CARACTERIZACIÓN DE ESPACIOS DE ORLICZ PESADOS A TRAVÉS DE WAVELETS

Escrito por
Fabiana G Montenegro

PARA LA CARRERA DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICA APLICADA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
SANTA FE, ARGENTINA
FEBRERO 2006

Quiero agradecer muy especialmente el asesoramiento, la dedicación y la generosidad de mi directora sin los cuales no hubiera sido posible este trabajo.

También agradezco el apoyo, la paciencia y el aliento de mis padres, mi esposo y mis hijas.

Agradezco a Bibiana Iaffei cuyo ejemplo me ha estimulado desde que la conozco.

Agradezco a Dios por su misericordia, su lealtad y su presencia en toda mi vida...

Indice general

Introducción

A través del tiempo, uno de los problemas que ha despertado gran interés en los matemáticos ha sido el estudio de diferentes caracterizaciones de los espacios funcionales clásicos del Análisis Armónico, tales como los espacios de Lebesgue L^p, los espacios de Sobolev $L^{p,s}$, los de Hardy H^p, los de Oscilación Media Acotada BMO y los de Lipschitz Λ_α. Estas caracterizaciones han demostrado ser eficientes en el procesamiento de señales y en el estudio de la acotación de operadores, en especial de aquellos relacionados con las soluciones de ecuaciones diferenciales.

Por otra parte wavelets fueron introducidas a mediados de los años 1980 a partir de la convergencia de ideas puramente matemáticas (Análisis Armónico, Análisis Funcional, Fractales, etc) y de aplicaciones matemáticas (Procesamiento de señales, Física, etc). Rápidamente encontraron aplicaciones en diversas áreas científicas, tecnológicas y matemáticas (ver [15]).

La caracterización de espacios funcionales a través de wavelets es de gran interés actual ya que el uso de otros sistemas ortogonales distintos del trigonométrico ha demostrado ser de gran utilidad. Es conocida la caracterización a través de wavelets de la mayoría de los espacios funcionales clásicos, ver por ejemplo [8].

Nuestro propósito fue buscar caracterizaciones a través de wavelets de espacios pesados con normas de tipo Orlicz, tales como los espacios pesados de Orlicz, de

Hardy-Orlicz y de Orlicz-Sobolev.

El tratamiento de estos problemas requirió del conocimiento de la estructura de dichos espacios, como la descomposición atómica, en el caso de los espacios de Hardy-Orlicz pesados, y el manejo y uso de las técnicas de la Teoría de Operadores de Calderón-Zygmund a valores vectoriales, la Teoría de Multiplicadores y la Teoría de Littlewood-Paley en el caso de los Orlicz-Sobolev. Como consecuencia de tales caracterizaciones se obtuvo que adecuadas bases de wavelets son bases incondicionales de tales espacios.

Para los Orlicz-Sobolev con peso, unimos las técnicas desarrolladas en el trabajo reciente de J. García-Cuerva y J.M. Martell contenido en [5] con las de F. Hernández y G. Weiss en [8].

Asimismo en [5] se obtiene una caracterización de los espacios de Hardy pesados H^p_w, $0 < p \leq 1$, válida para una amplia clase de wavelets y un peso ω en la clase de Muckenhoupt A_p, resultado que generalizamos en este trabajo al contexto de las normas Orlicz.

El interés por el estudio de los espacios de Hardy se acrecentó en la segunda mitad del último siglo cuando se logra identificarlos con un espacio real de distribuciones, las cuales pueden ser descompuestas en funciones simples denominadas *átomos*. La descomposición atómica de los mismos constituye una útil herramienta para el estudio de la acotación de operadores que actuán sobre estos espacios.

Los espacios de Hardy-Orlicz H^ϕ que generalizan a los espacios de Hardy H^p para el caso $\phi(t) = t^p, 0 < p < 1$, fueron considerados por [9], [20], [6] y [17].

Para alcanzar nuestro objetivo el punto de partida fue el uso de una versión atómica pesada de los espacios de Hardy-Orlicz $H^{\phi,q}_\omega$ contenido en [6], lo que nos permitió obtener un teorema de interpolación entre los mismos siguiendo las técnicas desarrolladas en [20] y [17].

Este trabajo está organizado en tres Capítulos y un Apéndice. En el Capítulo 1 se introducen definiciones y propiedades de diversos temas del Análisis con los que trabajamos a lo largo de toda la tesis. En el Capítulo 2 nos abocamos a los espacios Orlicz-Sobolev con peso obteniendo distintas caracterizaciones de los mismos e incluyendo como caso particular a los espacios Orlicz con peso. El Capítulo 3 está dedicado a la caracterización de los espacios Hardy-Orlicz pesados partiendo de una versión atómica de los mismos. En el Apéndice se incluyen demostraciones de teoremas, lemas y proposiciones empleados en Capítulos anteriores.

La mayoría de los resultados de este trabajo son válidos en $\mathbb{R}^n$ (con las modificaciones necesarias) pero nosotros consideraremos $n = 1$.

Introducimos a continuación la notación empleada en el presente trabajo. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto medible y ω un peso entonces $|A|$ representará su medida de Lebesgue, X_A su función característica y $\omega(A) = \int_A \omega(x)dx$. Las expresiones *en casi todo punto* x referidas a propiedades que se cumplen salvo un conjunto de medida nula se abrevian c.t.p x. Al espacio de las funciones medibles Lebesgue definidas en $\mathbb{R}$ a valores complejos lo simbolizamos $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Si $1 \leq p \leq \infty$ consideraremos que p' es el exponente conjugado de p, vale decir que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Aunque los espacios funcionales que buscamos caracterizar serán presentados a lo largo de este trabajo, deseamos resumir aquí la notación empleada. Dado ν un peso en $\mathbb{R}$ definimos

- Para $0 < p < \infty$

$$L^p_\nu = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \ \nu(x) \ dx < \infty\}$$

- Si ϕ es una N-función (ver Sección 1.4)

$$L^\phi_\nu = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} \phi(|f(x)| \ \nu(x)) \ dx < \infty\}$$

- Si ψ es una función de tipo inferior positivo y de tipo superior menor o igual que uno (ver Sección 1.6)

$$L^\psi(\nu) = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} \psi\left(|f(x)| \ \nu(x)\right) \ dx < \infty\}$$

Si $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ denotará el espacio de funciones definidas en $\mathbb{R}$, A valuadas, infinitamente derivables, rápidamente decrecientes y $\mathcal{S}'(\mathcal{A})$ el conjunto de funcionales lineales y continuos sobre $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ y sus elementos serán llamados *distribuciones temperadas*. El espacio $L^\infty_{c,\mathcal{A}}$ está constituído por las funciones $\mathcal{A}$ valuadas esencialmente acotadas que se anulan fuera de un compacto.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son espacios de Banach denotaremos por $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ al conjunto de funcionales lineales y continuos de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, por $L^p_{\mathcal{A}}$ al espacio de Bochner-Lebesgue de funciones medibles $\mathcal{A}$ valuadas y con potencia $\|f(x)\|^p_A$ integrable con respecto a la medida de Lebesgue y por $L^p_{\mathcal{A},\omega}$ al espacio de funciones f tal que $f\omega \in L^p_{\mathcal{A}}$.

Para una función $f \in L^1$ denotamos su transformada de Fourier por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} \ f(x) \ dx$$

En forma análoga definimos la antitransformada por

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \ f(x) \ dx$$

Finalmente señalamos que en este trabajo C representa constantes positivas que pueden ser distintas incluso en una misma cadena de desigualdades.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es introducir los conceptos matemáticos básicos para la lectura y comprensión de esta tesis y brindar las definiciones y propiedades relacionadas con ellos que posteriormente usaremos en este trabajo. En algunas secciones se cita la bibliografía consultada a fin de que el lector interesado pueda acceder a ella.

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida no negativa, σ-finito. Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ al conjunto de todas las funciones μ-medibles con dominio $\mathcal{X}$ y valores en $\mathbb{R}$.

1.1. Espacios de Lebesgue

Sea f una función en $\mathcal{M}(\mathcal{X})$. Se denomina *función de distribución de* f a la función $\mu_f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ definida por

$$\mu_f(t) = \mu(\{x \in \mathcal{X} : |f(x)| > t\}).$$

Si $0 < p \leq \infty$ el *espacio de Lebesque* se define como

$$L^p(\mathcal{X}) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty\}$$

en el caso de que p sea finito y

$$L^\infty(\mathcal{X}) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \text{existe un número } M > 0 \text{ tal que } \mu_f(M) = 0\}.$$

Para $p \geq 1$ es posible definir en estos espacios funcionales una norma del siguiente modo

$$\|f\|_{L^p(\mathcal{X})} = \left(\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p \; d\mu(x) \right)^{1/p} \tag{1.1.1}$$

si $p < \infty$, y en el caso $p = \infty$

$$\|f\|_{L^\infty(\mathcal{X})} = \inf\{M > 0 : \; \mu_f(M) = 0\}.$$

De esta manera se demuestra que para $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(\mathcal{X}), \| \; \|_{L^p(\mathcal{X})})$ son espacios de Banach. Cuando $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ se denotará $(L^p, \| \; \|_{L^p})$.

Si $0 < p < 1$ la cantidad (1.1.1) no es una norma. Sin embargo $\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p \; d\mu$ es una distancia que hace de éstos, espacios de Frechet.

1.2. Pesos

Por un *peso* en un espacio de medida se entiende una función positiva y locamente integrable.

Un peso ω pertenece a la *clase de Muckenhoupt* A_p, $1 \leq p < \infty$, si existe una constante C tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) \; dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-p'/p} \; dx \right)^{p/p'} \leq C < \infty \qquad si \; 1 < p < \infty$$

y

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) \; dx \; \leq \; C \; \omega(x) \qquad c.t.p \; x \in Q \qquad\qquad si \; p = 1.$$

La menor constante C para la cual vale estas desigualdades se conoce como *la constante* A_p del peso ω.

Todo lo relativo a pesos vale indistintamente se trate de cubos o bolas del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Las propiedades conocidas de los pesos que luego usaremos en esta tesis son

- Para todo subconjunto medible S de Q y $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$, se verifica que

$$\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^p \omega(Q) \leq C\ \omega(S).$$

- Si $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega \in A_{p-\epsilon}$. De modo que para $p \in (1,\infty) \quad A_p = \bigcup_{q<p} A_q$.

- Si $\omega \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega^{1+\epsilon} \in A_p$.

- Si $\omega \in A_p$, para algún $p \in [1,\infty)$, existen $\delta > 0$ y $C > 0$, tal que

$$\frac{\omega(A)}{\omega(Q)} \leq C \left(\frac{|A|}{|Q|}\right)^\gamma$$

  para todo subconjunto medible A contenido en el cubo Q. Esta propiedad se conoce como *la propiedad* A_∞ y se hace referencia a la clase A_∞ como aquella integrada por los pesos que la satisfacen.

- $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$, si y sólo si $\omega^{-p'/p} \in A_{p'}$.

- Sea $\omega \in A_p$, $1 \leq p < \infty$. Entonces existe $\epsilon > 0$, dependiendo de p y de la constante A_p del peso , tal que para todo cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\epsilon}\ dx\right)^{1/1+\epsilon} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q \omega(x)\ dx$$

  con C independiente de Q.

  Esta importante propiedad es conocida como *Reverse Holder Inequality* ya que la desigualdad opuesta se verifica, con $C = 1$, debido a la desigualdad de

Hölder. Generalmente nos referiremos a ella como $R.H.I.$ Dado $p > 1$ se dice que $\omega \in RH(p)$ si ω satisface una RHI con exponente p, esto es

$$\left(\frac{\omega^p(Q)}{|Q|}\right)^{1/p} \leq C\ \frac{\omega(Q)}{|Q|}$$

Si $\omega \in A_\infty$ se define el *índice crítico de* ω y se denota como q_ω a

$$q_\omega = \inf\{q > 1 : \omega \in A_q\}.$$

Definimos los espacios *Lebesgue con peso* ν como

- Si $1 \leq p < \infty$

$$L^p_\nu(\mathcal{X}) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p\ \nu(x)\ dx < \infty\}.$$

- Si $p = \infty$

$$L^\infty_\nu(\mathcal{X}) = \{f \in \mathbb{M} : \exists M/\ \nu_f(M) = 0\}.$$

Claramente $L^\infty_\nu(\mathcal{X}) = L^\infty(\mathcal{X})$, ya que $\nu(E) = 0$ si y sólo si $|E| = 0$.

La *desigualdad de Hölder con pesos* establece que si $f \in L^p_\omega$ y $g \in L^{p'}_{\omega^{-p'/p}}$ con $1 \leq p \leq \infty$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\ dx\ \leq\ \|f\|_{L^p_\omega}\ \|g\|_{L^{p'}_{\omega^{-p'/p}}}.$$

Una equivalencia demostrada en [11] (ver pág. 351) y que nos será de utilidad en el Capítulo 2 es el siguiente resultado.

Lema 1.2.1. *Un peso* $\omega^t \in A_p$, $t > 1$ *sii* $\omega \in A_p$, $\omega \in RH(t)$, $\omega^{-1/p-1} \in RH(t)$.

1.3. Wavelets

La recta real está dotada de dos operaciones algebraicas básicas: adición y multiplicacón. De tales operaciones se obtienen dos familias de operadores actuando sobre funciones definidas en $\mathbb{R}$: las traslaciones y las dilataciones. Así traslación por $h \in \mathbb{R}$ es un operador τ_h que mapea una función f en la función $\tau_h f(x) = f(x-h)$. La dilatación ρ_r, $r > 0$, está definida como $\rho_r f(x) = f(rx)$. Muchos operadores lineales importantes que actúan sobre funciones de variable real tienen relaciones simples con estos operadores.

Uno de los operadores más importantes actuando sobre funciones o más generalmente sobre distribuciones, es la transformada de Fourier. Es conocido que $(\widehat{\tau_h f})(\xi) = e^{2\pi i \xi h}\hat{f}(\xi)$, esto es la transformada de Fourier de una traslación por h es igual a la multiplicación por la exponencial $e^{2\pi i \xi h}$.

Todas estas consideraciones son particularmente naturales en el contexto de L^2 donde la transformada de Fourier se puede expresar en términos de un operador unitario. Ésto permite estudiar muchos operadores de convolución en términos de operadores de multiplicación simples.

En vista de estas observaciones resulta natural buscar bases para L^2 que tengan las propiedades de reflejar la importancia de traslaciones, dilataciones y la transformada de Fourier. Por ejemplo el sistema trigonométrico $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ ha sido la base ortonormal para $L^2(0, 2\pi)$ más usada. En los inicios de los años 80 se comenzaron a usar wavelets como una alternativa al tradicional Análisis de Fourier.

Diferentes wavelets nos proveen de bases ortonormales para L^2 que son particularmente naturales en el análisis que involucra la acción de traslaciones, dilataciones y transformada de Fourier.

Definición 1.3.1. Una función $\psi \in L^2$ es una *wavelet ortonormal* si el sistema $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonomal para L^2, donde

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\ \psi(2^j x - k) \qquad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Notemos que es el sistema anterior está generado por una función ψ cuyas dilataciones diádicas y traslaciones por enteros son suficientes para representar todas las funciones de L^2.

Es de observar que estas funciones están normalizadas de manera que $\|\psi_{j,k}\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2} = 1$.

Una función $f \in L^2$ se dice que es *de banda limitada* si el soporte de $\hat{f}$ está contenido en un intervalo acotado.

1.4. N-Funciones

Los resultados de las dos próximas secciones fueron extraídos de [10] y [4].

Una *N-función* es una función $\phi : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ continua y convexa tal que

$$\phi(s) > 0 \qquad \lim_{s \to 0^+} \frac{\phi(s)}{s} = 0 \qquad \lim_{s \to \infty} \frac{\phi(s)}{s} = \infty.$$

Ejemplos de N-funciones muy conocidos son las funciones polinómicas $\phi(s) = s^p$ con $p > 1$. Sin embargo la función identidad no es una N-función.

Toda N-función ϕ es derivable por la derecha en cada punto de $[0, \infty)$ y si llamamos φ a su función derivada por la derecha resulta que φ es no decreciente, continua por derecha, $\varphi(s) > 0$ $(s > 0)$, $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$.

Además ϕ admite la representación integral

$$\phi(s) = \int_0^s \varphi(t)\ dt.$$

Recíprocamente si $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente y continua por derecha tal que

$$\varphi(s) > 0 \ \ (s > 0) \qquad \varphi(0) = 0 \qquad \lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$$

entonces

$$\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\phi(s) = \int_0^s \varphi(t)\ dt$$

es una N-función cuya derivada por derecha es φ.

Dada una N-función ϕ se llama *función de densidad* y la denotaremos por φ, a su función derivada por derecha.

Toda N-función ϕ posee las siguientes propiedades

a) $\phi(0) = 0$

b) ϕ es estrictamente creciente.

c) La función $s \to \frac{\phi(s)}{s}$ es estrictamente creciente.

d) $\phi(\alpha s) < \alpha\phi(s) \qquad (s \neq 0, 0 < \alpha < 1)$

e) $\phi(s + t) \geqslant \phi(s) + \phi(t) \qquad (s, t \geq 0)$

(1.4.1)

Dada una función $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ no decreciente, continua por derecha y verificando

$$\varphi(s) > 0 \;\; (s > 0) \qquad \varphi(0) = 0 \qquad \lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$$

la función $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(t) = \sup\{s : \; \varphi(s) \leqslant t\} \tag{1.4.2}$$

posee las mismas propiedades citadas de φ.

La relación existente entre φ y ψ está dada por las siguientes propiedades

a) $\varphi(\psi(t)) \geqslant t \quad (t \geqslant 0)$

b) $\psi(\varphi(s)) \geqslant s \quad (s \geqslant 0)$

c) $\varphi(s) = \sup\{t : \ \psi(t) \leqslant s\}$

d) $\varphi(\psi(t) - \varepsilon) \leqslant t \quad (t \geqslant 0, \varepsilon > 0)$

e) $\psi(\varphi(s) - \varepsilon) \leqslant s \quad (s \geqslant 0, \varepsilon > 0)$

Si φ es continua ψ es la función inversa a la derecha de φ y si φ es continua y estrictamente creciente entonces φ y ψ son funciones inversas en el sentido usual.

A la función ψ definida por (1.4.2) se la conoce como *inversa generalizada o pseudoinversa de* φ. De c) se sigue que si ψ es la inversa generalizada de φ entonces φ es la inversa generalizada de ψ.

Sea ϕ una N-función con función de densidad φ y sea ψ la inversa generalizada de φ. La N-función definida por

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(u)\ du \qquad (t \geqslant 0)$$

recibe el nombre de *N-función complementaria (o conjugada)* de ϕ.

Si Ψ es la N-función complementaria de ϕ entonces ϕ es la N-función complementaria de Ψ. En general se dice que ϕ y Ψ son *N-funciones complementarias.*

Una desigualdad importante que vincula dos N-funciones complementarias ϕ y Ψ es la llamada *desigualdad de Young*

$$st \leqslant \phi(s) + \Psi(t) \qquad (s, t \geqslant 0). \tag{1.4.3}$$

Lema 1.4.1. *Fijado $s \geqslant 0$ se verifica que $st = \phi(s) + \Psi(t)$ si y sólo si $\varphi(s^-) \leqslant t \leqslant \varphi(s)$. Análogamente fijando $t \geqslant 0$ se verifica que $st = \phi(s) + \Psi(t)$ si y sólo si $\psi(t^-) \leqslant s \leqslant \psi(t)$.*

Como consecuencia del Lema anterior si φ es continua en s, se verifica la igualdad de la desigualdad de Young únicamente si $t = \varphi(s)$. Análogamente si ψ es continua en t, la igualdad se verifica si $s = \psi(t)$.

De (1.4.3) y del Lema 1.4.1 se deduce que

$$\Psi(t) = \max_{s>0}\,(st - \phi(s)) \qquad \phi(s) = \max_{t>0}\,(st - \Psi(t)).$$

De la desigualdad de Young se obtiene otra desigualdad que relaciona a las funciones inversas de dos N-funciones complementarias: si ϕ y Ψ son N-funciones complementarias entonces

$$s \leqslant \phi^{-1}(s)\ \Psi^{-1}(s) \leqslant 2s \qquad (s \geqslant 0).$$

Una condición importante que suela imponerse a una N-función, imprescindible en muchas cuestiones, es la condición Δ_2

$$\phi(2t)\ \leqslant A\ \phi(t)$$

para alguna constante $A > 0$ y todo $t > 0$.

Una N-función verifica la condición Δ_2 si y sólo si su función de densidad también.

Sin embargo la condición Δ_2 de una N-función no se transmite necesariamente a la N-función complementaria. En la mayoría de los casos la N-función complementaria no se conoce de forma explícita y por esta razón resultan útiles caracterizaciones de la condición Δ_2 para la N-función complementaria. Entre ellas se encuentran

i) La N-función complementaria de ϕ verifica la condición Δ_2 si y sólo si existe una constante $a > 1$ tal que

$$\phi(s) \leq (2a)^{-1}\phi(as) \qquad (s \geq 0).$$

ii) Si ϕ es una N-función con función de densidad φ entonces su N-función complementaria satisface la condición Δ_2 si y sólo si existe una constante $\beta > 1$ tal que

$$\beta\ \phi(s)\ <\ s\ \varphi(s) \qquad (s > 0).$$

Finalmente observemos que de e) de (1.4.1) y de la convexidad de ϕ se deduce que si ϕ es una N-función verificando Δ_2 entonces existe una constante C tal que

$$\phi(s) + \phi(t) \leq \phi(s+t) \leq C(\phi(s) + \phi(t)) \qquad (s, t \geq 0). \tag{1.4.4}$$

1.5. Espacios de Orlicz y de Orlicz con Peso

Dada una N-función ϕ se define *la clase de Orlicz* $\widetilde{L}^{\phi}(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu) \equiv \widetilde{L}^{\phi}(\mathcal{X})$ como

$$\widetilde{L}^{\phi}(\mathcal{X}) = \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) : \int_{\mathcal{X}} \phi(|f(x)|)\ d\mu(x) < \infty\}.$$

En general los $\widetilde{L}^{\phi}$ no son espacios vectoriales con las operaciones usuales. Sin embargo si ϕ satisface la condición Δ_2, $\widetilde{L}^{\phi}$ puede ser dotado de estructura de espacio vectorial con las operaciones usuales (ver (1.4.4)) .

Para resolver esta situación, dada una N-función ϕ consideremos su N-función complementaria ψ y definamos

$$L^{\phi}(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu) \equiv L^{\phi}(\mathcal{X}) = \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) : \int_{\mathcal{X}} |f(x)\ g(x)|\ d\mu(x) < \infty \quad \forall g \in \tilde{L}^{\psi}(\mathcal{X})\}.$$

Los $L^{\phi}(\mathcal{X})$ son los llamados *espacios de Orlicz* y constituyen una generalización de los clásicos espacios de Lebesgue $L^p(\mathcal{X})$ en los que $\varphi(s) = s^p$ para $p > 1$.

De la desigualdad de Young se deduce que $\widetilde{L}^{\phi}(\mathcal{X}) \subset L^{\phi}(\mathcal{X})$.

En 1932 W. Orlicz introdujo una norma que lleva su nombre del siguiente modo. Si ψ es la N-función complementaria de ϕ consideremos

$$S_\psi = \{g \in \widetilde{L}^\psi : \int_{\mathcal{X}} \psi(|g(x)|) \; d\mu(x) \leq 1)$$

entonces para cada $f \in L^\phi(\mathcal{X})$ es

$$\sup \left(\int_{\mathcal{X}} |f(x) \; g(x)| \; d\mu(x) : \; g \in S_\psi \right) < \infty$$

y $\| \; \|_{L^\phi(\mathcal{X})} : L^\phi(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\|f\|_{L^\phi(\mathcal{X})} = \sup \left\{ \int_{\mathcal{X}} |f(x)g(x)| \; d\mu(x) : \; g \in S_\psi \right\}$$

es una norma sobre $L^\phi(\mathcal{X})$ tal que $(L^\phi(\mathcal{X}), \| \; \|_{L^\phi(\mathcal{X})})$ es un espacio de Banach.

Son bien conocidos los siguientes hechos

a) Para toda f de $L^\phi(\mathcal{X})$ no nula se verifica

$$\int_{\mathcal{X}} \phi \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^\phi(\mathcal{X})}} \right) \; d\mu \leq 1.$$

b) Si ϕ satisface Δ_2 entonces $\widetilde{L}^\phi(\mathcal{X}) = L^\phi(\mathcal{X})$.

Una de las desigualdades más importantes utilizadas en la teoría de los clásicos espacios L^p, $1 \leq p$, es la desigualdad de Hölder. En el caso de los espacios de Orlicz la desigualdad de Hölder no puede ser generalizada mediante la utilización de las funciones inversas ϕ^{-1} y ψ^{-1}, sino que se generaliza en el sentido de las normas.

De la definición de norma Orlicz y de a) anterior se sigue la *desigualdad de Hölder en espacios de Orlicz*: Si ϕ y ψ son N-funciones complementarias entonces para toda f de $L^\phi(\mathcal{X})$ y toda g de $L^\psi(\mathcal{X})$ se verifica que

$$\|fg\|_{L^1(\mathcal{X})} \leq \|f\|_{L^\phi(\mathcal{X})} \; \|g\|_{L^\psi(\mathcal{X})}.$$

Sobre el espacio $L^{\phi}(\mathcal{X})$ es posible definir otra norma introducida por M.A. Luxemburg en 1955 en [12] basada en la siguiente idea. De a) se sigue que

$$B = \{f \in L^{\phi}(\mathcal{X}) : \int_{\mathcal{X}} \phi(|f(x)|)\, d\mu(x) \leq 1\}$$

es un subconjunto absorbente del espacio vectorial $L^{\phi}(\mathcal{X})$ en el sentido de que para cada f de $L^{\phi}(\mathcal{X})$ existe $\lambda \in (0,\infty)$ tal que $\lambda^{-1}f \in B$, con lo cual podemos considerar el *funcional de Minkowsky* de B, $q_{\phi} : L^{\phi}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}^{+}$ dado por

$$q_{\phi} = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{f}{\lambda} \in B\right\}.$$

Se demuestra que el funcional de Minkowsky es un norma sobre $L^{\phi}(\mathcal{X})$ conocida como *norma de Luxemburgo* a la cual denotaremos por

$$\|f\|_{L^{(\phi)}(\mathcal{X})} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathcal{X}} \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\, d\mu(x) \leq 1\right\}.$$

Es un resultado conocido la equivalencia entre la norma de Orlicz y la Luxemburgo

$$\|f\|_{L^{(\phi)}(\mathcal{X})} \leq \|f\|_{L^{\phi}(\mathcal{X})} \leq 2\|f\|_{L^{(\phi)}(\mathcal{X})} \qquad \forall f \in L^{\phi}.$$

No existe para la norma de Luxemburgo una desigualdad de Hölder en el sentido de que si ϕ y ψ son N-funciones complementarias entonces

$$\|fg\|_{L^{1}(\mathcal{X})} \leq \|f\|_{L^{(\varphi)}(\mathcal{X})}\|g\|_{L^{(\psi)}(\mathcal{X})}.$$

Definición 1.5.1. Dada una N-función ϕ y un peso ω en $\mathbb{R}$, el *espacio de Orlicz con peso* $L^{\phi}_{\omega}(\mathbb{R}) = L^{\phi}_{\omega}$ es el espacio de funciones f tal que $f\omega$ pertenece a $L^{\phi}(\mathbb{R})$.

Consideraremos en L^{ϕ}_{ω} la norma de Luxemburgo denotada por

$$\|f\|_{L^{\phi}_{\omega}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}.$$

Los espacios Orlicz con peso generalizan a los espacios de Lebesque con peso $L^p_{\omega^p}$, en los que $\phi(s) = s^p$, $p > 1$.

Posteriormente necesitaremos los espacios de tipo Orlicz que generalizan a los $L^p_{\omega^p}$ con $0 < p \leq 1$.

Definición 1.5.2. Si ϕ es una función de tipo inferior positivo l tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ es casi decreciente, el *espacio de Orlicz con peso* se define como

$$L^{\phi}(\mathbb{R}, \omega) \equiv L^{\phi}(\omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \phi(|f(x)|\ \omega(x))\ dx = A < \infty \right\}.$$

En éstos consideraremos

$$||f||_{L^{\phi}(\omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}} \phi \left(\frac{|f(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}} \right)\ dx \leq 1 \right\}.$$

1.6. Tipos e Indices

Lo que sigue constituye un resumen de cursos de la Maestría, de [20] y [16].

Recordaremos algunas definiciones acerca de condiciones de crecimiento mediante la noción de tipo.

Se dice que una función ϕ definida en $\mathbb{R}^+$ es de *tipo inferior* $\alpha \in \mathbb{R}^+_0$ (respectivamente, de *tipo superior* α) si existe una constante C tal que

$$\phi(st) \leq C\ s^{\alpha}\ \phi(t)$$

para todo $0 < s \leq 1$ (respectivamente, $s \geq 1$). La menor constante C para la cual vale la desigualdad anterior la llamaremos *la constante del tipo inferior (superior)*.

Dos funciones ϕ, ψ: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ son *equivalentes* si y sólo si existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$0 < C_1 \leq \frac{\phi(t)}{\psi(t)} \leq C_2 < \infty.$$

Mencionemos algunas propiedades relacionadas con los tipos

. Los tipos inferiores forman una semirrecta a izquierda y los tipos superiores una semirrecta a derecha o el conjunto vacío.

. Si ϕ es una función de tipo inferior positivo se tiene que $\lim_{s \to 0^+} \phi(s) = 0$, luego se define $\phi(0) = 0$.

. Todo tipo inferior es menor o igual que todo tipo superior y los tipos se preservan para funciones equivalentes.

