Como se presentará a continuación, esta velocidad fue la adoptada para realizar los ensayos experimentales. La Fig. 5.6 muestra la curva desplazamiento vs. tiempo obtenida por medio de simulaciones numéricas en un nodo del seguidor. El valor máximo del desplazamiento es 4 mm, coincidente con el que se muestra en la Fig. 5.4. La Fig. 5.7 muestra la curva de velocidad vs. tiempo para un nodo del seguidor, donde la máxima velocidad de cierre de válvula alcanzada para 2500 rpm es de 1320 mm/seg. Finalmente, en la Fig. 5.8 se muestra una comparación de los valores de la velocidad de asentamiento medidos en forma experimental en la máquina y los obtenidos en forma numérica con diferentes velocidades de rotación. Se puede apreciar muy buena correlación entre ambas curvas. El error relativo máximo entre ambas curvas fue de 2%.

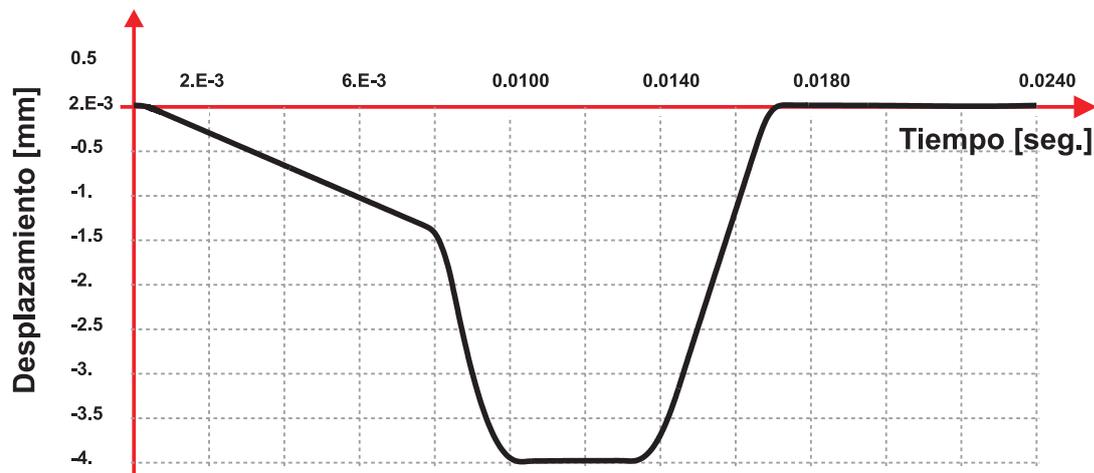


Figura 5.6: Curva del seguidor: desplazamiento [mm] vs. tiempo [seg.] obtenida por simulación numérica.

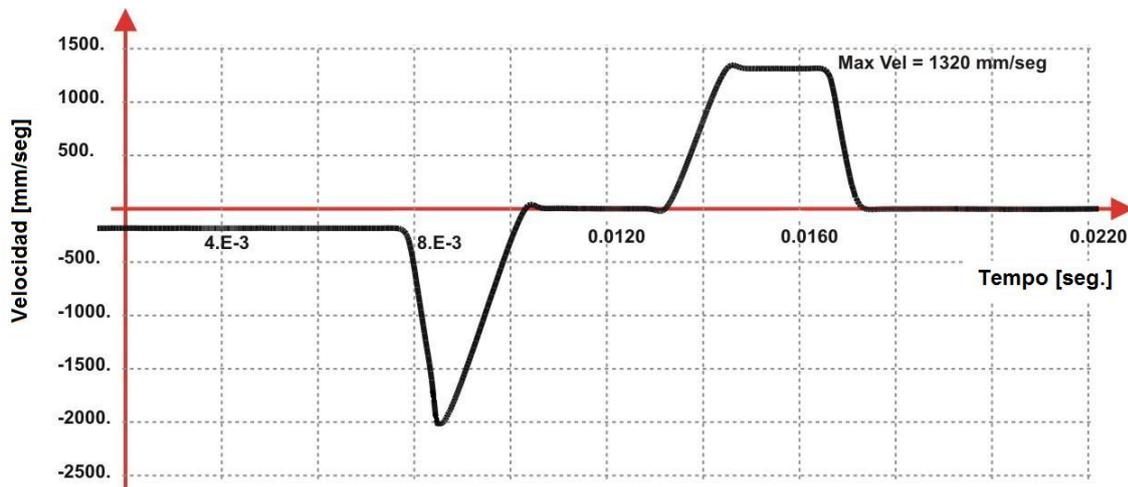


Figura 5.7: Velocidad [mm/seg.] vs. tiempo [seg.] para un nodo del seguidor.

5.3. Análisis térmico del ensayo en la máquina de fatiga

El estudio completo del problema térmico es de una complejidad elevada dado los diversos mecanismos físicos que se ven involucrados. Esto demanda la imposición de ciertas hipótesis simplificadoras, como así también la realización de ajustes de parámetros específicos del problema por comparación con datos experimentales.

El tiempo característico del problema térmico tanto en un motor de combustión interna como en la máquina de ensayos es prolongado comparado con la duración de un ciclo, por ello que la determinación instantánea de estos parámetros no tiene sentido y únicamente su valor promedio a lo largo de una importante cantidad de ciclos es relevante para el análisis térmico. El cálculo de los coeficientes convectivos mediante simulación computacional de fluidos CFD (Computational Fluid Dynamic) resulta extremadamente complejo, puesto que los resultados son muy dependientes

5.3 Análisis térmico del ensayo en la máquina de fatiga

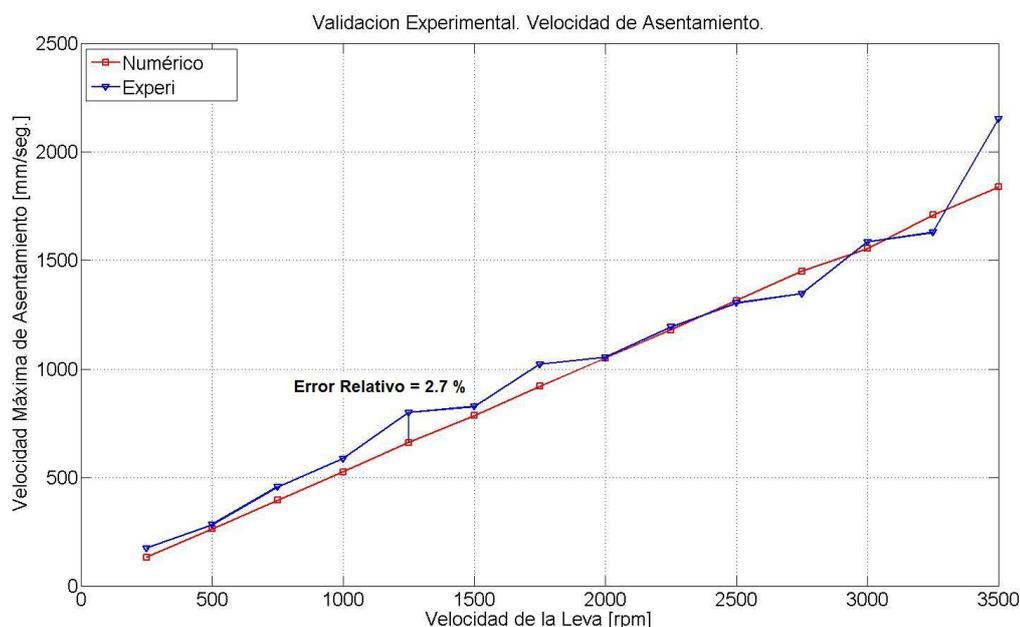


Figura 5.8: Validación. Velocidad de asentamiento vs. velocidad de la leva obtenido numérica y experimentalmente.

de las variables termodinámicas en cada ciclo.

Debido a las elevadas temperaturas, la dificultad para acceder a distintas zonas de medición, como así también al rápido movimiento de la válvula, la mayoría de los coeficientes o parámetros térmicos son obtenidos en forma indirecta mediante simulación numérica y las llamadas válvulas *testigo*. Esta técnica consiste en la construcción de válvulas especiales de material martensítico. Algunas de ellas son sujetas a la condición de operación nominal y las restantes son templadas en un horno especial. Luego, se determina la dureza de todas las válvulas en su plano medio en unos 10 puntos aproximadamente. Mediante comparación de la dureza entre las válvulas que han sido ensayadas y aquellas que fueron templadas en un horno, es posible obtener en determinados puntos y con cierta aproximación, la máxima temperatura promedio a la que fue sometida la válvula. Una vez obtenidos los valores experimentales de temperatura, para el cálculo de los coeficientes de transferencia térmica de los modelos numéricos se utiliza un método inverso a través del MEF. El objetivo es encontrar la combinación de los coeficientes de conductancia de contacto y convección, de modo de minimizar las diferencias entre las temperaturas calculadas con el modelo numérico y las temperaturas obtenidas en forma experimental.

Como los tiempos característicos del problema térmico son grandes, es decir, se lo considera estacionario, y además si existe movimiento de rotación de la válvula, las diferencias de temperatura entre puntos de una misma circunferencia son pequeños. En ese caso, un modelo axisimétrico reproduce adecuadamente las temperaturas en la válvula, suponiendo temperaturas uniformes en todas las circunferencias, con un costo computacional reducido. De esta manera es posible realizar calibraciones de parámetros y análisis de sensibilidad en tiempos razonables involucrando múltiples

corridas de un mismo modelo.

5.3.1. Definición del problema de transferencia de calor

La transferencia de calor en un medio continuo se representa por un modelo matemático compuesto de una ecuación diferencial en derivadas parciales y con sus condiciones de contorno. La ecuación representa el balance de energía térmica, donde la temperatura es la variable a resolver y el tiempo y la posición son las variables independientes. En el caso de un problema estacionario, lo que se busca es una solución del tipo $T(\mathbf{x})$ que satisfaga la siguiente ecuación diferencial,

$$q(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (5.1)$$

donde, T representa la temperatura, $\kappa = \kappa(T)$ la conductividad térmica del medio, $q(\mathbf{x})$ una fuente de calor localmente distribuida, y ∇ el operador nabla. Las condiciones de contorno se pueden resumir en,

$$\begin{aligned} T &= \bar{T} & \mathbf{x} &\in \Gamma_T, \\ -\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} &= q & \mathbf{x} &\in \Gamma_q, \\ -\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} + h (T - T_{amb}) &= 0 & \mathbf{x} &\in \Gamma_h, \\ \pm \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} + C (T - T_B) &= 0 & \mathbf{x} &\in \Gamma_C, \end{aligned} \quad (5.2)$$

la primera conocida como condición Dirichlet, la segunda, condición de Neumann; con \mathbf{n} representando al vector normal a la superficie; la tercera es una condición de convección, donde h se denomina coeficiente pelicular de convección, T_{amb} es la temperatura exterior; y en la cuarta y última se tiene en cuenta el contacto térmico con un medio que está a una temperatura T_B , donde C es el coeficiente de contacto térmico o conductancia entre los materiales.

La radiación, mecanismo de transferencia de calor importante en motores de combustión interna, posee una dependencia respecto de la cuarta potencia de la temperatura y se tiene en cuenta mediante un aumento del coeficiente pelicular de convección en aquellas zonas expuestas a mayores temperaturas. Una explicación detallada del problema discreto de la Ec.(5.1) por medio del MEF, puede encontrarse en el libro de Zienkiewicz y Taylor [ZT00].

La Fig. 5.9 muestra como se hallan aplicadas las condiciones de contorno arriba descritas al modelo numérico de una válvula utilizada en la VTR.

En la cabeza de la válvula, zona **A**, se impuso un flujo de calor para reproducir el calor proveniente del equipo de inducción.

La zona **B**, representa el contacto térmico entre el asiento y la válvula. Se aplican dos condiciones de contorno: una de convección durante el período de apertura de la válvula y otra de contacto térmico durante el período de cierre. La zonas **C** y **G** tienen temperatura impuesta, correspondientes a las temperaturas del asiento y de la guía, respectivamente. En las zonas **D** y **E** hay convección con el gas pero con dos coeficientes peliculares h diferentes para tener en cuenta diferencias en el número de Reynolds del flujo en esos sectores. La zona **H**, es de contacto térmico entre el vástago de la válvula y la guía. La zona **F** forma la superficie de sombra entre el

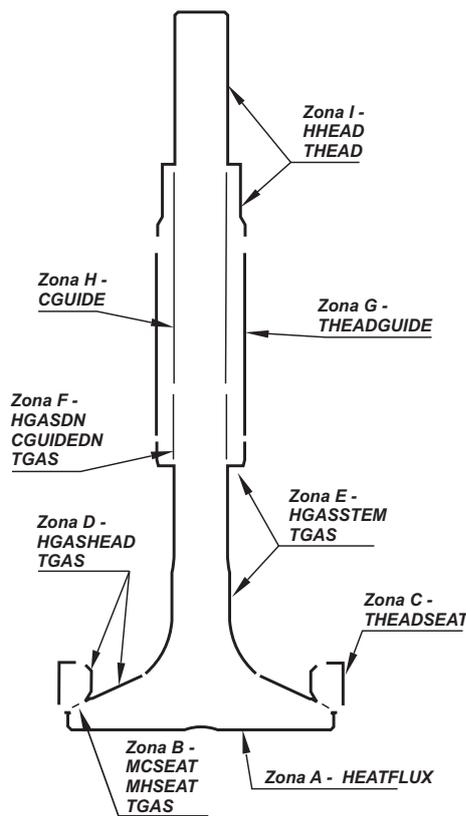


Figura 5.9: Coeficientes de transferencia de calor, conductancias de contacto y temperaturas de referencia para el modelo de elementos finitos utilizado.

vástago de la válvula y la guía, y en ella se aplica un coeficiente de convección que surge de un promediado en el tiempo del coeficiente de convección con el gas y del contacto con la guía. La zona I es también de convección.

5.3.2. Simulación numérica

A partir de los resultados obtenidos con análisis térmicos transitorios, se aprecia que la variación de temperatura a lo largo de un ciclo trabajo en cualquier punto del dominio es relativamente baja (en los puntos de la superficie es menor al 2% del valor medio de la temperatura, mientras que en puntos internos es aun inferior). Siendo estos valores de variación inferiores al error estimado, se concluye que la influencia de un comportamiento cíclico de la temperatura pueden obviarse, en otras palabras, para el análisis de calibración de parámetros y problemas térmicos, es posible analizar el problema en forma estacionaria.

Mediante simulación numérica a través del MEF, se obtuvo la distribución de temperatura del modelo en todos sus puntos. Se ajustaron los parámetros de conductancias y coeficientes de transmisión pelicular hasta lograr una buena aproximación entre las temperaturas obtenidas de la simulación y las mediciones efectuadas en forma experimental por medio de las válvulas testigo. La Fig. 5.10 muestra los registros de temperaturas de una válvula testigo ensayada en la máquina VTR y compuesta

del material H854 [CBR+08]. Un modelo de MEF axisimétrico fue propuesto para

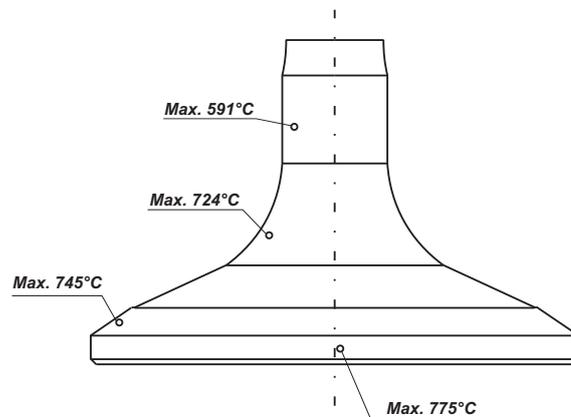


Figura 5.10: Temperatura de una válvula testigo de la máquina de ensayos.

las simulaciones. La topología de la malla se muestra en la Fig. 5.11. Debido a que los puntos de interés se encuentran en la zona del cuello y del asiento, una discretización más fina respecto del resto de la válvula fue aplicada en estos sectores.

La tabla 5.1 muestra los valores numéricos obtenidos para los coeficientes de transferencia de calor y la tabla 5.2 los valores de las conductancias. En la tabla 5.3 se detallan las temperaturas de referencias que han sido adoptadas. El valor de flujo impuesto para la zona **A** fue de 240.000 W/m^2 .

Coefficientes	Valores Numéricos [$\text{W/m}^2\text{°C}$]
HGASHEAD	20
HGASSTEM	70
HHEAD	20
MHSEAT	220
HGASDN	10

Tabla 5.1: Coeficientes de transferencia de calor obtenidos.

Conductancias	Valores Numéricos [$\text{W/m}^2 \text{ °C}$]
CGUIDE	130
MCSEAT	3000
CGUIDEDN	30

Tabla 5.2: Conductancias obtenidas.

La Fig. 5.11 muestra la distribución de temperatura obtenida en la cabeza de la válvula, zona de mayor interés, con resultados que se ajustan relativamente bien a los valores experimentales determinados mediante el uso de una válvula *testigo* (ver Fig. 5.10). El error relativo entre las temperaturas del modelo numérico y las medidas en forma experimental se muestran en la tabla 5.4. Los parámetros obtenidos del modelo térmico son los que se utilizan en adelante para realizar los análisis dinámicos en los modelos termomecánicos.

Temperaturas de Referencia	Valores Numéricos [°C]
THEADSEAT	350
THEADGUIDE	320
TGAS	350
THEAD	320

Tabla 5.3: Temperaturas de referencia adoptadas.

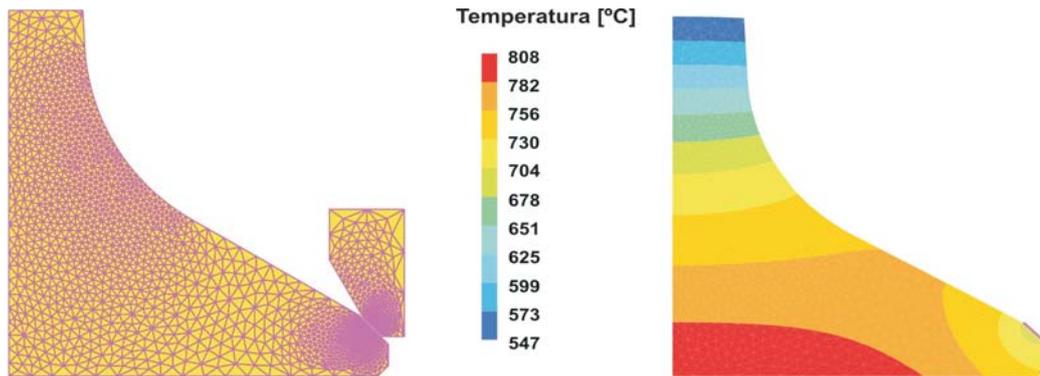


Figura 5.11: Triangulación y temperaturas obtenidas por medio del MEF.

5.4. Análisis termomecánico de una válvula en la máquina de ensayos

Las tensiones mecánicas desarrolladas durante el ensayo son de naturaleza tridimensional y variables en el tiempo, por lo que un modelo axisimétrico no sería lo suficientemente preciso para una simulación de las tensiones que se producen a lo largo de un ciclo de trabajo. Una primera aproximación para resolver el problema de determinación de las tensiones máximas que actúan en una válvula, es a través de un análisis estático, aunque puede obtenerse una mejor aproximación mediante una simulación dinámica tridimensional. Específicamente, interesa conocer las tensiones en la zona de transición entre la cabeza y el vástago de la válvula, donde generalmente se producen roturas por fatiga. Para reducir el costo computacional, se analiza sólo el instante correspondiente al asentamiento de la válvula.

Medición Experimental [°C]	Modelo Numérico [°C]	Error [%]
591 (Zona del cuello)	587°C	0.99
724 (Zona de transición cabeza)	742°C	1.02
745 (Zona de asiento de la válvula)	724°C	0.97
775 (cabeza de la válvula)	800°C	1.033

Tabla 5.4: Diferencia de temperaturas entre el modelo numérico y el experimental.

5.4.1. Definición del problema mecánico

El estudio de las tensiones mecánicas y de las de origen térmico en un sólido continuo se representa por un modelo matemático compuesto por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que plantea el equilibrio de fuerzas en las direcciones coordenadas consideradas. Los problemas de elasticidad suelen expresarse en términos de una variable de campo que en general es el desplazamiento, expresado como $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, donde t corresponde a un instante de tiempo.

El problema se reduce a encontrar una solución a una ecuación diferencial en derivadas parciales expresada en términos de los desplazamientos, tal que satisfaga las condiciones de contorno y los diferentes casos de carga del problema que se requiere resolver. En forma matemática, el problema consiste en: *hallar $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ tal que:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] + \mathbf{b} - \nabla T(3\lambda + 2\mu)\alpha &= \rho\ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde α es el coeficiente de dilatación del material y \mathbf{b} la fuerza de cuerpo. Cabe mencionar que las constantes de Lamé, λ y μ , son función de la temperatura. Una descripción de la Ec.(5.3) utilizando el MEF puede encontrarse en [ZT00].

Con el objeto de estudiar las tensiones y desplazamientos que se generan en este componente durante el evento de asentamiento, se realizó un análisis termomecánico dinámico por medio del MEF utilizando la curva de velocidad de asentamiento de la Fig. 5.8 para una velocidad de rotación de 2500 rpm. Es claro que la dificultad y costo computacional de un modelo dinámico es superior al de un estático, pero permite evaluar la historia de las tensiones a lo largo del tiempo y comparar los resultados obtenidos, por ejemplo, con algún criterio de fatiga multiaxial [CCR06].

Las condiciones de borde utilizadas para las simulaciones numéricas se detallan a continuación siguiendo las referencias de la Fig. 5.12.

- El vástago de la válvula está en contacto con el seguidor.
- El seguidor se mueve con velocidad constante, igual a la velocidad de asentamiento obtenida con el modelo descrito en la Sec. 5.2.2.
- El asiento está empotrado en sus superficies externas.
- El vástago tiene impuesto una velocidad inicial igual a la del seguidor.
- El resorte de retorno es dividido en ocho resortes conectados en serie. La masa de cada uno de ellos se ubica en cada nodo.
- Los resortes se encuentran pre-cargados.

5.4.2. Integración temporal

Debido a la necesidad de resolver un problema dinámico no lineal para la obtención de tensiones y desplazamientos variables en el tiempo, la selección de algoritmos apropiados de integración temporal con un adecuado paso de tiempo condicionan sustancialmente la convergencia del análisis y la precisión de los resultados. Algoritmos como el HHT poseen una gran oscilación numérica en alta frecuencia. Sin

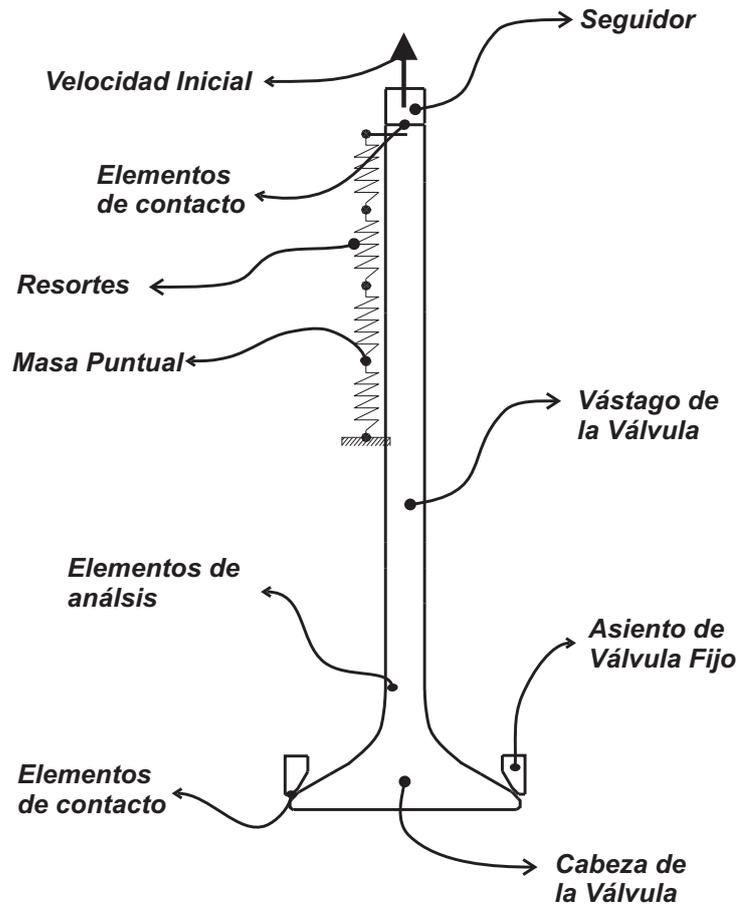


Figura 5.12: Componentes y condiciones de borde del modelo

embargo, el denominado método α generalizado permite controlar la disipación numérica amortiguando los modos espurios de alta frecuencia [CH93].

La ecuación que representa la dinámica de un sistema estructural está dada por:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (5.4)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son la matriz de masa, de amortiguamiento y de rigidez, respectivamente, \mathbf{F} es el vector de fuerzas externas, \mathbf{x} es el vector de desplazamiento o vector de incógnitas, y el punto como superíndice indica la diferenciación con respecto al tiempo. Las condiciones iniciales vienen dadas por:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{d}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}, \quad (5.5)$$

donde \mathbf{d} y \mathbf{v} son los vectores de desplazamiento y velocidad inicial respectivamente. Los algoritmos de integración temporal tienen la siguiente forma: \mathbf{d}_n , \mathbf{v}_n y \mathbf{a}_n son aproximaciones dadas a $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t_n)$ y $\ddot{\mathbf{x}}(t_n)$, respectivamente. Luego, \mathbf{d}_n y \mathbf{v}_n se obtienen a partir de combinaciones lineales de \mathbf{d}_{n+1} , \mathbf{v}_{n+1} , y \mathbf{a}_{n+1} . Luego es necesaria una ecuación adicional para determinar \mathbf{a}_{n+1} . Esta ecuación representa una versión modificada de la Ec.(5.4) de balance. Los algoritmos de integración temporal se definen para formas específicas de los desplazamientos y velocidades que modifican la

ecuación de balance de manera apropiada. Para el caso del algoritmo α generalizado, la ecuación de balance se expresa como:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{F}(t_{n+1-\alpha_f}), \quad (5.6)$$

con,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{a}_{n+1} \right], \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}], \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{d}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f) \mathbf{v}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{v}_n, \\ \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} &= (1 - \alpha_m) \mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m \mathbf{a}_n, \\ t_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_m) t_{n+1} + \alpha_f t_n. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Con valores apropiados de γ y β , si $\alpha_m = 0$ el algoritmo se reduce a un método HHT- α , $\alpha_f = 0$ produce el método WBZ- α , y con $\alpha_f = \alpha_m = 0$ se obtiene un algoritmo de la familia Newmark. El α generalizado es un método de precisión de segundo orden si:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f, \quad (5.9)$$

y es incondicionalmente estable cuando:

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m). \quad (5.10)$$

El radio espectral ρ_∞ es una medida de la disipación numérica, un valor pequeño del radio espectral corresponde a una mayor disipación. El amortiguamiento en alta frecuencia es en general deseable, y debería ser controlable para no introducir un excesivo amortiguamiento en la región de baja frecuencia. En términos del radio espectral, un algoritmo con estas condiciones se encuentra cercano a la unidad. Los coeficientes del algoritmo en términos del radio espectral vienen dados por las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}. \quad (5.11)$$

Mediante un correcto valor del radio espectral los modos espurios pueden ser amortiguados. Además, cuando se resuelven problemas altamente no lineales, como el caso de impacto, se ha demostrado que la disipación numérica mejora la convergencia de los algoritmos de resolución [CH93]. No obstante la adición de una disipación excesiva no debería incurrir en pérdida de precisión o en la introducción de un excesivo amortiguamiento en los modos de baja frecuencia.

5.5. Resultados numéricos

Un nuevo diseño de válvula fue propuesto para evaluar su comportamiento a fatiga en la máquina de ensayos VTR, empleando las curvas de fatiga tensión vs.

número de ciclos a 600°C del material H854, (ver Fig. 5.13) obtenida en la máquina de ensayos de fatiga ultrasónica. Las dimensiones de la geometría de la válvula se muestran en el Apéndice D.

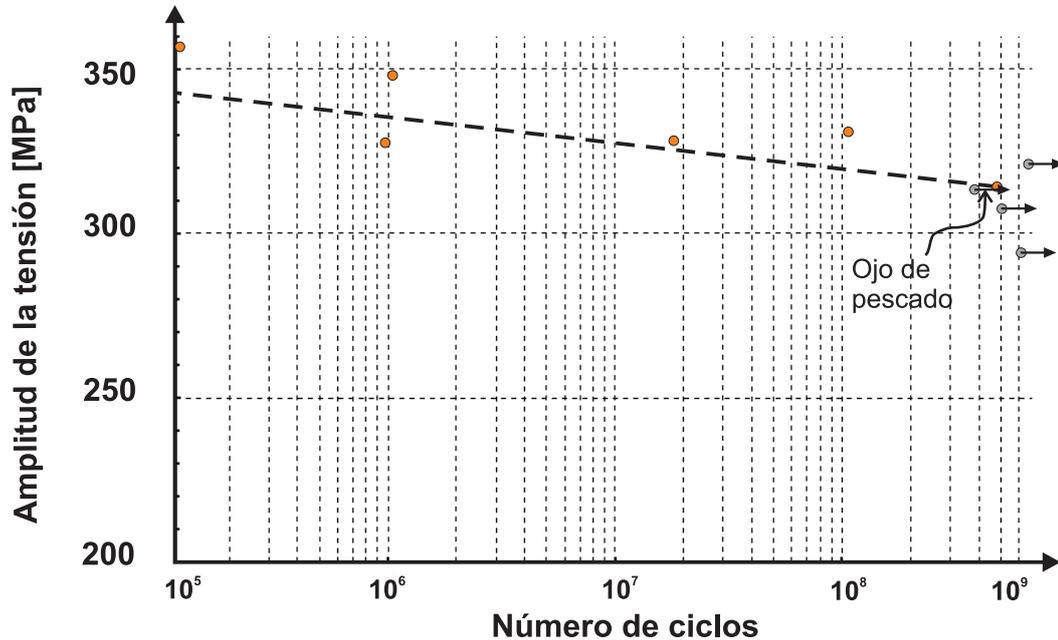


Figura 5.13: Curva de fatiga: tensión vs. número ciclos obtenida en la máquina de fatiga ultrasónica a 600°C.

Por medio del MEF, y con el cálculo de velocidad de asentamiento de la máquina, presentado previamente en la Sec. 5.2.1, se estudiaron las tensiones que se generan en una válvula durante el proceso de asentamiento. Para la simulación se han tenido en cuenta los efectos térmicos y un comportamiento del material elástico lineal. La Fig. 5.14 muestra un detalle de la topología de la malla empleada. Como se puede apreciar, fue necesaria una reducción en el tamaño de los elementos en la zona del cuello y asiento para una mejor aproximación a las tensiones buscadas. Las condiciones de borde e iniciales son las mismas que se presentaron en la Sec. 5.4.1.

Los primeros análisis fueron desarrollados con un asentamiento concéntrico, es decir, la válvula y asiento se encuentran perfectamente alineados en sus ejes longitudinales. Luego, se llevaron a cabo simulaciones con una desalineación del asiento, o de asentamiento excéntrico.

El diseño final de la válvula fue obtenido mediante reducciones en el diámetro del cuello (o zona de transición) de una válvula convencional hasta estimar que con el área resistente en el entallamiento se genere una tensión de 350 MPa, un valor ligeramente superior al de endurencia, ver Fig.5.13.

Luego, la Fig. 5.15 muestra la tensión en la dirección axial desarrollada en los elementos más solicitados que se encuentran ubicados en la zona del cuello. La curva presenta un pico máximo de 350 MPa, aproximadamente, al momento de producirse el asentamiento y luego continúa amortiguándose con algunas oscilaciones de amplitud cada vez menor, hasta un valor igual al generado por el resorte cuando

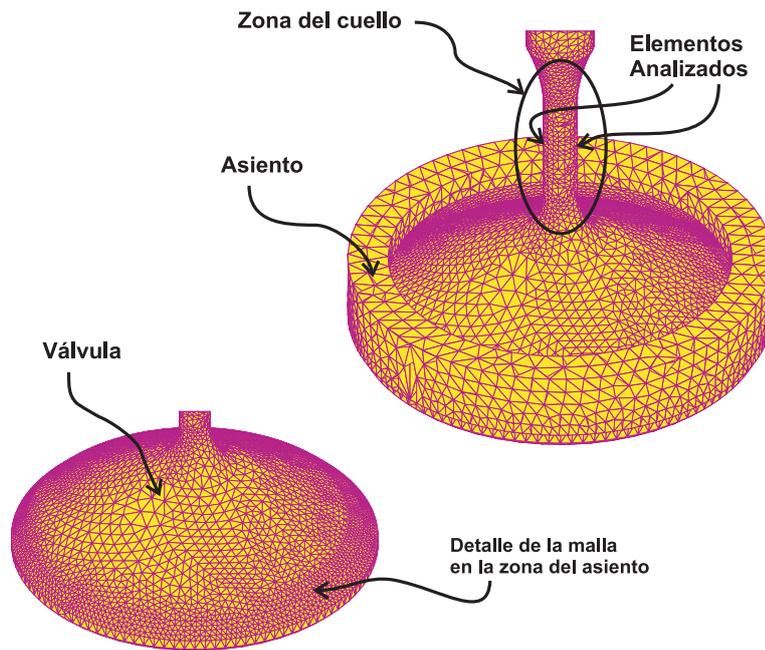


Figura 5.14: Modelo tridimensional de válvula. Topología de malla.

la válvula está cerrada. Esta tensión variable en el tiempo es la que contribuiría luego de un determinado número de ciclos de trabajo, a una degradación en las propiedades del material culminando con la rotura final del componente por fatiga. El paso de tiempo empleado en las simulaciones fue reducido, $\Delta T_{min} = 1 \times 10^{-7}$, para

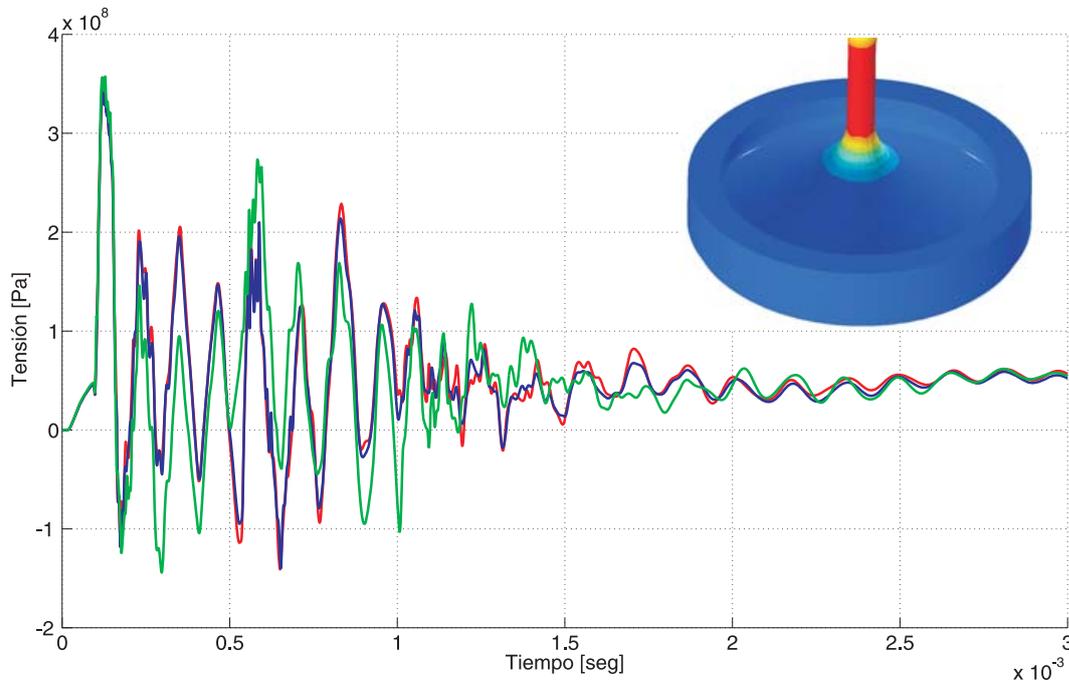


Figura 5.15: Evolución de la tensión en la dirección axial en la zona de sección reducida.

capturar las armónicas de alta frecuencia generadas por el impacto entre la válvula y el asiento. Sin embargo, un paso de tiempo muy pequeño produce importantes oscilaciones numéricas que en el problema real no ocurren; por ende, es deseable tener control sobre la disipación numérica en los modos de alta frecuencia.

Como en este modelo no se ha incluido la fricción de contacto, los efectos disipativos que se producen en este componente se han tenido en cuenta introduciendo amortiguamiento numérico a través del algoritmo de integración temporal. En este sentido, una tarea importante fue la determinación de la relación entre los parámetros de integración del algoritmo α generalizado, presentado anteriormente en la Sec. 5.4.2. Tras realizar una serie de pruebas se adoptó un radio espectral $\rho_\infty = 0.0101$ con un coeficiente $\alpha_f = 0.01$.

Atendiendo a los defectos constructivos que podrían generar flexión en el vástago de la válvula, se analizó el efecto de una excentricidad lateral del asiento, desplazándolo 0.06 mm en dirección horizontal, pero manteniendo la válvula sin inclinación a lo largo de su eje vertical, ver Fig. 5.19. La Fig. 5.17 muestra la tensión desarrollada en la dirección axial en los elementos del cuello, donde se destaca una flexión inicial producto del asentamiento excéntrico, no observada en la Fig. 5.15. Sin embargo, el pico máximo de tensión oscila en el mismo valor que el del caso con asentamiento concéntrico.

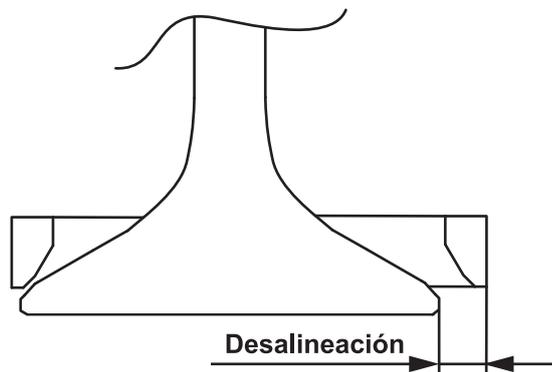


Figura 5.16: Excentricidad lateral.

5.5.1. Análisis modal

Debido a que el diseño generado posee un vástago delgado en la zona del cuello, se analizó su frecuencia propia de resonancia con el objetivo de conocer si la frecuencia de excitación exterior se encontraba cercana a la frecuencia natural de la válvula pudiéndose originar resonancia. La Fig. 5.18 muestra el primer modo de oscilación de la válvula con una frecuencia natural de 653.7 Hz. El árbol de leva de la máquina gira con una velocidad de 2500 rpm, es decir 41.6 Hz, por lo tanto, su frecuencia propia de vibración se encuentra lejana a la de excitación, y una rotura por resonancia no es esperable.

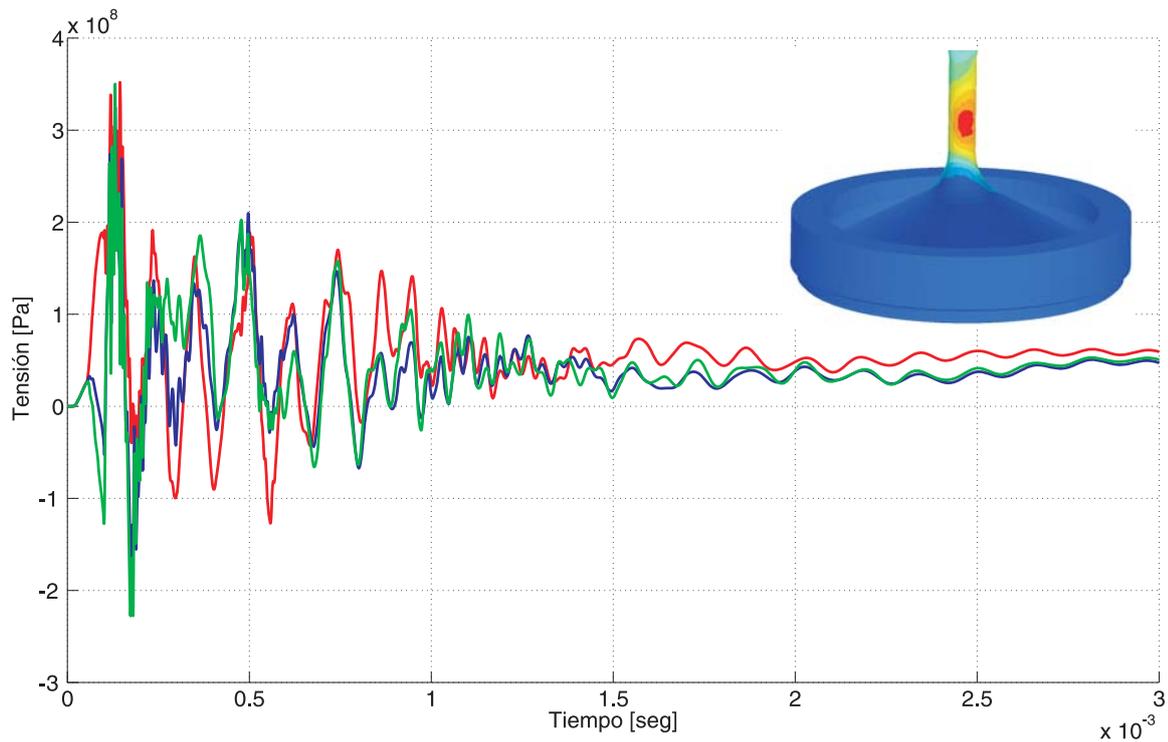


Figura 5.17: Evolución de la tensión en la dirección axial en la zona de sección reducida.

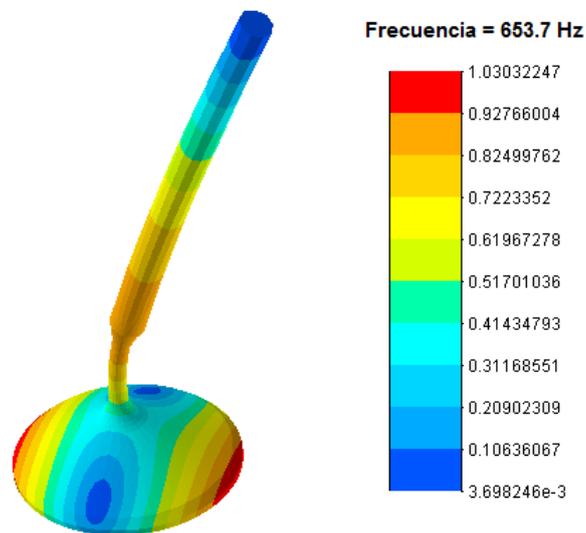


Figura 5.18: Análisis modal de la válvula ensayada en la VTR.

5.5.2. Análisis a fatiga por medio de un criterio de fatiga multiaxial

Por medio del criterio de Crossland es posible analizar desde otra óptica el diseño a fatiga de la válvula. Si bien existen muchas formulaciones como las que se han

mencionado en la Sec. 3.1.4; y que podrían haber sido seleccionados para predecir los efectos de fatiga en este componente, el criterio de Crossland sigue siendo muy utilizado en la actualidad y, dado que con este diseño particular de válvula, el estado de cargas no es sustancialmente complejo, es decir, están fase y son proporcionales, el criterio de Crossland es completamente suficiente para un primer análisis y ensayo experimental.

El límite de endurancia en tracción-compresión a 600°C para el H854 es de $\sigma_{-1} = 340$ MPa aproximadamente, tal como lo muestra la curva de la Fig. 5.13. Considerando el hecho que para la mayoría de los aceros de alta resistencia el límite de endurancia en tensión σ_{-1} es de alrededor 0.599 del de torsión τ_{-1} [PDG⁺97, FMP74, NK45], entonces, para el caso del H854 $\tau_{-1} = 203.67$ MPa. De este modo es posible calcular las constantes a y b que intervienen en el criterio de Crossland. Sus valores numéricos son,

$$a = \frac{\tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sigma_{-1}}{3}} = 0.0649492, \quad (5.12)$$

$$b = \tau_{-1} = 203.66.$$

Para el cálculo de $\sqrt{J_{2a}}$, se utiliza: i) la curva de la evolución de la tensión axial mostrada en la Fig. 5.17 definida como función de las tensiones normales, esto es $g(\sigma_{\text{normal}})$, ii) las reglas de transformación Ec.(2.36) y iii) el algoritmo incremental presentado en la Sec. 2.

