ALG

Adriana Engler
Daniela Müller
Silvia Vrancken
Marcela Hecklein

ALG

ÁLGEBRA

ÁLGEBRA

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL LITORAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Rector Enrique Mammarella
Director de Planeamiento y Gestión Académica Daniel Comba
Directora Ediciones UNL Ivana Tosti

. . . .

Engler, Adriana
Algebra / Adriana Engler ; YR. - 2a ed . - Santa Fe: Ediciones UNL, 2019.
Libro digital, PDF - (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-133-3

1. Álgebra. 2. Matemática. I. Título
CDD 512

. . . .

Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación diseño
Alina Hill
Producción general
Ediciones UNL

—
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

. . . .

Álgebra

Adriana Engler

Daniela Müller

Silvia Vrancken

Marcela Hecklein

A los míos, por su gran amor y paciencia
A mi mamá, siempre conmigo
Adriana

A la memoria de mi madre
A mis hijos, María, Magdalena y Martín
Daniela

A Fernando, Melina y Roberto
Silvia

A Carlos y Martín
Marcela

Prólogo

"La Matemática ha exigido siglos de excavación, y ese proceso de búsqueda no está concluido ni lo estará nunca. Pero hoy día vemos ya lo excavado con claridad suficiente como para distinguir entre ello y las herramientas utilizadas para la excavación." (Philip E. B . Jourdain)

La matemática logró llegar al lugar que ocupa en la actualidad gracias a la curiosidad humana, al deseo de aprender y a la necesidad de dar respuesta a profundos interrogantes. La influencia, importancia y el papel relevante de la matemática en nuestra sociedad fue en constante crecimiento en especial por el gran aumento de sus aplicaciones. Podemos decir que la matemática está presente en casi todas las actividades humanas. Su presencia en la vida cotidiana de la mayoría de las personas es constante. La universalidad de la matemática hace que hoy resulte indispensable en las ciencias de la naturaleza, ciencias sociales y ciencias económicas. La comprensión del mundo actual con sus avances tecnológicos y la gran cantidad de información hace necesario familiarizarse con ciertas nociones matemáticas.

La construcción del conocimiento matemático implica flexibilidad y movilidad. El trabajo matemático es un proceso de descubrimiento continuo para alcanzar a comprender la naturaleza de sistemas matemáticos concretos. Sabemos que es importante desarrollar una forma de conocimiento a través de la cual se organice información, se resuelvan problemas, se interprete la realidad y se tomen decisiones. Como docentes debemos ser reflexivos y analíticos en la selección y aplicación de contenidos y desarrollarlos desde distintos enfoques. Las historias e ideas del pasado son muy ricas en matemática.

Las nuevas ideas y tendencias en Educación Matemática están centradas en el desarrollo de una disciplina que permita a los alumnos apropiarse del conocimiento matemático fomentando la autonomía de pensamiento, la capacidad de aprender matemáticamente, de razonar, elaborar conclusiones, generalizar, demostrar, descartar y elaborar conclusiones.

Decidimos generar esta nueva obra como desprendimiento de nuestro primer trabajo "Matemática Básica" después de compartir muchos años de experiencia áulica. Si bien los escribimos pensando en nuestros estudiantes, alumnos de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, consideramos que resulta un material también interesante para docentes y estudiantes de los primeros niveles de las carreras de grado y para docentes del polimodal. Nuestro objetivo no es hacer de ellos expertos en matemática sino que buscamos hacerlos sentir cómodos en un ambiente donde cada vez se hace más importante lograr trabajar con la matemática de manera dinámica y valerse de sus contenidos y técnicas para resolver los problemas que se presentan en el área de la especialidad. Pretendemos que descubran el inmenso potencial de la matemática teniendo en cuenta sus propios valores y su carácter instrumental.

Presentamos los contenidos básicos y métodos del álgebra con énfasis en su aplicación en la resolución de problemas del campo de la administración, economía, biología y ciencias sociales. Los temas desarrollados corresponden a álgebra matricial, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, sistemas de inecuaciones, programación lineal y análisis combinatorio. Para la realización de este trabajo tuvimos en cuenta que el estudiante no aprende matemática si sólo maneja símbolos y técnicas de resolución. Teniendo en cuenta la valoración de la matemática como disciplina para resolver problemas, se torna absolutamente necesario que maneje con facilidad el lenguaje matemático. Para los futuros profesionales es fundamental la resolución de problemas durante su período de formación y, en especial, durante su educación matemática a fin de contribuir en el desarrollo de sus capacidades.

Comprometidas en ayudar a desarrollar un pensamiento matemático, estamos convencidas de que este libro constituye en aporte para la educación matemática de nuestros jóvenes. Respeta criterios pedagógicos y didácticos tendientes a una forma de aprendizaje amena y accesible con abundantes ejemplos, contempla y busca dar respuestas a la problemática de la motivación, intentando vencer el desafío de despertar el entusiasmo para estudiar matemática en alumnos de carreras no matemáticas, la construcción del conocimiento, integración de contenidos y aplicaciones y la resolución de problemas.

CARACTERÍSTICAS DE LA OBRA

A lo largo de la misma se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

- Los nuevos conceptos se presentan por medio de ejemplos que generan la necesidad de desarrollar nuevas técnicas.
- Un enfoque donde se desarrolla el concepto matemático para después reforzarlo con las aplicaciones.
- Un énfasis especial en la comunicación verbal de los conceptos matemáticos mediante la traducción del lenguaje coloquial al lenguaje matemático y viceversa.
- Un cuidado especial en las explicaciones de los conceptos más difíciles teniendo en cuenta la necesidad de aplicar distintos caminos según el grado de dificultad. Se trata de guiar el proceso de pensamiento del alumno hacia la meta propuesta, trabajar en forma intuitiva una idea para después formalizarla tratando de salvar todos los obstáculos.
- Presentación de la teoría con rigurosidad y precisión. En muchos casos, a fin de ganar en claridad, se presentan discusiones intuitivas informales.
- Motivación del alumno a través de valorar la necesidad de saber matemática para, mediante la resolución de problemas, enfrentarse a la futura vida profesional.
- Una gran cantidad y amplia variedad de aplicaciones y problemas para que los estudiantes asuman la utilización de todos los contenidos matemáticos que están aprendiendo.
- Utilización de representaciones gráficas convencidas de que quienes se enfrentan por primera vez a grandes desafíos matemáticos tienen dificul-

tades y, sin embargo, el uso de los gráficos logra un efecto muy importante en la construcción del conocimiento.

- Uso del lenguaje gráfico, numérico y algebraico de manera indistinta.

ORGANIZACIÓN DE LA OBRA

En el desarrollo de los capítulos se incluyen las explicaciones teóricas con abundantes ejemplos y desarrollo de aplicaciones en el campo de la física, ingeniería, biología, economía, ciencias sociales, ecología, química, administración y ciencias naturales. Se presenta una gran cantidad de ejemplos y problemas resueltos a fin de que el alumno observe distintos detalles que aparecen en los mismos y que constituyen su quehacer matemático. Están considerados de manera gradual, según las dificultades. En primer lugar aparecen ejemplos rutinarios para adquirir destrezas, principalmente desde el punto de vista de la operatoria y, en un paso posterior, los de mayor dificultad. En los mismos se presentan además:

- **Ejercicios de aplicación** del nuevo concepto desarrollado. Aparecen todas las respuestas de manera inmediata a fin de fijar los contenidos y poder avanzar con el desarrollo del tema.
- **Ejercicios integradores** de un tema. Están organizados según los diferentes temas que se presentan en cada capítulo. Se incluyen las respuestas de todos al final del libro.
- **Ejercicios de repaso** de cada uno de los capítulos. Se incluyen guías que reúnen numerosos ejercicios cuyas respuestas figuran al final del libro.
- **Problemas de aplicación.** Se incluyen problemas de aplicación de los diferentes contenidos. Los mismos están organizados por temas y por capítulo. Las respuestas se enuncian al final del libro.
- **Autoevaluaciones y pruebas de opción múltiple** para que, según los diferentes temas y capítulos el alumno compruebe cómo avanza en la adquisición de los conocimientos. Están integradas por novedosos enunciados y las respuestas se encuentran al final del libro.

Como reflexión final compartimos un párrafo que el Dr. Santaló escribió en 1966 en su libro La matemática en la escuela y aún tan vigente que dice *"Los profesores de hoy tienen la difícil misión de enseñar a tener curiosidad, a pensar por uno mismo y a perderle el miedo a los problemas, mucho más que a enseñar unos cuantos teoremas o unas cuantas reglas operativas que el alumno, si ha mantenido su mente ágil y una sólida preparación básica, podrá leer sin dificultad de cualquier libro o manual el día que lo necesite."*

LAS AUTORAS

Agradecimientos

Desde el año 2000 cuando presentamos, con muchas expectativas, nuestro primer trabajo "Matemática Básica" recibimos numerosas muestras de aliento, sugerencias, comentarios y opiniones que nos motivaron a "seguir trabajando, estudiando, debatiendo, escribiendo..." Hoy "Álgebra" ya es una realidad que nos implica un nuevo desafío.

Este libro, preparado especialmente para nuestros alumnos, surge de las experiencias obtenidas de nuestro trabajo continuo durante casi veinte años en el aula universitaria y de compartir el camino de enseñar y aprender matemática. Por eso un especial agradecimiento a ellos que con sus: "no entiendo", "¿por qué tengo que estudiar esto?", "qué bueno que la matemática me sirva", "¿me puede dar otro ejemplo?", "¿por qué tenemos que saber teoría?", "este ejercicio no me da", "a este problema le sobran datos", "¿qué significan esos símbolos?", "esa respuesta está mal", "¿ustedes no se habrán equivocado? ...” contribuyeron a mejorar nuestros primeros apuntes de cátedra y nuestro primer trabajo.

También, queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a las autoridades de la Universidad Nacional del Litoral por permitir que sus docentes publiquen sus obras y, en especial, a las autoridades de la Facultad de Ciencias Agrarias por su aliento y apoyo permanente.

Nuestro especial reconocimiento a la profesora Nelly Vázquez de Tapia por sus palabras de aliento y por acompañarnos en nuestros emprendimientos.

No podemos dejar de agradecer a nuestros colegas, amigos, graduados y a todas aquellas personas que de una u otra manera nos ayudaron y alentaron a continuar con esta tarea docente.

Las críticas, observaciones, comentarios y sugerencias de María Inés nos permitieron mejorar la presentación de los contenidos.

Gracias Daniel, Natalia y Emanuel por acompañarnos.

Estamos muy contentas al poder manifestar un sincero y enorme "muchas gracias" a nuestras familias por su paciencia, la espera y la comprensión por tantas horas de ausencia.

Por último, nuestro profundo agradecimiento a las autoridades y personal del Centro de Publicaciones de la Universidad Nacional del Litoral por la confianza, el interés y la colaboración que recibimos para poder cumplir con nuestro objetivo: la producción de un texto de cátedra para los estudiantes.

Adriana, Daniela, Silvia y Marcela

Contenido

1. MATRICES

> Toda nuestra vida moderna está como impregnada de matemática. Los actos cotidianos y las construcciones de los hombres llevan su sello y hasta nuestras alegrías artísticas y nuestra vida moral sufren su influencia.
>
> Paul Montel

1.1 Vectores y matrices

Cada vez que se utiliza una cantidad considerable de datos se hace necesario organizarlos de manera que se puedan manejar e identificar sin dificultad. Una manera de lograrlo es escribir los datos en forma tabular, de esta forma adquieren significado y se pueden manipular de manera muy simple y ágil. Esta disposición de los datos corresponde a las matrices. Podemos decir, en un lenguaje sencillo, que constituyen un medio para resumir y presentar números que representan datos de una situación problema.

Arthur Cayley introdujo las matrices y tuvo la capacidad de ver y descubrir que esas *cajas numéricas* se podían considerar como un nuevo tipo de objetos matemáticos. Interpretó que si podía dar definiciones apropiadas para la suma y la multiplicación lograría crear un nuevo sistema matemático como modelo para muchas aplicaciones en las ciencias sociales, naturales y la economía. Ya en 1858 logró plasmar todo esto en un trabajo muy importante que no fue reconocido por los matemáticos de aquella época y sí muy utilizado desde 1920 en adelante.

En matemática se introdujo la noción de matriz como una tabla de números y las grandes masas de datos se organizan en esas cajas numéricas. Las matrices se suman, se multiplican por un número y se multiplican entre sí bajo determinadas condiciones. Resultan una ampliación de la noción de número y se prestan a una gran cantidad de aplicaciones.

Nuestra vida actual está colmada de matrices de números:

- las cotizaciones de la bolsa cada día de la semana;
- el horario de los colectivos, trenes, aviones, que aparece publicitado en las estaciones;
- el consumo de, por ejemplo, lácteos y carnes de una familia durante diferentes años;

	Lácteos	Carne
1990	☐	☐
1991	☐	☐
1992	☐	☐

- la cantidad en pesos de materia prima y mano de obra que se necesitan para fabricar determinado producto;

Producto	P1	P2	P3
Materia prima X	☐	☐	☐
Materia prima Y	☐	☐	☐
Mano de obra	☐	☐	☐

- el precio de compra de materiales y el costo de transportarlos hasta el lugar de construcción de una vivienda;

	Acero	Madera	Ladrillo	Cemento
Precio de Compra	1000	800	2000	1200
Transporte	40	25	100	80

Esta misma situación se puede visualizar de la forma:

	Precio de Compra	Transporte
Acero	1000	40
Madera	800	25
Ladrillo	2000	100
Cemento	1200	80

- La temperatura del ambiente en tres momentos del día, medida durante una semana.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Temp. Hora 8	18	16	17	20	19	18	21
Temp. Hora 14	30	28	32	35	29	36	28
Temp. Hora 20	25	23	29	30	27	33	26

Fácilmente se puede observar que la temperatura más baja a la hora 8 fue el día martes mientras que la más alta de la hora 14 se produjo el día sábado.

Las matrices constituyen una herramienta muy importante para el almacenamiento, presentación y manipulación de datos. En los últimos años, con la aparición de las computadoras el uso de las matrices creció dado que muchos de los programas se valen de ellas, en especial para guardar información.
La teoría de matrices tiene aplicaciones en campos muy diversos: control de inventarios en fábricas, teoría cuántica, análisis de costos en transportes, problemas de estrategias en las operaciones militares y análisis de datos. Muchos problemas se pueden resolver traduciéndolos a matrices y realizando operaciones entre ellas.
El estudio de *vectores* y *matrices* representan el eje del *Álgebra Lineal*. El estudio de vectores comenzó en 1800 y se debió al matemático irlandés William Hamilton. Su trabajo comenzó tratando de encontrar una forma de representar ciertos objetos en el plano y en el espacio.
En estos días casi todas las ramas de la física clásica y moderna se presentan mediante el lenguaje de vectores y su uso se hace cada vez más frecuente en las ciencias biológicas y sociales.

Definición: se llama *vector renglón o fila de n componentes* a todo conjunto ordenado de n números dispuestos de esta manera $[\,x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots x_n\,]$.

Definición: se llama *vector columna de n componentes* a todo conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Cada x_1, x_2, ..., x_n se llama *componente del vector,* y de esta forma:

x_1 : primera componente

x_2 : segunda componente

x_k : k-ésima componente

Ejemplo: El vector M = [–2 4 3 5] se denomina vector fila de cuatro componentes o vector renglón debido a que posee una fila con cuatro columnas.

Ejemplo: El vector $R = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}$ posee una sola columna y tres filas, por lo que se lo llama vector columna de tres componentes.

Un vector que tiene todas sus componentes iguales a cero se llama *vector nulo*.

Note que la palabra ordenado en la definición de vector es esencial. *Dos vectores con las mismas componentes dispuestas en distinto orden no son iguales.*

Matrices

Definición: Dados dos números naturales p y q, se llama matriz real de orden pxq a p.q números reales, ordenados en p filas y q columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

A las matrices se las simboliza con letras mayúsculas. En algunas ocasiones resulta cómodo emplear la notación de Cayley, en cuyo caso la matriz se simboliza: $A = (a_{ij})$ i = 1, 2, ..., p ; j = 1, 2, ..., q

Cada uno de los a_{ij} es un *elemento* de la matriz.

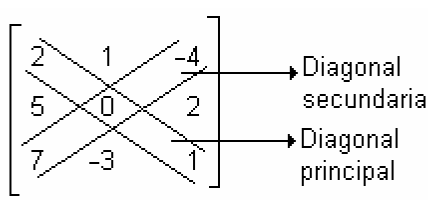
En muchos casos, cuando es necesario especificar el orden de una matriz A cualquiera, se escribe A_{pxq}. Se debe tener en cuenta que una matriz, por ejemplo, de orden 2x3, es distinta a la de orden 3x2 y en ningún caso se indicará el orden con el resultado del producto.

En el orden, primero se nombran las filas y luego las columnas.

Observación: la palabra línea significa indistintamente fila o columna.

Los elementos a_{ij} , cuando i = j, determinan la llamada *diagonal principal*.

Ejemplo:



Definición: Dos matrices son *iguales* cuando son del mismo orden y además son iguales los elementos ubicados en la misma posición.

Simbólicamente: $A = (a_{ij})_{pxq} \;\wedge\; B = (b_{ij})_{pxq}$ son iguales $\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \;\; \forall i \;\; \forall j$

Matrices Especiales

a) Matriz rectangular: es aquella en la cual el número de filas es distinto al número de columnas.

Ejemplo: la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es rectangular de orden 2x3.

b) Matriz cuadrada: es aquella matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas. A_{pxq} es cuadrada $\Leftrightarrow$ $p = q$

Ejemplo: la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ es cuadrada de orden 3.

c) Matriz diagonal: es aquella matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos con excepción de los de la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Simbólicamente: $A = (a_{ij})$ $i = 1, 2, ..., n$ es diagonal sí y sólo sí $(a_{ij}) = 0 \;\; \forall i \neq j$
$j = 1, 2, ..., n$

Ejemplo: la matriz $V = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonal de orden 3.

d) Matriz escalar: es aquella matriz diagonal que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a un escalar $c \neq 0$ fijo.
Simbólicamente:

$A = (a_{ij})$ $i = 1, 2, ..., n$ es escalar $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i \neq j \;\wedge\; a_{ij} = c$ si $i = j$
$j = 1, 2, ..., n$

Ejemplo: la matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ es escalar de orden 3.

e) Matriz unidad o identidad: es una matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal valen 1 y se simboliza **I**.
Simbólicamente:

$$A = (a_{ij}) \begin{array}{l} i = 1, 2, ..., n \\ j = 1, 2, ..., n \end{array} \text{ es unidad} \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \ \forall\, i \neq j \ \wedge \ a_{ij} = 1 \text{ si } i = j$$

Ejemplo: la siguiente es una matriz identidad de orden 3, $I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) Matriz triangular inferior: es la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos sobre la diagonal principal.

La matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$ es triangular inferior.

g) Matriz triangular superior: es la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos por debajo de la diagonal principal.

La matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$ es triangular superior.

Ejemplo: La matriz A es triangular inferior mientras que la matriz B es triangular superior.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 & -9 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

h) Matriz columna: es aquella matriz que tiene una única columna. También se la denomina vector columna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ ... \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ es un vector columna, una matriz de orden 3x1.

h) Matriz fila: es aquella matriz que consta de una sola fila. Se la denomina también vector fila. $A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}]$

Ejemplo: La matriz $B = [\,2 \quad -1 \quad 0 \quad 7\,]$ es un vector fila, una matriz de orden 1x4.

Teniendo en cuenta las definiciones vistas anteriormente podemos decir que los vectores son matrices de una fila o de una columna. Cada vector es un tipo especial de matriz:

- el vector fila de n componentes $[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}]$ es una matriz de orden 1xn.
- el vector columna de n componentes $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ es una matriz de orden nx1.

Matriz traspuesta

Definición: Dada una matriz A de orden pxq se llama *matriz traspuesta* de A y se simboliza A^t o A^T a una matriz de orden qxp que se obtiene a partir de A cambiando filas por columnas ordenadamente.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{p2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{p3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1q} & a_{2q} & a_{3q} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Halle la matriz traspuesta de $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3x4}$

La matriz traspuesta (intercambiamos filas y columnas) es:

$$A^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{4x3} .$$

Ejemplos: Para cada una de las siguientes matrices determine su orden y escriba su traspuesta.

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) La matriz A es rectangular pues tiene dos filas y tres columnas, su orden es 2x3. Su traspuesta, A^t, será de orden 3x2 y resulta $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

b) La matriz B es una matriz escalar de orden 4, pues todos los elementos de la diagonal principal son iguales al escalar –2. Su transpuesta, B^t, coincide con ella.

c) La matriz C es cuadrada ya que posee tres filas y tres columnas. Como todos los elementos debajo de la diagonal principal son nulos, es una matriz triangular superior. Su traspuesta, C^t, es la matriz es triangular inferior $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ pues los elementos nulos son los que están sobre la diagonal principal.

d) La matriz D es cuadrada ya que el número de filas es igual al de columnas. Se dice que es de orden 4. Según lo visto en **(c)** es triangular inferior y su traspuesta, D^t es $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y resulta triangular superior.

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.1 VECTORES Y MATRICES

1) Determine el orden de cada una de las siguientes matrices, escriba la matriz traspuesta e indique su orden.

a) $M = [\,6 \quad -4 \quad -2 \quad 3\,]$

b) $N = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 6 & 7 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $O = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

2) Escriba y clasifique de acuerdo al orden la matriz $A = (a_{ij})_{3x2}$ que cumple:

$a_{ij} = 1$ si $i = j$

$a_{ij} = -1$ si $i \neq j$.

3) Escriba y clasifique de acuerdo al orden la matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$ que cumple:

$a_{ij} = 0$ si $i < j$

$a_{ij} = -1$ si $i \geq j$

4) ¿Son iguales las siguientes matrices?

a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3+1 & 1-2 & 5+1 \\ -2 & 1+2 & 3-3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.2 Álgebra de matrices

En muchas aplicaciones las matrices deben manipularse y combinarse de diferentes formas para lograr obtener la información requerida. En algunos casos, para lograr nuevas matrices que respondan a nuestros requerimientos se definen operaciones similares a las que realizamos con los números, sin embargo, en otros casos estas definiciones son muy diferentes. Cuando Arthur Cayley introdujo las matrices, pensó que las mismas se podían considerar como un nuevo tipo de elementos matemáticos. Observó que, definiendo apropiadamente la suma y el producto de matrices, podía generar un sistema matemático para utilizarlo como modelo para numerosas aplicaciones. Las operaciones entre matrices y las propiedades que cumplen son importantes en los diferentes campos de la matemática y en las aplicaciones.

Cuando las matrices son de orden pequeño, es decir, pocas filas y columnas, se puede operar con ellas de manera muy simple. Pero, en muchas aplicaciones se encuentran o generan matrices de gran tamaño que son trabajadas en forma muy rápida con la ayuda de la computadora.

Analicemos las posibilidades de resolver el siguiente problema.

<u>Problema</u>

Un fabricante de zapatos posee dos plantas: una en Santa Fe y otra en Córdoba, y los produce de color marrón, negro y blanco para damas, caballeros y niños.

En la planta de Santa Fe se fabrica por mes (en miles de pares) para caballeros: 30 de color negro, 12 de color marrón y 6 de color blanco; para damas: 10 de color blanco, 40 de color negro y 25 de color marrón; para niños: 11 de color blanco, 20 de color marrón y 8 de color negro.

En la planta de Córdoba se fabrica por mes (en miles de pares) para caballeros: 32 de color marrón, 18 de color negro y 4 de color blanco;

para damas: 30 de color negro, 20 de color marrón y 12 de color blanco; para niños: 4 de color blanco, 12 de color marrón y 9 de color negro.

a) Determine la producción total mensual (en miles de pares) de cada tipo de zapatos en ambas plantas.

b) Supongamos que el fabricante cambia su manera de trabajar y logra duplicar la producción de zapatos en la planta que opera en la ciudad de Santa Fe. ¿Cuántos zapatos de cada tipo y color produce al aplicar las nuevas formas de trabajo en dicha planta?

c) El costo de materiales comprados en un establecimiento de la zona, para los zapatos de caballeros es de $ 9 por cada par, para los zapatos de damas es de $ 7 el par y los de niños tienen un costo de $ 6 por par. ¿Cuánto gastará el empresario para fabricar todos los zapatos negros?

d) ¿Cuánto gastará el empresario para fabricar todos los zapatos de cada color?

e) Al solicitar cotización de materiales en otro lugar surge: $ 8 para los de caballeros, $ 8 para los de dama y $ 5 para niños por par. ¿Podemos visualizar los costos según los diferentes colores y en ambos establecimientos?

a) Para visualizar mejor los datos del problema podemos organizarlos en tablas, así como también la información solicitada:

Planta de Santa Fe	Caballeros	Damas	Niños
Color Negro	30	40	8
Color Marrón	12	25	20
Color Blanco	6	10	11

Planta de Córdoba	Caballeros	Damas	Niños
Color Negro	18	30	9
Color Marrón	32	20	12
Color Blanco	4	12	4

Producción total	Caballeros	Damas	Niños
Color negro	48	70	17
Color marrón	44	45	32
Color blanco	10	22	15

Como hemos visto anteriormente, las matrices son importantes para la organización de los datos. Podemos escribir la matriz que representa la producción de cada planta y luego la que muestra la producción total.

$$SF = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 8 \\ 12 & 25 & 20 \\ 6 & 10 & 11 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 18 & 30 & 9 \\ 32 & 20 & 12 \\ 4 & 12 & 4 \end{bmatrix} \qquad PT = \begin{bmatrix} 48 & 70 & 17 \\ 44 & 45 & 32 \\ 10 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que los elementos de la matriz que representa la producción total (PT) se obtienen sumando los elementos que ocupan la misma posición de las matrices que representan la producción de Santa Fe (SF) y Córdoba (C) respectivamente. Definimos de esa manera matriz suma de dos matrices dadas y simbolizamos $PT = SF + C$

$$PT = SF + C = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 8 \\ 12 & 25 & 20 \\ 6 & 10 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 30 & 9 \\ 32 & 20 & 12 \\ 4 & 12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30+18 & 40+30 & 8+9 \\ 12+32 & 25+20 & 20+12 \\ 6+4 & 10+12 & 11+4 \end{bmatrix}$$

$$PT = \begin{bmatrix} 48 & 70 & 17 \\ 44 & 45 & 32 \\ 10 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

b) La producción en la planta de Santa Fe es:

Planta de Santa Fe	Caballeros	Damas	Niños
Color Negro	30	40	8
Color Marrón	12	25	20
Color Blanco	6	10	11

Si el empresario logra duplicar la producción, la misma será:

Planta de Santa Fe	Caballeros	Damas	Niños
Color Negro	60	80	16
Color Marrón	24	50	40
Color Blanco	12	20	22

Escribimos las matrices correspondientes a la producción anterior y a la nueva:

$$SF = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 8 \\ 12 & 25 & 20 \\ 6 & 10 & 11 \end{bmatrix} \qquad SF_N = \begin{bmatrix} 60 & 80 & 16 \\ 24 & 50 & 40 \\ 12 & 20 & 22 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que los elementos de la nueva matriz se obtienen multiplicando por dos cada uno de los elementos de la matriz original. Podemos definir el producto de un escalar por una matriz y escribimos $SF_N = 2 \,.\, SF$

$$SF_N = 2 \,.\, SF = 2. \begin{bmatrix} 30 & 40 & 8 \\ 12 & 25 & 20 \\ 6 & 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.30 & 2.40 & 2.8 \\ 2.12 & 2.25 & 2.20 \\ 2.6 & 2.10 & 2.11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 80 & 16 \\ 24 & 50 & 40 \\ 12 & 20 & 22 \end{bmatrix}$$

c) Recordemos que la cantidad total de zapatos negros que va a fabricar el empresario es:

Producción total	Caballeros	Damas	Niños
Color negro	48	70	17

Podemos organizar esos datos en una matriz o vector fila: $A = [48 \quad 70 \quad 17]$

Los datos sobre el costo de cada par de zapatos según sea de caballeros, damas o niños, los podemos mostrar en una matriz o vector columna: $B = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Cada elemento de la matriz A, a_{ik}, representa la cantidad de pares de zapatos a fabricar para caballeros, damas y niños, respectivamente y cada elemento de la matriz B, b_{ik}, representa el costo de un par de zapatos de caballeros, damas o niños, respectivamente.
El costo total de fabricar todos los zapatos negros será 48.9 + 70.7 + 17.6
Podemos expresar el costo total de fabricar todos los zapatos negros mediante una matriz C que será de orden uno. El elemento de esa matriz se obtiene sumando los productos respectivos entre los elementos de la matriz A con los elementos de la matriz B.
$C = [48.9 + 70.7 + 17.6]$. Esta matriz C es la matriz producto de A con B.

$$C = A \,.\, B = \begin{bmatrix} 48 & 70 & 17 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = [48.9 + 70.7 + 17.6] = [1024].$$

Para hacer el producto en forma práctica, usamos la siguiente disposición:

$C = A.B$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 48 & 70 & 17 \end{bmatrix}$	$[48.9 + 70.7 + 17.6] = [1024]$

Observemos que para que el producto se pueda realizar el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B.
El empresario gastará en fabricar todos los zapatos negros \$ 1024.

d) Para averiguar cuánto gastará el empresario para fabricar todos los zapatos de cada color simplemente debemos ampliar lo realizado en el inciso anterior.
El costo total de fabricar los zapatos negros es: 48.9 + 70.7 + 17.6
De igual forma calculamos el costo de fabricar los zapatos marrones:
44.9 + 45.7 + 32.6
Análogamente para los zapatos blancos: 10.9 + 22.7 + 15.6
Si queremos hacer los cálculos en forma matricial trabajaremos con la matriz PT que representa las cantidades totales a producir de zapatos y la matriz B de costos. Cada elemento de la matriz PT, representa el total de zapatos a producir negros, marrones o blancos (fila i) destinados a damas, caballeros o niños (columna k). Cada elemento de la matriz B, b_{i1}, representa el costo de fabricar un par de zapatos de damas, caballeros o niños.
Para cada color de zapatos (negro, marrón o blanco) podemos obtener los costos totales correspondientes a las cantidades producidas mediante una matriz D de elementos d_{i1}. Cada elemento de la matriz D (matriz producto de PT con B) se obtiene sumando los productos respectivos entre los elementos de

la fila i de PT con los elementos de la matriz columna B. Mostramos una disposición práctica para calcular el producto.

$$D = PT.\,B \qquad \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 48 & 70 & 17 \\ 44 & 45 & 32 \\ 10 & 22 & 15 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 48.9+70.7+17.6 \\ 44.9+45.7+32.6 \\ 10.9+22.7+15.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024 \\ 903 \\ 334 \end{bmatrix}$$

Observamos nuevamente que el producto se puede realizar porque el número de columnas de PT coincide con el número de filas de B.
El costo de fabricar todos los zapatos negros es de \$ 1024, el de fabricar todos los zapatos marrones \$ 903 y el de todos los zapatos blancos \$ 334.

e) Llamemos E a la matriz que muestra los costos por par de los dos establecimientos y calculemos la matriz F de los costos totales para ambos establecimientos. Para ello tendremos que hacer el producto de la matriz PT por la matriz E, de la misma forma que en los dos incisos anteriores.

$$F = PT.\,E \qquad \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 8 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 48 & 70 & 17 \\ 44 & 45 & 32 \\ 10 & 22 & 15 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 48.9+70.7+17.6 & 48.8+70.8+17.5 \\ 44.9+45.7+32.6 & 44.8+45.8+32.5 \\ 10.9+22.7+15.6 & 10.8+22.8+15.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024 & 1029 \\ 903 & 872 \\ 334 & 331 \end{bmatrix}$$

El procedimiento para realizar el producto de dos matrices es multiplicar los elementos de izquierda a derecha de cada fila de la primera matriz por los elementos de arriba hacia debajo de cada columna de B. Para trabajar en forma ordenada conviene multiplicar la primera fila de la primera matriz por cada columna de la segunda matriz obteniendo la primera fila de la matriz producto, después calcular la segunda fila del producto multiplicando la segunda fila de la primera matriz por cada columna de la segunda; y así sucesivamente hasta multiplicar la última fila de la primera matriz por cada columna de la segunda.
A continuación enunciamos las definiciones y propiedades de las operaciones básicas entre matrices: suma, diferencia y producto y, por otro lado, el producto de una matriz por un número real.

Operaciones entre matrices

a) Suma

Dadas dos matrices A y B de igual orden pxq, se llama suma de A y B, y se simboliza S = A + B, a una matriz S de orden pxq tal que:

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall\, i = 1, 2, ..., p \quad \forall\, j = 1, 2, ..., q$$

Dadas las matrices A y B de orden pxq

$$A_{pxq} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix} \qquad B_{pxq} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2q} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

la matriz suma es $S_{pxq} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1q}+b_{1q} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2q}+b_{2q} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{3q}+b_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}+b_{p1} & a_{p2}+b_{p2} & a_{p3}+b_{p3} & \dots & a_{pq}+b_{pq} \end{bmatrix}$

Ejemplo: Dadas las matrices $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ y $B_{3x2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ la suma resulta otra matriz de orden 3x2 definida por $S_{3x2} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Diferencia

Dadas dos matrices A y B del mismo orden, se define la diferencia A – B, de la siguiente manera A – B = A + (–B). Restar una matriz B de otra A (del mismo orden) es sumar a ésta la opuesta de la primera, es decir, sumar aquella que tiene todos sus elementos cambiados de signo. Dadas las matrices:

$$A_{pxq} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix} \text{ y } B_{pxq} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2q} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

la matriz diferencia A – B resulta:

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & \dots & -b_{1q} \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & \dots & -b_{2q} \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & \dots & -b_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{p1} & -b_{p2} & -b_{p3} & \dots & -b_{pq} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} & \dots & a_{1q} - b_{1q} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} & \dots & a_{2q} - b_{2q} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} & \dots & a_{3q} - b_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} - b_{p1} & a_{p2} - b_{p2} & a_{p3} - b_{p3} & \dots & a_{pq} - b_{pq} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Dadas las matrices $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ y $B_{3x2} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, la matriz diferencia es $(A - B)_{3x2} = D_{3x2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

EJERCICIOS

1) Calcule:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -8 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

2) Encuentre los valores de x , y , z tales que :

$$\begin{bmatrix} x & 9 & 3 \\ 3 & y & 4 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -y & 2 & 3 \\ 1 & z & -2 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ x + 2z & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

RESPUESTAS

1)a) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$

2) $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$

---

c) Producto de una matriz por un número real

Dado un número real t y una matriz A de orden pxq, se llama producto del número t por la matriz A y se simboliza t.A, a otra matriz de orden pxq cuyos elementos se obtienen multiplicando por t cada elemento de la matriz.

Dada la matriz $A_{pxq} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3q} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & ... & a_{pq} \end{bmatrix}$ el resultado del producto

por el escalar t es la matriz $t.A_{pxq} = \begin{bmatrix} ta_{11} & ta_{12} & ta_{13} & ... & ta_{1q} \\ ta_{21} & ta_{22} & ta_{23} & ... & ta_{2q} \\ ta_{31} & ta_{32} & ta_{33} & ... & ta_{3q} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ta_{p1} & ta_{p2} & ta_{p3} & ... & ta_{pq} \end{bmatrix}$.

Ejemplo:

Si $t = -2$ y $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ entonces $-2.A_{3x3} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 8 & -2 & -2 \\ -4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

EJERCICIOS

1) Calcule:

a) $4.\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ -1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$ **b)** $-3.\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

2) Dadas las matrices $H = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -3 \end{bmatrix}$ y $E = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b & -2b \end{bmatrix}$, determine los valores de a y b sabiendo que $H - 2M = E$.

RESPUESTAS

1)a) $\begin{bmatrix} 20 & 0 & 32 \\ -4 & 36 & -8 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$; **2)** $a = 3,5$, $b = -5$

---

d) Producto de matrices

Primero vamos a definir el producto de una matriz fila por una matriz columna, a condición de que si la primera es de orden 1xq, la segunda sea de orden qx1. El resultado es una matriz de orden 1x1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{q1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} + \dots + a_{1q}\,b_{q1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \end{bmatrix}$$

El siguiente esquema, con que se define el producto, nos permite resolverlo de una manera rápida.

$$\begin{array}{c|c} A_{1xq}.B_{qx1} & \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{q1} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} \end{bmatrix} = C_{1x1} \end{array}$$

Donde $c_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + \dots + a_{1q}.b_{q1}$

Teniendo en cuenta lo anterior podemos definir el producto entre matrices de mayor número de filas y de columnas.

Definición: Dadas dos matrices A de orden pxr y B de orden rxq, se puede hallar una matriz C de orden pxq cuyos elementos responden a la siguiente ley de formación: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$ $\quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, q \end{array}$

Observación: Por definición, el producto A.B sólo se puede realizar si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

Si obtenemos la matriz C = (c_{ij}), el elemento c_{ij} se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B, de acuerdo al esquema fundamental:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} & . & \\ & . & \\ & j & \\ & . & \\ & . & \end{bmatrix} = B_{rxq} \\ \hline A_{pxr} = \begin{bmatrix} \\ \dots \quad i \dots\dots \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & & . & & \\ & & & . & & \\ . & . & . & c_{ij} & . & . \\ & & & . & & \\ & & & . & & \\ & & & . & & \end{bmatrix} = C_{pxq} \end{array}$$

Mediante este esquema se resuelve de una manera sencilla $A_{px\mathbf{r}}.B_{\mathbf{r}xq} = C_{pxq}$

Entonces resulta:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2q} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & b_{r3} & \dots & b_{rq} \end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pr} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & c_{p3} & \dots & c_{pq} \end{bmatrix}
\end{array}$$

Para poder realizar el producto entre dos matrices es necesario tener en cuenta los siguientes pasos:

1) Las matrices deben ser *conformes* para la multiplicación. Si se hace el producto AxB el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B. La matriz producto C tendrá tantas filas como A y tantas columnas como B.

$$A_{px\mathbf{r}} \,.\, B_{\mathbf{r}xq} = C_{pxq}$$

2) Determinar c_{11} multiplicando la primera fila de A por la primera columna de B.

3) Determinar c_{12} multiplicando otra vez la primera fila de A pero, en este caso por la segunda columna de B.

4) Continuar así con todas las columnas de B hasta completar la primera fila de la matriz producto C.

5) Repetir este procedimiento para todas las filas de la matriz A con cada una de las columnas de B hasta completar todas las filas de la matriz producto C.

6) Cada término general tendrá la forma $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$ $\quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, q \end{array}$ donde r es el número de columnas de A y filas de B.

Ejemplo: el resultado del producto de una matriz A de orden 3x3 por una matriz B de orden 3x4 es una matriz C de orden 3x4.

$$\begin{array}{c|c}
A_{3x3} . B_{3x4} = C_{3x4} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = B_{3x4} \\ \hline
A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 7 & 1 \\ 5 & 13 & 18 & 1 \\ 4 & 3 & 15 & 11 \end{bmatrix} = C_{3x4}
\end{array}$$

Ejemplo: Halle los valores de a y b sabiendo que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & -5 \\ b & 4 \end{bmatrix} - 2I = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -9 & 19 \end{bmatrix}$$

El producto indicado se puede resolver ya que el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. Realizamos el producto y resulta:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} a & -5 \\ b & 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2a+3b & 2.(-5)+3.4 \\ -a+4b & (-1).(-5)+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3b & 2 \\ -a+4b & 21 \end{bmatrix} \end{array}$$

Le restamos $2.\mathbf{I} = 2.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y obtenemos el miembro izquierdo:

$\begin{bmatrix} 2a+3b & 2 \\ -a+4b & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3b-2 & 2 \\ -a+4b & 19 \end{bmatrix}$, que debe ser igual a $\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -9 & 19 \end{bmatrix}$, es decir:

$$\begin{bmatrix} 2a+3b-2 & 2 \\ -a+4b & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -9 & 19 \end{bmatrix}$$

Así podemos plantear el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2a+3b-2=-6 \\ -a+4b=-9 \end{cases}$, cuya solución es $a=1$ y $b=-2$.

EJERCICIOS

1) Calcule, si es posible:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

2) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ verifique que:

a) $(3A)^t = 3A^t$

b) $A.B \neq B.A$

3) Halle los valores de x e y que verifican: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{bmatrix} = O$

4) Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ verifique que $(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

RESPUESTAS

1)a) [16] **b)** No es posible **c)** $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 32 & 36 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -2 & 2 \\ 15 & -20 \end{bmatrix}$ **3)** x = –2 , y = –3

Propiedades de las operaciones con matrices

Las operaciones con matrices cumplen las propiedades enunciadas a continuación.

a) de la suma

1) Asociativa (A + B) + C = A + (B + C) , ∀A, ∀B, ∀C.

2) Existencia de elemento neutro: se denomina matriz nula y se simboliza *O*. Es tal que *O* + A = A + *O* = A , ∀A.

3) Toda matriz A de orden pxq tiene un inverso aditivo que se simboliza –A. Es la matriz cuyos elementos son los números reales opuestos a los de A y se verifica que A + (–A) = *O*.

4) Conmutativa: A + B = B + A , ∀A, ∀B.

b) del producto de una matriz por un escalar

1) ∀A, ∀B, ∀t ∈ R, t.(A + B) = t.A + t.B.

2) ∀A, (–1).A = –1.A = –A.

3) t.(r.A) = (t.r).A, ∀t ∈ R, ∀r ∈ R.

4) (t + r).A = t.A + r.A, ∀t ∈ R, ∀r ∈ R, ∀A.

c) del producto de matrices

1) No es conmutativo: A.B ≠ B.A, ∀A, ∀B.

2) Es asociativo: A.(B.C) = (A.B).C, ∀A, ∀B, ∀C.

3) Es distributivo: A.(B + C) = A.B + A.C, ∀A, ∀B, ∀C.

(A + B).C = A.C + B.C, ∀A, ∀B, ∀C.

4) El producto de dos matrices puede ser la matriz nula sin que lo sean ninguna de las matrices factores.

5) El producto de matrices no es cancelativo, o sea si A ≠ *O*, A.B = A.C no implica que B = C.

6) Existencia de elemento neutro: se denomina matriz identidad y se simboliza I. Es tal que $I_{nxn}.A_{nxr} = A_{nxr}$ y $B_{sxn}.I_{nxn} = B_{sxn}$, $\forall I_{nxn}$, $\forall A_{nxr}$, $\forall B_{sxn}$.

Ejemplo. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $F = [-1 \quad 0 \quad 2]$ verifique las siguientes propiedades:

a) (A + B) + C = A + (B + C)
b) B + C = C + B
c) 4(A + C) = 4A + 4C
d) (–2.3).B = –2.(3.B)
e) (5 – 2)A = 5A – 2A
f) A.(D.F) = (A.D).F
g) (A + C).D = A.D + C.D

a) Planteamos y resolvemos las operaciones del miembro izquierdo de la igualdad, que es posible pues las tres matrices son del mismo orden:

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 9 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

De manera similar, procediendo con el miembro derecho, resulta:

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \right) =$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 9 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

De **(1)** y **(2)** observamos que se verifica la propiedad asociativa de la adición.

b) Como las matrices B y C son del mismo orden se pueden sumar. Resolvemos ambos miembros de la igualdad y obtenemos:

$$B + C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

$$C + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

De **(1)** y **(2)** observamos que se verifica la propiedad conmutativa de la adición de matrices.

c) En primer lugar sumamos las matrices A y C, que son del mismo orden:

$$A + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A esta nueva matriz la multiplicamos por 4 y resulta el miembro izquierdo de la igualdad:

$$4(A + C) = 4.\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & -12 \\ 8 & -4 & 12 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

Para obtener el miembro derecho multiplicamos cada matriz (A y C) por 4 y luego sumamos:

$$4.\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -12 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 20 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$4A + 4C = \begin{bmatrix} 12 & 8 & -12 \\ 8 & -4 & 12 \end{bmatrix} \ \textbf{(2)}$$

Comparando **(1)** y **(2)** obtenemos la igualdad deseada.

d) Para resolver (–2.3).B multiplicamos los escalares entre sí y luego a la matriz por el nuevo escalar obtenido, es decir:

$$(-2.3).B = -6.B = -6.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -42 & -18 & 24 \end{bmatrix} \ \textbf{(1)}$$

Para calcular –2.(3.B) multiplicamos a la matriz B por 3 y a la nueva matriz obtenida por –2 y resulta:

$$-2.(3.B) = -2.\left(3.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix}\right) = -2.\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 21 & 9 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -42 & -18 & 24 \end{bmatrix} \textbf{(2)}$$

Observamos que **(1)** y **(2)** son iguales.

e) Para verificar esta propiedad en primer lugar restamos los escalares (5 y 2) y al nuevo escalar lo multiplicamos por la matriz A:

$$(5-2).A = 3.\ A = 3.\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \textbf{(1)}$$

Para hallar el miembro derecho, al producto de la matriz A por 5 le restamos el producto de la matriz A por 2 y obtenemos:

$$5A - 2A = 5.\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2.\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$5A - 2A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ -15 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \textbf{(2)}$$

De **(1)** y **(2)** queda probada la propiedad.

f) Para poder resolver los productos debemos verificar que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda. En efecto:

En el miembro izquierdo: $A_{2x3}.(D_{3x1}.F_{1x3}) = A_{2x3}.M_{3x3} = R_{2x3}$

En el miembro derecho: $(A_{2x3}.D_{3x1}).F_{1x3} = H_{2x1}.F_{1x3} = T_{2x3}$

Ahora resolvemos los productos planteados y vemos si $R_{2x3} = T_{2x3}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\end{bmatrix} = F \\ \hline D = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&-2\\-1&0&2\\0&0&0\end{bmatrix} = M \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}1&0&-2\\-1&0&2\\0&0&0\end{bmatrix} = M \\ \hline A = \begin{bmatrix}1&2&-1\\-3&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1&0&2\\-3&0&6\end{bmatrix} = R\ \mathbf{(1)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = D \\ \hline A = \begin{bmatrix}1&2&-1\\-3&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = H \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\end{bmatrix} = F \\ \hline H = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1&0&2\\-3&0&6\end{bmatrix} = T\ \mathbf{(2)} \end{array}$$

Luego de realizar los productos, de **(1)** y **(2)** vemos que R = T.

g) Comenzamos realizando la suma de las matrices A y C (que se puede realizar pues son del mismo orden: 2x3). Al resultado de dicha suma lo multiplicamos por la matriz D, si es posible.

$$A + C = \begin{bmatrix}1&2&-1\\-3&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&0&-2\\5&-1&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}$$

Esta nueva matriz es de orden 2x3 y se puede multiplicar por la matriz D_{3x1} resultando:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = D \\ \hline A + C = \begin{bmatrix}3&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix} = (A + C).D\ \mathbf{(1)} \end{array}$$

Para resolver el miembro derecho multiplicamos las matrices A y D y a dicho producto le sumamos el producto de las matrices C y D. Dichos productos se pueden realizar pues el número de columnas de A y de C coinciden con el número de filas de D.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = D \\ \hline A = \begin{bmatrix}1&2&-1\\-3&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = A.D \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = D \\ \hline C = \begin{bmatrix}2&0&-2\\5&-1&3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-2\\-6\end{bmatrix} = C.D \end{array}$$

$$A.D + C.D = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix} \quad \mathbf{(2)}$$

De **(1)** y **(2)** vemos que se verifica la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma de matrices.

Ejemplo: Teniendo en cuenta las matrices A y E del ejemplo anterior verifique que $A.E = O$ a pesar de que las dos matrices son no nulas.

El producto A.E se puede resolver ya que el número de columnas de A (tres) coincide con el número de filas de E.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = E \\ \hline A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A.E \end{array}$$

En este ejemplo podemos observar que el producto es nulo sin que ninguno de los factores lo sea. Es decir, $A \neq O$, $E \neq O$ y sin embargo, $A.E = O$.

Ejemplo: Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, verifique que si bien $A.B = A.C$ las matrices B y C no son iguales, es decir, el producto de matrices no es cancelativo.

Realicemos los productos:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = B \\ \hline A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = A.B \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = C \\ \hline A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = A.C \end{array}$$

Observamos que los productos A.B y A.C son iguales y sin embargo las matrices B y C son distintas.

¿Cómo resolvemos un problema ?

Un problema es una situación que encierra un interrogante cuya respuesta se puede hallar. El proceso de resolución de problemas requiere capacidad de transferir experiencias pasadas a situaciones nuevas, para lo cual es necesario: **a)** analizar la nueva situación, **b)** determinar relaciones, **c)** seleccionar, entre los principios y conceptos conocidos, aquellos que sirven para resolverlas y **d)** aplicar convenientemente estos principios.

Para resolver un problema, se pueden tener en cuenta las siguientes etapas:

- COMPRENDER el problema: establecer incógnitas, datos, saber distinguir lo importante de lo superfluo.

- CONCEBIR UN PLAN: que permita, con los recursos disponibles, encontrar la solución al problema.
- EJECUTAR el plan.
- EXAMINAR la solución obtenida.
- ELABORAR CONCLUSIONES: la solución que se acepta o rechaza permite llegar a una conclusión, la que resuelve el problema y determina el comienzo de una nueva investigación.

Problema

Un productor de tabaco cultiva tres variedades Virginia (V), Burley (B) y Criollo (C). Los costos de mano de obra (en millones) y los de los insumos implicados en la producción por quincena se expresan en las siguientes tablas:

	Primera Quincena			Segunda Quincena		
	Tabaco			Tabaco		
	V	B	C	V	B	C
Mano de Obra	10	11	9	15	13	12
Insumos	6	8	4	10	6	7

a) Exprese esta situación en dos matrices. Elija un elemento de cada matriz y explique qué representa.

b) Halle, mediante operaciones entre matrices, la que representa el costo mensual.

a) Generamos las matrices $A = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 9 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 15 & 13 & 12 \\ 10 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

El elemento $a_{22} = 8$ representa los costos de los insumos en millones para cultivar el tabaco Burley en la primera quincena.

El elemento $b_{13} = 12$ representa los costos de mano de obra en millones para cultivar el tabaco Criollo durante la segunda quincena.

b) Resolvemos el interrogante teniendo en cuenta los pasos enunciados para la resolución de problemas.

- Comprender el problema.

Incógnita: costo mensual de insumos y mano de obra para cultivar las variedades Virginia, Burley y Criollo de Tabaco.

Datos: los costos por quincena representados por las matrices A y B.

- Concebir y ejecutar un plan.

Dado que las matrices A_{2x3} y B_{2x3} representan los costos por quincena, la suma entre ellas genera la matriz C_{2x3} que representa el costo mensual.

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 9 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 13 & 12 \\ 10 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 24 & 21 \\ 16 & 14 & 11 \end{bmatrix}$$

- Examinar la solución y elaborar conclusiones.

$$C = \begin{bmatrix} 25 & 24 & 21 \\ 16 & 14 & 11 \end{bmatrix}$$ representa la matriz de costo mensual.

A modo de ejemplo podemos decir que el elemento $c_{21} = 16$ representa el costo mensual de insumos en millones para cultivar el tabaco de la variedad Virginia.

Problema

Durante dos semanas se realiza un experimento en el que se alimentan diariamente tres animales de laboratorio con dos tipos distintos de comida. El consumo semanal se registra en las dos matrices siguientes donde cada elemento a_{ij} representa la cantidad de alimento i consumido por el animal j.

Primer semana

$$\begin{bmatrix} 3{,}4 & 4{,}5 & 4{,}2 \\ 2{,}5 & 4{,}3 & 3{,}9 \end{bmatrix}$$

Segunda semana

$$\begin{bmatrix} 4{,}6 & 3{,}8 & 4{,}2 \\ 4{,}7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Encuentre la cantidad total de cada tipo de alimento consumida por cada animal durante el período completo de la experiencia, es decir, dos semanas.

Para resolver este problema podemos sumar las dos matrices. Dado que son matrices del mismo orden se pueden sumar y obtenemos otra de orden 2x3.

$$\begin{bmatrix} 3{,}4 & 4{,}5 & 4{,}2 \\ 2{,}5 & 4{,}3 & 3{,}9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4{,}6 & 3{,}8 & 4{,}2 \\ 4{,}7 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8{,}3 & 8{,}4 \\ 7{,}2 & 8{,}3 & 7{,}9 \end{bmatrix}$$

Cada elemento de la matriz suma representa la cantidad total de cada tipo de alimento consumido por cada animal durante dos semanas.

Por ejemplo, podemos decir que el elemento señalado en la matriz, por ocupar la fila 1 y la columna 2, denota que finalizado el experimento el animal 2 consumió 8,3 unidades del alimento 1.

Problema

Juan, María y Susana trabajan en una compañía que fabrica tres productos A, B y C. Les pagan por su trabajo a destajo recibiendo \$ 2 por cada producto A, \$ 3 por cada producto B y \$ 4 por cada producto C. Las matrices L y M muestran sus producciones del lunes y del martes.

$$L = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Juan} \\ \text{María} \\ \text{Susana} \end{array} \qquad M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Juan} \\ \text{María} \\ \text{Susana} \end{array}$$

a) Marque el elemento l_{32} de la matriz L y el elemento m_{21} de la matriz M, e indique qué representan.

b) Escriba la matriz X que represente el pago por unidad.

c) Calcule L.X, M.X, L + M, (L + M).X y determine qué representa cada una.

d) Explique qué condiciones cumplen las matrices L , M y X para que se puedan resolver las operaciones de **c)**.

a) El elemento l_{32} es 3 y representa lo que produjo Susana el día lunes del producto B. El elemento m_{21} es 4 e indica lo producido por María del producto A el día martes.

b) Podemos considerar el vector columna $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

c)

$$\begin{array}{c|c} L.X & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 26 \\ 20 \\ 21 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} M.X & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix} \end{array}$$

$L.X = \begin{bmatrix} 26 \\ 20 \\ 21 \end{bmatrix}$ representa lo que recibe cada uno, Juan, María y Susana por su trabajo del día lunes.

$M.X = \begin{bmatrix} 32 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix}$ representa lo que recibe cada uno, Juan, María y Susana, por su trabajo del día martes.

$$L + M = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$L + M = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ representa el total producido de cada artículo por cada persona.

$$\begin{array}{c|c} (L+M).X & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 58 \\ 41 \\ 45 \end{bmatrix} \end{array}$$

$(L+M).X = \begin{bmatrix} 58 \\ 41 \\ 45 \end{bmatrix}$ representa lo recibido por cada uno (Juan, María y Susana) en los dos días de trabajo.

d) La suma de las matrices L y M se puede realizar pues son del mismo orden: 3x3. Obtenemos una nueva matriz de orden 3.
Para poder realizar los productos las matrices deben ser conformes:
L y X lo son pues L tiene tres columnas y X tiene tres filas: $L_{3x\mathbf{3}}.X_{\mathbf{3}x1} = (L.X)_{3x1}$

M y X lo son pues M tiene tres columnas y X tiene tres filas $M_{3x\mathbf{3}}.X_{\mathbf{3}x1} = (M.X)_{3x1}$

(L + M) y X lo son pues (L + M) tiene tres columnas y X tiene tres filas:

$(L + M)_{3x\mathbf{3}}.X_{\mathbf{3}x1} = ((L + M).X)_{3x1}$

En todos los casos la cantidad de columnas de la primera matriz coincide con la cantidad de filas de la segunda.

Problema

> En un invernadero se cultivan tres tipos de tomate. Los tomates se venden por kilo a dos mercados distintos. La ganancia que se obtiene es de \$ 0,30 por cada kilo de tomate larga vida, \$ 0,20 de perita y \$ 0,25 del tomate redondo. Diariamente se venden 200 kg. de tomate larga vida, 150 kg. de perita y 300 kg. de redondo al Mercado Norte. De la misma forma, las ventas ascienden a 180 kg. de larga vida, 250 kg. de perita y 200 kg. de redondo en el Mercado Sur.
> Encuentre las ganancias generadas por las ventas en cada mercado.

Teniendo en cuenta los pasos enunciados PARA RESOLVER UN PROBLEMA podemos analizarlo de la siguiente manera:

- Comprender el problema.

Incógnita: ganancia que se deriva de cada mercado.

Datos: la cantidad de tomates vendidos en cada mercado y la ganancia por cada kilo según el tipo de tomate.

- Concebir y ejecutar un plan.

Podemos representar los datos referidos a cada mercado y a cada tipo de tomate en una matriz V de orden 3x2, $V = \begin{bmatrix} 200 & 180 \\ 150 & 250 \\ 300 & 200 \end{bmatrix}$.

Además representamos los precios por kilo en una matriz P de orden 1x3:

$$P = [\,0{,}30 \quad 0{,}20 \quad 0{,}25\,]$$

El producto P.V será $P_{\boxed{1}\times 3} \cdot V_{3\times \boxed{2}} = G_{1x2}$

La matriz G de orden 1x2 representa la ganancia en cada uno de los mercados.

	$\begin{bmatrix} 200 & 180 \\ 150 & 250 \\ 300 & 200 \end{bmatrix}$
$[0{,}30 \quad 0{,}20 \quad 0{,}25]$	$[165 \quad 154]$

$G = P.V = [\,165 \qquad 154]$

- Examinar la solución y elaborar conclusiones

La ganancia del Mercado Norte fue de $ 165 y la del Mercado Sur de $ 154.

Problema

La tabla siguiente muestra la producción en toneladas de distintas clases de tabaco Criollo y sus precios en tres departamentos diferentes de la provincia de Salta:

	Clases		
Departamentos	1^{era}	2^{da}	3^{era}
Chicoana	15	25	10
Valle de Lerma	20	35	25
La Viña	17	22	16

Precios (en dólares) por tonelada		
1^{era}	2^{da}	3^{era}
1200	1000	800

a) Escriba una matriz de producción P y una matriz de precios de venta V.
b) Halle el producto P.V e indique qué representa la matriz hallada.

a) $P = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 10 \\ 20 & 35 & 25 \\ 17 & 22 & 16 \end{bmatrix}$ $\qquad V = \begin{bmatrix} 1200 \\ 1000 \\ 800 \end{bmatrix}$

b) $P_{3x3}.V_{3x1} = T_{3x1}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1200 \\ 1000 \\ 800 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 15 & 25 & 10 \\ 20 & 35 & 25 \\ 17 & 22 & 16 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 51000 \\ 79000 \\ 55200 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matriz T representa el precio total de venta del tabaco Criollo en los distintos departamentos.

Por ejemplo, el elemento t_{11} = 51 000 representa el precio total de venta del tabaco Criollo en el departamento Chicoana.

Problema

Una empresa de juguetes produce dos modelos distintos. Los principales materiales son metal (m), plástico (p) y madera (w). Para el primer modelo (modelo A) necesita 1 kilogramo de metal, 1 kilogramo de plástico y 1,5 kilogramos de madera. En cambio, para el segundo modelo (modelo B) necesita 1 kilo, medio kilo y 2 kilos, respectivamente. Compra materiales a dos proveedores; los precios del proveedor I son $ 1,50 el kilo de metal, $ 0,85 el kilo de plástico y $ 1,15 el kilo de madera. Los precios del proveedor II son $ 1,65, $ 0,80 y $ 1,10, respectivamente.

La empresa vende directamente a una tienda 600 unidades del primer modelo y 800 unidades del segundo.
a) Escriba una matriz cuyas filas representen el material necesario para cada modelo. Escriba otra matriz cuyas columnas muestren los precios unitarios de cada proveedor.
b) Encuentre, mediante operaciones entre matrices, la matriz que muestre el costo de los materiales para una unidad de cada modelo basado en cada conjunto de precios de los proveedores.
c) Mediante operaciones entre matrices exprese la cantidad total de cada material para satisfacer el pedido.
d) Determine la matriz que muestre el costo total de material para satisfacer el pedido según los precios de cada proveedor. ¿A qué proveedor debe comprar la empresa el material?

a) A la matriz cuyas filas representan el material la llamamos M y será de dos filas (pues son dos modelos) y tres columnas (ya que son tres los materiales: metal, plástico y madera).
A la matriz cuyas columnas representen los precios de cada proveedor la llamamos P y será de tres filas (tres materiales) y dos columnas (dos proveedores).

Es decir: $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 2 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1{,}50 & 1{,}65 \\ 0{,}85 & 0{,}80 \\ 1{,}15 & 1{,}10 \end{bmatrix}$

b) Multiplicando las matrices M y P, obtenemos el precio de cada modelo con cada proveedor.

$$\begin{array}{c|l} & \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1{,}65 \\ 0{,}85 & 0{,}80 \\ 1{,}15 & 1{,}10 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 4{,}075 & 4{,}10 \\ 4{,}225 & 4{,}25 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{modelo A} \\ \text{modelo B} \end{array} \\ \text{prov. I} \quad \text{prov. II} & \end{array} \end{array}$$

c) Podemos formar una matriz fila donde cada elemento represente el pedido o demanda de cada modelo. A dicha matriz la llamamos D y es [600 800].
El producto de D.M es una matriz fila donde cada elemento es la cantidad total necesaria de cada material.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 600 & 800 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1400 & 1000 & 2500 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para construir las 600 unidades del modelo A y las 800 unidades del modelo B se necesitan en total 1400 kilogramos de metal, 1000 kilogramos de plástico y 2500 kilogramos de madera.

d) Multiplicando la matriz del pedido con la matriz obtenida en el inciso **(b)** calculamos el costo del material con cada proveedor.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 4{,}075 & 4{,}10 \\ 4{,}225 & 4{,}25 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 600 & 800 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5825 & 5860 \end{bmatrix} \end{array}$$

El costo del material para satisfacer el pedido para el proveedor I es de $ 5825 y para el proveedor II, $ 5860. La empresa debería comprarle el material al primer proveedor.

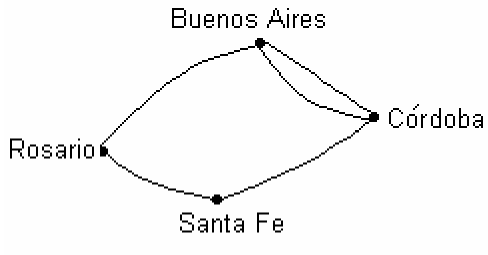
Una aplicación interesante en nuestros días: TEORÍA DE GRÁFICAS.

En los últimos años se dedicó mucha atención a un área relativamente nueva de la investigación matemática llamada *teoría de gráficas o gráficos*. Esta teoría constituye un área de la matemática que se utiliza ampliamente para formular modelos de numerosos problemas en las ciencias naturales, ciencias sociales, física, economía y negocios. Es importante su aporte en los problemas de comunicación, el estudio de las organizaciones y las estructuras sociales. Las gráficas son muy útiles para estudiar de qué manera se interrelacionan las componentes de las redes que aparecen en el comercio, las relaciones familiares en un ámbito determinado, la propagación de una enfermedad contagiosa, una red de vuelos comerciales, una red de líneas telefónicas, etc.
Últimamente la necesidad de resolver problemas que tratan la comunicación entre individuos, computadoras y organizaciones creció con un ritmo imposible de controlar. Un ejemplo concreto es el crecimiento vertiginoso de Internet y sus posibilidades de interactuar con todos los tipos de medios.
El tema es muy amplio y rico en aplicaciones. A manera de introducción mostramos un ejemplo, su relación con las matrices y la posibilidad de elaborar modelos de un problema importante. Durante nuestro trabajo debemos tener en cuenta algunas definiciones y propiedades que sustentan la teoría de gráficas.

Definición: Una gráfica G es un conjunto finito de puntos llamados vértices o nodos junto con un conjunto finito de aristas cada una de las cuales une un par de vértices. Los vértices de una gráfica se representan mediante puntos y los aristas por medio de segmentos de líneas curvas o rectas.
Cualquier gráfica con n vértices se puede representar por una matriz de orden n donde el número que ocupa la posición $_{ij}$ indica el número de aristas que unen el vértice i con el vértice j.

Problema

La gráfica muestra la estructura de rutas de una pequeña aerolínea, la cual da servicio a cuatro ciudades de nuestro país.



a) Escriba una matriz que represente el número de rutas directas entre las cuatro ciudades.
b) ¿Cuántas maneras hay de ir de Buenos Aires a Santa Fe pasando exactamente por otra ciudad?
c) ¿Cuántas maneras hay de viajar de Rosario a Córdoba pasando exactamente por otra ciudad?

a) Para encontrar la matriz que buscamos podemos construir una tabla donde resumimos la información del gráfico colocando en cada fila y columna la cantidad de rutas que unen una ciudad con otra.

	Buenos Aires	Córdoba	Rosario	Santa Fe
Buenos Aires	0	2	1	0
Córdoba	2	0	0	1
Rosario	1	0	0	1
Santa Fe	0	1	1	0

Según la tabla, la matriz que representa el número de rutas directas entre las cuatro ciudades es:

$$\begin{array}{c} \\ B \\ C \\ R \\ SF \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B & C & R & SF \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Como debemos pasar por otra ciudad, necesariamente debemos pasar por Rosario o Córdoba.
En el diagrama vemos que podemos ir de Buenos Aires a Córdoba de dos maneras y luego de Córdoba a Santa Fe de una manera, por lo que hay 2.1 = 2 maneras de ir de Buenos Aires a Santa Fe pasando por Córdoba.
Además, de Buenos Aires a Rosario podemos ir de una manera y de Rosario a Santa Fe de una, así que hay 1.1 = 1 manera de ir de Buenos Aires a Santa Fe pasando por Rosario.
O sea que en total hay 2 + 1 = 3 maneras de viajar de Buenos Aires a Santa Fe pasando exactamente por otra ciudad.

La matriz A^2 da el número de maneras de viajar entre dos ciudades cualesquiera pasando exactamente por una ciudad.
Multiplicamos la matriz A por sí misma, para obtener A^2.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sea el elemento del primer renglón y cuarta columna de A^2 igual a b_{14}, que se encuentra como sigue: $b_{14} = a_{11} . a_{14} + a_{12} . a_{24} + a_{13} . a_{34} + a_{14} . a_{44}$

$b_{14} = 0.0 + 2.1 + 1.1 + 0.0 = 3$

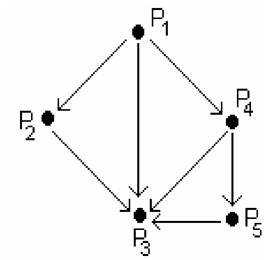
El producto 0.0 representa el número de maneras de viajar de Buenos Aires a Buenos Aires (es decir, 0) y de Buenos Aires a Santa Fe (0). El resultado, 0, indica que este viaje no implica a una tercera ciudad.
El segundo término muestra el número de formas de ir de Buenos Aires a Córdoba (2) y de ahí a Santa Fe (1). Es decir, 2.1 formas de ir de Buenos Aires a Santa Fe pasando por Córdoba.
El tercer término muestra que hay un camino para ir de Buenos Aires a Rosario y uno para ir de Rosario a Santa Fe. Es decir, 1.1 = 1 forma de ir de Buenos Aires a Santa Fe pasando por Rosario.
El último término se interpreta parecido al primero.
Llegamos a la misma conclusión, o sea que hay 3 maneras de ir de Buenos Aires a Santa Fe pasando exactamente por una ciudad.

c) Analizando el valor correspondiente a la fila tres columna dos en la matriz A^2 podemos decir que existen tres formas de ir de Rosario a Córdoba pasando exactamente por una ciudad. Las posibilidades son las siguientes:
Rosario – Buenos Aires – Córdoba: dos rutas diferentes dado que existen dos trayectos que unen Buenos Aires con Córdoba.
Rosario – Santa Fe – Córdoba: un camino.