. Si ϕ es de tipo inferior α con constante C entonces

$$K \; s^{\alpha} \; \phi(t) \leq \phi(st)$$

para todo $s \geq 1$, con $K = C^{-1}$. Análogamente si ϕ es de tipo superior β con constante C entonces

$$K \; s^{\beta} \; \phi(t) \leq \phi(st)$$

para todo $0 < s \leq 1$, con K el recíproco de C.

. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de tipo superior finito es que la función satisfaga la *condición* Δ_2.

. Una función positiva ψ definida en $\mathbb{R}^+$ es *casi creciente* (respectivamente, *casi decreciente*) si existe una constante C tal que

$$\psi(s_1) \leq C \; \psi(s_2)$$

para todo s_1, $s_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $s_1 \leq s_2$ (respectivamente $s_1 \geq s_2$).

Luego ψ es una función de tipo inferior α (respectivamente, superior α) con constante C si y sólo si $\frac{\psi(s)}{s^{\alpha}}$ es casi creciente (respectivamente, casi decreciente) con constante C.

Si ϕ una función de tipo inferior positivo denotando por ϕ^{-1} a la función definida en 1.4.2, resulta que ϕ^{-1} está bien definida de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y coincide con la función inversa ordinaria de ϕ si ϕ es continua y estrictamente creciente. Además se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.6.1. *Sea ϕ una función no negativa definida en $(0, \infty)$. Luego se satisfacen*

i) Si ϕ es de tipo inferior l entonces la función ϕ^{-1} es de tipo superior $1/l$.

ii) Si ϕ es de tipo superior d entonces ϕ^{-1} es de tipo inferior $1/d$.

iii) Si $\tilde{\phi}$ es equivalente a ϕ entonces $\tilde{\phi}^{-1}$ es equivalente a ϕ^{-1}.

El siguiente resultado resume las propiedades básicas de las funciones involucradas en la teoría de los espacios de Hardy-Orlicz (ver [20] y [16]).

Proposición 1.6.2. *Sea ϕ una función de tipo inferior positivo l tal que $\phi(s)/s$ es no creciente. Entonces la siguiente función*

$$\tilde{\phi}(t) = \int_0^t \frac{\phi(s)}{s}\, ds$$

está bien definida y se satisfacen las siguientes propiedades

i) ϕ es de tipo superior 1 con constante $C = 1$.

ii) ϕ^{-1} es de tipo inferior 1 y de tipo superior $1/l$.

iii) $\tilde{\phi}$ es una función continua y estrictamente creciente equivalente a ϕ.

iv) $\tilde{\phi}$ es subaditiva.

v) $\tilde{\phi}$ es de tipo inferior l y de tipo superior 1 con constante $C = 1$.

vi) $\tilde{\phi}(s)/s$ es no creciente.

vii) $\tilde{\phi}^{-1}$ es equivalente a ϕ^{-1}.

viii) $\tilde{\phi}$ es una función cóncava.

Finalizamos esta sección con resultados que nos serán de utilidad en el Capítulo 3.

Diremos que una función es *casi cóncava* si es equivalente a una función cóncava.

Lema 1.6.3. *Sea ϕ una función de tipo inferior positivo. ϕ es casi cóncava si y sólo si $\frac{\phi(s)}{s}$ es casi decreciente.*

Demostración. Consideremos que ϕ es una función casi cóncava, esto es que existen constantes positivas y finitas C_1 y C_2 y una función cóncava ψ tales que

$$C_1\ \psi(t) \leq \phi(t) \leq C_2\ \psi(t). \tag{1.6.1}$$

Como $t \to \frac{\psi(t)}{t}$ es no creciente se tiene que para $0 < t_1 < t_2$

$$\frac{\psi(t_2)}{t_2} \leq \frac{\psi(t_1)}{t_1}. \tag{1.6.2}$$

Entonces por (1.6.1) y (1.6.2)

$$\frac{\phi(t_2)}{t_2} \leq C\ \frac{\psi(t_2)}{t_2} \leq C\ \frac{\psi(t_1)}{t_1} \leq C\ \frac{\phi(t_1)}{t_1}.$$

Luego $\frac{\phi(s)}{s}$ es casi decreciente.

Recíprocamente consideremos la función

$$\psi(t) = \int_0^t \sup_{r\geq s} \frac{\phi(r)}{r}\ ds.$$

Como la derivada de ψ es decreciente, ψ es cóncava en $[0,\infty)$.

Además, por ser $\frac{\phi(s)}{s}$ casi decreciente y ϕ de tipo inferior positivo

$$\psi(t) \leq C\ \int_0^t \frac{\phi(s)}{s}\ ds = C\ \int_0^1 \frac{\phi(ut)}{u}\ du \leq C\ \phi(t).$$

Por otro lado por la definición de supremo y el casi decrecimiento de $\frac{\phi(s)}{s}$ resulta

$$\psi(t) \geq \int_0^t \frac{\phi(s)}{s}\ ds \geq C\ \phi(t).$$

De modo que ϕ es casi cóncava. □

Observación 1.6.1. Resulta sencillo demostrar aplicando la desigualdad de Jensen para funciones cóncavas, que si ϕ es casi cóncava entonces $\forall f \in L^1_{loc}$ y $0 < |E| < \infty$ existe C tal que

$$\frac{1}{|E|}\int_E \phi(f(x))\ dx \leq C\ \phi\left(\frac{1}{|E|}\int_E f(x)\ dx\right).$$

1.7. Operadores y Exponentes de Boyd

Lo que sigue es un resumen de [4].

Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ y $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, \nu)$ dos espacios de medida, V un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ y T: $V \to \mathcal{M}(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, \nu)$.

Recordemos la siguiente clasificación de un operador definido en V

- T es *positivamente homogéneo* si $\forall f$ de V y para todo escalar λ se verifica que $|T(\lambda f)| = |\lambda|\ |Tf|$.
- T es *casiaditivo* si existe una constante C tal que $\forall f, g \in V \quad |T(f+g)| \leq C\,(|Tf| + |Tg|)$.
- T se dice que es *subaditivo* si es casiaditivo con constante $C = 1$.

Un operador casiaditivo y positivamente homogéneo es llamado *casilineal* y un operador subaditivo y positivamente homogéneo es llamada *sublineal.*

Sea $T : L^p(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu) \to L^p(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, \nu)$, $1 \leq p < \infty$. Se dice que es de *tipo débil (p,p)* si existe una constante C tal que $\forall f \in L^p(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ y todo real positivo λ se verifica

$$\nu\{y \in \mathcal{Y} : |Tf(y)| > \lambda\} \ \leq C\ \lambda^{-p} \int_{\mathcal{X}} |f|^p\ d\mu.$$

Y es de *tipo fuerte (p,p)* si existe C tal que

$$\|Tf\|_{L^p(\mathcal{Y})} \leq C\ \|f\|_{L^p(\mathcal{X})} \quad \forall f \in (\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu).$$

En el teorema de interpolación que consideraremos en el capítulo referido a los espacios Orlicz-Sobolev con peso, trataremos con un operador casilineal definido sobre ciertos espacios $L^{r_1} + L^{r_2}$, $1 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, que es de tipo fuerte (r_1, r_1) y de tipo fuerte (r_2, r_2) con respecto a ciertos pesos. En tal teorema se obtienen acotaciones en norma Orlicz para N-funciones ϕ que guardan cierta relación con respecto de r_1 y r_2. La relación que debe mantener ϕ con respecto a r_1 y r_2 viene dada en función de los *exponentes de Boyd de* ϕ.

En [13] W. Matuszewska y W. Orlicz introdujeron un par de exponentes para ciertas funciones de variable real. Estas nociones fueron generalizadas en [2] al contexto de espacios de funciones de reordenamiento invariante, introduciendo los llamados *índices de Boyd*. En el caso particular de espacios de Orlicz los índices de Boyd se pueden caracterizar mediante expresiones que sólo dependen de la N-función (ver [3]).

Sea ϕ una N-función y consideremos la función $h_\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h_\phi(s) \;= \sup_{t>0} \left(\frac{\phi^{-1}(t)}{\phi^{-1}(st)} \right)$$

donde ϕ^{-1} es la función inversa de ϕ.

Notemos que h_ϕ es positiva y submultiplicativa, esto es, si s y u son positivos entonces

$$h_\phi(su) \leq \sup_{t>0} \frac{\phi^{-1}(t)}{\phi^{-1}(st)} \quad \sup_{t>0} \frac{\phi^{-1}(st)}{\phi^{-1}(stu)} = h_\phi(s) \quad h_\phi(u).$$

Para este tipo de funciones tenemos el siguiente resultado dado en [3].

Sea $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva y submultiplicativa y sea $\theta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(s) = \frac{-\log \; h(s)}{\log s}$$

entonces

$$\lim_{s \to 0^+} \theta(s) = \inf_{0<s<1} \theta(s) \qquad \lim_{s \to \infty} \theta(s) = \sup_{s>1} \theta(s).$$

El resultado anterior aplicado a h_ϕ da lugar a la definición de exponentes de Boyd de una N-función.

Definición 1.7.1. Sean ϕ una N-función, h_ϕ la función definida anteriormente y θ_ϕ definida por $\theta_\phi(s) = \frac{-\log\ h_\phi(s)}{\log s}$. Se definen los *índices de Boyd superior e inferior de* ϕ respectivamente como

$$\alpha_\phi = \lim_{s\to 0^+} \theta_\phi(s) = \inf_{0<s<1} \theta_\phi(s) \qquad \beta_\phi = \lim_{s\to\infty} \theta_\phi(s) = \sup_{s>1} \theta_\phi(s).$$

Es posible demostrar que se satisface $0 \leq \beta_\phi \leq \alpha_\phi \leq 1$.

Los números reales $q_\phi = \alpha_\phi^{-1}$ y $p_\phi = \beta_\phi^{-1}$ son llamados *los exponentes inferior y superior de Boyd de* ϕ respectivamente.

Si $\phi(s) = s^p$ con $p > 1$ entonces $\theta_\phi(s) = p^{-1}$, $\beta_\phi = \alpha_\phi = p^{-1}$ y los dos exponentes de Boyd coinciden con p.

Resultados que nos serán de utilidad y que relacionan los exponentes de Boyd con la condición Δ_2 son los siguientes dos lemas.

Lema 1.7.1. *Sean ϕ una N-función, ψ su N-función complementaria y q_ϕ y p_ϕ los exponentes inferior y superior de ϕ. Entonces*

i) Si ϕ satisface la condición Δ_2 es $p_\phi < \infty$.

ii) Si ψ satisface la condición Δ_2 es $q_\phi > 1$.

Lema 1.7.2. *Sea ϕ una N-función que satisface la condición Δ_2 y sean q_ϕ y p_ϕ los exponentes inferior y superior de ϕ respectivamente. Entonces*

i) Si $0 < r_1 < q_\phi$ existe una constante C_1 tal que

$$\phi(st) \;\leq\; C_1\ s^{r_1}\ \phi(t) \qquad (0 \leq s \leq 1,\ t \geq 0).$$

ii) Si $p_\phi < r_2 < \infty$ existe una constante C_2 tal que

$$\phi(st) \;\leq\; C_2\ s^{r_2}\ \phi(t) \qquad (s > 1,\ t \geq 0).$$

En los espacios de Orlicz no atómicos los exponentes de Boyd son los índices introducidos por Matuszewska y Orlicz en [13] (ver [3]) definidos como

$$\gamma_\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{\ln M(t,\varphi)}{\ln t} \qquad \delta_\varphi = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln M(t,\varphi)}{\ln t}$$

donde $M(t,\varphi) = \sup_{u>0} \dfrac{\varphi(tu)}{\varphi(u)}$ para φ una función de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}_0^+$ creciente, continua y $\varphi(0) = 0$.

En [14] se demuestra (pág. 87) que si ϕ^{-1} es la inversa de ϕ entonces

$$q_\phi = \frac{1}{p_{\phi^{-1}}} \qquad p_\phi = \frac{1}{q_{\phi^{-1}}}$$

y como consecuencia de esto que

$$\frac{1}{q_\phi} + \frac{1}{p_{\phi^*}} = \frac{1}{q_{\phi^*}} + \frac{1}{p_\phi} = 1.$$

donde ϕ^* denota la N-función complementaria de ϕ. De la identidad anterior se deduce que $p_{\phi^*} = q'_\phi$ y $q_{\phi^*} = p'_\phi$.

1.8. Descomposición Atómica de los Espacios de Hardy y Operadores de Calderón-Zygmund

Esta sección resume definiciones y resultados extraídos de [5] y [18].

Definición 1.8.1. Sea $\mathcal{A}$ un espacio de Banach y ω un peso en A_∞ con índice crítico $q_\omega = \inf\{q > 1 : \omega \in A_q\}$. Para $0 < p \leq 1$, $q > p$ y $\omega \in A_q$, un (p,q)-*átomo con respecto a* ω $\mathcal{A}$-valuado es una función medible

$$a : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$$

que verifica

i) sop $a \subset I$, donde I es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$.

ii) $\int_{\mathbb{R}} x^\beta \, a(x) \, dx = 0 \qquad \forall\, 0 \leq \beta \leq N_p(\omega) = [\frac{q_\omega}{p}] - 1$

donde $[\frac{q_\omega}{p}]$ denota el mayor entero menor o igual que $\frac{q_\omega}{p}$

iii) $$\begin{cases} ||a||_{L^q_\omega} \leq \ \omega(I)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} & si\ q_\omega < \infty \\ \|a\|_{L^\infty} \leq \ \omega(I)^{\frac{-1}{p}} & si\ q_\omega = \infty \end{cases}$$

Definición 1.8.2. Sean $\mathcal{A}$ un espacio de Banach, $\omega \in A_\infty$ con índice crítico q_ω, $0 < p \leq 1$ y $q > p$. Se dice que $f \in \mathcal{S}'(A)$ pertenece a $H_A^{p,q}(\omega)$ si y sólo si f se puede escribir como serie

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \; a_j \tag{1.8.1}$$

convergiendo en $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{A})$, donde a_j es un (p, q)-átomo $\mathcal{A}$-valuado con respecto a ω y

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j|^p < \infty. \tag{1.8.2}$$

Denotaremos por $\|f\|^p_{H_{\mathcal{A}}^{p,q}(\omega)}$ al ínfimo de las sumas (1.8.2) sobre todas las descomposiciones (1.8.1).

Definición 1.8.3. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ espacios de Banach, T un operador lineal que mapea toda función de $L^\infty_{c,\mathcal{A}}$ en una función medible $\mathcal{B}$ valuada y

$$K : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

una función medible y localmente integrable fuera del origen. Supongamos que T y K verifican las siguientes condiciones

i) Para cada $f \in L^\infty_{c,\mathcal{A}}$ y para cada x fuera del soporte de f

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x - y) \; f(y) \; dy.$$

ii) T se extiende a un operador acotado de $L^r_{\mathcal{A}}$ en $L^r_{\mathcal{B}}$ para algún $1 < r \leq \infty$.

Entonces se dice que T es un *operador de Calderón-Zygmund a valores vectoriales* (V.V.C-Z.O) con núcleo K.

Es conocido que si T es un operador de Calderón-Zygmund a valores vectoriales con núcleo K que además verifica la condición de H*örmander*

$$\int_{|x|>2|y|} \|K(x - y) - K(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{B})} \; dx \;\leq\; C \qquad\qquad y \neq 0$$

entonces T es de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo fuerte (q, q), $1 < q < \infty$.

Para obtener acotaciones de los operadores de Calderón-Zygmund en los espacios de Lebesque con peso, es necesario imponer condiciones más fuertes que la de H*ö*rmander.

Definición 1.8.4. Sea K un núcleo de un operador de Calderón-Zygmund a valores vectoriales. Dado $\gamma \in \mathbb{R}^+$, se dice que K es un *núcleo γ-regular* si se satisfacen las siguientes condiciones

i) $\|K(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{B})} \leq \frac{C}{|x|}$ $\qquad x \neq 0.$

ii) $\|K(x-y) - K(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{B})} \leq C\frac{|y|^{\text{mín}\{\gamma,1\}}}{|x|^{1+\text{mín}\{\gamma,1\}}}$ $\qquad |x| > 2|y|,\ x \neq 0.$

Las condiciones anteriores son suficientes para asegurar la acotación que mencionábamos: si T es un operador de Calderón-Zygmund a valores vectoriales con núcleo γ-regular, para algún $\gamma > 0$, entonces T es acotado de $L^q_{\mathcal{A},\omega}$ en $L^q_{\mathcal{B},\omega}$ para todo peso $\omega \in A_q$, $1 < q < \infty$.

En el Capítulo 3 vamos a necesitar además la siguiente definición.

Definición 1.8.5. Sea $\gamma > 0$. Se dice que $\varphi \in L^1$ es una función γ-regular cuando

$$\hat{\varphi}(0) = 0$$

y existe $\alpha > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|D^j\varphi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+j+\alpha}}, \qquad 0 \leq j < \gamma.$$

Más aún si $\gamma - 1 \leq j < \gamma$

$$|D^j\varphi(x-y) - |D^j\varphi(x)| \leq C\frac{|y|^{\gamma-j}}{(1+|x|)^{1+\gamma+\alpha}} \qquad |x| > 2|y|.$$

En [5] se estableció un resultado que emplearemos para los espacios Hardy-Orlicz con peso: toda función γ-regular tiene asociado un núcleo γ-regular.

Capítulo 2

Espacios ORLICZ-SOBOLEV con Peso

En este capítulo estudiaremos los espacios Orlicz-Sobolev pesados utilizando diversas técnicas y nociones del Análisis de Fourier: teoría de multiplicadores, teoría de Littlewood-Paley, operadores a valores vectoriales de Calderón-Zygmund y desigualdades para funciones maximales. Obtendremos distintas caracterizaciones de los mismos, incluyendo como caso particular a los espacios Orlicz con peso. Fundamentalmente nos abocaremos a la caracterización a través de wavelets. Así en el último teorema de la sección correspondiente a wavelets se establece la relación entre las funciones de estos espacios y sus correspondientes coeficientes de wavelets, para wavelets ortonormales pertenecientes a una clase general. Como consecuencia de dicho teorema se obtiene una base incondicional de wavelets de los espacios Orlicz-Sobolev con peso.

Dados un peso ω en $\mathbb{R}$, una N-función ϕ y un número natural s el espacio *Orlicz-Sobolev con peso* $L^{\phi,s}_{\omega}(\mathbb{R}) = L^{\phi,s}_{\omega}$ se define como el conjunto de las funciones $f \in L^{\phi}_{\omega}$ tal que para todo $j = 1, \dots, s$, la j-ésima derivada de f también pertenece a L^{ϕ}_{ω}. Dicha derivada está considerada aquí en el sentido de distribuciones, esto es, $D^j f$ es una función tal que

$$\int_{\mathbb{R}} (D^j f)(x)\ \varphi(x)\ dx = (-1)^j \int_{\mathbb{R}} f(x)\ (D^j \varphi)(x)\ dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

La cantidad

$$||f||_{L_\omega^{\phi,s}} = ||f||_{L_\omega^\phi} + \sum_{j=1}^{s} ||D^j f||_{L_\omega^\phi} \tag{2.0.1}$$

es una norma en $L_\omega^{\phi,s}$ con respecto a la cual éste es un espacio de Banach (ver A.1).

Estos espacios generalizan a los *espacios Sobolev con peso* que resultan cuando $\phi(t) = t^p$, $1 < p < \infty$, a los que denotaremos por $L_\omega^{p,s}$.

2.1. Caracterizaciones de $L_\omega^{\phi,s}$

2.1.1. Teoría de Multiplicadores

A fin de obtener normas equivalentes en los espacios $L_\omega^{\phi,s}$ que involucran multiplicadores consignamos a continuación la definición y algunas propiedades de los mismos.

Dada $m \in L^\infty$ y $f \in L^2 \cap L^p$, $1 \leq$ p $\leq \infty$, definimos el operador lineal T_m como

$$(\hat{T_m f})(\xi) = m(\xi)\ \widehat{f}(\xi) \quad .$$

Se dice que m es un *multiplicador* para $L^p, 1 \leq p \leq \infty$, si para toda $f \in L^2 \cap L^p$, $T_m f$ también pertenece a L^p y es acotado, esto es, existe una constante A independiente de f, tal que

$$\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq A\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{2.1.1}$$

La menor constante A para la cual vale la desigualdad anterior, es llamada *la norma del multiplicador*.

Notemos que si se verifica (2.1.1) y $1 \leq p < \infty$ entonces T_m tiene una única extensión acotada de L^p en sí mismo que satisface la misma desigualdad. En adelante también denotaremos por T_m a dicha extensión.

Se dice que un multiplicador m *satisface la condición de Hörmander-Mihlin* si para un número real t mayor o igual que 1 y un entero positivo k se verifica

$$\sup_{R>0}\left(R^{tj-1}\int_{R<|x|<2R}|D^j m(x)|^t\,dx\right)^{\frac{1}{t}}<\infty \qquad 0\leq j\leq k. \tag{2.1.2}$$

En adelante si m satisface (2.1.2) lo denotaremos por $m \in M(t,k)$.

Si $\mathcal{B}$ un espacio de Banach, un multiplicador $m : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ tal que satisface (2.1.2) con las barras de valor absoluto reeemplazadas por la norma de $\mathcal{B}$, lo denotaremos por $M_{\mathcal{B}}(t,k)$.

En [7] L. Hörmander demostró que para $1 < p < \infty$, T_m es acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo con $t = 2$ y $k > \frac{n}{2}$. Posteriormente este resultado fue generalizado por distintos autores. Por ejemplo en [19] H. Triebel dio una versión vectorial para dichos operadores considerándolos en $L^p(l^q)$.

Posteriormente D. Kurtz y R. Wheeden en [11] demostraron la acotación de T_m en los espacios de Lebesgue con pesos L^p_ω.

En los espacios Orlicz con peso asociados a N-funciones, fueron Bordin y García quienes demostraron un teorema de multiplicadores del tipo Hörmander-Mihlin (ver [1]). Necesitamos la siguiente versión a valores vectoriales de dicho teorema cuya demostración se incluye en el Apéndice.

Teorema 2.1.1. *Sean $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_1$ dos espacios de Hilbert y m una función acotada en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$. Sea T_m el operador inicialmente definido para $f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_0)$ como*

$$(\widehat{T_m f})(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

con m satisfaciendo una condición del tipo Hörmander-Mihlin para $1 < t \leq 2$ y $k = 1$. Sean ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias que satisfacen la condición Δ_2. Sean q_ϕ, p_ϕ y q_{ϕ^*}, p_{ϕ^*} los exponentes de Boyd de ϕ y ϕ^* respectivamente . Entonces

i) Si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$, o

ii) Si $\omega^{-p_{\phi^*}} \in A_{q_{\phi^*}}$

T_m se puede extender a un operador lineal y acotado de $L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0)$ en $L^\phi_\omega(\mathcal{H}_1)$.

Recordemos que por el Lema 1.7.1 podemos asegurar que $1 < q_\phi \leq p_\phi < \infty$.

El Teorema anterior nos permitirá obtener una nueva norma en los espacios que estamos considerando. Para $f \in L^{\phi,s}_\omega$ consideremos la cantidad

$$||f||_{W^{\phi,s}_\omega} = \left|\left|[(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\ \widehat{f}(\cdot)]^\vee\right|\right|_{L^\phi_\omega}$$

donde $\wedge$ y $\vee$ denotan, como es usual, la transformada y la antitransformada de Fourier respectivamente.

Teorema 2.1.2. *Sean $s \in \mathbb{N}$; ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias, ambas satisfaciendo la condición Δ_2; q_ϕ y p_ϕ los exponentes de Boyd de ϕ. Si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$ existen constantes A y B, $0 < A \leq B < \infty$, tales que*

$$A||f||_{L^{\phi,s}_\omega} \leq ||f||_{W^{\phi,s}_\omega} \leq B||f||_{L^{\phi,s}_\omega} \qquad \forall f \in L^{\phi,s}_\omega.$$

Demostración. Para un entero n, $0 \leq n \leq s$, consideremos la función

$$m(\xi) = m_n(\xi) = \frac{\xi^n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \quad .$$

Esta función es $C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ y satisface

$$|D^j m(\xi)| \leq \frac{B}{|\xi|^j} \qquad j = 0, 1. \tag{2.1.3}$$

En efecto

Si $n < \frac{s}{2}$ y $0 < \xi < 1$

$$|m_n(\xi)| \leqslant \left(\frac{\xi}{1+|\xi|^2}\right)^n \leqslant 1.$$

Si $n < \frac{s}{2}$ y $\xi \geq 1$

$$\frac{\xi^n}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} \leq \left(\frac{\xi}{1+|\xi|^2}\right)^{s/2} \leq 1.$$

Si $\frac{s}{2} \leq n \leq s$ y $0 < \xi < 1$

$$\frac{\xi^n}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} \leq \left(\frac{\xi}{(1+|\xi|^2)}\right)^{s/2} \leq 1.$$

Si $\frac{s}{2} \leq n \leq s$ y $\xi \geq 1$

$$\frac{\xi^n}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} \leq \left(\frac{\xi}{(1+|\xi^2|)^{1/2}}\right)^{s} \leq 1.$$

En cuanto a la derivada

$$m'(\xi) = \frac{\xi^{n-1}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}-1} \cdot [n(1+|\xi|^2) - s|\xi|^2]}{(1+|\xi|^2)^s}$$

es necesario considerar 3 casos

(i) Si $0 \leqslant n < s$ y $|\xi| > \sqrt{\frac{n}{s-n}}$ resulta que $\quad n(1+|\xi|^2) - s|\xi|^2 < 0 \quad$ y entonces

$$|m'(\xi)| = \frac{|\xi|^{n-1} \cdot [(s-n)|\xi|^2 - n]}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+1}} \leqslant \frac{|\xi|^{n+1} \cdot (s-n)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+1}} = \frac{s-n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{(s-n)+1}{2}}} < \frac{s-n}{|\xi|}.$$

(ii) Si $0 \leqslant n < s$ y $|\xi| \leq \sqrt{\frac{n}{s-n}}$ resulta que $\quad n(1+|\xi|^2) - s|\xi|^2| \geqslant 0$, por lo tanto

$$|m'(\xi)| = \frac{|\xi|^{n-1}[(n-s)\ |\xi|^2\ + n]}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+1}} \leqslant \frac{n\ (1+|\xi|^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+1}} \leqslant \frac{n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{(s-n)+3}{2}}} < \frac{n}{|\xi|}.$$

(iii) Si $n = s$

$$|m'(\xi)| \leqslant \frac{n(1+|\xi|^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+1}} = \frac{n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{(s-n)+1}{2}}} < \frac{n}{|\xi|}.$$

La condición (2.1.3) implica (2.1.2) para $1 < t \leq 2$, $\ k = 1$ y $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \mathbb{R}$.
En consecuencia por el Teorema A.3.2 con $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \mathbb{R}$, se tiene que para $f \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
||D^n f||_{L^\phi_\omega} &= C\left|\left|[(\cdot)^n \widehat{f}(\cdot)]^\vee\right|\right|_{L^\phi_\omega} \\
&= C\left|\left|\left\{\tfrac{(\cdot)^n}{(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}}(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\cdot)\right\}^\vee\right|\right|_{L^\phi_\omega} \\
&\leq CA\,||[(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\cdot)]^\vee||_{L^\phi_\omega} \\
&= CA\,||f||_{W^{\phi,s}_\omega}.
\end{aligned}$$

De las definiciones de $||\ ||_{L^{\phi,s}_\omega}$ y $||\ ||_{W^{\phi,s}_\omega}$ se obtiene entonces la desigualdad izquierda para $f \in \mathcal{S}$. Por densidad se extiende el resultado $\forall f \in ||\ ||_{L^{\phi,s}_\omega}$.

Para establecer la otra desigualdad consideremos una función $f \in L^{\phi,s}_\omega$ y una función $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$, par y no negativa

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 1 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Nuevamente la función

$$m(\xi) = \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}{(1+[\rho(\xi)\xi]^s)}$$

satisface (2.1.3). De modo que por el Teorema A.3.2 se obtiene

$$\begin{aligned}
||f||_{W^{\phi,s}_\omega} &= ||[(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\cdot)]^\vee||_{L^\phi_\omega} \\
&= \left|\left|\{\tfrac{(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}}{(1+[(\cdot)\rho(\cdot)]^s)}(1+[(\cdot)\rho(\cdot)]^s)\hat{f}(\cdot)\}^\vee\right|\right|_{L^\phi_\omega} \\
&\leq A\left|\left|\{(1+[(\cdot)\rho(\cdot)]^s)\hat{f}(\cdot)\}^\vee\right|\right|_{L^\phi_w} \\
&\leq CA||f||_{L^\phi_\omega} + CA||\{[(\cdot)\rho(\cdot)]^s\hat{f}(\cdot)\}^\vee||_{L^\phi_\omega}.
\end{aligned}$$

Aplicando en el segundo término de la última expresión que también $[\rho(\xi)]^s$ satisface (2.1.3) y que $\{(\cdot)^s\hat{f}(\cdot)\}^\vee(x) = C(D^s f)(x)$ se concluye que

$$||f||_{W^{\phi,s}_\omega} \leq C_1||f||_{L^\phi_\omega} + C_2||D^s f||_{L^\phi_\omega} \leq C_3||f||_{L^{\phi,s}_\omega}. \tag{2.1.4}$$

□

En la demostración del último teorema encontramos una nueva norma en los espacios que estamos considerando, a saber

$$||f||^*_{L^{\phi,s}_\omega} \equiv ||f||_{L^\phi_\omega} + ||D^s f||_{L^\phi_\omega}. \tag{2.1.5}$$

De las definiciones se deduce que

$$||f||^*_{L^{\phi,s}_\omega} \leq ||f||_{L^{\phi,s}_\omega}$$

La desigualdad inversa se sigue del Teorema 2.1.2 y de la primera desigualdad de (2.1.4). De este modo

$$||f||_{L^{\phi,s}_\omega} \leq C||f||_{W^{\phi,s}_\omega} \leq C\left(||f||_{L^{\phi}_\omega} + ||D^s f||_{L^{\phi}_\omega}\right) = C||f||^*_{L^{\phi,s}_\omega}.$$

Y en consecuencia

$$||f||^*_{L^{\phi,s}_\omega} \leq ||f||_{L^{\phi,s}_\omega} \leq C||f||^*_{L^{\phi,s}_\omega} \tag{2.1.6}$$

$\forall f \in L^{\phi,s}_\omega(R)$ con ϕ, ω y s como en el Teorema 2.1.2.

