



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

ANÁLISIS Y GENERALIZACIÓN DE LA TÉCNICA DE MALLA COMPUESTA E INTEGRACIÓN CON EL MÉTODO MULTIGRILLA

Sofía Soledad Sarraf

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de
DOCTOR EN INGENIERIA
Mención Mecánica Computacional
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2011

Comisión de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria, Paraje "El Pozo", S3000, Santa Fe, Argentina.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Santa Fe, 23 de marzo de 2011.

Como miembros del Jurado Evaluador de la Tesis de Doctorado titulada **“Análisis y generalización de la técnica de malla compuesta”**, desarrollada por la Lic. Sofia Soledad SARRAF, certificamos que hemos evaluado la Tesis y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería – Mención Mecánica Computacional.

La aprobación final de esta disertación estará condicionada a la presentación de dos copias encuadernadas de la versión final de la Tesis ante el Comité Académico del Doctorado en Ingeniería.

.....
Dr. Jorge D'Elía

.....
Dr. Gustavo Sánchez Sarmiento

.....
Dr. Pedro Morín

.....
Dr. Carlos Zuppa

Santa Fe, 23 de marzo de 2011.

Certifico haber leído esta Tesis preparada bajo mi dirección y recomiendo que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería – Mención Mecánica Computacional.

.....
Mag. Marta Bergallo
Codirectora de Tesis

.....
Mag. Victorio Sonzogni
Director de Tesis

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional Nº 168 – Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

A mis amores, Ezequiel y Brenda

DECLARACIÓN LEGAL DE LA AUTORA

Esta disertación ha sido remitida como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería ante la Universidad Nacional del Litoral y ha sido depositada en la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas para que esté disponible a sus lectores bajo las condiciones estipuladas por el Reglamento de la mencionada Biblioteca.

Citaciones breves de esta disertación son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para una citación extendida o para la reproducción parcial o total de este manuscrito serán concedidos por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.

Sofía Soledad Sarraf

Resumen

La presente tesis tiene como objetivo el desarrollo teórico y la implementación computacional de un conjunto de herramientas que permitan la mejora de soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales elípticas sin elevar en forma apreciable el costo computacional. El desarrollo se plantea enfocado hacia la elaboración de códigos que validen la técnica de Malla Compuesta para una posterior generalización mediante una versión algebraica de la misma denominada Malla Compuesta Algebraica.

A continuación se listan los distintos desarrollos que constituyen las contribuciones de la presente tesis:

- El análisis computacional de la técnica de Malla Compuesta para problemas elípticos y su generalización a mallas no estructuradas y dominios tridimensionales.
- El estudio de la aplicabilidad de la técnica a problemas en dominios complejos, problemas de difusión-advección-reacción estacionarios, problemas con coeficientes variables y otras aplicaciones.
- Una propuesta para la integración de los métodos de Malla Compuesta y Multigrilla, obteniéndose una nueva versión del método.
- La presentación de una nueva técnica de Malla Compuesta Algebraica.

Abstract

The main objective of this thesis consists in the theoretical development and implementation of a set of computational tools allowing to obtain improved numerical solutions for elliptic partial differential equations without incrementing considerably the computational cost. The development is based on codes which validate the technique of Composite Mesh with the objective of generalize it through an algebraic version called Algebraic Composite Mesh.

Below are listed the main contributions of this thesis:

- The computational analysis of the Composite Mesh technique for elliptic problems and its the generalization for unstructured meshes and three dimensional domains.
- The study of the applicability of the technique to problems in complex domains, steady problems of diffusion-advection-reaction type, problems with variable coefficients and other applications.
- A proposal for the integration of the Multigrid method with the Composite Mesh strategy with the objective to obtain a new technique.
- The presentation of a new technique called Algebraic Composite Mesh.

Índice general

1. Introducción	1
2. Estrategia de Malla Compuesta	4
2.1. Introducción	4
2.2. Técnica de Malla Compuesta	4
2.3. Análisis de la técnica de Malla Compuesta	5
2.4. Elección de los factores de participación	7
2.5. Problemas básicos	8
2.5.1. Problema de Poisson clásico	9
2.5.2. Problema de Poisson con fuente exponencial	13
2.5.3. Problema de Poisson con condición de contorno Neumann	15
2.5.4. Problema de Poisson con dominio perforado	19
2.5.5. Problema difusivo puro con difusividad variable y fuente nula	20
2.5.6. Problema difusivo puro con difusividad variable y fuente no nula	22
2.5.7. Problema difusivo puro con coeficiente difusivo variable	24
2.5.8. Problema de Poisson tridimensional	26
2.6. Problemas de mayor complejidad	27
2.6.1. Problema de transporte difusivo puro con término reactivo	27
2.6.2. Problema advectivo-difusivo	29
2.6.3. Problema advectivo-difusivo con capa límite	32
2.6.4. Problemas de Laplace en dominios con ángulo entrante	35
2.6.5. Problema difusivo con coeficiente discontinuo	39
2.6.6. Problema difusivo con singularidad en dominio con forma de L	41
2.7. Conclusiones	42
3. Estrategia Multigrilla con Malla Compuesta	45
3.1. Introducción	45
3.2. Problema unidimensional	46
3.3. Métodos iterativos básicos	47
3.3.1. Métodos de relajación	47
3.3.2. Método de Jacobi	48
3.3.3. Iteraciones lineales estacionarias	49
3.3.4. Método de Gauss-Seidel	49
3.4. Análisis de Fourier	50
3.4.1. Pruebas numéricas	50
3.4.2. Deducciones analíticas	52
3.4.3. Modos de Fourier	54

3.4.4.	Análisis del método Jacobi amortiguado	55
3.4.5.	Análisis del método de Gauss-Seidel	60
3.5.	Elementos de Multigrilla	62
3.5.1.	Relaciones entre la grilla fina y la grilla gruesa	64
3.5.2.	Transferencia de información entre las grillas	65
3.5.3.	Esquemas para el método Multigrilla	69
3.5.4.	Implementación y complejidad	73
3.5.5.	Propiedades variacionales	75
3.5.6.	Desarrollo por Elementos Finitos de la estrategia Multigrilla	76
3.6.	Integración con la técnica de Malla Compuesta	79
3.6.1.	Esquema de Multigrilla con Malla Compuesta	79
3.6.2.	Ejemplos	80
3.7.	Conclusiones	88
4.	Método Algebraico de Malla Compuesta	92
4.1.	Introducción	92
4.2.	Técnica de Malla Compuesta Algebraica	93
4.3.	Elementos del método Multigrilla Algebraico	93
4.4.	Aglomeración elemental	94
4.4.1.	Algoritmo de aglomeración elemental	95
4.4.2.	Operadores de interpolación y restricción	97
4.5.	Ejemplos	100
4.5.1.	Problema de Poisson en un dominio rectangular	100
4.5.2.	Problema de Poisson en un dominio perforado	102
4.5.3.	Problema de Laplace en un dominio con forma de L	103
4.6.	Conclusiones	106
5.	Conclusiones	107
5.1.	Trabajo a futuro	108
A.	Conceptos Básicos	109
A.1.	Normas para medir el error	109
A.2.	Propiedades de las matrices que componen la estrategia CM	109
B.	Formulación por Elementos Finitos	112
C.	Algoritmo <i>Breadth First Search</i>	114

Índice de figuras

2.1. Gráfica de la solución para el problema (2.16).	10
2.2. Error en norma euclídea en función del parámetro α para el problema (2.16).	10
2.3. Error en norma infinito en función del parámetro α para el problema (2.16).	10
2.4. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.16).	12
2.5. Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.16).	12
2.6. Error en norma euclídea en función de h para el problema (2.16).	12
2.7. Error en norma $L_2(\Omega)$ en función de h para el problema (2.16).	12
2.8. Relación (2.15) en función de α para el problema (2.19) en norma euclídea.	13
2.9. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.19).	14
2.10. Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.19).	14
2.11. Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.19).	15
2.12. Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.19).	15
2.13. Relación (2.15) en función de α para el problema (2.21) en norma euclídea.	16
2.14. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.21).	17
2.15. Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.21).	17
2.16. Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.21).	18
2.17. Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.21).	18
2.18. Relación entre los errores para distintas normas en función de α	18
2.19. Relación de errores en norma l_2 para distintos niveles de refinamiento.	18
2.20. Malla más gruesa para el problema (2.24).	19
2.21. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.24).	20
2.22. Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.24).	20
2.23. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.26).	22
2.24. Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.26).	22
2.25. Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.26).	22
2.26. Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.26).	22
2.27. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.28).	24
2.28. Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.28).	24
2.29. Malla más gruesa para el problema (2.30).	25
2.30. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.30).	26
2.31. Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.30).	26
2.32. Relación (2.15) en función de α para el problema (2.36) en norma euclídea.	28
2.33. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.36).	29
2.34. Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.36).	29
2.35. Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.36).	29
2.36. Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.36).	29
2.37. Relación (2.15) en función de α para el problema (2.38) en norma euclídea.	30

2.38. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.38).	31
2.39. Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.38).	31
2.40. Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.38).	32
2.41. Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.38).	32
2.42. Malla más gruesa para el problema (2.40).	33
2.43. Relación (2.15) en función de α para el problema (2.40) en norma euclídea.	33
2.44. Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.40).	34
2.45. Error en valor absoluto de la solución GCM para problema (2.40).	34
2.46. Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.40).	35
2.47. Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.40).	35
2.48. Dominio para el problema 2.6.4.	36
2.49. Relación (2.15) para distintos valores de β en función de α para el problema 2.6.4.	37
2.50. Gráfico del parámetro α óptimo en función del ángulo β para el problema 2.6.4.	37
2.51. Estimación del orden empírico del error para el problema 2.6.4.	38
2.52. Relación entre los errores para distintas normas en función de α	39
2.53. Relación de errores en norma l_2 para distintos niveles de refinamiento.	39
2.54. Dominio para el problema 2.6.5.	40
2.55. Relación (2.15) en función de α para el problema 2.6.5 en norma euclídea.	41
2.56. Dominio en forma de L para el problema 2.6.6.	42
2.57. Relación (2.15) en función de α para el problema 2.6.6 en norma euclídea.	43
3.1. Los modos de Fourier para $k = 1, 3$ y 6 . El k -ésimo modo corresponde a $k/2$ ondas seno completas.	50
3.2. Gráfica del error máximo en función del número de iteraciones para las aproximaciones iniciales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ y \mathbf{v}_6 con el método de Jacobi amortiguado con $\omega = 2/3$	51
3.3. Gráfica del error máximo en función del número de iteraciones para las aproximaciones iniciales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ y \mathbf{v}_6 con el método de Gauss-Seidel.	51
3.4. Gráfica del error máximo en función del número de iteraciones para la aproximación inicial (3.14).	52
3.5. Gráfica de los modos de Fourier de \mathbf{A} con número de onda $k = 1, 2, 3$ y 4 sobre una grilla de $n = 12$ puntos, de arriba hacia abajo respectivamente.	55
3.6. Gráfica de los modos de Fourier de \mathbf{A} con número de onda $k = 6, 8$ y 9 sobre una grilla de $n = 12$ puntos, de arriba hacia abajo respectivamente.	56
3.7. Autovalores de la matriz de iteración \mathbf{T}_ω para $\omega = 1/3, 1/2, 2/3, 1$	57
3.8. Cantidad de iteraciones del método (3.8) con $\omega = 1$ para el problema unidimensional (3.12) con $n = 64$ puntos.	57
3.9. Cantidad de iteraciones del método (3.8) con $\omega = 2/3$ para el problema unidimensional (3.12) con $n = 64$ puntos.	58
3.10. Solución en las iteraciones 1 y 10 para el problema unidimensional (3.12) mediante (3.8) con $\omega = 2/3$ para $n = 64$ y aproximación inicial \mathbf{w}_3	58
3.11. Solución en las iteraciones 1 y 10 para el problema unidimensional (3.12) mediante (3.8) con $\omega = 2/3$ para $n = 64$ y aproximación inicial \mathbf{w}_{16}	59

3.12. Solución en las iteraciones 1 y 10 para el problema unidimensional (3.12) mediante (3.8) con $\omega = 2/3$ para $n = 64$ y una combinación lineal de \mathbf{w}_2 y \mathbf{w}_{16} como aproximación inicial.	59
3.13. Gráfica continua de los autovalores de la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel.	60
3.14. Cantidad de iteraciones en función del número de onda k para el problema unidimensional (3.12) con $n = 64$ puntos para el método 3.11 con aproximación inicial los autovectores de la matriz de iteración.	61
3.15. Cantidad de iteraciones en función del número de onda k para el problema unidimensional (3.12) con $n = 64$ puntos para el método 3.11 con aproximación inicial los autovectores de la matriz \mathbf{A}	61
3.16. Onda con $k = 4$ proyectada sobre Ω^h	63
3.17. Onda con $k = 4$ proyectada sobre Ω^H	63
3.18. Interpolación de un vector de la malla gruesa Ω^H a la grilla fina Ω^h	66
3.19. Gráfica del error en la malla fina (\circ y \triangle) y del interpolante del error en la malla gruesa (\triangle), para un error suave.	66
3.20. Gráfica del error en la malla fina (\circ y \triangle) y del interpolante del error en la malla gruesa (\triangle), para un error oscilatorio.	67
3.21. Restricción mediante <i>ponderación completa</i> de un vector de la grilla fina (figura superior) a la grilla gruesa.	68
3.22. Esquema de grillas para el ciclo V	71
3.23. Esquema de grillas para el ciclo W	71
3.24. Esquema de grillas para FMG.	74
3.25. La acción de \mathbf{A}_h sobre el rango de interpolación $\mathcal{R}(\mathbf{P}_H^h)$	76
3.26. Multigrilla para Malla Compuesta (ciclo V).	80
3.27. Norma del residuo como función del número de iteraciones para el problema 2.5.3 con cinco niveles de malla.	82
3.28. Norma infinito del error nodal como función de h para el problema 2.5.3.	83
3.29. Norma euclídea del error nodal como función de h para el problema 2.5.3.	83
3.30. Norma del residuo como función del número de iteraciones para el problema (3.26) con cinco niveles de grilla.	85
3.31. Norma euclídea para el error nodal como función de h para el problema (3.26).	85
3.32. Norma infinito para el error nodal como función de h para el problema (3.26).	86
3.33. Norma euclídea del error nodal como función de h para el problema de Laplace.	87
3.34. Norma infinito del error nodal como función de h para el problema de Laplace.	87
3.35. Norma del residuo como función del número de iteraciones para el problema 2.5.4 con cinco niveles de grilla.	90
3.36. Norma euclídea para el error nodal como función de h para el problema 2.5.4.	90
3.37. Norma infinito para el error nodal como función de h para el problema 2.5.4.	91
4.1. Topología del espacio de la malla gruesa con macroelementos formados con nodos soporte.	95
4.2. Elemento semilla seleccionado adecuadamente.	96
4.3. Macroelemento resultante.	96
4.4. Funciones de base del espacio de la malla gruesa basadas en la distancia gráfica.	98

4.5. Error nodal FEM entre las soluciones exacta y aproximada para el problema 2.5.3.	101
4.6. Error nodal ACM entre las soluciones exacta y aproximada para el problema 2.5.3.	102
4.7. Mallas fina y gruesa para el problema 2.5.4.	103
4.8. Error nodal FEM entre las soluciones exacta y aproximada para el problema 2.5.4.	103
4.9. Error nodal ACM entre las soluciones exacta y aproximada para el problema 2.5.4.	104
4.10. Mallas gruesa y fina para el problema 3.6.2.	104
4.11. Error nodal FEM entre las soluciones numérica y exacta para el problema 3.6.2.	105
4.12. Error nodal ACM entre las soluciones numérica y exacta para el problema 3.6.2.	105

Índice de cuadros

2.1. Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.16).	11
2.2. Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.16).	11
2.3. Ordenes promedio del error en distintas normas.	11
2.4. Tiempos del Problema de Poisson para para distintos niveles de malla . . .	12
2.5. Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.19).	14
2.6. Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.19).	14
2.7. Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.21).	16
2.8. Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.21).	17
2.9. Estimación del valor α óptimo en distintas normas.	18
2.10. Estimación del valor α para distintos refinamientos.	18
2.11. Comportamiento de la técnica según las normas utilizadas para el problema (2.24).	20
2.12. Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.26).	21
2.13. Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.26).	21
2.14. Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.28).	23
2.15. Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.28).	24
2.16. Comportamiento de la técnica en distintas normas para el problema (2.30).	25
2.17. Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.33).	27
2.18. Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.36).	28
2.19. Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.36).	28
2.20. Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.38).	31
2.21. Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.38).	31

2.22. Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.40).	34
2.23. Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.40).	34
2.24. Estimación del valor α óptimo en distintas normas.	38
2.25. Estimación del valor α para distintos refinamientos.	39
2.26. Comportamiento de la técnica en función de h para el problema 2.6.5.	41
2.27. Comportamiento de la técnica en función de h para el problema 2.6.6.	43
3.1. Resultados para el ciclo V para el problema 2.5.3.	81
3.2. Resultados para el ciclo W para el problema 2.5.3.	81
3.3. Resultados para el ciclo V en el problema (3.26).	84
3.4. Resultados para el ciclo W en el problema (3.26).	84
3.5. Resultados para el ciclo V en el problema de Laplace.	88
3.6. Resultados para el ciclo W en el problema de Laplace.	88
3.7. Resultados para el ciclo V en el problema 2.5.4.	89
3.8. Resultados para el ciclo W en el problema 2.5.4.	89
4.1. Norma euclídea y norma l_∞ de los errores para el problema 2.5.3.	101
4.2. Norma euclídea y norma l_∞ de los errores para el problema 2.5.4.	102
4.3. Norma euclídea y norma l_∞ de los errores para el problema 3.6.2.	106

Capítulo 1

Introducción

El constante incremento en la capacidad de cálculo en conjunto con el desarrollo de nuevos modelos matemáticos y métodos numéricos, permite afrontar la resolución de problemas de importancia tanto científica como ingenieril cada vez más demandantes de recursos. Los métodos numéricos usuales (tales como los métodos de Elementos Finitos, Diferencias Finitas, Volúmenes Finitos, etc.) proporcionan herramientas de análisis, simulación y diseño en problemas de ingeniería y ciencias básicas. Los mismos permiten el tratamiento práctico de grandes problemas y requieren para su procesamiento computacional una elevada cantidad de recursos. Una disyuntiva habitual del usuario es la de encontrar un punto de compromiso entre el costo computacional, esto es, la cantidad de operaciones necesarias para la resolución, y los recursos exigidos (almacenamiento, etc.) junto con la requerida precisión de los resultados.

Con la intención de estimar errores de discretización e incluso obtener una solución mejorada sin elevar el costo computacional, surgió la técnica conocida como Malla Compuesta [2]. Dado que originalmente la misma fue enmarcada en un entorno geométrico, luego de un análisis computacional de su potencial surgen: la propuesta de generalizarla a la versión algebraica utilizando herramientas provenientes del método Multigrilla Algebraico [6] y su implementación en problemas de interés en dos y tres dimensiones, 2D y 3D respectivamente. El hecho de obtener una versión algebraica del método presenta la ventaja de calcular el sistema de ecuaciones para la malla más gruesa sin la necesidad de utilizar su geometría o una rediscretización en dicha malla. Luego, resolviendo con esta estrategia se evitaría la necesidad de generación y almacenamiento de grillas. Esta ventaja es de especial importancia cuando se trabaja con mallas no estructuradas sobre dominios 3D complejos. La estrategia de Malla Compuesta Algebraica (ACM, por Algebraic Composite Mesh) puede verse como la implementación práctica de la técnica de Malla Compuesta.

La técnica denominada Malla Compuesta [35, 2] se basa en la construcción de mallas dobles o superpuestas de elementos finitos. La estrategia permite, utilizando mallas de distinta aproximación, obtener estimadores del error de discretización. Más aún, efectuando una extrapolación de las propiedades de cada malla componente se obtienen soluciones mejoradas en problemas elípticos regulares, y también incluso en algunos que presentan singularidades. La formulación original del método fue realizada y probada sobre mallas estructuradas. Dicho método propone resolver, sobre una malla dada, un sistema lineal cuyo operador resulta de una combinación lineal de operadores definidos en mallas con distintos grados de refinamiento (una malla surge del refinamiento de la otra) y definidos

sobre la malla más fina de manera adecuada. Las distintas mallas deben poseer nodos en común que vinculen sus respectivos operadores. De acuerdo con Bergallo *et al.* [2], los coeficientes de la referida combinación lineal dependen de la regularidad de la solución exacta del problema considerado.

En lo que respecta a la resolución de grandes sistemas de ecuaciones resultantes de la discretización de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs) especialmente las del tipo elíptico mediante algún método numérico, una de las técnicas más utilizadas actualmente es el método Multigrilla. Existen numerosos trabajos realizados en este contexto (*e.g.*, Brandt [5], Briggs [8], Hackbusch y Trottenberg [15], etc.), los cuales hacen referencia al caso geométrico. Para el caso algebraico pueden citarse también los siguientes trabajos: Brandt *et al.* [6], Mc Cormick *et al.* [27], Wesseling [41], Okusanya [29], Koobus *et al.* [23], Brezina *et al.* [7], Mavriplis [26], Jones y Vassilevski [21]. Se encuentran disponibles códigos *open source*, como por ejemplo `hypr` [19], el cual posee una librería que contiene una versión algebraica del método Multigrilla para resolver grandes sistemas de ecuaciones con matrices ralas en forma distribuida.

Para problemas de valores de borde que involucran ecuaciones diferenciales de tipo elíptico, existen en la actualidad algoritmos de Multigrilla que proveen marcos adecuados para resolverlos, pero que individualmente no abarcan todos los casos posibles. Es necesario entonces ajustar, para cada caso, las distintas componentes del algoritmo que forman parte del entorno para resolver cada problema particular. Por ejemplo, se deben especificar los operadores de restricción y prolongación, la cantidad de niveles, la opción de un ciclo o dos, entre otros parámetros.

En la presente tesis se propone entonces el análisis y generalización de la estrategia de Malla Compuesta. Con este objetivo, se citan los principales aportes de la misma: el análisis exhaustivo de la estrategia, una integración de la misma con el método Multigrilla y la generalización de la técnica al caso algebraico mediante la utilización de herramientas provistas por el método Multigrilla Algebraico.

Objetivos de la tesis

Dado que uno de los objetivos principales de esta tesis consiste en el análisis de la técnica de Malla Compuesta (CM, por *Composite Mesh*), en el capítulo 2 se presenta la estrategia en su formulación original. En la introducción a la misma, se comentan las motivaciones y a continuación se realiza el desarrollo que deriva en la elección de los factores de participación. Se presentan ejemplos básicos con el objetivo de determinar numéricamente los factores de participación correspondientes a los diferentes tipos de problemas. Dichos factores dependen de la regularidad de la solución del problema considerado, el cual debe conocerse *a priori*. Por esta razón, para corroborar dicha información se procede a la estimación numérica de los mismos, eligiéndolos con el objetivo de minimizar el error nodal calculado entre la solución exacta y la aproximada obtenida con la estrategia CM. Una vez finalizada la estimación de los factores de participación, se analizan los resultados analíticos disponibles para el error, de manera tal de justificar la elección de las normas para medir el error a lo largo de la tesis. Finalmente, se presentan ejemplos con distintos grados de dificultad resueltos mediante la técnica de CM, incluso los primeros pasos en la resolución de problemas 3D.

En el capítulo 3 se presenta la integración de la técnica CM con el método Multigrilla,

la cual representa uno de los dos aportes principales de la tesis. La motivación para dicha integración se basó en el hecho de que tanto en el método Multigrilla como en la técnica CM se trabaja con mallas relacionadas entre sí por un refinamiento de las mismas, es decir, una es un refinamiento de la otra. Cada una de estas mallas provienen de la discretización del problema a resolver mediante el método de Elementos Finitos. Encontrando este punto en común entre ambos métodos, se propone una posible integración entre las técnicas Multigrilla y Malla Compuesta, con el objetivo de obtener no sólo las ventajas del método Multigrilla sino también las de la estrategia CM. En la primera parte del capítulo se presenta el método Multigrilla con sus componentes básicas para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Además, se hace un repaso de los métodos iterativos usuales con un análisis de Fourier de los mismos. A continuación, se presenta la integración de las dos estrategias y se finaliza el capítulo con una serie de ejemplos de aplicación de la misma.

En el capítulo final de esta tesis, el capítulo 4, se presenta un segundo aporte. Este consiste en la propuesta de una nueva versión de la técnica CM totalmente algebraica. La diferencia entre las versiones algebraica y la original radica principalmente en la forma en que se relacionan las mallas involucradas en la mezcla. La motivación surge de las dos versiones básicas más conocidas disponibles del método Multigrilla: la versión geométrica y la algebraica [9]. Actualmente se dispone de la mayoría de las herramientas de la estrategia propuesta, pero ha quedado como trabajo a futuro, allende esta tesis, el desarrollo de las aquellas aún necesarias para el completo funcionamiento de la misma. En la primera parte del capítulo se presentan las herramientas del método Multigrilla Algebraico que favorecieron la generación de la estrategia CM en esta versión. A continuación se presenta el algoritmo de aglomeración de los elementos de la malla fina para dar lugar a la definición de la malla gruesa, dado que existen distintas formas para llevar a cabo este paso fundamental del proceso. Luego se discuten los algoritmos para el cálculo de los operadores de transferencia. Finalmente, se presentan ejemplos de la técnica presentada.

Capítulo 2

Estrategia de Malla Compuesta

2.1. Introducción

En este capítulo se presenta la estrategia de Malla Compuesta de Geométrica (GCM, por Geometric Composite Mesh) en su versión original especializada en elementos finitos [2]. Si bien en la mayoría de los trabajos publicados sobre esta estrategia se presenta como una técnica para estimar errores de discretización, en la presente tesis se analiza numéricamente la capacidad de la misma para mejorar la solución obtenida por el Método de Elementos Finitos. Se discute la elección en los factores de participación en la mezcla de las mallas y se analiza una forma adecuada para medir el error. Se presentan además varios ejemplos numéricos con solución analítica, los cuales resultan de utilidad para evaluar la aplicabilidad de la técnica GCM a cada tipo de problema, analizar la sensibilidad del factor de participación y determinar el comportamiento del error a medida que la malla se refina. En [14] puede encontrarse una breve descripción acerca de las regularidades para las soluciones de problemas elípticos en los dominios considerados.

2.2. Técnica de Malla Compuesta

El método de Malla Compuesta está inspirado en de la teoría de mezclas para materiales compuestos de distintas fases. En una mezcla, varias fases comparten el mismo volumen de material, donde cada una de ellas posee su factor de participación propio. Un ejemplo físico de esta teoría podría ser el caso de medios porosos tales como los suelos arenosos, donde la porosidad será el factor de participación para el agua y el complemento para la unidad el correspondiente a la parte sólida. Las propiedades físicas (densidad, constantes elásticas, etc.) de cada componente participan en la formulación multiplicadas por el factor de participación.

La propuesta surgió entonces de hacer uso de mezclas de mallas de elementos finitos donde cada fase, en lugar de tener un significado físico, representa la precisión de diferentes mallas. Se puede pensar en dos mallas de elementos finitos, cada una de ellas de diferente grado de aproximación, unidas entre sí y participando en la mezcla en alguna proporción adecuada. Es de esperar que los resultados obtenidos con la malla mezcla o composición, sean intermedios en algún sentido con respecto a los análisis llevados a cabo para cada malla individualmente [36].

Una Malla Compuesta de elementos finitos aplicada a la resolución de un problema

elíptico puede utilizarse para mejorar una solución numérica sin elevar en forma apreciable el costo computacional y, además, estimar el error de discretización [2]. El método consiste en sustituir el operador discreto asociado a una malla dada de tamaño h (obtenido mediante la aplicación del Método de Elementos Finitos para la discretización de la ecuación diferencial considerada) por una combinación lineal del mismo operador y el correspondiente a una malla extendida al mismo dominio pero con un tamaño de elemento mayor H . En este caso los polinomios interpolantes conservan el mismo grado en ambas mallas. Luego, suponiendo que la malla fina se obtiene a partir de un refinamiento homogéneo de otra malla más gruesa, la conexión entre ambas se fuerza en los nodos compartidos. El factor de participación de cada malla en el modelo compuesto, es decir, el coeficiente en la combinación lineal entre las mallas, se introduce de forma tal de minimizar el error de discretización y se denota por α . Dicho factor depende de la regularidad de la solución exacta al problema considerado y deberá tenerse en cuenta para utilizar la técnica como se verá en los ejemplos que se presentan al final del presente capítulo.

Dado un problema modelo definido sobre en dominio Ω , se denomina como Ω^H a una malla de elementos finitos extendida a dicho dominio y a Ω^h como la malla proveniente de un refinamiento uniforme de la primera. Luego de discretizar el problema mediante el Método de Elementos Finitos (FEM, por *Finite Element Method*) utilizando dichas mallas se obtienen los sistemas lineales $\mathbf{A}_H \mathbf{u}_H = \mathbf{f}_H$ y $\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$, respectivamente. Se define ahora \mathbf{A}_{Hh} como la matriz extendida a las dimensiones de \mathbf{A}_h y con los elementos de \mathbf{A}_H correspondientes a los nodos comunes a ambas mallas y ceros en los lugares correspondientes a los nodos no comunes.

Análogamente se define el vector términos independientes \mathbf{f}_{Hh} . La solución aproximada por el método de Malla Compuesta \mathbf{u}_{CM} se obtiene del siguiente sistema [35]

$$\mathbf{A}_{CM} \mathbf{u}_{CM} \doteq [\alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) \mathbf{A}_{Hh}] \mathbf{u}_{CM} = \alpha \mathbf{f}_h + (1 - \alpha) \mathbf{f}_{Hh} \quad (2.1)$$

donde la elección de factor α depende de la regularidad del problema considerado. Si \mathbf{A}_h y \mathbf{A}_H son simétricas y definidas positivas, la matriz \mathbf{A}_{CM} propuesta para la composición de mallas resulta simétrica y definida positiva (véase A.2).

2.3. Análisis de la técnica de Malla Compuesta

En la presente sección se analizan las normas adecuadas que se utilizan para evaluar el error de discretización de la técnica GCM. La mejora que promete el método respecto de la solución FEM puede presentarse en ciertas normas, pero no en otras. Esto se debe a que la mejora es en un sentido nodal, por lo tanto la misma se evalúa en un sentido discreto. De hecho, la solución FEM es la mejor aproximación a la solución exacta dentro del espacio discreto asociado a una malla cuando el error se mide en la norma- a o energía (véase [20]).

Sean V_h y V_H los espacios que corresponden a las mallas de elementos finitos Ω^h y Ω^H , respectivamente. Sea u la solución exacta de un problema a resolver y sean u_h y u_H las soluciones del Método de Elementos Finitos en los espacios discretos V_h y V_H , respectivamente. Se definen además las siguientes aproximaciones de u en V_h

- u_{hL_2} como la proyección de u sobre V_h según la norma $L_2(\Omega)$, *i.e.*

$$(u_{hL_2}, v) = (u, v) \quad \forall v \in V_h$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto interno en $L_2(\Omega)$.

- u_{CM} como la solución de la técnica de Malla Compuesta en el espacio V_h .

Por la definición de u_{hL_2} se tiene que

$$\|u - u_{hL_2}\|_{L_2(\Omega)} \leq \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{L_2(\Omega)} \quad (2.2)$$

de donde se concluye que, si el error es medido en norma $L_2(\Omega)$, u_{hL_2} es la ‘mejor’ aproximación de u que puede hallarse en V_h .

Una cota del error $\|u - u_{hL_2}\|_{L_2(\Omega)}$ está dada por (véase, por ejemplo, [20]):

$$\|u - u_{hL_2}\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{r+1}|u|_{H^{r+1}(\Omega)} \quad (2.3)$$

donde C es una constante independiente de h y r es el grado de los polinomios de interpolación dentro de cada elemento de la triangulación y siempre que u sea suficientemente regular, es decir $u \in H^{r+1}(\Omega)$. Esta misma cota superior se puede obtener para el error

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq \hat{C}h^{r+1}|u|_{H^{r+1}(\Omega)} \quad (2.4)$$

siendo u_h la solución por FEM en V_h y \hat{C} una constante independiente de h como puede verse en [20].

Comparando las estimaciones de los errores (2.3) y (2.4), se observa que ambas son del mismo orden y no es de esperar una disminución sensible del error medido en norma $L_2(\Omega)$ de alguna otra función $v \in V_h$ respecto del error de u_h . En particular, esto se verifica para $u_{CM} \in V_h$ mediante experiencias numéricas. Se concluye entonces que no es posible obtener una mejora apreciable en el error medido en norma $L_2(\Omega)$ cuando se aplica la técnica de Malla Compuesta y, por lo tanto, esta medida del error no es de utilidad para evaluar las soluciones obtenidas con la mezcla de mallas. Más aún, lo concluido acerca de la norma $L_2(\Omega)$ podría generalizarse a otras normas continuas, tales como la norma energía entre otras.

Según lo expuesto, debemos considerar normas discretas para evaluar la mejora que introduce el uso de la Malla Compuesta a nivel nodal. Es decir, el método realiza mejores aproximaciones a los valores nodales de la solución exacta, constituyéndose entonces en una mejor aproximación al interpolante de u en el espacio discreto de V_h . Esto será verificado en los problemas resueltos al final del presente capítulo. Si bien la mejora de la solución introducida por la técnica de GCM será analizada mediante normas discretas, deben monitorearse las normas continuas para verificar que la solución ‘mejorada’ no incremente el error en tales normas. Por ejemplo, un incremento del error medido en norma $H^1(\Omega)$ indicaría un aumento en el error de aproximación a las derivadas de u .

Estimación del error en norma euclídea

Supongamos que el error de la solución FEM en norma $L_2(\Omega)$ satisface la propiedad

$$\|e\|_{L_2(\Omega)} = \|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^p \quad (2.5)$$

donde a partir de (2.4) se puede ver que p depende del grado de los polinomios utilizados en V_h y de la regularidad de u . Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} \|e\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} e^2 d\Omega \\ &\simeq K \sum_i e_i^2 h^{nd} \\ &= Kh^{nd} \sum_i e_i^2 \\ &= Kh^{nd} \|\mathbf{e}\|_2^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde \mathbf{e} es el vector de los errores nodales, siendo e_i su i -ésima componente, h es un tamaño representativo de la discretización del dominio, n_d es el número de dimensiones espaciales del problema, K es una constante que proviene del método de integración numérica y $\|\cdot\|_2$ representa la norma euclídea o l_2 . Combinando las ecuaciones (2.5) y (2.6), se obtiene

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 \simeq Kh^{nd} \|\mathbf{e}\|_2^2 \lesssim C^2 h^{2p} \tag{2.7}$$

de donde puede concluirse que

$$\|\mathbf{e}\|_2 \lesssim Ch^{p-nd/2} \tag{2.8}$$

2.4. Elección de los factores de participación

Sean H y h respectivamente ($H > h$) los tamaños de elementos de las mallas Ω^H y Ω^h . Suponiendo que se está resolviendo un problema a valores de borde, la técnica GCM se basa en las ideas principales de la extrapolación de Richardson. Dada una cantidad y una aproximación de cierto orden p de la misma, este método provee de otra aproximación de mayor orden que la dada $q > p$ partiendo del desarrollo asintótico del error asociado a la aproximación. Sean u la solución al problema de valores de borde considerado, u_H y u_h las aproximaciones asociadas a cada malla respectivamente, se supone que se puede escribir

$$\begin{aligned} u &= u_H + CH^p + O(H^q) \\ u &= u_h + Ch^p + O(h^q) \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde p es el orden del método, $q > p$ y donde se asume una misma constante C . Eliminando dicha constante entre ambas ecuaciones, se obtiene para la solución u

$$u = \frac{H^p/h^p}{(H^p/h^p - 1)} u_h - \frac{1}{(H^p/h^p - 1)} u_H + O(\{\text{máx}\{H, h\}\}^q) \tag{2.10}$$

Si, por ejemplo, las mallas poseen tamaños relacionados por $H = 2h$, a partir de (2.10) se obtiene

$$u_{Hhr} = \frac{2^p}{(2^p - 1)} u_h - \frac{1}{(2^p - 1)} u_H = u_h + \frac{u_h - u_H}{2^p - 1} \tag{2.11}$$

la cual aproxima a u con un orden mayor q sobre la malla Ω^H . A partir de (2.11) se puede ver que u_{Hhr} queda expresada como una versión mejorada de u_h , corregida por el término $(u_h - u_H)/(2^p - 1)$ en los nodos comunes a ambas mallas. En los nodos de la grilla fina

se utiliza la solución u_h , y en los nodos de la grilla gruesa se utiliza la extrapolación u_{Hhr} propiamente dicha.

Mediante un procedimiento análogo se obtiene que

$$\frac{u_h - u_H}{u_{\tilde{h}} - u_h} \simeq \frac{h^p - H^p}{\tilde{h}^p - h^p} \quad (2.12)$$

donde $u_{\tilde{h}}$ representa a una aproximación de u en una tercer malla de tamaño \tilde{h} con $h > \tilde{h}$.

Si, en particular, se tiene $H = 2h = 4\tilde{h}$, la expresión (2.12) se reduce a

$$\frac{u_h - u_H}{u_{\tilde{h}} - u_h} \simeq 2^p \quad (2.13)$$

la cual permite determinar el orden numérico aproximado del método para estimar así los coeficientes de la combinación lineal de la extrapolación.

Este procedimiento de extrapolación de dos mallas con nodos comunes, relacionadas entre sí mediante el refinamiento de una de ellas, permite obtener una solución con una mejor aproximación en los nodos comunes a ambas mallas contenidos en la malla gruesa. Es decir, el procedimiento mantiene el subespacio de funciones en la dimensión determinada por los nodos de la malla más fina pero incorpora las ventajas de la extrapolación usando una malla más gruesa.

Para el cómputo de la solución por el método de Malla Compuesta, en lugar de obtener soluciones respectivas a cada malla, se considera que el dominio está formado por la superposición de las dos mallas. Luego, cada una de ellas participa en la mezcla, en analogía con la extrapolación de Richardson, con un factor que corresponde a

$$\alpha = \frac{2^p}{(2^p - 1)} \quad (2.14)$$

para la malla Ω^h y de $1 - \alpha$ para Ω^H , para el caso de mallas de tamaños h y H , con $H = 2h$. En la ecuación anterior el valor de p corresponde al desarrollo asintótico de la expresión (2.9). Si dicho desarrollo asintótico correspondiera a cantidades medidas en normas $H^1(\Omega)$ el valor p coincidiría con el orden de regularidad de la solución, si se usaran elementos lineales.

La ventaja que presenta la técnica de GCM sobre la extrapolación de Richardson es que en esta última se deben resolver dos sistemas de ecuaciones globales mientras que en GCM se resuelve sólo uno y, aunque se tienen que llevar a cabo operaciones previas adicionales, se ahorra en tiempo de cálculo. Otra ventaja consiste en que el mejoramiento de los resultados en la extrapolación de Richardson se realiza sólo en los nodos coincidentes de los elementos que forman la mezcla mientras que en GCM se obtiene una mejora en todos los nodos, aunque en los nodos sin coincidencia ésta es menor [39].

2.5. Problemas básicos

En la presente sección se presentarán ejemplos en donde se aplica la estrategia GCM, utilizando funciones de interpolación lineales. En la mayoría de ellos se estima el orden

del método con el objetivo de poder seleccionar apropiadamente los factores de participación (2.14) adecuados a cada problema. Para cada caso, se llevo a cabo un estudio de la sensibilidad de dicha elección con el fin de encontrar un intervalo en el cual se pueda garantizar la reducción del error. Es decir, dado un número $\delta \in (0, 1)$ se pretende hallar un intervalo I_δ tal que para todo $\alpha \in I_\delta$ se obtenga

$$\frac{\|\mathbf{e}_{CM}\|_2}{\|\mathbf{e}_{FEM}\|_2} \leq \delta \quad (2.15)$$

para todo $\alpha \in I_\delta$, manteniendo fija la malla inicial.

Prácticamente en todos los casos resueltos el valor de α numérico coincide con el valor teórico [14]. Sólo en los primeros ejemplos se presenta entonces este análisis, dado que en muchos de los problemas presentados el factor de participación es el mismo.

2.5.1. Problema de Poisson clásico

El siguiente ejemplo corresponde a un problema de Poisson escalar sobre el cuadrado unitario.

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & \text{en } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

donde f es el polinomio

$$\begin{aligned} f(x, y) = & (-2500x^3 + 4050x^2 - 1905x + 237)y(250y^4 - 525y^3 + 340y^2 - 69y + 4) \\ & + (250x^4 - 675x^3 + 635x^2 - 237x + 27)x(-2500y^3 + 3150y^2 - 1020y + 69) \end{aligned} \quad (2.17)$$

con solución exacta dada por:

$$u(x, y) = 31250x(x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{9}{10}\right)y(y-1)\left(y-\frac{4}{5}\right)\left(y-\frac{1}{5}\right)\left(y-\frac{1}{10}\right) \quad (2.18)$$

La gráfica de la solución a este problema se representa en la figura 2.1

Sensibilidad del parámetro α

En las figuras 2.2 y 2.3 se observan los errores en normas euclídea e infinito respectivamente, para distintos valores del parámetro α . Con $\delta = 1/3$ en la condición (2.15) se selecciona el subintervalo de valores válidos (en el sentido elegido) para α con el objetivo de estimar la sensibilidad de este parámetro. Este subintervalo está dado por $I_\delta = [1.25, 1.4]$. El valor que minimiza el error será entonces el valor óptimo del parámetro α para este problema. Se observa que dicho valor es $\alpha \approx 1.33$.

Las tablas 2.1 y 2.2 presentan normas discretas y continuas para los errores nodales para FEM y el método GCM, ambas para varios niveles de discretización del dominio. De una de las tablas se puede calcular que el error promedio en norma l_2 disminuye con una tasa aproximada de $h^{0.99}$ para FEM, mientras que la estrategia GCM presenta un error con orden aproximado de $h^{2.87}$. Las gráficas de los errores para cada estrategia se presentan en las figuras 2.4 y 2.5. Pueden observarse en la tabla 2.3, los órdenes promedios de los errores en todas las normas utilizadas.

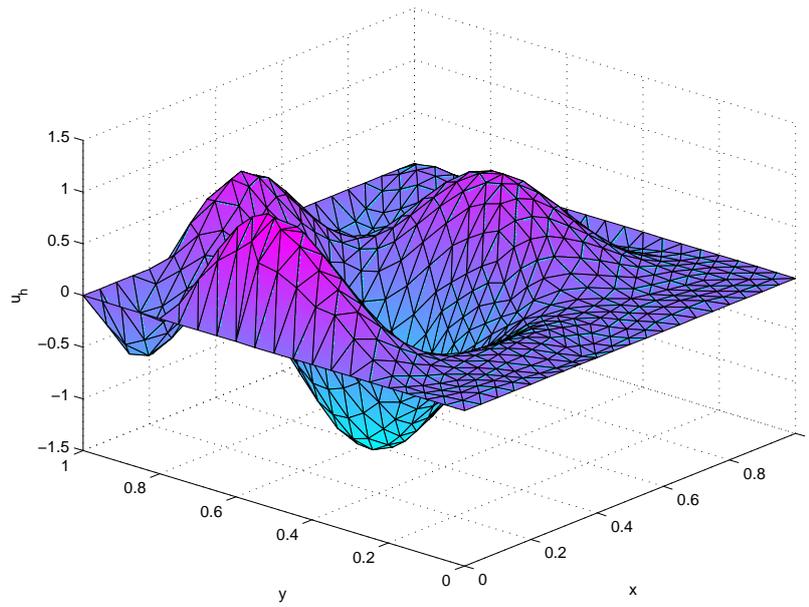


Figura 2.1: Gráfica de la solución para el problema (2.16).

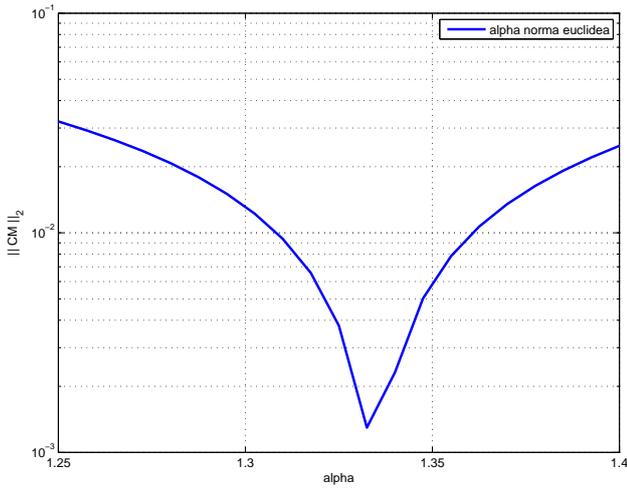


Figura 2.2: Error en norma euclídea en función del parámetro α para el problema (2.16).

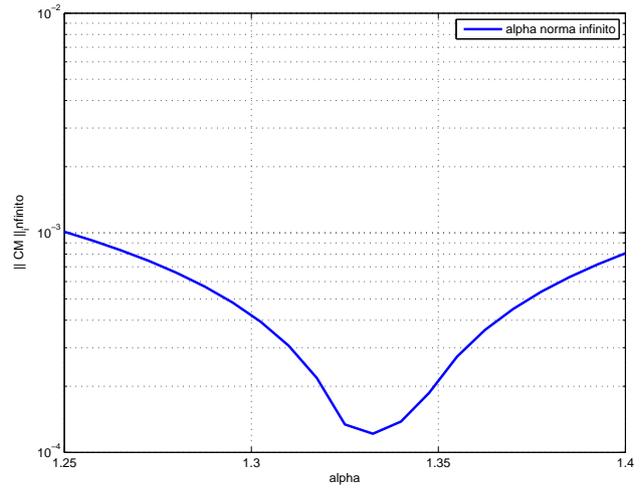


Figura 2.3: Error en norma infinito en función del parámetro α para el problema (2.16).

Errores en función del nivel de refinamiento

Se observó el comportamiento de la técnica para distintos niveles de refinamiento de la malla para el valor de α óptimo. La información correspondiente a las normas euclídea y $L_2(\Omega)$ se presentan en las gráficas 2.6 y 2.7, respectivamente. El rótulo ‘PL2’ en la figura 2.7 hace referencia a la proyección L_2 sobre el espacio discreto correspondiente (u_{hL_2}). Graficando las tres opciones juntas se pretende justificar la decisión de medir los errores con normas discretas en lugar de las normas continuas, dado que es claro que la

Problema de Poisson clásico				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
5.000×10^{-2}	6.1965×10^{-1}	9.5314×10^{-2}	1.0777×10^{-1}	3.3159×10^{-2}
2.5000×10^{-2}	3.1562×10^{-1}	2.4558×10^{-2}	1.6223×10^{-2}	3.0009×10^{-3}
1.6666×10^{-2}	2.1113×10^{-1}	1.0941×10^{-2}	5.0645×10^{-3}	7.3602×10^{-4}
1.2500×10^{-2}	1.5853×10^{-1}	6.1703×10^{-3}	2.1878×10^{-3}	2.7355×10^{-4}
1.000×10^{-2}	1.2689×10^{-1}	3.9496×10^{-3}	1.1351×10^{-3}	1.2340×10^{-4}

Tabla 2.1: Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.16).