Definición: Una gráfica dirigida o digráfica es un conjunto finito de puntos llamados vértices o nodos (V_1, V_2, ...,V_n) junto con un número finito de aristas dirigidas cada una de las cuales une un par ordenado de vértices distintos. Este tipo de gráficas no contiene aristas múltiples. El elemento a_{ij} en la matriz de orden n que le corresponde será 1 si existe una arista dirigida que une V_i con V_j; en caso contrario el elemento será nulo.

Ejemplo: Las gráficas dirigidas a menudo se utilizan, por ejemplo en sociología, para estudiar las interacciones grupales. En muchas terapias de grupo ciertos individuos dominan a otros. El dominio que se observa puede ser físico, intelectual o emocional. Pensemos en un grupo de cinco individuos reunidos en una terapia de grupo durante mucho tiempo. El moderador, apoyado en la observación de comportamientos, en algunas pruebas psicológicas y en entrevistas, pudo determinar las relaciones de influencia entre los mismos, es decir, en términos generales pudo establecer “quien domina a quien” y construyó una tabla con la información y la digráfica de dominio.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1		x	x	x	
P_2			x		
P_3					
P_4			x		x
P_5			x		



Podemos construir la matriz asociada teniendo en cuenta estas relaciones, asignando un uno en caso de que la persona influye sobre otra y un cero en caso contrario. Resulta la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Al observar las filas de A vemos que la primera, que corresponde al primer individuo presenta tres unos. Esto significa que P_1 influye sobre tres personas, más que cualquier otra. A este individuo se lo puede considerar como líder del grupo. Observamos además que P_3 no ejerce influencias. El hecho de tener las gráficas representadas como matrices permitirá sacar algunas conclusiones.

Una ruta o recorrido de un vértice a otro se llama trayectoria o cadena. Una trayectoria que atraviesa por n aristas (n + 1 vértices) se llama n–cadena. En la gráfica podemos ver que existe una trayectoria desde P_1 a P_5 aún cuando no hay arista que las une. $P_1 \to P_4 \to P_5$. Esta trayectoria constituye una 2–cadena.

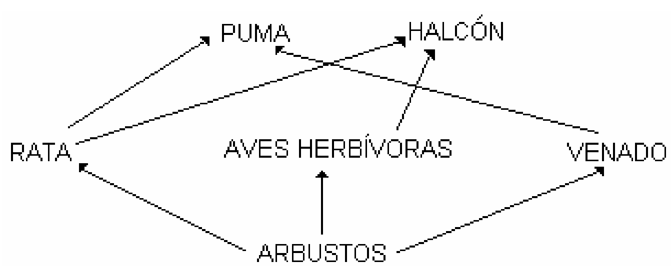
Se dice también que P_1 tiene acceso en dos etapas a P_5. Resulta interesante determinar la trayectoria más corta, si existe, que une dos vértices en una gráfica dirigida. Un teorema que da respuesta a este interrogante expresa:

Sea A la matriz correspondiente a una gráfica dirigida. La componente ij de A^r (a_{ij}^r) es el número de r–cadenas de un vértice i a un vértice j, es decir, es el número de formas en que V_i tiene acceso a V_j en r etapas.

Si retomamos el ejemplo resulta $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Se observa que la persona P_1 puede acceder a P_3 en dos etapas de dos formas diferentes y a P_5 de una manera.

Problema

Pensemos en la siguiente red alimentaria o red de comida.



Las flechas indican las fuentes de comida de cada población en el sentido "es comido por".

Encuentre la matriz asociada A e interprete el significado de A^2.

Construimos una tabla asociada a la gráfica:

	ARBUSTO	RATA	AVES	VENADO	PUMA	HALCÓN
ARBUSTO	0	1	1	1	0	0
RATA	0	0	0	0	1	1
AVES	0	0	0	0	0	1
VENADO	0	0	0	0	1	0
PUMA	0	0	0	0	0	0
HALCÓN	0	0	0	0	0	0

La matriz asociada es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Los elementos de la matriz $B = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ indican las maneras indirectas en las que el arbusto es comido. El elemento b_{15} indica que el arbusto es comido de dos maneras indirectas por el puma, una a través de la rata y otra mediante el venado. El elemento b_{16} indica que el arbusto es comido por el halcón a través de la rata o de las aves herbívoras.

EJERCICIO
Un pequeño sistema telefónico conecta tres ciudades. Hay tres líneas entre las ciudades 1 y 2, tres líneas que unen la ciudad 1 con la ciudad 3 y 2 líneas entre las ciudades 2 y 3.
a) Escriba una matriz A que represente esta información.
b) Calcule A^2.
c) ¿Cuántas líneas que conectan las ciudades 1 y 3 van a través de exactamente otra ciudad?
d) ¿Cuántas líneas que conectan las ciudades 1 y 3 van a través de cuando más otra ciudad?

RESPUESTAS
a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $A^2 = \begin{bmatrix} 18 & 6 & 6 \\ 6 & 13 & 9 \\ 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$ **c)** 6 **d)** 9

1.3 Ecuaciones matriciales
Trabajando con operaciones entre matrices podemos resolver ecuaciones matriciales.

Ejemplo: Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Halle la matriz X que verifique: $A.X = -2B$

En primer lugar determinamos $-2.B = -2.\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -5 & \frac{5}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

La ecuación matricial pedida es: $A_{3x3}.X = -2B_{3x3}$. En consecuencia la matriz X buscada debe ser de orden 3x3.

Planteamos $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ y resolvemos el producto A.X:

$$\begin{array}{c|c} A.X & \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2a+g & 2b+h & 2c+i \\ -a+2d & -b+2e & -c+2f \\ d & e & f \end{bmatrix} \end{array}$$

La ecuación plantea que las matrices A.X y –2.B son iguales, por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 2a+g & 2b+h & 2c+i \\ -a+2d & -b+2e & -c+2f \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -5 & \frac{5}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que dos matrices son iguales cuando son del mismo orden y los elementos ubicados en la misma posición son iguales, resulta:

$2a + g = 1$ $\qquad$ $2b + h = -1$ $\qquad$ $2c + i = -3$

$-a + 2d = -5$ $\qquad$ $-b + 2e = \frac{5}{2}$ $\qquad$ $-c + 2f = -1$

$d = -2$ $\qquad$ $e = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $f = -\frac{1}{2}$

Sustituyendo los valores de d, e y f en las tres ecuaciones anteriores obtenemos:

$-a + 2.(-2) = -5 \quad \Rightarrow \quad -a - 4 = -5 \quad \Rightarrow \quad -a = -1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$-b + 2.\frac{1}{4} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad -b = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -2$

$-c + 2.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad -c - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$2.1 + g = 1 \quad \Rightarrow \quad g = 1 - 2 \quad \Rightarrow \quad g = -1$

$2.(-2) + h = -1 \quad \Rightarrow \quad h = -1 + 4 \quad \Rightarrow \quad h = 3$

$2.0 + i = -3 \qquad \Rightarrow \qquad i = -3$

Así, la matriz X buscada es: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

EJERCICIOS

1) Resuelva la ecuación matricial: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}^t .X = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

2) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$, encuentre la matriz C tal que $A.C^t = B$.

3) Halle la matriz X de modo que $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

4) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, halle la matriz X que verifica $3X - 2A = 5B$

5) Determine la matriz X sabiendo que $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} .X - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

RESPUESTAS

1) $X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **2)** $C = [2 \quad -1 \quad 3\ ]$

3) $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **4)** $X = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -\frac{17}{3} \end{bmatrix}$

5) $X = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -2 \\ \frac{7}{5} & 0 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.2 ÁLGEBRA DE MATRICES – 1.3 ECUACIONES MATRICIALES

1) Dada la matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $2b_{21} + b_{33} - b_{23}$ **b)** $\frac{1}{5}b_{31} - b_{12} + \frac{1}{4}b_{13}$ **c)** $-b_{22} + 2b_{11} - \frac{1}{3}b_{23}$

2) Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $E = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, halle, si es posible:

a) $2B + D$ **b)** $B.D$ **c)** $C^t.B^t$ **d)** $A + D$ **e)** $A - 3E$

3) Determine una matriz X que verifique: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2X^t + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = X$.

4) Resuelva la ecuación matricial $A.X + B = I$ siendo $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

5) Halle los números x e y de manera tal que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaga $A^2 + x.A + y.I = O$.

6) Resuelva la ecuación matricial $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.X - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^t = -3I + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

7) Calcule los valores de x e y tales que $\begin{bmatrix} 2x+y & -y \\ 14 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & x-2y \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$.

8) Halle la matriz X de modo que $3X + \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 11 & 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

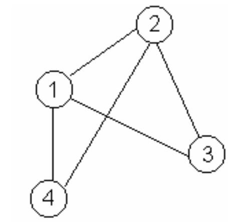
9) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, verifique las siguientes igualdades:

a) $A.(2C + B) = 2AC + AB$ **b)** $(A.B).C = A.(B.C)$

AUTOEVALUACIÓN N^{o} 1: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. ECUACIONES MATRICIALES

1) APLICACIÓN: *Teoría de gráficas*

El diagrama muestra los caminos que conectan cuatro ciudades.



a) Escriba la matriz A de recorrido, donde cada elemento represente el número de caminos que conectan dos ciudades sin pasar por otra ciudad. Por ejemplo, en el diagrama observamos que hay dos caminos que conectan la ciudad 2 con la ciudad 3 sin pasar por la ciudad 1 ni la 4. Por lo tanto los elementos a_{23} y a_{32} de la matriz A deben ser iguales a dos.

b)i) Calcule A^2.

ii) Llamemos b_{12} al elemento ubicado en la primer fila y segunda columna de A^2. Dicho elemento se calculó de la siguiente forma:

$b_{12} = a_{11} \cdot a_{12} + a_{12} \cdot a_{22} + a_{13} \cdot a_{32} + a_{14} \cdot a_{42} = 0.2 + 2.0 + 1.2 + 2.1 = 4$

El primer producto, 0.2, de los cálculos anteriores, representa el número de formas de ir de la ciudad 1 a la ciudad 1 (es decir, 0) y luego de la ciudad 1 a la ciudad 2 (es decir, 2). El resultado, 0, indica que ese viaje no implica a una tercera ciudad. Podemos interpretar de la misma forma el otro producto que da cero. El producto $a_{13} \cdot a_{32} = 1.2$ representa la ruta de la ciudad 1 a la ciudad 3 y las dos rutas de la ciudad 3 a la ciudad 2, o sea 1.2 o 2 rutas de la ciudad 1 a la ciudad 2 pasando por la ciudad 3. Finalmente, el producto $a_{14} \cdot a_{42} = 2$ nos muestra que hay dos rutas para ir de la ciudad 1 a la dos pasando por la ciudad 4. El elemento b_{12} nos da el total de caminos que hay para ir de la ciudad 1 a la ciudad 2 pasando por exactamente una ciudad.

¿Cuántas maneras hay de viajar de la ciudad 2 a la ciudad 4 pasando exactamente por una ciudad?

iii) ¿Cuántas maneras hay de viajar de la ciudad 2 a la ciudad 1 pasando exactamente por una ciudad?

iv) Interprete el significado de un elemento genérico de la matriz A^2.

c) La matriz A^3 muestra el número de formas de viajar entre dos ciudades cualesquiera pasando exactamente por otras dos ciudades.

i) Encuentre A^3.

ii) ¿Cuántas formas hay de viajar entre las ciudades 1 y 4 pasando exactamente por dos ciudades?

d) La matriz $(A + A^2)$ representa el número total de maneras de viajar entre dos ciudades pasando cuando más por una ciudad intermedia.

i) Explique la afirmación anterior y calcule $(A + A^2)$.

ii) ¿Cuántas formas hay de viajar de la ciudad 2 a la 4 pasando cuando más por una ciudad?

iii) ¿Cuántas formas hay de viajar de la ciudad 2 a la 1 pasando cuando más por una ciudad?

2) Resuelva la siguiente ecuación matricial: $\begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}.X = -2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ verifique que $\sum_{i=1}^{3} a_{i1}\, a_{2i} = 2$.

4) Dadas las matrices $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{bmatrix}$. Halle la matriz R sabiendo que $M\,.\,R^t = C$ y $r_{11} = 3$.

5) Juan y Pedro son vendedores de plantas y durante tres días vendieron bolsas de resaca y de tierra fértil a precios especiales. Cada bolsa de tierra cuesta $ 3 y cada una de resaca $ 3,50.

La siguiente tabla muestra las unidades vendidas por cada uno de ellos durante los tres días:

		Juan	Pedro
Total de ventas	Resaca	32	40
	Tierra	66	72

Como no discriminaron las ventas de los dos primeros días, consideraron que vendieron cada día la misma cantidad de cada producto y las unidades vendidas por cada uno de ellos durante el tercer día fueron:

		Juan	Pedro
Tercer día	Resaca	8	16
	Tierra	30	24

a) Escriba una ecuación matricial que describa toda la situación anterior.

b) Calcule la matriz que muestra las ventas del primer o segundo día.

c) Escriba la matriz que indica el costo por bolsa de cada variedad.

d) Calcule, haciendo todas las operaciones entre matrices que necesite, cuál fue el total recaudado por Juan después de los tres días y por Pedro transcurrido el primer día.

6) En una granja se realizan dos cosechas al año, las cuales se envían por embarque a dos distribuidores. La siguiente tabla muestra el número de cajas enviadas a los distribuidores A y B:

	A	B
COSECHA 1	250	400
COSECHA 2	300	180

La ganancia obtenida por el distribuidor A durante el año fue de $ 1507,50 y por el distribuidor B fue de $ 1467. Encuentre la ganancia que deja cada caja en cada cosecha.

1.4 Matrices equivalentes

Se llaman operaciones elementales sobre una matriz A a las siguientes:

1) Permutación de dos líneas (filas o columnas) entre sí.

2) Multiplicación de los elementos de una línea (fila o columna) por un número real no nulo.

3) Sustitución de una línea por la que resulta de sumarle a ella otra paralela previamente multiplicada por una constante.

Si las operaciones elementales se realizan por fila, se denominan *operaciones elementales con renglones*.

El proceso de aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz se llama reducción por renglones.

Dadas dos matrices A y B decimos que B es equivalente a A si y sólo si B se puede obtener efectuando un número finito de operaciones elementales sobre A. Para indicar que "B es equivalente a A" escribimos $B \cong A$. Si la matriz A se puede transformar en la matriz B mediante operaciones con renglones se dice que A y B son equivalentes por renglones.

Ejemplo: Explique por qué los siguientes pares de matrices son equivalentes.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

La matriz B es equivalente a la matriz A pues la segunda fila de B puede obtenerse sumando la segunda fila de A con el doble de la primera fila de A. Es decir, F_2 de B es igual a $(F_2 + 2F_1)$ de A.

Se utilizó la operación elemental: “Sustitución de una línea por la que resulta de sumarle a ella otra previamente multiplicada por una constante”.

b) $M = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

Las matrices son equivalentes ya que la tercera columna de D es igual a la mitad de la tercera columna de M, es decir, C_3 de $D = \frac{1}{2} C_3$ de M.

Se utilizó la operación elemental: *Multiplicación de los elementos de una línea (fila o columna) por un número real no nulo*.

EJERCICIO

En cada caso las matrices A y B son equivalentes. Establezca la operación elemental aplicada a la matriz A que lo justifica.

a) $A=\begin{bmatrix}2&5&1\\3&6&9\\1&1&8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&5&1\\1&2&3\\1&1&8\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}-1&-2&5\\4&7&8\\0&-2&-3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2&-1&5\\7&4&8\\-2&0&-3\end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix}-3&-4\\5&-2\\8&7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6&-4\\-10&-2\\-16&7\end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix}-3&-8\\9&-7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6&-15\\9&-7\end{bmatrix}$

e) $A=\begin{bmatrix}-3&-4&-5\\6&8&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0&-5\\6&8&0\end{bmatrix}$

RESPUESTA

a) $F_2 \to F_2.\left(\frac{1}{3}\right)$ **b)** Intercambia C_2 y C_1 **c)** $C_1 \to C_1.(-2)$

d) $F_1 \to F_1 + F_2$ **e)** $F_1 \to F_1 + F_2.\left(\frac{1}{2}\right)$

1.5 Matriz escalonada y matriz escalonada reducida

Mediante operaciones elementales con renglones podemos obtener matrices especiales equivalentes a una dada.

Ejemplos:

1) $A_1=\begin{bmatrix}2&4&6\\4&5&6\\3&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[F_1\to\frac{1}{2}F_1]{}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-4F_1\\F_3\to F_3-3F_1}]{}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-5&-11\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[F_2\to-\frac{1}{3}F_2]{}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-5&-11\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1-2F_2\\F_3\to F_3+5F_2}]{}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[F_3\to-F_3]{}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1+F_3\\F_2\to F_2-2F_3}]{}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B_1$

$$A_1=\begin{bmatrix}2&4&6\\4&5&6\\3&1&-2\end{bmatrix}\to B_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2) $$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 \to \frac{1}{2}F_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 4F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{3}F_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 3F_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_2$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{bmatrix} \to B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3)

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{2}F_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 \to F_1 + 2F_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_3$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices B_1 , B_2 y B_3 se llaman *formas escalonadas reducidas por renglones* de las matrices A_1, A_2 y A_3, respectivamente.

Una matriz se encuentra en la forma escalonada reducida por renglones si se cumplen las siguientes condiciones:

i) todas las filas o renglones cuyos elementos son todos ceros (si las hay), aparecen en la parte inferior de la matriz;

ii) el primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no son todos ceros es 1;

iii) si dos filas sucesivas tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en la fila de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba;

iv) cualquier columna que contiene el primer 1 de una fila tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama pivote para ese renglón.

Observación: La condición **(iii)** se puede enunciar como: *el pivote en cualquier fila está a la derecha del pivote del renglón anterior*.

Ejemplo: las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ son escalonadas reducidas por renglones con tres pivotes.

Ejemplo: las matrices $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ son escalonadas reducidas por renglones con dos pivotes.

Una matriz está en la *forma escalonada por renglones* si se cumplen las condiciones **(i), (ii)** y **(iii)** de la definición anterior.

Ejemplo: las matrices $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ están dadas en la forma escalonadas por renglones.

Nota: La forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Por lo tanto una matriz puede ser equivalente a más de una matriz en forma escalonada por renglones.

- En la forma escalonada por renglones, todos los números abajo del primer 1 en un renglón son cero.
- En la forma escalonada reducida por renglones todos los números abajo y arriba del primer 1 de un renglón son cero.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, determine una matriz B en forma escalonada reducida por renglones que sea equivalente a ella. En cada paso indique las operaciones elementales utilizadas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 \to \frac{1}{2}F_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{21}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1+\frac{1}{2}F_2\\ F_3\to F_3-\frac{9}{2}F_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{39}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3\to -\frac{2}{39}F_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1\to F_1-\frac{5}{2}F_3\\ F_2\to F_2-2F_3}]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Las operaciones realizadas en el proceso pueden ser otras, pero siempre deberán llegar a la forma escalonada reducida por renglones.

EJERCICIOS

1) Determine si las matrices dadas se encuentran en la forma escalonada por renglones, escalonada reducida por renglones o ninguna de las dos. Justifique.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) Halle la forma escalonada y escalonada reducida de las matrices dadas:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **d)** $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

RESPUESTAS

1) a) Escalonada **b)** Ninguna **c)** Escalonada reducida
d) Ninguna **e)** Escalonada reducida **f)** Ninguna

2)a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS INTEGRADORES
1.5 MATRIZ ESCALONADA Y MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA

1) Utilice las operaciones elementales para reducir las matrices dadas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

2) Dada la matriz A determine cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Está en la forma escalonada por renglón.

b) No está en la forma escalonada por renglón porque el cuarto número del primer renglón es -2.

c) No está en la forma escalonada por renglón porque el primer número distinto de cero en el tercer renglón no es 1.

d) No está en la forma escalonada por renglón porque el último renglón tiene todos ceros.

3) Dada la matriz A determine cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Está en la forma escalonada por renglón.

b) No está en la forma escalonada por renglón porque el tercer y cuarto número del primer renglón no son ceros.

c) No está en la forma escalonada por renglón porque la última columna contiene un cero.

4) Dada la matriz A determine cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Está en la forma escalonada por renglón.

b) No está en la forma escalonada por renglón porque el segundo renglón tiene todos ceros.

c) No está en la forma escalonada por renglón porque el primer número distinto de cero en el tercer renglón es 1.

1.6 Matriz Inversa

Definición: Dada una matriz A, se llama *matriz inversa* de ella y se simboliza A^{-1} a la matriz que verifica $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$.

Podemos enunciar el siguiente teorema: *Si una matriz A admite inversa, ésta es única*.

Para demostrarlo supongamos que existen dos inversas B y C. Debemos probar que B y C son iguales. Por definición, dado que B es una inversa de A, se cumple que: $A.B = B.A = I$

Lo mismo, como C es una inversa de A, vale $A.C = C.A = I$

Pero $B = B.I = B.(A.C) = (B.A).C = I.C = C$

por propiedad asociativa del producto de matrices

Luego queda probado que B = C y por lo tanto *la inversa de una matriz es única.*

Inversa de una matriz cuadrada

Sean A y B dos matrices de orden n. Supongamos que $A.B = B.A = I$. Ya sabemos que B se llama la inversa de A y se anota A^{-1}.

Si A admite inversa decimos que es invertible o no singular.

Una matriz cuadrada que no admite inversa se llama singular.

De la definición podemos concluir que $(A^{-1})^{-1} = A$ si A es invertible y además debemos tener en cuenta que la definición de matriz no establece que toda matriz cuadrada tiene inversa. Existen muchas matrices cuadradas que no tienen inversa.

Definida matriz inversa surgen dos problemas básicos que hay que tratar de resolver:

- ¿qué matrices tienen inversa?
- si una matriz tiene inversa, ¿cómo se la puede calcular?

A lo largo de este tema y los siguientes, responderemos estos dos interrogantes.

Ejemplo: Halle la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Si suponemos que A^{-1} existe se debe verificar que $A.\,A^{-1} = I$.

Suponiendo que $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, se debe cumplir que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

De aquí, por producto de matrices resulta $\begin{bmatrix} 2x+z & 2y+w \\ 3x+2z & 3y+2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y por igualdad se obtiene: $\begin{cases} 2x+z=1 \\ 3x+2z=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2y+w=0 \\ 3y+2w=1 \end{cases}$.

Resolviendo obtenemos $x = 2$, $y = -1$, $z = -3$, $w = 2$.

Por lo tanto $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ es la inversa de A y verifica:

$$\begin{array}{c|c} A.\,A^{-1} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad A^{-1}.\,A = \mathbf{I} \qquad \begin{array}{c|c} A^{-1}.\,A & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad A^{-1}.\,A = \mathbf{I}$$

Ejemplo: Determine la inversa de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$.

Si suponemos que B^{-1} existe se debe verificar que $B.B^{-1} = \mathbf{I}$.

Si consideramos $B^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ resulta: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y de aquí,

por producto e igualdad entre matrices surge: $\begin{cases} 1x + 3z = 1 \\ -3x - 9z = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 1y + 3w = 0 \\ -3y - 9w = 1 \end{cases}$

Realizando los cálculos correspondientes vemos que no encontramos valores de x, y, z, w que verifiquen las ecuaciones anteriores, no podemos formar B^{-1}. Por lo tanto la matriz B no es invertible.

Esta forma de determinar las matrices inversas no resulta demasiado práctica cuando las matrices son de orden mayor que dos.

Existen otros métodos más eficientes para calcular las inversas de matrices. Veamos a continuación uno de ellos.

Método del espejo para calcular la inversa de una matriz

Partimos de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ cuya inversa ya calculamos anteriormente y le aplicamos el método que describimos a continuación para ver si obtenemos los mismos resultados.

Comenzamos formando una nueva matriz de 2x4 que contiene a la matriz A y a la identidad:

$$\begin{array}{c} \qquad A \qquad\qquad \mathbf{I} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Se coloca A a la izquierda de la línea e I a la derecha.

Mediante operaciones elementales con renglones tratamos de transformar la matriz A de la izquierda en la matriz identidad, es decir, tratamos de escribir a la matriz A en su forma escalonada reducida por renglones.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 \to \frac{1}{2}F_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 3F_1]{}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to 2F_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 \to F_1 - \frac{1}{2}F_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

La matriz que resulta a la derecha, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ es la inversa de A, que coincide con la calculada anteriormente.

También se puede usar este método para determinar si una matriz no tiene inversa. Para ello, se aplican las operaciones elementales por renglón hasta que descubrimos que no es posible formar la matriz **I** en la izquierda. Cuando sucede esto la matriz no es invertible.

Analizaremos qué ocurre con la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$.

- Comenzamos formando una nueva matriz de orden 2x4.

$$\begin{array}{c} \qquad B \qquad\qquad I \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

- Tratamos de convertir la matriz B en matriz identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_2 + 3F_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Es imposible que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pueda transformarse en la matriz identidad.

Esto significa que, como ya habíamos visto, la matriz B no admite inversa.

Este procedimiento que hemos utilizado para determinar la inversa de una matriz de orden dos se aplica también para matrices de orden n.

Para hallar la inversa de la matriz A de orden n seguimos el siguiente procedimiento:

1) Se escribe la matriz aumentada [A | I].

2) Se realizan operaciones elementales por renglones para escribir a A en su forma escalonada reducida por renglones.

3) Se decide si A es invertible;

a) si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la línea.

b) si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la línea, entonces A no es invertible.

Podemos enunciar el método de otra forma y decir:
Se aplican operaciones elementales con renglones a la matriz $[A \mid I]$ con el objeto de transformar a A en **I**.

1) si se obtiene la forma $[\, I \mid B]$, entonces la matriz B de orden n es la inversa de A.

2) si se obtienen sólo ceros en uno o más renglones a la izquierda de la línea, A no tiene inversa.

Algunos autores se refieren a éste como, el *método del espejo* para calcular inversas de matrices.

EJERCICIOS

1) Determine si las matrices dadas son inversas:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

2) Calcule, si es posible, mediante el método del espejo, las inversas de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 9 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

3) Halle, si es posible, la matriz inversa de cada una de las matrices dadas sin usar el método del espejo:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

RESPUESTAS

1)a) Sí **b)** Sí **c)** No

2)a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{8} & -\frac{1}{12} & -\frac{11}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ **c)** No existe C^{-1}

3)a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ **b)** No es posible calcular B^{-1} **c)** $C^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.6 MATRIZ INVERSA

1) Determine en cada caso si la matriz A es la inversa la matriz B.

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

2) Calcule, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$ **b)** $B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ **c)** $C=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 6 & -8\end{bmatrix}$ **d)** $D=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$

Ecuaciones matriciales

Sea la ecuación matricial A.X = H, donde las matrices A y H son conocidas y X es la matriz incógnita. Suponemos que A es una matriz no singular, entonces existe A^{-1}.

Luego:

$$A.X = H \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.H \Rightarrow (A^{-1}.A).X = A^{-1}.H \Rightarrow I.X = A^{-1}.H \Rightarrow X = A^{-1}.H$$

$$X.A = H \Rightarrow X.A.A^{-1} = H.A^{-1} \Rightarrow X.(A.A^{-1}) = H.A^{-1} \Rightarrow X.I = H.A^{-1} \Rightarrow X = H.A^{-1}$$

Ejemplo: Resuelva la ecuación matricial $A.X = B.C^t$ siendo $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -4 & 5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ y $C=[0 \quad -1 \quad 1]$.

La matriz traspuesta de C es de orden 3x1.

Observando los órdenes de las matrices involucradas en la ecuación, vemos que podemos resolver la ecuación: $A_{3x3}.X = B_{2x3}.C^t_{3x1}$

Lamando $M_{2x1} = B_{2x3}.C^{t}_{3x1} \Rightarrow A_{3x3}.X = M_{2x1} \Rightarrow A^{-1}_{3x3}.A_{3x3}.X = A^{-1}_{3x3}.M_{2x1}$

$$_{3x3}.\ X = A^{-1}_{3x3}.M_{2x1}$$

El producto $A^{-1}_{3x3}.M_{2x1}$ no se puede realizar ya que el número de columnas de A^{-1} no es igual al número de filas de M. En consecuencia, la ecuación planteada no se puede resolver.

Ejemplo: Resuelva la ecuación $A.X + 2.I = B$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Observando los órdenes de las matrices vemos que se puede resolver la ecuación siempre que la matriz X que buscamos sea cuadrada de orden 3.

Si podemos demostrar además que existe la inversa de la matriz A estamos en condiciones de decir que la ecuación se puede resolver.

$A_{3x3}.X_{3x3} + 2.I_{3x3} = B_{3x3} \Rightarrow A_{3x3}.X = B_{3x3} - 2.I_{3x3}$

Llamemos con H a ($B_{3x3} - 2.I_{3x3}$) y obtenemos: $A_{3x3}.X = H_{3x3}$

Multiplicando a ambos miembros por la inversa de A resulta:

$$A^{-1}_{3x3}.A_{3x3}.X = A^{-1}_{3x3}.H_{3x3} \Rightarrow I.X = A^{-1}_{3x3}.H_{3x3} \Rightarrow X = A^{-1}_{3x3}.H_{3x3}$$

Calculemos la inversa de A utilizando el método del espejo.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{2}F_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 - F_2}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to -\frac{2}{5} F_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 \to F_1 + \frac{1}{2} F_3 \\ F_3 \to F_3 + \frac{1}{2} F_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

Es decir $A^{-1}_{3x3} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

Calculamos ahora la matriz H planteada $H = B_{3x3} - 2.I_{3x3}$. Reemplazando las matrices:

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 2.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz incógnita X es el producto $A^{-1}.H$, o sea:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{13}{5} \\ -7 & 3 & -\frac{32}{5} \\ -2 & 1 & -\frac{9}{5} \end{bmatrix} \end{array}$$

Entonces la matriz X buscada es $\begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{13}{5} \\ -7 & 3 & -\frac{32}{5} \\ -2 & 1 & -\frac{9}{5} \end{bmatrix}$.

Problema

Un agricultor mendocino prepara la tierra para sembrar repollo y ajo. Para cada parcela destinada a repollo emplea 60 kilogramos de superfosfato triple y 150 kilogramos de urea. Para una parcela destinada a ajo emplea 100 kilogramos de superfosfato triple y 180 kilogramos de urea. Este agricultor dispone de 1000 kilogramos de superfosfato triple y 2220 kilogramos de urea. ¿Cuántas parcelas de cada plantación puede preparar para emplear todo el superfosfato triple y la urea?

- Comprender el problema.

Incógnitas: encontrar el número de parcelas de cada plantación que se pueden preparar con el superfosfato triple y la urea disponible.

x: número de parcelas de repollo

y: número de parcelas de ajo

Datos: la cantidad de superfosfato triple y urea disponibles y las cantidades que se destinan en cada parcela para sembrar ajo y repollo.

Estos datos quedan reflejados en la siguiente tabla:

	Superfosfato triple	Urea
Repollo	60 kg.	150 kg.
Ajo	100 kg.	180 kg.
Total disponible	1000 kg.	2220 kg.

- Concebir y ejecutar un plan.

Podemos representar los datos en dos matrices distintas:

R_{2x2}: matriz de requerimientos. Esta matriz representa la cantidad de kg. de superfosfato triple y urea que se necesitan para sembrar repollo y ajo.

$$R = \begin{bmatrix} 60 & 150 \\ 100 & 180 \end{bmatrix}$$

D_{1x2}: matriz de disponibilidades. Cada elemento de esta matriz representa la totalidad de superfosfato triple y de urea disponibles para los dos cultivos.

$$D = [\,1000 \quad 2220\,]$$

Las incógnitas se pueden representar por medio de la matriz N_{1x2} que indica el número de parcelas que se pueden preparar para cada cultivo: $N = [x \quad y]$.

Mediante operaciones entre matrices podemos definir la situación planteada con la ecuación matricial $N.R = D$ y de donde surge que $N.R.R^{-1} = D.R^{-1}$

Como $R.R^{-1} = I$ resulta: $N.I = D.R^{-1} \Rightarrow \quad N = D.R^{-1}$

Para resolver este problema calculamos la inversa de la matriz R por el método del espejo:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 60 & 150 & 1 & 0 \\ 100 & 180 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 \to \frac{1}{60}F_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{60} & 0 \\ 100 & 180 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 100\,F_1]{}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{60} & 0 \\ 0 & -70 & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{70}F_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{60} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{42} & -\frac{1}{70} \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 \to F_1 - \frac{5}{2}F_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{70} & \frac{1}{28} \\ 0 & 1 & \frac{1}{42} & -\frac{1}{70} \end{array}\right] \Rightarrow R^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{70} & \frac{1}{28} \\ \frac{1}{42} & -\frac{1}{70} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} D.R^{-1} & \begin{bmatrix} -\frac{3}{70} & \frac{1}{28} \\ \frac{1}{42} & -\frac{1}{70} \end{bmatrix} \\ \hline [\,1000 \quad 2220\,] & [\,10 \quad 4\,] \end{array}$$

La matriz N = [10 4] representa la solución a nuestro problema:

x = 10 es el número de parcelas de repollo.

y = 4 es el número de parcelas de ajo.

- Examinar la solución y elaborar conclusiones.

La cantidad de parcelas que se pueden preparar para sembrar repollo es 10 mientras que las de ajo resultan 4.

Estos resultados son razonables dado que:

Urea:

Número de parcelas repollo x Kg. destinados + número de parcelas ajo x Kg. destinados = total disponible

10 . 150 + 4 . 180 = 2220

Superfosfato triple:

Número de parcelas repollo x Kg. destinados + número de parcelas ajo x Kg. destinados = total disponible

10 . 60 + 4 . 100 = 1000

De la misma forma podemos trabajar si se toma como referencia la tabla:

	Repollo	Ajo	Total disponible
Superfosfato triple	60	100	1000
Urea	150	180	2220

En el apartado correspondiente a concebir y ejecutar un plan se construyen las matrices: $R = \begin{bmatrix} 60 & 100 \\ 150 & 180 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2220 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

El problema queda planteado a través del producto de matrices:

$$R.N = D \text{ y de aquí } N = R^{-1}.D$$

Calculamos R^{-1} mediante el método del espejo:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 60 & 100 & 1 & 0 \\ 150 & 180 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 \to \frac{1}{60}F_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{10}{6} & \frac{1}{60} & 0 \\ 150 & 180 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 150\,F_1]{}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{60} & 0 \\ 0 & -70 & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{70}F_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{60} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{28} & -\frac{1}{70} \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 \to F_1 - \frac{5}{3}F_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{70} & \frac{1}{42} \\ 0 & 1 & \frac{1}{28} & -\frac{1}{70} \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{70} & \frac{1}{42} \\ \frac{1}{28} & -\frac{1}{70} \end{bmatrix}$$

De aquí el producto $R^{-1}.D$ resulta:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1000 \\ 2220 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -\frac{3}{70} & \frac{1}{42} \\ \frac{1}{28} & -\frac{1}{70} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matriz $N = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$ muestra los valores de las incógnitas que buscamos:

$x = 10$ es el número de parcelas de repollo.
$y = 4$ es el número de parcelas de ajo.

Problema

Una empresa confecciona tres modelos de trajes de fiesta A, B y C. Las cantidades de metros de seda, gasa y puntillas que se utilizan para cada modelo pueden observarse en la siguiente tabla:

Modelo	A	B	C
Metros de seda	2	4	2
Metros de gasa	1	3	1
Metros de puntilla	7	5	6

Calcule cuántos trajes de cada modelo se podrán realizar con 120 metros de seda, 75 de gasa y 275 de puntilla si los materiales se usan todos.

Teniendo en cuenta los pasos enunciados PARA RESOLVER UN PROBLEMA podemos analizarlo de la siguiente manera:

- Comprender el problema.

Incógnitas: cantidades de trajes de diferentes modelos.
x: la cantidad de trajes de fiesta del modelo A,
y: la cantidad de trajes de fiesta del modelo B
z: la cantidad de trajes de fiesta del modelo C
Datos: cantidades de seda, gasa y puntilla requeridas para cada modelo de traje de fiesta y disponibilidades de seda, gasa y puntilla para la realización de los mismos.

- Concebir y ejecutar un plan.

Podemos escribir los datos y las incógnitas como diferentes matrices

$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ la matriz de cantidades de seda, gasa y puntilla requeridas para cada modelo de traje de fiesta.

$R = \begin{bmatrix} 120 \\ 75 \\ 275 \end{bmatrix}$ la matriz de disponibilidades de seda, gasa y puntilla.

$Q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ como la matriz incógnita.

Esto nos permite asegurar que la solución al problema surge al resolver la ecuación matricial $P.Q = R \Rightarrow P^{-1}.P.Q = P^{-1}.R \Rightarrow Q = P^{-1}.R$

Calculamos la inversa de P utilizando el método del espejo:

$$\begin{array}{c} \qquad P \qquad\qquad\quad I \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[F_1 \to \frac{1}{2}F_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 7F_1]{F_2 \to F_2 - F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & -\frac{7}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 9F_2]{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to -F_3]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -9 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 \to F_1 - F_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{2} & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -9 & -1 \end{array}\right]$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad I \qquad\qquad P^{-1}$$

La inversa de la matriz P es $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & 7 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 8 & -9 & -1 \end{bmatrix}$ y realizando el producto:

$$\begin{array}{c|c} P^{-1}.R & \begin{bmatrix} 120 \\ 75 \\ 275 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & 7 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 8 & -9 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

$X = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$ es la matriz o vector columna que da solución a nuestro problema.

- Examinar la solución y elaborar conclusiones.

Se podrán fabricar 20 trajes de fiesta del modelo A, 15 trajes de fiesta del modelo B y 10 trajes de fiesta del modelo C.

AUTOEVALUACIÓN Nº 2: MATRICES EQUIVALENTES. MATRIZ INVERSA

1) Sea la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Determine las matrices obtenidas al realizar las siguientes operaciones elementales:

a) Intercambiar C_2 y C_4.

b) Sumar (–2) veces la segunda fila a la tercera.

c) Multiplicar la columna 3 por 2.

2) ¿Cuáles de las siguientes matrices están en la forma escalonada por renglones y cuáles en la forma escalonada reducida? Aquellas matrices que no están en ninguna de las dos formas, explique por qué.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Demuestre que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ no admite inversa.

4) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ encuentre una matriz equivalente que sea triangular superior.

5) Halle, si existe, la inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. Verifique que $B.B^{-1} = I$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DEL CAPÍTULO

1) El director de un hotel de verano espera a 4 huéspedes que son diabéticos. Estos piensan permanecer en el hotel durante 7, 14, 21 y 28 días respectivamente. A causa de la gran distancia que separa el hotel de la farmacia más próxima el director proyecta comprar, justamente antes de la apertura del hotel, la cantidad total de los tres tipos distintos de insulina: semilenta, lenta y ultralenta que necesitarán dichos huéspedes.

Piensa almacenar estos tres tipos de insulina de forma que el hotel pueda administrar por la mañana la dosis diaria de los distintos tipos a cada uno de los huéspedes. Las necesidades diarias de los cuatro huéspedes son:

- huésped 1: 20 unidades de insulina semilenta, 30 unidades de lenta, 10 unidades de ultralenta.
- huésped 2: 40 unidades de insulina semilenta, 0 unidades de lenta, 0 unidades de ultralenta.
- huésped 3: 30 unidades de insulina semilenta, 10 unidades de lenta, 30 unidades de ultralenta.
- huésped 4: 10 unidades de insulina semilenta, 10 unidades de lenta, 50 unidades de ultralenta.

a) Escriba la matriz A de "necesidades diarias".

b) Escriba la matriz B de "número de días que cada paciente va a permanecer en el hotel".

c) Mediante operaciones entre matrices obtenga la matriz que indique las "cantidades totales de los distintos tipos de insulina que necesitan los cuatro huéspedes para toda su estadía".

d) Con la matriz columna $C=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}$ se indica el precio (en dólares) por unidad de insulina, es decir que una unidad de semilenta cuesta 3 dólares, una unidad de lenta cuesta 2 dólares y una de ultralenta cuesta 4 dólares. Mediante operaciones entre matrices obtenga el precio de compra total de toda la insulina pagado por el hotel.

2) Una compañía tiene sus reportes mensuales de ventas de sus productos expresados como matrices cuyas filas, en orden, representan el número de modelos regular, de lujo y de superlujo que se vendieron. Las columnas, también en orden, indican el número de unidades rojas, blancas, azules y verdes que se vendieron. Las matrices para enero (E) y febrero (F) son:

$$E=\begin{bmatrix}2&6&1&2\\0&1&3&5\\2&7&6&0\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\2&3&3&2\\4&0&2&6\end{bmatrix}$$

a) ¿Cuántos modelos blancos de superlujo se vendieron en enero?

b) ¿Cuántos modelos azules de lujo se vendieron en febrero?

c) ¿En qué mes se vendieron más modelos regulares verdes?

d) ¿De qué modelo y color se vendió el mismo número de unidades en ambos meses?

e) Durante el mes de marzo se duplicaron las ventas con respecto a enero. ¿Cuántas unidades blancas del modelo de superlujo se vendieron?

3) Un corredor de bolsa vendió a un cliente 200 acciones de la empresa A, 300 de la empresa B, 500 de la empresa C y 250 acciones de la empresa D. Los precios por acción de A, B, C, y D son \$ 100, \$ 150, \$ 200 y \$ 300, respectiva–mente. Elabore una matriz fila que represente el número de acciones que el cliente compró de cada una de las empresas. Presente una matriz columna que indique el precio por acción de cada una de ellas. Utilizando operaciones entre matrices, obtenga el costo total de las acciones.

4) Se sabe que un contratista de construcción ha aceptado pedidos por cinco casas de estilo ranchero, siete casas de estilo campero y doce casas de estilo colonial. En este caso los pedidos pueden representarse mediante la siguiente matriz fila: $Q=[\,5\quad 7\quad 12\,]$

Además, las materias primas y laborales que se utilizan en cada uno de los tipos de edificación son acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. Los elementos de la matriz R que aparecen enseguida presentan el número de unidades de cada uno de los materiales que se invierten en cada uno de los tipos de casas.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}\text{Acero} & \text{Madera} & \text{Vidrio} & \text{Pintura} & \text{Mano de obra}\end{array} \\ R= & \begin{bmatrix}5&20&16&7&17\\7&18&12&9&21\\6&25&8&5&13\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{Ranchero}\\\text{Campero}\\\text{Colonial}\end{array}\end{array}$$

a) Calcule la cantidad de cada una de esas materias que necesita para cumplir los contratos.

b) Si se considera que el acero cuesta $ 1500 por unidad, la madera $ 800 por unidad y el vidrio, la pintura y la mano de obra respectivamente $500, $ 100 y $ 1000 por unidad, exprese estos datos mediante una matriz columna y obtenga (mediante operaciones entre matrices) el costo de cada tipo de casa.

c) Obtenga el costo total de construcción para todas las casas.

5) Un taller mecánico desea fabricar 1550 piezas marca X, 780 piezas marca Y y 1190 piezas marca Z. El gerente de producción informa que para llevar a cabo dicha fabricación se requiere seguir los siguientes procesos: estampado (E), soldado (S) y pintado (P).

El tiempo empleado por los equipos, expresado en segundos por pieza (seg/p), son los que se detallan a continuación:

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & S & P \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \end{array}$$

Si la empresa decide hacer el total de piezas, aplicando operaciones entre matrices responda:

a) ¿Qué cantidad de segundos deben emplearse en cada proceso?

b) Suponiendo que el costo de los segundos por pieza según el proceso en que se encuentran las mismas es: E = $ 5 ; S = $ 8 ; P = $ 2. ¿Cuál es el costo de cada pieza marca X, Y, Z?

c) ¿Cuál es el costo total para fabricar todas las piezas?

6) Un productor necesitó comprar 110 quintales de trigo, 8 quintales de maíz y 7 quintales de lino. Los precios por quintal (en dólares) de cada cereal son $ 10, $ 8 y $ 12 respectivamente. Disponga los datos en matrices que reflejen esta situación y mediante operaciones con matrices calcule el costo de la inversión.

7) En el cuadro que sigue se presentan las dosis de vacunas y los kilogramos de ración necesarios cada mes en un cierto establecimiento.

	enero	febrero	marzo
vacunas (por unidad)	135	130	45
ración (en Kg)	5000	6200	4430

Si el precio por unidad de vacuna (en dólares) es de $ 0,80 y el precio por kilo de ración es de $ 0,23, determine:

a) El dinero gastado cada mes.

b) El gasto total.

8) Teniendo en cuenta dos actividades productivas: horticultura (pimientos, tomates) y agricultura (soja, trigo) en una zona, en un año determinado se verificó la demanda de fertilizantes: sulfato diamónico, urea y fosfato tricálcico.

La demanda para horticultura fue de 20 unidades de sulfato, 30 de urea y 12 de fosfato. Mientras que la demanda para agricultura fue de 32, 41 y 14 unidades de fertilizante respectivamente.

a) Confeccione una matriz que refleje la situación anterior.

b) Estructure una nueva matriz teniendo en cuenta los costos por unidad de fertilizante:

sulfato diamónico: 10 pesos/ unid. fertilizante
urea: 8 pesos/ unid. fertilizante
fosfato tricálcico: 16 pesos/ unid. fertilizante

c) Mediante operaciones entre matrices obtenga el total invertido en fertilizantes según las distintas actividades.

9) La empresa Salud y Deporte tiene dos tiendas *Salud y Deporte I* (SDI) y *Salud y Deporte II* (SDII). En el mes de mayo, SDI vendió 21 bicicletas, 15 máquinas de remar y 34 bandas de caminar; las ventas correspondientes a SDII fueron 19, 25 y 28. En junio, la tienda I vendió 28 bicicletas, 18 máquinas de remar y 27 bandas de caminar; las ventas de la tienda II fueron 25, 17 y 28 respectivamente.

a) Escriba una matriz M donde se vean las ventas de los tres artículos en cada tienda en el mes de mayo. Haga lo mismo con el mes de junio.

b) Mediante operaciones entre matrices halle la cantidad de cada artículo vendida en cada tienda en ambos meses.

c) Si por cada bicicleta gana $ 25, por cada máquina de remar $ 20 y cada banda de caminar $ 12, mediante operaciones entre matrices halle la ganancia de cada tienda en los dos meses.

10) Un bosque fue subdividido en pequeños sectores de $1m^2$ de área, llamados cuadros. Se contó el número de helechos por cuadro y el resultado se dio en forma vectorial: Número de helechos por cuadro Número de cuadros

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 23 \\ 17 \\ 8 \\ 6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esto significa: 23 cuadros contiene 0 helechos, 17 cuadros contienen un helecho, etc.. Halle el número total de helechos utilizando una operación entre matrices.

11) En el cuadro I para los años 1987, 1988 y 1989 se muestran los rendimientos del maíz híbrido 1; trigo variedad M y soja cultivar O. En el cuadro II para los mismos años los rendimientos del maíz híbrido 2; trigo variedad N y soja cultivar P.

Calcule para esos años el rendimiento promedio de cada cultivo. Indique las operaciones realizadas.

CUADRO I

	1987	1988	1989
Maíz Híbrido 1	75	70	72
Trigo Var. M	31	33	38
Soja Cult. O	36	41	34

CUADRO II

	1987	1988	1989
Maíz Híbrido 2	82	61	65
Trigo Var. N	19	25	22
Soja Cult. P	38	42	30

12) Una empresa constructora cobra $ 6 la hora por un camión sin conductor,

$ 20 la hora por un tractor sin conductor y $ 10 la hora por cada conductor. La empresa utiliza la matriz A para diversos tipos de trabajo

$$\begin{array}{cc} & \text{Tipo de trabajo} \\ & \begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Camión} \\ \text{Tractor} \\ \text{Conductor} \end{array} \end{array}$$

a) Escriba la matriz fila P de precios que fija la empresa.

b) Determine P.A e interprete los resultados.

c) Si un proyecto utilizó 20 horas de trabajo del tipo **I** y 30 horas del tipo **II**, con la matriz S se designa la matriz oferta tal que $S = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule A.S e interprete los resultados.

d) Obtenga e interprete los elementos de P.A.S.

13) Un dietista combinó 10 gramos del alimento A, 15 gramos del B y 20 gramos del C para obtener cierta mezcla requerida por un cliente.

Cada gramo del alimento A contiene 35 unidades de vitaminas, 15 unidades de minerales y 10 unidades de grasa. Cada gramo del alimento B contiene 10 unidades, 20 unidades y 10 unidades de los mismos componentes y cada gramo del alimento C contiene 20, 15 y 5 unidades, respectivamente

a) Escriba la matriz M de cantidades de alimento requeridas.

b) Escriba la matriz N que muestre las unidades de vitaminas, minerales y grasa contenidas en cada gramo de los tres alimentos.

c) Mediante operaciones entre matrices calcule la cantidad total de vitamina, minerales y grasa contenidas en la mezcla preparada.

14) Una empresa fabrica un determinado producto en tres tamaños y dos calidades diferentes. La producción (en miles) en su planta A está dada por la matriz siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Tamaño 1} & \text{Tamaño 2} & \text{Tamaño 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Calidad 1} \\ \text{Calidad 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 27 & 36 & 30 \\ 18 & 26 & 21 \end{bmatrix} \end{array}$$

La producción (en miles) de su planta B está dada por la matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Tamaño 1} & \text{Tamaño 2} & \text{Tamaño 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Calidad 1} \\ \text{Calidad 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 32 & 40 & 35 \\ 25 & 38 & 30 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Escriba una matriz que represente la producción de ambas plantas.

b) El dueño de la empresa planea abrir una tercera planta la que tendría el doble de la capacidad de la planta A. Escriba la matriz que representa la producción de esta nueva planta.

15) La matriz P indica el porcentaje de pacientes admitidos para internación en las diversas unidades de un hospital y la matriz C resume el costo diario (en pesos) actual de los pacientes para cada unidad.

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}18 \\ 0{,}10 \\ 0{,}24 \\ 0{,}48 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Obstetricia} \\ \text{Cardiología} \\ \text{Pediatría} \\ \text{Otras} \end{array} \quad \text{y} \quad C = [280 \quad 400 \quad 240 \quad 260]$$

Si se admiten 200 nuevos pacientes, mediante operaciones entre matrices, calcule:

a) las cantidades de pacientes admitidas en cada unidad del hospital,

b) el ingreso del hospital por día con los 200 pacientes.

16) Una compañía produce dos modelos de bicicletas. El modelo A requiere 3 horas de ensamble y el modelo B requiere 2 horas de ensamble. Las partes para el modelo A cuestan $ 15 por bicicleta y las partes para el modelo B cuestan $ 20 por bicicleta. Si la compañía tiene en total 38 horas de tiempo disponible y $ 260 disponibles por día para esos modelos, ¿cuántas bicicletas de cada modelo pueden hacerse?

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE DEL CAPÍTULO

1) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, A – B es igual a:

a) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguna de las anteriores

2) Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. Entonces $4.\left[\left(-\frac{1}{2}\right).A\right]$ es igual a:

a) $\begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 2 & -12 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -3 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 2 & 12 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguna de las anteriores

3) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, el resultado de A.B es:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -14 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -14 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguna de las anteriores

4) Dadas las matrices A_{2x3} y B_{2x3}, el resultado de $B.A^t$ es una matriz C de orden:

a) 2x3 **b)** 2x2 **c)** 3x3 **d)** 3x2

5) Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. La matriz A^2 es igual a:

a) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguna de las anteriores

6) Si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, el elemento c_{23} de $(A^t + A)$ es:

a) 5 **b)** 0 **c)** 7 **d)** Ninguno de los anteriores

7) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, aplicando operaciones elementales entre filas, la forma escalonada de A es:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguna de las anteriores

---

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & -7 \\ 4 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, complete:

a) La matriz es de orden ....

b) El elemento a_{32} es ....

c) Son nulos los elementos .... y ....

d) La matriz traspuesta A^t es de orden ....

2) Si $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ verifique las siguientes igualdades:

a) $2b_{11} + 3b_{32} + b_{22} = 0$

b) $\frac{1}{5}b_{11} + 4b_{13} + 8b_{31} = -b_{21}$

c) $3b_{12} + b_{23} - b_{33} = 5b_{11} + b_{22}$

3) Resuelva las siguientes operaciones entre matrices:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

c) $4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

e) $-3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **f)** $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

4) Verifique que la matriz $M=\begin{bmatrix}-3 & 5 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$ satisface la siguiente igualdad:

$$m_{33}.M + m_{32}.M^{t} = \begin{bmatrix}-6 & 13 & 12\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & -3 & 6\end{bmatrix}$$

5) Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 5\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

Calcule, si es posible:

a) $3D - E$ **b)** $A^{t} + B$ **c)** $C.B$

d) $D.B$ **e)** $B.E$ **f)** $C.B + A^{t}$

6) Dadas $A = [2 \quad 3 \quad 5 \quad 0]$ y $B = [0 \quad -2 \quad -1 \quad -3]$ indique la respuesta correcta al realizar $A.B^{t}$:

a) $\begin{bmatrix}0 & 3\\ -5 & -2\end{bmatrix}$ **b)** $[0 \quad -6 \quad -5 \quad 0]$ **c)** $[0 \quad -6 \quad -5 \quad 0]^{t}$

d) 21 **e)** -11 **f)** Ninguna de las anteriores

7) Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 7\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}6 & -6\\ 2 & -3\end{bmatrix}$. Verifique que cumplen la igualdad: $(A + 3B) + 4C = A + (3B + 4C)$.

8) Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}0 & 7 & 0\\ 5 & -1 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$ verifique las siguientes proposiciones:

a) $(2A)^{t} = 2A^{t}$ **b)** $A.B \neq B.A$ **c)** $(A.B)^{t} = B^{t}.A^{t}$

9) Si $\begin{bmatrix}a+b & c+d\\ c-d & a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 10 & 2\end{bmatrix}$, determine los valores de a, b, c y d.

10) Halle la matriz X de modo que: $3.X - \begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix} = X^{t}$.

11) Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -3\end{bmatrix}$, calcule la matriz X que satisface la ecuación $3X - 2A = 5B$.

12) Determine si la matriz $X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ es solución de $X^{2} - 4X + 3I = O$.

13) Halle los valores de α y β tales que: $\alpha\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 7\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}75 & -14\\ -30 & -19\end{bmatrix}$.

14) Resuelva, si es posible, las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ **b)** $X.\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} .X = 2I$ **d)** $X.\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

15) Obtenga la forma escalonada de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **d)** $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

16) Halle la forma escalonada reducida de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ **d)** $D = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

17) Determine, si es posible, la matriz B tal que A.B = **I**, siendo:

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ **e)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **f)** $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

18) Halle, si existen, las inversas de las matrices dadas mediante el método del espejo.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **e)** $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **f)** $F = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

2. DETERMINANTES

> ¿La búsqueda de la verdad te da tanto gusto como antes? Seguramente, no es el conocimiento sino el aprendizaje, no es la posesión sino la adquisición, no es el estar allí sino el llegar hasta ahí, lo que aporta la mayor satisfacción. Si he aclarado y agotado algo, lo dejo para entrar otra vez en la oscuridad. Así es ese hombre insaciable tan extraño: cuando ha completado una estructura no es para quedarse ahí confortablemente sino para empezar otra.

Carl Friedrich Gauss

2.1 Función determinante

Los determinantes son instrumentos muy útiles en matemática y, particularmente, en el álgebra. Proporcionan, por ejemplo :

- la posibilidad de caracterizar de manera muy simple las distintas soluciones de los sistemas de ecuaciones, es decir, la solución de ecuaciones simultáneas;
- un método para la obtención de la inversa de una matriz.

Breve reseña histórica

Los determinantes aparecieron en la literatura matemática más de un siglo antes que las matrices. Algunos grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX ayudaron a desarrollar las propiedades de los determinantes. Muchos consideran que la teoría de los determinantes tuvo su origen con el matemático alemán Gottfried Wilhem Leibniz (1646–1716). Él utilizó los determinantes en 1693 con referencia a los sistemas de ecuaciones lineales. Algunos historiadores consideran que el matemático japonés Seki Kowa hizo lo mismo 10 años antes. Sin embargo, las mayores contribuciones a la teoría de determinantes las hizo el matemático francés Augustin–Louis Cauchy (1789–1857). En 1812 produjo un escrito sobre el tema. A partir de Cauchy se estableció un nuevo rigor en las publicaciones matemáticas. El estudio de los determinantes a través del desarrollo por los adjuntos de los elementos de una línea fue usado por primera vez por un matemático francés Pierre–Simon Laplace (1749 – 1827). Otro matemático que aportó mucho a la teoría de determinantes (después de Cauchy) fue el alemán Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851). Con él la palabra determinante ganó su aceptación final y actualmente, gracias a Silvestre, los alumnos utilizan un determinante llamado jacobiano en los cursos de cálculo de funciones de varias variables. La historia queda incompleta si no se nombra el libro escrito en 1867 por Charles Dodgson (1832–1898) donde se desarrolla bajo qué condiciones los sistemas de ecuaciones tienen soluciones no triviales. El matemático inglés James Joseph Silvestre (1814–1897) fue el primero en utilizar el término matriz en 1850 para distinguirlas de los determinantes. La intención era que el término matriz tuviera el significado de madre de los determinantes.

Definición: Se llama determinante a una función cuyo dominio es el conjunto de todas las matrices cuadradas reales, y cuya imagen es el conjunto de los números reales.
(Esta definición es válida también si trabajamos con matrices con elementos complejos, entonces el determinante será un número complejo)

$$\det : \{\text{matrices cuadradas}\} \to R$$
$$\det : R^{nxn} \to R$$

Notación: Sea $A \in R^{nxn}$, $\det A = |A|$

Dada la matriz cuadrada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El orden de un determinante será el orden de la matriz cuadrada de la cual es su imagen.

Menor Complementario

Se llama menor complementario de un elemento a_{hk} de una matriz cuadrada de orden n al determinante de la matriz de orden (n – 1) que resulta de eliminar en la matriz la fila h y la columna k. Lo representamos con M_{hk}.

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h-11} & \cdots & a_{h-1k-1} & a_{h-1k} & a_{h-1k+1} & \cdots & a_{h-1n} \\ a_{h1} & \cdots & a_{hk-1} & a_{hk} & a_{hk+1} & \cdots & a_{hn} \\ a_{h+11} & \cdots & a_{h+1k-1} & a_{h+1k} & a_{h+1k+1} & \cdots & a_{h+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ entonces

$$M_{hk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h-11} & \cdots & a_{h-1k-1} & a_{h-1k+1} & \cdots & a_{h-1n} \\ a_{h+11} & \cdots & a_{h+1k-1} & a_{h+1k+1} & \cdots & a_{h+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ encuentre los menores complementarios correspondientes a los elementos a_{12} y a_{31}.

Los menores buscados son: $M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ y $M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$.

EJERCICIOS

1) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ halle los menores complementarios correspondientes a los elementos a_{12} y a_{32}.

2) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ determine de qué elementos son menores complementarios los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

RESPUESTAS

1) $M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ **2)a)** a_{32} **b)** a_{22}

Definición del determinante por recurrencia

Dada una matriz A, el número que define el determinante de la matriz está dado por:

a) Si $A = [a_{11}] \Rightarrow |A| = a_{11}$

b) Si A es nxn $\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}.a_{1k}.M_{1k}$

Desarrollando la sumatoria:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}M_{1n}$$

En palabras, la definición expresa que el determinante de una matriz A se puede hallar multiplicando cada elemento a_{1k} de la primera fila por $(-1)^{1+k}$ (que da 1 o –1 según 1 + k sea par o impar), por el menor complementario del elemento y sumando los resultados.

Esta definición es válida si la aplicamos por recurrencia respecto del orden. Para definir un determinante de orden n es necesario haber definido el de orden $n - 1$. Cuando $n = 1$ el determinante está definido por $|a_{11}| = a_{11}$.

Entonces, desarrollando la suma, estamos en condiciones de hallar los determinantes para $n = 2$. Conocidos los de orden 2, podemos hallar los de orden 3 y así sucesivamente, los determinantes de matrices de cualquier orden.

Ejemplo: Desarrolle los siguientes determinantes aplicando la definición:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{1+k}.a_{1k}.M_{1k} = (-1)^{1+1}.a_{11}.M_{11} + (-1)^{1+2}.a_{12}.M_{12}$

$|A| = (-1)^2.3.2 + (-1)^3.(-4).5 = 6 + 20 = 26 \Rightarrow |A| = 26$

b) $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{1+k}.b_{1k}.M_{1k}$

$|B| = (-1)^{1+1}.b_{11}.M_{11} + (-1)^{1+2}.b_{12}.M_{12} + (-1)^{1+3}.b_{13}.M_{13} + (-1)^{1+4}.b_{14}.M_{14}$

$|B| = (-1)^2.(-1).\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^3.0.\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^4.3.\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$+ (-1)^5.0.\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

$|B| = (-1).\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 3.\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} + 0$

$|B| = (-1).\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

Resolviendo los determinantes planteados aplicando la definición resulta:
$|B| = (-1).15 + 3.6 = -15 + 18 \Rightarrow |B| = 3$

EJERCICIO

Desarrolle los siguientes determinantes aplicando la definición:

a) $\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

RESPUESTA

a) –31 **b)** 0 **c)** –53

Determinante de segundo orden

Sea $A \in R^{2x2}$ tal que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Para hallar $|A|$ aplicamos la definición:

$$|A| = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} = a_{11}.|a_{22}| - a_{12}.|a_{21}|$$

pero como $|a_{22}| = a_{22}$ y $|a_{21}| = a_{21}$, resulta: $|A| = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

Regla práctica: todo determinante de segundo orden es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo: Calcule los siguientes determinantes aplicando la regla práctica:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

Para resolver un determinante de orden 2 se multiplican los elementos que se encuentran en la diagonal principal y a dicho producto se le resta el producto de los elementos que se encuentran sobre la diagonal secundaria. Es decir:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7.1 - 5.2 = 7 - 10 = -3$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1) - 4.(-3) = -2 + 12 = 10$

EJERCICIO

Calcule los siguientes determinantes aplicando la regla práctica:

a) $\begin{vmatrix} -3 & a \\ b & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 8 & a \\ -a & 2 \end{vmatrix}$

RESPUESTAS

a) –6 – ab **b)** $4\sqrt{5} + 5$ **c)** $16 + a^2$

Determinante de tercer orden

Sea la matriz $A \in R^{3x3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Aplicando la definición calculamos el determinante de A.

$|A| = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13}$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Resolviendo los determinantes de orden 2 tenemos:

$|A| = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32} a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$

$|A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{31} a_{23} + a_{13} a_{21} a_{32}) -$
$\quad - (a_{11} a_{32} a_{23} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{31} a_{22})$

Regla práctica

Para resolver un determinante de orden tres se siguen los siguientes pasos:

- se copian las dos primeras filas debajo de la tercera y se generan la fila cuatro y la fila cinco.

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right|$$

- se realiza el producto de los tres elementos que ocupan la dirección de la diagonal principal y los productos de los tres elementos que ocupan las posiciones de las diagonales paralelas a la principal.
- se suman los tres números calculados $a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}$
- se realiza el producto de los tres elementos que ocupan la dirección de la diagonal secundaria y los productos de los tres elementos que ocupan las posiciones de las diagonales paralelas a la secundaria.
- se suman los tres números calculados $a_{31}a_{13}a_{22} + a_{11} a_{32} a_{23} + a_{21}a_{12} a_{33}$
- se resta el valor obtenido al trabajar con la diagonal principal menos el valor obtenido al trabajar con la diagonal secundaria.

$|A| =$ (producto dirección diagonal principal) $-$
$\quad -$ (producto dirección diagonal secundaria)

$|A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}) -$
$\quad - (a_{31}a_{13}a_{22} + a_{11} a_{32} a_{23} + a_{21}a_{12} a_{33})$

A esta forma de trabajo se la conoce como *Regla de Sarrus*. Se debe tener en cuenta que sólo vale para determinantes de orden tres.

Ejemplo: Calcule el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ aplicando la regla práctica.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ \hline 2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = [2.4.(-1) + (-1).(-2).5 + 3.0.1] - [5.4.3 + 1.(-2).2 + (-1).0.(-1)]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [-8 + 10 + 0] - [60 - 4 + 0] = 2 - 56 = -54$$

EJERCICIO

Calcule, aplicando Sarrus, los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

RESPUESTA

a) –2 **b)** 22

Determinante de orden superior

El cálculo de determinantes de orden superior ($n > 3$), se puede hacer aplicando la definición. Cuanto mayor sea el orden, más extenso y complicado será el cálculo. Para abreviar la resolución, estudiaremos ciertas propiedades que se basan en la definición dada y que nos permitirán resolver los determinantes en forma más simple.

Adjunto

Se llama *adjunto del elemento* a_{hk} de una matriz cuadrada al menor complementario M_{hk} precedido del signo más o del signo menos según la suma de los subíndices considerados h+k sea par o impar. Lo indicamos A_{hk}.

$$A_{hk} = \alpha_{hk} = (-1)^{h+k}\, M_{hk}$$

Ejemplo: Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Halle el adjunto del elemento b_{23} y del elemento b_{31}.

El adjunto de un elemento se define como el menor complementario con signo positivo o negativo según si la suma de las posiciones del elemento es par o impar. En este caso:

$A_{23} = (-1)^{2+3}.M_{23} = (-1)^5. \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1).[-2.2 - 1.3] = (-1).[-4 - 3]$

$A_{23} = (-1).(-7) \Rightarrow A_{23} = 7$

$A_{31} = (-1)^{3+1}.M_{31} = (-1)^4. \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 1.[3.0 - (-5).4] = (0 + 20) = 20 \Rightarrow$

$A_{31} = 20$

EJERCICIOS

1) Calcule el adjunto correspondiente a los elementos b_{12} y b_{31} de la matriz

$B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

2) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ compruebe que:

a) $a_{11}.A_{13} + a_{21}.A_{23} + a_{31}.A_{33} = 0$ **b)** $a_{21}.A_{22} - a_{32}.A_{13} = 11$

RESPUESTA

1) $A_{12} = -3$; $A_{31} = 12$

Definición de determinante en función de los adjuntos

La definición por recurrencia dada anteriormente se puede enunciar teniendo en cuenta la definición de adjunto.

a) Si $A = [a_{11}] \Rightarrow |a_{11}| = a_{11}$

b) Si $A_{nxn} \Rightarrow |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.A_{1k} = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + a_{13}\,A_{13} + ... + a_{1n}\,A_{1n}$

Enunciado: Un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de la primera fila por sus adjuntos correspondientes.

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.1 FUNCIÓN DETERMINANTE

1) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & x & 1 \\ 2 & -4 & x \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x-1)^2$

c) $\begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 1-x & x \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} x & -2 & 5 \\ 1 & -x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

2) Calcule el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de la primera línea $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

3) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) verifique que $|A.B| = |A|.|B|$

b) analice si $|A.B| = |B.A|$

4) Halle el valor de x para el cual $\begin{vmatrix} 4 & x^2 & 3 \\ 6 & x & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -28$

5) Determine el valor de a que satisface $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 48$

6) Halle el o los valores de x que verifican: $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x+1 \end{vmatrix} \geq 4$

2.2 Propiedades de los determinantes

Las propiedades enunciadas a continuación nos permiten trabajar con los determinantes de manera más sencilla.

1) Todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier línea por sus adjuntos correspondientes.

Esta propiedad es importante pues generaliza la definición anterior. De ella se deduce que para calcular un determinante, se puede elegir la fila o columna más conveniente.