2.1.2. Teoría de Littlewood-Paley

También para los espacios Orlicz-Sobolev con peso $L^{\phi,s}_\omega$ asociados a una N-función ϕ y a un peso ω, obtuvimos una caracterización de tipo Littlewood-Paley. Consideremos la siguiente versión discreta de la función de tipo Littlewood-Paley. Para $s \in \mathbb{N}$

$$g^s(f)(x) = \left\{\sum_{j\in Z}\left(2^{js}|\varphi_{2^{-j}} * f(x)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

donde φ una función banda limitada en $\mathcal{S}$, con transformada de Fourier soportada en $\{\xi \in \mathbb{R} : 2^{-N} \leq |\xi| \leq 2^N\}$ para algún $N \in \mathbb{N}$ y

$$\sum_{j\in Z}|\hat{\varphi}(2^j\xi)|^2 = 1 \qquad\qquad c.t.p\ \ \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.1.7}$$

En todo este trabajo consideraremos que $\varphi_t(x) = \frac{1}{t}\ \varphi(\frac{x}{t}),\ t \neq 0$.

Teorema 2.1.3. *Sean s, ϕ y ω como en el Teorema 2.1.2. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$, con sop $\widehat{\varphi} \subset \{\xi \in \mathbb{R} : 2^{-N} < |\xi| < 2^N\}$ para algún $N \in \mathbb{N}$ y verificando (2.1.7). Entonces $f \in L^{\phi,s}_\omega$ si y sólo si $f \in L^{\phi}_\omega$ y $g^s(f) \in L^{\phi}_\omega$. Más aún $||f||_{L^{\phi}_\omega} + ||g^s(f)||_{L^{\phi}_\omega}$ define en $L^{\phi,s}_\omega$ una norma equivalente a $||\ ||_{L^{\phi,s}_\omega}$.*

Demostración. Sea $f \in L^{\phi,s}_{\omega}$. Entonces

$$(2^{js}\ \varphi_{2^{-j}} * f)^\wedge(\xi) = C\ 2^{js}\ (\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi)\ \hat{f}(\xi) = C\ 2^{js}\ \xi^{-s}\ (\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi)\ \xi^s\ \hat{f}(\xi).$$

La función $m : \mathbb{R} \to l^2(\mathbb{Z}) \equiv \mathcal{L}(\mathbb{C}, l^2(\mathbb{Z})$ dada por

$$m(\xi) = \{2^{js}\xi^{-s}(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi) : j \in \mathbb{Z}\}$$

verifica

$$||(D^j\ m)(\xi)||_{\mathcal{L}_{(H_0,H_1)}} \leq C|\xi|^{-j} \qquad j = 0, 1; |\xi| \neq 0. \tag{2.1.8}$$

con $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 = l^2(\mathbb{Z})$. Esto implica que m satisface una condición de tipo Hormander-Mihlin para $1 < t \leq 2$ y $k = 1$.

Para demostrar (2.1.8) debemos estimar $||m(\xi)||_{l^2(Z)}$ y $||D\ m(\xi)||_{l^2(Z)}$.

Ya que $(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$, la hipótesis sobre el soporte de $\widehat{\varphi}$ implica que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{js}\xi^{-s}(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi)|^2 \quad y \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{js}D(\xi^{-s}(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi))|^2$$

tienen sólo una cantidad finita de términos no nulos.

Por lo tanto (2.1.8) estará demostrado si probamos que

$$\begin{array}{rcl} 2^{js}|\xi^{-s}(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi)| & \leq & B_0. \\ 2^{js}|D(\xi^{-s}(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi))| & \leq & \frac{B_1}{|\xi|}. \end{array} \tag{2.1.9}$$

Debido a que en el soporte de $(\varphi_{2^{-j}})^\wedge$ se tiene que $2^{-N} \leq |2^{-j}\xi| \leq 2^N$, se deduce que

$$2^{js}|\xi^{-s}(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi)| = 2^{js}|\xi^{-s}\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| \leqslant C\ 2^{js}\ 2^{(N-j)s} = C\ 2^{Ns}$$

y

$$\begin{array}{rl} & 2^{js}|D(\xi^{-s}(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi))| = 2^{js}|D(\xi^{-s}\hat{\varphi}(2^{-j}\xi))| \\ \leqslant & 2^{js}[C_1|\xi^{-s-1}\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| + C_2|\xi^{-s}2^{-j}(D\hat{\varphi})(2^{-j}\xi)|] \\ \leqslant & C2^{js}\left[2^{(N-j)s}\frac{1}{|\xi|} + 2^{N(s+1)}2^{-sj}\frac{1}{|\xi|}\right] \\ \leqslant & \frac{C}{|\xi|}[2^{Ns} + 2^{N(s+1)}] = \frac{C}{|\xi|} \end{array}$$

lo que prueba (2.1.8).

En consecuencia por el Teorema A.3.2

$$\begin{array}{rcl} ||g^s(f)||_{L^\phi_\omega} & = & C\left|\left|\left\{\sum_{j\in Z} |(2^{js}\ [(\cdot)^{-s}\ (\varphi_{2-j})^\wedge(.)]\ (\cdot)^s\ \hat{f}(\cdot))^\vee|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right|\right|_{L^\phi_\omega} \\ & \leq & C||((\cdot)^s\ \hat{f}(.))^\vee||_{L^\phi_\omega} \\ & = & C||D^s f||_{L^\phi_\omega}. \end{array}$$

Por lo tanto $g^s(f) \ \in L^\phi_\omega$ y

$$||f||_{L^\phi_\omega} + ||g^s(f)||_{L^\phi_\omega} \leq C||f||_{L^\phi_\omega} + ||D^s f||_{L^\phi_\omega} \leq C||f||_{L^{\phi,s}_\omega}. \tag{2.1.10}$$

donde la última desigualdad se justifica por (2.1.6).

Supongamos ahora que $f \in L^\phi_\omega$ y $g^s(f) \in L^\phi_\omega$. Nuevamente por (2.1.6) es suficiente probar que $D^s f \in L^\phi_\omega$.

La condición (2.1.7) nos permite escribir

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{j\in Z} (\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi)\ (\widetilde{\varphi}_{2^{-j}})^\wedge(\xi)\ \hat{f}(\xi)$$

donde $\widetilde{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}$. Entonces

$$D^s f(x) = C\left((.)^s \hat{f}(.)\right)^\vee(x) = C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (.)^s (\varphi_{2^{-j}})^\wedge(.)(\tilde{\varphi}_{2^{-j}})^\wedge(.)\hat{f}(.)\right)^\vee(x)$$

$$= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-js}\ (.)^s\ (\tilde{\varphi}_{2^{-j}})^\wedge(.)\ 2^{js}\ (\varphi_{2^{-j}})^\wedge(.)\hat{f}(.)\right)^\vee(x).$$

La función $m : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(l^2(\mathbb{Z}), \mathbb{C})$ dada por

$$m(\xi)(\mathbf{a}) = \sum_{j\in Z}\ 2^{-js}\ \xi^s\ (\widetilde{\varphi}_{2^{-j}})^\wedge(\xi)\ a_j$$

para $\mathbf{a} = \{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l^2(Z)$ satisface (2.1.8) con $\mathcal{H}_0 = l^2(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$.

En efecto como antes comencemos observando que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{js}\xi^{-s}(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi)| \quad y \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{js}D(\xi^{-s}(\varphi_{2^{-j}})^\wedge(\xi))|$$

tienen una cantidad finita de términos no nulos. Por lo que sólo tenemos que mostrar que

$$2^{-js}|\xi^{-s}(\widetilde{\varphi}_{2^{-j}})^\wedge(\xi)| \leq B_0 \qquad 2^{-js}|D(\xi^s(\widetilde{\varphi}_{2^{-j}})^\wedge(\xi))| \leq \frac{B_1}{|\xi|}$$

teniendo en cuenta el soporte de $\widehat{\varphi}$. Más precisamente

$$2^{-js}|\xi^s(\widetilde{\varphi}_{2^{-j}})^\wedge(\xi)| = 2^{-js}|\xi^s\ \widehat{\widetilde{\varphi}}(2^{-j}\xi)| \leqslant C\ 2^{-js}\ 2^{(N+j)s} = C\ 2^{Ns}$$

y

$$\begin{aligned} & 2^{-js}|D(\xi^s(\tilde{\varphi}_{2^{-j}})^\wedge(\xi))| = 2^{-js}|D(\xi^s\widehat{\widetilde{\varphi}}(2^{-j}\xi))| \\ \leqslant\ & 2^{-js}[C_1|\xi^{s-1}\widehat{\widetilde{\varphi}}(2^{-j}\xi)| + C_2|\xi^s 2^{-j}(D\widehat{\widetilde{\varphi}})(2^{-j}\xi)|] \\ \leqslant\ & 2^{-js}\left[2^{(N+j)s}\tfrac{C_1}{|\xi|} + 2^{(N+j)(s+1)}2^{-j}\tfrac{C_2}{|\xi|}\right] \\ \leqslant\ & \tfrac{C}{|\xi|}[2^{Ns} + 2^{N(s+1)}] = \tfrac{C}{|\xi|}. \end{aligned}$$

Luego por el Teorema A.3.2

$$\begin{aligned}
||D^s f||_{L^\phi_\omega} &= C\|((\cdot)^s \hat{f}(\cdot))^\vee\|_{L^\phi_\omega} \\
&= C||\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} (\{2^{-js}\ (\cdot)^s(\tilde{\varphi}_{2-j})^\wedge(.)\}\ 2^{js}\ (\varphi_{2-j})^\wedge(.)\hat{f}(.))\}^\vee||_{L^\phi_\omega} \\
&\leq C||\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}((2^{js}\ |(\varphi_{2-j})^\wedge(.)\hat{f}(.)|)^\vee)^2\}^{\frac{1}{2}}||_{L^\phi_\omega} \\
&= C||\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{js}|\varphi_{2-j} * f|)^2\}^{\frac{1}{2}}||_{L^\phi_\omega} \\
&= C||g^s(f)||_{L^\phi_\omega}.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $D^s f \in L^\phi_\omega$. Más aún por (2.1.6) se verifica que $\forall f \in L^{\phi,s}_\omega$

$$||f||_{L^{\phi,s}_\omega} \leq C\ (||f||_{L^\phi_\omega} + ||D^s f||_{L^\phi_\omega}) \leq C\ (||f||_{L^\phi_\omega} + \|g^s(f)\|_{L^\phi_\omega}). \tag{2.1.11}$$

De (2.1.10) y (2.1.11), la tesis. □

2.1.3. Teoría de Wavelets

A partir de ahora buscaremos caracterizar los espacios Orlicz-Sobolev con peso usando coeficientes de wavelets. Como consecuencia de tal caracterización obtendremos que adecuadas bases de wavelets son bases incondicionales de estos espacios.

En [8] se encuentran las siguientes propiedades sobre wavelets ortonormales de banda limitada.

Teorema 2.1.4. *Si φ es de banda limitada, ortonormal y $|\widehat{\varphi}|$ es continua en 0, entonces $\widehat{\varphi} = 0$ en un entorno del origen.*

Teorema 2.1.5. *Si φ es una wavelet ortonormal de banda limitada, entonces*

$$\sum_{j\in Z} |\hat{\varphi}(2^j\xi)|^2 = 1$$

c.t.p $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$.

A continuación estudiaremos el operador

$$(W_\psi^s f)(x) = \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \ (1+2^{2js}) \ 2^j \ \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]}(x) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

definido para $s = 0, 1, ...$

Si denotamos $I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ para $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$ resulta

$$(W_\psi^s f)(x) = \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \ (1+2^{2js}) \ |I_{j,k}|^{-1} \ \chi_{I_{j,k}} x) \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Más aún denotando por $\mathcal{D}$ al conjunto de todos los intervalos diádicos $I_{j,k}$ con $j, k \in \mathbb{Z}$ y poniendo $\psi_{I_{j,k}} = \psi_I$ también podemos escribir

$$W_\psi^s f = \left\{ \sum_{I\in\mathcal{D}} |\langle f, \psi_I\rangle|^2 \ (1+2^{2js}) \ |I|^{-1} \ \chi_I \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Observemos que si T_ψ^s es el operador que mapea f en una función a valores vectoriales en $l^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ definido por

$$(T_\psi^s f)(x) = \{ |\langle f, \psi_{j,k}\rangle| \ (1+2^{2js})^{\frac{1}{2}} \ 2^{\frac{j}{2}} \ \chi_{I_{j,k}}(x) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$$

entonces

$$(W_\psi^s f)(x) \ = \ \sqrt{(T_\psi^s f)(x) \ . \ (T_\psi^s f)(x)}$$

donde . denota el producto interno en $l^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$.

El operador $W_\psi^s f$ definido para el caso $s = 0$ será designado simplemente por $W_\psi f$.

Definimos ahora una clase de funciones que posteriormente necesitaremos. Una función φ definida en $\mathbb{R}$ pertenece a $\mathcal{R}^0$ si $\varphi \in \mathcal{C}^1$ y existen constantes C_0, C_1, $\gamma > 0$ y $\epsilon > 0$ tales que

i) $\int_{\mathbb{R}} \ \varphi(x) \ dx = 0$.

ii) $|\varphi(x)| \leq \frac{C_0}{(1+|x|)^{2+\gamma}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

iii) $|\varphi'(x)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^{1+\epsilon}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

Observamos que esta clase de funciones coincide con la clase $\mathcal{R}^1$ definida en [5], pág. 13.

Usando la teoría de operadores de Calderón-Zygmund a valores vectoriales García Cuerva y Martell obtuvieron en [5] el siguiente resultado sobre la acotación del operador $W_\psi f$ en los espacios L^p_ω.

Teorema 2.1.6. *Sea $\psi \in \mathcal{R}^0$ una wavelet ortonormal. Entonces si $1 < p < \infty$ y $\omega \in A_p$ existen constantes c y C, tales que*

$$c\ \|f\|_{L^p_\omega} \leq \|W_\psi f\|_{L^p_\omega} \leq C\ \|f\|_{L^p_\omega} \qquad \forall f \in L^p_\omega.$$

Nuestro próximo resultado, Teorema 2.1.10, requiere de los dos próximos lemas. Ambos resultan de aplicar las propiedades enunciadas en el Capítulo 1 referidas a pesos y en el primero la desigualdad de Jensen para funciones cóncavas.

Lema 2.1.7. *Si $\omega^t \in A_p$, $1 < p < \infty$ y $t > 1$ entonces $\omega \in A_p$.*

Lema 2.1.8. *Si $\omega^q \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega^{q+\epsilon} \in A_p$.*

En [1] la demostración del teorema de multiplicadores estuvo basada en el siguiente teorema de interpolación cuya demostración incluímos en A.2.

Teorema 2.1.9. *Sean $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_1$ dos espacios de Hilbert, ϕ una N-función que satisface, junto con su complementaria, la condición Δ_2 y q_ϕ y p_ϕ los exponentes de Boyd de ϕ. Sean r_1 y r_2 números reales tal que $1 \leq r_1 < q_\phi \leq p_\phi < r_2 < \infty$. Sea T un operador casilineal en $L^{r_1}_{\omega^{r_1}}(\mathcal{H}_0) + L^{r_2}_{\omega^{r_2}}(\mathcal{H}_0)$ tal que*

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)|\ \omega(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda^{r_j}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)\omega(x)|^{r_j}\ dx$$

$j = 1, 2$. Entonces T está bien definido en $L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0)$ y existe una constante finita C tal que

$$\|Tf\|_{L^\phi_\omega(\mathcal{H}_1)} \leq C\ \|f\|_{L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0)} \qquad \forall f \in L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0).$$

Observación 2.1.1. Como notamos del apéndice antes nombrado, el Teorema 2.1.9 es válido para una función ϕ casi creciente, de tipo inferior $q > 1$, de tipo superior p y $1 \leq r_1 < q \leq p < r_2 < \infty$.

El Teorema 2.1.9 junto con los Lemas 2.1.7 y 2.1.8 nos permiten demostrar otro teorema de interpolación.

Teorema 2.1.10. *Sean $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_1$ espacios de Hilbert; ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias que satisfacen la condición Δ_2 y q_ϕ, p_ϕ los exponentes de Boyd de ϕ. Sea T un operador casilineal acotado de $L^r_\omega(\mathcal{H}_0)$ en $L^r_\omega(\mathcal{H}_1)$ para todo $\omega^r \in A_r$ y para todo $1 < r < \infty$. Entonces si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$ existe C tal que*

$$\|Tf\|_{L^\phi_\omega(\mathcal{H}_1)} \leq C\ \|f\|_{L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0)} \qquad \forall f \in L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0).$$

Demostración. De $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$ y por propiedad de los pesos podemos asegurar que $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi - \epsilon}$ para algún $\epsilon > 0$. Sea $r_1 = q_\phi - \epsilon$. Luego ya que también $r_1 < p_\phi$ podemos aplicar el Lema 2.1.7 para obtener que $\omega^{r_1} \in A_{r_1}$. Como T es de tipo fuerte (r_1, r_1) con respecto a ω^{r_1} y tipo fuerte implica tipo débil, se sique que

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)|\ \omega(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^{r_1}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)\ \omega(x)|^{r_1}\ dx. \tag{2.1.12}$$

Por otro lado por el Lema 2.1.8 sabemos que $\exists \epsilon > 0$ tal que $\omega^{p_\phi + \epsilon} \in A_{q_\phi}$. Entonces si denotamos a $r_2 = p_\phi + \epsilon$ resulta que $\omega^{r_2} \in A_{q_\phi}$ y consecuentemente que $\omega^{r_2} \in A_{r_2}$ ya que $q_\phi < r_2$. Razonando como en el caso de r_1

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)|\ \omega(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^{r_2}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)\ \omega(x)|^{r_2}\ dx. \tag{2.1.13}$$

De (2.1.12) y (2.1.13) por la aplicación del Teorema 2.1.9 pues $1 < r_1 < q_\phi \leq p_\phi < r_2 < \infty$, concluímos que T está bien definido en $L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0)$ y que es acotado de $L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0)$ en $L^\phi_\omega(\mathcal{H}_1)$.

□

Observación 2.1.2. Usando la observación anterior, el Teorema 2.1.10 se satisface para ϕ una función casi creciente, de tipo inferior $q > 1$ y de tipo superior p y $\omega^p \in A_q$.

Aplicando este resultado se obtiene la siguiente versión con norma Orlicz del Teorema 2.1.6.

Teorema 2.1.11. *Sea $\psi \in \mathcal{R}^0$ una wavelet ortonormal. Sean ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias que satisfacen la condición Δ_2 y q_ϕ y p_ϕ los exponentes de Boyd de ϕ. Entonces si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$*

$$\|W_\psi f\|_{L^\phi_\omega(\mathcal{H}_1)} \leq C \ \|f\|_{L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0)} \qquad \forall f \in L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0).$$

Demostración. Por el Teorema 2.1.6 se sabe que W_ψ es acotado de L^p_ω en sí mismo para todo $\omega^p \in A_p$ y para todo $1 < p < \infty$.

De modo que aplicando el Teorema 2.1.10 con $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \mathbb{R}$ se obtiene la tesis. □

Proseguiremos en la búsqueda de un resultado como el del teorema anterior para el operador W^s_ψ.

Denotaremos por $\mathcal{B}$ al espacio de todas las $\psi \in \mathcal{S}$, tal que existe un $N \in \mathbb{N}$ para el cual sop $(\widehat{\psi}) \subset \{\xi \in \mathbb{R} : 2^{-N} \leq |\xi| \leq 2^N\}$ y

$$\sum_{j \in Z} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1$$

ctp $\xi \in \mathbb{R}$.

Observación 2.1.3. De los Teoremas 2.1.4 y 2.1.5 se deduce que si $\psi \in \mathcal{S}$ es una wavelet ortonormal y de banda limitada entonces $\psi \in \mathcal{B}$.

Teorema 2.1.12. *Sean $\lambda \geq 1$, $s \in \mathbb{N}$, $\psi \in \mathcal{B}$, ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias que satisfacen la condición Δ_2 y q_ϕ y p_ϕ los exponentes de Boyd de ϕ. Entonces si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$ existen constantes $A = A_{\phi,\lambda,s}$ y $B = B_{\phi,\lambda,s}$, $0 < A \leq B < \infty$, tal que*

$$A\|f\|_{L^{\phi,s}_\omega} \leq \|f\|_{L^\phi_\omega} + \|\{\sum_{j \in Z} [2^{js}(\psi^{**}_{j,\lambda} f)]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \leq B\|f\|_{L^{\phi,s}_\omega}$$

$\forall \ f \in \mathcal{S}$, donde $\psi^{**}_{j,\lambda} f$ es el operador maximal definido para $\lambda > 0$ como

$$(\psi^{**}_{j,\lambda} f)(x) \equiv \sup_{y \in \mathbb{R}} \frac{|(\psi_{2^{-j}} * f)(x-y)|}{(1 + 2^j|y|)^\lambda}.$$

Para la demostración de este teorema necesitamos los siguientes resultados conocidos cuyas demostraciones se incluyen en el Apéndice. En el primero se ellos se evidencia la relación del operador $\psi^{**}_{j,\lambda}$ con la maximal de Hardy-Littlewood y en el segundo una desigualdad vectorial que ésta satisface.

Lema 2.1.13. *Sea ψ una función de banda limitada, $f \in \mathcal{S}'$ y $0 < p \leq \infty$ tal que $\psi_{2^{-j}} * f \in L^p$ $\forall j \in \mathbb{Z}$. Entonces para cualquier real $\lambda > 0$ existe una constante C_λ tal que*

$$(\psi^{**}_{j,\lambda} f)(x) \leq C_\lambda \ \{\mathcal{M}(|\psi_{2^{-j}} * f|^{\frac{1}{\lambda}})(x)\}^\lambda \qquad x \in \mathbb{R}$$

donde $\mathcal{M}$ denota la maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 2.1.14. *El operador maximal de Hardy-Littlewood verifica la siguiente desigualdad vectorial para $1 < q < \infty$ y $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$*

$$\int_{\mathbb{R}} (\sum_{j \in Z} |\mathcal{M} f_j(x)|^q)^{\frac{p}{q}} \ \omega(x) \ dx \leq \ C_{p,q} \ \int_{\mathbb{R}} (\sum_{j \in Z} |f_j(x)|^q)^{\frac{p}{q}} \ \omega(x) \ dx.$$

Este resultado y la aplicación del Teorema 2.1.10 con $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = l^q$, conducen a la acotación en norma Orlicz de la maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 2.1.15. *Sean ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias que satisfacen la condición Δ_2 y q_ϕ y p_ϕ los exponentes de Boyd de ϕ. Entonces si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$ el operador maximal de Hardy-Littlewood verifica*

$$\|(\sum_{j \in Z} |\mathcal{M} f_j(x)|^q)^{\frac{1}{q}}\|_{L^\phi_\omega} \leq \ \|(\sum_{j \in Z} |f_j(x)|^q)^{\frac{1}{q}}\|_{L^\phi_\omega}$$

para $1 < q < \infty$ y $\forall f \in L^\phi_\omega$.

Observación 2.1.4. Teniendo en cuenta la Observación 2.1.2, el Teorema 2.1.15 también es válido para ϕ casi creciente, de tipo inferior $q > 1$ y de tipo superior p y $\omega^p \in A_q$.

Demostración del Teorema 2.1.12 Es claro que $\psi_{2^{-j}} * f \in \mathcal{S}$ $\forall j \in \mathbb{Z}$ y, por ende, que pertenece a L^p con $1 \leq p \leq \infty$. Ya que $q_\phi \leq q_\phi \ \lambda$ (pues $\lambda \geq 1$) y que por lo tanto $A_{q_\phi} \subset A_{q_\phi \lambda}$, aplicando los Lemas 2.1.13 y 2.1.7 y el Teorema 2.1.15 (con $q = 2\lambda$) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\left\|\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}|2^{js}\ (\psi_{j,\lambda}^{**}f)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^\phi_\omega} &\leqslant C_\lambda\left\|\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}|2^{2js}\ [\mathcal{M}(|\psi_{2^{-j}}*f|^{\frac{1}{\lambda}})]^{2\lambda}\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^\phi_\omega}\\
&= C_\lambda\left\|\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}|2^{2js}\ [\mathcal{M}(|\psi_{2^{-j}}*f|^{\frac{1}{\lambda}})]^{2\lambda}\right\}^{\frac{1}{2\lambda}}\right\|^{\lambda}_{L^{\phi\circ t^\lambda}_{\omega^{1/\lambda}}}\\
&\leq C_{\phi,\lambda}\left\|\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}|2^{2js}\ |\psi_{2^{-j}}*f|^2\right\}^{\frac{1}{2\lambda}}\right\|^{\lambda}_{L^{\phi\circ t^\lambda}_{\omega^{1/\lambda}}}\\
&= C_{\phi,\lambda}\left\|\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}|2^{2js}\ |\psi_{2^{-j}}*f|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^\phi_\omega}\\
&= C_{\phi,\lambda}\|g^s(f)\|_{L^\phi_\omega}.
\end{aligned}
$$

De modo que por el Teorema 2.1.3

$$\|f\|_{L^\phi_\omega}+\|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}[2^{js}(\psi_{j,\lambda}^{**}f)]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}\leq B\|f\|_{L^{\phi,s}_\omega}.$$

El otro sentido de la desigualdad se obtiene de la estimación puntual

$$|\psi_{2^{-j}}*f|(x)\leq(\psi_{j,\lambda}^{**}f)(x)$$

dando lugar a

$$\|g^s(f)\|_{L^\phi_\omega}=\|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}[2^{js}|\psi_{2^{-j}}*f|]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}\leq\|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}[2^{js}\psi_{j,\lambda}^{**}]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}.$$

Aplicando el Teorema 2.1.3, se obtiene la tesis. □

Teorema 2.1.16. *Sean $\psi \in \mathcal{B}$, $s = 1, 2, ...$ y ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias que satisfacen la condición Δ_2 y q_ϕ y p_ϕ los exponentes de Boyd de ϕ, Entonces si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$, existe una constante C, $0 < C < \infty$, tal que*

$$\|W_\psi^s f\|_{L_\omega^\phi} \leq C \ \|f\|_{L_\omega^{\phi,s}} \qquad \forall f \in \mathcal{S} \tag{2.1.14}$$

con C independiente de f.

Demostración. Comencemos notando que

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle| &= 2^{\frac{j}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \ \overline{\psi(2^j x - k)} \ dx \right| = 2^{\frac{-j}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \ \overline{\psi_{2^{-j}}(x - 2^{-j}k)} dx \right| \\ &= 2^{\frac{-j}{2}} |(\widetilde{\psi}_{2^{-j}}) * f)(2^{-j}k)| \leq \ 2^{\frac{-j}{2}} \sup_{y \in I_{j,k}} \ |(\widetilde{\psi}_{2^{-j}} * f(y))| \end{aligned}$$

donde $\widetilde{\psi}(y) = \overline{\psi(-y)}$.

Fijando $j \in \mathbb{Z}$ se tiene para que cualquier $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \ 2^j \ \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]}(x) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \{ \sup_{y \in I_{j,k}} |(\widetilde{\psi}_{2^{-j}} * f)(y)|\}^2 \ \chi_{I_{j,k}}(x) \\ &\leq \{ \sup_{|z| \leq 2^{-j}} |(\widetilde{\psi}_{2^{-j}} * f)(x - z)|\}^2 \\ &\leq \left\{ \sup_{|z| \leq 2^{-j}} \frac{|(\widetilde{\psi}_{2^{-j}} * f)(x - z)|}{(1 + 2^j|z|)^\lambda} \right\}^2 (1 + 2^j|z|)^{2\lambda} \\ &\leq 2^{2\lambda} \ [(\psi_{j,\lambda}^{**} f)(x)]^2. \end{aligned}$$

Luego como $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^0$, eligiendo $\lambda > 1$ y aplicando los Teoremas 2.1.11 y 2.1.12, se obtiene

$$\begin{aligned} \|W_\psi^s f\|_{L_\omega^\phi} &= \|\{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \ (1 + 2^{2js}) \ 2^j \ \chi_{I_{j,k}}(x)\}^{\frac{1}{2}}\}\|_{L_\omega^\phi} \\ &\leq \ \|\{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \ 2^j \ \chi_{I_{j,k}}\}(x)\}^{\frac{1}{2}}\|_{L_\omega^\phi} \\ &\quad + \|\{\sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \ 2^{2js} \ 2^j \ \chi_{I_{j,k}}\}(x)\}^{\frac{1}{2}}\|_{L_\omega^\phi} \\ &\leq \ C \ \ \|f\|_{L_\omega^\phi} + C \ \|\{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |2^{js}(\psi_{j,\lambda}^{\star\star} f)|^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L_\omega^\phi} \\ &\leq \ C \ \|f\|_{L_\omega^{\phi,s}}. \end{aligned}$$

$\square$

Establezcamos algunas cuestiones necesarias para la demostración de la desigualdad opuesta a (2.1.14).