Problema de Poisson clásico				
h	FEM		GCM	
	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$
5.000×10^{-2}	4.4998×10^{-2}	1.6731	2.7125×10^{-2}	1.6720
2.500×10^{-2}	1.1701×10^{-2}	8.4708×10^{-1}	6.5114×10^{-3}	8.4675×10^{-1}
1.6666×10^{-2}	5.2398×10^{-3}	5.6601×10^{-1}	2.8705×10^{-3}	5.6588×10^{-1}
1.2500×10^{-2}	2.9551×10^{-3}	4.2484×10^{-1}	1.6102×10^{-3}	4.2478×10^{-1}
1.000×10^{-2}	1.8936×10^{-3}	3.4000×10^{-1}	1.0292×10^{-3}	3.3997×10^{-1}

Tabla 2.2: Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.16).

mejora de la estrategia de Malla Compuesta es nodal.

Finalmente, se presenta en la tabla (2.5.1) los resultados para los tiempos promedios calculados para distintas mallas.

Orden del error para el Problema de Poisson				
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma L_2	Norma H^1
MEF	$\mathcal{O}(h^{0.9896})$	$\mathcal{O}(h^{1.9852})$	$\mathcal{O}(h^{1.9775})$	$\mathcal{O}(h^{0.9930})$
CM	$\mathcal{O}(h^{2.8653})$	$\mathcal{O}(h^{3.4850})$	$\mathcal{O}(h^{2.0235})$	$\mathcal{O}(h^{0.9927})$

Tabla 2.3: Ordenes promedio del error en distintas normas.

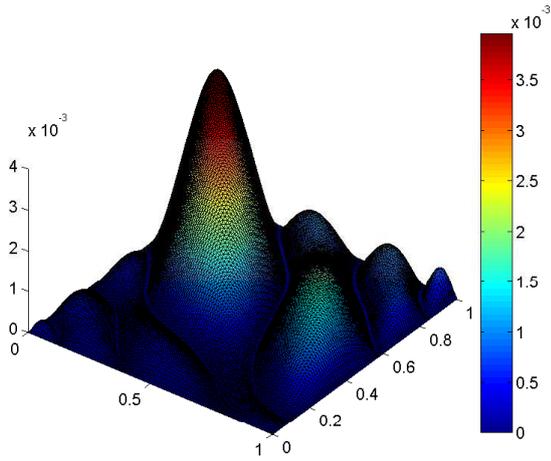


Figura 2.4: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.16).

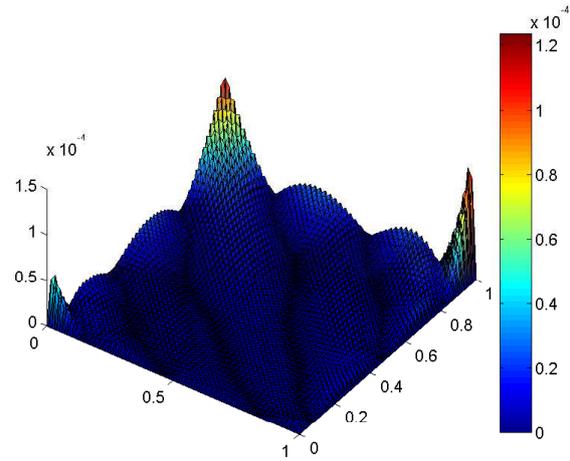


Figura 2.5: Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.16).

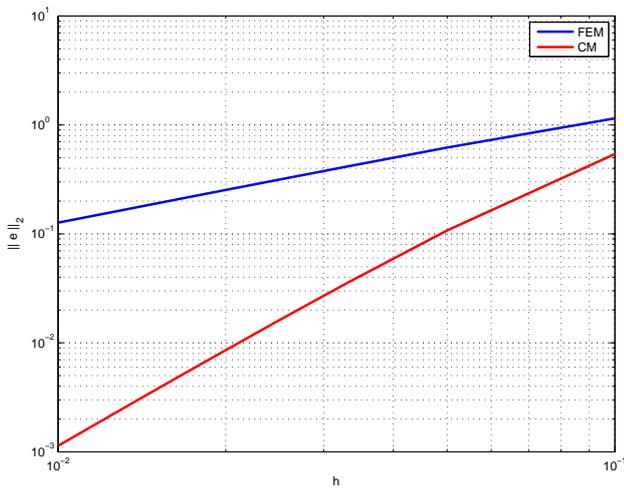


Figura 2.6: Error en norma euclídea en función de h para el problema (2.16).

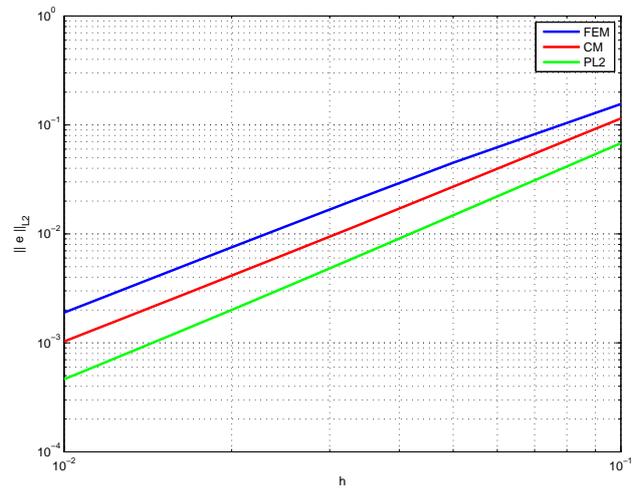


Figura 2.7: Error en norma $L_2(\Omega)$ en función de h para el problema (2.16).

Tiempos para el Problema de Poisson					
nivel	# nodos	# elementos	h_{medio}	tiempo MEF, [s]	tiempo GCM, [s]
3	2705	5248	1.5489×10^{-2}	7.7074×10^{-2}	9.6953×10^{-2}
4	10657	20992	7.7445×10^{-3}	4.2262×10^{-1}	5.6930×10^{-1}
5	42305	83968	3.8722×10^{-3}	2.6322×10^0	3.5824×10^0
6	168577	335872	1.9361×10^{-3}	1.7167×10^1	2.4976×10^1

Tabla 2.4: Tiempos del Problema de Poisson para para distintos niveles de malla

2.5.2. Problema de Poisson con fuente exponencial

El siguiente ejemplo corresponde a un problema de Poisson escalar sobre el dominio cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} -\Delta u = -2e^{-(x+y)}, & \text{en } \Omega \\ u(0, y) = e^{-y}, & 0 \leq y \leq 1 \\ u(1, y) = e^{-(1+y)}, & 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 1) = e^{-(1+x)}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = e^{-(x+y)} \quad (2.20)$$

Sensibilidad del parámetro α

Para este ejemplo se obtuvo $\alpha \approx 1.33$ como valor óptimo del factor de participación. Calculando la condición (2.15) entre la norma euclídea de los errores nodales para FEM y GCM, se grafica el intervalo de α que garantiza la reducción de los errores en un factor de $\delta = 1/3$ (véase figura 2.8).

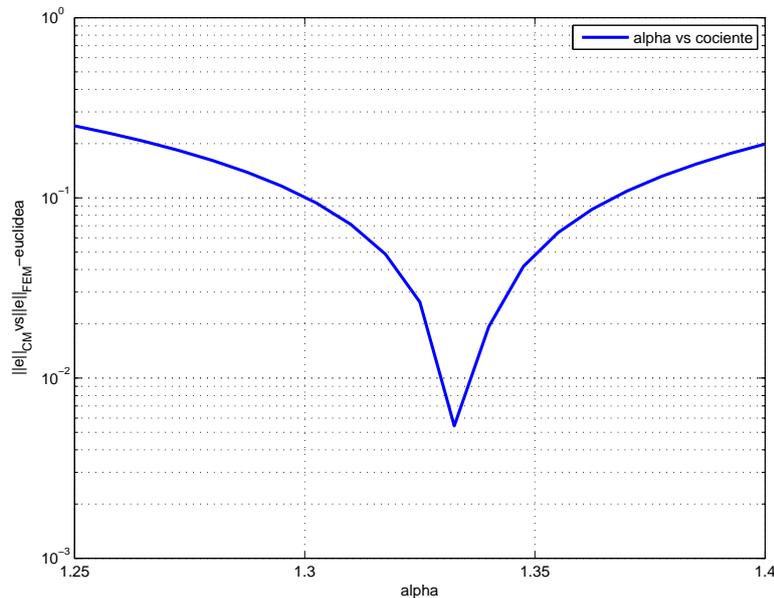


Figura 2.8: Relación (2.15) en función de α para el problema (2.19) en norma euclídea.

En las tablas 2.5 y 2.6 se presentan errores en normas discretas y continuas para distintos niveles de refinamiento. Puede calcularse, a partir de la primera, la tasa aproximada de disminución del error medido en norma euclídea. Se obtiene $h^{1.00}$ para FEM, mientras que la estrategia GCM presenta un error con orden aproximado de $h^{2.98}$. Las gráficas de los errores se presentan en las figuras 2.9 y 2.10.

Problema de Poisson con fuente exponencial				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
5.000×10^{-2}	2.6759×10^{-4}	2.4206×10^{-5}	6.8371×10^{-6}	9.1036×10^{-7}
2.500×10^{-2}	1.3402×10^{-4}	6.0863×10^{-6}	8.7567×10^{-7}	6.2588×10^{-8}
1.6666×10^{-2}	8.9375×10^{-5}	2.7046×10^{-6}	2.6131×10^{-7}	1.2762×10^{-8}
1.250×10^{-2}	6.7038×10^{-5}	1.5222×10^{-6}	1.1061×10^{-7}	4.1027×10^{-9}
1.000×10^{-2}	5.3633×10^{-5}	9.7410×10^{-7}	5.6743×10^{-8}	1.6966×10^{-9}

Tabla 2.5: Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.19).

Problema de Poisson con fuente exponencial				
h	FEM		GCM	
	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$
5.000×10^{-2}	2.8637×10^{-4}	1.9731×10^{-2}	2.9583×10^{-4}	1.9731×10^{-2}
2.500×10^{-2}	7.1585×10^{-5}	9.8664×10^{-3}	7.3989×10^{-5}	9.8664×10^{-3}
1.6666×10^{-2}	3.1815×10^{-5}	6.5776×10^{-3}	3.2886×10^{-5}	6.5776×10^{-3}
1.25×10^{-2}	1.7895×10^{-5}	4.9332×10^{-3}	1.8499×10^{-5}	4.9332×10^{-3}
1.000×10^{-2}	1.1453×10^{-5}	3.9466×10^{-3}	1.1839×10^{-5}	3.9466×10^{-3}

Tabla 2.6: Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.19).

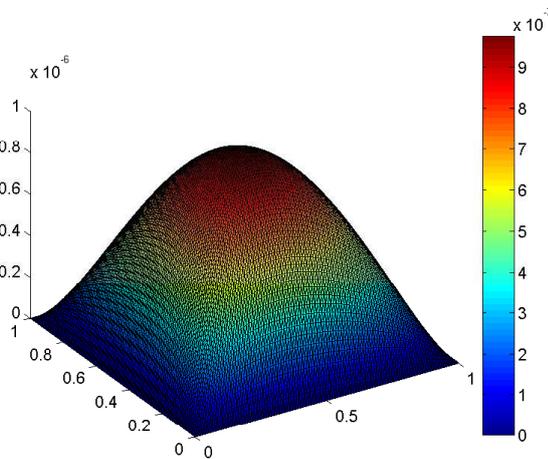


Figura 2.9: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.19).

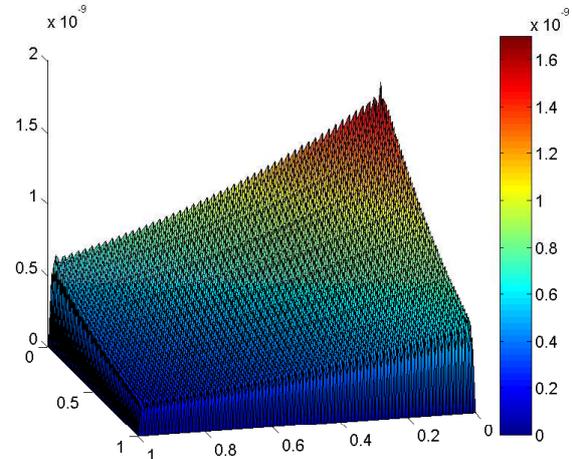


Figura 2.10: Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.19).

Errores en función del nivel de refinamiento

Se observó el comportamiento de la técnica para distintos niveles de refinamiento de la malla para el valor de α óptimo. La información correspondiente a las normas euclídea y $L_2(\Omega)$ se presentan en las gráficas 2.11 y 2.12 respectivamente. Como puede observarse, al graficarse el error de las estrategias con respecto al paso h la forma en que los mismos

se miden indican conclusiones diferentes. Si se observa la figura donde el error se mide con norma euclídea, es decir, se mide en un sentido discreto, es claro que la pendiente para el caso GCM es más pronunciada con respecto a la asociada a FEM, lo cual puede interpretarse como la mejora a la que se hace referencia. En cambio, cuando se miden estos errores con una norma continua, como por ejemplo la norma $L_2(\Omega)$ de la gráfica 2.12, las rectas que corresponden a las dos estrategias, FEM y GCM, prácticamente coinciden por lo cual no puede concluirse mejora alguna de una técnica con respecto a la otra.

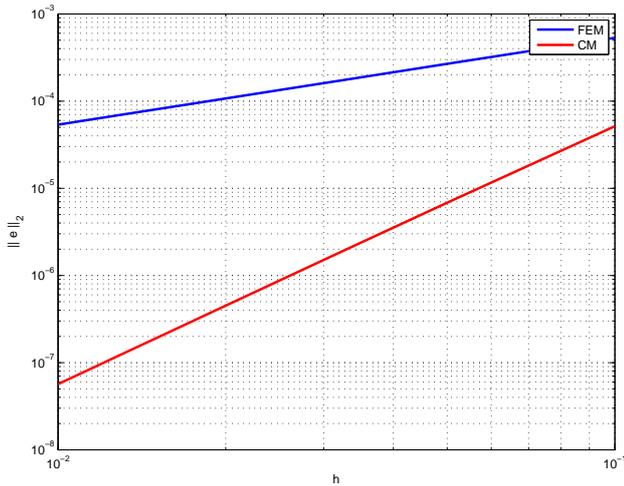


Figura 2.11: Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.19).

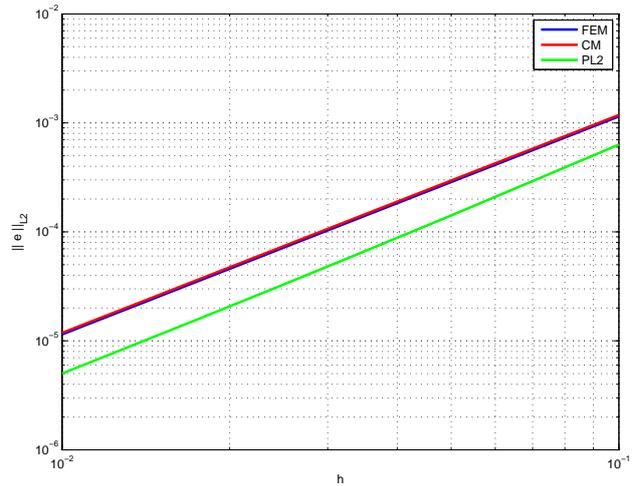


Figura 2.12: Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.19).

2.5.3. Problema de Poisson con condición de contorno Neumann

El siguiente ejemplo corresponde a un problema de Poisson escalar sobre un dominio rectangular con una condición de borde tipo Neumann.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad \text{en } \Omega = (1, 2) \times (0, 3) \\ u(x, 0) = 0, \quad \text{para } 1 \leq x \leq 2 \\ u(x, 3) = 0, \quad \text{para } 1 \leq x \leq 2 \\ u(1, y) = -\sin \pi y, \quad \text{para } 0 \leq y \leq 3 \\ u_x(2, y) = 0, \quad \text{para } 0 \leq y \leq 3 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

donde f es la función

$$f(x, y) = 2\pi^2 \cos \pi x \sin \pi y \quad (2.22)$$

con la solución exacta dada por:

$$u(x, y) = \cos(\pi x) \sin(\pi y) \quad (2.23)$$

Sensibilidad del parámetro α

Se realizó el mismo análisis que para el ejemplo anterior, obteniéndose prácticamente el mismo comportamiento con la elección $\delta = 1/3$ al calcular la relación (2.15), con I_δ

idéntico a los casos previos. El valor estimado entonces para el factor de participación óptimo es $\alpha \approx 1.33$.

En la figura 2.13 se observa la citada relación de errores en norma euclídea para distintos valores del parámetro α , ya en un entorno de su valor óptimo.

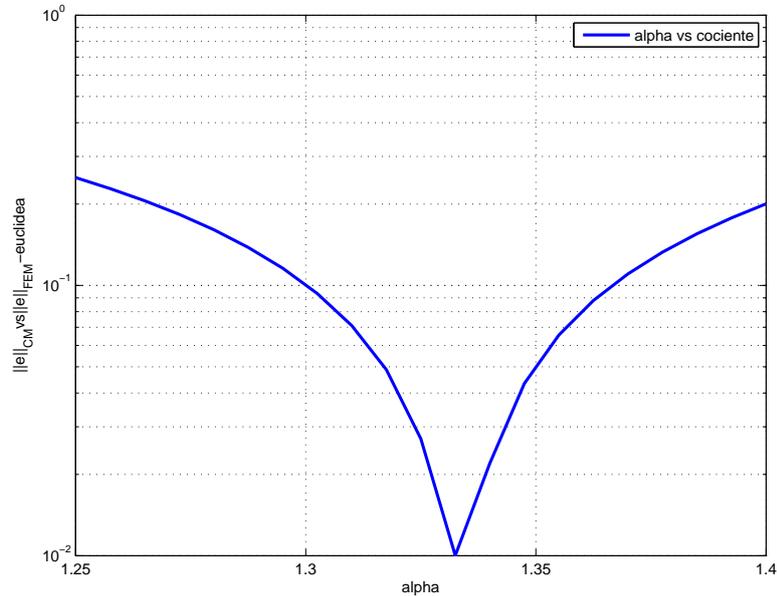


Figura 2.13: Relación (2.15) en función de α para el problema (2.21) en norma euclídea.

Los resultados de resolver el problema con las dos estrategias se presentan en las tablas 2.7 y 2.8 para distintos niveles de refinamiento, donde el error se mide en normas discretas y continuas. En una de ellas puede calcularse la tasa promedio aproximada de disminución del error medido en norma euclídea. Se obtiene $h^{1.01}$ para FEM, mientras que la estrategia GCM presenta un error con orden aproximado de $h^{2.61}$. Las gráficas de los errores se presentan en las figuras 2.14 y 2.15.

Problema de Poisson con condición de contorno Neuman				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
5.000×10^{-2}	1.0036×10^{-1}	1.2578×10^{-2}	1.6286×10^{-2}	3.7876×10^{-3}
2.500×10^{-2}	4.9345×10^{-2}	3.2386×10^{-3}	2.6396×10^{-3}	5.0940×10^{-4}
1.6666×10^{-2}	3.2694×10^{-2}	1.4418×10^{-3}	9.1135×10^{-4}	1.5341×10^{-4}
1.2500×10^{-2}	2.4442×10^{-2}	8.1104×10^{-4}	4.3082×10^{-4}	6.5658×10^{-5}
1.000×10^{-2}	1.9515×10^{-2}	5.1977×10^{-4}	2.4176×10^{-4}	3.3800×10^{-5}

Tabla 2.7: Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.21).

Problema de Poisson con condición de contorno Neuman				
h	FEM		GCM	
	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$
5.000×10^{-2}	2.6666×10^{-2}	6.7176×10^{-1}	2.0329×10^{-2}	6.7304×10^{-1}
2.500×10^{-2}	6.7441×10^{-3}	3.3736×10^{-1}	5.0868×10^{-3}	3.3750×10^{-1}
1.6666×10^{-2}	3.0038×10^{-3}	2.2509×10^{-1}	2.2617×10^{-3}	2.2513×10^{-1}
1.2500×10^{-2}	1.6909×10^{-3}	1.6886×10^{-1}	1.2724×10^{-3}	1.6888×10^{-1}
1.000×10^{-2}	1.0825×10^{-3}	1.3511×10^{-1}	8.1446×10^{-4}	1.3512×10^{-1}

Tabla 2.8: Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.21).

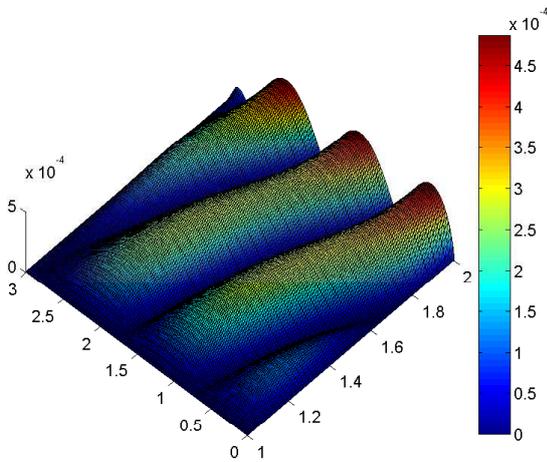


Figura 2.14: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.21).

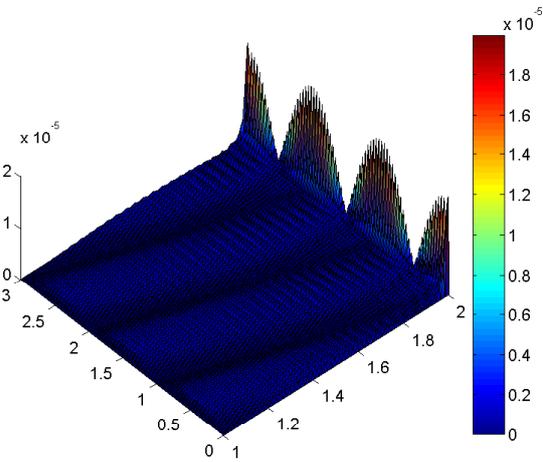


Figura 2.15: Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.21).

Errores en función del nivel de refinamiento

Se observó el comportamiento de la técnica para distintos niveles de refinamiento de la malla para el valor de α óptimo. La información correspondiente a las normas euclídea y $L_2(\Omega)$ se presentan en las gráficas 2.16 y 2.17, respectivamente.

Si a partir de la figura 2.16 se calculan las pendientes correspondientes a cada técnica se puede constatar que la correspondiente a la estrategia GCM es mayor que la asociada al método FEM, esto ejemplifica el sentido en que se produce la mejora de GCM.

Análisis de la invariancia del valor α

Para este problema, se analizó la invariancia del parámetro α en función de la norma con la cual se mide el error. Es decir, se buscó el valor de α que minimiza el error medido en las normas discretas l_2 y l_∞ y en las continuas $L_2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$. Pueden observarse en la tabla 2.9 y en la figura 2.18 los resultados obtenidos.

En la tabla 2.10 y en la figura 2.19 se presenta la relación de los errores en norma euclídea para distintos niveles de refinamiento en función del valor α . Como puede concluirse de las mismas, dicho valor no se modifica conforme se refina la malla.

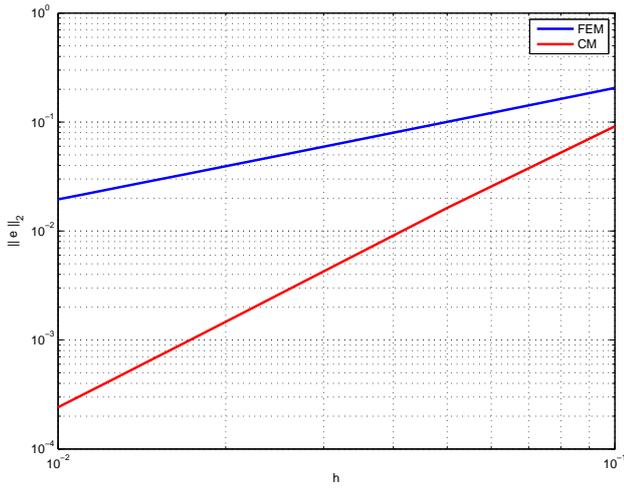


Figura 2.16: Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.21).

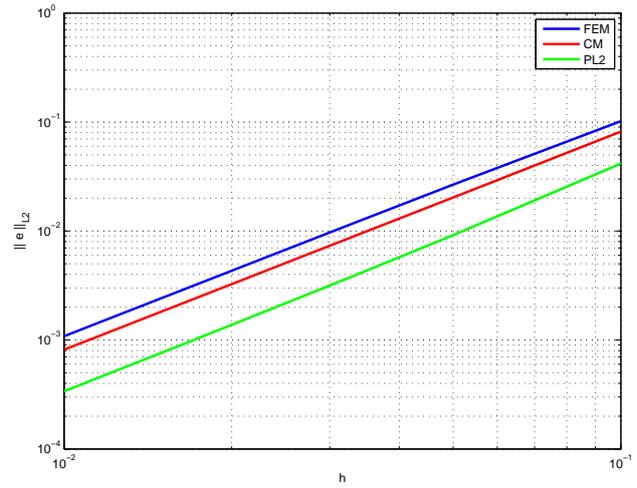


Figura 2.17: Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.21).

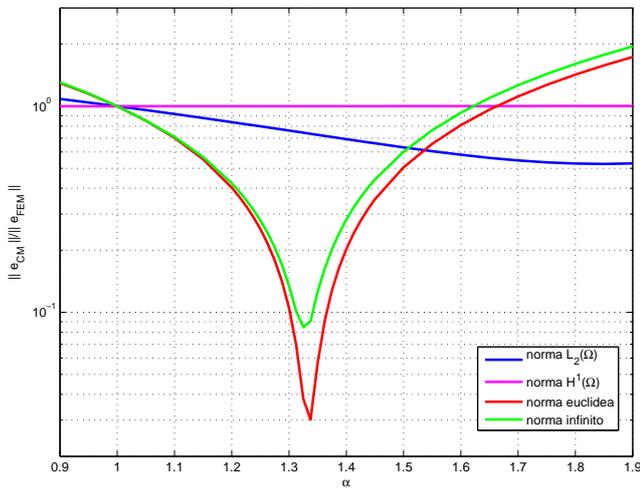


Figura 2.18: Relación entre los errores para distintas normas en función de α .

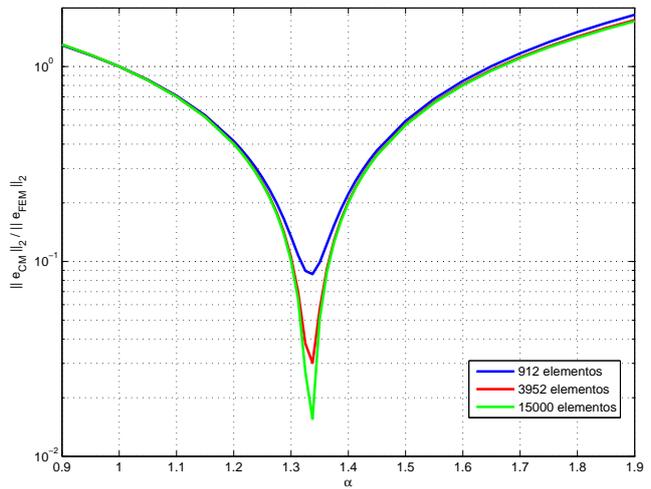


Figura 2.19: Relación de errores en norma l_2 para distintos niveles de refinamiento.

Valor de α óptimo para cada norma			
Norma l_2	Norma l_∞	Norma L_2	Norma H^1
1.33	1.33	1.85	1.00

Tabla 2.9: Estimación del valor α óptimo en distintas normas.

Valor de α óptimo para cada malla			
# elementos	912	3952	15000
α	1.33	1.33	1.33

Tabla 2.10: Estimación del valor α para distintos refinamientos.

2.5.4. Problema de Poisson con dominio perforado

El siguiente ejemplo corresponde a un problema de Poisson escalar sobre el dominio que se muestra en la figura 2.20, donde Γ es la frontera interior de forma elíptica.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = -10, \quad \text{en } \Omega \\ u(x, y) = 4, \quad \text{sobre } \Gamma \\ u(x, -2) = 16 + x^2, \quad \text{para } -3 \leq x \leq 3 \\ u(x, 2) = 16 + x^2, \quad \text{para } -3 \leq x \leq 3 \\ u(-3, y) = 9 + 4y^2, \quad \text{para } -2 \leq y \leq 2 \\ u(3, y) = 9 + 4y^2, \quad \text{para } -2 \leq y \leq 2 \end{array} \right. \quad (2.24)$$

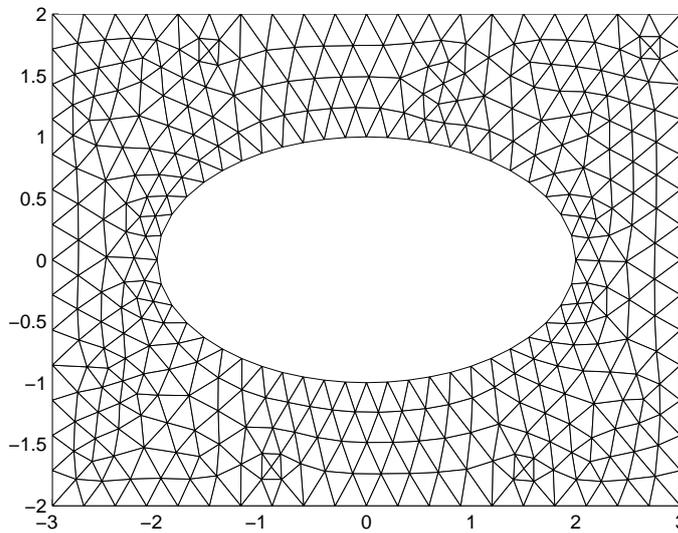


Figura 2.20: Malla más gruesa para el problema (2.24).

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = x^2 + 4y^2 \quad (2.25)$$

Sensibilidad del parámetro α

Al igual que en los problemas anteriores se realizó el análisis para la elección del factor de participación α . Los resultados nuevamente arrojaron que el valor que minimiza el error es aproximadamente $\alpha \approx 1.33$. La estrategia estudiada, conforme se refina la malla, presentó comportamientos similares para los dos problemas de Poisson considerados (2.16) y (2.21) y, por este motivo, no se incluyen con el mismo formato. La tabla 2.11 permite comparar los errores para las dos técnicas consideradas, calculados sobre la malla de la figura 2.20. Las gráficas de los errores se presentan en las figuras 2.21 y 2.22.

Problema de Poisson con dominio perforado		
Errores Normas Discretas	FEM Malla Fina	Malla Compuesta
Norma Infinito	1.2953×10^{-2}	3.5080×10^{-4}
Norma Euclídea	8.4471×10^{-2}	1.0314×10^{-3}
Errores Normas Continuas	FEM Malla Fina	Malla Compuesta
Norma $H^1(\Omega)$	1.0611	1.0633
Norma $L_2(\Omega)$	5.0374×10^{-2}	4.9282×10^{-2}
Tiempo de cálculo [s]	0.0157	0.0094

Tabla 2.11: Comportamiento de la técnica según las normas utilizadas para el problema (2.24).

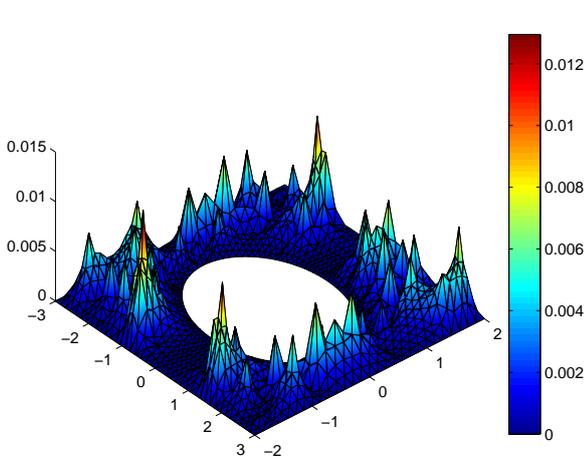


Figura 2.21: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.24).

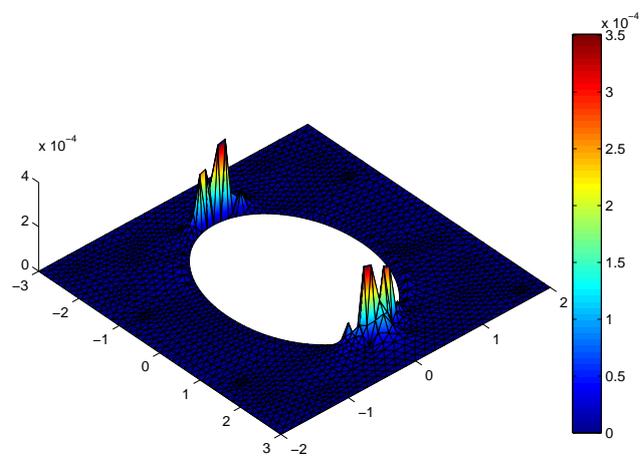


Figura 2.22: Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.24).

2.5.5. Problema difusivo puro con difusividad variable y fuente nula

El siguiente ejemplo corresponde a un problema difusivo puro escalar sobre el dominio cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, donde la matriz de difusividad es dependiente de las coordenadas del dominio.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa}(x, y) \nabla u) = 0, \quad \text{en } \Omega \\ u(0, y) = -y^2, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(1, y) = 1 - y^2, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 1) = x^2 - 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

y además

$$\boldsymbol{\kappa}(x, y) = \begin{bmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{bmatrix}$$

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad (2.27)$$

Sensibilidad del parámetro α

Como se explicó anteriormente, se llevo a cabo el cálculo del factor de participación óptimo, obteniéndose $\alpha \approx 1.33$. El valor elegido para δ es $1/3$ y el intervalo I_δ asociado es similar al obtenido en la figura 2.8.

La tabla 2.12 presenta las normas l_2 e infinito para FEM y GCM, ambas para varios niveles de discretización del dominio. La tabla 2.13 muestra los errores mencionados medidos en las normas $L_2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$. De la primera tabla se puede calcular mediante un postproceso de los datos que el error en norma l_2 disminuye con una tasa aproximada de $h^{0.85}$ para FEM, mientras que la estrategia GCM presenta un error con orden aproximado de $h^{1.86}$. Las gráficas de los errores para cada estrategia se presentan en las figuras 2.23 y 2.24.

Problema difusivo puro con difusividad variable y fuente nula				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
5.000×10^{-2}	1.1210×10^{-9}	1.3693×10^{-10}	1.1832×10^{-10}	5.1622×10^{-11}
2.500×10^{-2}	6.4196×10^{-10}	4.2391×10^{-11}	3.3855×10^{-11}	1.2989×10^{-11}
1.6666×10^{-2}	4.5512×10^{-10}	2.0935×10^{-11}	1.7276×10^{-11}	5.7830×10^{-12}
1.2500×10^{-2}	3.5437×10^{-10}	1.2625×10^{-11}	9.4100×10^{-12}	3.2554×10^{-12}
1.000×10^{-2}	2.9114×10^{-10}	8.5008×10^{-12}	6.2307×10^{-12}	2.0843×10^{-12}

Tabla 2.12: Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.26).

Problema difusivo puro con difusividad variable y fuente nula				
h	FEM		GCM	
	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$
5.000×10^{-2}	2.6352×10^{-4}	4.0825×10^{-2}	2.6352×10^{-4}	4.0825×10^{-2}
2.500×10^{-2}	6.5880×10^{-5}	2.0412×10^{-2}	6.5880×10^{-5}	2.0412×10^{-2}
1.6666×10^{-2}	2.9280×10^{-5}	1.3608×10^{-2}	2.9280×10^{-5}	1.3608×10^{-2}
1.2500×10^{-2}	1.6470×10^{-5}	1.0206×10^{-2}	1.6470×10^{-5}	1.0206×10^{-2}
1.000×10^{-2}	1.0540×10^{-5}	8.1649×10^{-3}	1.0540×10^{-5}	8.1649×10^{-3}

Tabla 2.13: Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.26).

Errores en función del nivel de refinamiento

Se observó el comportamiento de la técnica para distintos niveles de refinamiento de la malla para el valor de α óptimo. La información correspondiente a las normas euclídea y $L_2(\Omega)$ se presenta en las gráficas 2.25 y 2.26 respectivamente.

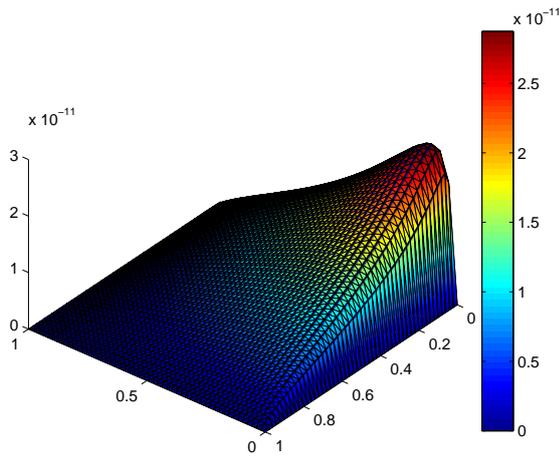


Figura 2.23: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.26).

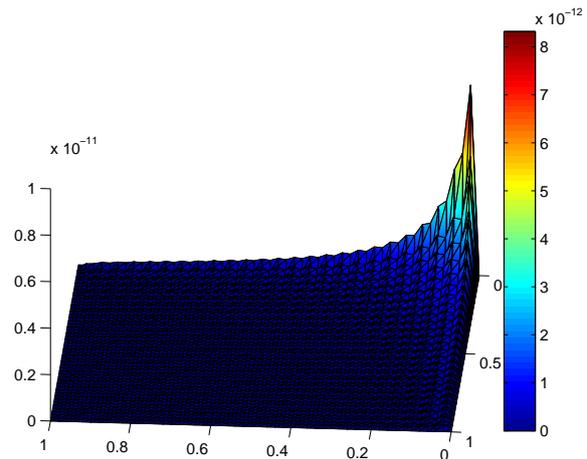


Figura 2.24: Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.26).

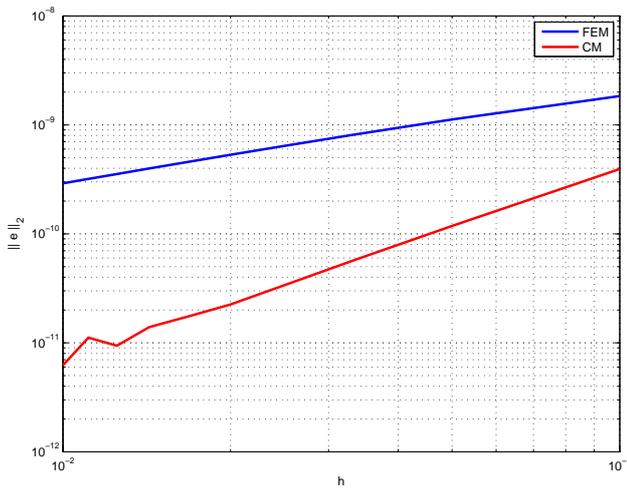


Figura 2.25: Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.26).

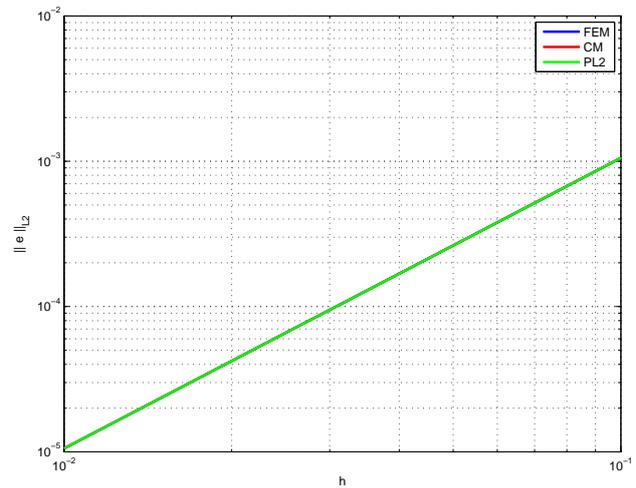


Figura 2.26: Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.26).

Como puede observarse en las figuras, la pendiente de la curva del error para GCM es más pronunciada que para FEM cuando se miden los errores en norma euclídea. Luego, puede concluirse la mejora nodal que propone el método. En el caso de la medida en norma continua $L_2(\Omega)$, las tres gráficas están prácticamente superpuestas, por lo tanto no se observa una mejora apreciable de la estrategia GCM frente a FEM.

2.5.6. Problema difusivo puro con difusividad variable y fuente no nula

El siguiente ejemplo corresponde a un problema difusivo puro escalar sobre el dominio cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, en el cual nuevamente la matriz de difusividad es variable

en el dominio pero ahora con una fuente no nula.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa}(x, y) \nabla u) = 6(y^2 - x^2), & \text{en } \Omega \\ u(0, y) = -y^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ u(1, y) = 1 - y^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 1) = x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

donde

$$\boldsymbol{\kappa}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 + x^2 & 0 \\ 0 & 1 + y^2 \end{bmatrix}$$

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad (2.29)$$

Sensibilidad del parámetro α

Cuando se realizó el análisis correspondiente a este ejemplo se obtuvo el parámetro $\alpha \approx 1.33$, el cuál coincide con el valor teórico esperado. Se determina $\delta = 1/3$ para armar el intervalo I_δ obteniéndose un comportamiento como el que se muestra en la figura 2.8. Nuevamente se evaluó la evolución de la estrategia conforme se refina la malla y se obtuvieron comportamientos similares a los presentados en los problemas anteriores. En las tablas 2.14 y 2.15 se presentan los resultados medidos en normas discretas y continuas para distintos niveles de refinamiento. Se puede calcular particularmente para la norma euclídea un decrecimiento del orden del error de aproximadamente $h^{0.99}$ para FEM y $h^{1.11}$ para GCM. Las gráficas para los errores con las dos estrategias se presentan en las figuras 2.27 y 2.28. De las tablas mencionadas se observa que el error de la solución aproximada está muy cercano a la precisión de cálculo del *software* utilizado. Luego, la mejora de GCM no puede apreciarse en los órdenes calculados ya que la solución por FEM aproxima también con errores muy pequeños a la solución exacta.

Problema difusivo puro con difusividad variable y fuente no nula				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
5.000×10^{-2}	1.9293×10^{-10}	1.7665×10^{-11}	4.7486×10^{-12}	4.1726×10^{-13}
2.500×10^{-2}	9.6597×10^{-11}	4.4220×10^{-12}	5.9928×10^{-13}	2.6195×10^{-14}
1.6666×10^{-2}	6.4762×10^{-11}	1.9665×10^{-12}	6.5258×10^{-12}	1.0887×10^{-12}
1.2500×10^{-2}	4.8345×10^{-11}	1.1067×10^{-12}	1.6225×10^{-13}	7.6605×10^{-15}
1.000×10^{-2}	3.8956×10^{-11}	7.1259×10^{-13}	5.5293×10^{-13}	1.6597×10^{-14}

Tabla 2.14: Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.28).

Problema difusivo puro con difusividad variable y fuente no nula				
h	FEM		GCM	
	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$
5.000×10^{-2}	2.6352×10^{-4}	4.0825×10^{-2}	2.6352×10^{-4}	4.0825×10^{-2}
2.500×10^{-2}	6.5880×10^{-5}	2.0412×10^{-2}	6.5880×10^{-5}	2.0412×10^{-2}
1.6666×10^{-2}	2.9280×10^{-5}	1.3608×10^{-2}	2.9280×10^{-5}	1.3608×10^{-2}
1.25×10^{-2}	1.6470×10^{-5}	1.0206×10^{-2}	1.6470×10^{-5}	1.0206×10^{-2}
1.0000×10^{-2}	1.0540×10^{-5}	8.1649×10^{-3}	1.0540×10^{-5}	8.1649×10^{-3}

Tabla 2.15: Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.28).

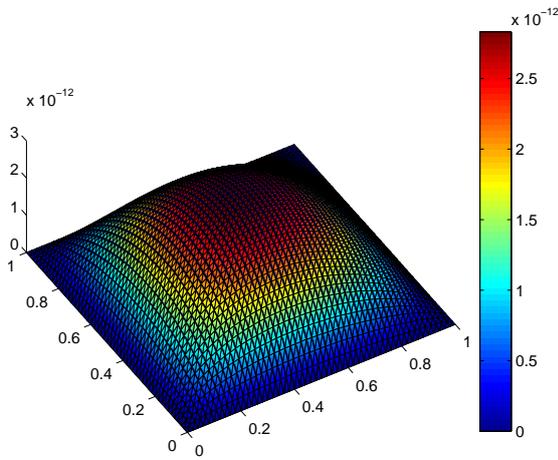


Figura 2.27: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.28).

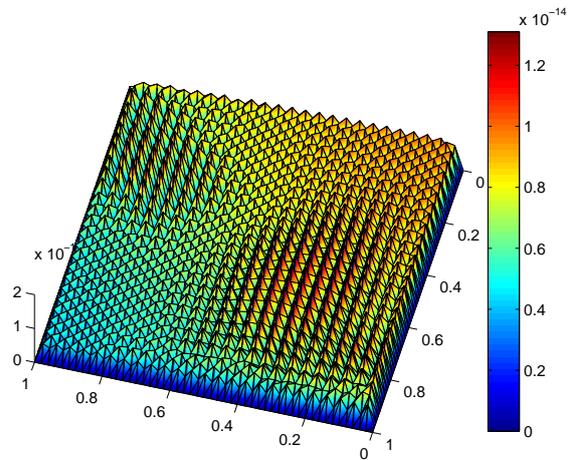


Figura 2.28: Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.28).