$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik}$ teniendo en cuenta que i puede tomar algún valor entre 1, 2, ..., n (desarrollo por filas).

$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj}$ teniendo en cuenta que j puede tomar algún valor entre 1, 2, ..., n (desarrollo por columnas).

Ejemplo: Desarrolle el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ por los elementos de una línea.

Elegimos, por ejemplo, la segunda columna pues es una de las líneas que más ceros contiene y resulta: $|A| = a_{12}.A_{12} + a_{22}.A_{22} + a_{32}.A_{32} + a_{42}.A_{42}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0+0+6.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} +(-4).(-1)^{4+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$|A| = -6.(-52) + (-4).53 = 100$

Ejemplo: Escriba el determinante que corresponde si su desarrollo por los elementos de la tercer columna es:

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

.

El determinante buscado es $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & -7 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

2) Los determinantes de matrices traspuestas son iguales.
Simbólicamente $|A| = |A^t|$
A partir de esta propiedad, podemos afirmar que: *todo lo que es válido para las filas, es válido para columnas y recíprocamente*. De aquí en más, las propiedades se enunciarán para líneas en general.

3) Si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una de sus líneas nulos, su determinante es nulo.

4) Si en una matriz se multiplican (o se dividen) todos los elementos de una de sus líneas por un número distinto de cero, el determinante queda multiplicado (dividido) por dicho número.

5) Un determinante cambia de signo si se intercambian entre sí dos líneas paralelas (filas por filas o columnas por columnas).

6) Si en una matriz existen dos líneas paralelas iguales, el determinante es nulo.

7) Si en una matriz cuadrada una línea es combinación lineal de las restantes líneas paralelas a ella, su determinante es nulo.

8) Si en una matriz cuadrada una línea es proporcional a otra línea paralela, su determinante es nulo.

9) Si de una matriz A se obtiene otra A* sustituyendo en la anterior una línea por la que resulta de sumarle a ella otra línea paralela previamente multiplicada por un número, ambas tienen el mismo determinante.

10) En todo determinante, la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela a ella es nula. Es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij+k} = 0 \quad (k \neq 0) \quad \text{o bien} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{i+kj} = 0 \quad (k \neq 0)$$

Ejemplo. Halle, sin resolver, el valor de los siguientes determinantes indicando la propiedad aplicada. Verifique la misma resolviéndolos.

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ **d)** $|D| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ -9 & -1 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

e) $|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **f)** $|F| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$

a) El determinante es nulo ya que una de sus líneas, la segunda columna, es completamente nula. En efecto, si lo desarrollamos por dicha columna obtenemos $|A| = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2}$

$|A| = (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{2+2} a_{22} M_{22} + (-1)^{3+2} a_{32} M_{32} + (-1)^{4+2} a_{42} M_{42}$.
Como $a_{i2} = 0$ cada término $(-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2}$ es nulo, para $i = 1, 2, 3, 4$.
Por lo tanto $|A| = 0$.

b) En este caso como hay dos líneas paralelas iguales, la primera y la tercera columna, el determinante es nulo. Podemos comprobarlo aplicando la regla de Sarrus:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-12 + 0 + 40) - (-12 + 0 + 40) = 28 - 28 = 0 \Rightarrow$$

$|B| = 0$

c) En la matriz C una línea, la segunda fila, es la suma de las otras dos filas. Por lo tanto el determinante de la matriz C es nulo. Apliquemos la regla de Sarrus para corroborarlo.

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = (126 + 40 + 9) - (12 + 135 + 28) = 175 - 175 = 0 \quad \Rightarrow |C| = 0$$

d) La primera columna es una combinación lineal de la segunda y la tercera columna, podemos observar que se cumple que $C_1 = C_2 - 2C_3$. El determinante es cero. Eligiendo la cuarta columna para calcularlo planteamos:

$$|D| = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+4} d_{i4} M_{i4}$$

$$|D| = (-1)^{1+4} d_{14} M_{14} + (-1)^{2+4} d_{24} M_{24} + (-1)^{3+4} d_{34} M_{34} + (-1)^{4+4} d_{44} M_{44}$$

Como $d_{24} = d_{34} = 0$ resulta: $|D| = (-1)^{1+4} d_{14} M_{14} + (-1)^{4+4} d_{44} M_{44}$

$$|D| = 1.(-1)^5. \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -9 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1).(-1)^8. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 2 \\ -9 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Aplicando Sarrus obtenemos:

$$|D| = (-1).\ [(6 + 0 - 16) - (8 + 0 - 18)] + (-1).\left[\left(16 - 54 - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{9}{2} - 8 - 36\right)\right]$$

$$|D| = (-1).0 + (-1).0 = 0$$

e) En este ejemplo, la tercera fila se obtiene restando la segunda y la cuarta, es decir, una línea es combinación lineal de líneas paralelas. Por lo tanto el determinante es nulo. En efecto, desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$|E| = (-1)^2\ .1.\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\ + (-1)^4\ .\ (-2)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$|E| = [(12 - 4 + 3) - (18 - 8 + 1)] + (-2)\ [(3 - 12 + 20) - (10 + 9 - 8)]$$
$$|E| = (11 - 11) + (-2)\ (11 - 11) = 0$$

f) En la matriz F una línea es proporcional a otra, en consecuencia, su determinante es nulo.

Observamos que $C_1 = -2.C_3$. Si dividimos la primera columna por -2 resulta:

$$|F| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -3 \\ -\frac{3}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

El último determinante tiene dos líneas (la primera y la tercera columna) paralelas iguales, por lo tanto, es nulo. Es decir: $|F| = (-2).0 = 0$

Ejemplo: Sea la matriz $D = \begin{bmatrix} m & r & s \\ 2 & 2 & 2 \\ p & q & t \end{bmatrix}$. Si $|D| = 2$, calcule y justifique las respuestas:

a) el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} s & -2r & m \\ 2 & -4 & 2 \\ t & -2q & p \end{bmatrix}$

b) el determinante de la matriz $B = \begin{bmatrix} m & r & s \\ -1 & -1 & -1 \\ p & q & t \end{bmatrix}$

c) el determinante de la matriz $C = \begin{bmatrix} m-3p & r-3q & s-3t \\ 2 & 2 & 2 \\ p & q & t \end{bmatrix}$

a) Como se multiplica por (-2) a la segunda columna el determinante queda multiplicando por ese número y como además se intercambian la primera y la tercera columna el determinante cambia de signo, $|A| = (-2).(-1).2 = 4$.

b) Como se multiplica una línea (segunda fila) por un número $\left(-\frac{1}{2}\right)$ el determinante de la matriz queda multiplicado por ese número, $|B| = -\frac{1}{2}.2 = -1$.

c) Cuando se reemplaza en una matriz una línea por la que resulta de sumarle a ella otra línea paralela previamente multiplicada por un número, ambas tienen el mismo determinante, en este caso $F_1 \to F_1 - 3\,F_3$. Entonces $|C| = 2$.

Ejemplo: Sin desarrollar los determinantes, justifique la igualdad

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -4.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

La primera y tercera fila se multiplicaron por $\frac{1}{2}$ y la segunda fila por (–1), o sea, que el determinante queda multiplicado por $-\frac{1}{4}$. Para poder escribir la igualdad multiplicamos el nuevo determinante por (–4).
Se usa la propiedad que dice: “si en una matriz se multiplican (o se dividen) todos los elementos de una de sus líneas por un número distinto de cero, el determinante queda multiplicado (o dividido) por dicho número”.

EJERCICIOS

1) Explique si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Justifique usando propiedades.

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$

2) Halle, aplicando propiedades, el valor del determinante $|F| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Justifique.

3) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, halle, sin desarrollar, el valor de los siguientes determinantes. Justifique la respuesta.

a) $|M| = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $|N| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

c) $|S| = \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

RESPUESTAS

1)a) Verdadera, se reemplazó la segunda fila por la que resulta de sumarle a ella la primera previamente multiplicada por un número k.

b) Verdadera, se intercambiaron las dos filas, por lo tanto el determinante cambia de signo.

c) Falsa, el segundo determinante tendría que estar multiplicado por $\frac{1}{4}$ para ser igual al primero, ya que las dos filas están multiplicadas por 2.

2) $|F| = 0$, la fila dos es combinación lineal de la fila uno y la fila tres, es decir $F_2 = F_3 - F_1$.

3)a) $|M| = 2$, F_1 de la matriz M es igual a $F_1.2$ de la matriz A.

b) $|N| = 1$, F_3 de la matriz N es igual a $F_1 + F_3$ de la matriz A.

c) $|S| = 1$, F_1 de S es igual a $F_1.5$ de la matriz A y F_2 de S es igual a $F_2.\frac{1}{5}$ de A.

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1) Sin desarrollar los determinantes explique por qué son verdaderas las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

2) Escriba, sin desarrollarlos y justificando las respuestas a través de las propiedades, dos determinantes que sean iguales.

3) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$ determine el valor de $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ p & r & q \\ u & w & v \end{vmatrix}$.

Justifique.

4) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, halle otra matriz B donde todos los elementos de la primer columna sean iguales a 1 y tal que $|A| = |B|$.

2.3 Métodos para calcular determinantes de cualquier orden

a) Aplicando la propiedad que dice: Si de una matriz A se obtiene otra A* sustituyendo en la anterior una línea por la que resulta de sumarle a ella otra línea paralela previamente multiplicada por un número, ambas tienen el mismo determinante, podemos obtener un determinante igual al dado pero con (n –1) elementos nulos en una línea y luego al desarrollarlo por los adjuntos de los elementos de esa línea. Así solamente hará falta calcular un menor. Esto significa reducir un determinante de orden n a otro de orden n –1.

Ejemplo: Resuelva el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Aplicamos la propiedad enunciada para disminuir el orden de la matriz hasta obtener una de orden dos y así resolver un determinante de orden 2 según la regla práctica.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\downarrow}{=} \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\downarrow}{=} \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$F_1 \to F_1 + 3F_2 \qquad F_3 \to F_3 + (-2)F_2$

$$\underset{\downarrow}{=} \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & -7 \\ 8 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$F_4 \to F_4 + 2F_2$

Desarrollando por los elementos de la tercera columna resulta:

$$|A| = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 10 & -7 & 14 \\ 1 & 6 & -7 \\ 8 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Vemos que, de un determinante de orden 4, pasamos a uno de orden 3.
Podemos, si queremos, reducirlo a uno de orden 2 de la siguiente manera:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 10 & -7 & 14 \\ 1 & 6 & -7 \\ 8 & -3 & 7 \end{vmatrix} \underset{\downarrow}{=} -\begin{vmatrix} 0 & -67 & 84 \\ 1 & 6 & -7 \\ 0 & -51 & 63 \end{vmatrix} \underset{\downarrow}{=} -(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -67 & 84 \\ -51 & 63 \end{vmatrix} = 63$$

$F_1 \to F_1 + (-10)F_2$ desarrollo por la primera columna

$F_3 \to F_3 + (-8)F_2$

b) Regla de Chío

La regla consiste en los siguientes pasos:

1) Se elige uno de los elementos del determinante $a_{ij} = 1$, en caso de que no lo hubiese, habrá que dividir todos los elementos de una línea por un valor adecuado para que aparezca el elemento unitario. A dicho elemento $a_{ij} = 1$ se lo llama *pivote*.

2) Se indica de alguna forma la fila y la columna a la cual pertenece el pivote elegido.

3) Se obtiene directamente un determinante de orden $(n-1)$ precedido del signo + ó –, de acuerdo si la suma de los subíndices del pivote es par o impar.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n-1} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-11} & b_{n-12} & b_{n-13} & \dots & b_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

4) Cada elemento b_{hk} se obtiene restándole al elemento a_{hk} el producto de los elementos que perteneciendo a la fila h y a la columna k, pertenecen también a la fila i y a la columna j.

Ejemplo: Halle el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ aplicando la regla de Chío.

Como ningún elemento del determinante es igual a 1, dividimos todos los elementos de una línea por un valor adecuado para que aparezca el elemento unitario llamado pivote. Por ejemplo, al dividir la tercer fila por 2 resulta $a_{33} = 1$. Teniendo en cuenta la propiedad enunciada **4)** que dice que si en una matriz se dividen todos los elementos de una de sus líneas por un número distinto de cero el determinante de la matriz queda dividido por dicho número necesitamos multiplicar al nuevo determinante por 2 para no alterar el valor del mismo.

Entonces: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & \mathbf{1} & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Señalamos la fila y la columna del pivote y aplicando la regla obtenemos un determinante de un orden menor al dado, en este caso de orden 3, precedido del signo + ó – de acuerdo si la suma de los subíndices del pivote es par o impar. A cada elemento que no se encuentra en las líneas marcadas se lo reemplaza por la diferencia entre él y el producto de los elementos que están en la fila y en la columna del pivote.

$$|A| = 2.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & \mathbf{1} & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 2-0.(-2) & 3-0.(-1) & -1-0.4 \\ 4-2.(-2) & -3-2.(-1) & 0-2.4 \\ -1-2.(-2) & 0-2.(-1) & 3-2.4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2.\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 8 & -1 & -8 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Al determinante de orden 3 podemos aplicarle nuevamente la regla de Chío. Dividimos los elementos de la tercer columna por –1:

$$|A| = 2.(-1).\begin{vmatrix} 2 & 3 & \mathbf{1} \\ 8 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} 2 & 3 & \mathbf{1} \\ 8 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$|A| = -2.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 8-8.2 & -1-8.3 \\ 3-5.2 & 2-5.3 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} -8 & -25 \\ -7 & -13 \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante de segundo orden obtenemos $|A| = 142$.

EJERCICIOS

1) Halle el determinante de las matrices dadas, haciendo ceros todos los elementos de una línea menos uno de ellos.

a) $A=\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ **b)** $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 45 & 10 & 37 \end{bmatrix}$ **c)** $C=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

2) Calcule aplicando la regla de Chío:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 45 & 10 & 37 \end{vmatrix}$

RESPUESTAS

1)a) 1628 **b)** 0 **c)** –114 **2)a)** 108 **b)** 0

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.3 MÉTODOS PARA CALCULAR DETERMINANTES DE CUALQUIER ORDEN

1) Halle el determinante de las siguientes matrices aplicando la regla de Chío:

$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2) Desarrolle los siguientes determinantes, haciendo ceros los elementos de una línea, excepto uno de ellos.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE DETERMINANTES

1) Dado el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, el A_{12} es:

a) 5 **b)** 1 **c)** –1 **d)** –5

2) Resolviendo el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ aplicando el método de Sarrus, se obtiene:

a) 12 **b)** 0 **c)** –12 **d)** 2

3) Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \end{bmatrix}$. El desarrollo del $|A|$ por los elementos de la columna 3 es:

a) $3.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}$ **b)** $3.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

c) $-3.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}$ **d)** $-3.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

4) Aplicando operaciones entre columnas a la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ se obtiene la matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Si $|A| = 40$, entonces el $|B|$ es igual a:

a) –80 **b)** 80 **c)** –20 **d)** 20

5) Si el determinante de una matriz cuadrada A es –3, es determinante de A^t es:

a) 3 **b)** –3 **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $-\frac{1}{3}$

6) Sea $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. Si se multiplica por 2 al $|A|$, se obtiene el mismo resultado que al resolver el determinante:

a) $\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2g & h & i \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ d & 2e & f \\ g & h & 2i \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ d & 2e & f \\ 2g & h & i \end{vmatrix}$

7) Supóngase que $|A| = -4$ si $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$. Aplicando operaciones entre filas a la matriz A, se obtiene $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 - 2c_1 & b_2 - 2c_2 & b_3 - 2c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$. El $|B|$ es igual a:

a) 8 **b)** –8 **c)** 4 **d)** –4

8) Si $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 16$, el valor de x es:

a) 2 **b)** 14 **c)** –2 **d)** –14

AUTOEVALUACIÓN Nº 3: DETERMINANTES

1) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, se sabe que su determinante es 5. Calcule el valor de los determinantes siguientes y justifique la respuesta:

a) $\left| A^t \right|$ **b)** $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -c & b & a \\ -f & e & d \\ -i & h & g \end{vmatrix}$ **e)** $\left| \frac{1}{2} A \right|$

2) Verifique que, siempre que x_1 sea distinto de x_2, la igualdad $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ se expresa $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$. ¿Qué significado geométrico tiene esta ecuación? Analice desde el punto de visto algebraico y geométrico qué ocurre en el caso de que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

3) Halle el valor de x que verifica $\begin{vmatrix} x & 5 & 2x \\ 2x & 0 & x^2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

4) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ determine otra matriz B donde todos los elementos de la segunda fila sean iguales a 1 y tales que $|B| = |A|$. Verifique.

5) Calcule él o los valores de x para los cuales $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & x+1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} < 9$.

2.4 Aplicaciones de matrices y determinantes

Rango de una matriz

Es el orden del determinante no nulo de mayor orden que se puede extraer en la matriz dada.

El rango se obtiene contando el número de filas no nulas de la matriz, luego de haber obtenido la forma escalonada de la misma.

Efectuando operaciones elementales sobre las filas o columnas de una matriz, se obtiene otra matriz del mismo rango.

Cálculo del rango por triangulación (mediante operaciones elementales)

Ejemplo: Halle, por triangulación el rango de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 4 & 8 \\ 6 & 17 & -7 & 10 & 22 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 4 & 8 \\ 6 & 17 & -7 & 10 & 22 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{\downarrow}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 17 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\downarrow}{\cong}$$

$F_2 \to F_2 - 2F_1$ $\quad$ $F_3 \to F_3 - 5.F_2$

$F_3 \to F_3 - 6F_1$ $\quad$ $F_4 \to F_4 - F_2$

$F_4 \to F_4 - F_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \end{bmatrix} \underset{\downarrow}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \end{bmatrix} \underset{\downarrow}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$F_3 \to \frac{1}{2} F_3$ $\quad$ $F_4 \to F_4 - F_3$

Observamos que el rango vale tres ($r = 3$).

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2(k+1) & 4 \end{bmatrix}$ halle el valor de k para que su rango sea dos.

Calcularemos el rango de la matriz A por triangulación, es decir, mediante operaciones elementales sobre sus líneas, haciendo ceros debajo de la diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2(k+1) & 4 \end{bmatrix} \underset{\downarrow}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 2k & 3 \end{bmatrix} \underset{\downarrow}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \underset{\downarrow}{\cong}$$

$F_2 \to F_2 + F_1$ $\quad$ $F_3 \to F_3 + F_2$ $\quad$ Intercambia

$F_3 \to F_3 - 2F_1$ $\quad$ $F_4 \to F_4 - F_2$ $\quad$ C_3 y C_4

$F_4 \to F_4 - F_1$ $\quad$ $F_2 \to (-1)F_2$

$$A \cong \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-3 \end{bmatrix} = B.$$

Al realizar operaciones elementales en A obtenemos otra matriz B que es equivalente a A. Recordemos que el rango es el número de filas no nulas. Si queremos que el rango de la matriz sea 2, debemos plantear $b_{44} = 0$, es decir:

$$2k - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2k = 3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

Observación: Reemplazando el valor de k en la matriz A resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que la tercera y la cuarta filas son combinación lineal de las dos primeras. En efecto: $F_3 = F_1 - F_2$ y $F_4 = 2F_1 + F_2$

EJERCICIOS

1) Calcule el rango de las matrices dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

2) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & \alpha \end{bmatrix}$; determine α para que su rango sea dos.

RESPUESTAS

1) Rango A = 3, rango B = 3. **2)** $\alpha = 4$

Matriz Adjunta

Definición: Dada una matriz cuadrada A se define como matriz adjunta y se simboliza Adj(A) a la matriz traspuesta de la que resulta de sustituir en la matriz dada cada elemento por su adjunto correspondiente.

En símbolos, para una matriz de orden 3 se escribe:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \text{ donde}$$

A_{ij} son los adjuntos correspondientes a los elementos a_{ij}, $\forall i$, $\forall j$.

Propiedad: el producto de una matriz por su adjunta es conmutativo e igual al producto del determinante de la matriz dada por la matriz unidad o identidad.

$$A.Adj(A) = Adj(A).A = |A| \;.\; I$$

Ejemplo: Calcule la adjunta de la matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Recordemos que la matriz adjunta de una matriz cuadrada B es la matriz traspuesta de la que resulta de sustituir en la matriz B cada elemento por su correspondiente adjunto.

El adjunto de un elemento b_{ij} se define como $(-1)^{i+j}M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor complementario del elemento dado.

En el ejemplo la matriz adjunta resulta:

$$Adj(B) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t =$$

$$Adj(B) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^t \Rightarrow Adj(B) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS

1) Calcula el elemento a_{13} de la matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Halle el elemento a_{21} de la matriz adjunta de $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

RESPUESTAS

1) –32 **2)** –5

Matriz Inversa

Vimos que se llama matriz inversa de la matriz A y se simboliza A^{-1} a la matriz que verifica: $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$.

La condición necesaria y suficiente para que una matriz admita inversa es que sea cuadrada y su determinante no nulo. Dada $A \in R^{nxn}$, $\exists\ A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$.

Las matrices cuadradas de determinante no nulo se llaman matrices *no singulares.*

Sabemos que $A.Adj(A) = |A|\ .\ I$. Como $|A| \neq 0$ multiplicamos miembro a miembro por $\frac{1}{|A|}$ y resulta: $A.\frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{|A|.I}{|A|}$, de donde surge $A.\frac{Adj(A)}{|A|} = I$.

Entonces $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$.

Ejemplo. ¿Para qué valores de α la matriz $A = \begin{bmatrix} 5-\alpha & 0 & -2 \\ 4 & -1-\alpha & 3 \\ 2 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$ no admite inversa? Justifique.

Una matriz no admite inversa si su determinante es nulo. Veamos para qué valores se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5-\alpha & 0 & -2 \\ 4 & -1-\alpha & 3 \\ 2 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = (5-\alpha).(-1-\alpha).(1-\alpha) - [-4.(-1-\alpha)]$$

$$|A| = (5-\alpha).(-1-\alpha).(1-\alpha) + 4.(-1-\alpha)$$

$$|A| = (-1-\alpha).\ [\ (5-\alpha).\ (1-\alpha) + 4]$$

$$|A| = (-1-\alpha).\ (5 - 5\alpha - \alpha + \alpha^2 + 4)$$

$$|A| = (-1-\alpha).\ (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

Deber ser $(-1-\alpha).\ (\alpha^2 - 6\alpha + 9) = 0$ para que no admita inversa.

Para que el producto sea cero, uno de los dos factores debe serlo.

Si $-1-\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$

Si $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3$ (raíz doble)

La matriz A no admite inversa si $\alpha = 3$ pero también cuando $\alpha = -1$.

Ejemplo: Si es posible, calcule la matriz inversa de $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Una matriz posee inversa si es cuadrada y su determinante no es nulo.
Calculemos el determinante de B aplicando la regla de Sarrus:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-6 + 0 - 2) - (0 + 0 - 1) = -7.$$

Como $|B| = -7 \neq 0$ existe la inversa de B y se calcula dividiendo cada elemento de Adj(B) por –7:

$$\text{Dado que Adj(B)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{-7} & \frac{1}{-7} & \frac{-2}{-7} \\ \frac{-1}{-7} & \frac{-2}{-7} & \frac{4}{-7} \\ \frac{-3}{-7} & \frac{1}{-7} & \frac{5}{-7} \end{bmatrix}.$$

$$\text{La matriz inversa resulta } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

Para comprobar si está bien hallada deberá cumplirse que $B.B^{-1} = B^{-1}.B = I$.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

EJERCICIOS

1) ¿Para qué valores de a la matriz $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 5 & a+1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ no admite inversa?

2) Halle, si es posible, la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ verifique que $\left(A^2\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^2$.

4) Halle X en la siguiente ecuación matricial $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.X.\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

RESPUESTAS

1) $a = 0$, $a = -3$

2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

4) $X = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$

<u>Problema</u>

Las *matrices de insumo–producto*, desarrolladas por Wassily W. Leontief de Harvard, señalan las interrelaciones de oferta y demanda que existen entre los diversos sectores de una economía durante cierto período. Se utiliza la frase “insumo–producción” porque las matrices muestran los valores de la producción de cada industria que se vende como insumo a cada una de las industrias de la economía y para uso final de los consumidores. En la práctica el análisis es muy complicado por la gran cantidad de variables implicadas. Veremos un ejemplo simple con pocas variables.

En la matriz de insumo–producción que aparece abajo se muestra un ejemplo hipotético de una economía simplificada que tiene sólo tres sectores productivos: agricultura, manufactura y transporte, todas en unidades apropiadas.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Agricultura} & \text{Manufacutura} & \text{Transporte} \end{array} \\ \text{Insumos} \begin{array}{c} \text{Agricultura} \\ \text{Manufactura} \\ \text{Transporte} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} = A \end{array}$$

La primera columna representa la cantidad de productos de cada uno de los tres productos consumidos en la producción de una unidad de agricultura. La segunda columna da las cantidades correspondientes requeridas para producir una unidad de manufactura y la última columna de las cantidades necesarias para producir una unidad de transporte.

Otra matriz usada con la matriz de insumo–producto es una matriz que da la cantidad producida por cada sector, llamada la *matriz de producción*, o el *vector de rendimiento bruto*.

a) Suponga que, en este ejemplo, la matriz de producción es $X = \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Calcule A.X e interprete su significado.
La diferencia entre la matriz de producción X y la cantidad A.X usada en el proceso de producción debe ser igual a la demanda externa, es decir que representa las cantidades demandadas de cada producto desde fuera del sistema de producción.
La nueva matriz la representaremos con la letra D y la calculamos haciendo $D = X - AX$.
b) Calcule D en nuestro ejemplo.
En la práctica A y D suelen ser conocidas y X debe encontrarse. Es decir, tenemos que decidir qué cantidades de producción son necesarias para satisfacer las demandas requeridas.
c) Utilizando el álgebra de matrices, demuestre, a partir de $D = X - AX$, de qué manera puede obtenerse $X = (I - A)^{-1} D$, siempre que $(I - A)$ tenga
inversa. (Realícelo en general sin utilizar los datos del problema)
d) Suponga que en la economía de tres sectores productivos del ejemplo hay una demanda de 340 unidades de agricultura, 251 unidades de manufactura y 123 unidades de transporte. ¿Cuál deberá ser la producción de cada sector?

a)

$$\begin{array}{c|c} A.X & \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \\ 51 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 28{,}1 \\ 36{,}2 \\ 38{,}9 \end{bmatrix} \end{array}$$

A.X indica las cantidades requeridas en la producción de 40 unidades de agricultura, 35 unidades de manufactura y 51 unidades de transporte.

b) $D = X - AX = \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \\ 51 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 28{,}1 \\ 36{,}2 \\ 38{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11{,}9 \\ -1{,}2 \\ 12{,}1 \end{bmatrix}$

c) $D = X - AX$
Dado que $IX = X$ podemos escribir $D = IX - AX$

Por recíproca de la propiedad distributiva del producto de matrices en el segundo miembro: $D = (I - A).X$

Considerando que (I – A) tiene inversa premultiplicamos ambos miembros por dicha inversa obteniendo $(I - A)^{-1}.D = (I - A)^{-1}.(I - A).X$

El producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad $(I - A)^{-1}.D = I.X$

Teniendo en cuenta que la matriz identidad es el elemento neutro del producto llegamos a que $(I - A)^{-1}.D = X$

d) Calculemos el determinante de (I – A):

$$|I - A| = \begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{vmatrix} = 0{,}115$$

Como $|I - A| \neq 0$, la matriz inversa existe y la calculamos por el método de la adjunta: $(I - A)^{-1} = \dfrac{Adj(I - A)}{|I - A|}$

$$Adj(I - A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -0{,}3 & 0{,}6 \\ -0{,}2 & -0{,}3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -0{,}2 & -0{,}1 \\ 0{,}6 & -0{,}2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & -0{,}2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$Adj(I - A) = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}22 & 0{,}21 \\ 0{,}15 & 0{,}34 & 0{,}22 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}3 \end{bmatrix}^t \Rightarrow Adj(I - A) = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}22 & 0{,}34 & 0{,}15 \\ 0{,}21 & 0{,}22 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Por lo tanto } (I - A)^{-1} = \frac{Adj(I - A)}{|I - A|} = \frac{\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}22 & 0{,}34 & 0{,}15 \\ 0{,}21 & 0{,}22 & 0{,}3 \end{bmatrix}}{0{,}115} \Rightarrow$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}6086 & 1{,}3043 & 0{,}8695 \\ 1{,}913 & 2{,}9565 & 1{,}3043 \\ 1{,}826 & 1{,}913 & 2{,}6086 \end{bmatrix}$$

La inversa de (I – A) es $\begin{bmatrix} 2{,}6086 & 1{,}3043 & 0{,}8695 \\ 1{,}913 & 2{,}9565 & 1{,}3043 \\ 1{,}826 & 1{,}913 & 2{,}6086 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 340 \\ 251 \\ 123 \end{bmatrix}$ entonces:

$$
\begin{array}{c|c}
(I - A)^{-1}.D & \begin{bmatrix} 340 \\ 251 \\ 123 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} 2{,}6086 & 1{,}3043 & 0{,}8695 \\ 1{,}913 & 2{,}9565 & 1{,}3043 \\ 1{,}826 & 1{,}913 & 2{,}6086 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1321{,}2518 \\ 1552{,}9304 \\ 1421{,}8608 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Si $X = \begin{bmatrix} 1321{,}2518 \\ 1552{,}9304 \\ 1421{,}8608 \end{bmatrix}$, la producción debe ser 1321,2518 unidades en agricultura, 1552,9304 unidades en manufactura y 1421,8608 unidades en transporte para satisfacer la demanda.

Una aplicación en nuestros días: LA CRIPTOGRAFÍA O TEORÍA DE CÓDIGOS.

El increíble desarrollo reciente de las capacidades de computación de los sistemas informáticos y el auge de las comunicaciones electrónicas, ha vuelto a poner en el centro del interés los temas relacionados con la confidencialidad y la seguridad. La era digital plantea problemas de identificación y autenticación de las personas totalmente diferentes a los conocidos durante siglos, así como el desafío de verificar la integridad de los mensajes transmitidos en redes como Internet. Por otra parte los avances en matemática, en temas abstractos y *aparentemente sin aplicación,* aplicados a la moderna criptografía, han permitido el desarrollo de técnicas criptográficas que sin necesidad de grandes sistemas, permiten un nivel de seguridad impensable sólo hace unos años. La criptografía es una rama de la matemática y la computación que permite resolver estos problemas mediante resultados de gran belleza intelectual. Para algunos, se define como la ciencia de crear y descifrar códigos mientras que para otros es sólo la técnica de codificación y decodificación de mensajes. Los orígenes de la escritura secreta pueden remontarse casi a los principios de la historia. Fue utilizada por el emperador Julio César y por varios países en la Primera Guerra Mundial con un carácter bélico, en la actualidad es una importante herramienta en los sistemas de seguridad nacional y de transacciones comerciales y bancarias a nivel mundial. La Criptografía, que es el arte de ocultar mensajes en el mundo es empleada en los sistemas computarizados de algunas secretarías de estado y en las aduanas, principalmente; sin embargo, su utilización y la diversificación de sus aplicaciones dependerá de un mayor interés de los investigadores que se dediquen a su estudio.

La Teoría de Códigos también se utiliza para detectar y corregir los errores que se transmiten en el envío de información por diversos medios, ya sea por fibra óptica, ondas de los teléfonos celulares, vía satélite o por cable.

Para algunos, se define como la ciencia de crear y descifrar códigos mientras que para otros es sólo la técnica de codificación y decodificación de mensajes.

Las matrices se utilizan para desarrollar sistemas de códigos. Se puede construir un código sencillo asociando un número diferente a cada letra del abecedario y un número diferente para el espacio.

$A \leftrightarrow 1$	$E \leftrightarrow 5$	$I \leftrightarrow 9$	$M \leftrightarrow 13$	$P \leftrightarrow 17$	$T \leftrightarrow 21$	$X \leftrightarrow 25$
$B \leftrightarrow 2$	$F \leftrightarrow 6$	$J \leftrightarrow 10$	$N \leftrightarrow 14$	$Q \leftrightarrow 18$	$U \leftrightarrow 22$	$Y \leftrightarrow 26$
$C \leftrightarrow 3$	$G \leftrightarrow 7$	$K \leftrightarrow 11$	$Ñ \leftrightarrow 15$	$R \leftrightarrow 19$	$V \leftrightarrow 23$	$Z \leftrightarrow 27$
$D \leftrightarrow 4$	$H \leftrightarrow 8$	$L \leftrightarrow 12$	$O \leftrightarrow 16$	$S \leftrightarrow 20$	$W \leftrightarrow 24$	Espacio $\leftrightarrow 28$

Supongamos que dos personas, Juan y María desean comunicarse entre sí utilizando un código porque suponen que sus llamadas telefónicas y su correo fueron intervenidos.

Si Juan le envía a María el mensaje "LLAMAME MAÑANA" utilizando el sistema de sustitución anterior escribiría: 12 12 1 13 1 13 5 28 13 1 15 1 14 1
Sin embargo, este tipo de código se puede descifrar con poca dificultad usando diferentes técnicas. Para lograr el objetivo propuesto ellos pueden trabajar con matrices y establecer una matriz no singular, por ejemplo de orden dos, llamada *matriz de código* o *matriz de codificación.*

Acuerdan entre ellos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ como matriz de código. Juan separa el mensaje en parejas de letras teniendo en cuenta además el espacio y cada pareja la escribe como una matriz de orden 2x1, es decir como un vector columna. Si la cantidad de letras más los espacios no es múltiplo de dos se agrega cualquier letra o bien otro espacio. Así surgen para el mensaje "LLAMAME MAÑANA" siete matrices de orden 2x1.

Ellas son: $X_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$; $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}$; $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}$; $X_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 28 \end{bmatrix}$; $X_5 = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix}$; $X_6 = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $X_7 = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Juan decide transformar cada una de las siete matrices X_i por el producto de $A_i = A \,.\, X_i \quad \forall\, i = 1, 2, ..., 7$. Podemos calcular todos los productos y resulta:
$A_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 48 \end{bmatrix}$; $A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix}$; $A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix}$; $A_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 43 \end{bmatrix}$; $A_5 = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$; $A_6 = \begin{bmatrix} 15 \\ 46 \end{bmatrix}$ y $A_7 = \begin{bmatrix} 14 \\ 43 \end{bmatrix}$.

A partir de ahora Juan está en condiciones de enviar el mensaje codificado:
12 48 1 16 1 16 5 43 13 40 15 46 14 43

María recibe el mensaje y necesita descubrir su contenido. Debe decodificarlo. Si existe entre ellos una matriz de códigos necesitan también una *matriz* *decodificadora* o *matriz de decodificación.* Esta nueva matriz es simplemente la inversa de la matriz de códigos. Si $A_i = A \cdot X_i$ cada vector del mensaje original se obtiene haciendo $X_i = A^{-1} \cdot A_i$.

La matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz de decodificación. Las dos primeras letras del mensaje surgen de resolver el producto $A^{-1} \cdot A_1 = X_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Así podemos continuar con X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 y X_7 hasta reconstruir el mensaje completo.

Tenga en cuenta que:

- Los elementos de la matriz que se elige como matriz de códigos deben ser números enteros y los elementos de su inversa también.
- Un mensaje se puede codificar también separándole en grupo de tres o más letras. Si se separa en grupos de tres letras se debe elegir una matriz de codificación de orden tres que tenga inversa y cumpla con las características enunciadas. Para grupos de cuatro se utiliza una matriz de orden cuatro.
- Cuanto más grande es el número de letras elegidas por grupo más difícil resultará *romper el código* para alguien que no lo conoce.

EJERCICIO

Usando el código presentado que asocia a cada letra del abecedario un número y la matriz de código $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Codifique el mensaje “NOS VEMOS EL MARTES”.

b) Decodifique el mensaje: 65 35 43 22 166 94 168 98 94 53 17 10 105 62.

RESPUESTA

a) 108 62 180 104 71 38 106 61 180 104 70 41 121 67 97 58 67 36 180 104

b) Será un placer.

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.4 APLICACIONES DE MATRICES Y DETERMINANTES

1) Halle el rango de $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Calcule el valor de a para que el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{bmatrix}$ sea dos.

3) Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & \beta & 2 \end{bmatrix}$, halle el valor de β de modo que su rango sea tres.

4) Halle él o los valores de k para el cual existe A^{-1}, siendo $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & k \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix}$.

5) Calcule, si existen, las inversas de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -2 & -8 & 10 \\ -4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & -0{,}5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

6) Resuelva, si es posible, la ecuación matricial A.X + B = I siendo

$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

7) Encuentre, si existe, la matriz X de manera tal que $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE APLICACIONES DE MATRICES Y DETERMINANTES

1) La inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ es:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguna de las anteriores

2) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, la ecuación matricial A .X = B se resuelve haciendo:

a) $X = A^{-1}.B$ **b)** $X = \frac{1}{A}.B$

c) $X = B.A^{-1}$ **d)** Ninguna de los anteriores

3) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, su inversa A^{-1} es igual a:

a) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguna de las anteriores

4) Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$. Si $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ n & m \end{bmatrix}$, entonces:

a) $n = -\frac{3}{4};\ \ m = -\frac{1}{4}$ **b)** $n = \frac{3}{4};\ \ m = -\frac{1}{4}$

c) $n = \frac{3}{4};\ \ m = \frac{1}{4}$ **d)** $n = -\frac{3}{4};\ \ m = \frac{1}{4}$

5) La matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^t$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguna de las anteriores

6) Si la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & a+2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$, el valor de a para que no admita inversa es:

a) 4 **b)** –4 **c)** 0 **d)** 2

AUTOEVALUACION Nº 4: APLICACIONES DE MATRICES Y DETERMI–NANTES

1) Calcule el valor de n para que el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ n & 10 & -1 \end{bmatrix}$ sea 2.

2) Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \\ 6 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ es 468. La componente m_{31} de la matriz inversa es:

* $-\frac{26}{468}$ * $\frac{26}{468}$ * $\frac{46}{468}$ * $-\frac{46}{468}$. Justifique.

3) APLICACIÓN: *Criptografía*

Supongamos que deseamos comunicarnos usando el mismo esquema que en el ejemplo, pero con la matriz de código $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Codifique el mensaje "MANDAME LAS NOTAS".

b) Decodifique el mensaje 73 54 33 123 79 72 74 53 41 88 66 38 113 77 56.

4) Halle el o los valores de la incógnita:

a) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2 & 3-x \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2x & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x+1 & 0 & x \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & 5 & a \\ 3 & a & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix}$

5) Una persona compró en una institución 50 acciones del tipo **I** y 20 acciones del tipo **II**. Los costos por acción son de $ 36 las de tipo **I** y $ 24 del tipo **II**. Los dividendos por acción son de $ 2 y $ 1,50 respectivamente.

a) Escriba una matriz que muestre los costos por acción y los dividendos por acción.

b) Escriba como matriz el número de acciones de cada tipo.

c) Usando operaciones entre matrices encuentre el costo total y los dividendos totales de esas acciones.

d) Clasifique las matrices de los incisos a, b y c. Interprete el significado de algún elemento de la matriz obtenida en **c)**.

e) Otra persona compró cierta cantidad de los dos tipos de acciones con un costo total de $ 1920, pudiendo obtener dividendos totales de $112,5. ¿Cuántas acciones de cada tipo compró?

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Calcule los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a+1 & a+1 \\ -a & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$

2) Determine el valor de los siguientes determinantes aplicando la regla de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 \\ 1 & 5 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 \end{vmatrix}$

3) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x-5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 2 & -x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x-1)^2$ **c)** $\begin{vmatrix} a & a \\ 5 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2-x & -3 & 6 \\ 4 & 1+x & -2 \\ 2 & -1 & 2+x \end{vmatrix} = 0$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & a \\ x & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b^2 \\ -a & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -1 & -x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} = 5$ **g)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & b-a \\ 2 & b & a-b \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix}$

4) Desarrolle los siguientes determinantes por los elementos de una línea.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

5) Demuestre las siguientes identidades:

a) $\begin{vmatrix} a^3+a^2b & -b^2a-b^3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b)^2.(a-b)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -1$ **c)** $\begin{vmatrix} a & ab & ac \\ b & b^2 & bc \\ c & cb & c^2 \end{vmatrix} = 0$

6) Calcule los siguientes determinantes sin resolverlos, justificando el resultado mediante las propiedades que se verifiquen:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 10 & 3 & -9 \\ 8 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

7) Calcule los siguientes determinantes haciendo nulos los elementos de una línea, excepto uno de ellos.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

8) Desarrolle los siguientes determinantes aplicando la regla de Chío:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 7 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

9) Dado el determinante: $\begin{vmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

a) Haga que los elementos de la tercera columna sean todos iguales a 1 y luego resuélvalo.

b) Realice lo mismo que en a), pero con los elementos de la segunda fila.

10) Encuentre el valor de $x \in R$ tal que $|A - x.I| = 0$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

11) Halle el valor de k para que el determinante de la matriz C sea nulo si la matriz es $C=\begin{bmatrix}5-x & 0 & -2\\ -4 & 1+x & -3\\ 2 & 0 & 1-x\end{bmatrix}$.

12) Calcule el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ -3 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$ **b)** $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 5 & 0 & 6\end{bmatrix}$ **c)** $C=\begin{bmatrix}4 & 5 & -2\\ -3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$

13) Halle las adjuntas de las siguientes matrices $B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 5 & 4 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$;

$A=\begin{bmatrix}2 & 8\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 8 & -2\end{bmatrix}$.

14) Indique si las siguientes matrices admiten inversas justificando las respuestas. De existir matriz inversa, calcúlela.

a) $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$ **b)** $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & -2\end{bmatrix}$ **d)** $D=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$

15) Resuelva, si es posible, las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 2 & 2\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -6\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}.X=I_{3x3}$ **d)** $\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3\\ 3 & 8 & 4\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}3 & 1\\ \frac{5}{4} & 1\\ -\frac{7}{4} & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-4\\ 0\end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}.X.\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

16) Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{b}{3} \end{bmatrix}$ halle el valor de b de modo que el rango de 3B sea dos.

17) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$, verifique que $A = B^{-1}$.

18) Determine el valor de b para que la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & b & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ no admita inversa.

19) Dada $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$; encuentre, si es posible, la inversa de (B + 3I).

20) Calcule él o los valores de k para que la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ k & 5 & 0 \\ k+1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ admita inversa.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

> Los matemáticos no se ocupan de objetos, sino de relaciones entre objetos: de esta manera tienen la libertad de reemplazar algunos objetos por otros, siempre y cuando las relaciones no se alteren. El contenido es para ellos irrelevante; se interesan únicamente en la forma.

Henri Poincaré

3.1 Conceptos básicos

En numerosos casos, las aplicaciones de la matemática en la resolución de problemas incluyen más de una variable. Si las relaciones entre dichas variables generan varias ecuaciones, es preciso resolverlas de manera simultánea. Al conjunto resultante de ecuaciones con varias variables se lo llama sistema de ecuaciones.

Consideremos la siguiente situación:

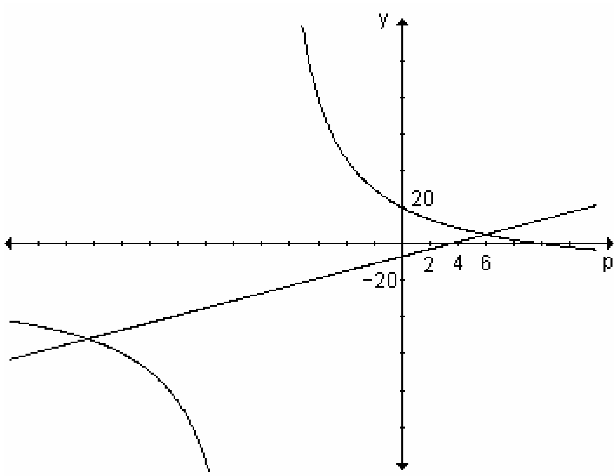
En economía se definen *funciones de demanda* que describen, para una determinada mercadería, la relación existente entre la cantidad de la mercadería demandada y alguna otra variable que puede ser precio, gastos, precio de otras mercaderías, tiempo, etc. También quedan definidas las *funciones de oferta* que describen la relación entre la cantidad de mercadería ofrecida y otra variable que puede ser precio, tiempo, precio de otras mercaderías, etc.

Si se supone que existe *competencia pura*, es decir que ningún producto o consumidor puede influir individualmente sobre, por ejemplo, los precios del mercado, se dice que se alcanzó el equilibrio del mercado cuando la cantidad ofrecida de una mercadería coincide con la cantidad demandada.

Por ejemplo, si la función dada por la ley $(p + 10)(y + 20) = 400$ representa la cantidad de unidades demandadas (y) en función de su precio (p) y la ley $y - 2p + 7 = 0$ representa la cantidad de mercadería ofrecida (y) según su precio (p), encuentre cuál debe ser el número de unidades y el precio para estar en estado de equilibrio. Las ecuaciones planteadas son:

$$y = \frac{400}{p+10} - 20 \qquad\qquad y = 2p - 7$$

Si graficamos en un mismo sistema de coordenadas cartesianas vemos que el punto de equilibrio resulta la intersección de las dos gráficas.



Analíticamente resulta, igualando las ecuaciones

$$2p - 7 = \frac{400}{p+10} - 20 \Rightarrow$$

$$2p - 7 + 20 = \frac{400}{p+10} \Rightarrow$$

$$2p + 13 = \frac{400}{p+10} \Rightarrow$$

$$(2p + 13)(p + 10) = 400 \Rightarrow 2p^2 + 20p + 13p + 130 - 400 = 0 \Rightarrow$$

$$2p^2 + 33p - 270 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_{1,2} = \frac{-33 \pm \sqrt{33^2 + 4.2.270}}{4} \qquad \Rightarrow$$

$$p_{1,2} = \frac{-33 \pm \sqrt{1089 + 2160}}{4} = \frac{-33 \pm 57}{4} \qquad \text{de aquí } p_1 = 6 \text{ o } p_2 = -22{,}5.$$

El valor negativo debemos descartarlo como solución del problema. El precio es 6 y la cantidad demandada (u ofertada) es $y = 2.6 - 7 = 5$ unidades. Para resolver el ejemplo anterior tuvimos que encontrar los valores de las variables que satisfacen las dos ecuaciones al mismo tiempo. Podemos decir que buscamos los valores de p e y que cumplen con las condiciones en forma simultánea.

Analicemos el problema que enunciamos a continuación.

Problema

> Una compañía que produce agroquímicos tiene 100 empleados. Algunos empleados ganan $ 4 por hora, otros $ 5 y el resto $ 8. El número de empleados que gana $ 8 es la mitad del número de empleados que gana $ 5. Si el total pagado en jornales por hora es $ 544, encuentre el número de empleados que gana $ 4, $ 5 y $ 8 por hora respectivamente.

Para poder resolverlo llamemos con:

x al número de empleados que gana $ 4 la hora,
y al número de empleados que gana $ 5 la hora,
z al número de empleados que gana $ 8 la hora.

El total de empleados es 100 entonces podemos plantear: $x + y + z = 100$.
El número de empleados que gana $ 8 es la mitad del número de empleados que gana $ 5, es decir: $z = \frac{1}{2}y$.

Por los empleados que ganan $ 4 la hora la compañía paga 4x la hora, por los empleados que ganan $ 5 la hora, paga 5y mientras que por los que ganan $ 8 la hora, 8z. Si en total abona por hora $ 544 resulta $4x + 5y + 8z = 544$.
Las tres ecuaciones deben cumplirse simultáneamente, por ello planteamos el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ z = \frac{1}{2}y \\ 4x + 5y + 8z = 544 \end{cases}.$$

Podemos resolverlo por sustitución, reemplazando z por $\frac{1}{2}y$ en la primera y tercera ecuación:
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{2}y = 100 \\ 4x + 5y + 8.\frac{1}{2}y = 544 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2}y = 100 \\ 4x + 9y = 544 \end{cases}.$$

Resolvemos por igualación el sistema obtenido. Despejando de ambas ecuaciones x resulta:
$$\begin{cases} x = 100 - \frac{3}{2}y \\ x = 136 - \frac{9}{4}y \end{cases} \textbf{(*)} \Rightarrow 100 - \frac{3}{2}y = 136 - \frac{9}{4}y \Rightarrow -\frac{3}{2}y + \frac{9}{4}y = 136 - 100$$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}y = 36 \quad \Rightarrow \quad y = 36 : \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad y = 48$

Sustituyendo en **(*)** nos queda: $x = 100 - \frac{3}{2}.48 \quad \Rightarrow \quad x = 28$

Pero $z = \frac{1}{2}y \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2}.48 \quad \Rightarrow \quad z = 24$

Es decir, la compañía tiene 28 empleados que ganan \$ 4 la hora, 48 empleados que ganan \$ 5 la hora y 24 empleados que ganan \$ 8 la hora.

En este capítulo estudiaremos cómo resolver problemas de este tipo, es decir, aquellos donde aparecen muchas ecuaciones con muchas incógnitas pero todas éstas con exponente uno. También nos ocuparemos de los diferentes métodos para encontrar soluciones comunes y mostraremos la importancia de aquellos que usan matrices para encontrar la solución a problemas que involucran sistemas de ecuaciones.

A continuación presentamos algunas definiciones que resultarán muy útiles para el desarrollo de este tema y saber qué tipos de problemas nos permitirá resolver.

Ecuación lineal o de primer grado: es aquella donde cada incógnita aparece elevada a exponente uno. Es una expresión de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j = h \quad \text{o bien} \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = h$$

a_j, $j = 1, \ldots, n$: coeficientes de las incógnitas
h: término independiente
Los coeficientes a_j, $j = 1, .., n$ y el término h son números reales o complejos conocidos.
x_j, $j = 1, \ldots, n$: variables de la ecuación o incógnitas

Notación: $E(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ecuación de primer grado con n incógnitas

Solución de una ecuación: es la n-upla real o compleja que satisface la ecuación. Sustituyendo en la ecuación $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ por $(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$ el primer miembro se hace igual al segundo.
Decimos que $(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$ es la solución de la ecuación.

Ecuaciones equivalentes: dos ecuaciones se llaman *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

Propiedad: Si se multiplican ambos miembros de una ecuación lineal con n incógnitas por un número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Ejemplo: las ecuaciones $3x_1 - 5x_2 = -4$ y $6x_1 - 10x_2 = -8$ son equivalentes dado que la segunda ecuación se obtuvo multiplicando la primera por 2.

Ejemplo: las ecuaciones $8x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 4$ y $-4x_1 - 6x_2 + \frac{3}{2}x_3 = -2$ son equivalentes dado que la segunda ecuación se obtuvo multiplicando la primera por $-\frac{1}{2}$.

Sistema de ecuaciones lineales: es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales.Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es:

$$\begin{cases} E_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = h_1 \\ E_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E_m(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = h_m \end{cases} \quad \text{ó bien}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = h_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}$$

Solución de un sistema: es la n-upla $(t_1, t_2, t_3, ..., t_n)$ que satisface simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Es un conjunto de valores que es solución de todas las ecuaciones del sistema.

Clasificación de los sistemas

a) De acuerdo al tipo de ecuaciones

- Un sistema de ecuaciones se llama *homogéneo* si todas las ecuaciones de ese sistema tienen término independiente nulo.

$$\begin{cases} E_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ E_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E_m(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad h_i = 0 \ \forall i,\ i = 1, \dots\dots, m$$

- Un sistema de ecuaciones se llama *no homogéneo* si no todas las ecuaciones tienen término independiente nulo ($\exists i / h_i \neq 0$).

b) De acuerdo a la relación entre el número de ecuaciones y el número de incógnitas:

Sea m: número de ecuaciones y n: número de incógnitas

- Cuando el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas $(m = n)$ el sistema se llama *normal*.
- Cuando el número de ecuaciones no es igual al número de incógnitas $(m \neq n \;\; m > n$ ó $m < n)$ el sistema se llama *no normal*.

c) De acuerdo a las soluciones:

- Si el sistema tiene solución se dice que el sistema es *compatible.*
  - Si tiene una única solución es *compatible determinado*.
  - Si tiene infinitas soluciones es *compatible indeterminado.*
- Si el sistema no tiene solución se dice que es *incompatible*.

Esta clasificación, según las soluciones, se resume en el siguiente cuadro:

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	**COMPATIBLE** (admite solución)	**DETERMINADO** (solución única) **INDETERMINADO** (infinitas soluciones)
	INCOMPATIBLE	No tiene solución

EJERCICIOS

1) Clasifique los siguientes sistemas de acuerdo al número de ecuaciones y de incógnitas y a los términos independientes.

a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 4y = -1 \\ -\dfrac{1}{2}x + y = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

2) Dado el sistema $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3y + z = 4 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$ verifique que la solución es (1, 1, 1). Clasifíquelo de acuerdo al número de ecuaciones y de incógnitas y a los términos independientes.

RESPUESTAS

1)a) No normal, homogéneo; **b)** Normal, no homogéneo; **c)** Normal, homogéneo
2) Normal, no homogéneo.

Matrices asociadas a un sistema

Una de las aplicaciones de las matrices es expresar de una manera sencilla y cómoda los sistemas de ecuaciones. La expresión matricial de un sistema permite la resolución en forma rápida.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{ij}x_j + \ldots\ldots + a_{in}x_n = h_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}$$

definimos dos matrices asociadas al mismo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix}$$

donde A es matriz de los coeficientes de las incógnitas y A* la matriz ampliada con los términos independientes.

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse utilizando el producto de matrices.

Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ la matriz de orden mxn formada por los coeficientes del sistema que recibe el nombre de *matriz de los coeficientes*.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ el vector o matriz columna que contiene a las n incógnitas,

y $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \ldots \\ h_m \end{bmatrix}$ vector o matriz columna formado por los términos independientes del sistema.

Dado que las matrices A y X son conformes para el producto podemos comprobar que el sistema de ecuaciones se puede escribir como: $A.X = H$.

En símbolos: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{bmatrix}$. Teniendo en cuenta el esquema utilizado para el producto entre matrices se observa la igualdad establecida entre las matrices.

$$\begin{array}{c|c} A_{mxn} \cdot X_{nx1} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{bmatrix} \end{array}$$

Resolviendo el producto e igualando cada elemento a los correspondientes en el vector columna de los términos independientes obtenemos el sistema original.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{ij}x_j + \dots\dots + a_{in}x_n = h_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}.$$

Ejemplo: Verifique que el sistema $\begin{cases} -2x + 6y = -4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ puede representarse mediante el siguiente producto entre matrices $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Resolvemos la ecuación matricial para comprobar que representa el sistema de ecuaciones original. Efectuando el producto del primer miembro de la ecuación obtenemos:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2x + 6y \\ x - 2y \end{bmatrix} \end{array}$$

Sabemos que debe ser $\begin{bmatrix} -2x + 6y \\ x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Por igualdad de dos matrices se debe verificar $-2x + 6y = -4$ y $x - 2y = 3$, ecuaciones que coinciden con los del sistema planteado.

Sistemas equivalentes: dos sistemas son equivalentes si ambos tienen las mismas soluciones.

Operaciones elementales: son aquellas que aplicadas a un sistema de ecuaciones lineales permiten obtener otro sistema equivalente al dado.
Ellas son:
a) Intercambiar entre sí dos ecuaciones.
b) Multiplicar (dividir) una ecuación por un número real distinto de cero.
c) Sustituir una ecuación por otra que sea igual a la dada más otra ecuación del sistema previamente multiplicada (dividida) por un número real no nulo.

Ejemplo. Los siguientes sistemas de ecuaciones son equivalentes:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$

Tomando como base el sistema **(a)** podemos decir que:

- el **(b)** se obtuvo intercambiando la ecuación 1 (E_1) con la ecuación 3 (E_3).
- el **(c)** se obtuvo multiplicando la ecuación 2 (E_2) por 2.
- el **(d)** se obtuvo sustituyendo E_3 por $E_3 - 2E_1$.

Ejemplo. Determine por qué los sistemas de ecuaciones $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ y $\begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ -6x + 3y = -18 \end{cases}$ son equivalentes.

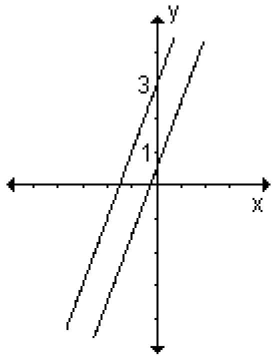
Los sistemas son equivalentes pues si a la primera ecuación del primer sistema la multiplico por dos obtengo la primera ecuación del otro sistema y si a la segunda ecuación del primer sistema la multiplico por (–3) obtengo la segunda ecuación del otro sistema.

Ejemplo. Encuentre, sin resolverlos, la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

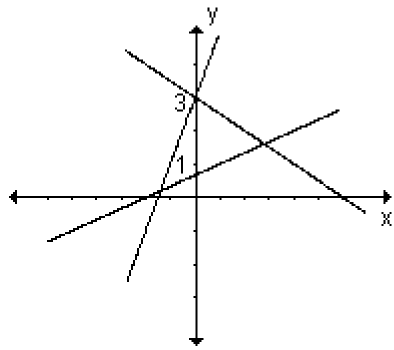
a) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + 2y = 6 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$

Si graficamos las rectas correspondientes a cada una de las ecuaciones de los sistemas dados observamos que ambos son incompatibles:

a)



b)



En **a)** las rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común.
Las dos ecuaciones son contradictorias y, por lo tanto, incompatibles. Los coeficientes del primer miembro de la segunda ecuación están multiplicados por 2 mientras que el término independiente está multiplicado por $\frac{1}{3}$.

En **b)** las tres rectas no se cortan en un mismo punto. El sistema resulta incompatible. Los coeficientes de x e y de la tercera ecuación resultan de la suma de los coeficientes respectivos de las dos primeras. No ocurre lo mismo con el término independiente.

Ejemplo: Compruebe que el sistema $\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$ tiene como solución el conjunto $S = \{(1, 2, -1)\}$.

Reemplazando en el sistema podemos verificar que $S = \{(1, 2, -1)\}$ es solución del sistema.

$1 - 2 + 3.(-1) = -4 \quad \Rightarrow \quad -4 = -4$

$1 + 2 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2$

$1 + 2.2 - (-1) = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = 6$

Ejemplo: En **a)** y **b)** se ha agregado una nueva ecuación al sistema del ejemplo anterior. Determine si la solución sigue siendo la misma.

a) $\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \\ 3x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

Procediendo de la misma forma que en el ejemplo anterior podemos comprobar que S es solución del sistema planteado en **a)** pero no del **b)**.
Esto lo podemos determinar sin necesidad de verificar la solución ni tampoco de resolver los sistemas.

En **a)** la cuarta ecuación se ha obtenido a partir de las otras tres, sumándolas. Por lo tanto el sistema es equivalente al original y tiene el mismo conjunto solución.
En **b)** la cuarta ecuación es contradictoria con las otras tres, pues de las tres primeras se obtiene, como hemos visto en **a)**, que $3x + 2y + 3z = 4$. Por lo tanto, el sistema es incompatible.

Ejemplo: El sistema $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + \frac{1}{3}y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ es compatible indeterminado.

a) ¿Cómo puede justificarlo sin resolver?
b) Agregue una tercera ecuación al sistema dado para que siga siendo compatible indeterminado.
c) Agregue una tercera ecuación al sistema dado para que resulte incompatible.
d) Agregue una tercera ecuación al sistema dado para que sea compatible determinado.

a) Las dos ecuaciones son equivalentes ya que la segunda se obtiene multiplicando la primera por $\frac{1}{3}$. Por lo tanto la segunda ecuación no nos dice nada nuevo con respecto a la primera. Tenemos una sola ecuación y dos incógnitas. El sistema es compatible indeterminado.

b) Para que siga siendo compatible indeterminado la tercera ecuación se puede obtener realizando alguna de las operaciones elementales. Por ejemplo, sumando las dos ecuaciones o bien multiplicando alguna de ellas por un número real distinto de cero. Si la tercera ecuación es la suma de las dos ecuaciones dadas, el sistema resulta: $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + \frac{1}{3}y = -\frac{2}{3} \\ 4x + \frac{4}{3}y = -\frac{8}{3} \end{cases}$. O bien, si la tercera ecuación resulta de multiplicar a la segunda ecuación por 6 el sistema es: $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + \frac{1}{3}y = -\frac{2}{3} \\ 6x + 2y = -4 \end{cases}$.

c) Una tercera ecuación para que resulte incompatible podría ser contradecir una de las ecuaciones, por ejemplo, $3x + y = 0$. No existen pares ordenados (x, y) para los cuales se verifica simultáneamente que $3x + y = -2$ y $3x + y = 0$.

El sistema resulta $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + \frac{1}{3}y = -\frac{2}{3} \\ 3x + y = 0 \end{cases}$.

O bien multiplicar por una constante no nula el primer miembro de una ecuación y no el segundo, por ejemplo 6x + 2y = –2. El sistema es $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + \frac{1}{3}y = -\frac{2}{3} \\ 6x + 2y = -2 \end{cases}$.

d) Una tercera ecuación para que resulte compatible determinado puede ser cualquiera no contemplada en los dos ítems anteriores, por ejemplo, $x - 2y = 4$.

El sistema sería: $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + \frac{1}{3}y = -\frac{2}{3} \\ x - 2y = 4 \end{cases}$.

Ejemplo: Analice, sin resolverlos, la compatibilidad o incompatibilidad de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 8 \\ x + 2y = -3 \\ 2x - 6y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 6y = 13 \\ x - 3y = 6 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$

a) Es compatible determinado pues $E_3 \to E_1 - E_2$

b) Incompatible pues $2E_2 \neq E_1$. Al multiplicar por dos la segunda ecuación el primer miembro coincide con el de la primera ecuación pero los términos independientes asumen valores diferentes.

EJERCICIOS

1) Explique por qué los sistemas de ecuaciones dados en cada ítem son equivalentes.

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} -2x + y = -3 \\ 5y = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + y = 4 \\ y - z = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y - z = 5 \\ y - z = 1 \end{cases}$

2) Cada uno de los siguientes sistemas es compatible indeterminado, justifique sin resolver los sistemas.

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + 4z = 1 \end{cases}$

RESPUESTAS

1)a) La primera ecuación se multiplicó por $\frac{1}{2}$ y la segunda por 2 (se aplicó la operación elemental b).

b) Se sustituyó la segunda ecuación por la misma sumada con la ecuación 1 (se aplicó la operación elemental c).
c) Se sustituyó la segunda ecuación por la misma multiplicada por 2 y sumada a la ecuación 1 (se aplicó la operación elemental c).
d) Se intercambiaron las ecuaciones 1 y 2 (se aplicó la operación elemental a).
2)a) Las dos ecuaciones son equivalentes (la ecuación 2 es igual a la ecuación 1 multiplicada por $\frac{1}{2}$). Por lo tanto, queda una sola ecuación representativa y dos incógnitas.
b) La ecuación 3 es la suma de las ecuaciones 1 y 2, por lo tanto tenemos sólo dos ecuaciones (cuyos coeficientes no son todos nulos) y tres incógnitas.

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.1 CONCEPTOS BÁSICOS

1) Escriba un sistema equivalente a cada uno de los dados a continuación. Justifique.

a) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y + z = -4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 3y = 9 \\ 2y + z = -5 \\ x + y - 2z = -5 \end{cases}$

2) Resuelva el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$

a) Agregue una tercera ecuación de modo que el sistema siga siendo compatible.
b) Agregue una tercera ecuación al sistema dado de modo que sea incompatible.
Interprete geométricamente cada caso.
3) El siguiente sistema es compatible indeterminado

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -x + \frac{3}{2}y = -3 \end{cases}$$

a) ¿Cómo puede justificarlo sin necesidad de resolverlo?
b) Agregue una tercera ecuación al sistema dado para que sea compatible determinado.
c) Agregue una tercera ecuación al sistema dado de modo que el sistema resulte incompatible.

3.2 Estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Al estudiar los sistemas lineales muchas veces resulta conveniente saber de antemano si el sistema admite o no solución y, en caso de tener solución, si ésta es única o no.
Por eso es importante que lo analicemos y en caso de tener solución, resolverlo.

Se presentan entonces dos problemas: *análisis del sistema* y *resolución del sistema*, si es posible.

Para realizar el análisis del sistema tendremos en cuenta el siguiente teorema:

Teorema de Rouché-Frobenious

a) La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes.
b) En un sistema compatible, si el rango es igual al número de incógnitas, el sistema es determinado (única solución). Si el rango es menor que el número de incógnitas es indeterminado (infinitas soluciones) y la diferencia entre rango y número de incógnitas nos da el número de incógnitas auxiliares.

Resumiendo:
Sea r el rango de la matriz A y r* el rango de la matriz A*.

$$\text{Si } r = r^* \Rightarrow \text{sistema compatible } \begin{cases} \text{si } r = r^* = n \Rightarrow \text{determinado} \\ \text{si } r = r^* < n \Rightarrow \text{indeterminado} \end{cases}.$$

$$\text{Si } r \neq r^* \Rightarrow \text{sistema incompatible.}$$

Si comparamos las operaciones elementales que definimos para obtener sistemas equivalentes vemos que coinciden con las que definimos para obtener matrices escalonadas y el rango de una matriz.

Podemos entonces, con el objetivo de aplicar el teorema de Rouché-Frobenius, calcular simultáneamente el rango de la matriz A y el de la matriz ampliada A* y obtener sistemas equivalentes hasta llegar a uno fácil de resolver.

Ejemplo: Clasifique y resuelva el sistema definido por $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 11 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$.

Podemos decir que es un sistema normal (el número de incógnitas coincide con el número de ecuaciones) y no es homogéneo.

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada en forma simultánea. Para eso, en el esquema que planteamos a continuación separamos con una línea de puntos la matriz de los coeficientes de la columna de los términos independientes (h).

Escalonamos las matrices aplicando las operaciones elementales hasta formar matrices triangulares superiores para poder determinar así los rangos.

x	y	z	h	
2	–1	–1	2	intercambiamos F_1 y F_2
1	3	4	11	
3	1	–2	–1	
1	3	4	11	
2	–1	–1	2	$F_2 \to F_2 - 2F_1$
3	1	–2	–1	$F_3 \to F_3 - 3F_1$
1	3	4	11	
0	–7	–9	–20	$F_2 \to -\frac{1}{7} F_2$
0	–8	–14	–34	
1	3	4	11	
0	1	$\frac{9}{7}$	$\frac{20}{7}$	
0	–8	–14	–34	$F_3 \to F_3 + 8F_2$
1	3	4	11	
0	1	$\frac{9}{7}$	$\frac{20}{7}$	
0	0	$-\frac{26}{7}$	$-\frac{78}{7}$	

Aplicando el teorema de Rouché-Frobenious y dado que el rango de la matriz de los coeficientes (r), coincide con el rango de la matriz ampliada (r*) y con el número de incógnitas (n), es decir, $n = r = r^* = 3$, concluimos que el sistema es compatible determinado.

Armamos el sistema equivalente: $\begin{cases} x + 3y + 4z = 11 \\ \quad y + \frac{9}{7}z = \frac{20}{7} \\ \quad -\frac{26}{7}z = -\frac{78}{7} \end{cases}$ y calculamos, haciendo sustitución hacia atrás, los valores de x, y, z.

De la última ecuación despejamos z: $-\frac{26}{7}z = -\frac{78}{7} \Rightarrow \quad z = 3$

Reemplazamos el valor de z en la segunda ecuación y despejamos y:

$y + \frac{9}{7}.(+3) = \frac{20}{7} \quad \Rightarrow \quad y = -1$

Realizamos el mismo procedimiento en la primera ecuación y obtenemos $x = 2$.
La terna (2, –1, 3) es solución del sistema.