Generalizaremos la definición de $\mathcal{R}^0$. Para $s \in \mathbb{N} \bigcup \{-1\}$ denotaremos por $\mathcal{D}^s$ al conjunto de funciones continuas φ definidas en $\mathbb{R}$ para las cuales existen constantes $\epsilon > 0$, $C_n < \infty$, tal que

$|D^n\ \varphi(x)| \leq \frac{C_n}{(1+|x|)^{1+\epsilon}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ n = 0, 1, ..., s+1.$

Designaremos por $\mathcal{M}^s$ al conjunto de funciones continuas φ definidas en $\mathbb{R}$ para las cuales existen constantes $\gamma > 0$ y $C < \infty$ tal que

$\int_{\mathbb{R}} x^n\ \varphi(x)\ dx = 0 \qquad n = 0, 1, ..., s;$

$|\varphi(x)|\ \leq\ \frac{C}{(1+|x|)^{2+s+\gamma}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

Finalmente para todo entero no negativo s, denotaremos por $\mathcal{R}^s$ a $\mathcal{D}^s \bigcap \mathcal{M}^s$.

Observación 2.1.5. Observamos que $\mathcal{R}^s$ coincide con la clase $\mathcal{R}^\alpha$ definida en [5] para el caso en que $\alpha \in \mathbb{Z}$ con $\alpha = s+1$. Además para $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}^s \subset \mathcal{R}^0$.

A continuación haremos uso de los siguientes resultados que pueden encontrarse en [8] y cuyas demostraciones se incluyen en A.6 y A.7.

Proposición 2.1.17. *Sean $s = 0, 1, 2...$ y $j, k, l, m \in \mathbb{Z}$.*

i) Si $\varphi \in \mathcal{D}^s$ y $\psi \in \mathcal{M}^s$ existen constantes $C < \infty$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$|\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle|\ \leq\ \frac{C 2^{(l-j)(\frac{3}{2}+s)}}{(1 + 2^l|2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} \qquad \textit{para } j \geq l.$$

ii) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^{-1}$ existen constantes $C < \infty$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$|\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle|\ \leq\ \frac{C 2^{\frac{(j-l)}{2}}}{(1 + 2^j|2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} \qquad \textit{para } j \leq l.$$

Lema 2.1.18. *Dados $\epsilon > 0$ y $1 \leq r < 1+\epsilon$, existe una constante C tal que para todas las sucesiones $\{s_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ de números complejos y para $x \in I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$*

i) $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1+2^l|2^{-j}k-2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} \leq C[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |s_{l,m}|^{\frac{1}{r}}\chi_{I_{l,m}})(x)]^r \qquad l\leq j.$

ii) $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1+2^j|2^{-l}m-2^{-j}k|)^{1+\epsilon}} \leq C2^{(l-j)r}[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |s_{l,m}|^{\frac{1}{r}}\chi_{I_{l,m}})(x)]^r \qquad l\geq j.$

donde $\mathcal{M}$ es la función maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 2.1.19. *Sean ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias que satisfacen la condición Δ_2, q_ϕ y p_ϕ los exponentes de Boyd de ϕ, y $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$.*

i) Si ψ, $\varphi \in \mathcal{R}^0$ con φ una wavelet ortonormal, entonces $\exists C$ tal que

$$||W_\psi f||_{L^\phi_\omega} \leq C\ ||W_\varphi f||_{L^\phi_\omega} \qquad \forall f\in L^\phi_\omega \cap L^2.$$

ii) Si $s\in\mathbb{N}$; ψ, $\varphi\in\mathcal{R}^s$ con φ una wavelet ortonormal, entonces $\exists C$ tal que

$$||W^s_\psi f||_{L^\phi_\omega} \leq C\ ||W^s_\varphi f||_{L^\phi_\omega} \qquad \forall f\in L^{\phi,s}_\omega \cap L^2.$$

Demostración. $i)$ Por la ortonormalidad de φ podemos expresar

$$\psi_{j,k}(x) \ = \ \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle \psi_{j,k},\varphi_{l,m}\rangle\ \varphi_{l,m}(x)$$

con convergencia en L^2 y en consecuencia en $\mathcal{S}'$.

Por lo tanto

$$(W_\psi f)(x) = C\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle f,\varphi_{l,m}\rangle\overline{\langle\psi_{j,k},\varphi_{l,m}\rangle}|^2\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}(x)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Escribiendo

$$A_1(j,k) = \sum_{l\leq j}\ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle f,\varphi_{l,m}\rangle\ \overline{\langle\psi_{j,k},\varphi_{l,m}\rangle}.$$

$$A_2(j,k) = \sum_{l>j}\ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle f,\varphi_{l,m}\rangle\ \overline{\langle\psi_{j,k},\varphi_{l,m}\rangle}.$$

se tiene que

$$(W_\psi f)(x) \leq C\left(\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |A_1(j,k)|^2\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}(x)\}^{\frac{1}{2}} + \{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |A_2(j,k)|^2\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}(x)\}^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2.1.15}$$

Para estimar A_1 usaremos la Proposition 2.1.17 $i)$

$$\begin{aligned}
|A_1(j,k)| &= C\sum_{l\le j}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\frac{2^{\frac{3}{2}(l-j)}}{(1+2^l|2^{-j}k-2^{-l}m|)^{1+\epsilon}}\\
&= C\sum_{l\le j}2^{\frac{3}{2}(l-j)}\ \{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|}{(1+2^l|2^{-j}k-2^{-l}m|)^{1+\epsilon}}\}
\end{aligned}$$

para algún $C<\infty$ y $\epsilon>0$.

Entonces por el Lema 2.1.18 $i)$ con $r=1$

$$|A_1(j,k)|\le C\sum_{l\le j}2^{\frac{3}{2}(l-j)}\left[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\chi_{I_{l,m}})(x)\right]\qquad \forall x\in I_{j,k}.$$

En consecuencia ya que $\{I_{j,k}:k\in\mathbb{Z}\}$ es una colección de cubos diádicos disjuntos

$$\begin{aligned}
&\|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A_1(j,k)|^2\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}\\
\le\quad & C\ \|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\ 2^j\ [\sum_{l\le j}2^{\frac{3}{2}(l-j)}\ \mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}\\
\le\quad & C\ \|\{\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\}\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ 2^{\frac{l}{2}}\quad \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}\\
\le\quad & C\ \|\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\ [\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ 2^{\frac{l}{2}}\quad \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usó la desigualdad de Young para convoluciones

$$\|\{a_j\}*\{b_l\}\|_{l^2}\equiv\|\{\sum_l a_{j-l}\ b_l\}_j\|_{l^2}\le\|\{a_j\}\|_{l^1}\|\{b_l\}\|_{l^2}$$

con

$$a_j=\begin{cases}2^{-j} & si\ j\ \ \ge 0\\ 0 & si\ j\ \ <0\end{cases}$$

y

$$b_l=\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ 2^{\frac{l}{2}}\chi_{l,m})(x).$$

Aplicando el Teorema 2.1.15 con $q = 2$ se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned}
\|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A_1(j,k)|^2\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} &\leq C\ \|\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}[\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ 2^{\frac{l}{2}}\ \chi_{I_{l,m}}]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
&= C\ \|\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|^2\ 2^l\ \chi_{I_{l,m}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
&= C\ \|W_\varphi f\|_{L^\phi_\omega}.
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Para estimar A_2 emplearemos la Proposición 2.1.17 *ii*) (observemos que $\mathcal{D}^0$ y $\mathcal{M}^0$ están contenidos en $\mathcal{D}^{-1}$) junto con el Lema 2.1.18 *ii*) para $r = 1$

$$\begin{aligned}
|A_2(j,k)| &\leq C\sum_{l>j}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\psi_{l,m}\rangle|\frac{2^{\frac{1}{2}(j-l)}}{(1+2^j|2^{-j}k-2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} \\
&= C\sum_{l>j}2^{\frac{1}{2}(j-l)}\ 2^{l-j}\left[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\chi_{I_{l,m}})(x)\right]
\end{aligned}$$

para algún $C < \infty$, $\epsilon > 0$ y $\forall x \in I_{j,k}$.

En consecuencia ya que para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\{I_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una colección de intervalos diádicos disjuntos

$$\begin{aligned}
&\|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A_2(j,k)|^2\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
\leq\ & C\ \|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\ 2^j[\sum_{l>j}2^{\frac{-1}{2}(j-l)}\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
\leq\ & C\ \|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}[\sum_{l>j}\ \mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ 2^{\frac{l}{2}}\ \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}.
\end{aligned}$$

Nuevamente aplicando el Teorema 2.1.15 se obtiene que

$$\|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A_2(j,k)|^2\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \leq C\ \|W_\varphi f\|_{L^\phi_\omega}. \tag{2.1.17}$$

Desigualdades (2.1.16), (2.1.17) y (2.1.15) demuestran el resultado deseado.

ii) A raíz de *i*) es suficiente probar el resultado para $\widetilde{W}^s_\varphi f$ y $\widetilde{W}^s_\psi f$ donde

$$(\widetilde{W}^s_\varphi f)(x) = \{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{j,k}\rangle|^2\ 2^{2js}\ 2^j\ \chi_{[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]}(x)\}^{\frac{1}{2}}$$

esto es

$$\|\widetilde{W}^s_\psi f\|_{L^\phi_\omega} \leq C\ \|\widetilde{W}^s_\varphi f\|_{L^\phi_\omega} \qquad \forall f \in L^{\phi,s}_\omega \cap L^2$$

ya que de esta desigualdad junto a la de i), se obtiene

$$\begin{aligned}\|W^s_\psi f\|_{L^\phi_\omega} \leq\ & \|W_\psi f\|_{L^\phi_\omega} + \|\widetilde{W}^s_\psi f\|_{L^\phi_\omega} \leq\ C_1\|W_\varphi f\|_{L^\phi_\omega} + C_2\|\widetilde{W}^s_\varphi f\|_{L^\phi_\omega}\\ \leq\ & C(\|W_\varphi f\|_{L^\phi_\omega} + \|W^s_\varphi f\|_{L^\phi_\omega}) \leq\ 2C\|W^s_\varphi f\|_{L^\phi_\omega}.\end{aligned}$$

Las desigualdades y acotaciones puntuales empleadas en $i)$ se repiten, en este caso para $\widetilde{W}^s_\psi$. A partir de la ortonormalidad de φ se tiene que

$$\psi_{j,k}(x) \ = \ \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle\psi_{j,k},\varphi_{l,m}\rangle\ \varphi_{l,m}(x)$$

convergiendo en L^2 y en consecuencia en $\mathcal{S}'$.

Entonces

$$(\widetilde{W}^s_\psi f)(x) = \{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle f,\varphi_{l,m}\rangle\overline{\langle\psi_{j,k},\varphi_{l,m}\rangle}|^2\ 2^{2js}\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}(x)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

De modo que escribiendo

$$A_1(j,k) = \sum_{l\leq j}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle f,\varphi_{l,m}\rangle\overline{\langle\psi_{j,k},\varphi_{l,m}\rangle}.$$

$$A_2(j,k) = \sum_{l>j}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle f,\varphi_{l,m}\rangle\overline{\langle\psi_{j,k},\varphi_{l,m}\rangle}.$$

resulta

$$(\widetilde{W}_\psi f)(x) \leq \{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A_1(j,k)|^2\ 2^{2js}\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}(x)\}^{\frac{1}{2}}+\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A_2(j,k)|^2\ 2^{2js}\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}(x)\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.18}$$

Para estimar A_1 usaremos la Proposición 2.1.17 $i)$

$$\begin{aligned}|A_1(j,k)| \ &= \ C\sum_{l\leq j}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\frac{2^{(l-j)(\frac{1}{2}+s+1)}}{(1+2^l|2^{-j}k-2^{-l}m|)^{1+\epsilon}}\\ &= \ C\sum_{l\leq j}2^{(l-j)(\frac{1}{2}+s+1)}\{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|}{(1+2^l|2^{-j}k-2^{-l}m|)^{1+\epsilon}}\}\end{aligned}$$

para algún $C<\infty$ y $\epsilon>0$.

Entonces por el Lema 2.1.18 $i)$ con $r=1$

$$|A_1(j,k)| \leq C\sum_{l\leq j}2^{(l-j)(\frac{1}{2}+s+1)}[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\chi_{I_{l,m}})(x)] \quad \forall x\in I_{j,k}.$$

Ya que para $j\in\mathbb{Z}$ fijo, $\{I_{j,k}: k\in\mathbb{Z}\}$ es una colección de cubos diádicos disjuntos

$$\begin{aligned}
& \|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |A_1(j,k)|^2\ 2^{2js}\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
\leq\ & C\ \|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\ 2^{2js}\ 2^j[\sum_{l\leq j} 2^{(l-j)(\frac{1}{2}+s+1)}\ \mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
\leq\ & C\ \|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}[\sum_{l\leq j} 2^{(l-j)}\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ 2^{ls}\ 2^{\frac{l}{2}}\ \ \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
\leq\ & C\ \|\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\ [\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ 2^{ls}\ 2^{\frac{l}{2}}\ \ \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usó la desigualdad de Young para convoluciones. Como antes la aplicación del Teorema 2.1.15 permite concluir

$$\begin{aligned}
\|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |A_1(j,k)|^2\ 2^{2js}\ 2^j\chi_{I_{j,k}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} &\leq C\ \|\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|^2\ 2^{2ls}\ 2^l\ \chi_{I_{l,m}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
&= C\ \|\widetilde{W}^s_\varphi f\|_{L^\phi_\omega}.
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Para estimar A_2 emplearemos la Proposición 2.1.17 *ii*) observando que $\mathcal{D}^s$ y $\mathcal{M}^s$ están contenidos en $\mathcal{D}^{-1}$, junto con el Lema 2.1.18 *ii*) para $r=1$

$$\begin{aligned}
|A_2(j,k)| &= C\sum_{l>j}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f,\psi_{l,m}\rangle|\frac{2^{\frac{1}{2}(j-l)}}{(1+2^j|2^{-j}k-2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} \\
&= C\sum_{l>j} 2^{\frac{1}{2}(j-l)}\ 2^{l-j}\ [\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\chi_{I_{l,m}})(x)]
\end{aligned}$$

para algún $C<\infty$, $\epsilon>0$ y $\forall x\in I_{j,k}$.

En consecuencia

$$\begin{aligned}
& \|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |A_2(j,k)|^2\ 2^{2js}\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
\leq\ & C\ \|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\ 2^{2js}\ 2^j[\sum_{l>j} 2^{\frac{-1}{2}(j-l)}\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} \\
\leq\ & C\ \|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}[\sum_{l>j} 2^{(j-l)s}\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ 2^{ls}\ 2^{\frac{l}{2}}\ \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}.
\end{aligned}$$

Debido a que para $s\geq 1$, la serie $\displaystyle\sum_{l>j} 2^{(j-l)s}$ converge. La desigualdad de Young para convoluciones y el Teorema 2.1.15 con $q=2$, nos permiten concluir

$$\begin{aligned}
\|\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A_2(j,k)|^2\ 2^{2js}\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega} &\leq C\ \{\sum_{l\in\mathbb{Z}}[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|\ 2^{ls}\ 2^{\frac{l}{2}}\ \chi_{I_{l,m}})]^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}\\
&\leq C\ \|\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{l,m}\rangle|^2\ 2^{2ls}\ 2^l\ \chi_{I_{l,m}}\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^\phi_\omega}\\
&= C\ \|\widetilde{W}^s_\varphi f\|_{L^\phi_\omega}.
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

La tesis se sigue de (2.1.18), (2.1.19) y (2.1.20). □

Teorema 2.1.20. *Sean ϕ una N-función que satisface la condición Δ_2 al igual que su complementaria ϕ^*; q_ϕ, p_ϕ y q_{ϕ^*}, p_{ϕ^*} los exponentes de Boyd de ϕ y de ϕ^* respectivamente y $\omega^{-p_{\phi^*}} \in A_{q_{\phi^*}}$. Entonces*

i) Si ψ es una wavelet ortonormal y perteneciente a $\mathcal{R}^0$, existe $0 < C < \infty$ tal que

$$C\ \|f\|_{L^\phi_\omega} \leq \|W_\psi f\|_{L^\phi_\omega} \qquad \forall f \in L^\phi_\omega.$$

ii) Si $s \in \mathbb{N}$, ψ es una wavelet ortonormal, de banda limitada y perteneciente a $\mathcal{S}$, existe $0 < C < \infty$ tal que

$$C\|f\|_{L^{\phi,s}_\omega} \leq \|W^s_\psi f\|_{L^{\phi,s}_\omega} \qquad \forall f \in L^{\phi,s}_\omega.$$

Demostración. (i) Para $f \in L^2$ definamos el operador a valores vectoriales

$$(T_\psi f)(x) = \{\langle f,\psi_{jk}\rangle\ 2^{\frac{j}{2}}\ \chi_{I_{j,k}}(x):\ j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}\}.$$

Entonces como ya observamos

$$(W_\psi f)(x) = (T_\psi f(x)\cdot T_\psi f(x))^{\frac{1}{2}}$$

donde $\cdot$ denota el producto punto en $l^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$.
Ya que ψ es una wavelet ortonormal se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} T_\psi f(x)\cdot T_\psi f(x)\ dx = ||W_\psi f||^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|<f,\psi_{jk}>|^2 = ||f||^2_{L^2}.$$

Entonces por polarización y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que para f y g en $\mathcal{S}$

$$|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot\overline{g(x)}\ dx| \leq \int_{\mathbb{R}}|T_\psi f(x)\cdot T_\psi g(x)|\ dx \leq \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(x)\cdot W_\psi g(x)\ dx.$$

Sea $f \in L^{\phi}_{\omega} \cap L^2$. Como $\omega^{-p_{\phi^*}} \in A_{q_{\phi^*}}$ aplicando la desigualdad de Hölder en espacios de Orlicz asociados a N-funciones y el Teorema 2.1.11 para ϕ^* y ω^{-1}, se concluye que

$$\begin{aligned}
||f||_{L^{\phi}_{\omega}} &= \sup\left\{ \left| \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\, dx \right| \ : ||g||_{L^{\phi^*}_{\omega^{-1}}} \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup\left\{ ||W_{\psi} f||_{L^{\phi}_{\omega}} ||W_{\psi} g||_{L^{\phi^*}_{\omega^{-1}}} : ||g||_{L^{\phi^*}_{\omega^{-1}}} \leq \right\} \\
&\leq C \ \sup\left\{ ||W_{\psi} f||_{L^{\phi}_{\omega}} ||g||_{L^{\phi^*}_{\omega^{-1}}} \ : ||g||_{L^{\phi^*}_{\omega^{-1}}} \leq 1 \right\} \\
&\leq C \ ||W_{\psi} f||_{L^{\phi}_{\omega}}.
\end{aligned}$$

ii) Para f y g en $\mathcal{S}$ se tiene por ser ψ ortonormal

$$\int_{\mathbb{R}} (D^s f)(x) \ g(x) \ dx = C \int_{\mathbb{R}} f(x) \ (D^s g)(x) \ dx.$$

$$\begin{aligned}
&= C \textstyle\int_{\mathbb{R}} \{ \displaystyle\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(x) \} \{ \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle D^s g, \psi_{lm} \rangle \psi_{lm}(x) \} \ dx \\
&= C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \ \langle D^s g, \psi_{kj} \rangle \\
&= C \textstyle\int_{\mathbb{R}} \displaystyle\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle 2^{js} 2^{\frac{j}{2}} \langle D^s g, \psi_{jk} \rangle 2^{-js} 2^{\frac{-j}{2}} \chi_{I_{jk}}(x) \ dx.
\end{aligned}$$

Empleando la desigualdad de Cauchy-Schwartz para $l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left| \textstyle\int_{\mathbb{R}} (D^s f)(x) \ g(x) \ dx \right| \\
&\leq C \textstyle\int_{\mathbb{R}} \left(\displaystyle\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{jk} \rangle|^2 \ 2^{2js} \ 2^j \ \chi_{I_{jk}}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad . \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle D^s g, \psi_{jk} \rangle|^2 \ 2^{-2js} \ 2^j \ \chi_{I_{jk}}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \ dx \\
&\leq C \ \textstyle\int_{\mathbb{R}} \ (W^s_{\psi} f)(x) \ \left(\displaystyle\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle D^s g, \psi_{jk} \rangle 2^{-2js}|^2 \ 2^j \ \chi_{I_{jk}}(x) \right) \ dx.
\end{aligned}$$

Notando que $\langle D^s g, \psi_{jk} \rangle 2^{-js} = C \ 2^{-js} \langle g, D^s \psi_{jk} \rangle = C \langle g, (D^s \psi)_{jk} \rangle$ podemos escribir

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (D^s f)(x) \ g(x) \ dx \right| \leq C \ \int_{\mathbb{R}} (W^s_{\psi} f)(x) \ (W_{D^s \psi} g)(x) \ dx.$$

Entonces ya que $\psi \in \mathcal{S}$ es una wavelet ortonormal y de banda limitada, aplicando la desigualdad Hölder, el Teorema 2.1.19 $i)$ para $\psi = D^s\psi$ y $\varphi = \psi$ y el Teorema 2.1.11 para ϕ^* y ω^{-1}, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}}(D^s f)(x)g(x)\,dx\right| &\leq C||W_\psi^s f||_{L_\omega^\phi}\ ||W_{D^s\psi} g||_{L_{\omega^{-1}}^{\phi^*}} \\ &\leq C||W_\psi^s f||_{L_\omega^\phi}\ ||W_\psi g||_{L_{\omega^{-1}}^{\phi^*}} \\ &\leq C||W_\psi^s f||_{L_\omega^\phi}\ ||g||_{L_{\omega^{-1}}^{\phi^*}}. \end{aligned}$$

Tomando ahora el supremo sobre todas las $g \in \mathcal{S}$ tal que $||g||_{L_{\omega^{-1}}^{\phi^*}} \leq 1$, se deduce que

$$||D^s f||_{L_\omega^\phi} \leq C||W_\psi^s f||_{L_\omega^\phi}. \tag{2.1.21}$$

Como $(W_\psi f)(x) \leq (W_\psi^s f)(x)$ ya que $1 \leq (1 + 2^{2js})$ $\forall j \in \mathbb{Z}$ y además como para cualquier entero positivo s se verifica que $\mathcal{R}^s \subset \mathcal{R}^0$, podemos aplicar $i)$ de este teorema para obtener

$$\|f\|_{L_\omega^\phi} \leq C\ \|W_\psi f\|_{L_\omega^\phi} \leq C\ \|W_\psi^s f\|_{L_\omega^\phi}. \tag{2.1.22}$$

De (2.1.21) y (2.1.22) por (2.1.6), se demuestra así que $\forall f \in L_\omega^{\phi,s}$

$$C\ ||f||_{L_\omega^{\phi,s}} \leq ||W_\psi^s f||_{L_\omega^\phi}.$$

$\square$

Los Teoremas 2.1.11 y 2.1.20 $i)$ nos permiten caracterizar los espacios Orlicz con peso L_ω^ϕ a través de wavelets ortonormales y pertenecientes a $\mathcal{R}^0$.

En $ii)$ del último teorema encontramos una desigualdad en norma entre una función de $L_\omega^{\phi,s}$ y el operador W_ψ^s para ψ una wavelet ortonormal, de banda limitada y perteneciente a $\mathcal{S}$. Queremos ahora lograr una caracterización de dichos espacios para wavelets más generales.

Observación 2.1.6. Notemos que las wavelets de banda limitada y pertenecientes a la clase de Schwartz $\mathcal{S}$ están contenidas en $\mathcal{R}^s$.

Teorema 2.1.21. *Sean $s \in \mathbb{N}$; ψ una wavelet ortonormal perteneciente a $\mathcal{R}^s$; ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias que satisfacen la condición Δ_2, con exponentes de Boyd q_ϕ, p_ϕ y q_{ϕ^*}, p_{ϕ^*} respectivamente. Si además $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$, $\omega^{p_\phi} \in RH(q'_\phi/p'_\phi)$ y $\omega^{-p_\phi/p_\phi-1} \in RH(q'_\phi/p'_\phi)$ entonces existen constantes A y B, $0 < A \leq B < \infty$, tal que*

$$A\ ||f||_{L_\omega^{\phi,s}} \leq ||W_\psi^s f||_{L_\omega^\phi} \leq\ B\ ||f||_{L_\omega^{\phi,s}} \quad \forall f \in L_\omega^{\phi,s}.$$

Demostración. Las hipótesis referidas al peso implican en particular que

$$\omega^{p_\phi} \in A_{p_\phi} \qquad \omega^{p_\phi} \in RH(q'_\phi/p'_\phi) \qquad \omega^{-p_\phi/p_\phi-1} \in RH(q'_\phi/p'_\phi).$$

Usando el Lema 1.2.1 debido a Kurtz y Whedeen y aplicado a ω^{p_ϕ}, se tiene que estas condiciones son equivalentes a

$$\omega^{p_\phi \frac{q'_\phi}{p'_\phi}} \in A_{p_\phi};$$

ya que $\frac{q'_\phi}{p'_\phi} > 1$.

Usando la propiedad: $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty \Leftrightarrow \omega^{-p'/p} \in A_{p'}$, se sigue que la condición anterior es equivalente a

$$\omega^{-q'_\phi} \in A_{p'_\phi}.$$

Pero como $p_{\phi^*} = q'_\phi$ y $q_{\phi^*} = p'_\phi$, esto último es equivalente a pedir que $\omega^{-p_{\phi^*}} \in A_{q_{\phi^*}}$ que es la hipótesis del Teorema 2.1.20.

Por lo tanto si φ una wavelet ortonormal, de banda limitada y perteneciente a $\mathcal{S}$, $\varphi \in \mathcal{B}$ por Observación 2.1.3 y es posible aplicar el Teorema 2.1.16. Además como por la Observación 2.1.6 $\varphi \in \mathcal{R}^s$, podemos emplear el Teorema 2.1.19 *ii*). De la aplicación de los teoremas antes citados y por Teorema 2.1.20 *ii*), podemos concluir que $\forall f \in L^{\phi,s}_\omega$

$$A \; ||f||_{L^{\phi,s}_\omega} \leq C||W^s_\varphi f||_{L^\phi_\omega} \leq ||W^s_\psi f||_{L^\phi_\omega} \leq D||W^s_\varphi f||_{L^\phi_\omega} \leq B \; ||f||_{L^{\phi,s}_\omega}. \qquad (2.1.23)$$

□

Observación 2.1.7. Consideremos las N-funciones dadas por

$$\phi(t) = t^p, \quad p > 1 \qquad\qquad \phi(t) = t^p(1 + \log^+ t), \quad p > 1$$

No es difícil probar que en ellas $p_\phi = q_\phi$. Para tales ϕ las condiciones del Teorema 2.1.21 referidas el peso se reducen a $\omega^{p_\phi} \in A_{p_\phi}$.

2.2. Base Incondicional

Demostraremos ahora que si ψ es una wavelet ortonormal y perteneciente a la clase de regularidad $\mathcal{R}^s$ entonces $\{\psi_{jk} : j \in \mathbb{Z},\; k \in \mathbb{Z}\}$ es una base incondicional para $L^{\phi,s}_\omega$, donde $s \in \mathbb{N}$, ϕ es una N-función que satisface la condición Δ_2 al igual que su N-función complementaria ϕ^* y ω es un peso que satisface las hipótesis del Teorema 2.1.21.

Comencemos demostrando que dicho sistema es base del espacio de Banach $L^{\phi,s}_{\omega}$, es decir, que para toda función f de este espacio existe una única sucesión $\{\langle f, \psi_{j,k}\rangle\}_{j,k}$ tal que

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, \psi_{jk}\rangle\psi_{jk}$$

donde la convergencia de las sumas parciales es en la norma de $L^{\phi,s}_{\omega}$, esto es

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{|j|\leq N}\sum_{|k|\leq N}\langle f, \psi_{jk}\rangle\psi_{jk}\|_{L^{\phi,s}_{\omega}} = 0.$$

Ya que ψ es ortonormal podemos escribir

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, \psi_{jk}\rangle\psi_{jk}$$

con convergencia en L^2 y por lo tanto en $\mathcal{S}'$.

Si demostramos ahora que

$$\sum_{j=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N}\langle f, \psi_{jk}\rangle\psi_{jk} \equiv f_N \tag{2.2.1}$$

es una sucesión de Cauchy en $L^{\phi,s}_{\omega}$, por ser éste un espacio completo sabemos que $\exists g \in L^{\phi,s}_{\omega}$ tal que

$$f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} g$$

en $L^{\phi,s}_{\omega}$ y por lo tanto

$$f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} g$$

en $\mathcal{S}'$.

Pero como también

$$f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} f$$

en $\mathcal{S}'$, resulta que $f(x) = g(x)$ c.t.p x y que

$$f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} f$$

en $L^{\phi,s}_\omega$.

Supongamos $M > N$. Entonces

$$||f_N - f_M||_{L^{\phi,s}_\omega} = \left\| \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk} \right\|_{L^{\phi,s}_\omega}.$$

Si denotamos

$$\sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk} = f_{NM}.$$

y aplicamos el lado izquierdo de la desigualdad del Teorema 2.1.21 y la ortonormalidad de ψ, resulta

$$||\sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk}||_{L^{\phi,s}_\omega}$$

$$\leq \quad ||W^s_\psi f_{NM}||_{L^\phi_\omega}$$

$$\leq \quad C\ ||\{\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \sum_{k'\in\mathbb{Z}} |\langle \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk}, \psi_{j'k'}\rangle|^2 (1 + 2^{2j's}) 2^{j'} \chi_{I_{j'k'}}\}^{\frac{1}{2}}||_{L^\phi_\omega}$$

$$\leq \quad C\ ||\{\sum_{j'\in Z} \sum_{k'\in\mathbb{Z}} |\langle \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2\ |\langle \psi_{jk}, \psi_{j'k'}\rangle|^2\ (1 + 2^{2j's}) 2^{j'} \chi_{I_{j'k'}}\}^{\frac{1}{2}}||_{L^\phi_\omega}$$

$$\leq \quad C\ ||\{\sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 (1 + 2^{2js}) 2^j \chi_{I_{jk}}\}^{\frac{1}{2}}||_{L^\phi_\omega}$$

$$= \quad C\ ||W^{s,N,M}_\psi f||_{L^\phi_\omega}.$$

De modo que

$$||f_N - f_M||_{L^{\phi,s}_\omega} \leq\ C\ ||W^{s,N,M}_\psi f||_{L^\phi_\omega}. \tag{2.2.2}$$

Notemos además que por la desigualdad derecha del Teorema 2.1.21, si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$ $W_\psi^s f \in L_\omega^\phi \;\; \forall\, f \in L_\omega^{\phi,s}$ y por lo tanto $W_\psi^s f(x) < \infty \quad$ c.t.p. $\; x \in \mathbb{R}$. De manera que

$$\lim_{N\to\infty} W_\psi^{s,N,M} f(x) = 0$$

c.t.p. $\; x \in \mathbb{R}$.