2.5.7. Problema difusivo puro con coeficiente difusivo variable

El siguiente ejemplo corresponde a un problema puramente difusivo con difusividad variable sobre el dominio Ω de frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ que se muestra en la figura 2.29.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\kappa(x, y) \nabla u) = 2[3(x^2 + y^2) + 2(1 + xy^3 + x^3y)], & \text{en } \Omega \\ u(x, y) = 1, & \text{sobre } \Gamma_1 \\ u(x, y) = 1 + x^2, & \text{sobre } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ u(x, y) = 1 + y^2, & \text{sobre } \Gamma_3 \end{cases} \quad (2.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\}, \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1, 0 \leq x \leq 1\}, \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, -1 \leq y \leq 1\}, \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1, 0 \leq x \leq 1\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

y además

$$\kappa(x, y) = \begin{bmatrix} 1 + x^2 & x^2 y^2 \\ x^2 y^2 & 1 + y^2 \end{bmatrix}$$

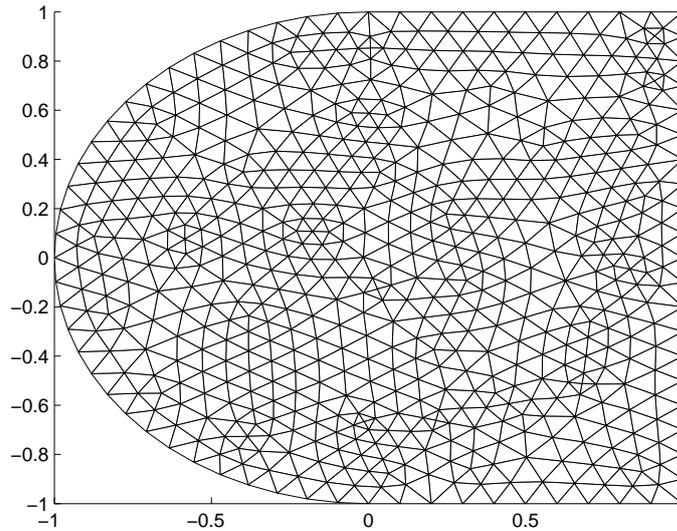


Figura 2.29: Malla más gruesa para el problema (2.30).

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad (2.32)$$

Sensibilidad del parámetro α

Al efectuarse el análisis correspondiente para este ejemplo se obtuvieron nuevamente los valores esperados para este tipo de problemas, el cuál sigue siendo $\alpha \approx 1.33$ y comparte la relación (2.15) con $\delta = 1/3$. Por lo tanto, no se presentan las gráficas correspondientes. Los resultados de las estrategias se presentan en la tabla 2.16. Las gráficas para los errores se muestran en las figuras 2.30 y 2.31.

Problema difusivo puro con difusividad variable		
Errores Normas Discretas	FEM Malla Fina	Malla Compuesta
Norma Infinito	6.5061×10^{-4}	8.6920×10^{-6}
Norma Euclídea	5.4514×10^{-3}	5.6982×10^{-4}
Errores Normas Continuas	FEM Malla Fina	Malla Compuesta
Norma $H^1(\Omega)$	4.9153×10^{-2}	4.9302×10^{-2}
Norma $L_2(\Omega)$	1.0250×10^{-3}	1.0021×10^{-3}
Tiempo de cálculo [s]	0.0379	0.0297

Tabla 2.16: Comportamiento de la técnica en distintas normas para el problema (2.30).

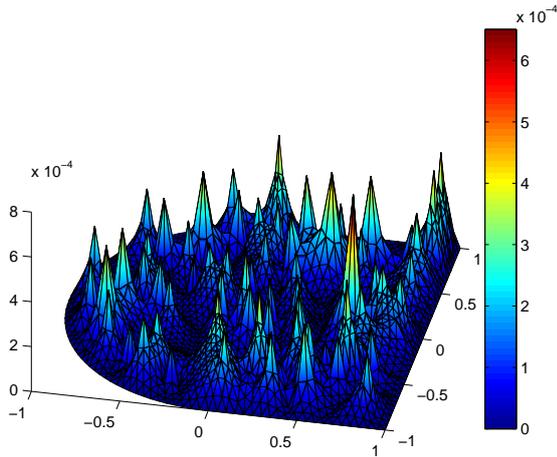


Figura 2.30: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.30).

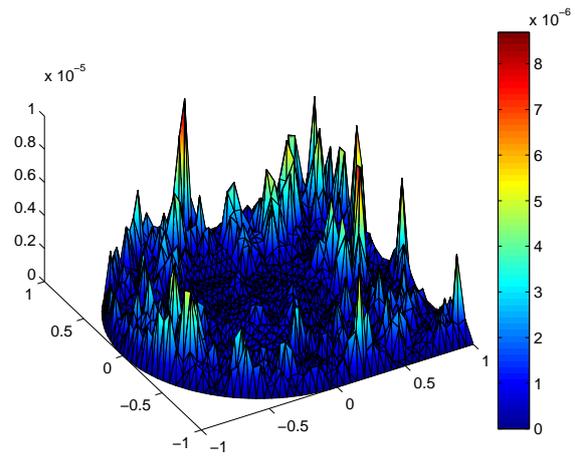


Figura 2.31: Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.30).

2.5.8. Problema de Poisson tridimensional

El siguiente ejemplo corresponde a un problema de Poisson sobre el cubo unitario $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$.

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega \\ u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.33)$$

donde la fuente es

$$f(x, y, z) = \sin(3\pi z)[F(x, y) + 9\pi^2 G(x, y)] \quad (2.34)$$

para $F(x, y)$ correspondiente a la ecuación (2.17) y $G(x, y)$ a (2.18). La solución exacta del problema está dada por

$$u(x, y) = \sin(3\pi z)G(x, y) \quad (2.35)$$

Los resultados obtenidos para FEM y GCM se presentan en la tabla 2.17. Puede observarse cómo la estrategia sigue siendo efectiva en problemas 3D básicos como el presentado a medida que se refina el dominio ya que en este caso, dada la oscilación de la solución, no se tiene una buena aproximación a la misma en las mallas más gruesas. Se trabajó con el parámetro $\alpha \approx 1.33$, correspondiente a problemas de estas características.

Problema de Poisson tridimensional		
Malla: $10 \times 10 \times 10$	Norma l_2	Norma l_∞
FEM Malla Fina	0.8145	0.1029
Malla Compuesta	0.9570	0.2461
Malla: $20 \times 20 \times 20$	Norma l_2	Norma l_∞
FEM Malla Fina	0.5895	0.0273
Malla Compuesta	0.2537	0.0286
Malla: $30 \times 30 \times 30$	Norma l_2	Norma l_∞
FEM Malla Fina	0.4834	0.0123
Malla Compuesta	0.0975	0.0058

Tabla 2.17: Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.33).

2.6. Problemas de mayor complejidad

2.6.1. Problema de transporte difusivo puro con término reactivo

El siguiente ejemplo corresponde a un problema escalar de transporte puramente difusivo con un término reactivo sobre el dominio cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = (1 - x^2 - y^2)e^{xy}, \quad \text{en } \Omega \\ u(0, y) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(1, y) = e^y, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 1) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = e^{xy} \quad (2.37)$$

Sensibilidad del parámetro α

Se estimó numéricamente el valor óptimo para el factor de participación de la composición de mallas, obteniéndose $\alpha \approx 1.33$, con $\delta = 1/3$. Para este valor se estimó el intervalo de sensibilidad con la estrategia propuesta en los ejemplos anteriores. En la figura 2.32 se observar el intervalo obtenido.

En las tablas 2.18 y 2.19 pueden observarse los resultados para ambas técnicas con distintos niveles de refinamiento de la malla, donde el error se mide en normas discretas y continuas. Como puede calcularse en particular para la norma euclídea, el orden promedio aproximado de decrecimiento del error para FEM es $h^{1.00}$ y para GCM es $h^{2.97}$. Las gráficas correspondientes a los errores se presentan en las figuras 2.33 y 2.34.

Errores en función del nivel de refinamiento

Con el objetivo de evaluar el comportamiento de la estrategia GCM conforme se refina la malla para el valor de α óptimo, se presentan las figuras 2.35 y 2.36, las cuales corresponden a la medición de los errores con las normas euclídea y $L_2(\Omega)$, respectivamente.

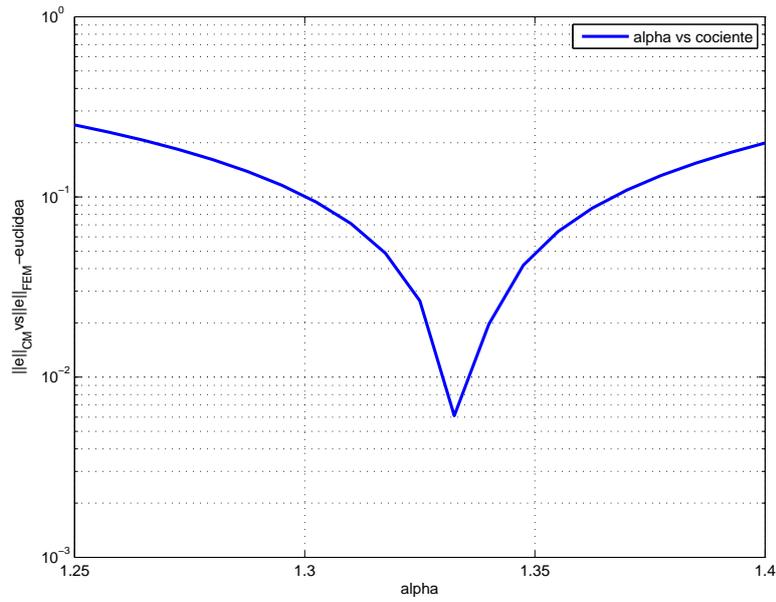


Figura 2.32: Relación (2.15) en función de α para el problema (2.36) en norma euclídea.

Problema de transporte difusivo puro con término reactivo				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
5.000×10^{-2}	2.3060×10^{-3}	2.1438×10^{-4}	7.0498×10^{-5}	1.3688×10^{-5}
2.500×10^{-2}	1.1545×10^{-3}	5.3854×10^{-5}	9.1374×10^{-6}	1.0157×10^{-6}
1.6666×10^{-2}	7.6992×10^{-4}	2.3938×10^{-5}	2.7365×10^{-6}	2.1284×10^{-6}
1.2500×10^{-2}	5.7749×10^{-4}	1.3468×10^{-5}	1.1603×10^{-6}	6.9385×10^{-8}
1.000×10^{-2}	4.6201×10^{-4}	8.6203×10^{-6}	5.9582×10^{-7}	2.8937×10^{-8}

Tabla 2.18: Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.36).

Problema de transporte difusivo puro con término reactivo				
h	FEM		GCM	
	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$
5.000×10^{-2}	6.9424×10^{-4}	6.4706×10^{-2}	7.6307×10^{-4}	6.4708×10^{-2}
2.500×10^{-2}	1.7346×10^{-4}	3.2359×10^{-2}	1.9100×10^{-4}	3.2359×10^{-2}
1.6666×10^{-2}	7.7084×10^{-5}	2.1573×10^{-2}	8.4911×10^{-5}	2.1573×10^{-2}
1.2500×10^{-2}	4.3358×10^{-5}	1.6180×10^{-2}	4.7766×10^{-5}	1.6180×10^{-2}
1.000×10^{-2}	2.7749×10^{-5}	1.2944×10^{-2}	3.0571×10^{-5}	1.2944×10^{-2}

Tabla 2.19: Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.36).

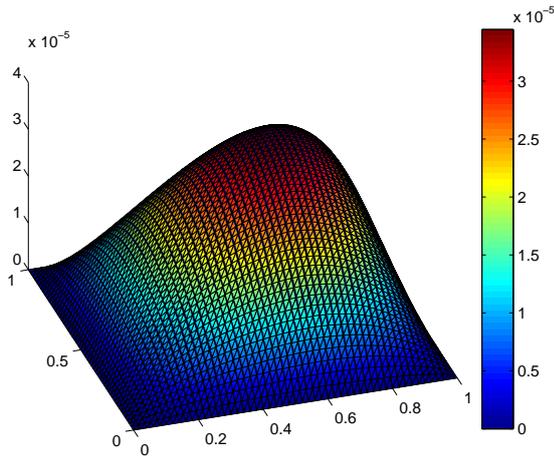


Figura 2.33: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.36).

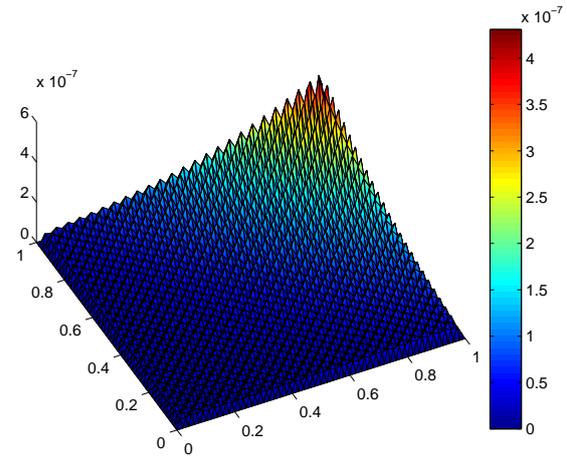


Figura 2.34: Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.36).

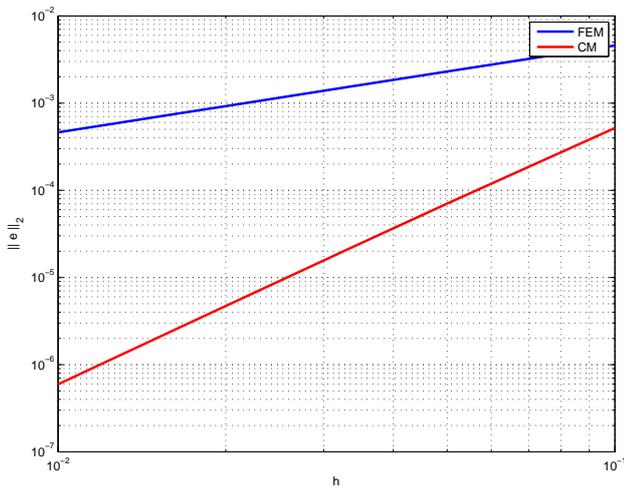


Figura 2.35: Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.36).

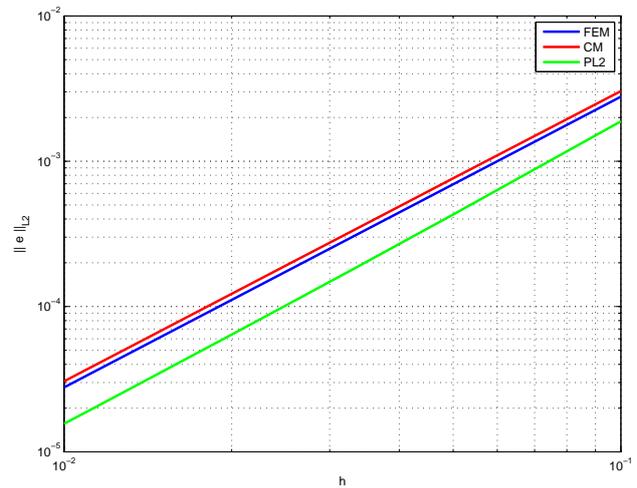


Figura 2.36: Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.36).

2.6.2. Problema advectivo-difusivo

El siguiente ejemplo corresponde a un problema escalar advectivo-difusivo sobre el dominio cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = -2(1 + 50)e^{-(x+y)}, \quad \text{en } \Omega \\ u(0, y) = e^y, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(1, y) = e^{-y}/e, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 1) = e^{-x}/e, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.38)$$

donde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = e^{-(x+y)} \quad (2.39)$$

Sensibilidad del parámetro α

Se lleva a cabo el análisis numérico correspondiente para hallar el factor de participación para este problema, obteniéndose $\alpha \approx 1.33$, con $\delta = 1/3$. En este problema se utilizó la estrategia de FEM presentada en el apéndice B.

En la figura 2.37 se observa la relación (2.15) de errores en norma euclídea para distintos valores del parámetro α , ya en un entorno I_δ de su valor óptimo.

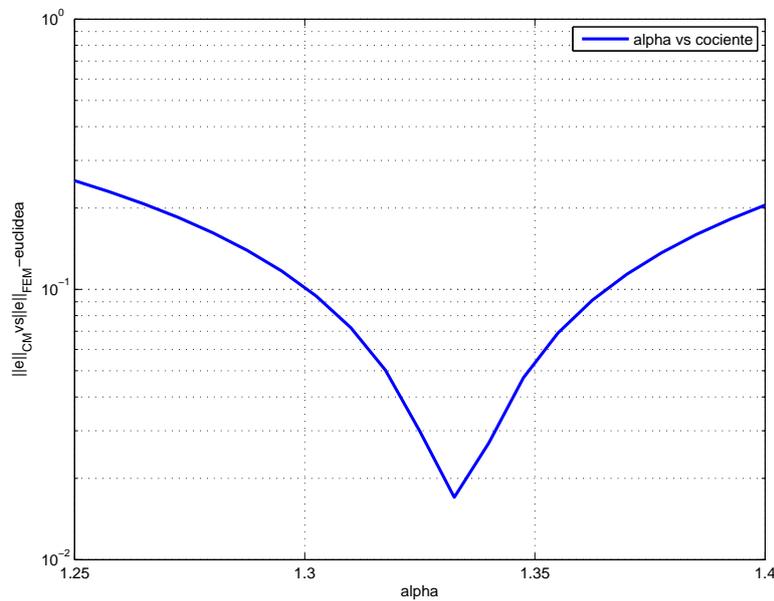


Figura 2.37: Relación (2.15) en función de α para el problema (2.38) en norma euclídea.

Los resultados correspondientes a este ejemplo se presentan en las tablas 2.20 y 2.21, medidos en normas discretas y continuas. Puede apreciarse después de un postproceso de los datos de la primera tabla, un decrecimiento aproximado del orden del error para la norma euclídea de $h^{0.98}$ para FEM y de $h^{3.44}$ para GCM. Las gráficas de los errores para las estrategias FEM y GCM se presentan en las figuras 2.38 y 2.39, respectivamente.

Como puede observarse en la tabla, los resultados obtenidos al evaluar los errores con normas continuas no presentan la mejora que sí se muestra con las normas discretas, dado que dicha mejora es en un sentido nodal.

Errores en función del nivel de refinamiento

Se observó el comportamiento de la técnica para distintos niveles de refinamiento de la malla, utilizando el valor de α óptimo para este problema en la estrategia GCM. La

Problema advectivo-difusivo				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
5.000×10^{-2}	5.5633×10^{-3}	5.1249×10^{-4}	2.8178×10^{-3}	2.6131×10^{-4}
2.500×10^{-2}	2.8991×10^{-3}	1.3347×10^{-4}	7.3103×10^{-5}	7.1544×10^{-6}
1.6666×10^{-2}	1.9455×10^{-3}	5.9689×10^{-5}	2.3732×10^{-5}	1.4136×10^{-6}
1.2500×10^{-2}	1.4623×10^{-3}	3.3644×10^{-5}	1.0492×10^{-5}	4.4715×10^{-7}
1.000×10^{-2}	1.1710×10^{-3}	2.1551×10^{-5}	5.5082×10^{-6}	1.8295×10^{-7}

Tabla 2.20: Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.38).

Problema advectivo-difusivo				
h	FEM		GCM	
	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$
5.000×10^{-2}	2.5372×10^{-4}	1.9818×10^{-2}	2.3749×10^{-4}	1.9759×10^{-2}
2.500×10^{-2}	6.5150×10^{-5}	9.8839×10^{-3}	7.3908×10^{-5}	9.8676×10^{-3}
1.6666×10^{-2}	2.9096×10^{-5}	6.5835×10^{-3}	3.2817×10^{-5}	6.5778×10^{-3}
1.2500×10^{-2}	1.6394×10^{-5}	4.9358×10^{-3}	1.8470×10^{-5}	4.9333×10^{-3}
1.000×10^{-2}	1.0500×10^{-5}	3.9479×10^{-3}	1.1826×10^{-5}	3.9466×10^{-3}

Tabla 2.21: Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.38).

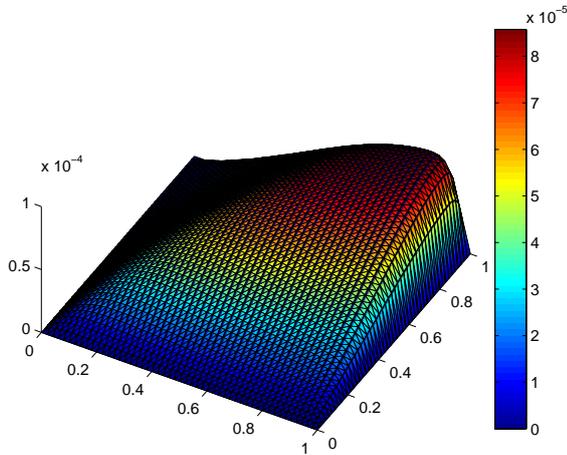


Figura 2.38: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.38).

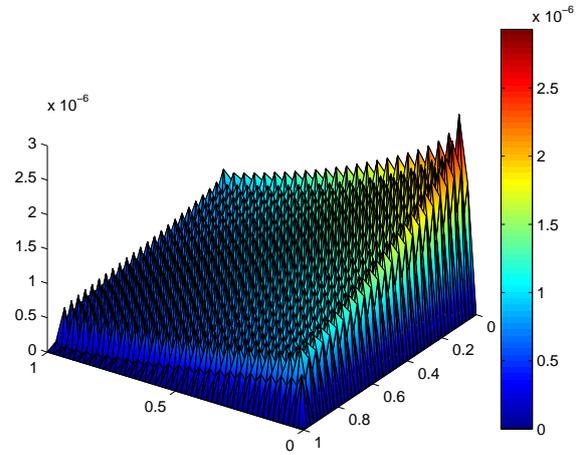


Figura 2.39: Error en valor absoluto de la solución GCM para el problema (2.38).

información correspondiente a las normas euclídea y $L_2(\Omega)$ se presentan en las gráficas 2.40 y 2.41, respectivamente.

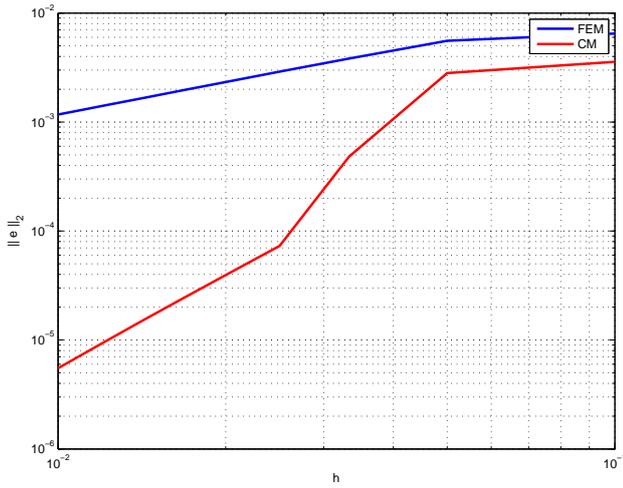


Figura 2.40: Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.38).

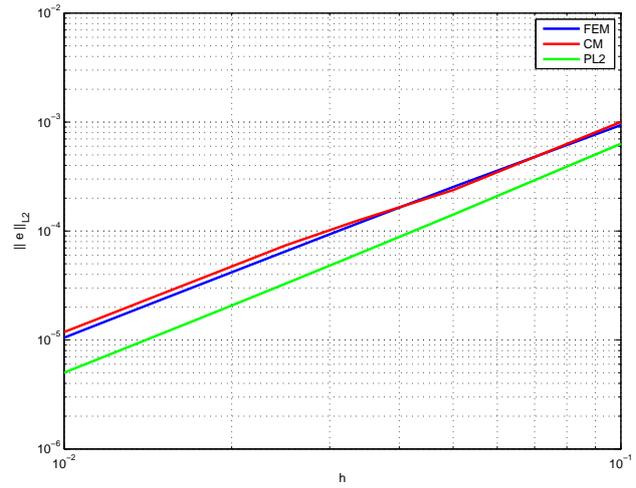


Figura 2.41: Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.38).

2.6.3. Problema advectivo-difusivo con capa límite

El siguiente ejemplo corresponde a un problema escalar advectivo-difusivo con advección dominante. El dominio consiste en el cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0, \quad \text{en } \Omega \\ u(0, y) = \frac{e^{50y} - e^{50}}{1 - e^{50}}, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = \frac{e^{50x} - e^{50}}{1 - e^{50}}, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.40)$$

donde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = \left(\frac{e^{50x} - e^{50}}{1 - e^{50}} \right) \left(\frac{e^{50y} - e^{50}}{1 - e^{50}} \right) \quad (2.41)$$

En este problema se utilizó la formulación FEM presentada en el apéndice B. La malla para este problema se presenta en la figura 2.42, en la cual se refina hacia los bordes del dominio en el cual se encuentra la capa límite. Este refinamiento se lleva a cabo con el objetivo de obtener una buena aproximación de la región donde se presentan los gradientes más elevados.

Sensibilidad del parámetro α

El valor que minimiza el error será entonces el valor óptimo de α para este problema. Se observa en la figura 2.43 que dicho valor es $\alpha \approx 1.215$.

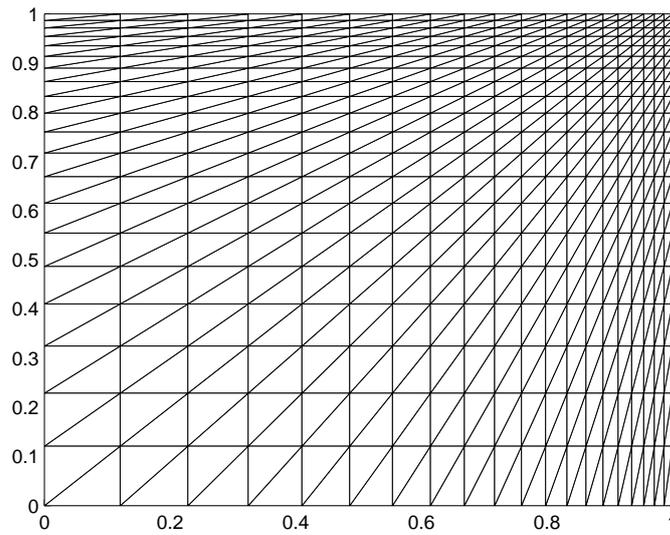


Figura 2.42: Malla más gruesa para el problema (2.40).

Para este problema el valor para la condición propuesta para el intervalo de sensibilidad es modificado con respecto a los problemas anteriores, adoptándose $\delta = 3/5$ en la ecuación (2.15). Esto se debe a que no se puede encontrar un valor de α que verifique la relación con $\delta = 1/3$ para este ejemplo.

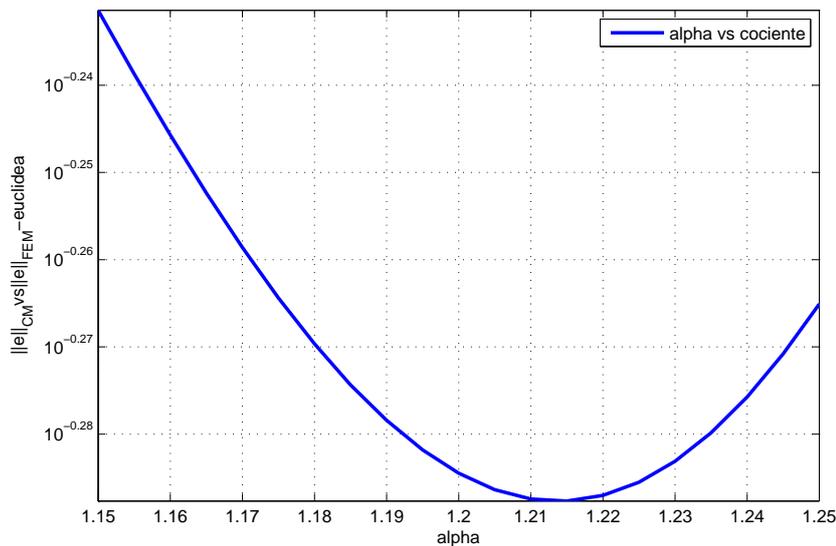


Figura 2.43: Relación (2.15) en función de α para el problema (2.40) en norma euclídea.

En las tablas 2.22 y 2.23 se presentan los errores para distintos niveles de refinamiento,

medidos en normas discretas y continuas. Mediante el cálculo del decrecimiento promedio del error para la norma euclídea se obtiene $h^{1.01}$ para FEM y $h^{1.13}$ para GCM. Las gráficas de los errores para cada técnica se presentan en las figuras 2.44 y 2.45.

Problema advectivo-difusivo con advección dominante				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
5.000×10^{-2}	1.9025×10^{-1}	2.9683×10^{-2}	9.8820×10^{-2}	1.9196×10^{-2}
2.500×10^{-2}	9.3098×10^{-2}	7.5353×10^{-3}	3.8801×10^{-2}	3.4711×10^{-3}
1.6666×10^{-2}	6.1770×10^{-2}	3.3547×10^{-3}	2.4722×10^{-2}	1.3567×10^{-3}
1.2500×10^{-2}	4.6247×10^{-2}	1.8880×10^{-3}	1.8366×10^{-2}	7.6009×10^{-4}
1.000×10^{-2}	3.6968×10^{-2}	1.2086×10^{-3}	1.4670×10^{-2}	4.8562×10^{-4}

Tabla 2.22: Comportamiento de la técnica en función de h en normas discretas para el problema (2.40).

Problema advectivo-difusivo con advección dominante				
h	FEM		GCM	
	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$	Norma $L_2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$
5.000×10^{-2}	1.0351×10^{-2}	1.3941	7.8137×10^{-3}	1.3906
2.500×10^{-2}	2.6136×10^{-3}	7.0093×10^{-1}	1.9486×10^{-3}	6.9998×10^{-1}
1.6666×10^{-2}	1.1641×10^{-3}	4.6770×10^{-1}	8.6786×10^{-4}	4.6737×10^{-1}
1.2500×10^{-2}	6.5533×10^{-4}	3.5088×10^{-1}	4.8906×10^{-4}	3.5073×10^{-1}
1.000×10^{-2}	4.1957×10^{-4}	2.8074×10^{-1}	3.1340×10^{-4}	2.8066×10^{-1}

Tabla 2.23: Comportamiento de la técnica en función de h en normas continuas para el problema (2.40).

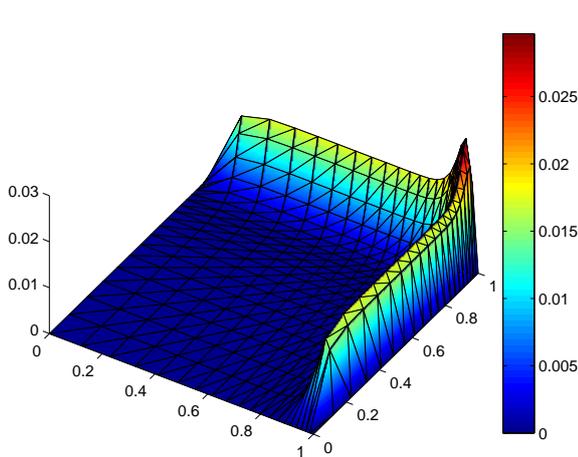


Figura 2.44: Error en valor absoluto de la solución FEM para el problema (2.40).

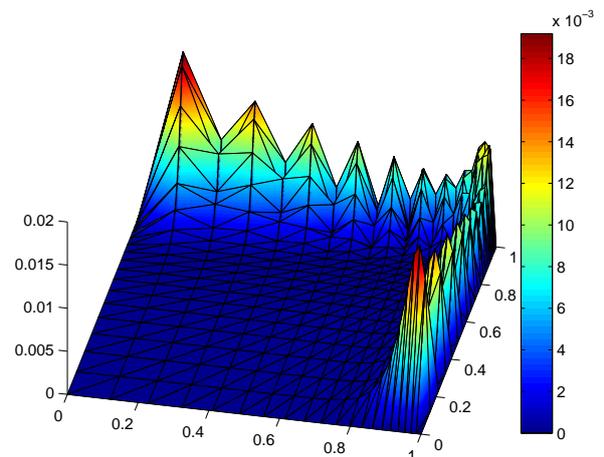


Figura 2.45: Error en valor absoluto de la solución GCM para problema (2.40).

Errores en función del nivel de refinamiento

Se observó el comportamiento de la técnica para distintos niveles de refinamiento de la malla para el valor de α óptimo. La información correspondiente a las normas euclídea y $L_2(\Omega)$ se presenta en las gráficas 2.46 y 2.47, respectivamente.

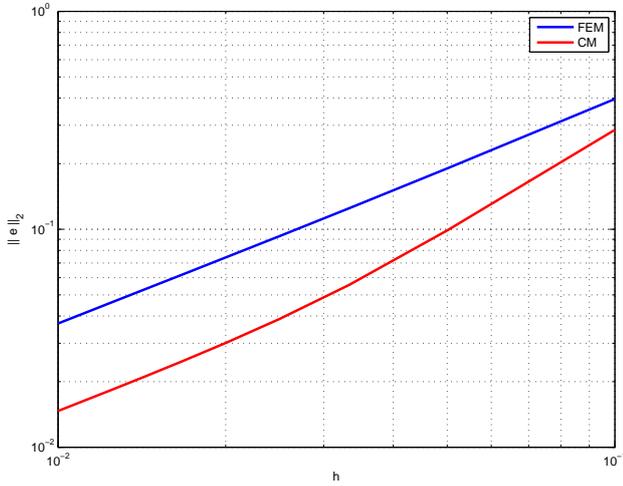


Figura 2.46: Error en función de h en norma euclídea para el problema (2.40).

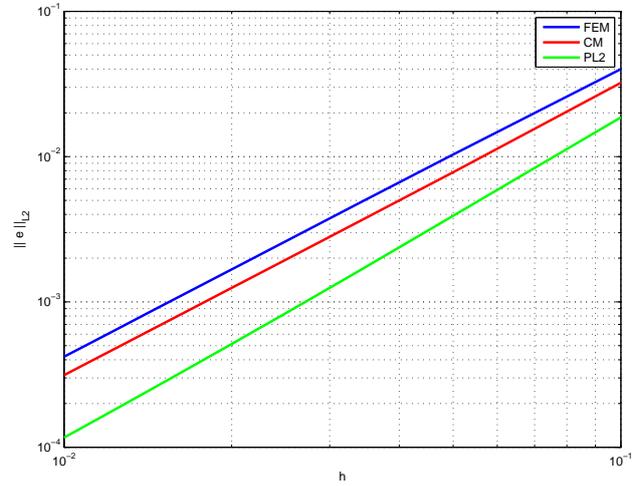


Figura 2.47: Error en función de h en norma $L_2(\Omega)$ para el problema (2.40).

2.6.4. Problemas de Laplace en dominios con ángulo entrante

Se considera una familia de problemas de Laplace con condiciones de borde Dirichlet sobre dominios de ángulo entrante, con vértice $(0.5, 0.5)$. La solución exacta para cada caso se presenta a continuación en función del ángulo de apertura 2β

$$u(r, \theta) = r^{\pi/\omega} \cos\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) \quad (2.42)$$

donde $\omega = 2\pi - 2\beta$ y

$$r = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.43)$$

$$\theta = \arctan \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

En la figura 2.48 se presenta el dominio general para la familia de problemas propuesta, el cual consiste en un cuadrado unitario con un ángulo entrante 2β que se analizará en un rango de valores entre $\pi/180$ y $(361/360)\pi$. La apertura en el dominio genera un vértice que constituye un punto singular en la frontera del mismo [3, 14]. La mayor regularidad de la solución analítica al presente problema es $H^{1+\pi/\omega}$ y, por lo tanto, se tiene la siguiente estimación para la norma $L_2(\Omega)$ del error de la solución por elementos finitos [20]

$$\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{1+\pi/\omega} |u|_{H^{1+\pi/\omega}} \quad (2.44)$$

donde C es una constante.

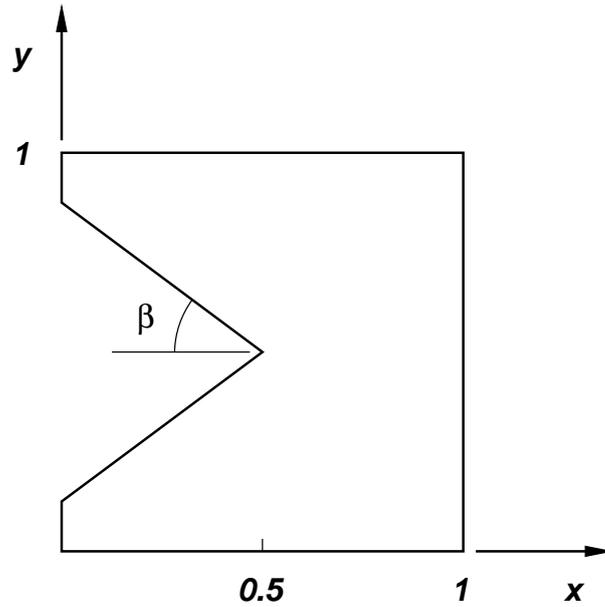


Figura 2.48: Dominio para el problema 2.6.4.

Sensibilidad del parámetro α

Para varios valores del ángulo β en el intervalo analizado se determinó la norma euclídea del error nodal en función del factor de participación con el objetivo de obtener el valor óptimo para cada caso.

En la figura 2.49 se presenta la relación de las normas l_2 del error nodal para la técnica GCM y FEM en función de α . Como se observa, en todos los casos analizados existe un valor de α que minimiza la norma del error nodal. No obstante, existe una gran variación entre estos valores y en la reducción del error que se obtiene en cada caso. En la figura 2.50 se puede observar cómo varía este óptimo con el ángulo β . En el mismo gráfico se representó la estimación de este valor que surge de la ecuación (2.14), dado por

$$\tilde{\alpha} = \frac{2^{1+\pi/\omega}}{2^{1+\pi/\omega} - 1} \quad (2.45)$$

Se observa un acuerdo aceptable para ángulos mayores a $\pi/4$, alejándose la estimación respecto del valor hallado experimentalmente a medida que $\beta \rightarrow 0$. Este resultado no se contradice con la teoría, dado que el α aumenta cuando disminuye la regularidad, y dicho valor α se calculó con la máxima regularidad posible.

La variedad de ejemplos presentada hasta el momento ha dejado en claro que la mejora que podría obtenerse de la aplicación de la estrategia de malla compuesta se produce en los nodos de la malla. De especial interés es el comportamiento de la norma euclídea del error nodal, dado que la misma evalúa el error extendido a todos los nodos de la malla. Asumiendo que la norma l_2 de este error nodal varía como h^γ , donde h es el tamaño de la malla, se evaluó numéricamente cómo varía el exponente γ en función del ángulo β para FEM y el método GCM. Para mallas con tamaños de elemento h_1 y h_2 , se tendrán errores

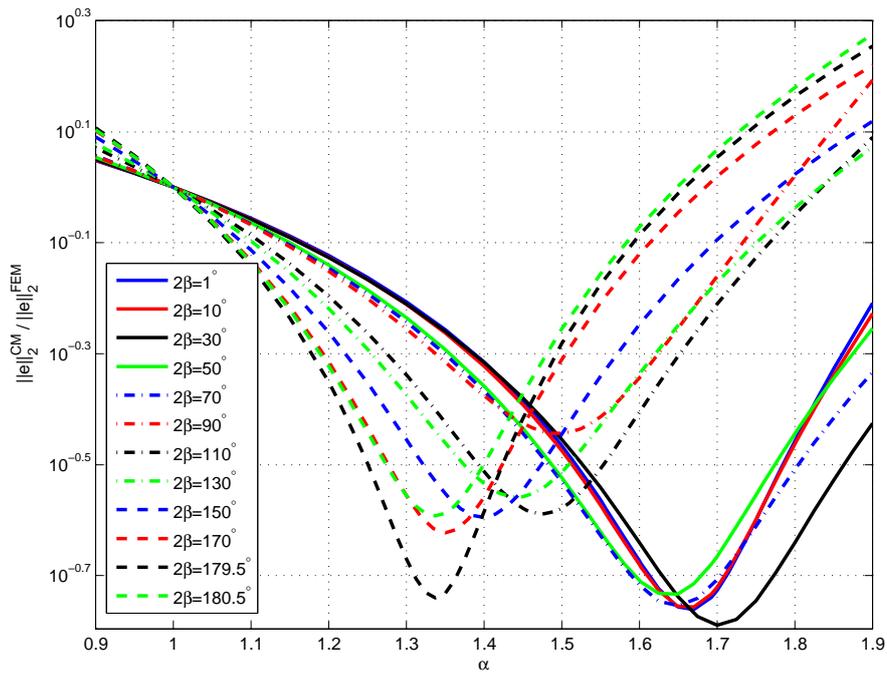


Figura 2.49: Relación (2.15) para distintos valores de β en función de α para el problema 2.6.4.

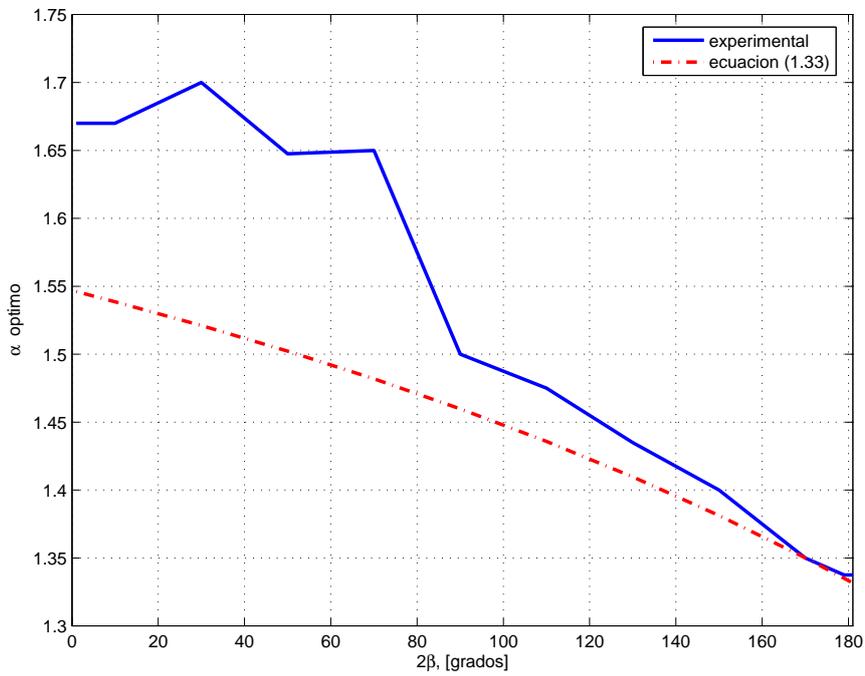


Figura 2.50: Gráfico del parámetro α óptimo en función del ángulo β para el problema 2.6.4.

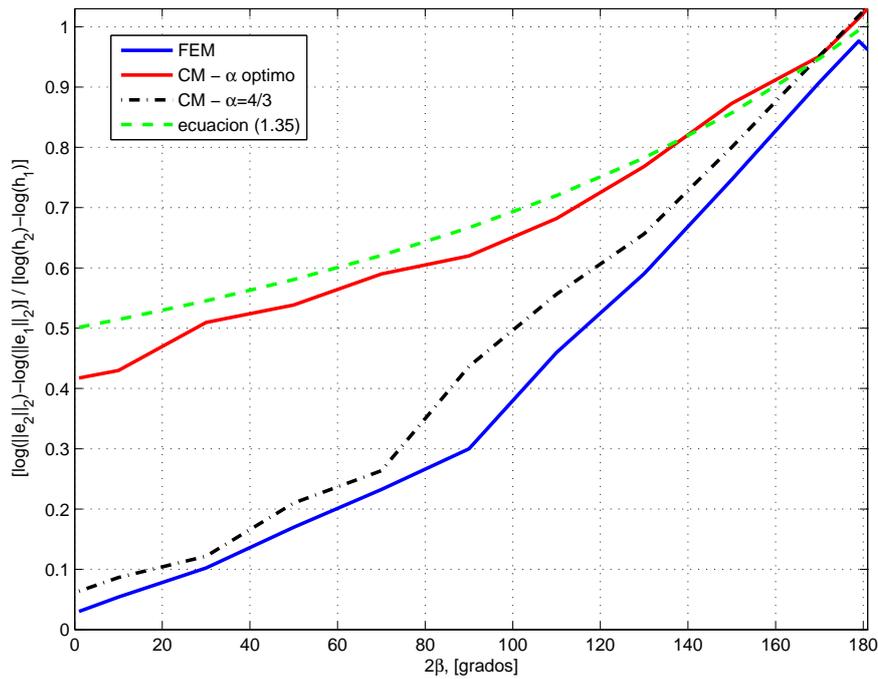


Figura 2.51: Estimación del orden empírico del error para el problema 2.6.4.

nodales \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , respectivamente. El exponente γ se estima entonces como

$$\gamma = \frac{\log(\|\mathbf{e}_2\|_2) - \log(\|\mathbf{e}_1\|_2)}{\log(h_2) - \log(h_1)} \quad (2.46)$$

Este exponente, promediando los valores del mismo entre las distintas mallas utilizadas, fue representado en función del ángulo β en la figura 2.51, tanto para FEM como para el método GCM. En la misma figura puede apreciarse la estimación del orden del error en norma l_2 que surge de la expresión (2.8), donde $p = 1 + \pi/\omega$ y $n_d = 2$

$$\|\mathbf{e}\|_2 \propto h^{\pi/\omega} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\gamma} = \frac{\pi}{\omega} \quad (2.47)$$

Análisis de la variación del valor α

Valor de α óptimo para cada norma			
Norma l_2	Norma l_∞	Norma L_2	Norma H^1
1.67	1.69	1.64	1.00

Tabla 2.24: Estimación del valor α óptimo en distintas normas.

Se considera el caso menos regular del conjunto de problemas presentados en este ejemplo, es decir $2\beta \rightarrow 0$. Se analizó la variación del parámetro α en función de la norma con la cual se mide el error. Es decir, se buscó el valor de α que minimiza el error medido en las normas discretas l_2 y l_∞ y en las continuas $L_2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$. Pueden observarse en la tabla 2.24 y en la figura 2.52 los resultados obtenidos.

Valor de α óptimo para cada malla			
# elementos	2400	9600	38400
α	1.72	1.67	1.68

Tabla 2.25: Estimación del valor α para distintos refinamientos.

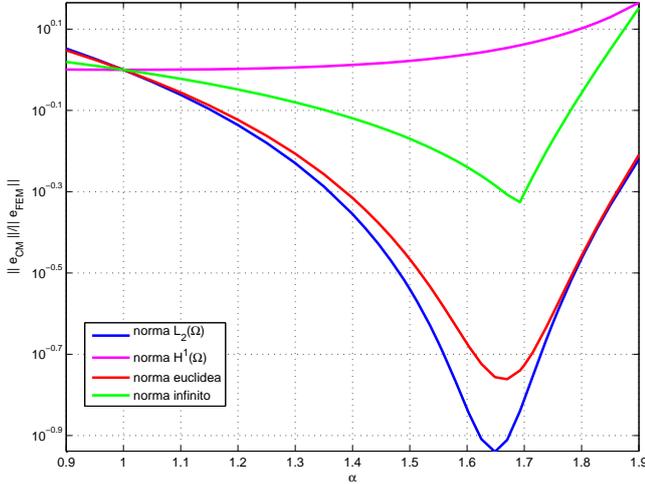


Figura 2.52: Relación entre los errores para distintas normas en función de α .