Ejemplo: Clasifique y resuelva el sistema definido por $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + 8z = 4 \\ -2x + 4y - 6z = -1 \\ 6x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$.

El sistema está formado por cuatro ecuaciones con tres incógnitas, por lo tanto es no normal. Dado que algunos términos independientes son distintos de cero, el sistema es no homogéneo.

x	y	z	h	
1	–2	3	0	
5	0	8	4	$F_2 \to F_2 - 5F_1$
–2	4	–6	–1	$F_3 \to F_3 + 2F_1$
6	–2	2	3	$F_4 \to F_4 - 6F_1$
1	–2	3	0	
0	10	–7	4	
0	0	0	–1	intercambiamos F_3 y F_4
0	10	–16	3	
1	–2	3	0	
0	10	–7	4	
0	10	–16	3	
0	0	0	–1	

Como $r = 3$ y $r^* = 4$, al ser los rangos diferentes el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

Ejemplo: Clasifique y resuelva el sistema definido por $\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ x - 2y + 3z + 2w = -4 \\ 2x - y - 2z - 2w = 0 \end{cases}$.

Este sistema es no normal y no homogéneo.

Como el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas no puede ser compatible determinado.

x	y	z	w	h	
1	1	1	1	3	
1	–2	3	2	–4	$F_2 \to F_2 - F_1$
2	–1	–2	–2	0	$F_3 \to F_3 - 2F_1$
1	1	1	1	3	
0	–3	2	1	–7	$F_2 \to -\frac{1}{3}F_2$
0	–3	–4	–4	–6	
1	1	1	1	3	
0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	
0	–3	–4	–4	–6	$F_3 \to F_3 + 3F_2$
1	1	1	1	3	
0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	
0	0	–6	–5	1	

Luego, como $r = 3$ y $r^* = 3$ el sistema es compatible.

Además dado que $r = r^* = 3 < 4 = n$ el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Para calcularlas elegimos $n - r = 4 - 3 = 1$ incógnita auxiliar. Eso significa asignarle a una de las incógnitas cualquier valor real. Por ejemplo $w = t$, $t \in R$. A partir de ahí reemplazamos y despejamos por sustitución hacia atrás como en el ejemplo 1.

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}w = \frac{7}{3} \\ -6z - 5w = 1 \end{cases}$$

En la tercera ecuación resulta $-6z - 5t = 1 \Rightarrow \quad z = \frac{-1-5t}{6}$

Reemplazando y despejando de la segunda ecuación :

$$y = \frac{2}{3}\left(\frac{-1-5t}{6}\right) + \frac{1}{3}t + \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{9} - \frac{5}{9}t + \frac{1}{3}t + \frac{7}{3} = \frac{20}{9} - \frac{2}{9}t = \frac{20-2t}{9}$$

De la primera ecuación:

$$x = 3 - t - \frac{-1-5t}{6} - \frac{20-2t}{9} = 3 - t + \frac{1}{6} + \frac{5}{6}t - \frac{20}{9} + \frac{2}{9}t = \frac{17+t}{18}$$

La solución del sistema es $S = \left\{ \left(\frac{17+t}{18}, \frac{20-2t}{9}, \frac{-1-5t}{6}, t \right) / t \in R \right\}$.

Asignándole cualquier valor real a t podemos obtener soluciones particulares. Por ejemplo, si elegimos $t = 1$, obtenemos la solución particular: (1, 2, –1, 1).

Ejemplo: Dado el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y - z = a \\ x - y + 3z = b \\ 3x + 7y - 5z = c \end{cases}$, encuentre las condiciones que deben cumplir a, b y c para que el sistema sea incompatible. Verifique con un ejemplo.

Un sistema de ecuaciones es incompatible si el rango de la matriz de los coeficientes es distinto al rango de la matriz ampliada. Calculemos dichos rangos:

x	y	z	h	
2	3	–1	a	Intercambiamos F_1 y F_2
1	–1	3	b	
3	7	–5	c	
1	–1	3	b	
2	3	–1	a	$F_2 \to F_2 - 2F_1$
3	7	–5	c	$F_3 \to F_3 - 3F_1$
1	–1	3	b	
0	5	–7	a–2b	$F_2 \to \frac{1}{5} F_2$
0	10	–14	c –3b	
1	–1	3	b	
0	1	$-\frac{7}{5}$	$\frac{a-2b}{5}$	
0	10	–14	c –3b	$F_3 \to F_3 - 10F_2$
1	–1	3	b	
0	1	$-\frac{7}{5}$	$\frac{a-2b}{5}$	
0	0	0	c + b – 2a	

Para que el sistema sea incompatible debe ser c + b – 2a $\neq$ 0, 2a $\neq$ c + b. Para cualquier valor a $\neq \frac{c+b}{2}$ el sistema es incompatible ya que el rango de la matriz de los coeficientes será dos y el rango de la matriz ampliada, tres.

Para verificar podemos pensar en tres números a, b y c que verifiquen la condición anterior, por ejemplo: a = 1, b = 3 y c = 1.

x	y	z	h	
2	3	–1	1	Intercambiamos F_1 y F_2
1	–1	3	3	
3	7	–5	1	
1	–1	3	3	
2	3	–1	1	$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$
3	7	–5	1	$F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1$
1	–1	3	3	
0	5	–7	–5	$F_2 \rightarrow \frac{1}{5} F_2$
0	10	–14	–8	
1	–1	3	3	
0	1	$-\frac{7}{5}$	–1	
0	10	–14	–8	$F_3 \rightarrow F_3 - 10F_2$
1	–1	3	3	
0	1	$-\frac{7}{5}$	–1	
0	0	0	2	

Vemos que r = 2 y r* = 3. Como los rangos son distintos el sistema es *incompatible*.

Al inicio de este capítulo planteamos el siguiente:

Problema

Una compañía que produce agroquímicos tiene 100 empleados. Algunos empleados ganan $ 4 por hora, otros $ 5 y el resto $ 8. El número de empleados que gana \$ 8 es la mitad del número de empleados que gana \$ 5. Si el total pagado en jornales por hora es \$ 544, encuentre el número de empleados que gana \$ 4, \$ 5 y \$ 8 respectivamente.

Generamos el sistema $\begin{cases} x+y+z=100 \\ z=\frac{1}{2}y \\ 4x+5y+8z=544 \end{cases}$ donde x es el número de empleados que gana \$ 4 la hora, y el número de empleados que gana \$ 5 la hora, mientras que z el número de empleados que gana \$ 8 la hora.

Lo resolvemos ahora empleando el teorema de Rouché-Frobenius, calculando los rangos de la matriz ampliada y de la matriz de los coeficientes.

Ordenando el sistema resulta: $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 0x-\frac{1}{2}y+z=0 \\ 4x+5y+8z=544 \end{cases}$

x	y	z	h	
1	1	1	100	
0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$F_2 \to -2F_2$
4	5	8	544	
1	1	1	100	
0	1	–2	0	
4	5	8	544	$F_3 \to F_3 - 4F_1$
1	1	1	100	
0	1	–2	0	
0	1	4	144	$F_3 \to F_3 - F_2$
1	1	1	100	
0	1	–2	0	
0	0	6	144	

Como el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada es 3 y, además, coinciden con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinando.

Armando nuevamente el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \quad y - 2z = 0 \\ \qquad 6z = 144 \end{cases}$

De la tercera ecuación obtenemos: $6z = 144 \Rightarrow z = 144 : 6 \Rightarrow z = 24$
Reemplazando en la segunda y tercera ecuación: $y - 2.24 = 0 \Rightarrow y = 48$
$x + 48 + 24 = 100 \Rightarrow x = 100 - 48 - 24 \Rightarrow x = 28$

Es decir, la compañía tiene 28 empleados que ganan $ 4 la hora, 48 empleados que ganan $ 5 la hora y 24 empleados que ganan $ 8 la hora.

Problema

> El dueño de un restaurante ordena reemplazar cuchillos, tenedores y cucharas. Una caja llega con 40 utensilios pesando 4239 gramos (excluido el peso de la caja). Un cuchillo, un tenedor y una cuchara pesan 117 gramos, 108 gramos y 90 gramos, respectivamente.
> **a)** ¿Cuántas soluciones hay para el número de cuchillos, tenedores y cucharas en la caja?
> **b)** ¿Qué solución tiene el menor número de cucharas?

- Comprender el problema.

Incógnitas: encontrar la cantidad de cuchillos, tenedores y cucharas existentes en la caja y cuál es la menor cantidad de cucharas posibles.
Llamamos con x a la cantidad de cuchillos, con y a la cantidad de tenedores y con z a la cantidad de cucharas.
Datos: el peso en gramos de cada utensilio y el peso total de los incluidos en la cajas

- Concebir y ejecutar un plan.

Podemos definir un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas y resolverlo aplicando Rouché–Frobenious

Considerando los datos e incógnitas resulta el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \\ 117x + 108y + 90z = 4239 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por $\frac{1}{9}$ resulta el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \\ 13x + 12y + 10z = 471 \end{cases}$$

Lo resolvemos aplicando el teorema de Rouché-Frobenious:

x	y	Z	h	
1	1	1	40	
13	12	10	471	$F_2 \to F_2 - 13\,F_1$
1	1	1	40	
0	–1	–3	–49	$F_2 \to -F_2$
1	1	1	40	
0	1	3	49	

Como los rangos de la matriz ampliada y de la matriz de los coeficientes son iguales a 2 el sistema es compatible y además como el número de incógnitas es 3, es indeterminado.

Resulta el sistema equivalente: $\begin{cases} x + y + z = 40 \\ \quad y + 3z = 49 \end{cases}$

Utilizando a $z = t$ como incógnita auxiliar resulta: $y = 49 - 3t$, $x = -9 + 2t$.

Entonces $S = \{(-9+2t,\ 49-3t,\ t) \ / \ t \in R\}$ es la solución para este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

- Examinar la solución y elaborar conclusiones

Como se trata de cantidades de cuchillos, tenedores y cucharas debe ser $x \in N_0$, $y \in N_0$, $z \in N_0$, y además:

$$\left.\begin{array}{r} 49 - 3t \geq 0 \ \Rightarrow\ t \leq \dfrac{49}{3} \ \Rightarrow\ t \leq 16 \\ \\ -9 + 2t \ \geq 0 \Rightarrow t \geq \dfrac{9}{2} \Rightarrow t \geq 5 \end{array}\right\} \quad 5 \leq t \leq 16,\ \ t \in N$$

Para cada uno de esos valores de t tendremos las soluciones del sistema:

- Si $t = 5$: $x = 1$, $y = 34$, $z = 5$
- Si $t = 6$: $x = 3$, $y = 31$, $z = 6$
- Si $t = 7$: $x = 5$, $y = 28$, $z = 7$
- Si $t = 8$: $x = 7$, $y = 25$, $z = 8$
- Si $t = 9$: $x = 9$, $y = 22$, $z = 9$
- Si $t = 10$: $x = 11$, $y = 19$, $z = 10$
- Si $t = 11$: $x = 13$, $y = 16$, $z = 11$
- Si $t = 12$: $x = 15$, $y = 13$, $z = 12$
- Si $t = 13$: $x = 17$, $y = 10$, $z = 13$
- Si $t = 14$: $x = 19$, $y = 7$, $z = 14$
- Si $t = 15$: $x = 21$, $y = 4$, $z = 15$
- Si $t = 16$: $x = 23$, $y = 1$, $z = 16$

a) Hay doce soluciones posibles que corresponden a cada una de las ternas citadas.

b) La solución que tendrá el menor número de cucharas es la que corresponde a la terna (1, 34, 5), es decir, cinco cucharas, treinta y cuatro tenedores y un cuchillo.

EJERCICIOS

1) Clasifique y resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=0 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x+2(y+z)=3 \\ x+2y=z+5 \\ 2(x-2y)+z=0 \end{cases}$

2) Determine para qué valores de t y u el sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=t \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+uz=-1 \end{cases}$$

a) tiene solución única,
b) no tiene solución,
c) tiene más de una solución.

RESPUESTAS

1) a) $S=\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$ **b)** $S=\{(2,\ \frac{1}{2},-2)\}$

2) a) $u\neq -3$ y $t\in R$ **b)** $u=-3$ y $t\neq \frac{1}{3}$ **c)** $u=-3$ y $t=\frac{1}{3}$

Teniendo en cuenta lo desarrollado sobre sistemas de ecuaciones y matrices, se pueden describir dos métodos o procedimientos para resolver sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.

Método de eliminación de Gauss-Jordan

En este método escribimos la matriz ampliada, es decir, la matriz formada por los coeficientes de las variables junto con los términos independientes. Luego se trata de reducir por renglones la matriz de los coeficientes a la *forma escalonada reducida por renglones*. A partir de esto, la solución es inmediata.

Ejemplo: Encuentre la solución del sistema normal no homogéneo definido por

$$\begin{cases} 2x+5y+8z=11 \\ x+4y+7z=10 \\ 3x+6y+12z=15 \end{cases}$$

x	y	z	h	
2	5	8	11	
1	4	7	10	intercambiamos F_1 y F_2
3	6	12	15	
1	4	7	10	
2	5	8	11	$F_2 \to F_2 - 2F_1$
3	6	12	15	$F_3 \to F_3 - 3F_1$
1	4	7	10	
0	–3	–6	–9	$F_2 \to -\frac{1}{3} F_2$
0	–6	–9	–15	
1	4	7	10	$F_1 \to F_1 - 4F_2$
0	1	2	3	
0	–6	–9	–15	$F_3 \to F_3 + 6F_2$
1	0	–1	–2	
0	1	2	3	
0	0	3	3	$F_3 \to \frac{1}{3} F_3$
1	0	–1	–2	$F_1 \to F_1 + F_3$
0	1	2	3	$F_2 \to F_2 - 2F_3$
0	0	1	1	
1	0	0	–1	
0	1	0	1	
0	0	1	1	

De aquí concluimos que la única solución es $x = -1$, $y = 1$, $z = 1$. Podemos decir que la solución es la terna (–1, 1, 1).

Ejemplo: Halle la solución del sistema normal no homogéneo definido por

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 2x + 7y + 12z = 30 \end{cases}.$$

Armamos la matriz ampliada o aumentada de los coeficientes con los términos independientes y obtenemos la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de los coeficientes.

x	Y	z	h	
1	2	3	9	
4	5	6	24	$F_2 \to F_2 - 4F_1$
2	7	12	30	$F_3 \to F_3 - 2F_1$
1	2	3	9	
0	–3	–6	–12	$F_2 \to -\frac{1}{3} F_2$
0	3	6	12	
1	2	3	9	$F_1 \to F_1 - 2F_2$
0	1	2	4	
0	3	6	12	$F_3 \to F_3 - 3F_2$
1	0	–1	1	
0	1	2	4	
0	0	0	0	

Aquí vemos que llegamos a su forma escalonada y que resulta el sistema equivalente $\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$

Como el sistema está formado por dos ecuaciones y tres incógnitas tiene infinitas soluciones. Cada una de ellas dependerá del valor que le demos a una de las variables. Para calcularlas le asignamos un valor real cualquiera a una de las incógnitas y a partir de ese valor despejamos las otras. Por ejemplo si $z = t$, $t \in R$ la solución está dada por la terna (1 + t, 4 – 2t, t).

Ejemplo: Calcule la solución del sistema normal no homogéneo definido por

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 6x - 4y + 2z = 3 \end{cases}.$$

x	y	z	h	
1	–1	–1	2	
3	–2	1	1	$F_2 \to F_2 - 3F_1$
6	–4	2	3	$F_3 \to F_3 - 6F_1$
1	–1	–1	2	$F_1 \to F_1 + F_2$
0	1	4	–5	
0	2	8	–9	$F_3 \to F_3 - 2F_2$
1	0	3	–3	
0	1	4	–5	
0	0	0	1	

Llegamos a la forma escalonada reducida de la matriz de los coeficientes. Si armamos el sistema equivalente resulta: $\begin{cases} x + 3z = -3 \\ y + 4z = -5 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases}$

La tercera ecuación de este sistema corresponde a una ecuación errónea lo que significa que el sistema no tiene solución, es decir, no existen valores de x, y, z que verifiquen todas las ecuaciones al mismo tiempo.

Ejemplo: Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5x - y = z + 6 \\ x - z = 2y \end{cases}$:

a) Resuélvalo.

b) Agregue una cuarta ecuación al sistema dado de modo que siga siendo compatible.

c) Agregue una cuarta ecuación al sistema dado de modo que sea incompatible.

a) Lo resolvemos, por ejemplo, aplicando el método de Gauss-Jordan y resulta

x	y	z	h	
1	1	1	0	
5	–1	–1	6	$F_2 \to F_2 - 5F_1$
1	–2	–1	0	$F_3 \to F_3 - F_1$

1	1	1	0	
0	–6	–6	6	$F_2 \to -\frac{1}{6} F_2$
0	–3	–2	0	
1	1	1	0	$F_1 \to F_1 - F_2$
0	1	1	–1	
0	–3	–2	0	$F_3 \to F_3 + 3F_2$
1	0	0	1	
0	1	1	–1	$F_2 \to F_2 - F_3$
0	0	1	–3	
1	0	0	1	
0	1	0	2	
0	0	1	–3	

En consecuencia $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$. El conjunto solución es $S = \{(1, 2, -3)\}$.

b) Para que el sistema siga siendo compatible determinado la cuarta ecuación puede ser cualquier combinación lineal de las ecuaciones dadas o bien proporcional a alguna de ellas ($k.E_i$). Por ejemplo puede ser: $4x - 2y - 2z = 6$, que es la diferencia entre la segunda y la primera ecuación.

c) Para que el sistema sea incompatible la cuarta ecuación debe ser contradictoria con las otras tres Puede ser, por ejemplo, $15x - 3y - 3z = 6$, que surge de multiplicar en la segunda ecuación a todos los coeficientes de las variables por tres pero no al término independiente.
O bien, $x + y + z = 5$ que es contradictoria con la primera ecuación, que surge de sumar 5 al segundo miembro pero no al primer miembro.

Ejemplo: Dado el sistema $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 3x - y = k \end{cases}$. ¿Para qué valores de k la solución pertenece al segundo cuadrante? Ejemplifique.

Resolviendo el sistema por el método de Gauss–Jordan resulta:

x	y	h	
1	2	4	
3	–1	k	$F_2 \to F_2 - 3F_1$
1	2	4	
0	–7	k–12	$F_2 \to -\frac{1}{7} F_2$

$$\begin{array}{cc|c|l} 1 & 2 & 4 & F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ 0 & 1 & \dfrac{k-12}{-7} & \\ \hline 1 & 0 & \dfrac{4+2k}{7} & \\ 0 & 1 & \dfrac{12-k}{7} & \end{array}$$

De aquí resulta $x = \dfrac{4+2k}{7}$, $y = \dfrac{12-k}{7}$.

Para que la solución pertenezca al segundo cuadrante debe ser x < 0 e y > 0, por eso planteamos el sistema: $\begin{cases} \dfrac{4+2k}{7} < 0 \\ \dfrac{12-k}{7} > 0 \end{cases}$. Lo resolvemos teniendo en cuenta cada inecuación.

- $\dfrac{4+2k}{7} < 0 \Rightarrow 4 + 2k < 0 \Rightarrow 2k < -4 \Rightarrow k < -2$
- $\dfrac{12-k}{7} > 0 \Rightarrow 12 - k > 0 \Rightarrow 12 > k \Rightarrow k < 12$

Ambas inecuaciones se verifican para k $\in$ (–∞, –2). Para valores de k en el intervalo (–∞, –2) la solución pertenece al segundo cuadrante.

Por ejemplo, sea $k = -\dfrac{11}{2}$. Reemplazando surge:

$$x = \frac{4+2\left(-\frac{11}{2}\right)}{7} = \frac{-7}{7} \Rightarrow x = -1.$$

$$y = \frac{12-\left(-\frac{11}{2}\right)}{7} = \frac{\frac{35}{2}}{7} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

La solución $\left(-1, \dfrac{5}{2}\right)$ pertenece al segundo cuadrante.

EJERCICIO

Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan, clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones y, de ser compatibles, resuélvalos.

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - 3z = -6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ 6x - 4y + 4z = 30 \end{cases}$

RESPUESTA

a) Compatible determinado S = {(1, –2, 3)}

b) Compatible indeterminado, $S = \left\{\left(11 - \frac{4}{5}t;\ 9 - \frac{1}{5}t, t\right) / t \in R\right\}$

Método de eliminación gaussiana

En este método se siguen los siguientes pasos:

a) se escribe la matriz ampliada o aumentada formada por la matriz de los coeficientes de las variables junto con los términos independientes,
b) se reduce por renglón la matriz a la forma escalonada,
c) se escribe el sistema equivalente que resulta,
d) se despeja el valor de la última incógnita y luego se usa la sustitución hacia atrás para obtener las demás incógnitas.

Ejemplo: Encuentre la solución del sistema normal no homogéneo definido por

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -2 \\ -4x + 10y + 2z = -2 \\ 3x + y + 10z = 7 \end{cases}.$$

x	y	z	h	
1	–2	3	–2	
–4	10	2	–2	$F_2 \to F_2 + 4F_1$
3	1	10	7	$F_3 \to F_3 - 3F_1$
1	–2	3	–2	
0	2	14	–10	$F_2 \to \frac{1}{2}F_2$
0	7	1	13	
1	–2	3	–2	
0	1	7	–5	
0	7	1	13	$F_3 \to F_3 - 7F_2$
1	–2	3	–2	
0	1	7	–5	
0	0	–48	48	$F_3 \to -\frac{1}{48}F_3$

1	–2	3	–2	
0	1	7	–5	
0	0	1	–1	

Armamos el sistema equivalente: $\begin{cases} x - 2y + 3z = -2 \\ \quad y + 7z = -5 \\ \qquad z = -1 \end{cases}$

Realizando la sustitución hacia atrás calculamos los valores de x e y:

$y + 7.(-1) = -5 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$x - 2.2 + 3.(-1) = -2 \Rightarrow x = 5$

Luego, la terna (5, 2, –1) es la solución.

Ejemplo: Halle la solución del sistema normal homogéneo definido por $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

x_1	x_2	x_3	h	
1	1	–1	0	
4	–1	5	0	$F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1$
6	1	3	0	$F_3 \rightarrow F_3 - 6F_1$
1	1	–1	0	
0	–5	9	0	$F_2 \rightarrow \frac{8}{5} F_2$
0	–5	9	0	
1	1	–1	0	
0	1	$-\frac{9}{5}$	0	
0	–5	9	0	$F_3 \rightarrow F_3 + 5F_2$
1	1	–1	0	
0	1	$-\frac{9}{5}$	0	
0	0	0	0	

Armamos el sistema y como nos queda con una ecuación menos resulta que será compatible indeterminado: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad x_2 - \frac{9}{5}x_3 = 0 \end{cases}$

Si $x_3 = t \;\; \Rightarrow \;\; x_2 = \frac{9}{5}t$

$x_1 = x_3 - x_2 = t - \frac{9}{5}t = -\frac{4}{5}t$

Luego $S = \left\{ \left(-\frac{4}{5}t,\ \frac{9}{5}t,\ t \right) / \ t \in R \right\}$ es la solución del sistema planteado.

Ejemplo: Determine la solución del sistema normal no homogéneo definido por

$$\begin{cases} x - 2z = 5 \\ 3y + 4z = -2 \\ -2x + 3y + 8z = 4 \end{cases}.$$

x	y	z	h	
1	0	–2	5	
0	3	4	–2	
–2	3	8	4	$F_3 \to F_3 + 2F_1$
1	0	–2	5	
0	3	4	–2	$F_2 \to \frac{1}{3}F_2$
0	3	4	14	
1	0	–2	5	
0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
0	3	4	14	$F_3 \to F_3 - 3F_2$
1	0	–2	5	
0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
0	0	0	16	

Construimos el nuevo sistema: $\begin{cases} x - 2z = 5 \\ y + \frac{4}{3}z = -\frac{2}{3} \\ 0x + 0y + 0z = 16 \end{cases}$

La tercera ecuación es errónea, por lo tanto el sistema no tiene solución, es incompatible.

Podemos resumir las distintas conclusiones que se obtuvieron en estos ejemplos.

Cuando se utiliza el método de eliminación gaussiana,

- si se llega a un sistema lineal en forma triangular (como en el ejemplo 1), el sistema tiene solución única que se determina por sustitución hacia atrás. *Sistema compatible determinado.*
- si se llega a un sistema lineal con una forma triangular incompleta y no hay ecuaciones falsas (ejemplo 2), el sistema tiene infinitas soluciones que se obtienen también por sustitución hacia atrás. *Sistema compatible indeterminado.*
- si se llega a un sistema con una ecuación falsa, el sistema no tiene solución. *Sistema incompatible.*

Podemos retomar el problema del agricultor que resolvimos utilizando operaciones entre matrices:

<u>Problema</u>

> Un agricultor mendocino prepara la tierra para sembrar repollo y ajo. Para cada parcela destinada a repollo emplea 60 kilogramos de superfosfato triple y 150 kilogramos de urea. Para una parcela destinada a ajo emplea 100 kilogramos de superfosfato triple y 180 kilogramos de urea. Este agricultor dispone de 1000 kilogramos de superfosfato triple y 2220 kilogramos de urea. ¿Cuántas parcelas de cada plantación puede preparar para emplear todo el superfosfato triple y la urea?

Tenemos en cuenta los pasos a seguir para resolver un problema:

- Comprender el problema.

Incógnitas: encontrar el número de parcelas de cada plantación que se pueden preparar con el superfosfato triple y la urea disponible.

x: número de parcelas de repollo

y: número de parcelas de ajo

Datos: la cantidad de superfosfato triple y urea disponibles y las cantidades que se destinan en cada parcela para sembrar ajo y repollo.
Estos datos quedan reflejados en la siguiente tabla:

	Superfosfato triple	Urea
Repollo	60 kg.	150 kg.
Ajo	100 kg.	180 kg.
Total disponible	1000 kg.	2220 kg.

- Concebir y ejecutar un plan.

Podemos generar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y resolverlo según el método de Gauss $\begin{cases} 60x + 100y = 1000 \\ 150x + 180y = 2220 \end{cases}$

x	y	t	
60	100	1000	$F_1 \to \frac{1}{60} F_1$
150	180	2220	
1	$\frac{5}{3}$	$\frac{50}{3}$	
150	180	2220	$F_2 \to F_2 - 150F_1$
1	$\frac{5}{3}$	$\frac{50}{3}$	
0	–70	–280	$F_2 \to -\frac{1}{70} F_1$
1	$\frac{5}{3}$	$\frac{50}{3}$	
0	1	4	

Escribimos el sistema equivalente $\begin{cases} x + \frac{5}{3}y = \frac{50}{3} \\ \quad\quad y = 4 \end{cases}$

Realizando la sustitución hacia atrás: $x + \frac{5}{3}.4 = \frac{50}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 10$ es la solución:

$x = 10$ donde x representa el número de parcelas de repollo.
$y = 4$ donde y es el número de parcelas de ajo.

Esta solución coincide con la que obtuvimos en el capítulo 1 cuando estudiamos las matrices y las operaciones que se pueden realizar entre ellas.

- Examinar la solución y elaborar conclusiones.

La cantidad de parcelas que se pueden preparar para sembrar repollo es 10 mientras que las de ajo resultan 4.
Estos resultados son razonables dado que:
Urea:
N° de parcelas repollo x Kg. destinados + N° de parcelas ajo x Kg. destinados = total disponible

$10 \;.\; 150 \;+\; 4 \;.\; 180 \;=\; 2220$

Superfosfato triple:
N° de parcelas repollo x Kg destinados + N° de parcelas ajo x Kg. destinados = total disponible

$10 \;.\; 60 \;+\; 4 \;.\; 100 \;=\; 1000$

Problema

Tres especies de bacterias se alimentan con tres productos diferentes, I, II y III. Una bacteria de la primera especie consume una unidad del producto I, una unidad del producto II y dos unidades del producto III diariamente. Una bacteria de la segunda especie consume una unidad del producto I, cuatro unidades del producto III y dos unidades del producto II cada día. Una bacteria de la tercera especie consume tres unidades del producto II, ocho unidades del I y cinco unidades del III cada día. Si se suministran cada día 14 260 unidades del producto I, 23 268 unidades del II y 46 312 unidades del III, ¿cuántas bacterias de cada especie pueden mantenerse en este ambiente?

- Comprender el problema.

Datos: Organizando los datos en un cuadro resulta:

	Producto I	Producto II	Producto III
Especie 1	1	1	2
Especie 2	1	2	4
Especie 3	8	3	5
Total	14 260	23 268	46 312

Incógnitas: llamamos x a la cantidad de bacterias de la especie 1, con y a la cantidad de bacterias de la especie 2 y con z a la cantidad de bacterias de la especie 3.

- Concebir y ejecutar un plan.

Podemos plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+8z=14260 \\ x+2y+3z=23268 \\ 2x+4y+5z=46312 \end{cases}$$

y resolverlo aplicando el método de eliminación gaussiana.

Reducimos por renglones la matriz a la forma escalonada.

x	y	z	h	
1	1	8	14260	
1	2	3	23268	$F_2 \to F_2 - F_1$
2	4	5	46312	$F_3 \to F_3 - 2F_1$
1	1	8	14260	
0	1	–5	9008	
0	2	–11	17792	$F_3 \to F_3 - 2F_2$
1	1	8	14260	
0	1	–5	9008	
0	0	–1	–224	

El sistema equivalente que obtenemos se puede escribir:

$$\begin{cases} x+y+8z=14260 \\ \quad y-5z=9008 \\ \qquad -z=-224 \end{cases}$$

De la tercera ecuación surge $z = 224$, sustituyendo en la segunda ecuación:

$y - 5 \,.\, 224 = 9008 \quad \Rightarrow \quad y = 10128.$

Reemplazando en la primera ecuación:

$x + 10128 + 8 \,.\, 224 = 14260 \quad \Rightarrow x = 2340$

- Examinar la solución y elaborar conclusiones

En el ambiente generado con lo diferentes productos pueden mantenerse 2340 bacterias de la primera especie, 10 128 bacterias de la segunda especie y 224 bacterias de la tercera especie.

Problema

Las tiendas "Los Pitucos" planean contratar tres compañías de relaciones públicas para encuestar 500 clientes por teléfono, 750 por correo y 250 personalmente. La compañía "M y M" tiene personal para hacer 10 encuestas por teléfono, 30 por correo y 5 encuestas personales por hora. La compañía "Digital" puede efectuar 20 encuestas por teléfono, 10 por correo y 10 personales por hora. La compañía "Melcher" puede efectuar 10 encuestas por teléfono, 20 por correo y 15 encuestas personales por hora. ¿Por cuántas horas debe contratarse cada compañía para obtener el número exacto de encuestas requeridas?

- Comprender el problema.

Armando un cuadro con los datos obtenemos:

	Teléfono	Correo	Encuestas
"M y M"	10	30	5
"Digital"	20	10	10
"Melcher"	10	20	15
Total	500	750	250

Llamamos con x a la cantidad de horas de contratación de la compañía "M y M", con y a la cantidad de horas de contratación de la compañía "Digital" y con z a la cantidad de horas de contratación de la compañía "Melcher".

- Concebir y ejecutar un plan.

Definimos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 10x+20y+10z=500 \\ 30x+10y+20z=750 \\ 5x+10y+15z=250 \end{cases}$.

Multiplicando a la primera y a la segunda ecuación por $\frac{1}{10}$ y a la tercera ecuación por $\frac{1}{5}$ obtenemos el sistema equivalente: $\begin{cases} x+2y+z=50 \\ 3x+y+2z=75 \\ x+2y+3z=50 \end{cases}$ que lo resolvemos aplicando el método de eliminación Gaussiana:

x	y	z	h	
1	2	1	50	
3	1	2	75	$F_2 \to F_2 - 3F_1$
1	2	3	50	$F_3 \to F_3 - F_1$

1	2	1	50	
0	–5	–1	–75	$F_2 \to -\frac{1}{5}F_2$
0	0	2	0	$F_3 \to \frac{1}{2}F_3$
1	2	1	50	
0	1	$\frac{1}{5}$	15	
0	0	1	0	

De donde resulta: $\begin{cases} x + 2y + z = 50 \\ \quad y + \frac{1}{5}z = 15 \\ \qquad z = 0 \end{cases}$

De la tercera ecuación resulta $z = 0$, sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene $y = 15$. Trabajando con la primera obtenemos $x = 20$.

- Examinar la solución y elaborar conclusiones

Debe contratar 20 horas a la compañía “M y M”, 15 horas a la compañía “Digital” y ninguna hora a la compañía “Melcher”.

Problema

Migración de la población. A raíz de diversas causas, las poblaciones de personas, animales salvajes, etc. pueden desplazarse de un lugar a otro. Los patrones o modelos migratorios pueden representarse con una *matriz de transición*.

Si además contamos con un *vector de población* que describa los totales de la población de cada región, es posible hacer una proyección de la dinámica de los cambios demográficos con el tiempo. Si los patrones migratorios son estables con el transcurso del tiempo (no cambia la matriz de transición), podrá ocurrir la condición de equilibrio cuando se estabilice la población de cada región. En el equilibrio los incrementos demográficos en cada región se compensan con las disminuciones durante cada período.

Un grupo de científicos estudia los hábitos migratorios de una especie de animales salvajes. Se ha observado, a través de censos anuales realizados en tres regiones habitadas por las especies, un patrón estable de cambios en sus movimientos.

El patrón que establece el traslado de una región a otra se muestra en la matriz T.

$$\begin{array}{rl} & \text{A la región} \quad 1 \qquad 2 \qquad 3 \\ \text{De la región} \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{bmatrix} = T \end{array}$$

El valor $t_{11} = 0{,}85$ indica que el 85 % de la población que viven en la región 1 durante un año seguirán viviendo allí el año siguiente. El valor $t_{12} = 0{,}05$ indica que el 5% que vive en la región 1 se desplazará a la región 2 y el valor $t_{13} = 0{,}10$ indica que el restante 10% se desplazará a la región 3. De la misma manera podríamos analizar los restantes elementos.

Para simplificar el análisis se supone que los parámetros 0,85; 0,90 y 0,80 reflejan los efectos netos que explican los nacimientos, muertes, inmigración y emigración durante el año.

Si P_1 representa la población de la región 1, P_2 la población de la región 2 y P_3 la de la región 3 en un año cualquiera, la población proyectada de cada región en el año siguiente se calcula con la multiplicación de matrices $P.T = P'$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_1 & P'_2 & P'_3 \end{bmatrix}$$

El equilibrio ocurre cuando $P_1 = P'_1$, $P_2 = P'_2$ y $P_3 = P'_3$.

La población total de las tres regiones durante el último censo fue de 18800.

a) Escriba un sistema de ecuaciones donde se considere la población total del último censo y se refleje que se alcanza el equilibrio.

b) Resuelva el sistema planteado.

c) Verifique que existe el equilibrio en esos valores, haciendo una proyección de la población para el próximo año por medio de la ecuación $P.T = P'$

a) Teniendo en cuenta todo lo planteado en el enunciado podemos escribir el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 0{,}85.P_1 + 0{,}05.P_2 + 0{,}10.P_3 = P'_1 \\ 0{,}05.P_1 + 0{,}90.P_2 + 0{,}10.P_3 = P'_2 \\ 0{,}10.P_1 + 0{,}05.P_2 + 0{,}80.P_3 = P'_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 18\,800 \end{cases} .$$

Como el equilibrio ocurre cuando $P_1 = P'_1$, $P_2 = P'_2$ y $P_3 = P'_3$ el sistema que refleja que se alcanza el equilibrio es:

$$\begin{cases} -0{,}15.P_1 + 0{,}05.P_2 + 0{,}10.P_3 = 0 \\ 0{,}05.P_1 - 0{,}10.P_2 + 0{,}10.P_3 = 0 \\ 0{,}10.P_1 + 0{,}05.P_2 - 0{,}20.P_3 = 0 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 18\,800 \end{cases}$$

b) Resolveremos el sistema teniendo por el método de eliminación gaussiana:

P_1	P_2	P_3	h	
–0,15	0,05	0,10	0	
0,05	–0,10	0,10	0	
0,10	0,05	–0,20	0	
1	1	1	18 800	
1	1	1	18 800	
–0,15	0,05	0,10	0	$F_2 \to F_2 + 0{,}15.F_1$
0,05	–0,10	0,10	0	$F_3 \to F_3 - 0{,}05.F_1$
0,10	0,05	–0,20	0	$F_4 \to F_4 - 0{,}10.F_1$
1	1	1	18 800	
0	0,20	0,25	2820	$F_2 \to 5.F_2$
0	–0,15	0,05	–940	
0	–0,05	–0,30	–1880	
1	1	1	18 800	
0	1	1,25	14 100	
0	–0,15	0,05	–940	$F_3 \to F_3 + 0{,}15.F_2$
0	–0,05	–0,30	–1880	$F_4 \to F_4 + 0{,}05.F_2$
1	1	1	18 800	
0	1	1,25	14 100	
0	0	0,2375	1175	$F_3 \to \dfrac{1}{0{,}2375} F_3$
0	0	0,2375	1175	
1	1	1	18 800	
0	1	1,25	14 100	
0	0	1	4947,36	
0	0	0,2375	1175	$F_4 \to F_4 - 0{,}2375.F_2$

1	1	1	18 800
0	1	1,25	14 100
0	0	1	4947,36
0	0	0	0

Podemos definir el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 = 18\,800 \\ P_2 + 1{,}25.P_3 = 14\,100 \\ P_3 = 4947{,}36 \end{cases}$$

. Como obtuvimos un sistema lineal en forma triangular el tiene solución única que se determina por sustitución hacia atrás.

El sistema es compatible determinado. Resulta $P_1 = 5936{,}84$; $P_2 = 7915{,}79$ y $P_3 = 4947{,}37$. Debemos considerar números enteros dado que se trata de personas.

Ocurre el equilibrio cuando en la región 1 la población es de 5937 personas, en la región 2 es de 7916 personas y en la región 3, de 4947 personas.

También se hubiese podido resolver el sistema equivalente:

$$\begin{cases} -3.P_1 + P_2 + 2P_3 = 0 \\ P_1 - 2.P_2 + 2P_3 = 0 \\ 2P_1 + P_2 - 4P_3 = 0 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 18\,800 \end{cases}$$

que resulta de multiplicar a cada una de las tres primeras ecuaciones por 20.

En el sistema planteado

$$\begin{cases} -0{,}15.P_1 + 0{,}05.P_2 + 0{,}10.P_3 = 0 \\ 0{,}05.P_1 - 0{,}10.P_2 + 0{,}10.P_3 = 0 \\ 0{,}10.P_1 + 0{,}05.P_2 - 0{,}20.P_3 = 0 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 18\,800 \end{cases}$$

una de las tres primeras ecuaciones es combinación lineal de las otras dos: $F_3 = -F_1 - F_2$. Eliminando una de ellas podemos entonces trabajar con un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, por ejemplo:

$$\begin{cases} 0{,}05.P_1 - 0{,}10.P_2 + 0{,}10.P_3 = 0 \\ 0{,}10.P_1 + 0{,}05.P_2 - 0{,}20.P_3 = 0 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 18800 \end{cases}$$

, si se excluye a la primera ecuación.

También se podría haber resuelto el sistema equivalente:

$$\begin{cases} P_1 - 2.P_2 + 2.P_3 = 0 \\ 2P_1 + P_2 - 4P_3 = 0 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 18800 \end{cases}$$

, que resulta de multiplicar cada una de las dos primeras ecuaciones por 20.

c) Verificamos que existe el equilibrio en esos valores resolviendo $P.T = P'$:

P . T	$\begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 5937 & 7916 & 4947 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5937 & 7916 & 4947 \end{bmatrix}$

EJERCICIO

Clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones y, de ser compatibles, resuélvalos aplicando el método de eliminación gaussiana.

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$

RESPUESTA

a) Incompatible **b)** $S = \{(1, 2, 3)\}$

Sistemas normales de Cramer

Son aquellos sistemas donde el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas (normal) y donde el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es distinto de cero ($|A| \neq 0$).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{ij}x_j + \dots\dots + a_{in}x_n = h_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases}$$

Este sistema también puede escribirse A.X = H donde A es una matriz cuadrada de orden n, X y H son vectores columna con n elementos.

Sean $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ h_n \end{bmatrix}$

$|A|$ se llama determinante principal de Cramer y debe ser $|A| \neq 0$

Estos sistemas se resuelven mediante la regla de Cramer que enunciamos y demostramos a continuación.

Regla de Cramer

En todo sistema normal de Cramer cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la incógnita (que es el que resulta de sustituir en el principal de Cramer la columna de los coeficientes de la incógnita por los términos independientes) por el determinante principal de Cramer (que es el formado por los coeficientes de las incógnitas y que debe ser no nulo). Sea $|A_i|$ el determinante de la incógnita x_i que resulta de sustituir en el principal de Cramer la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita x_i por la correspondiente a los términos independientes. Cada x_i se calcula resolviendo el cociente entre los dos determinantes.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \; ; \; \forall i \, , \, i = 1, 2, 3, \ldots\ldots.., n$$

Demostración: La solución del sistema A.X = H, (dado que $|A| \neq 0$ y por lo tanto la matriz A admite inversa) es $X = A^{-1}.H$. Teniendo en cuenta la definición de inversa podemos escribir $X = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}.H$. Reemplazando, teniendo en cuenta la definición de adjunta de una matriz, resulta

$$X = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ . & . & \ldots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ h_n \end{bmatrix}$$

M = Adj(A).H es una matriz columna de n elementos y cada elemento toma la forma $m_i = A_{1i}h_1 + A_{2i}h_2 + \ldots + A_{ni}h_n$

Llamemos A_i a la matriz en la que la columna i se reemplaza por los términos independientes. Así:

$$A_1 = \begin{bmatrix} h_1 & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_n & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & h_1 & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & h_n & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & h_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & h_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & h_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & h_n \end{bmatrix}$$

Si desarrollamos, por ejemplo, el determinante de la matriz A_i por los elementos de la columna i resulta:

$$D_i = |A_i| = (-1)^{1+i}h_1M_{1i} + (-1)^{2+i}h_2M_{2i} + \ldots + (-1)^{n+i}h_nM_{ni}$$

Como en todas las matrices A_i las columnas i están ocupadas por los términos independientes, calcular los menores adjuntos de los elementos de esa columna en esas matrices es lo mismo que hallar los menores adjuntos de cada columna en la matriz A. Por lo tanto:

$D_i = |A_i| = h_1A_{1i} + h_2A_{2i} + ... + h_nA_{ni}$ que coincide con la expresión que obtuvimos para m_i, $\forall i = 1,...,n$

Quiere decir que $D_i = m_i$, $\forall i$, es decir: $M = \text{Adj}(A).H = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ ... \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ ... \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ ... \\ |A_n| \end{bmatrix}$ y

como $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}.\text{Adj}(A).H = \frac{1}{|A|}.M = \frac{1}{|A|}.\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ ... \\ ... \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ ... \\ ... \\ \frac{|A_n|}{|A|} \end{bmatrix}$ queda demostrada la regla de Cramer que habíamos enunciado.

Conclusión: "En todo sistema normal de Cramer cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la incógnita (que es el que resulta de sustituir en el principal de Cramer, la columna de los coeficientes de la incógnita por los términos independientes) por el determinante principal de Cramer (que es el formado por los coeficientes de las incógnitas y que debe ser no nulo)".

Ejemplo: Resuelva el sistema $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 11 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$ aplicando la regla de Cramer.

Hallamos $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-12 - 1 - 12) - (-9 + 8 + 2) = -25 - 1 = -26.$

Como $|A| \neq 0$ podemos aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 11 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{(-12-11+4)-(3+8+22)}{-26} = \frac{-52}{-26} = 2 \Rightarrow \quad x = 2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 11 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{(-44+1+24)-(-33-8-4)}{-26} = \frac{26}{-26} = -1 \Rightarrow \quad y = -1$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{(-6+2-33)-(18+22+1)}{-26} = \frac{-78}{-26} = 3 \Rightarrow \; z = 3$$

Luego, la terna (2, –1, 3) es solución del sistema planteado.

Ejemplo: Encuentre, si existe, la solución del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=1 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$**,** analizamos la solución según Rouché-Frobenious.

x	y	z	h	
1	1	1	1	
2	2	2	1	$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$
3	3	3	3	$F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1$
1	1	1	1	
0	0	0	–1	
0	0	0	0	

El rango de la matriz de los coeficientes es distinto que el rango de la matriz ampliada, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Ejemplo: Resuelva el sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+2y-z=2 \end{cases}$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ analizamos la solución aplicando Rouché Frobenius.

x	y	z	h	
1	1	1	1	
2	2	2	2	$F_2 \to F_2 - 2F_1$
3	2	–1	2	$F_3 \to F_3 - 3F_1$
1	1	1	1	
0	0	0	0	
0	–1	–4	–1	$F_3 \to -1F_3$ e intercambiamos con F_2
1	1	1	1	
0	1	4	1	
0	0	0	0	

Como el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada coinciden el sistema es compatible, pero como es menor que el número de incógnitas, es indeterminado.

De estos ejemplos se puede observar que si $|A| \neq 0$ entonces el sistema es compatible determinado (ejemplo 1). Si $|A| = 0$ no podemos asegurar si es compatible indeterminado o incompatible (ejemplos 2 y 3).

Discusión de los sistemas normales

a) Si $|A| \neq 0 \Rightarrow x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

Si $|A| \neq 0$ los sistemas son siempre *compatibles* y *determinados*.

b) Si $|A| = 0$ y $|A_i| \neq 0 \Rightarrow |A| x_i = |A_i|$ y $0.x_i \neq 0$ esto es imposible pues no existe valor de x que satisfaga la ecuación. Luego, es *incompatible.*

c) Si $|A| = 0 \wedge |A_i| = 0 \Rightarrow |A| x_i = |A_i| \wedge 0.x_i = 0$ se satisface $\forall x_i$ y por lo tanto es *indeterminado* aunque también puede ser *incompatible.*

Resumen: Si $|A| \neq 0$ sistema compatible determinado

$$\text{Si } |A| = 0 \begin{cases} |A_i| \neq 0 & \text{sistema incompatible} \\ |A_i| = 0 & \text{indeterminado o incompatible} \end{cases}$$

Analicemos otros ejemplos a fin de corroborar las conclusiones obtenidas.

Ejemplo: Discuta la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3y + z = 5 \\ 2x + y - 2z = -2 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}.$$

Dado que es un sistema normal hallamos el determinante de la matriz de los coeficientes $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + 18 - 4) - (3 + 4 + 6) = 0.$

Calculamos los determinantes de cada una de las incógnitas:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-5 + 0 - 4) - (0 + 20 - 6) = -9 - 14 = -23 \neq 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2 - 30 + 0) - (-6 + 0 - 10) = -28 + 16 = -12 \neq 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 18 - 20) - (15 + 4 + 0) = -2 - 19 = -21 \neq 0$$

Como el determinante principal es cero y los determinantes de las incógnitas son distintos de cero el sistema es incompatible. Lo podemos comprobar analizando el sistema por el teorema de Rouché–Frobenious :

x	y	z	h	
1	–3	1	5	
2	1	–2	–2	$F_2 \to F_2 - 2F_1$
3	–2	–1	0	$F_3 \to F_3 - 3F_1$
1	–3	1	5	
0	7	–4	–12	
0	7	–4	–15	$F_3 \to F_3 - F_2$
1	–3	1	5	
0	7	–4	–12	
0	0	0	–3	

Como el rango de la matriz de los coeficientes es distinto al rango de la matriz ampliada el sistema es incompatible.

Ejemplo: Analice la solución del sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ 5x - 5y + 5z = 10 \end{cases}$.

El determinante principal resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{vmatrix} = (-10 - 10 - 10) - (-10 - 10 - 10) = -30 + 30 = 0.$$

Hallamos los determinantes de las incógnitas:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & -5 & 5 \end{vmatrix} = (-20 - 20 -10) -(-20 -20 - 10) = -50 + 50 = 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix} = (10 + 20 + 20) - (10 + 20 + 20) = 50 - 50 = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 5 & -5 & 10 \end{vmatrix} = (-20 - 10 - 20) - (-20 -10 - 20) = -50 + 50 = 0$$

Como el determinante principal y los determinantes de las incógnitas son todos nulos no podemos anticipar si el sistema es incompatible o indeterminado. Lo analizamos aplicando el teorema de Rouché–Frobenious:

x	y	z	h	
1	–1	1	2	
2	–2	2	2	$F_2 \to F_2 - 2F_1$
5	–5	5	10	$F_3 \to F_3 - 5F_1$
1	–1	1	2	
0	0	0	–2	
0	0	0	0	

El rango de la matriz ampliada es dos y el de la matriz de los coeficientes es uno. Como son distintos, el sistema es incompatible.

Ejemplo: Discuta la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 3y + 3z = 6 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

Como en los ejemplos anteriores, hallamos el determinantes principal y el determinante de cada una de las incógnitas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 3 - 6) - (3 - 3 - 6) = -6 + 6 = 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (6 - 6 - 12) - (6 - 6 - 12) = -12 + 12 = 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (12 + 6 + 12) - (12 + 6 + 12) = 30 - 30 = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (6 - 12 - 12) - (6 - 12 - 12) = -18 + 18 = 0$$

Como el determinante principal y el determinante de las incógnitas son todos nulos, no podemos anticipar si el sistema es incompatible o indeterminado. Lo analizamos aplicando el teorema de Rouché–Frobenious:

x	y	z	h	
3	–3	3	6	$F_1 \to \frac{1}{3} F_1$
2	1	1	4	
1	–1	1	2	
1	–1	1	2	
2	1	1	4	$F_2 \to F_2 - 2F_1$
1	–1	1	2	$F_3 \to F_3 - F_1$
1	–1	1	2	
0	3	–1	0	
0	0	0	0	

El rango de la matriz de los coeficientes es dos e igual al rango de la matriz ampliada, por lo tanto el sistema es compatible. Como los rangos son menores al número de incógnitas, que es tres, el sistema es indeterminado.

Problema

La siguiente tabla muestra la cantidad de artículos de distinto tipo comprados por diferentes clientes de una tienda y el total abonado por cada uno de ellos. Determine el precio de un artículo de cada tipo.

	Artículo I	Artículo II	Artículo III	Total ($)
Cliente A	2	3	5	27
Cliente B	2	3	4	25
Cliente C	4	2	1	20

- Comprender el problema.

Incógnitas: encontrar el precio de cada artículo

x: precio del artículo I; y: precio del artículo II; z: precio del artículo III

Datos: lo gastado por cada cliente al comprar los tres tipos de artículos.

- Concebir y ejecutar un plan.

El cliente A compró:
2 artículos del tipo I, por lo cual gastó: 2x
3 artículos del tipo II: 3y
5 artículos del tipo III: 5z
Su gasto total es 2x + 3y + 5z. En consecuencia, la igualdad que debe verificarse para el cliente A es 2x + 3y + 5z = 27
De manera similar, para el cliente B la igualdad es 2x + 3y + 4z = 25, mientras que para el cliente C es 4x + 2y + z = 20

Planteamos el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 27 \\ 2x + 3y + 4z = 25 \\ 4x + 2y + z = 20 \end{cases}$

Para resolverlo por el método de Cramer debemos comprobar que el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2.3.1 + 2.2.5 + 4.3.4) - (5.3.4 + 4.2.2 + 1.3.2) = 74 - 82 =$$

$|A| = -8 \neq 0$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 27 & 3 & 5 \\ 25 & 3 & 4 \\ 20 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (27.3.1 + 25.2.5 + 20.3.4) - (5.3.20 + 4.2.27 + 1.3.25)$$

$|A_x| = 571 - 591 = -20$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 27 & 5 \\ 2 & 25 & 4 \\ 4 & 20 & 1 \end{vmatrix} = (2.25.1 + 2.20.5 + 4.27.4) - (5.25.4 + 4.20.2 + 1.27.2)$$

$|A_y| = 682 - 714 = -32$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 27 \\ 2 & 3 & 25 \\ 4 & 2 & 20 \end{vmatrix} = (2.3.20 + 2.2.27 + 4.3.25) - (27.3.4 + 25.2.2 + 20.3.2)$$

$|A_z| = 528 - 544 = -16$. El valor de las incógnitas resulta:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-20}{-8} = 2{,}5 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-32}{-8} = 4 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-16}{-8} = 2$$

Podemos concluir que el artículo I vale \$ 2,5 por unidad, el artículo II \$ 4 por unidad y el artículo III, \$ 2 por unidad.

- Examinar la solución y elaborar conclusiones

Comprobemos los soluciones obtenidas:
Cliente A:
N° de Art. IxPrecio + N° de Art. IIxPrecio+N° de Art. IIIxPrecio = Total gastado
2 . 2,5 + 3 . 4 + 5 . 2 = \$ 27

Cliente B:

N° de Art. IxPrecio + N° de Art. IIxPrecio + N° de Art. IIIxPrecio = Total gastado

2 . 2,5 + 3 . 4 + 4 . 2 = \$ 25

Cliente C:

N° de Art. IxPrecio + N° de Art. IIxPrecio + N° de Art. IIIxPrecio = Total gastado

4 . 2,5 + 2 . 4 + 1 . 2 = \$ 20

Problema

Un criador de animales puede comprar tres tipos de alimento para tigres. Cada caja de la marca A contiene 25 unidades de fibra, 30 unidades de proteína y 30 unidades de grasa. Cada caja de la marca B contiene 50 unidades de fibra, 30 unidades de proteína y 20 unidades de grasa. Cada caja de la marca C contiene 75 unidades de fibra, 30 unidades de proteína y 20 unidades de grasa. ¿Cuántas cajas de cada marca deben mezclarse para obtener un alimento que proporcione 1000 unidades de fibra, 480 unidades de proteína y 340 unidades de grasa?

- Comprender el problema.

Incógnitas: encontrar la cantidad de cajas de cada marca que deben mezclarse para obtener el alimento adecuado.

Llamamos con x a la cantidad de cajas del alimento A, con y a la cantidad de cajas del alimento B y con z a la cantidad de cajas del alimento C.

Datos: la cantidad de unidades de fibra, de proteína y de grasa que proporciona cada caja de cada tipo de alimento.

- Concebir y ejecutar un plan.

Podemos definir un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y verificar si es un sistema de Cramer para resolverlo aplicando la regla. El sistema resulta:

$$\begin{cases} 25x+50y+75z=1000 \\ 30x+30y+30z=480 \\ 30x+20y+20z=340 \end{cases}$$

Si dividimos a la primera ecuación por 25, a la segunda por 30 y a la tercera por 10, obtenemos el sistema equivalente: $\begin{cases} x+2y+3z=40 \\ x+y+z=16 \\ 3x+2y+2z=34 \end{cases}$

Como el sistema es normal, es decir, el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, veamos si podemos aplicar la regla de Cramer calculando el determinante de la matriz de los coeficientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y por lo tanto podemos aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 1 \\ 34 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40 & 3 \\ 1 & 16 & 1 \\ 3 & 34 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 40 \\ 1 & 1 & 16 \\ 3 & 2 & 34 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-10}{-1} = 10$$. La solución es la terna (2, 4, 10).

- Examinar la solución y elaborar conclusiones

El criador de animales debe comprar 2 cajas del alimento de la marca A, 4 cajas de la marca B y 10 cajas de la marca C para satisfacer los requerimientos de fibra, proteína y grasa.

EJERCICIO

Resuelva los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + y + z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - 3z = 15 \\ \frac{3}{2}x + \frac{4}{5}y + 4z = 10 \end{cases}$

RESPUESTA

a) $S = \{(1, 0, -2)\}$ **b)** $S = \{(20, 25, -10)\}$

Sistemas homogéneos

Recordemos que los sistemas homogéneos son aquellos donde todos los términos independientes son nulos ($h_i = 0, \forall i$).

Veremos algunos teoremas referidos a sistemas homogéneos:

a) *Los sistemas homogéneos son siempre compatibles*.

Es evidente que al ser nulo el término independiente de cada ecuación, la n-upla (0,0,...,0) satisface cada una y todas las ecuaciones del sistema.

A esta solución, que siempre existe, se la llama solución trivial.

b) *Si el sistema homogéneo admite una solución no nula (no trivial) admite infinitas y, por lo tanto, será indeterminado*.

c) *Si el determinante de la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas de un sistema normal homogéneo es nulo entonces el sistema es indeterminado*.

Ejemplo. Resuelva el sistema homogéneo $\begin{cases} x + y = z \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x = y \end{cases}$ y verifique que se cumplen las propiedades enunciadas.

Resolvemos el sistema homogéneo aplicando el método de Gauss-Jordan. Ordenándolo y completándolo previamente resulta $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x - y + 0z = 0 \end{cases}$.

x	y	z	h	
1	1	–1	0	
2	–1	1	0	$F_2 \to F_2 - 2F_1$
4	–1	0	0	$F_3 \to F_3 - 4F_1$
1	1	–1	0	
0	–3	3	0	$F_2 \to -\frac{1}{3}F_2$
0	–5	4	0	
1	1	–1	0	
0	1	–1	0	
0	–5	4	0	$F_3 \to F_3 + 5F_2$
1	1	–1	0	$F_1 \to F_1 - F_2$
0	1	–1	0	
0	0	–1	0	$F_3 \to -1F_3$
1	0	0	0	
0	1	–1	0	$F_2 \to F_2 + F_3$
0	0	1	0	
1	0	0	0	
0	1	0	0	
0	0	1	0	

El sistema es compatible determinado. Por lo tanto la solución es $x = y = z = 0$, la solución trivial.
Para comprobar si se cumple la propiedad enunciada calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 4 + 2) - (4 - 1 + 0) = 6 - 3 = 3 \Rightarrow |A| = 3 \neq 0$$

Conclusión: se verifica que si el determinante de la matriz de coeficientes de un sistema normal homogéneo no es nulo, el sistema es *compatible determinado*.

Ejemplo: Resuelva el sistema homogéneo $\begin{cases} x+z=2y \\ z-3x=4y \\ 5x+z=0 \end{cases}$ y verifique que se cumplen las propiedades enunciadas.

Resolvemos el sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenious y obtenemos $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -3x-4y+z=0 \\ 5x+0y+z=0 \end{cases}$.

x	y	z	h	
1	–2	1	0	
–3	–4	1	0	$F_2 \to F_2 + 3F_1$
5	0	1	0	$F_3 \to F_3 - 5F_1$
1	–2	1	0	
0	–10	4	0	
0	10	–4	0	$F_3 \to F_3 + F_2$
1	–2	1	0	
0	–10	4	0	
0	0	0	0	

El rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada, pero es menor que el número de incógnitas n.

Observamos que $r = r^* = 2 < n = 3$. Dado que el rango es menor que el número de incógnitas podemos asegurar que el sistema es *compatible indeterminado*.

Reordenándolo resulta: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -10y+4z=0 \end{cases}$

Sea $z = t$, $t \in R$, la incógnita auxiliar. Entonces:

$$\begin{cases} x-2y+t=0 \\ -10y+4t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+t=0 \\ y=\dfrac{2}{5}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{5}t \\ y=\dfrac{2}{5}t \end{cases}$$

La solución será la terna $\left(-\frac{1}{5}t, \frac{2}{5}t, t\right)$ con $t \in R$.

Para verificar que se cumple la propiedad calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-4 -10 - 0) - (-20 + 0 + 6) = (-14) - (-14) = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

Conclusión: Si el determinante de la matriz de los coeficientes de un sistema normal homogéneo es nulo, el sistema es compatible indeterminado.

Ejemplo: ¿Para qué valores de k el sistema $\begin{cases} x + (k+1)y + z = 0 \\ x + y + (k+1)z = 0 \\ (k+1)x + y + z = 0 \end{cases}$ tiene soluciones no triviales?

El sistema tiene soluciones no triviales si el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo. Por eso planteamos $\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Resolvemos el determinante aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \\ k+1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \end{vmatrix} = [1 + 1 + (k + 1)^3] - [(k + 1) + (k + 1) + (k + 1)] =$$

$2 + (k + 1)^3 - 3k - 3 = k^3 + 3k^2 = k^2.(k + 3) = 0.$

Podemos concluir que $k = 0$ o bien $k = -3$.

Ejemplo: Determine él o los valores de α de modo que el sistema $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ (\alpha - 1)y + 7z = 0 \\ (\alpha + 2)z = 0 \end{cases}$ tenga solución no trivial.

Podemos resolverlo, por ejemplo de dos maneras distintas.

Forma 1: Para que el sistema homogéneo tenga solución no trivial el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser nulo, por ello planteamos: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \alpha - 1 & 7 \\ 0 & 0 & \alpha + 2 \end{vmatrix} = 0$

Resolvemos el determinante aplicando la regla de Sarrus. Obtenemos la ecuación de segundo grado $(\alpha - 1).(\alpha + 2) = 0$ cuyas raíces son 1 y –2.
Luego el sistema tiene solución no trivial cuando $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$.
Verifiquemos resolviendo el sistema para cada valor de α aplicando el método de Rouché-Frobenious.

Si reemplazamos α por 1 obtenemos el sistema $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 7z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$.

x	y	z	h	
1	3	–2	0	
0	0	7	0	
0	0	3	0	$F_3 \to F_3 - \frac{3}{7} F_2$
1	3	–2	0	
0	0	7	0	
0	0	0	0	

Observamos que r = r* = 2 < n = 3, entonces el sistema es *compatible indeterminado*.

Rearmando el sistema resulta $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 7z = 0 \end{cases}$, de donde $z = 0$. Llamando $y = t$, $t \in R$ y reemplazando en la primera ecuación se obtiene $x + 3t = 0$ y de aquí $x = -3t$. El sistema tiene infinitas soluciones dadas por $S = \{(-3t, t, 0)/\ t \in R\}$

Si $\alpha = -2$ resulta el sistema $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{cases}$.

x	y	z	h	
1	3	–2	0	
0	–3	7	0	$F_2 \to -\frac{1}{3} F_2$
1	3	–2	0	
0	1	$-\frac{7}{3}$	0	

Observamos que $r = r^* = 2 < n = 3$, entonces el sistema es *compatible indeterminado*. Llamando $z = t$, $t \in R$ y reemplazando en la segunda ecuación surge $y = \frac{7}{3}t$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $x = -5t$.

La solución del sistema es $S = \left\{ \left(-5t, \frac{7}{3}t, t \right) / \ t \in R \right\}$.

En consecuencia, para $\alpha = -2$ o $\alpha = 1$el sistema tiene soluciones no triviales.

Forma 2: Hallamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

x	y	z	h	
1	3	–2	0	
0	$\alpha-1$	7	0	$F_2 \to \frac{1}{\alpha-1} F_2$, si $\alpha-1 \neq 0$
0	0	$\alpha+2$	0	
1	3	–2	0	
0	1	$\frac{7}{\alpha-1}$	0	
0	0	$\alpha+2$	0	

Si $\alpha = -2$ el rango de la matriz ampliada y el de la matriz de los coeficientes es 2 y menor que el número de incógnitas que es tres: $r = r^* = 2 < n = 3$. El sistema es *compatible indeterminado* y tendrá soluciones distintas de la trivial.

Si $\alpha - 1 = 0$ obtenemos el sistema $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ \qquad\qquad 7z = 0 \\ \qquad\qquad 3z = 0 \end{cases}$. Este es el mismo sistema que quedó planteado en la página anterior y por lo tanto, al escalonar para obtener el rango se obtiene nuevamente la siguiente matriz ampliada.

x	y	z	h
1	3	–2	0
0	0	7	0
0	0	0	0

El rango de la matriz ampliada coincide con el rango de la matriz de los coeficientes, ambos son iguales a dos y menores que el número de incógnitas que es tres: $r = r^* = 2 < n = 3$. El sistema es *compatible indeterminado* y tendrá soluciones distintas de la trivial. Recordar que para calcular el rango no hubiese sido necesario generar unos en la diagonal principal.

EJERCICIOS

1) ¿Por qué podemos afirmar que los siguientes sistemas son compatibles? Sin resolverlos indique si son determinados o indeterminados. En el primer caso ¿Cuál es el conjunto solución?

a) $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + z + 3y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \\ -z + x - y = 0 \end{cases}$

2) Agregue una ecuación al siguiente sistema de forma tal que resulte homogéneo y compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

RESPUESTAS

1) Los tres sistemas son compatibles por ser homogéneos.

a) Determinado, $S = \{(0, 0)\}$ **b)** Indeterminado **c)** Determinado, $S = \{(0, 0, 0)\}$

2) La tercera ecuación debe ser equivalente a cualquiera de las ecuaciones del sistema o bien una combinación lineal de las dos.

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.2 ESTUDIO Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) Clasifique y resuelva los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ 6x + y = 2 + z \\ y + 2x = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 4x + 5y - 10z = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+1).(y+2) - x.(y+1) = z - 4 \\ \frac{x-1}{2} - \frac{y+1}{4} + \frac{z+1}{6} = -\frac{1}{4} \\ x - y = z.(z-1) - z^2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ x + 3y - z = 5 \\ 6x - 3y + 9z = 10 \end{cases}$

2) Dado el sistema $\begin{cases} 3x+3y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 3x+2y+\lambda z=0 \end{cases}$

a) Clasifíquelo teniendo en cuenta el número de incógnitas, el número de ecuaciones y los términos independientes.

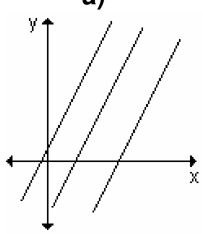
b) Halle el valor de λ para que el sistema sea compatible determinado.

3) Dado el sistema $\begin{cases} 2x-3y+5z=0 \\ -x+7y-z=0 \\ 4x-11y+kz=0 \end{cases}$, ¿qué valor de k hará que tenga soluciones no triviales?

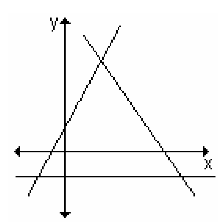
4) Calcule α, β y γ para que: $\alpha\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}6\\4\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$

5) Escriba un sistema de ecuaciones que se adapte a cada una de las siguientes situaciones definidas gráficamente. ¿Cómo serán sus soluciones? Justifique sin resolver los sistemas.

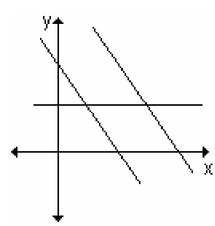
a)



b)



c)



PROBLEMAS DE APLICACIÓN DEL CAPÍTULO

1) Un veterinario desea controlar la dieta de un animal de manera tal que, mensualmente consuma 960 gramos de avena, 1200 gramos de maíz y 880 gramos de soja, además de heno, pastura y agua. Dispone de tres alimentos, cada uno con avena, maíz y soja. Cada porción de alimento proporciona las cantidades (en gramos) que se describen en la tabla.

	Avena	Maíz	Soja
Alimento A	6	5	5
Alimento B	6	6	4
Alimento C	4	7	5

¿Cuántas porciones de cada alimento debe usar para obtener la mezcla deseada?