Para este diseño particular, el efecto de las tensiones cortantes es muy inferior a la tensión desarrollada en la dirección axial. De este modo, el tensor de tensiones para el elemento más solicitado del vástago tiene la siguiente forma,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} g(\sigma_{\text{normal}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Luego, es posible obtener su tensor desviador y la presión hidrostática máxima. Mediante el algoritmo incremental se obtiene la circunferencia que circunscribe al camino de las tensiones. La Fig. 5.19 muestra en rojo, el camino de las tensiones y en azul la circunferencia que lo circunscribe con un radio igual a $\sqrt{J_{2a}} = 284.052$. La desigualdad del criterio de Crossland toma los siguientes valores numéricos,

$$\sqrt{J_{2a}} + a p_{h,max} \leq b \Rightarrow 306.784 \leq 203.66, \quad (5.14)$$

y por lo tanto, es esperable una rotura por fatiga, ya que no se verifica la desigualdad. Este hecho concuerda con un análisis de tensiones uniaxial donde, fácilmente se puede observar que el pico máximo de la curva de evolución de la tensión se encuentra por encima de la curva de endurancia.

5.6. Discusión

Con el diseño obtenido en base a los resultados numéricos que se mostraron anteriormente, ver Fig. 5.20, se procedió a ensayar el diseño propuesto en la máquina

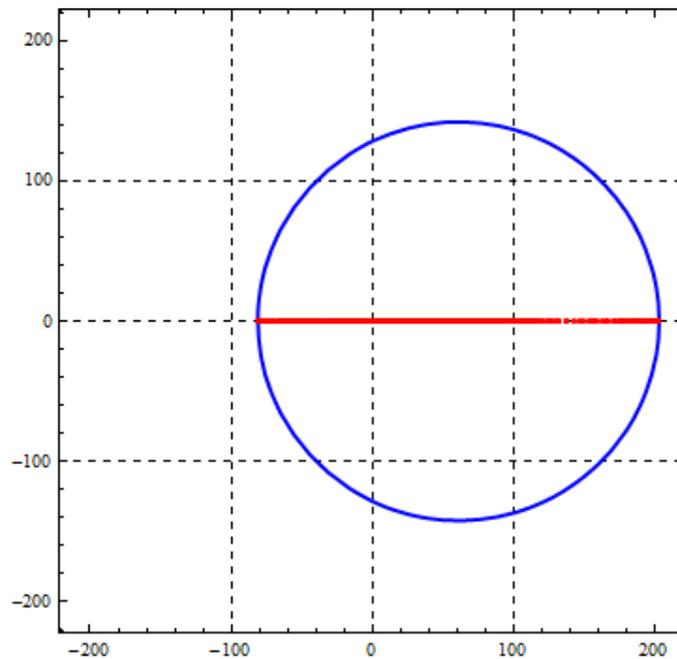


Figura 5.19: Análisis modal de un válvula de la máquina de ensayos.

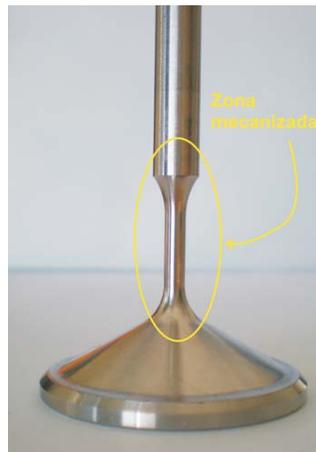


Figura 5.20: Modificación de la válvula en la zona de transición entre el cuello y el vástago.

VTR. La válvula estuvo en funcionamiento a una temperatura de 600°C en la zona del cuello alcanzando una cantidad de 3×10^6 ciclos. Se observó que, la válvula giraba durante el ensayo, condición que no se ha modelado numéricamente. Tal como reporta Jones [Jon80], este proceso ayudaría a aumentar la vida a fatiga del componente.

Finalmente, la válvula no sufrió roturas ni fisuras luego de estar en funcionamiento por más de 20 hs. a 2500 rpm en la máquina VTR. Las Figs. 5.21 y 5.22, muestran la válvula luego de haber sido ensayada. Los diferentes colores que se aprecian son producto de los efectos de la oxidación debido a las elevadas temperaturas desarrolladas durante el ensayo. Las mediciones realizadas de la longitud total de la

válvula, no indicaron fenómenos de plasticidad.



Figura 5.21: Imagen de la válvula luego de haber sido ensayada en la VTR.



Figura 5.22: Imagen de la cabeza de la válvula luego de haber sido ensayada en la VTR.

5.7. Conclusiones

En este trabajo se detallan resultados numéricos y experimentales de una válvula de motor de combustión interna. Mediante un análisis tridimensional de elementos finitos fue posible estudiar el proceso de asentamiento concéntrico y excéntrico. Se mostró que el corrimiento horizontal del asiento, genera una flexión al momento del impacto, pero el valor del pico máximo de tensión se mantiene igual al modelo de asentamiento sin excentricidad.

Las temperaturas obtenidas mediante el modelo térmico desarrollado en la Sec. 5.3.2 y con los parámetros de transferencia térmica propuestos, ha mostrado una buena correlación con los resultados experimentales en la válvula testigo.

5. FATIGA EN VÁLVULAS DE MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA

El modelo dinámico del tren de válvulas fue validado satisfactoriamente con los resultados obtenidos en forma experimental.

Se ha observado un gran desgaste en el asiento, $70\mu\text{m}$, lo que contribuye a un cambio en la luz de válvula y a la disminución de las tensiones desarrolladas.

El valor de tensión con el que se ha diseñado la válvula fue ligeramente superior a la curva de endurecimiento, con lo cual, el diseño propuesto se encuentra en la zona donde el material debería encontrar una rotura por fatiga. Según los resultados obtenidos mediante el cálculo del criterio de Crossland, una rotura sería esperable para el nivel de tensiones desarrolladas durante el proceso de asentamiento. Esto no concuerda con los resultados de los ensayos, donde no hubo evidencia alguna de rotura. Por lo tanto, para una afirmación de las conclusiones y discusiones presentadas en este capítulo, es necesario realizar una mayor cantidad de experimentos y mediciones en la VTR que hasta el momento no se ha podido materializar.

Parte II

EL PROBLEMA DE CONTACTO

Capítulo 6

Contacto mecánico

6.1. Estado del arte

La mayoría de las áreas de investigación que involucran la simulación numérica, actualmente tienen como objetivo incrementar la precisión y robustez de los códigos numéricos, reducir el costo computacional y los requerimientos de memoria. En este contexto se enmarcan los problemas relacionados con contacto. Debido a su fuerte no linealidad, en especial en aquellos casos en que se contempla fricción, resolver este tipo de problemas con el MEF presenta muchas dificultades, como ser: i) mal condicionamiento de las matrices; ii) susceptibilidad a inestabilidades numéricas; y iii) complejidad y costo de los algoritmos de búsqueda. A pesar de los esfuerzos realizados, la resolución de este tipo de problemas no ha alcanzado la misma precisión y robustez que otras aplicaciones del MEF a problemas no lineales.

Los principales problemas asociados a los algoritmos de contacto se asocian a los criterios de búsqueda y en los métodos utilizados para imponer las condiciones de contacto. El mejoramiento de los algoritmos en estas dos áreas conlleva un enorme impacto en la robustez y eficiencia de los códigos.

6.1.1. Modelo mecánico

Dos cuestiones diferentes pueden ser identificadas en el análisis de problemas de contacto. La primera está relacionada con el desarrollo de un modelo mecánico y una formulación matemática que caracterice el comportamiento de los cuerpos en contacto considerando grandes o pequeñas deformaciones. Una rigurosa formulación para problemas elásticos con pequeñas deformaciones puede ser encontrada en [KO88], en tanto que para problemas con grandes deformaciones se hallan en [AC91, SL92]. La segunda cuestión tiene que ver con la resolución específica del problema numérico. Asimismo, las formulaciones que se propongan deben ser consistentes para integrar el contacto con las ecuaciones clásicas de la mecánica del sólido, con el fin de evitar un tratamiento extremadamente sofisticado.

Durante el proceso de deformación de los cuerpos, se requiere de un conjunto de ecuaciones que satisfagan los principios de equilibrio y las características de todos los procesos termomecánicos involucrados. El conjunto de ecuaciones que definen

el modelo mecánico del problema es usualmente dividido en dos grupos: i) ecuaciones de equilibrio y condiciones de borde; y ii) ecuaciones constitutivas. El primer grupo garantiza el equilibrio del medio continuo y la compatibilidad con las condiciones de borde aplicadas. El segundo grupo establece la relación entre los campos de tensión y los de deformación, asociado con la configuración de equilibrio. Esta última es usualmente vinculada a un modelo constitutivo material. Para materiales metálicos, la deformación puede ser dividida en dos fases distintas. La primera corresponde a deformaciones elásticas, y se caracteriza por una relación lineal entre los campos de deformaciones y tensiones. La segunda fase se caracteriza por deformaciones elastoplásticas irreversibles descritas por diferentes criterios de fluencia [AOM04b, AOM04a, Lub90, SH98, AL06]. Además, en ciertos casos pueden ser incluidas propiedades anisótropicas en el comportamiento mecánico [YYCB99, GW02]. En esta Tesis, no se ha tenido en cuenta efectos de plasticidad en los ejemplos numéricos presentados.

6.1.2. Cinemática del contacto

La superficie de contacto entre dos cuerpos puede ser descrita por: i) funciones analíticas; ii) superficies paramétricas, NURBS, Splines, Bézier, subdivisión de superficies, interpolación de Clough-Tocher, etc.; iii) datos de puntos distribuidos y iv) elementos finitos, que definen una geometría por discretización de la zona de interés con una malla de elementos finitos. Cada una de estas estrategias presenta ventajas e inconvenientes, e imponen requerimientos específicos a las formulaciones. Un estudio comparativo de las diferentes estrategias mencionadas puede encontrarse en [San93, SM95, LS86].

A modo de resumen, puede decirse que el uso de funciones analíticas que representan la superficie de contacto, simplifican notablemente el tratamiento numérico y conducen a algoritmos de búsqueda más rápidos, pero su uso es limitado, pues presenta enormes dificultades para la descripción de geometrías complejas. Por su parte, las superficies paramétricas permiten una transferencia directa de la información desde los sistemas CAD, pero exigen algunos cuidados especiales por ejemplo, con datos de puntos distribuidos es imposible describir superficies verticales. El MEF permite la representación de cualquier geometría. No obstante, los algoritmos de búsqueda presentan un costo computacional más elevado, y la representación precisa de superficies curvas depende fuertemente del número de elementos utilizados, siendo exacto únicamente para un número infinito. A pesar de esto, el MEF es el método adoptado en la mayoría de los códigos utilizados en simulación numérica de la actualidad.

Para la descripción del desplazamiento relativo entre dos cuerpos en contacto con el MEF, uno es seleccionado como de referencia y el otro como esclavo; a esta estrategia se la denomina *master/esclavo* [HGB85]. El primer algoritmo desarrollado con esta idea asociaba a cada nodo de la superficie esclava un nodo de la superficie *master*, y por este motivo se los denomina algoritmos **nodo-nodo**. Este tipo de solución es aplicable únicamente a problemas de pequeñas deformaciones, pues tiene fuerte dependencia de la topología de la malla. Con posterioridad se desarrollaron los del tipo **nodo-segmento**, donde cada nodo esclavo se asocia a una zona de un

segmento *master* [HGB85].

En estos algoritmos se requiere comenzar la iteración de búsqueda identificando cada superficie de contacto. Esta selección depende del tipo de superficie de contacto y de la malla utilizada, es decir, si ambos son deformables y discretizados con elementos finitos de diferente dimensión, la superficie *master* debería ser aquella con la malla más gruesa, pues con la técnica *master/esclavo* no se verifica si la superficie *master* penetra a la esclava. De hecho, en problemas donde los cuerpos son deformables, esta estrategia puede dificultar la evaluación de las restricciones asociadas al problema [BN91, WN97]. El principal inconveniente de la estrategia nodo-segmento es que no se garantiza que una superficie plana transmita una presión de contacto uniforme a otra superficie plana [EB01]; en otras palabras, esta estrategia no supera los denominados *tests* de la parcela de contacto [ZDL09, TP91].

Los algoritmos nodo-segmento de doble pasada intentan evitar esta dificultad en la evaluación de las variables de contacto unilaterales manteniendo la simplicidad de la estrategia nodo-segmento. El algoritmo de búsqueda de contacto local se realiza para ambas superficies en el mismo incremento en dos pasos, esto es, considerando que la superficie esclava se transforme en *master* y viceversa [ZW99].

Otro algoritmo de aproximación es el denominado **segmento-segmento**, que supera las dificultades asociadas a los del tipo nodo-segmento integrando las restricciones relacionadas al contacto considerando más información que la de un simple nodo. La calidad de la solución depende del tipo de integración numérica seleccionada para evaluar las fuerzas de contacto [EB01]. Otros tipos de algoritmos emplean una interface de contacto intermedia sobre la cual se definen las variables de contacto. La efectividad del algoritmo depende de cómo sea definida dicha superficie [SWT85]. Este método forma las bases de los denominados métodos mortar, que permiten una evaluación eficiente de las presiones de contacto en mallas no conformes, sea en dos [BHL98, ML00] o en tres dimensiones espaciales, [YLM05, YL09, PL04, PTS08].

Los algoritmos de búsqueda en el MEF deben ser simultáneamente precisos y eficientes para una rápida identificación de las potenciales zonas de contacto. Los algoritmos de búsqueda se dividen en dos grandes grupos: los de búsqueda global y los de búsqueda local. Los algoritmos de búsqueda global deben identificar, para cada nodo del cuerpo deformable, todos los potenciales elementos o superficies de contacto. Los de búsqueda local identifican entre los candidatos seleccionados aquellos nodos que establecerán contacto. El propósito de la utilización de un algoritmo de búsqueda global es la de mejorar la eficiencia del código, minimizando el número de operaciones del algoritmo de búsqueda local. No obstante, debe ser lo suficientemente preciso para no excluir de la selección a cualquier elemento o superficie potencial de contacto [LBZ01]. Para el caso de auto-contacto, la complejidad de implementación de un algoritmo de búsqueda se incrementa notablemente. La mayoría de los algoritmos de búsqueda global se basan en la partición del dominio espacial en una estructura de parches (o su equivalente en inglés, *patches*) como fue propuesto inicialmente por Belytschko *et al.* [BL87], en tanto que otras formulaciones pueden ser encontradas en [ZN94, BO04, XFMN98, WCY01].

6.1.3. Métodos de regularización

La formulación variacional del problema de contacto puede escribirse como un problema de optimización sujeto a restricciones de desigualdad. Matemáticamente, el problema de contacto puede ser interpretado como un sistema físico definido por una desigualdad variacional. La característica más relevante es que su solución está asociada a restricciones físicas que a su vez, dependen directamente de la solución. Usualmente, la incorporación de variables duales apropiadas permite transformar la desigualdad en una igualdad variacional sin una pérdida de generalidad del problema. En otras palabras, resolver el problema de contacto corresponde a minimizar la energía total del sistema admitiendo que está sujeta a restricciones impuestas con desigualdad que se encuentran asociadas a la función de distancia normal y al deslizamiento.

El problema de contacto es no lineal y no diferencial. Por lo tanto, un método del tipo Newton-Raphson no podría ser aplicado directamente para resolver el problema de contacto. Una de las primeras técnicas usadas fue el método de eliminación directa de variables dependientes, en el cual la solución es iterativamente aproximada a través de una función prueba-error, también conocida como *trial-error*. Cuando todas las condiciones de contacto, incluyendo las de fricción, se satisfacen, el proceso iterativo finaliza. Este método es de fácil implementación, pero demanda de una solución exacta de los algoritmos de búsqueda, en caso contrario, aparecen problemas de convergencia y las penetraciones iniciales se mantienen en el resultado final [XDT03].

El método de penalidad, propuesto por Courant en 1948, aproxima una función sin restricciones adicionando a la función objetivo un término que está asociado a la violación de la restricción. Esta penalización es introducida por un parámetro numérico arbitrario conocido como factor de penalidad. Por medio de este método se obtiene un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son únicamente los desplazamientos. Es importante mencionar que la solución obtenida satisface las restricciones de manera aproximada. Únicamente para valores infinitos del parámetro de penalidad se obtiene la solución exacta, pero esto generaría un mal condicionamiento de las matrices con la subsecuente pérdida de precisión en los resultados. Por el contrario, valores muy bajos de la penalidad generan una penetración muy grande entre los cuerpos [KO88]. Cuando se utiliza este método en la resolución de problemas con fricción, algunos autores prefieren denominarlo método de las penalidades, ya que en la regularización de la ley de fricción de Coulomb el parámetro de penalidad es diferente al de la función objetivo [Ala93].

La formulación del problema de contacto relacionado a un problema de optimización no lineal permite el uso de métodos con una formulación matemática sólida. La mayoría de ellos son derivados de problemas de optimización donde las restricciones del funcional son igualdades. Sin embargo, dado que en el caso de contacto las restricciones son desigualdades, es necesario establecer alguna estrategia para obtener un funcional con restricciones de igualdad. Basados en asumir que es posible resolver un problema sin restricciones, los métodos de regularización transforman el problema original, con restricciones de desigualdad, en una secuencia de problemas sin restricciones que converge a la misma solución que el problema original. Dicha

secuencia puede ser obtenida adicionando a la función objetivo, una función que penaliza la violación de la restricción en cada punto.

En el método de barrera, el problema sin restricciones se obtiene adicionando a la función objetivo un término que favorece la solución en la región admisible en detrimento de aquellas que están en el límite. Asociado a este método existe un parámetro numérico que especifica la severidad de la barrera y, consecuentemente, cuán cerca se encuentra el problema sin restricciones del original. Al igual que en el método de penalidad, cuando este parámetro tiende a infinito, la aproximación es más precisa [Lue84]. Debido a los problemas de convergencia, el método de barrera suele combinarse con un lagrangiano aumentado [SBS95].

El método de los multiplicadores de Lagrange asocia un problema de optimización sujeto a restricciones a un problema dual para el cual las incógnitas son los multiplicadores de Lagrange del problema original y los desplazamientos. Una desigualdad activa es tratada como una igualdad, excepto en la condición impuesta para los multiplicadores de Lagrange. Este método garantiza el cumplimiento total de las restricciones de contacto y por lo tanto, no se produce penetración entre los cuerpos. Como desventaja, la dimensión de las matrices de rigidez elemental y global se incrementan debido al uso de variables adicionales, los multiplicadores de Lagrange, a lo cual debe sumarse que la matriz de rigidez global puede presentar términos nulos en la diagonal [LO94].

Los métodos híbridos tratan de combinar las ventajas de los métodos de penalidad y los de multiplicadores de Lagrange. El primer método híbrido utilizado en contacto mecánico fue un lagrangiano perturbado, que introduce un término de regularización en el método de los multiplicadores de Lagrange, permitiendo una evaluación más precisa de las fuerzas de contacto [SBS95], a pesar de lo cual sigue siendo sensible al parámetro de penalidad [Wal95]. Esta sensibilidad se evita por medio del método del lagrangiano aumentado, originalmente propuesto por Esténe y Powell en 1969 y utilizado en problemas de optimización sujeto a restricciones con igualdad. La idea básica es adicionar penalización a las restricciones del lagrangiano para obtener una función objetivo convexa en la vecindad de la solución.

La principal ventaja de los métodos con lagrangianos aumentados es que permite obtener soluciones precisas satisfaciendo las restricciones de manera exacta para un amplio rango de parámetros de penalidad [SL92]. Además, las matrices jacobianas se encuentran mejor condicionadas que las obtenidas por medio del método de penalidad. Como desventaja, presenta un incremento en la dimensión del tamaño de las matrices, ya que a las incógnitas de los desplazamientos se suman los multiplicadores de Lagrange. Este método fue aplicado primero a problemas de contacto unilaterales y luego al caso de contacto con fricción [AC91]. Algunos autores suelen combinarlo con un algoritmo denominado Usawa, que resuelve el problema de equilibrio asumiendo un valor fijo para el lagrangiano aumentado [GL89]. Luego, la estimación para los multiplicadores del lagrangiano es actualizada y un nuevo problema de equilibrio es resuelto hasta que los multiplicadores alcanzan un valor por debajo de una tolerancia prefijada. Este procedimiento puede ser muy caro en la búsqueda de la solución [CH02] y no es ampliamente utilizado.

6.1.4. Algoritmos de integración

Los problemas de contacto se caracterizan por tres tipos diferentes de no linealidades: i) geométricas, resultante de la descripción cinemática; ii) material, asociada con los modelos constitutivos y iii) modelado de la fricción. Estas no linealidades contribuyen a inestabilidades numéricas y dificultades de implementación. Para abordar el problema es necesario recurrir a procedimientos incrementales, usando algoritmos de integración numérica robustos y estables. Los algoritmos generalmente aplicados se relacionan con dos posibles descripciones cinemáticas del problema: cuasi estática o dinámica.

En la formulación cuasi estática, los términos de inercia en la ecuación de equilibrio se desprecian. Los algoritmos de integración utilizados en esta formulación son en general implícitos. Éstos aseguran el equilibrio de la estructura en cada incremento de tiempo. La medida del incremento puede ser predefinida o automáticamente pre-seleccionada. Una reducción del paso de tiempo facilita la convergencia, a expensas de incrementar los tiempos y demandas computacionales [Tek00].

A pesar de las desventajas mencionadas, muchos autores desarrollan sus códigos de manera implícita en espera de que el incremento de la eficiencia y capacidades de las computadoras digitales inviertan esta situación [Tek00, Bat04].

El algoritmo más popular para la solución de problemas cuasi-estáticos es el de Newton-Rapshon. Este algoritmo requiere de una solución inicial para definir la dirección de búsqueda y la convergencia del método depende fuertemente de la solución inicial.

En formulaciones dinámicas, las ecuaciones de equilibrio contemplan los términos de inercia. Normalmente, los algoritmos de integración utilizados son del tipo explícitos y el proceso se divide en incrementos de pasos de tiempo, al igual que los cuasi estáticos.

En este capítulo no se presentan soluciones dinámicas en los ejemplos propuestos, razón por la cual no se desarrollará un estado del arte relacionado a estas cuestiones, y se deja al lector interesado que consulte la bibliografía relacionada con el tema [Tek00, RZOP01, FGW⁺95, Bat04], como así también el Cap.6 de esta Tesis, donde se hace una breve descripción de algoritmo de integración temporal implícito α generalizado.

6.1.5. Fricción

La primera formulación matemática del fenómeno de contacto con fricción fue propuesta hace más de 200 años en los trabajos de Coulomb, en 1779, y de Hertz en 1781. Sin embargo, a pesar de lo inmensos esfuerzos realizados para explicar la naturaleza física de la fricción, hasta el día de hoy no se encuentra un consenso universal sobre alguna teoría matemática o física que describa apropiadamente este complejo proceso. El hecho de que la fricción sea influenciada por la interacción de diferentes propiedades de los materiales también incrementa la dificultad en el modelado, por su fuerte correlación entre las propiedades reológicas y tribológicas [FMF⁺01]. El comportamiento tribológico es función de las interacciones entre una enorme cantidad de parámetros que cambian a lo largo del proceso de contacto,

siendo necesario realizar una gran cantidad de ensayos experimentales midiendo la presión de contacto, los niveles de deformación plástica, los cambios geométricos, la velocidad de deslizamiento, la rugosidad de las superficies y las condiciones de lubricación para la determinación de valores globales para los coeficientes de fricción. Debido a la cantidad de información requerida y la complejidad de los ensayos experimentales, es usual que haya una gran incertidumbre acerca de los resultados obtenidos.

La fricción es modelada en la mayoría de los casos por medio de la ley de Coulomb. Si bien esta ley es aproximada, ya que entra en juego sólo un coeficiente de fricción, permite describir relativamente bien el fenómeno para una amplia gama de aplicaciones [Ala93]. En esta ley, la fuerza de contacto normal es independiente de las de fricción y en ello radica su carácter no asociativo con un sistema de ecuaciones linealizadas no simétricas [Mor79]. La consideración de la fricción es la mayor responsable de la degradación de la convergencia global de los algoritmos de contacto [EKA97].

6.2. Descripción del problema de contacto

Sea el contacto entre dos cuerpos flexibles \mathcal{B}^α , con $\alpha = 1, 2$, utilizado para identificar los cuerpos como se indica en la Fig. 6.1. Cada uno de ellos, en la configuración de referencia y en el instante de tiempo $t = 0$, tienen un dominio Ω_0^α en \mathbb{R}^3 , con una superficie de frontera suave $\partial\Omega_0^\alpha$. Durante un determinado intervalo de tiempo $t \in [0, T]$, el movimiento de los cuerpos está dado por el mapeo $\chi^\alpha : \bar{\Omega}_0^\alpha \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\bar{\Omega}_0^\alpha = \Omega_0^\alpha \cup \partial\Omega_0^\alpha$. El mapeo χ^α transforma la posición de referencia $\mathbf{X}^\alpha \in \bar{\Omega}_0^\alpha$ en los puntos $\mathbf{x}^\alpha \in \bar{\Omega}^\alpha$ de la configuración actual Ω^α del cuerpo α , en el instante de tiempo t , donde $\mathbf{x}^\alpha = \chi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$. Luego, la frontera de los cuerpos $\partial\Omega^\alpha$ se divide en tres regiones disjuntas Γ_u^α para la condición de Dirichlet, Γ_σ^α para la condición de Neumann y Γ_c^α para la condición de contacto. Además, la función $\Psi : \mathcal{A}$ representa una parametrización de la superficie de frontera de contacto del cuerpo \mathcal{B}^2 , ver Fig. 6.1.

6.2.1. Ecuaciones de gobierno para el contacto entre dos cuerpos flexibles

La solución del campo de desplazamiento \mathbf{u}^α debe satisfacer los principios de balance de cantidad de movimiento y las condiciones de borde impuestas para cada uno de los cuerpos flexibles \mathcal{B}^α involucrados en el proceso de contacto.

La ecuación de equilibrio sin debilitar y las condiciones de borde de Dirichlet y Neumann pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}^\alpha] + \mathbf{b}^\alpha &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega^\alpha, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}^\alpha && \text{en } \Gamma_u^\alpha, \\ \boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha &= \bar{\mathbf{t}}^\alpha && \text{en } \Gamma_\sigma^\alpha, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ es el tensor de tensiones de Cauchy, \mathbf{b}^α es la fuerza de cuerpo, $\bar{\mathbf{t}}^\alpha$ una presión exterior y $\bar{\mathbf{u}}^\alpha$ un desplazamiento impuesto.

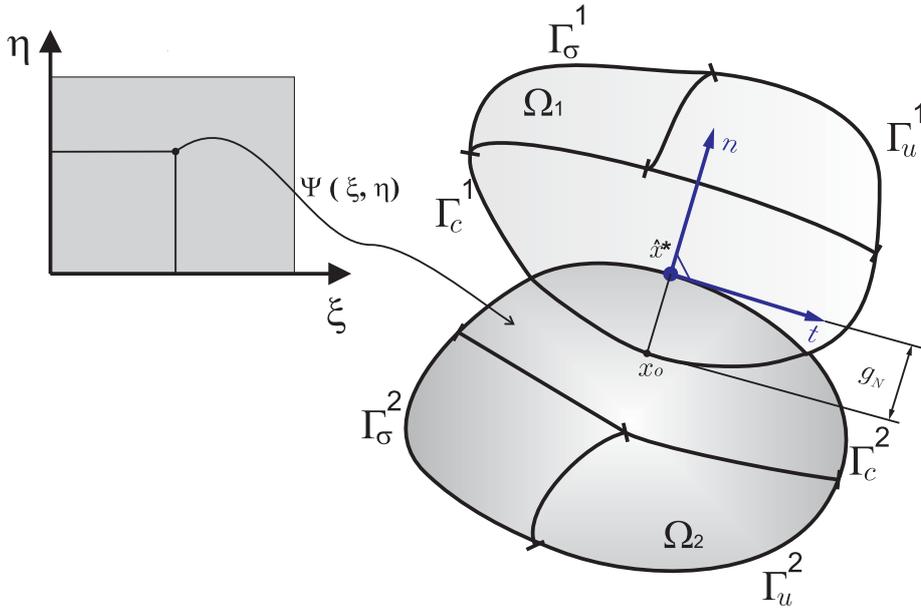


Figura 6.1: Notación utilizada para la descripción de los cuerpos en contacto. Únicamente se muestra la configuración actual.

El tensor de deformación ε^α , que tiene en cuenta efectos no lineales geométricos, se define por:

$$\varepsilon^\alpha = \frac{1}{2}[\text{grad}(\mathbf{u}^\alpha) + \text{grad}^T(\mathbf{u}^\alpha) - \text{grad}^T(\mathbf{u}^\alpha) \cdot \text{grad}(\mathbf{u}^\alpha)], \quad (6.2)$$

donde los símbolos de grad y div de las Ecs.(6.1, 6.2) denotan los operadores gradiente y divergencia evaluados en la configuración actual, respectivamente. La relación entre las tensiones y deformaciones se establece mediante la ley de Hooke, $\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathbf{C}^\alpha : \varepsilon^\alpha$, donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo de cuarto orden [Ogd84, Mal69].

La forma débil de la Ec.(6.1) sienta las bases matemáticas para la utilización del MEF. El problema de contacto se puede expresar como el siguiente problema de minimización,

$$\begin{aligned} \min \{ \Pi^{int,ext} + \Pi^c \} \\ \text{t.q. } g_N \leq 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde $\Pi^{int,ext}$ es la energía potencial total de las cargas interiores y exteriores, Π^c es la energía potencial de contacto y g_N la penetración. Por medio de espacios de desplazamientos apropiados para \mathbf{u}^α y para los desplazamientos virtuales $\delta\mathbf{u}^\alpha$, el principio de los trabajos virtuales para cada uno de los cuerpos en contacto puede ser escrito como:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}^\alpha, \delta\mathbf{u}^\alpha) = \delta\Pi^{int,ext}(\mathbf{u}^\alpha, \delta\mathbf{u}^\alpha) + \delta\Pi^c(\mathbf{u}^{\alpha,c}, \delta\mathbf{u}^{\alpha,c}) = 0, \quad (6.4)$$

donde los desplazamientos en la frontera de contacto Γ_c son denotados por $\mathbf{u}^{\alpha,c}$, Π es el potencial total. El primer término de la Ec.(6.4) representa el trabajo virtual de las cargas interiores y exteriores, cuya expresión es la siguiente:

$$\delta\Pi^{int,ext}(\mathbf{u}^\alpha, \delta\mathbf{u}^\alpha) = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : \delta\varepsilon - \rho\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u}^\alpha] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u}^\alpha ds, \quad (6.5)$$

mientras que el segundo término corresponde al trabajo virtual asociado con las tensiones de contacto y definido como:

$$\delta \Pi^c(\mathbf{u}^{\alpha,c}, \delta \mathbf{u}^{\alpha,c}) = - \int_{\Gamma_c} [\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}^{\alpha,c}] ds. \quad (6.6)$$

Para el tratamiento de las ecuaciones de contacto incluyendo efectos de fricción, es conveniente descomponer al vector tracción de Cauchy \mathbf{t} en una componente normal y otra tangencial a la superficie de contacto, esto es, $\mathbf{t} = \mathbf{t}_T + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. Mediante un procedimiento análogo se hace lo propio con el desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}^{\alpha,c} = \mathbf{n} \delta g_N^{\alpha,c} + \delta \mathbf{g}_T^{\alpha,c}$. De esta forma, la contribución del contacto puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\delta \Pi^c(\mathbf{u}^{\alpha,c}, \delta \mathbf{u}^{\alpha,c}) = - \int_{\Gamma_c} [t_N \delta g_N^{\alpha,c} + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T^{\alpha,c}] ds, \quad (6.7)$$

donde $t_N = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$. Las restricciones de contacto son impuestas por las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$g_N \leq 0, \quad t_N \geq 0, \quad t_N g_N = 0 \quad \text{en } \Gamma_c. \quad (6.8)$$

Estas ecuaciones imponen la condición que los dos cuerpos en contacto pueden separarse, pero no penetrar uno en el otro. En otras palabras, dos cuerpos pueden comprimirse entre sí pero sin penetración. De este modo hay dos situaciones posibles: i) cuando $g_N = 0$ y $t_N > 0$ hay contacto, mientras que ii) cuando $g_N < 0$ y $t_N = 0$ no hay contacto. La condición complementaria, $t_N g_N = 0$, impone que g_N y t_N no pueden ser simultáneamente nulos.

Las condiciones de KKT generan un principio de desigualdad variacional y, por lo tanto, es necesario recurrir a algún método de regularización que describa las cantidades de contacto necesarias para la implementación en un programa de elementos finitos.

El principio de los trabajos virtuales varía según el método de resolución, siendo los tres métodos más utilizados de representación del contacto los enumerados a continuación,

1. **Penalidad.** El desplazamiento es la única variable y no resulta dificultosa su implementación. Permite la penetración entre los cuerpos. El factor de penalidad ϵ es adoptado en forma relativamente arbitraria, aunque puede presentar problemas de mal condicionamiento. Su expresión matemática es la siguiente,

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) = \delta \Pi^{int,ext} + \frac{1}{2} \delta \int_{\Gamma_c} \epsilon g_N^2 ds = 0.$$

2. **Multiplicadores de Lagrange.** Evita el problema del mal condicionamiento y la penetración. Generan un incremento en la dimensión de las matrices. Su expresión matemática es la siguiente,

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \lambda) = \delta \Pi^{int,ext} + \delta \int_{\Gamma_c} \lambda g_N ds = 0.$$

3. **Lagrangiano Aumentado.** Combina el método de penalidad con el de multiplicadores de Lagrange. Su expresión matemática es la siguiente,

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \lambda) = \delta\Pi^{int,ext} + \frac{1}{2}\delta \int_{\Gamma_c} \{\epsilon g_N^2 + \lambda g_N\} ds = 0.$$

6.3. Contacto entre un cuerpo flexible y uno rígido

En esta sección se presenta una nueva aproximación para resolver problemas de contacto con fricción entre un cuerpo flexible y otro rígido en forma monolítica, utilizando un lagrangiano aumentado con la incorporación de dos multiplicadores de Lagrange. El método se basa en algunas de las ideas desarrolladas en el trabajo de Areias *et al.* [ACdSCA04].

Considerando el contacto entre un cuerpo rígido y otro flexible el problema del equilibrio es resuelto únicamente para el cuerpo deformable facilitando de manera considerable la formulación. Las condiciones de borde asociadas al contacto con fricción son definidas con las variables cinemáticas que describen el desplazamiento relativo de los cuerpos y las variables estáticas que aparecen durante cada interacción. Estas variables permiten definir restricciones por contacto unilateral y contacto con fricción. Para este último caso, la simplicidad de la teoría de contacto unilateral se pierde debido a las características no conservativas de las fuerzas involucradas en el proceso.

El problema de contacto en su forma débil, conjuntamente con las ecuaciones básicas de elasticidad fueron descritas en la Sec. 6.2.1. En lo siguiente, se presentarán las condiciones unilaterales para el problema de contacto con fricción. Tomando un dominio Ω de \mathbb{R}^d , $d = 2$ o 3 , ver Fig. 6.2. El dominio Ω , considerado flexible, se

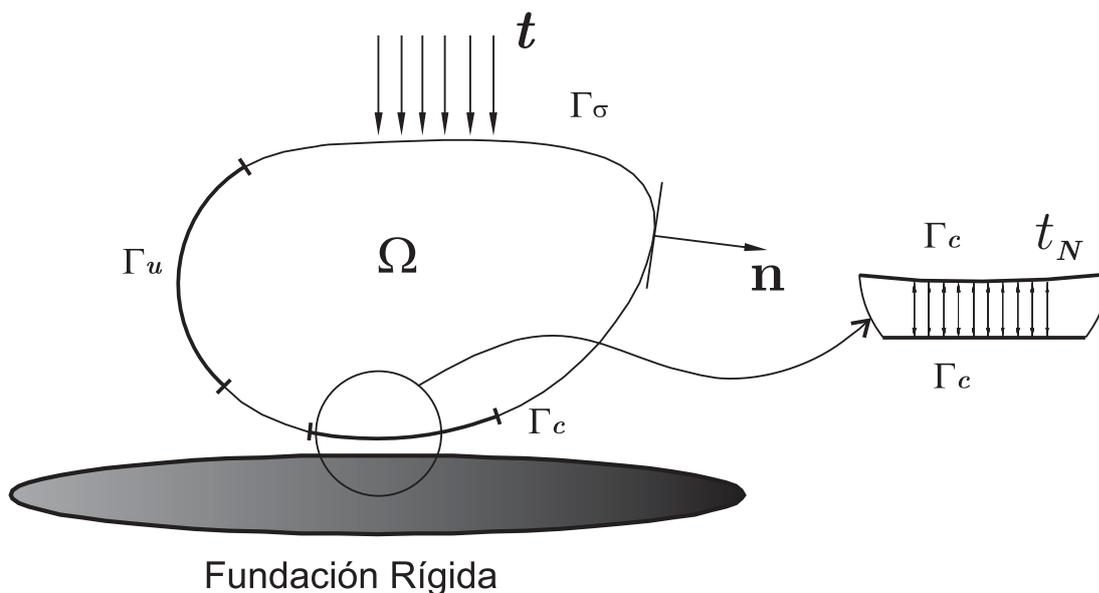


Figura 6.2: Contacto entre un cuerpo elástico y una fundación rígida.

encuentra en contacto con una fundación rígida. Luego, la frontera $\partial\Omega$ se divide en

tres fronteras disjuntas Γ_u , Γ_σ y Γ_c , sobre las cuales se definen las condiciones de contacto y las de borde enumeradas a continuación:

1. Condición de borde de Dirichlet, donde el cuerpo se fija en la frontera Γ_u ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_u, \quad (6.9)$$

2. Condición de borde de Neumann, sobre la frontera Γ_σ , donde se aplica el vector tracción,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{en } \Gamma_\sigma, \quad (6.10)$$

en la cual \mathbf{n} es el vector normal a la frontera y \mathbf{t} representa el vector tracción.

3. Condiciones de contacto sobre la superficie de contacto Γ_c . Se basan en la definición de restricciones con desigualdad,

$$\begin{aligned} g_N &\leq 0, \\ t_N &\geq 0 \quad \text{en } \Gamma_c, \\ g_N t_N &= 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Teniendo en cuenta un contacto normal, esto es, la superficie de contacto de los cuerpos son planas y paralelas, únicamente la componente normal del vector tracción, $t_N = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$ y la penetración entre los cuerpos g_N , son tenidas en cuenta.

6.3.1. Tratamiento de las desigualdades

Una expresión general del problema de contacto con restricciones de desigualdad en forma discreta puede ser expresado como,

$$\begin{aligned} \min \Pi(\mathbf{x}) \quad &\forall \mathbf{x}, \\ \text{t.q. } g_N(\mathbf{x}) &\leq 0, \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde $g_N(\mathbf{x})$ es la penetración, función de un determinado vector \mathbf{x} de dimensión n .

Utilizando la técnica de multiplicadores de Lagrange, el problema de la Ec.(6.12) puede ser resuelto introduciendo una variable λ , el multiplicador de Lagrange, asociado a g_N , la que transforma el problema en otro equivalente sin restricción,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \Pi(\mathbf{x}) + \lambda g_N(\mathbf{x}). \quad (6.13)$$

donde \mathcal{L} se lo conoce como lagrangiano del problema.

La técnica del lagrangiano aumentado usualmente se combina con un algoritmo denominado Usawa, ver [Ber84]. Este consiste en un algoritmo de doble lazo en el cual, el multiplicador de Lagrange λ se mantiene constante durante una iteración, resolviendo la forma débil del problema variacional en un lazo interno. Luego, dentro de un lazo externo, el multiplicador de Lagrange se actualiza a un nuevo valor. Para evitar la complejidad de implementación de este tipo de algoritmos, en esta Tesis se propone resolver el problema de contacto con una estrategia estándar iterativa Newton-Raphson monolítica.

6.3.2. Versión *slack* del lagrangiano aumentado

La desigualdad de la restricción puede transformarse en una igualdad, sin pérdida de generalidad del problema introduciendo un escalar s denominado *slack*, como comúnmente es citado en la literatura referida a problemas de contacto y de optimización. Reescribiendo la Ec.(6.12), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Pi(\mathbf{x}), \\ \text{t.q.} \quad & g_N(\mathbf{x}) + s = 0, \\ \text{y} \quad & s \geq 0. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Luego, un segundo multiplicador de Lagrange λ_1 es introducido en el caso que $s \leq 0$ y $\lambda_1 < 0$. De esta manera, el funcional aumentado incluyendo la variable *slack* y el segundo multiplicador de Lagrange resulta en:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, s, \lambda, \lambda_1) = \begin{cases} \Pi(\mathbf{x}) + (k\lambda\phi_1 + \frac{k}{2}\phi_1\phi_1 + k\lambda_1s), & \text{t.q. } c_1, \\ \Pi(\mathbf{x}) + (k\lambda\phi_1 + \frac{k}{2}\phi_1\phi_1) & \text{t.q. } c_2, \end{cases} \tag{6.15}$$

donde la restricción con la variable *slack* es definida como $\phi_1 = g_N(\mathbf{x}) + s$ y $c_1 = [s < 0 \text{ ó } s = 0 \text{ y } \lambda_1 < 0]$ y $c_2 = [s > 0 \text{ ó } s = 0 \text{ y } \lambda_1 \geq 0]$. Aquí la abreviatura t.q. indica *tal que*.

El lagrangiano aumentado mejora la relación de convergencia mediante la incorporación de un factor k , que adiciona convexidad al sistema. Los términos afectados por k en el lagrangiano aumentado pueden observarse en la Ec.(6.15).

Los algoritmos de búsqueda y la cinemática de contacto no son los objetivos que se plantean en esta sección, sino que se pondrá énfasis en la evaluación del desempeño del lagrangiano propuesto en la Ec.(6.15). Por esta razón, la formulación se encuentra limitada a problemas que involucren el contacto entre un cuerpo rígido y otro flexible, ambos con interfases de contacto planas. Más adelante, el lagrangiano propuesto en la Ec.(6.15) será utilizado en casos más generales donde los cuerpos involucrados en contacto sean flexibles y cuyas interfases de contacto no sean necesariamente planas.

Desplazamientos virtuales generalizados aplicados a la Ec.(6.15) generan un sistema de ecuaciones no lineales. La solución aproximada se define como $(\mathbf{x}^*, s^*, \lambda^*, \lambda_1^*)$, y es corregida en forma incremental como,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}, \\ s &= s^* + \Delta s, \\ \lambda &= \lambda^* + \Delta\lambda, \\ \lambda_1 &= \lambda_1^* + \Delta\lambda_1. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Luego de manipulaciones algebraicas, un sistema de ecuaciones linealizado es obtenido de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} k\mathbf{B}\mathbf{B}^T & k\mathbf{B} & k\mathbf{B} & \mathbf{0}^T \\ k\mathbf{B}^T & k & k & k \\ k\mathbf{B}^T & k & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta s \\ \Delta\lambda \\ \Delta\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}(\lambda + \phi_1)k \\ k\lambda_1 + k(\lambda + \phi_1) \\ k\phi_1 \\ ks \end{bmatrix} \text{ t.q. } c_1, \tag{6.17}$$

$$\begin{bmatrix} k\mathbf{B}\mathbf{B}^T & k\mathbf{B} & k\mathbf{B} & \mathbf{0}^T \\ k\mathbf{B}^T & k & k & 0 \\ k\mathbf{B}^T & k & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta s \\ \Delta\lambda \\ \Delta\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}(\lambda + \phi_1)k \\ k(\lambda + \phi_1) \\ k\phi_1 \\ k\lambda_1 \end{bmatrix} \quad \text{t.q. } c_2, \quad (6.18)$$

siendo $\Delta\mathbf{x}$, Δs , $\Delta\lambda$, $\Delta\lambda_1$, las soluciones del sistema de ecuaciones linealizado, Ecs.(6.17, 6.18). Aquí, \mathbf{B} es la matriz gradiente de las restricciones tal que $\mathbf{B} = \partial\phi_1/\partial\mathbf{q}$, y \mathbf{q} es el vector de grados de libertad generalizados ordenado de la siguiente manera: $\mathbf{q} = [\mathbf{x} \ s \ \lambda \ \lambda_1]^T$.

Las matrices de las Ecs.(6.17, 6.18), dependiendo de las condiciones c_1 y c_2 , representan la matriz tangente referida a la contribución del contacto, mientras que el miembro derecho corresponde al vector de fuerzas internas.

La solución del sistema de ecuaciones se obtiene por medio de un esquema iterativo monolítico Newton-Raphson, que difiere del propuesto por Areias *et al.* [ACdSCA04] en las condiciones de activación-desactivación de los multiplicadores de Lagrange. De esta manera, además de cumplir exactamente las restricciones, es posible evitar las condiciones de KKT con una reducida complejidad en la implementación computacional. Como desventaja, se obtiene un sistema con un incremento en la dimensión de las matrices.