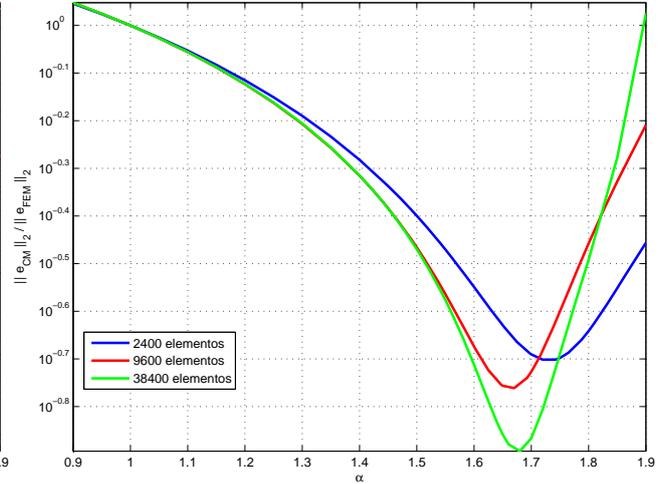


Figura 2.53: Relación de errores en norma l_2 para distintos niveles de refinamiento.

En la tabla 2.25 y en la figura 2.53 se presenta la relación de los errores en norma euclídea para distintos niveles de refinamiento en función del valor α . Como puede concluirse de las mismas, en este caso dicho valor se ve modificado conforme se refina la malla.

2.6.5. Problema difusivo con coeficiente discontinuo

El presente caso consiste en un problema de difusivo extendido al dominio cuadrado $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ el cual, dado un ángulo φ , está dividido en dos subdominios

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \Omega : 0 < \theta(x, y) < \varphi\}, \quad \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2 \tag{2.48}$$

donde (r, θ) son las coordenadas polares respecto al origen y φ es el ángulo de interface entre ambos subdominios. La figura 2.54 presenta el caso particular analizado, donde $\varphi = \pi/2$.

El coeficiente de difusión es constante a trozos y está dado por

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega_1 \\ \kappa_2 & \text{si } (x, y) \in \Omega_2 \end{cases} \tag{2.49}$$

donde κ_2 es un parámetro que, en el ejemplo particular resuelto, es igual a 100 .

La solución exacta al presente problema es la siguiente [16]

$$u(r, \theta) = r^\lambda \begin{cases} \beta \cos[\lambda(\pi - |\theta - \varphi/2|)] & \text{en } \Omega_1 \\ \cos[\lambda(\theta - \varphi/2)] & \text{en } \Omega_2 \end{cases} \tag{2.50}$$

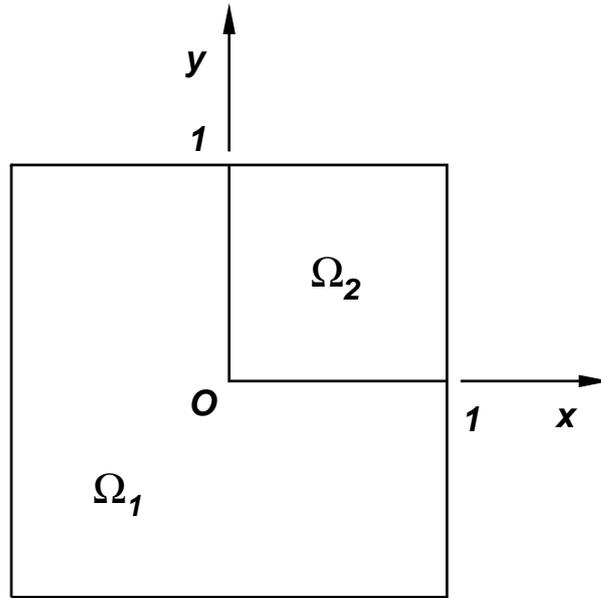


Figura 2.54: Dominio para el problema 2.6.5.

donde

$$\lambda = \frac{4}{\pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{3 + \kappa_2}{1 + 3\kappa_2}} \right), \quad \beta = -\kappa_2 \frac{\sin(\lambda\pi/4)}{\sin(3\lambda\pi/4)} \quad (2.51)$$

Las soluciones a este problema son funciones singulares de regularidad $H^{1+s}(\Omega)$, para cierto $0 < s \leq 1$ [37, 16, 30, 31]. Para el caso analizado $\kappa_2 > 1$ y $\lambda < 1$; por lo tanto $u \in H^{1+s}(\Omega)$, con $s < \lambda$. Luego, se verifica la siguiente estimación para el error de aproximación de la solución FEM

$$\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{1+s}|u|_{H^{1+s}}, \quad \text{con } s < \lambda \quad (2.52)$$

Para una malla con un tamaño promedio de elemento $h = 1.37 \times 10^{-2}$ se buscó el factor de participación óptimo para este problema. En la figura 2.55 se representan los resultados obtenidos, en la cual puede observarse la relación entre la norma euclídea del error nodal de la técnica GCM y la correspondiente norma l_2 del error nodal para FEM en función de α (relación (2.15)). En este caso, $\alpha \approx 1.475$ es el valor que verifica la mayor reducción del error. Utilizando el resultado (2.52) y la ecuación (2.14) se obtiene un factor de participación estimado

$$\tilde{\alpha} = \frac{2^{1+\lambda}}{2^{1+\lambda} - 1} \approx 1.4565, \quad \text{con } \lambda \approx 0.6739 \quad (2.53)$$

Puede observarse entonces que, para el presente problema, el valor estimado del factor α óptimo se encuentra muy cercano al calculado numéricamente.

La tabla 2.26 presenta las normas euclídea e infinito de los errores nodales para FEM y el método GCM, ambas para varios niveles de discretización del dominio. De esta tabla se puede obtener después de un postproceso de los datos que el error en norma l_2 disminuye con una tasa aproximada de $h^{0.43}$ para FEM, mientras que la estrategia GCM presenta un error con orden aproximado de $h^{0.67}$.

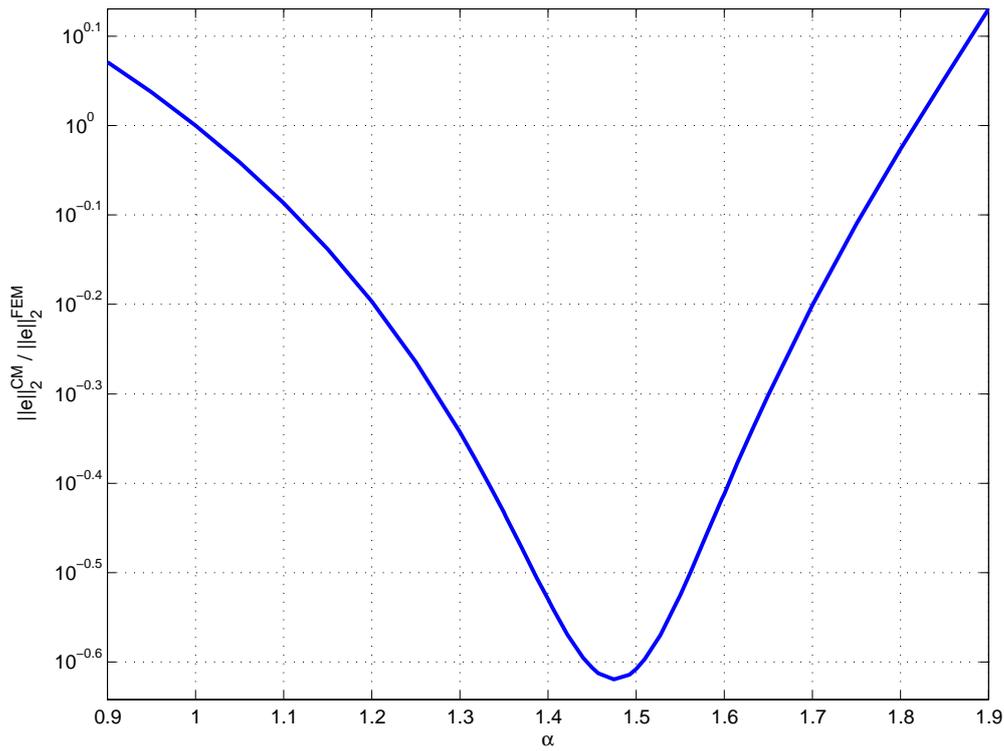


Figura 2.55: Relación (2.15) en función de α para el problema 2.6.5 en norma euclídea.

Problema difusivo con coeficiente discontinuo				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
2.7441×10^{-2}	3.1357×10^{-1}	9.7493×10^{-2}	8.9429×10^{-2}	6.6139×10^{-2}
1.3720×10^{-2}	2.2945×10^{-1}	6.1348×10^{-2}	5.5116×10^{-2}	3.8750×10^{-2}
6.8602×10^{-3}	1.7280×10^{-1}	3.8587×10^{-2}	3.4837×10^{-2}	2.4386×10^{-2}

Tabla 2.26: Comportamiento de la técnica en función de h para el problema 2.6.5.

2.6.6. Problema difusivo con singularidad en dominio con forma de L

El presente problema es similar al anterior, pero con una solución con menor regularidad. Se trata de un problema de Laplace extendido al dominio en forma de L que se esquematiza en la figura 2.56. El coeficiente difusivo también es discontinuo y está dado por

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy < 0 \\ 25.27414236908819 & \text{si } xy > 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

La solución al problema se escribe en coordenadas polares como

$$u(r, \theta) = r^{1/4} \begin{cases} \cos\left(\frac{9}{16}\pi\right) \cos\left[\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right] & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \cos\left[\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{11}{4}\pi\right)\right] & \text{si } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \\ \cos\left(-\frac{7}{16}\pi\right) \cos\left[\frac{1}{4}\left(\theta - \frac{5}{4}\pi\right)\right] & \text{si } \pi < \theta \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad (2.55)$$

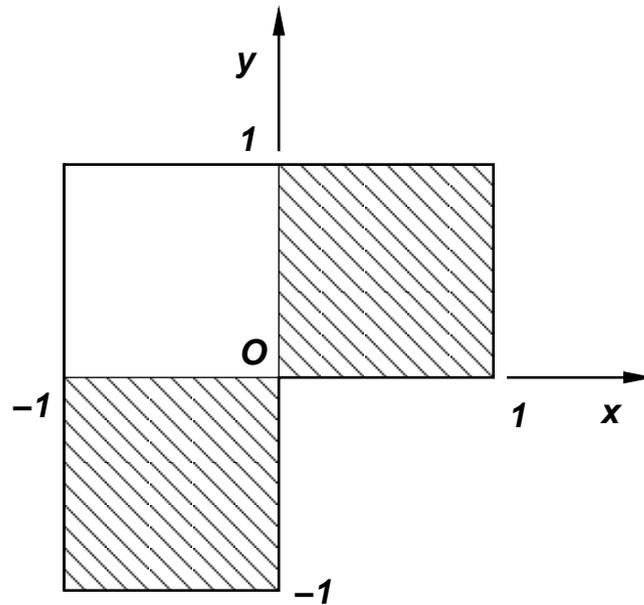


Figura 2.56: Dominio en forma de L para el problema 2.6.6.

Del mismo modo que en los problemas anteriores, se obtuvo el valor óptimo del factor de participación en forma experimental. En la figura 2.57 se representa la variación de la relación (2.15) entre la norma euclídea del error nodal para la estrategia GCM y FEM en función de α , en este caso, con una malla que posee un tamaño de elemento promedio $\bar{h} = 1.2258 \times 10^{-2}$. Como puede observarse, con $\alpha \approx 1.74$ se tiene la máxima reducción del error. Empleando la regularidad de la solución exacta y la ecuación (2.14) se tiene un valor óptimo estimado $\tilde{\alpha} \approx 1.73$.

La tabla 2.27 contiene las normas euclídea e infinito del error nodal para las técnicas GCM y FEM, con diferentes discretizaciones del dominio. De esta tabla se calcula que el orden del error en norma l_2 es $h^{0.1032}$ para FEM y $h^{0.2528}$ para el método GCM.

2.7. Conclusiones

En los diversos ejemplos presentados en este capítulo se resolvieron las ecuaciones planteadas con el método de Elementos Finitos clásico y con la estrategia de Malla Compuesta. Para cada caso se estimó el factor de participación α de la mezcla numéricamente

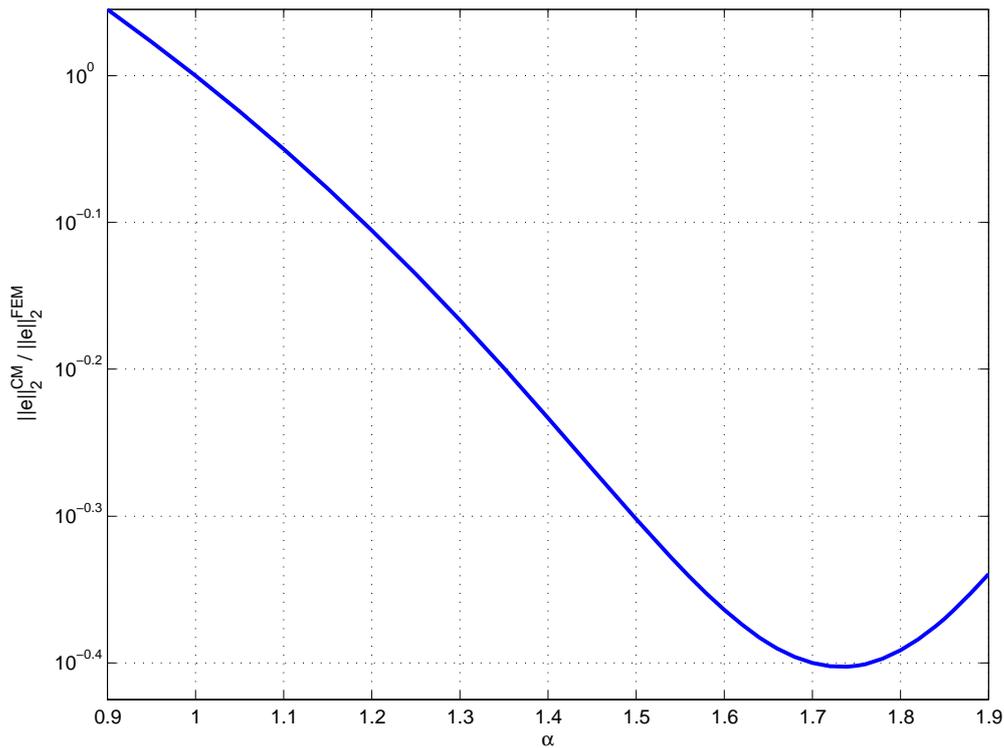


Figura 2.57: Relación (2.15) en función de α para el problema 2.6.6 en norma euclídea.

Problema difusivo con singularidad en un dominio con forma de L				
h	FEM		GCM	
	Norma l_2	Norma l_∞	Norma l_2	Norma l_∞
2.4517×10^{-2}	2.4067×10^{-2}	8.5394×10^{-3}	1.0769×10^{-2}	5.9436×10^{-3}
1.2258×10^{-2}	2.2649×10^{-2}	7.2576×10^{-3}	8.9631×10^{-3}	5.1155×10^{-3}
6.1291×10^{-3}	2.0859×10^{-2}	6.1146×10^{-3}	7.5224×10^{-3}	4.2909×10^{-3}

Tabla 2.27: Comportamiento de la técnica en función de h para el problema 2.6.6.

con el objetivo de compararlo con el valor teórico esperado, el cual está relacionado con la regularidad de la solución de cada problema considerado [14]. En la mayoría de los problemas regulares presentados ambos valores coinciden, con excepción de aquellos en los cuales la advección es dominante. Para cada ejemplo presentado se determinó un intervalo I_δ de variación del factor de participación α que asegura la reducción de la norma euclídea del error en un factor $\delta < 1$ cuando se aplica la técnica GCM (véase la ecuación (2.15)). En el caso de los problemas elípticos regulares, si bien la existencia del intervalo I_δ asegura la reducción del error de la solución GCM por un factor constante, el aspecto más relevante es alcanzar una tasa de reducción de la norma l_2 del error nodal en función del tamaño de la malla mayor que el obtenible por el método de Elementos Finitos. Para los problemas elípticos regulares, pareciera existir un único valor óptimo del factor de participación ($\alpha = 4/3$), en cuyo caso no es posible considerar ninguna variación de α respecto de su valor óptimo a fin de alcanzar las máximas tasas de reducción en el error. Esto no ocurre,

sin embargo, en los problemas con singularidades y en los que presentan advección dominante. En estos casos, es posible encontrar un entorno alrededor del α óptimo donde la reducción del error no se degrada de manera apreciable.

Las normas de los errores para la técnica GCM medidos en normas discretas siempre arrojaron mejores resultados que los obtenidos con las normas continuas debido a que la mejora propuesta por dicha estrategia es en sentido nodal. En los análisis presentados para el valor α en función del nivel de refinamiento, las pendientes en las figuras son concluyentes a la hora de comparar FEM con GCM. Claramente las pendientes para CM son más pronunciadas, evidenciando la mejora nodal esperada. Para reflejar este hecho, se calcularon las pendientes promedio para FEM y GCM medidas en norma euclídea, como puede observarse en la mayoría de los ejemplos presentados.

Para los problemas con singularidades también se evidencia la mejora de la estrategia GCM frente a FEM, pero en menor medida con respecto a los problemas sin singularidad. Esta mejora es más sustancial conforme el parámetro α se acerca al óptimo, por ejemplo, como puede observarse en la figura 2.51 para el problema 2.6.4. Se presentaron problemas con distintos tipos de singularidades con el objetivo de analizar el potencial de la estrategia. Es notable como, en estos problemas con singularidades, la tasa de decrecimiento del error para la técnica GCM se aproxima al valor ‘óptimo’ asociado de la regularidad de la solución exacta.

Capítulo 3

Estrategia Multigrilla con Malla Compuesta

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta la integración de la técnica de Malla Compuesta con la estrategia Multigrilla (MGCM). Como se presentó en el capítulo 2, cada componente de la mezcla en el método CM está asociada a una malla con distinto error de aproximación; por lo tanto, una combinación lineal apropiada entre los operadores discretos asociados a cada malla dará una solución nodalmente mejorada en comparación con la obtenida con cada malla individualmente, sin incrementar en forma considerable el costo computacional [2]. El sistema lineal resultante obtenido con la técnica CM puede resolverse mediante un método directo o bien aplicando un método iterativo. Estos últimos, además de ser fáciles de implementar, poseen la propiedad de suavizado, que permite eliminar las componentes de alta frecuencia del error en las primeras iteraciones dejando las menos oscilatorias prácticamente inalteradas. Con el objetivo de modificar los métodos de suavizado para reducir simultáneamente todas las componentes del error, es necesario una adecuada aproximación inicial a la solución del sistema. Esta aproximación podría obtenerse llevando a cabo algunas iteraciones de un método de relajación sobre una malla más gruesa debido a que tal proceso tendría menos variables a ser actualizadas y, más aún, tendrá una tasa de convergencia marginalmente mejorada [9].

Asumiendo que se aplica un esquema de relajación hasta que permanecen sólo las componentes de baja frecuencia del error, se observa cómo lucen estas componentes en una malla aún más gruesa que la primera. Dado que estas componentes son menos suaves en una grilla más gruesa, será necesario llevar a cabo una nueva relajación con el objetivo de reducirlas. Con el interrogante de cómo moverse de una malla a otra y relajar, surgió la técnica Multigrilla [1, 9, 22, 32, 41, 42, 12, 24, 25, 33, 13]. La misma presenta la ventaja de reducir simultáneamente todas las componentes del error en las sucesivas iteraciones.

La propuesta de este capítulo está basada en la modificación de los operadores discretos de algunos de los niveles dentro del algoritmo Multigrilla con el objetivo de obtener no sólo la reducción simultánea de todas las componentes del error sino también la mejora nodal de la solución por medio del método de Malla Compuesta. En una primera instancia se presentará una descripción del método Multigrilla, y luego se exhibirán algunos ejemplos de problemas elípticos con solución conocida con el fin de analizar las tasas de convergencia y la disminución en los errores de discretización.

Como antes, v_{ij} es una aproximación a la solución exacta u en los puntos (x_i, y_j) y $f_{ij} = f(x_i, y_j)$. Se tienen ahora $(m-1)(n-1)$ puntos interiores y el mismo número de incógnitas. Si se trabaja en orden lexicográfico por renglones para i constante, se obtiene que las incógnitas en la i -ésima fila se encuentran en el vector $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{i,n-1})^T$ para $1 \leq i \leq m-1$. Similarmente, simbolizando $\mathbf{f}_i = (f_{i1}, \dots, f_{i,n-1})^T$, el sistema de ecuaciones (3.5) puede escribirse en bloques de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & -a\mathbf{I} & & & \\ -a\mathbf{I} & \mathbf{B} & -a\mathbf{I} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & -a\mathbf{I} \\ & & & -a\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{f}_{m-1} \end{bmatrix},$$

donde cada bloque diagonal \mathbf{B} tiene dimensión $(n-1) \times (n-1)$ y es una matriz tridiagonal similar al problema unidimensional. Este sistema es, por lo tanto, simétrico, ralo y diagonal por bloques. Cada bloque $a\mathbf{I}$ que no pertenece a la diagonal es un múltiplo $a = 1/h_x^2$ de la matriz identidad \mathbf{I} de $(n-1) \times (n-1)$.

3.3. Métodos iterativos básicos

Se entiende por sistema ralo a aquel sistema de ecuaciones que posee una cantidad importante de coeficientes nulos. Los métodos usuales para resolver esta clase de problemas se dividen en dos categorías: los métodos directos y los métodos iterativos (o de relajación).

Los métodos directos, como el de eliminación Gaussiana, determinan una solución exacta (salvo errores de redondeo y precisión de máquina) en un número finito de pasos aritméticos.

Los métodos de relajación, tales como las iteraciones de Jacobi y Gauss Seidel, necesitan una aproximación inicial a la solución. El objetivo es mejorar la aproximación actual mediante una sucesión de pasos o iteraciones de actualización. La sucesión de aproximaciones que se genera converge bajo ciertas condiciones a la solución exacta del sistema lineal. Los métodos clásicos de relajación son fáciles de implementar y pueden aplicarse satisfactoriamente a una amplia variedad de problemas.

Dado que, en general, los esquemas de relajación tienen ciertas limitaciones, los métodos Multigrilla surgieron dentro de este tipo de métodos, con el objetivo de superarlas. Luego, en un esquema Multigrilla, los métodos de relajación se tornan competitivos con los métodos directos más rápidos y pueden aplicarse a problemas de mayor generalidad.

3.3.1. Métodos de relajación

Se simboliza con $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ al sistema correspondiente a los problemas (3.3) o (3.5). Se denotará con \mathbf{u} a la solución exacta de tal sistema y con \mathbf{v} a la solución aproximada y, en aquellos casos en que se especifique la malla Ω^h , tales soluciones se denotarán por \mathbf{u}_h y \mathbf{v}_h respectivamente.

Dado que el sistema $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ tiene solución única, se tienen dos medidas del error que se comete al aproximar \mathbf{u} con \mathbf{v} :

- Error o Error Algebraico: se define como $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ y no puede calcularse sin la solución \mathbf{u} .

- Residuo: se define como $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{v}$.

Por la unicidad de la solución, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Pero no siempre es cierto que si \mathbf{r} es pequeño en norma, también lo sea \mathbf{e} .

La ecuación que relaciona ambas medidas se denomina *ecuación residual*: $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r}$. Luego, el error satisface el mismo sistema de ecuaciones que la solución \mathbf{u} cuando el lado derecho es \mathbf{r} .

Dada la aproximación \mathbf{v} obtenida por algún método, se puede calcular el residuo. Con el objetivo de mejorar \mathbf{v} , se resuelve la ecuación residual para \mathbf{e} y se calcula la nueva aproximación utilizando la definición del error $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{e}$. Este procedimiento se conoce como *corrección residual*.

3.3.2. Método de Jacobi

Si se tiene el problema (3.3) con $\kappa = 0$ y se multiplica la ecuación por h^2 , el problema discreto que se obtiene es

$$\begin{aligned} -u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1} &= h^2 f(x_j), & 1 \leq j \leq n-1 \\ u_0 = u_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

El esquema de Jacobi o de desplazamiento simultáneo, se lleva a cabo resolviendo la j -ésima ecuación de (3.6) para la j -ésima incógnita utilizando la aproximación actual para las incógnitas $(j-1)$ y $(j+1)$. Aplicado al vector de aproximaciones actuales $\mathbf{v}^{(0)}$, el esquema iterativo en componentes queda expresado

$$v_j^{(1)} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^{(0)} + v_{j+1}^{(0)} + h^2 f_j), \quad 1 \leq j \leq n-1 \quad (3.7)$$

Una vez que se calcularon todas las componentes de $\mathbf{v}^{(1)}$, se repite el proceso con $\mathbf{v}^{(1)}$ en el lugar de $\mathbf{v}^{(0)}$ y se continúa hasta obtener la convergencia a la solución.

En forma matricial, este esquema se escribe primero expresando $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, donde \mathbf{D} es la diagonal de \mathbf{A} , $-\mathbf{L}$ y $-\mathbf{U}$ son las partes triangulares inferior y superior estrictas de \mathbf{A} , respectivamente. Luego, incluyendo h^2 en el término \mathbf{f} , el sistema $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ se transforma en $(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{u} = \mathbf{f}$, para luego obtener la matriz de iteración de Jacobi $\mathbf{T}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ y reescribir la iteración del método como

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{T}_J \mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{f}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Método de Jacobi amortiguado

Si se calcula la iteración de Jacobi (3.7) como un valor intermedio v_j^* , la iteración del método de Jacobi amortiguado se define como

$$v_j^{(1)} = (1 - \omega)v_j^{(0)} + \omega v_j^* = v_j^{(0)} + \omega(v_j^* - v_j^{(0)}), \quad 1 \leq j \leq n-1$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$ es un factor de peso que debe elegirse. El caso $\omega = 1$ recupera el método de Jacobi original. La forma matricial asociada a este método tiene la matriz de iteración $\mathbf{T}_\omega = (1 - \omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{T}_J$ y el método puede expresarse como

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{T}_\omega \mathbf{v}^{(k-1)} + \omega\mathbf{D}^{-1} \mathbf{f}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

El método de Jacobi amortiguado se puede reescribir del siguiente modo

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k-1)} + \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde la nueva aproximación se obtiene de la actual adicionándole una corrección que depende del residuo.

3.3.3. Iteraciones lineales estacionarias

El método de Jacobi es un claro ejemplo de una iteración lineal estacionaria, ya que la regla de actualización es lineal en la incógnita \mathbf{v} y no cambia de una iteración a la otra. Dado que $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r}$, resulta que $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$. Luego una iteración se puede formar haciendo

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{B}\mathbf{r}^{(k-1)} \quad (3.9)$$

donde \mathbf{B} es una aproximación a \mathbf{A}^{-1} . Si se examina esta ecuación con más detalle se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{B}\mathbf{r}^{(k-1)} &= \mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{B}(\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k-1)}) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{B}\mathbf{f} \\ &= \mathbf{T}\mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{B}\mathbf{f} \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}$. Puede probarse que,

$$\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{T}^m \mathbf{v}^{(0)} + C(\mathbf{f}) \quad (3.10)$$

donde $C(\mathbf{f})$ representa una serie de operaciones sobre \mathbf{f} . Esta fórmula se analizará más adelante.

3.3.4. Método de Gauss-Seidel

Dado que el método de Jacobi amortiguado calcula todas las componentes de la nueva aproximación antes de usar alguna de ellas, esto requiere guardar $2n$ componentes. El método de Gauss-Seidel utiliza las nuevas componentes del vector de aproximación ni bien son calculadas, reduciendo el requerimiento de almacenamiento a n . Este método es también equivalente a definir sucesivamente cada componente del vector residual a cero y resolver para la componente correspondiente de la solución.

Cuando se aplica al problema modelo (3.1), el método puede expresarse en componentes como

$$v_j^{(1)} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^{(1)} + v_{j+1}^{(0)} + h^2 f_j), \quad 1 \leq j \leq n-1 \quad (3.11)$$

En forma matricial nuevamente si $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, se puede escribir el sistema original como

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad \text{o} \quad \mathbf{u} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{u} + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{f}$$

donde esta representación corresponde a resolver la j -ésima ecuación para la incógnita u_j usando las nuevas aproximaciones de las componentes $1, 2, \dots, j-1$. Luego, la matriz de iteración de Gauss-Seidel es

$$\mathbf{T}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$$

y el método puede expresarse como

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}_G \mathbf{v} + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{f}$$

3.4. Análisis de Fourier

Con el objetivo de estudiar el comportamiento de las iteraciones lineales estacionarias, se trabaja con el sistema homogéneo $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y con aproximaciones iniciales arbitrarias para el esquema de relajación, dado que la solución exacta es conocida ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) y el error en la aproximación \mathbf{v} es simplemente $-\mathbf{v}$. Si se retoma el problema unidimensional con $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ se tiene que

$$\begin{aligned} -u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1} &= 0, & 1 \leq j \leq n-1 \\ u_0 = u_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.4.1. Pruebas numéricas

Se obtendrán importantes conclusiones del análisis de los métodos iterativos sobre este sistema de ecuaciones cuando la aproximación inicial corresponde a los modos de Fourier

$$v_{k,j} = \sin\left(\frac{jk\pi}{n}\right) \quad 0 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.13)$$

donde v_j denota una componente (o el punto de grilla asociado) del vector \mathbf{v}_k . El entero k se denomina *número de onda* o *frecuencia* e indica la cantidad de mitades de onda seno que constituyen el vector \mathbf{v} sobre el dominio del problema. El vector \mathbf{v}_k representa el modo de Fourier con número de onda k , como se presenta en la figura 3.1, en la que se ve que para pequeños valores de k estos son ondas suaves. Para ver cómo afecta la iteración

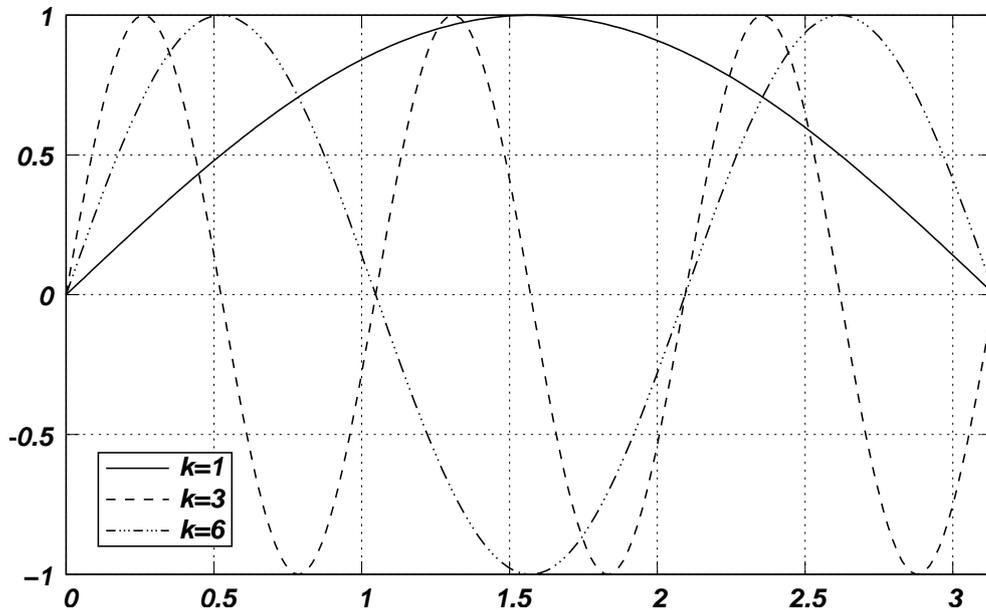


Figura 3.1: Los modos de Fourier para $k = 1, 3$ y 6 . El k -ésimo modo corresponde a $k/2$ ondas seno completas.

a los modos de Fourier, se trabajó con el método de Jacobi amortiguado para $\omega = 2/3$ en el problema (3.12) sobre una grilla de $n = 64$ puntos. Se muestra en la figura 3.2 el comportamiento del error para las primeras 100 iteraciones para las aproximaciones

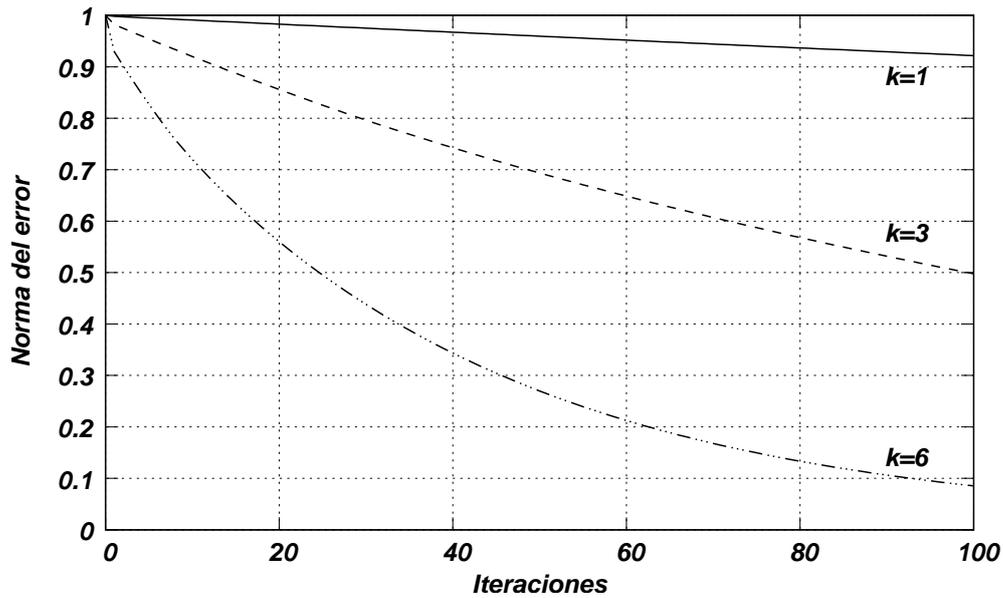


Figura 3.2: Gráfica del error máximo en función del número de iteraciones para las aproximaciones iniciales \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_3 y \mathbf{v}_6 con el método de Jacobi amortiguado con $\omega = 2/3$.

iniciales \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_3 y \mathbf{v}_6 . Se observa cómo dicho error en norma decrece con cada paso de relajación y la tasa de decrecimiento es mayor para los números de onda más grandes.

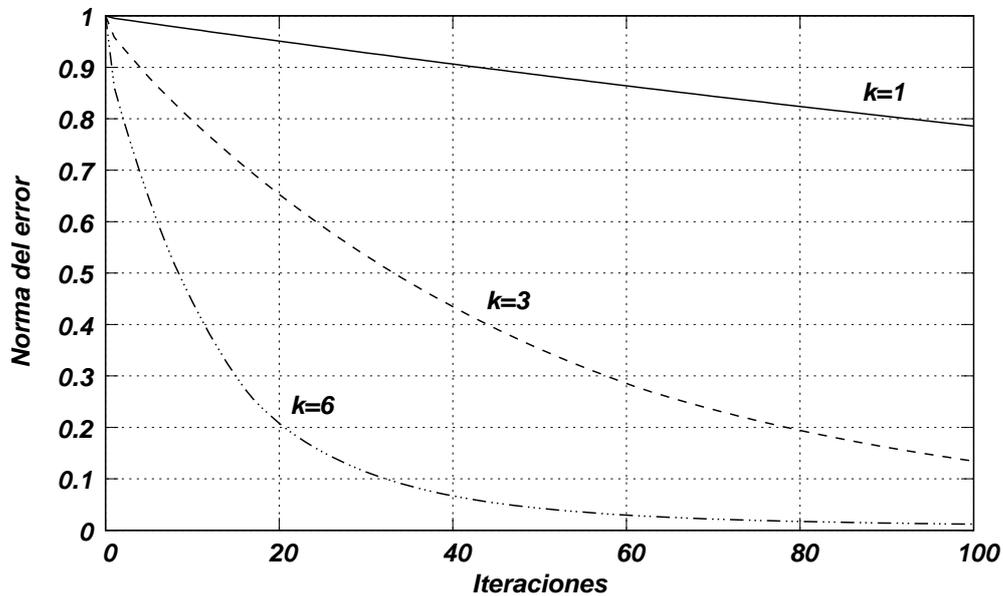


Figura 3.3: Gráfica del error máximo en función del número de iteraciones para las aproximaciones iniciales \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_3 y \mathbf{v}_6 con el método de Gauss-Seidel.

De igual manera, se presentan en la figura 3.3 las gráficas análogas para la iteración de Gauss-Seidel, donde se observa la misma relación entre la norma del error, las iteraciones y el número de onda. Si se grafica la norma de este error en escala logarítmica, se observará claramente el decrecimiento lineal del logaritmo del error, indicando un decrecimiento

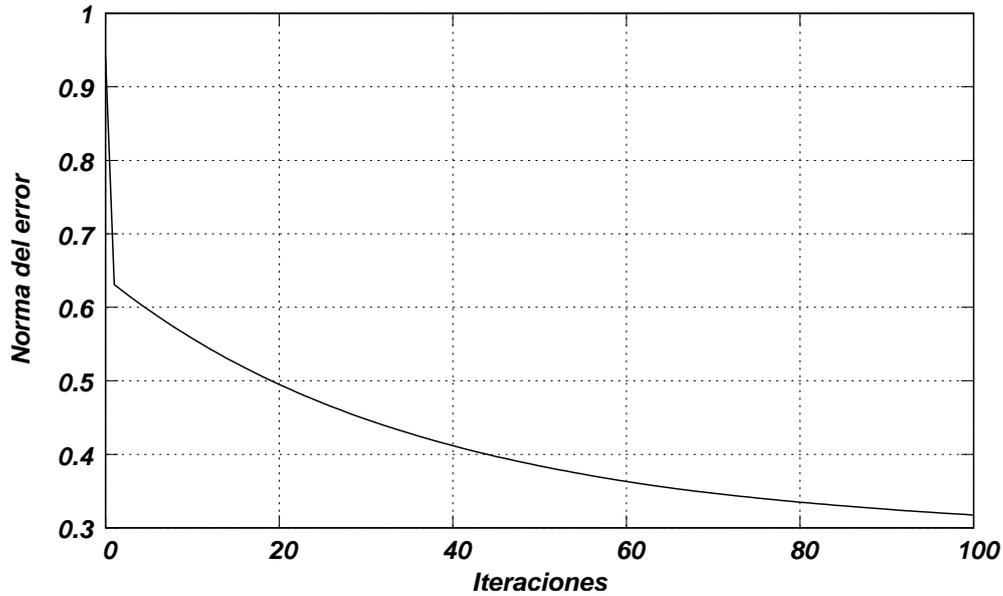


Figura 3.4: Gráfica del error máximo en función del número de iteraciones para la aproximación inicial (3.14).

geométrico del error en cada iteración.

Dado que en general las aproximaciones iniciales no dependen de un único modo, una aproximación más realista sería considerar una combinación lineal de un modo de baja frecuencia ($k = 1$), un modo de frecuencia media ($k = 6$) y un modo de alta frecuencia ($k = 32$), para obtener un vector inicial cuyas componentes están dadas por la siguiente expresión con $1 \leq j \leq n - 1$

$$v_j = \frac{1}{3} \left[\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{6j\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{32j\pi}{n}\right) \right] \quad (3.14)$$

En la figura 3.4 se presenta la norma del máximo para el error en función del número de iteraciones para esta aproximación inicial, donde se observa cómo el error decrece rápidamente dentro de las primeras cinco iteraciones. Luego de éstas su decrecimiento se torna mucho más lento. El decrecimiento inicial se debe a la rápida eliminación de los modos de alta frecuencia del error.

En los métodos de relajación clásicos, la convergencia rápida se obtiene mientras el error tenga componentes de alta frecuencia. Sin embargo, la lenta eliminación de las componentes de baja frecuencia degrada la efectividad de los mismos.

3.4.2. Deduciones analíticas

Dado que ya se ha conseguido información experimental, se procede a continuación analíticamente. Los métodos iterativos considerados hasta aquí son de la forma

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{T}\mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{g}$$

En cada caso el sistema $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ se puede escribir también bajo la forma de punto fijo

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{g}$$

Si se denota como $w_{k,j}$ a la j -ésima componente del autovector \mathbf{w}_k asociado al autovalor λ_k , las mismas están dadas por

$$w_{k,j} = \sin\left(\frac{jk\pi}{n}\right), \quad 1 \leq k \leq n-1, 0 \leq j \leq n$$

donde los autovectores de \mathbf{A} son los modos de Fourier discutidos anteriormente.

Luego los autovalores de \mathbf{T}_ω son

$$\lambda_k(\mathbf{T}_\omega) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right), \quad 1 \leq k \leq n-1$$

y los autovectores asociados son los mismos que los de \mathbf{A} . Es importante notar que si $0 < \omega \leq 1$, entonces $|\lambda_k(\mathbf{T}_\omega)| < 1$ y la iteración de Jacobi amortiguado converge.

Debido a que los autovectores de \mathbf{A} se corresponden con las autofunciones del problema continuo, se tendrán en cuenta en las siguientes deducciones. Dado que bajo determinadas condiciones se puede expandir una función arbitraria mediante el conjunto de autofunciones, es posible también expandir vectores arbitrarios en función del conjunto de autovectores.

Sea $\mathbf{e}^{(0)}$ el error inicial para el método de Jacobi amortiguado. Luego, es posible representar dicho error mediante los autovectores de \mathbf{A}

$$\mathbf{e}^{(0)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \mathbf{w}_k \quad (3.15)$$

donde los coeficientes $c_k \in \mathbb{R}$ dan el aporte de cada modo al error. Luego de m pasos de la iteración, el error está dado por

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{T}_\omega^m \mathbf{e}^{(0)},$$

y, si se utiliza la expansión (3.15), se obtiene

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{T}_\omega^m \mathbf{e}^{(0)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \mathbf{T}_\omega^m \mathbf{w}_k = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \lambda_k^m(\mathbf{T}_\omega) \mathbf{w}_k$$

dado que los autovectores de \mathbf{A} y de \mathbf{T}_ω son los mismos.

Esta expansión para $\mathbf{e}^{(m)}$ muestra que luego de m iteraciones, el k -ésimo modo del error inicial se ha reducido por un factor de $\lambda_k^m(\mathbf{T}_\omega)$. También se observa que el método de Jacobi amortiguado no mezcla modos, es decir, cuando se aplica a un modo simple, la iteración puede cambiar su amplitud pero no puede convertirlo en otro modo. En otras palabras, los modos de Fourier son también autovectores de la matriz de iteración, propiedad que no es compartida por todos los métodos estacionarios.

3.4.3. Modos de Fourier

Si se observan los modos de Fourier sobre una grilla de $n = 12$ puntos (véanse las figuras 3.5 y 3.6), el k -ésimo modo contiene $k/2$ ondas senoidales completas y tiene una longitud de onda $l = 24h/k = 2/k$, siendo el intervalo total de longitud 1. El modo correspondiente a $k = n/2$ tiene longitud de onda $l = 4h$ y el correspondiente a $k = n-1$

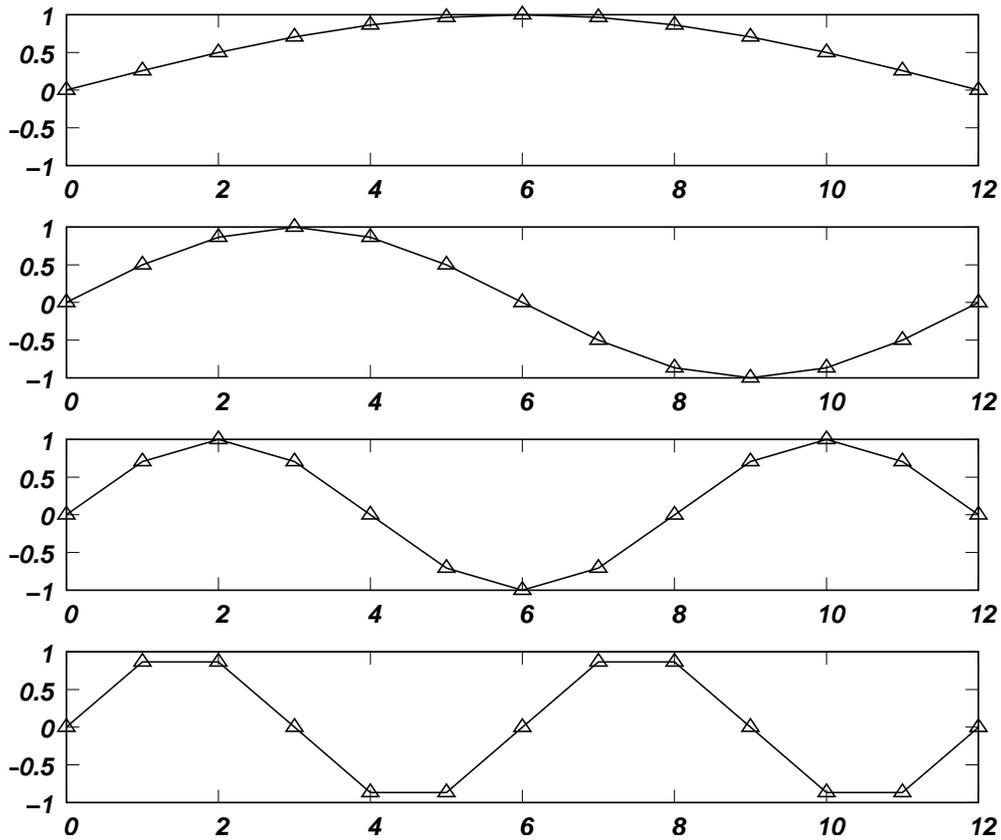


Figura 3.5: Gráfica de los modos de Fourier de \mathbf{A} con número de onda $k = 1, 2, 3$ y 4 sobre una grilla de $n = 12$ puntos, de arriba hacia abajo respectivamente.

tiene longitud de onda $l = 2h$ aproximadamente. Luego, los modos ω_k con k mayores que n no pueden representarse en la malla. Además, por el efecto de *aliasing*, una onda con longitud de onda menor que $2h$ en realidad aparece en la grilla presentada por otra de mayor longitud de onda.

Los modos en la mitad inferior del espectro, con número de onda en el rango $1 \leq k < n/2$, se denominan *modos de baja frecuencia* o *modos suaves*. Asimismo, los modos en la mitad superior del espectro, con $n/2 \leq k \leq n - 1$, se denominan *modos de alta frecuencia* o *modos oscilantes*.