2) Un médico ordena a un paciente tomar 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D, y 19 unidades de vitamina E, cada día. El paciente puede elegir entre tres marcas de pastillas de vitaminas. La marca X contiene 2 unidades de vitamina A, 3 unidades de D y 5 unidades de E; la marca Y tiene 1, 3 y 4 unidades, respectivamente; y la marca Z tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 de vitamina E.

a) Determine todas las combinaciones posibles de pastillas que proporcionarían exactamente las cantidades requeridas de vitaminas.

b) Si la marca X cuesta un centavo por pastilla, la marca Y, 6 centavos, y la Z, 3 centavos, ¿existen algunas de las combinaciones del ítem a) que cuesten exactamente 15 centavos diarios?

c) ¿Cuál de esas combinaciones es menos costosa?. ¿Y la más costosa?

3) Se desean comprar tres tipos de alimentos. El alimento **I** tiene una unidad de vitamina A, tres unidades de vitamina B y cuatro unidades de vitamina C. El alimento **II** tiene 2, 3 y 5 respectivamente. El alimento **III** tiene tres unidades de A, tres de la C y ninguna de la B. Una persona necesita 11 unidades de vitamina A, 20 de la C y 9 de la B. Calcule todas las cantidades posibles de los tres alimentos que proporcionan precisamente esa cantidad de vitaminas. (Considere sólo cantidad de alimentos en números enteros).

4) Un departamento de Caza y Pesca estatal suministra tres tipos de alimentos a un lago que mantiene 3 especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento **I**, 1 unidad del alimento **II** y 2 unidades del alimento **III**. Cada pez de la especie 2 consume 3 unidades del alimento **I**, 4 del alimento **II** y 5 del alimento **III**. Para un pez de la especie 3 el consumo semanal en promedio es de 2 unidades del alimento **I**, 1 unidad del alimento **II** y 5 unidades del alimento **III**. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento **I**, 20 000 unidades del alimento **II** y 55 000 unidades del alimento **III**. Suponiendo que todo el alimento es ingerido, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

5) La suma de tres números es 33. El número mayor es dos veces el número menor menos uno. Tres veces el número menor es igual a la suma de los otros dos números, menos uno. Determine los tres números.

6) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º y el mayor de ellos es igual a la suma de los otros dos. Determine el valor de cada ángulo si se sabe además que el doble del menor de ellos es 10º menor que el ángulo mayor.

7) Un nutricionista quiere combinar tres alimentos para que la mezcla resultante tenga 900 unidades de vitaminas, 750 unidades de minerales y 350 unidades de grasa. Las unidades de vitaminas, minerales y grasa que contiene cada gramo de los tres alimentos figuran en la siguiente tabla:

	Vitaminas	Minerales	Grasa
Alimento A	35	15	10
Alimento B	10	20	10
Alimento C	20	15	5

¿Cuántas unidades de cada alimento se deben consumir para obtener la mezcla necesaria?.

8) Una compañía fabrica tres productos, que deben procesarse en tres departamentos. La siguiente tabla sintetiza las horas requeridas por unidad de cada producto en los tres, lo mismo que las capacidades semanales de cada departamento. ¿Cuál combinación de los tres productos aprovecharían al máximo la disponibilidad horaria en los tres departamentos?

	Producto			
Departamento	A	B	C	Hs. disponibles a la semana
1	2	3,5	3	1200
2	3	2,5	2	1150
3	4	3	2	1400

9) Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, cuyas cantidades se muestran en la siguiente tabla:

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1	1	2
Mecedora	1	2	3
Sillón	1	4	5

La compañía dispone de 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio y desea agotarlas en la producción de fin de temporada. Para lograrlo, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

10) Un analista de costo determina que el costo de producción (en pesos) de x elementos está dado por $c(x) = ax^2 + bx + c$. Halle la función si el costo de producir 10 elementos es $ 250, el de 20 asciende a $ 890 y el de 30, $ 1930.

11) Un estudiante que acaba de regresar de un viaje de placer por Europa gastó $ 20 diarios en España, $ 20 diarios en Portugal y $ 30 diarios en Francia en concepto de hospedaje. En comida gastó, por día, $ 20 en Francia, lo mismo que en Portugal. Sin embargo en España gastó para comer $ 30 diarios. Sus gastos adicionales fueron $ 10 en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de $ 340 en hospedaje, $ 320 en comida y $ 140 en gastos adicionales durante su viaje.

Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país.

12) Una panadería vendió los siguientes productos durante los tres días previos a Navidad.

El primer día recaudó $ 62 y vendió 10 pan dulces, 5 budines y 3 tortas.

El segundo día vendió 50 pan dulces, 15 budines y 12 tortas y recaudó $ 248.

El tercer día contó $ 900 y comprobó que se vendieron 100, 50 y 100 unidades de pan dulces, budines y tortas respectivamente.

Indique cuál es el precio de venta de cada producto.

13) El precio de la entrada para una presentación de grupos musicales es de $ 1,50 para estudiantes y $ 2,25 para el público en general. Se vendieron 450 entradas y se recaudó $ 777,75. ¿Cuántas entradas de cada tipo se vendieron?

14) Un contratista dispone de 5000 horas de mano de obra para 3 proyectos. Los costos por hora de los tres son $ 8, $ 10 y $ 12 respectivamente, mientras que el costo total es de $ 53 000. Si el número de horas para el tercer proyecto es igual a la suma de la horas requeridas por los otros dos, calcule el número de horas que puede disponer en cada uno de los proyectos.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE DEL CAPÍTULO

1) Un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas se resuelve por el método de matrices equivalentes por renglones y se obtiene la matriz ampliada
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right]$. Por lo tanto el sistema dado es:

a) incompatible
b) compatible determinado
c) compatible indeterminado

2) Sea el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = 8 \end{cases}$. Gráficamente representa dos rectas:

a) coincidentes
b) paralelas
c) que se intersecan en un punto

3) Un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas se resuelve por el método de matrices equivalentes por renglones y se obtiene un sistema equivalente tal que la matriz ampliada es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$.

La solución del sistema dado es la terna:

a) (1, 2, –1) **b)** (1, –1, –2) **c)** (3, –4, 2) **d)** (–1, 1, –1)

4) Sea el sistema $\begin{cases} 3x - y = c_1 \\ 2y + 6x = c_2 \end{cases}$. Al resolverlo aplicando la regla de Cramer se obtiene:

a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & -1 \\ c_2 & 2 \end{vmatrix}}{20}$ **b)** $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & -1 \\ c_2 & 6 \end{vmatrix}}{20}$

c) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & -1 \\ c_2 & 2 \end{vmatrix}}{12}$ **d)** $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & -1 \\ c_2 & 2 \end{vmatrix}}{20}$

5) La solución del sistema $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ es:

a) (–3, 5) **b)** (2, –6) **c)** (3, –5) **d)** (–2, 6)

6) Sea A la matriz de coeficientes del sistema $\begin{cases} x - y - 3 + 4z = -3 \\ 2x - y = z \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$. Este sistema tiene infinitas soluciones si:

a) $|A| \neq 0$ **b)** $|A| = 0$ **c)** Ninguna de las anteriores

7) Un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas se resuelve por el método de eliminación gaussiana y se obtiene un sistema equivalente tal que la matriz ampliada es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$. La solución del sistema dado es la terna:

a) (1, 1, 1) **b)** (9, 4, 3) **c)** (–4, 2, 3) **d)** (4, –2, 3)

AUTOEVALUACIÓN Nº 5: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - 2z + 7 = 0 \\ 3y + z - w + 4 = 0 \\ 7x - z - w = 0 \end{cases}$,

a) Clasifíquelo de acuerdo al número de ecuaciones y de incógnitas y a los términos independientes.

b) Sean las cuaternas: (–1, 1, 3, 0) ; (1,–1 , 3 , 4) y (3 ,–2 , –4 , 4) ¿alguna de ellas es solución del sistema?

2) La matriz ampliada asociada a un sistema de ecuaciones es:

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 23 \\ 1 & 5 & 0 & 24 \end{bmatrix}$.

a) Escriba las ecuaciones del sistema.

b) Resuélvalo utilizando el teorema de Rouché-Frobenious y clasifíquelo de acuerdo al número de soluciones.

3) Resuelva aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan los sistemas dados. En cada caso clasifíquelos de acuerdo al número de soluciones.

a) $\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ y + x = 1 \\ x - 2y = 13 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ z = y + 3x \\ 2(2x - 1) + 3y = 2z \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y - 7 = z \\ 4(x - 1) + 5z - y = 0 \\ 2(3x - 10) + y + 3z = 0 \end{cases}$

4) Sea el sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ ay = x + b \end{cases}$. Estudie sus soluciones según los posibles valores de a y b. Interprete gráficamente las distintas posibilidades.

5) Sea el sistema $\begin{cases} x - 2z - 5 = 0 \\ 3y + 4z = -2 \\ 3y - 2x - k + 2 = -(k + 2)z \end{cases}$. Determine él o los valores de k para que el sistema sea incompatible.

6) Determine los valores de a, b y c de modo que:

$$\begin{bmatrix} a + b & 7 \\ 2 & b - c \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 4 \\ a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2c & -5 \end{bmatrix}$$

7) Clasifique el siguiente sistema $\begin{cases} x = my + 3z - 1 \\ y + 2x + z = 6 \\ x = 13 + 2z - 3y \end{cases}$ y encuentre él o los valores de m para que tenga solución única.

8) Resuelva aplicando la regla de Cramer, si es posible, los siguientes sistemas. En caso de no ser posible justifique su respuesta.

a) $\begin{cases} 4x - y + 5z = 4 \\ x + y = 7 + z \\ 5(x + 1) + 4z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 4z = 1 - 3y \\ 2(2x + y) = 2 + z \\ x + 2z = 1 - y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - y + z - 11 = 0 \\ z + x - 2y = 0 \end{cases}$

9) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - x + 2z = 0 \\ 4x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$.

a) Agregue una tercera ecuación de forma tal que resulte homogéneo y compatible determinado y resuélvalo.

b) Agregue una tercera ecuación de modo que resulte compatible indeterminado y resuélvalo.

10) Dado el sistema $\begin{cases} ax + (3 - 2a)y = 0 \\ x + ay = 0 \end{cases}$. Analice los valores de a para que sea:

a) compatible determinado.

b) compatible indeterminado. Ejemplifique gráficamente en cada caso.

11) Sea el sistema $\begin{cases} 2(x + ky) = 3z \\ kx + z = y \\ 5(2x - z) + 2y = 0 \end{cases}$.

a) Clasifíquelo teniendo en cuenta el número de incógnitas, el número de ecuaciones y los términos independientes.

b) Halle él o los valores de k para que el sistema sea compatible determinado.

12) Un hotel cinco estrellas ofrece habitaciones simples, dobles y triples a un costo por noche de \$ 56, \$ 104 y \$ 120, respectivamente. La recaudación diaria con todas las habitaciones ocupadas es de \$ 6200. Por un cambio en la gerencia, el hotel pasó a ofrecer las mismas comodidades a \$ 60, \$ 100 y \$ 130 respectivamente con lo que se obtiene una recaudación de \$ 6260 (con todas las habitaciones ocupadas).
¿Cuántas habitaciones de cada tipo tiene el hotel si en total hay 67 habitaciones?

13) La Cruz Roja Internacional está haciendo planes para transportar por avión alimentos, equipo médico y sangre a una ciudad que sufrió un devastador terremoto. En la tabla adjunta se incluyen el volumen y el peso por caja de cada suministro. Si el avión tiene una capacidad para transportar $4200\ m^3$ y 23250 kg., ¿cuántas cajas (o recipientes) de cada suministro se pueden enviar en el avión llenando su capacidad tanto de volumen como de peso?
Considere cantidades enteras de cajas o recipientes.

Suministro	Volumen (en m^3)	Peso (en kg.)
Alimentos	20 (por caja)	150 (por caja)
Equipo médico	30 (por caja)	100 (por caja)
Sangre	8 (por recipiente)	60 (por recipiente)

14) Una empresa electrónica produce transistores, resistores y chips de computadora. Cada transistor requiere 3 unidades de cobre, una unidad de zinc y 2 unidades de vidrio. Cada resistor requiere 3, 2 y 1 unidad, respectivamente, y cada chip requiere, respectivamente, 2, 1 y 2 unidades de cada material. ¿Cuántos productos de cada tipo pueden fabricarse con las siguientes cantidades de materiales?

a) 810 unidades de cobre, 410 unidades de zinc y 490 unidades de vidrio

b) 765 unidades de cobre, 385 unidades de zinc y 470 unidades de vidrio.

15) La determinación de la cantidad de dióxido de carbono en la atmósfera es importante porque se sabe que el dióxido de carbono es un gas de efecto invernadero. Las concentraciones han crecido siguiendo un comportamiento descripto por una función cuadrática. La tabla indica los registros de tres años.

Año	CO_2
1958	315
1973	325
1988	352

a) Si la relación entre la concentración C de dióxido de carbono y el año t se expresa $C = at^2 + bt + c$, donde $t = 0$ corresponde a 1958, utilice un sistema de ecuaciones lineales para determinar las constantes a, b y c.

b) Prediga el año en que la cantidad de dióxido de carbono será el doble que el nivel de 1958.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Responda:

a) ¿Qué significa que dos rectas se intersequen en un punto?

b) ¿Cuál es la interpretación gráfica de cada una de las ecuaciones de un sistema en dos variables?

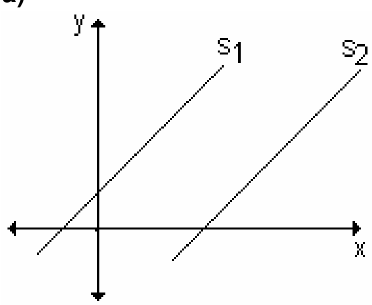
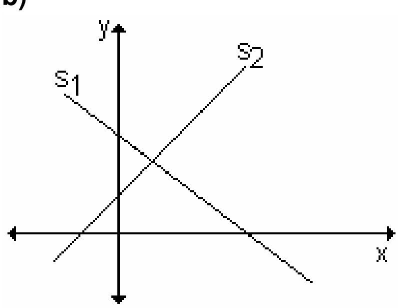
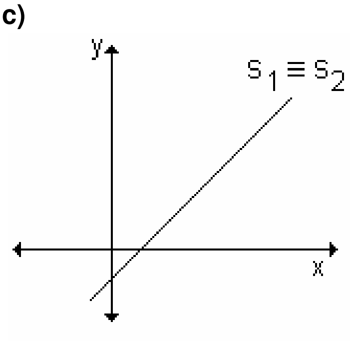
c) ¿Qué representa gráficamente la solución de un sistema?

2) Determine si los pares ordenados indicados son soluciones de los sistemas dados.

a) $S = \{(5, 2)\}$ de $\begin{cases} 3x - y = 13 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$

b) $S = \left\{\left(-\frac{9}{2}; 1, 3\right)\right\}$ de $\begin{cases} 4x + 2y + 6z = 2 \\ x + \frac{3}{2}y + 2z = \frac{5}{2} \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

3) Complete el siguiente cuadro según corresponda:

	Número de soluciones del sistema	Tipo de sistema
a) 		
b) 		
c) 		

4) Clasifique y resuelva los siguientes sistemas teniendo en cuenta el número de ecuaciones y el número de incógnitas, los términos independientes y el tipo de solución mediante el teorema de Rouché-Frobenious:

a) $\begin{cases} x - 2y = -2 - 3z \\ 2x - 5y - z - 1 = 0 \\ 3x + y + 10z = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2z = 5 \\ 3y + 4z = -2 \\ -2x + 3y + 8z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2y - x + 3z = 11 \\ 2x - 3y + 6 = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

5) Resuelva y clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones mediante eliminación Gaussiana:

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ 4x + 5y + 6z = -4 \\ 7x - 15y - 9z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 8z = 0 \\ x - 3y - 7z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + 3z = 5 \\ z - 3w = 7 \\ 2x + y + z + w = -1 \end{cases}$

6) Resuelva mediante el método de Gauss-Jordan los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = -3 \\ 2x + y = z + 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 6x - 4y + 2z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 + z \\ 2x = y - 3z + 4 \\ 5(x + z) = 9 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + y = 3z \end{cases}$

7) Dado el sistema: $\begin{cases} 2x + ky = 10 \\ x + 5y = 8 \end{cases}$, indique para qué valores de k es:

a) incompatible.
b) compatible.

8) Dado el sistema: $\begin{cases} 2x + ky - z = 4 \\ -4x + 5y + kz = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$, determine el valor de k para que tenga:

a) solución única.
b) infinitas soluciones.
c) ninguna solución.

9) Calcule el valor de m para que el sistema sea compatible determinado:

$$\begin{cases} mx - 2y + z = m \\ 2x + my - 2z = 2m + 1 \\ 3x - y - z = 4m \end{cases}$$

10) Resuelva por Cramer, si es posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x + 2y - 3v = 1 \\ x + y - z + v = -2 \\ -4x - 3y + 2z = 3 \\ -3x + 2z + 4v = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y = 8 - z \\ 2(y - 2x) + z + 3 = 0 \\ y + z = 2x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y = z \\ 3x - 3z = 3y \\ \frac{1}{2}x = 2y + 1 \end{cases}$

11) Dado el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 + 4z \\ 2(2x + 3y) = 2 + mz \\ x + mz + y - 10 = 0 \end{cases}$.

a) Clasifíquelo según el número de ecuaciones y el número de incógnitas.

b) Analice, según el teorema de Rouché-Frobenious, para qué valor de m tiene solución única.

12) Resuelva:

a) $\begin{cases} x = 3z + \dfrac{1}{2} \\ y + 2x = 2 - z \\ 2(x + 3y) = 7 + 4z \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + z + w = 0 \\ x - z + w = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 4x + 5z = 6 \\ -2y + 5z = -4 \end{cases}$

4. SISTEMAS DE INECUACIONES

4.1 Sistemas de inecuaciones de primer grado y segundo grado en una variable.

4.2 Sistemas de inecuaciones de primer grado en dos variables.

4.3 Sistemas de inecuaciones de primer y segundo grado en dos variables.

4.4 Programación lineal.

> Uno aprende haciendo las cosas; porque aunque piense que lo sabe, no tendrá la certidumbre hasta que lo intente.

Sófocles

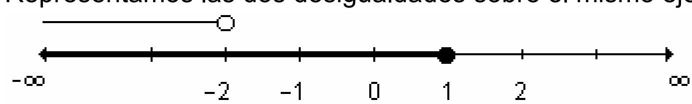
4.1 Sistemas de inecuaciones de primer grado y segundo grado en una variable

Dos o más inecuaciones en una variable consideradas en forma simultánea generan un sistema de inecuaciones. Se denomina conjunto solución al conjunto de números reales que satisface todas las inecuaciones del sistema a la vez.

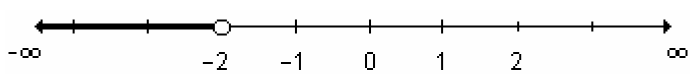
Ejemplo: Encuentre analítica y gráficamente el conjunto solución del siguiente sistema de inecuaciones de primer grado en una variable $\begin{cases} 3x+2 \le 5 & (1) \\ -x+1 > 3 & (2) \end{cases}$

De la inecuación (1) resulta: $3x \le 3 \Rightarrow x \le 1$ y de la inecuación (2):
$-x > 2 \Rightarrow x < -2$. De aquí formamos el sistema: $\begin{cases} x \le 1 \\ x < -2 \end{cases}$

Representamos las dos desigualdades sobre el mismo eje real.



Los valores que satisfacen las inecuaciones simultáneamente son: $x < -2$.
Gráficamente:



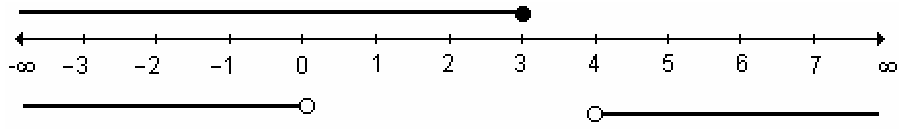
Ejemplo: Resuelva analítica y gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones en una variable $\begin{cases} 2(1-x) \ge -4 \\ \quad x^2 > 4x \end{cases}$.

Resolviendo analíticamente la primera inecuación obtenemos:
$2.(1-x) \ge -4 \quad \Rightarrow \quad 2-2x \ge -4 \Rightarrow \quad -2x \ge -6 \quad \Rightarrow \quad x \le 3$
La solución de la inecuación son todos los números reales menores o iguales que 3, o sea, los que pertenecen al intervalo $(-\infty, 3]$.
Para resolver la segunda inecuación planteamos $x^2 - 4x > 0$ que factorizándola resulta $x.(x-4) > 0$.
Construyendo el cuadro de signos podemos escribir:

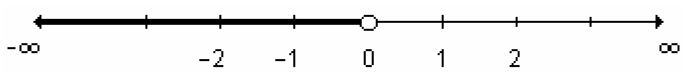
	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
x	–	+	+
$x-4$	–	–	+
$x.(x-4)$	**+**	–	**+**

La solución de la inecuación $x^2 \ge 4x$ son todos los números reales menores que cero o mayores que 4, o sea, los números que pertenecen al intervalo $(-\infty, 0)$ o al intervalo $(4, \infty)$.

Al graficar ambas soluciones en la recta numérica:



se observa que los números reales que verifican ambas inecuaciones son aquellos menores que cero, es decir, la solución del sistema son los números reales que pertenecen al intervalo $(-\infty, 0)$.
Gráficamente:



EJERCICIO

Escriba por comprensión la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales de primer y segundo grado en una variable. Grafique en un sistema de coordenadas unidimensional.

a) $\begin{cases} |x+1| \leq 5 \\ 2(1-x) > 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} |x| + 1 < 6 \\ |x| > 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 2 \geq 2(x-1) \\ x > 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x-1) \geq 5x + 4 \\ 3x^2 - 27 > 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ |2(x-1)| \geq 3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} |3x-1| < 8 \\ x > 2 \end{cases}$

RESPUESTA

a) $S = \{x / x \in R \wedge -6 \leq x < -1\}$ **b)** $S = \{x / x \in R \wedge -5 < x < -2 \vee 2 < x < 5\}$

c) $S = \varnothing$ **d)** $S = \{x / x \in R \wedge x < -3\}$

e) $S = \left\{x / x \in R \wedge -1 < x \leq -\frac{1}{2}\right\}$ **f)** $S = \{x / x \in R \wedge 2 < x < 3\}$

4.2 Sistemas de inecuaciones de primer grado en dos variables

Mediante un ejemplo analizaremos el procedimiento a seguir para hallar el conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales.

Ejemplo: encuentre el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x \geq y \\ 3x + y \geq 6 \\ y \leq 5 \\ x \leq 7 \end{cases}$.

Para mostrar el conjunto solución, graficamos en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales el semiplano solución de cada inecuación. La intersección de estos semiplanos nos dará una región del plano que será el conjunto solución del sistema de inecuaciones lineales.

Puntualizamos los pasos que hay que seguir para llegar al conjunto solución:

a) transformamos cada inecuación del sistema en ecuación a efectos de poder graficar la recta que determina la frontera del semiplano solución de cada inecuación. (Si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$ la recta frontera se representa con un trazo continuo, mientras que si la desigualdad es estricta ($>$ o $<$), con un trazo discontinuo, es decir, con línea de puntos).

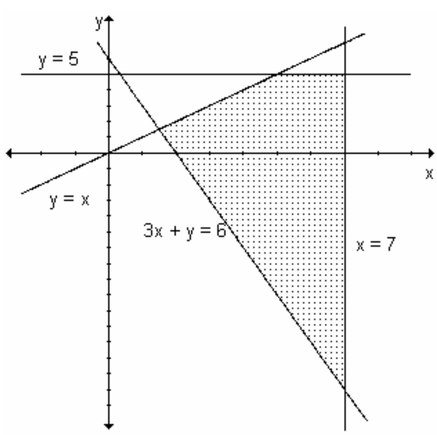
b) para cada inecuación buscamos un semiplano solución, señalándolo mediante un sombreado (distinto para cada inecuación).

c) el conjunto solución del sistema está formado por la intersección de los conjuntos solución de las inecuaciones del sistema.

Podemos decir: la gráfica del conjunto solución es la región sombreada tantas veces como inecuaciones haya.

Nota

- Se debe tener en cuenta en la solución si la frontera se incluye o no según las desigualdades sean amplias o estrictas.
- El subconjunto del plano que satisface el conjunto de inecuaciones se llama *convexo de soluciones* o simplemente *convexo solución*. La frontera del conjunto recibe el nombre de polígono convexo.



El convexo de soluciones es el recinto del plano que satisface simultáneamente cada una de las inecuaciones lineales del sistema.

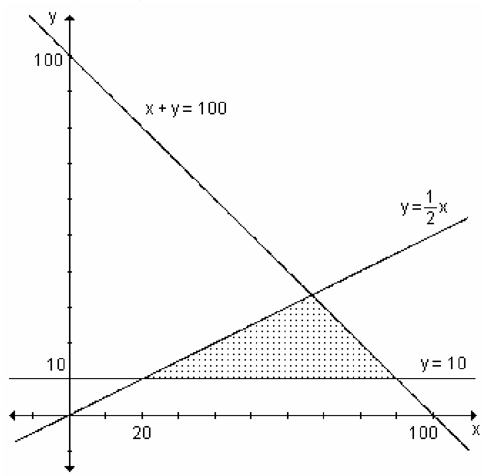
Los convexos de soluciones de los sistemas de inecuaciones lineales en las variables x, y son conjuntos convexos muy particulares ya que son intersección de un número finito de semiplanos.

<u>Problema</u>

Un almacén vende dos marcas de T.V. Las demandas de los clientes indican que es necesario tener cuanto menos el doble de televisores de la marca A que los de la marca B. También es necesario tener a mano un mínimo de 10 televisores de la marca B. Sólo hay lugar en el almacén para no más de 100 televisores. Determine y grafique un sistema de inecuaciones que represente todas las posibilidades de almacenamiento de las dos marcas.

Llamando con x a la cantidad de televisores de la marca A y con y a la cantidad de televisores de la marca B, resulta el sistema de inecuaciones $\begin{cases} y \le \frac{1}{2}x \\ y \ge 10 \\ x + y \le 100 \\ x \ge 0 \end{cases}$.

La última inecuación se plantea dado que x corresponde a cantidad de televisores de la marca A y por lo tanto no puede ser negativa. No es necesario considerar $y \ge 0$ ya que por el enunciado debe ser $y \ge 10$.



Se deben considerar sólo los pares ordenados de números naturales que pertenecen al convexo solución pues tanto x como y representan cantidades de televisores.

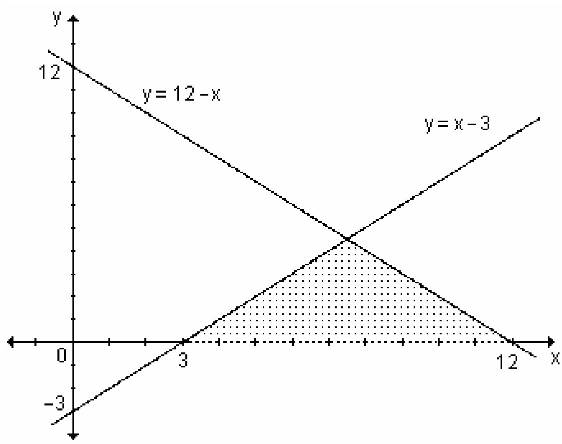
Problema

> Un obrero realiza cajas rectangulares de distintos tamaños. La longitud de cualquier caja debe ser superior a su ancho en, al menos, 3 cm y el perímetro no puede ser superior a los 24 cm, ¿cuáles son las posibles medidas de la caja?

Llamamos con x a la longitud de las cajas rectangulares y con y al ancho de las mismas.
Leemos las condiciones enunciadas y las expresamos simbólicamente.

- la longitud de la caja debe ser superior a su ancho en, al menos, 3 cm, entonces $x \ge y + 3$.
- el perímetro no debe superar los 24 cm, entonces $2x + 2y \le 24$.

Considerando que son dimensiones de una caja no pueden ser negativas ni nulas: $x > 0$, $y > 0$. De donde obtenemos el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x - y \ge 3 \\ 2x + 2y \le 24 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Gráficamente la región factible para las medidas de la caja es:



EJERCICIOS

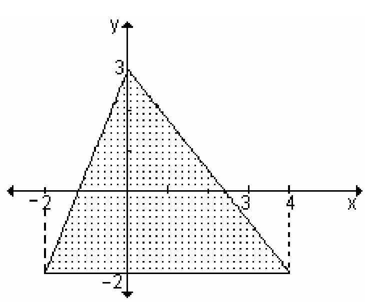
1) Halle gráficamente la solución de cada sistema de inecuaciones de primer grado en dos variables.

a) $\begin{cases} 2x + y \leq 7 \\ y > x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y - 2 > x \\ x < 2y \\ x \geq 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y \leq 4 \\ y + x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$

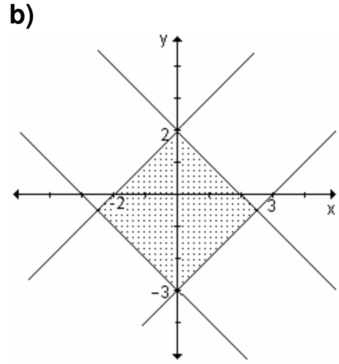
d) $\begin{cases} 3x - 2y + 1 \geq 0 \\ x < 0 \\ -3y - 3 \leq 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}y - 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$

2) Exprese mediante un sistema de inecuaciones las regiones marcadas en cada caso.

a)

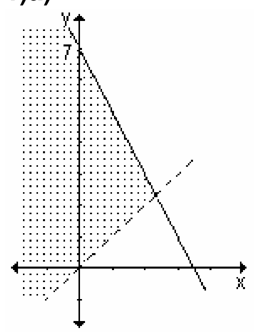


b)

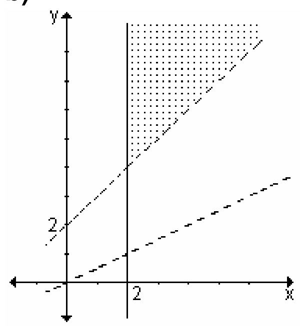


RESPUESTAS

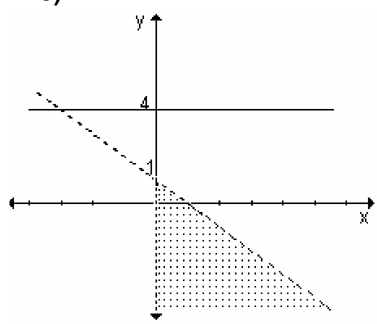
1)a)



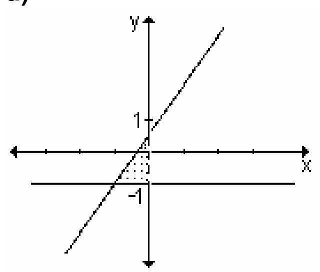
b)



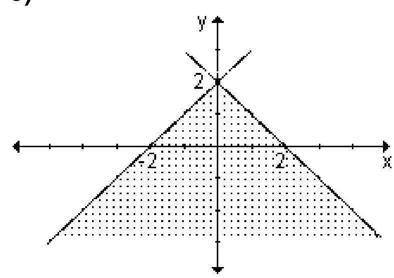
c)



d)



e)



2)a) $\begin{cases} 2y - 5x \le 6 \\ y \ge -2 \\ 5x + 4y \le 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y \le 2 \\ x + y \le 2 \\ x + y \ge -3 \\ x - y \le 3 \end{cases}$

4.3 Sistemas de inecuaciones de primer y segundo grado en dos variables

Sea el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} y > x^2 - 4x + 5 \\ y - x - 5 \le 0 \end{cases}$.

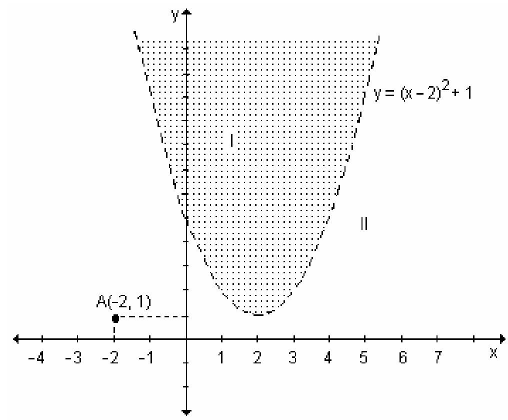
Queremos encontrar el conjunto de puntos que verifican las dos inecuaciones simultáneamente. Para eso encontramos el conjunto solución de cada inecuación.

a) $y > x^2 - 4x + 5$

Como primer paso representamos gráficamente $y = x^2 - 4x + 5$.
La gráfica es una parábola, que trazamos con *línea punteada* ya que la desigualdad es *estricta (mayor).* Completamos cuadrados para hallar su vértice.
$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 5 \;\Rightarrow\; y = (x - 2)^2 + 1 \;\Rightarrow\; V(2, 1)$
Calculamos su intersección con los ejes coordenados:
Con el eje y $\Rightarrow$ $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0^2 - 4.0 + 5 \;\Rightarrow\; y = 5$

La intersección con el eje de ordenadas es el punto (0, 5).
Como el discriminante $b^2 - 4.a.c = (-4)^2 - 4.1.5 = 16 - 20 = -4 < 0$ no existe intersección con el eje de abscisas.

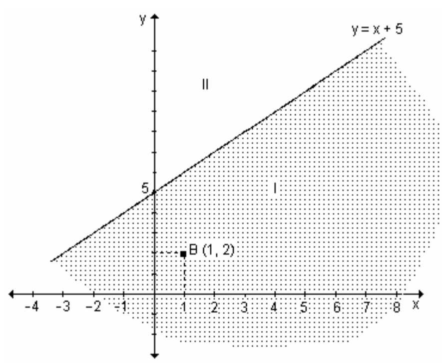
Al realizar la gráfica quedan determinadas dos regiones: la región interna **I** y la **II**, externa a la parábola. Para decidir cuál es la solución de $y > x^2 - 4x + 5$, tomamos un punto cualquiera, por ejemplo, A(–2, 1) perteneciente a la región **II** y reemplazamos:
$1 > (-2)^2 - 4.(-2) + 5$. Como $1 > 17$ es falso el punto A no pertenece al conjunto solución. La solución es la región **I.**

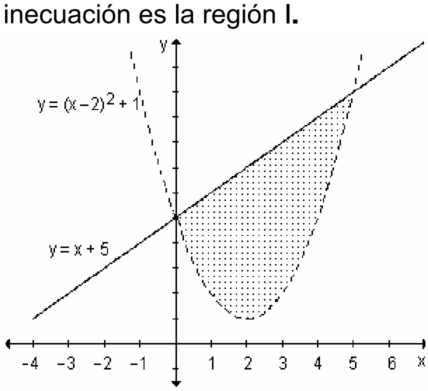


b) $y - x - 5 \leq 0$
Sea $y - x - 5 = 0$, hallando la forma explícita resulta $y = x + 5$. La gráfica es una recta de pendiente 1 y ordenada al origen 5.
El trazo será continuo ya que la desigualdad es menor o igual.

De manera similar al caso anterior, tomamos el punto B(1, 2) perteneciente a la región **I** y reemplazamos en la desigualdad: $y - x - 5 < 0 \Rightarrow$
$2 - 1 - 5 < 0 \Rightarrow -4 < 0$ que es verdadero y, por lo tanto, el punto B pertenece al conjunto solución.

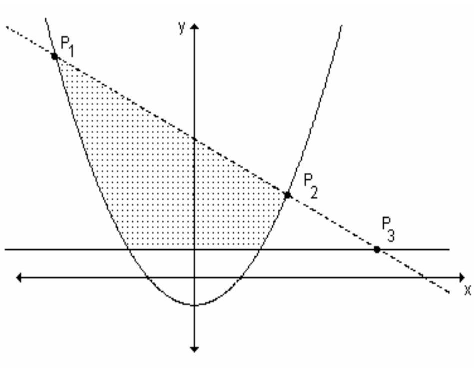
En consecuencia la solución de esta inecuación es la región **I.**





La solución del sistema de inecuaciones es la región común entre las soluciones de todas las inecuaciones que en él intervienen.

Ejemplo: Deduzca el sistema de inecuaciones cuya solución gráfica es:



siendo:
$P_1(-3, 8)$
$P_2(2, 3)$
$P_3(4, 1)$

La ecuación de la recta conocidos dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. En nuestro caso utilizando $P_1(-3, 8)$ y $P_2(2, 3)$ resulta: $\frac{y-8}{3-8}=\frac{x-(-3)}{2-(-3)} \Rightarrow y = -x + 5$.

Como la gráfica es punteada, la inecuación será estricta: > ó <. Como corresponde el semiplano que incluye al origen será: $y < -x + 5$

La ecuación de la recta horizontal es $y = 1$, como es el semiplano superior e incluye a la recta, la inecuación es: $y \geq 1$.

La ecuación de la parábola es de la forma $y = a.(x - h)^2 + k$, donde (h, k) son las coordenadas del vértice.

En nuestro caso el vértice es de la forma $(0, k)$ y la parábola pasa por los puntos $P_1(-3, 8)$ y $P_2(2, 3)$, por eso resulta $\begin{cases} 8 = a(-3-0)^2 + k \\ 3 = a(2-0)^2 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + k = 8 \\ 4a + k = 3 \end{cases}$

Despejando en ambas ecuaciones la variable k e igualando resulta:
$8 - 9a = 3 - 4a \Rightarrow -5a = -5 \Rightarrow a = 1$. Como $k = 8 - 9a$ obtenemos $k = -1$.
La ecuación de la parábola es $y = x^2 - 1$. El semiplano a considerar contiene al origen e incluye a la parábola, por eso la inecuación buscada es: $y \geq x^2 - 1$.

Por lo tanto el sistema de inecuaciones es: $\begin{cases} y < -x + 5 \\ y \geq 1 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases}$.

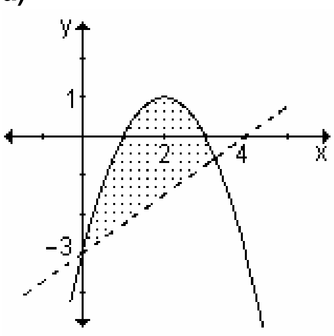
EJERCICIOS

1) Halle gráficamente la solución de cada sistema de inecuaciones de primer y segundo grado en dos variables.

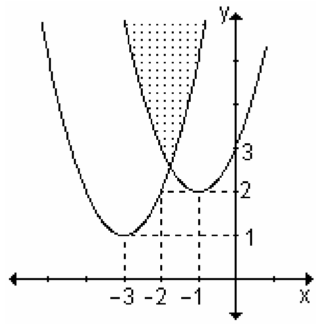
a) $\begin{cases} y < \frac{3}{2}x \\ y \geq (x-2)^2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \\ y \leq -x^2 + 6x - 6 \end{cases}$

2) Exprese mediante un sistema de inecuaciones las regiones marcadas en cada caso.

a)

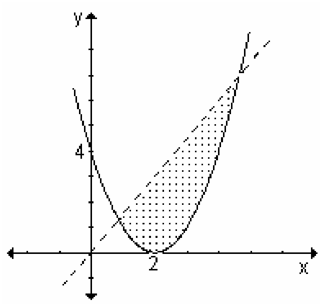


b)

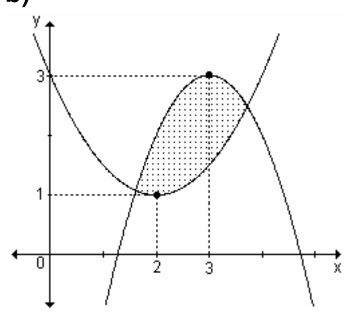


RESPUESTAS

1)a)



b)



2) a) $\begin{cases} -4y+3x<12 \\ -x^2+4x-3\geq y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y\geq x^2+2x+3 \\ y\geq x^2+6x+10 \end{cases}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.1 SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE – 4.2 SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO EN DOS VARIABLES – 4.3 SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES

1) En cada caso obtenga analítica y gráficamente el conjunto solución. Defínalo por comprensión.

a) $\begin{cases} 3x+2<0 \\ 2x-1\geq -8-x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} |2x-1|\leq 3 \\ |x+2|^2<9 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} |2x|-4>1 \\ |x|\leq 3 \end{cases}$

2) Resuelva:

a) $\begin{cases} x-2y+4\geq 0 \\ x+y-11\geq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y<1 \\ y>3 \\ x<5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y\leq 7 \\ 3x+y\leq 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y \geq 2 \\ 2y + 3x - 6 > 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} y > -x + \dfrac{1}{2} \\ y \geq x^2 + 4x + 2 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} -x^2 + 2x + 3 \geq y \\ -x^2 + 6x - 6 \geq y \end{cases}$

AUTOEVALUACIÓN Nº 6: SISTEMAS DE INECUACIONES

1) Escriba por comprensión la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales de primer y segundo grado en una variable. Grafique en un sistema de coordenadas unidimensional dicha solución.

a) $\begin{cases} 5\,|x - 1| - 3 \leq 7 \\ 2x^2 - 8 > 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x.(x + 1) \leq 2 \\ |2x - 1| > 5 \end{cases}$

2) Halle gráficamente la solución del sistema: $\begin{cases} y > 3x^2 + 6x \\ x + y \leq 0 \end{cases}$.

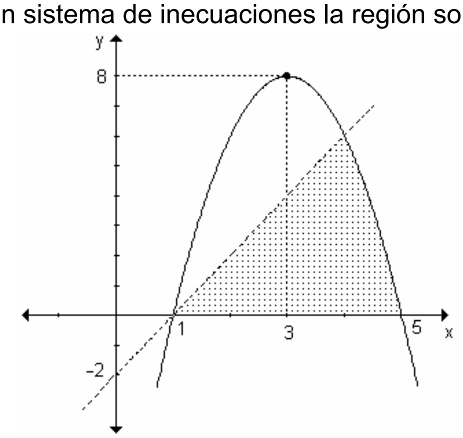
3) Dado el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0 \\ x + y < 5 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$.

a) Halle gráficamente su solución.

b) Agregue al sistema dado otra inecuación de modo que la solución no varíe.

c) Agregue al sistema dado otra inecuación de modo que el sistema no tenga solución.

4) Exprese mediante un sistema de inecuaciones la región sombreada:



5) Escriba las inecuaciones que describan las situaciones siguientes:

a) por cada 5 kilos de pan común se venden por lo menos 2 kilos de pan francés.

b) por cada 500 litros de nafta se venden a lo sumo 4 litros de aceite.

c) un agricultor por cada seis hectáreas de trigo siembra como máximo tres hectáreas de maíz.

6) La producción diaria estimada, p, de una refinería verifica la siguiente desigualdad $|2p - 25\,000| \leq 11\,000$. Esta producción se mide en barriles de petróleo.

a) ¿En qué intervalo varía la producción diaria estimada?

b) ¿Cuál es la producción diaria estimada máxima? ¿Y la mínima?

7) En una caja hay como máximo 7 bolillas rojas y a lo sumo 4 bolillas verdes. Extraigo al azar, por lo menos, 6 bolillas. Establezca cuántas y cuáles son las posibles combinaciones que pueden resultar de la extracción. Escriba las inecuaciones y realice la gráfica correspondiente.

4.4 Programación lineal

La investigación operativa se inicia con el hombre desde el momento en que se planteó la necesidad del aprovechamiento óptimo o, al menos, mejor de los recursos. Nació poco antes de comenzar la Segunda Guerra Mundial y durante ella se trabajó en forma intensa tanto en Gran Bretaña como en Estados Unidos, motivados por las operaciones bélicas.
En estos momentos, una organización que no utilice las teorías y técnicas de la Investigación Operativa sufre, seguramente, pérdidas en términos de efectividad y/o eficiencia.

El objetivo de esta disciplina se puede sintetizar como:

a) maximizar la efectividad con un costo moral y material dado; ó

b) minimizar el costo moral y material de dicha efectividad.

De acuerdo al problema que debe resolver la Investigación Operativa se bifurca en diversas ramas. Nos dedicamos a la *Programación Lineal* dada la importancia agrotécnica de la misma.

La programación lineal consiste en determinar el plan de acción que permite la utilización óptima de recursos limitados.

Muchos problemas de negocios, ciencias y economía implican encontrar el valor óptimo de una función (valor máximo de la función ganancia o mínimo de la función costo) sujeta a varias restricciones (costos de transporte, dietas alimentarias, leyes de protección del medio ambiente, disponibilidad de partes, tasas de interés, etc.).
Esta técnica ha alcanzado una gran importancia en las empresas donde se deben tomar decisiones acerca del mejor uso de los inventarios, refacciones o procesos de fabricación.
La programación lineal es un conjunto de técnicas racionales de análisis y de resolución de problemas que tiene por objeto ayudar a los responsables en las decisiones sobre asuntos en los que interviene un gran número de variables.
El nombre de programación lineal no procede de la creación de programas de ordenador, sino de un término militar, programar, que significa “realizar planes o propuestas de tiempo para el entrenamiento, la logística o el despliegue de las unidades de combate”.

Aunque parece ser que la programación lineal fue utilizada por G. Monge en 1776, se considera a L. V. Kantoróvich uno de sus creadores. La presentó en su libro Métodos matemáticos para la organización y la producción (1939) y la desarrolló en su trabajo Sobre la transferencia de masas (1942). Kantoróvich recibió el premio Nobel de economía en 1975 por sus aportaciones al problema de la asignación óptima de recursos humanos. La investigación de operaciones en general y la programación lineal en particular recibieron un gran impulso gracias a los ordenadores.

Uno de momentos más importantes fue la aparición del método del simplex. Este método, desarrollado por G. B. Dantzig a fines de la década del 40 (1947) se utilizó primero en la Fuerza Aérea de los Estados Unidos como auxiliar en la toma de decisiones. Consiste en la utilización de un algoritmo para optimizar el valor de la función objetivo teniendo en cuenta las restricciones planteadas. Actualmente tiene gran aplicación en el análisis industrial y económico. Este método, sujeto a controversias por su valor en el campo de la economía, ha salido triunfante como técnica de aplicación para dar solución al problema básico de la economía: la distribución más ventajosa de aquellos recursos cuya cantidad limita la producción.

Podemos resumir la idea de programación lineal presentándola como un problema matemático en el que deseamos maximizar o minimizar una función lineal con varias variables, sujeta a ciertas restricciones que pueden materializarse generalmente en forma de desigualdades.
En los problemas de programación lineal debemos optimizar una función con variables sometidas a ciertas restricciones representadas comúnmente por desigualdades matemáticas tal como sucede en todos los modelos de la Investigación Operativa.
Los resultados no serán considerados en forma mecánica sino que deberán ser analizados en profundidad y con criterio profesional con el objeto de obtener decisiones concretas derivadas de conclusiones lógicas.

Un problema de programación lineal es tal que en él se puede plantear un modelo (representación de la realidad a analizar) matemático usando relaciones lineales o formas proposicionales lineales como la siguiente:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + . . . + a_nx_n \overset{\geq}{<} h_n$; los a_i y h_i son constantes conocidas y las

x_i variables desconocidas, $\forall$ i = 1, 2, 3, ..., n.

El planteo completo de una situación lleva a un conjunto de relaciones lineales que nos dan las condiciones del problema y en donde se ponen de manifiesto las restricciones, además una función lineal que representa el objetivo a optimizar.

Matemáticamente la programación lineal trata con soluciones no negativas (dado que los resultados son en términos de existencias).

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1j}x_j + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n \\ \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{2j}x_j + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{ij}x_j + \dots\dots\dots\dots + a_{in}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{nj}x_j + \dots\dots\dots\dots + a_{nn}x_n \end{array}\right.}_{\text{condiciones}} \underbrace{\begin{array}{l} \gtrless b_1 \\ \\ \gtrless b_2 \\ \\ \gtrless b_i \\ \\ \gtrless b_n \end{array}}_{\text{disponibilidades}}$$

$x_i \geq 0$ con $i = 1,2,...,n$; $h_j \geq 0$ con $j = 1,2,...,m$; y

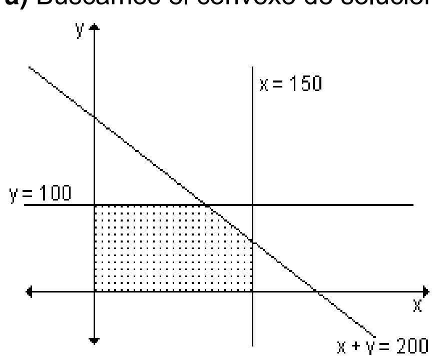
$z = b_1\ x_1 + b_2\ x_2 + ... + b_n\ x_n$ que es la función objetivo a maximizar o minimizar, donde las b_i reciben el nombre de coeficientes de costo.

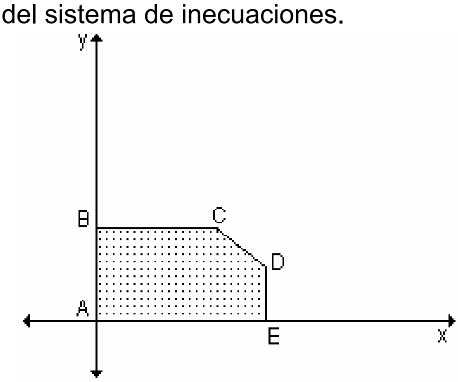
Ejemplo: Consideramos el problema de maximizar la función $z = 2x + y$ sujeta a las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ x + y \leq 200 & (3) \\ x \leq 150 & (4) \\ y \leq 100 & (5) \end{cases}$$

Para resolver esta situación debemos seguir distintos pasos:

a) Buscamos el convexo de soluciones del sistema de inecuaciones.





b) Hallamos los cinco vértices de la poligonal que delimita el recinto. Para ello encontramos la intersección de un par de lados del polígono.
El vértice A(0, 0) se obtiene de la intersección de las ecuaciones (1) y (2); el B(0, 100) de la (1) y (5); C(100,100) resulta de (3) y (5); el D(150, 50) se obtiene de la intersección de (3) y (4) y por último E(150, 0) se logra de (2) y (4).
El problema consiste ahora en determinar en qué punto del interior o de la frontera del convexo de soluciones se alcanza el máximo y cuánto vale.

c) Construimos una tabla de valores en la que calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices y en algunos puntos interiores del convexo de solución. Desarrollaremos un criterio de cálculo que permite elegir el punto para el cual la función objetivo alcanza su valor máximo.

Vértice	$z = 2x + y$
A(0,0)	0
B(0,100)	100
C(100,100)	300
D(150,50)	350
E(150,0)	300
Punto del convexo que no es vértice	
P_1 (50,100)	200
P_2 (75,100)	250
P_3 (125,75)	325
P_4 (125,50)	300

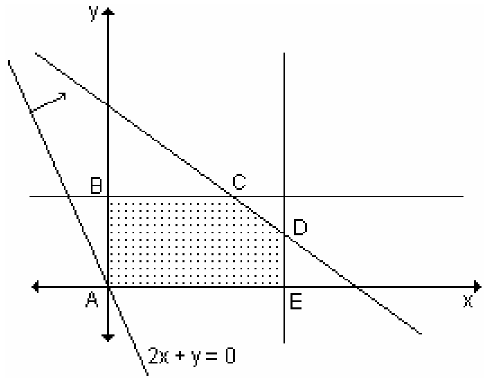
d) Podemos ver que el máximo valor que alcanza z es 350 y las coordenadas del punto para el cual lo alcanza corresponde al vértice D(150, 50). De todos los puntos elegidos en la tabla ninguno alcanzó un valor mayor o igual para la función objetivo.
A esta conclusión llegamos si en lugar de tomar z en algunos puntos reemplazáramos por los infinitos puntos pertenecientes al interior y a la frontera del convexo de soluciones.

De esta manera, la respuesta al problema es que la función objetivo se hace máxima en el vértice D(150, 50) y vale 350.

Podemos preguntarnos si es simple coincidencia o si existe una fundamentación que permita asegurar que siempre el máximo o mínimo valor de la función objetivo se alcanza para algún vértice del convexo. Esto está garantizado por la siguiente propiedad.

Propiedad: si una función objetivo alcanza su óptimo lo hace en alguno de los vértices del convexo solución.

Esta propiedad indica que no hace falta que calculemos el valor de la función objetivo en coordenadas de puntos que no son vértices dado que cualquier punto que no sea vértice nunca podrá optimizar dicha función.



Podemos agregar que existe un método gráfico para llegar a la solución del problema. Para esto, debemos graficar la recta que resulta de reemplazar a z en la función objetivo por un valor numérico arbitrario llamado k.

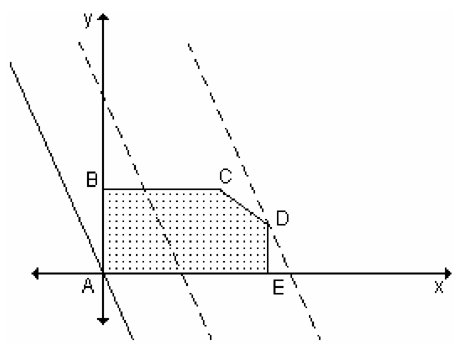
Si $z = 0$ resulta

$0 = y + 2x$ y su representación gráfica (recta que pasa por el origen de coordenadas) la agregamos a la de la solución del sistema de inecuaciones.

La recta $2x + y = 0$ contiene al vértice A y deja al convexo de soluciones en un mismo semiplano respecto a dicha recta tomada como frontera. Además $z = 0$ es el valor que toma la función objetivo en el vértice de coordenadas (0, 0).

Desde esta posición inicial desplazamos la recta paralela a sí misma barriendo el convexo de soluciones. A medida que se va trasladando, la recta alcanza los distintos vértices B, C, E y, por último, D.

Los vértices B, C y E no pueden corresponder a la posición en que la función alcanza el máximo, pues el convexo no queda incluido en su totalidad en un mismo semiplano respecto a la recta $2x + y = k$ tomada como frontera. Sólo en D se cumple la inclusión del convexo en el semiplano inferior respecto a dicha recta. De aquí en D se alcanza el máximo de la función objetivo.

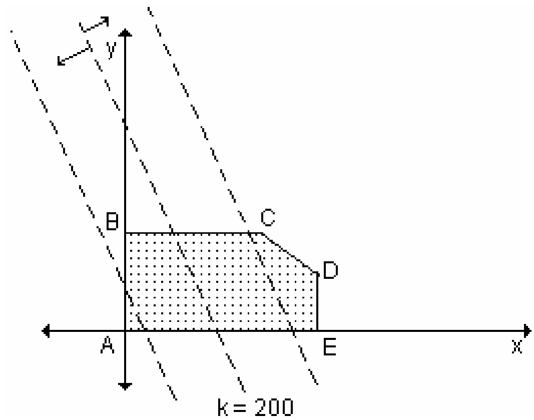


Propiedad: la condición necesaria para que una función objetivo pueda optimizarse en un cierto vértice es que todo el convexo de soluciones quede incluido en el mismo semiplano respecto a la recta representativa de dicha función objetivo tomada como frontera, que pasa por dicho vértice.

Nota: debemos tener en cuenta que el enunciado de la propiedad habla de condición necesaria. Vimos que si graficamos el convexo de soluciones existen dos vértices (A y D) que cumplen que la recta $2x + y = k$ que pasa por ellos deja al convexo en un mismo semiplano respecto de ella y sin embargo uno sólo cumple con la condición de maximizar la función.

De aquí, resulta que hay vértices que satisfacen la condición de inclusión y no optimizan la función.

Si en vez de tomar en la expresión 2x + y = k el valor k = 0 tomamos k = 200, la gráfica será:
¿Con qué criterio decidimos el sentido del desplazamiento para lograr el máximo?.

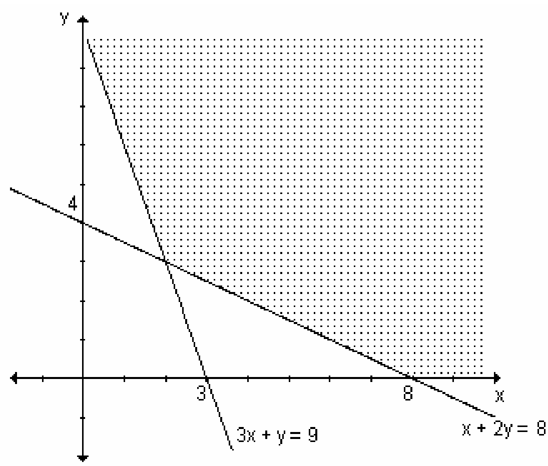


Propiedad: el sentido correcto de desplazamiento de la recta representativa de la función objetivo es el que corresponde al aumento de su valor, cuando dicha función debe ser maximizada, o aquél en que lo disminuye, cuando debe ser minimizada.

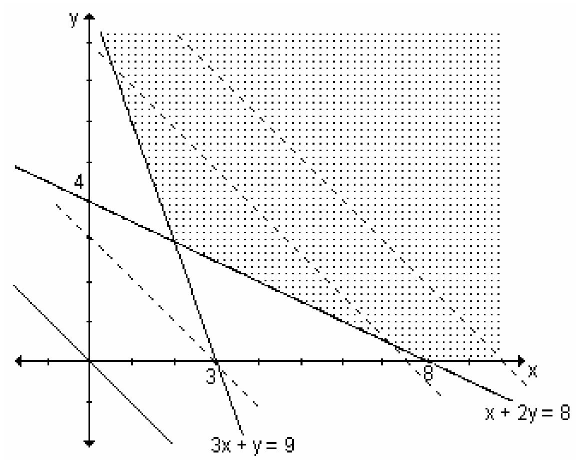
Ejemplo: Maximice la función objetivo z = x + y sujeta a las siguientes restricciones

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ 3x + y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

La representación gráfica de este sistema es:



y, de aquí, el convexo de soluciones, junto con la recta representativa de la función objetivo es:

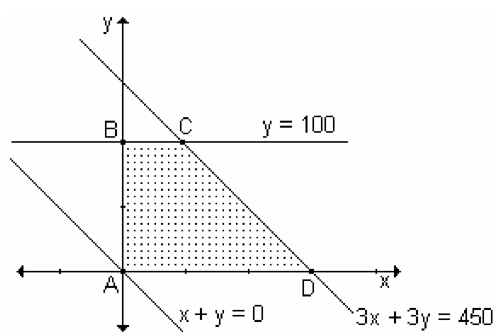


Observamos en la gráfica que el convexo solución obtenido es de área infinita y, por lo tanto, la poligonal no es cerrada.
Si comenzamos a desplazar la recta representativa de la función objetivo hacia donde se aumenta el valor vemos que no existe vértice para el cual se maximice esta función objetivo por ser el convexo solución abierto (z tiende a infinito).

Ejemplo: Analicemos por último el problema de maximizar la función objetivo

$z = x + y$ sujeta a las restricciones $\begin{cases} y \le 100 \\ 3x + 3y \le 450 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Representamos gráficamente la solución del sistema, vértices del convexo solución y la recta representativa de la función objetivo.



Los vértices del convexo solución son A(0, 0); B(0, 100); C(50, 100) y D(150, 0).

Desplazando la gráfica de la recta representativa de la función objetivo, se ve que al pasar de C a D todo el convexo solución queda en el mismo semiplano respecto a dicha recta y además $z(50, 100) = 150$ y $z(150, 0) = 150$.

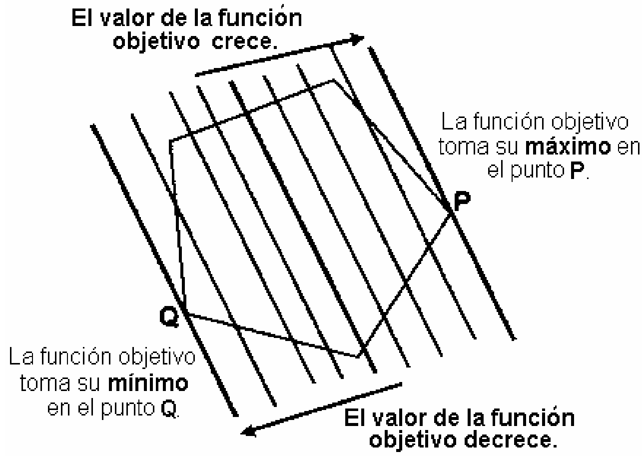
Luego los valores de z en C y D coinciden; además, es el máximo valor que alcanza la función objetivo. Si tomamos un punto que pertenece al segmento de recta comprendido entre C y D, por ejemplo P_0 (100, 50); z (P_0) = 150.

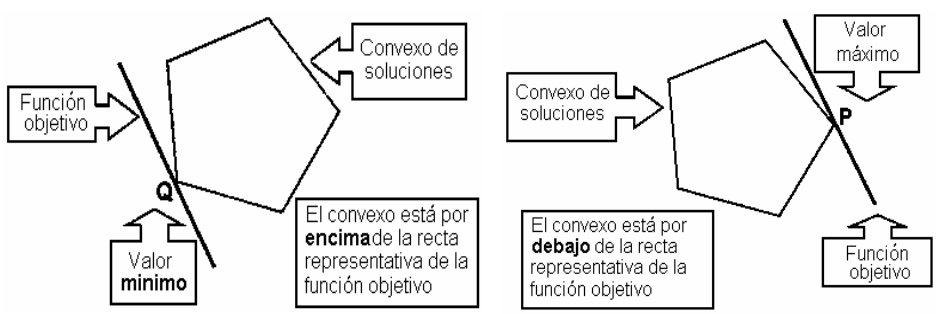
De aquí: z (P_0) = z(C) = z(D) y se puede probar que para los infinitos puntos P comprendidos en el segmento vale que z(P) = z(C) = z(D).
Por lo tanto, la solución al problema planteado es que existen infinitos puntos para los que alcanza el máximo valor. Esto es un ejemplo de la siguiente propiedad.

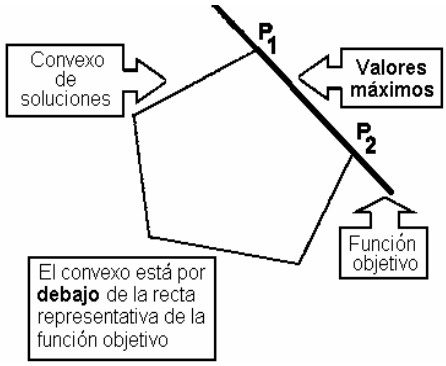
Propiedad: Si una función objetivo alcanza su óptimo valor en dos vértices del convexo, también lo alcanzará en los infinitos puntos ubicados sobre el segmento que ellos determinan.

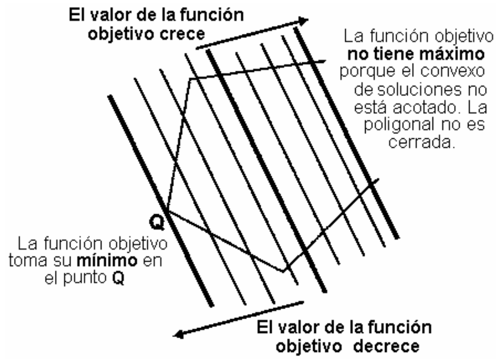
Nota: todo lo que se mostró para maximizar una función vale también para su minimización con el único cuidado de desplazar la gráfica de la recta que la representa en el sentido de minimizarla.

A modo de resumen podemos tener en cuenta los siguientes esquemas:









De la misma manera se pueden considerar estos últimos esquemas para el caso de mínimo y de máximo.
En un problema de programación lineal siempre es posible, matemáticamente llegar a alguno de los cuatro tipos de soluciones:

- existe un óptimo y se logra en un único punto,
- existe un óptimo pero se obtiene en los infinitos puntos ubicados sobre el segmento de recta que une dos de los vértices.
- no existe un óptimo porque siempre se puede mejorar la función objetivo, se dice que el problema es “no acotado”.
- no existen valores para las variables que satisfagan simultáneamente todas las desigualdades. El problema es “incompatible”.

EJERCICIOS

1) Determine el valor mínimo y el valor máximo de $z = 3x + y$, sujeto a las restricciones: $\begin{cases} y + 2x - 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

2) Halle el valor mínimo y el valor máximo de $z = 2x + y$, sujeto a las restricciones: $\begin{cases} 4 \leq x + y \\ y \leq x \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$. (Considerar sólo el primer cuadrante)

RESPUESTAS

1) El valor mínimo es 4 que se alcanza en el punto (0, 4) y no presenta valor máximo.

2) El valor mínimo es 6 en el punto (2, 2) y el valor máximo es 15 en el punto (5, 5).

Veamos ahora la aplicación de la programación lineal en el planteo y resolución de problemas. Debemos tener en cuenta que ante una situación problemática debemos:

a) Definir las variables: especificar cuántas son y qué significa cada una de ellas.

b) Expresar las condiciones de vínculo: es decir, las restricciones que se imponen a las variables.

c) Condición de no negatividad de las variables: dado que los resultados son en términos de existencias.

d) Definir la función objetivo: es decir, la función a optimizar (maximizar o minimizar).

e) Obtener la solución gráfica del problema: debemos tener en cuenta que en los problemas de programación lineal se plantea un único objetivo y puede ocurrir que tenga una solución, infinitas soluciones ó carezca de las mismas.

Problema

> Un chacarero tiene a disposición 100 hectáreas de tierra, 160 días para cultivarla y 1100 dólares para invertir. Desea sembrar dos cultivos de los cuales uno requiere un día para cultivar cada hectárea y produce un beneficio de 40 dólares por hectárea. El otro cultivo requiere cuatro días por ha. y produce un beneficio de 120 dólares por hectárea. El cultivo **I** requiere una inversión de 10 dólares por hectárea y el **II**, 20 dólares. ¿Cuántas hectáreas de cada cultivo habrá que plantar para obtener el beneficio máximo?.

Podemos generar una tabla con todos los datos del problema:

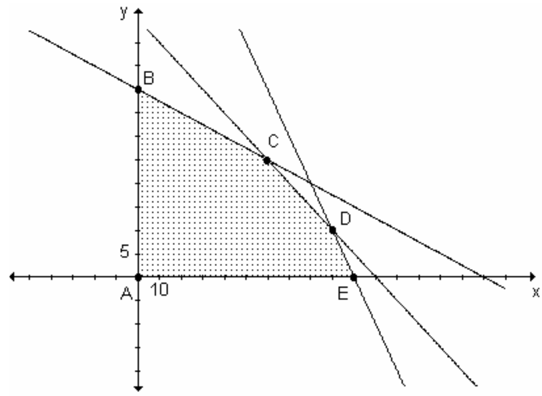
	Días para cultivar	Inversión por ha.	Cantidad de ha.
Cultivo **I**	1	10	x
Cultivo **II**	4	20	y
Total disponible	160	1100	100

Teniendo en cuenta lo enunciado generamos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{c} x + 4y \leq 160 \\ 10x + 20y \leq 1100 \\ x + y \leq 100 \end{array}\right\} \text{restricciones} \\ x \geq 0;\, y \geq 0 \quad \text{condiciones de no negatividad} \end{cases}$$

Debemos encontrar la cantidad de hectáreas de cada cultivo que maximicen el beneficio según la función objetivo: $z = 40x + 120y$

Graficamos y resulta el convexo de soluciones sombreado.

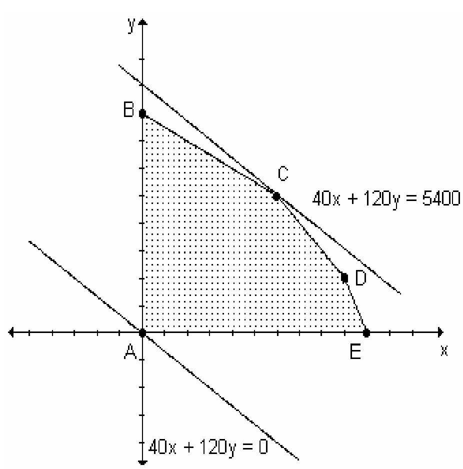


Sus vértices son: A(0,0) ; B(0,40) ; C(60,25) ; D(90,10) ; E(100,0)

Vértice	Función objetivo $z = 40x + 120y$
A(0,0)	0
B(0,40)	4800
C(60,25)	5400
D(90,10)	4800
E(100,0)	4000

En el vértice C se encuentra el máximo.