Como $W_\psi^s f$ es una serie de términos positivos

$$W_\psi^{s,N,M} f(x) \leq W_\psi^s f(x)$$

independientemente de N y M.

Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se obtiene

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(W_\psi^{s,N,M} f(x)\omega(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{N\to\infty} \phi\left(W_\psi^{s,N,M} f(x)\omega(x)\right) dx = 0$$

lo que implica que

$$\|W_\psi^{s,N,M} f\|_{L_\omega^\phi N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.2.3}$$

Tomando límite para $N \to \infty$ en (2.2.2) junto con (2.2.3) podemos concluir que

$$||f_N - f_M||_{L_\omega^{\phi,s}} \to 0$$

y

$$\lim_{N\to\infty} ||f - \sum_{|j|\leq N} \sum_{|k|\leq N} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{jk}||_{L_\omega^{\phi,s}} = 0 \qquad \forall f \in L_\omega^{\phi,s}$$

demostrando de este modo (2.2.1).

Finalmente definamos el operador

$$S_\epsilon(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \epsilon_{jk} \; \langle f, \psi_{jk}\rangle \; \psi_{jk}$$

donde $\epsilon = \{\epsilon_{jk}\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}}$ con $\epsilon_{jk} = \pm 1$.

Si aplicamos la desigualdad derecha del Teorema 2.1.21, logramos las siguientes desigualdades en norma $\forall f \in L^{\phi,s}_{\omega}$

$$
\begin{aligned}
&\left|\left|\sum_{j=N+1}^{M}\sum_{k=N+1}^{M} \epsilon_{jk}\ \langle f,\psi_{jk}\rangle\psi_{jk}\right|\right|_{L^{\phi,s}_{\omega}} \\
\leq\quad & C\ \left|\left|\left\{\sum_{j=N+1}^{M}\sum_{k=N+1}^{M} |\epsilon_{jk}\ \langle f,\psi_{jk}\rangle|^2\ (1+2^{2js})\ 2^j\chi_{I_{jk}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right|\right|_{L^{\phi,s}_{\omega}} \\
\leq\quad & C\ \left|\left|\left\{\sum_{j=N+1}^{M}\sum_{k=N+1}^{M} |\langle f,\psi_{jk}\rangle|^2\ (1+2^{2js})\ 2^j\chi_{I_{jk}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right|\right|_{L^{\phi,s}_{\omega}} \\
\leq\quad & C\ \left|\left|W^{s,N,M}_{\psi} f\right|\right|_{L^{\phi}_{\omega}} \\
\leq\quad & C\ ||f||_{L^{\phi,s}_{\omega}}\ .
\end{aligned}
\tag{2.2.4}
$$

En [8], pág. 215, se encuentra la siguiente caracterización de bases incondicionales en espacios de Banach.

Teorema 2.2.1. *Para una base $\mathcal{B}=\{x_j : j\in\mathbb{Z}\}$ de un espacio de Banach $(\mathbb{B},\|\cdot\|)$ y el operador $S_\beta(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_j\alpha_j(x)x_j \quad x\in\mathbb{B}$ y β_j una sucesión de números reales; las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) *$\mathcal{B}$ es una base incondicional para $\mathbb{B}$.*

ii) *Existe una constante $C>0$ tal que $\|S_\beta(x)\|\leq C\|x\|$ para toda sucesión $\beta=\{\beta_j\}$ con $|\beta_j|\leq 1$.*

iii) *Existe una constante $C>0$ tal que $\|S_\beta(x)\|\leq C\|x\|$ para toda sucesión $\beta=\{\beta_j\}$ con $\beta_j=\pm1$.*

iv) *Existe una constante $C>0$ tal que $\|S_\beta(x)\|\leq C\|x\|$ para toda sucesión $\beta=\{\beta_j\}$ con $|\beta_j|=1$ o 0.*

Aplicando el hecho de que $L_\omega^{\phi,s}$ es un espacio completo, (2.2.4) y la equivalencia entre $i)$ y $iii)$ de este último teorema concluímos que *si* ψ *es una wavelet ortonormal perteneciente a* $\mathcal{R}^s$, *entonces el sistema* $\{\psi_{jk} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ *es base incondicional para los espacios Orlicz-Sobolev con peso* $L_\omega^{\phi,s}$ *con* s, ϕ *y* ω *como en el Teorema 2.1.21.*

Capítulo 3

Espacios HARDY-ORLICZ con Peso

En este capítulo nos abocamos al estudio de los espacios Hardy-Orlicz con peso a fin de caracterizar una versión de ellos a través de wavelets. Para alcanzar dicho objetivo el punto de partida fue una versión atómica pesada de los mismos, siguiendo las técnicas desarrolladas en [20], [17] y [21]. Las principales herramientas utilizadas fueron los operadores de Calderón-Zygmund a valores vectoriales, la estructura de los espacios involucrados, condiciones de crecimiento de funciones mediante la noción de tipos y propiedades que relacionan pesos y funciones de crecimiento.

3.1. Definiciones

Sea ϕ es una función de tipo inferior positivo l tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ es casi decreciente.

Es conocido que $\frac{\phi(t)}{t^d}$ es casi decreciente si y sólo si ϕ es de tipo superior d. Por lo tanto consideraremos que ϕ es una función de tipo inferior positivo l y de tipo superior 1. En particular $\frac{\phi(t)}{t^d}$ es no creciente es equivalente a decir que ϕ es de tipo superior 1 con constante 1.

Recordemos la Definición 1.5.2.

Definición 3.1.1. Sea ϕ es una función de tipo inferior positivo tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ es casi decreciente. El *espacio de Orlicz con peso* se define como

$$L^{\phi}(\mathbb{R},\omega) \equiv L^{\phi}(\omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \phi(|f(x)|\ \omega(x))\ dx = A < \infty \right\}.$$

Como ya observamos $L^{\phi}(\omega)$ es un espacio vectorial que generaliza a los $L^{p}_{\omega^p}$, $0 < p \leq 1$, donde la casinorma está definida por

$$||f||^{p}_{L^p(\omega)} = \int_{\mathbb{R}} (|f(x)|\ \omega(x))^{p}\ dx.$$

Observación 3.1.1. Es importante notar la diferencia entre el espacio $L^{p}_{\omega^p}$ recién nombrado con $0 < p \leq 1$ y el $L^{p}_{\omega^p}$ definido en el Capítulo 2 para $1 < p \leq \infty$.

Una propiedad importante si $\frac{\phi(t)}{t}$ es no creciente es

$$I = \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|f(x)|\ \omega(x)}{||f||^{1/l}_{L^{\phi}(\omega)}} \right)\ dx = 1. \tag{3.1.1}$$

Demostración. Sea $\{\lambda_j\}$ una sucesión decreciente a $\|f\|_{L^{\phi}(\omega)}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|f(x)|\ \omega(x)}{\lambda_j^{1/l}} \right)\ dx \leq 1 \qquad \forall\ j.$$

Aplicando el tipo superior de ϕ

$$I = \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|f(x)|\ \omega(x)\ \lambda_j^{1/l}}{\lambda_j^{1/l}\ ||f||^{1/l}_{L^{\phi}(\omega)}} \right)\ dx \leq \left(\frac{\lambda_j}{||f||_{L^{\phi}(\omega)}} \right)^{1/l} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|f(x)|\ \omega(x)}{\lambda_j^{1/l}} \right)\ dx \leq \left(\frac{\lambda_j}{\|f\|_{L^{\phi}(\omega)}} \right)^{1/l}.$$

Tomando límite cuando $j \to \infty$ se sigue que $I \leq 1$.
Si $I < 1$ nuevamente por el tipo superior de ϕ se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|f(x)|\ \omega(x)}{(I^{l}\ ||f||_{L^{\phi}(\omega)})^{1/l}} \right)\ dx \leq \frac{1}{I} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|f(x)|\ \omega(x)}{||f||^{1/l}_{L^{\phi}(\omega)}} \right)\ dx = 1$$

lo que contradice la definición de $\|\ \|_{L^{\phi}(\omega)}$. En consecuencia $I = 1$. $\square$

Definición 3.1.2. Sean $b = \{b_j\}_{j\in N}$ una sucesión de funciones pertenecientes a L^q_ω, $1 < q \leq \infty$, $B = \{B_j\}_{j\in N}$ una sucesión de bolas tal que sop $(b_j) \subset B_j$ y ω un peso en A_∞ tales que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j|\ \phi\left(\frac{||b_j||_{L^q_\omega}\ \omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|}\right) < \infty \tag{3.1.2}$$

entonces definimos

$$\Lambda^{\phi,q}_\omega\ (b) = \inf\left\{\lambda > 0 :\ \sum_{j\in\mathbb{N}}\ |B_j|\ \phi\left(\frac{||b_j||_{L^q_\omega}\ \omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|\ \ \lambda^{\frac{1}{l}}}\right) \leq 1\right\}.$$

Similar a la prueba de (3.1.1) se demuestra que si $\frac{\phi(t)}{t}$ es no creciente entonces

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\ |B_j|\ \phi\left(\frac{||b_j||_{L^q_\omega}\ \ \omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|\ \ (\Lambda^{\phi,q}_\omega\ (b))^{\frac{1}{l}}}\right)\ =\ 1. \tag{3.1.3}$$

Lema 3.1.1. *Sean* $b = \{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$*,* $B = \{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *como en la Definición 3.1.2 tal que* $\Lambda^{\phi,q}_\omega\ (b) < \infty$ *y*

$$\alpha_j = \frac{||b_j||_{L^p_\omega}\ \ \omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|\ \ \phi^{-1}(|B_j|^{-1})}$$

entonces existe $0 < C < \infty$ *tal que*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j\ \ \leq C\ (\Lambda^{\phi,q}_\omega\ (b))^{\frac{1}{l}}.$$

Demostración. Como por Definición $\Lambda^{\phi,q}_\omega\ (b)$ es el ínfimo de los $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j|\ \phi\left\{\frac{||b_j||_{L^q_\omega}\ \omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|\ \lambda^{\frac{1}{l}}}\right\} \leq 1$$

resulta que la tesis es equivalente a afirmar que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\ |B_j|\ \phi\left\{\frac{C\ ||b_j||_{L^q_\omega}\ \omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|\ \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i}\right\} > 1. \tag{3.1.4}$$

A fin de demostrar (3.1.4) apliquemos los tipos de la ϕ. Entonces si denotamos por K_i y K_s a la constante del tipo inferior y superior respectivamente y $C = (K_i K_s)^{1/l}$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j|\ \phi\left\{\frac{C\ ||b_j||_{L^q_\omega}\ \omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|\ \sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i}\right\} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j|\ \phi\left\{\frac{C\ ||b_j||_{L^q_\omega}\ \omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|\ \phi^{-1}(|B_j|^{-1})}\ \frac{\phi^{-1}(|B_j|^{-1})}{\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i}\right\} \\
&\geq \frac{K_s^{-1}\ K_i^{-1}\ C^l}{\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i} \sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j|\ \ \alpha_j\ \ \phi\left(\phi^{-1}(|B_j|)^{-1}\right) \\
&\geq \frac{1}{\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i}\sum_{j\in\mathbb{N}}\alpha_j \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

□

En lo que sigue denotaremos por $[n]$ al mayor entero menor o igual que n.

Definición 3.1.3. Sean ϕ una función continua de tipo inferior positivo l y de tipo superior d, $d \leq 1$, $1 < q \leq \infty$ y ω un peso con índice crítico q_ω. Un (ϕ, q) *atomo con respecto a* ω es una función a real valuada y definida en $\mathbb{R}$ que satisface

i) *sop* $a \subset B$ con B una bola en $\mathbb{R}$.

ii) $\int_{\mathbb{R}} x^k\ a(x)\ dx = 0 \qquad\qquad k = 0, 1, ..., \mathcal{N} = [\frac{q_\omega}{l}] - 1$

iii) $\begin{cases} ||a||_{L^q_\omega}\ \leq \frac{|B|}{\omega(B)^{1/q'}}\ \phi^{-1}(|B|^{-1}) & si\ q < \infty \\ \|a\|_{L^\infty}\ \ \leq \frac{|B|}{\omega(B)}\ \phi^{-1}(|B|^{-1}) & si\ q = \infty \end{cases}$

donde ϕ^{-1} denota la función definida en 1.4.1 y coincide con la inversa ordinaria de ϕ si ϕ es continua y estrictamente creciente.

Si $\omega \equiv 1$ un (ϕ, q) átomo con respecto a ω es un (ϕ, q) átomo en el sentido de [20].

Definición 3.1.4. Sean ϕ, ω y q como en la Definición anterior. Definimos el *espacio atómico Hardy - Orlicz con peso* $H^{\phi,q}(\omega)$ como el espacio vectorial de todas las distribuciones f sobre $\mathcal{S}$ representadas por

$$f(\psi) = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j(\psi) \qquad \forall\ \psi \in \mathcal{S} \tag{3.1.5}$$

donde $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de múltiplos de (ϕ, q) átomos con respecto a ω, $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de bolas que satisfacen *sop* $(b_j) \subset B_j$ y se satisface (3.1.2).

Denotando $b = \{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ definimos

$$\|f\|_{H^{\phi,q}(\omega)} = \inf\ \Lambda_{\omega}^{\phi,q}\ (b)$$

donde $\Lambda_{\omega}^{\phi,q}\ (b)$ está dado en la Definición 3.1.2 y el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de f de la forma (3.1.5).

3.2. Teorema de Interpolación

Introducimos ahora una definición que usaremos a continuación. Sean $0 < p \leq 1$, $1 < q \leq \infty$. Se dice que un operador T de $H^{p,q}(\omega)$ en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ *es de tipo débil* $(H^{p,q}(\omega), L^p_{\omega^p})$, si T está definido en $H^{p,q}(\omega)$ y

$$|\{x : |Tf(x)|\ \omega(x) > \lambda\}|\ \leq\ C\ \frac{\|f\|_{H^{p,q}(\omega)}}{\lambda^p}$$

para toda $f \in H^{p,q}(\omega)$.

Teorema 3.2.1. *Sean $1 < q \leq \infty$, $0 < p_0 < p_1 \leq 1$ y $\omega \in A_\infty$. Supongamos que T es un operador de $H^{p_0,q}(\omega) + H^{p_1,q}(\omega)$ en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ tal que T es subaditivo, T es de tipo débil $(H^{p_0,q}(\omega),\ L^{p_0}_{\omega^{p_0}})$ y de tipo débil $(H^{p_1,q}(\omega),\ L^{p_1}_{\omega^{p_1}})$. Supongamos que ϕ es una función de tipo inferior positivo l y de tipo superior d con $p_0 \leq l \leq d \leq p_1$. Entonces T está bien definido en $H^{\phi,q}(\omega)$ y*

$$||Tf||_{L^{\phi}(\omega)} \leq C||f||_{H^{\phi,q}(\omega)} \qquad \forall\ f \in H^{\phi,q}(\omega).$$

Demostración. Sea b *un* múltiplo de un (ϕ, q) átomo con respecto a ω con momentos nulos hasta el orden $[\frac{q_\omega}{l}] - 1$ y soporte contenido en una bola B. Como

$$\frac{b}{||b||_{L^q_\omega}\ |B|^{1/p_0-1}\ \ \omega(B)^{1/q'}}$$

es un (p_0, q) átomo con respecto a ω, su norma en $H^{p_0,q}(\omega)$ está uniformemente acotada y

$$||b||_{H^{p_0,q}(\omega)} \leq C\ ||b||^{p_0}_{L^q_\omega}\ |B|^{1-p_0}\ \ \omega(B)^{p_0/q'}. \tag{3.2.1}$$

Sea $\lambda > 0$. Recordemos que si definimos

$$\widetilde{\phi}(t) = \int_0^t \frac{\phi(s)}{s}\ ds$$

entonces $\widetilde{\phi}$ es una función continua, estrictamente creciente y equivalente a ϕ.

Entonces por el Teorema de Fubbini y denotando por $A = \left\{(x,t) :\ t < \frac{|Tb(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right\}$ resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|Tb(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx &\leq C\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi}\left(\frac{|Tb(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx \\
&= C\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{\frac{|Tb(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}} \frac{\phi(t)}{t}\ dt\right)\ dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} \chi_A(x,t)\ \frac{\phi(t)}{t}\ dt\ dx \\
&= C\int_0^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_A(x,t)\ dx\right)\frac{\phi(t)}{t}\ dt \\
&= C\int_0^{\infty} \frac{\phi(t)}{t}\ \left|\left\{x :\ \frac{|Tb(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}} > t\right\}\right|\ dt \\
&= C\int_0^{\infty} \phi\left(\frac{u\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B|}\right)\ \left|\left\{x :\ |Tb(x)|\ \omega(x) > u\ \frac{\omega(B)^{1/q'}}{|B|}\right\}\right|\ \frac{du}{u} \\
&= C\left(\int_0^{||b||_{L^q_\omega}} + \int_{||b||_{L^q_\omega}}^{\infty}\right)\phi\left(\frac{u\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B|}\right) \\
&\qquad\qquad \left|\left\{x :\ |Tb(x)|\ \omega(x) > u\ \frac{\omega(B)^{1/q'}}{|B|}\right\}\right|\ \frac{du}{u} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Aplicando tipo inferior $l > p_0$ de ϕ, el tipo débil $(H^{p_0,q}(\omega), L^{p_0}_{\omega^{p_0}})$ y (3.2.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C\ ||b||^{-l}_{L^q_\omega}\ \phi\left(\frac{||b||_{L^q_\omega}\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B|}\right)\cdot\int_0^{||b||_{L^q_\omega}} u^{l-1}\ \left|\left\{x :\ |Tb(x)|\ \omega(x) > u\ \frac{\omega(B)^{1/q'}}{|B|}\right\}\right|\ du \\
&\leq C\ ||b||^{-l}_{L^q_\omega}\ \phi\left(\frac{||b||_{L^q_\omega}\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B|}\right)\ \frac{||b||_{H^{p_0,q}_{(\omega)}}\ |B|^{p_0}}{\omega(B)^{p_0/q'}}\ \int_0^{||b||_{L^q_\omega}} u^{l-1-p_0}\ du \\
&\leq C\ |B|\ \ \phi\left(\frac{||b||_{L^q_\omega}\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B|}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

De igual modo aplicando tipo superior $d \leq 1$ de ϕ, el tipo débil $(H^{p_1,q}(\omega), L^{p_1}_{\omega^{p_1}})$ y

(3.2.1) para $p = p_1$ se logra

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C\ ||b||_{L^q_\omega}^{-d}\ \phi\left(\tfrac{||b||_{L^q_\omega}\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B|}\right)\ \int_{||b||_{L^q_\omega}}^{\infty}\ u^{d-1}\ \left|\left\{x:\ |Tb(x)|\ \omega(x) > u\ \tfrac{\omega(B)^{1/q'}}{|B|}\right\}\right|\ du \\ &\leq C\ ||b||_{L^q_\omega}^{-d}\ \phi\left(\tfrac{||b||_{L^q_\omega}\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B|}\right)\ \tfrac{||b||_{H^{p_1,q}_{(\omega)}}\ |B|^{p_1}}{\omega(B)^{p_1/q'}}\ \int_{||b||_{L^q_\omega}}^{\infty}\ u^{d-1-p1}\ du \\ &\leq C\ |B|\ \phi\left(\tfrac{||b||_{L^q_\omega}\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B|}\right). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

De modo que por (3.2.2), (3.2.3) y (3.2.4)

$$\int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|Tb(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{1/l}}\right)\ dx\ \leq\ C\ |B|\ \phi\left(\frac{||b||_{L^q_\omega}\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B|}\right) \tag{3.2.5}$$

$\forall\ \lambda > 0$, con C independiente de b.

Aplicando ahora que por el tipo inferior de ϕ

$$K\ s^l\ \phi(t) \leq \phi(st) \qquad\qquad 0 \leq t\ , 1 \leq s$$

con K denotando el recíproco de la constante del tipo superior, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\ \phi\left(\tfrac{|Tb(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{1/l}}\right)\ dx &\leq |B|\ \phi\left(\tfrac{||b||_{L^q_\omega}\ (C/K)^{1/l}\ \omega(B)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ \ |B|}\right) \\ &\leq |B|\ \phi\left(\tfrac{||b||_{L^q_\omega}\ \ \omega(B)^{1/q'}}{(\frac{\lambda K}{C})^{1/l}\ \ |B|}\right) \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

de modo que eligiendo $\lambda = \frac{C}{K}\Lambda^{\phi,q}_\omega(b)$ se tiene por (3.1.3) que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|Tb(x)|\ \omega(x)}{(\frac{C}{K}\ \Lambda^{\phi,q}_\omega(b))^{1/l}}\right)\ dx \leq\ 1. \tag{3.2.7}$$

Luego por las definiciones de $||\ ||_{L^\phi(\omega)}$ y $||\ ||_{H^{\phi,q}(\omega)}$ resulta que existe una constante C tal que

$$||Tb||_{L^\phi(\omega)} \leq\ C\ ||b||_{H^{\phi,q}(\omega)}.$$

Para probar que T está bien definido para una función general f perteneciente a $H^{\phi,q}(\omega)$, sea $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de múltiplos de (ϕ,q) átomos con respecto a ω con momentos nulos hasta el orden $[\frac{q_\omega}{l}] - 1$ tal que

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j \quad en \quad \mathcal{S}' \tag{3.2.8}$$

es una representación de f como en la Definición 3.1.4.

Sean $J_0 = \left\{ j \in \mathbb{N} : \ \phi \left(||b_j||_{L^q_\omega} \frac{\omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|} \right) > 1 \right\}$ y $J_1 = \left\{ j \in \mathbb{N} : \ \phi \left(||b_j||_{L^q_\omega} \frac{\omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|} \right) \leq 1 \right\}$.

Entonces por (3.2.1) y como ϕ^{-1} es de tipo superior $\frac{1}{l}$ y $p_0 < l$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J_0} ||b_j||_{H^{p_0,q}(\omega)} &\leq C \sum_{j \in J_0} ||b_j||^{p_0}_{L^q_\omega} \ |B_j|^{1-p_0} \ \ \omega(B_j)^{p_0/q'} \\
&= C \sum_{j \in J_0} |B_j| \left[\phi^{-1} \left(\phi(\ ||b_j||_{L^q_\omega} \ \frac{\omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|}) \right) \right]^{p_0} \\
&\leq C \sum_{j \in J_0} |B_j| \left[\phi \left(||b_j||_{L^q_\omega} \ \frac{\omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|} \right) \right]^{p_0/l} \\
&\leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} |B_j| \ \phi \left(||b_j||_{L^q_\omega} \frac{\omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|} \right) \ < \ \infty.
\end{aligned}$$

Si J_0 es finito, se sigue de inmediato que $|| \sum_{j \in J_0} b_j ||_{H^{p_0,q}(\omega)} < \infty$. De otro modo J_0 es un conjunto numerable y estableciendo un orden entre sus elementos se demuestra por la completitud de $H^{p_0,q}(\omega)$, que $|| \sum_{j \in J_0} b_j ||_{H^{p_0,q}(\omega)}$ converge.

Por otro lado como ϕ^{-1} es de tipo inferior $\frac{1}{d}$ y $d \leq p_1$

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J_1} ||b_j||_{H^{p_1,q}(\omega)} &\leq C \sum_{j \in J_1} ||b_j||^{p_1}_{L^q_\omega} \ |B_j|^{1-p_1} \ \ \omega(B_j)^{p_1/q'} \\
&= C \sum_{j \in J_1} |B_j| \left[\phi^{-1} \left(\phi(\ ||b_j||_{L^q_\omega} \ \frac{\omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|} \right) \right]^{p_1} \\
&\leq C \sum_{j \in J_1} |B_j| \left[\phi ||b_j||_{L^q_\omega} \ \frac{\omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|} \right]^{p_1/d} \\
&\leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} |B_j| \ \phi \left(||b_j||_{L^q_\omega} \frac{\omega(B_j)^{1/q'}}{|B_j|} \right) \ < \ \infty.
\end{aligned}$$

De igual modo que antes $\sum_{j \in J_1} b_j$ converge en $H^{p_1,q}(\omega)$.

Así por (3.2.8)

$$f = \sum_{j \in J_0} b_j + \sum_{j \in J_1} b_j$$

podemos concluir que $H^{\phi,q}(\omega) \subset H^{p_0,q}(\omega) + H^{p_1,q}(\omega)$ y en consecuencia que T está - bien definido en $H^{\phi,q}(\omega)$.

Aplicando que T es subaditivo se tiene que

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &\leq |T(\sum_{j\in J_0} b_j)(x)| + |T(\sum_{j\in J_1} b_j)(x)| \\
&\leq \sum_{j\in J_0} |Tb_j(x)| + \sum_{j\in J_1} |Tb_j(x)| \\
&= \sum_{j\in \mathbb{N}} |Tb_j(x)|
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

donde la segunda desigualdad es consecuencia de los tipos débiles $(H^{p_0,q}(\omega),\, L^{p_0}_{\omega^{p_0}})$ y $(H^{p_1,q}(\omega),\, L^{p_1}_{\omega^{p_1}})$. Así por (3.2.5) y (3.2.9) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \phi \left(\frac{|Tf(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right) dx &\leq C \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \phi \left(\frac{|Tb_j(x)|\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right) dx \\
&\leq C \sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j| \left(\frac{||b_j||_{L^q_\omega}\ \omega(B_j)^{1/q'}}{\lambda^{1/l}\ |B_j|}\right) \qquad \forall\ \lambda < 0.
\end{aligned}$$

Razonando como en el caso de *un* múltiplo de un (ϕ, q) átomo con respecto a ω, esto es eligiendo $\lambda = C\ \Lambda^{\phi,q}_{\omega}(b)$ se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \left(\frac{|Tf(x)|\ \omega(x)}{(C\ \Lambda^{\phi,q}_{\omega}(b))^{\frac{1}{l}}}\right) dx \leq 1.$$

Y por ende que

$$||Tf||_{L^\phi(\omega)} \leq C\ ||f||_{H^{\phi,q}(\omega)} \qquad \forall\ f \in H^{\phi,q}(\omega).$$

□

3.3. Caracterización

Quisieramos ahora establecer una relación entre las normas de un (p, q) con respecto a un peso ω tal como se definió en [4] y la nuestra, a fin de poder aplicar el Teorema 3.2.1 al operador W_ψ para ciertas "ψ".

A fin simplificar los cálculos lo haremos para $q = \infty$, por ello hablaremos simplemente de $H^p(\omega)$. Con las modificaciones pertinentes valen los resultados para $1 < q \leq \infty$.

Procederemos a demostrar que la norma de un (p, ∞) átomo con respecto a ω^p definida por García Cuerva es equivalente a la norma de un (p, ∞) átomo con respecto a ω considerada en esta tesis.

La definición considerada en [4] es la siguiente. Dado un peso $\omega \in A_\infty$ con índice crítico q_ω y $0 < p \leq 1$, un (p, ∞) átomo con respecto a ω^p es una función a que satisface

i) sop $a \subset B$ donde B es una bola en $\mathbb{R}$

ii) $||a||_{L^\infty} \leq \omega^p(B)^{-\frac{1}{p}}$

iii) $\int_{\mathbb{R}} x^k \ a(x) \ dx = 0 \qquad 0 \leq k \leq \mathcal{N}(\omega) = \left[\frac{q_\omega}{p}\right] - 1.$

En esta tesis la definición de un (p, ∞) átomo con respecto a ω, comparte i) y iii) anteriores. La diferencia radica en ii), pues en nuestro caso

ii') $||a||_{L^\infty} \leq \frac{|B|^{1-\frac{1}{p}}}{\omega(B)}$.

La desigualdad de Jensen para una función φ cóncava, $f \in L^1(E)$ y $0 < |E| < \infty$ establece que

$$\frac{1}{|E|} \int_E \varphi(f(x)) \ dx \leq \varphi \left(\frac{1}{|E|} \int_E f(x) \ dx \right)$$

Aplicándola para $\varphi(t) = t^p$ con $0 < p \leq 1$, $f(x) = \omega(x)$ y $E = B$ se obtiene

$$\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^p \ dx \leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x) \ dx \right)^p.$$

De manera que

$$\left(\frac{\omega^p(B)}{|B|} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\omega(B)}{B}.$$

y por lo tanto

$$(\omega^p(B))^{\frac{1}{p}} \leq |B|^{\frac{1}{p}-1} \ \omega(B). \tag{3.3.1}$$

Por otro lado aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{p} > 1$ y su exponente conjugado $\frac{1}{1-p}$ y luego RH$(1+p)$, resulta

$$\begin{aligned}
\omega(B) &= \int_B \omega^{p^2}(x)\ \omega^{1-p^2}(x)\ dx \\
&\leq \left(\int_B \omega^p(x)\ dx\right)^p \cdot \left(\int_B \omega^{1+p}(x)\ dx\right)^{1-p} \\
&\leq C\ (\omega^p(B))^p \cdot \left[|B| \left(\frac{\omega(B)}{|B|}\right)^{1+p}\right]^{1-p} \\
&\leq C\ (\omega^p(B))^p\ |B|^{p^2-p}\ (\omega(B))^{1-p^2}.
\end{aligned}$$

Elevando a la $\frac{1}{p^2}$ la primera y última expresión, se obtiene

$$(\omega(B))^{\frac{1}{p^2}} \leq C\ (\omega^p(B))^{\frac{1}{p}}\ \ |B|^{1-\frac{1}{p}}\ \ \omega(B)^{\frac{1}{p^2}-1}.$$

De modo que

$$C\ |B|^{\frac{1}{p}-1}\ \omega(B) \leq (\omega^p(B))^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3.2}$$

De (3.3.1) y (3.3.2) se obtiene entonces que si $\omega \in$ R.H$(1+p)$ entonces

$$C\ |B|^{\frac{1}{p}-1}\ \omega(B)\ \leq\ (\omega^p(B))^{\frac{1}{p}} \leq |B|^{\frac{1}{p}-1}\ \omega(B). \tag{3.3.3}$$

Observación 3.3.1. En particular por la desigualdad derecha de (3.3.3) hemos demostrado la inclusión continua de los espacios $H^p(\omega)$ en el espacio de Hardy atómico $H^p(\omega^p)$ considerado por García Cuerva sin hipótesis adicionales sobre el peso ω.