3.4.4. Análisis del método Jacobi amortiguado

Retomando el análisis del método de Jacobi amortiguado, dado que los autovalores de la matriz de iteración están dados por

$$\lambda_k(\mathbf{T}_\omega) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right), \quad 1 \leq k \leq n - 1$$

con el objetivo de hallar el valor óptimo para ω se observa que, cuando $0 < \omega \leq 1$, se tiene que $|\lambda_k(\mathbf{T}_\omega)| < 1$, y se pretende entonces hallar el valor ω que asegure que $|\lambda_k(\mathbf{T}_\omega)|$ resulta tan pequeño como sea posible para todo $1 \leq k \leq n - 1$. La figura 3.7 muestra la gráfica de los autovalores λ_k para distintos valores de ω . Se observa que para los valores

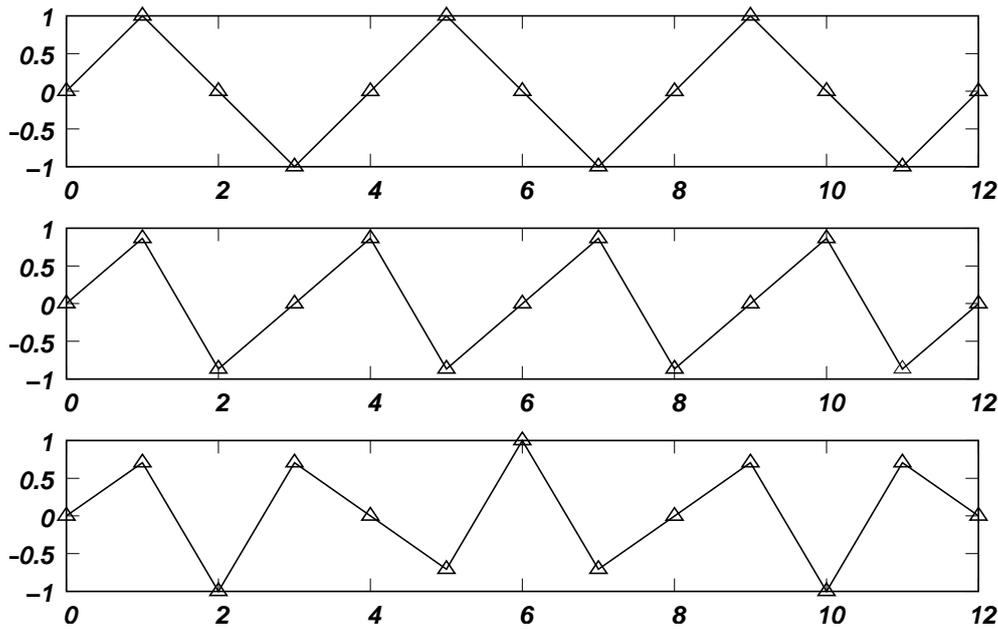


Figura 3.6: Gráfica de los modos de Fourier de \mathbf{A} con número de onda $k = 6, 8$ y 9 sobre una grilla de $n = 12$ puntos, de arriba hacia abajo respectivamente.

que satisfacen $0 < \omega \leq 1$, se tiene

$$\lambda_1 = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \approx 1 - \frac{\omega \pi^2 h^2}{2}$$

lo cual implica que λ_1 , el autovalor asociado con el modo más suave, será siempre cercano a 1 para valores pequeños de h y por lo tanto, no habrá valor de ω que pueda reducir las componentes suaves del error efectivamente. Más aún, a menor paso h , más cerca estará λ_1 de 1, es decir, cualquier intento de mejorar la aproximación a la solución (disminuyendo el paso de la grilla) sólo empeorará la convergencia de las componentes suaves del error. Esta propiedad es compartida por muchos esquemas iterativos.

Dado que no pueden reducirse las componentes de baja frecuencia del error, se estudiará qué ocurre con los modos de alta frecuencia ($n/2 \leq k \leq n-1$). Se busca el valor óptimo de ω , el cual se obtiene imponiendo la condición [9]

$$\lambda_{n/2}(\mathbf{T}_\omega) = -\lambda_n(\mathbf{T}_\omega)$$

Resolviendo, se encuentra $\omega = 2/3$. Puede notarse que para este valor de ω , $|\lambda_k| < 1/3$ para todo $n/2 \leq k \leq n-1$, lo cuál significa que las componentes de alta frecuencia se reducen por un factor de tres como mínimo en cada relajación.

Este factor de amortiguación para los modos oscilantes es una propiedad común a todos los métodos de relajación y se denomina *factor de suavizado* del esquema, el cuál no sólo es pequeño sino también independiente del tamaño de malla h .

Se aplica el método de Jacobi amortiguado al sistema $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ asociado al problema unidimensional sobre una grilla de $n = 64$ puntos. Se utiliza como aproximación inicial los modos de Fourier con número de onda $1 \leq k \leq n-1$ (que también representan los

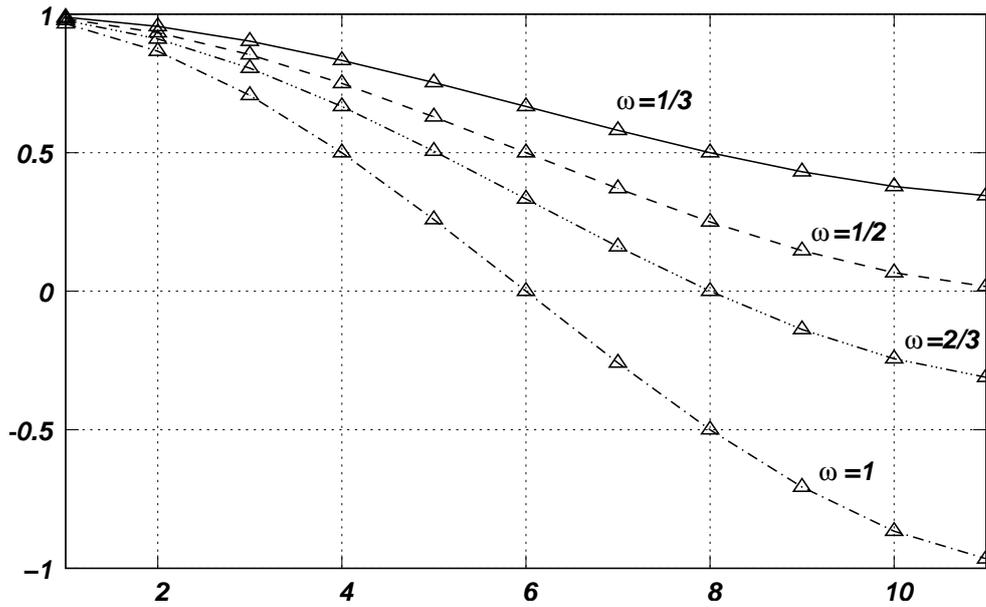


Figura 3.7: Autovalores de la matriz de iteración \mathbf{T}_ω para $\omega = 1/3, 1/2, 2/3, 1$.

errores iniciales). En las figuras 3.8 y 3.9 se muestra el número de onda del error inicial en comparación con el número de iteraciones necesarias para reducir la norma del error inicial por un factor de 100, para $\omega = 1$ y $\omega = 2/3$.

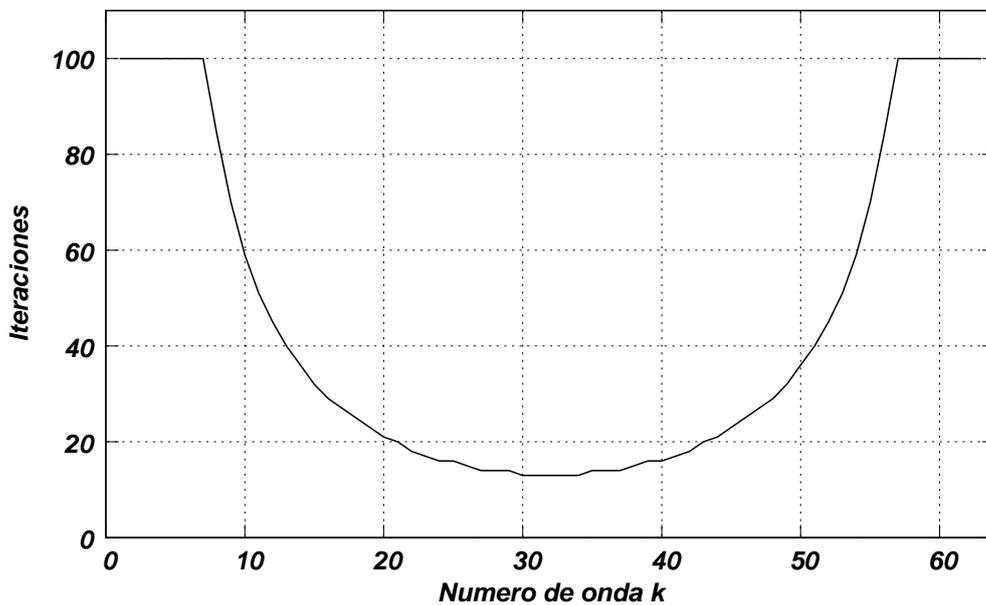


Figura 3.8: Cantidad de iteraciones del método (3.8) con $\omega = 1$ para el problema unidimensional (3.12) con $n = 64$ puntos.

- Para $\omega = 1$ tanto las componentes suaves del error como las de alta frecuencia son amortiguadas muy lentamente, mientras que las componentes con números de onda cercanos a $n/2$ son amortiguadas rápidamente.

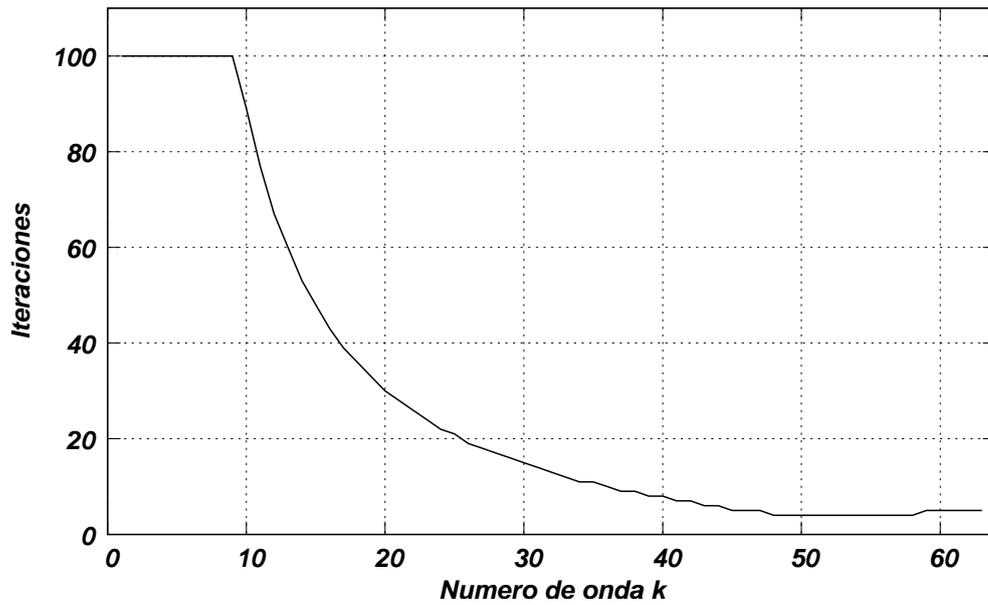


Figura 3.9: Cantidad de iteraciones del método (3.8) con $\omega = 2/3$ para el problema unidimensional (3.12) con $n = 64$ puntos.

- Para $\omega = 2/3$, dado que fue elegido de manera tal de dar prioridad a la reducción de las componentes de alta frecuencia del error, las componentes de baja frecuencia son reducidas lentamente, mientras que las componentes con números de onda mayores a $n/2$ muestran convergencia rápida.

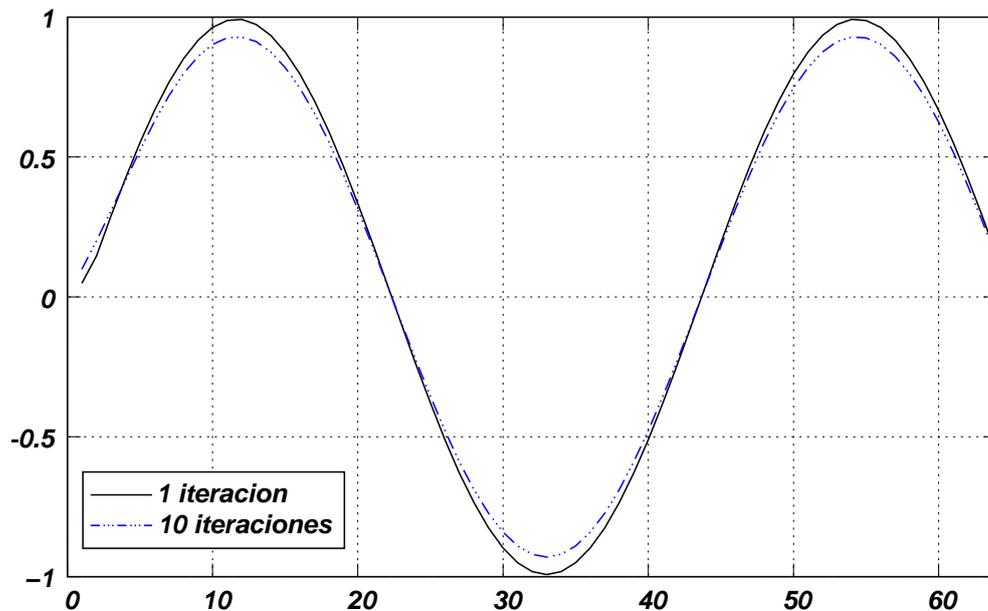


Figura 3.10: Solución en las iteraciones 1 y 10 para el problema unidimensional (3.12) mediante (3.8) con $\omega = 2/3$ para $n = 64$ y aproximación inicial \mathbf{w}_3 .

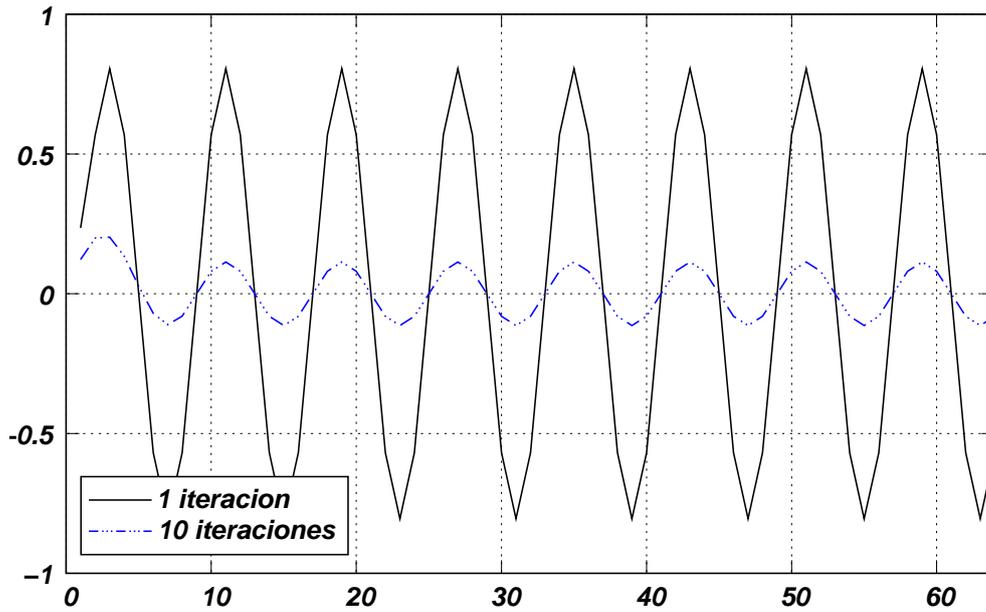


Figura 3.11: Solución en las iteraciones 1 y 10 para el problema unidimensional (3.12) mediante (3.8) con $\omega = 2/3$ para $n = 64$ y aproximación inicial \mathbf{w}_{16} .

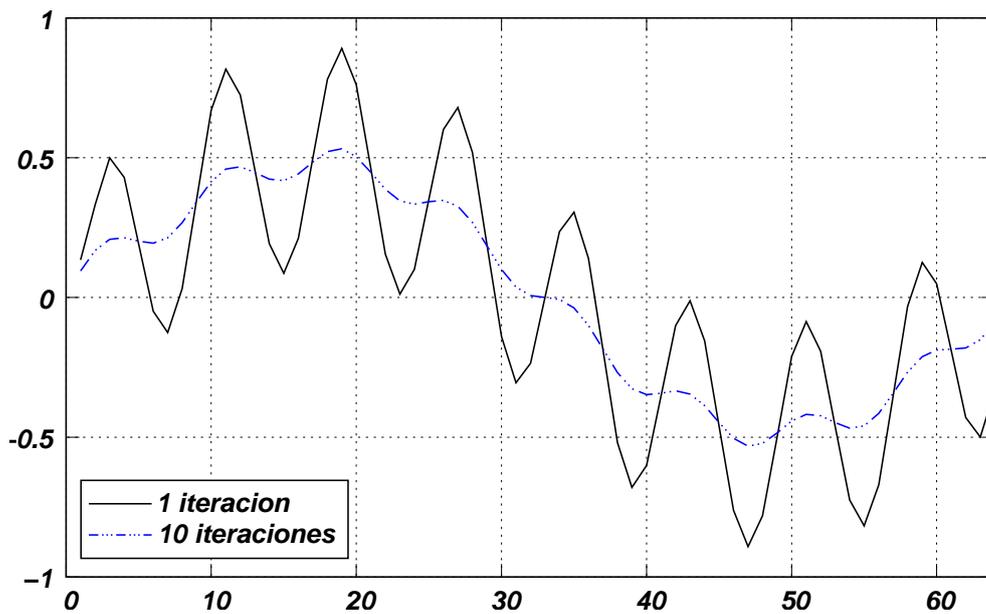


Figura 3.12: Solución en las iteraciones 1 y 10 para el problema unidimensional (3.12) mediante (3.8) con $\omega = 2/3$ para $n = 64$ y una combinación lineal de \mathbf{w}_2 y \mathbf{w}_{16} como aproximación inicial.

En las gráficas 3.10, 3.11 y 3.12 se observa otra perspectiva sobre las propiedades de convergencia. Se graficaron las aproximaciones actuales sobre la misma grilla, mostrándose en la figura 3.10 el error con $k = 3$ luego de un paso de relajación y después de 10 iteraciones. Se puede apreciar allí que las componentes suaves se redujeron lentamente. En el caso de la figura 3.11 se muestra un error más oscilante ($k = 16$) luego de una y

después de 10 iteraciones, donde se verifica una reducción importante del error.

En las gráficas se aprecia claramente que el método de Jacobi amortiguado preserva los modos, es decir, el valor de k no se modifica con las sucesivas iteraciones.

En el caso de la figura 3.12, se observa la selectividad de la propiedad de amortiguación. Se presenta una aproximación inicial que consiste en la superposición de dos modos con $k = 2$ y $k = 16$. Luego de 10 iteraciones del método, prácticamente se han eliminado las modulaciones de alta frecuencia de la onda, pero aún persisten las componentes más suaves.

3.4.5. Análisis del método de Gauss-Seidel

Para analizar el método de Gauss-Seidel, se tiene en cuenta que la matriz asociada al mismo (3.12) posee autovalores [9]

$$\lambda_k(\mathbf{T}_G) = \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad 1 \leq k \leq n-1$$

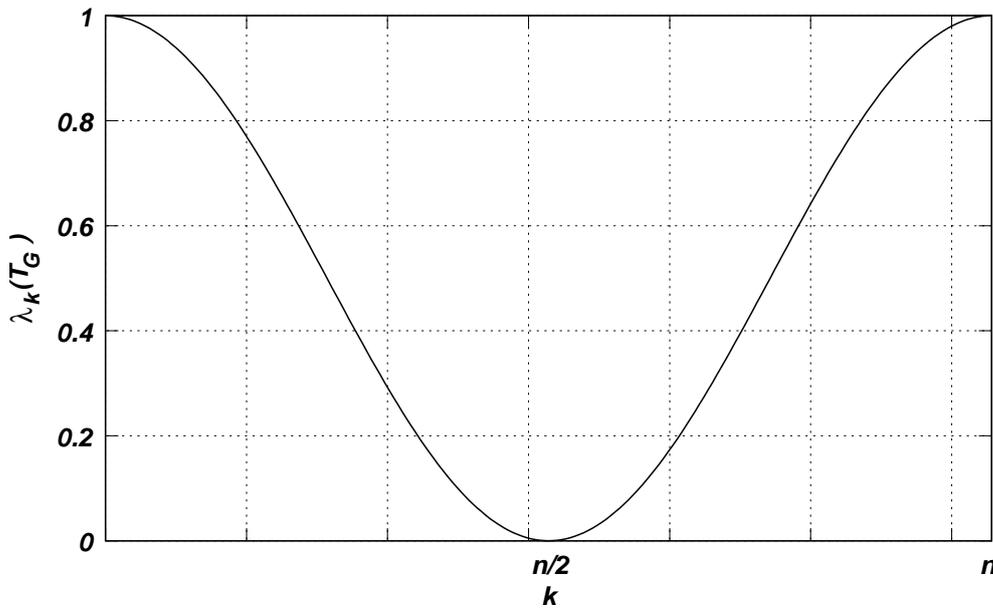


Figura 3.13: Gráfica continua de los autovalores de la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel.

En la figura 3.13 se graficaron dichos autovalores, donde puede observarse que para valores de k próximos a 1 o n , los autovalores correspondientes son cercanos a 1 y la convergencia será lenta. Los autovectores de \mathbf{T}_G están dados por

$$w_{k,j} = \left[\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right]^j \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

con $0 \leq j \leq n$ y $1 \leq k \leq n-1$. Estos autovectores no coinciden con los de \mathbf{A} . Luego $\lambda_k(\mathbf{T}_G)$ proporciona la tasa de convergencia del k -ésimo autovector de \mathbf{T}_G , no del k -ésimo modo de \mathbf{A} .

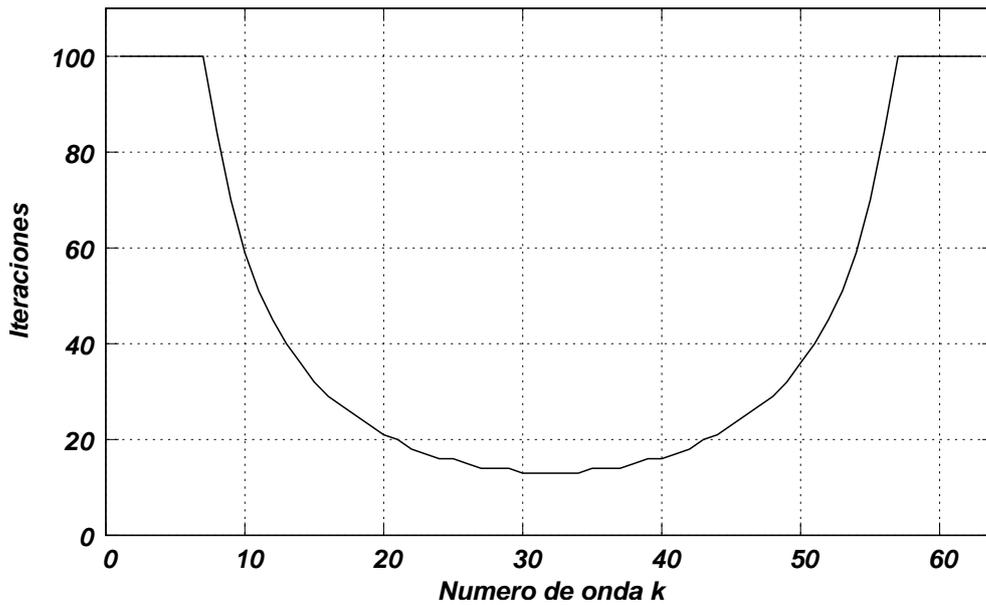


Figura 3.14: Cantidad de iteraciones en función del número de onda k para el problema unidimensional (3.12) con $n = 64$ puntos para el método 3.11 con aproximación inicial los autovectores de la matriz de iteración.

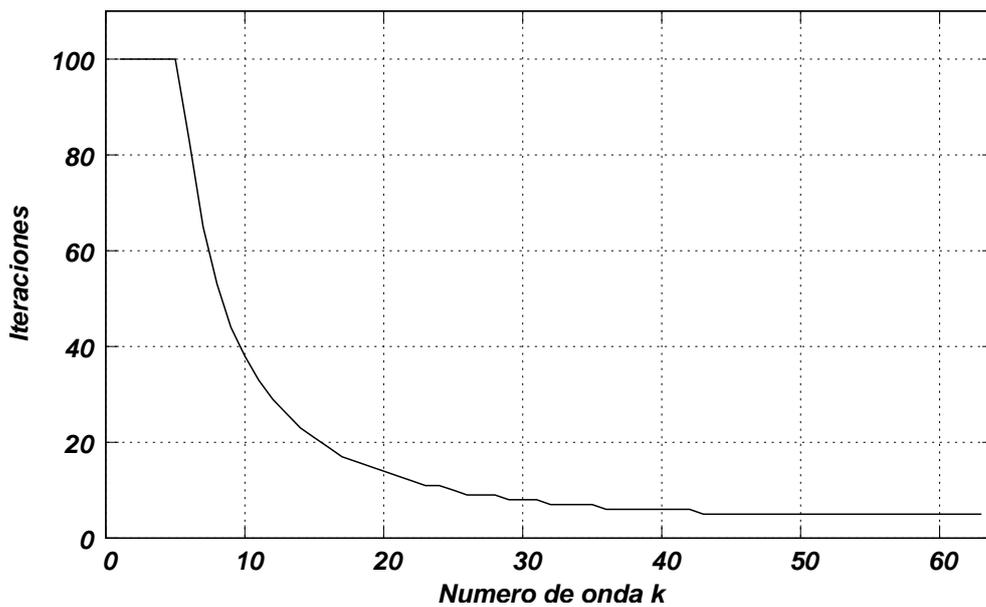


Figura 3.15: Cantidad de iteraciones en función del número de onda k para el problema unidimensional (3.12) con $n = 64$ puntos para el método 3.11 con aproximación inicial los autovectores de la matriz \mathbf{A} .

En las figuras 3.14 y 3.15 se presenta la cantidad de iteraciones necesaria para reducir la norma del error inicial por un factor de 100 en función del número de onda k mediante el método de Gauss-Seidel. En la gráfica 3.14 la aproximación y error iniciales son los autovectores de \mathbf{T}_G con números de onda $1 \leq k \leq 63$, la cual luce similar a la figura 3.8.

En cambio, en la gráfica 3.15 la aproximación inicial consiste en los autovectores de la matriz \mathbf{A} . Se observa que cuando la convergencia del método se analiza en términos de los modos de \mathbf{A} , nuevamente los modos suaves se amortiguan lentamente, mientras que los modos oscilantes disminuyen más rápidamente.

Si bien en ambos esquemas las reducciones son significativas en las primeras iteraciones, llegan a un punto en el cual el esquema completo parecería estancarse. La explicación a esta situación se debe a que el rápido decrecimiento del error durante las primeras iteraciones es provocado por la eficiente eliminación de los modos oscilantes del error. Pero la iteración es mucho menos efectiva para reducir las componentes suaves. A continuación se justifica la resistencia de los modos suaves del error a la relajación. Si se escribe la iteración como

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{B}\mathbf{r}^{(0)}$$

y se sustrae esta ecuación miembro a miembro de la solución exacta \mathbf{u} , el error en el siguiente paso será

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(0)} - \mathbf{B}\mathbf{r}^{(0)}$$

De esta manera, si el residuo es pequeño con respecto al error, las perturbaciones del error serán correspondientemente pequeñas, siempre que la matriz B esté bien condicionada. Luego, los modos más suaves del error tienen residuos relativamente pequeños y el error decrece lentamente. En cambio, los errores oscilantes suelen tener residuos relativamente grandes y las correcciones al error de un solo paso son significativas. Esta propiedad se conoce con el nombre de *suavizado*, y la poseen muchos de los esquemas de relajación, constituyendo en algún sentido una limitación de los mismos, en el sentido de la cantidad de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia. Con el objetivo de superar dicha limitación, entre otros objetivos, se desarrollaron los primeros esquemas de Multigrilla.

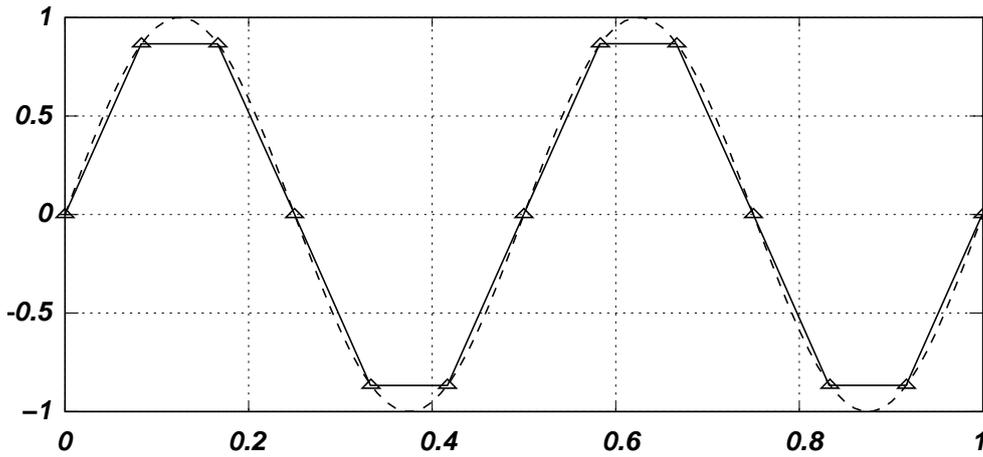
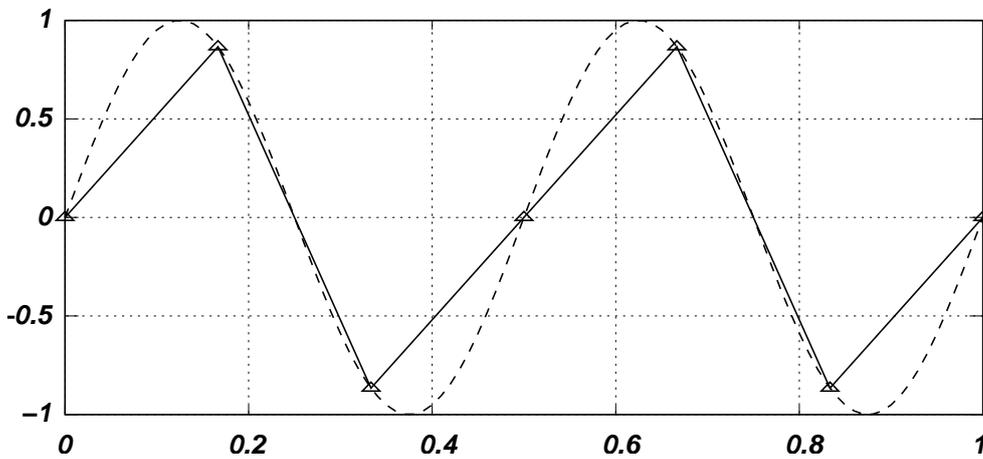
3.5. Elementos de Multigrilla

Dado que los métodos de relajación en general poseen la propiedad de suavizado y, por lo tanto, sólo reducen rápidamente las componentes de alta frecuencia del mismo, es preciso observar si pueden modificarse para que sean efectivos sobre todas las componentes del error.

Como primer paso hacia el objetivo, se propone una adecuada elección de la aproximación inicial. Una técnica conocida consiste en llevar a cabo algunas iteraciones sobre una grilla más gruesa. La misma es menos costosa que en la grilla fina debido a que se tienen menos incógnitas involucradas y, además, dado que el factor de convergencia es $1 - \mathcal{O}(h^2)$ ¹, la grilla gruesa tendrá una tasa de convergencia mejorada con respecto a la malla fina.

Debido a que los esquemas de relajación no reducen rápidamente las componentes suaves del error, si se asume que se ha aplicado un esquema hasta que sólo se observen las componentes de baja frecuencia del error, se trasladan entonces las mismas a una malla más gruesa para observar cómo se comportan allí. En las figuras 3.16 y 3.17 se presenta, respectivamente, una onda suave con $k = 4$ sobre una grilla Ω^h con $n = 12$ puntos y

¹Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales con límite L . Se dice que la convergencia tiene *orden de convergencia* p si p es el mayor valor tal que el siguiente límite existe y es finito $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - L\|}{\|x_k - L\|^p} = \beta$. En este caso, se dice que β es la *tasa o factor de convergencia*.

Figura 3.16: Onda con $k = 4$ proyectada sobre Ω^h .Figura 3.17: Onda con $k = 4$ proyectada sobre Ω^H .

la misma onda proyectada sobre la grilla Ω^H con $n = 6$ puntos, donde $H = 2h$. Aún con el mismo valor $k = 4$, la onda luce diferente según la malla, es decir, se observa que una onda suave en Ω^h luce mucho más oscilante en Ω^H , donde los nodos de la grilla Ω^H corresponden a los nodos pares de la grilla fina Ω^h .

Si se considera el k -ésimo modo sobre la grilla fina considerando las componentes que corresponden a los nodos pares de la misma para $1 \leq k < n/2$, éstas pueden escribirse como

$$w_{k,2j}^h = \sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{jk\pi}{n/2}\right) = w_{k,j}^H \quad 1 \leq k < n/2$$

donde los supraíndices indican la malla donde se definen. Se observa de la ecuación anterior que las componentes del k -ésimo modo sobre Ω^h se convierte en las componentes del k -ésimo modo sobre Ω^H . Esto se aprecia notando que se tiene la mitad de modos en Ω^H de los que hay en Ω^h . La principal consecuencia de este hecho es que pasando de una grilla fina a una más gruesa, un modo se hace más oscilatorio, lo cual es cierto para $1 \leq k < n/2$. Pero el modo con $k = n/2$ sobre Ω^h se convierte en el vector nulo sobre Ω^H .

Para el caso de los modos de la grilla fina con $k > n/2$, debido al fenómeno de *aliasing*,

el modo k -ésimo sobre Ω^h se convierte en el modo $(n - k)$ -ésimo sobre Ω^H , es decir, los modos oscilatorios de Ω^h son redefinidos como modos relativamente suaves en Ω^H .

3.5.1. Relaciones entre la grilla fina y la grilla gruesa

Debido a que los modos suaves sobre una grilla fina lucen más oscilantes sobre una grilla más gruesa, surge el interrogante de cómo proyectar los modos del error desde una grilla a la otra.

Dada la ecuación residual, si \mathbf{v} es una aproximación a la solución exacta \mathbf{u} , entonces el error $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ satisface

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{v}$$

lo cual asegura que puede relajarse directamente sobre el error utilizando la ecuación residual [9]. Otro argumento alternativo que garantiza la utilización de dicha ecuación es el siguiente: relajar en la ecuación original $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ con una aproximación inicial \mathbf{v} es equivalente a relajar en la ecuación residual $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r}$ con la aproximación inicial $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Se han propuesto dos estrategias:

- Estrategia 1 - *Iteración anidada*: Uso de grillas más gruesas con el objetivo de obtener mejores aproximaciones iniciales.
 - Relajar (en el sentido de llevar a cabo unas pocas iteraciones de algún método de relajación) $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ sobre la grilla más gruesa considerada para obtener una aproximación inicial para la siguiente grilla más fina.
 - ...
 - Relajar $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ sobre Ω^{2H} para obtener una aproximación inicial para Ω^H .
 - Relajar $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ sobre Ω^H para obtener una aproximación inicial para Ω^h .
 - Relajar $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ sobre Ω^h para obtener una aproximación final a la solución.

Observaciones a la Estrategia 1: Si bien el procedimiento es atractivo, no estaría claro qué significa relajar $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ sobre Ω^H . Además, aún falta analizar qué ocurriría si una vez alcanzada la grilla más fina las componentes suaves del error aún permaneciesen presentes.

- Estrategia 2 - *Esquema Correctivo*: Uso de la ecuación residual para relajar el error.
 - Relajar $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ sobre Ω^h para obtener una aproximación \mathbf{v}_h .
 - Calcular el residuo $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{v}_h$.
 - Relajar la ecuación residual $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r}$ sobre Ω^H para obtener una aproximación al error \mathbf{e}_H .
 - Corregir la aproximación sobre Ω^h con la estimación del error obtenida sobre Ω^H : $\mathbf{v}_h \leftarrow \mathbf{v}_h + \mathbf{P}_H^h \mathbf{e}_H$.

Observaciones a la Estrategia 2: En esta estrategia, habiendo relajado en la grilla fina hasta que se deteriora la convergencia del método de suavizado, se relaja entonces la ecuación residual en una grilla más gruesa obteniendo una aproximación al error para luego regresar a la grilla fina inicial y corregir la primer aproximación

obtenida. Nuevamente, no queda claro lo que significa relajar $\mathbf{Ae} = \mathbf{r}$ sobre Ω^H dado que para responder a dicho interrogante se necesita saber cómo calcular el residuo sobre Ω^h y transferirlo a Ω^H . Además, se necesita saber cómo relajar sobre Ω^H , qué aproximación inicial utilizar y cómo transferir información desde Ω^H a Ω^h . Soluciones a dichos interrogantes se proponen en las siguientes secciones.

3.5.2. Transferencia de información entre las grillas

Con la intención de hallar mecanismos de transferencia de información entre las grillas gruesas y finas, se considera en una primera instancia el caso en el cual la grilla gruesa tiene como tamaño el doble de la grilla fina consecutiva. En el marco del esquema de corrección, el proceso de transferir la aproximación del error \mathbf{e}_H desde la grilla gruesa Ω^H a la grilla fina Ω^h se denomina *interpolación* o *prolongación* y se analiza a continuación.

Interpolación Lineal

Si bien existen distintos métodos de interpolación, el más simple de ellos es suficiente para los propósitos de Multigrilla.

El operador de interpolación lineal o prolongación se denotará por P_H^h , el cual lleva vectores desde la malla gruesa a la malla fina de acuerdo a la regla $\mathbf{P}_H^h \mathbf{v}_H = \mathbf{v}_h$, donde

$$\begin{aligned} v_{2j}^h &= v_j^H, \\ v_{2j+1}^h &= \frac{1}{2}(v_j^H + v_{j+1}^H), \quad 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1, \end{aligned}$$

y siendo \mathbf{P}_H^h la matriz asociada a P_H^h .

En la figura 3.18 se muestra la acción de P_H^h . Como puede observarse, en los puntos pares de la grilla fina, los valores del vector se transfieren directamente desde Ω^H a Ω^h . En los puntos impares de la grilla fina, el valor de \mathbf{v}_h es el promedio de los valores adyacentes de la grilla gruesa.

El operador P_H^h es un operador lineal de $\mathbb{R}^{n/2-1}$ a \mathbb{R}^{n-1} , el cual tiene rango completo y espacio nulo trivial $\mathcal{N} = \{0\}$. Para el caso $n = 8$, este operador tiene la forma

$$\mathbf{P}_H^h \mathbf{v}_H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_H = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_h = \mathbf{v}_h$$

En primer lugar se supone que el error *real* (el cual no puede conocerse exactamente) es un vector suave, es decir, un vector de baja frecuencia sobre la grilla fina. Además se asume que se ha determinado una aproximación al error sobre la malla gruesa Ω^H que es exacta sobre los puntos de la grilla gruesa. Así, cuando esta aproximación en la grilla gruesa se interpola a la fina, como el interpolador también es suave, se espera una aproximación relativamente buena al error en la malla fina, como se observa en la figura 3.19. Sin embargo, si el error *real* es oscilatorio, aún una buena aproximación en la malla gruesa

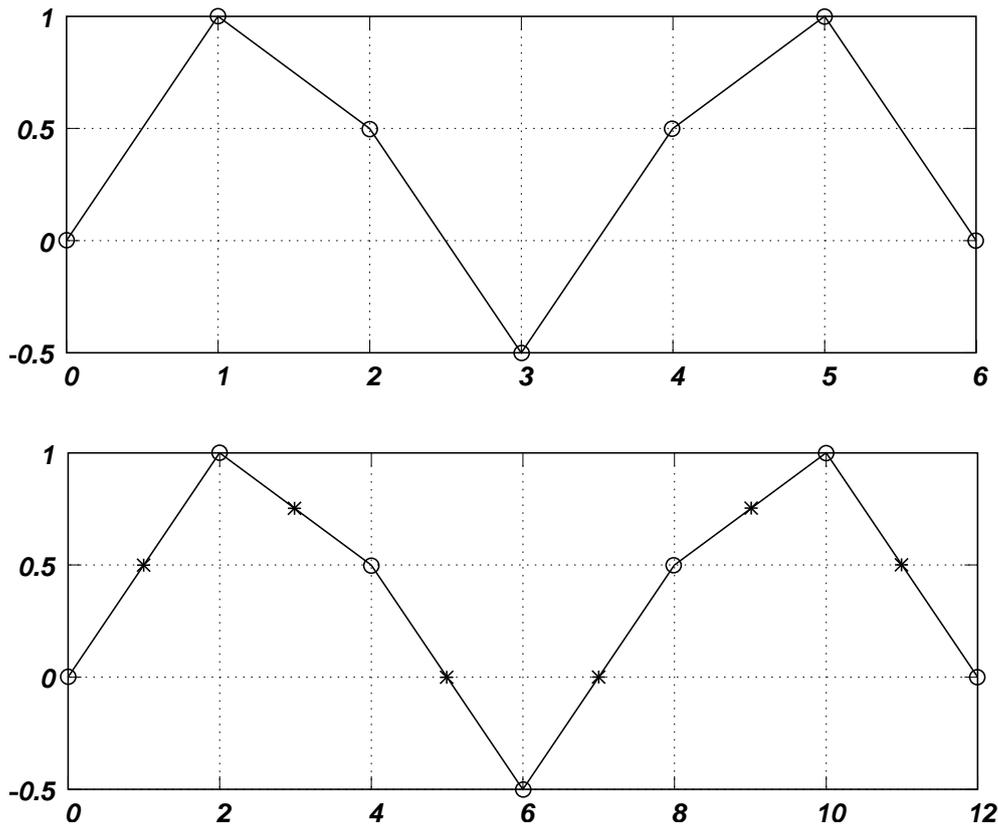


Figura 3.18: Interpolación de un vector de la malla gruesa Ω^H a la grilla fina Ω^h .

producirá un interpolante inadecuado, como se observa en la figura 3.20. Más claramente, si el error exacto sobre Ω^h es suave, un interpolante del error en la malla gruesa e_H dará una buena representación del error exacto como se percibe en la figura 3.19. En cambio, para el caso de la gráfica 3.20, si el error exacto sobre Ω^h es oscilante, una interpolante del error en la malla gruesa e_H dará una pobre representación del error exacto

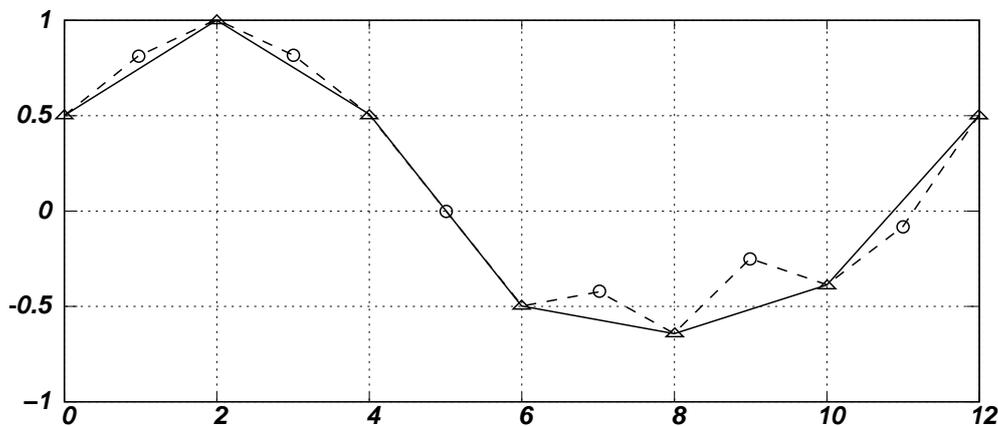


Figura 3.19: Gráfica del error en la malla fina (\circ y \triangle) y del interpolante del error en la malla gruesa (\triangle), para un error suave.

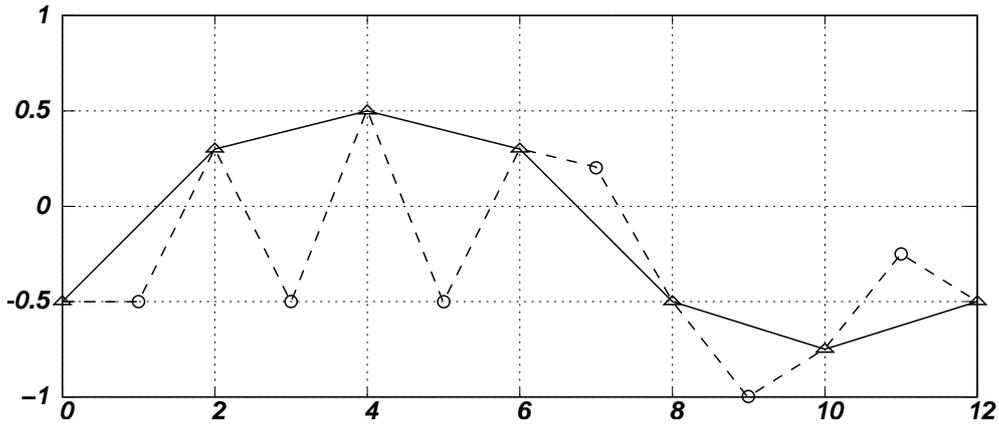


Figura 3.20: Gráfica del error en la malla fina (\circ y \triangle) y del interpolante del error en la malla gruesa (\triangle), para un error oscilatorio.

De esta manera, se concluye que la interpolación es más efectiva cuando el error es suave y se necesita tanto para el proceso de iteración anidada como para el esquema de corrección. A continuación se verá que este proceso es un complemento para los esquemas de relajación, los cuales son más eficientes con errores oscilantes.