Si utilizamos el método gráfico, trazamos la gráfica de la recta que se obtiene igualando a cero la función objetivo, es decir, $40x + 120y = 0$ y la trasladamos hasta encontrar el vértice que deja a todo el convexo solución por debajo de la misma.



De aquí podemos decir que para obtener un máximo beneficio habrá que plantar 60 hectáreas del cultivo I y 25 hectáreas del cultivo II. El beneficio será de 5400 dólares.

Problema

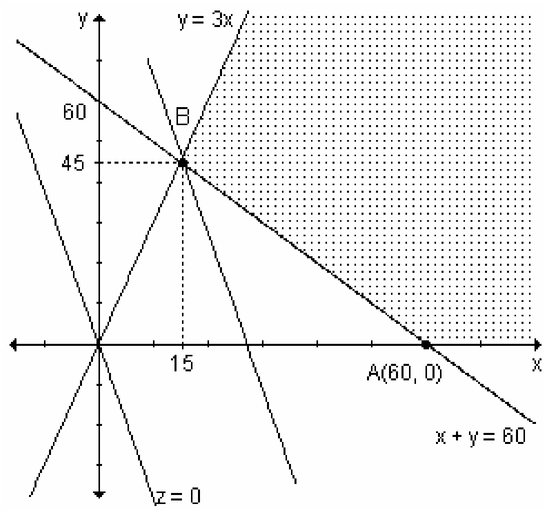
> Una carpintería fabrica mesas y sillas. El contrato sindical requiere que el número total de sillas y mesas producidas sea por lo menos de 60 por semana. La experiencia de ventas ha demostrado que debe fabricarse

por lo menos una mesa por cada 3 sillas. Si hacer una silla cuesta \$ 40 y cada mesa \$ 152, ¿cuántos muebles de cada artículo deben producirse a la semana para minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

Llamando con x a la cantidad de mesas y con y a la cantidad de sillas, resulta el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 60 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$ y la función objetivo

$z = 152x + 40y$ que se debe minimizar. El convexo solución es el sombreado.



Evaluando la función objetivo en los vértices del convexo solución obtenemos:

Vértices	$z = 152x + 40y$
A (60, 0)	9120
B (15, 45)	4080

El costo mínimo es \$ 4080 al fabricar 15 mesas y 45 sillas.

Problema

Una compañía de productos químicos está diseñando una planta que producirá dos tipos de polímeros, P_1 y P_2. La planta debe tener la capacidad de producir al menos 92 unidades de P_1 y 660 unidades de P_2 al día. Hay dos diseños posibles para la cámara de reacción básica que ha de incluirse en la planta: cada cámara del tipo A tiene un costo de \$ 200 con una capacidad de producción de 10 unidades de P_1 al día y 30 unidades de P_2 al día; el tipo B es un diseño más caro pues tiene un costo de \$ 400 y una capacidad de 4 unidades de P_1 y 60 unidades de P_2 al día. Debido a los costos de operación es necesario tener al menos 2 cámaras del tipo B en la planta.

¿Cuántas cámaras de cada tipo deberían incluirse con el propósito de minimizar el costo de construcción y a la vez cumplir con el programa de producción requerida?

La información proporcionada por el problema se puede resumir en la siguiente tabla:

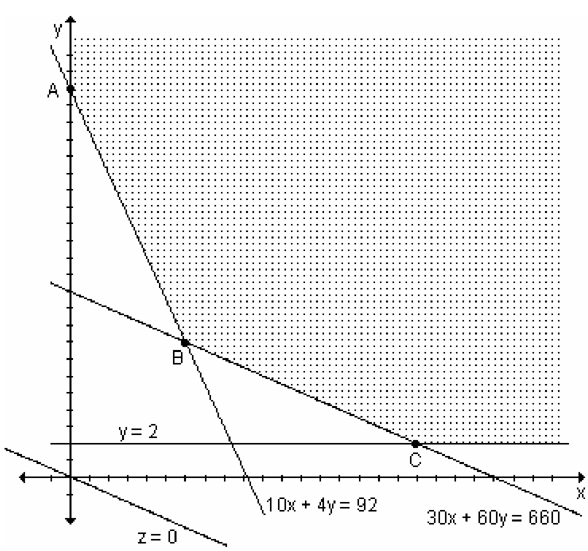
	P_1	P_2	Costo
Cámara A	10	30	200
Cámara B	4	60	400
Requerimientos	92	660	

Llamemos con x a la cantidad de cámaras del tipo A y con y a la cantidad de cámaras del tipo B. Entonces deben satisfacerse las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 10x + 4y \geq 92 & \text{(Producción de } P_1\text{)} \\ 30x + 60y \geq 660 & \text{(Producción de } P_2\text{)} \\ y \geq 2 & \text{(al menos dos cámaras del tipo B)} \\ x \geq 0 & \text{(condición de no negatividad en la cantidad de cámaras fabricadas tipo A)} \end{cases}$$

El costo total de las cámaras está dado por: $z = 200x + 400y$.
Debemos minimizar z sujeto a las restricciones anteriores.

Graficando todas las restricciones y la función objetivo (costo total) resulta la región sombreada. Se puede observar que existen tres vértices que limitan el recinto.
El vértice A(0, 23) es la intersección entre $10x + 4y = 92$ y el eje de ordenadas.



El vértice B(6, 8) es la intersección entre la recta $10x + 4y = 92$ y la recta de ecuación $30x + 60y = 660$.
El vértice C(18, 2) es la intersección entre las rectas $30x + 60y = 660$ e $y = 2$.

Construimos una tabla con los valores que alcanza la función objetivo en cada uno de esos vértices.

Vértices	$z = 200x + 400y$
A (0, 23)	9200
B (6, 8)	4400
C (18, 2)	4400

El valor mínimo se alcanza en B y C. Tomemos otros puntos que pertenezcan al segmento determinado por B y C, y hallemos el valor de z:

D (10, 6) $\Rightarrow$ $z = 200.10 + 400.6$ $\Rightarrow$ $z =$ \$ 4400

E (16, 3) $\Rightarrow$ $z = 200.16 + 400.3$ $\Rightarrow$ $z =$ \$ 4400

Gráficamente podemos observar que la recta $200x + 400y = z$ resulta paralela a $30x + 60y = 660$. Por lo tanto, el mínimo valor de la función $z = 200x + 400y$ es \$ 4400 y lo alcanza en todos los puntos incluidos en el segmento de la recta definida por $30x + 60y = 660$ para todo valor de x entre 6 y 18. En este caso, como x e y son números de cámaras del tipo A y del tipo B, respectivamente, los valores de x deben ser los números naturales entre 6 y 18, inclusive. Veamos qué sucede si x toma valores impares entre 6 y 18. Por ejemplo, para $x = 7$ cámaras del tipo A resulta:

$30.7 + 60y = 660$ $\Rightarrow$ $60y = 450$ $\Rightarrow$ $y = 7{,}5$ cámaras del tipo B, lo que es absurdo. En consecuencia, x deberá tomar valor naturales pares entre 6 y 18 inclusive.

Las posibles respuestas son:

Cámaras del tipo A	Cámaras del tipo B
6	8
8	7
10	6
12	5
14	4
16	3
18	2

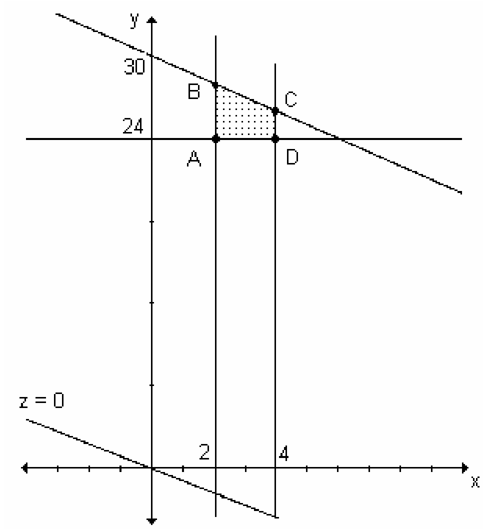
Problema

Un productor de televisión prepara un programa con un comediante y tiempo para comerciales. El publicista insiste en al menos 2 minutos de tiempo para publicidad, la estación insiste en no más de 4 minutos de tiempo para publicidad y el comediante insiste en al menos 24 minutos de programa. Además, el tiempo total asignado para la publicidad y la comedia no pueden exceder los 30 minutos. Si se ha determinado que cada minuto de publicidad (muy creativa) atrae 40 000 espectadores y cada minuto del programa a 45 000, ¿cómo debe dividirse el tiempo entre la publicidad y la programación para maximizar el número de espectadores por minuto?

Llamando con x a los minutos dedicados para publicidad y con y a los minutos destinados a programación y teniendo en cuenta todas las restricciones planteadas en el problema resulta el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+y\leq 30 \\ y\geq 24 \\ 2\leq x\leq 4 \end{cases}$

La función objetivo a maximizar es $z = 40\,000x + 45\,000y$.

Evaluando la función objetivo en los vértices del convexo obtenemos:



Vértices	$z = 40000x + 45000y$
A(2, 24)	1 160 000
B(2, 28)	1 340 000
C(4, 26)	1 330 000
D(4, 24)	1 240 000

El productor debe dedicar 2 minutos para publicidad y 28 minutos para programación para maximizar el número de espectadores por minuto que asciende a 1 340 000.

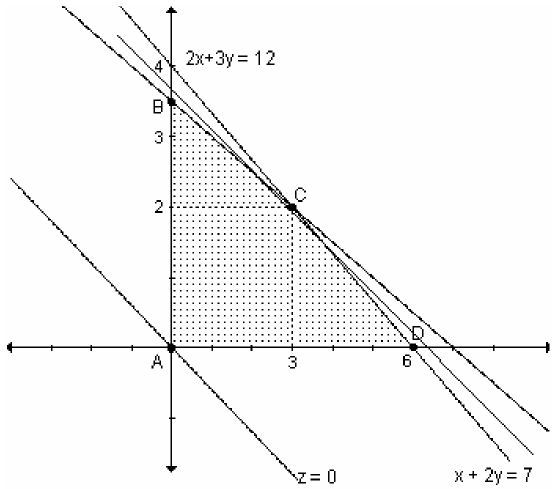
Problema

Un centro de salud sirve un almuerzo formado por dos platillos, A y B. Cada unidad de A tiene 2 gramos de grasa, 1 gramo de carbohidratos, 3 gramos de proteína, mientras que cada unidad de B tiene 3 gramos de grasa, 2 gramos de carbohidratos y 5 gramos de proteína. Si la persona que planeó el almuerzo no quiere proporcionar más de 12 gramos de grasa ni más de 7 gramos de carbohidratos, ¿cuántas unidades de A y de B deben servirse para maximizar la cantidad de proteína consumida?

Resumiendo los datos obtenemos:

	Grasa	Carbohidratos	Proteínas
Platillo A	2	1	3
Platillo B	3	2	5

Si llamamos con x a la cantidad de unidades del platillo A y con y a la cantidad de unidades del platillo B, debemos maximizar la función $z = 3x + 5y$ sujeto a las condiciones: $\begin{cases} 2x+3y \leq 12 \\ x+2y \leq 7 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.



Evaluando la función objetivo en cada uno de sus vértices resulta:

Vértices	$z = 3x + 5y$
A (0; 0)	0
B (0; 3,5)	17,5
C (3; 2)	19
D (6; 0)	18

La cantidad máxima de proteínas es 19 grs. y para lograrlo se deben consumir tres unidades del platillo A y dos unidades del platillo B.

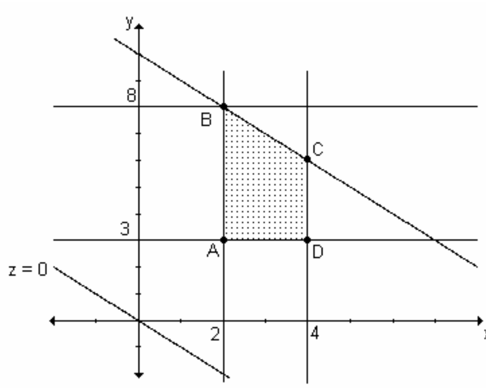
<u>Problema</u>

> Un artesano de muebles de madera produce dos tipos de artículos A y B. Mensualmente no puede producir más de 10 en total entre los dos tipos. La demanda del artículo A no puede ser menor que 2 y no debe superar a 4. Para el artículo B la demanda debe ser por los menos 3 y no exceder los 8 artículos. ¿Cuántos artículos de cada clase debe vender para obtener beneficio máximo si cada uno del tipo A y cada uno del tipo B le dejan \$ 400 de ganancia?

Llamando con x a la cantidad de artículos del tipo A y con y a la cantidad de artículos del tipo B resultan el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x+y \leq 10 \\ 2 \leq x \leq 4 \\ 3 \leq y \leq 8 \end{cases}$.

Debemos maximizar la función objetivo: $z = 400x + 400y$.
Gráficamente resulta el convexo cerrado que sombreamos.
Evaluando la función objetivo en los vértices del convexo solución obtenemos:

Vértices	$z = 400x + 400y$
A(2, 3)	2000
B(2, 8)	4000
C(4, 6)	4000
D(4, 3)	2800



El valor máximo 4000 se obtiene en los vértices B y C.

Podemos entonces asegurar además que el máximo beneficio se logra en todos los puntos del segmento de la recta x + y = 10 comprendidos entre B y C, cuando $2 \leq x \leq 4$.

Pero como se trata de números naturales (por ser cantidad de artículos) resulta que debe producir según alguna de las siguientes combinaciones:

- dos artículos A y ocho artículos B ó
- tres artículos A y siete artículos B ó
- cuatro artículos A y seis artículos B.

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.4 PROGRAMACIÓN LINEAL

1) Determine el valor máximo de z = x + y sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} -x+3y \leq 9 \\ 3x+y \geq 3 \\ y \leq -x+7 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

. ¿ Para qué valores de x e y se alcanza?

2) Determine el valor mínimo de z = x + 8y sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+2y-3 \leq 0 \\ x-4y+9 \geq 0 \\ x \geq 4y-3 \end{cases}$$

. Indique en qué punto se alcanza.

AUTOEVALUACIÓN Nº 7: PROGRAMACIÓN LINEAL

1) Dada la función z = x + 3y, determine el valor máximo, el valor mínimo y el punto donde los alcanza sujeto a las restricciones: $\begin{cases} 3y+4x-40 \leq 0 \\ y \geq x-3 \\ 2 \leq x \leq 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

2) Encuentre el valor mínimo de z = 2x + y sujeto a $\begin{cases} y-3 \geq 0 \\ x+y \leq 10 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$. ¿En qué punto lo alcanza?

3) Sea la función $z = y + ax$ sujeto a las restricciones $\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 7 \\ x + y - 9 \le 0 \end{cases}$

Sabiendo que su valor máximo es 12, analice los posibles valores de a.

4) Sea la función $z = ax + by$ sujeto a las restricciones $\begin{cases} 2y + 4x - 12 \le 0 \\ x + y - 1 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Sabiendo que su valor máximo es 30 en el punto (0, 6) y su valor mínimo es 2 en (1, 0), halle los valores de a y b.

5) Determine el valor mínimo de $z = 4x + 3y$ sujeto a las restricciones $\begin{cases} y - 2 \ge 0 \\ x - 3 \ge 0 \\ 8x + 6y - 24 \ge 0 \end{cases}$. ¿En qué punto lo alcanza?

6) Juana Pérez tiene una deficiencia alimenticia y se le aconseja tomar por lo menos 2400 mgrs. de hierro, 2100 mgrs. de vitamina B–1 y 1500 mgrs. de vitamina B–2. Una píldora Maxivite contiene 40 mgrs. de hierro, 10 mgrs. de B–1 y 5 mgrs. de B–2 y cuesta 6 centavos. Una píldora Healthovite proporciona 10 mgrs. de hierro, 15 mgrs. de B–1 y 15 mgrs. de B–2 y cuesta 8 centavos. ¿Qué combinación de píldoras satisface el requerimiento a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

7) Una panadería elabora pasteles y galletas. Cada lote de pasteles requiere dos horas de horno y tres horas en el departamento de decorado y da una ganancia de $ 40. Cada lote de galletas requiere una hora y media en el horno y 40 minutos de decorado y da una ganancia de $ 30. El horno está disponible no más de 15 horas al día, mientras que el personal de decorado no puede emplearse más de 13 horas al día. ¿Cuántos lotes de pasteles y galletas maximizará la ganancia diaria? ¿Cuál es dicha ganancia? Suponga cantidades enteras de lotes.

8) Una planta de energía quema petróleo y gas. Cada tonelada de petróleo genera 550 kilovatios por hora, emite 4 unidades de dióxido de azufre y 12 unidades de partículas suspendidas y cuesta $ 200. Cada tonelada de gas genera 500 kilovatios por hora, emite 12 unidades de dióxido de azufre y 10 partículas suspendidas y tiene un costo de $ 250. La oficina de protección ambiental restringe las emisiones diarias de dióxido de azufre a no más de 50 unidades y las de partículas suspendidas a no más de 80. Si la planta no quiere gastar más de 1500 dólares diarios en combustible, ¿cuánto combustible de cada clase debe comprar para maximizar la cantidad de energía generada?, ¿cuánta energía se generará?

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DEL CAPÍTULO

1) En la siguiente tabla se sintetizan los datos de producción de una empresa para sus dos productos A y B. Se utilizan tres máquinas y cada producto requiere cierta cantidad de horas en cada máquina.

Máquina	Hs. requeridas para el producto A	Hs. requeridas para el producto B	Disponibilidades
I	3	2	24
II	1	2	16
III	1	1	9

¿Cuántas unidades de cada producto deberán fabricarse para maximizar las ganancias si el producto A da una ganancia de \$ 500 y el B de \$ 350?. Grafique la situación.

2) Un comercio vende quesos de dos marcas A y B. La fábrica de los quesos de la marca A le envía sólo un máximo de 20 quesos por semana y por razones de espacio, en el comercio sólo pueden recibir 50 quesos por semana en total. Los quesos de la marca A dejan al comerciante un beneficio de \$ 12 por unidad y los de la marca B \$ 10.

a) ¿Qué cantidad les conviene recibir de cada marca por semana?

b) ¿Cuál es el beneficio en caso de venderlos todos?

3) El granjero López tiene 480 hectáreas de tierra en la que puede sembrar ya sea maíz o sorgo. Él calcula que tiene 800 horas de trabajo disponible durante la estación de verano. Dados los márgenes de utilidad y los requerimientos laborales mostrados a continuación, ¿cuánto debe plantar para maximizar su utilidad?, ¿cuál es esa utilidad máxima?

	Maíz	Sorgo
Utilidad	\$ 40 por hectárea	\$ 30 por hectárea
Trabajo	2 h por hectárea	1 h por hectárea

4) Una refinería de petróleo tiene una producción máxima de 2000 barriles de petróleo diarios. Produce dos tipos de petróleo: el tipo A que es utilizado para gasolina y el tipo B que es utilizado para calefacción. Hay un requerimiento de que al menos 300 barriles del tipo B sean producidos cada día. Si la utilidad es de \$ 3 por barril del tipo A y \$ 2 por barril del tipo B, encuentre la utilidad máxima diaria.

5) Un ebanista tiene 8 unidades de madera y 36 horas disponibles durante las cuales fabricará cofres artesanales de dos estilos diferentes A y B. El modelo A requiere tres unidades de madera y 8 horas de trabajo mientras que el modelo B requiere una unidad de madera y 10 horas de trabajo. Los precios de ambos tipos son \$ 58 y \$ 72. ¿Cuántas cajas de ambos modelos debe fabricar para maximizar su ingreso en la venta?. ¿Cuál es dicho ingreso?

6) Una floricultora cultiva azucenas y narcisos. Por cada unidad floral utiliza trabajo, fertilizante e insecticida. En la producción de una unidad de azucenas utiliza dos unidades de trabajo, cinco de fertilizante y una de insecticida. Por cada unidad de narcisos emplea tres unidades de trabajo, cuatro de fertilizantes y dos de insecticidas. La ganancia unitaria por cada tipo de flor es de 300 dólares por las azucenas y 250 dólares por los narcisos.

La floricultora dispone de 400 unidades de trabajo, 650 unidades de fertilizante y 200 unidades de insecticida. ¿Cuántas unidades de cada tipo de flor deberá producir con el objeto de maximizar su ganancia? ¿Cuál es dicha ganancia?

7) Un fabricante produce una podadora de pasto con motor y una cortadora para orillas. Estos productos son de tan buena calidad que la compañía puede vender todos los que fabrica, pero su capacidad de producción en las áreas de maquinado, soldado y ensamble es limitada. La compañía dispone de 600 horas semanales para el maquinado, 300 horas para soldadura y 550 horas para ensamble. El número de horas que se requiere para producir un solo objeto es:

Producto	Maquinado	Soldadura	Ensamble
Podadora	6	2	5
Cortadora	4	3	5

Las utilidades por la venta de una podadora es de $ 100 y de una cortadora, $ 80. ¿Cuántas podadoras y cortadoras se deben producir por semana para maximizar las ganancias?. Indique esa ganancia máxima.

8) En su consumo diario promedio de alimento, un animal rapaz necesita por lo menos 10 unidades del alimento A, 12 unidades del alimento B y 12 unidades del alimento C. Estos requerimientos se satisfacen cazando dos tipos de especies. Una presa de la especie I suministra 5, 2 y 1 unidades de los alimentos A, B y C respectivamente. Una presa de la especie II proporciona 1, 2 y 4 unidades de A, B y C respectivamente. Capturar y digerir una presa de la especie I requiere 3 unidades de energía, en promedio. El gasto de energía correspondiente a la especie II es de 2 unidades. ¿Cuántas presas de cada especie deberá capturar el depredador para satisfacer sus necesidades alimenticias, haciendo un gasto mínimo de energía?

9) Un campesino tiene 100 acres aprovechables para la siembra de avena y trigo. Las semillas de avena cuestan $ 5 por acre y las de trigo, $ 8 por acre. Los costos laborales son de $ 20 por acre por la avena y de $ 12 por acre para el trigo. El campesino espera un ingreso de $ 220 por acre de avena y de $ 250 de trigo por acre. Si no desea gastos mayores a $ 620 para las semillas y $ 1800 para mano de obra, ¿cuántos acres de cada cosecha deberá sembrar para maximizar sus ingresos?

10) Una repostera desea hacer panecillos y galletas. Cada panecillo requiere 2 tazas y media de harina y 2 tazas de azúcar mientras que en las galletas consume una taza de harina y media taza de azúcar. La repostera desea usar, a lo sumo, 70 tazas de harina y 50 tazas de azúcar. Si vende cada panecillo a $ 10 y cada galleta en $ 3, ¿cuántos panecillos y cuántas galletas deberá vender para maximizar su ingreso?

11) Un comerciante vende dos clases de artículos A y B. En la venta del artículo A obtiene una ganancia de $ 20 por unidad y en la venta del artículo B una ganancia de $ 30 por unidad. En su depósito sólo entran 100 artículos y sabe además, según lo encargado, que venderá por lo menos 15 artículos del tipo A y 25 del tipo B. El distribuidor solamente puede entregar al comerciante, como máximo, 60 artículos A y 50 artículos B. Suponiendo que los vendiera todos, ¿cuántos artículos de cada clase deberá entregar el distribuidor para obtener la máxima ganancia?. ¿Cuál es esa ganancia máxima?

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE DEL CAPÍTULO

1) La solución gráfica del sistema $\begin{cases} y > -x + 3 \\ y + x < 5 \end{cases}$ consta de:

a) Todos los puntos ubicados por debajo de la recta y = –x + 5.
b) Todos los puntos ubicados por encima de la recta y = –x + 3.
c) Todos los puntos ubicados por debajo de y = –x + 5 y por encima de y = –x + 3.
d) Todos los puntos ubicados por debajo de y = –x + 3 o por encima de y = –x + 5.

2) El sistema $\begin{cases} 2x + 5y < 20 \\ 2x + 2y > 24 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

a) Tiene por solución todos los puntos comprendidos entre $y = -\frac{2}{5}x + 4$ y y = –x + 12.
b) Tiene por solución todos los puntos ubicados por debajo de la recta 2x + 5y = 20 o por encima de 2x + 2y = 24.
c) Carece de solución.
d) Ninguna de los anteriores.

3) El sistema $\begin{cases} 4x + y > 20 \\ x + y < 20 \end{cases}$

a) Tiene por solución todos los puntos comprendidos entre y = –4x + 20 e y = –x + 20.
b) Tiene por solución todos los puntos ubicados por encima de x + y = 20 o por debajo de la recta 4x + y = 20.
c) Carece de solución.
d) Ninguna de los anteriores.

4) Al graficar las restricciones de un problema de programación lineal se obtiene un convexo de soluciones cuyos vértices son los puntos A(0, 0), B(0, 3), C(2, 6), D(4, 2) y E(5, 0). La función objetivo z = 7x + 3y alcanza su valor máximo en:

a) B **b)** C **c)** D **d)** E

5) Un problema de programación lineal es tal que al representar las restricciones del mismo se obtiene un convexo de soluciones de vértices A(0,0), B(0, 2), C(1, 2), D(3, 3) y E(5, 0). Determinando el punto en el que la función objetivo z = x + 2y es máxima se concluye que el problema:

a) Tiene solución única.
b) tiene infinitas soluciones.
c) no tiene solución.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

b) Sean los sistemas de inecuaciones en una variable:

a) $\begin{cases} 2x < 3 \\ 2x - 1 \geq -1 - 3x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} |x-3| \leq 2 \\ 3x - 24 > 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -4.(x-2) > 0 \\ 6x + 9 \leq 3.(x-1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 1 > 3 \\ |x| \leq 3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} |x+1| > 5 \\ 2x^2 < 18 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x^2 + 4 \leq 5 \\ 2x - 3 \geq 3x - 2 \end{cases}$

b) En cada caso obtenga analítica y gráficamente el conjunto solución.
ii) Defina por comprensión el conjunto solución.

2) Sean los sistemas de inecuaciones en dos variables:

a) $\begin{cases} x + y - 5 < 0 \\ y \geq 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y \leq x^2 \\ y - x < 2 \\ y + x - 2 < 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x > 2 \\ 2x - y \geq 0 \\ y - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$

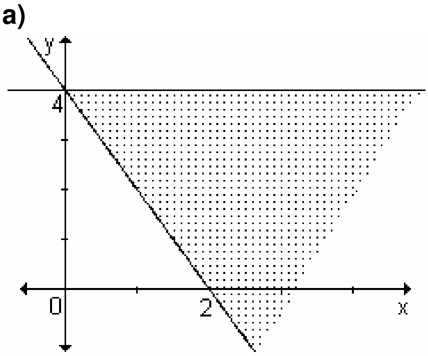
d) $\begin{cases} y < x + 1 \\ 2y + 1 > 2x \\ x \geq 1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} y < 5 \\ -3x + 2y - 6 \leq 0 \\ 2y + 5x \geq 10 \\ y < 2.(2x+1) \end{cases}$

f) $\begin{cases} -3x + 2y - 6 > 0 \\ y \leq \frac{3}{2}x - 3 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ y \leq 6 \\ y > 9 - x^2 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} y < 3 \\ x < -1 \\ y + 2 - x \leq 0 \end{cases}$

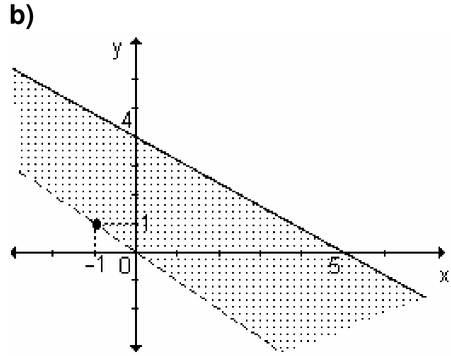
b) Interprete en un mismo sistema de coordenadas cartesianas ortonormales cada una de las inecuaciones del sistema correspondiente.
ii) Obtenga gráficamente el conjunto solución de cada sistema de inecuaciones.

3) Exprese mediante un sistema de inecuaciones las regiones marcadas en cada caso.

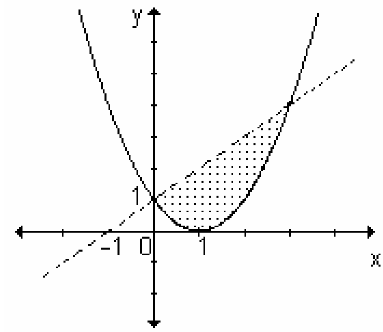
a)



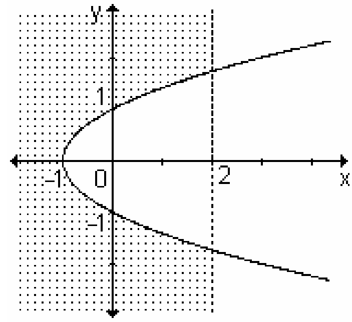
b)



c)



d)



4)a) Determine en qué punto alcanza el valor máximo z = 2x + y, sujeto a las restricciones $\begin{cases} x+y\geq 3 \\ y\leq x \\ x\leq 3 \end{cases}$. ¿Cuál es dicho valor máximo?

b) Determine en qué punto alcanza el valor mínimo z = 3x + 2y, sujeto a las restricciones $\begin{cases} y\leq 2x \\ y\leq -x+3 \\ y\leq -4x+12 \\ y\geq -3 \end{cases}$. ¿Cuál es dicho valor mínimo?

c) Determine en qué punto alcanza el valor máximo y el valor mínimo z = 2x + 5y sujeto a las restricciones $\begin{cases} y\geq 2+x \\ y\leq 1-x \\ x+4\geq 0 \end{cases}$. ¿Cuáles son dichos valores?

5. ANÁLISIS COMBINATORIO

> El método consiste en sí en ordenar en forma adecuada y arreglar las cosas en las que se debe poner atención.

René Descartes

5.1 Análisis combinatorio

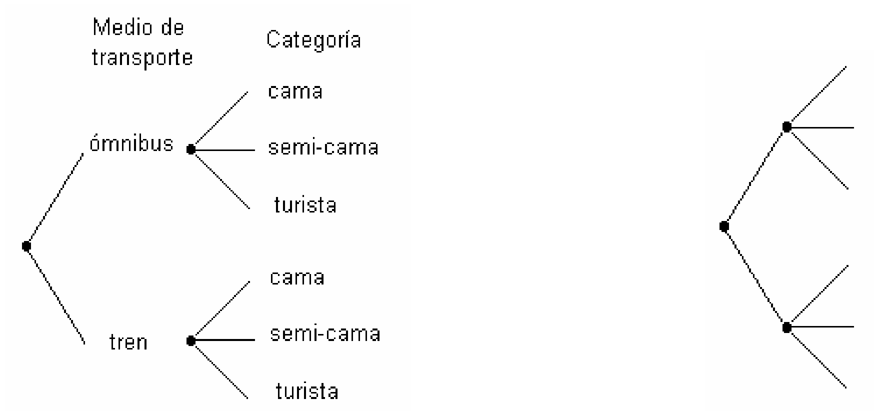
El cálculo combinatorio tiene por objeto analizar y determinar el número de agrupaciones posibles de elementos de un conjunto, bajo las restricciones que imponga el problema, o sea, de cuántas maneras diferentes se puede llevar adelante una tarea de agrupación u ordenamiento de unos cuantos elementos siguiendo una serie de reglas prefijadas. El surgimiento del interés por la combinatoria se produce en la India. En el siglo XII surgen escritos sobre distintas situaciones que se relacionan con analizar el esquema de las variaciones musicales y la aplicación en medicina para hallar las combinaciones posibles de sabores diferentes. En Europa el interés por la combinatoria se desarrolla durante la Edad Media y se asocia con fuerza a la cábala, es decir, a la creencia judía que trata de relacionar los números con la teología. Todo lo referido a la combinatoria moderna surge con Blas Pascal quien en 1654 desarrolla y establece relaciones entre los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio con los números combinatorios. En general, los problemas de combinatoria son fáciles de enunciar pero difíciles de resolver. Ésta es una rama de la matemática que no tiene un único método sistemático de resolución y no tiene demasiados resultados generales que se utilicen para resolver situaciones distintas. El cálculo combinatorio entonces, estudia la formación y el número de subconjuntos que se pueden obtener con los n elementos de un conjunto. Es decir, estudia cómo se combinan dichos elementos para formar los distintos subconjuntos. Podemos pensar en la *Combinatoria* como la técnica, habilidad o arte de contar sin enumerar. A través de ella podemos llegar a conocer, por ejemplo, el número de elementos de un conjunto, el número de casos posibles ante una determinada situación, el número de resultados que se pueden obtener después de una experiencia, etc., sin necesidad de enumerar detalladamente cada uno de ellos.

Problema

> Un docente debe, por razones laborales, trasladarse de una ciudad a otra. Para hacerlo puede optar por viajar en ómnibus o en tren. En cada uno de los casos puede elegir viajar en coches cama, semi-cama o clase turista. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar el viaje?

Si pensamos en una solución para el problema tenemos en cuenta que, por cada posible elección del medio de transporte, sus opciones son siempre tres: cama, semi-cama o clase turista. Dado que los medios de transporte disponibles son dos, la cantidad será $2.3 = 6$.

Esta situación se puede vizualizar mejor recurriendo a un *diagrama de árbol* o *árbol*. Estos *diagramas arbolados* facilitan el análisis del problema, permiten una mejor visualización de la situación planteada y guían el razonamiento hacia la búsqueda de soluciones.



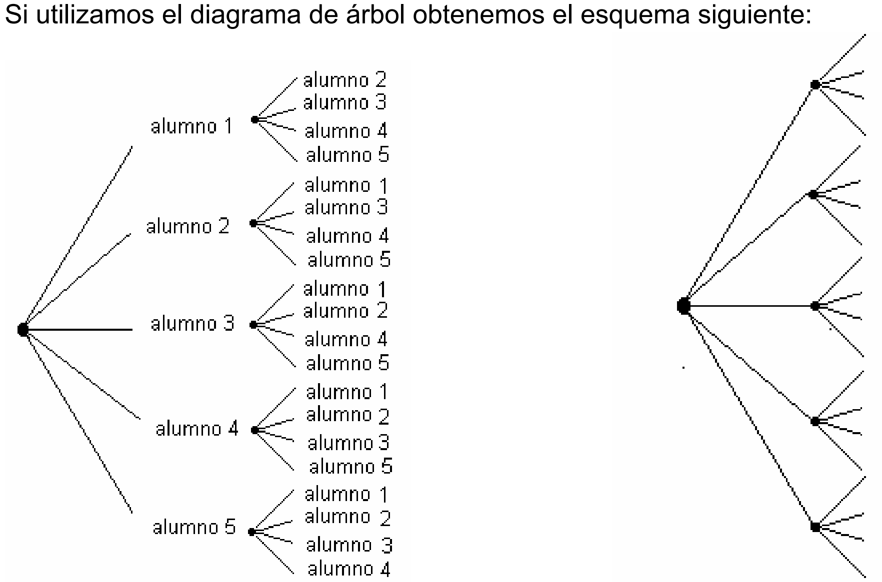
Cada rama terminal corresponde a una elección conjunta: ómnibus-cama; ómnibus-semicama; ómnibus-turista; tren-cama; tren-semicama y tren-turista
Contando el número total de ramas, en este caso seis, tenemos la solución para el problema planteado.

Problema

> En una clase de Matemática se forman grupos para trabajar con cinco integrantes. Se desea determinar de cuántas maneras se pueden elegir un coordinador y un secretario para cada uno de los grupos.

Para dar respuesta a este problema consideramos que el número de maneras en las que se puede elegir el coordinador de un grupo entre cinco personas es cinco. De todos modos una vez seleccionado el coordinador quedan cuatro formas diferentes de elegir al secretario entre los cuatro alumnos restantes. Podemos asegurar que existirán $5.4 = 20$ modos diferentes de seleccionar coordinador y secretario de un grupo de 5 alumnos.

Si utilizamos el diagrama de árbol obtenemos el esquema siguiente:



Cada rama terminal corresponde a una elección conjunta. Contando el número total de ramas, veinte, encontramos la solución al problema.
En estos problemas resultó muy sencillo realizar los diagramas arbolados, visualizar el listado de todos los casos posibles y contarlos. En numerosas oportunidades, los números incluidos son muy grandes y resulta imposible realizar el listado de casos. La operación realizada en los dos casos fue la multiplicación, ¿por qué?. Por cada opción que se elige en cada instancia se plantea o abre el mismo número de posibilidades para seleccionar la siguiente. De esto se desprende que el número de elecciones conjunta es el producto de los números de opciones que están disponibles en cada etapa y nos permite enunciar lo siguiente.

Principio de multiplicación en el conteo

Supongamos que un evento M puede ocurrir de m maneras distintas y después de que ha ocurrido, un evento N puede ocurrir de n formas diferentes. Entonces el número de maneras diferentes en las que ambos eventos M y N pueden ocurrir es m.n. Este principio puede extenderse o generalizarse a r eventos de forma muy sencilla. Supongamos que un evento se puede realizar de m_1 maneras diferentes, otro ocurre de m_2 formas distintas y así sucesivamente hasta llegar al evento r que se puede efectuar de m_r formas. El número total de formas de llevar a cabo estos eventos de manera conjunta resulta: $m_1.m_2.....m_r$

Problema

> Un estudiante de Agronomía puede asistir a Matemática en cualquiera de los tres horarios disponibles: 8, 10 ó 13 horas; a Inglés a las 19 ó a las 20 y a Morfología Vegetal a la hora 15 ó a las 17. ¿Cuál es el número de posibilidades que tiene para programar esas tres materias?

El estudiante tiene tres horarios posibles de Matemática, dos de Inglés y dos de Morfología Vegetal. Por cada horario de Matemática que elige, tiene dos de Inglés y una vez elegido éste, dos posibles para Morfología Vegetal. Aplicando el principio de multiplicación en el conteo debemos multiplicar las posibilidades de horarios de cada materia, es decir, posee $3.2.2 = 12$ posibilidades para programar sus materias.

Problema

> Un club cuenta con catorce integrantes: ocho hombres y seis mujeres. Se desea elegir un presidente, un secretario y un tesorero si:
> **a)** el presidente debe ser mujer, el secretario hombre y el tesorero mujer.
> **b)** el presidente y el secretario hombres y el tesorero mujer.
> **c)** todos los puestos deben ser cubiertos por mujeres.

a) Hay seis posibles mujeres para el cargo de presidente, ocho posibles hombres secretarios y cinco posibles mujeres tesorero (pues una ya fue elegida presidente); aplicando el principio de multiplicación en el conteo resulta que hay $6.8.5 = 240$ posibilidades.

b) Hay ocho posibles hombres para presidente, siete posibles hombres secretarios (ya que uno fue elegido presidente) y seis posibles mujeres tesorero; del principio de multiplicación en el conteo se desprende que existen 8.7.6 posibilidades, es decir 336.

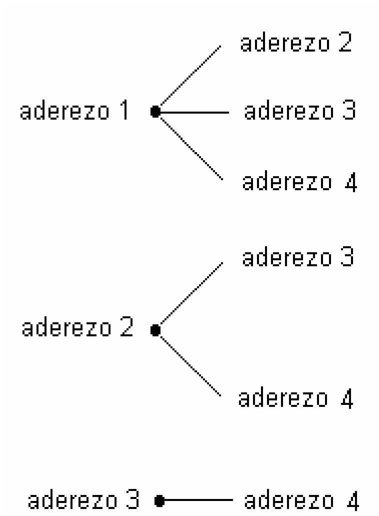
c) Existen seis posibles mujeres para presidente, cinco posibles mujeres secretario (pues una ya fue elegida presidente) y cuatro posibles mujeres tesorero (ya que dos fueron elegidas en los puestos anteriores); por el principio de multiplicación en el conteo, hay $6.5.4 = 120$ posibilidades.

Problema

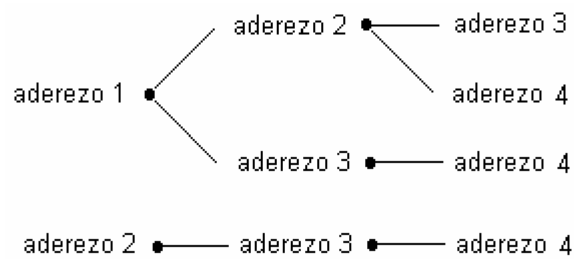
> En una heladería se publicita que es posible elegir entre cuatro aderezos para complementar el helado. Los helados se pueden preparar a gusto poniendo la cantidad y variedad de aderezos que el cliente desee. ¿Cuántas posibilidades tiene en total el cliente de preparar un helado de chocolate?

El cliente tiene:

- 1 posibilidad de no ponerle aderezo.
- 4 posibilidades de ponerle un aderezo.
- 6 posibilidades de ponerle dos aderezos que surgen del siguiente diagrama:



- 4 posibilidades de ponerle tres aderezos que surgen del siguiente diagrama:



- 1 posibilidad de ponerle los cuatro aderezos

El cliente tendrá posibilidad de obtener 16 variedades de helados:
sin aderezo + con 1 aderezo + con 2 aderezos + con 3 aderezos + con 4 aderezos

1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16

En este ejemplo vimos que las diferentes posibilidades se suman y no se multiplican dado que al mismo tiempo no se puede optar por poner un aderezo y dos aderezos. Podemos enunciar entonces el principio de la suma en el conteo.

Principio de la suma en el conteo

Sean M y N dos eventos excluyentes, es decir, que no pueden suceder al mismo tiempo. Si M puede ocurrir de m formas diferentes y N de n maneras entonces M o N pueden ocurrir de m + n maneras distintas.
Este principio al igual que el de la multiplicación puede generalizarse a un número r de eventos. Sean r eventos excluyentes. Si un evento puede ocurrir de m_1 formas diferentes, otro de m_2 maneras distintas y así sucesivamente hasta llegar al evento que se puede efectuar de m_r maneras.
El número total de formas distintas en que se puede llevar a cabo un evento u otro resulta $m_1 + m_2 + ... + m_r$.

Analicemos ahora algunas situaciones que se pueden presentar.

<u>Problema</u>

> ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos impares?

Podemos responder a esta pregunta siguiendo un trabajo muy rudimentario que consiste en enumerar todos los números generados para después contarlos. Aún para hacer la enumeración se necesita tener en cuenta algún método para no olvidar ninguna posibilidad. De todos modos, si resolvemos de esta forma, lo único que tenemos resuelto es este problema en particular pero no otro.
Analicemos cómo hacemos el razonamiento desde el Análisis Combinatorio. Cualquiera de los números buscados tiene la forma abc. Se sabe, por lo planteado en el problema que a, b y c deben ser distintos y pueden valer 1, 3, 5, 7 ó 9. Esto significa que hay cinco maneras diferentes de elegir el valor de a y, por cada valor de a elegido, cuatro posibles valores de b. Significa que existen $5.4 = 20$ maneras diferentes de ubicar las dos primeras cifras. De la misma forma, por cada uno de

los veinte números de dos cifras formados ab, para colocar la cifra c disponemos aún de tres dígitos. Podemos decir que existen 20.3 = 60 números distintos que se pueden formar utilizando los dígitos impares 1, 3, 5, 7 y 9.
Respuesta: se pueden obtener 5.4.3 = 60 números de tres cifras trabajando con los dígitos impares sin repetir sus cifras.

Problema

> ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos impares?

Siguiendo el mismo razonamiento los números buscados tienen la forma abc pero, al no hacer ninguna aclaración, consideramos que estas cifras pueden repetirse. Quiere decir que existen cinco formas de elegir el valor de a. Para cada valor elegido de a hay cinco posibles valores de b (1, 3, 5, 7 ó 9). Podemos decir entonces que resultan 5.5 = 25 maneras diferentes de ubicar las dos primeras cifras. De la misma manera existen cinco posibilidades para elegir el valor de c es decir, 25.5 = 125 números diferentes con posibilidad de repetición en sus cifras que se pueden formar con los dígitos impares.
Respuesta: se pueden obtener $5.5.5 = 5^3 = 125$ números de tres cifras trabajando con los dígitos impares con la posibilidad de repetir sus cifras.

Problema

> ¿Cuántos números de cinco cifras sin repetir ninguna se pueden formar con los cinco dígitos impares?

Debemos proceder igual que en el primer problema sólo que, por cada uno de los 60 números diferentes de tres cifras no repetidas, quedan dos dígitos disponibles para formar números de cuatro cifras. Es decir, existen 60.2 = 120 números de cuatro cifras. Y, de la misma manera, dado que ahora para cada uno de los 120 números de cuatro dígitos queda un dígito disponible para formar el de cinco cifras, resulta que hay 120.1 = 120 números diferentes que se podrán formar con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9 sin repetirlos.
Se podrán obtener 5.4.3.2.1 = 120 números de cinco cifras trabajando con los dígitos impares sin repetir sus cifras.

La teoría de combinatoria abarca en su estudio tres clases distintas de subconjuntos, distribuciones o agrupaciones que se pueden formar con n elementos, cada uno con características propias: *Arreglos* (o variaciones), *Permutaciones* y *Combinaciones*.

Si en las tres clases distintas de subconjuntos que se pueden formar no se repite ningún elemento, se habla de *Arreglos, Permutaciones y Combinaciones simples*, si los elementos se repiten, se habla de *Arreglos, Permutaciones y Combinaciones con repetición.*

5.2 Análisis combinatorio simple

Arreglos o variaciones simples

Analicemos las siguientes situaciones:

Problema

> Se dispone de tres banderines de diferentes colores: uno rojo, uno amarillo y uno verde. En el desarrollo de competencias escolares se colocan dos banderines en el mástil y cada par colocado tiene un significado diferente. ¿Cuántas señales distintas pueden generarse?

Para elegir el primer banderín tenemos tres opciones mientras que, por cada elección hecha, hay sólo dos posibilidades para elegir el segundo. En definitiva pueden ubicarse los banderines en el mástil de $3.2 = 6$ maneras distintas. Estas formas son: rojo-amarillo, amarillo-rojo, verde-rojo, rojo-verde, amarillo-verde y verde-amarillo.

Problema

> Para ver una obra de teatro en el costado izquierdo se ubican cinco bancos uno detrás de otro. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse los tres primeros chicos que llegan?

Podemos pensar que el primer espectador tiene cinco bancos para elegir, por cada elección hecha por éste hay cuatro para el segundo mientras que el tercer chico puede elegir entre cualquiera de los tres bancos restantes.
Los espectadores pueden ubicarse de $5.4.3 = 60$ maneras distintas.
En los dos problemas planteados se siguió el mismo razonamiento. En ambos casos fue necesario realizar una selección ordenada de los elementos (en el primer caso los banderines a colocar y en el otro los asientos a ocupar). Debemos destacar que en las selecciones, distribuciones o agrupamientos no sólo interesaron los elementos elegidos sino también en qué orden fueron elegidos.
En el primer problema nos preguntamos de cuántas maneras pueden elegirse ordenadamente dos elementos entre tres, mientras que en el otro se plantea el mismo interrogante pero de tres objetos entre cinco.
De manera similar podemos preguntarnos en forma genérica de cuántas maneras pueden elegirse ordenadamente k objetos entre los n objetos distintos de un conjunto dado teniendo en cuenta que k es menor o igual que n.
Cada una de las selecciones ordenadas que se pueden formar reciben el nombre de variaciones o arreglos de n objetos tomados de k en k.
Definición: Dado un conjunto E de n elementos distintos, $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, se llama arreglo o variación de orden k ($k \leq n$, $n \in N$, $k \in N$) a toda agrupación o subconjunto ordenado compuesto de k elementos de E.

Notación $A_{n,k}$: arreglos de n elementos tomados de k en k.

$V_{n,k}$: variaciones de n elementos tomados de k en k.

La definición anterior nos permite decir: los subconjuntos o agrupaciones difieren entre sí por el orden de los elementos o al menos por un elemento.

Formación de los arreglos o variaciones

Para formar todos los arreglos, veremos la siguiente regla:

1) Los arreglos de n elementos tomados de uno en uno son:

$$V_{n,1} = A_{n,1}:\ \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \ldots, \{a_n\}$$

2) Para formar los arreglos tomados de dos en dos, colocamos a la derecha de cada arreglo anterior, cada uno de los elementos restantes, tal como se indica:

$$V_{n,2} = A_{n,2}: \quad \left.\begin{array}{l} \{a_1,a_2\}, \{a_2,a_1\}, \{a_3,a_1\}, \ldots, \{a_n,a_1\} \\ \{a_1,a_3\}, \{a_2,a_3\}, \{a_3,a_2\}, \ldots, \{a_n,a_2\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{a_1,a_n\}, \{a_2,a_n\}, \{a_3,a_n\}, \ldots, \{a_n,a_{n-1}\} \end{array}\right| \text{(n–1) filas}$$

Para los arreglos tomados de 3 en 3 y los siguientes, se sigue el mismo proceso.

Número de arreglos

En general, en los casos en que se aplica la teoría de combinatoria, más que saber cuáles son los subconjuntos, interesa saber cuántos son.

Veamos cómo se calcula el número de arreglos de n elementos tomados de k en k: $V_{n,k} = A_{n,k}$. Para ello, debemos tener en cuenta las consideraciones anteriores.

Según **1)**, el número de arreglos unitarios es n: $V_{n,1} = A_{n,1} = n$.

En el cuadro del punto **2)**, cada columna proviene de uno de los arreglos unitarios, de modo que hay $A_{n,1}$ columnas y (n –1) filas. Luego, el número de arreglos de n elementos tomados de dos en dos es:

$V_{n,2} = A_{n,2} = A_{n,1}.(n-1) = n.(n-1)$ (dos factores)

Si seguimos analizando, nos damos cuenta que para pasar de un arreglo a otro que tenga un elemento más, hay que introducir un nuevo factor cuyo valor será menor en una unidad respecto al anterior.

$V_{n,3} = A_{n,3} = n.(n-1).(n-2)$ (tres factores)

$V_{n,4} = A_{n,4} = n.(n-1).(n-2).(n-3)$ (cuatro factores)

Observando las expresiones anteriores, vemos que el último factor es la diferencia entre n y un número cuyo valor es siempre igual al número de elementos de cada subconjunto o agrupación menos uno. En general, los arreglos de n objetos tomados de k en k serán:

$V_{n,k} = A_{n,k} = n.(n-1).(n-2) \ldots\ldots [n-(k-1)]$ y de aquí:

$V_{n,k} = A_{n,k} = n.(n-1).(n-2) \ldots\ldots (n-k+1)$ (k factores)

Observación: el número de arreglos que pueden efectuarse con n objetos tomados de k en k es igual al producto de k factores consecutivos decrecientes que comienzan con n.

EJERCICIOS

1) Escriba el valor de n y k en cada caso:

a) $A_{n,k} = 7.\ 6.\ 5$ **b)** $A_{n,k} = 2.\ 3.\ 4.\ 5$ **c)** $A_{n,k} = 11.\ 10.\ 9.\ 8.\ 7$

2) Escriba en la forma $A_{n,k}$:

a) $n.(n-1).(n-2)$ **b)** $(n-1).(n-2)......(n-7)$

c) $(n+3).(n+2).......(n-1)$

RESPUESTAS

1)a) $n = 7,\ k = 3$ **b)** $n = 5,\ k = 4$ **c)** $n = 11,\ k = 5$

2)a) $A_{n,3}$ **b)** $A_{n-1,7}$ **c)** $A_{n+3,5}$

Factorial de un número

Cuando se quiere expresar en forma abreviada el producto de los números naturales consecutivos desde 1 hasta n, usamos una notación especial n! (factorial de n). Podemos escribir $n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$

Propiedades:

1) $n! = n.(n-1)!$ **2)** $1! = 1$ **3)** $0! = 1$

EJERCICIOS

1) Simplifique y calcule:

a) $\frac{6!}{4!}$ **b)** $\frac{8!}{3!}$ **c)** $\frac{(x-3)!}{(x-1)!}$ **d)** $\frac{(n+2)!}{n!}$

2) Verifique las siguientes identidades:

a) $\frac{(m-2)!}{(m-1)!} - \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m(m-1)}$ **b)** $\frac{x!}{(x-2)!} - \frac{(x-1)!}{(x-3)!} = 2x - 2!$

c) $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

RESPUESTAS

1)a) 30 **b)** 6720 **c)** $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ **d)** (n + 2)(n + 1)

Expresión de los arreglos por medio del factorial

Ya vimos que $A_{n,k} = n.(n-1).(n-2)...(n-k+1)$, pero si multiplicamos y dividimos el segundo miembro por (n – k)! obtenemos:

$$V_{n,k} = A_{n,k} = \frac{n.(n-1)...(n-k+1).(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$V_{n,k} = A_{n,k} = \frac{n.(n-1)...(n-k+1).(n-k).(n-k-1)...3.2.1}{(n-k)!}$$

En el numerador resulta el producto de todos los números consecutivos desde n hasta la unidad, o sea n!, luego: $V_{n,k} = A_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Problema

> Se desea elegir la comisión directiva de un club que posee veinte miembros. Dicha comisión consiste en un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. ¿Cuántas mesas directivas son posibles?

Del enunciado se desprende que además de ser seleccionado interesa el puesto a ocupar. Podemos pensar que los cuatro cargos se ocuparán en función de un primer puesto: presidente, un segundo puesto: vicepresidente, un tercer puesto: secretario y un cuarto puesto: tesorero. Necesitamos seleccionar cuatro de los veinte miembros y acomodarlos en todos los órdenes posibles, o sea, debemos encontrar las variaciones de veinte elementos tomados de cuatro en cuatro.

$$V_{20,4} = \frac{20!}{(20-4)!} = \frac{20!}{16!} = \frac{20.19.18.17.16!}{16!} = 116\ 280$$

Existen 116 280 maneras posibles de formar la comisión directiva del club.

EJERCICIOS

1) En cada problema realice un diagrama de árbol que permita visualizar la situación y calcule el número pedido mediante la fórmula que corresponda.

a) ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar utilizando el 1, el 2, el 4, el 5, el 7 y el 8 si ninguna cifra se repite?

b) Se dispone de tres premios distintos que deben ser repartidos entre 5 alumnos. ¿ De cuántas formas puede hacerse esa distribución?

c) Un entrenador dispone de 20 jugadores para formar un equipo de fútbol. ¿ Cuántas alineaciones distintas puede hacer?

2)a) Escriba todas las variaciones posibles de tres elementos que se pueden formar en el conjunto { m, n, o, p}.

b) Escriba todas las variaciones posibles de dos elementos que se pueden formar en el conjunto { 10, 11, 12}.

3) Calcule: **a)** $A_{6,5}$ **b)** $A_{10,3}$ **c)** $\dfrac{V_{5,3} - V_{4,2}}{V_{3,2} + V_{2,1}}$ **d)** $V_{5,2} + 2!\, V_{4,2}$

RESPUESTAS

1)a) 360 **b)** 60 **c)** $6,7 \cdot 10^{12}$

2)a) {m, n, o}; {m, n, p}; {m, o, n}; {m, o, p}; {m, p, n}; {m, p, o}; {n, m, o}; {n, m, p}; {n, o, m}; {n, o, p}; {n, p, m}; {n, p, o}; {o, m, n}; {o, m, p}; {o, n, m}; {o, n, p}; {o, p, m}; {o, p, n}; {p, m, n}; {p, m, o}; {p, n, m}; {p, n, o}; {p, o, m}; {p, o, n}

b) {10, 11}; {10, 12}; {11, 10}; {11, 12}; {12, 10}; {12, 11}

3)a) 720 **b)** 720 **c)** 6 **d)** 44

Permutaciones simples

Al estudiar los arreglos o variaciones surge que no se excluye el caso en que el número de objetos de cada arreglo coincida con el número total de elementos disponibles.

A las variaciones o arreglos así obtenidos, se las llama *permutaciones*.

Definición: Dado un conjunto $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de n elementos distintos, se llama permutación simple de E a toda agrupación o conjunto ordenado compuesto de n elementos de E.

Notación P_n: permutaciones de n elementos

La definición anterior nos permite decir que una permutación se diferencia de otra sólo en el orden en que están colocados los elementos.

$$P_n = V_{n,n} = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \qquad \Rightarrow \quad P_n = n!$$

<u>Problema</u>

Cinco ciclistas corren una carrera en el velódromo local pero uno de ellos abandona y otra queda descalificado. ¿Cuántas posibilidades hay para ocupar el podio al cual acceden los tres primeros clasificados?

Si bien largan la carrera cinco ciclistas terminan sólo tres. Para saber quienes ocupan el podio interesa el orden de llegada, o sea, se trata de permutaciones de orden tres, $P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$. Existen 6 posibilidades de ocupar el podio.

<u>Problema</u>

Un cliente recuerda que 3, 5, 8 y 9 son los cuatro dígitos de su clave de acceso al cajero automático. Desafortunadamente ha olvidado el orden de los números. ¿Cuál es el número máximo posible de intentos necesarios para obtener la clave correcta?

Lo que interesa en este problema es el orden pues deben estar los 4 dígitos. Se trata de una permutación de orden 4, $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$
El número máximo de intentos posibles para poder abrir el cajero es 24.

EJERCICIOS

1) En cada problema realice un diagrama de árbol que permita visualizar la situación y calcule el número pedido mediante la fórmula que corresponda.

a) Tres personas deben ocupar tres sillas dispuestas frente a una mesa sobre un estrado. ¿De cuántas formas distintas pueden hacerlo?

b) Usando las cifras 3, 4, 5 y 6: ¿cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden formar?

c) ¿Cuántos son los anagramas de la palabra DURABLE?

d) ¿Cuántos de los anagramas de la palabra MONTE comienzan con vocal?

2) Forme todas las permutaciones posibles de los elementos de cada conjunto dado:

a) $A = \{a, b, c\}$ **b)** $B = \{1, 2, 3, 4\}$

3) Calcule:

a) P_6 **b)** $3!\, P_4$ **c)** $\dfrac{P_5 - P_2}{3!}$ **d)** $\dfrac{6P_7}{P_4}$

RESPUESTAS

1)a) 6 **b)** 24 **c)** 5040 **d)** 48

2)a) {a, b, c}; {a, c, b}; {b, a, c}; {b, c, a}; {c, a, b}; {c, b, a}

b) {1, 2, 3, 4}; {1, 2, 4, 3}; {1, 3, 2, 4}; {1, 3, 4, 2}; {1, 4, 2, 3}; {1, 4, 3, 2}; {2, 1, 3, 4}; {2, 1, 4, 3}; {2, 3, 1, 4}; {2, 3, 4, 1}; {2, 4, 1, 3}; {2, 4, 3, 1}; {3, 1, 2, 4}; {3, 1, 4, 2}; {3, 2, 1, 4}; {3, 2, 4, 1}; {3, 4, 1, 2}; {3, 4, 2, 1}; {4, 1, 2, 3}; {4, 1, 3, 2}; {4, 2, 3, 1}; {4, 2, 1, 3}; {4, 3, 1, 2}; {4, 3, 2, 1}

3)a) 720 **b)** 144 **c)** $\dfrac{59}{3}$ **d)** 1260

Combinaciones simples

Problema

> Una profesora de Inglés tiene siete alumnos. Con ellos quiere trabajar formando grupos de tres alumnos en cada uno. ¿Cuántos grupos distintos puede formar?

Si nos interesa formar grupos ordenados, teniendo en cuenta lo desarrollado resulta que la cantidad de grupos diferentes corresponde a $A_{7,3} = \dfrac{7!}{4!} = 210$.

Pero en los grupos de alumnos no importa el orden en el que se nombran los mismos. Si consideramos elecciones ordenadas contamos cada grupo formado tantas veces como maneras hay que permutar los tres alumnos elegidos. Debemos entonces pensar que la cantidad de grupos distintos resulta de resolver: $\frac{A_{7,3}}{3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!3.2} = 35$

Existen treinta y cinco formas distintas de agrupar tres alumnos de una clase de siete.

En este problema contamos la cantidad de formas posibles de elegir tres alumnos de una clase de siete alumnos sin que nos interese el orden de esa elección.

Problema

> Conocidos ocho puntos de una circunferencia, ¿cuántos triángulos con vértices en esos puntos se pueden construir?

Para dibujar triángulos debemos elegir sus tres vértices entre los ocho puntos dados. Igual que en el problema anterior si nos interesara el orden podríamos formar $A_{8,3} = \frac{8!}{5!} = 8.7.6 = 336$ triángulos. Pero sabemos que un triángulo queda determinado aunque sus vértices estén dados en cualquier orden. Si consideramos elecciones o distribuciones ordenadas contamos cada triángulo tantas veces como formas existan de permutar los tres vértices. Por eso, la cantidad real de triángulos es la que resulta de resolver $\frac{A_{8,3}}{3!} = \frac{336}{6} = 56$.

Hay cincuenta y seis triángulos distintos que se pueden formar con ocho puntos dados en una circunferencia.

En este problema calculamos la cantidad de maneras distintas de elegir tres elementos de un conjunto de ocho sin que nos interese el orden de la elección.

Podemos pensar que se nos presenta un problema nuevo: encontrar de cuántas maneras pueden elegirse k objetos de un conjunto de n, sin que interese el orden en el que aparecen. Cada una de las agrupaciones planteadas recibe el nombre de combinación de n elementos tomados de k en k.

Definición: Dado un conjunto $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de n elementos distintos, se llama combinación simple de orden k (con $k \le n$, $n \in N$, $k \in N$) a toda agrupación o subconjunto compuesto de k elementos de E.

Notación $C_{n,k}$: combinaciones de n elementos tomados de k en k.

La definición anterior nos permite decir que dichos subconjuntos no son ordenados y en consecuencia, difieren por lo menos en un elemento.

Número de combinaciones

Obtenidas las combinaciones de n elementos tomados de k en k, permutando los k elementos de cada una, se obtienen las variaciones de n elementos tomados de k en k.

$$C_{n,k}.P_k = A_{n,k} \Rightarrow C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nota: Se debe tener muy en cuenta la diferencia entre arreglos y combinaciones.

- Un arreglo o variación es una elección o agrupamiento ordenado de k elementos entre n dados.
- Una combinación es una elección o agrupamiento de k elementos de n dados (no interesa el orden de elección).

Problema

Un equipo de básquet consta de quince jugadoras. Para el partido de la próxima semana el entrenador debe integrar un plantel con cinco jugadoras. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?

Del enunciado del problema surge que interesa la jugadora elegida pero no el orden de la elección. Se trata de una combinación de quince jugadoras tomadas de cinco en cinco. Es decir, $C_{15,5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5!10!} = 3003$.

El entrenador tiene 3003 maneras diferentes de armar el plantel.

Problema

Un estudiante tiene cinco libros de Matemática y ocho de Inglés. ¿De cuántas formas puede acomodar tres libros de Inglés y cuatro de Matemática en un estante de la biblioteca?

El número de formas de seleccionar tres libros de Inglés entre los ocho que tiene es una combinación de ocho elementos tomadas de tres en tres ($C_{8,3}$). De modo similar la cantidad de maneras de elegir cuatro de los cinco libros de Matemática es la combinación de cinco elementos tomados de a cuatro ($C_{5,4}$).
Luego de seleccionar los siete libros, el número de formas de acomodarlos en un estante es una permutación de siete elementos: P_7.
El número total de formas que puede seleccionar los libros y acomodarlos es:

$$C_{8,3}.\ C_{5,4}.P_7 = \frac{8!}{(8-3)!3!}.\frac{5!}{(5-4)!4!}.7! = 1\ 411\ 200$$

El estudiante tiene 1 411 200 formas distintas de acomodarlos en el estante de la biblioteca.

Problema

Con los cinco primeros dígitos, ¿cuántas matrículas de cinco cifras distintas se pueden formar sin que aparezca como primer número el 3?

La cantidad de matrículas que se pueden formar sin repetir ningún dígito resulta de una permutación de cinco elementos. Pero como no podemos utilizar el 3 como primera cifra debemos restarle todas aquellas agrupaciones que comienzan con 3. Dicha cantidad es una permutación de orden cuatro.

$P_5 - P_4 = 120 - 24 = 96$

Existen noventa y seis matrículas que se pueden formar con los cinco primeros dígitos sin que se repitan las cifras ni que aparezca en primer lugar el 3.

Problema

> Un restaurante ofrece cualquier combinación de cinco condimentos para sus hamburguesas, anunciando que el cliente tiene treinta y dos posibilidades distintas a su disposición. ¿Cómo se puede comprobar lo publicitado en este local?

El cliente puede elegir no poner condimentos, ponerle un condimento, dos condimentos, tres condimentos, cuatro condimentos o cinco condimentos, es decir, las posibilidades surgen de la suma:

$C_{5,0} + C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$

De esta manera podemos asegurar que el comerciante tenía razón en su anuncio.

A modo de resumen:

Permutaciones	Agrupaciones que difieren entre sí por el orden de los elementos.
Combinaciones	Conjuntos o agrupaciones que difieren de otros al menos por alguno de sus elementos.
Variaciones	Agrupaciones que difieren de otras ya sea por el orden o bien, al menos por alguno de sus elementos.

EJERCICIOS

1) En cada problema realice un diagrama de árbol que permita visualizar la situación y calcule el número pedido mediante la fórmula que corresponda.

a) Diez estudiantes se postulan para formar la comisión de delegados de cierto curso. ¿De cuántas formas distintas se pueden formar comisiones de tres miembros?

b) Se dispone de tres premios iguales que deben ser repartidos entre cinco alumnos. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse dicha distribución?

c) ¿Cuántos productos podemos obtener si tomamos 4 factores distintos entre 2, 3, 5, 7, 11?

2)a) Escriba todas las combinaciones posibles de tres elementos que se pueden formar en el conjunto {m, n, o, p}.

b) Escriba todas las combinaciones posibles de dos elementos que se pueden formar en el conjunto {10, 11, 12}.

3) Calcule:

a) $C_{6,3} + C_{7,5}$ **b)** $3!\, C_{4,2} - C_{8,6}$ **c)** $\dfrac{C_{9,4}}{C_{7,5} - C_{6,3}}$ **d)** $\dfrac{P_3 + C_{5,2}}{A_{6,4}}$

RESPUESTAS

1)a) 120 **b)** 10 **c)** 5

2)a) {m, n, o}; {m, n, p}; {m, o, p}; {n, o, p} **b)** {10, 11}; {10,12}; {11,12}

3)a) 41 **b)** 8 **c)** 126 **d)** $\dfrac{2}{45}$

5.3 Números Combinatorios

Definición: Dados dos enteros no negativos m y p, con $p \leq m$ se llama número combinatorio de numerador m y denominador p (u orden p) al número natural $\dfrac{m!}{p!.(m-p)!}$.

Notación : $\dbinom{m}{p} = \dfrac{m!}{p!.(m-p)!}$

Observaciones:

a) Existen m + 1 números combinatorios de numerador m:

$$\binom{m}{0}\binom{m}{1}\binom{m}{2}\ldots\binom{m}{m-1}\binom{m}{m}$$

b) $\dbinom{m}{0} = \dfrac{m!}{0!.m!} = 1$

c) $\dbinom{m}{1} = \dfrac{m!}{1!.(m-1)!} = \dfrac{m!}{(m-1)!} = m$

d) $\dbinom{m}{m} = \dfrac{m!}{m!.0!} = \dfrac{m!}{m!} = 1$

Números combinatorios complementarios

Dos números combinatorios son complementarios sí y sólo sí tiene igual numerador y la suma de los denominadores es igual al numerador común.