6.3.3. Cinemática del contacto

La evaluación del vector normal a la superficie de contacto en un caso tridimensional se realiza a través de la división de la superficie en triángulos sencillos. Por ejemplo, en un elemento hexaédrico, la superficie de contacto se subdivide en dos triángulos planos tal como lo muestra la Fig. 6.3. Para computar el vector normal unitario \mathbf{n} , es necesario primero calcular los vectores tangenciales a la superficie del elemento triangular, esto es,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_1 &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, & \mathbf{a}_1 &= \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|}, \\ \bar{\mathbf{a}}_2 &= \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, & \mathbf{a}_2 &= \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde \mathbf{x}_i representa el vector de coordenadas nodales de la cara del elemento hexaédrico, ver Fig. 6.3. Luego, el vector normal unitario \mathbf{n} es:

$$\mathbf{n} = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|}. \quad (6.20)$$

6.3.4. Contacto con fricción

En el caso de tener en cuenta los efectos de fricción, aparecen restricciones de desigualdad tanto en la dirección normal como en la tangencial de la interfase de

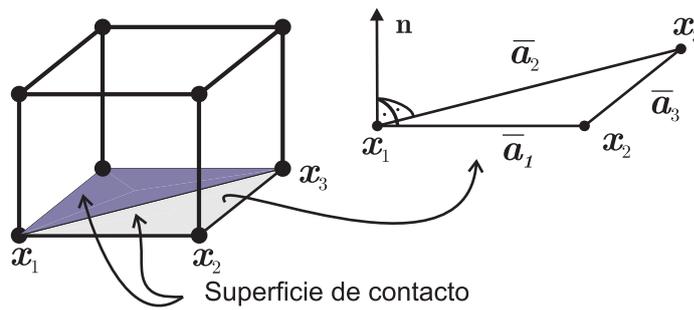


Figura 6.3: Definición del vector normal \mathbf{n} .

contacto de los cuerpos, con una alternancia de dos estados, uno denominado *sticking*, cuando no hay desplazamiento relativo de los cuerpos y el otro *sliding*, cuando existe un deslizamiento tangencial.

Cuando la fricción se asocia a problemas de contacto unilateral, se producen algunas dificultades numéricas relacionadas con el estado de *stick*, esto ocurre debido a que, en la ley de fricción de Coulomb, los desplazamientos son nulos para un nodo que se encuentra en estado de *stick* con un valor de rigidez infinita, resultando en una matriz tangente mal condicionada. Por otro lado, en una condición de *slip*, no hay relación entre la fuerza tangencial y el desplazamiento en la misma dirección, sino que la dependencia viene dada por el valor de la fuerza de contacto normal. La matriz de rigidez obtenida es no simétrica.

Cuando se tiene en cuenta la fricción, ésta presenta una complejidad adicional relacionada con el cambio de estado de *stick* a *slip*. En este sentido, todos los métodos descritos para evaluar la fuerza de contacto normal pueden ser aplicados directamente para estimar la fuerza de contacto tangencial. Sin embargo, para el estado de *slip*, la fuerza de fricción depende directamente del valor de la fuerza de contacto normal, y el carácter asociativo se pierde. El método más frecuentemente utilizado para resolver la condición de fricción es a través de un esquema de penalidad en conjunto con un algoritmo del tipo *return mapping* [SH98, Gia89]. La regularización de la ley de Coulomb se representa esquemáticamente en la Fig. 6.4. Ésta asume que

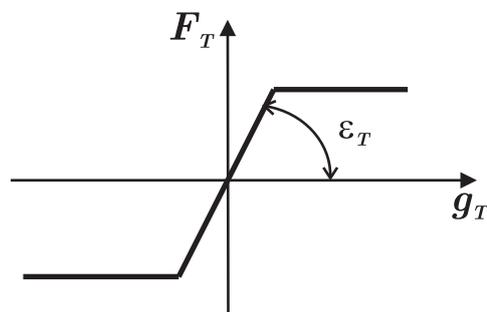


Figura 6.4: Regularización de la ley de Coulomb.

para el estado de *stick*, la fuerza tangencial depende linealmente de una pequeña cantidad de *slip* relacionada con un parámetro de penalidad ϵ_T . Esta aproximación es físicamente justificada por el hecho que las superficies de contacto no son per-

fectamente planas, presentando asperezas que se deforman plásticamente durante el contacto [KO88]. Basado en estas interpretaciones físicas, otras regularizaciones no lineales pueden ser propuestas introduciendo parámetros numéricos para ajustar el comportamiento tribológico del material [KO88, LS97].

A pesar de las interpretaciones físicas que justifican la regularización de la ley de Coulomb, el parámetro de penalidad para fricción debe ser pensado exclusivamente como un coeficiente numérico.

En general, el valor elegido para resolver el problema de contacto unilateral es diferente del seleccionado para la regularización de la ley de fricción. Trabajos como el de Joli y Feng ponen especial énfasis en la solución de problemas de contacto con fricción utilizando un método bi-potencial [JF08].

6.3.5. Contacto tangencial

Como se ha descrito en la Sec. 6.2.1, el vector tracción \mathbf{t} y el vector de desplazamiento \mathbf{u} se dividen en una componente tangencial y en otra normal de manera que la contribución del contacto en la ecuación del principio de los trabajos virtuales pueda ser escrita como:

$$\delta\Pi^c = \int_{\Gamma_c} [t_N \delta g_N + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T] ds = \sum_{e=1}^{\eta_c} \int_{\Gamma_c} [t_N \delta g_N + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T] ds, \quad (6.21)$$

donde se asume que hay η_c elementos de contacto activos. El desplazamiento tangencial \mathbf{g}_T , se descompone en una parte “elástica”, o de *stick* \mathbf{g}_T^{stick} , y otra “plástica”, o de *slip* \mathbf{g}_T^{slip} ,

$$\mathbf{g}_T = \mathbf{g}_T^{slip} + \mathbf{g}_T^{stick}, \quad (6.22)$$

análogo a la teoría de plasticidad. Luego, se introduce una ley constitutiva elástica para computar la parte de *stick*:

$$\mathbf{t}_T^{stick} = \varepsilon_T \mathbf{g}_T^{stick}, \quad (6.23)$$

donde ε_T denota una rigidez tangencial o, en otras palabras, ε_T representa un parámetro de penalización de la ley de fricción esquematizada en la Fig. 6.4.

De manera análoga a la teoría de plasticidad, se requiere de una ley de evolución de la parte de *slip* cuando ocurre un deslizamiento. Para evaluar este proceso, es necesario introducir una función potencial de *slip* $\Phi(\mathbf{t}_T)$. La ecuación constitutiva para el camino de *slip* es:

$$\dot{\mathbf{g}}_T^{slip} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{t}_T} = \dot{\gamma} \mathbf{e}_T, \quad \text{con} \quad \mathbf{e}_T = \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|}, \quad (6.24)$$

donde $\dot{\gamma}$ es el parámetro de consistencia.

Una vez que las fuerzas alcanzan cierto valor límite, no existe *stick* y consecuentemente ocurre el deslizamiento. La función potencial de *slip* puede ser expresada como:

$$\Phi(\mathbf{t}_T) = \|\mathbf{t}_T\| - \mu\lambda \leq 0, \quad (6.25)$$

y es equivalente al potencial plástico en el marco de la teoría de elastoplasticidad. Aquí, λ es el multiplicador de Lagrange representando la tensión de tracción de contacto y μ el coeficiente de fricción.

6.3.6. Descripción del algoritmo de *stick/slip*

Suponiendo que un cuerpo se desplaza sobre una superficie rígida de contacto Γ_c , el cambio de desplazamiento relativo es representado por $\Delta \mathbf{g}_T$. La Fig. 6.5 muestra una curva que describe el camino de un punto sobre el área de contacto, en tanto que en la misma figura, \mathbf{t}_v y \mathbf{t}_w son dos vectores unitarios ortogonales pertenecientes a Γ_c . La primera variación del desplazamiento en las direcciones \mathbf{t}_v y \mathbf{t}_w es obtenida a partir de $\Delta v = \mathbf{t}_v \cdot \Delta \mathbf{x}$ y $\Delta w = \mathbf{t}_w \cdot \Delta \mathbf{x}$, respectivamente. De esta manera, el vector

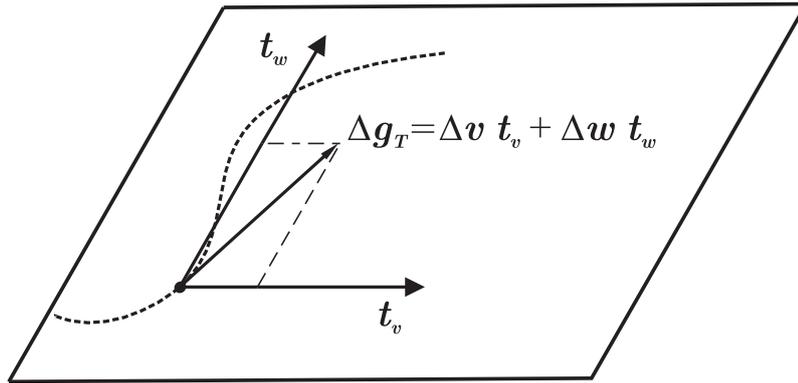


Figura 6.5: Definición del vector tangencial en la trayectoria de un punto sobre la superficie de contacto.

$\Delta \mathbf{g}_T$ en la superficie de contacto conforme puede expresarse como,

$$\Delta \mathbf{g}_T = (\mathbf{t}_v \otimes \mathbf{t}_v + \mathbf{t}_w \otimes \mathbf{t}_w) \Delta \mathbf{x}. \quad (6.26)$$

Discretizando los cuerpos en contacto dentro del intervalo de tiempo $t \in [0, T]$ el desplazamiento tangencial relativo en el paso de tiempo actual resulta en,

$$\Delta \mathbf{g}_{T_{n+1}} = (\mathbf{t}_{v_{n+1}} \otimes \mathbf{t}_{v_{n+1}} + \mathbf{t}_{w_{n+1}} \otimes \mathbf{t}_{w_{n+1}}) \Delta \mathbf{x}. \quad (6.27)$$

El siguiente paso es formular un algoritmo para la actualización de la componente tangencial del vector de tracción \mathbf{t}_T del tipo predictor-corrector, o *return mapping*, [SH98, WKOK01].

Asumiendo que \mathbf{t}_T está completamente definido a partir del paso anterior n , el vector tracción de prueba o *trial*, $\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}$, como se denominará de aquí en adelante, en el paso de tiempo actual $n + 1$ y en el estado de *stick*, está dado por:

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial} = \mathbf{t}_{T_n} + \varepsilon_T \Delta \mathbf{g}_{T_{n+1}}. \quad (6.28)$$

En el paso de tiempo actual, la Ec.(6.25) se reformula como:

$$\Phi(\mathbf{t}_{T_{n+1}}) = \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}\| - \mu \lambda_{n+1} \leq 0. \quad (6.29)$$

El estado de *slip* o de *stick* puede ser obtenido insertando la Ec.(6.28) del estado de *trial* en Ec.(6.29).

6.3 Contacto entre un cuerpo flexible y otro rígido

En el caso de *stick*, no hay desplazamiento tangencial y la relación elástica de la Ec.(6.23), junto con el potencial Φ , es utilizada para evaluar el estado de *trial* de la siguiente manera:

$$\Phi(\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\| \leq \mu\lambda_{n+1}. \quad (6.30)$$

El estado de *stick* es calculado como:

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{stick} = \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}. \quad (6.31)$$

Luego, el movimiento tangencial relativo es:

$$\mathbf{g}_{T_{n+1}}^{stick} = \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{stick}}{\varepsilon_T}. \quad (6.32)$$

De lo contrario, cuando el deslizamiento ocurre,

$$\Phi(\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\| > \mu\lambda_{n+1}. \quad (6.33)$$

Insertando el estado de *trial* en el estado de tiempo actual, Ec.(6.33), el vector tracción en el estado de *slip* es computado como,

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{slip} = \mu\lambda_{n+1} \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\|}. \quad (6.34)$$

Finalmente, el vector tangencial de *slip* en \mathbf{t}_{n+1} resulta en la siguiente expresión,

$$\mathbf{g}_{T_{n+1}}^{slip} = \mathbf{g}_{T_n}^{slip} + \frac{1}{\varepsilon_T} \left[\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\| - \mu\lambda_{n+1} \right] \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\|}. \quad (6.35)$$

Todas las variables deben ser actualizadas al final de cada iteración.

6.3.7. Vector de fuerzas internas y matriz de rigidez tangente

En esta sección, la matriz de rigidez tangente y el vector de fuerzas internas relacionadas con la contribución del contacto son derivadas en forma analítica. El vector de fuerzas internas se obtiene a partir de la Ec.(6.21) como sigue:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{t}_{T_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{g}_{T_{n+1}}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \quad (6.36)$$

En el caso de *stick*, el vector de fuerzas internas se obtiene reemplazando las Ecs.(6.31, 6.32) en la Ec.(6.21). Finalmente, luego de algunas operaciones algebraicas,

$$\mathbf{F}_{n+1}^{stick} = (\mathbf{t}_{v_{n+1}} \otimes \mathbf{t}_{v_{n+1}} + \mathbf{t}_{w_{n+1}} \otimes \mathbf{t}_{w_{n+1}}) \cdot \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{stick}. \quad (6.37)$$

La matriz tangente se obtiene a partir de la linealización del vector de fuerzas internas,

$$\mathbf{K}_{n+1}^{stick} = \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^{stick}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \quad (6.38)$$

Utilizando la Ec.(6.38) y las Ecs.(6.34, 6.35), la matriz tangente para el estado de *stick* resulta en:

$$\mathbf{K}_{n+1}^{stick} = \varepsilon_T(\mathbf{t}_{v_{n+1}} \otimes \mathbf{t}_{v_{n+1}} + \mathbf{t}_{w_{n+1}} \otimes \mathbf{t}_{w_{n+1}}). \quad (6.39)$$

En lo que se refiere al estado de *slip*, el procedimiento es análogo. El vector de fuerzas internas es obtenido insertando las Ecs.(6.34, 6.35) en la Ec.(6.21), obteniendo,

$$\mathbf{F}_{n+1}^{slip} = (\mathbf{t}_{v_{n+1}} \mathbf{t}_{v_{n+1}}^T + \mathbf{t}_{w_{n+1}} \mathbf{t}_{w_{n+1}}^T) \cdot \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{slip}. \quad (6.40)$$

La matriz de rigidez tangente que resulta de derivar el vector de fuerzas internas correspondiente al estado de *slip*,

$$\mathbf{K}_{n+1}^{slip} = \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^{slip}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}}, \quad (6.41)$$

que resulta en,

$$\mathbf{K}_{n+1}^{slip} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{0}^T & \mu \mathbf{B}_{n+1} \mathbf{e}_{T_{n+1}}^{trial} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

donde,

$$\mathbf{K}_{II} = \mu \lambda_{n+1} \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\|} \mathbf{B}_{n+1} \cdot \mathbf{A}_{n+1} \cdot \mathbf{B}_{n+1}, \quad (6.43)$$

$$\mathbf{B}_{n+1} = (\mathbf{t}_{v_{n+1}} \otimes \mathbf{t}_{v_{n+1}} + \mathbf{t}_{w_{n+1}} \otimes \mathbf{t}_{w_{n+1}}), \quad (6.44)$$

$$\mathbf{e}_{T_{n+1}}^{trial} = \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\|}, \quad (6.45)$$

y

$$\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial} \otimes \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\|^2}. \quad (6.46)$$

El tamaño de las matrices en las Ecs.(6.43, 6.46, 6.59) es de 3x3.

6.4. Ejemplos numéricos

Se presentan cuatro ejemplos numéricos para evaluar la robustez y precisión del algoritmo de contacto propuesto. Los ejemplos involucran simulaciones cuasi-estáticas implementadas en el código de elementos finitos Oofelie [OOf10] bajo el entorno de programación C++.

6.4.1. Validación: ejemplo 3D con fricción.

Este test representa una validación importante para el análisis de los algoritmos de contacto que contemplan fricción. El ejemplo fue presentado originalmente por Oden y Pire [OP84] como un test 2D en tanto que soluciones más recientes pueden encontrarse en Armero y Petocz [AP99] y en Areias *et al.* [ACdSCA04]. Aquí se

comparan resultados tridimensionales mediante la introducción de un estado plano de deformación que reproduce las mismas condiciones de borde que en el trabajo de Armero y Petocz [AP99].

La topología de la malla, condiciones de borde y propiedades del material utilizado en la simulación se muestran en la Fig. 6.6. El comportamiento del material es

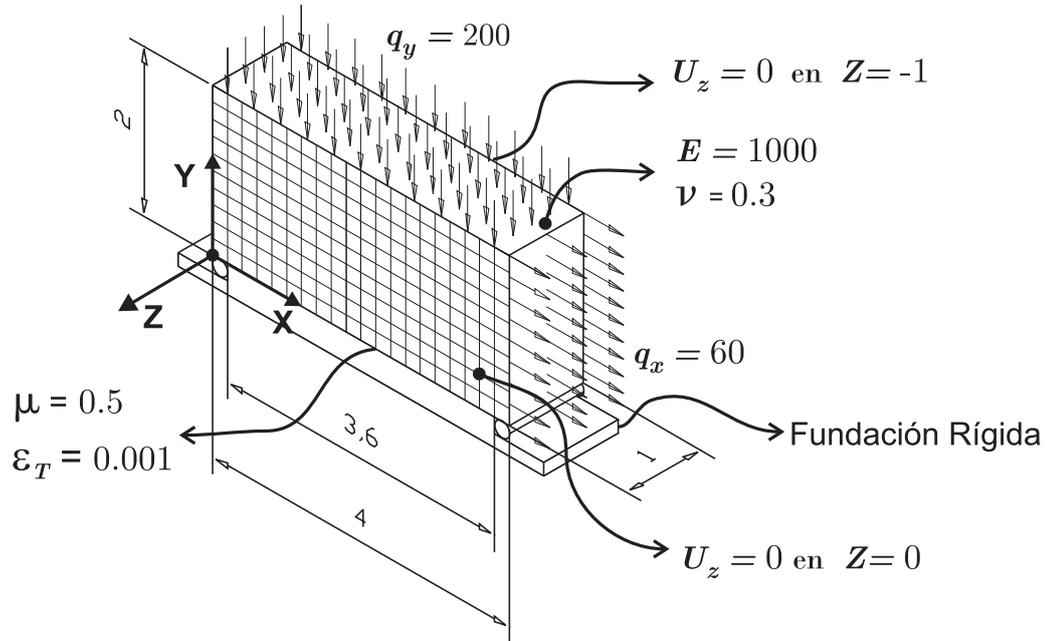


Figura 6.6: Cuerpo elástico comprimido contra una superficie rígida y traccionado tangencialmente.

elástico lineal. Se empleó una malla con 1583 nodos y 7241 elementos tetraédricos. La zona de contacto evaluada es la que se acota con una distancia de 3.6, tal como se muestra en la Fig. 6.6.

Una presión uniforme $q_y = 200$ actúa sobre la superficie superior del cuerpo, produciendo una deformación contra la fundación rígida. Luego, otra presión actúa sobre un lado del cuerpo, empujándolo en la dirección X .

La configuración deformada para este caso se muestra en la Fig. 6.7, donde se puede ver el mismo patrón de deformación que en la referencia [AP99]. Notar además que no existe penetración del cuerpo flexible con la fundación rígida. En las Figs. 6.8 y 6.9 se muestran las tensiones normales en la dirección Y y las tangenciales $X - Z$. La Fig. 6.10 muestra una comparación de los resultados en términos de las tensiones normales y tangenciales en la interface de contacto presentando muy buena correlación con Armero y Petocz [AP99].

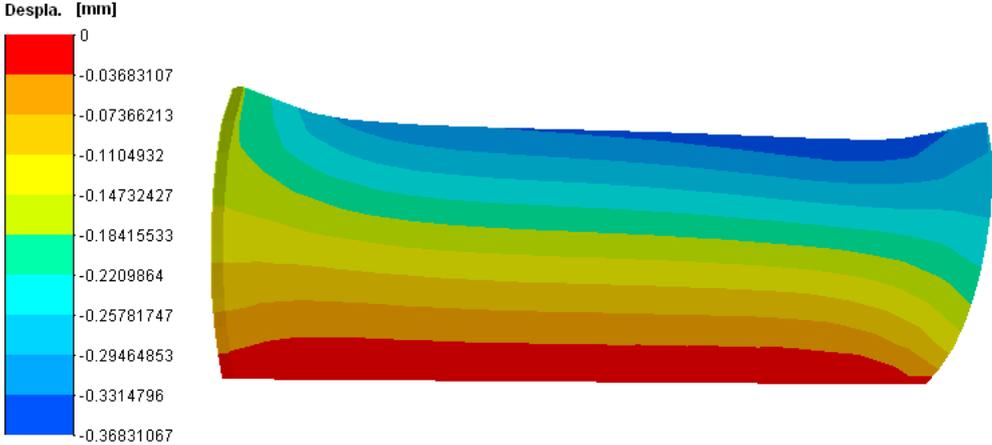


Figura 6.7: Desplazamientos nodales en la dirección Y.

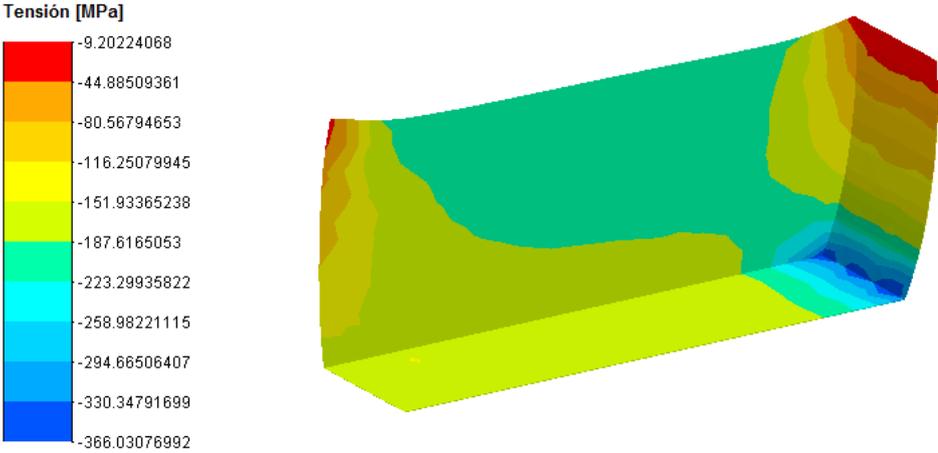


Figura 6.8: Tensiones normales en la dirección Y.

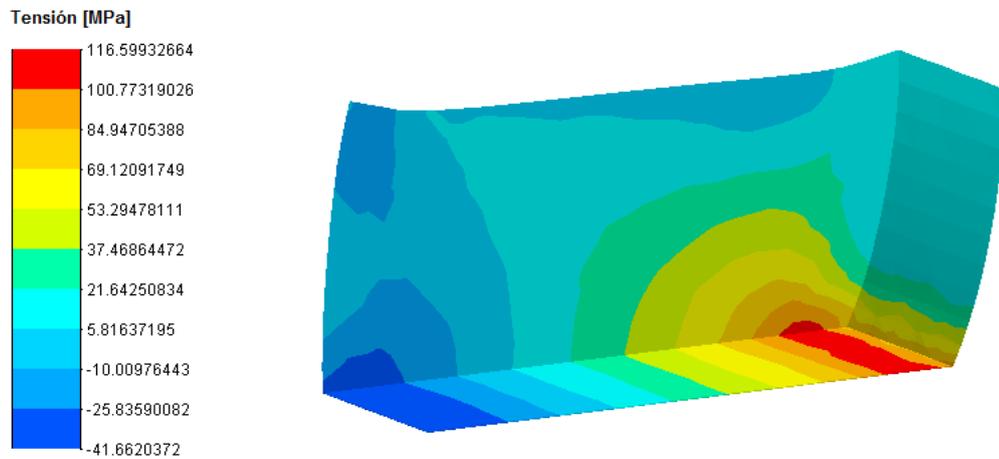
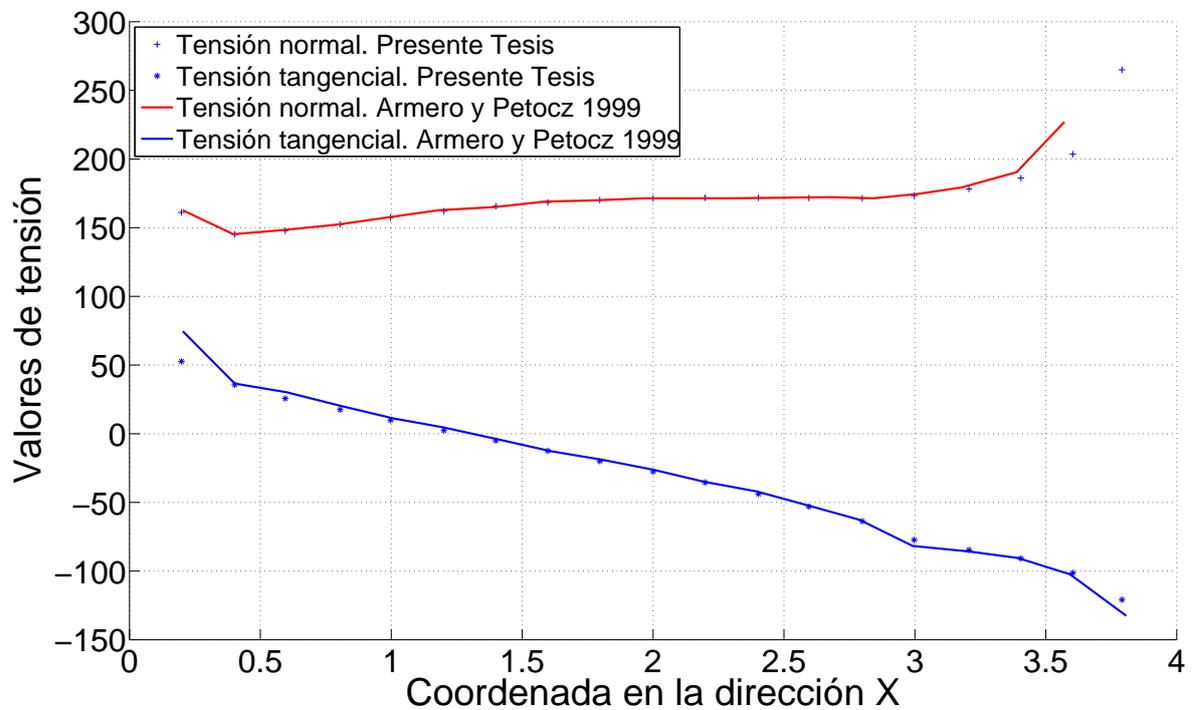
Figura 6.9: Tensiones tangenciales $X - Z$.

Figura 6.10: Variación de la tensión normal y tangencial en la interfase de contacto. Comparación con los resultados de Armero y Petocz [AP99].

6.4.2. Validación: ejemplo 3D de grandes deslizamientos con fricción.

En el trabajo de Joli y Feng se presenta un análisis de contacto 3D con grandes deslizamientos y fricción utilizando técnicas para modelar la ley de Coulomb con un método bi-potencial [JF08]. Aquí se comparan los resultados de la referencia con la metodología desarrollada en la Sec. 6.3.5.

En este ejemplo, dos desplazamientos \mathbf{a} y \mathbf{b} son impuestos en la superficie superior A-B-C-D de un cubo como el que se muestra en la Fig. 6.11. Primero, se aplica el desplazamiento vertical \mathbf{a} , y luego el desplazamiento horizontal \mathbf{b} con una orientación de 60° referido al eje X , el cual produce un deslizamiento del cuerpo sobre la superficie.

Las condiciones de borde se enumeran a continuación:

- desplazamiento vertical [mm]: $\mathbf{a} = (0,0,0.1)$
- desplazamiento horizontal [mm]: $\mathbf{b} = (0.4 \cos(60), 0.4 \sin(60), 0)$
- total de pasos de tiempo: 50. Los desplazamientos se aplican de a 0.01 mm en cada incremento.

Las propiedades del material están dadas por un módulo de Young $E = 210000$ N/mm², el coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ y el coeficiente de fricción $\mu = 0.3$, al igual que en Joli y Feng [JF08]. La malla está compuesta por ocho elementos hexaédricos no lineales de ocho nodos representados en la Fig. 6.11. La dimensión de cada lado del cubo es de 1mm. La rigidez tangencial ε_T dada por la Ec.(6.23), fue seleccionada con un valor lo suficientemente grande, $\varepsilon_T = 5 \times 10^{10}$ para reproducir de forma precisa la ley de Coulomb.

La Fig. 6.12 muestra la variación de la fuerza normal de contacto en los puntos F y H. La Fig. 6.13 muestra los desplazamientos U_x y U_y del punto F. Ambas curvas fueron comparadas con la referencia y, como se puede observar, se obtuvo una muy buena correlación.

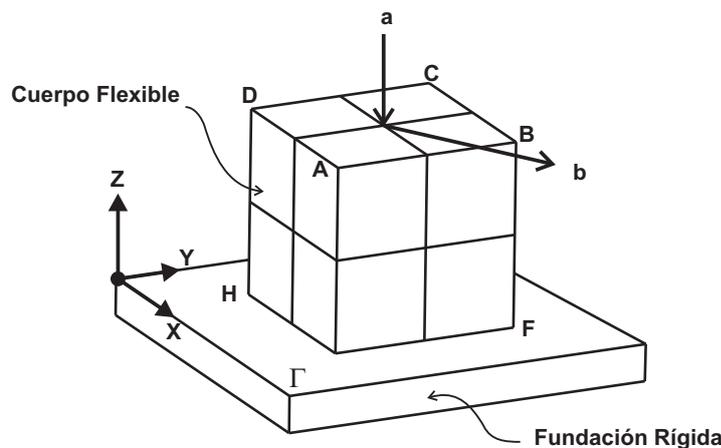


Figura 6.11: Dibujo esquemático del cubo sobre la fundación rígida.

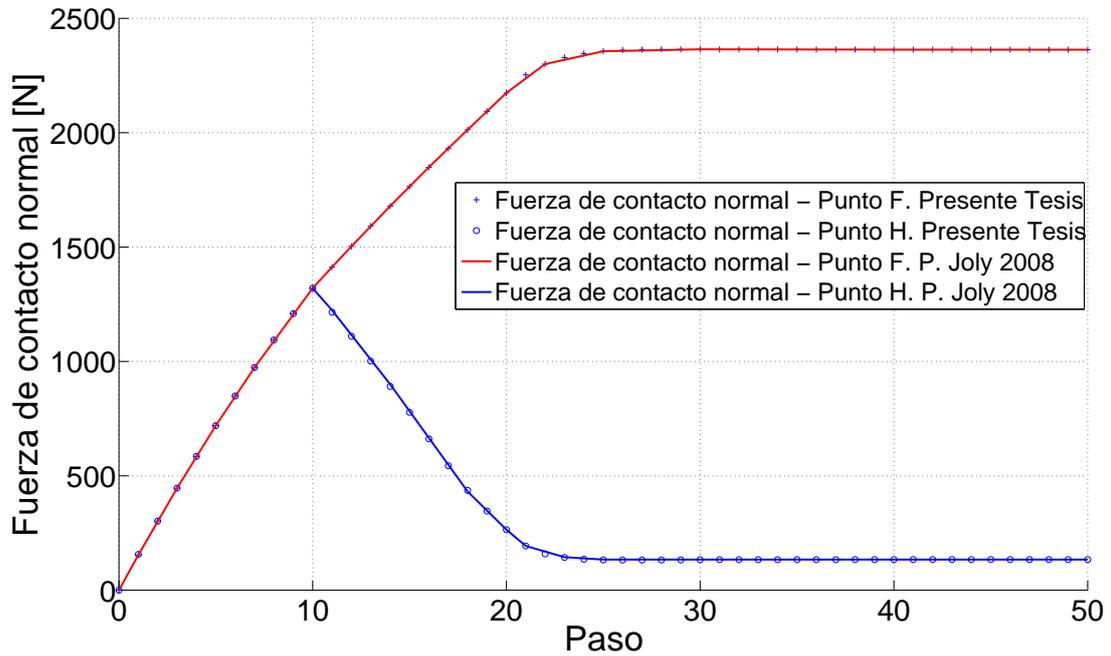


Figura 6.12: Comparación de la variación de la fuerza normal de contacto en los puntos F y H con los resultados de Joli y Feng [JF08].

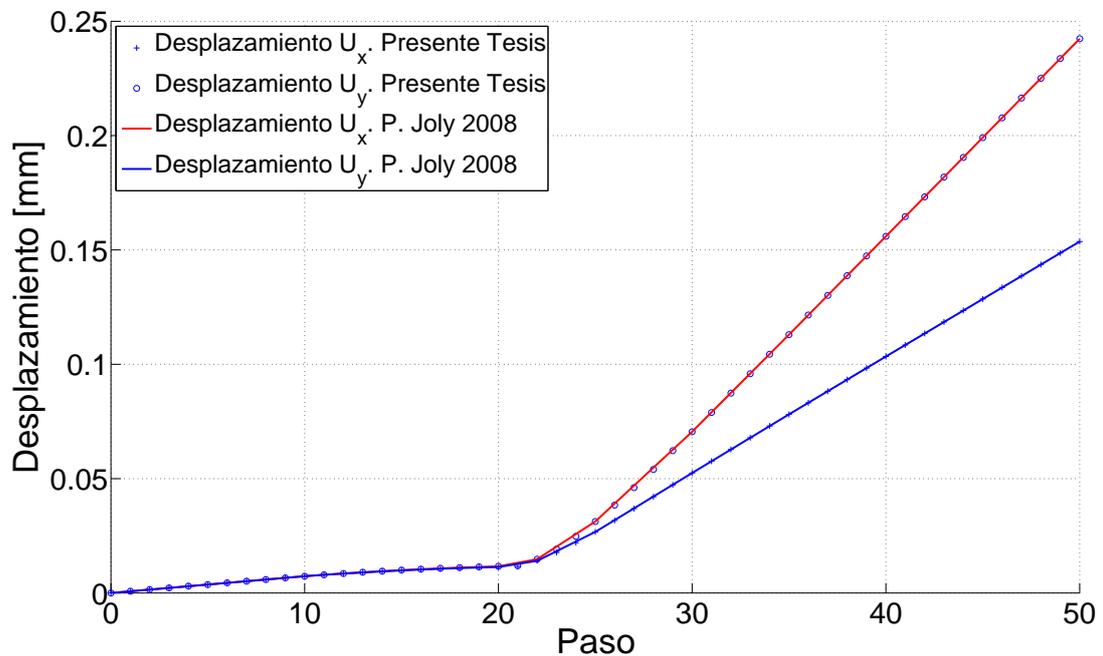


Figura 6.13: Comparación de la variación de los desplazamientos U_x y U_y con los resultados de Joli y Feng [JF08].

6.4.3. Ejemplo de contacto de una válvula de motor de combustión interna

Se presenta un ejemplo de aplicación de contacto de una válvula de motor de combustión interna con su asiento idealmente rígido. La Fig. 6.14 muestra la topología de la malla y propiedades mecánicas del material utilizado. Debido a la geometría del problema, se aplicaron condiciones de simetría. Los elementos utilizados han sido tetraedros lineales.

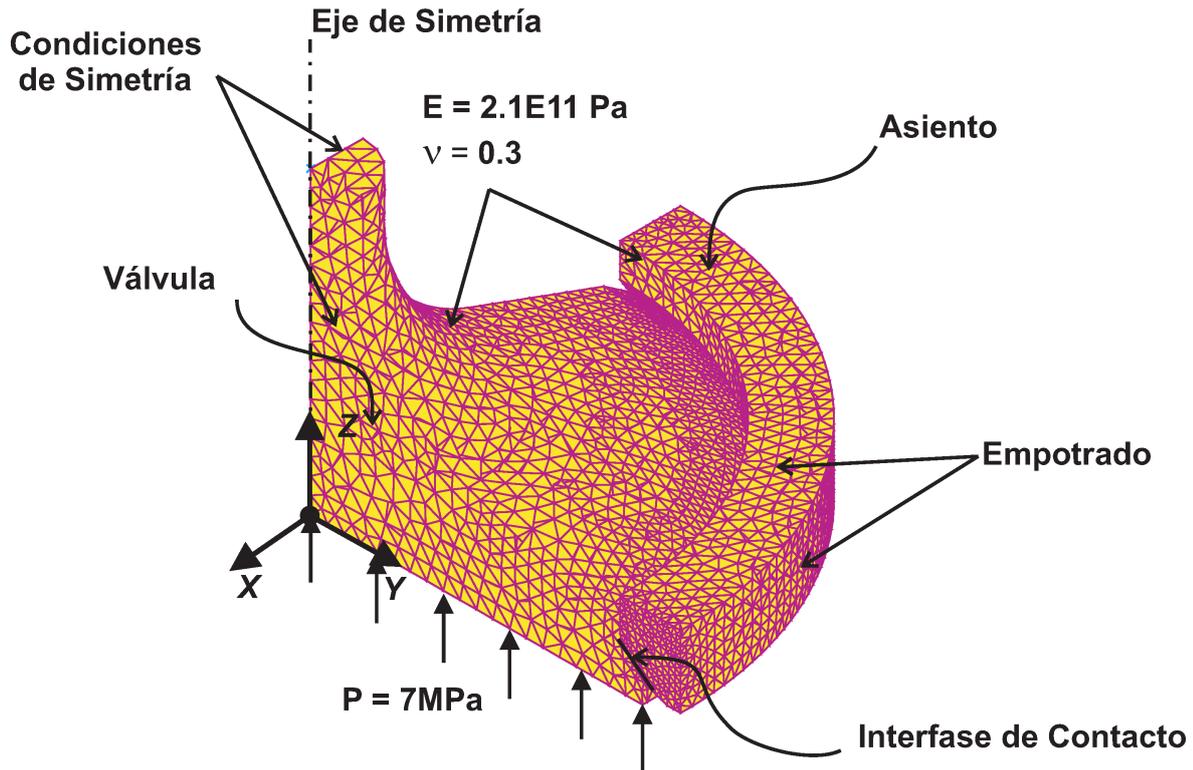


Figura 6.14: Topología de malla y propiedades mecánicas para el material utilizado.

En la Fig. 6.15 se puede observar un campo de desplazamientos uniformes y concéntricos en la zona del vástago y cabeza de válvula, en tanto que el mapa de tensiones revela oscilaciones de origen numérico, ver Fig. 6.16. La Fig. 6.17 muestra una curva de distribución de tensiones por elemento en la zona de contacto. Como se puede observar, la solución provista por el algoritmo presenta oscilaciones de amplitud elevada en la zona de contacto, lo cual no es apropiado para estudios que requieran de regularidad en el campo de tensiones.

6.5. Conclusiones

En esta sección se ha descrito un algoritmo de contacto aplicable al caso de contacto entre un cuerpo flexible y otro idealmente rígido, con superficies planas. Los ejemplos desarrollados en la Sec. 6.4 mostraron muy buena similitud con las

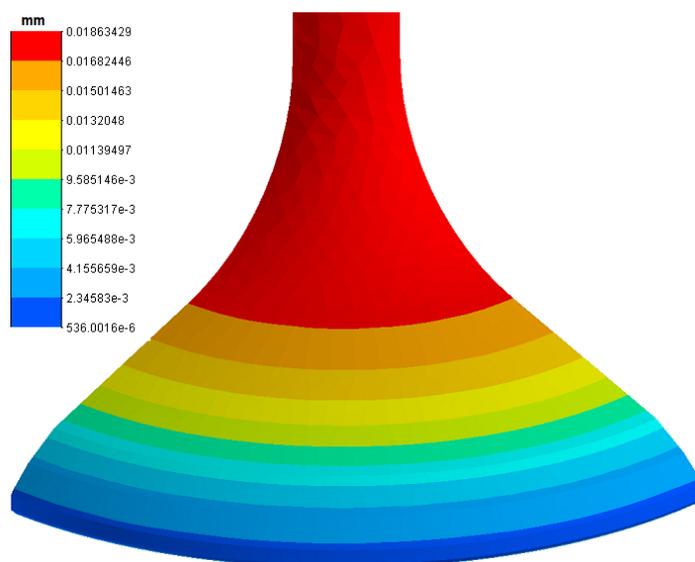


Figura 6.15: Campo de desplazamiento de una válvula de motor de combustión interna resuelto mediante un algoritmo de contacto flexible rígido.

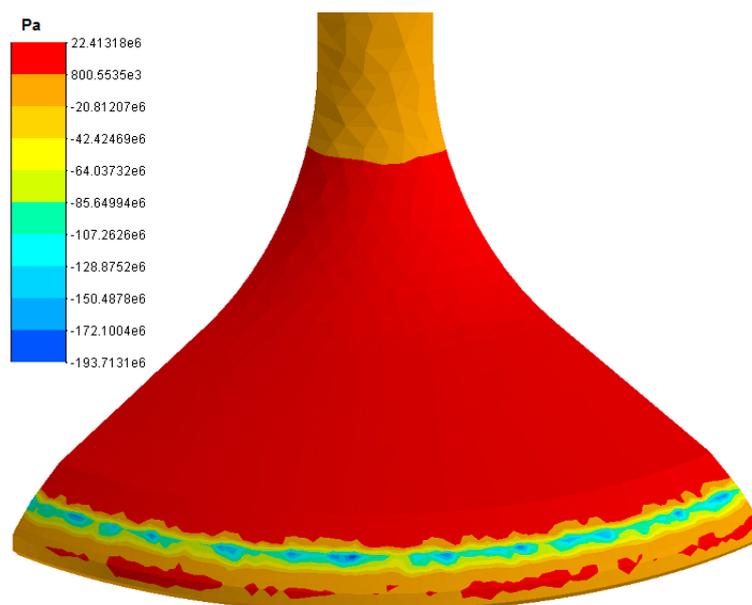


Figura 6.16: Campo de tensiones en una válvula de un motor de combustión interna resuelto mediante un algoritmo de contacto flexible rígido.

soluciones de referencias. La propuesta del lagrangiano aumentado con dos multiplicadores de Lagrange y una variable *slack*, permitió resolver el problema de contacto en un esquema monolítico evitando las complicaciones de los algoritmos basados en la activación/desactivación de las restricciones. Si bien es posible obtener tensiones y desplazamientos con relativa aproximación, los análisis se encuentran limitados a un sólo cuerpo, por ejemplo, para el caso de aplicación de una válvula de motor de combustión interna, no es posible estudiar las tensiones que se generan en

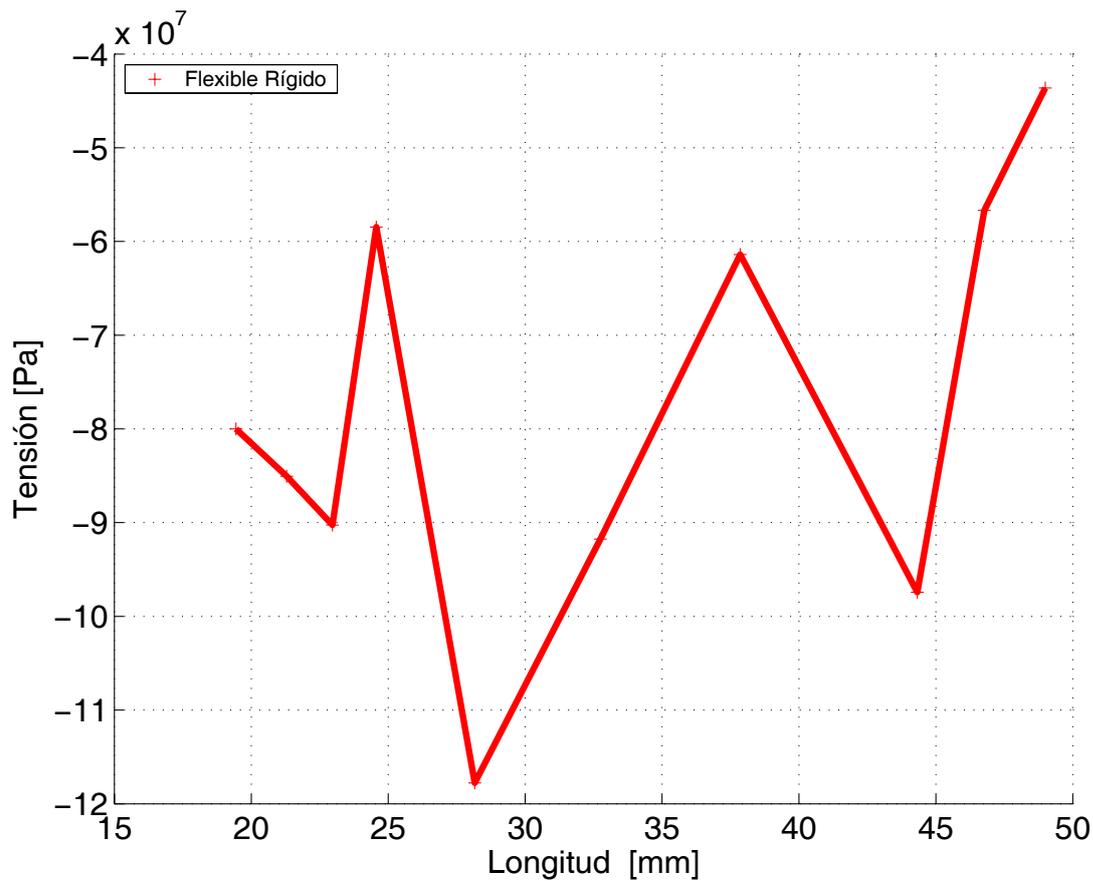


Figura 6.17: Distribución de tensiones por elemento en la zona de contacto de una válvula de motor de combustión interna utilizando el algoritmo flexible-rígido con dos multiplicadores de Lagrange.

el asiento. Esto motivó el estudio e implementación de algoritmos de contacto tipo flexible-flexible como los que se describen a continuación.