En [5] la acotación del operador W_ψ de $H^p(\omega)$ en L^p_ω se encuentra en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Sea ψ una wavelet ortonormal perteneciente a $\mathcal{R}^s$ con $s \geq 1$. Sea $0 < p \leq 1$ y $\omega \in A_\infty$ con índice crítico q_ω satisfaciendo $\frac{q_\omega}{p} < s$. Entonces existe una constante $0 < C < \infty$, tal que*

$$\|W_\psi f\|^p_{L^p_\omega} \leq C\|f\|^p_{H^p(\omega)} \qquad\qquad \forall f \in H^p(\omega).$$

En su demostración se usan los dos próximos resultados.

Teorema 3.3.2. *Para $0 < p \leq 1$, $\psi \in L^1$ una función γ-regular banda limitada y ω un peso en A_∞ con índice crítico q_ω satisfaciendo $\frac{q_\omega}{p} < 1 + \gamma$, existe $0 < C < \infty$ tal que*

$$\|W_\psi f\|^p_{L^p_\omega} \leq C \|f\|^p_{H^p(\omega)} \qquad \forall f \in H^p(\omega) \cap L^2.$$

Teorema 3.3.3. *Sea $s \geq 1$ y supongamos que φ, $\psi \in \mathcal{R}^s$ con φ una wavelet ortonomal. Si $0 < p \leq 1$ y $\omega \in A_\infty$ con índice crítico q_ω, $\frac{q_\omega}{p} < s$, entonces existe $0 < C < \infty$ tal que*

$$\|W_\psi f\|^p_{L^p_\omega} \leq C \|W_\varphi f\|^p_{L^p_\omega} \qquad \forall f \in L^2.$$

La demostración del Teorema 3.3.2 requiere de acotaciones puntuales y de la siguiente proposición.

Proposición 3.3.4. *Sea $0 < p \leq 1$, $\psi \in L^1$ una función γ-regular y de banda limitada y $\omega \in A_\infty$ con índice crítico q_ω satisfaciendo $\frac{q_\omega}{p} < 1 + \gamma$. Dada $\lambda > \frac{q_\omega}{p}$ existe C_λ, $0 < C_\lambda < \infty$, tal que*

$$\|\{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi^{**}_{j,\lambda} f|^2\}^{\frac{1}{2}}\|^p_{L^p_\omega} \leq \ C_\lambda \ \|f\|^p_{H^p(\omega)} \qquad \forall f \in H^p(\omega) \cap L^2$$

donde $\psi^{**}_{j,\lambda}$ fue definido en el Capítulo 2.

En la prueba de la misma, se obtiene la acotación en norma

$$\|\{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi^{**}_{j,\lambda} f|^2\}^{\frac{1}{2}}\|_{L^p_\omega} \leq \|Gf\|_{L^p_\omega}$$

donde

$$Gf = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi_{2^{-j}} * f|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

El operador G está asociado a un operador de Calderón-Zygmund con valores en $l^2(\mathbb{Z})$ definido por

$$Tf = \{\psi_{2^{-j}} * f\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

con núcleo $K(x) = \{\psi_{2^{-j}}(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

El siguiente teorema cuya demostración se incluye en el Apéndice también fue extraído de [5].

Teorema 3.3.5. *Sean A y B espacios de Banach, T un operador de Calderón-Zygmund a valores vectoriales con núcleo K γ-regular. Si $0 < p \leq 1$ y $\omega \in A_\infty$ con índice crítico q_ω, tal que $\frac{q_\omega}{p} < 1 + \gamma$, entonces T es acotado de $H^p_A(\omega)$ en $L^p_{B,\omega}$.*

Otro resultado importante demostrado por J. García-Cuerva y J. M. Martell es el siguiente.

Proposición 3.3.6. *Sea $\gamma > 0$ y $\psi \in L^1$ una función γ-regular. Entonces $K = \{\psi_{2^{-j}}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un núcleo γ-regular y*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-j}\epsilon)|^2 \leq C$$

c.t.p $\epsilon \in \mathbb{R}$.

En dicho paper se demostró a partir de los dos resultados anteriores que dada $\psi \in L^1$ una función γ-regular, $0 < p \leq 1$ y $\omega \in A_\infty$ con $\frac{q_\omega}{p} < 1 + \gamma$, se verifica que el operador G es acotado de $H^p(\omega)$ en L^p_ω. Los autores trabajaron con $q = \infty$ en la definición del espacio atómico. Técnicas habituales de la teoría de pesos permiten extender los resultados para $1 < q \leq \infty$ y demostrar que G es acotado de $H^{p,q}(\omega)$ en L^p_ω. Esto generaliza la Proposición 3.3.4 para $1 < q \leq \infty$.

La generalización antes nombrada y el Teorema 3.3.3 permiten enunciar el Teorema 3.3.1 para $1 < q \leq \infty$.

Teorema 3.3.7. *Sean $0 < p \leq 1$, $1 < q \leq \infty$, ψ una wavelet ortonormal perteneciente a $\mathcal{R}^s$ con $s \geq 1$ y $\omega \in A_\infty$ con índice crítico q_ω satisfaciendo $\frac{q_\omega}{p} < s$. Entonces W_ψ es acotado de $H^{p,q}(\omega)$ en L^p_ω.*

La conjunción de los Teoremas 3.2.1 y 3.3.7 nos permitirán demostrar la acotación de W_ψ de $H^{\phi,q}(\omega)$ en $L^\phi(\omega)$.

Teorema 3.3.8. *Sean $1 < q \leq \infty$ y ϕ una función de tipo inferior positivo l y de tipo superior d, con $d \leq 1$. Supongamos además que ψ es una wavelet ortonormal perteneciente a $\mathcal{R}^s$ con $s \geq \frac{1}{l}$, que ω es un peso en A_∞ tal que el índice crítico q_{ω^d} de ω^d satisface $q_{\omega^d}/l < s$. Entonces existe C, $0 < C < \infty$, tal que*

$$\|W_\psi f\|_{L^\phi(\omega)} \leq C \, \|f\|_{H^{\phi,q}(\omega)} \qquad \forall f \in H^{\phi,q}(\omega).$$

Demostración. Ya que $q_{\omega^d} = \inf\{q > 1 : \omega^d \in A_q\}$ sabemos que $\omega^d \in A_{sl}$ y por propiedad de los pesos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega^d \in A_{sl-\epsilon}$. Consideremos $p_0 = l - \frac{\epsilon}{s}$, por hipótesis resulta $p_0 > 0$. Entonces $\omega^d \in A_{sp_0}$.

Usando el Lema 2.1.7, pues $p_0 < d$, concluímos que $\omega^{p_0} \in A_{sp_0}$ y por definición de índice crítico que $q_{\omega^{p_0}}/p_0 \leq s$. Aplicando el Teorema 3.3.7 se obtiene que

$$\|W_\psi f\|_{L^{p_0}_{\omega^{p_0}}} \leq C \, \|f\|_{H^{p_0,q}(\omega^{p_0})}.$$

Pero recordando la observación 3.3.1, $H^{p_0,q}(\omega) \hookrightarrow H^{p_0,q}(\omega^{p_0})$. De modo que

$$\|W_\psi f\|_{L^{p_0}_{\omega^{p_0}}} \leq C \, \|f\|_{H^{p_0,q}(\omega)}$$

y por ende, el operador W_ψ es de tipo débil $(H^{p_0,q}(\omega),\, L^{p_0}_{\omega^{p_0}})$.

Por otro lado como $\omega^d \in A_{sl}$, por Lema 2.1.8 existe ϵ_1 tal que si $p_1 = d + \epsilon_1$ entonces $\omega^{p_1} \in A_{sl}$. Como $A_{sl} \subset A_{sp_1}$ se sigue que $\omega^{p_1} \in A_{sp_1}$.

Razonando del mismo modo a como lo hicimos para p_0, de $\omega^{p_1} \in A_{sp_1}$ se deduce que $q_{\omega^{p_1}}/p_1 \leq s$. Como antes, por el Teorema 3.3.7 y por la Observación 3.3.1, podemos afirmar que W_ψ es de tipo débil $(H^{p_1,q}(\omega), L^{p_1}_{\omega^{p_1}})$.

Finalmente como $0 < p_0 < l \leq d < p_1 \leq 1$ empleando el Teorema de Interpolación 3.2.1 se concluye que W_ψ es acotado de $H^{\phi,q}(\omega)$ en $L^\phi(\omega)$. $\square$

En el próximo teorema estableceremos una desigualdad en norma referida al operador W_ψ a partir de dos " ψ "distintas. Para ello necesitamos una desigualdad a valores vectoriales que acote la maximal de Hardy-Littlewood.

Si ϕ es una N-función de tipo inferior l, con $0 < l < 1$, y de tipo superior finito d y consideramos $R > \frac{1}{l}$ resulta que

$$\phi((st)^R) = \phi(s^R\, t^R) \leq C\, t^{Rl}\, \phi(s^R) \qquad \forall t \in (0,1].$$

$$\phi((st)^R) = \phi(s^R\, t^R) \leq C\, t^{Rd}\, \phi(s^R) \qquad \forall t \in [1,\infty).$$

De modo que definiendo $\eta(t) = \phi \circ t^R$, η es una función de tipo inferior mayor que 1 y de tipo superior finito. Fácilmente se demuestra que η es casi creciente.

En el siguiente teorema hacemos referencia a una clase de funciones definida en el Capítulo anterior. Además emplearemos los dos resultados siguientes, extraídos de [5], que generalizan respectivamente la Proposición 2.1.17 y el Lema 2.1.18.

Proposición 3.3.9. *Sean* $s = 1, 2...$ *y* $\varphi, \psi \in \mathcal{R}^s$. *Entonces existe* $\epsilon > 0$ *tal que si* $j, k, l, m \in \mathbb{Z}$

i) $|\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle| \ \leq \ C \frac{2^{(l-j)(s+\frac{3}{2})}}{(1+2^l|2^{-j}k-2^{-l}m|^{1+\epsilon}}$ *para* $l \leq j$.

ii) $|\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle| \ \leq \ C \frac{2^{(j-l)(\frac{3}{2}+s)}}{(1+2^j|2^{-j}k-2^{-l}m|)^{1+\epsilon}}$ *para* $l \geq j$.

Lema 3.3.10. *Dados* $s \geq 1$, $\epsilon > 0$ *y* $1 \leq r < s + \epsilon$, *existe una constante* C *tal que para todas las sucesiones* $\{s_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ *de números complejos y para* $x \in I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$

i) $$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1 + 2^l|2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} \leq C[\mathcal{M}(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |s_{l,m}|^{\frac{1}{r}} \chi_{I_{l,m}})(x)]^r \qquad si \ l \leq j.$$

ii) $$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1 + 2^j|2^{-l}m - 2^{-j}k|)^{1+\epsilon}} \leq C 2^{(l-j)r}[\mathcal{M}(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |s_{l,m}|^{\frac{1}{r}} \chi_{I_{l,m}})(x)]^r \qquad si \ l \geq j.$$

Teorema 3.3.11. *Sean* ϕ *una función de tipo inferior positivo* l *y de tipo superior* $d \leq 1$. *Sean* ψ *y* $\varphi \in \mathcal{R}^s$, *con* φ *una wavelet ortonormal y* $s \geq 1$. *Entonces si* $\omega^d \in A_{lR}$ *para algún* R *tal que* $\frac{1}{l} < R \leq s$, *existe* C *que verifica*

$$\|W_\psi f\|_{L^\phi(\omega)} \ \leq \ C \ \|W_\varphi f\|_{L^\phi(\omega)} \qquad \forall f \in L^2.$$

Demostración. Ya que φ es ortonormal podemos escribir

$$\psi_{j,k}(x) \ = \ \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{j,k}, \phi_{l,m} \rangle \ \varphi_{l,m}(x)$$

con convergencia en L^2 y en consecuencia en $\mathcal{S}'$.

Entonces

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(x) \ &= \ \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{l,m} \rangle \overline{\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle}|^2 \ 2^j \ \chi_{I_{j,k}(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \ \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |B_1(j,k)|^2 \ 2^j \ \chi_{I_{j,k}}(x) \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |B_2(j,k)|^2 \ 2^j \ \chi_{I_{j,k}}(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

con

$$B_1(j,k) = \sum_{l \leq j} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{l,m} \rangle \overline{\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle}.$$

$$B_2(j,k) = \sum_{l>j}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{l,m}\rangle \overline{\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m}\rangle}.$$

Para estimar B_1 usaremos la Proposición 3.3.9 $i)$ y el Lema 3.3.10 $i)$ con $r = R$, obteniendo $\forall x \in I_{j,k}$

$$\begin{aligned} |B_1(j,k)| &= C\sum_{l\leq j}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{l,m}\rangle| \frac{2^{(\frac{3}{2}+s)(l-j)}}{(1+2^l|2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} \\ &= C\sum_{l\leq j} 2^{(\frac{3}{2}+s)(l-j)} \left\{\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|\langle f, \varphi_{l,m}\rangle|}{(1+2^l|2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\epsilon}}\right\} \\ &\leq C\sum_{l\leq j} 2^{(\frac{3}{2}+s)(l-j)} \left[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{l,m}\rangle|^{1/R}\ \chi_{I_{l,m}})(x)\right]^R \end{aligned}$$

para algún $C < \infty$ y $\epsilon > 0$.

En consecuencia ya que $\{I_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una colección de cubos diádicos disjuntos

$$\begin{aligned} &\left\|\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |B_1(j,k)|^2\ 2^j\ \chi_{I_{j,k}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^\phi(\omega)} \\ &\leq\ C\left\|\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\{\sum_{l\leq j} 2^{(1+s)(l-j)}\ \left[\mathcal{M}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{l,m}\rangle|^{1/R}\ 2^{l/2R}\chi_{I_{l,m}}\right)\right]^R\right\}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^\phi(\omega)} \\ &\leq\ \left\|\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\ a_{j-l}\ b_l\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^\phi(\omega)} \end{aligned}$$

donde

$$a_j = \begin{cases} 2^{-j(s+1)} & si\ j\ \geq\ 0 \\ 0 & si\ j\ <\ 0 \end{cases}$$

y

$$b_l = \left[\mathcal{M}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{l,m}\rangle|^{1/R}\ 2^{l/2R}\ \chi_{l,m}\right)(x)\right]^R.$$

Usando la desigualdad de Young para convoluciones

$$\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\ a_{j-l}\ b_l|^2\right\}^{1/2} = \|\{a_j\} * \{b_l\}\|_{l^2} \leq \|\{a_j\}\|_{l^1}\ \|\{b_l\}\|_{l^2}$$

y ya que $\|a_j\|_{l^1} \leq C$ porque $s+1>0$ se obtiene

$$\left\| \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |B_1(j,k)|^2 \, 2^j \, \chi_{I_{j,k}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\phi(\omega)}$$

$$\leq \; C \left\| \left\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{l,m}\rangle|^{1/R} \, 2^{l/2R} \chi_{I_{l,m}}) \right]^{2R} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\phi(\omega)}$$

$$\leq \; C \left\| \left\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{l,m}\rangle|^{1/R} \, 2^{l/2R} \chi_{I_{l,m}}) \right]^{2R} \right\}^{\frac{1}{2R}} \right\|^R_{L^{\phi\circ t^R}(\omega^{1/R})} .$$

Notar que $\eta(t) = \phi \circ t^R$ es casi creciente, de tipo inferior $Rl > 1$ y de tipo superior Rd. Como por hipótesis $(\omega^{1/R})^{Rd} = \omega^d \in A_{lR}$, la Observación 2.1.4 permite la acotación de la función maximal de Hardy-Littlewood obteniendo

$$\begin{aligned}
&\left\| \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |B_1(j,k)|^2 \, 2^j \, \chi_{I_{j,k}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\phi(\omega)} \\
\leq \; & C \left\| \left\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{l,m}\rangle|^{1/R} \, 2^{l/2R} \, \chi_{I_{l,m}} \right]^{2R} \right\}^{\frac{1}{2R}} \right\|^R_{L^{\phi\circ t^R}(\omega^{1/R})} \\
= C \; & \left\| \left\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left[(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{l,m}\rangle|^{1/R} \, 2^{l/2R} \, \chi_{I_{l,m}}) \right]^{2R} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\phi(\omega)} \\
\leq \; & C \; \|W_\varphi f\|_{L^\phi(\omega)} .
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Para B_2 se procede como en el caso de B_1. Empleando la Proposición 3.3.9 *ii*) y el Lema 3.3.10 *ii*) con $r = R$ se obtiene

$$\left\| \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |B_2(j,k)|^2 \, 2^j \, \chi_{I_{j,k}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\phi(\omega)} \leq C \left\| \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \; a_{j-l} \; b_l \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\phi(\omega)}$$

donde

$$a_j = \begin{cases} 2^{j(s+2-R)} & si \; j \; \leq \; 0 \\ 0 & si \; j \; \geq \; 0 \end{cases}$$

y

$$b_l = \left[\mathcal{M} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{l,m} \rangle|^{1/R} \; 2^{l/2R} \; \chi_{l,m} \right) (x) \right]^R .$$

Nuevamente usando la desigualdad de Young para convoluciones, el hecho de que $\|\{a_j\}\|_{l^1} \leq C$ pues $s + 2 - R > 0$ y la Observación 2.1.4 se concluye que

$$\left\| \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |B_2(j,k)|^2 \; 2^j \; \chi_{I_{j,k}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\phi(\omega)} \leq \; C \; \|W_\varphi f\|_{L^\phi(\omega)}. \qquad (3.3.6)$$

Finalmente de (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6) se obtiene el resultado deseado. □

A fin de obtener la desigualdad opuesta a la del Teorema 3.3.8 definimos a continuación átomos especiales.

Definición 3.3.1. Sean ϕ una función de tipo inferior l y de tipo superior d, $\omega \in A_\infty$ y $\psi \in C^1$ una wavelet ortonormal de soporte compacto con momentos nulos hasta el orden $[\frac{q_\omega}{l}] - 1$.

Para $q > 1$ diremos que $a \in L^2$ es un (ϕ, q, ψ) *atomo con respecto a* ω si existe un intervalo diádico R tal que

$$a = \sum_{I\subset R, I\in\mathcal{D}} a_I \; \psi_I.$$

$$||W_\psi \; a||_{L^q_\omega} = \left\| \left\{ \sum_{I\subset R} |a_I|^2 \; |I|^{-1} \; \chi_I \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q_\omega} \leq \frac{|R| \;\; \phi^{-1}(|R|^{-1})}{\omega(R)^{1/q'}}$$

donde, en adelante, denotaremos por $\mathcal{D}$ al conjunto de los intervalos diádicos.

En la demostración del Teorema 3.3.14 emplearemos los siguientes dos lemas .

El primero de ellos establece la relación entre (ϕ, q, ψ) átomos según Definición 3.3.1 y (ϕ, q) átomos con respecto a un peso ω según Definición 3.1.3. El segundo lema estudia propiedades relacionadas con funciones de crecimiento y pesos.

Lema 3.3.12. *En las condiciones anteriores si a es un (ϕ, q, ψ) atomo con respecto a ω y $q > q_\omega \geq 1$, entonces $\exists$ una contante $0 < \sigma < \infty$, independiente de a, tal que a es σ-veces un (ϕ, q) átomo con respecto a ω.*

Demostración. Sean $k_0,\ j_0 \in \mathbb{Z}$ y R de la forma $[2^{-j_0}k_0,\ 2^{-j_0}(k_0+1)]$.

Consideremos que sop $\psi \subset [m,n]$.

Para el intervalo diádico $I = I_{jk} = [2^{-j}k,\ 2^{-j}(k+1)]$ consideremos

$$I[m,n] = I_{jk}[m,n] = [2^{-j}(k+m),\ 2^{-j}(k+n)]$$

Luego sop $\psi_I \subset I[m,n]$ donde $\psi_I = \psi_{I_{j,k}} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$.

Más aún sop $\psi_I \subset I[m,n] \subset \widetilde{R} \equiv R[-|m|,\ 1+|n|] \qquad \forall\ I \subset R.$

Por lo tanto sop $a \subset \widetilde{R}$.

Como $q > q_\omega$, $\omega \in A_q$ y $\psi \in \mathcal{R}^0$ podemos aplicar el Teorema 2.1.6 para obtener

$$\int_{\mathbb{R}} |a(x)|^q \omega(x)\ dx \leq ||W_\psi a||^q_{L^q(\omega)} \leq C\ \frac{|R|^q\ \ [\phi^{-1}(|R|^{-1})]^q}{\omega(R)^{q-1}} \tag{3.3.7}$$

Aplicando que $\omega \in A_q$, que $R \subset \widetilde{R}$ y el índice superior de ϕ^{-1}, resulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |a(x)|^q\ \omega(x)\ dx \ &\leq\ C\frac{|\widetilde{R}|^q \quad (1+|m|+|n|)^{\frac{q}{l}} \quad [\phi^{-1}(|\widetilde{R}|^{-1})]^q}{\omega(\widetilde{R})^{q-1} \quad (1+|m|+|n|)^{q(1-q)}} \\ &=\ \sigma^q\left[\frac{|\widetilde{R}|\ \phi^{-1}(|\widetilde{R}|^{-1})}{\omega(\widetilde{R})^{1/q'}}\right]^q\end{aligned}$$

habiendo denotado $\sigma = (1+|m|+|n|)^{\frac{1}{l}-1+q}$.

Finalmente a tiene momentos nulos hasta el orden $[\frac{q_\omega}{l}]-1$ porque ψ los tiene.

Poniendo $\widetilde{a} = \frac{a}{\sigma}$ podemos concluir que $\widetilde{a}$ es un (ϕ,q) átomo con respecto a ω. $\square$

Lema 3.3.13. *Sea ϕ una función no negativa, creciente, de tipo superior finito d y $\omega \in A_\infty$. Entonces*

i) Existe C_0 tal que

$$\phi\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\ dx\right) \leq C_0\ \frac{1}{|Q|}\ \int_Q \phi(\omega(x))\ dx \qquad\qquad \forall\ Q \subset \mathbb{R}.$$

ii) Además si ϕ es cóncava entonces para toda $C_0 > 0$, $\phi(C_0\omega) \in A_\infty$ con constante uniforme. Mas aún si $E \subset Q$ y $\omega(Q)/\omega(E) \leq C$ entonces

$$\int_Q \phi(C_0\ \omega(x))\ dx \leq C\int_E \phi(C_0\ \omega(x))\ dx. \tag{3.3.8}$$

Demostración. i) Se sabe que $\omega \in A_\infty \Leftrightarrow \exists\ 0 < \alpha,\ \beta < 1$ tales que $\forall\ Q \subset \mathbb{R}$

$$|\{t \in Q:\ \omega(t) > \beta\ m_Q\omega\}| \ \geq\ \alpha|Q| \tag{3.3.9}$$

donde $m_Q\omega$ denota el promedio de ω sobre Q.

Como $\omega \in A_\infty$ y ϕ es creciente podemos afirmar entonces que

$$|\{t \in Q:\ \phi(\omega(t)) > \phi(\beta\ m_Q\omega)\}| \ \geq\ \alpha|Q|.$$

Entonces como ϕ es de tipo superior d se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_Q \phi(\omega(x))\ dx\ &\geq\ \int_{\{t\in Q:\ \phi(\omega(t))>\phi(\beta m_q\omega)\}} \phi(\omega(x))\ dx\\
&\geq\ \int_{\{t\in Q:\ \phi(\omega(t))>\phi(\beta m_q\omega)\}} \phi(\beta m_Q\omega)\ dx\\
&=\ \phi(\beta\ m_Q\omega)\cdot|\{t \in Q:\ \phi(\omega(t)) > \phi(\beta m_Q\omega)\}|\\
&\geq\ C\ \beta^d\ \phi(m_Q\omega)\ \alpha\ |Q|.
\end{aligned}$$

Denotando $C_0 = \frac{1}{C\ \beta^d\ \alpha}$, se obtiene la tesis.

ii) Por (3.3.9) como ϕ es creciente y $C_0 > 0$, se tiene que

$$|\{x \in Q:\ \phi(C_0\ \omega(x)) > \phi(C_0\ \beta\ m_Q\omega)\}| \ \geq\ \alpha|Q|. \tag{3.3.10}$$

Acotemos $\phi(C_0\ \beta\ m_Q\omega)$. Sea $C_1 > 1$. Por el tipo superior de ϕ y por la desigualdad de Jensen para funciones cóncavas

$$\phi(C_0\beta m_Q\omega) = \phi\left(\beta\frac{1}{|Q|}\int_Q (C_0\omega(x))dx\right) \geq \frac{\beta^d}{C_1}\frac{1}{|Q|}\int_Q \phi(C_0\omega(x))dx \equiv \gamma.$$

Entonces $\phi(C_0\ \omega(x)) > \phi(C_0\ \beta\ m_Q\omega) > \gamma$.

Como

$$\{x \in Q : \phi(C_0\omega(x)) > \phi(C_0\beta m_Q\omega)\} \subset \{x \in Q : \phi(C_0\omega(x) > \gamma)\}$$

resulta que

$$|\{x \in Q : \phi(C_0\omega(x)) > \phi(C_0\beta m_Q\omega)\}| \leq |\{x \in Q : \phi(C_0\omega(x) > \gamma)\}|.$$

Pero por (3.3.10)

$$\alpha|Q| \leq |\{x \in Q : \phi(C_0\omega(x)) > \phi(C_0\beta m_Q\omega)\}|.$$

Así hemos demostramos que existen $\alpha \in (0,1)$, $\frac{\beta^d}{C_1} \in (0,1)$ tal que

$$\alpha|Q| \leq |\{x \in Q : \phi(C_0\omega(x)) > \frac{\beta^d}{C_1}\ m_Q(\phi(C_0\ \omega))\}|.$$

Y esta desigualdad es equivalente a afirmar que $\phi(C_0\omega) \in A_\infty$ con constante uniforme.

Para demostrar (3.3.8) consideremos un nuevo peso que denotaremos por $W(x) = \phi(C_0\ \omega(x))$. Recientemente demostramos que $W \in A_\infty$ y por lo tanto $W \in A_q$ para algún $1 \leq q < \infty$. Luego por propiedad de pesos

$$W(Q) \leq C \left(\frac{|Q|}{|E|}\right)^q W(E). \tag{3.3.11}$$

Además como también ω está en A_∞ existen $\delta > 0$ y $C > 0$ tal que

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq C \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\delta. \tag{3.3.12}$$

Como por hipótesis $\omega(Q)/\omega(E) \leq C$, de (3.3.12) se obtiene que

$$\left(\frac{|Q|}{|E|}\right)^\delta \leq C.$$

De modo que sustituyendo en (3.3.11) se obtiene

$$W(Q) \leq\ C\ W(E)$$

vale decir

$$\int_Q \phi(C_0\ \omega(x))\ dx \leq C \int_E \phi(C_0\ \omega(x))\ dx.$$

$\square$

Teorema 3.3.14. *Sean $\omega \in A_\infty$, $1 < q \leq \infty$, ϕ una función de tipo inferior $l > 0$ tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ es casi decreciente. Sea $\psi \in C^1$ una wavelet ortonormal, de soporte compacto y momentos nulos hasta el orden $[\frac{q_\omega}{l}] - 1$. Entonces $\exists C$, $0 < C < \infty$, tal que $\forall f \in L^2$ con $W_\psi f \in L^\phi(\omega)$ se verifica que $f \in H^{\phi,q}(\omega)$ y*

$$||f||_{H^{\phi,q}(\omega)} \leq C||W_\psi f||_{L^\phi(\omega)}.$$

Demostración. Para todo $k \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\Omega_k = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \ W_\psi f(x) > 2^k\right\}.$$

Vamos a considerar una descomposición diádica de $\mathbb{R}$. Para tal fin, para cada $k \in \mathbb{Z}$ definimos

$B_k = \{I \in \mathcal{D} : \omega(I \cap \Omega_{k+1}) < \frac{1}{2}\omega(I) \leq \omega(I \cap \Omega_k)\}$

$\widetilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k.$

Para todo $I \in \widetilde{\mathcal{D}}$, existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $I \in B_k$. Además debido a la propiedad de anidación de los intervalos diádicos $\forall I \in B_k$ existe un único intervalo maximal $\widetilde{I} \in B_k$ tal que $I \subset \widetilde{I}$. Consideremos a $\{\widetilde{I}_k^i : i \in \Delta_k\}$ como la colección de los intervalos diádicos maximales en B_k.