$\dbinom{m}{p}$ y $\dbinom{m}{m-p}$ son combinatorios complementarios puesto que $p + (m - p) = m$

Propiedad: Los números combinatorios complementarios son iguales

$$\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$$

Demostración:

Se sabe que: $\binom{m}{p} = \dfrac{m!}{p!(m-p)!}$.

Si desarrollamos $\binom{m}{m-p} = \dfrac{m!}{(m-p)!\left[m-(m-p)\right]!} = \dfrac{m!}{(m-p)!\,p!}$ observamos que coincide con el anterior, quedando demostrada la propiedad.

Ejemplo: Sin desarrollar los números combinatorios, justifique por qué son iguales $\binom{479}{137}$ y $\binom{479}{342}$.

Los números combinatorios dados son complementarios ya que tienen el mismo numerador (479) y la suma de los denominadores (137 + 342) es igual al numerador (479). Los números combinatorios complementarios son iguales.

Ejemplo: Calcule, sin desarrollar los números combinatorios, el valor de x que verifica: $\binom{7}{2x+1} = \binom{7}{3}$.

Para que los números combinatorios dados sean iguales se presentan dos posibilidades:

a) Que tengan igual numerador e igual denominador. Para ello se debe cumplir que: $2x+1 = 3$. Despejando obtenemos $x = 1$.

Verificación: $\binom{7}{2.1+1} = \binom{7}{3} \quad \Rightarrow \quad \binom{7}{3} = \binom{7}{3}$ ✓

b) Que sean complementarios, para lo cual $2x + 1 + 3 = 7$. Resolviendo la ecuación, $x = \dfrac{3}{2}$.

Verificación: $\binom{7}{2.\frac{3}{2}+1} = \binom{7}{3} \quad \Rightarrow \quad \binom{7}{4} = \binom{7}{3}$, igualdad verdadera ya que son números complementarios.

Por lo tanto las soluciones de la ecuación son $x = 1$, $x = \dfrac{3}{2}$.

Ejemplo: Resuelva, sin desarrollar los números combinatorios, la siguiente ecuación: $\binom{23}{x} = \binom{23}{x+1}$.

Para ser iguales, los números $\binom{23}{x}$ y $\binom{23}{x+1}$ deben ser complementarios (se descarta la posibilidad de que sus denominadores sean iguales dado que son consecutivos). Debemos encontrar el valor de x que verifique $x + x + 1 = 23$. Despejando podemos asegurar que $x = 11$.

Verificación: reemplazando x = 11 en la ecuación obtenemos $\binom{23}{11}=\binom{23}{12}$ que es una igualdad verdadera ya que son números complementarios.

Ejemplo: Halle el valor de x para que se verifique la igualdad: $\binom{12}{2x-6}=\binom{12}{x+3}$.

Para que se verifique la igualdad puede suceder que:

- sean iguales los denominadores, es decir:

  $2x - 6 = x + 3 \Rightarrow x = 9$, de donde resulta $\binom{12}{12}=\binom{12}{12}$, pero también

puede ocurrir

- que sean números combinatorios complementarios, es decir:

  $(2x - 6) + (x + 3) = 12 \Rightarrow x = 5$, de donde resulta: $\binom{12}{4}=\binom{12}{8}$

Fórmula de Stieffel o de recurrencia

La suma de dos números combinatorios de igual numerador y de órdenes consecutivos, es otro número combinatorio cuyo numerador es el de los sumandos aumentado en 1 y cuyo orden es el mayor de los órdenes de los sumandos.

Simbólicamente: $\binom{m-1}{p-1}+\binom{m-1}{p}=\binom{m}{p}$

Demostración: $\binom{m-1}{p-1}+\binom{m-1}{p}=\dfrac{(m-1)!}{(p-1)!(m-1-p+1)!}+\dfrac{(m-1)!}{p!(m-p-1)!}$

Pero $\dfrac{(m-1)!}{(p-1)!(m-p)!}+\dfrac{(m-1)!}{p!(m-p-1)!}=\dfrac{p\,(m-1)!+(m-p)\,(m-1)!}{p!(m-p)!}$ y sacando factor común $(m-1)!$ resulta $\dfrac{(p+m-p)\,(m-1)!}{p!\,(m-p)!}=\dfrac{m\,(m-1)!}{p!\,(m-p)!}=\dfrac{m!}{p!\,(m-p)!}=\binom{m}{p}$

Ejemplo: Resuelva, sin realizar cálculos, las siguientes ecuaciones:

a) $\binom{10}{4}+\binom{10}{x}=\binom{11}{5}$ **b)** $\binom{x}{6}+\binom{x}{7}=\binom{12}{7}$

En ambos casos podemos observar que, para valores adecuados de x, se verificaría la fórmula de Stieffel o de recurrencia.

Para que ello ocurra, en **a)** x debe ser igual a cinco y en **b)** x deber ser once.

Reemplacemos para comprobarlo: **a)** $\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\binom{11}{5}$ **b)** $\binom{11}{6}+\binom{11}{7}=\binom{12}{7}$

Triángulo de Tartaglia (Triángulo aritmético)
Aplicando las propiedades anteriores se pueden calcular los números combinatorios de un triángulo, como el que sigue, llamado de Tartaglia.

$\binom{0}{0}$						fila 1
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					fila 2
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				fila 3
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			fila 4
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		fila 5
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	fila 6
....	....	....	....	....	....	

Los valores son:

1						fila 1
1	1					fila 2
1	2	1				fila 3
1	3	3	1			fila 4
1	4	6	4	1		fila 5
1	5	10	10	5	1	fila 6
....	....	....	....	....	....	

Nicola Tartaglia es un matemático italiano. Nació en 1499 en Brescia, república de Venecia (ahora Italia) y murió el 13 de diciembre de 1557 en el mismo lugar. El verdadero nombre de Tartaglia era Fontana sin embargo una agresión sufrida cuando era pequeño lo dejó tartamudo por lo que es más conocido por su apodo Tartaglia (tartamudo). Este inconveniente no constituyó un obstáculo para que enseñara matemática en diferentes universidades italianas. A él se le debe el desarrollo del primer método general para resolver ecuaciones de tercer grado. Además de muchos otros trabajos es el autor de un Tratado general de los números y las medidas (1543) en el que publica por primera vez el triángulo que lleva su nombre. Sin embargo el triángulo es conocido desde antes. El matemático Yang Hui ya lo conocía en el siglo XIII.

Nota: Observar que en el cálculo de cada coeficiente del triángulo tiene mucha importancia la propiedad de los números combinatorios complementarios y la fórmula de Stieffel.

El triángulo de Tartaglia se suele llamar también Triángulo de Pascal. Sin embargo el de Pascal es un triángulo aritmético que lleva el nombre del filósofo francés del siglo XVII Blaise (Blas) Pascal (1623–1662), quién publicó un tratado sobre el mismo por primera vez. Pascal nació en Clermont, Francia y fue considerado un niño prodigio para la matemática. El triángulo desarrollado por Pascal es una generalización del de Tartaglia dado que se genera a partir de los números a y b. Cada uno de los otros números que forman el triángulo se obtiene (lo mismo que en el de Tartaglia) sumando los dos que están inmediatamente por encima de él.

EJERCICIOS

1) Calcule:

a) $\binom{13}{6}$ **b)** $\binom{9}{5}$ **c)** $\binom{12}{11}$

2) Sin realizar el cálculo justifique por qué son iguales los números combinatorios:

a) $\binom{286}{72}$ y $\binom{286}{214}$ **b)** $\binom{36}{0}$ y $\binom{24}{0}$

3) Determine, sin realizar operaciones, el valor de m si $\binom{11}{3}+\binom{11}{m}=\binom{12}{3}$. Justifique.

4) Halle, sin desarrollar los números combinatorios, los valores de x que verifican: $\binom{38}{3x-2}=\binom{38}{5+2x}$.

5) Estas son algunas de las propiedades que se pueden observar en el triángulo de Tartaglia. Muestre que se cumplen tomando como ejemplo cualquier fila del triángulo y encuentre qué propiedad de las vistas para los números combinatorios se cumple en cada caso.

a) Cada fila comienza y termina con uno.

b) En cada fila, los coeficientes son simétricos.

c) Exceptuando el primer y el último número de cada fila, cada número es suma de los dos que tiene encima.

RESPUESTAS

1)a) 1716 **b)** 126 **c)** 12

2)a) Son complementarios.

b) Todo número combinatorio de denominador cero es igual a uno.

3) $m = 2$, así se verifica la fórmula de Stieffel o recurrencia. También puede ser $m = 9$ por ser números combinatorios complementarios. **4)** $x = 7$

5)a) $\binom{2}{0}=1;\binom{2}{2}=1$ Simbólicamente: $\binom{m}{0}=1;\binom{m}{m}=1$

b)

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

Los números ubicados simétricamente son complementarios, y como vimos anteriormente, son iguales.

Simbólicamente: $\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$

c)

$$\begin{array}{ccccccccc} & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ & & \vee & & \vee & & \vee & & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ & & \vee & & \vee & & \vee & & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Al escribir cada número combinatorio como suma de los dos que tiene encima (exceptuando el primero y el último número de cada fila), se verifica la fórmula de Stieffel o de recurrencia. Se simboliza: $\binom{m-1}{p-1} + \binom{m-1}{p} = \binom{m}{p}$.

El **problema** de la heladería enunciado al comienzo del capítulo:

> En una heladería se publicita que es posible elegir entre cuatro aderezos para complementar el helado. Los helados se pueden preparar a gusto poniendo la cantidad y variedad de aderezos que el cliente guste. ¿Cuántas posibilidades tiene en total el cliente de preparar un helado de chocolate?

Se puede resolver teniendo en cuenta que:

$\binom{4}{0} = 1$ representa la cantidad de helados de chocolate sin aderezo.

$\binom{4}{1} = 4$ representa la cantidad de helados de chocolate con un aderezo.

$\binom{4}{2} = 6$ representa la cantidad de helados de chocolate con dos aderezos.

$\binom{4}{3} = 4$ representa la cantidad de helados de chocolate con tres aderezos.

$\binom{4}{4} = 1$ representa la cantidad de helados de chocolate con cuatro aderezos.

Como el cliente no puede elegir al mismo tiempo prepararlos con un aderezo y con dos aderezos, debemos aplicar el principio de la suma y por lo tanto resulta:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16 \text{ posibilidades diferentes.}$$

Ecuaciones

Existen numerosas aplicaciones y problemas que requieren la resolución de ecuaciones formuladas utilizando fórmulas del análisis combinatorio.

Ejemplo: Determine el valor de m que satisface la ecuación*:*

$A_{m,2}.P_3 = 18.C_{m-1,\,2}$

Sabemos que el valor buscado de m debe ser mayor o igual que 3 para que tenga sentido la combinación $C_{m-1,\,2}$. Desarrollando ambos miembros de la ecuación obtenemos: $\dfrac{m!}{(m-2)!}.3! = 18.\dfrac{(m-1)!}{2!\,(m-3)!}$ **(*)**

Por propiedades de los factoriales sabemos que:
$m! = m.(m-1).(m-2)!$ y $(m-1)! = (m-1).(m-2).(m-3)!$, si reemplazamos en **(*)** resulta: $\dfrac{m(m-1)(m-2)!}{(m-2)!}.6 = 18.\dfrac{(m-1)(m-2)(m-3)!}{2(m-3)!}$

Simplificando y despejando m obtenemos $m.6 = 9.(m-2) \Rightarrow m = 6$.

Para ver si m es realmente la solución buscada reemplazamos el valor obtenido en la ecuación dada y resolvemos:

$A_{6,2}.P_3 = 18.C_{6-1,\,2} \Rightarrow A_{6,2}.P_3 = 18.C_{5,\,2} \Rightarrow \dfrac{6!}{4!}.3! = 18.\dfrac{5!}{2!\,3!} \Rightarrow 180 = 180$ ✓

Ejemplo: Determine el o los valores de a que verifican: $5.C_{a,2} - V_{5,3} = 120$.

En primer lugar aplicamos las fórmulas de combinación y variación:

$$5.\frac{a!}{2!\,(a-2)!} - \frac{5!}{2!} = 120$$

Utilizando la propiedad de factorial y simplificando nos queda:

$$\frac{5a\,(a-1)\,(a-2)!}{2\,(a-2)!} - \frac{5.4.3.2!}{2!} = 120 \Rightarrow \frac{5a.(a-1)}{2} - 60 = 120 \Rightarrow$$

$$a.(a-1)=\frac{(120+60).2}{5} \Rightarrow a.(a-1)=72 \Rightarrow a^2-a-72=0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática surge que a puede valer –8 ó 9.
El valor –8 es una solución extraña pues no se puede calcular el factorial de un número negativo. En cambio 9 es la solución ya que reemplazando en la ecuación original surge: $5.C_{9,2} - V_{5,3} = 120 \Rightarrow 5\frac{9!}{(9-2)!\,2!}-\frac{5!}{(5-3)!}=120 \Rightarrow$ $180-60=120 \Rightarrow 120=120$ ✓

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes ecuaciones y verifique el resultado:

a) $A_{n,3}=12n$ **b)** $A_{n+1,\,3}=63\,A_{n,1}$

2) Halle el valor de n: **a)** $\frac{P_n}{(n-2)!}=6$ **b)** $\frac{P_{n-1}}{n-4}=10P_{n-3}$

3) Calcule el valor de n que verifica:

a) $A_{n,2}=6C_{n,3}$ **b)** $C_{n,1}+A_{n,2}=25$

4) Halle n que verifica: $2\binom{n-1}{3}=\binom{n}{3}$

RESPUESTAS

1)a) n = 5 **b)** n = 8 **2)a)** n = 3 **b)** n = 7 ó n = 6
3)a) n = 3 **b)** n = 5 **4)** n = 6

5.4 Notación de sumatoria

En muchas situaciones se presenta la conveniencia de abreviar la notación de una suma cuyos términos admiten cierta ley de formación. En este sentido es conveniente tener en cuenta la notación sumatoria $\sum$ para expresar sumas que involucran gran cantidad de términos. Esta notación es de gran utilidad en desarrollos estadísticos.

Con esta notación la suma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ se abrevia $\sum_{i=1}^{n} a_i$ y se lee: “la suma de los a_i con i que varía desde 1 hasta n”.

$\sum$ es la letra griega sigma mayúscula

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

El subíndice i se denomina índice de la sumatoria y puede ser reemplazado por cualquier otra letra: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{p=1}^{n} a_p$

En todos los casos el índice de la sumatoria toma los valores 1, 2, 3, ..., n. El valor inicial y final siempre están indicados. Así, si queremos desarrollar una suma dada en la notación $\sum$, consideramos todos los valores enteros posibles para el índice de la sumatoria en la expresión que sigue al símbolo $\sum$ y sumamos todos los términos.

Ejemplos: $\sum_{k=2}^{6} x^k = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

$$\sum_{j=-3}^{1} (2j-1) = [2.(-3)-1] + [2.(-2)-1] + [2.(-1)-1] + (2.0-1) + (2.1-1) = -15$$

Ejemplo: Escriba usando el símbolo de sumatoria la siguiente expresión:

$x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{27}x + \frac{1}{81}$.

En el desarrollo dado observamos que cada término es el producto de una potencia de base $\frac{1}{3}$ y una potencia de base x. En la potencia de base $\frac{1}{3}$ los exponentes varían desde 0 hasta 4 mientras que los exponentes de la variable x decrecen de 4 hasta 0.

Podemos escribir $x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{27}x + \frac{1}{81} = \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{3^n} x^{4-n}$

Ejemplo: Desarrolle y calcule el valor de $\sum_{i=1}^{4} 2.i^2.(i-1)$

El índice de la sumatoria varía entre 1 y 4, es decir, toma el valor 1, 2, 3 y 4. Reemplazando en la expresión $2.i^2.(i-1)$ resulta:

$2.1^2.(1-1) + 2.2^2.(2-1) + 2.3^2.(3-1) + 2.4^2.(4-1) = 140$

Ejemplo: Halle el valor de m de manera que $\sum_{j=2}^{6} m.(j-2) = -20$

En primer lugar desarrollamos la sumatoria del miembro izquierdo cuyo índice varía de 2 a 6 : m.(2 – 2) + m.(3 – 2) + m.(4 – 2) + m.(5 – 2) + m.(6 – 2) = 10m
Dicha sumatoria debe ser igual a –20, o sea: 10m = –20 $\Rightarrow$ m = –2

Debemos notar que dada la notación $\sum_{k=m}^{n}$ el número de términos en la expansión resulta n – m + 1. Si, por ejemplo, desarrollamos la expresión:

$$\sum_{i=3}^{7}\left(a^i - 1\right) = (a^3 - 1) + (a^4 - 1) + (a^5 - 1) + (a^6 - 1) + (a^7 - 1)$$

resultan 5 términos, es decir, 7 – 3 + 1 = 5

EJERCICIOS

1) Calcule: **a)** $\sum_{k=1}^{4}(-2k+1)$ **b)** $\sum_{i=1}^{3}\left(i - 2i^2\right)$ **c)** $\sum_{m=1}^{3}(-1)^{m+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m-1}$

2) Exprese en forma de sumatoria:

a) –9 – 6 – 3 + 0 + 3 + ... + 24

b) $-3 + 9x - 27x^2 + 81x^3$

c) $2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{6}{5}x^5$

3) Halle el valor de r de manera que $\sum_{j=1}^{3}(2j - r)^2 = 56$.

4) Determine el valor de a de modo que $\sum_{k=1}^{3}(2ka - 7) = a^2 + 15$.

5) Calcule p si $\sum_{r=1}^{4}\left(r^2 - p\right) = 2$.

RESPUESTAS

1)a) –16 **b)** –22 **c)** $\frac{73}{243}$

2)a) $\sum_{k=-3}^{8} 3k$ **b)** $\sum_{i=1}^{4}(-1)^i 3^i x^{i-1}$ **c)** $\sum_{k=1}^{5}\frac{k+1}{k}x^k$

3) r = 0 ó r = 8 **4)** a = 6 **5)** p = 7

5.5 Principio de inducción matemática

La inducción matemática proporciona un método de demostración por recurrencia. Según Henri Poincaré (Francia, 1854–1912) éste es el método propio de la

matemática. Es, en realidad, una demostración deductiva (a pesar de su nombre) que comporta una infinidad de silogismos. Este método se usa básicamente para demostrar teoremas relativos a las propiedades de los números naturales. Un teorema se verifica para $n = 1$, $n = 2$ y el siguiente y todos los números naturales. Por esto, Bertrand Russell llama propiedad hereditaria.
La palabra "inducción" no es la más adecuada para este tipo de demostración ya que con el razonamiento inductivo sólo se logran conclusiones probables mientras que este método garantiza conclusiones correctas. Se llama también "inducción completa" (se examinan en cierta forma todos los casos) o "razonamiento por recurrencia", expresión preferida por Poincaré.
Analicemos estas expresiones:

P_1	$2.1 = 1.(1+1)$	esto es $2 = 2$
P_2	$2 + 2.2 = 2 + 4 = 2.(2 + 1)$	esto es $6 = 6$
P_3	$2 + 4 + 2.3 = 3.(3 + 1)$	esto es $12 = 12$
P_4	$2 + 4 + 6 + 2.4 = 4.(4 + 1)$	esto es $20 = 20$
P_5	$2 + 4 + 6 + 8 + 2.5 = 5.(5 + 1)$	esto es $30 = 30$

Si observamos detenidamente, podemos pensar que la expresión siguiente tomará la forma:

P_6 $\quad 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 2.6 = 6.(6 + 1)$ $\quad$ esto es $42 = 42$

Trataremos de sumar los n primeros números naturales pares. ¿Será correcto suponer que la suma de los n primeros números naturales pares es igual al producto $n.(n + 1)$?

P_n $\quad 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 2.n = n.(n + 1)$

La suposición que este enunciado es verdadero no constituye una demostración.

Si bien se hace referencia a que las expresiones P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 son verdaderas no es posible concluir que P_n sea verdadera para cualquier natural n.

Para asegurar y demostrar que P_n es verdadera necesitamos un proceso especial de demostración que se conoce con el nombre de *inducción matemática*.

Principio de inducción matemática

Si para cada entero positivo n hay asociado un enunciado, P_n , entonces todas las afirmaciones serán válidas siempre y cuando se satisfagan las siguientes condiciones:

a) que P_1 sea cierta,

b) que siempre que P_k sea verdadera para un entero positivo k, entonces P_{k+1} también es cierta.

Podemos imaginar una sucesión infinita de afirmaciones P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ... que satisfacen las condiciones enunciadas en el principio de inducción matemática. Según las condiciones la proposición P_1 es verdadera. De acuerdo a la condición **b)**, si P_1 es cierta, P_2 también lo será. Si P_3 es verdadera también lo será P_4 y así sucesivamente hasta llegar a P_n.

Para aplicar el principio de inducción matemática se deben seguir los dos pasos siguientes:

1) Demostrar que P_1 es verdadera.

2) Suponer que P_k es cierta y luego demostrar que P_{k+1} también lo es.

Debemos tener muy en cuenta que en el paso 2 se supone que P_k es verdadera y teniendo en cuenta esto se demuestra P_{k+1}. La hipótesis de que P_k es cierta se llama hipótesis de inducción. En el punto 2 se debe demostrar la validez de la proposición.

Si P_k es verdadera entonces P_{k+1} también lo es.

Esto nos hace pensar que una demostración por inducción matemática incluye la demostración de una proposición. Se trata de una demostración dentro de otra demostración.

Teniendo en cuenta lo enunciado anteriormente probaremos la igualdad:

$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2.n = n.(n + 1)$

Debemos seguir los dos pasos enunciados:

1) P_1 es verdadera porque: $2.1 = 1.(1 + 1) \Rightarrow \quad 2 = 2$ ✓

2) Enunciamos la hipótesis de inducción que resulta verdadera:

$2 + 4 + 6 + 2.k = k.(k + 1)$ donde k es un número natural.

Con esto debemos probar que resulta verdadera la siguiente, es decir, se debe probar que:

$2 + 4 + 6 + ... + 2.(k + 1) = (k + 1).(k + 2)$

Sabemos que $2 + 4 + 6 + ... + 2k = k.(k + 1)$

Sumamos a ambos miembros el término $2.(k + 1)$ y resulta:

$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2.(k + 1) = k.(k + 1) + 2.(k + 1)$

En el segundo miembro sacamos factor común $k + 1$ y resulta la expresión que buscamos.

$2 + 4 + 6 + ... + 2.(k + 1) = (k + 1).(k + 2)$

Como seguimos los pasos del principio:

- probamos que la fórmula es verdadera para $n = 1$ y
- suponiendo que es cierta para $n = k$ demostraremos que es verdadera para $n = k + 1$; podemos enunciar que la fórmula resulta verdadera para cualquier valor de n natural.

$2 + 4 + 6 + ... + 2.n = n.(n + 1)$ o bien $\sum_{i=1}^{n} 2i = n.(n + 1)$

Ejemplo: Utilizando el principio de Inducción Matemática demuestre la igualdad

$1 + 2.2 + 3.2^2 + ... + n.2^{n-1} = 1 + (n - 1).2^n$

Para demostrar la igualdad debemos seguir los pasos enunciados:

1) P_1 es verdadera porque $1 = 1 + (1 - 1).2^1$

$$1 = 1 + 0.2$$
$$1 = 1$$

2) Enunciamos la hipótesis de inducción que resulta verdadera para $n = k$:
$1 + 2.2 + 3.2^2 + ... + k.2^{k-1} = 1 + (k - 1).2^k$, donde k es un número natural.
Teniendo en cuenta lo anterior probaremos que es verdadera la siguiente, cuando $n = k + 1$, es decir: $1 + 2.2 + 3.2^2 + ... + (k + 1).2^k = 1 + k.2^{k+1}$
Por hipótesis sabemos que $1 + 2.2 + 3.2^2 + ... + k.2^{k-1} = 1 + (k - 1).2^k$. Si sumamos a ambos miembros de la igualdad anterior el término $(k + 1).2^k$ dicha igualdad no varía y obtenemos:
$1 + 2.2 + 3.2^2 + ... + k.2^{k-1} + (k + 1).2^k = 1 + (k - 1).2^k + (k + 1).2^k$
En los dos últimos términos del segundo miembro sacamos como factor común 2^k: $1 + 2.2 + 3.2^2 + ... + k.2^{k-1} + (k + 1).2^k = 1 + 2^k (k - 1 + k + 1) =$
$1 + 2.k.2^k$
Aplicando la propiedad del producto de potencias de igual base resulta lo que queríamos probar: $1 + 2.2 + 3.2^2 + ... + k.2^{k-1} + (k + 1).2^k = 1 + k.2^{k+1}$
De **1)** y **2)** podemos asegurar que: $1 + 2.2 + 3.2^2 + ... + n.2^{n-1} = 1 + (n - 1).2^n$

Principio: Sea P una propiedad referida a los números enteros no negativos. Si P se verifica para $h = 0$ y, de la hipótesis de que se verifica para un entero $h > 0$ arbitrario se infiere que también se verifica para $h + 1$, entonces P es una propiedad válida para todos los enteros no negativos.
Observación: existen propiedades en las que el caso inicial no es cero sino $n = 1$ o $n = 2$, etc.; en este caso la propiedad vale $\forall\ n \geq 1$ o $\forall\ n \geq 2$, respectivamente.

EJERCICIO
Utilice la inducción matemática para demostrar la validez de las siguientes expresiones para todos los enteros positivos, representados por n.

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ **b)** $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

5.6 Potencia de un binomio

Un binomio es una expresión de la forma a + b. Si n es un entero positivo, una fórmula para desarrollar $(a + b)^n$ y expresarlo como suma es el teorema del binomio. Utilizando la inducción matemática tratamos de encontrar dicha fórmula.
Al desarrollar las diferentes potencias surge:
$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Trinomio Cuadrado Perfecto

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ Cuatrinomio Cubo Perfecto

La expresión $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ surge de resolver $(a + b)^2.(a + b)^2$ o bien $(a + b)^3.(a + b)$.

La expresión $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$ surge de resolver $(a + b)^4.(a + b)$ ó $(a + b)^3.(a + b)^2$ ó $(a + b)^2.(a + b)^2.(a + b)$

De la misma forma podemos continuar con las potencias sucesivas multiplicando la que ya conocemos de (a + b).
De todos modos nuestro objetivo consiste en encontrar directamente estos desarrollos sin tener que multiplicar. La idea es poder desarrollar $(a + b)^n$ para valores grandes de n (entero positivo) sin necesidad de multiplicar repetidamente (a + b) por sí mismo.
Observemos algunas características comunes de los desarrollos de $(a + b)^n$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

- El número de términos es siempre uno más que el exponente. Por ejemplo, el desarrollo de $(a + b)^3$ presenta cuatro términos. Es de esperar que el desarrollo de $(a + b)^n$ presente n + 1 términos.
- El primer término del desarrollo es a^n y de manera similar el último término es b^n.
- A medida que nos movemos de un término a otro el exponente de a disminuye en uno mientras que el de b aumenta en 1.
- La suma de los exponentes de a y b en cada término es igual a n.
- Cada término en el desarrollo tiene la forma $C.a^{n-k}.b^k$ donde el coeficiente C es un número real y k toma los valores 0, 1, 2, 3, ..., n.

Según lo enunciado se puede afirmar que, independientemente de los coeficientes numéricos la sucesión de términos de $(a + b)^n$ resulta: a^n, $a^{n-1}\ b$, $a^{n-2}\ b^2$, ..., $a\ b^{n-1}$, b^n. Si observamos los coeficientes los podemos relacionar con el triángulo de Tartaglia:

Binomio	Coeficientes	Número Combinatorio
$(a+b)^0$	1	$\binom{0}{0}$
$(a+b)^1$	1 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
$(a+b)^2$	1 2 1	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$

Siguiendo este razonamiento podemos pensar que la sucesión de términos de $(a + b)^6$ es, independientemente de los coeficientes: a^6 , a^5 b, a^4 b^2, a^3 b^3, a^2 b^4, ab^5, b^6 y los coeficientes se obtienen:

$(a+b)^5$		1		5		10		10		5		1	
$(a+b)^6$	1		6		15		20		15		6		1

De esta forma $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15 a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Estas observaciones nos permiten suponer que los coeficientes de los términos sucesivos en el desarrollo de $(a + b)^n$, donde n es un entero positivo son los n + 1 números combinatorios: $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

Teniendo en cuenta lo anterior podemos escribir el desarrollo de $(a + b)^n$ como lo establece el siguiente teorema:

Teorema del binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

o bien, utilizando la notación de sumatoria: $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$

Veamos algunos ejemplos:

Si $n = 0$ $\Rightarrow$ $(a + b)^0 = 1$ y en el segundo miembro $\binom{0}{0}a^0 b^0 = 1$

$(a + b)^0 = \binom{0}{0} a^0\, b^0$ se verifica para $n = 0$

Si $n = 1 \quad \Rightarrow \quad (a + b)^1 = a + b$

En el segundo miembro: $\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} a^{1-i}\, b^i = \binom{1}{0} a^1\, b^0 + \binom{1}{1} a^0\, b^1 = a + b$

$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^1\, b^0 + \binom{1}{1} a^0\, b^1$ se verifica para $n = 1$

Si $n = 2 \quad \Rightarrow \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y en el segundo miembro:

$\sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} a^{2-i}\, b^i = \binom{2}{0} a^2\, b^0 + \binom{2}{1} a^1\, b^1 + \binom{2}{2} a^0\, b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^2\, b^0 + \binom{2}{1} a^1\, b^1 + \binom{2}{2} a^0\, b^2$ se verifica para $n = 2$.

Demostramos el teorema usando el principio de inducción matemática.

- Si $n = 1$ el enunciado se reduce a: $(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} a^{1-i} b^i = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$

En consecuencia, P_1 resulta verdadera.

- La hipótesis de inducción la enunciamos para $n = k$

$(a + b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$

- Teniendo en cuenta la hipótesis probamos que $(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i$

Para demostrarlo partimos de $(a + b)^{k+1} = (a + b)^k.(a + b)$

Reemplazando $(a + b)^k$ por lo definido en la hipótesis de inducción obtenemos:

$(a + b)^{k+1} = \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i\right].(a + b)$

$(a + b)^{k+1} = \left[\binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \ldots + \binom{k}{k} b^k\right].(a + b)$

Por la propiedad distributiva resulta:

$$\left[\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^{k}b+\ldots+\binom{k}{k}ab^{k}\right]+$$

$$\left[\binom{k}{0}a^{k}b+\binom{k}{1}a^{k-1}b^{2}+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^{k}+\binom{k}{k}b^{k+1}\right]$$

Si agrupamos y disponemos en forma conveniente los términos obtenemos

$$(a+b)^{k+1}=\binom{k}{0}a^{k+1}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]a^{k}b+\ldots+\left[\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}\right]ab^{k}+\binom{k}{k}b^{k+1}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de los números combinatorios resulta:

$$(a+b)^{k+1}=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^{k}b+\ldots+\binom{k+1}{k}ab^{k}+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

De esta manera probamos que la fórmula vale para $n = k + 1$.

Podemos entonces asegurar que: $(a+b)^{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^{i}$ es verdadera para todo n entero positivo.

Observaciones:

1) En la fila n del triángulo de Tartaglia figuran los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^n$ (potencia enésima del binomio).

2) En el desarrollo de $(a + b)^n$ el m-ésimo elemento (con $m < n+1$) toma la forma: $\binom{n}{m-1}a^{n-(m-1)}\,b^{m-1} \quad \Rightarrow \quad T_m=\binom{n}{m-1}a^{n-m+1}\,b^{m-1}$

Ejemplo: Obtenga el quinto término del binomio $(2x - y)^6$:

- **a)** realizando el desarrollo completo.
- **b)** mediante la fórmula del término m-ésimo.
- **c)** compare los resultados obtenidos en **(a)** y **(b)**.

a) Utilizando el teorema del binomio con $n = 6$, $a = 2x$ y $b = -y$ resulta:

$$(2x-y)^{6}=\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}(2x)^{6-i}(-y)^{i}$$

$$(2x-y)^{6}=\binom{6}{0}(2x)^{6-0}(-y)^{0}+\binom{6}{1}(2x)^{6-1}(-y)^{1}+\binom{6}{2}(2x)^{6-2}(-y)^{2}+$$

$$\binom{6}{3}(2x)^{6-3}(-y)^{3}++\binom{6}{4}(2x)^{6-4}(-y)^{4}+\binom{6}{5}(2x)^{6-5}(-y)^{5}+\binom{6}{6}(2x)^{6-6}(-y)^{6}$$

Teniendo en cuenta el triángulo de Tartaglia resolvemos:

$$(2x-y)^{6}=1(2x)^{6}+6\,(2x)^{5}\,(-y)+15\,(2x)^{4}\,(-y)^{2}+20\,(2x)^{3}\,(-y)^{3}+$$
$$15\,(2x)^{2}\,(-y)^{4}+6\,(2x)\,(-y)^{5}+1\,(2x)^{0}\,(-y)^{6}$$

$$(2x-y)^{6}=64x^{6}-192x^{5}y+240\,x^{4}y^{2}-160\,x^{3}y^{3}+60\,x^{2}y^{4}-12\,x\,y^{5}+y^{6}$$

El término buscado es $T_5 = 60\,x^2\,y^4$

b) Mediante la fórmula del término m-ésimo con n = 6, m = 5, a = 2x y b = –y obtenemos:

$$T_5 = \binom{6}{5-1}(2x)^{6-(5-1)}\,(-y)^{5-1} = 15(2x)^2\,y^4 = 60\,x^2\,y^4$$

c) Podemos observar que, realizando el desarrollo completo o utilizando la fórmula del término m-ésimo, llegamos al mismo resultado.

Ejemplo. Sin hacer el desarrollo completo, determine el cuarto término de $\left(\frac{1}{2}x^3 - 2y\right)^5$.

Mediante la fórmula del término m–ésimo con n = 5, m = 4, a = $\frac{1}{2}x^3$ y b = –2y resulta:

$$T_4 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2.(-2y)^3 = \frac{5!}{3!.(5-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2.x^6.(-2)^3y^3 = \frac{5!}{3!.2!}.\frac{1}{4}.x^6.(-8)y^3$$

Desarrollando algebraicamente surge $T_4 = -20x^6y^3$.

El cuarto término del desarrollo de $\left(\frac{1}{2}x^3 - 2y\right)^5$ es $T_4 = -20x^6y^3$.

EJERCICIOS

1) Desarrolle utilizando el teorema del binomio:

a) $\left(-a + a^2\right)^5$ **b)** $\left(\frac{1}{b} + b^{-2}\right)^3$ **c)** $\left(x^{\frac{1}{2}} - y\right)^6$ **d)** $\left(x^{-2} + x^{-1}\right)^5$

2) Sin efectuar el desarrollo, halle:

a) el cuarto término de $\left(-a + a^{-2}\right)^6$

b) el término que contiene a x^{12} en $\left(x^2 - 2y\right)^{11}$

c) el término del medio de $\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-2}\right)^{10}$

d) el término de segundo grado de $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{10}$

e) el término independiente de $\left(y^2 - y^{-1}\right)^9$

3) Dado el binomio $\left(b^{-1}+2b\right)^{n}$, halle sin hacer el desarrollo el valor de n si el cuarto término es de primer grado.

4) Dado el binomio $\left(3a-b^{r}\right)^{5}$ calcule (sin hacer el desarrollo completo) el valor de r sabiendo que el tercer término tiene grado 7. Para dicho valor de r, halle el término.

5) Sin realizar el desarrollo completo, determine el término de grado 12 en el desarrollo de $\left(2u-3r^{2}\right)^{10}$.

RESPUESTAS

1)a) $-a^{5}+5a^{6}-10a^{7}+10a^{8}-5a^{9}+a^{10}$

b) $b^{-3}+3b^{-4}+3b^{-5}+b^{-6}$

c) $x^{3}-6x^{\frac{5}{2}}y+15x^{2}y^{2}-20x^{\frac{3}{2}}y^{3}+15xy^{4}-6x^{\frac{1}{2}}y^{5}+y^{6}$

d) $x^{-10}+5x^{-9}+10x^{-8}+10x^{-7}+5x^{-6}+x^{-5}$

2)a) $T_4=-20a^{-3}$ **b)** $T_6=-14784\,x^{12}y^{5}$ **c)** $T_6=-252x^{-\frac{25}{3}}$

d) $T_8=120x^{2}$ **e)** $T_7=84$

3) $n=5$ **4)** $r=2;\ T_3=270\,a^{3}b^{4}$ **5)** $T_3=103\ 680\ u^{8}r^{4}$

EJERCICIOS INTEGRADORES. 5.1 ANÁLISIS COMBINATORIO- 5.2 ANÁLISIS COMBINATORIO SIMPLES - 5.3 NÚMEROS COMBINATORIOS 5.4 NOTACIÓN DE SUMATORIA- 5.5 PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA - 5.6 POTENCIA DE UN BINOMIO

1) **a)** Dado el conjunto $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ halle cuántas variaciones de orden 2 pueden formarse y escríbalas.

b) Dado el conjunto $A=\{1,\ 2\ ,\ 3\}$ halle cuántas combinaciones de orden 2 pueden formarse y escríbalas.

2) Verifique las siguientes identidades:

a) $\dfrac{(a+2)!\,(m+1)!}{m!\,a!}-\dfrac{(a+2)!}{a!}=m(a+2).(a+1)$

b) $\dfrac{p!}{(p-2)!}=\dfrac{(p+1)!}{p-1)!}-\dfrac{2p!}{(p-1)!}$

c) $\dfrac{m!}{m.(m-1)!}+\dfrac{m!}{m(m-2)!}=\dfrac{m^{2}(m+1).(m-1)!}{(m+1)!}$

3) Halle x y verifique

a) $C_{x,2}+\frac{1}{2}A_{x-1,2}=4$ **b)** $\frac{1}{2}P_3.C_{x,3}=2.P_4.x$

c) $C_{x,3}=C_{x,2}$ **d)** $30.A_{x,3}=5!\,C_{x,5}$

e) $\binom{x-2}{2}+\binom{x}{2}=21$ **f)** $C_{x,4}=\dfrac{A_{x-2,2}}{2P_3}$

g) $18.\binom{x}{4}=5.C_{x+2,5}$ **h)** $\binom{5}{2x-1}=\binom{5}{3x-4}$

4) Determine, sin realizar operaciones, el valor de m. Justifique.

$$\binom{11}{3}+\binom{11}{m}=\binom{12}{3}$$

5) Desarrolle las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=0}^{3}2i(i-1)$ **b)** $\sum_{m=1}^{4}(-1)^m.m$ **c)** $\sum_{x=-2}^{0}(-3)^x(x-3)$

6) Exprese como sumatoria

a) 5 + 10 + 15 + 20 + 25

b) 2 – 4 + 8 – 16 + 32

c) $x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4$

7) Calcule el valor de x sabiendo que:

a) $\sum_{a=1}^{4}(3a-x)=18$ **b)** $\sum_{a=-2}^{2}x.a^2=20$

8) Demuestre la validez de las siguientes expresiones para todos los enteros positivos representados por n, utilizando el principio de inducción matemática.

a) $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n.(n + 1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

b) $\sum_{i=1}^{n}3i=\dfrac{3n(n+1)}{2}$

9) Desarrolle:

a) $(2a - 3b)^4$ **b)** $(x - 2y)^5$ **c)** $\left(-\dfrac{2}{x}+x^2\right)^4$

10) Calcule, sin hacer el desarrollo completo,:

a) el término central de $(2x - 3y)^6$

b) el término que contiene a b^9 en $(5a+2b^3)^4$

c) a qué potencia hay que elevar el binomio $\left(\dfrac{2}{x}+x\right)$ para que el quinto término sea de grado 0

d) el término del medio del desarrollo de $\left(-x^{\frac{1}{3}}+\dfrac{x^{-2}}{2}\right)^{10}$

e) el término independiente de $\left(y^2+\dfrac{1}{y}\right)^9$

f) el término de grado cinco de $\left(\frac{3}{x}-\frac{5}{x^{-2}}\right)^{10}$

11)a) Halle r para que el cuarto término del desarrollo de $(2x + t^{r})^{5}$ sea de grado 8. Para dicho valor de r escriba el cuarto término.

b) Calcule b para que el quinto término de $(-4a + b)^{7}$ sea $-1\,400\,000a^{3}$.

5.7 Análisis combinatorio con repetición

Arreglos o variaciones con repetición

Hasta ahora hemos supuesto que en cada arreglo, permutación o combinación, los objetos que intervienen son todos distintos entre sí y no se pueden repetir.

Analicemos la situación presentada a continuación.

Problema

> El responsable de un gabinete de computación sugiere, para evitar problemas y mejorar la organización del mismo, colocar códigos o “palabras claves” que permitan el ingreso a cada una de las computadoras. Decide que los códigos constarán de cinco letras y se podrán armar con A, B, C y D. ¿Cuántas palabras claves diferentes podrá formar?

Si tenemos en cuenta el planteo realizado surge que las “palabras claves” pueden tener letras repetidas. Por ejemplo surgen, entre otras: ABCDA, ABBCD, AAAAA. Podemos seguir enumerando todas las posibilidades. Pero la pregunta es: ¿cuántas posibles soluciones a nuestro problema existen? Si pensamos en el principio del conteo y nos ayudamos con un diagrama de árbol resulta que para la primer letra tenemos cuatro posibilidades de elección, lo mismo para la segunda, para la tercera, la cuarta y la quinta. Nuestro árbol consta de cuatro ramas, de cada una de ellas otras cuatro, y otras cuatro hasta llegar a completar las cinco letras.

La cantidad de agrupaciones posibles donde las letras pueden ser repetidas resulta de resolver el producto $4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 4^{5} = 1024$.

Existen 1024 códigos diferentes que puede generar el responsable de mantener el gabinete de computación.

Las agrupaciones donde interesan los elementos pero también el orden en el que aparecen y además donde cada elemento puede intervenir varias veces en cada agrupación se llaman arreglos o variaciones con repetición.

Definición: Sea un conjunto E de n elementos distintos E = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y supongamos que disponemos de un número arbitrario grande de copias de cada uno de ellos. Las agrupaciones o distribuciones ordenadas de k de los n objetos de E o de sus copias no necesariamente distintos se llaman arreglos o variaciones con repetición de orden k.
En este caso el valor de k puede ser igual o mayor que el valor de n.

Notación $V^*_{n,k} = A^*_{n,k}$: arreglos o variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

La definición anterior nos permite asegurar que los subconjuntos o agrupaciones difieren entre sí por el orden de los elementos o al menos por un elemento (los cuales pueden aparecer repetidos).

Formación de los arreglos o variaciones

Para formar todos los arreglos con repetición, tenemos en cuenta:

1) Los arreglos con repetición de n elementos tomados de uno en uno son:

$$A^*_{n,1} : \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}$$

2) Para formar los arreglos con repetición de dos en dos, colocamos a la derecha de cada arreglo, sucesivamente, todos los elementos, tal como se indica:

$$A^*_{n,2} : \left.\begin{array}{l} \{a_1,a_1\},\{a_2,a_1\},\{a_3,a_1\},...,\{a_n,a_1\} \\ \{a_1,a_2\},\{a_2,a_2\},\{a_3,a_2\},...,\{a_n,a_2\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \{a_1,a_n\},\{a_2,a_n\},\{a_3,a_n\},...,\{a_n,a_n\} \end{array}\right] \text{ n filas}$$

Para los arreglos con repetición de n elementos tomados de 3 en 3 y los siguientes se sigue el mismo procedimiento.

Número de arreglos con repetición

Veamos cómo se calcula el número de arreglos con repetición tomados de k en k: $A^*_{n,k} = V^*_{n,k}$.

Según 1) el número de arreglos unitarios es n, es decir: $V^*_{n,1} = A^*_{n,1} = n$.

En el cuadro del punto 2) cada columna proviene de uno de los arreglos unitarios (hay $A^*_{n,1}$ columnas) y n filas. Luego, el número de arreglos de n elementos tomados de dos en dos es: $V^*_{n,2} = A^*_{n,2} = A^*_{n,1}.n = n.n = n^2$

Si seguimos analizando, vemos que para pasar de un arreglo a otro que tenga un elemento más, hay que introducir un nuevo factor que será otra vez n.

$$V^*_{n,3} = A^*_{n,3} = A^*_{n,2}.n = n^2.n = n^3$$

$$V^*_{n,4} = A^*_{n,4} = A^*_{n,3}.n = n^3.n = n^4$$

Formados todos los arreglos con repetición de n elementos tomados de (k – 1) en (k – 1), cuyo número es $A^*_{n,k-1} = n^{k-1}$, podemos formar los de orden k. Para eso agregamos sucesivamente al final de cada uno de ellos los n objetos. Cada uno de los $A^*_{n,k-1}$ da así lugar a n de los arreglos $A^*_{n,k}$. Así pues:

$V^*_{n,k} = A^*_{n,k} = A^*_{n,k-1}.n = n^{k-1}.n = n^k$. Luego: $V^*_{n,k} = A^*_{n,k} = n^k$

Nota: No hay inconveniente en que sea k > n.

<u>Problema</u>

> Lucía tiene tres banderas rojas y cuatro verdes. Desea acomodar tres en el mástil de su pequeño barco. ¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo?

En este problema interesa el color elegido y el orden en que son colocadas las banderas, o sea, se trata de variaciones con repetición de dos elementos: color rojo o color verde tomados de tres en tres, o sea: $V^*_{2,3} = 2^3 = 8$.

Lucía tiene ocho posibilidades de acomodar las banderas en el mástil.

<u>Problema</u>

> Martín tiene tres banderas rojas, cuatro verdes y dos amarillas. Desea acomodar dos en el mástil de su pequeño fuerte construido en su clase de plástica. ¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo?

En este caso interesa la cantidad de banderas que va a colocar en el fuerte, el color elegido y el orden en que son colocadas. Se trata de variaciones con repetición de tres elementos: bandera roja, bandera verde y bandera amarilla tomados de dos en dos, o sea: $V^*_{3,2} = 3^2 = 9$.

Martín tiene nueve posibilidades de acomodar las banderas en el mástil.

EJERCICIOS

1)a) El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formadas por ceros y unos. Un byte es una de estas secuencias y está formada por 8 dígitos. Por ejemplo:

0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

¿ Cuántos bytes diferentes se pueden formar?

b) Al lanzar 3 dados de distintos colores, ¿cuántos posibles resultados se pueden obtener?

c) Si las Naciones Unidas decidiesen que cada uno de los 6000 millones de habitantes del planeta tuviese una matrícula formada por 6 letras. ¿Nos bastaría con usar las 27 letras del alfabeto para formar las matrículas? ¿Cuántas letras tendrían que tener como mínimo las matrículas?

2) a) Forme todos los arreglos con repetición de dos elementos del conjunto {a, b, c, d}.

b) Escriba los arreglos con repetición de 3 elementos que se pueden formar en el conjunto {m, p}.

3) Calcule: **a)** $\overset{*}{A}_{5,2}$ **b)** $\dfrac{5\overset{*}{A}_{3,4}}{P_3}$ **c)** $\overset{*}{A}_{4,3} - A_{5,2}$ **d)** $\dfrac{\overset{*}{A}_{2,3} + A_{5,3}}{3!}$

4) Halle el valor de x y verifique:

a) $\overset{*}{A}_{x,4} = 81$ **b)** $\overset{*}{A}_{5,x} = 625$ **c)** $\overset{*}{A}_{x,3} + A_{x,2} = 10$

RESPUESTAS

1)a) 256 **b)** 216

c) Con 6 letras no alcanza para formar las matrículas, se necesitan por lo menos 7 letras.

2)a) {a, a}; {a, b}; {a, c}; {a, d}; {b, a}; {b, b}; {b, c}; {b, d}; {c, a}; {c, b}; {c, c}; {c, d}; {d, a}; {d, b};{d, c}; {d, d}

b) {m, m, p}; {m, p, m}; {m, p, p}; {m, m, m}; {p, m, m}; {p, m, p}; {p, p, m}; {p, p, p}

3)a) 25 **b)** $\dfrac{135}{2}$ **c)** 44 **d)** $\dfrac{34}{3}$

4)a) $x = 3$ **b)** $x = 4$ **c)** $x = 2$

Permutaciones con repetición

Problema

> Silvia tiene en su casa tres ventanas a las que quiere colocar cortinas. Dispone de cortinas con flores, cortinas a rayas y cortinas a cuadros. Tiene cantidad suficiente de cada una para cubrir las tres ventanas con cortinas del mismo tipo. ¿De cuántas maneras diferentes puede decorar su casa colocando las cortinas en las ventanas?

Este problema se puede resolver siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior cuando estudiamos los arreglos con repetición. En este caso particular tenemos tres elementos distintos disponibles (cortinas con flores, cortinas a rayas y cortinas a cuadros) y queremos agruparlas para cubrir tres ventanas.

Debemos notar que existen por lo menos tres cortinas de cada clase. El número de agrupaciones que podemos realizar es el resultado de $3.3.3 = 27$.
Existen 27 formas distintas de decorar la casa colocando las diferentes cortinas.
Podemos decir que estamos en el mismo caso que lo estudiado para arreglos con repetición sólo que k es igual a n.

Definición: Sea un conjunto E de n elementos distintos $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y supongamos que disponemos de un número arbitrario de copias que debe ser, por lo menos, n. Se llama permutación con repetición de E a todo subconjunto o agrupamiento ordenado compuesto de n elementos de E no necesariamente distintos.

Notación P_n^* : permutaciones con repetición de n elementos.

Una permutación con repetición de orden n no es más que un arreglo con repetición de n elementos tomados de n en n.

$P_n^* = A_{n,n}^* = n^n \Rightarrow P_n^* = n^n$

Problema

> ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 7, 8 y 9?

Se trata de una permutación con repetición de tres elementos: $P_3^* = 3^3 = 27$.
Existen 27 números que se pueden formar con el requisito pedido.

EJERCICIOS

1)a) Con las letras de la palabra LIBRO ¿cuántas "palabras" de cinco letras pueden formarse?

b) ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 4, 5, 6?

c) Los números del Seguro Social de un país están formados por diez dígitos. ¿Cuántos números distintos de Seguro Social se pueden formar?

2) Forme todas las permutaciones posibles con las letras de la palabra PEZ.

3) Calcule: **a)** P^*_3 **b)** $\frac{P_4^*}{3!}$ **c)** $\frac{P_2^*}{4!}$ **d)** $A^*_{4,2} \cdot P^*_3$

RESPUESTAS

1)a) 3125 **b)** 27 **c)** 10^{10}

2) PPP, PPE, PPZ, PEE, PEZ, PZE, PZZ, PEP, PZP, EPP, EPZ, EPE, EEP, EEZ, EEE, EZE, EZP, EZZ, ZEE, ZEP, ZEZ, ZPE, ZPP, ZPZ, ZZE, ZZP, ZZZ

3)a) 27 **b)** $\frac{128}{3}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** 432

Permutaciones con grupos de elementos iguales

Problema

> ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con las cifras del número 4525?

Si este problema se plantea de forma similar pero con un número de cuatro cifras y todas distintas, el resultado resulta $P_4 = 4! = 24$. Cada una de las permutaciones distintas determinan números de cuatro cifras distintos. Para analizar el problema planteado con dígitos que aparecen repetidos suponemos que todos son distintos y le asignamos un símbolo a cada uno, por ejemplo 5_1 y 5_2. Si tenemos en cuenta los cuatro símbolos sabemos que existen 24 formas de permutarlos y por lo tanto 24 números de cuatro cifras distintos. Pero, no podemos desconocer que existen ordenaciones diferentes que generan el mismo número, por ejemplo 45_15_22 y 45_25_12. En los dos casos se obtiene el número 4552. Tenemos que conocer cuántas veces repetimos un mismo número en las 24 permutaciones. Cada número lo contamos tantas veces como formas tenemos de permutar los elementos 5_1 y 5_2 o sea $2! = 2$. La solución para el problema resulta $\frac{4!}{2!} = 12$ números diferentes.

Los enumeramos así:

4525	5245	5452	2455
4552	5425	5254	2545
4255	5524	5542	2554

De la misma forma si el problema hubiese sido:

Problema

> ¿Cuántos números de cinco dígitos se pueden formar con las cifras de número 72727?

Debemos seguir el mismo razonamiento que antes. Si las cinco cifras son diferentes se forman $P_5 = 5! = 120$ números distintos. Sin embargo, como antes, debemos determinar cuántas veces vamos a contar el mismo número. Si fijamos un ordenamiento de los cinco símbolos y permutamos entre si los $7_17_27_3$ y hacemos lo mismo con 2_12_2 obtenemos una selección que origina el mismo número. Podemos asegurar que cada uno de los números corresponde a 3!2! ordenaciones de los cinco símbolos. Teniendo en cuenta esto concluimos que la cantidad de números diferentes que se pueden formar resulta de resolver $\frac{5!}{3!2!} = 10$. Los números posibles son:

72727	77722	72277	27772	27277
77227	77272	72772	27727	22777

A este tipo de agrupaciones se las conoce como permutaciones con grupos de elementos iguales. Las permutaciones con elementos iguales tienen cierta similitud con las permutaciones con repetición, pero no deben ser confundidas.
A modo de conclusión podemos enunciar lo siguiente:
Dado un grupo de p elementos iguales; otro grupo de q elementos iguales entre sí (distinto a los anteriores); otro grupo de r elementos iguales entre sí (distinto de los grupos anteriores); etc.; y por último otro grupo de t elementos iguales entre sí y también distinto de los demás grupos, donde el número total de elementos n es tal que $n = p + q + r + ... + t$, la cantidad de ordenaciones de los n objetos será dada por: $P_n^{p,q,r,...,t} = \dfrac{n!}{p!.q!.r!...t!}$.
También se las llama permutaciones de n elementos de clase (p, q, r,..., t) y se refieren a las agrupaciones de los n objetos, que difieren en la colocación u orden en que van dispuestos.
Nota: puede ocurrir que algunos (o aún todos) de los grupos tengan un solo objeto.

Problema

¿Cuántas palabras código distintas se pueden formar con las cinco letras de la palabra JUJUY?

Se trata de una permutación con elementos iguales: 2 veces la letra J, 2 veces la letra U y una vez la letra Y. Es decir: $P_5^{2,2,1} = \dfrac{5!}{2!.2!.1!} = \dfrac{120}{4} = 30$.
Se pueden formar 30 palabras código distintas.

EJERCICIOS

1) **a)** Ana, Alejandra, Agustina, Marcela y Mariana quieren formar una sigla para su empresa utilizando la primer inicial de sus nombres. ¿ Cuántas siglas pueden formar?

b) Al arrojar 10 veces un dado, el uno y el cuatro salieron 3 veces, el tres 2 veces, el cinco y el seis una vez, y no salió el dos. ¿ De cuántas maneras distintas puede haber ocurrido la secuencia?

c) Con 8 letras distintas entre las cuales hay varias A y todas las demás son distintas se pueden formar 336 palabras de 8 letras cada una. ¿ Cuántas A hay?

2) Escriba todas las “palabras” que se pueden formar con las letras de la palabra POZO.

3) Calcule: **a)** $P_6^{3,2,1,1}$ **b)** $\dfrac{P_4.P_4^{2,1,1}}{2}$ **c)** $A^*_{5,2} + P_7^{5,1,1}$ **d)** $\dfrac{P^*_3.A^*_{4,2}}{P_5^{2,2,1}}$

RESPUESTAS

1)a) 10 **b)** 50 400 **c)** 5

2) POZO, POOZ, PZOO, OPZO, OPOZ, OOZP, OOPZ, OZPO, OZOP, ZPOO, ZOPO, ZOOP

3)a) 60 **b)** 144 **c)** 67 **d)** $\frac{72}{5}$

Combinaciones con repetición

Analicemos dos problemas que presentan algún tipo de similitud entre ellos pero con características muy distintas.

Problema

> Cuatro deportistas se inscriben en una escuela de tenis. Pueden hacerlo en cualquiera de los tres turnos: mañana, tarde o noche. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse?

Problema

> María tiene cuatro reglas iguales que quiere distribuir en tres cajones de su armario. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

En estos dos problemas, además de notarse las semejanzas numéricas vemos que se trata de distribuir objetos u elementos (en un caso deportistas y en el otro reglas) en lugares o categorías (para los problemas se trata de turnos o cajones). La diferencia importante está en que en el caso de los deportistas se trabaja con elementos (personas) distintos mientras que en el otro se trabaja con objetos (reglas) iguales.

Para resolver el primero debemos tener en cuenta el principio de multiplicación. El primer deportista puede elegir entre tres turnos; por cada elección que haga, el segundo también tendrá tres opciones. Así sucesivamente continuamos con todos los restantes. La cantidad de formas de distribuirse resulta: $3.3.3.3 = 81$

No se puede trabajar de la misma manera en el otro problema. Si bien en los dos cada distribución se asocia con una manera de descomponer a 4 como suma de enteros no negativos hay una diferencia fundamental entre ellos: las reglas son iguales (indistinguibles) mientras que lógicamente los deportistas no.

Por ejemplo si los deportistas son María, Susana, Adrián y Marcelo puede ocurrir, entre otras posibilidades:

Mañana	Tarde	Noche
María, Susana	Adrián	Marcelo
María, Adrián	Susana	Marcelo

Podemos así seguir enumerando y vemos que las situaciones son claramente distintas y representan dos de los casos posibles asociados a la descomposición $4 = 2 + 1 + 1$. Como las reglas son iguales, al no poder distinguir entre ellas, contamos dos en el primer cajón, una en el segundo y una en el tercero.

Si intentamos resolver el segundo problema planteado enumerando las distintas posibilidades el trabajo resulta dificultoso pero es una forma de intentar encontrar la solución a nuestro problema.

Puede ocurrir:

	Primer Cajón	Segundo Cajón	Tercer Cajón	
	4	0	0	
4+0+0	0	4	0	3 distribuciones
	0	0	4	
	3	1	0	
	3	0	1	
3+1+0	1	3	0	6 distribuciones
	1	0	3	
	0	3	1	
	0	1	3	
	2	2	0	
2+2+0	2	0	2	3 distribuciones
	0	2	2	
	2	1	1	
2+1+1	1	2	1	3 distribuciones
	1	1	2	

En total aparecen: 3 + 6 + 3 + 3 = 15 distribuciones distintas.

Si analizamos otros ejemplos podemos concluir que el número de formas de distribuir r elementos iguales o indistinguibles en n lugares o elementos distintos o distinguibles se calcula mediante la expresión $D_{n,r} = \dfrac{(r+n-1)!}{(n-1)!\,r!}$.

Para nuestro ejemplo: $D_{3,4} = \dfrac{6!}{2!\,4!} = \dfrac{6.5.4!}{2\,4!} = 15$ posibilidades.

Pero: $$D_{n,r} = \frac{(r+n-1)!}{r!\,(n-1)!} = \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1} = C_{r+n-1,r} = C_{r+n-1,n-1}.$$

Esta fórmula nos da el número de formas de distribuir r objetos iguales en n categorías distinguibles. Debemos tener en cuenta que, cuando se trata de elementos distintos, se puede aplicar directamente el principio de multiplicación mediante el cual resulta que el número de distribuciones es n^r.

Podemos analizar una situación general: supongamos que tenemos n grupos distintos de elementos y los elementos en cada grupo iguales entre sí. Se desean seleccionar k elementos entre los pertenecientes a grupos. Nos interesa conocer de cuántas maneras puede hacerse la elección si hay por lo menos k objetos de cada clase.

Para dar respuesta a este interrogante podemos seguir el siguiente esquema de razonamiento. Llamamos con G_1, G_2, ..., G_n a los distintos grupos de objetos. Cualquier selección de k objetos como lo que se plantea consiste en elegir k_1 objetos del grupo G_1, k_2 objetos del grupo G_2 y así sucesivamente hasta k_n objetos del grupo G_n de manera que $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$.

Tenemos que elegir en forma ordenada n enteros no negativos cuya suma sea k. Toda elección de este tipo determina una forma de seleccionar k elementos. Debemos entonces contar la cantidad de formas en que k puede ser expresado como suma ordenada de n enteros no negativos.
Cualquiera de estas formas de descomponer representa una distribución de k objetos idénticos en n lugares distintos (uno por cada sumando). Cada una de las distribuciones corresponde a una descomposición. Hemos visto que el número de distribuciones resulta $D_{n,k} = C_{n+k-1,k}$ y, por lo tanto, es lo que da respuesta a nuestro planteo.

Podemos concluir lo siguiente: *Dadas n clases distintas de objetos (los de cada clase idénticas entre sí) el número de formas en que pueden elegirse k objetos entre ellos, suponiendo que hay por lo menos k de cada clase, es igual a* $C_{n+k-1,k}$.

A cada una de estas selecciones se las llama combinación con repetición de n clases o grupos de objetos tomados de a k.

Notación $C^*_{n,k}$: combinaciones con repetición de n clases de objetos tomados de k en k.

Se puede notar que entre los objetos seleccionados puede haber algunos repetidos pero no interesa el orden de aparición de los mismos.
Por este motivo se puede hablar de combinaciones. En este caso, lo mismo que para los arreglos, k puede ser mayor, menor o igual que n.
Si n es mayor o igual que k e imponemos la condición de que a lo sumo se puede elegir un objeto de cada clase estamos en presencia de las combinaciones simples de n elementos tomados de k en k que vimos anteriormente.
Debemos tener en cuenta que el número de combinaciones con repetición de n clases o grupos de objetos tomados de k en k se obtiene de la siguiente manera:

$$C^*_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Problema

> Una librería tiene en oferta cartucheras con 18 bolígrafos, pudiendo ser éstos de tinta negra, roja, azul o verde. ¿De cuántas formas distintas se puede preparar la cartuchera?

El contenido de una cartuchera está determinado por la cantidad de bolígrafos de cada color que hay en ella. Se trata de un problema de combinaciones con repetición, donde hay 4 clases de objetos (cada color de tinta) y deben seleccionarse 18 de ellos.

Es decir que la cantidad buscada es : $C^*_{4,18} = C_{4+18-1,\,18} = C_{21,18} = 1330$

El número de formas distintas de preparar la cartuchera es 1330.

Problema

En una panadería se dispone de siete variedades de factura. ¿De cuántas formas se puede seleccionar una docena de facturas?

La docena de facturas se puede formar seleccionando las facturas de un grupo de siete variedades distintas pudiendo haber más de una de cada variedad. Son combinaciones con repetición de 7 elementos distintos tomados de a 12.

$$C^*_{7,12} = C_{7+12-1,12} = C_{18,12} = \binom{18}{12} = \frac{18!}{12!\,6!} = 18\,564$$

Existen 18 564 formas distintas de elegir la docena de facturas.

EJERCICIOS

1)a) En un quiosco se venden caramelos sueltos de cuatro gustos diferentes: ananá, frutilla, menta y naranja. Juan quiere comprar 10 caramelos ¿Cuántas combinaciones diferentes puede hacer con los gustos?

b) Una confitería expone 10 clases de masas. ¿De cuántas maneras podemos llenar una caja de 12?

c) Se arrojan simultáneamente 5 dados idénticos. ¿Cuántos resultados posibles podemos obtener con la tirada?

2) Escriba todas las combinaciones con repetición de dos elementos que se pueden formar con las letras o, p, q, r.

3) Calcule: **a)** $C^*_{5,3} \,.\, C_{9,6}$ **b)** $3!\, C^*_{6,4} - A^*_{4,3}$

c) $\dfrac{C^*_{7,4}}{C^*_{6,3}}$ **d)** $\dfrac{C^*_{9,5} + C^*_{10,8}}{3!}$

RESPUESTAS

1)a) 286 **b)** 293 930 **c)** 252

2) oo, op, oq, or, pp, pq, pr, qq, qr, rr

3)a) 2940 **b)** 692 **c)** $\dfrac{15}{4}$ **d)** $\dfrac{25\,597}{6}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.7 ANÁLISIS COMBINATORIO CON REPETICIÓN

1) Calcule:

a) $P_{10}^{3,2,5} . A^*_{m,2}$ **b)** $2.C^*_{5,4} - P_3$ **c)** $\dfrac{2.P_3}{A^*_{5,3}} - 10$

d) $C^*_{3,2} \,.\, P^*_2 + A^*_{4,2}$ **e)** $\dfrac{P_4 . P^*_3}{4!2!}$ **f)** $(C_{7,4} - C^*_{4,2}) \,.\, 3!$

2)a) En un conjunto de n elementos se pueden formar 216 arreglos de 3 elementos cada uno. Calcule el valor de n.

b) Con un conjunto de 4 elementos se formaron 56 combinaciones posibles. Calcule el número de elementos de cada subconjunto formado.

3) Halle x y verifique:

a) $C^*_{x,2} - 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

b) $4A^*_{x,2} = 3A_{x,2} - \frac{1}{3}C_{4,2}$

c) $x \cdot A^*_{x,2} + 2\,C_{x,2} = 0$

d) $A^*_{x,2} - A_{x,2} = 8$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DEL CAPÍTULO

1) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse cinco personas en un banco?

2) ¿De cuántas maneras pueden cubrirse los puestos de jefe, subjefe, secretario y tesorero en un comité de siete?

3) Una señora decide realizar una cena en su casa para seis invitados. ¿De cuántas maneras puede elegir entre diez de sus amigos?

4) ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sin repetir ninguno?

5) Sean diez puntos a,b,c, ... de los cuales no hay tres alineados. ¿Cuántos segmentos determinan los puntos?, ¿cuántos vectores?, ¿cuántas rectas?, ¿cuántos planos?

6) En un rodeo de 42 animales, hay que seleccionar lotes de seis.

a) ¿De cuántas maneras pueden hacerse?

b) ¿De cuántas maneras pueden formarse los lotes de seis excluyendo a uno determinado de los animales?

c) ¿De cuántas maneras incluyendo a uno determinado?

7) Un grupo de productores consta de 25 integrantes de los cuales cuatro son ingenieros agrónomos. Halle el número de grupos de tres miembros que se pueden formar de manera que en el grupo haya, por lo menos, un ingeniero.

8) Se obtienen mediante un método de mejoramiento genético siete líneas de centeno, y posteriormente, se requiere su implantación de manera de lograr la fecundación sin control alguno entre ellos. Se quiere saber de cuántas maneras distintas pueden implantarse las mismas en un lote.

9) ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres cajas de Petri de un grupo de quince con colonias bacterianas distintas, de manera que:

a) una de ellas debe figurar en el grupo seleccionado?

b) dos de ellas no deben figurar en el grupo seleccionado?

c) una de ellas debe, y otras dos no deben figurar en el grupo seleccionado?

10) Un investigador privado es contratado para descubrir un laboratorio secreto donde se está experimentando un revolucionario sistema de producción y control de energía.

Siguiendo a un científico que le resulta sospechoso observa que, para abrir una puerta disimulada en la pared, acciona llaves de un tablero.

Después de que el científico se retira, el investigador se acerca a examinar el tablero que tiene ocho llaves hacia abajo.

a) El investigador no sabe cuántas llaves hay que levantar, ni tampoco si importa el orden en que son accionadas. Si quisiera probar, ¿cuántas posibilidades tiene?

b) Al segundo día trata de acercarse más el científico y oye cinco "clics" cuando acciona las llaves del tablero. Con el nuevo dato, ¿a cuántas se redujeron las posibilidades?

c) Un día el científico llega acompañado y el detective oye decir: "Puedo accionar las llaves en cualquier orden." ¿Cuántas son ahora las posibilidades de encontrar la clave?

d) Por otra conversación se entera de que la primera llave debe estar levantada. ¿Cuántas son ahora las posibilidades?

e) Por último se entera de que las dos últimas deben permanecer bajas. ¿Cuántas posibilidades quedan?