6.6. Contacto suave

6.6.1. Introducción

Para la simulación numérica del contacto entre cuerpos flexibles mediante el MEF, una gran cantidad de variantes han sido propuestas con el fin de incorporar las restricciones en la formulación variacional [FZ75, ZT00, Wri02]. La aplicación de estos métodos puede causar discontinuidades en la función distancia cuando la superficie de contacto se discretiza con elementos finitos. En otras palabras, cuando se adopta la descripción del MEF, la superficie de frontera se define con una función de interpolación correspondiente a cada elemento finito. Esto significa que, la interface de contacto es descrita por un conjunto de líneas rectas definidas por la conectividad de los nodos y, por lo tanto, la superficie presenta continuidad C^0 . De esta manera, no existe continuidad de un segmento contiguo a otro, y los vectores

normales a la superficie pueden no ser definidos únicamente. Algunas consecuencias de esta discontinuidad son: saltos de presión que no se producen en la realidad, cambios consecutivos de los campos de tensiones y desplazamientos en la zona de contacto durante una iteración del Newton (*contact cycling*) y pérdida de convergencia cuadrática en sistemas no lineales [Wri02, SH04]. Mediante un suavizado de la superficie de contacto se intenta evitar este tipo de inconvenientes. Algunos autores han demostrado que para el caso de cuerpos rígidos, el uso de superficies con una continuidad C^2 mejora la calidad de los resultados, ver por ejemplo [HK90, SS95].

Existen muchas metodologías para el suavizado de superficies que pueden ser aplicadas al contacto mecánico. Una de las primeras técnicas desarrolladas se basa en la utilización del clásico elemento finito de placa propuesto por Clough-Tocher [CT66, Her87], donde se alcanza una continuidad C^1 en toda la superficie. Otras alternativas son la interpolación cúbica de Hermite [PL01a, WKOK01], *splines* cúbicas de Bézier [WKOK01, PC99], Catmull-Rom *splines* [ADM02, EMC01], NURBS [Dal99, SHK03], entre otras. Todas ellas, excepto la de Clough-Tocher, fueron originalmente propuestas para la interpolación de geometrías bi dimensionales. Su extensión al caso tridimensional se encuentra limitada a mallas de soporte regular, o más específicamente, cuando a cada nodo de la malla concurre la misma cantidad de elementos.

Uno de los primeros trabajos relacionados con la aplicación del suavizado de superficies mediante el MEF para la simulación de problemas de contacto fue el propuesto por Puso y Laursen [PL01b], quienes desarrollaron una técnica basada en *Gregory patches* aplicable sólo al caso de cuadrángulos. La superficie obtenida alcanza una continuidad C^1 . Esto implica que el vector tangente a la superficie mantiene una dirección continua, pero no así su módulo, que cambia de valor. En cuanto al vector normal, con C^1 se mantiene su continuidad y mejora notablemente la calidad de la solución.

Otros trabajos relacionados con el suavizado de superficies de contacto son el de Krstulovic-Opara *et al.* [KOWK00, KOWK02]. Ellos emplean superficies cuadráticas de Bézier con una interpolación definida a través de los nodos y el centroide de elementos triangulares. Esta aproximación alcanza una continuidad de la superficie cuasi- C^1 , ya que en los nodos se verifica una continuidad C^0 .

El desarrollo de la técnica de subdivisión de superficies tiene origen en la geometría computacional y fue presentado por Catmull y Clark [CC78] y Doo y Sabin [DS78], en 1978. Posteriormente, en 1987, Loop propuso una extensión a mallas triangulares arbitrarias [Loo87]. Ambas técnicas, la de Catmull-Clark y la de Loop, aplican un refinamiento sucesivo en aquellas zonas de la malla donde existe una valencia N diferente de 4 para el caso de cuadrángulos o 6 para el caso de triángulos. En geometría computacional, cuando cuatro elementos concurren a un nodo, se dice que ese nodo tiene valencia $N=4$, mientras que cuando seis elementos concurren a un nodo, ese nodo tiene valencia $N=6$. Sólo en los casos de valencia 4, para el caso de cuadrángulos o 6 para triángulos, el nodo es regular. Los polinomios obtenidos con la técnica de subdivisión de superficies tiene una continuidad C^2 , excepto en los puntos de valencia extraordinaria, es decir nodos con valencia $N \neq 4$ y $N \neq 6$ donde se alcanza una continuidad C^1 .

Los primeros trabajos desarrollados mediante el MEF y técnicas de subdivisión de superficies fueron aplicados al caso de cáscaras lineales [COS00] y posteriormente se hizo extensivo al caso no lineal [CO01, CSA⁺02]. En el trabajo de Krysl *et al.* [KGS03] se utilizó la subdivisión de superficies para generación de mallas y en los trabajos de Kobbelt *et al.* y Lee *et al.* [KHP97, Lee03a, Lee03b] para el refinamiento. Por su parte Stadler y Holzapfel [SH04] fueron los primeros en utilizar las técnicas de subdivisión de superficies aplicadas al contacto mecánico mediante el MEF. Ellos consiguieron representar la geometría de la superficie de la zona de contacto en la posición deformada y no deformada a través de la subdivisión de superficies.

6.6.2. Métodos de interpolación de superficies

Típicamente, los métodos de interpolación de superficies toman un conjunto de puntos arbitrarios y una malla de soporte que describe la conectividad de estos puntos. Una de las primeras técnicas utilizadas derivada del MEF, es la interpolación del tipo Clough-Tocher [CT66], donde la superficie obtenida mantiene continuidad C^1 en todo el dominio. Algunas de las ventajas de este método son, por un lado el soporte local, es decir, la modificación de un punto afecta únicamente a una porción local de la superficie, y por otro lado, la facilidad para el cálculo de los vectores normales y tangenciales. En esta Tesis se propuso el uso de esta técnica combinada con un método de mínimos cuadrados móviles de forma paramétrica y de carácter local. Se observó que, para mallas regulares, la superficie obtenida es suave con continuidad C^1 . Sin embargo, en mallas irregulares, donde la valencia es extraordinaria, $N \neq 6$ en el caso de triángulos, aparecen montículos y ciertas ondulaciones con pérdida de continuidad de la función, como puede apreciarse en la Fig. 6.18. Debido a esta fuerte dependencia de la continuidad de la función con la valencia, se descartó la implementación del método en la interpolación de interfases de contacto, lo cual fue motivo de estudio durante el desarrollo de esta Tesis. Queda abierta la posibilidad de su utilización en otro tipo de problemas donde se requieran específicamente mallas regulares.

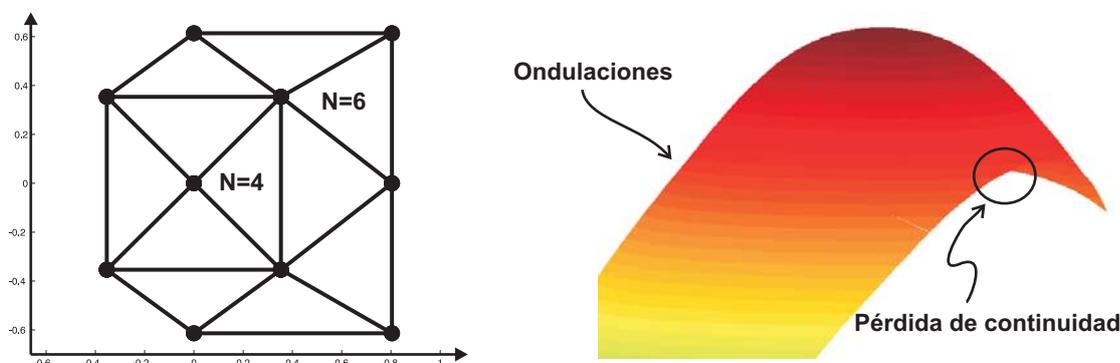


Figura 6.18: Malla de soporte e interpolación de una superficie con la técnica Clough-Tocher.

Otra metodología usualmente utilizada en interpolación de superficies es la derivada de las funciones NURBS. Esta técnica presenta la capacidad de modelar superficies con un soporte local, al igual que el método de Clough-Tocher. Sin embargo, la interpolación de un conjunto de datos en tres dimensiones no puede ser representada cuando la malla de soporte es de topología arbitraria.

Las técnicas de subdivisión de superficies son derivadas de B-splines donde, por medio de reglas específicas asociadas a un proceso de refinamiento, es posible construir una superficie suave con una malla de soporte completamente irregular [Sta10, CC78]. La mayoría de los esquemas de subdivisión permiten el suavizado de superficies con soporte local asociado a coeficientes que dependen únicamente de la valencia. Así, la malla de soporte puede ser dividida en dos regiones según la valencia de los vértices de control: i) donde la continuidad de la función es C^2 y ii) donde la continuidad de la función es C^1 .

Por lo mencionado en las líneas anteriores, la subdivisión de superficies se presenta como el método más apropiado para la suavización de la interface de contacto cuando se utiliza el MEF. Además, como ventaja adicional, la triangulación del MEF sirve de malla de soporte.

La Fig. 6.19 muestra una triangulación arbitraria con valencias $N = 6$ y $N = 5$ interpolada con la técnica de Loop. Se puede observar una superficie suave sin pérdida alguna de continuidad. Para detalles de las expresiones que definen el método, pueden consultarse los siguientes trabajos [Loo87, Sta10].

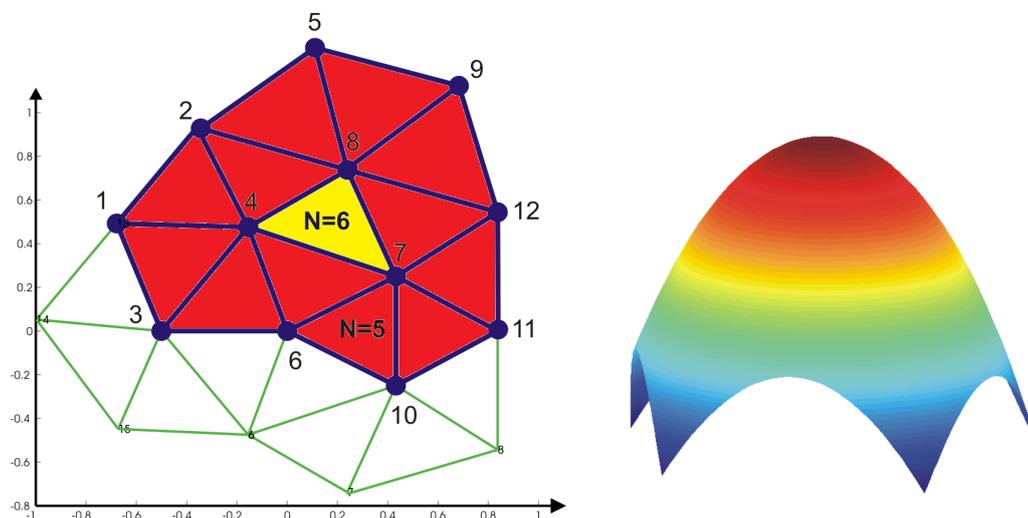


Figura 6.19: Malla de soporte e interpolación de una superficie con la técnica de Loop.

En esta sección, siguiendo las ideas presentadas por Stadler y Holzapfel [SH04], se describe la implementación de un algoritmo de contacto basado en subdivisión de superficies con la técnica de Loop aplicado a mallas de soporte con topología triangular o cuadrangular. Aquí, el método de elementos finitos y la subdivisión de superficies no comparten el mismo paradigma de representación. El esquema de detección seleccionado fue nodo/superficie con dos metodologías de regularización, una basada en un método penalidad y la otra en un lagrangiano aumentado con dos

multiplicadores de Lagrange, análogo al presentado en la Sec. 6.3.2.

Los ejemplos seleccionados en la Sec. 6.6.10 muestran ciertos inconvenientes de la utilización de esta técnica de suavizado de superficies junto con un esquema nodo-segmento y que no han sido reportados específicamente en la bibliografía.

6.6.3. Descripción del problema

Las ecuaciones básicas de elasticidad, así como una descripción general del problema de contacto han sido presentados en las ecuaciones de la Sec. 6.2.

Asumiendo que los cuerpos en contacto \mathcal{B}^α , con $\alpha = 1, 2$, se encuentran en una región convexa, la función huelgo g_N se define como la proyección normal a la superficie Γ_c^2 de un nodo $\mathbf{x}_0^1 \in \Gamma_c^1$ denominado *esclavo*, a un punto $\hat{\mathbf{x}}^* \in \Gamma_c^2$, denominado *master*,

$$g_N = \|\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*\| = \min_{\mathbf{x}^2 \in \Gamma_c^2} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2(\xi, \eta)\|. \quad (6.47)$$

Notar que Γ_c^1 se define por la malla de elementos finitos de \mathcal{B}^1 , en tanto que Γ_c^2 está dado por una superficie suave $\mathbf{x}^*(\xi, \eta)$ soportada por la malla de elementos finitos de \mathcal{B}^2 , como se indica en la Fig. 6.20.

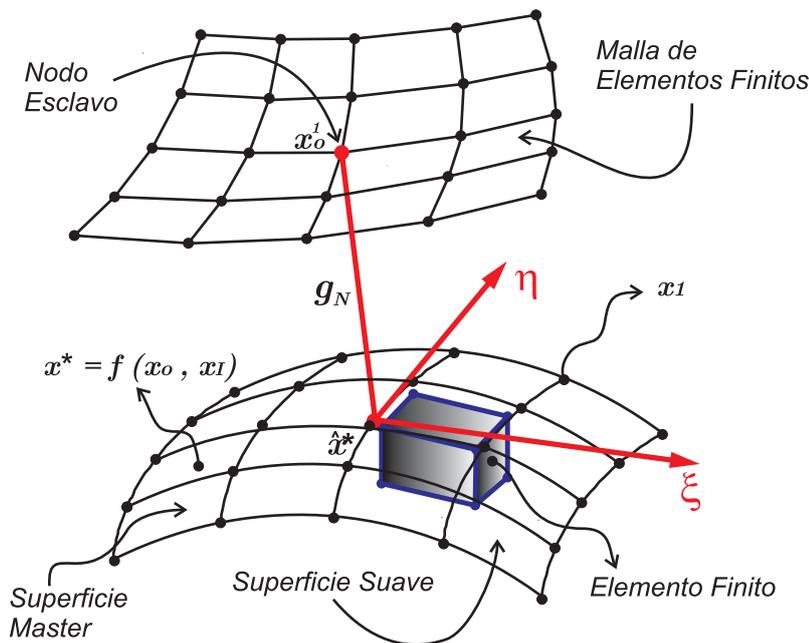


Figura 6.20: Definición de la distancia mínima para un problema de contacto suave.

6.6.4. Ecuaciones para la cinemática del contacto suave

Denominaremos $\mathbf{x}^*(\xi, \eta)$ a una función definida por 12 vértices de control \mathbf{x}_I de un parche de una malla de soporte regular como el de la Fig. 6.21, donde $(\xi, \eta) \in \Omega$ y $\Omega = \{(\xi, \eta) | \xi \in [0, 1] \text{ y } \eta \in [0, 1 - \xi]\}$. Luego, la geometría admite la parametrización

$\mathbf{x}^*(\xi, \eta)$ a través de ciertas funciones $N_I(\xi, \eta)$, derivadas del esquema de subdivisión de superficies de Loop, es decir,

$$\mathbf{x}^* = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I. \quad (6.48)$$

El esquema de Loop es aplicable a mallas de soporte triangular de manera que, su aplicación a las cuadrangulares es por medio de una re-triangulación. En esta Tesis, la superficie de contacto es aproximada sin pasar por los nodos de la malla de soporte. A este tipo de superficies se las denomina aproximantes.

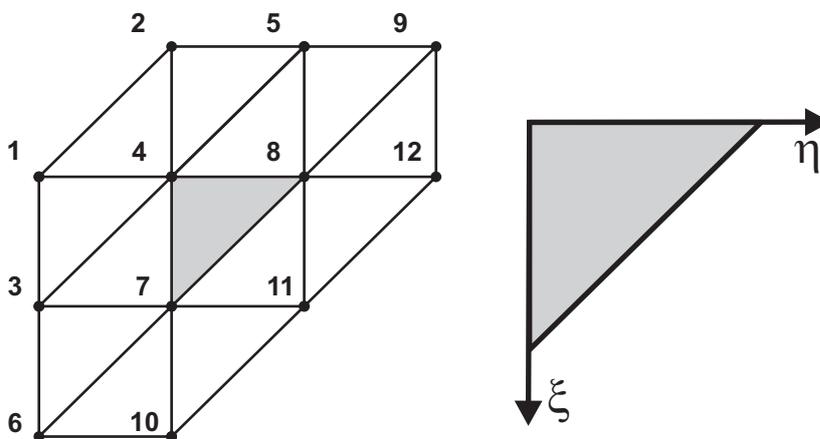


Figura 6.21: Parche triangular regular definido por 12 vértices de control.

Para claridad de los desarrollos siguientes, se utilizará la denominación: ξ y η para denotar a las derivadas parciales $\partial(\cdot)/\partial\xi$ y $\partial(\cdot)/\partial\eta$, respectivamente. Además, se utilizará la convención de Einstein para las sumatorias y por tanto el símbolo \sum aparecerá solo cuando se requiera de mayor claridad en las expresiones.

La condición de distancia mínima de la Ec.(6.47) exige que los vectores tangentes $\mathbf{x}_{,\xi}^*$ y $\mathbf{x}_{,\eta}^*$, a la superficie $\mathbf{x}^*(\xi, \eta)$ del cuerpo \mathcal{B}^2 en el punto $\hat{\mathbf{x}}^*$, mantengan perpendicularidad con algún nodo esclavo del cuerpo \mathcal{B}^1 , véase la Fig. 6.20. Matemáticamente, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = 0, \\ \mathbf{x}_{,\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = 0. \end{cases} \quad (6.49)$$

Este sistema se resuelve por medio de un Newton-Raphson, donde el punto esclavo \mathbf{x}_0^1 es fijo y la incógnita es el punto $\hat{\mathbf{x}}^*$.

En lo siguiente, se desarrollarán las ecuaciones necesarias para la obtención del vector de fuerzas internas y la matriz de rigidez tangente en forma analítica.

Aplicando una variación a la Ec.(6.48) y asumiendo que \mathbf{x}^* es diferenciable, $\delta(\mathbf{x}_{,\xi}^*) = (\delta\mathbf{x}^*)_{,\xi}$ (en forma análoga para la coordenada η), se obtiene la siguiente ecuación para la variación de la función \mathbf{x}^* ,

$$\delta\mathbf{x}^* = N_I \delta\mathbf{x}_I + \mathbf{x}_{,\xi}^* \delta\xi + \mathbf{x}_{,\eta}^* \delta\eta. \quad (6.50)$$

Las variaciones de las coordenadas ξ y η de la Ec.(6.50) son relacionadas con las variaciones de los desplazamientos $\delta \mathbf{u}_I$ a través de las cantidades vectoriales $\mathbf{d}_{I\xi}$ y $\mathbf{d}_{I\eta}$ desarrolladas en el Apéndice B. De esta manera,

$$\begin{cases} \delta \xi = \mathbf{d}_{I\xi} \cdot \delta \mathbf{u}_I, \\ \delta \eta = \mathbf{d}_{I\eta} \cdot \delta \mathbf{u}_I, \end{cases} \quad (6.51)$$

y la variación de la superficie de interpolación se expresa como,

$$\delta \mathbf{x}^* = \mathbf{B}_I \delta \mathbf{u}_I, \quad (6.52)$$

donde $\mathbf{B}_I = N_I \mathbf{I} + \mathbf{x}_{,\xi}^* \otimes \mathbf{d}_{I\xi} + \mathbf{x}_{,\eta}^* \otimes \mathbf{d}_{I\eta}$. Luego, se requiere calcular las derivadas parciales de $\delta \mathbf{x}^*$ de la Ec.(6.50) respecto de las direcciones ξ y η . Haciendo uso de las Ecs.(6.51, 6.52), las expresiones resultantes son:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_{,\xi}^* &= [N_{I,\xi} \mathbf{I} + \mathbf{x}_{,\eta\xi}^* \otimes \mathbf{d}_{I\eta} + \mathbf{x}_{,\eta}^* \otimes \mathbf{d}_{I\eta,\xi} + \mathbf{x}_{,\xi\xi}^* \otimes \mathbf{d}_{I\xi} + \mathbf{x}_{,\xi}^* \otimes \mathbf{d}_{I\xi,\xi}] \delta \mathbf{u}_I, \\ \delta \mathbf{x}_{,\eta}^* &= [N_{I,\eta} \mathbf{I} + \mathbf{x}_{,\eta\eta}^* \otimes \mathbf{d}_{I\eta} + \mathbf{x}_{,\eta}^* \otimes \mathbf{d}_{I\eta,\eta} + \mathbf{x}_{,\xi\eta}^* \otimes \mathbf{d}_{I\xi} + \mathbf{x}_{,\xi}^* \otimes \mathbf{d}_{I\xi,\eta}] \delta \mathbf{u}_I. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Las definiciones $\delta \mathbf{x}^*$, $\delta \mathbf{x}_{,\xi}^*$ y $\delta \mathbf{x}_{,\eta}^*$ serán empleadas en desarrollos posteriores.

6.6.5. Variación del vector normal

Para resolver problemas en los cuales la superficie de contacto no es plana, u otros casos con no linealidad geométrica, la variación del vector normal a la superficie debe ser incluida en las ecuaciones.

El vector normal se define por los vectores tangentes a la superficie de contacto de la siguiente manera,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi}^* \times \mathbf{x}_{,\eta}^*}{\|\mathbf{x}_{,\xi}^* \times \mathbf{x}_{,\eta}^*\|} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \quad (6.54)$$

ver Fig. 6.20, en tanto que su primera variación se obtiene como,

$$\delta \mathbf{n} = [\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \frac{\delta \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \quad (6.55)$$

con,

$$\delta \mathbf{a} = \widetilde{\mathbf{X}}_{,\xi}^* \delta \mathbf{x}_{,\xi}^* - \widetilde{\mathbf{X}}_{,\eta}^* \delta \mathbf{x}_{,\eta}^*. \quad (6.56)$$

Aquí, $\widetilde{\mathbf{X}}^*$ es la matriz antisimétrica de rotación, u operador matricial de rotación, ver Apéndice B.

Utilizando las Ecs.(6.53, 6.56), y advirtiendo que $N_{0,\xi} = 0$ y $N_{0,\eta} = 0$, como se deduce en el Apéndice B, la Ec.(6.55) referida a la variación de la normal puede expresarse en función de la variación de los desplazamientos $\delta \mathbf{u}_I$ como:

$$\delta \mathbf{n} = \mathbf{A}_I \delta \mathbf{u}_I = \delta \mathbf{u}_I \mathbf{A}_I^T, \quad (6.57)$$

donde,

$$\mathbf{A}_I = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\|\mathbf{x}_{,\xi}^* \times \mathbf{x}_{,\eta}^*\|} [\widetilde{\mathbf{X}}_{,\xi}^* \mathbf{B}_{I\eta} - \widetilde{\mathbf{X}}_{,\eta}^* \mathbf{B}_{I\xi}], \quad (6.58)$$

y

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{I\xi} = N_{I,\xi} \mathbf{I} + \mathbf{x}_{,\eta\xi}^* \otimes \mathbf{d}_{I\eta} + \mathbf{x}_{,\xi\xi}^* \otimes \mathbf{d}_{I\xi}, \\ \mathbf{B}_{I\eta} = N_{I,\eta} \mathbf{I} + \mathbf{x}_{,\eta\eta}^* \otimes \mathbf{d}_{I\eta} + \mathbf{x}_{,\xi\eta}^* \otimes \mathbf{d}_{I\xi}. \end{cases} \quad (6.59)$$

6.6.6. Método de penalidad. Vector de fuerzas internas.

Para incorporar la restricción del contacto a la formulación débil, en esta sección, el desarrollo de las ecuaciones se limitará al método de penalidad. No se describirá en detalle la forma débil o principio de los trabajos virtuales asociados con las deformaciones finitas de los problemas de la mecánica del sólido, ya que se pondrá especial énfasis en la contribución del contacto al trabajo virtual de la estructura.

La formulación débil de los términos asociados al contacto utilizando el método de penalidad resulta en la siguiente ecuación general,

$$\delta \Pi^c = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^c = \sum_{k=1}^{n_c} \int_{\Gamma_c} (\epsilon g_N \delta g_N + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) ds, \quad (6.60)$$

donde ϵ es el factor de penalidad, g_N es el huelgo o penetración, ambos asociados a la dirección normal de un punto de la superficie de contacto y n_c es la cantidad de elementos de contacto activos. En lo siguiente, no se considerará la contribución tangencial $\mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T$ en el desarrollo del vector de fuerzas internas y en la matriz tangente.

Escribiendo nuevamente la definición de g_N , ver Ec. (6.47) como: $g_N = \|\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*\| = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*)$, su variación resulta en,

$$\delta g_N = \mathbf{n} \cdot (\delta \mathbf{x}_0^1 - \delta \hat{\mathbf{x}}^*) + \delta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*). \quad (6.61)$$

No es difícil demostrar que $\mathbf{B}_I^T \mathbf{n} = N_I \mathbf{n}$ y con $N_0 = -1$ (ver Apéndice B), la variación de g_N puede ser escrita de una manera compacta como,

$$\delta g_N = \delta \mathbf{u}_I \cdot [-N_I \mathbf{n} + \mathbf{A}_I^T (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*)], \quad (6.62)$$

donde se ha utilizado la Ec.(6.58) y el hecho que $\delta \mathbf{u}_0^1 = \delta \mathbf{x}_0^1$, ver Apéndice B.

Notar que los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}_I$ aparecen una sola vez, ubicados a la izquierda del segundo miembro en la Ec.(6.62), esto permite obtener la expresión del vector de fuerzas internas o residuo en forma analítica a partir de las Ecs.(6.60, 6.62) como,

$$\mathbf{F}^c = \epsilon g_N [-N_I \mathbf{n} + \mathbf{A}_I^T (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*)] = -\epsilon g_N N_I \mathbf{n}, \quad (6.63)$$

ya que en el punto de contacto se verifica que $\mathbf{A}_I^T (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = 0$. En forma matricial, el vector de fuerzas internas relacionado al contacto es,

$$\mathbf{F}^c = \epsilon g_N \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1 \mathbf{n} \\ \vdots \\ -N_n \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (6.64)$$

6.6.7. Linealización de la contribución del contacto

Para obtener la solución iterativa del sistema de ecuaciones no lineal asociado a la formulación débil y a los términos de contacto, pueden aplicarse diferentes métodos. El más rápido y confiable es el esquema de Newton, disponible en diferentes

variantes que mejoran las propiedades de convergencia. Estas formulaciones implican una linealización de la forma débil de la Ec.(6.60).

La linealización de los términos del continuo no representa el objetivo de esta sección. Para un detallado tratamiento de las implementaciones de los problemas de valores de borde a través del MEF, pueden consultarse otras referencias [Ode84, Cri97, Wri02].

La linealización $\delta \mathbf{n}$ dada en la Ec.(6.55), se calculada como $\Delta \mathbf{n} = \mathbf{A}_I \Delta \mathbf{u}_I$, que junto con la Ec.(6.58) resulta en la siguiente expresión analítica:

$$\Delta \mathbf{n} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\|\mathbf{x}_{,\xi}^* \times \mathbf{x}_{,\eta}^*\|} [\widetilde{\mathbf{X}}_{,\xi}^* \mathbf{B}_{I\eta} - \widetilde{\mathbf{X}}_{,\eta}^* \mathbf{B}_{I\xi}] \Delta \mathbf{u}_I. \quad (6.65)$$

La linealización de las funciones de forma N_I no representa un trabajo algebraico dificultoso; sin embargo, una expresión más útil es,

$$\Delta N_I \mathbf{n} = N_{I,\xi} \mathbf{n} \otimes \mathbf{d}_{I\xi} + N_{I,\eta} \mathbf{n} \otimes \mathbf{d}_{I\eta} = \mathbf{C}_{II}. \quad (6.66)$$

Algo similar ocurre con $\Delta \mathbf{A}_I$, donde lo que realmente interesa es $\Delta \mathbf{A}_I^T(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}^*)$. Teniendo en cuenta que $\Delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ y que $(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$, se puede demostrar que,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}_I^T(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = \\ g_N \frac{(\mathbf{B}_{I\eta} \widetilde{\mathbf{X}}_{,\xi}^* - \mathbf{B}_{I\xi} \widetilde{\mathbf{X}}_{,\eta}^*)}{\|\mathbf{x}_{,\xi}^* \times \mathbf{x}_{,\eta}^*\|^2} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) (\widetilde{\mathbf{X}}_{,\xi}^* \mathbf{B}_{J\eta} - \widetilde{\mathbf{X}}_{,\eta}^* \mathbf{B}_{J\xi}) \Delta \mathbf{u}_J, \end{aligned} \quad (6.67)$$

o, en forma más compacta,

$$\Delta \mathbf{A}_I^T(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = g_N \mathbf{A}_I^T \Delta \mathbf{u}_J. \quad (6.68)$$

Por último, las siguientes linealizaciones,

$$\Delta \mathbf{x}^* = \mathbf{B}_I \Delta \mathbf{u}_I, \quad \Delta \mathbf{x}_0^1 = \Delta \mathbf{u}_0^1, \quad (6.69)$$

se obtienen en forma directa.

6.6.8. Método de penalidad. Matriz tangente.

La linealización del vector de fuerzas internas de la Ec.(6.64) permite obtener la matriz tangente de contacto, en este caso sin tener en cuenta los desplazamientos tangenciales. De esta manera,

$$\Delta \mathbf{F}^c = \epsilon g_N [-N_I \Delta \mathbf{n} - \Delta N_I \mathbf{n} + \Delta \mathbf{A}_I^T(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) + \mathbf{A}_I^T(\Delta \mathbf{x}_0^1 - \Delta \hat{\mathbf{x}}^*)] + \epsilon \Delta g_N. \quad (6.70)$$

El término entre corchetes de la Ec.(6.70) está relacionado con los cambios geométricos de la superficie de contacto, y se denomina $\Delta \mathbf{F}_{geom}^c$, en tanto que el último término corresponde al contacto entre los cuerpos propiamente dicho, designado con

$\Delta \mathbf{F}_{mat}^c$, donde los subíndices *geom* y *mat* se refieren a geométrico y material, respectivamente. Con las linealizaciones desarrolladas en las Ecs.(6.55, 6.66, 6.68, 6.69), $\Delta \mathbf{F}_{geom}^c$ puede expresarse como,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_{geom}^c = & \epsilon g_N [-N_I \mathbf{A}_I \Delta \mathbf{u}_I - (N_{I,\xi} \delta \xi + N_{I,\eta} \delta \eta) \Delta \mathbf{u}_J] + g_N \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{u}_0^1 \\ & - g_N \mathbf{A}_I^T \mathbf{A}_I \Delta \mathbf{u}_I + \mathbf{A}_I^T \mathbf{B}_I \Delta \mathbf{u}_I - \mathbf{A}_0^T \mathbf{B}_0 \Delta \mathbf{u}_0^1. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Utilizando la Ec.(6.62) linealizada, y advirtiendo que en el punto de contacto $\mathbf{A}_I^T(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) \cdot \mathbf{n} = 0$ por condición de perpendicularidad, $\Delta \mathbf{F}_{mat}^c$ resulta,

$$\Delta \mathbf{F}_{mat}^c = -\epsilon N_I \mathbf{n} \Delta g_N, \quad (6.72)$$

con $\Delta g_N = -N_I \mathbf{n} \Delta \mathbf{u}_I = \mathbf{n} \Delta \mathbf{u}_0^1 - N_I \mathbf{n} \Delta \mathbf{u}_I$ ya que $N_0 = -1$, como se ha mencionado anteriormente.

Si las variaciones de los desplazamientos son ordenados en un vector de la siguiente manera: $\Delta \mathbf{q} = [\Delta \mathbf{u}_0^1 \ \Delta \mathbf{u}_1 \ \Delta \mathbf{u}_2 \ \dots \ \Delta \mathbf{u}_n]^T$, o en forma más compacta: $\Delta \mathbf{q} = [\Delta \mathbf{u}_0^1 \ \Delta \mathbf{u}_I]^T$, la contribución del contacto por los efectos geométricos y materiales resulta en las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\Delta \mathbf{F}_{geom}^c = \mathbf{K}_{geom}^c \Delta \mathbf{q}, \quad \Delta \mathbf{F}_{mat}^c = \mathbf{K}_{mat}^c \Delta \mathbf{q}, \quad (6.73)$$

donde,

$$\mathbf{K}_{geom}^c = \epsilon g_N \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.74)$$

con,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T - \mathbf{A}_0^T \mathbf{B}_0 - g_N \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0, \\ \mathbf{K}_{12} &= \mathbf{A}_J - g_N \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_J - \mathbf{A}_0^T \mathbf{B}_J^T, \\ \mathbf{K}_{21} &= -N_I \mathbf{A}_0 - \mathbf{C}_{I0} + \mathbf{A}_I^T (-g_N \mathbf{A}_0^T + \mathbf{I} - \mathbf{B}_0), \\ \mathbf{K}_{22} &= -N_I \mathbf{A}_J^T - \mathbf{C}_{IJ} + \mathbf{A}_J^T (-g_N \mathbf{A}_I^T - \mathbf{B}_J), \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{K}_{mat}^c = \epsilon \begin{bmatrix} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} & -N_I \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ -N_I \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} & N_I N_J \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (6.75)$$

Las matrices de las Ecs.(6.74, 6.75) son denominadas matriz tangente geométrica y material, respectivamente.

6.6.9. Contacto suave con regularización por medio de un lagrangiano aumentado con dos multiplicadores de Lagrange y variable *slack*.

En la sección anterior se han derivado en forma analítica las ecuaciones para la matriz tangente referida al contacto, utilizando un método del tipo penalidad. Como se ha mencionado, éste método evidencia penetración entre los cuerpos y requiere que el factor de penalidad sea elegido de manera arbitraria, condicionando la calidad de la solución. Uno de los esquemas más populares que evita estos inconvenientes por su capacidad de resolver exactamente las restricciones, es el de multiplicadores

de Lagrange, que transforma la desigualdad asociada al problema de minimización en otro sin restricciones, donde las incógnitas son los multiplicadores de Lagrange. Como desventaja, la aplicación de este método con un Newton-Raphson, resulta en matrices definidas parcialmente positivas y parcialmente negativas. Esta combinación trae consigo problemas de estabilidad, mayor demanda de tiempo de cálculo en la definición de las restricciones que se encuentran activas, sumado al incremento en el tamaño de las matrices.

La aplicación de una regularización por medio de un lagrangiano aumentado con la incorporación de dos multiplicadores de Lagrange y una variable *slack*, tal como el que se expresa en la Sec. 6.3.2, no requiere la implementación de ningún algoritmo especial para la definición de las restricciones que se encuentran activas. Además, la resolución en un esquema monolítico por medio de un Newton-Raphson, no evidencia tiempos de cálculos extensos, en tanto que los ejemplos presentados en la Sec. 6.3.2 para el caso flexible-rígido han demostrado un muy buen desempeño computacional.

Por las características mencionadas, se ha propuesto la utilización de esta regularización junto con una interpolación suave de la superficie de contacto, similar a lo detallado en la Sec. 6.6.3.

Al igual que en el caso del método de penalidad, la matriz de rigidez tangente es derivada en forma analítica a partir del vector de fuerzas internas referido al contacto.

6.6.9.1. Vector de fuerzas internas

El lagrangiano que se utilizará para el desarrollo del vector de fuerzas internas, es el mismo al presentado en la Ec.(6.15) de la Sec. 6.3.2 y definido según,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, s, \lambda, \lambda_1) = \begin{cases} \Pi(\mathbf{x}) + (k\lambda\phi_1 + \frac{k}{2}\phi_1\phi_1 + k\lambda_1s), & \text{t.q. } c_1, \\ \Pi(\mathbf{x}) + (k\lambda\phi_1 + \frac{k}{2}\phi_1\phi_1) & \text{t.q. } c_2, \end{cases} \quad (6.76)$$

donde $c_1 = [s < 0 \text{ ó } s = 0 \text{ y } \lambda_1 < 0]$, $c_2 = [s > 0 \text{ ó } s = 0 \text{ y } \lambda_1 \geq 0]$, k es un escalar denominado factor de convexidad y,

$$\phi_1 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \mathbf{x}^*) + s, \quad (6.77)$$

es la restricción que incluye la variable *slack* s .

Las variaciones de $\mathcal{L}(\mathbf{x}, s, \lambda, \lambda_1)$, (a partir de ahora denominado simplemente como \mathcal{L}), permiten obtener el vector de fuerzas internas y la matriz de rigidez tangente en forma analítica. El valor estacionario de \mathcal{L} resulta en las siguientes ecuaciones variacionales:

$$\delta\mathcal{L} = \begin{cases} \delta\Pi + k\phi_1\delta\lambda + k(\lambda + \phi_1)\delta\phi_1 + ks\delta\lambda_1 + k\lambda_1\delta s = 0 & \text{t.q. } c_1, \\ \delta\Pi + k\phi_1\delta\lambda + k(\lambda + \phi_1)\delta\phi_1 = 0 & \text{t.q. } c_2. \end{cases} \quad (6.78)$$

El vector de coordenadas generalizadas referido a \mathcal{L} es función de las siguientes variables: i) \mathbf{x} , las coordenadas de los puntos de la superficie aproximada relacionada con la geometría del cuerpo \mathcal{B}^2 y el nodo esclavo \mathbf{x}_0^1 de la malla del cuerpo \mathcal{B}^1 , ii) la

variable *slack* s ; y iii) los multiplicadores de Lagrange λ y λ_1 . Por lo tanto, el vector de coordenadas generalizadas queda definido en forma matricial como:

$$\mathbf{q} = [[\mathbf{x}_0^1 \ \mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_I] \ s \ \lambda \ \lambda_1]^T = [\mathbf{x} \ s \ \lambda \ \lambda_1]^T. \quad (6.79)$$

Teniendo en cuenta que: $\delta\phi_1 = \delta\mathbf{q} \cdot (\partial\phi_1/\partial\mathbf{q})$, $\delta s = \delta\mathbf{q} \cdot (\partial s/\partial\mathbf{q})$, $\delta\lambda = \delta\mathbf{q} \cdot (\partial\lambda/\partial\mathbf{q})$ y $\delta\lambda_1 = \delta\mathbf{q} \cdot (\partial\lambda_1/\partial\mathbf{q})$, la Ec.(6.78) puede expresarse como:

$$\delta\mathcal{L} = \begin{cases} \delta\mathbf{q} \cdot \left[\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{q}} + k\phi_1 \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{q}} + k(\lambda + \phi_1) \frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}} + ks \right] = 0 & \text{t.q. } c_1, \\ \delta\mathbf{q} \cdot \left[\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{q}} + k\phi_1 \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{q}} + k(\lambda + \phi_1) \frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}} + ks \frac{\partial\lambda_1}{\partial\mathbf{q}} + k\lambda_1 \frac{\partial s}{\partial\mathbf{q}} \right] = 0 & \text{t.q. } c_2. \end{cases} \quad (6.80)$$

De la Ec.(6.80) y teniendo en cuenta que la energía potencial elástica alcanza un punto estacionario $\partial\Pi/\partial\mathbf{q} = 0$ en el equilibrio, el vector de fuerzas internas referido a la contribución del contacto queda definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}^c = \begin{cases} k\phi_1 \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{q}} + k(\lambda + \phi_1) \frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}} + ks \frac{\partial\lambda_1}{\partial\mathbf{q}} + k\lambda_1 \frac{\partial s}{\partial\mathbf{q}} & \text{t.q. } c_1, \\ k\phi_1 \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{q}} + k(\lambda + \phi_1) \frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}} & \text{t.q. } c_2. \end{cases} \quad (6.81)$$

Para completar el desarrollo analítico del vector de fuerzas internas \mathbf{F}^c , resta calcular las derivadas parciales $\partial(\cdot)/\partial\mathbf{q}$ de la Ec.(6.81).

- Según la definición matricial del vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} , de la Ec.(6.79) y por medio de las Ecs.(6.77, 6.48), no es difícil demostrar que: $\partial\phi_1/\partial\mathbf{q} = [\mathbf{n} \ -N_1\mathbf{n} \ \dots \ -N_n\mathbf{n} \ 1 \ 0 \ 0]^T$.
- En forma análoga, la derivada parcial de la variable *slack* respecto a \mathbf{q} es: $\partial s/\partial\mathbf{q} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$.
- El multiplicador de Lagrange λ que representa la fuerza de contacto, derivado respecto de \mathbf{q} es: $\partial\lambda/\partial\mathbf{q} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0]^T$.
- Por último, la derivada parcial del segundo multiplicador de Lagrange λ_1 respecto a \mathbf{q} es: $\partial\lambda_1/\partial\mathbf{q} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1]^T$.

Finalmente, con las derivadas parciales recientemente calculadas y la Ec.(6.81), el vector de fuerzas internas relacionado con el contacto queda expresado por los siguientes vectores según se verifique la condición c_1 ó la condición c_2 ,

$$\mathbf{F}^c = \begin{bmatrix} k(\lambda + \phi_1)\mathbf{n} \\ -k(\lambda + \phi_1)N_1\mathbf{n} \\ \vdots \\ -k(\lambda + \phi_1)N_n\mathbf{n} \\ k(\lambda + \phi_1) + k\lambda_1 \\ k\phi_1 \\ ks \end{bmatrix} \text{ t.q. } c_1 \quad \text{ó} \quad \mathbf{F}^c = \begin{bmatrix} k(\lambda + \phi_1)\mathbf{n} \\ -k(\lambda + \phi_1)N_1\mathbf{n} \\ \vdots \\ -k(\lambda + \phi_1)N_n\mathbf{n} \\ k(\lambda + \phi_1) \\ k\phi_1 \\ k\lambda_1 \end{bmatrix} \text{ t.q. } c_2. \quad (6.82)$$

6.6.9.2. Matriz tangente. Método lagrangiano aumentado con dos multiplicadores de Lagrange

La matriz tangente material relacionada con el contacto se obtiene aplicando la variación segunda a \mathcal{L} definido en la Ec.(6.76), es decir, $\delta^2\mathcal{L} = \partial^2\mathcal{L}/\partial\mathbf{q}^2$. De esta manera:

$$\mathbf{K}_{mat}^c = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{q}^2} + k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right)^T + k[\lambda + \phi_1]\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\mathbf{q}^2} & k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right) & k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right) & \mathbf{0} \\ & k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right)^T & k & k \\ & k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right)^T & k & 0 \\ & \mathbf{0}^T & k & 0 \end{bmatrix} \text{ t.q. } c_1,$$

ó

$$\mathbf{K}_{mat}^c = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{q}^2} + k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right)^T + k[\lambda + \phi_1]\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\mathbf{q}^2} & k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right) & k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right) & \mathbf{0} \\ & k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right)^T & k & 0 \\ & k\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}}\right)^T & k & 0 \\ & \mathbf{0}^T & 0 & k \end{bmatrix} \text{ t.q. } c_2,$$

o en forma matricial,

$$\mathbf{K}_{mat}^c = \begin{bmatrix} k \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1\mathbf{n} \\ -N_2\mathbf{n} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1\mathbf{n} \\ -N_2\mathbf{n} \\ \vdots \end{bmatrix}^T & k \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1\mathbf{n} \\ -N_2\mathbf{n} \\ \vdots \end{bmatrix} & k \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1\mathbf{n} \\ -N_2\mathbf{n} \\ \vdots \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ k[\mathbf{n} - N_1\mathbf{n}^T - N_2\mathbf{n}^T \dots] & k & k & k \\ k[\mathbf{n} - N_1\mathbf{n}^T - N_2\mathbf{n}^T \dots] & k & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & k & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ t.q. } c_1, \text{ ó}$$

$$\mathbf{K}_{mat}^c = \begin{bmatrix} k \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1\mathbf{n} \\ -N_2\mathbf{n} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1\mathbf{n} \\ -N_2\mathbf{n} \\ \vdots \end{bmatrix}^T & k \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1\mathbf{n} \\ -N_2\mathbf{n} \\ \vdots \end{bmatrix} & k \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1\mathbf{n} \\ -N_2\mathbf{n} \\ \vdots \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ k[\mathbf{n} - N_1\mathbf{n}^T - N_2\mathbf{n}^T \dots] & k & k & k \\ k[\mathbf{n} - N_1\mathbf{n}^T - N_2\mathbf{n}^T \dots] & k & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \text{ t.q. } c_2.$$

(6.83)

Notar que no se han tenido en cuenta los cambios geométricos de la superficie de contacto ya que la derivación de \mathcal{L} respecto de las coordenadas generalizadas \mathbf{q} no depende del vector normal \mathbf{n} . Esto limita la formulación, pues no es posible considerar problemas en los cuales la interfase de contacto presente curvatura, como en el caso de una esfera sobre una placa plana. Para evitar este inconveniente, es necesario una generalización del desarrollo teniendo en cuenta los cambios del vector normal a la superficie.