Para el caso bidimensional el operador de interpolación se define de manera similar: Sea $\mathbf{P}_H^h \mathbf{v}_H = \mathbf{v}_h$, entonces las componentes de \mathbf{v}_h están dadas por

$$\begin{aligned} v_{2i,2j}^h &= v_{i,j}^H \\ v_{2i+1,2j}^h &= \frac{1}{2}(v_{i,j}^H + v_{i+1,j}^H) \\ v_{2i,2j+1}^h &= \frac{1}{2}(v_{i,j}^H + v_{i,j+1}^H) \\ v_{2i+1,2j+1}^h &= \frac{1}{4}(v_{i,j}^H + v_{i+1,j}^H + v_{i,j+1}^H + v_{i+1,j+1}^H), \quad 0 \leq i, j \leq \frac{n}{2} - 1. \end{aligned}$$

Operadores de Restricción

Los operadores que trasladan información desde la grilla fina hacia la gruesa se denominan *operadores de restricción* y se denotan por R_h^H . Se presentarán dos operadores de este tipo: *inyección* y *ponderación completa* [27].

- *Inyección*: Este operador de restricción es el más simple y está definido por $\mathbf{R}_h^H \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_H$, mediante

$$v_j^H = v_{2j}^h$$

y \mathbf{R}_h^H es la matriz asociada al mismo. Es decir, para el caso unidimensional, el vector de la grilla gruesa simplemente toma sus valores directamente en los puntos correspondientes a la grilla fina.

- *Ponderación completa*: Este operador está definido por $\mathbf{R}_h^H \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_H$, mediante

$$v_j^H = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h), \quad 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$$

La versión en dos dimensiones del operador de restricción para ponderación completa es la siguiente: debido a que es un promedio entre los valores de los vecinos más cercanos de la grilla fina, resulta

$$v_{i,j}^H = \frac{1}{4} [v_{2i-1,2j-1}^h + v_{2i-1,2j+1}^h + v_{2i+1,2j-1}^h + v_{2i+1,2j+1}^h + 2(v_{2i,2j-1}^h + v_{2i,2j+1}^h + v_{2i-1,2j}^h + v_{2i+1,2j}^h) + 4v_{2i,2j}^h], \quad 1 \leq i, j \leq \frac{n}{2} - 1.$$

Hasta aquí se presentó la estrategia de cómo transferir vectores entre las grillas finas y gruesas. Luego, se puede reescribir el esquema correctivo de manera más precisa, como se verá a continuación.

3.5.3. Esquemas para el método Multigrilla

Esquema de corrección de dos grillas

Para el algoritmo de corrección de dos grillas los datos de entrada son la aproximación inicial a la solución del sistema a resolver \mathbf{v}_h y el vector de términos independientes \mathbf{f}_h . El algoritmo devuelve la solución \mathbf{v}_h actualizada, por lo tanto se presenta a continuación el esquema correspondiente:

$$\mathbf{v}_h \leftarrow MG(\mathbf{v}_h, \mathbf{f}_h)$$

- Relajar ν_1 veces $\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$ sobre Ω^h con aproximación inicial \mathbf{v}_h , obteniéndose una nueva aproximación \mathbf{v}_h .
- Calcular el residuo en la grilla fina $\mathbf{r}_h = \mathbf{f}_h - \mathbf{A}_h \mathbf{v}_h$ y restringirlo sobre la grilla gruesa mediante la operación $\mathbf{r}_H = \mathbf{R}_h^H \mathbf{r}_h$.
- Resolver $\mathbf{A}_H \mathbf{e}_H = \mathbf{r}_H$ sobre Ω^H con un método directo.
- Interpolarse el error de la grilla gruesa en la grilla fina mediante $\mathbf{e}_h = \mathbf{P}_H^h \mathbf{e}_H$ y corregir la aproximación en la grilla fina por $\mathbf{v}_h \leftarrow \mathbf{v}_h + \mathbf{e}_h$
- Relajar ν_2 veces $\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$ sobre Ω^h con aproximación inicial \mathbf{v}_h .

Este procedimiento es simplemente el esquema de corrección original, redefinido mediante el uso de los operadores de transferencia. Se relaja en la grilla fina donde en la práctica ν_1 es 1, 2 ó 3. El residuo de la aproximación actual se calcula sobre Ω^h y luego se transfiere mediante el operador de restricción a la malla gruesa. Allí el procedimiento busca la solución a la ecuación residual en Ω^H que, una vez conseguida, se interpola a la grilla fina donde se la utiliza para corregir la aproximación a la solución del problema. Luego se aplican ν_2 relajaciones opcionales.

Observaciones:

- Notar que los superíndices h o H son esenciales para indicar la malla en la cual un vector o matriz están definidos.

- Todas las cantidades están bien definidas hasta ahora, excepto \mathbf{A}_H . Por el momento, se definirá \mathbf{A}_H como el resultado de discretizar el problema sobre Ω^H .
- Los números enteros ν_1 y ν_2 son parámetros del esquema que controlan el número de relajaciones sobre la grilla fina antes y después de pasar por la gruesa. En general se definen al principio basándose en resultados teóricos previos o en pruebas experimentales.

En conclusión al proceso descrito, la relajación en la grilla fina elimina las componentes oscilantes del error, dejando un error relativamente suave. Asumiendo que la ecuación residual puede resolverse exactamente sobre Ω^H , es aún importante transferir el error adecuadamente a la grilla fina. Dado que el error es suave, la interpolación y la corrección de la grilla fina serán efectivas.

Esquema del ciclo V

Para facilitar la descripción de los procedimientos en cada esquema, se denomina con \mathbf{f}_H al vector lado derecho de la ecuación para el residuo en vez de \mathbf{r}_H debido a que también es un vector lado derecho y con el mismo razonamiento, se utiliza \mathbf{v}_H en lugar de e_H . Como aproximación inicial se utiliza $\mathbf{v}_H = \mathbf{0}$ con el objetivo de simplificar y debido a que no hay información disponible sobre la solución \mathbf{u}_H . Al igual que en el esquema para dos grillas, los datos de entrada son la aproximación inicial a la solución del sistema y el vector de términos independientes. La salida del algoritmo corresponde a la solución actualizada. El esquema para el ciclo V se presenta a continuación:

$$\mathbf{v}_h \leftarrow V^h(\mathbf{v}_h, \mathbf{f}_h)$$

- Relajar ν_1 veces $\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$ con aproximación inicial \mathbf{v}_h y calcular el residuo \mathbf{r}_h actualizando \mathbf{v}_h .
- Calcular $\mathbf{f}_H = \mathbf{R}_h^H \mathbf{r}_h$.
 - Relajar ν_1 veces $\mathbf{A}_H \mathbf{v}_H = \mathbf{f}_H$ con aproximación inicial $\mathbf{v}_H = \mathbf{0}$ y calcular el residuo \mathbf{r}_H .
 - Calcular $\mathbf{f}_{2H} = \mathbf{R}_H^{2H} \mathbf{r}_H$.
 - Relajar ν_1 veces $\mathbf{A}_{2H} \mathbf{v}_{2H} = \mathbf{f}_{2H}$ con aproximación inicial $\mathbf{v}_{2H} = \mathbf{0}$ y calcular el residuo \mathbf{r}_{2H} .
 - Calcular $\mathbf{f}_{4H} = \mathbf{R}_{2H}^{4H} \mathbf{r}_{2H}$.
 - ◇ ...
 - ◇ Resolver $\mathbf{A}_{LH} \mathbf{v}_{LH} = \mathbf{f}_{LH}$.
 - ◇ ...
 - Corregir $\mathbf{v}_{2H} \leftarrow \mathbf{v}_{2H} + \mathbf{P}_{4H}^{2H} \mathbf{v}_{4H}$.
 - Relajar ν_2 veces $\mathbf{A}_{2H} \mathbf{v}_{2H} = \mathbf{f}_{2H}$ con aproximación inicial \mathbf{v}_{2H} .
 - Corregir $\mathbf{v}_H \leftarrow \mathbf{v}_H + \mathbf{P}_{2H}^H \mathbf{v}_{2H}$.
 - Relajar ν_2 veces $\mathbf{A}_H \mathbf{v}_H = \mathbf{f}_H$ con aproximación inicial \mathbf{v}_H .
- Corregir $\mathbf{v}_h \leftarrow \mathbf{v}_h + \mathbf{P}_H^h \mathbf{v}_H$.

- Relajar ν_2 veces $\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$ con aproximación inicial \mathbf{v}_h .

En la gráfica 3.22 se observa el comportamiento del algoritmo.

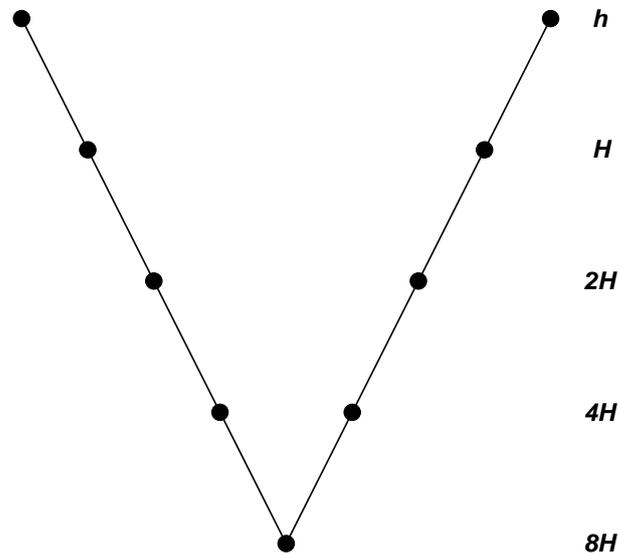


Figura 3.22: Esquema de grillas para el ciclo V .

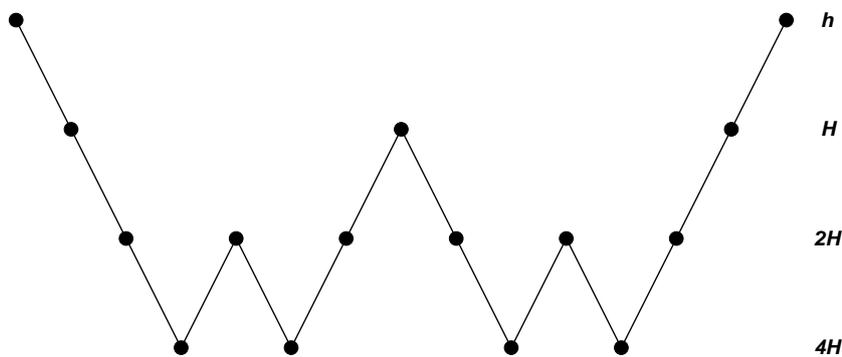


Figura 3.23: Esquema de grillas para el ciclo W .

Esquema del ciclo V recursivo

Como puede observarse el algoritmo para el ciclo V puede definirse en forma compacta mediante una versión recursiva del mismo, la cuál se presenta a continuación

$$\mathbf{v}_h \leftarrow V_R^h(\mathbf{v}_h, \mathbf{f}_h)$$

Si Ω^h es la grilla más gruesa, entonces resolver el sistema

$$\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$$

en caso contrario, realizar los siguientes pasos

- Relajar ν_1 veces $\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$ con aproximación inicial \mathbf{v}_h .
- Hacer

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_H &\leftarrow \mathbf{R}_h^H(\mathbf{f}_h - \mathbf{A}_h \mathbf{v}_h), \\ \mathbf{v}_H &\leftarrow \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}_H &\leftarrow V_R^H(\mathbf{v}_H, \mathbf{f}_H).\end{aligned}$$

- Corregir $\mathbf{v}_h \leftarrow \mathbf{v}_h + \mathbf{P}_H^h \mathbf{v}_H$.
- Relajar ν_2 veces sobre $\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$ con aproximación inicial \mathbf{v}_h .

Esquema del ciclo μ recursivo

El ciclo V es sólo un integrante de la familia de ciclos de Multigrilla, donde tal familia se denomina ciclo μ y se define recursivamente de la siguiente manera

$$\mathbf{v}_h \leftarrow M\mu^h(\mathbf{v}_h, \mathbf{f}_h)$$

Si Ω^h es la grilla más gruesa, entonces resolver

$$\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$$

en cualquier otro caso, llevar a cabo los siguientes pasos

- Relajar ν_1 veces $\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$ con aproximación inicial \mathbf{v}_h .
- Hacer

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_H &\leftarrow \mathbf{R}_h^H(\mathbf{f}_h - \mathbf{A}_h \mathbf{v}_h), \\ \mathbf{v}_H &\leftarrow \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}_H &\leftarrow M\mu^H(\mathbf{v}_H, \mathbf{f}_H), \quad \mu \text{ veces.}\end{aligned}$$

- Corregir $\mathbf{v}_h \leftarrow \mathbf{v}_h + \mathbf{P}_H^h \mathbf{v}_H$.
- Relajar ν_2 veces $\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h$ con aproximación inicial \mathbf{v}_h .

En la práctica, solo se utiliza $\mu = 1$ (correspondiente al ciclo V) y $\mu = 2$ (correspondiente al ciclo W , véase figura 3.23). Con la notación $V(\nu_1, \nu_2)$ se refiere a un ciclo V con ν_1 pasos de relajación anteriores a la corrección y ν_2 pasos de relajación posteriores a la corrección, y se utiliza una notación similar para los ciclos W .

Hasta ahora, sólo se ha explorado el esquema correctivo pero no aún la iteración anidada, la cuál utiliza grillas más gruesas para obtener mejores aproximaciones iniciales para los problemas en las grillas finas. Si se observa el ciclo V , se necesita seleccionar una aproximación inicial \mathbf{v}_h a la solución. La estrategia de iteración anidada sugiere resolver un problema en Ω^H , pero para hallar la aproximación inicial sobre Ω^H este método propone resolver un problema en Ω^{2H} y claramente este camino recursivo finaliza en la grilla más gruesa.

Ciclo V con ponderación completa

El algoritmo que une el ciclo V con la estrategia de iteración anidada se denomina *ciclo V de ponderación completa* (FMG, por *Full Multi-Grid*), el cual se presenta a continuación

$$\mathbf{v}_h \leftarrow FMG^h(\mathbf{f}_h)$$

Inicializar $\mathbf{f}_H \leftarrow \mathbf{R}_h^H \mathbf{f}_h$, $\mathbf{f}_{2H} \leftarrow \mathbf{R}_H^{2H} \mathbf{f}_H$, \dots

Resolver o relajar $\mathbf{A}_{LH} \mathbf{v}_{LH} = \mathbf{f}_{LH}$ sobre la grilla más gruesa.

◇ \dots

$$\mathbf{v}_{2H} \leftarrow \mathbf{P}_{4H}^{2H} \mathbf{v}_{4H}.$$

$$\mathbf{v}_{2H} \leftarrow V^{2H}(\mathbf{v}_{2H}, \mathbf{f}_{2H}), \nu_0 \text{ veces.}$$

$$\mathbf{v}_H \leftarrow \mathbf{P}_{2H}^H \mathbf{v}_{2H}.$$

$$\mathbf{v}_H \leftarrow V^H(\mathbf{v}_H, \mathbf{f}_H), \nu_0 \text{ veces.}$$

$$\mathbf{v}_h \leftarrow \mathbf{P}_H^h \mathbf{v}_H.$$

$$\mathbf{v}_h \leftarrow V^h(\mathbf{v}_h, \mathbf{f}_h), \nu_0 \text{ veces.}$$

El parámetro de ciclo ν_0 determina el número de ciclos V a realizarse en cada nivel, utilizándose en general $\nu_0 = 1$. Obsérvese que los números del algoritmo se corresponden con los de la figura 3.24. Cada ciclo es precedido por un ciclo V en la malla gruesa diseñado con el objetivo de proveer la mejor aproximación inicial posible.

Ciclo V para ponderación completa recursivo

Recursivamente el algoritmo anterior se escribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_h \leftarrow FMG_R^h(\mathbf{f}_h)$$

1. Si Ω^h es la grilla más gruesa de todas, inicializar $\mathbf{v}_h \leftarrow \mathbf{0}$ y pasar al punto 3. En caso contrario

$$\mathbf{f}_H \leftarrow \mathbf{R}_h^H \mathbf{f}_h,$$

$$\mathbf{v}_H \leftarrow FMG_R^H(\mathbf{f}_H).$$

2. Corregir $\mathbf{v}_h \leftarrow \mathbf{P}_H^h \mathbf{v}_H$.

3. $\mathbf{v}_h \leftarrow V^h(\mathbf{v}_h, \mathbf{f}_h)$, ν_0 veces.

3.5.4. Implementación y complejidad

Para introducir brevemente el concepto de costo al utilizar el algoritmo Multigrilla, hay que pensar en los requerimientos de almacenamiento y de cálculo respectivamente.

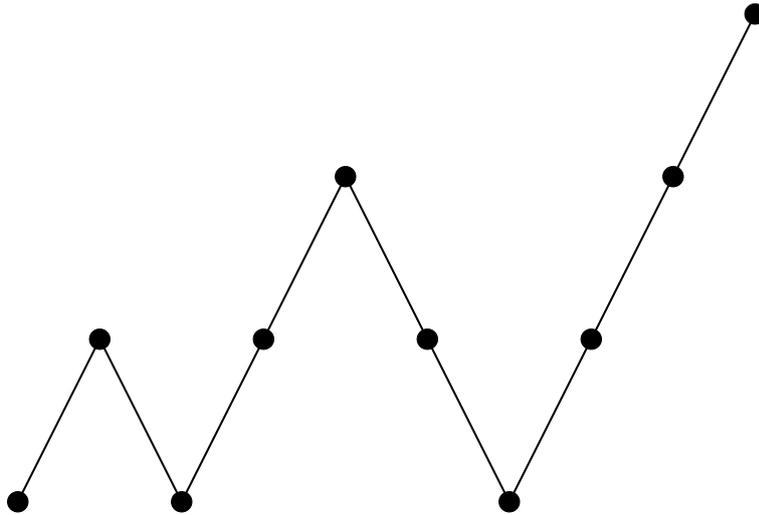


Figura 3.24: Esquema de grillas para FMG.

Almacenamiento

Se considera un dominio cuadrado con una grilla de dimensión d con n^d puntos (en realidad, para condiciones de borde Dirichlet habría $(n-1)^d$ puntos interiores y para condiciones Neumann habría $(n+1)^d$ incógnitas). Por simplicidad, supóngase n como una potencia de 2. Dado que sólo se requieren dos arreglos para almacenarse en cada nivel, la grilla más fina Ω^h , requiere $2n^d$ lugares de almacenamiento; Ω^H , requiere 2^{-d} veces la cantidad necesaria para Ω^h ; en general Ω^{ph} , requiere p^{-d} veces la cantidad necesaria para Ω^h . Sumando estos términos y utilizando la suma de la serie geométrica como cota superior se tiene

$$\text{Almacenamiento} = 2n^d(1 + 2^{-d} + 2^{-2d} + \dots + 2^{-nd}) < \frac{2n^d}{1 - 2^{-d}}$$

En particular, para un problema unidimensional ($d = 1$), el almacenamiento requerido es menos del doble que el requerido por el problema sólo en la malla fina. Para problemas en dos o tres dimensiones, el requerimiento es menor que 4/3 del problema sólo en la malla fina. Luego, los costos de almacenamiento de los algoritmos Multigrilla decrecen a medida que la dimensión del problema aumenta.

Cálculo

Para simplificar, los costos se miden en términos de unidades de trabajo (*work unit* (WU)), las cuales representan el costo de llevar a cabo un paso de relajación en la grilla más fina. Es aconsejable descartar el costo de las operaciones entre los operadores de grillas, los cuales representan alrededor del 10 – 20 % del costo total del ciclo.

En primer lugar, se considera un ciclo V con un paso de relajación en cada nivel ($\nu_1 = \nu_2 = 1$). Cada ciclo es visitado dos veces y la malla Ω^{ph} requiere p^{-d} WU. Sumando estos costos y utilizando la serie geométrica para una cota superior se obtiene

$$\text{Costo computacional del ciclo } V = 2(1 + 2^{-d} + 2^{-2d} + \dots + 2^{-nd}) < \frac{2}{1 - 2^{-d}} \text{ WU.}$$

Un ciclo V simple tiene un costo de alrededor de 4 WUs para un problema unidimensional ($d = 1$), $8/3$ WUs para $d = 2$ y aproximadamente $16/7$ WUs para $d = 3$.

El costo para un ciclo de FMG puede obtenerse mediante una pequeña modificación a los cálculos anteriores. Si se asume nuevamente que sólo se lleva a cabo en paso de relajación en cada nivel ($\nu_1 = \nu_2 = 1$), un ciclo V *completo* comenzando en la grilla Ω^h tiene costo $2(1 - 2^{-d})^{-1}$ WUs. Un ciclo V comenzando desde la grilla Ω^{2h} tiene costo 2^{-d} del ciclo V *completo* que comienza en Ω^h . En general, un ciclo V comenzando desde la grilla Ω^{ph} tiene costo p^{-d} del ciclo V *full* que comienza en Ω^h . Sumando los costos se tiene

$$\begin{aligned} \text{Costo computacional del ciclo } V \text{ full} &= \left(\frac{2}{1 - 2^{-d}} \right) (1 + 2^{-d} + 2^{-2d} + \dots + 2^{-nd}) \\ &< \frac{2}{(1 - 2^{-d})^2} \text{ WU.} \end{aligned}$$

Un ciclo FMG tiene entonces un costo de 8 WUs para un problema unidimensional, alrededor de $7/2$ WUs para $d = 2$ y $5/2$ WUs para $d = 3$.

Como era de previsible, un ciclo simple de FMG tiene mayor costo que un ciclo V simple, aunque la discrepancia disminuye a medida que aumenta la dimensión espacial del problema.

3.5.5. Propiedades variacionales

Cuando se expresó el problema a resolver en la malla gruesa, se trabajó con la ecuación $\mathbf{A}_H \mathbf{u}_H = \mathbf{f}_H$ y se pensó a \mathbf{A}_H como la versión del operador discreto \mathbf{A}_h en Ω^H . A continuación se definirá adecuadamente el operador \mathbf{A}_H .

Suponiendo que se trabaja con el problema $-u''(x) = f(x)$ y el operador discreto correspondiente \mathbf{A}_h , se adoptará la notación Ω^h para la malla más fina y Ω^{pH} para las grillas restantes que representarán no sólo la malla con tamaño pH sino también el espacio de vectores definidos sobre la misma. Sea \mathbf{v}_h una aproximación a la solución exacta del sistema lineal \mathbf{u}_h . Además, se asume que el error en esta aproximación, $\mathbf{e}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h$, pertenece al rango de interpolación denotado por $\mathcal{R}(\mathbf{P}_H^h)$. Esto significa que existe un vector $\mathbf{w}_H \in \Omega^H$, tal que $\mathbf{e}_h = \mathbf{P}_H^h \mathbf{w}_H$, es decir, no hay componentes de la malla fina que aporten al error. Por lo tanto, la ecuación residual puede escribirse como

$$\mathbf{A}_h \mathbf{e}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{P}_H^h \mathbf{w}_H = \mathbf{r}_h = \mathbf{f}_h - \mathbf{A}_h \mathbf{v}_h \quad (3.16)$$

En esta ecuación, \mathbf{A}_h actúa sobre un vector que yace completamente en el rango de interpolación.

En la figura 3.25 se observa que $\mathbf{A}_h \mathbf{P}_H^h \mathbf{u}_H$ es cero en los nodos impares no comunes de Ω^h . El efecto es análogo a tomar derivadas segundas en una función lineal a trozos.

Dado que las filas pares de la ecuación (3.16) corresponden a los puntos de la grilla gruesa Ω^H , se puede hallar una versión para la malla gruesa de la ecuación residual eliminando las filas impares de (3.16). Luego, la ecuación residual se transforma en

$$\underbrace{\mathbf{R}_h^H \mathbf{A}_h \mathbf{P}_H^h}_{\mathbf{A}_H} \mathbf{u}_H = \mathbf{R}_h^H \mathbf{r}_h$$

donde esta observación da una buena definición para el operador de la malla gruesa: $\mathbf{A}_H = \mathbf{R}_h^H \mathbf{A}_h \mathbf{P}_H^h$. Si se aplica término a término $\mathbf{R}_h^H \mathbf{A}_h \mathbf{P}_H^h$ al j -ésimo vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_H$

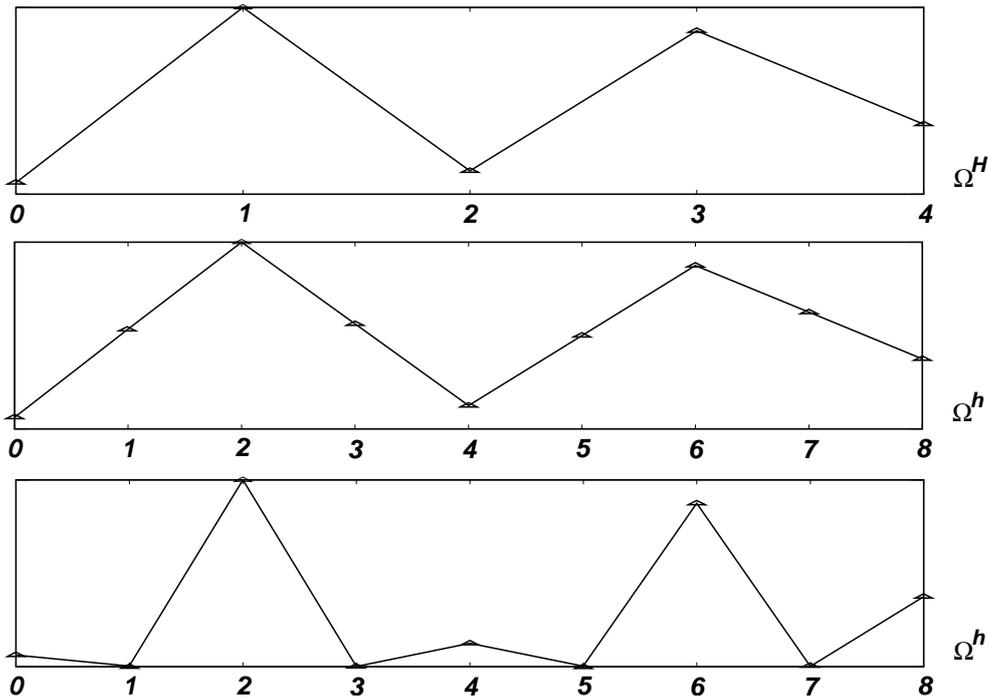


Figura 3.25: La acción de \mathbf{A}_h sobre el rango de interpolación $\mathcal{R}(\mathbf{P}_H^h)$.

sobre Ω^H , se establece que la j -ésima columna de \mathbf{A}_H , y en este caso por simetría también la j -ésima fila de \mathbf{A}_H , están dadas por

$$\frac{1}{H^2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se obtendría el mismo resultado de haber discretizado el problema sobre Ω^H mediante diferencias finitas de segundo orden. De esta manera, \mathbf{A}_H es realmente la versión de \mathbf{A}_h sobre Ω^H .

En general, el error no pertenece completamente al rango de interpolación dado que de ser ese el caso, resolviendo la ecuación residual exactamente en Ω^H y llevando a cabo la corrección de dos grillas, se obtendrá la solución exacta. Sin embargo, el argumento permite obtener una definición para \mathbf{A}_H . Además, define dos *propiedades variacionales*, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_H &= \mathbf{R}_h^H \mathbf{A}_h \mathbf{P}_H^h, & \text{Condición de Galerkin} \\ \mathbf{R}_h^H &= c(\mathbf{P}_H^h)^T, & c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donde la condición de Galerkin (GCA, por *Galerkin Coarse grid Approximation*), es la definición del operador de la malla gruesa y la segunda propiedad es la relación que satisfacen el operador de interpolación y el operador de ponderación completa [9].

3.5.6. Desarrollo por Elementos Finitos de la estrategia Multigrilla

A continuación se desarrolla el esquema de Multigrilla para Elementos Finitos en forma abstracta. Sea Ω un dominio acotado adecuado en \mathbb{R}^d con frontera $\partial\Omega$ y $d = 1, 2, 3$ las

dimensiones espaciales. Considérese el siguiente problema de valores de borde

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.17)$$

donde \mathcal{L} es un operador elíptico lineal en u y f es una función dada.

Sea $a(\cdot, \cdot)$ la forma bilineal asociada al operador \mathcal{L} , y supóngase que $a(\cdot, \cdot)$ es continua² y coerciva³ en $H_0^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, donde el subespacio $H_0^1(\Omega)$ contiene funciones suaves que se anulan en la frontera de Ω . Con estas propiedades, resolver en forma débil la ecuación diferencial (3.17) resulta formalmente equivalente a minimizar el funcional cuadrático

$$F(u) \equiv \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u), \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad (3.18)$$

El problema puede reescribirse en forma compacta como

$$u = \underset{v \in H_0^1(\Omega)}{\operatorname{argmin}} F(v) \quad (3.19)$$

Es decir, el objetivo es hallar el argumento que minimiza a F sobre todas las funciones de $H_0^1(\Omega)$.

Dada una triangulación Ω^h de Ω con tamaño h , sea H^{1h} el subespacio de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión finita que consiste en las funciones v^h que se anulan en la frontera del dominio, son continuas en Ω y polinomiales dentro de cada elemento de Ω^h . El problema discreto se escribe del siguiente modo

$$u^h = \underset{v^h \in H^{1h}}{\operatorname{argmin}} F(v^h) \quad (3.20)$$

Dado que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva, los problemas que consisten en determinar la función $u \in H_0^1(\Omega)$ de manera que satisfaga (3.19) y $a(u, v) = (f, v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, son equivalentes. Luego, resolver (3.20) es equivalente a encontrar $u^h \in H^{1h}$ de manera que

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h) \quad \text{para todo } v^h \in H^{1h} \quad (3.21)$$

Para resolver el problema (3.21), se consideran las funciones de base φ_i^h para el espacio H^{1h} , de manera que $\varphi_i^h(N_j) = \delta_{ij}$, donde N_j son los nodos de Ω^h y δ_{ij} es el tensor delta de Kronecker. Estas funciones de base se eligen como las funciones de prueba v^h . Luego, después de ensamblar todas las filas de la matriz y sus lados derechos correspondientes, se obtiene el sistema $\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$.

Dadas dos mallas, donde la primera es un refinamiento uniforme de la segunda, la iteración de dos grillas es la base para la construcción del método Multigrilla. Resumiendo, la iteración está compuesta por los siguientes pasos:

- **Paso de pre-suavizado:** Se aplican al sistema $\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$ unas pocas iteraciones de algún método iterativo como Gauss-Seidel o Jacobi amortiguado de manera tal

² $a(\cdot, \cdot)$ es continua si existe una constante $\gamma > 0$ tal que $|a(v, w)| \leq \gamma \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}$ para todo $v, w \in H^1(\Omega)$.

³la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva si existe una constante $\beta > 0$ tal que $a(v, v) \geq \beta \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$ para todo $v \in H^1(\Omega)$.

de suavizar el residuo $\mathbf{r}_h = \mathbf{f}_h - \mathbf{A}_h \bar{\mathbf{u}}_h$, donde $\bar{\mathbf{u}}_h$ es una aproximación a la solución del sistema considerado. Este paso reducirá las componentes de alta frecuencia del error pero no reducirá completamente las de baja frecuencia. La reducción de los errores oscilatorios pueden llevarse a cabo mediante cambios locales de la siguiente manera: para cada $i = 1, 2, \dots$ calcular $\bar{u}_h \leftarrow \bar{u}_h - s_i \varphi_i^h$, donde $s_i \in \mathbb{R}$ es un tamaño de paso adecuado. El término s_i se elige de manera tal de minimizar el funcional sobre todas las elecciones posibles, es decir

$$s_i = \operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}} F(\bar{u}_h - t \varphi_i^h) \quad (3.22)$$

- **Corrección de la malla gruesa:** El residuo se proyecta sobre la malla gruesa, donde se resuelve la ecuación del error que minimiza las componentes de baja frecuencia. La formulación abstracta para este proceso es la siguiente: Sea $H^{1H} \subset H^{1h}$ el espacio asociado a la malla gruesa, es decir, el conjunto de funciones polinómicas a trozos asociadas con la malla gruesa estándar Ω^H . El objetivo es corregir la aproximación \bar{u}_h con una función $e_H \in H^{1H}$ que aproximará al nuevo error suave. La corrección es $\bar{u}_h \leftarrow \bar{u}_h + e_H$. La elección de e_H se hace con el objetivo de obtener la mejor corrección sobre la malla gruesa en el sentido de minimización del funcional, es decir,

$$e_H = \operatorname{argmin}_{w^H \in H^{1H}} F(\bar{u}_h + w_H) \quad (3.23)$$

- **Paso de prolongación:** La solución sobre la malla gruesa se transfiere a la fina, sobre la que se utiliza para mejorar la aproximación del primer paso.
- **Paso de post-suavizado:** Finalmente, la aproximación calculada en el último paso se suaviza para eliminar cualquier componente de alta frecuencia remanente del error.

En el proceso de sumar una función $\bar{v}_H \in H^{1H}$ a otra $\bar{v}_h \in H^{1h}$ se pueden encontrar coeficientes adecuados que permitan escribir a \bar{v}_H como una función de H^{1h} , ya que en general $H^{1H} \subset H^{1h}$. Esto es, se define un operador de interpolación \mathbf{P}_H^h como $\mathbf{v}_h = \mathbf{P}_H^h \mathbf{v}_H$ (véase [27]), donde \mathbf{v}_h y \mathbf{v}_H son vectores con los valores nodales de v_h y v_H respectivamente.

Para determinar la versión en la malla gruesa del operador \mathbf{A}_h , denominado \mathbf{A}_H , es necesario trabajar con los vectores nodales y transferir el principio de minimización a términos matriciales. Luego, resolver el sistema $\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$ es equivalente a encontrar la solución al problema de minimización

$$\mathbf{u}_h = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{R}^M} F^h(\mathbf{v}_h) \quad (3.24)$$

donde $F^h(\mathbf{v}_h) \equiv \langle \mathbf{A}_h \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h \rangle / 2 - \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h \rangle$, siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno de vectores usual, y M es el número de nodos de Ω^h . De igual manera, el problema de la corrección en la malla gruesa es equivalente al principio de minimización matricial

$$\bar{\mathbf{u}}_H = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}_H \in \mathbb{R}^{\bar{M}}} F^h(\bar{\mathbf{u}}_h + \mathbf{P}_H^h \mathbf{w}_H) \quad (3.25)$$

donde \bar{M} es el número de nodos de la malla gruesa Ω^H . Resulta entonces que minimizar $F^h(\bar{\mathbf{u}}_h + \mathbf{P}_H^h \mathbf{w}_H)$ es equivalente a minimizar $F^H(\mathbf{w}_H)$ sobre los vectores $\mathbf{w}_H \in \mathbb{R}^{\bar{M}}$, dado que $F^h(\bar{\mathbf{u}}_h + \mathbf{P}_H^h \mathbf{w}_H) = F^h(\bar{\mathbf{u}}_h) + F^H(\mathbf{w}_H)$. Luego, llevando a cabo los cálculos correspondientes, se obtiene la versión de \mathbf{A}_h en la malla gruesa: $\mathbf{A}_H = \mathbf{R}_h^H \mathbf{A}_h \mathbf{P}_H^h$ (véase la sección §3.5.5).

3.6. Integración con la técnica de Malla Compuesta

Se propone la utilización de la técnica CM junto con una estrategia Multigrilla. Resolviendo con la técnica CM un problema sobre dos mallas de Elementos Finitos con nodos en común, donde cada una posee diferente orden del error de aproximación, adjudicando a cada malla una parte de las propiedades físicas o geométricas correspondientes al factor de participación elegido, se obtiene un resultado global extrapolado entre los resultados que se obtendrían con cada malla individualmente. Una de las ventajas de la composición de mallas radica en que puede tenerse una solución aproximada mejorada con respecto a la solución obtenida a partir del comportamiento individual de cada componente. La idea de esta integración es encontrar, dentro del esquema Multigrilla, dónde convendría utilizar la estrategia CM de manera tal de obtener una técnica que tenga las ventajas de cada método, es decir, una nueva estrategia Multigrilla que obtenga soluciones mejoradas en un sentido nodal.

3.6.1. Esquema de Multigrilla con Malla Compuesta

Como se comentó anteriormente, el principal objetivo es la integración de ambas estrategias para resolver problemas elípticos. Se supone que hay n niveles en cada iteración MG y que la malla correspondiente al nivel j -ésimo se obtiene del $(j-1)$ -ésimo refinamiento uniforme de una malla inicial dada (la malla más gruesa de todas correspondiente al nivel 1). Luego, se introducen m niveles de mezcla, $1 \leq m < n$, en los cuales los operadores lineales estándares del método MG se reemplazan por la combinación lineal propuesta en la estrategia CM. En el k -ésimo nivel de mezcla, $1 \leq k \leq m$, las mallas de los niveles $n-k+1$ y $n-k$ toman parte de la composición. En otras palabras, para el nivel k , $\mathbf{A}_h = \mathbf{A}_{n-k+1}$, donde \mathbf{A}_{n-k+1} es la matriz correspondiente al nivel $n-k+1$, y \mathbf{A}_{Hh} se obtiene utilizando el operador de inyección, o simplemente completando con ceros la matriz \mathbf{A}_{n-k} apropiadamente para alcanzar la dimensión de \mathbf{A}_{n-k+1} (véase la ecuación (2.1)). En la figura 3.26 se presenta un esquema de la estrategia, en donde cada punto representa que se reemplazó la matriz correspondiente al nivel por la matriz que surge del método de Malla Compuesta, calculada entre el operador de dicho nivel y del nivel anterior.

Con el mismo conjunto de parámetros (método de relajación, número de pasos de pre y post suavizado, etc.) se incrementa el costo computacional si se introduce la mezcla de mallas en la resolución de todos los niveles. Esto se debe a que la mezcla hace crecer el ancho de banda de la matriz del nivel dado. Por lo tanto, el número de niveles de mezcla m debe mantenerse al mínimo posible mientras se obtenga la tasa de decrecimiento del error de la técnica de CM comparada con la resolución de CM mediante un método directo. Como se observará en los ejemplos numéricos, cuanto menor sea el tamaño de la malla más fina de todas, menor será el error nodal producido por la estrategia CM con respecto a FEM. Si los niveles de grillas se incrementan, es esperable que los niveles de mezcla necesarios se incrementen debido a que las soluciones nodales de CM y FEM difieren cuando el tamaño de discretización decrece. Se denomina la estrategia propuesta como MGCM, por Multigrilla con Malla Compuesta.

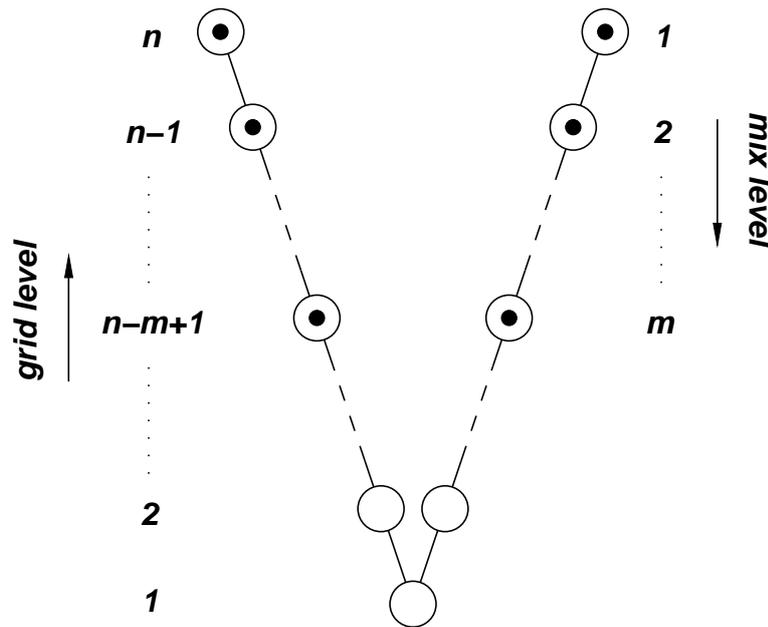


Figura 3.26: Multigrilla para Malla Compuesta (ciclo V).

3.6.2. Ejemplos

Con el objetivo de mostrar la efectividad de la estrategia MGCM propuesta, se considerarán cuatro casos 2D con solución conocida. En las gráficas correspondientes a cada caso, se denotará con FEM a la estrategia MG estándar (sin CM).

Problema de Poisson con coeficientes constantes

El primer caso resuelto consiste en el problema de Poisson clásico presentado en la sección §2.5.3.

En este caso, el dominio se discretizó mediante una grilla no estructurada con 82 elementos triangulares y 52 nodos. La grilla es la malla gruesa del problema y la secuencia de mallas se obtiene mediante un refinamiento isótropo homogéneo de la misma. Los parámetros seleccionados para este problema consisten en tres pasos de pre (ν_1) y post (ν_2) suavizado de Jacobi amortiguado con parámetro de relajación $\omega = 0.7$. La tolerancia aplicada para la convergencia del residuo del sistema lineal es 10^{-6} . El factor de participación para la composición de mallas es $\alpha = 4/3$, valor óptimo hallado en la sección §2.5.3.

Los resultados del error en normas l_∞ y euclídea se presentan en la tabla 3.1 para el ciclo V y en la tabla 3.2 para el ciclo W. En cada tabla se muestra el número de iteraciones para alcanzar la convergencia, el número de niveles de las grillas y una medida del tiempo de cálculo. En el caso del método MGCM también se presenta el número de niveles de mezcla. Las tablas muestran cómo el error decrece con la composición en ambas normas. El incremento del tiempo computacional de la estrategia MGCM se debe al hecho de que la matriz es menos rala que para MG estándar. Es decir, la matriz para MGCM es aproximadamente un 21 % más densa que la correspondiente a MG. Se concluye entonces que la técnica MGCM preserva las características del método Multigrilla original. Esta afirmación se basa en el hecho de que el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia en ambos casos, con y sin mezcla, permanecen constantes. En la figura 3.27

se presenta la norma del residuo en función del número de iteraciones en el caso de 5 niveles de grilla para los ciclos V y W . Como puede observarse, las curvas para MG y MGCM parecen superpuestas, con una pequeña diferencia en el ciclo W . Esto muestra que con la estrategia CM incorporada al método MG no se pierde la convergencia del método MG original, inclusive desde el punto de vista de los residuos los cuales son importantes cuando no se conocen la solución exacta.

MG para el Problema de Poisson - Ciclo V						
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m	$t_{directo}$ [s]
3	7	3.3960×10^{-3}	5.1424×10^{-2}	1.0800×10^{-1}	-	7.7074×10^{-2}
4	7	9.5195×10^{-4}	2.5609×10^{-2}	4.0960×10^{-1}	-	4.2262×10^{-1}
5	7	2.8171×10^{-4}	1.2796×10^{-2}	1.6520×10^0	-	2.6322×10^0
6	7	8.1310×10^{-5}	6.4094×10^{-3}	7.1720×10^0	-	1.7167×10^1
MGCM para el Problema de Poisson - Ciclo V						
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MGCM} [s]	m	$t_{directo}$ [s]
3	7	1.1824×10^{-3}	4.9490×10^{-3}	1.1260×10^{-1}	1	9.6953×10^{-2}
4	7	1.6160×10^{-4}	8.7621×10^{-4}	4.2900×10^{-1}	1	5.6930×10^{-1}
5	7	2.1730×10^{-5}	1.5758×10^{-4}	1.7460×10^0	1	3.5824×10^0
6	7	2.7157×10^{-6}	5.1402×10^{-5}	7.6020×10^0	1	2.4976×10^1
6	8	2.8270×10^{-6}	2.8249×10^{-5}	7.7300×10^0	2	2.4976×10^1

Tabla 3.1: Resultados para el ciclo V para el problema 2.5.3.

MG para el Problema de Poisson - Ciclo W					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m
3	6	3.3959×10^{-3}	5.1423×10^{-2}	1.26×10^{-1}	-
4	5	9.5185×10^{-4}	2.5605×10^{-2}	3.06×10^{-1}	-
5	5	2.8159×10^{-4}	1.2787×10^{-2}	1.29×10^0	-
6	5	8.1190×10^{-5}	6.3915×10^{-3}	6.08×10^0	-
MGCM para el Problema de Poisson - Ciclo W					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MGCM} [s]	m
3	6	1.1824×10^{-3}	4.9485×10^{-3}	1.26×10^{-1}	1
4	6	1.6181×10^{-4}	8.7539×10^{-4}	3.47×10^{-1}	1
5	5	2.1912×10^{-5}	1.5506×10^{-4}	1.52×10^0	1
6	5	2.8553×10^{-6}	2.7476×10^{-5}	5.23×10^0	1

Tabla 3.2: Resultados para el ciclo W para el problema 2.5.3.

Para el caso del ciclo V con seis niveles de grilla, se utilizan dos niveles de mezcla con el objetivo de alcanzar la reducción total del error que se debería obtener con la técnica CM. Sin embargo, para el ciclo W fue suficiente sólo un nivel de mezcla en todos los casos

resueltos. En las figuras 3.29 y 3.28 se presenta el error nodal como función del tamaño de la discretización (h) para ambas normas. Nótese cómo se mantiene la significativa reducción de la tasa del error nodal con la estrategia CM con respecto a FEM.

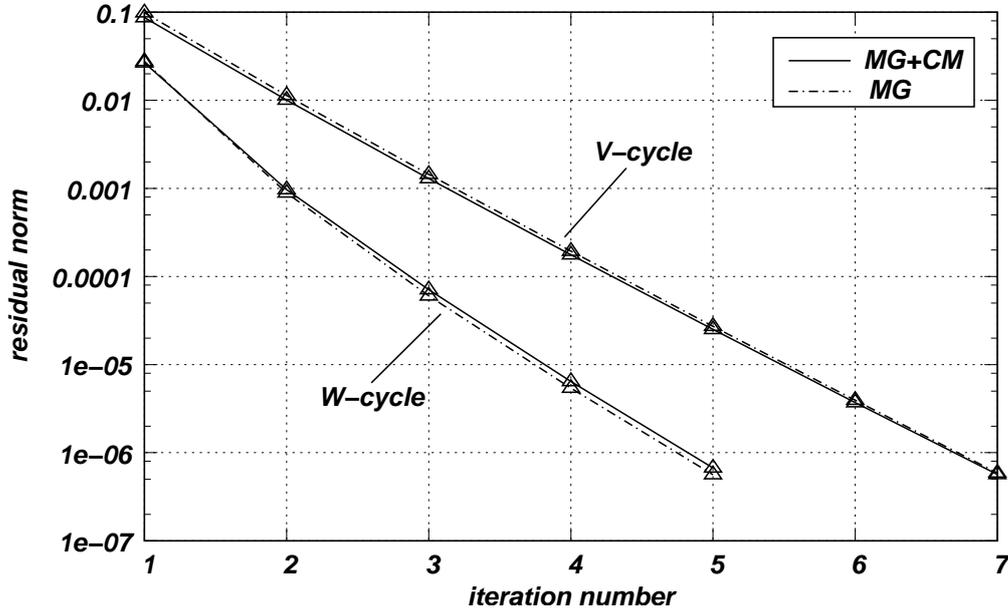


Figura 3.27: Norma del residuo como función del número de iteraciones para el problema 2.5.3 con cinco niveles de malla.