11) Una persona concurre a un comedor italiano especializado en pastas caseras. En el menú ofrecen cinco tipos distintos de pastas y ocho variedades de salsas. ¿De cuántas maneras distintas puede pedir una pasta y una salsa?

12) María tiene cinco pantalones y seis remeras. ¿De cuántas formas distintas puede combinarlos?

13) Un gran negocio tiene ocho puertas. ¿De cuántas maneras una persona puede entrar y salir del edificio utilizando puertas diferentes?

14) Usando los números 3, 4, 5, 6 y 7, ¿cuántos números pares de tres cifras distintas se pueden formar sin repetir ningún número?

15) En una reunión, cada persona saludó a todas las restantes dándole la mano. ¿Cuántos invitados había si el número de apretones de mano fue 45?

16) Para armar una evaluación de cuatro ítems se dispone de seis preguntas de álgebra y cuatro de geometría. ¿Cuántos exámenes diferentes pueden armarse usando dos preguntas de álgebra y dos de geometría?

17) ¿De cuántas maneras pueden sentarse cuatro personas en un banco con seis butacas?. ¿Y en uno con cuatro butacas?

18) Con el objetivo de ejercitar la lectura, la maestra decide distribuir tres libros entre cinco alumnos. De cuántas maneras puede hacerlo si:

a) cada alumno puede recibir un libro, pero los tres libros son idénticos.

b) cada alumno puede recibir uno de los tres libros, siendo éstos diferentes.

19) A un Congreso Internacional asisten cincuenta personas de las cuales treinta sólo hablan inglés y veinte sólo español. ¿Cuántas conversaciones entre dos personas pueden establecerse sin la necesidad de un intérprete?

20) Sobre una recta se marcan cuatro puntos diferentes y sobre otra recta paralela a la primera se marcan otros cinco puntos. ¿Cuántos triángulos pueden obtenerse utilizando tres cualesquiera de esos nueve puntos?

21)¿Cuántos números de tres dígitos se pueden crear usando los dígitos 5 y 6?

22) En un quiosco venden masitas con tres tipos de relleno: frutilla, cereza y limón. Sofía quiere comprar quince paquetes, ¿cuántas selecciones distintas puede hacer con los gustos?

23) ¿Cuántos códigos de dos letras pueden formarse usando las vocales?
24) ¿Cuántos "códigos" distintos pueden construirse usando todas las letras de la palabra ANANA?
25) Se desea formar un comité de dos abogados y tres contadores. Si los miembros se elegirán de entre cuatro abogados y ocho contadores, ¿cuántos comités diferentes son posibles?

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE DEL CAPÍTULO

1) La cantidad de maneras distintas en que pueden disponerse las letras de la palabra "camino" son:

a) 720 **b)** 360 **c)** 180 **d)** 90

2) Si Pedro tiene tres tipos diferentes de buzos, 4 pantalones y 2 remeras distintas, la cantidad de conjuntos deportivos distintos que puede armar es:

a) 36 **b)** 24 **c)** 12 **d)** 9

3) El resultado de $\frac{3!+4!}{2!}$ es:

a) 7,5 **b)** 8 **c)** 15 **d)** Ninguna de las anteriores.

4) Tres personas llegan juntas a un banco para pagar impuestos. La cantidad de maneras distintas que tienen para formar fila delante de la ventanilla es:

a) 12 **b)** 9 **c)** 6 **d)** 4

5) El resultado de $C_{5,2}$ es:

a) 20 **b)** 10 **c)** 2 **d)** 1

6) Al resolver $\sum_{k=0}^{2}(5k)$ se obtiene:

a) 0 **b)** 30 **c)** 15 **d)** 50

7) Si $A_{n,2} = 12$, el valor de n es:

a) 4 **b)** 3 **c)** 12 **d)** Ninguno de los anteriores

8) El número combinatorio de igual valor que $\binom{10}{3}$ es:

a) $\binom{10}{4}$ **b)** $\binom{10}{7}$ **c)** $\binom{10}{0}$ **d)** Ninguno de las anteriores

9) Para obtener el número combinatorio $\binom{6}{4}$, a $\binom{5}{4}$ se le debe sumar:

a) $\binom{1}{0}$ **b)** $\binom{6}{0}$ **c)** $\binom{5}{3}$ **d)** $\binom{5}{0}$

10) El coeficiente de x^2 en el desarrollo de $(x + 3)^4$ es:

a) 12 **b)** 18 **c)** 6 **d)** 54

11) El tercer término del desarrollo de $\left(2a-\frac{1}{a}\right)^5$ es:

a) $-80a$ **b)** $80a$ **c)** $\frac{80}{a}$ **d)** $80a^3$

12) El término del medio en el desarrollo de $(3-x)^4$ es:

a) $54x^2$ **b)** $-54x^2$ **c)** $6x^2$ **d)** $18x^2$

AUTOEVALUACIÓN Nº 8: ANÁLISIS COMBINATORIO

1) Verifique las siguientes igualdades:

a) $3(n+1)!-n!=n.(2(n-1)!+3n!)$ **b)** $\left[\frac{a}{(a-1)!}+\frac{1}{a!}\right].(a+1)!=a^3+a^2+a+1$

2) Sin realizar operaciones justifique las siguientes igualdades.

a) $\binom{7}{5}+\binom{7}{6}=\binom{8}{6}$ **b)** $\binom{15}{3}=\binom{15}{12}$ **c)** $\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=\binom{10}{4}$

3) Sabiendo que los números combinatorios son complementarios determine él o los valores de a: $\binom{15}{1+3a}=\binom{15}{a(a+2)}$

4) Exprese en forma de sumatoria las siguientes expresiones:

a) $-x+\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{9}x^3+\frac{8}{27}x^4$ **b)** $t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}-\frac{t^4}{24}+\frac{t^5}{120}$

5) Resuelva las siguientes ecuaciones o inecuaciones:

a) $\binom{x-2}{2}+\binom{x-1}{2}=9$ **b)** $\frac{(n+2)!}{n!}\leq 2$ **c)** $2\binom{x+1}{2}=3\binom{x}{3}$

d) $\sum_{m=-1}^{2}(-1)^m(2m+1)a=2a-1$ **e)** $\sum_{i=1}^{3}(a-i)^2>29$ **f)** $\sum_{h=-2}^{1}\frac{h^2-3}{x+1}=3$

6) Utilizando el principio de inducción matemática demuestre las siguientes proposiciones:

a) $5+10+15+\dots\dots+5n=\frac{5n(n+1)}{2}$

b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ para cualquier $n\geq 1$

7) Aplicando el teorema del binomio desarrolle:

a) $\left(2a^3-\frac{1}{a}\right)^5$ **b)** $\left(-x+\frac{y^2}{2}\right)^4$

8) En el desarrollo del binomio $\left(xy-\frac{2}{y^3}\right)^8$ halle el término que no contiene a la variable "y" (sin hacer el desarrollo completo del mismo).

9) Sin hacer el desarrollo completo, encuentre el término independiente del binomio $\left(\frac{-1}{m}+2m\right)^{6}$.

10) Halle el valor de x en el binomio $\left(r^{x}+t^{-2}\right)^{8}$ sabiendo que el tercer término es de grado 26.

11) Determine el exponente m del binomio $\left(2x^{4}+\frac{3}{x}\right)^{m}$ sabiendo que el sexto término tiene grado 15.

12) Sabiendo que los términos centrales del desarrollo de la potencia $\left(2y^{3}-y^{2}\right)^{5}$ son iguales, calcule él o los valores de y.

13) ¿De cuántas maneras distintas se pueden acomodar ocho cartas distintas sobre una mesa formando una hilera?

14) Debido a la escasez de vacunas sólo 5 de los 12 perros del barrio podrán ser vacunados. ¿De cuántas formas se podrán elegir los cinco animales?

15) En un laboratorio hay cinco microscopios y diez alumnos que deben usarlos, ¿de cuántas maneras se pueden asignar los diez estudiantes a los cinco microscopios?

16) ¿Cuántos códigos de cinco letras se pueden formar con las letras A, B, C, D?

17) ¿Cuántas palabras código se pueden formar con las letras de la palabra satélite?

18) ¿Cuántas señales diferentes se pueden hacer con siete banderas utilizando tres blancas, dos rojas y dos azules?

19) Encuentre los valores de t para los cuales: $\frac{5C_{t,3}}{A_{t+1,1}}=4$

20) Halle él o los valores de m que verifican: $\frac{A_{m,2}}{3}+C_{m,3}=3$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Dado el conjunto $M=\{1, 2, 3, 4\}$, calcule el número y forme:

a) los arreglos de orden 3,

b) las combinaciones de orden 3,

c) las permutaciones.

2) Determine el valor de x sabiendo que:

a) $x=P_7+A_{5,3}+C_{10,4}$

b) $x-5P_4=2C_{6,3}-3A_{7,4}$

c) $x=\binom{15}{2}+\binom{10}{9}+\binom{17}{0}+\binom{20}{20}$

d) $x=C_{7,4}-P_6-A_{5,3}$

e) $3x=8P_3-6C_{5,4}$

f) $3!4!x=6!5!$

g) $\binom{7}{3}+\binom{5}{3}x=\binom{6}{0}$ **h)** $3!\binom{6}{3}=\binom{2}{0}4!+12x$

3) Verifique las siguientes igualdades:

a) $4!-2!=22$ **b)** $\dfrac{(m+1)!}{(m-1)!}=m.(m+1)$

c) $(5+3)!=40\ 320$ **d)** $\dfrac{x!}{(x-2)!}+\dfrac{2x!}{(x-1)!}=x.(x+1)$

e) $\dfrac{t+3}{(t+2)!}=\dfrac{1}{(t+1)!}+\dfrac{1}{(t+2)!}$ **f)** $2n!-(n-1)(n-1)!=n!+(n-1)!$

4) Coloque V o F según corresponda, justificando su respuesta.

a) $\dfrac{6!}{2!}=3!$ **b)** $0!\ 5!=0!$ **c)** $7!=7.6.5!$

d) $(6+2)!=6!+2!$ **e)** $\dfrac{7!}{7!}=1$ **f)** $(5-3)!=5!-3!$

5) Calcule m tal que se cumpla:

a) $C_{m,3}=C_{m,2}$ **b)** $A_{m,3}=12m$ **c)** $6C_{m,3}=A_{m-1,4}$

d) $C_{m,5}=\dfrac{3}{5}C_{m+1,4}$ **e)** $\binom{m}{2}+\binom{m-2}{2}=21$

f) $\binom{7}{m^2-m}=\binom{7}{2m-2}$ **g)** $\binom{m^2-6}{5}=\binom{2m+2}{5}$

h) $5\binom{m}{2}=2\binom{m+2}{2}$ **i)** $3\ (m-1)A_{m,3}=36\ C_{m+1,3}$

6) Teniendo en cuenta que los siguientes números combinatorios son complementarios, halle a:

a) $\binom{4}{4a^2-2}=\binom{4}{2a}$ **b)** $\binom{14}{a^2+5}=\binom{14}{a+3}$

7) Desarrolle las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{x=1}^{4}\frac{(-1)^x}{x}$ **b)** $\displaystyle\sum_{x=0}^{n}\frac{2x}{x+1}$ **c)** $\displaystyle\sum_{x=1}^{3}(x-1)=$

d) $\displaystyle\sum_{x=1}^{n}a=$ **e)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\frac{-k+1}{k+2}=$ **f)** $\displaystyle\sum_{i=-1}^{3}\frac{(-2)^i}{i+2}$

8) Exprese en forma de sumatoria las expresiones dadas:

a) $2+4+6+8+10$ **b)** $1+3+5+7+9+11$

c) $1+8+27+64$ **d)** $1-2x+3x^2-4x^3+5x^4$

9) Determine si cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

a) $\sum_{j=1}^{n} 7a_j = 7\sum_{j=1}^{n} a_j$ **b)** $\sum_{j=1}^{n}(a_j - 1) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) - n$ **c)** $\sum_{j=1}^{n} 3 = 3n$

10) Calcule el valor de a sabiendo que:

a) $\sum_{r=1}^{4}\left(r^2 - a\right) = -2$ **b)** $\sum_{i=0}^{3} \frac{a+1}{i+1} = \frac{15}{12}$

11) Desarrolle los siguientes binomios utilizando la fórmula de Newton:

a) $\left(a + b^2\right)^5$ **b)** $\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{y}\right)^4$ **c)** $\left(a^{-2} + 2a^3\right)^6$

d) $\left[\left(-2a^2 + \frac{1}{a}\right)^2\right]^3$ **e)** $\left[(x+y)^{\frac{1}{2}}\right]^8$ **f)** $\left(z^{-2} - \frac{2}{z}\right)^4$

12) Calcule, sin efectuar el desarrollo, el término indicado en cada caso:

a) el segundo término de $(a + b)^3$,

b) el décimosegundo término de $\left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right)^{20}$,

c) el quinto término de $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^9$,

d) el décimo término de $\left(ab - 2a^4 b^3\right)^{12}$,

e) el octavo término de $\left(a - \frac{1}{a}\right)^{10}$,

f) el término del medio de $(1+ x)^8$,

g) los dos términos centrales de $\left(y^8 - y^{-1}\right)^9$.

13) $240a^4 b^4$ es el tercer término en el desarrollo de $(............)^6$:

a) $16a + b$ **b)** $a^2 + 2b$ **c)** $240a + 2b$ **d)** $2a + b^2$

14) El coeficiente del cuarto término en el desarrollo de $(2x - y)^{10}$ es .... y la correspondiente potencia de x es ....

15) Con todos los elementos de un conjunto se han formado variaciones de orden tres. Se sabe que el número de variaciones es 42 veces el número de elementos de dicho conjunto. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto?

16)a) Sea $\left(-2x + \frac{3}{2}\right)^7$. Determine el valor de x sabiendo que $T_3 + T_6 = 0$.

b) Halle el valor de x sabiendo que el término central del desarrollo de $\left(x+\frac{1}{2}\right)^8$ vale $\binom{8}{4}$.

17) a) Calcule x en $\left(m^5+n^4\right)^x$ si el término decimoprimero es de grado 50.

b) Calcule x en $\left(a^2+b^3\right)^x$ si el término quinto es de grado 26.

18) ¿Cuál es el término de grado 32 del desarrollo de $\left(2a^4+3a^3\right)^{10}$?

19) Obtenga, sin hacer el desarrollo, el término que contiene x^8 en $\left(y+3x^2\right)^6$.

20) Sin efectuar el desarrollo, halle el término independiente de $\left(2b^3+\frac{5}{b^2}\right)^{10}$.

21) Sean los dígitos del número 5531, encuentre el número y forme:

a) los arreglos con repetición de orden 2,
b) las permutaciones con repetición,
c) las combinaciones con repetición de orden 2.

22) Halle el valor de x:

a) $x=\frac{1}{5}A^*_{5,2}+A_{5,2}$

b) $3x=2P_4^{3,1}+C^*_{5,4}$

c) $10x=C^*_{7,2}+2A^*_{3,2}+P_4$

d) $6x=5P_3^{2,1}-2A^*_{4,2}+C^*_{5,3}$

e) $A^*_{5,2}.(x-1)=C^*_{4,3}$

f) $\frac{A^*_{5,3}.P_4^{2,2}}{m.C_{10,2}}=\frac{8!P_5}{10!}$

23) Determine el valor de m para que se cumpla:

a) $A^*_{m,2}=20P_5^{4,1}$

b) $C^*_{7,2}=2P_5^{3,2}+2A^*_{m,2}$

c) $C^*_{m,2}+5P_3=P_5^{2,1,2}+C_{6,2}$

d) $P_6^{4,2}=3A^*_{m,2}-6C^*_{4,2}$

Respuestas a:
Ejercicios Integradores
Problemas de Aplicación
Pruebas de Opción Múltiple
Ejercicios de Repaso

CAPÍTULO 1: MATRICES

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.1 Vectores y matrices (página 20)

1)a) M_{1x4} , M^t_{4X1} ,$M^t = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) N_{2x2} , N^t_{2x2} , $N^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

c) P_{2x4} , P^t_{4x2} , $P^t = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 5 & -2 \\ 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

d) O_{3x2} , $O^t_{2x3,}$ $O^t = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, matriz rectangular

3) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, matriz cuadrada, triangular inferior

4)a) Sí; **b)** No; **c)** No

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.2 Álgebra de matrices 1.3 Ecuaciones matriciales (página 51)

1)a) –5; **b)** 3; **c)** 4

2)a) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 3 & -5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$; **b)** y **d)** No es posible **c)** $\begin{bmatrix} 14 & -4 & 19 \\ -9 & 3 & -15 \\ 7 & -3 & 16 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 6 & -12 & 16 \\ 14 & 14 & 1 \end{bmatrix}$

3) $X=\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

4) $X=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

5) $x=-2;\ \ y=-3$

6) $X=\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) $x=\frac{7}{3}$; $y=\frac{7}{3}$

8) $X=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$

AUTOEVALUACIÓN N^{O} 1: Resolución de problemas. Ecuaciones matriciales (página 52)

1)a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

b)i) $A^2=\begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; **ii)** 6; **iii)** 4;

iv) un elemento genérico de la matriz A^2 representa el total de caminos entre dos ciudades (i, j), pasando exactamente por una ciudad.

c)i) $A^3=\begin{bmatrix} 20 & 33 & 20 & 28 \\ 33 & 20 & 28 & 20 \\ 20 & 28 & 16 & 21 \\ 28 & 20 & 21 & 16 \end{bmatrix}$; **ii)** 28

d)i) Cada elemento de A nos da la forma de ir de una ciudad a otra sin pasar por ninguna intermedia y cada elemento de A^2 nos da la cantidad de formas de ir de una ciudad a otra pasando exactamente por otra ciudad, por lo tanto la suma nos da la cantidad de formas de pasar de una ciudad a otra pasando cuando más por una ciudad.

$A + A^2=\begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 9 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; **ii)** 7; **iii)** 6

2) $X = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

4) R = [3 –5 7]

5)a) $2X + \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 30 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 40 \\ 66 & 72 \end{bmatrix}$;

b) $X = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 3{,}50 & 3 \end{bmatrix}$;

d) La recaudación de Juan de los tres días fue de $ 310 y la de Pedro del primer día fue de $ 114.

6) Cada caja de la cosecha 1 deja de ganancia $ 2,25 y cada caja de la cosecha 2 deja $ 3,15.

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.5 Matriz escalonada y escalonada reducida (página 59)

1)a) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) c
3) a
4) b

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.6 Matriz inversa (página 64)

1)a) No; **b)** Sí

2)a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **b)** No existe **c)** No existe **d)** $D^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

AUTOEVALUACIÓN Nº 2: Matrices equivalentes. Matriz inversa. (página 71)

1)a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 & 7 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

2) Las matrices A y E son escalonadas reducidas.
La matriz D es escalonada por renglones.
Las matrices B, C y F no son ni escalonadas reducidas ni escalonadas por renglones.
La matriz B no es escalonada porque el primer elemento distinto de 0 de la tercer fila no es 1.

La matriz C no es escalonada porque el renglón de ceros no aparece en la parte inferior de la matriz.
La matriz F no es escalonada porque el primer elemento distinto de 0 de la segunda fila está más a la derecha que el de la tercer fila y además no es 1.
3) Recuerde que la demostración debería hacerse usando el método del espejo que es el único visto hasta el momento. La matriz no admite inversa pues no se logra llegar a la matriz identidad, pues al escalonarla se obtiene un renglón completo de ceros.
4) Se pueden obtener distintas respuestas. Recuerde que la matriz triangular superior es la que tiene ceros todos los elementos debajo de la diagonal principal.

5) $B^{-1} = \begin{bmatrix} -13 & 2 & 8 \\ 7 & -1 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN (página 72)

1)a) $A = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 40 & 0 & 0 \\ 30 & 10 & 30 \\ 10 & 10 & 50 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 21 & 28 \end{bmatrix}$

c) Las cantidades totales de los distintos tipos son: 1610 unidades de la insulina semilenta, 700 unidades de la lenta y 2100 unidades de la ultralenta.
d) El precio de compra total de toda la insulina pagada por el hotel es de 14630 dólares.
2)a) En enero se vendieron 7 modelos blancos de superlujo.
b) En febrero se vendieron 3 modelos azules de lujo.
c) Se vendieron más modelos regulares verdes en febrero.
d) Se vendieron el mismo número de unidades en ambos meses del modelo de lujo y color azul.
e) Se vendieron 14 unidades blancas del modelo de superlujo.
3) El costo total de las acciones es de $ 240 000.
4)a) Necesita 146 unidades de acero, 526 unidades de madera, 260 unidades de vidrio, 158 unidades de pintura y 388 unidades de obra.

b) $C = \begin{bmatrix} 49200 \\ 52800 \\ 46500 \end{bmatrix}$

c) El costo total de construcción para todas las casas es de $ 1 173 600
5)a) Deben emplearse 12900 segundos en estampado, 23150 segundos en soldado y 15580 segundos en pintado.
b) El costo de cada pieza X es de $ 59; de cada pieza Y , $ 104 y de cada pieza Z, $ 91.
c) El costo total para fabricar todas las piezas es de $ 280 860.
6) El costo de la inversión es de $ 1248.
7)a) En enero se gastó $ 1258, en febrero, $ 1530 y en marzo, $ 1054,9.
b) E gasto total es de $ 3842,9.

8)a) $D = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 12 \\ 32 & 41 & 14 \end{bmatrix}$

b) $C = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$

c) En horticultura se invirtió $ 632 y en agricultura, $ 872.

9)a) $M = \begin{bmatrix} 21 & 15 & 34 \\ 19 & 25 & 28 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 28 & 18 & 27 \\ 25 & 17 & 28 \end{bmatrix}$

b) $M+J = \begin{bmatrix} 49 & 33 & 61 \\ 44 & 42 & 56 \end{bmatrix}$; **c)** La tienda I ganó \$ 2617 y en la tienda II, \$ 2612.

10) El número total es de 93 helechos.

11) $P = \begin{bmatrix} 78{,}5 & 65{,}5 & 68{,}5 \\ 25 & 29 & 30 \\ 37 & 41{,}5 & 32 \end{bmatrix}$

12) a) $P = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 10 \end{bmatrix}$

b) $P.A = \begin{bmatrix} 76 & 16 & 56 & 72 \end{bmatrix}$. Sus elementos determinan el precio por cada tipo de trabajo.

c) $A.S = \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 90 \end{bmatrix}$. Sus elementos indican las horas utilizadas en el proyecto por camión, tractor y conductor

d) P.A.S = [2000]. Representa el costo total del proyecto.

13)a) Matriz de cantidades de alimento. $M = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

b) Matriz de unidades por alimento $N = \begin{bmatrix} 35 & 10 & 20 \\ 15 & 20 & 15 \\ 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

c) Total $= N.M = \begin{bmatrix} 900 \\ 750 \\ 350 \end{bmatrix}$.

La mezcla contiene 900 unidades de vitaminas, 750 unidades de minerales y 350 unidades de grasa.

14)a) $P = \begin{bmatrix} 59 & 76 & 65 \\ 43 & 64 & 51 \end{bmatrix}$; **b)** $T = \begin{bmatrix} 54 & 72 & 60 \\ 36 & 52 & 42 \end{bmatrix}$

15)a) Se admiten 36 pacientes en Obstetricia, 20 en Cardiología, 48 en Pediatría y 96 en otras unidades.

b) El ingreso diario del hospital es de \$ 54 560.

16) Se pueden hacer 8 bicicletas del modelo A y 7 del modelo B.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE (página 77)

1) c; **2)** a; **3)** b; **4)** b; **5)** d; **6)** a; **7)** a

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO (página 78)

1)a) 4x3; **b)** 6; **c)** a_{21} y a_{43}; **d)** 3x4

3)a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 20 \end{bmatrix}$; **d)** [3 –7 6]

e) $\begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & -3 \\ -9 & -6 & -3 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 19 \end{bmatrix}$

5)a) $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 21 & 6 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}$; **d)** No es posible ;

e) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 6 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 23 & 7 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$

6) e **9)** $a = 3,\ b = 1,\ c = 8,\ d = -2$ **10)** $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & 2 \end{bmatrix}$

11) $X = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -\frac{17}{3} \end{bmatrix}$

12) Es solución.

13) $\alpha = 3,\ \beta = -10$

14)a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **c)** No es posible; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$

15)a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$**;** **b)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{5} \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16)a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$

17)a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; **c)** No es posible. **d)** $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$**;**

e) No es posible; **f)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

18)a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; **b)** $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **c)** No existe C^{-1};

d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$ **e)** $E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$ **f)** No existe F^{-1}

CAPÍTULO 2: DETERMINANTES
EJERCICIOS INTEGRADORES 2.1 Función determinante (página 90)

1) a) $x = -6{,}3$; $x = 0{,}3$; **b)** $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **c)** $x = 0$, $x = 1$; **d)** $x = -6$, $x = 1$

2) -100
4) $x = -4$, $x = 3$
5) $a = 7$, $a = -7$
6) $x \leq 1$ o $x \geq 4$

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.2 Propiedades de los determinantes (página 96)

1) a) La primera columna se multiplicó por $\frac{1}{3}$ y la tercera columna por $\frac{1}{2}$, es decir, el determinante queda multiplicado por $\frac{1}{6}$, por lo tanto para que la igualdad se verifique debe multiplicarse el segundo determinante 6;
b) $F_1 = F_3$; **c)** Cambia de signo porque se intercambian F_1 y F_3;
d) $F_2 = 0$
3) -50, ya que la F_1 se multiplicó por 2 y se intercambiaron C_2 y C_3.

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.3 Métodos para calcular determinantes de cualquier orden (página 100)

1) $|A| = 120$; $|B| = -5$
2) a) -19; **b)** -28

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE Determinantes (página 100)

1) c; **2)** a; **3)** a; **4)** d; **5)** b; **6)** a; **7)** d; **8)** a

AUTOEVALUACIÓN Nº 3: Determinantes (página 102)

1)a) $|A^t| = 5$, los determinantes de matrices traspuestas son iguales.

b) $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = 10$, se multiplicaron todos los elementos de la segunda columna dos por dos por lo tanto el determinante queda multiplicado por dos.

c) $\begin{vmatrix} -c & b & a \\ -f & e & d \\ -i & h & g \end{vmatrix} = -5$, el determinante cambia de signo si se intercambian dos líneas paralelas, en este caso fila dos y fila tres.

d) $\begin{vmatrix} -c & b & a \\ -f & e & d \\ -i & h & g \end{vmatrix} = 5$, el determinante se multiplica por –1 al intercambiar las columnas 1 y 3 y se vuelve a multiplicar por –1 al multiplicar la columna 1 por ese número, en consecuencia el determinante no varía.

e) $\left|\frac{1}{2}A\right| = \frac{5}{8}$, al multiplicar la matriz por un número, cada línea del determinante queda multiplicada por el mismo número.

2) Geométricamente esta ecuación representa una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ siempre que x_1 sea distinto de x_2 .
En el caso de que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ la recta no está definida porque tenemos en realidad un solo punto como dato. Algebraicamente, el determinante es cero pues tiene dos filas iguales.
Podemos obtener la ecuación de la familia de rectas que pasa por el punto (x_1, x_2) : $y - y_1 = m(x - x_1)$.

3) $x = 0$, $x = 4$, $x = -5$

5) $S = \{x / x \in R \wedge -1 < x < 4\}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.4 Aplicaciones de matrices y determinantes (página 113)

1) $r(C) = 3$

2) $a = 3$

3) $\beta \neq \frac{11}{6}$

4) $k \neq \frac{5}{2}$, $k \neq -2$

5)a) $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -13 & 9 & -12 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ **b)** y **c)** No existen las inversas.

6) $X = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

7) $X = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

PRUEBA DE OPCION MULTIPLE Aplicaciones de matrices y determinantes (página 114)

1) a; **2)** a; **3)** b; **4)** c; **5)** d; **6)** a

AUTOEVALUACION Nº 4: Aplicaciones de matrices y determinantes. (página 115)

1) $n = 4$

2) $-\frac{26}{468}$ **;** m_{31}

$$\frac{A_{13}}{|A|} = \frac{(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{468} = -\frac{26}{468}$$

3)a) 57 42 29 45 31 27 97 57 52 125 77 76 109 72 58 125 77 76;
b) El mensaje es: “TENGO LAS FOTOS”.

4)a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ **b)** $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ **c)** $a_1 = 2$, $a_2 = -3$

5)a) Puede ser $A = \begin{bmatrix} 36 & 2 \\ 24 & 1{,}50 \end{bmatrix}$ (no es única)

b) Puede ser $N = [50 \quad 20]$ (no es única)
c) $T = N.A = [\,2280 \quad 130]$
d) La matriz A es cuadrada de orden 2, la matriz N es rectangular de orden 1x2 y la matriz T es rectangular de orden 1x2.
e) 30 acciones del tipo **I** y 35 acciones del tipo **II**.

EJERCICIOS DE REPASO (página 116)

1)a) -6 **b)** $(a+1)^2$ **c)** $1 - \text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$ **d)** $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$

2)a) -18 **b)** 33 **c)** $11\sqrt{2} + 5$

3)a) $x = -1$ **b)** $x = 1$ ó $x = -1$ **c)** $x = a + 6$ **d)** $x = 0$ ó $x = 2$ ó $x = -3$;
e) $x = a.(1 - b)$ **f)** $x = 5$ ó $x = -5$ **g)** $x = 4$

4)a) -364 **b)** 0 **c)** 0

6)a) El determinante es nulo pues una línea es igual a otra multiplicada por una constante: $C_3 = -2.C_1$
b) El determinante es nulo pues una línea es combinación lineal de otras líneas paralelas: $F_3 = F_1 + F_2$
c) El determinante es nulo pues una línea es completamente nula: F_2

7)a) -13 **b)** 73
8)a) -32 **b)** 164
9) -10
10) $x = 1$ ó $x = 2$
11) $x = 3$ ó $x = -1$
12)a) $r = 3$ **b)** $r = 3$ **c)** $r = 3$

13) $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -11 & -3 & -7 \\ -19 & -3 & -23 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } C = \begin{bmatrix} -18 & 24 & -15 \\ 5 & 5 & 10 \\ 11 & 32 & -20 \end{bmatrix}$$

14)a) No admite inversa pues su determinante es nulo.
b) No admite inversa pues no es cuadrada;

c) $C^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -2\\ -2 & -5 & -2\\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -2\end{bmatrix}$ **d)** $D^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

15)a) $X=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -6 & \frac{7}{3}\end{bmatrix}$; **b)** No es posible encontrar la matriz X; **c)** $X=\begin{bmatrix}4 & 0 & -5\\ -18 & 1 & 24\\ -3 & 0 & 4\end{bmatrix}$

d) $X=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}18 & 40 & 29\\ 5 & 16 & 5\end{bmatrix}$; **e)** $X=\begin{bmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$; **f)** $X=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

16) $b=-\frac{1}{7}$

18) $b=19{,}2$

19) $(B+3I)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

20) $k\neq-\frac{5}{2}$

CAPÍTULO 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.1 Conceptos básicos (página 133)

2) $S=\{(3,2)\}$

3)a) El sistema es compatible indeterminado porque las dos ecuaciones son equivalentes: la segunda ecuación es igual a la primera multiplicada por $-\frac{1}{2}$.

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.2 Estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (página 176)

1)a) Compatible indeterminado

$S=\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}t, -1-\frac{1}{2}t, t\right) / t\in R\right\}$ **b)** $S=\{(2, 3, 1)\}$;

c) $S=\{(-3, -16, -13)\}$ **d)** Incompatible

2)a) Normal homogéneo; **b)** $\lambda\neq\frac{11}{6}$

3) $k=\frac{95}{11}$

4) $\alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{1}{2}, \gamma=\frac{1}{4}$

5) Los tres sistemas son incompatibles ya que en ningún caso las tres rectas tienen un punto en común.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN (página 177)

1) Debe usar 30 porciones del alimento A.; 70 porciones del alimento B y 90 porciones del alimento C.

2)a) $S = \{(7 - t, t - 4, t) / t \in N \wedge 4 \leq t \leq 7\}$= {(3, 0, 4); (2, 1, 5); (1, 2, 6); (0, 3, 7)}

b) La combinación (3, 0, 4) cuesta $ 15 diarios; **c)** la menos costosa: la primera y la más costosa es la última. **3)** $S = \{(3t - 5, 8 - 3t, t) / t \in N\}$; (1, 2, 2)

4) $S = \{(40000 - 5t, t - 5000, t) / t \in N \wedge 5000 \leq t \leq 8000\}$

5) Los números son: 8, 10 y 15. **6)** Los ángulos miden: 90º, 40º y 50º.

7) Debe consumir 10 unidades del alimento A; 15 unidades del alimento B y 20 unidades del alimento C.

8) La combinación es 200 unidades del producto A, 100 unidades del producto B y 150 unidades del producto C. **9)** Sistema incompatible

10) $C(x) = 2x^2 + 4x + 10$

11) El viajero pasó 4 días en España, 4 días en Portugal y 6 días en Francia.

12) El precio del pan dulce es $ 2,5; el budín $ 5 y la torta $ 4.

13) 313 entradas para estudiantes y 137 del público en general.

14) 1000 horas para el proyecto 1, 1500 horas para el 2 y 2500 horas para el 3.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE (página 180)

1) c; **2)** b; **3)** b; **4)** c; **5)** c; **6)** b; **7)** d

AUTOEVALUACIÓN Nº 5: Sistemas de ecuaciones lineales (página 181)

1)a) El sistema es no normal, no homogéneo; **b)** Es solución (1, –1, 3, 4).

2)a) $\begin{cases} -x + y + 2z = 5 \\ 4y - 6z = 23 \\ x + 5y = 24 \end{cases}$; **b)** El sistema es compatible determinado.

$S = \left\{\left(-1, 5, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

3)a) El sistema es compatible determinado. $S = \{(5, -4)\}$;

b) El sistema es compatible indeterminado. $S = \left\{\left(\frac{1}{5}t - \frac{2}{5}, \frac{6}{5} + \frac{2}{5}t, t\right) / t \in R\right\}$

c) El sistema es incompatible.

4) Si a = –2 y b = –5 el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones pues las gráficas respectivas son rectas paralelas.

Si a = –2 y b ≠ –5 el sistema es incompatible, las respectivas gráficas son rectas paralelas.

Si a ≠ –2 y b ∈ R, el sistema es compatible determinado. Las respectivas gráficas son rectas con distintas pendientes, o sea, se intersecan en un punto.

5) k = 6 **6)** a = 1, b = 2, c = –1 **7)** m ≠ –4. Sistema compatible determinado.

8)a) No es posible aplicar la regla de Cramer pues el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.; **b)** $S = \left\{\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{25}, \frac{4}{25}\right)\right\}$; **c)** No es posible aplicar la regla de Cramer pues el sistema no es normal.

9)a) La tercera ecuación no debe ser equivalente a ninguna de las dadas ni una combinación lineal de ellas. $S = \{(0, 0, 0)\}$; **b)** La tercera ecuación puede ser equivalente a una de las dadas o una combinación lineal de ellas.
10)a) $a \neq -3$ y $a \neq 1$; **b)** $a = -3$ ó $a = 1$
11)a) Sistema normal, homogéneo; **b)** $k \neq 1$ y $k \neq -2,4$
12) El hotel tiene 20 habitaciones simples, 35 habitaciones dobles y 12 habitaciones triples.
13) Puede enviar 66 cajas de equipos médicos, la cantidad x de cajas de alimentos depende de la cantidad z de recipientes con sangre cumpliendo con la igualdad: $x = 111 - \frac{2}{5}z$, donde $z \in \dot{5}$, $z \in N_0$, $z < 277,5$ o bien $z \leq 275$.
14)a) 100 transistores, 110 resistores y 90 chips de computadoras.;
b) 95 transistores, 100 resistores y 90 chips de computadoras.
15)a) $C = 0,0378\ t^2 + 0,1\ t + 315$; **b)** En el año 2048

EJERCICIOS DE REPASO (página 183)

1)a) Significa que el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por las ecuaciones de dichas rectas tiene solución única.; **b)** Es una recta.; **c)** El punto de intersección de las rectas.
2)a) Sí.; **b)** No.
3)a) Ninguna solución. Sistema In-compatible.; **b)** Única solución. Sistema compatible determinado.; **c)** Infinitas soluciones. Sistema compatible indeterminado.
4)a) Sistema normal, no homogéneo, compatible determinado.
$S = \{(5, 2, -1)\}$;
b) Sistema normal, no homogéneo, compatible indeterminado;

$$S = \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t\right) / t \in R\right\}$$

c) Sistema normal, no homogéneo, incompatible.;
d) Sistema normal, no homogéneo, compatible determina-do. $S = \{(3, 4, 2)\}$
5)a) Sistema normal, no homogéneo, compatible determinado.
$S = \{(1, 2, -3)\}$
b) Sistema normal, homogéneo, compatible indeterminado.
$S = \{(-2t , -3t, t)/ t\in R\}$
c) Sistema no normal, no homogéneo, compatible indeterminado.
$S = \{(1 + 4t, t , 1 - 11t)/ t\in R\}$
d) Sistema normal, no homogéneo, compatible determinado.
$S = \{(-1, 2, 1, -2)\}$
6)a) $S = \{(1 , 2 , -3)\}$; **b)** No tiene solución.

c) $S = \left\{\left(\frac{9}{5} - t, -\frac{2}{5} + t, t\right) / t \in R\right\}$

d) $S = \{(2t, t, t)/ t \in R\}$
7) a) $k = 10$; **b)** $k \neq 10$
8) a) $k \neq -1 \wedge k \neq -7$; **b)** $k = -7$;
c) $k = -1$
9) $m \neq -6 \wedge m \neq 1$
10)a) $S = \{(-2, 3, 2, -1)\}$; **b)** $S = \{(1, -1, 3)\}$
c) No es posible pues el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.
11)a) El número de ecuaciones y de incógnitas coinciden y son iguales a 3. Sistema normal no homogéneo.; **b)** $m \neq 8$

12)a) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)\right\}$

b) $S = \left\{ \left(\frac{4}{3} - t, -\frac{1}{3} - t, \frac{1}{3}, t \right) / t \in R \right\}$

c) No tiene solución.

CAPÍTULO 4: SISTEMAS DE INECUACIONES

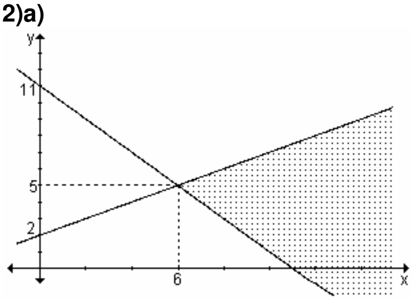
EJERCICIOS INTEGRADORES 4.1 Sistemas de inecuaciones de primer y segundo grado en una variable – 4.2 Sistemas de inecuaciones de primer grado en dos variables – 4.3 Sistemas de inecuaciones de primer y segundo grado en dos variables (página 196)

1)a) $S = \left\{ x / x \in R \wedge -\frac{7}{3} \leq x < -\frac{2}{3} \right\}$

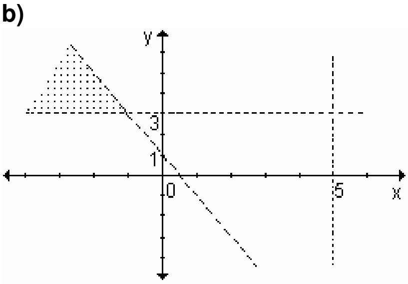
b) $S = \{x/x \in R \wedge -1 \leq x < 1\}$

c) $\left\{ x/x \in R \wedge -3 \leq x < -\frac{5}{2} \vee \frac{5}{2} < x \leq 3 \right\}$

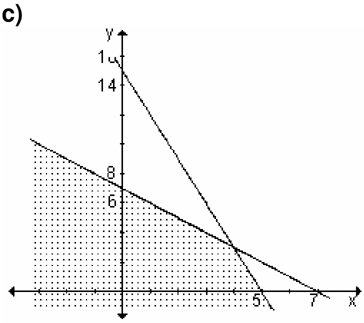
2)a)



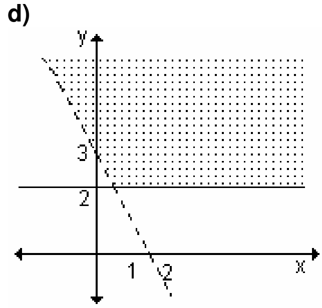
b)



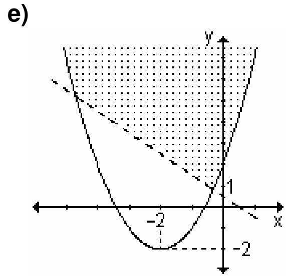
c)



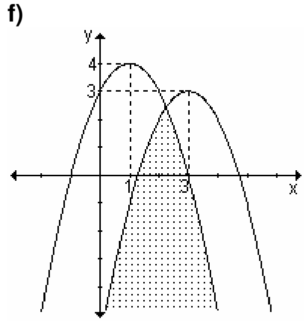
d)



e)



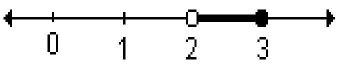
f)



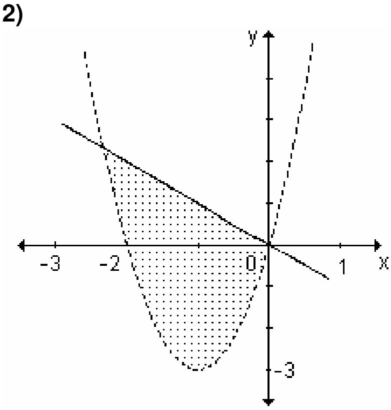
AUTOEVALUACIÓN Nº 6: Sistemas de inecuaciones (página 197)

1)a) $S = \{x / x \in R \wedge 2 < x \leq 3\}$

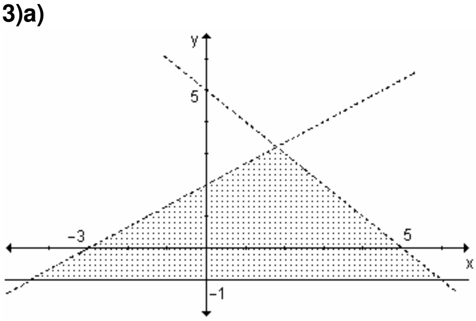
b) $S = \varnothing$



2)



3)a)



4) $\begin{cases} y \leq -2x^2 + 12x - 10 \\ y < 2x - 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

5)a) Siendo x los kilos de pan común e y los kilos de pan francés resulta : $y \geq \frac{2}{5}x$

b) Siendo x los litros de nafta e y los litros de aceite resulta: $y \leq \frac{1}{125}x$;

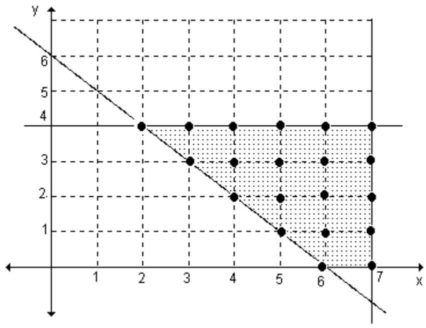
c) Siendo x las hectáreas de trigo e y las hectáreas de maíz: $y \leq \frac{1}{2}x$

6)a) $p \in [7000, 18000]$

b) La producción diaria estimada máxima es 18000 barriles. La producción diaria estimada mínima es 7000 barriles.

7) Siendo x la cantidad de rojas e y la cantidad de verdes resultan las inecuaciones: $\begin{cases} 0 \le x \le 7 \\ 0 \le y \le 4 \\ x + y \ge 6 \end{cases}$.

Hay veinte combinaciones (2, 4); (3, 3); (4, 2); (5, 1); (6, 0); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1); (7, 0); (4, 4); (5, 3); (6, 2); (7, 1); (5, 4); (6, 3); (7, 2); (6, 4); (7, 3);(7, 4)



EJERCICIOS INTEGRADORES 4.4 Programación Lineal (página 214)

1) El valor máximo es 7 y se alcanza en todos los puntos del segmento de recta $y = -x + 7$ entre $x = 3$ y $x = 4$ (incluidos ambos).

2) El valor mínimo es 0 y se alcanza en (0,0).

AUTOEVALUACIÓN Nº 7: Programación lineal (página 214)

1) El valor mínimo es 2 en el punto (2, 0). El valor máximo es 34 en el punto $\left(2, \frac{32}{3}\right)$.

2) El valor mínimo es 7 en el punto (2, 3).

3) Si $a = \frac{5}{2}$ el máximo lo alcanza en el punto (2, 7). Si $a = \frac{3}{2}$ el máximo lo alcanza en el punto (6, 3). Si $a = 2$ el máximo lo alcanza en el punto (6, 0).

4) a = 2, b = 5

5) El valor mínimo es 12 y lo alcanza en el segmento de recta $y = 4 - \frac{4}{3}x$ para $1{,}5 \le x \le 3$.

6) El requerimiento son 30 pastillas Maxivite y 120 pastillas Healthovite con costo mínimo de $ 11,4.

7) La ganancia máxima es $ 300 produciendo tres lotes de pasteles y seis lotes de galletas ó ningún lote de pasteles y diez lotes de galletas.

8) Debe comprar cinco toneladas de petróleo y dos toneladas de gas para maximizar la cantidad de energía generada que asciende a 3750 kilovatios diarios.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN (página 216)

1) La máxima ganancia se obtiene fabricando 6 unidades del producto A y 3 unidades del producto B.

2) a) Conviene vender 20 quesos de la marca A y 30 quesos de la marca B por semana.

b) El beneficio es de $ 540 en caso de venderlos todos.

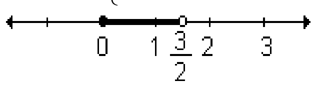
3) Debe plantar 320 ha de maíz y 160 ha de sorgo. La utilidad máxima es de $ 17 600.
4) La utilidad máxima diaria es de $ 5700.
5) Debe fabricar 2 cajas de cada modelo y el ingreso máximo es de $ 260.
6) Debe producir 83 azucenas y 58 narcisos. La ganancia máxima es de $ 39 400.
7) Debe producir por semana 80 podadoras y 30 cortadoras.
La ganancia máxima es $ 10 400.
8) Debe capturar una presa de la especie I y 5 presas de la especie II.
9) Deberá sembrar 60 acres de avena y 40 acres de trigo.
10) Deberá vender 20 panecillos y 20 galletas.
11) Deberá entregar 50 artículos de cada clase. La ganancia máxima es de $ 2500.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE (página 218)

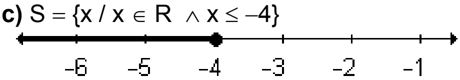
1) c; **2)** c; **3)** d; **4)** d; **5)** a

EJERCICIOS DE REPASO (página 219)

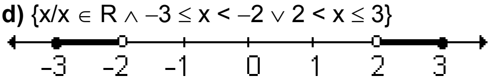
1)a) $S = \left\{ x / x \in R \wedge 0 \le x < \dfrac{3}{2} \right\}$



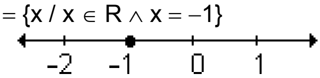
b) No tiene solución;
c) $S = \{x / x \in R \wedge x \le -4\}$



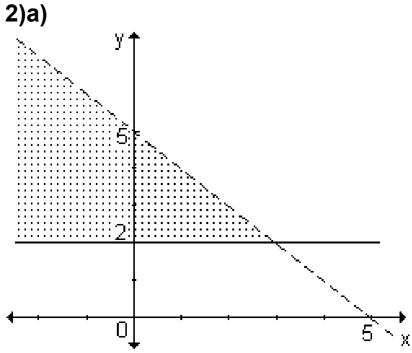
d) $\{x/x \in R \wedge -3 \le x < -2 \vee 2 < x \le 3\}$



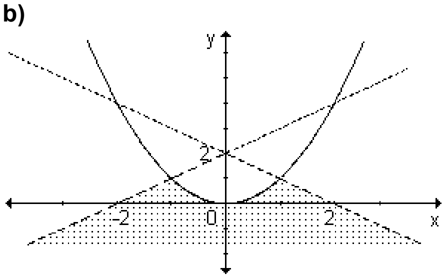
e) No tiene solución;
f) $S = \{x / x \in R \wedge x = -1\}$



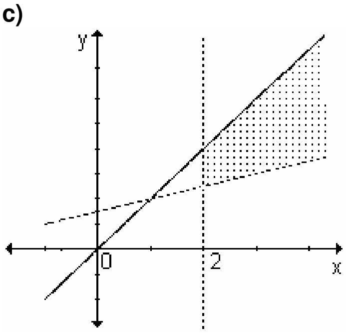
2)a)



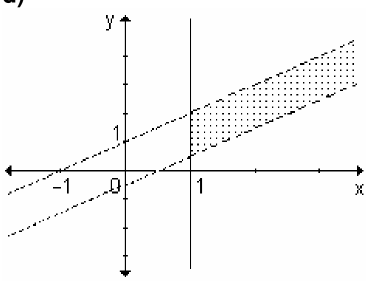
b)



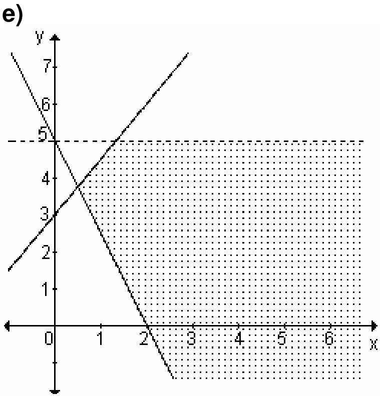
c)



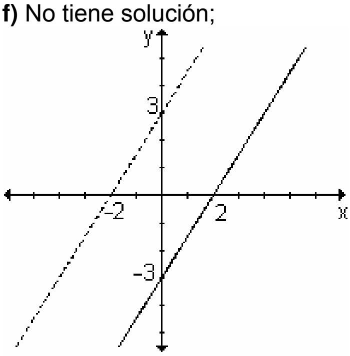
d)



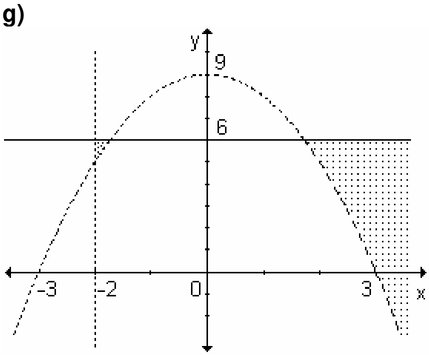
e)



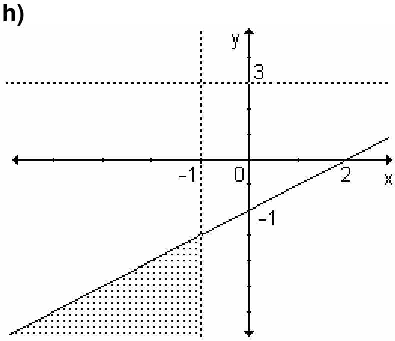
f) No tiene solución;



g)



h)



3)a) $\begin{cases} y \le 4 \\ 2x + y - 4 \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 5y - 20 \le 0 \\ y + x > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \ge (x-1)^2 \\ y - x - 1 < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2 \ge x + 1 \\ x < 2 \end{cases}$

4)a) El valor máximo es 9 en (3, 3).

b) El mínimo es $-\dfrac{21}{2}$ en $\left(-\dfrac{3}{2}, -3\right)$.

c) El valor máximo es 17 en (–4, 5) y el valor mínimo es –18 en (–4, –2)

CAPÍTULO 5: ANÁLISIS COMBINATORIO

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.1 Análisis combinatorio - 5.2 Análisis combinatorio simple - 5.3 Números combinatorios - 5.4 Notación de sumatoria - 5.5 Principio de inducción matemática - 5.6 Potencia de un binomio (página 255)

1)a) $V_{4,2} = 12$; ellas son:
{1, 2}; {1, 3}; {1, 4}; {2,1}; {2, 3}; {2, 4}; {3,1}; {3, 2}; {3, 4}; {4, 1}; {4, 2}; {4, 3}
b) $C_{3,2} = 3$; ellas son: {1, 2}; {1, 3};{2, 3}.

3)a) $x = 3$; **b)** No tiene solución; **c)** $x = 5$; **d)** $x = 9$; **e)** $x = 6$;
f) No tiene solución; **g)** $x = 8$, $x = 7$; **h)** $x = 3$, $x = 2$
4) $m = 2$, para que se verifique la fórmula de Stieffel o de recurrencia.

5)a) 16; **b)** 2; **c)** $-\dfrac{20}{9}$

6)a) $\sum_{k=1}^{5} 5k$; **b)** $\sum_{k=1}^{5} 2^k(-1)^{k+1}$ **c)** $\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+1} k.x^k$

7)a) $x = 3$; **b)** $x = 2$
9)a) $16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$
b) $x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$
c) $16x^{-4} - 32x^{-1} + 24x^2 - 8x^5 + x^8$

10)a) $T_4 = -4320x^3y^3$; **b)** $T_4 = 160ab^9$; **c)** 8; **d)** $T_6 = -\dfrac{63}{8}x^{-\frac{25}{3}}$; **e)**
$T_7 = 84$
f) $T_6 = -191\ 362\ 500\ x^5$
11)a) $r = 2$; $T_4 = 40x^2t^6$; **b)** $b = 5$

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.7 Análisis combinatorio con repetición (página 267)

1)a) $2520m^2$; **b)** 134; **c)** $-\dfrac{1238}{125}$; **d)** 40; **e)** $\dfrac{27}{2}$; **f)** 150

2)a) $n = 6$; **b)** 5
3)a) $x = 1$; **b)** No tiene solución; **c)** No tiene solución; **d)** $x = 8$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN (página 268)

1) Cinco personas en un banco se pueden sentar de 120 maneras distintas.
2) Los puestos se pueden cubrir de 840 maneras distintas.
3) Puede elegir entre diez de sus amigos de 210 maneras distintas.
4) Se pueden formar 504 números de tres cifras sin repetir ninguna.
5) Determinan 45 segmentos; 90 vectores; 45 rectas y 120 planos.
6)a) De 42 animales de un rodeo se pueden seleccionar 5 245 786 lotes de seis.
b) Excluyendo a uno de ellos se pueden hacer 4 496 388 lotes.
c) Incluyendo a uno determinado se pueden hacer 749 398 lotes.
7) Se pueden formar 970 grupos en los cuales hay, al menos, un ingeniero.
8) Se pueden implantar en un lote de 5040 maneras distintas.
9)a) 91 maneras distintas; **b)** 286 maneras distintas; **c)** 66 maneras distintas.
10)a) 109 600 posibilidades; **b)** 6720 posibilidades; **c)** 56 posibilidades;
d) 35 posibilidades; **e)** 5 posibilidades
11) Se pueden pedir de 40 maneras distintas. **12)** Puede combinarlos de 30 maneras.
13) Utilizando puertas diferentes puede entrar y salir de 56 maneras.
14) Se pueden formar 24 números pares de tres cifras.
15) Había 10 invitados. **16)** Se pueden formar 90 exámenes diferentes.
17) En un banco de seis butacas, cuatro personas se pueden sentar de 360 maneras y en uno de cuatro butacas, de 24 maneras.
18)a) 10 maneras; **b)** 60 maneras
19) Se pueden establecer 625 conversaciones sin la necesidad de un intérprete.
20) Se pueden obtener 70 triángulos. **21)** Se pueden crear 8 números.
22) Se pueden hacer 136 selecciones distintas.
23) Se pueden formar 25 palabras-código.
24) Pueden construirse 10 códigos distintos. **25)** Son posibles 336 comités diferentes.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE (página 270)

1) a; **2)** b; **3)** c; **4)** c; **5)** b; **6)** c; **7)** a; **8)** b; **9)** c; **10)** d;
11) b; **12)** a

AUTOEVALUACIÓN Nº 8: Análisis combinatorio (página 271)

2)a) Se cumple la fórmula de Stieffel.
b) Son iguales por ser números combinatorios complementarios.
c) Se verifica la fórmula de Stieffel.
3) $a = 2$
4)a) Podría ser: $\sum_{i=1}^{4} (-1)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} x^i$; **b)** Podría ser: $\sum_{i=1}^{5} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} t^i$
5)a) $x = 5$; **b)** $n = 0$; **c)** $x = 5$; **d)** $a = -\frac{1}{2}$; **e)** $a \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$; **f)** $x = -3$
7)a) $32a^{15} - 80a^{11} + 80a^7 - 40a^3 + 10a^{-1} - a^{-5}$
b) $x^4 - 2x^3 y^2 + \frac{3}{2} x^2 y^4 - \frac{1}{2} y^6 x + \frac{1}{16} y^8$
8) $T_3 = 112 x^6$
9) $T_4 = -160$
10) $x = 5$
11) $m = 10$
12) $y = 0$, $y = -\frac{1}{2}$
13) Se pueden acomodar ocho cartas distintas de 40320 maneras.
14) Se pueden elegir los cinco animales de 792 formas.
15) Se los puede asignar de 252 maneras.
16) Se pueden formar 1024 códigos de cinco letras.
17) Se pueden formar 10080 palabras-código.
18) Se pueden hacer 210 señales diferentes.
19) $t = 4$
20) $m = 3$

EJERCICIOS DE REPASO (página 273)

1)a) 24 arreglos. Ellos son: {1, 2, 3}; {1, 3, 2}; {2, 1, 3}; {2, 3, 1}; {3, 1, 2}; {3, 2,1}; {1, 2, 4}; {1, 4, 2}; {2, 1, 4}; {2, 4, 1}; {4, 1, 2}; {4, 2, 1}, {1, 3, 4}; {1, 4, 3}; {3, 1, 4}; {3, 4, 1}; {4, 1, 3}; {4, 3, 1}; {2, 3, 4}; {2, 4, 3}; {4, 2, 3}; {4, 3, 2}; {3, 2, 4}; {3, 4, 2}.
b) 4 combinaciones. Son: {1, 2, 3}; {1, 2, 4}; {1, 3, 4}; {2, 3, 4}.
c) 24 permutaciones. Ellas son:
{1, 2, 3, 4}; {1, 3, 2, 4}; {1, 3, 4, 2}; {1, 2, 4, 3}; {1, 4, 3, 2}; {1, 4, 2, 3}; {2, 1, 3, 4}; {2, 1, 4, 3}; {2, 4, 1, 3}; {2, 4, 3, 1}; {2, 3, 4, 1}; {2, 3, 1, 4}; {3, 1, 2, 4}; {3, 1, 4, 2}; {3, 2, 1, 4}; {3, 2, 4, 1}; {3, 4, 2, 1}; {3, 4, 1, 2}; {4, 1, 2, 3}; {4, 1, 3, 2}; {4, 2, 1, 3}; {4, 2, 3, 1}; {4, 3, 1, 2}; {4, 3, 2, 1}.
2)a) $x = 5310$; **b)** $x = -2360$;
c) $x = 117$; **d)** $x = -745$; **e)** $x = 6$;
f) $x = 600$; **g)** $x = -3{,}4$; **h)** $x = 8$
4)a) F; **b)** F; **c)** V; **d)** F; **e)** V; **f)** F
5)a) $m = 5$; **b)** $m = 5$; **c)** $m = 6$; **d)** $m = 9$; **e)** $m = 6$;
f) $m = 0$, $m = 3$, $m = 2$; **g)** $m = 4$; **h)** $m = 4$; **i)** $m = 5$
6)a) $a = 1$; **b)** $a = 2 \lor a = -3$
7)a) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{12}$

b) $0+1+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}+...+\frac{2n}{n+1}$;

c) $0 + 1 + 2 = 3$

d) $a + a + ... + a = na$;

e) $\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=-\frac{3}{20}$

f) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+1-\frac{8}{5}=-\frac{19}{15}$

8)a) $\sum_{i=1}^{5} 2i$; **b)** $\sum_{i=0}^{5}(2i+1)$; **c)** $\sum_{i=1}^{4} i^3$; **d)** $\sum_{i=0}^{4}(-1)^i(i+1)x^i$

9)a) V; **b)** F; **c)** V

10)a) $a = 8$; **b)** $a = -\frac{2}{5}$

11)a) $a^5 + 5a^4b^2 + 10a^3b^4 + 10a^2b^6 + 5ab^8 + b^{10}$

b) $\frac{x^4}{81}+\frac{8}{27}\frac{x^3}{y}+\frac{8}{3}\frac{x^2}{y^2}+\frac{32}{3}\frac{x}{y^3}+\frac{16}{y^4}$

c) $a^{-12} + 12a^{-7} + 60a^{-2} + 160a^3 + 240a^8 + 192a^{13} + 64a^{18}$

d) $64a^{12} - 192a^9 + 240a^6 - 160a^3 + 60 - 12a^{-3} + a^{-6}$

e) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

f) $z^{-8} - 8z^{-7} + 24z^{-6} - 32z^{-5} + 16z^{-4}$

12)a) $T_2 = 3a^2b$; **b)** $T_{12} = -\binom{20}{11}\frac{x^2}{a^2}$; **c)** $T_5 = 126\sqrt{a}$;

d) $T_{10} = -112\,640\, a^{39}b^{30}$; **e)** $T_8 = -120\, a^{-4}$; **f)** $T_5 = 70\, x^4$

g) $T_5 = 126\, y^{36}$ y $T_6 = -126\, y^{27}$

13) (d)

14) El coeficiente es –15 360 y la potencia de x es 7.

15) 8 elementos.

16) a) $x = \frac{3}{4}$; **b)** $x = 2 \vee x = -2$

17)a) $x = 12$; **b)** $x = 11$; **18)** $T_9 = 1\,180\,980\, a^{32}$

19) $T_5 = 1215\, y^2 x^8$; **20)** $T_7 = 5{,}25\; 10^7$

21)a) 9 arreglos con repetición.

Ellos son: {5, 5}; {5, 3}; {5, 1}; {3, 1}; {3, 5}; {1, 5}; {1, 3}; {3, 3}; {1, 1}

b) 12 permutaciones con repetición.

Ellas son:

{5, 5, 3, 1}; {5, 5, 1, 3}; {5, 1, 5, 3}; {5, 3, 5, 1}; {5, 1, 3, 5}; {5, 3, 1, 5}; {1, 5, 5, 3}; {3, 5, 5, 1}; {1, 3, 5, 5}; {3, 1, 5, 5}; {1, 5, 3, 5}; {3, 5, 1, 5}

c) 6 combinaciones con repetición. Ellas son {5, 5};{5, 3}; {5, 1};{3, 3};{1, 1};{1, 3}

22)a) $x = 25$; **b)** $x = 26$; **c)** $x = 7$; **d)** $x = 3$; **e)** $x = \frac{9}{5}$; **f)** $x = \frac{25}{2}$

23)a) $m = 10$; **b)** $m = 2$; **c)** $m = 5$; **d)** $m = 5$

Bibliografía

Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L.: *Matemática 7. Matrices,* Longseller, Buenos Aires, 2002.
Ayra, J. y Larner, R.: *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1992.
Becker, M.E.; Pietrocola, N. y Sanchez, C.: *Notas de Combinatoria*, Red Olímpica, Buenos Aires, 1996.
Bittinger, M.: *Cálculo. Para Ciencias Económicas-Administrativas.* Séptima Edición. Pearson Educación, Colombia, 2002.
Budnick, F.: *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*, Tercera Edición, Mc. Graw Hill, Méjico, 1997.
Burgos, J.: *Álgebra lineal: problemas resueltos y propuestos*, Cuaderno de actividades, Mc. Graw Hill, España, 1997.
Cardus, D.: *Introducción a las Matemáticas para Médicos y Biólogos*, Editorial Vicens Vives, España, 1972.
Douglas Faires, J. y De Franza, J.: *Precálculo*, Segunda Edición, International Thomson Editores, Méjico, 2001.
Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S. y Hecklein, M.: *Matemática Básica - Volumen 2. Álgebra*, Centro de Publicaciones. Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, 2002.
Farfán, R. y Albert, A.: *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1995.
Fleming, W. y Varberg, D.: *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1991.
Foncuberta, J. y Barallobres, G.: *Álgebra. De las ecuaciones a las transformaciones*, Red Federal de Formación Docente Continua, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, Buenos Aires, 1998.
Goodson, C. y Miertschin, S.: *Álgebra con aplicaciones técnicas*, Limusa, México, 1991.
Grossman, S.: *Álgebra lineal*, Quinta Edición, Mc. Graw Hill, Méjico, 1995.
Guzmán, M.: *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*, Olimpíada Matemática Argentina, Buenos Aires, 1992.
Guzmán, M. y Colera, J.: *Matemáticas I - C.O.U.*, Grupo Anaya, Madrid, 1989.
Guzmán, M. y Colera, J.: *Matemáticas II - C.O.U.*, Grupo Anaya, Madrid, 1989.
Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A.: *Matemáticas - Bachillerato 1*, Grupo Anaya S.A., Madrid, 1993.
Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A.: *Matemáticas - Bachillerato 2*, Grupo Anaya S.A., Madrid, 1993.
Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A.: *Matemáticas - Bachillerato 3*, Grupo Anaya S.A., Madrid, 1993.
Hadeler, K.: *Matemática para Biólogos*, Reverté, Barcelona, 1982.
Haeussler, E. y Paul, R.: *Matemáticas para Administración y Economía*, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1987.

Hoffman,L.; Bradley, G.: *Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales,* Séptima Edición, Mc. Graw Hill, Colombia, 2001.
Hughes–Hallet, D.; Gleason, A.; et al.: *Cálculo*, CECSA, Segunda Edición, Méjico, 2001.
Kolman, B.: *Álgebra Lineal con aplicaciones y MATLAB*, Sexta Edición, Pearson Educación, Prentice Hall, México, 1999.
Leithold, L.: *Álgebra*, Editorial Harla, Méjico, 1995.
Lial, M. y Hungerford, T.: *Matemáticas para administración y economía. En las ciencias sociales, naturales y de administración,* Pearson Educación, México, 2000.
Peterson, J.: *Matemáticas básicas. Álgebra, trigonometría y geometría analítica*, CECSA, México,2001.
Phillips, E.; Butts, T.; Shaughnessy, M.: *Álgebra con aplicaciones*, Harla, Méjico, 1988.
Rees, S.; Sparks, F. y Sparks Rees, Ch., *Álgebra*, Mc. Graw Hill, Méjico, 1991.
Smith, S.; Charles, R.; Dossey,J.; Keedy,M. y Bittinger,M.: *Álgebra y trigonometría*, Addison Wesley Longman, Méjico, 1998.
Sobel, M. y Lerner, N.: *Álgebra*, Cuarta Edición, Prentice Hall Hispanoa–mericana, Méjico, 1996.
Stewart, J.; Redlin,L.; Watson,S.: *Precálculo.* Tercera Edición. Thomson Learning, México, 2001.
Strang, G. : *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Addison Wesley Iberoamericana, Estados Unidos, 1986.
Sullivan, M.: *Precálculo*, Cuarta Edición, Pearson Educación, Prentice Hall, Addison Wesley, México, 1997.
Swokowski, E.: *Matrices y determinantes*, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1986.
Swokowski, E. y Cole, J.: *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Tercera Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1996.
Tan, S.T.: *Matemáticas para administración y economía,* Segunda Edición, Thomson Learning, Méjico, 2002.