Tomando la primera variación de la restricción ϕ_1 de la Ec.(6.77) junto con la Ec.(6.62), se obtiene la siguiente expresión,

$$\delta\phi_1 = \delta\mathbf{q} \cdot [-N_I\mathbf{n} + \mathbf{A}_I^T(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*)] + \delta s, \quad (6.84)$$

donde sólo difiere únicamente de la Ec.(6.62) en la variación de la variable *slack*, entonces,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{q}} = [-N_I \mathbf{n} + \mathbf{A}_I^T(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*)] + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.85)$$

La introducción de la Ec.(6.85) en la Ec.(6.80) permite tener en cuenta geometrías curvas y los cambios geométricos que puede sufrir la interfase de contacto durante el proceso de deformación de los cuerpos. Cuando se considera $\mathbf{A}_I^T(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = 0$, la matriz tangente obtenida a partir de $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \mathbf{q}^2$ resulta en la matriz material de la Ec.(6.83). En caso de incluir en las ecuaciones los términos asociados a la linealización de $\mathbf{A}_I^T(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*)$, es necesario recurrir a las ecuaciones de la Sec. 6.6.7. La matriz tangente resultante es la denominada matriz tangente geométrica,

$$\mathbf{K}_{geom}^c = k(\lambda + \phi_1) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.86)$$

siendo \mathbf{K}_{11} , \mathbf{K}_{12} , \mathbf{K}_{21} y \mathbf{K}_{22} los mismos a los de la Ec.(6.74).

6.6.10. Ejemplos numéricos

En lo siguiente se presentará una serie de ejemplos sencillos para evaluar la capacidad del algoritmo de contacto suave en la obtención de tensiones sin oscilaciones de origen numérico en la zona de contacto. Para establecer criterios de comparación, en algunos de los ejemplos propuestos se ha utilizado el algoritmo de contacto del tipo nodo-segmento con multiplicadores de Lagrange implementado en el software comercial de elementos finitos SAMCEF [SAM07].

6.6.10.1. Cubos de dimensión diferente

El primer ejemplo propuesto consiste en dos cubos flexibles de diferente dimensión, donde a uno de ellos se le aplica una presión uniforme en su cara superior, en tanto que al segundo se le restringe los desplazamientos y giros en su cara inferior. La dimensión de cada lado del cubo superior es de 50 mm, en tanto que para el cubo inferior es de 100 mm. Las propiedades mecánicas y la topología de la malla utilizada se presentan en la Fig. 6.22.

El campo de tensiones obtenido en la dirección de la presión aplicada se muestra en la Fig. 6.23 junto con los resultados obtenidos por medio del software SAMCEF. Se advierte que la tensión en la zona central es la misma para ambos cuerpos, con lo que queda demostrado la conservación de la cantidad de movimiento lineal del algoritmo. La curva de la Fig. 6.24 detalla una comparación por elemento de la tensión en dirección normal a la interface de contacto del cubo inferior entre los resultados del software SAMCEF [SAM07] y los del algoritmo de contacto suave. De la curva se concluye que existe buena correlación entre ambos métodos.

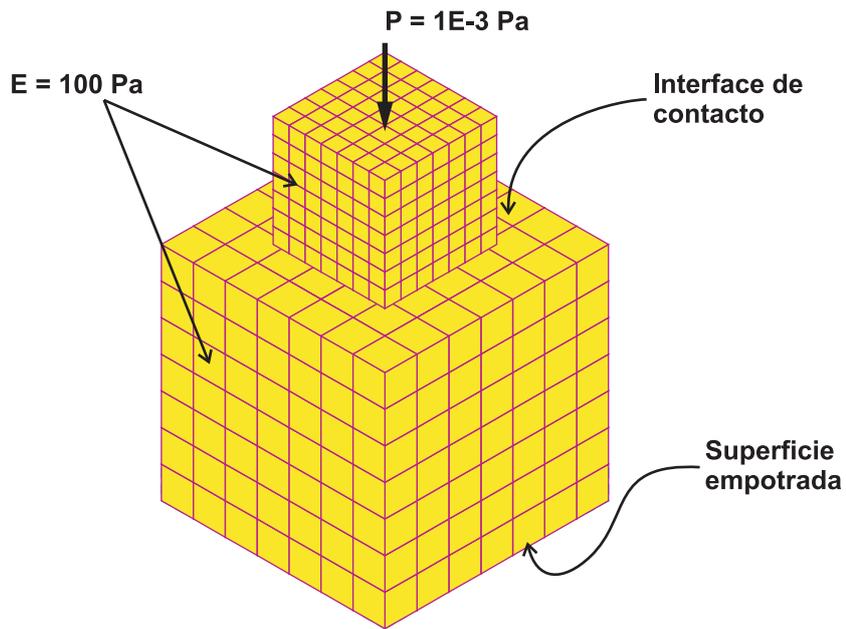


Figura 6.22: Contacto entre dos cubos de diferente dimensión. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.

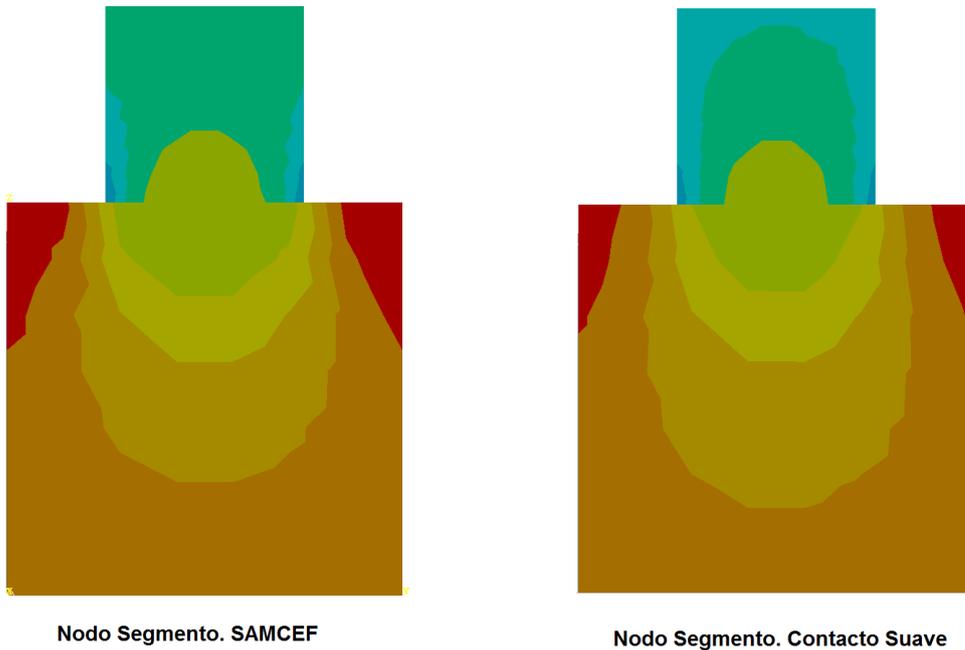


Figura 6.23: Campo de tensiones en dirección de la carga aplicada para una sección en la zona central. Comparación con el software SAMCEF.

6.6.10.2. Cubos de igual dimensión

Los resultados que se han obtenido para el ejemplo anterior han sido satisfactorios; sin embargo, cuando se quiere utilizar el algoritmo de contacto suave en el caso

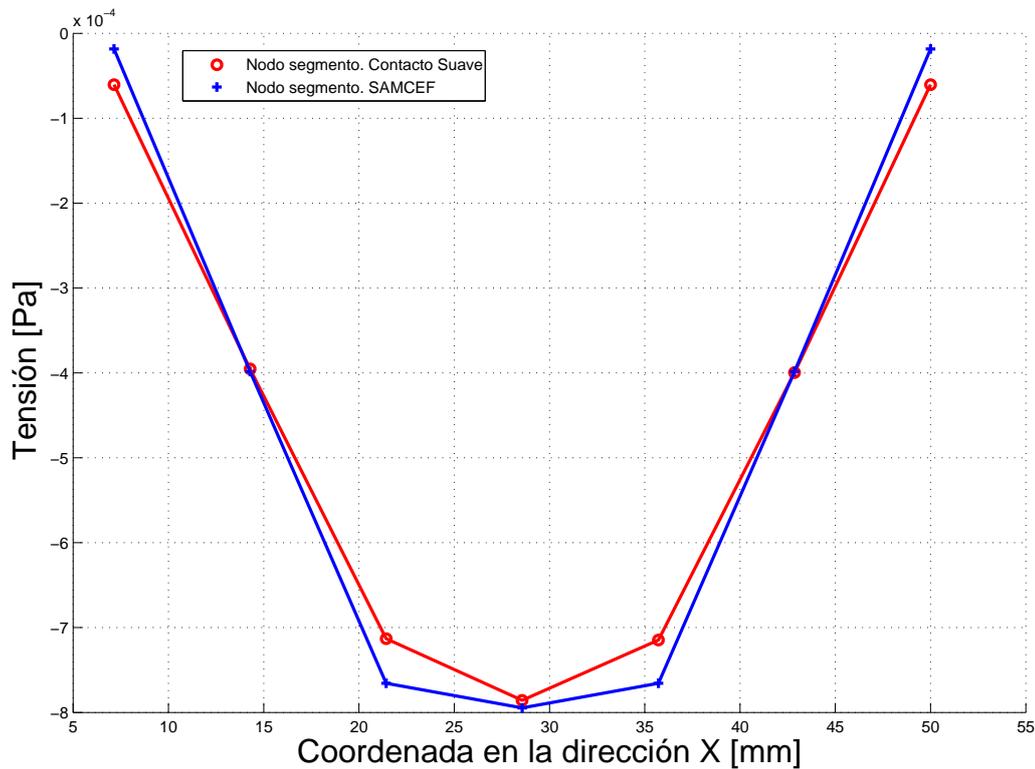


Figura 6.24: Tensión en la interfase de contacto. Comparación entre el software SAMCEF y el algoritmo de contacto suave.

que los cuerpos tengan una interfase de contacto de igual dimensión, aparecen ciertas anomalías que merecen especial atención. En este sentido, se propone un ejemplo sencillo para ser resuelto con el algoritmo de contacto suave, que consiste de dos cubos de igual dimensión con lados de 1mm de longitud, tal como se muestra en la Fig. 6.25, donde además se detalla la topología de las mallas, propiedades mecánicas y condiciones de borde aplicadas.

La Fig. 6.26 revela una interfase de contacto con una distribución de tensiones no homogénea. Estos defectos se acentúan aún más en los bordes de los cubos.

El efecto de la no uniformidad de las tensiones se puede explicar por el hecho que los esquemas de contacto del tipo nodo-segmento no superan los tests de la parcela. En cierta manera, este ejemplo constituye en sí mismo un test de la parcela (ver [PT90] y Sec. 6.7). No obstante, se esperaba que con el suavizado de superficies, que implica un cálculo preciso del vector normal y tangencial, se alcancen resultados más satisfactorios que los que demuestra este simple ejemplo.

Asimismo, los métodos de suavizado de superficie exigen una cantidad de elementos considerables en la zona de contacto para tener una buena aproximación de la función de interpolación. Si se considera el esquema de Loop, éste requiere de doce triángulos vecinos a cada elemento, ver Fig. 6.21. De modo que, en aquellos ejemplos donde la superficie de contacto es muy reducida con imposibilidad de generar un refinamiento importante; tal es el caso del ejemplo que se presenta a continuación;

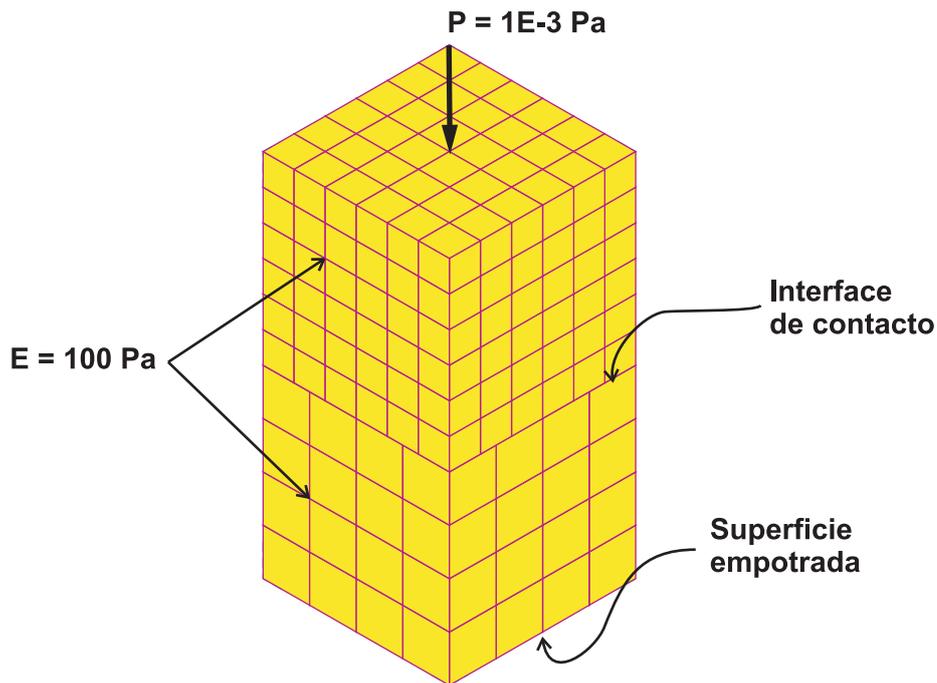


Figura 6.25: Cubos de igual dimensión. Topología de las mallas, condiciones de borde y propiedades mecánicas utilizadas.

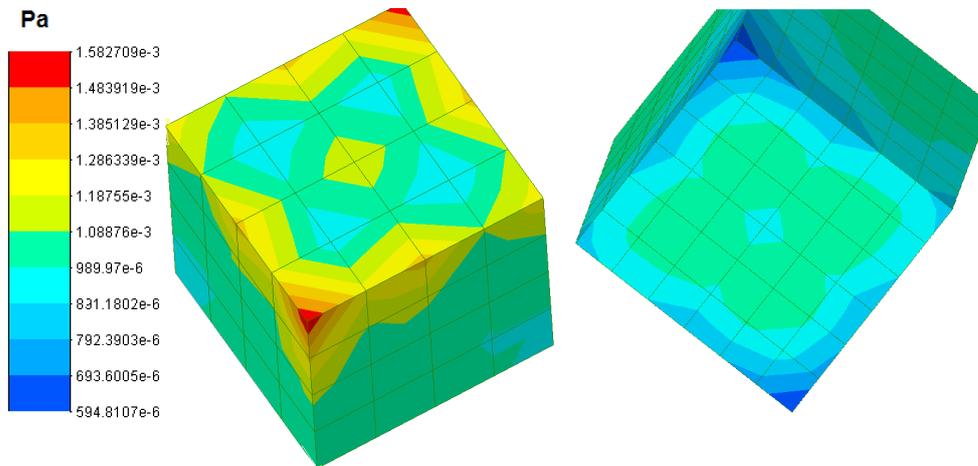


Figura 6.26: Tensión normal en la interface de contacto.

contribuye a que los resultados que se obtengan del campo de tensiones en la zona de contacto no resulten muy precisos.

6.6.10.3. Válvula de motor de combustión interna

Uno de los objetivos principales de esta tesis consiste en predecir y estudiar las tensiones que se generan en la zona de contacto en una válvula de motor de combustión interna. Se mostró que con un algoritmo de contacto flexible-rígido es posible resolver el problema aunque con oscilaciones no deseables en la tensión y

limitaciones al considerar un solo cuerpo flexible en el análisis. Es decir, para el caso de una válvula de motor de combustión interna, no es posible analizar las tensiones en el asiento.

En lo siguiente, se utilizará el algoritmo de contacto suave para resolver el contacto de una válvula de motor de combustión interna. El valor de la presión aplicada, es del orden de las que soporta este tipo de componentes durante su normal funcionamiento. Las condiciones de borde y las propiedades mecánicas escogidas son las mismas que se han utilizado para el caso flexible rígido y que se muestran en la Fig. 6.14

La Fig. 6.27 muestra el campo de tensiones en la zona de contacto. Como era de esperar, por las conclusiones obtenidas de los ejemplos anteriores, se aprecian puntos con fuerte concentración de tensiones a lo largo de la interfase de contacto. Este tipo de distribución no es admisible cuando se requiere un estudio local de las tensiones, como ser en el caso de desgaste. La Fig. 6.28 muestra una curva comparativa entre

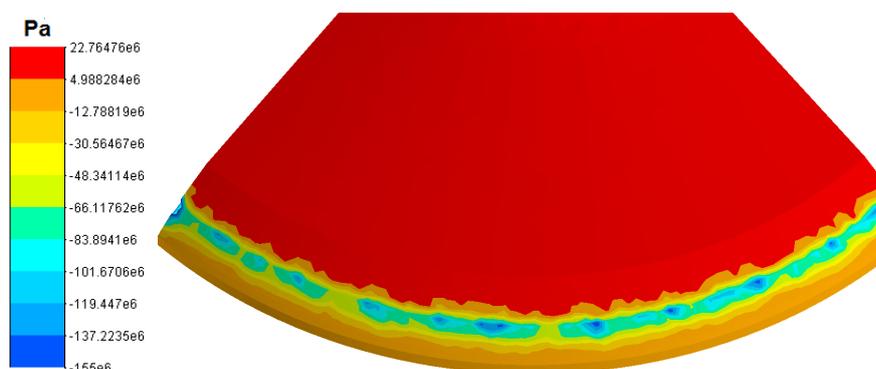


Figura 6.27: Tensiones de contacto en una válvula de motor de combustión interna.

la tensión obtenida por elemento en la zona de contacto utilizando el algoritmo de contacto suave y el software SAMCEF. Ambos muestran oscilaciones de la tensión de una magnitud considerable.

6.6.11. Conclusiones

Los algoritmos del tipo nodo-segmento con suavizado de superficie no han mostrado un buen desempeño en cuanto a la regularidad de las tensiones en la zona de contacto, en especial cuando los cuerpos tienen una interface de contacto de similar dimensión. Esto es consecuencia de que este tipo esquemas no supera los tests de la parcela. Si bien las tensiones pueden ser consideradas aceptables desde un punto de vista global, (fuera de la zona de contacto) los resultados que se han obtenido hasta el momento no cumplen con el objetivo impuesto. De modo que es necesario recurrir a otras metodología, como ser los algoritmos del tipo segmento-segmento.

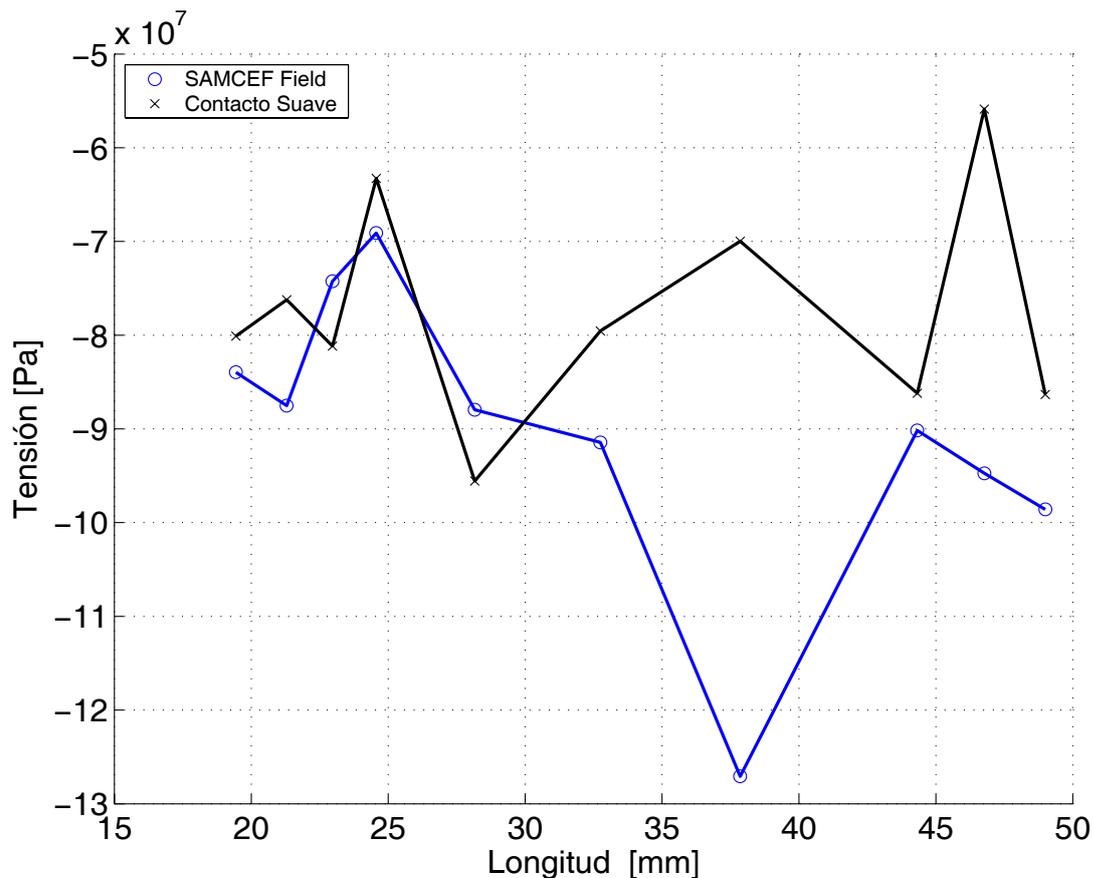


Figura 6.28: Comparación de la distribución de las tensiones por elemento en la zona de contacto de una válvula de motor de combustión interna utilizando el algoritmo de contacto suave y el software SAMCEF.

6.7. Método mortár

En la sección anterior se mostraron los problemas numéricos relacionados con el esquema nodo-segmento, como ser la concentración y la no regularidad de las tensiones en ciertos puntos de la malla, especialmente en los extremos de la superficie de los cuerpos en contacto, independientemente de la reducción del tamaño de los elementos. Si bien a un nivel global los valores de tensión son los correctos, es necesario un esfuerzo importante para conseguir cierta topología de malla que permita arribar a resultados aceptables. En referencia a la utilización de este algoritmo junto con otro de desgaste, la concentración de tensiones en zonas puntuales generaría resultados que no se corresponderían con la realidad.

Los esquemas nodo-segmento no verifican los denominados test de la parcela. Estos tests fueron introducidos por Taylor y Papadopoulos [PT90], y pueden ser usados para analizar si la tensión de contacto normal se traduce exactamente entre dos interfaces en contacto. Las aproximaciones del tipo nodo-segmento con doble pasada verifican los tests de la parcela pero, como se ha mencionado, pueden bloquearse debido a las sobre restricciones introducidas en la formulación; adicionalmente, con

superficies de contacto no suaves, generan saltos de la presión cuando los nodos esclavos se deslizan entre segmentos adyacentes. Tampoco cumplen con la condición de Babuska-Brezzi [BF91], causando un mal condicionamiento de las matrices y pobre tasa de convergencia, típicas manifestaciones de la sobre restricción. A pesar de ello, estos métodos son a menudo elegidos para problemas de contacto entre cuerpos flexibles por su capacidad de verificar el test de la parcela en 2D y sólo en ciertas configuraciones de mallas tridimensionales para elementos de bajo orden. Sin embargo, para elementos de orden superior, no son capaces de superar los tests de la parcela.

Los métodos nodo-segmenro usan la colocación para integrar el trabajo virtual de contacto y no existe una representación explícita de la presión, a diferencia de los métodos segmento-segmenro, que integran el trabajo virtual de contacto usando una cuadratura numérica con alguna interpolación en la presión. Estos proyectan la superficie de un elemento esclavo sobre los elementos *master* opuestos. De esta forma los algoritmos segmento-segmenro superen los tests de la parcela.

La mayoría de los métodos segmento-segmenro desarrollados utilizan algún tipo de superficie de contacto intermedia, o proyección de superficies. Estos fueron aplicados inicialmente a interfases de contacto planas en ejemplos 2D y luego ampliados a mallas 3D con superficies planas [Woh01, DKM00, KLPV01]. En el trabajo de Park y Felippa [PF02] se propone una formulación con una superficie de contacto intermedia entre los cuerpos de contacto determinada por un conjunto de ecuaciones auxiliares tal que se satisfaga el equilibrio en dicha superficie. La ventaja de este método es que evita la integración de los campos de multiplicadores de Lagrange pero tiene como gran inconveniente la complejidad para ser extendido a problemas 3D. Las diferentes aproximaciones propuestas difieren generalmente en la forma de interpolar la presión de contacto y en la manera en que se efectúa la proyección entre los elementos. Los primeros trabajos desarrollados en este sentido, utilizaron el método de penalidad, con aplicaciones sólo a problemas bidimensionales [PT92, SWT85, PT90].

Específicamente, el primer trabajo que ha utilizado los métodos mortár fue el propuesto por Bernardi *et al.* [BMP00], donde se muestra la estabilidad del método en relación a las condiciones de Babuska-Brezzi, en tanto que otras variantes pueden encontrarse en las referencias [BHL97, ML00]. A diferencia de los algoritmos nodo-segmenro, los métodos mortár son únicamente de una pasada y verifican los tests de la parcela debido a cómo están formulados. De esta manera, la propuesta de un esquema de doble pasada sería completamente innecesaria.

En el trabajo de Puso y Laursen [PL04], se presenta una versión del método mortár para problemas 3D con grandes deformaciones. El método propuesto utiliza un esquema de penalidad, aplicable a elementos de orden superior, como ser los cuadráticos, y es de simple pasada. Utiliza la proyección de las superficies de los elementos en contacto sobre una superficie plana; en cambio, en la propuesta de Puso [Pus04], la proyección se realiza sobre una malla intermedia suave, definida por un parche con funciones de forma de Hermite que garantiza continuidad C^1 sólo cuando la malla es regular. Los métodos mortár han continuado su desarrollo extendiéndolos a aplicaciones con fricción [PTS08, FW06, PL04], o en problemas de auto contacto, como el que se presenta en Yang y Laursen [YL08]. Por las características mencio-

nadas, los métodos del tipo mortar parecen ser los más apropiados para un estudio de desgaste ya que, además de verificar los tests de la parcela, la fuerza de contacto se distribuye en una superficie evitando la concentración de tensiones, como sucede en un esquema del tipo nodo-segmento.

En esta Tesis, siguiendo el trabajo de Puso y Laursen [PL04], se propone un algoritmo de contacto mortar con una regularización del tipo de penalidad, aplicable a problemas tridimensionales. El algoritmo fue implementado en el código de elementos finitos Oofelie [OOf10], bajo el entorno de programación C++. Los ejemplos numéricos propuestos muestran que el algoritmo supera los tests de la parcela con resultados de tensiones muy regulares en mallas arbitrarias. Al igual que las propuestas anteriores, en esta sección se detallan las ecuaciones obtenidas de la derivación analítica de la matriz tangente. Las diferencias con respecto al trabajo de Puso y Laursen [PL04] serán destacadas a lo largo del desarrollo de la sección.

6.7.1. Descripción del problema

De manera similar al caso de contacto suave, Sec. 6.2, el movimiento de los cuerpos \mathcal{B}^α , $\alpha = 1, 2$ es expresado por el mapeo $\boldsymbol{\chi}^\alpha : \bar{\Omega}_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, y la posición actual de las partículas materiales es calculada via $\mathbf{x}^\alpha = \boldsymbol{\chi}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$. A diferencia de los desarrollos anteriores, en el contacto tipo mortar la porción de la frontera en contacto Γ_c está dada por una intersección de las superficies Γ_c^α , esto es $\Gamma_c = \Gamma_c^1 \cap \Gamma_c^2$, ver Fig. 6.29. La convención adoptada en esta Tesis para la definición de las superficies mortar y no mortar es la siguiente: Γ_c^1 denota la superficie no-mortar o esclava tal que $\Gamma_c \equiv \Gamma_c^1$, en tanto que Γ_c^2 es la superficie mortar o master. La estrategia utilizada para discretizar el dominio es por medio del MEF, de esta forma, la malla de la superficie de contacto puede ser parametrizada como,

$$\mathbf{x}^\alpha = \sum_{A=1}^{n^\alpha} N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \mathbf{x}_A^\alpha, \quad (6.87)$$

donde: $\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}_A^\alpha \in \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$, n^α es el número de nodos de la malla en Γ_c^α y $N_A^\alpha : \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ son las clásicas funciones de forma, bilineales en caso de utilizar mallas con hexaedros, o triangulares para el caso de mallas formadas por tetraedros.

El vector de coordenadas nodales en \mathbb{R}^3 para las superficies de contacto es definido de la siguiente manera,

$$\boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{x}_1^1 \ \mathbf{x}_2^1 \ \dots \ \mathbf{x}_n^1 \mid \mathbf{x}_1^2 \ \mathbf{x}_2^2 \ \dots \ \mathbf{x}_n^2]^T. \quad (6.88)$$

Notar que $\boldsymbol{\Phi}$ se encuentra ordenado de forma tal que en las primeras componentes se encuentran las coordenadas de los nodos referidos a la frontera Γ_c^1 (no mortar) y luego las correspondientes a Γ_c^2 (mortar).

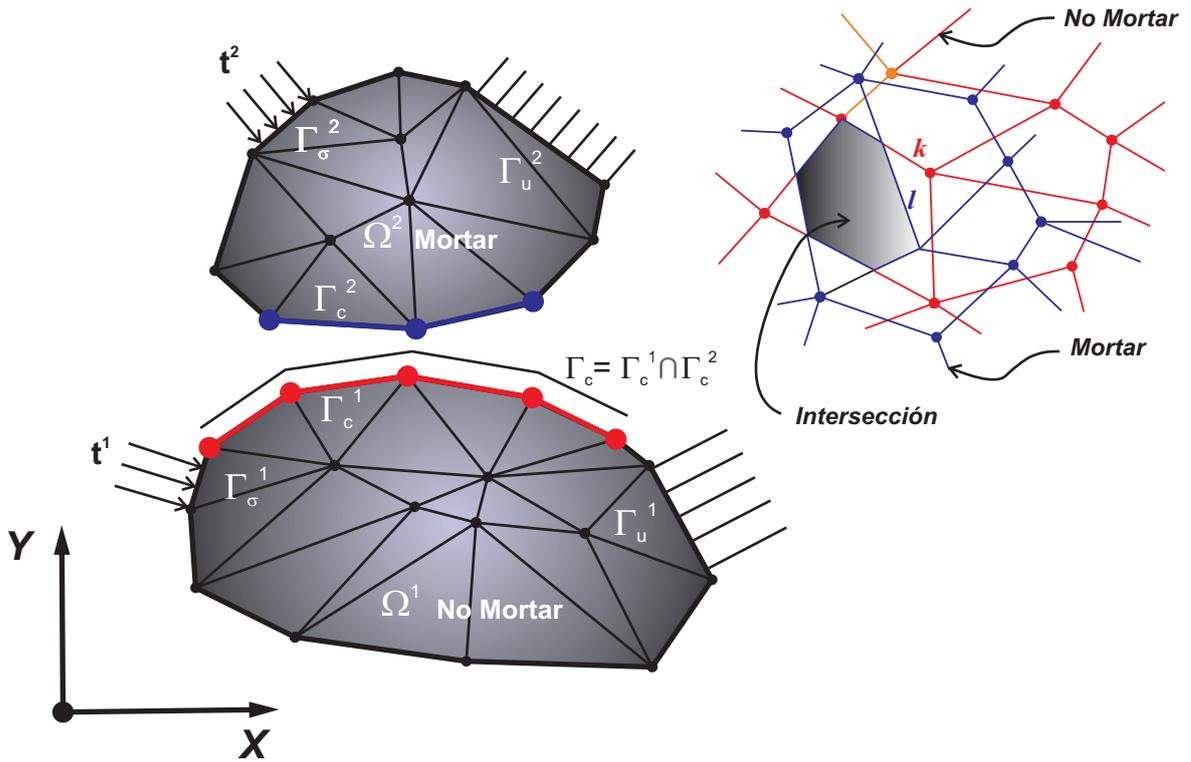


Figura 6.29: Notación utilizada en el método mortar para los cuerpos en contacto.

6.7.2. Trabajo virtual asociado al contacto

Cuando los cuerpos \mathcal{B}^1 y \mathcal{B}^2 interactúan mecánicamente sobre la superficie de contacto, el trabajo virtual asociado al contacto se define de la siguiente manera,

$$\delta \Pi^c = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Gamma_c^\alpha} \mathbf{t}^\alpha \cdot \delta \mathbf{x}^\alpha d\Gamma_c^\alpha = \delta \Phi \cdot \mathbf{F}^\alpha, \quad (6.89)$$

donde \mathbf{t}^α denota el vector tracción de Cauchy. Asumiendo que existe conservación de la cantidad de movimiento lineal en la interfase de contacto, $\mathbf{t}^1 d\Gamma_c^1 = -\mathbf{t}^2 d\Gamma_c^2$; y que $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2 \approx 0$, la Ec.(6.89) puede ser escrita como:

$$\delta \Pi^c = \int_{\Gamma_c^1} \mathbf{t}^1 \cdot (\delta \mathbf{x}^1 - \delta \mathbf{x}^2) d\Gamma_c^1 = \delta \Phi \cdot \mathbf{F}^\alpha. \quad (6.90)$$

Utilizando las siguientes parametrizaciones para las superficies de contacto y el vector tracción,

$$\mathbf{x}^1 = \sum_{B=1}^{n^1} N_B^1(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{x}_B^1, \quad \mathbf{x}^2 = \sum_{C=1}^{n^2} N_C^2(\boldsymbol{\xi}^2) \mathbf{x}_C^2, \quad \mathbf{t} = \sum_{A=1}^{n^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{t}_A, \quad (6.91)$$

junto con la Ec.(6.90), el principio de los trabajos virtuales asociado al contacto se aproxima como

$$\delta \Pi^c = \sum_{A=1}^{n^1} \sum_{B=1}^{n^1} \sum_{C=1}^{n^2} \mathbf{t}_A \cdot \left(\int_{\Gamma_c^1} N_A^1 N_B^1 d\Gamma_c^1 \delta \mathbf{x}_B^1 - \int_{\Gamma_c^1} N_A^1 N_C^2 d\Gamma_c^1 \delta \mathbf{x}_C^2 \right). \quad (6.92)$$

Luego, la Ec.(6.92) puede ser escrita en forma más compacta,

$$\delta \Pi^c = \sum_{A=1}^{n^1} \mathbf{t}_A \cdot \delta \mathbf{g}_A, \quad (6.93)$$

donde,

$$\delta \mathbf{g}_A = \sum_{B=1}^{n^1} \sum_{C=1}^{n^2} (n_{AB}^1 \delta \mathbf{x}_B^1 - n_{AC}^2 \delta \mathbf{x}_C^2), \quad (6.94)$$

denota la primera variación del hueigo o *gap* del nodo esclavo A y

$$\begin{aligned} n_{AB}^1 &= \int_{\Gamma_c^1} N_A^1 N_B^1 d\Gamma_c^1, \\ n_{AC}^2 &= \int_{\Gamma_c^1} N_A^1 N_C^2 d\Gamma_c^1, \end{aligned} \quad (6.95)$$

son los denominados factores de peso. El algoritmo utilizado para la obtención de n_{AB}^1 y n_{AC}^2 será presentado en la Sec. 6.7.4.

Desarrollando las sumatorias y teniendo en cuenta la notación definida para el vector de coordenadas nodales Φ dada por la Ec.(6.88), la variación de la energía potencial elástica debida al contacto tiene la siguiente expresión matricial,

$$\delta \Pi^c = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_1^1 \\ \delta \mathbf{x}_2^1 \\ \delta \mathbf{x}_3^1 \\ \delta \mathbf{x}_4^1 \\ \delta \mathbf{x}_1^2 \\ \delta \mathbf{x}_2^2 \\ \delta \mathbf{x}_3^2 \\ \delta \mathbf{x}_4^2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{A1}^1 \\ \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{A2}^1 \\ \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{A3}^1 \\ \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{A4}^1 \\ \sum_{C=1}^n -\mathbf{t}_C n_{C1}^2 \\ \sum_{C=1}^n -\mathbf{t}_C n_{C2}^2 \\ \sum_{C=1}^n -\mathbf{t}_C n_{C3}^2 \\ \sum_{C=1}^n -\mathbf{t}_C n_{C4}^2 \end{bmatrix}. \quad (6.96)$$

De la Ec.(6.96) se desprende que el vector de fuerzas internas referido al contacto es:

$$\mathbf{F}_{AB}^\alpha = \sum_{A=1}^n \mathbf{t}_A n_{AB}^\alpha. \quad (6.97)$$

6.7.3. Regularización de las restricciones normales

El requerimiento físico de impenetrabilidad e interacción de compresión entre los cuerpos es impuesto por medio de una restricción de contacto normal. Como se ha mencionado en la Sec. 6.2.1, el vector tracción de Cauchy \mathbf{t} puede ser descompuesto en una componente normal $t_N \mathbf{n}$ y en otra tangencial \mathbf{t}_T . Luego, con las expresiones discretas del trabajo virtual desarrolladas en la Sec. 6.7.1, la restricción del contacto normal puede establecerse con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) como

$$t_{N_A} \geq 0, \quad g_A \leq 0, \quad t_{N_A} g_A = 0, \quad (6.98)$$

6.7.4. Cómputo de los factores de peso. Proyecciones

Para llevar a cabo las integraciones en la interface Γ_c , es necesario definir una superficie topológica sobre la cual realizar las aproximaciones de las integrales. Aunque son muchas las posibilidades, en esta Tesis se han seguido las ideas desarrolladas por Puso y Laursen [PL04], donde se aproxima la cara de un elemento k no mortár, ver Fig. 6.29, con un elemento \tilde{k} que pertenece a un plano \mathbf{p} definido por un vector normal \mathbf{n} . A diferencia de la propuesta de Puso y Laursen [PL04], dicho vector normal es obtenido por el producto cruz de las diagonales de la cara del elemento k , ver Fig. 6.31-a. La suma de todas las superficies \tilde{k} representa la superficie de integración Γ_c de la Ec.(6.89).

En un elemento no mortár k , la cara que pertenece a la superficie de contacto Γ_c^1 está definida por un conjunto local de nodos denominado $\mathcal{NM}(k)$ que define la siguiente parametrización: $\mathbf{x}_h^1 = \sum_{\mathcal{NM}(k)} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{x}_A^1$. En forma análoga, para la cara de un elemento mortár l que pertenece a Γ_c^2 , el conjunto de nodos locales \mathcal{M} define la parametrización $\mathbf{x}_h^2 = \sum_{\mathcal{M}(l)} N_B^2(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{x}_B^2$.

Una alternativa para la proyección de los nodos no-mortár y mortár en el plano \mathbf{p} , es a través de una base global definida en \mathbb{R}^3 . De esta manera, es posible utilizar el algoritmo de intersección lineal paramétrico Cyrus-Beck descrito en la referencia [FvDFH97]. Esta metodología fue la adoptada por la mayoría de los autores que han publicado hasta el momento trabajos referidos a los métodos mortár [PL01b, PL04, PTS08]. La definición de una base global en \mathbb{R}^3 con una lejanía considerable de la superficie de contacto, como sucede en problemas de aplicación, podría causar problemas numéricos en el algoritmo de intersección, contribuyendo al deterioro de la tasa de convergencia. Otra opción que facilita notablemente el desarrollo de las ecuaciones es la definición de una base local para cada elemento no mortár que define un plano de proyección \mathbf{p} , tal como lo representa la Fig. 6.31-a.

En esta Tesis, se emplea un algoritmo de intersección de segmentos basado en reglas de avance y en la definición paramétrica en \mathbb{R}^2 de una recta, ver por ejemplo [O'R98]. Tomando una base $\mathcal{V}/\mathcal{V} = \{\check{\mathbf{e}}_1, \check{\mathbf{e}}_2, \check{\mathbf{e}}_3\}$, las proyecciones de las coordenadas de un elemento mortár o no-mortár en \mathbf{p} pueden calcularse como

$$\mathbf{y}_A^\alpha = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{e}}_1 \cdot (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1) \\ \check{\mathbf{e}}_2 \cdot (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1) \end{bmatrix}, \quad (6.103)$$

donde \mathbf{x}_0^1 es un punto que pertenece a un elemento no-mortár k , por ejemplo, uno de sus vértices. De esta manera, las coordenadas \mathbf{y}_A^α de los nodos no-mortár y mortár, quedan definidos con sólo dos componentes. Los versores $\check{\mathbf{e}}_1$ y $\check{\mathbf{e}}_2$ son calculados por medio de las diagonales para cada elemento no-mortár y el vector $\check{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{n}$, normal al plano \mathbf{p} , como $\check{\mathbf{e}}_1 \times \check{\mathbf{e}}_2$, ver Fig. 6.31-a.

6.7.5. Algoritmo para el cálculo de los factores de peso

En esta sección se describe el algoritmo utilizado para el cómputo de los factores de peso n_{AB}^α .

- Para cada elemento no-mortár k ,

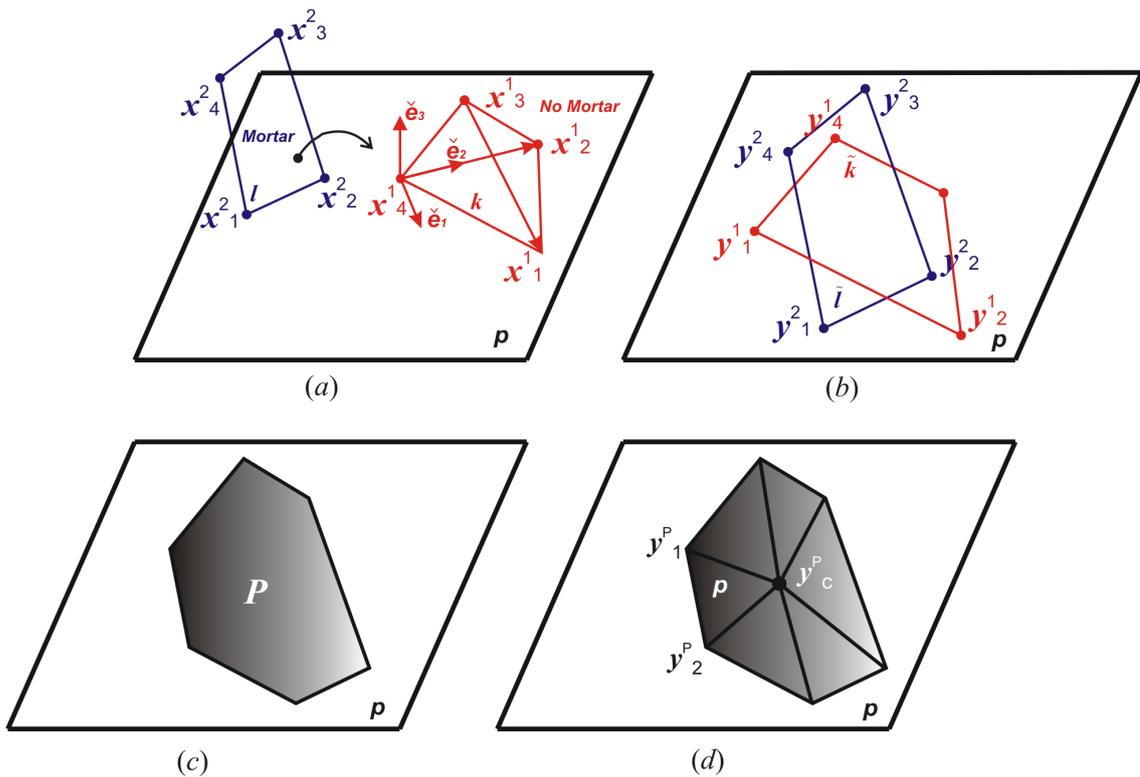


Figura 6.31: (a) Elemento no-mortar k , elemento mortor l , plano de proyección \mathbf{p} , base $\mathcal{V} = \{\check{e}_1, \check{e}_2, \check{e}_3\}$; (b) proyección de los elementos k y l en el plano \mathbf{p} , (c); polígono \mathcal{P} formado con el algoritmo de intersección; (d) división de \mathcal{P} en triángulos.

- Formar el plano \mathbf{p} con base \mathcal{V} .
- Proyectar las coordenadas de los nodos no-mortar $\mathbf{x}_A^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en el plano \mathbf{p} , obteniendo los puntos: $\mathbf{y}_A^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \in \tilde{k}$, referido a \mathcal{V} , ver Fig. 6.31-b.
- **Para cada elemento mortor l ,**
 - Proyectar las coordenadas de los nodos mortor $\mathbf{x}_A^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en el plano \mathbf{p} , obteniendo los puntos: $\mathbf{y}_A^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \in \tilde{l}$, referido a \mathcal{V} .
 - Utilizar el algoritmo de intersección para formar un polígono $\mathcal{P} = (\tilde{k} \cap \tilde{l}) \subset \mathbf{p}$, ver Fig. 6.31-c.
 - Ubicar el centro geométrico \mathbf{y}_P^C del polígono \mathcal{P} .
 - Formar n^p triángulos de vértices $\mathbf{y}_I^P \in \mathcal{P}$ y \mathbf{y}_P^C , ver Fig. 6.31-d.
 - Cada triángulo P admite la siguiente parametrización:

$$\mathbf{y}^P = \sum_{I=1}^3 N_I^P(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}_I^P, \quad (6.104)$$

donde N_I son las funciones de forma clásicas para un triángulo.