Hemos obtenido una partición de $\widetilde{\mathcal{D}}$

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{i\in\Delta_k} \{I : \ I \subset \widetilde{I}_k^i, I \in B_k\}. \tag{3.3.13}$$

Analicemos los intervalos que no pertenecen a $\widetilde{\mathcal{D}}$. Si $\langle f, \psi_I \rangle \neq 0$ entonces existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $|\langle f, \psi_I \rangle||I|^{-1/2} \geq 2^{k_0}$. Para $x \in I$, $W_\psi f(x) \geq 2^{k_0}$. Entonces $I \subset \Omega_{k_0}$ y por lo tanto $\omega(I \cap \Omega_{k_0}) = \omega(I) \geq \omega(I)/2$. Además $\omega(\Omega_k) \searrow 0$ cuando $k \to \infty$. En efecto aplicando la desigualdad de Chebyschev y el Teorema 2.1.6 para $\omega = 1$ y $p = 2$, resulta

$$\begin{aligned} |\Omega_k| &= \left|\{x : W_\psi f(x) > 2^k\}\right| \\ &\leq \tfrac{1}{(2^k)^2} \int_{\mathbb{R}} |W_\psi f(x)|^2 \, dx \\ &\leq \tfrac{C}{(2^k)^2} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Al ser ω una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, $|\Omega_k| \searrow 0$ cuando $k \to \infty$ implica que $\omega(\Omega_k) \searrow 0$ cuando $k \to \infty$.

Usando estos hechos y la propiedad de anidación de los conjuntos de nivel Ω_k, podemos concluir que existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $I \subset B_{k_1} \subset \widetilde{\mathcal{D}}$. Hemos demostrado que si $\langle f, \psi_I \rangle \neq 0$ entonces $I \subset \widetilde{\mathcal{D}}$. Por la proposición contrarecíproca concluímos que si $I \in \mathcal{D} \backslash \widetilde{\mathcal{D}}$ entonces sus coeficientes de wavelets son 0.

Más aún para $f \in L^2$, la representación

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \ \psi_{j,k} = \sum_{I\in\mathcal{D}} \langle f, \psi_I \rangle \psi_I = \sum_{I\in\widetilde{\mathcal{D}}} \langle f, \psi_I \rangle \psi_I \tag{3.3.14}$$

converge en L^2 y en consecuencia en el sentido de distribuciones.

Usando (3.3.13) y (3.3.14) podemos escribir

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i\in\Delta_k} \left\{ \sum_{I\subset\widetilde{I}_k^i, \ I\in B_k} \langle f, \psi_I \rangle \ \psi_I \right\}. \tag{3.3.15}$$

Queremos probar que esta serie se puede reagrupar para obtener una descomposición atómica.

Consideremos $q > q_\omega$. Para $k \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\alpha_{k,i} = \frac{\omega(\widetilde{I}_k^i)^{(1-\frac{1}{q})} \left\| \left\{ \sum_{I\subset \widetilde{I}_k^i \ I\in B_k} |\langle f,\psi_I\rangle|^2 \ |I|^{-1} \ \chi_I \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q_\omega}}{|\widetilde{I}_k^i| \quad \phi^{-1}(|\widetilde{I}_k^i|^{-1})}$$

$$a_{k,i} = \begin{cases} 0 & si \ \ \alpha_{k,i} \ = \ 0 \\ \frac{1}{\alpha_{k,i}} \displaystyle\sum_{I\subset \widetilde{I}_k^i, I\in B_k} \langle f,\psi_I\rangle \psi_I & si \ \ \alpha_{k,i} \ \neq \ 0 \end{cases}$$

Ya que $\widetilde{I}_k^i$ es diádico y

$$||W_\psi \ a_{k,i}||_{L^q_\omega} \leq \frac{|\widetilde{I}_k^i| \ \phi^{-1}(|\widetilde{I}_k^i|^{-1})}{\omega(\widetilde{I}_k^i)^{\frac{1}{q'}}}$$

entonces todo $a_{k,i}$ es un $(\phi, q; \psi)$ átomo con respecto a ω. Como $q > q_w$ el Lema 3.3.12 garantiza que todo $a_{k,i}$ es un múltiplo de un (ϕ, q) átomo con respecto a ω.

Entonces por (3.3.15) y denotando para cada k y para cada i

$$b_{k,i} = \alpha_{k,i} \ a_{k,i}$$

f se puede expresar como

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i\in\Delta_k} \quad b_{k,i} \qquad en \ \mathcal{S}'.$$

Por otra parte, para $\lambda > 0$ a determinar y usando la desigualdad izquierda del Teorema 2.1.6 se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i\in\Delta_k} \ |\widetilde{I}_k^i| \ \phi\left(\frac{||b_{k,i}||_{L^q_\omega} \ \omega(\widetilde{I}_k^i)^{\frac{1}{q'}}}{|\widetilde{I}_k^i| \ \ \lambda^{\frac{1}{l}}} \right) \\ = & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i\in\Delta_k} |\widetilde{I}_k^i| \ \phi\left(\frac{\alpha_{k,i} \ ||a_{k,i}||_{L^q_\omega} \ \omega(\widetilde{I}_k^i)^{\frac{1}{q'}}}{|\widetilde{I}_k^i| \ \ \lambda^{\frac{1}{l}}} \right) \\ \leq & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i\in\Delta_k} |\widetilde{I}_k^i| \ \phi\left(\frac{\left\| \left\{ \sum_{I\subset \widetilde{I}_k^i, I\in B_k} |\langle f,\psi_I\rangle|^2 \ |I|^{-1} \ \chi_I \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q_\omega} \ \omega(\widetilde{I}_k^i)^{\frac{1}{q'}}}{|\widetilde{I}_k^i| \ \ \lambda^{\frac{1}{l}}} \right). \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Elijamos $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2n \geq q$. Entonces por Hölder para $\frac{2n}{q} \geq 1$, podemos estimar

$$\left\| \left\{ \sum_{I \subset \widetilde{I}_k^i, I \in B_k} |\langle f, \psi_I \rangle|^2 \ |I|^{-1} \ \chi_I \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q_\omega}^q \tag{3.3.17}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{I \subset \widetilde{I}_k^i, I \in B_k} |\langle f, \psi_I \rangle|^2 \ |I|^{-1} \ \chi_I(x) \right\}^n \ \omega(x) \ dx \right)^{\frac{q}{2n}} \ \omega(\widetilde{I}_k^i)^{1-\frac{q}{2n}}.$$

Luego

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{I \subset \widetilde{I}_k^i, I \in B_K} \ldots\ldots \right\}^n \ \omega(x) \ dx$$

$$= \sum_{\substack{I_1, \cdots, I_n \subset \widetilde{I}_k^i \\ I_1, \cdots, I_n \in B_k}} \left(\prod_{j=1}^n |\langle f, \psi_{I_j} \rangle|^2 \ |I_j|^{-1} \right) \ \omega(I_1 \cap \ldots \cap I_n).$$

Pero los intervalos diádicos tienen la propiedad de que su intersección es vacía o es uno de ellos. Más aún si $I \in B_k$ entonces $\omega(I \backslash \Omega_{k+1}) = \omega(I) - \omega(I \bigcap \Omega_{k+1}) > \frac{\omega(I)}{2}$. Ya que todos los $I_j \in B_k$ se obtiene que

$$\omega(I_1 \cap \ldots\ldots \cap I_n) \leq 2 \ \omega(I_1 \cap \ldots\ldots \cap I_n \backslash \Omega_{k+1}).$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \{ \sum_{I \subset \widetilde{I}_k^i, I \in B_k} \ldots\ldots \}^n \ \omega(x) \ dx &\leq 2 \int_{\widetilde{I}_k^i \backslash \Omega_{k+1}} \{ \sum_{I \subset \widetilde{I}_k^i, I \in B_k} \ldots\ldots \}^n \ \omega(x) \ dx \\ &\leq 2 \int_{\widetilde{I}_k^i \backslash \Omega_{k+1}} [W_\psi f(x)]^{2n} \ \omega(x) \ dx \\ &\leq 2 \ (2^{k+1})^{2n} \ \omega(\widetilde{I}_k^i) \end{aligned}$$

ya que fuera de Ω_{k+1} se tiene que $W_\psi f(x) \leq 2^{k+1}$.

Continuando con (3.3.17)

$$\begin{aligned} \|\{ \sum_{I \subset \widetilde{I}_k^i, I \in B_k} |\langle f, \psi_I \rangle|^2 \ \cdot |I|^{-1} \ \chi_I \}^{\frac{1}{2}} \ \|_{L^q_\omega} &\leq \left(2 (2^{k+1})^{2n} \ \omega(\widetilde{I}_k) \right)^{\frac{1}{2n}} \ \omega(\widetilde{I}_k^i)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2n}} \\ &= C \ 2^k \ \omega(\widetilde{I}_k^i)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Con esta acotación y por el Lema 3.3.13 $i)$ podemos continuar en (3.3.16)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\Delta_k}|\widetilde{I}_k^i|\ \phi\left(\frac{||b_{k,i}||_{L^q_\omega}\ \omega(\widetilde{I}_k^i)^{\frac{1}{q'}}}{|\widetilde{I}_k^i|\ \lambda^{\frac{1}{l}}}\right) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\Delta_k}|\widetilde{I}_k^i|\ \phi\left(\frac{C\ 2^k\ \omega(\widetilde{I}_k^i)}{|\widetilde{I}_k^i|\ \lambda^{\frac{1}{l}}}\right)$$

$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\Delta_k}\int_{\widetilde{I}_k^i}\phi\left(\frac{C\ 2^k\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx.$$

Como por el Lema 1.6.2 ϕ es equivalente a $\tilde{\phi}$, función cóncava, aplicando nuevamente el Lema 3.3.13 $ii)$ y el hecho que para cada k los $\widetilde{I}_k^i$ son disjuntos, podemos proseguir

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\Delta_k}|\widetilde{I}_k^i|\ \phi\left(\frac{||b_{k,i}||_{L^q_\omega}\ \omega(\widetilde{I}_k^i)^{\frac{1}{q'}}}{|\widetilde{I}_k^i|\ \lambda^{\frac{1}{l}}}\right) \le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\Delta_k}\int_{\widetilde{I}_k^i\ \cap\ \Omega_k}\tilde{\phi}\left(\frac{C\ 2^k\omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx$$

$$\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_k}\tilde{\phi}\left(\frac{C\ 2^k\omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx$$

$$= C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\{x:\ W_\psi f(x)>2^k\}}\phi\left(\frac{C\ 2^k\omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx.$$

Por tratarse de una sucesión de funciones no negativas, esta suma está acotada por

$$\le\ C\ \int_{\mathbb{R}}\sum_{k<\log_2\ W_\psi f(x)}\phi\left(\frac{C\ 2^k\omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx.$$

Aplicando que $\frac{\phi(t)}{t}$ es casi decreciente, lo anterior está acotado por

$$\le\ C\ \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k<\log_2\ W_\psi f(x)}\int_{\frac{C\ 2^{k-1}\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}}^{\frac{C\ 2^k\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}}\frac{\phi(t)}{t}\ dt\right)\ dx$$

$$\le\ C\ \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{\frac{C\ W_\psi f(x)\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}}\frac{\phi(t)}{t}\ dt\right)\ dx$$

$$=\ C\ \int_{\mathbb{R}}\widetilde{\phi}\left(\frac{C\ W_\psi f(x)\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx$$

$$\le\ C\ \int_{\mathbb{R}}\phi\left(\frac{C\ W_\psi f(x)\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx.$$

Denotando por K_i a la constante del tipo inferior de ϕ la última expresión es

$$\le\ \int_{\mathbb{R}}\phi\left(\frac{(CK_i)^{\frac{1}{l}}\ C\ W_\psi f(x)\ \omega(x)}{\lambda^{\frac{1}{l}}}\right)\ dx.$$

Eligiendo $\lambda = (CK_i)\ C^l\ ||W_\psi f||_{L^\phi(\omega)} \equiv C^l\ ||W_\psi f||_{L^\phi(\omega)}$ se obtiene que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\Delta_k}|\widetilde{I}_k^i|\ \phi\left(\frac{||b_{k,i}||_{L^q_\omega}\ \omega(\widetilde{I}_k^i)^{\frac{1}{q'}}}{|\widetilde{I}_k^i|\ \lambda^{1/l}}\right)\leq\int_{\mathbb{R}}\phi\left(\frac{W_\psi f(x)\ \omega(x)}{||W_\psi f||^{1/l}_{L^\phi_\omega}}\right)\ dx=1.$$

Y esto demuestra que $\Lambda_\omega^{\phi,q}(b)\leq C\ ||W_\psi f||_{L^\phi(\omega)}$.

De este modo hemos demostrado que (3.3.15) es una descomposición atómica de f en términos de múltiplos de (ϕ,q) átomos con respecto a ω, de modo que $f\in H^{\phi,q}(\omega)$ y que

$$||f||_{H^{\phi,q}(\omega)}\leq\Lambda_\omega^{\phi,q}(b)\leq C\ ||W_\psi f||_{L^\phi(\omega)}.\qquad\Box$$

Teorema 3.3.15. *Sean ϕ una función de tipo inferior positivo l tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ es casi decreciente, $\psi\in\mathcal{R}^s$ una wavelet ortonormal con $s>\frac{1}{l}$. Sean $1<q\leq\infty$ y $\omega\in A_\infty$ con $q_\omega/l<s$. Entonces*

$$A\|f\|_{H^{\phi,q}(\omega)}\leq\|W_\psi f\|_{L^\phi(\omega)}\leq B\|f\|_{H^{\phi,q}(\omega)}\qquad\forall f\in H^{\phi,q}(\omega).\tag{3.3.18}$$

Demostración. Por densidad vamos a probar la tesis para una $f\in H^{\phi,q}(\omega)\cap L^2$.

Sea $\psi_1\in\mathcal{R}^s$, $s>\frac{1}{l}$, una wavelet ortormal, de soporte compacto y momentos nulos hasta el orden $[\frac{q_\omega}{l}]-1$. El Teorema 3.3.11 (con $d=1$ y $R=s$) y el 3.3.14 aseguran que existen constantes A y C tales que

$$A\ \|f\|_{H^{\phi,q}(\omega)}\leq C\ \|W_{\psi_1}f\|_{L^\phi(\omega)}\leq\ \|W_\psi f\|_{L^\phi(\omega)}.\tag{3.3.19}$$

Por otro lado por el Teorema 3.3.8 (con $d=1$) podemos garantizar la existencia de una constante B tal que

$$\|W_\psi f\|_{L^\phi(\omega)}\leq\ B\ \|f\|_{H^{\phi,q}(\omega)}.\tag{3.3.20}$$

De (3.3.19) y (3.3.20), la tesis. $\Box$

3.4. Base Incondicional

Demostraremos ahora que para los espacios Hardy-Orlicz con peso $H^{\phi,q}(\omega)$ con ϕ una función de tipo inferior positivo l tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ es casi decreciente, ω un peso en A_∞ con $q_{\omega^d}/l\leq s$ y ψ una wavelet ortonormal y perteneciente a la clase de regularidad $\mathcal{R}^s$ con $s>\frac{1}{l}$, resulta que $\{\psi_{jk}\ :j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}\}$ es una *base incondicional* para ellos.

Como la demostración es similar a la del Capítulo anterior omitiremos los detalles.

Comencemos demostrando que $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ es base de $H^{\phi,q}(\omega)$.

Sea $M > N$ y denotemos

$$\sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk} = f_{NM}$$

$$\sum_{j=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk} \equiv f_{N}.$$

Luego por el lado izquierdo de la desigualdad del Teorema 3.3.15 y la ortonormalidad de ψ, se tiene que

$$\begin{aligned}
& || \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk} ||_{H^{\phi,q}(\omega)} \\
\leq \ & ||W_{\psi} \ f_{NM}||_{L^{\phi}_{\omega}} \\
\leq \ & C \ ||\{\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \sum_{k'\in\mathbb{Z}} |\langle \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk}, \psi_{j'k'}\rangle|^2 \ 2^{j'} \chi_{I_{j'k'}}\}^{\frac{1}{2}}||_{L^{\phi}_{\omega}} \\
\leq \ & C \ ||\{\sum_{j'\in Z} \sum_{k'\in\mathbb{Z}} |\langle \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 \ \overline{|\langle \psi_{jk}, \psi_{j'k'}\rangle|^2} \ 2^{j'} \chi_{I_{j'k'}}\}^{\frac{1}{2}}||_{L^{\phi}_{\omega}} \\
\leq \ & C \ ||\{\sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 \ 2^{j} \ \chi_{I_{jk}}\}^{\frac{1}{2}}||_{L^{\phi}_{\omega}} \\
= \ & C \ ||W_{\psi}^{N,M} f||_{L^{\phi}_{\omega}}
\end{aligned}$$

resultando

$$||f_N - f_M||_{H^{\phi,q}(\omega)} \leq \ C \ ||W_{\psi}^{N,M} f||_{L^{\phi}(\omega)} \tag{3.4.1}$$

Notemos además que por la desigualdad derecha del Teorema 3.3.15 para toda $f \in H^{\phi,q}(\omega)$, $W_\psi f \in L^\phi(\omega)$. De modo que $W_\psi f(x) < \infty$ c.t.p. $x \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{N\to\infty} W_\psi^{N,M} f(x) = 0$$

c.t.p. $x \in \mathbb{R}$.

Como independientemente de N y M

$$W_\psi^{N,M} f(x) \leq W_\psi f(x)$$

aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se obtiene

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(W_\psi^{N,M} f(x)\ \omega(x)\right)\ dx = 0$$

y por lo tanto

$$\|W_\psi^{N,M} f\|_{L^\phi_\omega N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{3.4.2}$$

Tomando límite para $N \to \infty$ en (3.4.1) junto con (3.4.2) podemos concluir que

$$||f_N - f_M||_{H^{\phi,q}(\omega)} \to 0$$

y

$$\lim_{N\to\infty} ||f - \sum_{|j|\leq N} \sum_{|k|\leq N} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{jk}||_{L^\phi(\omega)} = 0 \qquad \forall f \in H^{\phi,q}(\omega)$$

demostrando de este modo que f_N es de Cauchy en $H^{\phi,q}(\omega)$ que es un espacio completo. Razonando como en la Sección 2.2 se sigue que

$$f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} f$$

en $H^{\phi,q}(\omega)$.

También como antes si definimos el operador

$$S_\epsilon(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \epsilon_{jk} < f, \psi_{jk} > \psi_{jk}$$

aplicando (3.4.1), el hecho de ser $W_\psi f$ una serie de términos positivos y la desigualdad derecha del Teorema 3.3.15, logramos

$$\left\| \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} \epsilon_{jk} \ \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk} \right\|_{H^{\phi,q}(\omega)} \leq \ \|W_\psi^{N,M} f\|_{L^\phi(\omega)} \leq \ C \, ||f||_{L^\phi(\omega)} \, .$$

Finalmente por la completitud de $H^{\phi,q}(\omega)$ y la equivalencia entre $i)$ y $iii)$ del Teorema 2.2.1 concluímos que *si ψ es una wavelet ortonormal perteneciente a $\mathcal{R}^s$, entonces el sistema $\{\psi_{jk} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ es base incondicional para los espacios Hardy-Orlicz con peso $H^{\phi,q}(\omega)$ considerados en este Capítulo.*

Apéndice A

En este capítulo incluímos por completitud demostraciones que consideramos relevantes para el lector de este trabajo y que fueron citadas en Capítulos precedentes.

A.1.

Dados φ una N-función, s un número natural y ω un peso en $\mathbb{R}$, $L_\omega^{\phi,s}$ es un *espacio de Banach.*

Consideremos el espacio funcional anterior con

$$||f||_{L_\omega^{\phi,s}} = ||f||_{L_\omega^\phi} + \sum_{j=1}^{s} ||D^j f||_{L_\omega^\phi}. \tag{A.1.1}$$

A los fines de simplificar la notación haremos las demostraciones para $s = 1$.

Que $L_\omega^{\phi,1}$ es un *espacio vectorial normado* se deduce por ser $(L_\omega^\phi, \| \, \|_{L_\omega^\phi})$ también un espacio normado, con la norma de Orlicz o de Luxemburgo indistintamente. Por ejemplo si f y g son funciones de $L_\omega^{\phi,1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

- $\|\alpha f\|_{L_\omega^{\phi,1}} = \alpha \ \|f\|_{L_\omega^{\phi,1}}$

  Demostración. $\|\alpha f\|_{L_\omega^{\phi,1}} = |\alpha| \ (\|f\|_{L_\omega^\phi} + \|Df\|_{L_\omega^\phi}) = |\alpha| \ \|f\|_{L_\omega^{\phi,1}}$

- $\|f + g\|_{L_\omega^{\phi,1}} \leq \|f\|_{L_\omega^{\phi,1}} + \|g\|_{L_\omega^{\phi,1}}$

Demostración. Aplicando además que la derivada es un operador lineal resulta

$\|f+g\|_{L^{\phi,1}_\omega} = \|f+g\|_{L^\phi_\omega} + \|D(f+g)\|_{L^\phi_\omega} \leq (\|f\|_{L^\phi_\omega} + \|Df\|_{L^\phi_\omega}) + (\|g\|_{L^\phi_\omega} + \|Dg\|_{L^\phi_\omega})$
$= \|f\|_{L^{\phi,1}_\omega} + \|g\|_{L^{\phi,1}_\omega}$

Veamos ahora que $L^{\phi,1}_\omega$ es *completo.*

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L^{\phi,1}_\omega$. Ya que $L^{\phi,1}_\omega \subset L^\phi_\omega$ y L^ϕ_ω es un espacio de Banach existe una función $f \in L^\phi_\omega$ tal que $\|f_n - f\|_{L^\phi_\omega} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Definamos $g_n = Df_n$ $\forall n$ y demostremos que g_n es una sucesión de Cauchy en L^ϕ_ω

$$\|g_n - g_m\|_{L^\phi_\omega} = \|D(f_n - f_m)\|_{L^\phi_\omega} \leq \epsilon \qquad \forall n, m \geq N.$$

Entonces por la completitud de L^ϕ_ω, $\exists g \in L^\phi_\omega$ tal que

$$g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g.$$

Para $\varphi \in \mathcal{S}$ consideremos: $T_\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \varphi(x)\ dx$.

Aplicando la inclusión continua de L^ϕ_ω en $\mathcal{S}'$, la convergencia débil de $\{f_n\}$ a f en L^ϕ_ω y tomando límite para $n \to \infty$ en la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\ \varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} Df_n(x)\ \varphi(x)\ dx = (-1)\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ D\varphi(x)\ dx$$

resulta que

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\ \varphi(x)\ dx = (-1)\int_{\mathbb{R}} f(x) D\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} Df(x)\ \varphi(x)\ dx.$$

De modo que $g = Df$ en $\mathcal{S}'$.

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^{\phi,1}_\omega} &\leq \|f_n - f_m\|_{L^{\phi,1}_\omega} + \|f_m - f\|_{L^{\phi,1}_\omega} \\
&\leq \|f_n - f_m\|_{L^\phi_\omega} + \|D(f_n - f_m)\|_{L^\phi_\omega} + \|f_m - f\|_{L^\phi_\omega} + \|D(f_m - f)\|_{L^{\phi,1}_\omega} \\
&= \|f_n - f_m\|_{L^\phi_\omega} + \|g_n - g_m\|_{L^\phi_\omega} + \|f_m - f\|_{L^\phi_\omega} + \|g_m - g\|_{L^\phi_\omega} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

concluyendo de este modo que $L^{\phi,1}_{\omega}$ es un espacio vectorial normado completo con respecto a la distancia inducida por la norma.

A.2.

Presentamos ahora la demostración de un teorema de interpolación entre espacios de Orlicz con peso asociado a una N-función, de B. Bordin y J. B. García.

Para ello necesitamos el siguiente resultado conocido y un lema enunciado en Preliminares.

Lema A.2.1. *Si $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es diferenciable, creciente, $\psi(0) = 0$ en un espacio de medida (X,μ) entonces*

$$\int_X \psi(|f(x)|)\ d\mu(x) \ = \ \int_0^\infty \psi'(t)\ |A_t|\ dt$$

con $A_t = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > t\}$.

Teorema A.2.2 (Teorema de Interpolación de B. Bordin, J.B. García). *Sean H_0 y H_1 dos espacios de Hilbert, ϕ una N-función que satisface, junto con su complementaria, la condición Δ_2, q_ϕ y p_ϕ los exponentes de Boyd de ϕ. Sean r_1 y r_2 números reales tal que $1 \le r_1 < q_\phi$ y $p_\phi < r_2 < \infty$ y T un operador casilineal en $L^{r_1}_\omega(H_0) + L^{r_2}_\omega(H_0)$ tal que*

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)|\ \omega(x) > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda^{r_j}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)\omega(x)|^{r_j}\ dx \tag{A.2.1}$$

$j = 1,2$. Entonces T está bien definido en $L^\phi_\omega(H_0)$ y existe una constante finita $\tilde{C}$ tal que

$$\|Tf\|_{L^\phi_\omega(\mathbb{R},H_1)} \le \tilde{C}\ \|f\|_{L^\phi_\omega(\mathbb{R},H_0)} \qquad \forall f \in L^\phi_\omega(\mathbb{R},H_0). \tag{A.2.2}$$

Demostración. Sea $f \in L^\phi_\omega(H_0)$ y $\lambda > 0$. Consideremos $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f\ \chi_{A_\lambda(f)}$, $f_2 = f - f_1$ y $A_\lambda(f) = \{x \in \mathbb{R} : \|f(x)\omega(x)\|_{H_0} > \lambda\}$.

Como $r_1 < q_\phi$ y $\phi \in \Delta_2$, aplicando Lema 1.7.2 *i)*

$$\phi(\lambda) = \phi\left(\frac{\lambda}{t}\ t\right) \le C_1 \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{r_1} \phi(t) \qquad \forall t > \lambda.$$

Por lo tanto $\quad t^{r_1} \le C_1 \lambda^{r_1} \frac{\phi(t)}{\phi(\lambda)}.$

Considerando $t = \|f(x)\omega(x)\|_{H_0}$ e integrando miembro a miembro se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(x)\omega(x)\|_{H_0}^{r_1}\ dx \leq \frac{C\ \lambda^{r_1}}{\phi(\lambda)} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\|f(x)\omega(x)\|_{H_0}\right)\ dx < \infty.$$

En consecuencia $f_1 \in L^{r_1}_{\omega}(H_0)$.

Por otro lado como $p_\phi < r_2 < \infty$ y $\phi \in \Delta_2$ por el Lema 1.7.2 *ii)*

$$\phi(\lambda) \leq C_2 \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{r_2} \phi(t) \qquad \forall t \leq \lambda$$

y

$$t^{r_2} \leq C_2 \lambda^{r_2} \frac{\phi(t)}{\phi(\lambda)}.$$

Considerando $t = \|f(x)\omega(x)\|_{H_0}$ e integrando

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(x)\omega(x)\|_{H_0}^{r_2}\ dx = \frac{C\ \lambda^{r_2}}{\phi(\lambda)} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\|f(x)\omega(x)\|_{H_0}\right)\ dx < \infty$$

de modo que $f \in L^{r_2}_{\omega}(\mathbb{R}, H_0)$.

Por lo tanto $L^{\phi}_{\omega}(\mathbb{R}, H_0) \subset L^{r_1}_{\omega}(\mathbb{R}, H_0) + L^{r_2}_{\omega}(\mathbb{R}, H_0)$ y T está bien definido en $L^{\phi}_{\omega}(\mathbb{R}, H_0)$.

Para la demostración de (A.2.2), haremos uso del Lema A.2.1, la casilinealidad de T y (A.2.1)

$$\begin{array}{rcl}
\int_{\mathbb{R}} \phi(\|Tf(x)\omega(x)\|_{H_1})dx & = & \int_0^\infty \varphi(\lambda)|A_\lambda(Tf)|d\lambda \\
& \leq & \int_0^\infty \varphi(\lambda)\ |A_{\frac{\lambda}{2C}}(Tf_1)|d\lambda + \int_0^\infty \varphi(\lambda)\ |A_{\frac{\lambda}{2C}}(Tf_2)|d\lambda \\
& \leq & C \int_B \|f(x)\omega(x)\|_{H_0}^{r_1} \left(\int_0^{|f(x)\omega(x)|} \lambda^{-r_1}\varphi(\lambda)d\lambda\right) dx \\
& + & \int_B \|f(x)\omega(x)\|_{H_0}^{r_2} \left(\int_{|f(x)\omega(x)|}^\infty \lambda^{-r_2}\varphi(\lambda)d\lambda\right) dx \\
& = & I_1 + I_2
\end{array}$$

donde φ es la función de densidad de ϕ y $B = \{x \in \mathbb{R} : \|f\|_{H_0} > 0\}$.

Ya que $\phi \in \Delta_2$ existe $k_1 > 1$ tal que $\varphi(\lambda) \leq k_1\ \lambda^{-1}\phi(\lambda)$.

Sea p un número real tal que $r_1 < p < q_\phi$. Entonces por el Lema 1.7.2 *i)*, existe k_2 tal que $\phi(st) \leq k_2\ s^p\ \phi(t) \quad \forall\ 0 \leq s \leq 1, t > 0$.

De modo que

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^{|f(x)\omega(x)|} \lambda^{-r_1}\varphi(\lambda)d\lambda & \leq & k_1 \int_0^{|f(x)\omega(x)|} \lambda^{-r_1-1}\phi(\lambda)d\lambda \\
& \leq & k_1 k_2 \int_0^{|f(x)\omega(x)|} \lambda^{-r_1-1} \left(\frac{\lambda}{\|f(x)\omega(x)\|_{H_0}}\right)^p \phi(\|f(x)\omega(x)\|_{H_0})d\lambda \\
& = & \frac{k_1 k_2}{p - r_1}\ \|f(x)\omega(x)\|_{H_0}^{-r_1}\ \phi(\|f(x)\omega(x)\|_{H_0}).
\end{array}$$

Y en consecuencia $I_1 \leq C \int_{\mathbb{R}} \phi(\|f(x)\omega(x)\|_{H_0})\, dx$.