Problema difusivo con coeficientes variables y fuente

En el segundo caso, se considera un problema difusivo puro con coeficientes variables en el cuadrado unitario

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\kappa(x, y) \nabla u) = f(x, y), \quad \text{en } (0,1) \times (0,1) \\ u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = \sin(5\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 1) = -\sin(5\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

donde $\kappa(x, y) = 1 + xy^2$ y $u(x, y) = \sin(5\pi x) \cos(3\pi y)$. La malla y el conjunto de parámetros son los mismos que en el ejemplo previo.

En las tablas 3.3 y 3.4 se presentan los resultados obtenidos para ambos ciclos, V y W respectivamente. En las mismas puede observarse cómo el error nodal decrece con la mezcla en las normas euclídea e infinito.

En este caso las tasas de convergencia para los residuos obtenidas para la estrategia MGCM y el método MG estándar son similares, en particular cuando se aplica sólo un nivel de mezcla (véase la figura 3.30).

Las figuras 3.31 y 3.32 muestran las normas euclídea e infinito del error nodal en función del tamaño de la discretización. En este caso, es necesario el uso de dos niveles de

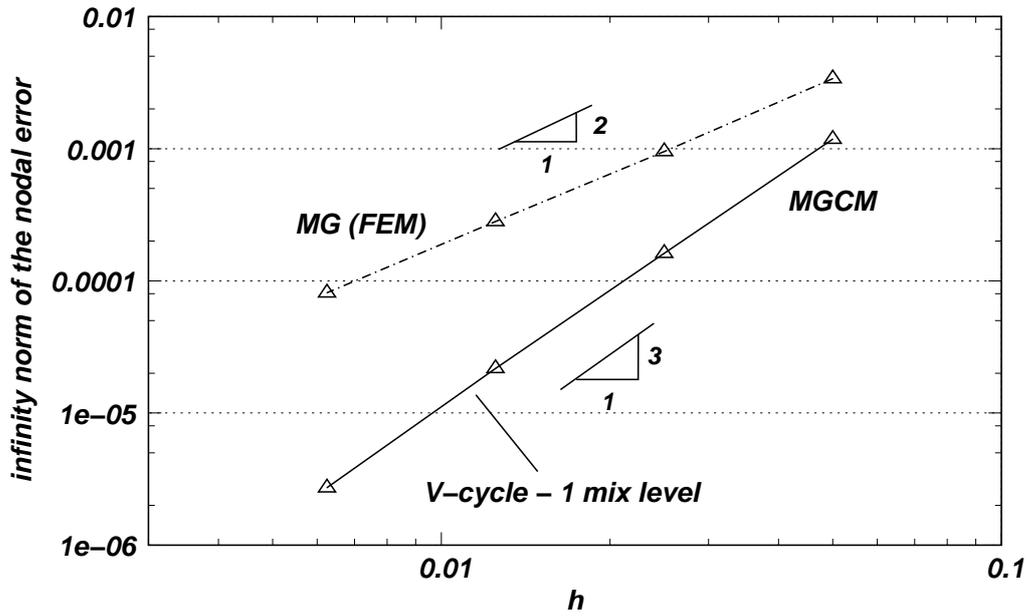


Figura 3.28: Norma infinito del error nodal como función de h para el problema 2.5.3.

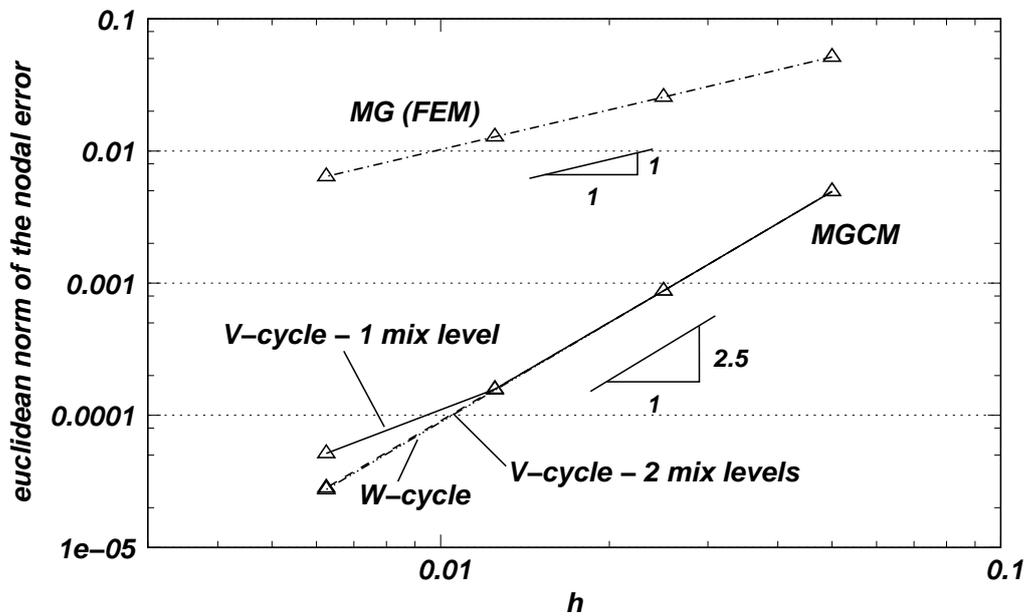


Figura 3.29: Norma euclídea del error nodal como función de h para el problema 2.5.3.

MG para el Problema difusivo con coeficientes variables - Ciclo V					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m
3	7	9.5902×10^{-3}	1.3441×10^{-1}	7.52×10^{-2}	-
4	6	2.4065×10^{-3}	6.6750×10^{-2}	2.03×10^{-1}	-
5	6	6.0359×10^{-4}	3.3383×10^{-2}	9.09×10^{-1}	-
6	6	1.5232×10^{-4}	1.6833×10^{-2}	3.93×10^0	-
MGCM para el Problema difusivo con coeficientes variables - Ciclo V					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MGCM} [s]	m
3	7	1.6852×10^{-3}	1.1015×10^{-2}	7.66×10^{-2}	1
4	6	1.9785×10^{-4}	1.7776×10^{-3}	2.09×10^{-1}	1
5	6	2.4413×10^{-5}	3.3890×10^{-4}	9.66×10^{-1}	1
6	6	4.9948×10^{-6}	3.5801×10^{-4}	4.06×10^0	1
6	8	3.0296×10^{-6}	5.2584×10^{-5}	5.96	2

Tabla 3.3: Resultados para el ciclo V en el problema (3.26).

MG para el Problema difusivo con coeficientes variables - Ciclo W					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m
3	6	9.5901×10^{-3}	1.3441×10^{-1}	9.47×10^{-2}	-
4	5	2.4048×10^{-3}	6.6705×10^{-2}	2.68×10^{-1}	-
5	5	6.0180×10^{-4}	3.3285×10^{-2}	1.13	-
6	5	1.5048×10^{-4}	1.6634×10^{-2}	4.67	-
MGCM para el Problema difusivo con coeficientes variables - Ciclo W					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MGCM} [s]	m
3	6	1.6852×10^{-3}	1.1015×10^{-2}	9.54×10^{-2}	1
4	6	1.9806×10^{-4}	1.7835×10^{-3}	3.23×10^{-1}	1
5	5	2.4445×10^{-5}	3.0136×10^{-4}	1.14	1
6	5	3.0380×10^{-6}	5.4106×10^{-5}	4.28	1

Tabla 3.4: Resultados para el ciclo W en el problema (3.26).

mezcla para el ciclo V con seis niveles de malla para poder alcanzar la tasa de reducción del error de la técnica CM.

Problema de Laplace en un dominio en forma de L

Se considera el problema de Laplace en un dominio en forma de L : $\Omega = (-1, 0) \times (-1, 1) \cup (0, 1) \times (0, 1)$ donde la solución exacta está dada en coordenadas polares por

$$u(r, \phi) = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right).$$

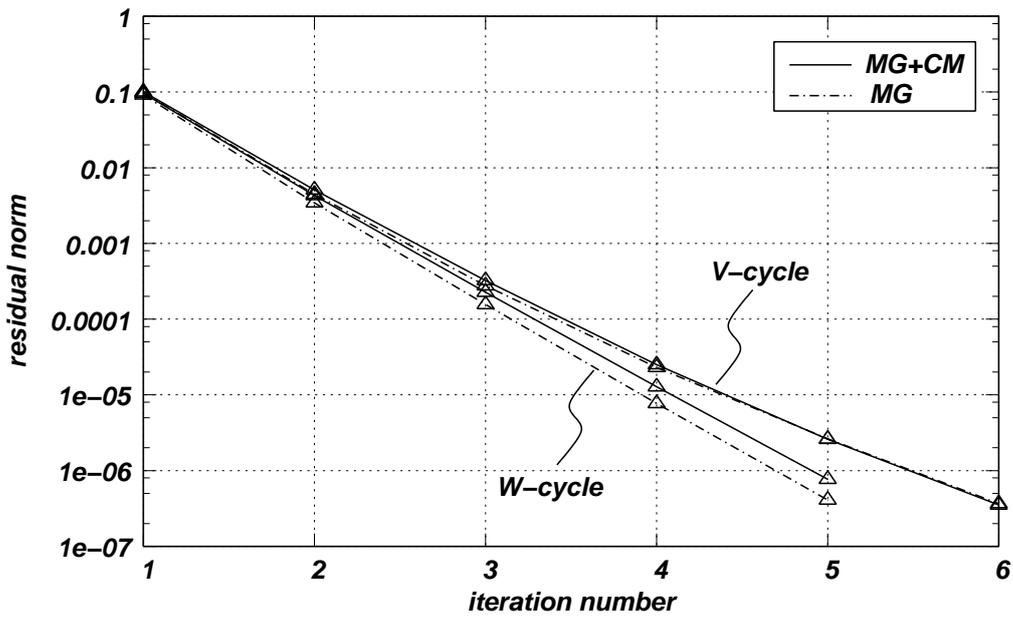


Figura 3.30: Norma del residuo como función del número de iteraciones para el problema (3.26) con cinco niveles de grilla.

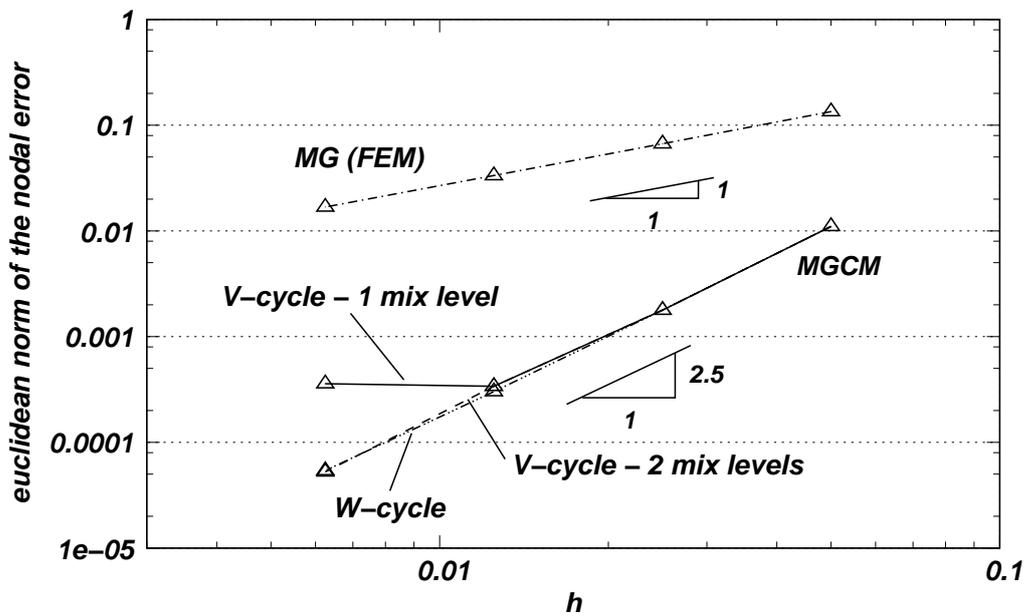


Figura 3.31: Norma euclídea para el error nodal como función de h para el problema (3.26).

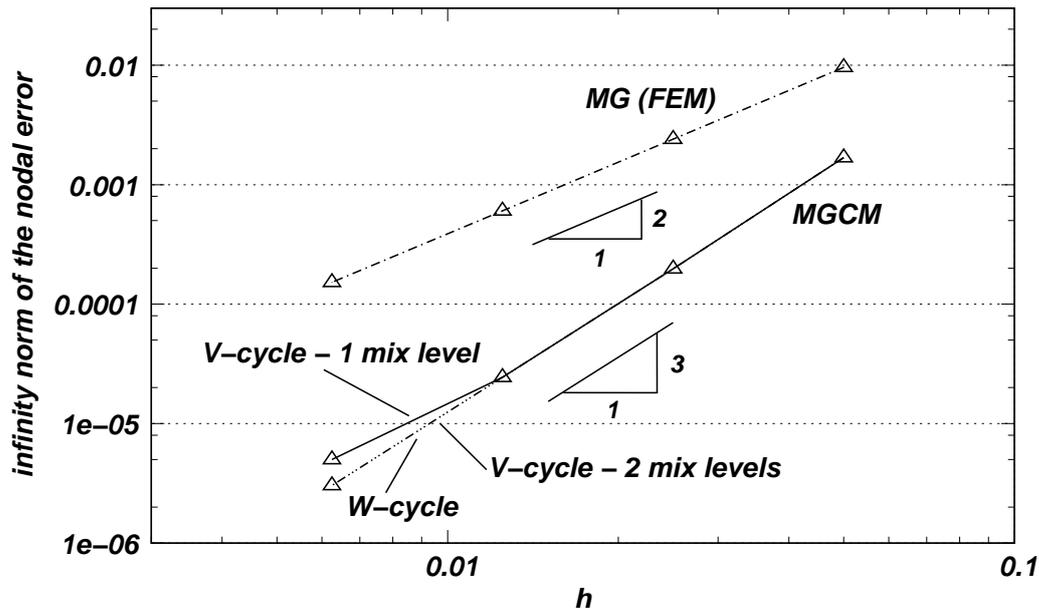


Figura 3.32: Norma infinito para el error nodal como función de h para el problema (3.26).

La malla del primer nivel es una grilla no estructurada con 82 elementos triangulares y 52 nodos. Nuevamente, se utilizan tres pasos de pre y post suavizado de Jacobi amortiguado y una tolerancia para la convergencia del residuo de 10^{-6} . El factor de participación utilizado para la composición fue $\alpha = 1.4598$ (véase la sección §2.6.4).

Se presentan en las tablas 3.5 y 3.6 las normas l_∞ y euclídea del error para los ciclos V y W respectivamente. Nuevamente, la reducción de la norma del error puede obtenerse cuando se aplica la técnica MGCM. Sin embargo, hay un decrecimiento en la tasa de convergencia del método MGCM comparado con MG, excepto en el ciclo V con seis niveles de malla, debido a que se necesita una iteración adicional para alcanzar la convergencia. La reducción relativa entre los errores obtenidos con los métodos MG y MGCM son menores que en los ejemplos previos debido a la baja regularidad de la solución de este problema.

Problema de Poisson en dominio perforado

El siguiente ejemplo fue resuelto en la sección §2.5.4 mediante la técnica CM.

En las tablas 3.7 y 3.8 se presentan los resultados obtenidos para ambos ciclos, V y W , respectivamente. En las mismas puede observarse cómo las normas euclídea e infinito del error nodal decrecen cuando se aplica la mezcla de mallas. En este caso las tasas de convergencia de las estrategias MG y MGCM son similares, aunque puede apreciarse una leve degradación de la convergencia en el caso de la resolución aplicando la estrategia de malla compuesta original (véase la figura 3.35).

Las figuras 3.36 y 3.37 muestran las normas euclídea e infinito del error nodal en función del tamaño de la discretización. Para el presente problema y con los tamaños de malla utilizados, fue suficiente la utilización de un único nivel de mezcla para alcanzar las tasas de reducción obtenidas en la sección §2.5.4 ($\|e\|_2 \mathcal{O}(h^{2.5})$ y $\|e\|_\infty \mathcal{O}(h^3)$).

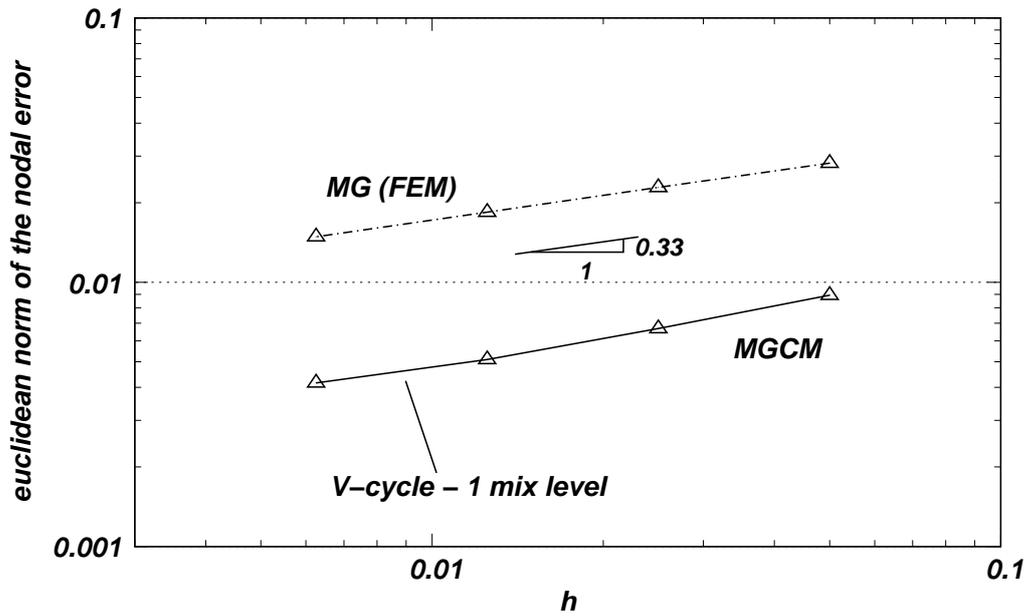


Figura 3.33: Norma euclídea del error nodal como función de h para el problema de Laplace.

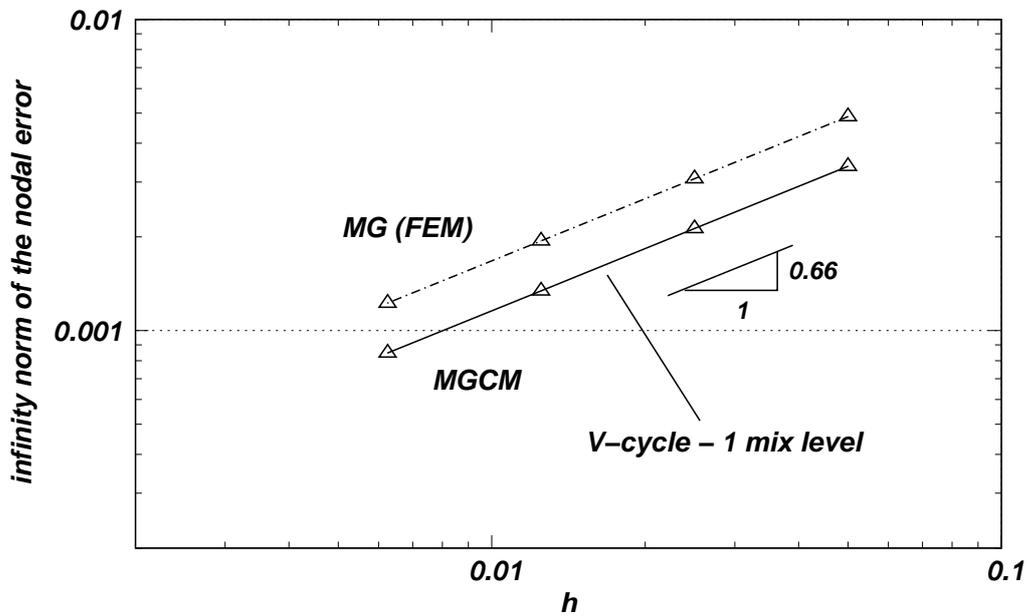


Figura 3.34: Norma infinito del error nodal como función de h para el problema de Laplace.

MG para el Problema de Laplace - Ciclo V					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m
3	7	4.8705×10^{-3}	2.8198×10^{-2}	1.79×10^{-1}	-
4	7	3.0792×10^{-3}	2.2843×10^{-2}	7.93×10^{-1}	-
5	7	1.9430×10^{-3}	1.8408×10^{-2}	2.87×10^0	-
6	7	1.2253×10^{-3}	1.4858×10^{-2}	1.20×10^1	-
MGCM para el Problema de Laplace - Ciclo V					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MGCM} [s]	m
3	8	3.3756×10^{-3}	8.9248×10^{-3}	2.16×10^{-1}	1
4	8	2.1293×10^{-3}	6.6774×10^{-3}	9.39×10^{-1}	1
5	8	1.3423×10^{-3}	5.0972×10^{-3}	3.43×10^0	1
6	7	8.4760×10^{-4}	4.1603×10^{-3}	1.28×10^1	1

Tabla 3.5: Resultados para el ciclo V en el problema de Laplace.

MG para el Problema de Laplace - Ciclo W					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m
3	7	4.8699×10^{-3}	2.8189×10^{-2}	2.58×10^{-1}	-
4	6	3.0783×10^{-3}	2.2813×10^{-2}	1.00×10^0	-
5	6	1.9418×10^{-3}	1.8324×10^{-2}	3.53×10^0	-
6	6	1.2239×10^{-3}	1.4652×10^{-2}	1.46×10^1	-
MGCM para el Problema de Laplace - Ciclo W					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MGCM} [s]	m
3	8	3.3754×10^{-3}	8.9220×10^{-3}	2.99×10^{-1}	1
4	7	2.1290×10^{-3}	6.6688×10^{-3}	1.17×10^0	1
5	7	1.3418×10^{-3}	5.0748×10^{-3}	4.29×10^0	1
6	7	8.4546×10^{-4}	3.9145×10^{-3}	1.78×10^1	1

Tabla 3.6: Resultados para el ciclo W en el problema de Laplace.

3.7. Conclusiones

En este capítulo se presentó la estrategia de Multigrilla con Malla Compuesta (MGCM). La misma propuso la integración de las dos estrategias con el objetivo de obtener las ventajas de cada una de ellas en un mismo esquema. Se resolvieron algunos problemas elípticos con solución exacta con el objetivo de mostrar la potencialidad de la técnica. Para los distintos casos se estimó numéricamente el valor del parámetro α para la mezcla, el cual está relacionado con la regularidad del problema considerado. Para el problema con singularidad se estimó el valor α correspondiente y se obtuvieron mejoras menos sustanciales que en los demás casos.

Para todos los ejemplos presentados, se trabajó con el operador de ponderación com-

MG para el Problema de Poisson en dominio perforado - Ciclo V					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m
3	11	6.6746×10^{-3}	4.2314×10^{-2}	3.32×10^{-1}	-
4	12	1.9914×10^{-3}	2.0854×10^{-2}	1.34	-
5	11	5.7851×10^{-4}	1.0379×10^{-2}	5.09	-
6	12	1.6479×10^{-4}	5.1826×10^{-3}	2.35×10^1	-
MGCM para el Problema de Poisson en dominio perforado - Ciclo V					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m
3	12	2.0134×10^{-4}	6.5459×10^{-4}	3.75×10^{-1}	1
4	12	2.5032×10^{-5}	1.1156×10^{-4}	1.41	1
5	12	3.0586×10^{-6}	1.9121×10^{-5}	5.56	1
6	12	3.7443×10^{-7}	3.4291×10^{-6}	2.45×10^1	1

Tabla 3.7: Resultados para el ciclo V en el problema 2.5.4.

MG para el Problema de Poisson en dominio perforado - Ciclo W					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m
3	11	6.6746×10^{-3}	4.2314×10^{-2}	4.96×10^{-1}	-
4	11	1.9914×10^{-3}	2.0854×10^{-2}	1.87	-
5	10	5.7851×10^{-4}	1.0379×10^{-2}	6.65	-
6	11	1.6479×10^{-4}	5.1826×10^{-3}	3.12×10^1	-
MGCM para el Problema de Poisson en dominio perforado - Ciclo W					
n	iter.	$\ \mathbf{e}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}\ _2$	t_{MG} [s]	m
3	11	2.0134×10^{-4}	6.5459×10^{-4}	5.08×10^{-1}	1
4	11	2.5032×10^{-5}	1.1156×10^{-4}	1.92	1
5	11	3.0591×10^{-6}	1.9114×10^{-5}	7.50	1
6	12	3.7425×10^{-7}	3.4126×10^{-6}	3.37×10^1	1

Tabla 3.8: Resultados para el ciclo W en el problema 2.5.4.

pleta para relacionar las mallas. Se graficaron las normas de los errores con el objetivo de mostrar cómo se comporta la estrategia comparada con el método MG clásico. De las figuras puede notarse la necesidad de incrementar el valor del parámetro m , correspondiente a la cantidad de niveles de mezcla dentro del algoritmo Multigrilla a medida que disminuye el tamaño de la malla (*i.e.*, a medida que se incrementa el número de niveles de grillas). Ese valor es necesario para alcanzar la tasa de reducción del error que se obtendría si el sistema lineal que surge de la técnica de Malla Compuesta fuera resuelto con un método directo.

Por otro lado, el objetivo de presentar las gráficas de la convergencia del residuo fue el de evaluar dichas tasas para mostrar como la incorporación de la estrategia CM a MG no degrada los residuos de la técnica MG original. Luego, se puede concluir que se tiene la potencialidad del método Multigrilla y además se obtienen soluciones mejoradas sin incrementar en forma considerable el costo computacional.

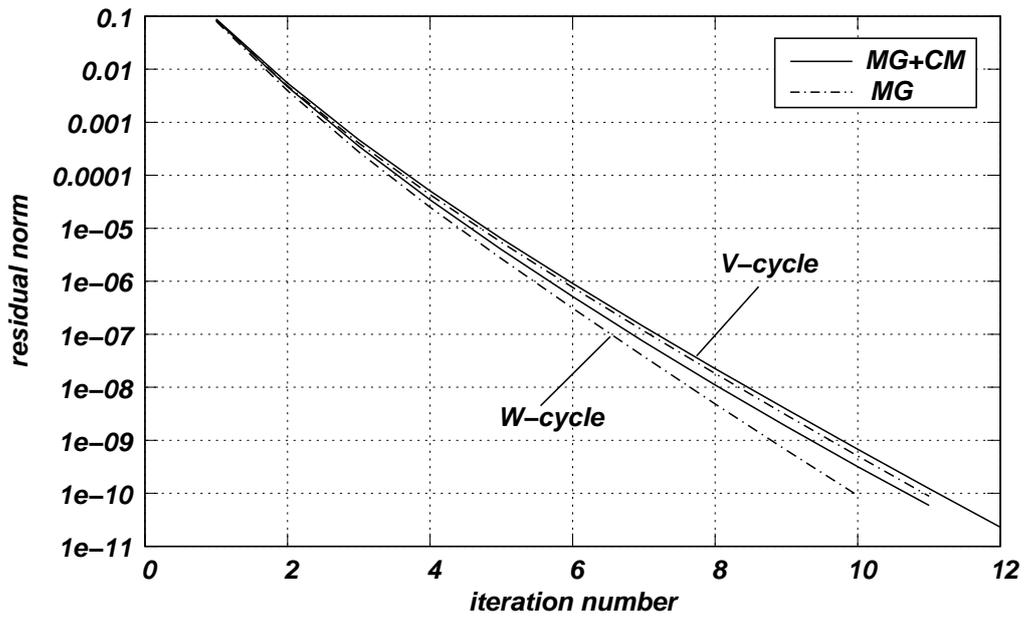


Figura 3.35: Norma del residuo como función del número de iteraciones para el problema 2.5.4 con cinco niveles de grilla.

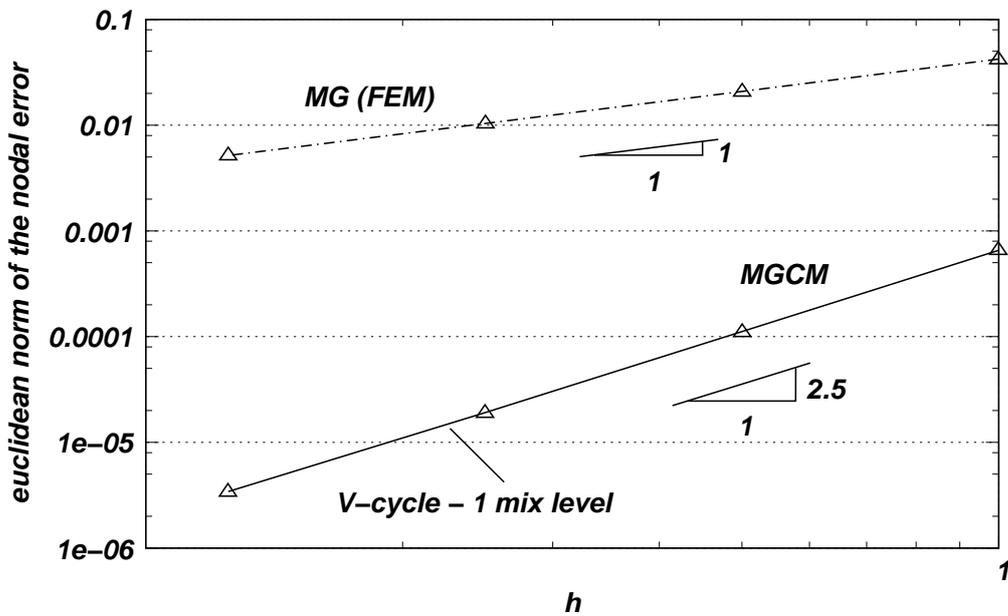


Figura 3.36: Norma euclídea para el error nodal como función de h para el problema 2.5.4.

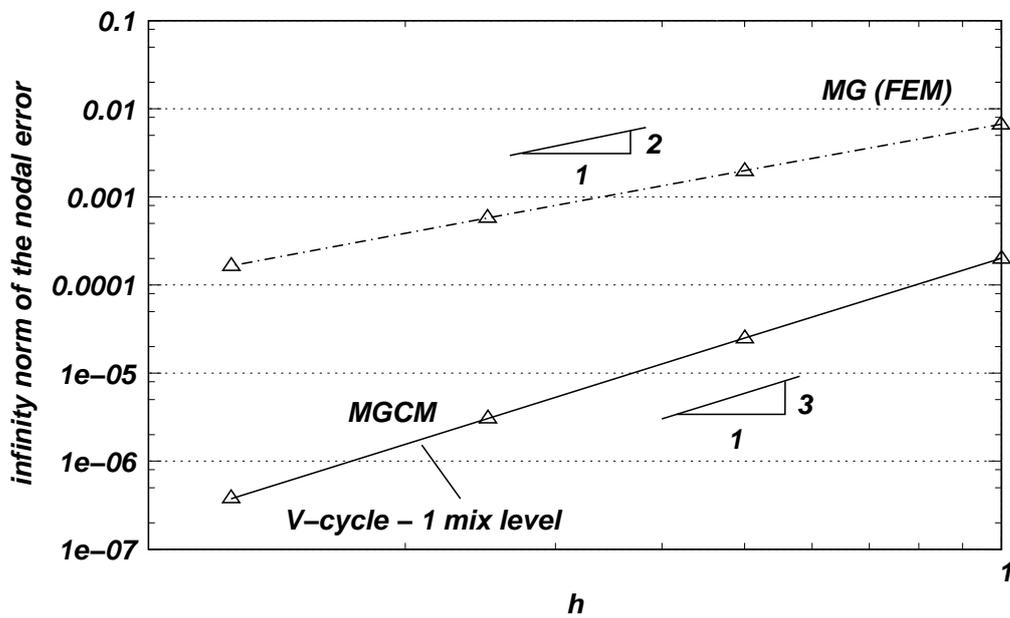


Figura 3.37: Norma infinito para el error nodal como función de h para el problema 2.5.4.

Capítulo 4

Método Algebraico de Malla Compuesta

4.1. Introducción

El método de Malla Compuesta es útil para estimar el error de discretización [2] y, además, para mejorar la solución sin incrementar significativamente el costo computacional, como se presentó en el capítulo 3. La técnica consiste en redefinir sobre una malla dada el operador lineal que proviene de la discretización de una ecuación en derivadas parciales. Este operador se modifica de acuerdo a una combinación lineal apropiada entre los operadores de la malla dada y de una malla más gruesa que debe ser un desrefinamiento de la primera. En este capítulo se propone una técnica de Malla Compuesta Algebraica, que combina la estrategia CM con algunas de las herramientas del método Multigrilla Algebraico (AMG, por *Algebraic Multigrid*) [4, 11, 38] para la definición de la malla gruesa y del espacio discreto asociado a la misma. El desrefinamiento de la malla se basa en la fusión de elementos en *macroelementos*¹, con una nueva definición de la topología de la malla y de las funciones de base. La aglomeración de los elementos se lleva a cabo con el objetivo de reducir la anisotropía de la malla, lo cual es importante en la discretización de problemas de convección-difusión-reacción. El operador discreto para la malla gruesa se obtiene mediante la GCA (*Galerkin Coarse Grid Approximation*), donde los operadores de transferencia se obtienen a partir del grafo de la malla gruesa. La técnica de Malla Compuesta Algebraica (ACM, por *Algebraic Composite Mesh*) se presenta como la versión algebraica de la estrategia de Malla Compuesta original propuesta en el capítulo 2. Partiendo de una malla de elementos finitos, la malla gruesa que formará parte de la combinación lineal proviene de una aglomeración de los elementos de la primera. Dicha aglomeración se lleva a cabo con herramientas del método AMG propuestas por Okusanya [29]. Así, los elementos de la malla dada son aglomerados apropiadamente para obtener una nueva malla donde los elementos no preservan necesariamente la forma geométrica de la grilla inicial.

El sistema lineal que se obtiene al aplicar la técnica ACM puede resolverse por un método directo o uno iterativo como por ejemplo, la estrategia Multigrilla [34]. En este trabajo el método se aplica sobre algunos problemas elípticos donde se analizan también

¹Un *macroelemento* está formado por un conjunto de elementos de la malla fina, los que comparten aristas.

los errores de discretización. En todos los casos presentados, el sistema lineal resultante se resuelve mediante un método directo.

4.2. Técnica de Malla Compuesta Algebraica

Como se detalló en el capítulo 2, la solución aproximada mediante el método CM (\mathbf{u}_{Hh}) se obtiene del siguiente sistema:

$$[\alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) \mathbf{A}_{Hh}] \mathbf{u}_{CM} = \alpha \mathbf{f}_h + (1 - \alpha) \mathbf{f}_{Hh} \quad (4.1)$$

Como se comentó anteriormente, el método de Malla Compuesta requiere una malla fina proveniente de un refinamiento uniforme de otra más gruesa. Además, la discretización de las ecuaciones deben llevarse a cabo con ambas mallas para obtener los operadores discretos \mathbf{A}_h y \mathbf{A}_H . Estos requerimientos motivan la propuesta de la técnica de Malla Compuesta basada en la manipulación algebraica del operador discreto calculado con la malla dada. Con este objetivo es necesario llevar a cabo un desrefinamiento de dicha malla, definiendo de manera adecuada la topología de la malla gruesa y el operador discreto asociado. Esto puede realizarse aplicando herramientas que han sido desarrolladas en el método AMG.

Dado que el refinamiento uniforme de la malla gruesa preserva la relación H/h para todos los elementos, se utiliza un único coeficiente en la combinación lineal para todo el conjunto de elementos de la ecuación (4.1). En la estrategia algebraica propuesta, la malla gruesa se obtiene del desrefinamiento de otra malla (generalmente no estructurada), donde la relación de tamaños elementales no será constante entre las mallas. Luego, a fin de generalizar la formulación, puede aplicarse una matriz α en la combinación lineal como factor de participación variable. De esta manera, el sistema lineal para la técnica ACM se escribe como

$$[\alpha \mathbf{A}_h + (\mathbf{I} - \alpha) \mathbf{A}_{Hh}] \mathbf{u}_{CM} = \alpha \mathbf{f}_h + (\mathbf{I} - \alpha) \mathbf{f}_{Hh} \quad (4.2)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

4.3. Elementos del método Multigrilla Algebraico

Los métodos Multigrilla consideran una descomposición del error en componentes oscilantes y componentes suaves. Las primeras no pueden resolverse sobre una malla más gruesa debido al fenómeno de *aliasing*, pero sí las componentes suaves del error sobre dicha malla. Dada una sucesión jerárquica de mallas (en el sentido de un orden dado por los sucesivos refinamientos), puede llevarse a cabo una separación recursiva del error entre dichas mallas de manera tal que las componentes del error asociado a cada malla forme una base para las componentes del error en la malla más fina [29]. Tal descomposición del error se obtiene mediante un conjunto de operadores para la transferencia de las componentes del error entre los espacios correspondientes a cada malla, tal como se mostró en el capítulo 3.

Sean dos grillas consecutivas provenientes de la sucesión jerárquica de mallas citada en el párrafo anterior. Sea Ω^h la malla fina de dicho par y Ω^H la malla gruesa. El operador de restricción proyecta vectores de la malla fina a la malla gruesa: $\mathbf{R}_h^H : \mathbb{R}^{n_h} \rightarrow \mathbb{R}^{n_H}$, donde $n_h > n_H$ son las dimensiones de los espacios de dimensión finita asociados con las

mallas Ω^h y Ω^H respectivamente. La interpolación de vectores de la malla gruesa a la fina se lleva a cabo mediante el operador de prolongación $\mathbf{P}_H^h : \mathbb{R}^{n_H} \rightarrow \mathbb{R}^{n_h}$.

Un algoritmo Multigrilla requiere una aproximación al operador de la malla fina dentro del espacio de la malla gruesa. La matriz para el espacio asociado a dicha malla se denomina \mathbf{A}_H y se calcula mediante la siguiente relación algebraica recursiva

$$\mathbf{A}_H = \mathbf{R}_h^H \mathbf{A}_h \mathbf{P}_H^h \quad (4.3)$$

donde, aunque los operadores \mathbf{R}_h^H and \mathbf{P}_H^h son independientes, la elección $c\mathbf{R}_h^H = (\mathbf{P}_H^h)^T$ resulta en la minimización del error en la solución medida en norma A_h ($\|\cdot\|_{\mathbf{A}_h}$) luego de las correcciones en la malla gruesa, lo cual es válido para matrices de rigidez simétricas y definidas positivas [41, 9]. La relación (4.3) para la construcción del operador del espacio correspondiente a la malla gruesa se denomina *Galerkin Coarse Grid Approximation* (GCA) [9].

Para lograr una tasa de convergencia independiente del tamaño de la malla en la formulación Multigrilla aplicando la GCA, es necesario verificar una regla fundamental de precisión de los operadores de interpolación [41]. Esto puede ser establecido simplemente como:

Teorema: Sean m_P y m_R los órdenes (grado más uno) de los polinomios que son interpolados exactamente por los operadores de prolongación \mathbf{P} y restricción \mathbf{R} respectivamente, y sea $2m$ el orden de la ecuación diferencial de gobierno. Una condición necesaria para la convergencia independiente de la malla es

$$m_P + m_R > 2m \quad (4.4)$$

La técnica de aglomeración para la construcción de las topologías y espacios discretos asociados a las malla gruesas puede ser nodal (*node-based*) [18] o elemental (*element-based*) [7, 21]. Las implementaciones estándares de aglomeración nodal utilizan los operadores de inyección para la prolongación y de suma para la restricción. En este caso m_P y m_R son ambos unitarios, y para un operador diferencial de segundo orden ($2m = 2$) se viola la condición (4.4). Luego, o el operador de prolongación, o el de restricción, o ambos, deben ser exactos para polinomios al menos lineales. Para lograr esta precisión, se ha adoptado en esta tesis una estrategia de aglomeración elemental dado que al basarse en una triangulación subyacente, resulta relativamente sencillo construir interpolaciones de alto orden.

4.4. Aglomeración elemental

La técnica de aglomeración analizada en esta tesis ha sido propuesta por Okusanya [29] y se basa en la fusión de elementos para construir macroelementos, lo cual permite una definición apropiada de la topología de la grilla gruesa y del espacio discreto asociado. El objetivo detrás de esta estrategia de aglomeración es la reducción de la anisotropía de la malla, lo cual es importante en problemas de convección-difusión [29]. La principal diferencia entre este método y la versión propuesta por Chan *et al.* [10] radica en que los elementos de la malla gruesa no se convierten en elementos estándar mediante una retriangularización, sino que consisten en polígonos formados por la aglomeración de los elementos de la malla fina.

La topología de la malla gruesa se construye uniendo los elementos en grupos de *macroelementos*. Una *macroarista* se define como la colección ordenada de las aristas de la grilla fina que son compartidas por dos macroelementos vecinos, y para el caso de macroelementos pertenecientes a la frontera del problema, una *macroarista* será aquella que delimite la misma. Para completar la definición de la malla gruesa, los nodos de la misma se eligen como los nodos de la grilla fina donde coinciden tres o más macroaristas. Los macroelementos con exactamente dos nodos de la malla gruesa se modifican mediante la adición de nodos *soporte* utilizando aquellos nodos de la malla fina que yacen en la macroarista que conecta tales nodos, como se muestra en la figura 4.1. En las figuras 4.2 y 4.3 puede observarse como se conforma un macroelemento, una vez seleccionado el elemento semilla.

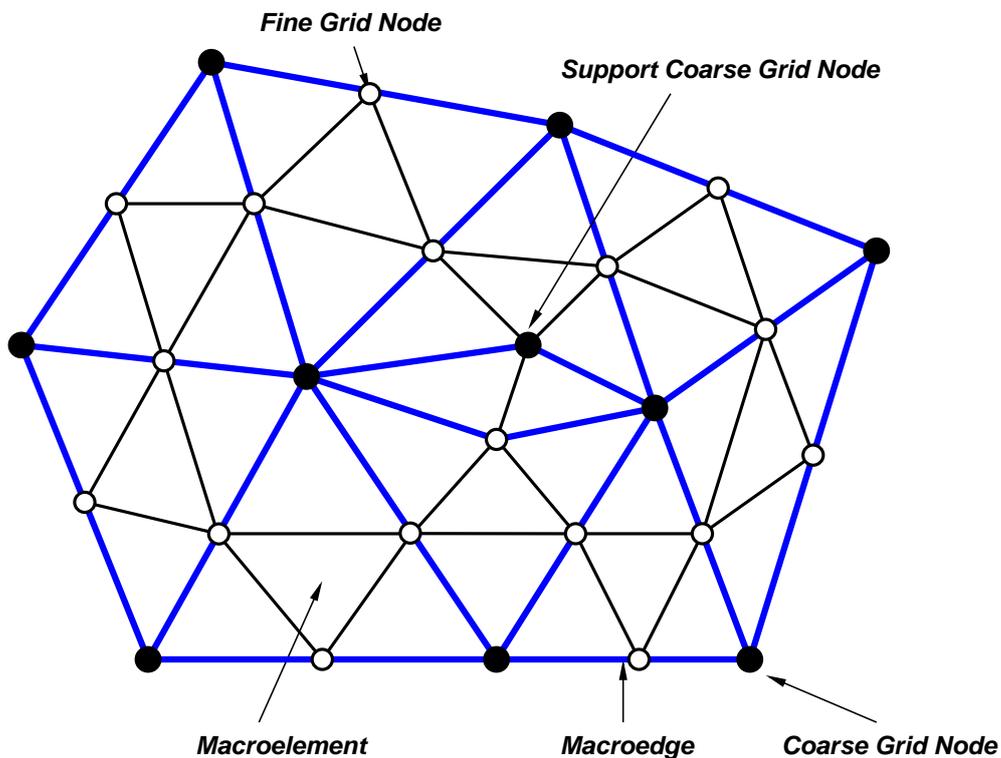


Figura 4.1: Topología del espacio de la malla gruesa con macroelementos formados con nodos soporte.

4.4.1. Algoritmo de aglomeración elemental

El algoritmo de aglomeración estudiado en esta tesis consiste en una modificación del algoritmo de aglomeración elemental propuesto por Okusanya [29]. Como fuera mencionado con anterioridad, el algoritmo se basa en la remoción de la anisotropía de la malla y hace uso de las longitudes de las aristas, de forma tal que la geometría de los elementos de la malla gruesa se define totalmente en términos de la malla fina. Esto es, las longitudes de las macroaristas son simplemente la suma de las longitudes de las aristas de la malla fina que las constituyen. Si la geometría de la malla fina no

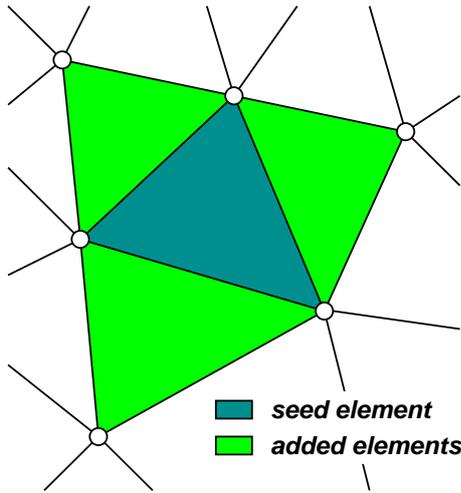


Figura 4.2: Elemento semilla seleccionado adecuadamente.

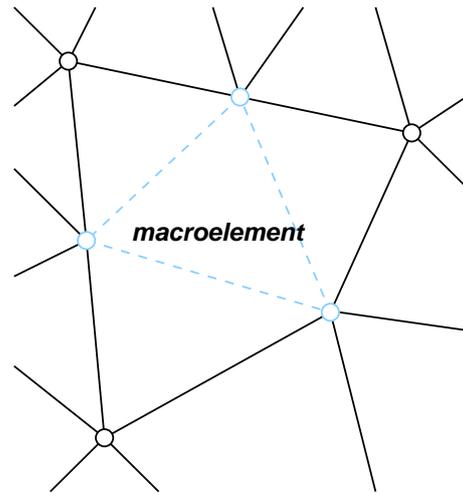


Figura 4.3: Macroelemento resultante.

está especificada (en el sentido de sólo disponer de las conectividades de los elementos pero no los nodos), esta estrategia se convierte en una técnica puramente topológica donde los elementos se asumen isótropos. La decisión de aglomerar dos elementos vecinos está determinada por un concepto de conectividad basado en la geometría, el cual se denomina *skew macroelemental* [29].

Definición 1: Para un macroelemento definido por un polígono general de n lados, el *skew macroelemental* es una medida de su anisotropía y se define como el área de este polígono general dividida por el área del polígono regular de n lados y con igual perímetro.