- Utilizar los n_g puntos de Gauss, conocidos para un triángulo lineal, y ubicarlos en cada triángulo P .
- Para establecer una relación entre los puntos de Gauss $\boldsymbol{\xi}$ de un triángulo P y un elemento no-mortar k o mortor l , es necesario calcular

las coordendas locales paramétricas ξ_g^α como,

$$\sum_{I=1}^3 N_I^P(\xi) \mathbf{y}_I^P = \sum_{A=1}^{364} N_A^\alpha(\xi_g^\alpha) \mathbf{y}_A^\alpha. \quad (6.105)$$

Este sistema es resuelto por medio de un Newton Raphson si los elementos k o l son cuadrangulares, o en forma directa si son triangulares.

- Para cada triángulo p , calcular los factores de peso definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} n_{AB}^{1,P} &= 2 A^P \sum_{g=1}^{n_g} N_A^1(\xi_g^1) N_B^1(\xi_g^1), \\ n_{AC}^{2,P} &= 2 A^P \sum_{g=1}^{n_g} N_A^1(\xi_g^1) N_C^2(\xi_g^2), \end{aligned} \quad (6.106)$$

donde A^P es el área de cada triángulo P , ver Sec. 6.7.8.

- Finalmente sumar todas las contribuciones $n_{AB}^{\alpha,P}$ de cada triángulo,

$$n_{AB}^1 = n_{AB}^1 + \sum_{p=1}^{n_p} n_{AB}^{1,P}, \quad n_{AC}^1 = n_{AC}^1 + \sum_{p=1}^{n_p} n_{AC}^{1,P}. \quad (6.107)$$

6.7.6. Linealización de las fuerzas de contacto. Matriz tangente

La matriz tangente es obtenida a partir de la linealización del vector de fuerzas internas presentado en la Ec.(6.102),

$$\Delta \mathbf{F}_{AB}^\alpha = t_A \boldsymbol{\nu}_A \Delta n_{AB}^\alpha + \kappa n_{AB}^\alpha (\boldsymbol{\nu}_A \otimes \boldsymbol{\nu}_A) \Delta \mathbf{g}_A + \kappa n_{AB}^\alpha (t_A \mathbf{I} + \boldsymbol{\nu}_A \otimes \mathbf{g}_A) \Delta \boldsymbol{\nu}_A. \quad (6.108)$$

La linealización del huelgo \mathbf{g}_A que se muestra en la Ec.(6.108) es obtenida utilizando las Ecs.(6.100, 6.95) y resulta en,

$$\Delta \mathbf{g}_A = \sum_{B=1}^{n^1} \sum_{C=1}^{n^2} n_{AB}^1 \Delta \mathbf{x}_B^1 - n_{AC}^2 \Delta \mathbf{x}_C^2 + \Delta n_{AB}^1 \mathbf{x}_B^1 - \Delta n_{AC}^2 \mathbf{x}_C^2. \quad (6.109)$$

Luego, para la linealización de n_{AB}^α , se requiere derivar los factores de peso de cada triángulo P , los $n_{AB}^{\alpha,P}$, y luego ensamblar cada contribución en n_{AB}^α , como se presentó en la Sec. 6.7.5. Utilizando la Ec.(6.95), la linealización de los factores de peso $n_{AB}^{\alpha,P}$ puede ser escrita de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \Delta n_{AB}^{\alpha,P} &= \Delta \int_{\Gamma_c^\alpha} N_A^1(\xi^1) N_B^\alpha(\xi^\alpha) d\Gamma_c^1 \\ &= \sum_{g=1}^{n_g} [\Delta N_A^1(\xi^1) N_B^\alpha(\xi^\alpha) + N_A^1(\xi^1) \Delta N_B^\alpha(\xi^\alpha)] w_g A^P + n_{AB}^{\alpha,P} \Delta A^P / A^P. \end{aligned} \quad (6.110)$$

donde w_g son los factores de peso. Para completar el desarrollo de la Ec.(6.110), es necesario definir las linealizaciones de las funciones de forma N_A^α y la correspondiente al área de cada triángulo A^P del polígono \mathcal{P} .

6.7.7. Linealización de las funciones de forma

La coordenada de los puntos de Gauss de un triángulo P y un elemento no mortario o mortario, son establecidas via la siguiente relación,

$$\sum_{I=1}^3 N_I^P(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}_I^P = \sum_{A=1}^{364} N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \mathbf{y}_A^\alpha. \quad (6.111)$$

Tomando la derivada parcial de las funciones de forma en la dirección ξ_β^α , con $\beta = 1, 2$,

$$\Delta N_A^\alpha = \frac{\partial N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha)}{\partial \xi_\beta^\alpha} \Delta \xi_\beta^\alpha = N_{A,\beta}^\alpha \Delta \xi_\beta^\alpha, \quad (6.112)$$

y junto con la Ec.(6.111), la variación de las coordenadas $\boldsymbol{\xi}^\alpha$ para la superficie no-mortario o mortario en la dirección β es obtenida como,

$$\Delta \xi_\beta^\alpha = \boldsymbol{\tau}_\beta^{\alpha T} \cdot \left(\sum_{I=1}^3 N_I^P(\boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{y}_I^P - \sum_{A=1}^{364} N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \Delta \mathbf{y}_A^P \right), \quad (6.113)$$

donde,

$$\boldsymbol{\tau}_\beta^{\alpha T} = \left[\frac{\partial N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha)}{\partial \xi_\beta^\alpha} \mathbf{y}_A^\alpha \right]^{-1}. \quad (6.114)$$

Notar que para la obtención de los $\boldsymbol{\tau}_\beta^{\alpha T}$, simplemente hay que invertir un sistema de 2x2, a diferencia del trabajo de Puso y Laursen [PL04], que requiere de la definición de una base covariante, complicando de esta manera el desarrollo de las ecuaciones. Por lo tanto, con las Ecs.(6.112, 6.113) la variación de la función de forma evaluada en los puntos de Gauss $\boldsymbol{\xi}_g^\alpha$ puede ser escrita como,

$$\Delta N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}_g^\alpha) = N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}_g^\alpha) \boldsymbol{\tau}_\beta^{\alpha T} \cdot \left(\sum_{I=1}^3 N_I^P(\boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{y}_I^P - \sum_{A=1}^{364} N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}_g^\alpha) \Delta \mathbf{y}_A^P \right). \quad (6.115)$$

La Ec.(6.115) depende de las variaciones de las coordenadas de los nodos de los triángulos P , los $\mathbf{y}_I^P \in \mathcal{P}$, como así también la de los elementos no-mortario y mortario, los $\mathbf{y}_A^P \in \mathcal{P}$. Sin embargo, para derivar la matriz tangente es necesario transformar las ecuaciones de forma que sean expresadas sólo en términos de las coordenadas de los nodos de los elementos no-mortario y mortario, los $\mathbf{x}_A^\alpha \in \mathbb{R}^3$, y ordenados según el vector $\boldsymbol{\Phi}$ descrito en la Ec.(6.88).

Se define a $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ como el vector de coordenadas de los nodos no-mortario y mortario de dos componentes de los elementos k y l , referido a una base \mathcal{V} .

La matriz que relaciona las coordenadas de los nodos de cada triángulo del polígono \mathcal{P} con el vector de coordenadas nodales $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ es denominada \mathbf{D}_{IK}^P . En forma matemática, lo expresado anteriormente resulta en la siguiente expresión genérica,

$$\Delta \mathbf{y}_I^P = \mathbf{D}_{IK}^P \Delta \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{KL} = \mathbf{D}_{IK}^{P1} \Delta \mathbf{y}_K^1 + \mathbf{D}_{IL}^{P2} \Delta \mathbf{y}_L^2, \quad (6.116)$$

donde la obtención de \mathbf{D}_{IK}^P se detalla en el Apéndice C. Los vectores \mathbf{y}_K^1 y \mathbf{y}_L^2 denotan las coordenadas nodales de los elementos no-mortar y mortar, respectivamente, \mathbf{D}_{IK}^{P1} y \mathbf{D}_{IK}^{P2} son particiones de la matriz \mathbf{D}_{IK}^P correspondientes al lado no-mortar y mortar, respectivamente. Con la Ec.(6.116), la linealización de las funciones de forma de la Ec.(6.112), referida a las coordenadas de los nodos de los elementos no-mortar y mortar puede escribirse como,

$$\Delta N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}_g^\alpha) = \mathbf{P}_A^{\alpha,P}(\boldsymbol{\xi}_g^\alpha) \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{KL}, \quad (6.117)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A^{1,P}(\boldsymbol{\xi}_g^1) &= N_{A,\beta}^1 \left[(N_I^P(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{D}_{IK}^{P1} - N_K^1(\boldsymbol{\xi}_g^1)) \boldsymbol{\tau}_\beta^{1T} \mid N_I^P(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{D}_{IL}^{P2} \boldsymbol{\tau}_\beta^{1T} \right], \\ \mathbf{P}_C^{2,P}(\boldsymbol{\xi}_g^2) &= N_{C,\beta}^2 \left[N_I^P(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{D}_{IL}^{P1} \boldsymbol{\tau}_\beta^{2T} \mid (N_I^P(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{D}_{IK}^{P2} - N_K^2(\boldsymbol{\xi}_g^2)) \boldsymbol{\tau}_\beta^{2T} \right]. \end{aligned} \quad (6.118)$$

6.7.8. Linealización del área de los triángulos

La variación del área de cada triángulo P que pertenece al polígono \mathcal{P} , es también requerida para completar el desarrollo de la Ec.(6.110). El área de un triángulo P puede ser calculada con el producto cruz de sus lados, es decir,

$$A^P = 1/2 [(\mathbf{y}_3^P - \mathbf{y}_1^P) \times (-\mathbf{y}_2^P + \mathbf{y}_1^P)]. \quad (6.119)$$

Luego, teniendo en cuenta que cada triángulo pertenece al plano de proyección \mathbf{p} , definido por la base \mathcal{V} , la linealización de A^P puede ser computada de la siguiente manera,

$$\Delta A^P = 1/2 [-Y_{32,2}^P \mid Y_{32,1}^P \mid -Y_{13,2}^P \mid Y_{13,1}^P \mid -Y_{21,2}^P \mid Y_{21,1}^P] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_1^P \\ \Delta \mathbf{y}_2^P \\ \Delta \mathbf{y}_3^P \end{bmatrix}, \quad (6.120)$$

donde $Y_{32,1}^P$ es la componente en la dirección $\check{\mathbf{e}}_1$ del vector $\mathbf{y}_3^P - \mathbf{y}_2^P$ que pertenece a la base \mathcal{V} , $Y_{32,2}^P$ es la segunda componente del mismo vector pero en la dirección $\check{\mathbf{e}}_2$. En forma análoga se obtienen: $Y_{13,1}^P$, $Y_{13,2}^P$, $Y_{21,1}^P$ y $Y_{21,2}^P$.

Teniendo en cuenta la Ec.(6.116) que relaciona los coordenadas de los nodos del triángulo P con las coordenadas del elemento no-mortar y mortar ($\Delta \mathbf{y}_I^P = \mathbf{D}_{IK}^P \Delta \hat{\boldsymbol{\Phi}}$), la linealización del área resulta en la siguiente ecuación,

$$\frac{\Delta A^P}{A^P} = \mathbf{J}^P \mathbf{D}_{KL}^P \Delta \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{KL}, \quad (6.121)$$

con $\mathbf{J}^P = 1/(2A^P) [-Y_{32,2}^P \mid Y_{32,1}^P \mid -Y_{13,2}^P \mid Y_{13,1}^P \mid -Y_{21,2}^P \mid Y_{21,1}^P]$.

6.7.9. Linealización de los factores de peso

La linealización de los factores de peso puede ser calculada con las expresiones desarrolladas. Tomando la Ec.(6.110) y las Ecs.(6.118, 6.121), la linealización de los factores de peso evaluados en $\boldsymbol{\xi}_g^\alpha$ puede ser escrita como sigue,

$$\Delta n_{AB}^{\alpha,P} = \mathbf{P}_{AB}^{\alpha,P} \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{KL}, \quad (6.122)$$

con

$$\mathbf{P}_{AB}^{\alpha,P} = \sum_{g=1}^{n_g} \left[N_B^\alpha(\boldsymbol{\xi}_g) \mathbf{P}_A^{1,P}(\boldsymbol{\xi}_g^1) + N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}_g) \mathbf{P}_B^{\alpha,p}(\boldsymbol{\xi}_g) \right] w_g A^P + n_{AB}^{\alpha,P} \mathbf{J}^P \mathbf{D}_{KL}^P. \quad (6.123)$$

6.7.10. Linealización del huelgo

La variación de la función huelgo \mathbf{g}_A se linealiza en cada triángulo y luego se suman todas las contribuciones en forma completamente análoga a lo descrito para las funciones de peso. Por medio de la Ec.(6.109) y las Ecs.(6.122, 6.123), la linealización de \mathbf{g}_A para un triángulo P puede expresarse como,

$$\Delta \mathbf{g}_A^P = [\mathbf{N}_P + \bar{\mathbf{N}}_P] \Delta \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{KL}, \quad (6.124)$$

con,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_P &= \left[n_{A1}^{1,P} \mathbf{I}, \dots, n_{A4}^{1,P} \mathbf{I}, n_{A1}^{2,P} \mathbf{I}, \dots, n_{A4}^{2,P} \mathbf{I} \right], \\ \bar{\mathbf{N}}_P &= \sum_{D=1}^4 \left(\mathbf{x}_D^1 \otimes \mathbf{P}_{AD}^{1,P} - \mathbf{x}_D^2 \otimes \mathbf{P}_{AD}^{2,P} \right). \end{aligned} \quad (6.125)$$

6.7.11. Linealización del vector normal promedio

En esta sección se desarrollará la linealización del vector normal promedio para cada nodo de un vértice A de un determinado grupo de elementos no morter, al que se denominará $\boldsymbol{\nu}_A$ y calculada de la siguiente manera,

$$\boldsymbol{\nu}_A = \frac{\sum_j^{n_A} \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{n}_j\|}, \quad (6.126)$$

ver Fig. 6.30, donde

$$\mathbf{n}_j = \frac{\mathbf{v}_j \times \mathbf{v}_{j+1}}{\|\mathbf{v}_j \times \mathbf{v}_{j+1}\|}. \quad (6.127)$$

Aquí \mathbf{n}_j es el vector normal del elemento no-mortar j , y los vectores \mathbf{v}_j y \mathbf{v}_{j+1} denotan la diferencia de las coordenadas nodales referidas al nodo A , esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{j+1} &= \mathbf{x}_C^1 - \mathbf{x}_A^2, \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{x}_B^1 - \mathbf{x}_A^2. \end{aligned} \quad (6.128)$$

Véase la Fig. 6.30 para una mejor interpretación.

La linealización de la Ec.(6.126) resulta en,

$$\Delta \boldsymbol{\nu}_A = \frac{\sum_j^{n_A} \Delta \mathbf{n}_j(t) \|\mathbf{n}_j\| - \sum_j^{n_A} \mathbf{n}_j \Delta \|\mathbf{n}_j\|}{\|\mathbf{n}_j\|^2}. \quad (6.129)$$

Luego, la linealización del vector normal \mathbf{n}_j se obtiene a través de la Ec.(6.127) como

$$\Delta \mathbf{n}_j = \frac{[\mathbf{I} - \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j]}{\|\mathbf{v}_j \times \mathbf{v}_{j+1}\|} \hat{\mathbf{W}} \Delta \boldsymbol{\Phi}_A = \mathbf{S} \hat{\mathbf{W}} \Delta \boldsymbol{\Phi}_A, \quad (6.130)$$

con Φ_A el vector de coordenadas \mathbf{x}^1 de los primeros nodos “vecinos” del nodo A y las matrices,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{[\mathbf{I} - \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j]}{\|\mathbf{v}_j \times \mathbf{v}_{j+1}\|}, \\ \hat{\mathbf{W}} &= [\tilde{\mathbf{V}}_{j+1} \mid -\tilde{\mathbf{V}}_j \mid -\tilde{\mathbf{V}}_{j+1} \mid \tilde{\mathbf{V}}_j], \end{aligned} \quad (6.131)$$

donde $\tilde{\mathbf{V}}_j$ corresponde a la matriz antisimétrica asociada al vector \mathbf{v}_j . Luego puede demostrarse que $\Delta\|\mathbf{n}_j\| = \mathbf{n}_j/\|\mathbf{n}_j\|\Delta\mathbf{n}_j = \tilde{\mathbf{n}}_j\mathbf{S}\hat{\mathbf{W}}$, con lo cual la variación del vector normal promedio es expresado de la siguiente manera,

$$\Delta\nu_A = \frac{1}{\|\mathbf{n}_j\|} [\mathbf{S}\hat{\mathbf{W}} - \nu_A\mathbf{n}_j\mathbf{S}\hat{\mathbf{W}}] \Delta\Phi_A. \quad (6.132)$$

6.7.12. Variación del vector de coordenadas globales $\Delta\Phi_{KL}$

Hasta el momento, las ecuaciones han sido desarrolladas teniendo en cuenta una base ortogonal local \mathcal{V} definida por las diagonales de un elemento no-mortar. Esto permitió desarrollar las expresiones con vectores cuyas coordenadas nodales son de dos componentes. Sin embargo, para que el desarrollo esté totalmente completo, el vector de coordenadas nodales $\Delta\hat{\Phi}$ debe referirse a otro vector $\Delta\Phi$ donde cada componente sea la coordenada de un nodo no-mortar o mortar en \mathbb{R}^3 . Para ello es necesario realizar algunas operaciones adicionales. Partiendo de la Ec.(6.103), su linealización se calcula como,

$$\Delta\mathbf{y}_A^\alpha = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1) + \mathbf{e}_1 \cdot \Delta\mathbf{x}_A^\alpha + \mathbf{e}_1 \cdot \Delta\mathbf{x}_0^1 \\ \Delta\mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1) + \mathbf{e}_2 \cdot \Delta\mathbf{x}_A^\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \Delta\mathbf{x}_0^1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_A^\alpha \Delta\Phi_{KL}, \quad (6.133)$$

donde \mathbf{H}_A^α es una matriz que transforma las coordenadas nodales de la base \mathcal{V} a la base global definida en \mathbb{R}^3 . El trabajo final consiste en multiplicar cada componente del vector $\Delta\hat{\Phi}$ por la matriz \mathbf{H}_A^α para obtener las coordenadas nodales en \mathbb{R}^3 . En el Apéndice C se presenta un desarrollo completo para la obtención de la matriz \mathbf{H}_A^α .

6.7.13. Ejemplos numéricos

Todas las soluciones obtenidas con el método mortar en los ejemplos presentados en esta Tesis se comparan con las del programa comercial de elementos finitos SAMCEF [SAM07]. El algoritmo implementado en este último software es del tipo nodo-segmento con una regularización mediante multiplicadores de Lagrange.

6.7.13.1. El test de la parcela para contacto. Ejemplo de validación.

Para comprobar la validez del algoritmo desarrollado, se evalúa su capacidad de superar el test de la parcela con un caso propuesto por Chen y Hisada [CH06]. Éste consiste en dos bloques en contacto bajo la aplicación de una presión uniforme $P = 5$ MPa, ver Fig. 6.32. Las propiedades mecánicas se incluyen en la Fig. 6.32 junto con las condiciones de borde, la cuales garantizan un estado plano de deformación. La geometría se discretiza con hexaedros lineales de 8 nodos.

La presión obtenida en ambos lados de la interfase de contacto será igual a la carga exterior aplicada P , si ésta se transmite correctamente. Asimismo, el campo de desplazamientos debe mostrar una distribución uniforme. En la Fig. 6.33 se compara

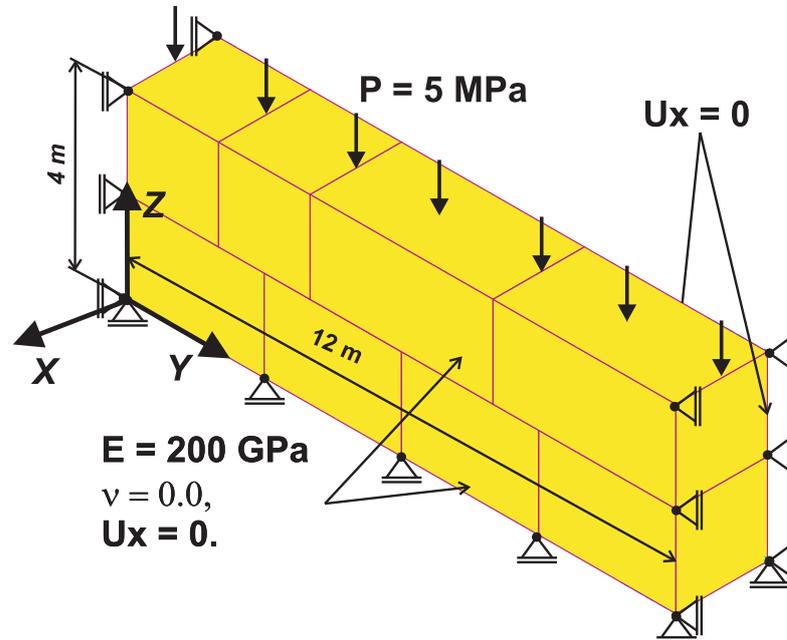
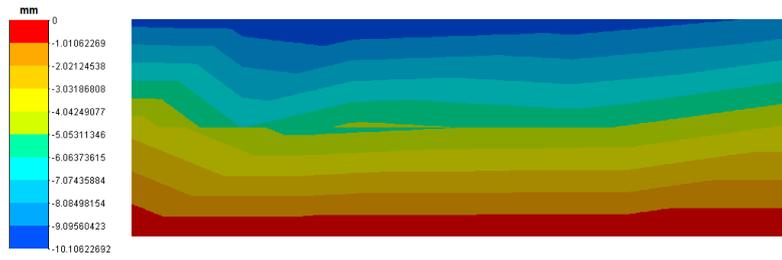
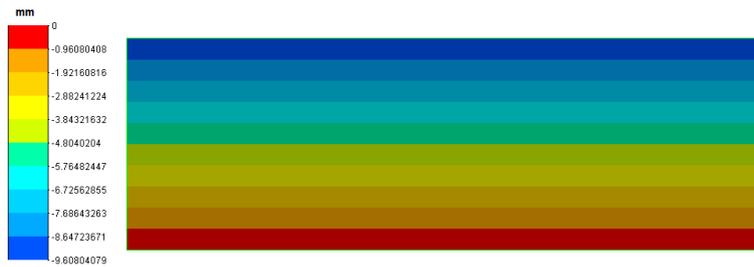


Figura 6.32: Test de la parcela. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.

el campo de desplazamiento obtenido con un esquema del tipo nodo-segmento y el algoritmo mortár desarrollado en esta Tesis. Como puede observarse en la Fig. 6.33-a, la distribución de desplazamientos del esquema nodo-segmento no mantiene una distribución uniforme en todo el dominio. En cambio, el método mortár genera una distribución continua, ver Fig. 6.33-b. Así mismo, la Fig. 6.34 muestra una distribución de tensiones uniforme en la interfase de contacto e igual a la tensión exterior aplicada cuando se utiliza el método mortár, mientras que con el esquema nodo-segmento se aprecian oscilaciones en la tensión. Esta característica es independiente de un refinamiento de la malla y del tipo de regularización utilizada.



(a) Método nodo-segmento. Software SAMCEF.



(b) Método mortero. Algoritmo propuesto.

Figura 6.33: Test de la parcela. Comparación del campo de desplazamientos en la dirección Z entre el método nodo-segmento y el método mortero propuesto en esta Tesis.

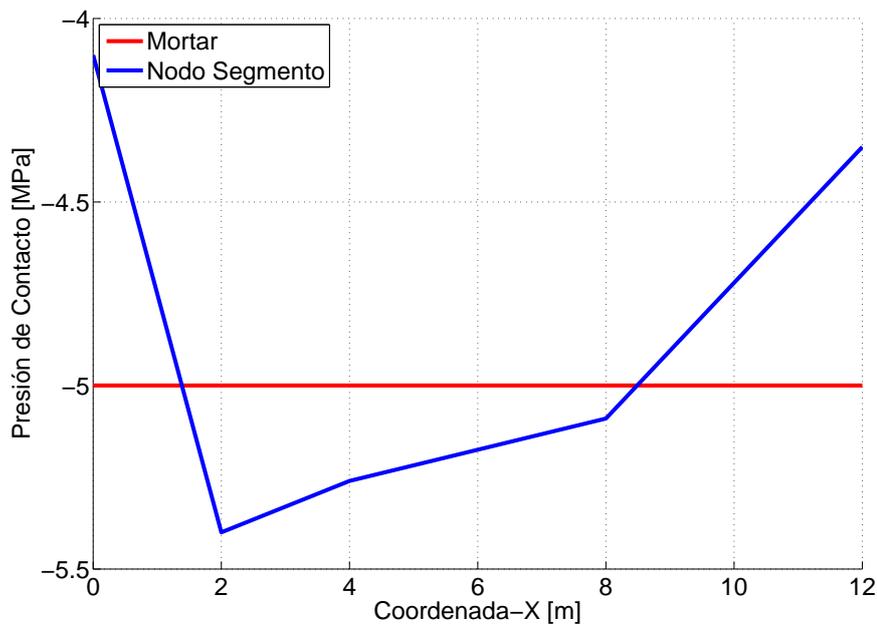


Figura 6.34: Distribución de presión en la interfase de contacto.

6.7.13.2. Contacto de Hertz. Ejemplo de validación.

Se propone un ejemplo de tensiones de Hertz para validar el método mortar con una solución analítica. Para este caso, ambas interfaces de contacto son curvas. La Fig. 6.35 muestra la geometría de la mitad de dos cilindros elásticos, cada uno de ellos de radio 8.

El problema original fue formulado en dos dimensiones, ver por ejemplo el trabajo de McDevitt y Laursen [ML00], en tanto que aquí se lo resuelve en tres dimensiones con condiciones de borde tales que reproducen un estado plano de deformación. La malla original adoptada en la referencia [ML00] es generada con elementos bicuadráticos. Aquí, al igual que en el trabajo de Areias *et al.* [ACdSCA04], la malla es duplicada en la cantidad de elementos ya que se han adoptado elementos bilineales. La Fig. 6.35 muestra la malla utilizada junto con las condiciones de borde propuestas y las propiedades mecánicas del material. La Fig. 6.36 muestra el campo de

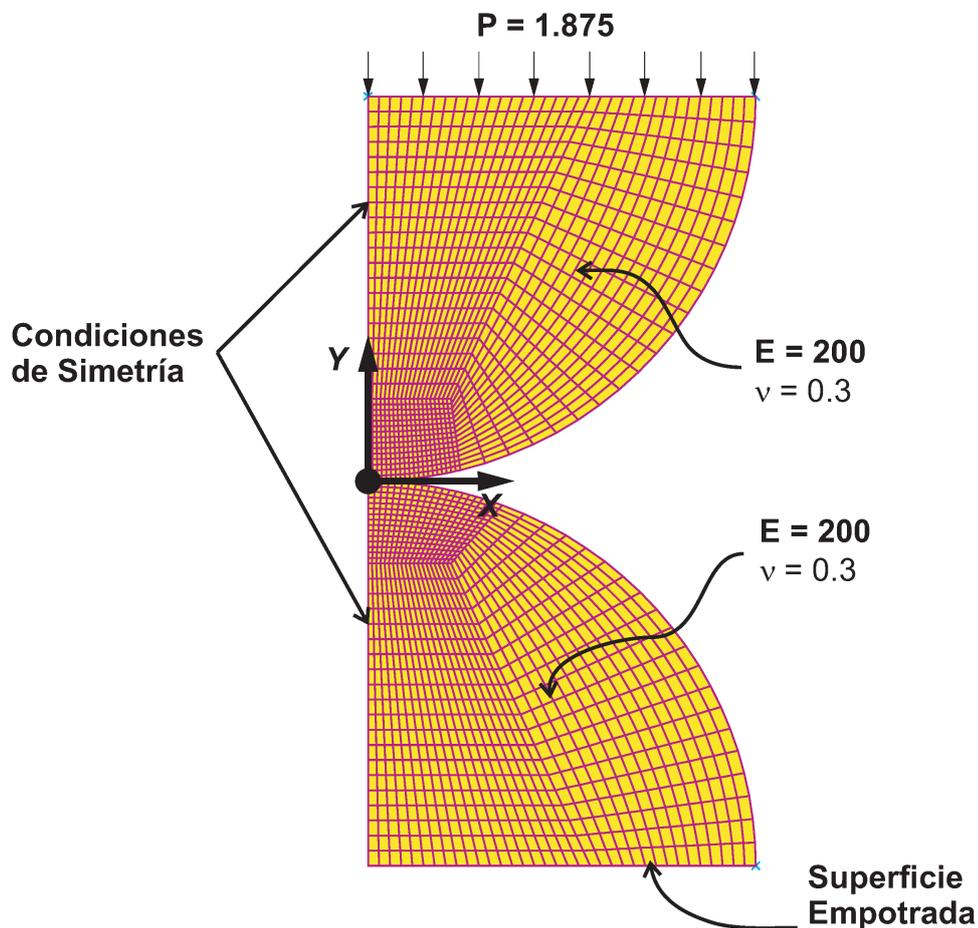


Figura 6.35: Contacto de Hertz. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.

desplazamientos obtenido con el método mortar, donde además es posible apreciar la superficie que se encuentra en contacto. La Fig. 6.37 muestra el campo de tensiones en la dirección Z con continuidad y homogeneidad en la interfase de contacto. La Fig. 6.38 muestra la comparación de los resultados obtenidos por medio del método

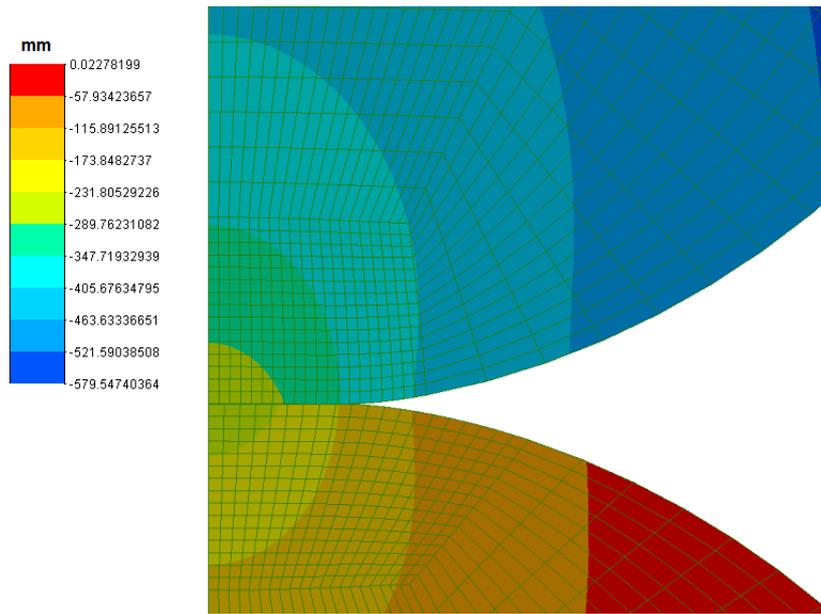


Figura 6.36: Contacto entre dos cilindros elásticos. Campo de desplazamientos.

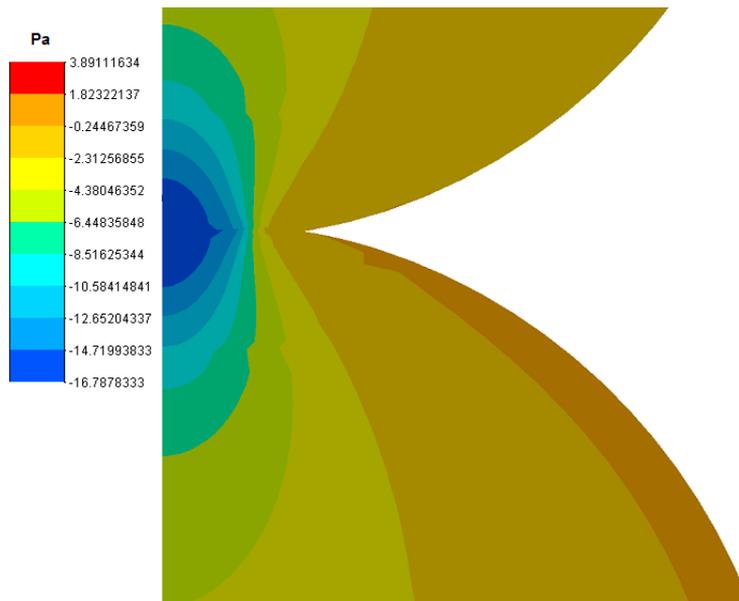


Figura 6.37: Contacto entre dos cilindros elásticos. Distribución de tensiones por nodo en la dirección Y .

mortar y la solución analítica de Herzt [Jho87] destacándose la buena correlación entre ambos resultados.

6.7.13.3. Contacto elástico entre dos cuerpos cilíndricos.

Este ejemplo es introducido para estudiar por medio del método mortar, los campos de desplazamientos y tensiones entre cuerpos flexibles cuando las mallas no son conformes y están formadas por tetrahedros. Los resultados se comparan con el

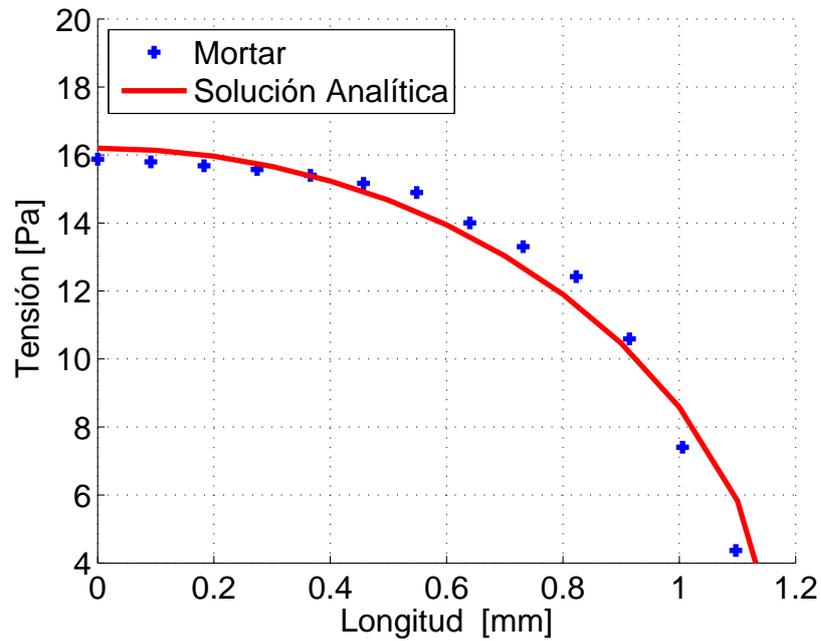


Figura 6.38: Contacto entre dos cilindros elásticos. Distribución de tensiones por elemento. Comparación con solución analítica de Hertz.

software SAMCEF.

Las condiciones de borde y propiedades mecánicas utilizadas se muestran en la Fig. 6.39. La malla de tetrahedros lineales es generada por medio de un algoritmo de Delaunay-Voronoi y es idéntica para los dos métodos aplicados. La Fig. 6.40-a

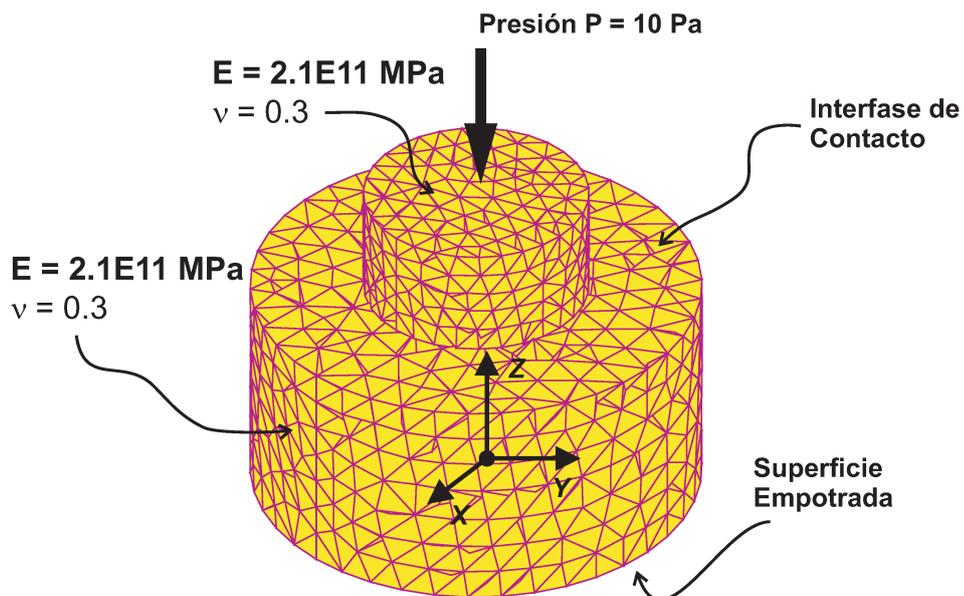
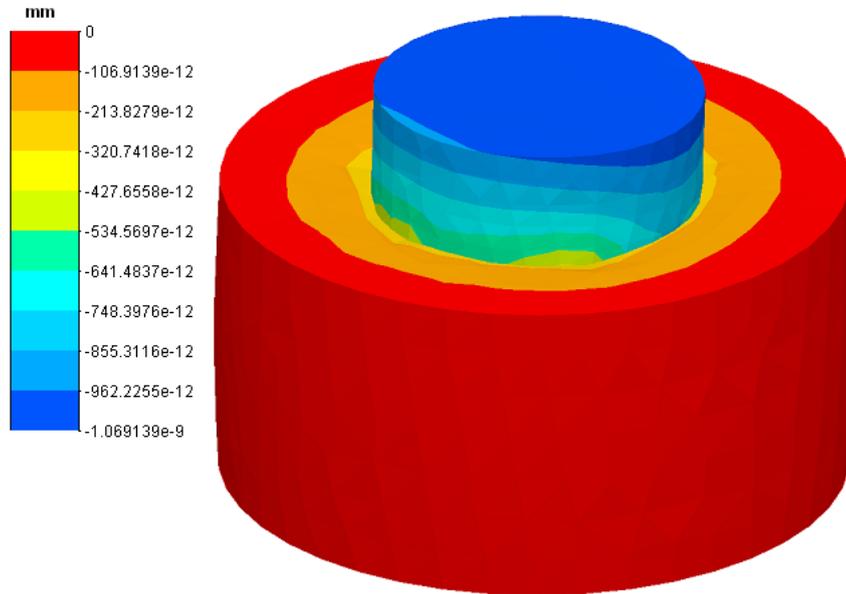


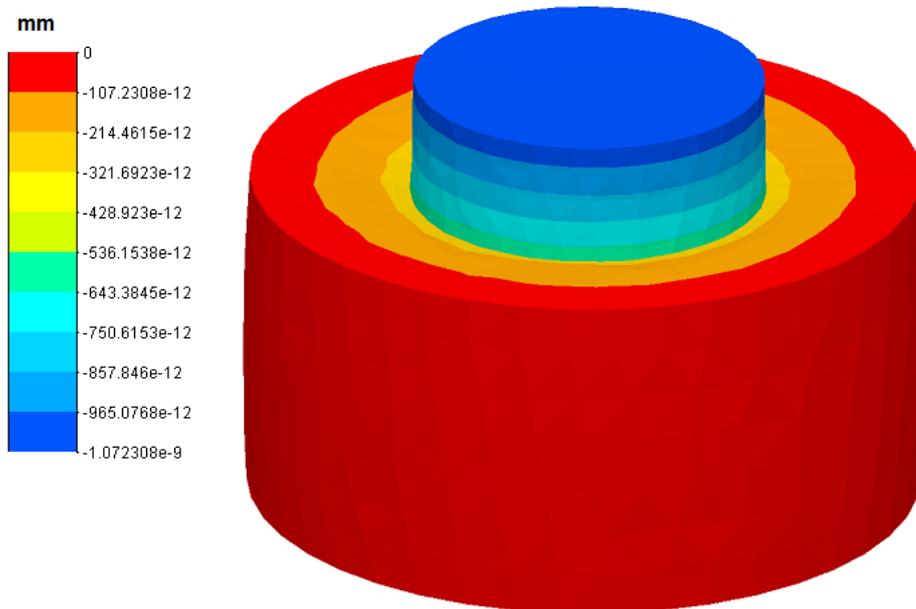
Figura 6.39: Condiciones de borde y propiedades mecánicas de dos cuerpos cilíndricos elásticos en contacto.

6. CONTACTO MECÁNICO

muestra un campo de desplazamientos no uniforme cuando se utiliza un esquema nodo segmento, y lo contrario en la Fig. 6.40-b cuando se emplea el método mortar. En relación al campo de tensiones, cuando se utiliza un esquema nodo-segmento,



(a) Método nodo-segmento. Software SAMCEF.

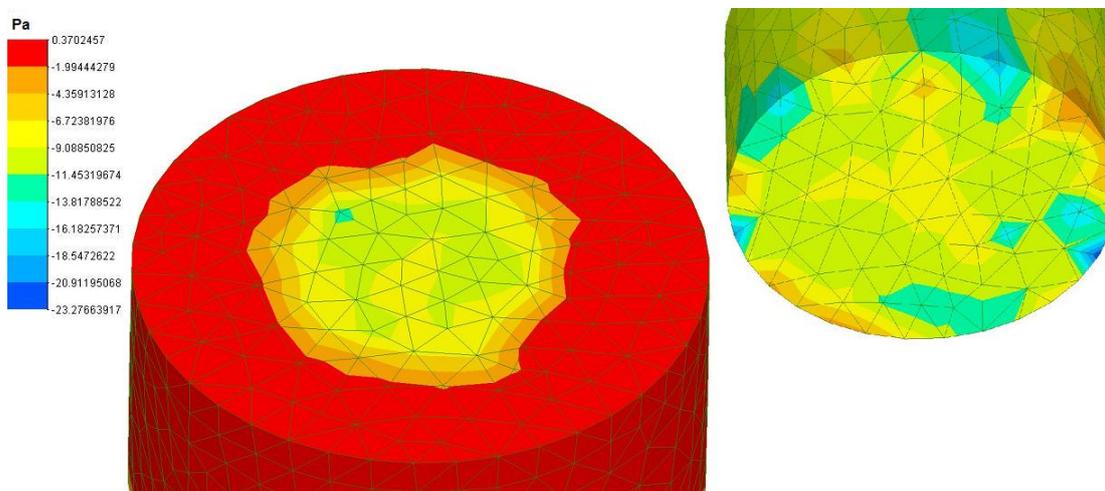


(b) Método mortario. Algoritmo propuesto.

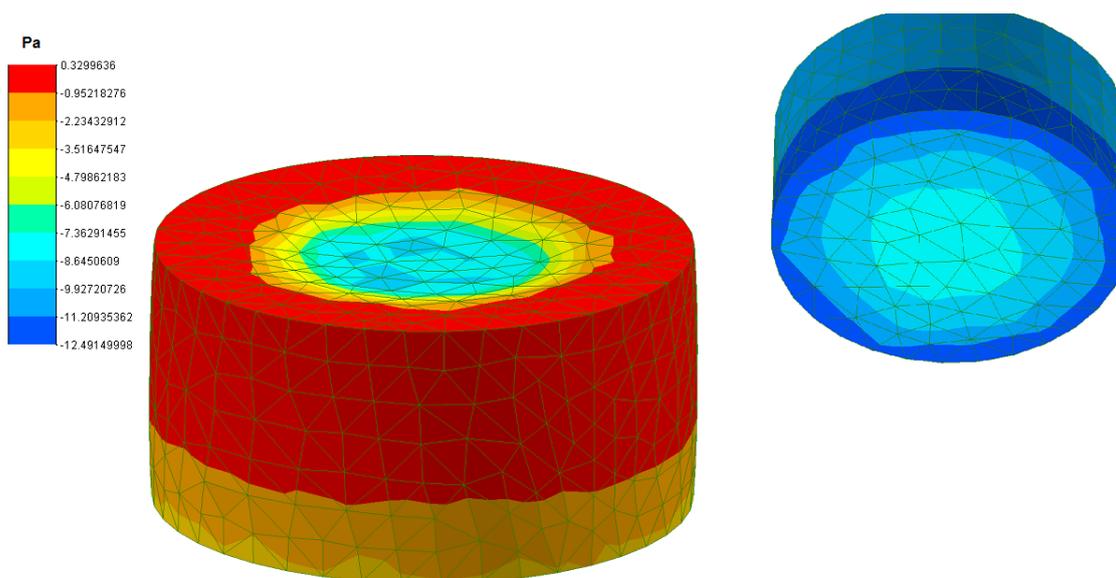
Figura 6.40: Comparación del campo de desplazamiento en la dirección Z de dos cuerpos cilíndricos elásticos en contacto.

ver Fig. 6.41-a, es posible apreciar ciertos puntos de concentración de tensiones en algunos nodos de la interfase de contacto. Si bien el valor de la máxima tensión es

similar en ambos métodos, el mortor presenta una mejor distribución en la zona de contacto, tal como se muestra en la Fig. 6.41-b.