Sea q un número real tal que $p_\phi < q < r_2$. Del Lema 1.7.2 *ii*) se deduce que existe k_3 tal que $\phi(st) \leq k_3\, s^q\, \phi(t)$ para $s \geq 1$, $t > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{|f(x)\omega(x)|}^{\infty} \lambda^{-r_2}\varphi(\lambda)\, d\lambda &\leq k_1 \int_{|f(x)\omega(x)|}^{\infty} \lambda^{-r_2-1}\, \phi(\lambda)\, d\lambda \\
&\leq k_1 k_3 \int_{|f(x)\omega(x)|}^{\infty} \lambda^{-r_2-1} \left(\frac{\lambda}{\|f(x)\omega(x)\|_{H_0}}\right)^q \phi(\lambda)\, d\lambda \\
&\leq C\|f(x)\omega(x)\|_{H_0}^{-r_2}\ \phi(\|f(x)\omega(x)\|_{H_0})
\end{aligned}$$

y

$$I_2 \leq \int_{\mathbb{R}} \phi(\|Tf(x)\omega(x)\|_{H_1})\, dx.$$

De las estimaciones de I_1 e I_2 se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(\|Tf(x)\omega(x)\|_{H_1})dx \leq \tilde{C} \int_{\mathbb{R}} \phi(\|f(x)\omega(x)\|_{H_0})dx.$$

La desigualdad en norma (A.2.2) de la tesis se sigue del hecho de que T es positivamente homogéneo y de la equivalencia entre las normas Orlicz y Luxemburgo. $\square$

A.3.

Transcribimos aquí la demostración de un teorema de multiplicadores del tipo Hörmander-Mihlin a valores vectoriales, también de B. Bordin y J. B. García. Para ello necesitamos enunciar la versión vectorial del siguiente resultado, debido a D. Kurtz y R. Whedeen demostrando la acotación del operador T_m (definido en el Capítulo 2) en los espacios de Lebesgue con pesos $L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$.

Teorema A.3.1. *Sean H_0 y H_1 dos espacios de Hilbert y m una función acotada en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathcal{L}(H_0, H_1)$. Sean $1 < s \leq 2$, $n/s < l \leq n$ y $m \in M(s, l)$. Si*

i) $n/l < p < \infty$ y $\omega \in A_{pl/n}$; o

ii) $1 < p < (n/l)'$ y $\omega^{-1/(p-1) \in A_{p'l/n}}$

existe una constante C, independiente de f, tal que

$$\|T_m f\|_{L^p_\omega(\mathbb{R},H_1)} \ \leq\ C\|f\|_{L^p_\omega(\mathbb{R},H_0)}.$$

Teorema A.3.2 (Teorema de Multiplicadores de B. Bordin, J.B. García). *Sean $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_1$ dos espacios de Hilbert y m una función acotada en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Sea T_m el operador inicialmente definido para $f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_0)$ como*

$$(\widehat{T}_m f)(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

con m satisfaciendo una condición del tipo Hörmander-Mihlin para $1 < t \leq 2$ y $k = 1$. Sean ϕ y ϕ^* N-funciones complementarias que satisfacen la condición Δ_2. Sean q_ϕ, p_ϕ y q_{ϕ^*}, p_{ϕ^*} los exponentes de Boyd de ϕ y ϕ^* respectivamente . Entonces

i) Si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi}$, o

ii) Si $\omega^{-p_{\phi^*}} \in A_{q_{\phi^*}}$

T_m se puede extender a un operador lineal y acotado de $L^\phi_\omega(\mathcal{H}_0)$ en $L^\phi_\omega(\mathcal{H}_1)$.

Demostración. $i)$ Existe p_0 satisfaciendo $n/k < p_0 < q_\phi$ tal que $\omega^{p_\phi} \in A_{p_0 k/n}$. Ya que $q_\phi \leq p_\phi$ se sigue que $p_0 \leq p_\phi$ y consecuentemente que $\omega^{p_0} \in A_{p_0 k/n}$. Del teorema A.3.1 se tiene que T_m es acotado de $L^{p_0}_{\omega^{p_0}}(H_0)$ en $L^{p_0}_{\omega^{p_0}}(H_1)$.

De la teoría de pesos se sabe que si $\omega^{p_\phi} \in A_{q_\phi k/n}$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega^{p_\phi+\epsilon} \in A_{q_\phi k/n}$. Entonces $\omega^{p_1+\epsilon} \in A_{q_\phi k/n}$ y consecuentemente $\omega^{p_1+\epsilon} \in A_{p_1 k/n}$ ya que $q_\phi < p_1$. El teorema de Kurtz y Wheeden implica que T_m es acotado de $L^{p_1}_{\omega^{p_1}}(H_0)$ en $L^{p_1}_{\omega^{p_1}}(H_1)$.

La acotación de T_m en $L^{p_j}_{\omega^{p_j}}$, $j = 0, 1$, implica (A.2.1). Más aún se tiene que $1 < p_0 < q_\phi \leq p_\phi < p_1 < \infty$. Luego por el teorema de interpolación A.2.2 se obtiene que T_m es acotado de $L^\phi_\omega(H_0)$ en $L^\phi_\omega(H_1)$.

$ii)$ Si denotamos

$$\rho(f, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(|f(x)|)dx$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
||T_m f||_{L^\phi_\omega} &= \sup\{\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |T_m f(x)\ g(x)|dx : \rho(g\omega^{-1}, \phi^*) \leq 1\} \\
&= \sup\ \{\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\ T^*_m g(x)|dx : \rho(g\omega, \phi^*) \leq 1\} \\
&\leq \sup\ \{\|f\|_{L^\phi_\omega}\ \|T^*_m g\|_{L^{\phi^*}_{\omega^{-1}}} : \rho(g\omega, \phi^*) \leq 1\}
\end{aligned}$$

donde T^*_m es el operador adjunto de T_m. Teniendo en cuenta que $1/p_\phi + 1/q_\phi = 1$ y que $p_\phi \leq (n/k)'$ se sigue que $q_{\phi^*} > n/k$. Ya que $\omega^{-p_{\phi^*}} \in A_{q_{\phi^*} k/n}$, por hipótesis $i)$ se obtiene que

$$\|T^*_m\ g\|_{L^{\phi^*}_{\omega^{-1}}(H_1)} \leq C\|g\|_{L^{\phi^*}_{\omega^{-1}}(H_0)}.$$

Insertando ésto en lo anterior, la tesis. □

A.4.

En este apéndice presentamos la demostración del Lema 2.1.13 que a continuación transcribimos.

Lema A.4.1. *Sea ψ de banda limitada, $f \in S'$ y $0 < p \leq \infty$ tal que $\psi_{2^{-j}} * f \in L^p$ $\forall j \in \mathbb{Z}$. Entonces para cualquier real $\lambda > 0$ existe una constante C_λ tal que*

$$(\psi_{j,\lambda}^{**} f)(x) \leq C_\lambda \{\mathcal{M}(|\psi_{2^{-j}} \star f|^{\frac{1}{\lambda}})(x)\}^\lambda \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La demostración de este resultado requiere definiciones y resultados que a continuación enunciamos y que fueron extraídos de [8].

Para una función g definida en $\mathbb{R}$ y para un número real $\lambda > 0$ consideremos la función maximal

$$g_\lambda^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \frac{|g(x-y)|}{(1+|y|)^\lambda} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema A.4.2 (Desigualdad de Plancherel-Polya). *Supongamos que $0 < p \leq \infty$ y $j \in \mathbb{Z}$. Sea $g \in \mathcal{S}'$ y*

$$\sup(\hat{g}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

Entonces si $g \in L^p$ existe una constante C_p tal que

$$\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{z \in I_{j,k}} |g(z)|^p \right\}^{1/p} \leq C_p \; 2^{j/p} \; \|g\|_{L^p}.$$

Como corolario de esta desigualdad se obtiene el siguiente resultado.

Corolario A.4.3. *Si g es una función de banda limitada definida en $\mathbb{R}$ tal que $g \in L^p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq \infty$, entonces $g_\lambda^*(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

El siguiente resultado establece la relación entre la maximal g_λ^* y la maximal de Hardy-Littlewood.

Lema A.4.4. *Sea g una función de banda limitada definida en $\mathbb{R}$ tal que $g_\lambda^*(x) < \infty$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces existe una constante C_λ tal que*

$$g_\lambda^*(x) \leq C_\lambda \{\mathcal{M}(|g|^{\frac{1}{\lambda}})(x)\}^\lambda, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Demostración del Lema 2.1.13 Sea $g(x) = (\psi_{2^{-j}} * f)(2^{-j}x)$. Entonces $g \in L^p$. Ya que $(\psi_{2^{-j}})^\wedge(\xi) = \hat{\psi}(2^{-j}\xi)$ y ψ es banda limitada también g es de banda limitada. Entonces por el Corolario A.4.3, $g_\lambda^*(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Y por el Lema A.4.4 resulta

$$g_\lambda^*(x) \leq C_\lambda \{\mathcal{M}(|g|^{\frac{1}{\lambda}})(x)\}^\lambda, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{A.4.1}$$

Pero

$$g_\lambda^*(t) = \sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{|g(t-y)|}{(1+|y|)^\lambda} = \sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{|(\psi_{2^{-j}} * f|)(2^{-j}t - 2^{-j}y)|}{(1+|y|)^\lambda} = \sup_{z\in\mathbb{R}} \frac{|(\psi_{2^{-j}} * f|)(2^{-j}t - z)|}{(1+2^j|z|)^\lambda}$$
$$= (\psi_{j,\lambda}^{**} f)(2^{-j}t)$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(|g|^{1/\lambda})(t) &= \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} |(\psi_{2^{-j}} * f)(2^{-j}y)|^{\frac{1}{\lambda}}\, dy \\
&= \sup_{r>0} \frac{2^j}{2r} \int_{2^{-j}t-2^{-j}r}^{2^{-j}t+2^{-j}r} |(\psi_{2^{-j}} * f)(z)|^{\frac{1}{\lambda}}\, dz \\
&= \mathcal{M}(|\psi_{2^{-j}} * f|^{\frac{1}{\lambda}})(2^{-j}t).
\end{aligned}$$

La tesis resulta de aplicar (A.4.1) y las dos últimas igualdades con $x = 2^{-j}t$.

A.5.

Teorema A.5.1 (Teorema de Andersen-John). *El operador maximal de Hardy-Littlewood verifica las siguientes desigualdades vectoriales para* $1 < q < \infty$

i) Si $\omega \in A_1$

$$\omega\{x : \sum_j |\mathcal{M} f_j(x)|^q > \lambda^q\} \leq \frac{C_q}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_j |f_j(x)|^q\right)^{1/q} \omega(x)\, dx.$$

ii) Si $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} (\sum_{j\in Z} |\mathcal{M} f_j(x)|^q)^{p/q}\, \omega(x)\, dx \leq \quad C_{p,q} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j\in Z} |f_j(x)|^q\right)^{p/q} \omega(x)\, dx.$$

Para la demostración de estas desigualdades enunciaremos definiciones y teoremas extraídos de [18].

Si φ una función acotada de soporte compacto y definimos el operador $\varphi \to M_\varphi f$ como

$$M_\varphi f(x) = \sup_{\delta>0} |f * \varphi_\delta(x)|$$

con φ_δ definida como en el Apéndice anterior, resulta que M_φ es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p), $1 < p \leq \infty$.

Las condiciones sobre φ pueden rebajarse y así demostrarse el siguiente resultado debido a F. Zo.

Teorema A.5.2. *Sea* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *con*

$$\int_{|x|>2|y|} \sup_{\delta>0} \; |\varphi_\delta(x-y) - \varphi_\delta(x)| \; dx \leq A < \infty \qquad\qquad y \neq 0.$$

Entonces el operador maximal M_φ *es de tipo débil* $(1,1)$ *y de tipo fuerte* (p,p)*,* $1 < p \leq \infty$*.*

La demostración de lo anterior sugiere el enunciado del siguiente teorema.

Teorema A.5.3. *Sea* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$\sup_{\delta>0} \; |\varphi_\delta(x-y) - \varphi_\delta(x)| < C\frac{|y|}{|x|^{n+1}} \qquad\qquad si\ |x| > 2|y|,\ y \neq 0$$

y para cada J *subconjunto finito en* $\mathbb{R}$

$$|x|^n \; \left(\sup_{\delta\in J} \; |\varphi_\delta(x)| \right) < \; C_J$$

Sea $1 < q < \infty$*, entonces*

a) Si $\omega \in A_1$

$$\omega\{x : \sum_j |M_\varphi \; f_j(x)|^q > \lambda^q\} \leq \frac{C_q}{\lambda} \; \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_j |f_j(x)|^q \right)^{1/q} \omega(x) \; dx.$$

b) Si $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j \in Z} |M_\varphi \ f_j(x)|^q \right)^{p/q} \omega(x) \ dx \leq \quad C_{p,q} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j \in Z} |f_j(x)|^q \right)^{p/q} \omega(x) \ dx.$$

Lema A.5.4. *Sea φ una función positiva con soporte compacto, tal que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi(x) = 1$ para todo $|x| \leq 1$. Entonces φ satisface las hipótesis del teorema anterior.*

Demostración del Teorema A.5.1 Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$, tiene soporte compacto y $\varphi \equiv 1$ en el cubo unidad entonces:

$$\mathcal{M}f(x) \leq C M_\varphi(|f|)(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

De modo que el Lema A.5.4 permite aplicar el Teorema A.5.3 y obtener la tesis.

A.6.

En las dos próximos Apéndices se encuentran las demostraciones de resultados empleados en el Teorema 2.1.19.

Proposición 2·1·17 Sean $s = 0, 1, 2...$ y $j, k, l, m \in \mathbb{Z}$.

i) Si $\varphi \in \mathcal{D}^s$ y $\psi \in \mathcal{M}^s$ existen constantes $C < \infty$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$|\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle| \ \leq \ \frac{C 2^{(l-j)(\frac{1}{2}+s+1)}}{(1 + 2^l |2^{-j}k - 2^{-l}m|^{1+\epsilon}} \qquad para \ j \geq l.$$

ii) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^{-1}$ existen constantes $C < \infty$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$|\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle| \ \leq \ \frac{C 2^{\frac{(l-j)}{2}}}{(1 + 2^j |2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} \qquad para \ j \leq l.$$

La demostración de esta proposición requiere de otros resultados que enunciamos y que fueron extraídos de [8].

Lema A.6.1. *Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que g y h satisfacen*

a) $|g(x)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $|h(x)| \leq \frac{C_2}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

con C_1 y C_2 independiente de $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe una constante C tal que para todo $j, k, l, m \in \mathbb{Z}$ y $j \leq l$ se tiene que

$$|(g_{j,k} * h_{l,m})(x)| \leq \frac{C\ 2^{\frac{1}{2}\ (j-l)}}{(1 + 2^j|x - 2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\varepsilon}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lema A.6.2. *Sean $r \geq \varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$. Supongamos que g y h satisfacen*

a) $|\frac{d^n g}{dx^n}(x)| \leq \frac{C_{n,1}}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq n \leq N+1$

b) $\int_{\mathbb{R}} x^n\ h(x)\ dx = 0 \qquad \forall\ 0 \leq n \leq N$

c) $|h(x)| \leq \frac{C_2}{(1+|x|)^{2+N+r}} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$

con $C_{n,1}$, $0 \leq n \leq N+1$, y C_2 independiente de $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe una constante C tal que para todo $j, k, l, m \in \mathbb{R}$ y $j \leq l$ se tiene

$$|(g_{j,k} * h_{l,m})(x)| \leq \frac{C\ 2^{(j-l)(\frac{1}{2}+N+1)}}{(1 + 2^j|x - 2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\varepsilon}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración de la Proposición 2.1.17 Supongamos que φ está asociada con las constantes $\varepsilon' > 0$ y $c'_n < \infty$, $n = 0, 1, ..., N+1$ y ψ está asociada con las constantes $\gamma > 0$ y $C' < \infty$. Elijamos

$$C = \text{máx}\{c'_0, ..., c'_{N+1}, C'\} \qquad y \qquad \epsilon = \text{mín}\{\varepsilon', \gamma\}.$$

Entonces $\varphi \in \mathcal{D}^s$ con constantes C para todo $n = 0, 1..., N+1$ y $\epsilon > 0$ y $\psi \in \mathcal{M}^s$ con constante C y $\gamma \geq \epsilon$.

Para una función g definida en $\mathbb{R}$ escribimos $\widetilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$. Entonces se tiene

$$\overline{\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle} = \langle \varphi_{l,m}, \psi_{j,k} \rangle = (\varphi_{l,m} * \widetilde{\psi}_{j,-k})(0).$$

Para demostrar i) acudimos al Lema A.6.2 con los roles de j y l invertidos y $N = s$.

Para demostrar ii) aplicamos el Lema A.6.1 con

$$\langle \psi_{j,k}, \varphi_{l,m} \rangle = (\psi_{j,k} * \widetilde{\varphi}_{l,-m})(0).$$

A.7.

Lema 2·1·18 Dados $\epsilon > 0$ y $1 \leq r < 1+\epsilon$, existe una constante C tal que para todas las sucesiones $\{s_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ de números complejos y para $x \in I_{j,k}$

i) $$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1+2^l|2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} \leq C[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |s_{l,m}|^{\frac{1}{r}} \chi_{I_{l,m}})(x)]^r \quad l \leq j.$$

ii) $$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1+2^j|2^{-l}m - 2^{-j}k|)^{1+\epsilon}} \leq C2^{(l-j)r}[\mathcal{M}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |s_{l,m}|^{\frac{1}{r}} \chi_{I_{l,m}})(x)]^r \ l \geq j.$$

con $\mathcal{M}$ la maximal de Hardy-Littlewood.

Demostración. i) Consideremos

$E_0 = \{m \in \mathbb{Z} : |2^{l-j}k - m| \leq 1\}$

$E_n = \{m \in \mathbb{Z} : 2^{n-1} < |2^{l-j}k - m| \leq 2^n\} \qquad n = 1, 2, 3, ...$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1+2^l|2^{-j}k - 2^{-l}m|)^{1+\epsilon}} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m\in E_n} \frac{|s_{l,m}|}{(1+|2^{l-j}k - m|)^{1+\epsilon}} \\ &\leq C_\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(1+\epsilon)} \sum_{m\in E_n} |s_{l,m}|. \end{aligned}$$

Ya que $0 < \frac{1}{r} \leq 1$, el espacio $l^{1/r}$ está continuamente incluído en l^1. Por lo tanto

$$\sum_{m\in E_n} |s_{l,m}| \leq \left(\sum_{m\in E_n} |s_{l,m}|^{1/r} \right)^r$$

Ya que $I_{l,m} \subseteq [x - 2^{n-l+1}, x + 2^{n-l+1}]$ cuando $x \in I_{j,k}$, $l \leq j$, y $m \in E_n$, se tiene

$$\sum_{m\in E_n} |s_{l,m}|^{1/r} = 2^l \int_{x-2^{n-l+1}}^{x+2^{n-l+1}} \left(\sum_{m\in E_n} |s_{l,m}|^{1/r} \ \chi_{l,m}(y) \right) dy.$$

En consecuencia cuando $x \in I_{j,k}$ podemos escribir

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1+2^l|2^{-j}k-2^{-l}m|)^{1+\epsilon}}$$

$$\leq C_\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(1+\epsilon)} \left[2^l \int_{x-2^{n-l+1}}^{x+2^{n-l+1}} \left(\sum_{m\in E_n} |s_{l,m}|^{1/r}\ \chi_{l,m}(y)\right)\ dy\ \right]^r$$

$$\leq C_{\epsilon,r} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(1+\epsilon)} 2^{nr} \left[\mathcal{M}\left(\sum_{m\in E_n} |s_{l,m}|^{1/r}\ \chi_{l,m}\right)(x)\right]^r$$

$$\leq C_{\epsilon,r} \left[\mathcal{M}\left(\sum_{m\in E_n} |s_{l,m}|^{1/r}\ \chi_{l,m}\right)(x)\right]^r$$

ya que $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(1+\epsilon-r)<\infty}$, debido a que $1+\epsilon-r>0$. Esto demuestra i).

ii) Sean

$F_0 = \{m \in \mathbb{Z} : |2^{j-l}m-k| \leq 1\}$.

$F_n = \{m \in \mathbb{Z} : 2^{n-1} < |2^{j-l}m-k| \leq 2^n\} \qquad n = 1, 2, 3, ...$

Como en la demostración de i), se tiene

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1+2^j|2^{-l}m-2^{-j}k|)^{1+\epsilon}} \leq\ C_\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(1+\epsilon)} \left(\sum_{m\in E_n} |s_{l,m}|^{1/r}\right)^r$$

usando que $r \geq 1$. Cuando $x \in I_{j,k}$, $l \geq j$ y $m \in F_n$, tenemos que $I_{l,m} \subseteq [x-2^{n-j+1}, x+2^{n-j+1}]$. Por lo tanto

$$\sum_{m\in F_n} |s_{l,m}|^{1/r} = 2^l \int_{x-2^{n-j+1}}^{x+2^{n-j+1}} \left(\sum_{m\in E_n} |s_{l,m}|^{1/r}\ \chi_{l,m}(y)\right) dy.$$

De modo cuando $x \in I_{j,k}$ podemos escribir

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|s_{l,m}|}{(1+2^j|2^{-l}m-2^{-j}k|)^{1+\epsilon}}$$

$$\leq C_\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(1+\epsilon)} \left[2^l \int_{x-2^{n-j+1}}^{x+2^{n-j+1}} \left(\sum_{m\in F_n} |s_{l,m}|^{1/r}\ \chi_{l,m}(y)\right)\ dy\right]^r$$

$$\leq C_{\epsilon,r} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(1+\epsilon)} 2^{(l-j+n)r} \left[\mathcal{M}\left(\sum_{m\in F_n} |s_{l,m}|^{1/r}\ \chi_{l,m}\right)(x)\right]^r$$

$$\leq C_{\epsilon,r}\ 2^{(l-j)r} \left[\mathcal{M} \left(\sum_{m \in E_n} |s_{l,m}|^{1/r}\ \chi_{l,m} \right)(x) \right]^r$$

ya que $1 + \epsilon - r > 0$. $\square$

A.8.

Presentamos aquí la demostración de un teorema de acotación de operadores de Calderón-Zygmund a valores vectoriales, que usamos en el Capítulo 3.

Teorema 3.3.5 Sean A y B espacios de Banach, T un operador de Calderón-Zygmund a valores vectoriales con núcleo K γ-regular. Si $0 < p \leq 1$, $\omega \in A_\infty$, con índice crítico q_ω verificando $\frac{q_\omega}{p} < 1 + \gamma$, entonces T es acotado de $H^p_{A,\omega}$ en $L^p_{B,\omega}$.

Este resultado se encuentra en [5]. Recordemos que los autores trabajaron con (p, ∞) átomos con respecto a ω valuados en el espacio de Banach A. En su demostración se requieren los siguientes resultados.

Teorema A.8.1. *Sea T un V.V.C-Z.O con núcleo K γ-regular. Sea f una función en $L^\infty_{c,A}$ con soporte en un intervalo acotado I con centro x_0 tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} x^k\ f(x)\ dx = 0 \qquad\qquad 0 \leq k < \gamma.$$

Entonces para casi todo $x \notin I^2$(la 2-dilatación de I con el mismo centro) se tiene que

$$\|Tf(x)\|_B \leq C\ \left(\frac{I}{|x - x_0|} \right)^{1+\gamma}\ \|f\|_{L^\infty_{(A)}}.$$

Corolario A.8.2. *Sea T un V.V.C-Z.O con núcleo K γ-regular. Sea f una función en $L^\infty_{c,A}$ con soporte en un intervalo acotado I con centro x_0 y con momentos nulos hasta el orden N. Entonces para casi todo $x \notin I^2$*

$$\|Tf(x)\|_B \leq C\ \left(\frac{I}{|x - x_0|} \right)^{1+min\{N+1,\gamma\}}\ \|f\|_{L^\infty_{(A)}}.$$

Proposición A.8.3. *Sea T un V.V.C-Z.O con núcleo K γ-regular. Sea ω un peso en A_∞ y f un p-átomo con respecto a ω soportado en el intervalo I. Supongamos que $0 < p \leq 1$ es tal que $\frac{q_\omega}{p} < 1 + \gamma$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}-I^2} \|Tf(x)\|_B^p \, \omega(x)\, dx \leq C$$

con C independiente de f.

Incluímos la demostración de esta proposición pues completa la del Teorema 3.3.5.

Demostración. Sea x_0 el centro del intervalo I y sea $N = N_p(\omega) = [\frac{q_\omega}{p}] - 1$. Por hipótesis se sabe que $\frac{q_\omega}{p} < 1 + \gamma$. Por lo tanto $1 + min\{N+1, \gamma\} > \frac{q_\omega}{p}$. Usando el corolario previo se tiene

$$\|Tf(x)\|_B \leq C \left(\frac{I}{|x - x_0|}\right)^{1+min\{N+1,\gamma\}} \|f\|_{L^\infty_{(A)}}$$

c.t.p $x \notin I^2$.

Considerando $q = p(1 + min\{N+1, \gamma\}) > q_\omega$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}-I^2} \|Tf(x)\|_B^p \, \omega(x)\, dx &\leq C\, |I|^q \, \|f\|^p_{L^\infty_A} \int_{\mathbb{R}-I^2} \frac{1}{|x-x_0|^q} \omega(x) dx \\ &\leq C\, \omega(I) \|f\|^p_{L^\infty_A} \\ &\leq C \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la pertenencia de ω a A_q. Ya que f es un p-átomo A-valuado se obtiene la desigualdad deseada. □

Demostración del Teorema 3.3.5 Sea f un p-átomo A valuado con respecto a ω. Es suficiente probar que

$$\int_{\mathbb{R}} \|Tf(x)\|_B^p \, \omega(x)\, dx \leq C$$

con C una constante finita independiente de f. Si f está soportada en el intervalo I, usando la proposición anterior se sabe que la última desigualdad vale cuando se integra fuera de I^2. De manera que necesitamos una estimacón sobre I^2. Considerando $q > q_\omega \geq 1$, $\omega \in A_q$ y T acotado de $L^q_{A,\omega}$ en $L^q_{B,\omega}$. Ya que $\frac{p}{q} \geq q > 1$, podemos usar la desigualdad de Hölder para obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \|Tf(x)\|_B^p \ \omega(x) \ dx &= \int_{\mathbb{R}} \|Tf(x)\|_B^p \ \omega(x)^{p/q} \ \omega(x)^{1-p/q} \ dx \\
&\leq \{\int_{\mathbb{R}} \|Tf(x)\|_B^q \ \omega(x) \ dx\}^{p/q} \ \omega(I^2)^{1-p/q} \\
&\leq \{\int_I \|f(x)\|_A^q \ \omega(x) \ dx\}^{p/q} \ \omega(I)^{1-p/q} \\
&\leq C \ \|f\|_{L_A^\infty}^p \ \omega(I)^{p/q} \ \omega(I)^{1-p/q} \leq C.
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] B. Bordin and J. García. A multiplier theorem on weighted orlicz spaces. *Portugalie Mathematica*, 48:281–290, 1991.

[2] D.W. Boyd. Indices of functions spaces and their relationship to interpolation. *Canad. J. Math*, 21:1245–1254, 1969.

[3] D.W. Boyd. Indices of the orlicz spaces. *Pacif. Journal of Mathematics 38*, 2, 1971.

[4] J. García-Cuerva. *Weigth Hp spaces*. Dissertationes Math. 162, 1979.

[5] J. García-Cuerva and J.M.Martell. Wavelet characterization of weighted spaces. *Journal Of Geometric Analysis*, pages 1–32, 1999.

[6] E. Harboure and B. Viviani. Boundedness of singular integral operators on h_ω. *Rev. de la Unión Matemática Argentina*, 38:219–244, 1993.

[7] L Hömander. Estimates for translation invariant operator in l^p spaces. *Acta Math*, 104:93–140, 1960.

[8] E. Hernández and G. Weiss. *A first Course on Wavelets*. CRC Press, Boca Ratn, 1996.

[9] S. Janson. Lipschitz spaces and bounded mean oscillation. *Duke Math. J.*, 47:959–982, 1980.

[10] M.A. Krasnosel'skii and Y.B Rutickii. *Convex Functions and Orlicz Spaces*. P. Noordhoff Ltd, 1961.

[11] D. Kurtz and R.Wheeden. Results on weighted norm inequalities for multipliers. *Transactions of the American Mathematical Society*, 255:343–362, 1979.

[12] W. Luxemburg. *Banach function spaces*. PhD thesis, Delft. Technical Univer., 1955.

[13] W. Matuszewska and W. Orlicz. On certain properties of φ-functions. *Bull Acad. Polonaise des Sciencies*, 8:439–443, 1960.

[14] Y. Meyer. *Ondeletters et operateurs (ondelettes).Volúmen 1*. Hermann, Paris, 1990.

[15] J. Schneid S. Pitter and Ch. Ueberhuber. *Wavelet Literature Survey*. Technical University Vienna, Wien, Austria, 1993.

[16] C. Serra. *Acotación de Operadores sobre espacios de Hardy-Orlicz*. PhD thesis, Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del Litoral, 1996.

[17] C. Serra. *Tesis Doctoral: Acotación de Operadores sobre Espacios de Hardy-Orlicz*. Univ. Nacional del Litoral, 1996.

[18] J. L. Torrea. *Integrales Singulares Vectoriales*. Univ. Nacional del Sur, Baha Blanca, 1984.

[19] H. Triebel. Spaces of distributions of besov type on euclidean n-spaces. duality, interpolation. *Arkiv Mat.*, 11:13–64, 1973.

[20] B. Viviani. An atomic decomposition of the predual ol bmo(ρ). *Revista Matemática Iberoamericana*, 3(3,4):401–425, 1987.

[21] E. Harboure O. Salinas B. Viviani. Wavelets expansions for $bmo_\rho(\omega)$-functions. *Enviado para publicación*, 2002.

[22] P. Wojtaszczyk. *A Mathematical Introduction to Wavelets*. London Mathematical Society, 1997.