(a) Método nodo-segmento. Software SAMCEF.



(b) Método mortor. Algoritmo propuesto.

Figura 6.41: Comparación del campo de desplazamiento en la dirección Z de dos cuerpos cilíndricos elásticos en contacto.

6.7.13.4. Contacto entre una válvula de motor de combustión interna y el asiento.

El siguiente ejemplo corresponde al estudio del contacto entre una válvula de motor de combustión interna con su asiento. Si bien es un caso de aplicación no citado en la bibliografía como test de validación, presenta algunas dificultades no menores que deben superar los algoritmos de contacto, y es que la superficie de contacto no sólo es muy pequeña, sino que además es cónica curva. Con los esquemas de contacto nodo-segmento aparecen ciertos puntos con una fuerte concentración de tensiones, de manera que no son apropiados, por ejemplo, para un análisis posterior a desgaste, donde una distribución de tensiones sin oscilaciones es requerida en la zona de contacto para arribar a resultados correctos.

En la Fig. 6.42 se detalla la geometría, condiciones de borde y propiedades mecánicas utilizadas para el modelo de válvula propuesto. La malla empleada está formada por elementos hexaédricos lineales. La Fig. 6.43-a muestra una comparación

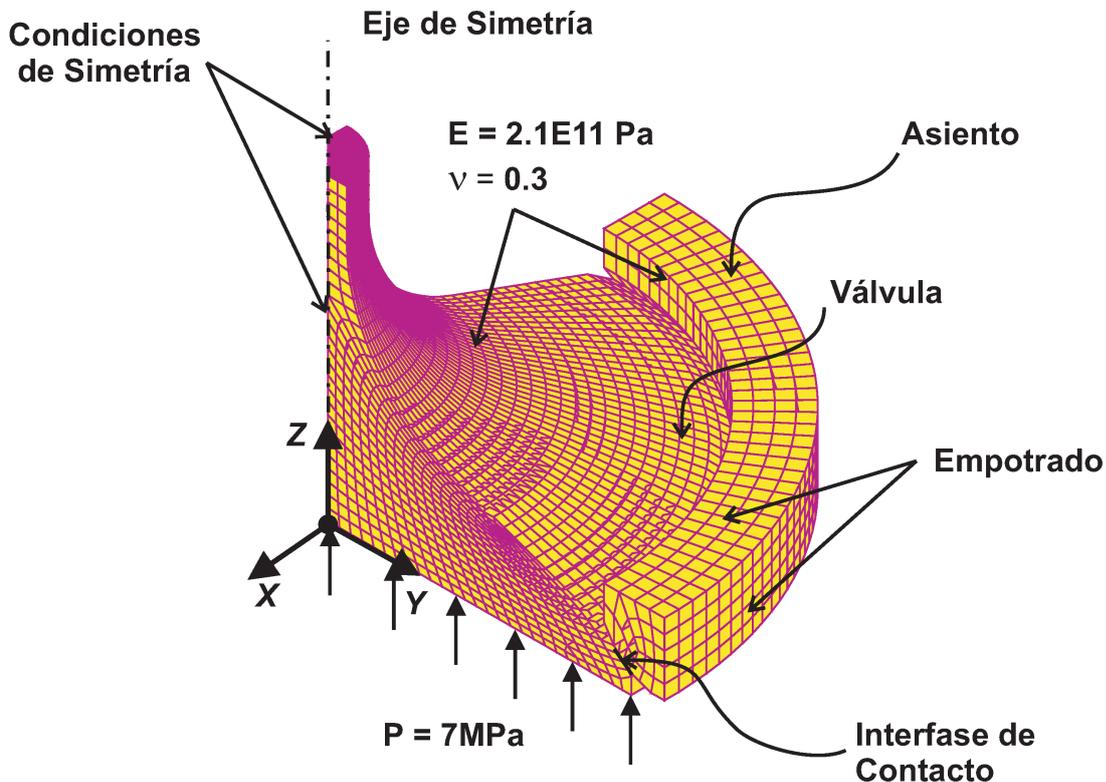
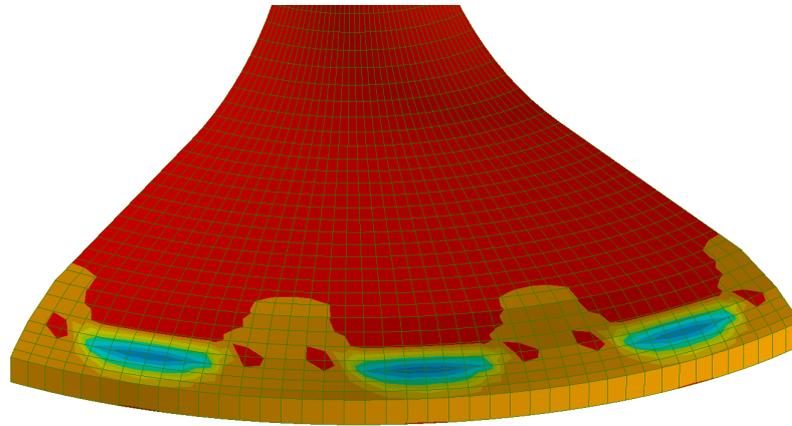


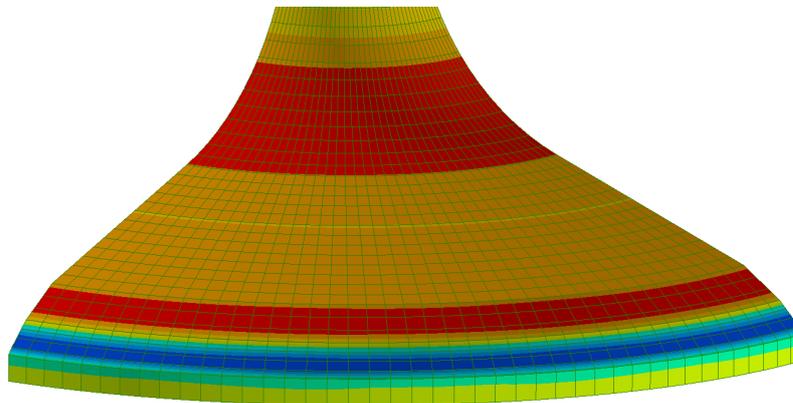
Figura 6.42: Válvula de motor de combustión interna. Condiciones de borde y propiedades mecánicas.

entre los resultados de tensiones obtenidos con el método mortar y con el esquema nodo-segmento. La Fig. 6.43-a evidencia una concentración de tensiones en la zona de contacto con el asiento (puntos de color azul), en tanto que con el método mortar existe una distribución mucho más regular. Para una comparación cuantitativa más precisa, en la Fig. 6.44 se ha graficado la distribución de tensiones en los elementos de contacto de la válvula. En ella se puede apreciar una variación cíclica de la ten-

sión cuando se utiliza el esquema nodo-segmento, mientras que con el mortár existe una oscilación de amplitud mucho menor.



(a) Método nodo-segmento. Software SAMCEF.



(b) Método mortár. Algoritmo propuesto.

Figura 6.43: Distribución de tensiones en la dirección Z en una válvula de motor de combustión interna con una malla de hexahedros.

6.7.13.5. Contacto entre una válvula de motor de combustión interna y el asiento. Comparación.

La Fig. 6.45 muestra las curvas comparativas de la tensión por elemento en la zona de contacto para los distintos algoritmos que se han implementado en esta Tesis. En este sentido, se utilizó la geometría y condiciones de borde que se muestran en la Fig. 6.14 para el caso de una válvula de motor de combustión interna. Se puede apreciar que los esquemas del tipo nodo segmento, ya sea el de contacto suave, el implementado en el software SAMCEF o el flexible rígido, presentan una gran variación en la tensión, en tanto que la curva para el método mortár es mucho más suave, a pesar de tener ciertas oscilaciones.

Nótar que los elementos tetraedricos no son los más apropiados para este tipo aplicaciones, ya que no poseen polinomios tan enriquecidos como los hexaedros, lo que explica la diferencia que se muestra en la curva de la Fig. 6.44, donde se destaca

6. CONTACTO MECÁNICO

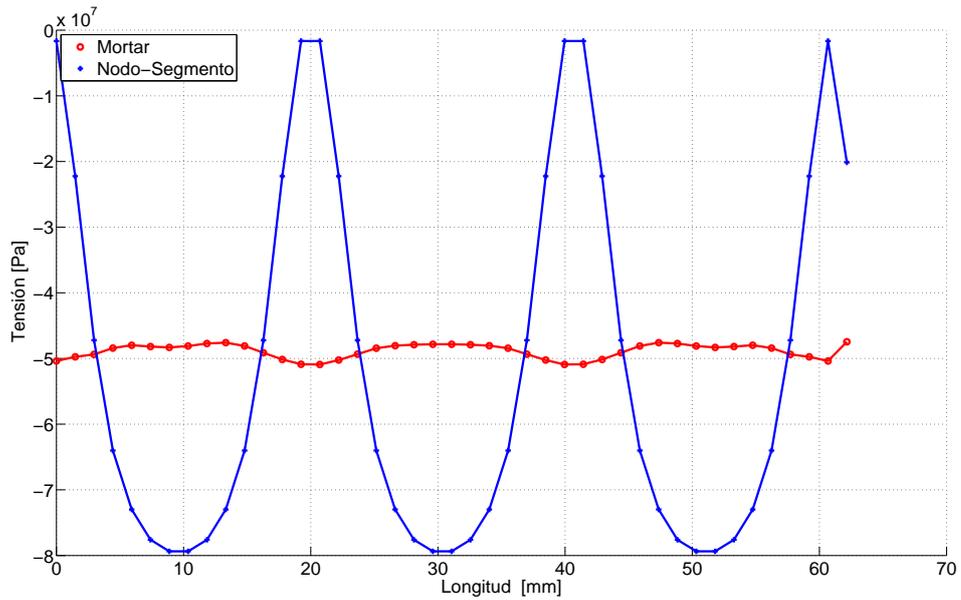


Figura 6.44: Distribución de tensiones por elemento en la zona de contacto para el ejemplo de la válvula de motor de combustión interna.

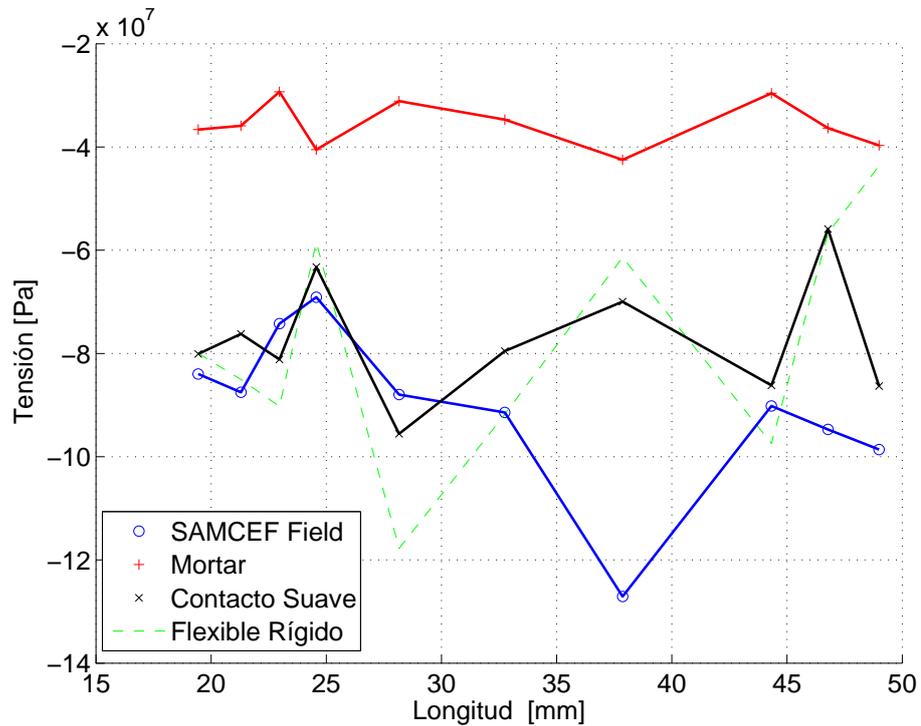


Figura 6.45: Comparación de la distribución de tensiones en la zona de contacto utilizando el algoritmo de contacto suave, SAMCEF y el método mortar.

una distribución de tensión más suave respecto del mismo ejemplo utilizando mallas de hexahedros.

6.7.14. Conclusiones

En esta sección se desarrolló un algoritmo de contacto tipo mortár. Los ejemplos presentados fueron contrastados con soluciones de referencia, especialmente el del test de la parcela y el de los cilindros de Hertz, mostrando en ambos casos buena correlación con las soluciones referenciadas.

Como se pudo observar en los ejemplos propuestos, el esquema del tipo nodo segmento es incapaz de calcular con precisión el campo de tensiones en la zona de contacto, sin embargo, con el método mortár propuesto en esta Tesis, los resultados han sido notablemente mejores.

Se puede concluir que para un correcto análisis del campo de tensiones en la zona de contacto, el método mortár es el más preciso de todos los estudiados. Además, a pesar de que el algoritmo es computacionalmente más complejo que el de un nodo-segmento, la resolución de los ejemplos de aplicación y validación mostró que los tiempos de cálculo no han sido mayores que los observados con un esquema nodo-segmento.

Capítulo 7

El fenómeno de desgaste

El desgaste mecánico se genera por el desplazamiento relativo de dos o más cuerpos que se encuentran en contacto sujeto a un estado de cargas. La mayoría de los desarrollos teóricos de predicción del desgaste tienen en cuenta los parámetros del material, su composición química y propiedades pseudo/elásticas de los cuerpos involucrados, además de las fuerzas/presión de contacto y longitud de deslizamiento. Con estas consideraciones, la regularidad de las tensiones en la zona de contacto, es la clave para predecir correctamente los mecanismos de desgaste de sistemas tribológicos.

Los requerimientos de durabilidad para los sistemas mecánicos actuales son cada vez más exigentes, en este sentido, el proceso de desgaste es uno de los principales factores que condicionan el servicio de componentes, lo que merece una atención especial. En referencia a válvulas de motores de combustión interna, los nuevos requerimientos demandan disminución de las emisiones gaseosas, más potencia en el motor, menos consumo de combustible, menos consumo de aceite. El mecanismo que domina el proceso depende de los componentes del motor, de las condiciones de operación, las configuraciones del asiento y de la válvula, materiales, tren de válvulas etc.

En una válvula se produce desgaste mecánico entre los siguientes componentes:

- válvula-asiento,
- guía-vástago,
- leva-punta de válvula.

7.1. Desgaste y ley de Archard

Para el desarrollo de un algoritmo de desgaste, se ha empleado la expresión de Archard, ampliamente utilizada en la actualidad para el modelado numérico de desgaste [MLMS07, DCDB02, HGN+06, MDL04]. Como es conocido, el desgaste se genera por el desplazamiento relativo de dos o más cuerpos que se encuentran en contacto bajo la acción de cargas. En componentes mecánicos puede presentarse de cuatro formas diferentes:

- desgaste abrasivo,

- desgaste adhesivo,
- desgaste corrosivo,
- desgaste por fatiga.

Normalmente, las válvulas de admisión no se encuentran expuestas a químicos que produzcan algún tipo de oxidación, lubricación o restos de componentes de la combustión, el desgaste es puramente abrasivo, en tanto que en válvulas de escape es abrasivo y corrosivo. La ecuación constitutiva utilizada para computar el volumen de material perdido por efecto del desgaste fue formulada por Holm en 1946 y Archard en 1953. La ley Holm-Archard [Arc53] está dada por:

$$V = \frac{K F_N \mathbf{u}_t}{H}, \quad (7.1)$$

donde son:

- V : volumen de material perdido por efecto del desgaste,
- F_N : componente normal de la fuerza entre los cuerpos en contacto.
- \mathbf{u}_t : desplazamiento relativo de los cuerpos en contacto.
- H : dureza del material.
- K : coeficiente dependiente de la rugosidad del material, lubricación entre los cuerpos en contacto, transmisión de calor, etc. Su valor puede variar en un rango de 10^{-3} a 10^{-8} dependiendo de las condiciones de funcionamiento del componente.

A partir de la expresión de Archard y operando algebraicamente se obtiene:

$$\Delta h = K \int_0^{L_t} \frac{\lambda(\mathbf{u}_t) d\mathbf{u}_t}{H A_a}, \quad (7.2)$$

donde h es la altura de desgaste, λ es el multiplicador de Lagrange que denota la fuerza de contacto función del desplazamiento tangencial \mathbf{u}_t y A_a es el área de contacto. Integrando numéricamente la Ec.(7.2) y utilizando un esquema backward Euler se tiene la siguiente ecuación,

$$\begin{cases} \Delta h_{n+1}^{desg} = \Delta h_n + K \frac{\lambda_{n+1} \Delta \mathbf{u}_t}{H A_{a_{n+1}}}, \\ \Delta h_0^{desg} = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

7.2. Modelo numérico

En esta sección se presenta un ejemplo de validación para evaluar el desgaste en forma numérica. Los resultados obtenidos son comparados con la ecuación analítica de Archard, Ec.(7.1). Para la obtención de las fuerzas de contacto se ha utilizado el mismo algoritmo que se ha presentado en la Sec. 6.3.

La geometría, topología de malla y tipos de elemento son iguales a los del ejemplo presentado en la Sec. 6.3, pero sin tener en cuenta los efectos de la fricción y la no linealidad geométrica. El desplazamiento vertical aplicado es de una magnitud igual a 0.000001m. El desgaste acumulado se muestra en la Fig. 7.2.

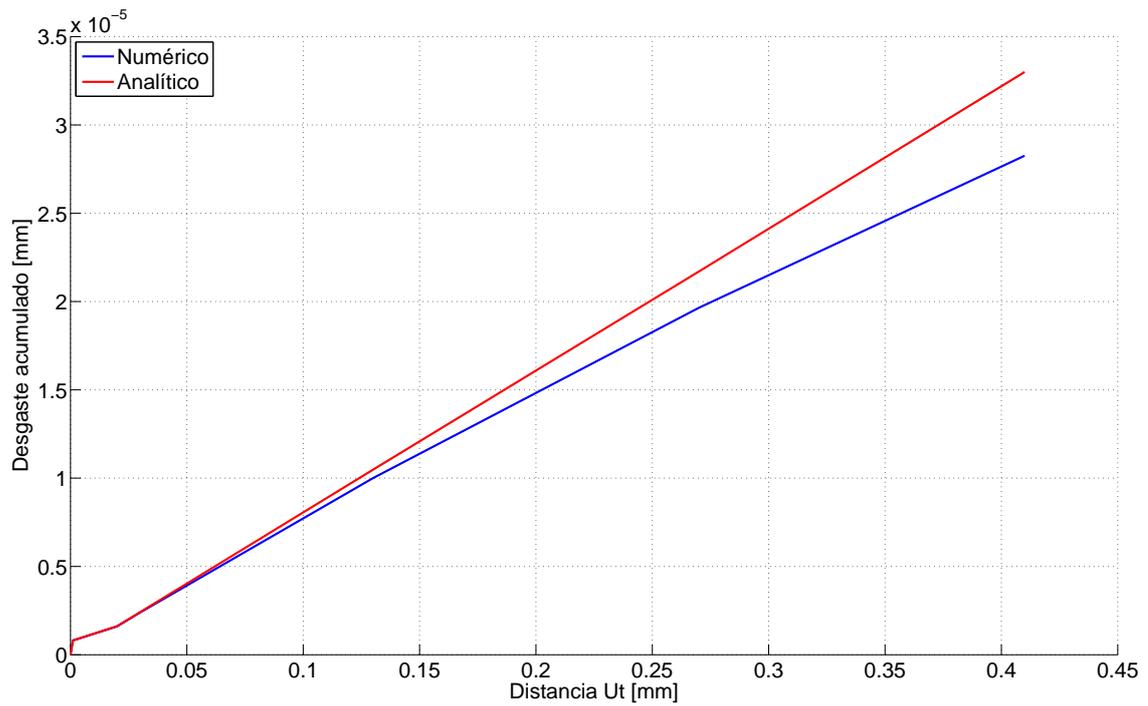


Figura 7.1: Evolución del desgaste acumulado.

7.3. Conclusiones

Utilizando valores del parámetro de desgaste K compatibles con los reportados en la bibliografía, u obtenidos de algún ensayo, se podría predecir el desgaste que se producen en componentes mecánicos. Se advierte que para la obtención de valores de desgaste precisos, es necesaria una correcta caracterización del parámetro K en la fórmula de Archard. Esta determinación debería ser realizada para cada par de materiales en contacto, a diferentes temperaturas y con diferentes condiciones de lubricación.

Parte III

CONCLUSIONES FINALES

Capítulo 8

Conclusiones

8.1. Fatiga de muy alto número de ciclos a elevada temperatura

En esta Tesis se desarrolló el estudio de las propiedades a fatiga en el rango gigacíclico de un acero austenítico utilizado en válvulas de motores de combustión interna, a temperatura ambiente y a elevadas temperaturas con cargas de tracción-compresión por medio de la técnica de fatiga ultrasónica.

Los resultados obtenidos adquieren importancia tecnológica en este campo de investigación, pues proveen información específica de fatiga a elevada temperatura de un acero que no ha sido reportada con anterioridad en la bibliografía. Con la metodología desarrollada en el Cap. 3, distintos materiales pueden ser estudiados con el objeto de conocer sus propiedades mecánicas de fatiga, contribuyendo a mejorar el diseño de componentes mecánicos en una instancia posterior.

En esta Tesis se ha mostrado la capacidad del método de los elementos finitos para el diseño preciso de probetas ultrasónicas utilizadas en ensayos a temperatura ambiente y a elevada temperatura.

Los resultados de fatiga a temperatura ambiente obtenidos en la máquina de fatiga ultrasónica han mostrado gran dispersión de resultados, posiblemente por causas metalúrgicas, como las que se detallan en la Sec. 4.6.1. Las fisuras de todas las probetas ensayadas fueron originadas desde la superficie.

Para el caso de temperatura de 600°C, la curva S-N ha mostrado un leve decaimiento de la tensión de rotura conforme aumenta el número de ciclos. La iniciación de las fisuras en las probetas se produjo desde la superficie, en tanto que sólo una probeta alcanzó la rotura desde el interior en 3.74×10^8 ciclos a partir de una inclusión de Niobio.

Resultados similares para el caso de 600°C fueron obtenidos para 700°C, donde se determinó poca disminución de la pendiente en la curva de fatiga conforme aumenta el número de ciclos, en tanto que la iniciación de las fisuras en las probetas ensayadas se produjo en todos los casos desde la superficie.

A través de este trabajo, se describieron las limitaciones de la técnica de fatiga ultrasónica, esto es, existen algunos materiales que pueden cambiar su microestructura cuando son sometidos a cargas de muy alta frecuencia, mostrando variabilidad

8. CONCLUSIONES

en los resultados de las curvas de S-N, como el caso del acero ensayado en esta Tesis.

Los resultados experimentales obtenidos en la máquina de fatiga ultrasónica para el acero mencionado fueron utilizados en la generación de nuevos diseños de válvulas de motores de combustión interna desde el punto de vista de la fatiga. Específicamente, se utilizaron las curvas S-N a 600°C para el diseño de una válvula por medio del MEF, con el objetivo de estimar el valor de la tensión máxima que se genera al momento del impacto con el asiento.

Las principales conclusiones obtenidas del modelo numérico en relación al algoritmo de integración temporal utilizado para la simulación dinámica del evento de asentamiento son las que se detallan a continuación, ver Sec. 5.5,

- Es necesario emplear un esquema de integración temporal con paso de tiempo variable. Esto permite reducir el tamaño del paso cuando se arriba al instante del impacto. El paso de tiempo escogido fue muy reducido para captar las armónicas de alta frecuencia de la tensión que se generan al momento de producirse el impacto de la válvula con el asiento.
- La selección apropiada de los parámetros de este algoritmo, resulta en una correcta evaluación de las tensiones. Se efectuaron múltiples experimentos numéricos variando el radio espectral dentro de su dominio de validez, hasta conseguir soluciones sin una excesiva oscilación o amortiguamiento de las tensiones y los desplazamientos. El primer algoritmo utilizado para realizar las simulaciones fue el Hilbert-Hughes-Taylor (HHT), con el cual los resultados obtenidos han mostrado oscilaciones numéricas en alta frecuencia, por lo que fue descartado. Esto conllevó a la utilización de algoritmos de integración temporal donde se pueda controlar la disipación numérica, como el caso del α generalizado.

Referido específicamente a las principales conclusiones obtenidas de los resultados del problema mecánico, ver Sec. 5.5, se menciona:

- Las soluciones numéricas mostraron que la tensión alcanza un pico máximo en la zona del cuello de la válvula y luego se amortigua hasta un valor de tensión igual al generado por el resorte cuando la válvula se encuentra asentada.
- En la válvula ensayada en la VTR, una excentricidad de respecto del asiento generó una flexión inicial durante el proceso de asentamiento, y luego alcanzó un valor máximo similar al obtenido con un asiento concéntrico. Con un diseño convencional de válvula, donde la zona del cuello posee un diámetro mucho mayor al diseño propuesto para la VTR, es decir es más rígido, este comportamiento es inverso.
- La comparación entre la solución térmica numérica y la obtenida experimentalmente reveló que el ajuste de los parámetros de conductancia y coeficientes de transferencia térmica de las válvulas ensayadas en la VTR han sido obtenidos con buena aproximación, proveyendo de una metodología correcta como para resolver el problema térmico de una válvula de motor de combustión interna.
- Se ha observado que, para simular correctamente la dinámica del impacto, es imprescindible una subdivisión del resorte de retorno para distribuir mejor su

masa y poder capturar el efecto de movimiento de las espiras, tal como ocurre en la realidad.

- Se asumió que el pico máximo de la tensión es el que contribuye a una degradación de las propiedades del material conduciendo a una rotura final por fatiga.

En referencia a la máquina de ensayos VTR, la simulación dinámica del tren de válvulas fue validado satisfactoriamente con resultados de mediciones experimentales de velocidad de cierre de válvula en función del número de revoluciones, adquiridas con un equipo láser de registro de desplazamientos.

Mediante un análisis de fatiga uniaxial por medio de la curva S-N a 600°C presentada en el Cap. 4, el pico máximo de tensión, y la geometría de válvula propuesta en la Sec. 5.5, se estima que el diseño propuesto se encuentra cercano al límite de su resistencia a fatiga. En relación cálculo del criterio de Crossland, Sec. 5.5, éste ha demostrado que una rotura por fatiga a esa cantidad de ciclos sería esperable.

La geometría obtenida mediante simulación numérica fue posteriormente ensayada en la máquina VTR con una temperatura en la zona del cuello de 600°C y una velocidad de rotación de 2500 rpm. La cantidad de ciclos alcanzada fue de 3×10^6 ciclos sin que se haya alcanzado la rotura.

Es claro que la cantidad de ciclos a los que se encuentra sometida una válvula en condiciones normales de operación son mayores a los que se han desarrollado en estos ensayos. Sin embargo, se desprende que mediante la metodología propuesta en el Cap. 5, es posible generar nuevos diseños con cierta reducción del diámetro en la zona del cuello, contribuyendo a mejorar la flujometría de llenado del cilindro en un motor de combustión interna permitiendo además la disminución de peso del componente, entre otros aspectos. No obstante, debido a las limitaciones de tiempo y fundamentalmente a los costos que conllevan este tipo de ensayos en máquinas no convencionales, tales como la VTR, sólo una probeta de válvula se ha podido ensayar con esa geometría, de manera que aún no se cuenta con evidencia experimental suficiente para verificar esta hipótesis.

8.2. Algoritmos de contacto

En esta tesis se han desarrollado diferentes algoritmos de contacto aplicables a problemas cuasi-estáticos de elasticidad no lineal con el objetivo de obtener un campo de tensiones sin oscilaciones numéricas en la interface de contacto.

La primera propuesta presentada es la de un algoritmo de contacto flexible-rígido que cuenta con un lagrangiano aumentado, dos multiplicadores de lagrange y una variable *slack*, ver Sec. 6.3. De esta forma, el problema puede ser resuelto en un esquema Newton-Rapshon monolítico, evitando la complejidad de implementación computacional que implica el cumplimiento de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Este lagrangiano, basado en el trabajo de Areias *et al.* [ACdSCA04], difiere en las condiciones de activación y desactivación de los multiplicadores de Lagrange. La matriz de rigidez tangente ha sido derivada a partir del vector de fuerzas internas relacionado a la contribución de las fuerzas de contacto y a las fuerzas de fricción, siendo éste un aporte novedoso que se incluye en esta Tesis.

8. CONCLUSIONES

Para modelar la fricción en esta primera propuesta, se utilizó una regularización de la ley de Coulomb por medio del método de penalidad, habiendo verificado que, con una adecuada elección del factor de penalidad, es posible reproducir con un grado de exactitud importante los mismos resultados que se obtienen de las formulaciones que proponen métodos implícitos de proyección, tal es el caso del trabajo de Joli y Feng citado en esta Tesis en la Sec. 6.4. Los ejemplos numéricos estudiados han sido validados con soluciones provenientes de la bibliografía mostrando un buen desempeño del algoritmo propuesto. Sin embargo, la evaluación del campo de tensiones se encuentra limitado sólo a un cuerpo, el flexible. Esto motivó el desarrollo de un algoritmo de contacto flexible-flexible con dos esquemas de solución: i) por penalidad, ver Sec. 6.6.8; y ii) con un lagrangiano aumentado, ver Sec. 6.6.9, igual al propuesto para el caso flexible rígido y descrito en la Sec. 6.3. En ambos casos, se utilizó la técnica de interpolación de superficies basada en el algoritmo de subdivisión de superficies de Loop. A diferencia de los trabajos de Holzapel *et al.* [SH04] y de Wrigger *et al.* [WKOK01], en los cuales la matriz de rigidez tangente es obtenida en forma automática por medio de códigos de derivación, en esta Tesis, la matriz tangente para los desarrollos i) y ii) fue determinada en forma analítica. Si bien esta metodología implica un esfuerzo adicional para el desarrollo de las ecuaciones, como así también para su implementación en un código de elementos finitos, se obtiene un fundamento matemático más sólido del problema.

La propuesta para el algoritmo de contacto flexible-flexible fue implementada a través del método de penalidad por su relativa facilidad de programación. Sin embargo, a partir de la experiencia adquirida en los diferentes ejemplos desarrollados, se advierte que la selección del factor de penalidad condiciona la calidad de los resultados involucrando múltiples análisis para mejorar la precisión de la solución, resultando en un procedimiento costoso en tiempo, en especial con aplicaciones donde el número de grados de libertad es de una cantidad considerable. Además, y como se ha mencionado a lo largo de esta Tesis, este esquema cumple con las restricciones de contacto de manera aproximada, generando penetración entre los cuerpos de manera irreversible.

Con el objetivo de lograr independencia del factor de penalidad y evitar la penetración, se propuso una modificación a las matriz de rigidez tangente y al vector de fuerzas internas de manera que pudiera ser utilizado el lagrangiano aumentado con dos multiplicadores de Lagrange y variable *slack*, análogo al propuesto para el caso de contacto flexible-rígido.

La inclusión de dos multiplicadores de Lagrange y la variable *slack* como grados de libertad del sistema genera un aumento en las dimensiones de las matrices, aunque los tiempos de cálculo no son mucho mayores a los observados cuando se utiliza el esquema de penalidad. Los ejemplos propuestos han mostrado que, a pesar de las diversas variantes propuestas, los valores de las tensiones en la zona de contacto presentan irregularidades, esto es, concentración de tensiones de origen numérico en ciertos puntos de la malla. En un principio, se estimó que por medio de un suavizado de la superficie, que implica un cálculo de vectores normales y tangenciales más preciso, se evitará este tipo de anomalías. Sin embargo, de las observaciones realizadas en los diferentes resultados se concluye que esta característica se asocia

específicamente a los esquema tipo nodo segmento y es independiente de un refinamiento de malla y del suavizado de la superficie. Esto se hace evidente cuando se requiere evaluar la capacidad de un algoritmo nodo-segmento para superar los tests de la parcela de contacto, tal como se detalla en la Sec. 6.7.13.1. Además, los algoritmo de contacto suave necesitan un patch con un mínimo de elementos para poder generar la superficie de interpolación, acarreado inconvenientes en la zona de bordes de diferentes geometrías; como es el caso de los cubos de igual dimensión presentado en la Sec. 6.6.10. Para el caso de aplicación de una válvula de motor de combustión interna, la zona de contacto tiene una dimensión muy reducida, exigiendo una gran discretización de los elementos resultando en una malla con una topología no siempre uniforme. Debido a estos inconvenientes, los esquemas de suavizado de superficies no resultaron atractivos para este tipo de aplicaciones, con lo cual no se extendió su estudio y por ello se desarrolló la línea de investigación de los algoritmos de contacto tipo mortar.

Los algoritmos de contacto tipo mortar desarrollados en la Sec. 6.7, distribuyen más uniformemente la fuerza de contacto en relación con los anteriores, en particular cuando se utilizan elementos hexaédricos, y permiten cumplir las restricciones del sistema discreto en mallas completamente irregulares, como lo revelan los ejemplos numéricos propuestos. Al igual que en el algoritmo de contacto suave, la matriz tangente ha sido derivada del vector de fuerzas internas en forma analítica. Si bien la formulación presentada en esta tesis toma las bases de la propuesta del trabajo de Puso y Laursen [PL04], se diferencia de éste por el algoritmo de intersección utilizado. Puso y Laursen utilizan el algoritmo Cyrus Beck [FvDFH97], donde la intersección de las rectas, que forman el polígono final, se realiza en el espacio con una terna global referida en \mathbb{R}^3 . En esta Tesis, se propone realizar la intersección de las rectas con una terna local que define un plano de intersección. Esto modifica el desarrollo teórico de la matriz de rigidez tangente y el vector de fuerzas, siendo un aporte diferente a lo publicado hasta el momento. Si bien en el trabajo de Puso y Laursen no se han mencionado problemas numéricos originados con el algoritmo de intersección Cyrus Beck, es de esperar que con el algoritmo que aquí se propone, donde las ecuaciones de las rectas quedan limitadas a dos dimensiones, se eviten problemas numéricos de intersección de rectas en el espacio cuando éstas se encuentran a muy escasa distancia.

8.3. Problemas abiertos

Los estudios presentados en relación a fatiga de alto número de ciclos indicaron que en ciertos materiales, la rotura por fatiga comienza a partir de inclusiones no metálicas, aunque como se ha mencionado, este proceso no es generalizable para todos los casos. Queda abierta la posibilidad de modificar los criterios de fatiga multiaxial de modo que puedan tener en cuenta este tipo de defectos en la microestructura del material. Debido a que la formación de inclusiones es un proceso estadístico, la teoría probabilística es requerida.

La comparación y análisis de los resultados experimentales obtenidos con los del MEF indica claramente que, debido a la dispersión natural del proceso de fatiga, es

8. CONCLUSIONES

necesario ensayar una mayor cantidad de probetas en la máquina VTR y registrar más información que la presentada en esta Tesis. En este sentido, se requiere de mediciones de las deformaciones que se producen en el vástago a través de por ejemplo, galgas extensiométricas ubicadas en la zona de la entalla de la válvula. Esto permitiría corroborar con precisión los niveles de deformación desarrollados durante el proceso de asentamiento, el máximo nivel de tensión alcanzada y el estudio de los efectos disipativos que se producen en toda la cadena cinemática.

Los ejemplos presentados en esta Tesis con el lagrangiano aumentado de dos multiplicadores de Lagrange y variable *slack* han mostrado buena correlación con las soluciones referenciadas. Sin embargo, es necesario evaluar su comportamiento en casos más generales donde por ejemplo, se tengan en cuenta los efectos de plasticidad, [GPS01, CDB⁺05].

En referencia al algoritmo de contacto mortar, queda abierta la posibilidad de incluir el efecto de fricción, que fue excluido en los ejemplos propuestos en esta Tesis. Para ello, se puede adoptar la misma metodología de regularización de la ley de Coulomb desarrollada en la Sec. 6.3.5 para el algoritmo de contacto flexible-rígido.

Una forma más precisa de evaluar las restricciones evitando la penetración entre los cuerpos y la arbitrariedad del factor de penalidad, sería a través de la incorporación de un lagrangiano aumentado con dos multiplicadores de Lagrange, análogo al descrito en las Secs. 6.3.2 y 6.6.9.1 en conjunto con el método mortar desarrollado en esta Tesis.

Habiendo concluido que el esquema de contacto mortar es el más apropiado para estudios de desgaste, está prevista su utilización junto con la ley de Archard para predecir de manera precisa la variación de los perfiles desgastados en diversos componentes mecánicos, y estimar desde esta óptica su vida útil. Una tarea importante para dar validez a los resultados numéricos que se obtengan, consiste en la programación de numerosos ensayos experimentales en máquinas especialmente diseñadas que permitan determinar con suficiente precisión el valor del coeficiente de regularización K de la ley de Archard.

Es posible utilizar el algoritmo de contacto mortar y la ecuación de equilibrio del sólido que incluya los términos de inercia para comparar los resultados de las tensiones obtenidos en la Sec. 5.5, para el caso de un asentamiento dinámico de una válvula de motor de combustión interna, con el algoritmo de contacto del tipo nodo-segmento.

Apéndice A

Representación matricial y operaciones vectoriales

A.1. Vector

Un vector \mathbf{u} de un espacio Euclidiano \mathbb{E}^3 , es representado por una matriz columna,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

y su transpuesta por una matriz fila,

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T. \quad (\text{A.2})$$

donde el símbolo $(\cdot)^T$ denota la operación de transposición.

A.2. Producto interno

Consideremos dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} del espacio Euclidiano \mathbb{E}^3 . El producto interno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es el escalar,

$$\lambda = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos(\theta), \quad (\text{A.3})$$

en el que θ es el ángulo más pequeño que forman ambos vectores.

A.3. Producto vectorial

En tres dimensiones, se define al producto vectorial de \mathbf{u} y \mathbf{v} como $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. El resultado es un vector con las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2, \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= 0, \\ (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}^3$.

A.4. Definición de un tensor cartesiano

Una entidad \mathbf{T} que tiene componentes $T_{ijk\dots}$ (n índices) relativo a una base Cartesiana $\{\mathbf{e}_i\}$ y que transforma como,

$$T_{ijk\dots} = Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr\dots}T_{pqr\dots} \quad (\text{A.5})$$

bajo un cambio de bases $\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}'_i = Q_{ij}\mathbf{e}_j$, (donde Q_{ij} es una matriz ortogonal), es llamado *Tensor Cartesiano de orden n* .

A.4.1. Producto tensorial

Consideremos dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} . El producto de sus componentes $u_i v_j$ transforma según,

$$u'_i v'_j = Q_{ip}Q_{jq}u_p v_q, \quad (\text{A.6})$$

entonces el tensor con componentes $u_i v_j$ con respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}$ es un tensor cartesiano de orden 2. El producto tensorial o diádico de \mathbf{u} y \mathbf{v} es denotado por $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, ó $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$, con lo cual $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j$.

A.4.2. Transformación lineal y tensores cartesianos de segundo orden

El tensor cartesiano de segundo orden \mathbf{A} es lineal si,

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{u} + \beta\mathbf{A}\mathbf{v}, \quad (\text{A.7})$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Luego, si $\mathbf{A} \neq 0$ existe un único tensor inverso denotado como \mathbf{A}^{-1} , tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}, \\ \det(\mathbf{A}^{-1}) &= [\det(\mathbf{A})]^{-1}, \\ (\mathbf{S}\mathbf{A})^{-1} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

para todo $\mathbf{S}, \mathbf{A} \in \mathcal{W}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{R})$ tal que $\det(\mathbf{S}) \neq 0$. Si \mathbf{A} es una transformación uno a uno tal que $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ y $\mathbf{A} \neq 0$, \mathbf{A}^{-1} existe y

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}. \quad (\text{A.9})$$

A.5. Producto interno y proyección ortogonal

El producto cruz puede ser definido en forma matricial introduciendo una transformación lineal asociada al vector \mathbf{u} tal que,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \quad (\text{A.10})$$

A.5 Producto interno y proyección ortogonal

donde $\tilde{\mathbf{u}}$ es la matriz antisimétrica de rotación definida como:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

El *triple producto vectorial* es un producto vectorial de dos vectores, uno de los cuales es a su vez un producto vectorial. Su definición se detalla a continuación,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando la Ec.(A.10), el triple producto vectorial resulta,

$$\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{w}) - (\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{w}, \quad (\text{A.13})$$

Teniendo en cuenta que \mathbf{w} es arbitrario,

$$\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{v}\mathbf{I}. \quad (\text{A.14})$$

y para el caso de un vector arbitrario \mathbf{n} ,

$$\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}(\mathbf{v}^T\mathbf{w}) - (\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{w}. \quad (\text{A.15})$$

Luego, la siguiente transformación lineal,

$$\mathbf{P}_n = \tilde{\mathbf{n}}^T\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T, \quad (\text{A.16})$$

representa al operador proyección ortogonal que proyecta un vector arbitrario en un plano ortogonal en la dirección de \mathbf{n} .

Apéndice B

Contacto suave

En este apéndice se desarrollarán las ecuaciones para la obtención de los vectores $\mathbf{d}_{I\xi}$ y $\mathbf{d}_{I\eta}$ que vinculan las posiciones \mathbf{x}_I de la superficie suave con las coordenadas ξ y η , respectivamente.

Aplicando una variación a la función que parametriza la superficie de contacto,

$$\mathbf{x}^* = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I, \quad (\text{B.1})$$

se tiene,

$$\delta \mathbf{x}^* = N_I \delta \mathbf{x}_I + N_{I,\eta} \mathbf{x}_I \delta \eta + N_{I,\xi} \mathbf{x}_I \delta \xi, \quad (\text{B.2})$$

donde se ha omitido el símbolo \sum para una mayor claridad de las ecuaciones. Luego, la condición de perpendicularidad exige que:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = 0, \\ \mathbf{x}_{,\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Aplicando una variación a la Ec.(B.3),

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot (\delta \mathbf{x}_0^1 - \delta \hat{\mathbf{x}}^*) + \delta \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = 0, \\ \mathbf{x}_{,\eta}^* \cdot (\delta \mathbf{x}_0^1 - \delta \hat{\mathbf{x}}^*) + \delta \mathbf{x}_{,\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

y teniendo en cuenta que,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{,\xi}^* = N_{I,\xi} \mathbf{x}_I, \\ \mathbf{x}_{,\eta}^* = N_{I,\eta} \mathbf{x}_I, \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

la Ec.(B.2) puede ser escrita de la siguiente manera,

$$\delta \mathbf{x}^* = N_I \delta \mathbf{x}_I + \mathbf{x}_{,\xi}^* \delta \xi + \mathbf{x}_{,\eta}^* \delta \eta. \quad (\text{B.6})$$

Derivando nuevamente a la Ec.(B.6) respecto de ξ y junto con la Ec.(B.3), se tiene,

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_{,\xi}^* \delta \mathbf{x}_0^1 + [N_{I,\eta}(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - N_I \mathbf{x}_{,\eta}^*] \cdot \delta \mathbf{x}_I + \\ & [\mathbf{x}_{,\eta\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\eta}^* \cdot \mathbf{x}_{,\eta}^*] \delta \eta + \\ & [\mathbf{x}_{,\xi\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot \mathbf{x}_{,\eta}^*] \delta \xi = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Definiendo $N_0 = -1$ y por consiguiente $N_{0,\xi} = 0$ y $N_{0,\eta} = 0$, una forma más compacta de la Ec.(B.7) puede escribirse como,

$$\begin{aligned} & [N_{I,\xi}(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - N_I \mathbf{x}_{,\xi}^*] \cdot \delta \mathbf{x}_I + [\mathbf{x}_{,\xi\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot \mathbf{x}_{,\eta}^*] \delta \eta + \\ & [\mathbf{x}_{,\xi\xi}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot \mathbf{x}_{,\xi}^*] \delta \xi = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

en forma análoga para η

$$\begin{aligned} & [N_{I,\eta}(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - N_I \mathbf{x}_{,\eta}^*] \cdot \delta \mathbf{x}_I + [\mathbf{x}_{,\eta\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\eta}^* \cdot \mathbf{x}_{,\eta}^*] \delta \eta + \\ & [\mathbf{x}_{,\xi\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot \mathbf{x}_{,\eta}^*] \delta \xi = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Las Ecs.(B.8, B.9) pueden arreglarse en forma matricial como se indica a continuación,

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \delta \xi \\ \delta \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_I \mathbf{x}_{,\eta}^* - N_{I,\eta}(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) \\ N_I \mathbf{x}_{,\xi}^* - N_{I,\xi}(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{x}_I = \mathbf{D}^* \delta \mathbf{x}_I, \quad (\text{B.10})$$

donde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,\eta\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\eta}^* \cdot \mathbf{x}_{,\eta}^* & \mathbf{x}_{,\xi\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot \mathbf{x}_{,\eta}^* \\ \mathbf{x}_{,\xi\eta}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot \mathbf{x}_{,\eta}^* & \mathbf{x}_{,\xi\xi}^* \cdot (\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{x}_{,\xi}^* \cdot \mathbf{x}_{,\xi}^* \end{bmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

y,

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} N_I \mathbf{x}_{,\eta}^* - N_{I,\eta}(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) \\ N_I \mathbf{x}_{,\xi}^* - N_{I,\xi}(\mathbf{x}_0^1 - \hat{\mathbf{x}}^*) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Las variaciones de ξ y η denotadas como $\delta \xi$ y $\delta \eta$, respectivamente, se obtienen invirtiendo la matriz \mathbf{A} . De esta manera,

$$\begin{bmatrix} \delta \xi \\ \delta \eta \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}^* \delta \mathbf{x}_I. \quad (\text{B.13})$$

El producto $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}^*$ es un vector de la forma,

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_{I\xi} \quad \mathbf{d}_{I\eta}]^T. \quad (\text{B.14})$$

Finalmente las variaciones ξ y η se obtienen como,

$$\begin{cases} \delta \xi = \mathbf{d}_{I\xi} \cdot \delta \mathbf{x}_I, \\ \delta \eta = \mathbf{d}_{I\eta} \cdot \delta \mathbf{x}_I. \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Con la Ec.(B.2) y la Ec(B.15), la variación de la función que parametriza la superficie de contacto puede ser expresada en términos de los puntos \mathbf{x}_I de la siguiente manera,

$$\delta \mathbf{x}^* = [N_I \mathbf{I} + \mathbf{x}_{,\eta}^* \otimes \mathbf{d}_{I\eta} + \mathbf{x}_{,\xi}^* \otimes \mathbf{d}_{I\xi}] \delta \mathbf{x}_I. \quad (\text{B.16})$$

La posición de un punto referido a la configuración actual queda definido como,

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{X}_I + \mathbf{u}_I, \quad (\text{B.17})$$

luego,

$$\delta \mathbf{x}_I = \delta \mathbf{u}_I. \quad (\text{B.18})$$

Apéndice C

Método mortar

C.1. Matriz de transformación \mathbf{H}_A^α

Las coordenadas nodales \mathbf{x}^α definidas en una base global en \mathbb{R}^3 , pueden ser referidas a una base local en \mathbb{R}^2 para cada elemento no mortar de la siguiente manera,

$$\mathbf{y}_A^\alpha = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{e}}_1 \cdot (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1) \\ \check{\mathbf{e}}_2 \cdot (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

donde \mathbf{x}_0^1 es un punto que pertenece a un elemento no-mortar k , por ejemplo, uno de sus vértices. De esta manera, las coordenadas nodales \mathbf{y}_A^α quedan definidas con dos componentes. Los versores $\check{\mathbf{e}}_1$ y $\check{\mathbf{e}}_2$ son calculados por medio de las diagonales para cada elemento no-mortar de la siguiente manera,

$$\check{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{x}_3^1 - \mathbf{x}_1^1}{\|\mathbf{x}_3^1 - \mathbf{x}_1^1\|}, \quad (\text{C.2})$$

y

$$\check{\mathbf{e}}_2 = \check{\mathbf{e}}_3 \times \check{\mathbf{e}}_1, \quad (\text{C.3})$$

con,

$$\check{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1^1) \times (\mathbf{x}_4^1 - \mathbf{x}_2^1)}{\|(\mathbf{x}_3^1 - \mathbf{x}_1^1) \times (\mathbf{x}_4^1 - \mathbf{x}_2^1)\|}, \quad (\text{C.4})$$

ver Fig. C.1.

Derivando la Ec.(C.1) se obtiene,

$$\Delta \mathbf{y}_A^\alpha = \begin{bmatrix} \Delta \check{\mathbf{e}}_1 \cdot (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1) + \check{\mathbf{e}}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}_A^\alpha + \check{\mathbf{e}}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}_0^1 \\ \Delta \check{\mathbf{e}}_2 \cdot (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1) + \check{\mathbf{e}}_2 \cdot \Delta \mathbf{x}_A^\alpha + \check{\mathbf{e}}_2 \cdot \Delta \mathbf{x}_0^1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_A^\alpha \Delta \Phi, \quad (\text{C.5})$$

donde $\Delta \Phi$ es el vector variación de coordenadas generalizadas y \mathbf{H}_A^α una matriz que permite referir las componentes de $\Delta \mathbf{y}_A^\alpha$ (definidas en la base local \mathcal{V}), al vector $\Delta \Phi$ referido a la base global en \mathbb{R}^3 .

C.1.0.1. Variación de la normal

La linealización de $\check{\mathbf{e}}_1$ puede ser obtenida a partir de la Ec.(C.2), como se muestra a continuación,

$$\Delta \check{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{F}(\Delta \mathbf{x}_3^1 - \Delta \mathbf{x}_1^1), \quad (\text{C.6})$$

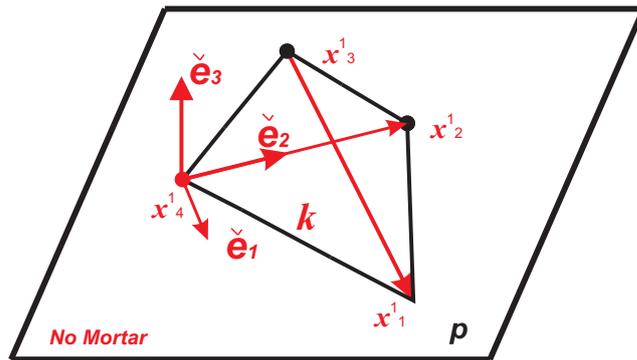


Figura C.1: Definición del plano de proyección.

donde,

$$\mathbf{F} = \frac{(\mathbf{I} - \check{\mathbf{e}}_1 \otimes \check{\mathbf{e}}_1)}{\|\mathbf{x}_3^1 - \mathbf{x}_1^1\|}. \quad (\text{C.7})$$

La primera variación del vector normal al plano de proyección \mathbf{p} es obtenida por medio de la linealización de la Ec.(C.4) como,

$$\Delta \mathbf{n} = \mathbf{A} \Delta \Phi, \quad (\text{C.8})$$

con \mathbf{A} definido de la siguiente manera,

$$\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}{[(\mathbf{x}_3^1 - \mathbf{x}_1^1) \times (\mathbf{x}_4^1 - \mathbf{x}_2^1)]} \left[(\widetilde{\mathbf{x}_4^1 - \mathbf{x}_2^1} \mid (\widetilde{\mathbf{x}_1^1 - \mathbf{x}_3^1} \mid (\widetilde{\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_4^1} \mid (\widetilde{\mathbf{x}_3^1 - \mathbf{x}_1^1} \right]. \quad (\text{C.9})$$

Por último, resta calcular la variación del versor $\check{\mathbf{e}}_2$, obtenido a partir de la Ec.(C.3),

$$\Delta \mathbf{e}_2 = \tilde{\mathbf{n}} \Delta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_1 \Delta \mathbf{n}, \quad (\text{C.10})$$

donde $\tilde{\mathbf{n}}$ y $\tilde{\mathbf{e}}_1$ son los operadores rotacionales antisimétricos asociados al vector normal \mathbf{n} y a $\check{\mathbf{e}}_1$, respectivamente. Reemplazando las Ecs.(C.6, C.8, C.10) en la Ec.(C.5), obtenemos la matriz \mathbf{H}_A^α definida como,

$$\mathbf{H}_A^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_I^\alpha \\ \mathbf{H}_{II}^\alpha \end{bmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_I^\alpha &= \left[-(\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1)^T \mathbf{F} + \check{\mathbf{e}}_1^T (\delta_{A1} - 1/n) \mid \right. \\ &\quad \left. \check{\mathbf{e}}_1^T (\delta_{A2} - 1/n) (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1)^T \mathbf{F} + \check{\mathbf{e}}_1^T (\delta_{A3} - 1/n) \mid \check{\mathbf{e}}_1^T (\delta_{A4} - 1/n) \right], \\ \mathbf{H}_{II}^\alpha &= \left[-(\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1)^T (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{A}^I + \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{F}) + \check{\mathbf{e}}_2^T (\delta_{A1} - 1/n) \mid \right. \\ &\quad - (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1)^T \tilde{\mathbf{e}}_1 \mathbf{A}^{II} + \check{\mathbf{e}}_2^T (\delta_{A2} - 1/n) \mid \\ &\quad - (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1)^T (\tilde{\mathbf{e}}_1 \mathbf{A}^{III} - \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{F}) + \check{\mathbf{e}}_2^T (\delta_{A3} - 1/n) \mid \\ &\quad \left. - (\mathbf{x}_A^\alpha - \mathbf{x}_0^1)^T \tilde{\mathbf{e}}_1 \mathbf{A}^{IV} + \check{\mathbf{e}}_2^T \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Las matrices \mathbf{A}^I , \mathbf{A}^{II} , \mathbf{A}^{III} y \mathbf{A}^{IV} corresponden a submatrices de \mathbf{A} de la Ec.(C.12)

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}^I \ \mathbf{A}^{II} \ \mathbf{A}^{III} \ \mathbf{A}^{IV}]. \quad (\text{C.13})$$

C.2. Intersección de dos rectas

Para la utilización del algoritmo de intersección de superficies en el plano, se utilizará la ecuación de la recta definida en \mathbb{R}^2 y en forma paramétrica. Los segmentos \bar{ab} y \bar{cd} quedan definidos por la resta de los puntos los puntos: $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{d}$, respectivamente, ver Fig. C.2.

El punto de intersección entre \bar{ab} y \bar{cd} queda expresado por,

$$\mathbf{Q}_{int}(s) = \mathbf{a} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad (\text{C.14})$$

o bien por,

$$\mathbf{P}_{int}(t) = \mathbf{c} + t(\mathbf{d} - \mathbf{c}), \quad (\text{C.15})$$

donde s y t son escalares que varían entre cero y uno y son denominados *parámetros*

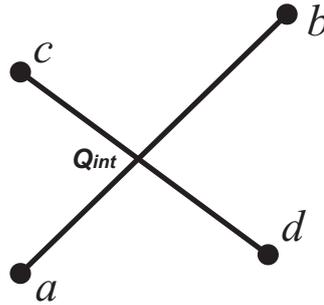


Figura C.2: Intersección entre dos segmentos en el plano.

de la recta paramétrica. Un punto de intersección entre los segmentos \bar{ab} y \bar{cd} , es definido por los valores de s y t que hacen que $\mathbf{Q}_{int}(s) = \mathbf{P}_{int}(t)$. La solución de este sistema de ecuaciones permite obtener los parámetros buscados,

$$\begin{aligned} s &= [a_x(d_y - c_y) + c_x(a_y - d_y) + d_x(c_y - a_y)] / D, \\ t &= [a_x(c_y - b_y) + b_x(a_y - c_y) + c_x(b_y - a_y)] / D, \\ D &= a_x(d_y - c_y) + b_x(c_y - d_y) + d_x(b_y - a_y) + c_x(a_y - b_y). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Un tratamiento especial es necesario para el caso en que el denominador D sea igual a cero, ver por ejemplo [O'R98].

La linealización de la Ec.(C.14) no presenta mayores dificultades, aunque es algo laboriosa. En forma genérica,

$$\Delta \mathbf{Q}_{int} = \bar{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \\ \Delta \mathbf{c} \\ \Delta \mathbf{d} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

donde la matriz $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}$ es función de la coordenadas de los puntos a , b , c y d .

C.3. La matriz D_{KL}^P

La definición de la matriz D_{KL}^P , que relaciona la variación de las coordenadas de los nodos de cada triángulo del polígono \mathcal{P} con la variación del vector de coordenadas nodales $\hat{\Phi}$, puede ser escrita de la siguiente manera,

$$\Delta \mathbf{y}_I^P = \mathbf{D}_{IK}^P \Delta \hat{\Phi}_{KL}. \quad (\text{C.18})$$

El centro geométrico del polígono \mathcal{P} queda definido por el punto,

$$\Delta \mathbf{y}_c^P = \frac{1}{n^P} \sum_{P=1}^{n^P} \Delta \mathbf{y}_I^P \quad I = 1 \dots 3. \quad (\text{C.19})$$

donde $\Delta \mathbf{y}_I^P$ son las variaciones de los vértices de cada triángulo p , ver Fig. C.3.

La matriz D_{KL}^P se define en función de cómo se produce la intersección entre los elementos no-mortar k y mortar l . El caso más sencillo es cuando un nodo del triángulo p coincide con el vértice de un elemento k o l , entonces,

$$\Delta \mathbf{y}_I^P = \Delta \mathbf{y}_i^\alpha, \quad (\text{C.20})$$

y la matriz D_{KL}^P , estará formada por unos y ceros en las filas y columnas correspondientes al grado de libertad del vértice \mathbf{y}_i^α . Este caso se detalla en la Fig. C.3, donde el nodo \mathbf{y}_2^P del triángulo p , coincide con el nodo del elemento mortar \mathbf{y}_2^2 . Una situación más compleja se presenta cuando existe intersección entre dos lados de los segmentos k y l que definen un nodo del triángulo p . Tal es el caso de la intersección entre los segmentos $\overline{\mathbf{y}_3^2 - \mathbf{y}_2^2}$ y $\overline{\mathbf{y}_4^1 - \mathbf{y}_3^1}$ en el punto \mathbf{y}_{int}^P de la Fig. C.3. Utilizando la Ec.(C.17) para intersección de segmentos; ver Sec. C.2; la matriz D_{KL}^P se llenará con los valores correspondientes a la matriz \bar{Q} en las filas y columnas definidas por los grados de libertad de los nodos, \mathbf{y}_3^2 , \mathbf{y}_2^2 , \mathbf{y}_4^1 y \mathbf{y}_3^1 , de l y k respectivamente.

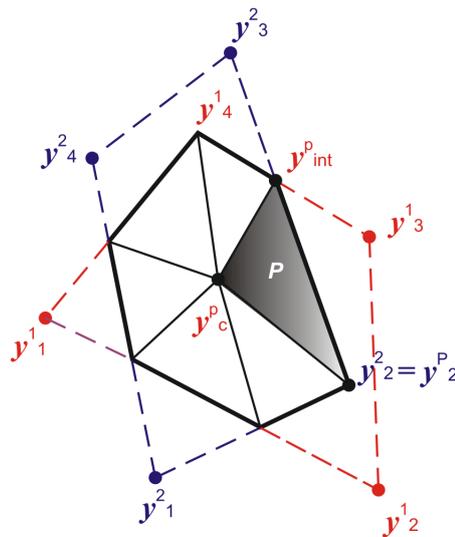


Figura C.3: Notación utilizada para los cuerpos en contacto.

Apéndice D

Geometría de válvula para ensayos en la VTR

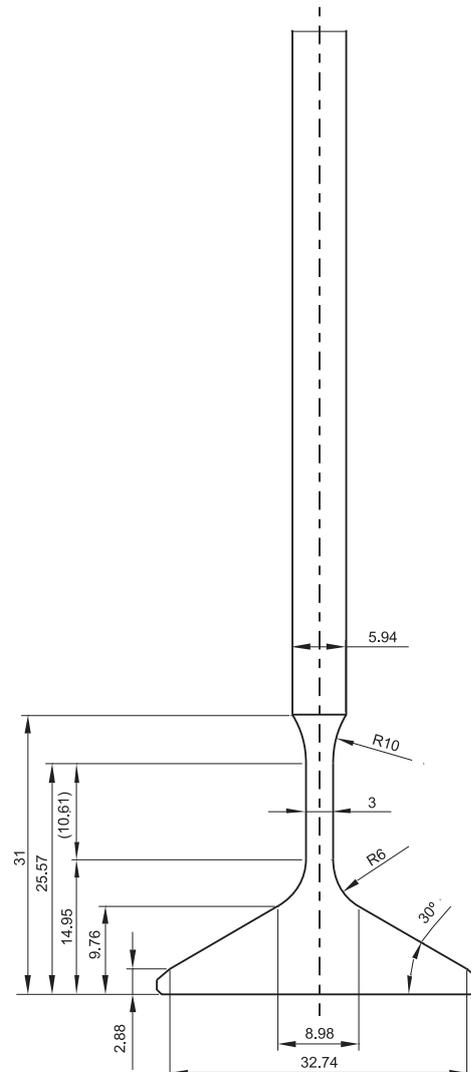


Figura D.1: Geometría de la válvula ensayada en la VTR.

Bibliografía

- [AC91] P. Alart y A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Methods Appl. Math.*, 92:353–375, 1991.
- [ACdSCA04] P. M. A. Areias, J. M. A. César de Sá, y C. A. Conceição António. Algorithms for the analysis of 3D finite strain contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:1107–1151, 2004.
- [ADM02] M. Al-Dojayli y S.A. Meguid. Accurate modelling of contact using cubic splines. *Finite Element and Design*, 38:337–352, 2002.
- [AL06] R. Asaro y V. Luvarda. *Mechanics of Solids Materials*. Cambridge, 2006.
- [Ala93] P. Alart. Contact avec frottement. *Mémoire d'habilitation a diriger des recherches, Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Université Montpellier II, France*, 1993.
- [Ano03] Anon. *Metallic materials - fatigue testing - statistical planning and analysis of data*. British Standards Institutions, London. BS ISO 12107: 2002, 2003.
- [AOM04a] J.L. Alves, M.C. Oliveira, y L.F. Menezes. An advanced constitutive model in sheet metal forming simulation: the Teodosiu microstructural model and the Cazacu Barlat yield criterion. En S. et al Glosch, editor, *Proceedings of the NUMIFORM'04, materials processing and design: modelling, simulation and applications*, p. 1645, Melville, 2004. American Institute of Physics.
- [AOM04b] J.L. Alves, M.C. Oliveira, y L.F. Menezes. Springback evaluation with several phenomenological yield criteria. *Mater Sci. Forum*, 455, 2004.
- [AP99] F. Armero y E. Petocz. A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179:151–178, 1999.
- [Arc53] J.F. Archard. *Contact and rubbing flat surfaces*. J. Appl. Phys, 1953.
- [Bat04] K.J. Bathe. On the state of finite element procedures for forming processes. En S. et al. Glosch, editor, *Proceedings of the NUMIFORM'04, material processing and design: modeling, simulation and applications*, p. 34, Melville, 2004. American Institute of Physics.
- [Bat06] C. Bathias. Piezoelectric fatigue testing machine and devices. *International Journal of Fatigue*, 28(11):1438–1445, 2006.

BIBLIOGRAFÍA

- [Bat09] C. Bathias. Influence of the metallurgical instability on the gigacycle fatigue regime. *International Journal of Fatigue*, 32:536–540, 2009.
- [BCH90] J.A. Bannantine, J.J. Comer, y J.L Handrock. *Fundamentals of metal fatigue analysis*. Prentice Hall, 1990.
- [BDLF01] C. Bathias, L. Drouillac, y P. Le François. How and why the fatigue S-N curve does not approach a horizontal asymptote. *International Journal of Fatigue*, 23(1):143–151, 2001.
- [BdMB02] C. Bathias, J.M. de Monicault, y G. Baudry. Automated piezoelectric fatigue machine for severe environments. *ASTM STP 1411*, pp. 3–15, 2002.
- [Ber84] D. P. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, New York, 1984.
- [BF91] F. Brezzi y M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [BHL97] F.B Belgacem, P. Hild, y P. Laborde. Approximation of the unilateral contact problem by the mortar finite element method. *C.R. Acad. Sci.*, 324:123–127, 1997.
- [BHL98] F.B. Belgacem, P. Hild, y P. Laborde. The mortar finite element method for contact problems. *Math Comput. Model*, 28:253–271, 1998.
- [BL87] T. Belytschko y J.I. Lin. A three-dimensional impact penetration algorithm with erosion. *Comput. Struct.*, 25:95–104, 1987.
- [BLF00] S. Bin Li y M. Freitas. A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation. *Mech. Struct. and Mach.*, 28, 2000.
- [BMGB09] E. Bayraktar, R. Mora, I.M. Garcia, y C. Bathias. Heat treatment, surface roughness and corrosion effects on the damage mechanism of mechanical components in the very high cycle fatigue regime. *International Journal of Fatigue*, 31:1532–1540, 2009.
- [BMP00] C. Bernardi, Y. Maday, y A.T. Patera. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1525–1547, 2000.
- [BN91] T. Belytschko y M.O. Neal. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian-methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:547–572, 1991.
- [BO04] G. Bergman y M. Oldenburg. A finite element model for thermomechanical analysis of sheet metal forming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:1167–1186, 2004.
- [BP05] C. Bathias y P.C. Paris. *Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice*. Marcel Dekker, 2005.

- [CBR⁺08] F. Cavalieri, C. Bathias, N. Ranc, A. Cardona, y J. Risso. Ultrasonic fatigue analysis on an austenitic steel at high temperature. En A. Cardona, M. Storti, y C. Zuppa, editores, *Mecánica Computacional*, volume XXVII, pp. 1205–1224, 2008.
- [CC78] E. Catmull y J. Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, 10:350–355, 1978.
- [CCR06] F. Cavalieri, A. Cardona, y J. Risso. Multiaxial high-cycle fatigue criterion in mechanical components subjected to impact load. En A. Cardona, N. Nigro, V. Sonsogni, y M. Storti, editores, *Mecánica Computacional*, volume XXV, pp. 447–460, 2006.
- [CCR07] F. Cavalieri, A. Cardona, y J. Risso. Fatigue criteria applied to mechanical components. *SAM. Congreso de Metalurgia y Materiales*, 25:1–7, 2007.
- [CCRF07] F. Cavalieri, A. Cardona, J. Risso, y V. Fachinotti. A finite element formulation for non linear 3D contact problems. En S.A. Elaskar, E. Pilotta, y G. Torres, editores, *Mecánica Computacional*, volume XXVI, pp. 1357–1372, 2007.
- [CCRL09] F. Cavalieri, A. Cardona, J. Risso, y C. Luengo. Análisis de fatiga en válvulas de motores de combustión interna a elevada temperatura. En C.D. García B., P.A. Lotito, L.A. Parente, y M. Vénere, editores, *Mecánica Computacional*, volume XXVIII, pp. 915–933, 2009.
- [CDB⁺05] P. Chabrand, F. Dubois, R. Boman, D. Graillet, y J.P. Ponthot. Numerical simulation of tribological devices used as a set of benchmarks for comparing contact algorithms. *International Journal of Crashworthiness*, pp. 637–665, 2005.
- [CH93] J. Chung y G. Hulbert. Time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- alpha method. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 60(2):371–375, 1993.
- [CH02] X-L. Cheng y W. Han. Inexact Uzawa algorithms for variational inequalities of the second kind. *Reports on Computational Mathematics of the Numerical Computing Group at the University of Iowa*, 2002.
- [CH06] X. Chen y T. Hisada. Development of a finite element contact analysis algorithm to pass the patch test. *Japan Society of Mechanical Engineers*, 49:483–490, 2006.
- [CLN02] A. Cardona, E. Lens, y N. Nigro. Optimal design of cams. *Multibody System Dynamics*, 7:285 – 305, 2002.
- [CO01] F. Cirak y M. Ortiz. Fully C1-conforming subdivision elements for finite deformation thin-shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:813–833, 2001.
- [COS00] F. Cirak, M. Ortiz, y P. Schrtider. Subdivisión surfaces: a new paradigm for thin-shell finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:2039–2072, 2000.

BIBLIOGRAFÍA

- [Cot64] A.H. Cottrell. *Theory of Crystal Dislocations*. Blackie and Son, London, 1964.
- [Cri97] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. Wiley, 1997.
- [Cro56] B. Crossland. Institution of mechanical engineers. En *Conf. on Fatigue of Metals*, pp. 138–149, 1956.
- [CS01] A. Carpentieri y A. Spagnoli. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. *International Journal Fatigue*, 23, 2001.
- [CSA⁺02] F. Cirak, M.J. Scott, E.K. Antonsson, M. Ortiz, y P. Schrtider. Integrated modelling, finite-element analysis, and engineering design for thin-shell structures using subdivision. *Computer Aided Design*, 34:137–148, 2002.
- [CT66] R. Clough y J. Tocher. In matrix methods in structural mechanics. En *Conference held at Wright-Patterson Air Force Base, Ohio*, 1966.
- [Cur50] F.W. Curtis. *High Frequency Induction Heating*. McGraw-Hill, 1950.
- [Dal99] T Dalrymple. An analytical overlay technique for describing deformable contact surfaces. En W. Wunderlich, editor, *In CD-ROM Proceedings 01 the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Institut für Statik, ECCM, München, 1999.
- [DBF⁺03] P. Davoli, A. Bernasconi, M. Filippini, S. Foletti, y I.V. Papadopoulos. Independence of the torsional fatigue limit upon a mean shear stress. *International Journal Fatigue*, 25:471–480, 2003.
- [DCDB02] K. Dae-Cheol, H.K. Dong, y M. K. Byung. Finite element analysis for the wear of Ti-N coated punch in the piercing process. *Wear*, 252:859–869, 2002.
- [Dep93] A. Deperroris. *Sur le calcul des limites d'endurance des aciers*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 1993.
- [DKM00] C.R. Dohrmann, S.W. Key, y Heinstein M.W. Methods for connecting dissimilar three-dimensional finite element meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:1057–1080, 2000.
- [DS78] D. Doo y M. Sabin. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, 10:356–360, 1978.
- [DV73] K. Dang Van. Sur la résistance à la fatigue des métaux. *Sciences et Techniques de l'Armement*, 47:429–453, 1973.
- [DVG⁺M89] K. Dang Van, B. Griveau, y O. Message. On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and applications. En M.W. Brown y K.J. Miller, editores, *Comp. Methods in Applied Mechanics Engineering. Biaxial and multiaxial fatigue, EGF 3*, pp. 479–96, 1989.
- [EB01] N. EI-Abbasi y K.J. Bathe. Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. *Comput. Struct.*, 79:1473–1486, 2001.

- [EH03] J.A. Ewing y J.C. Humfrey. The fracture of metals under rapid alterations of stress. *Philosophical Transactions of the Royal Society. London*, A200:241–250, 1903.
- [EK93] F. Ellyin y D. Kujawski. A multiaxial fatigue criterion including mean stress effect. *ASTM, Philadelphia*, pp. 55–66, 1993.
- [EKA97] S.K. Esche, G.L. Kinzel, y T. Altan. Issues in convergence improvement for non-linear finite element programs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:4577–4594, 1997.
- [EMC01] N. El-Abbasi, S.A. Meguid, y A. Czekanski. On the modelling of smooth contact surfaces using cubic splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:953–967, 2001.
- [ER00] J.A. Ewing y W. Rosenhain. Experiments in micro-metallurgy: effects of strain. Preliminary notice. *Philosophical Transactions of the Royal Society. London*, A199:85–90, 1900.
- [FGW⁺95] M.J. Finn, P.C. Galbraith, L. Wu, J.O. Halquist, L. Lum, y T-L Lin. Use of a coupled explicit implicit solver for calculating springback in automotive body panels. *J. Mater. Process Technol.*, 50:395–406, 1995.
- [FMF⁺01] S. Fromentina, M. Martiny, G. Ferron, Z. Tourkic, L.P. Moreira, y G. Ferran. Finite element simulations of sheet-metal forming processes for planar-anisotropic materials. *Int. J. Mech. Sci.*, 43:1833–1852, 2001.
- [FMP74] N.E. Frost, K.J. Marsh, y L.P. Pook. *Metal Fatigue*. Clarendon Press. Reprinted with minor corrections (1999). Dover Publications, Mineola, N.Y., 1974.
- [For69] P.J.E. Forsyth. *The physical Basis of Fatigue Metal*. Blackie and Son, London, 1969.
- [FvDFH97] J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, y J.F. Hughes. *Computer Graphics, Principles and Practice*. Addison-Wesley. Reading, second edition, 1997.
- [FW06] K.A. Fischer y P. Wriggers. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195:5020–5036, 2006.
- [FZ75] A. Francavilla y O.C. Zienkiewicz. A note on numerical computation of elastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9:913–924, 1975.
- [GAM05] C. Gonçlaves, J. Araújo, y E. Mamiya. Multiaxial fatigue: a stress based criterion for hard metals. *International Journal for Fatigue*, 27:177–187, 2005.
- [Gar79] Y. S. Garud. A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loading. En ASME, editor, *Symposium on Methods of Predicting Material Life in Fatigue*, pp. 247–264, New York, 1979.

BIBLIOGRAFÍA

- [Gia89] A.E. Giannakopoulos. The radial mapping method for the integration of friction constitutive relations. *Comput. Struct.*, 6:281–290, 1989.
- [GL89] R. Glowinski y P. LeTallec. Augmented lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics. *SIAM*, 79:379–416, 1989.
- [GPC51] H.J. Gough, H.V. Pollard, y W.J. Cleushaw. Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stress. *Memo 2522, Aeronautical Research Council*, 1951.
- [GPS01] D. Graillet, J.P. Ponthot, y L. Stainier. Augmented lagrangian procedure for implicit computation of contact-impact between deformable bodies. *International Journal of Crashworthiness*, pp. 209–221, 2001.
- [GW02] L. Geng y R.H. Wagoner. Role of plastic anisotropy and its evolution on springback. *Int. J. Mech. Sci.*, 44:123–148, 2002.
- [Hal96] G.R. Halford. The energy required for fatigue. *J. Materials*, 1, 1996.
- [Her87] G. Herron. Techinques for visual continuity. *SIAM*, pp. 167–174, 1987.
- [HGB85] J.O. Hallquist, G.L. Goudreau, y D.J. Benson. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Comput. Methods Appl. Math.*, 51:107–137, 1985.
- [HGN⁺06] A. Hana, Pillon G., A. Nichici, B. Vannes, y D. Greveya. Study and evaluation of fretting critical slip conditions by applying the design of experiments method. *Wear*, 261:1080–1086, 2006.
- [HK90] E. Hansson y A. Klarbring. Rigid contact modelled by cad surface. *Engineering Computations*, 7:344–348, 1990.
- [JF08] P. Joli y Z.-Q. Feng. Usawa and Newton algorithms to solve frictional contact problems within the bi-potential framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73:317–330, 2008.
- [Jho87] K.L. Jhonson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [Jon80] D.J. Jones. Fatigue behavior of exhaust valve alloys. *SAE Technical Paper Series*, 800315:1–14, 1980.
- [KGS03] P. Krysl, E. Grinspan, y P. Schrbder. Natural hierarchical refinement for finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:1109–1124, 2003.
- [KHP97] L. Kobbelt, T. Hesse, y H. Prautzsch. Iterative mesh generation for FE-computations on free form surfaces. *Engineering Computations*, 14:806–820, 1997.
- [KLPV01] C. Kim, R.D. Lazarov, J.E. Pasciak, y P.S. Vassilevski. Multiplier spaces for the mortar finite element method in trhee dimenensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38:519–538, 2001.

- [KO88] N. Kikuchi y J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of variational Inequalities Constrains and Finite Element Method*. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [Kon87] X. Kong. *Theoretical and numerical study on vibratory fatigue*. Thèse de doctorat, University of technology of Compiègne, 1987.
- [KOWK00] L. Krstulovic-Opara, P. Wriggers, y J. Korelc. Symbolically generated 3D smooth polynomial frictional contact element based on the quartic bézier surfaces. En E. Oñate y B. Bugeda, G. and Suárez, editores, *In CD-ROM Proceedings 01 the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, Spain, 2000. ECCOMAS.
- [KOWK02] L. Krstulovic-Opara, P. Wriggers, y J. Korelc. A C1-continuous formulation for 3D finite deformation frictional contact. *Computational Mechanics*, 29:27–42, 2002.
- [LBZ01] J. Lin, A.A. Ball, y J.I. Zheng. Contact strategies to deal with different tool descriptions in static explicit FEM of 3-D sheetmetal forming simulation. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 41:703–717, 2001.
- [LC90] J. Lemaitre y J.L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990.
- [Lee03a] C.K. Lee. Automatic metric 3D surface mesh generation using subdivision surface geometrical model part 1: construction of underlying geometrical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:1953–1614, 2003.
- [Lee03b] C.K. Lee. Automatic metric 3D surface mesh generation using subdivision surface geometrical model part 1: mesh generation algorithm and examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:1615–1646, 2003.
- [LO94] T.A. Laursen y V.G. Oancea. Automation and assessment of augmented lagrangian algorithms for frictional contact problems. *J. Appl. Mech- T ASME*, 61:956–963, 1994.
- [Loo87] C. Loop. Smooth subdivision surfaces based on triangles. Master thesis, University of Utah, Department of Mathematics, 1987.
- [LS86] P. Lancaster y K. Salkauskas. *Curve and Surface Fitting. An introduction*. Academic Press, San Diego, 1986.
- [LS97] W. Ling y H.K. Stolarski. A contact algorithm for problems involving quadrilateral approximation of surface. *Comput. Struct.*, 63:963–975, 1997.
- [Lub90] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. MacMillan, 1990.
- [Lue84] D.G. Luenberger. *Linear and nonlinear programming*. Addison- Wesley, Reading, 1984.

BIBLIOGRAFÍA

- [Mal69] L.E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [Mas50] W.P. Mason. Piezoelectric crystal and their application in ultrasonics. *New York*, p. p.161, 1950.
- [May99] H. Mayer. Fatigue crack growth and threshold measurements at very high frequencies. *Int. Mat. Rev.*, 4(1):1–34, 1999.
- [MDB⁺03] I. Marines, G. Dominguez, G. Baudry, J.F. Vittori, S. Rathery, J.P. Doucet, y C. Bathias. Ultrasonic fatigue tests on bearing steel AISI-SAE 52100 at frequency of 20 and 30 kHz. *International Journal of Fatigue*, 25(9):1037–1046, 2003.
- [MDL04] I.R. McColl, J. Ding, y S.B. Leen. Finite element simulation and experimental validation of fretting wear. *Wear*, 256:1114–1127, 2004.
- [MKW⁺09] S. Mukras, N.H. Kim, Sawyer W.G., D.B. Jackson, y L.W. Berquist. Numerical integration schemes and parallel computation for wear prediction using finite element method. *Multibody System Dynamics*, 266:822–831, 2009.
- [ML00] T.W. McDevitt y T.A. Laursen. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1525–1547, 2000.
- [MLMS07] J.J. Madge, S.B. Leen, I.R. McColl, y P.H. Shipway. Contact-evolution based prediction of fretting fatigue life: Effect of slip amplitude. *Wear*, 262:1159–1170, 2007.
- [MNU99] Y. Murakami, T. Namoto, y T. Ueda. Factors influencing the mechanism of superlong fatigue failure in steels. *Fatigue Fracture Eneg. Mater. Struct.*, 22:581–590, 1999.
- [MO99] K.J. Miller y W.J. O’donnell. The fatigue limit and its elimination. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, pp. 545–557, 1999.
- [Mor79] J.I. Moreau. Application of convex analysis to some problems of dry friction. En H. Zorski, editor, *Trends of pure mathematics applied to mechanics*, volume 11, Pitma, London, 1979.
- [Mur02] Y. Murakami. *Metal Fatigue. Effects os Small Defects and Nonmetallic Inclusions*. Elsevier Science, Oxford., 2002.
- [Ni91] J. Ni. *Mechanical behaviour of alloys in ultrasonic fatigue*. Thèse de doctorat, CNAM, 1991.
- [NK45] T. Nishihara y M. Kawamoto. *The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference*, *Memoirs of the College of Engineering*, volume 2. Kyoto Imperial University, 1945.
- [Ode84] J.T. Oden. Finite elements of nonlinear continua. *Computer and structures*, 19:137:147, 1984.

- [Ogd84] R. W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformation*. Dover Publications, 1984.
- [OOf10] OOfelie. Object oriented finite elements led by interactive executor. Open engineering. S.A., 2010. <http://www.oofelie.org>.
- [OP84] J.T. Oden y E.B. Pire. Algorithms and numerical results for finite element approximation of contact problems with non-classical friction laws. *Computer and structures*, 19:137:147, 1984.
- [O'R98] J. O'Rourke. *Computational geometry in C*. Cambridge University Press, 2 edition, 1998.
- [Pap98] IV. Papadopoulos. Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. *Mechanical Engineering Publications*, 21:269–285, 1998.
- [PC99] G. Pietrzak y A. Curnier. Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented lagrangian treatment. *Comput. Methods. Appl. Math.*, 177:351–381, 1999.
- [PDBBDV96] R.H.J. Peerlings, R. De Borst, W.A.M Brekelmans, y J.H.P. De Vree. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3391– 3403, 1996.
- [PDG⁺97] I. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini, y A. Bernasconi. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *International Journal of Fatigue*, 19:219–235, 1997.
- [PF02] K.C. Park y C.A Felippa. A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2117–2142, 2002.
- [PL01a] V. Padmanabhan y T.A. Laursen. A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis. *Finite Element Analysis and Design*, 37:173–198, 2001.
- [PL01b] M. Puso y T.A. Laursen. A 3D contact smoothing method using Gregory patches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:1161–1194, 2001.
- [PL04] M. Puso y T. Laursen. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Comp. Methods in Applied Mechanics Engineering*, 193:601–629, 2004.
- [Poo62] L.P. Pook. Quantitative fractography. examples showing information derived from aircraft components after fatigue testing. laboratory test note ltn 212. Technical report, Hawker Siddeley Aviation, Cnevtry, 1962.
- [Poo83] L.P. Pook. *The role of crack growth in metal fatigue*. Metals Society, London, 1983.
- [Poo02] L.P. Pook. *Linear Elastic Fracture Mechanics of Engineers. Theory and Applications*. WIT Press, Southampton., 2002.

BIBLIOGRAFÍA

- [Poo07] L.P. Pook. *Metal Fatigue*. Springer, 2007.
- [PT90] P. Papadopoulos y R.L. Taylor. Technical Report UCB/ SEMM Report 90/18. Technical report, University of California at Berkeley, 1990.
- [PT92] P. Papadopoulos y R.L. Taylor. A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 50:163–180, 1992.
- [PTS08] M. Puso, Laurse T.A., y J. Solberg. A segment to segment mortar method for quadratic elements and large deformations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197:555–566, 2008.
- [Pus04] M. Puso. A 3D mortar method for solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:315–336, 2004.
- [RB03] A.V. Romanovskaya y L.R. Botvina. Effect of crack path on statistical distribution of the fatigue lifetime. En A. Carpinteri y L.P. Pook, editores, *Proceedings of the International Conference of Fatigue Cracks Paths*, p. 6, Parma, Italy, September 2003. University of Parma.
- [RZOP01] J. Rojek, O.C. Zienkiewicz, E. Oñate, y E. Postek. Advances in FE explicit formulation for simulation of metal forming processes. *J. Mater. Process Technol.*, 19:41–47, 2001.
- [SAM07] SAMCEF. Mecano V13 user manual. Samtech S.A., 2007. <http://www.samcef.com>.
- [San93] A. Santos. *Tool description and contact strategies used in the static explicit FEM code ITAS3D for simulation of 3-D sheet metal forming process*. PhD thesis, 1993.
- [SBB01] Z.D Sun, C. Bathias, y G. Baudry. Fretting fatigue of 42CrMo4 steel at ultrasonic frequency. *International Journal of Fatigue*, 23(5):449–453, 2001.
- [SBS95] D.F. Shanno, M.G. Breitfeld, y E.M. Simantiraki. Implementating barrier methods for nonlinear programming. *Rutcor Research Report*, 39, 1995.
- [Sch93] W. Schütz. A history of fatigue. *Engineering fracture mechanics*, 54:263–300, 1993.
- [Sch05] J. Schijve. Statistical distribution functions and fatigue of structures. *International Journal Fatigue*, 27:1031–1039, 2005.
- [SH98] J. C. Simo y T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, 1998.
- [SH04] M. Stadler y G.A. Holzapfel. Subdivision schemes for smooth contact surfaces of arbitrary mesh topology in 3D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:1161–1195, 2004.
- [SHK03] M. Stadler, G.A. Holzapfel, y J. Korelc. Cn-continuous modelling of smooth contact surfaces using NURBS and applications to 2D problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57:2177–2203, 2003.

- [Sin55] G. Sines. Behaviour of metals under complex static and alternating stress. En G. Sines y Waisman, editores, *Metal Fatigue*, pp. 145–169, New York, 1955. McGraw-Hill.
- [SL92] J.C. Simo y T.A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Comput. Struct.*, 42:97–116, 1992.
- [SL02] L. Susmel y P. Lazzarin. A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multi-axial fatigue assessment. *International Journal Fatigue*, 25, 2002.
- [SM95] A. Santos y A. Makinouchi. Contact strategies to deal with different tool descriptions in static explicit FEM of 3-D sheetmetal forming simulation. *J. Mater. Process Technol.*, 50:277–291, 1995.
- [Son03] C.M. Sonsino. Fatigue design of structural ceramic parts by the example of automotive intake and exhaust valves. *International Journal of Fatigue*, 25:107–116, 2003.
- [SS95] T. Shimizu y T. Sano. An application of a penalty method contact and friction algorithm to a three-dimensional tool surface expressed by a B-spline patch. *Journal of Material Processing Technology*, 48:207–213, 1995.
- [ST02] S. Stanzl-Tschegg. Statistical distribution functions and fatigue of structures. *Fatigue Fract. Engng. Mater.*, 25:725–896, 2002.
- [Sta10] J. Stam. Evaluation of loop subdivision surfaces, 2010. <http://www.josstam.com>.
- [STJ⁺04] A. Shyam, C.J. Torbet, S.K. Jha, J.M. Larsen, M.J. Caton, C.J. Szczepanski, T.M. Pollock, y J.M. Jones. Development of ultrasonic fatigue for rapid, high temperature fatigue studies in turbine engine materials. *Superalloys 2004, TMS, Seven Springs, Pennsylvania, USA*, pp. 259–268, 2004.
- [SWT85] J.C. Simo, P. Wriggers, y R.L. Taylor. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Comput. Methods. Appl. Math.*, 50:163–180, 1985.
- [Tek00] A.E. Tekkaya. State of the art of simulation of sheet metal forming. *J. Mater. Process Technol.*, 103:14–22, 2000.
- [Tha91] G. Thanigaiyarasu. *Contribution to the study of fatigue life and crack growth in vibration fatigue*. Thèse de doctorat, University of technology of Compiègne, 1991.
- [TP91] R.L. Taylor y P. Papadopoulos. On a patch test for contact problems in two dimensions. En P. Wriggers y W. Wanger, editores, *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*, pp. 690–702, Berlin, 1991. Springer.
- [UPX10] Université Paris X. LEEE/ITMA, 2010. <http://www.cva.u-paris10.fr/iut>.
- [Wal95] H. Walter. Implementating barrier methods for nonlinear programming. *Rutcor Research Report*, 39, 1995.

BIBLIOGRAFÍA

- [WCY01] F. Wang, J. Cheng, y Z. Yao. A finite element model for thermomechanical analysis of sheet metal forming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:655–672, 2001.
- [Wil80] L.E. Willertz. Ultrasonic fatigue. *Int Mat Rev.*, 2:65–78, 1980.
- [WKOK01] P. Wriggers, L. Krstulovic-Opara, y J. Korelc. Smooth C1-interpolation for two-dimensional frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:1469–1495, 2001.
- [WN97] S.P. Wang y E. Nakamachi. The inside-outside contact search algorithm for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:3665–3685, 1997.
- [WNB93] T. Wu, J. Ni, y C. Bathias. Automotive in ultrasonic fatigue machine to study low crack growth at room and high temperature. *ASTM STP, 1411*, pp. pp. 598–607, 1993.
- [Woh01] B. Wohlmuth. *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*. Springer, 2001.
- [Wri02] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley and Sons, 2002.
- [XDT03] W. Xu, S. Di, y P. Thomson. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:487–506, 2003.
- [XFMN98] H.L. Xing, T. Fujimoto, A. Makinouchi, y G.P. Nikishkov. In: Huétink j (ed). pp. 207–212, 1998.
- [YL08] B. Yang y T.A. Laursen. A large deformation mortar formulation of self contact with finite sliding. *Compu. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197:756–772, 2008.
- [YL09] B. Yang y T.A. Laursen. A mortar-finite element approach to lubricated contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198:3656–3669, 2009.
- [YLM05] B. Yang, T.A. Laursen, y X. Meng. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:1183–1225, 2005.
- [YTF⁺07] J.Z. Yi, C.J. Torbet, Q. Feng, T.M. Pollock, y J.W. Jones. Ultrasonic fatigue of a single crystal Ni-base superalloy at 1000°C. *Materials Science and Engineering*, 443(1):142–149, 2007.
- [YYCB99] J.W. Yoon, D.Y. Yang, K. Chung, y F. Barlat. A general elastoplastic finite element formulation based on incremental deformation theory for planar anisotropy and its application to sheet metal forming. *Int. J. Plast.*, 15:35–67, 1999.

- [ZDL09] G. Zavarise y L. De Lorenzis. A modified node-to-segment algorithm passing the contact patch test. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 79:379–416, 2009.
- [ZMC06] N. Zouain, E. Mamiya, y F. Comes. Using enclosing ellipsoids in multiaxial fatigue strength criteria. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 25:51–71, 2006.
- [ZN94] Z-H Zhong y L. Nilsson. A three-dimensional impact penetration algorithm with erosion. *Comput. Struct.*, 52:187–197, 1994.
- [ZT00] O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 2. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5 edition, 2000.
- [ZW99] G. Zavarise y P. Wriggers. A superlinear convergent augmented lagrangian procedure for contact problems. *Eng. Comput.*, 16:88–119, 1999.