En casos extremos, como polígonos con vértices colineales, esta medida es cero, y es unitaria para polígonos isótropos de n lados. El concepto de *skew macroelemental* puede extenderse a tres dimensiones mediante una redefinición adecuada como se describe en Venkatakrishnan *et al.* [40]. Las áreas macroelementales para los espacios de la malla gruesa son fáciles de calcular debido a que son simplemente las sumas de las áreas de los elementos aglomerados.

Con el objetivo de completar los operadores requeridos para este algoritmo, se define un concepto de conectividad basado en las aristas denominado *edge skew*.

Definición 2: Para un elemento que es vecino de un macroelemento/elemento a través de una arista dada, se define el *edge skew* como el *skew macroelemental* del macroelemento que se crearía si se aglomerara dicho elemento con el macroelemento/elemento con el que comparte dicha arista.

A continuación, se presenta en detalle el algoritmo:

Procedimiento 1: Construcción Macroelemental

- **Paso 1:** Considerar el grafo $G = (V, E)$ de la malla cuyos vértices forman el conjunto V y cuyas aristas forman E y calcular la longitud de las aristas en E . Inicializar la

lista de elementos semilla como vacía.

- **Paso 2:** Obtener un elemento semilla de manera adecuada: Si no hay elemento semilla en la cola, elegir cualquier elemento adecuado que no pertenezca a ningún macroelemento.
- **Paso 3:** Aglomerar alrededor del elemento semilla. Fusionar los elementos vecinos no asignados que posean un *edge skew* mayor a una fracción especificada (típicamente de 0.75) del *skew* de todos los macroelementos existentes.
- **Paso 4:** Poner en la cola los elementos semilla. Los elementos semilla nuevos se ubican en la cola para continuar el algoritmo. Los mismos se eligen como aquellos elementos que comparten un vértice pero no aristas con el último macroelemento creado. En 3D, este paso podría extenderse a los elementos que comparten un vértice y/o una arista pero no una cara con el macroelemento.
- **Paso 5:** Repetir el **Paso 2** hasta que todos los elementos pertenezcan a algún macroelemento o que no haya más elementos semilla.

Una vez que el algoritmo termina, es necesario aplicar un post-proceso para eliminar los elementos ‘*sliver*’ (son elementos que en 2D, en general suelen tener los nodos prácticamente colineales), los cuales son elementos de la malla fina que no han sido seleccionados por el algoritmo para formar un macroelemento. La elección de los macroelementos a los cuales se aglomerarán los elementos ‘*sliver*’ se realiza *a priori*, basándose en el concepto de *edge skew*.

En el **Paso 2** del algoritmo de construcción macroelemental se presenta la instrucción para elegir un elemento semilla adecuado. De hecho, el método para seleccionar el elemento apropiado conlleva diferentes costos computacionales. Cuando se aplica el algoritmo sobre una malla estructurada, es deseable recuperar la aglomeración isótropa 4:1 en 2D. Más precisamente, la elección del elemento semilla en el **Paso 2** determinará una implementación exitosa del algoritmo. En este trabajo se elige dicho elemento basándose en etiquetas asignadas a los nodos, pudiéndose obtener de este modo la relación 4:1 en mallas 2D estructuradas.

4.4.2. Operadores de interpolación y restricción

La construcción de los operadores de interpolación puede facilitarse mediante la definición de funciones de base nodales sobre el espacio de la malla gruesa. Esto, además, provee una extensión natural del algoritmo de Elementos Finitos sobre dichos espacios.

Para la construcción de las funciones de base sobre el espacio de la malla gruesa se sigue la propuesta de Okusanya [29]. En este método, dicha construcción se realiza utilizando la geometría y la topología provistas. Si no se dispone de la geometría, entonces los elementos se asumen isótropos, derivando en este caso en un interpolante puramente topológico. Las funciones de base se definen utilizando una interpolación basada en la distancia gráfica (en un entorno de grafos significa que cada arista del grafo pesa 1) tanto en la frontera como en el interior del elemento, y ponderada geoméricamente para formar un interpolante más preciso. El algoritmo provee un interpolante cuasi-lineal, como se muestra en la figura 4.4.

La figura 4.4 presenta la función de base Φ definida sobre el macroelemento aglomerado para el nodo de la malla gruesa en \mathbf{x}_0 . Esta función se construye mediante la interpolación de la distancia gráfica sobre el macroelemento y ponderada con la longitud de la arista.

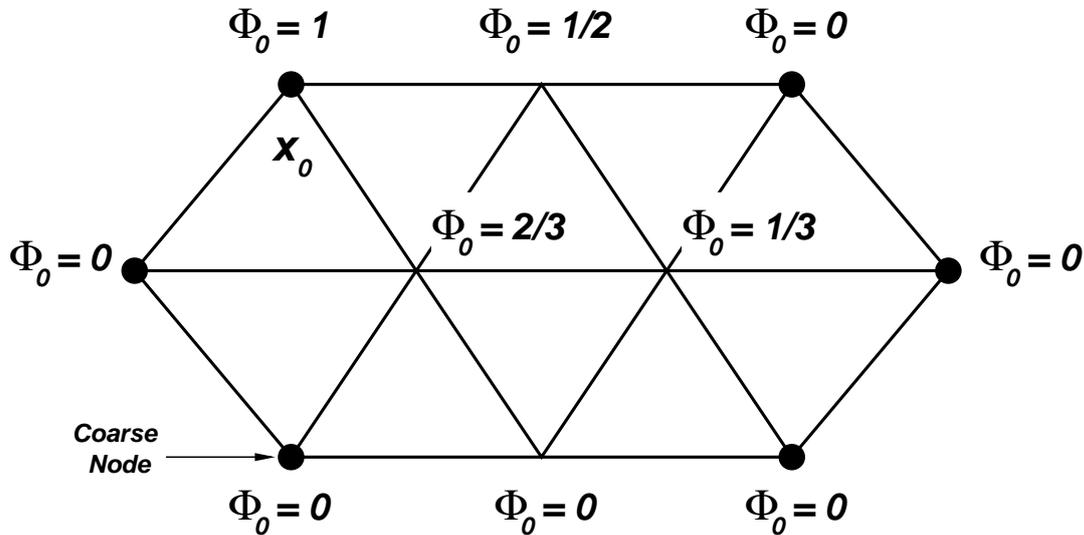


Figura 4.4: Funciones de base del espacio de la malla gruesa basadas en la distancia gráfica.

Una componente importante del algoritmo para la construcción de las funciones de base en el espacio de la malla gruesa es el algoritmo *Breadth First Search* (BFS), el cual es esencialmente un algoritmo voraz para recorrido de grafos. El detalle del algoritmo BFS se presenta en el apéndice C. El algoritmo para la construcción del interpolante para el espacio de la malla gruesa se presenta a continuación.

Procedimiento 2: Construcción de las Funciones de Base

- **Paso 1:** Para cada macroelemento, crear un subgrafo local. En el proceso, crear un ordenamiento de las aristas de la frontera de manera tal que la misma pueda ser recorrida.
- **Paso 2:** Extraer la lista de vértices interiores. Extraer la lista ordenada de los vértices de la malla gruesa recorriendo las aristas de la frontera.
- **Paso 3:** Para todos los vértices de las aristas de la malla fina que yacen entre nodos consecutivos de la malla gruesa, construir los datos de interpolación ponderados con las longitudes de las aristas. La longitud de la macroarista se calcula simultáneamente.
- **Paso 4:** *Interpolación de vértices interiores.* Para cada nodo de la malla gruesa en el macroelemento, realizar una iteración del algoritmo BFS sobre el subgrafo local con el nodo de la malla gruesa como semilla. Tanto el conjunto de nivel como la distancia gráfica desde el correspondiente nodo de la malla gruesa se guardan durante el proceso para cada nodo interior en el subgrafo (nodo de la malla fina). Calcular luego la distancia en el grafo entre cada nodo de la grilla fina y los nodos

de la malla gruesa. Para cada nodo de la malla fina, las distancias gráficas son ponderadas para que su suma sea unitaria.

Para simplificar la notación, de ahora en adelante se usará \mathbf{P}_h para indicar \mathbf{P}_h^H y lo mismo para \mathbf{R}_h en lugar de \mathbf{R}_h^H . La matriz de coeficientes necesaria para el operador de prolongación \mathbf{P}_h puede ahora extraerse de las funciones de base aplicando el siguiente algoritmo:

Procedimiento 3: *Construcción del operador de prolongación*

- **Paso 1:** Para cada nodo i de la malla fina en un macroelemento que corresponda a un nodo j de la malla gruesa se define el coeficiente del operador de prolongación como

$$\mathbf{P}_h(i, j) = 1 \quad (4.5)$$

- **Paso 2:** Para cualquier otro nodo i de la malla fina en un macroelemento que no se corresponda con un nodo de la grilla gruesa, dada la distancia gráfica ponderada $dist(i, j)$ desde cada nodo j de la malla gruesa, se define el coeficiente del operador de prolongación como

$$\mathbf{P}_h(i, j) = \frac{\frac{1}{dist(i, j)}}{\sum_k \frac{1}{dist(i, k)}} \quad (4.6)$$

El operador de restricción \mathbf{R}_h se define mediante la formulación GCA. El éxito del método ACM depende fuertemente de qué tan buena sea la aproximación de la matriz del espacio de la malla gruesa \mathbf{A}_H a \mathbf{A}_h . Se elige el operador de restricción como

$$\mathbf{R}_h = \sigma \mathbf{P}_h^T \quad (4.7)$$

donde σ es un factor de escala adecuado. Si \mathbf{R}_h se utiliza para transferir los residuos a la malla gruesa (como es necesario en la técnica ACM), el valor correcto de la escala depende del escalado entre los problemas en la malla fina y en la gruesa. Esto implica que la discretización sobre la grilla gruesa debe ser consistente con la ecuación diferencial de gobierno de la misma manera que en la malla fina. Supóngase que A_j representa un área característica (*e.g.*, el área del volumen de control) sobre la grilla fina asociada al nodo j de tal grilla, y que \bar{A}_i representa la correspondiente área característica sobre la malla gruesa asociada al nodo de la grilla gruesa i . Tanto los esquemas de Volúmenes Finitos como de Elementos Finitos en 2D dan la siguiente regla de escalado:

$$\sum_j \mathbf{R}_h(i, j) A_j = \bar{A}_i \quad (4.8)$$

Esta condición se deriva considerando los términos integrales para los flujos interiores. Sin embargo, los términos que involucran integrales de flujo sobre la frontera, son integrales de línea que necesitan una modificación del operador de restricción. Sea L_j una longitud característica sobre la malla fina asociada con el nodo de frontera j de esta malla, y sea \bar{L}_i la correspondiente longitud característica en la malla gruesa asociada con el nodo i perteneciente a su frontera. La condición de escalado para el operador de restricción cuando se aplica a términos sobre la frontera es

$$\sum_j \mathbf{R}_h(i, j) L_j = \bar{L}_i \quad (4.9)$$

Para poder trabajar con las dos formas de escalado, Okusanya [29] propone dividir la matriz \mathbf{A}_h de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}_h = \mathbf{A}_h^{gal} + \mathbf{A}_h^{bc} \quad (4.10)$$

donde \mathbf{A}_h^{gal} consiste en los términos de Galerkin que se escalan con el área y \mathbf{A}_h^{bc} consiste en los términos asociados a las condiciones de borde, los cuales se escalan con la longitud. Basándose en la ecuación (4.10), el operador de restricción se divide en \mathbf{R}_h^{gal} y \mathbf{R}_h^{bc} de manera que la definición GCA para la matriz de la malla gruesa se expresa como

$$\mathbf{A}_H = \mathbf{R}_h^{gal} \mathbf{A}_h^{gal} \mathbf{P}_h^{gal} + \mathbf{R}_h^{bc} \mathbf{A}_h^{bc} \mathbf{P}_h^{bc} \quad (4.11)$$

donde $\mathbf{R}_h^{gal} = \boldsymbol{\sigma}^{gal} \mathbf{P}_h^{galT}$ y $\mathbf{R}_h^{bc} = \boldsymbol{\sigma}^{bc} \mathbf{P}_h^{bcT}$. La construcción de \mathbf{P}_h^{gal} sigue exactamente el algoritmo presentado en la sección §4.4.2. Sin embargo, \mathbf{P}_h^{bc} se construye eliminando las entradas de las filas para todos los nodos interiores de la malla fina en \mathbf{P}_h^{gal} . Esto funciona porque la interpolación para los nodos de frontera pertenecientes a la malla fina se basa en los correspondientes nodos de frontera de la malla gruesa. No obstante esta división del operador de restricción debida al escalado, para la operación de prolongación se utiliza solo \mathbf{P}_h^{gal} .

Finalmente, se considera la división del residuo

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{r}_h^{gal} + \mathbf{r}_h^{bc} \quad (4.12)$$

de manera tal que una restricción para el residuo pueda escribirse como

$$\mathbf{r}_H = \mathbf{R}_h^{gal} \mathbf{r}_h^{gal} + \mathbf{R}_h^{bc} \mathbf{r}_h^{bc} \quad (4.13)$$

4.5. Ejemplos

Debido a que, aún con las modificaciones introducidas en esta tesis, el algoritmo de aglomeración elemental propuesto por Okusanya no ha mostrado ser robusto y general, en el sentido de que la elección del elemento semilla no está claramente especificada. Por este motivo, no ha sido posible evaluar en toda su magnitud la estrategia propuesta de Malla Compuesta Algebraica. Sin embargo, con el objetivo de comprobar el correcto funcionamiento de los demás algoritmos y la construcción algebraica de los operadores de interpolación, se presentan a continuación tres problemas 2D con solución conocida. En los tres casos se utilizaron todos los algoritmos y técnicas presentados en el presente capítulo, con excepción del algoritmo de construcción macroelemental. Para sustituir este último algoritmo, se ha recurrido simplemente a un refinamiento geométrico uniforme de la malla gruesa para obtener la malla fina necesaria para el método. Esta particularidad de la técnica permite utilizar la formulación (4.1) en lugar de la versión general propuesta en la ecuación (4.2).

4.5.1. Problema de Poisson en un dominio rectangular

El planteo de este problema fue presentado en la sección §2.5.3. En este caso, el dominio se discretizó con una malla no estructurada de 5000 elementos y 2601 nodos. La grilla resultante es entonces la malla fina del problema y la malla gruesa se obtiene mediante

el algoritmo de aglomeración elemental presentado en la sección §4.4.1 el cual devuelve correctamente la aglomeración isótropa 4:1, dado que las mallas fina y gruesa se relacionan entre sí por un refinamiento homogéneo. El factor de participación para la composición de las mallas, con valor $\alpha = 4/3$, se obtiene teniendo en cuenta la regularidad de la solución exacta.

Los errores nodales entre las soluciones exacta y aproximada para FEM y ACM se muestran en las figuras 4.5 y 4.6, respectivamente. Los resultados del error en norma l_∞ y norma euclídea se presentan en la tabla 4.1. Como puede observarse de dicha tabla, el error para el método ACM medido en norma euclídea presenta una reducción más notable respecto del correspondiente error que posee la solución FEM.

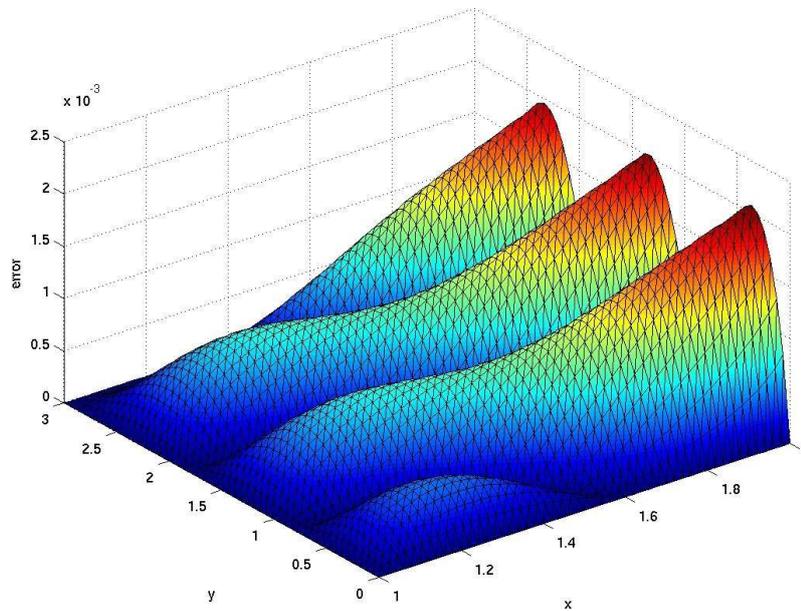


Figura 4.5: Error nodal FEM entre las soluciones exacta y aproximada para el problema 2.5.3.

Problema de Poisson en el dominio rectangular		
	$\ \mathbf{e}\ _2$	$\ \mathbf{e}\ _\infty$
FEM	3.9300×10^{-2}	2.1000×10^{-3}
ACM	1.500×10^{-3}	2.6424×10^{-4}

Tabla 4.1: Norma euclídea y norma l_∞ de los errores para el problema 2.5.3.

Al observar las estrategias de Malla Compuesta original y ACM, se puede concluir que los resultados son comparables para las normas evaluadas en este problema. Los tiempos obtenidos con el código en el estado actual también concuerdan con los calculados para CM original.

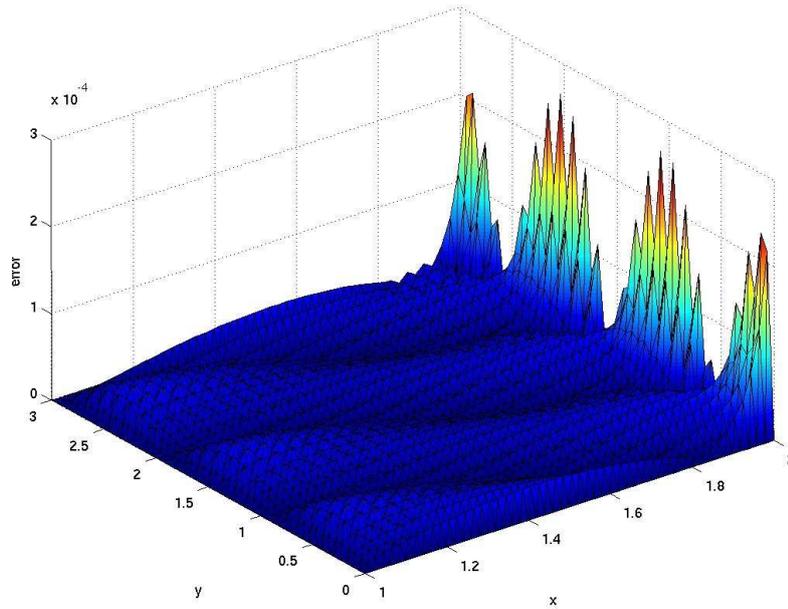


Figura 4.6: Error nodal ACM entre las soluciones exacta y aproximada para el problema 2.5.3.

4.5.2. Problema de Poisson en un dominio perforado

Se resolvió nuevamente el problema presentado en la sección §2.5.4. El dominio se discretiza mediante una grilla no estructurada con 2720 elementos y 1476 nodos. En la figura 4.7 se presentan superpuestas las mallas fina y gruesa utilizadas para la resolución de este ejemplo. El factor de participación para la composición de la malla se obtiene teniendo en cuenta la regularidad de la solución exacta para este problema: $\alpha = 4/3$.

Los errores nodales entre la solución numérica y exacta para FEM y ACM se muestran en las figuras 4.8 y 4.9, respectivamente. En la tabla 4.2 se presenta el error en norma l_∞ y euclídea. Como puede observarse en esta tabla, el error medido en norma euclídea disminuye aproximadamente un orden de magnitud para el método ACM con respecto a FEM, lo cual implica que la mejora de la solución se verifica en todo el dominio.

Problema de Poisson en el dominio perforado		
	$\ \mathbf{e}\ _2$	$\ \mathbf{e}\ _\infty$
FEM	8.4500×10^{-2}	1.3000×10^{-2}
ACM	1.000×10^{-3}	3.5087×10^{-4}

Tabla 4.2: Norma euclídea y norma l_∞ de los errores para el problema 2.5.4.

Comparando las tablas 4.2 con la tabla correspondiente al método original para este problema 2.11, se puede concluir que nuevamente los resultados son comparables entre las dos estrategias.

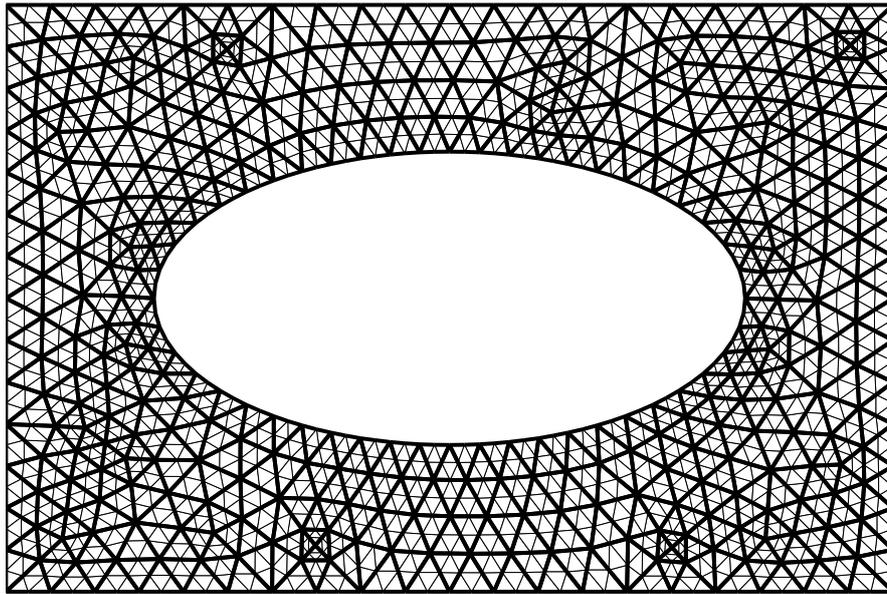


Figura 4.7: Mallas fina y gruesa para el problema 2.5.4.

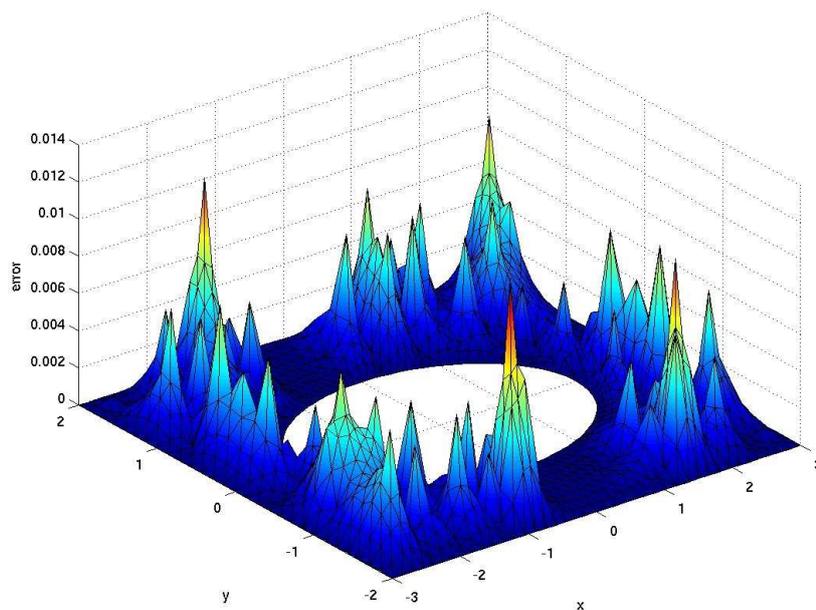


Figura 4.8: Error nodal FEM entre las soluciones exacta y aproximada para el problema 2.5.4.

4.5.3. Problema de Laplace en un dominio con forma de L

El último caso presentado en este capítulo corresponde al problema de Laplace en un dominio en forma de L presentado en la sección §3.6.2. El dominio se discretizó mediante una malla no estructurada de 4008 elementos y 2085 nodos. En la figura 4.10 se muestran

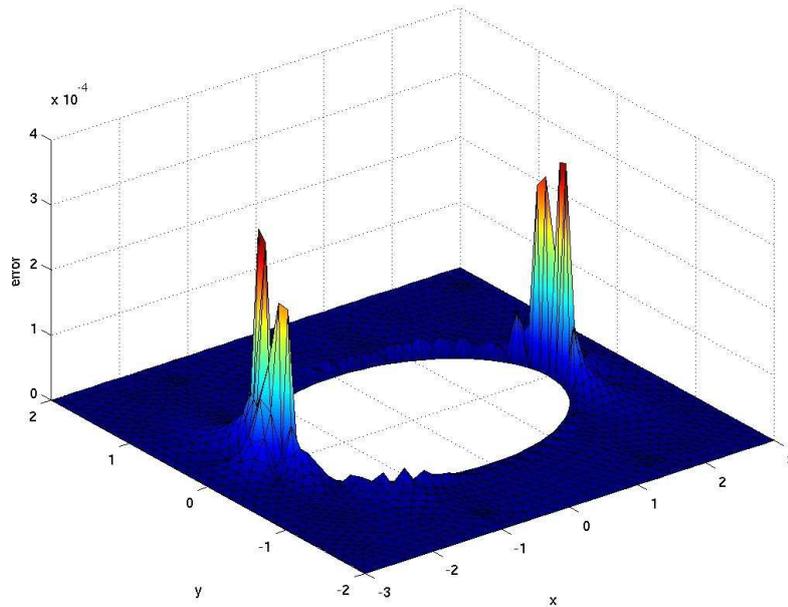


Figura 4.9: Error nodal ACM entre las soluciones exacta y aproximada para el problema 2.5.4.

superpuestas las mallas fina y gruesa utilizadas.

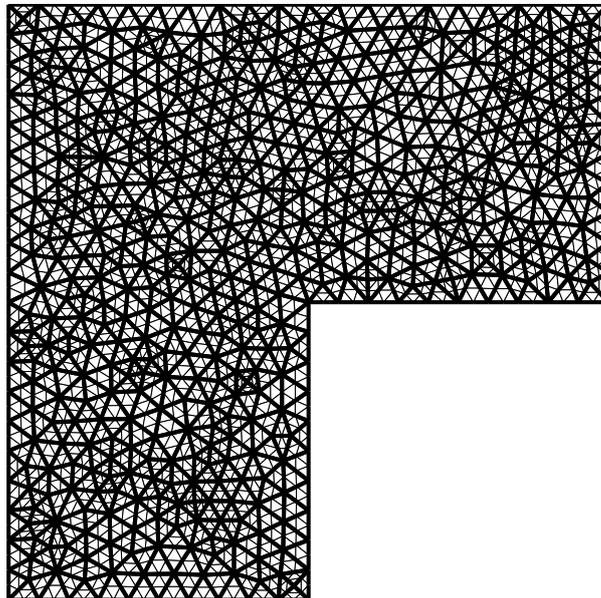


Figura 4.10: Mallas gruesa y fina para el problema 3.6.2.

Los errores nodales entre las soluciones analítica y numérica para FEM y ACM se presentan en las figuras 4.11 y 4.12, respectivamente. Las normas l_∞ y euclídea del error se presentan en la tabla 4.3. Nuevamente, una reducción de la norma del error puede

alcanzarse cuando se aplica la técnica ACM. En este caso, la reducción relativa entre los errores de FEM y ACM son menores que en los ejemplos previos posiblemente debido a la baja regularidad de la solución exacta.

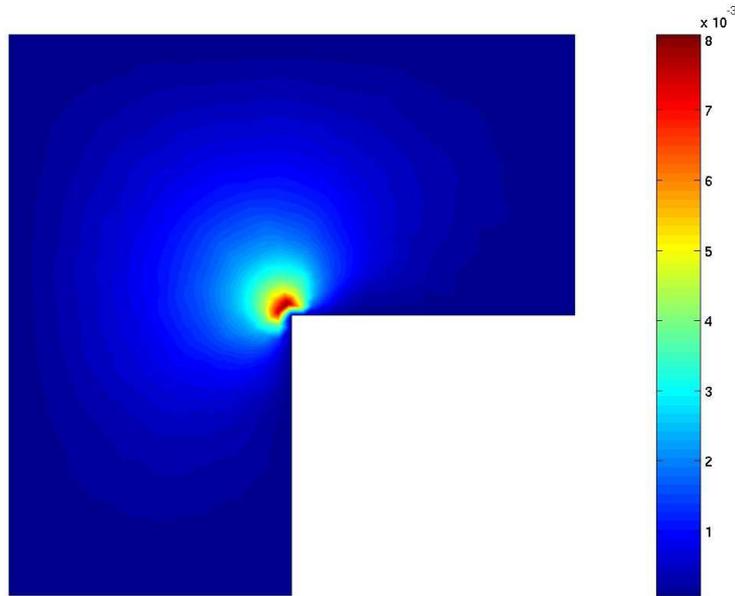


Figura 4.11: Error nodal FEM entre las soluciones numérica y exacta para el problema 3.6.2.

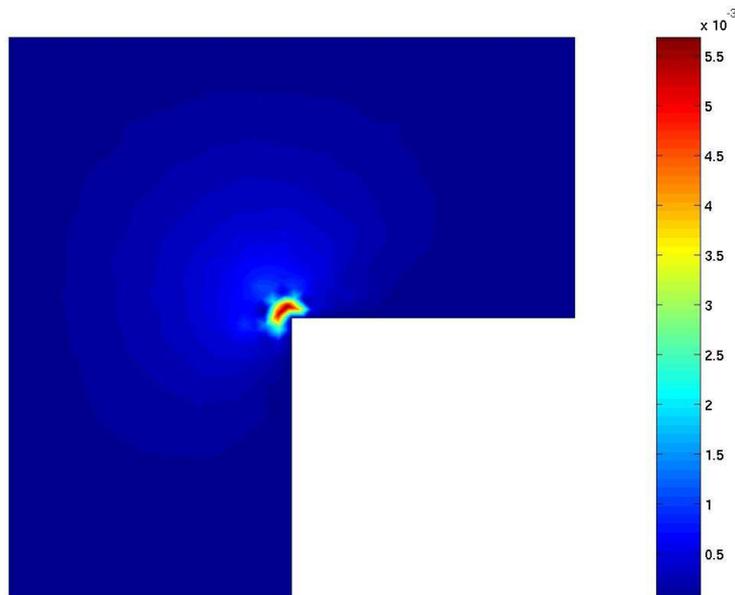


Figura 4.12: Error nodal ACM entre las soluciones numérica y exacta para el problema 3.6.2.

Problema test en el dominio en L		
	$\ \mathbf{e}\ _2$	$\ \mathbf{e}\ _\infty$
FEM	3.5390×10^{-2}	8.1450×10^{-3}
ACM	1.2665×10^{-2}	5.7305×10^{-3}

Tabla 4.3: Norma euclídea y norma l_∞ de los errores para el problema 3.6.2.

4.6. Conclusiones

En este capítulo se presentó la nueva estrategia Malla Compuesta Algebraica (ACM). La misma propone una técnica alternativa a la original con la ventaja principal de resolver el problema en un sentido algebraico. Esto genera una independencia de la malla del problema en el sentido geométrico que se utilizaba anteriormente, derivando entonces en menores costos de almacenamiento de datos.

La estrategia se expone en sus estadios más básicos, faltando resolver aún cuestiones importantes para su correcto funcionamiento. Si bien pueden calcularse los operadores y funciones de base de manera adecuada, queda aún consolidar el algoritmo de construcción macroelemental para su correcto funcionamiento. En particular, el éxito del algoritmo depende principalmente del paso que involucra la elección del elemento semilla. En el estado actual del algoritmo se ha logrado que el mismo funcione correctamente sobre mallas bidimensionales (tanto estructuradas, como no estructuradas) que surgen del refinamiento homogéneo de otra malla; *i.e.*, se recupera el desrefinamiento 4:1 esperado en estos casos. No obstante esta cualidad del algoritmo modificado, no es aceptable el resultado que el mismo entrega cuando se lo aplica a una malla no estructurada general. Por esta razón, en los ejemplos evaluados se aplicó el algoritmo de construcción macroelemental modificado sobre mallas que surgieron del refinamiento homogéneo de otra malla dada. Las otras componentes del método fueron utilizadas según se describió en este capítulo.

Como puede observarse de los ejemplos, los resultados obtenidos se condicen con los esperados al resolver dichos problemas con la estrategia CM original. La evaluación de los tiempos se llevó a cabo con las limitaciones expuestas anteriormente por lo tanto no se presentan resultados de los mismos, dado que no reflejarían la real potencialidad del método.

Capítulo 5

Conclusiones

La tesis desarrollada se basó en el análisis de la técnica de Malla Compuesta, principalmente desde un punto de vista práctico. Esta técnica puede ser útil para la estimación de errores de discretización y la mejora de soluciones numéricas sin elevar considerablemente el costo computacional. La propuesta del método consiste en redefinir el operador discreto del problema sobre la malla de cómputo mediante una combinación lineal de los operadores de mallas que surgen del desrefinamiento de la primera. La dimensión de los operadores surgidos de mallas más gruesas es aumentada con el agregado de coeficientes nulos en aquellas entradas correspondientes a los nodos de la malla más fina, con el objetivo de igualar el tamaño del sistema que se obtiene para la malla de cálculo. Los coeficientes de la combinación lineal se denominan factores de participación y dependen de la regularidad de la solución exacta de la EDP (véase el Capítulo 2).

En los ejemplos presentados en el capítulo 2 se estimó el parámetro de participación óptimo para cada caso. Con el objetivo de obtener un valor del mismo que no dependiese de cada problema en particular se obtuvieron intervalos alrededor de dicho valor que garanticen una relación entre las normas de los errores nodales (2.15). Dichos intervalos en la mayoría de los tests presentados coincidieron, resultando entonces para problemas puramente difusivos a coeficientes variables y no homogéneos sobre dominios convexos el valor del coeficiente $\alpha = 4/3$. Para el caso del ejemplo (2.40), la relación (2.15) se obtuvo con otro valor de δ que garantizaba la misma.

Para el caso de los problemas con singularidad se llevó a cabo un análisis a fin de determinar el parámetro α para cada problema. En aquellos problemas con dominio de ángulo entrante se estimó dicho valor para distintos ángulos y se comparó con el valor estimado analíticamente. Se puede concluir de dicho análisis que la elección del valor α óptimo garantiza la potencialidad de la estrategia. Se analizaron también problemas con singularidades dentro del dominio obteniéndose pendientes promedio para el orden del error que evidencian la mejora de la estrategia.

En el capítulo 3 se presentó la integración de las técnicas de Malla Compuesta y Multigrilla, dando lugar a una nueva versión de esta última en la cuál pueden obtenerse soluciones nodalmente mejoradas donde este método se propone como uno de los aportes de esta tesis.

En todos los casos se utilizó el operador de ponderación completa y se trabajó siempre con los mismos pasos de pre y post suavizado así como también igual tolerancia para la convergencia del residuo. En los problemas resueltos se muestran los resultados para problemas con solución conocida, donde puede observarse la potencialidad de la estrategia.

Se grafican los residuos con el objetivo de mostrar que el método MGCM no empeora la convergencia desde el punto de vista de los mismos, es decir, se obtienen pendientes similares. Puede concluirse entonces que la nueva versión que integra ambas técnicas satisface los resultados esperados de cada una de ellas individualmente.

En el capítulo 4 se muestra una versión preliminar de la nueva técnica de Malla Compuesta Algebraica, uno de los principales aportes de esta tesis. Las herramientas utilizadas para la generación de los elementos que conforman el método en el sentido algebraico provienen del método Multigrilla Algebraico. A medida que se fueron generando las componentes principales de esta estrategia, se presentaron inconvenientes, algunos de los cuales son propuestos como trabajo futuro. El algoritmo para la construcción macroelemental que construye los elementos de la malla gruesa no funciona correctamente en todos los casos posibles. En esta tesis se utilizó una modificación *ad hoc* basada en pesos o etiquetas asignados a los nodos de la malla que permite recuperar en 2D el desrefinamiento 4:1 cuando el algoritmo se aplica a mallas que surgen del refinamiento homogéneo de otra. El resto de los algoritmos, la construcción de las funciones de base y de los operadores de transferencia, funcionan correctamente. Para utilizar el método se trabajó con mallas generadas en un sentido geométrico, pero las demás herramientas de la estrategia se utilizaron en un sentido algebraico. Se presentaron ejemplos que ya habían sido resueltos mediante la versión geométrica del método de Malla Compuesta de manera tal de poder comparar resultados. Luego, para mallas estructuradas los resultados obtenidos son comparables con los de la versión original de la técnica CM.

5.1. Trabajo a futuro

Se plantea como trabajo a futuro la generalización de la estrategia CM a problemas con dominios de mayor interés, problemas 3D y problemas no lineales. Para el caso de la estrategia Multigrilla con Malla Compuesta se propone la generalización de la misma a una versión algebraica, es decir, una nueva integración de ambos métodos pero cada uno de ellos en sentido algebraico. Por último, para el caso de la estrategia ACM, se plantea la construcción de un algoritmo de aglomeración adecuado para poder generalizarla a problemas de mayor complejidad.

Apéndice A

Conceptos Básicos

A.1. Normas para medir el error

- Normas Continuas:

- Norma del supremo: $\|f\|_\infty = \{\sup |f(x)| : x \in (\Omega)\}$, para $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

- Norma en $L_2(\Omega)$: $\|f\|_{L_2} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

- Norma en $H^1(\Omega)$: $\|f\|_{H^1} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 + |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

- Normas Discretas: Para $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

- Norma infinito: $\|\mathbf{y}\|_\infty = \{\max |y_i|, i = 1, \dots, n\}$

- Norma euclídea: $\|\mathbf{y}\|_2 = (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{1/2}$

A.2. Propiedades de las matrices que componen la estrategia CM

La estrategia de Malla Compuesta involucra la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, donde la matriz de dicho sistema está dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{A}_{CM} = \alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) \mathbf{A}_{Hh} \quad (\text{A.1})$$

En el cálculo de esta matriz es necesario seleccionar la forma de relacionar las matrices \mathbf{A}_h y \mathbf{A}_H , las cuales corresponden a las grillas denominadas fina y gruesa respectivamente. La estrategia CM propone conformar la matriz \mathbf{A}_{Hh} utilizando los datos de la matriz \mathbf{A}_H que contiene la información en los nodos de la malla gruesa proyectándola a la malla fina. De esa manera, se obtiene una matriz \mathbf{A}_{Hh} , la cual tiene la dimensión de \mathbf{A}_h pero sólo elementos no nulos en los nodos comunes de las dos mallas, es decir, aquellos nodos pertenecientes a la malla gruesa. La propiedad de proyección está relacionada con los operadores presentados en la sección §3.5.2, correspondientes al método Multigrilla.

En este apéndice se demostrará que la matriz \mathbf{A}_{CM} del método CM es simétrica y definida positiva. Se considerará el caso particular de un problema elíptico, lineal y autoadjunto a coeficientes constantes. Partiendo de la definición del operador \mathbf{A}_{CM}

$$\mathbf{A}_{CM} = \alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) \mathbf{A}_{Hh} \quad (\text{A.2})$$

$$= \alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) \mathbf{P}_H^h \mathbf{A}_H \mathbf{R}_h^H \quad (\text{A.3})$$

$$= \alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) c (\mathbf{R}_h^H)^T \mathbf{A}_H \mathbf{R}_h^H, \quad c (\mathbf{R}_h^H)^T = \mathbf{P}_H^h \quad (\text{A.4})$$

siendo c una constante. Es sencillo ver que \mathbf{A}_{CM} es simétrica

$$(\mathbf{A}_{CM})^T = [\alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) c (\mathbf{R}_h^H)^T \mathbf{A}_H \mathbf{R}_h^H]^T \quad (\text{A.5})$$

$$= \alpha (\mathbf{A}_h)^T + (1 - \alpha) c (\mathbf{A}_H \mathbf{R}_h^H)^T \mathbf{R}_h^H \quad (\text{A.6})$$

$$= \alpha (\mathbf{A}_h)^T + (1 - \alpha) c (\mathbf{R}_h^H)^T (\mathbf{A}_H)^T \mathbf{R}_h^H \quad (\text{A.7})$$

$$= \alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) c (\mathbf{R}_h^H)^T \mathbf{A}_H \mathbf{R}_h^H \quad (\text{A.8})$$

$$= \mathbf{A}_{CM} \quad (\text{A.9})$$

dado que \mathbf{A}_h y \mathbf{A}_H son simétricas.

La definición de matriz simétrica y definida positiva (sdp), establece que la matriz \mathbf{A} será sdp si $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Entonces,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}_{CM} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T [\alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) c (\mathbf{R}_h^H)^T \mathbf{A}_H \mathbf{R}_h^H] \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (\text{A.10})$$

$$= \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{A}_h \mathbf{x} + (1 - \alpha) c \mathbf{x}^T (\mathbf{R}_h^H)^T \mathbf{A}_H \mathbf{R}_h^H \mathbf{x}, \quad (\text{A.11})$$

$$= \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{A}_h \mathbf{x} + (1 - \alpha) c (\mathbf{R}_h^H \mathbf{x})^T \mathbf{A}_H \mathbf{R}_h^H \mathbf{x} \quad (\text{A.12})$$

$$= \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{A}_h \mathbf{x} + (1 - \alpha) c \widehat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_H \widehat{\mathbf{x}} \quad (\text{A.13})$$

$$= \alpha (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_h \mathbf{x} - c \widehat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_H \widehat{\mathbf{x}}) + c \widehat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_H \widehat{\mathbf{x}} \quad (\text{A.14})$$

donde $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_h^H \mathbf{x}$ es la proyección de \mathbf{x} sobre el espacio de la malla gruesa.

Tanto \mathbf{A}_h como \mathbf{A}_H son sdp por tratarse de matrices que surgen de aplicar el Método de Elementos Finitos [20]. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_h \mathbf{x} &> 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_H \widehat{\mathbf{x}} &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

En particular en esta tesis se empleó como operador \mathbf{R}_h^H el operador de inyección, al cual corresponde $c = 1$. Luego, es sencillo ver que $(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_h \mathbf{x} - c \widehat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_H \widehat{\mathbf{x}})$ es una cantidad positiva. Descompóngase el vector \mathbf{x} en dos vectores \mathbf{x}^f y \mathbf{x}^c tales que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^f + \mathbf{x}^c$ y

$$x_i^c = \begin{cases} x_i & \text{si el nodo } i \text{ pertenece a la malla gruesa} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Dado que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, \mathbf{x}^f y \mathbf{x}^c no son simultáneamente nulos. Además, por la definición de los vectores \mathbf{x}^f y \mathbf{x}^c , y siendo \mathbf{R}_h^H el operador de inyección,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h^H \mathbf{x}^f &= \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_h^H \mathbf{x}^c &= \widehat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^T \mathbf{A}_h \mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_H \widehat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{x}^f + \mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}_h (\mathbf{x}^f + \mathbf{x}^c) - (\mathbf{x}^f + \mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}_{Hh} (\mathbf{x}^f + \mathbf{x}^c) \\
 &= (\mathbf{x}^f)^T \mathbf{A}_h \mathbf{x}^f + (\mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}_h \mathbf{x}^c - (\mathbf{x}^f)^T \mathbf{A}_{Hh} \mathbf{x}^f - (\mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}_{Hh} \mathbf{x}^c \\
 &= (\mathbf{x}^f)^T \mathbf{A}_h \mathbf{x}^f + (\mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}_h \mathbf{x}^c - (\mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}_{Hh} \mathbf{x}^c \\
 &= (\mathbf{x}^f)^T \mathbf{A}_h \mathbf{x}^f + (\mathbf{x}^c)^T (\mathbf{A}_h - \mathbf{A}_{Hh}) \mathbf{x}^c
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Dado que el vector \mathbf{x}^c posee coeficientes nulos en las posiciones correspondientes a los nodos de la malla fina que no son compartidos con la gruesa, sólo importa considerar cómo son afectados los coeficientes de la matriz $(\mathbf{A}_h - \mathbf{A}_{Hh})$ que corresponden a los nodos de la grilla gruesa. Para ello, descompongamos la matriz $\mathbf{A}_h = \mathbf{A}_h^d + \mathbf{A}_h^r$ en las contribuciones de los términos difusivos (\mathbf{A}_h^d) y reactivos (\mathbf{A}_h^r). La matriz \mathbf{A}_h^d es proporcional a h^{-2} , mientras que \mathbf{A}_H^d (y, por tanto, \mathbf{A}_{Hh}^d) es proporcional a H^{-2} . Dado que \mathbf{A}_h^r y \mathbf{A}_H^r no son proporcionales al tamaño respectivo de los elementos de sus mallas, los coeficientes de los nodos compartidos en la matriz $(\mathbf{A}_h^r - \mathbf{A}_{Hh}^r)$ serán nulos. Luego

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}^c)^T (\mathbf{A}_h - \mathbf{A}_{Hh}) \mathbf{x}^c &= (\mathbf{x}^c)^T (\mathbf{A}_h^d - \mathbf{A}_{Hh}^d) \mathbf{x}^c \\
 &= \beta (\mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}_h^d \mathbf{x}^c
 \end{aligned}$$

donde $\beta > 0$ tiene en cuenta la relación entre h y H ($\beta = 3/4$ para el laplaciano en el caso de que $H = 2h$). En tal caso, \mathbf{A}_h^d es sdp, por lo tanto $\beta (\mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}_h^d \mathbf{x}^c > 0$ si $\mathbf{x}^c \neq \mathbf{0}$. Se tiene entonces que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}_h \mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_H \widehat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^f)^T \mathbf{A}_h \mathbf{x}^f + \beta (\mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}_h^d \mathbf{x}^c > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \tag{A.17}$$

Luego, siempre que $\alpha \neq 0$, se concluye que \mathbf{A}_{CM} es definida positiva dado que la expresión para $\mathbf{x}^T \mathbf{A}_{CM} \mathbf{x}$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tiene dos sumandos, uno positivo y otro mayor o igual a cero.

Apéndice B

Formulación por Elementos Finitos

Se analizará un problema en estado estacionario de difusión-advección-reacción de una variable escalar u con término fuente. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_d}$ el dominio espacial, donde n_d es el número de dimensiones espaciales, y sea Γ la frontera de Ω . La ecuación de gobierno está dada por

$$\mathbf{b} \cdot \nabla u + cu - \nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \quad (\text{B.1})$$

donde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_d}$ es la velocidad, c es el coeficiente de reacción, $\boldsymbol{\kappa}$ la difusividad y f el término fuente. Mientras que \mathbf{b} , c , $\boldsymbol{\kappa}$ y f pueden ser función de las variables espaciales.

El problema queda definido totalmente una vez que se especifican las condiciones de borde. En el caso general, se asume que $\Gamma = \Gamma^s \cup \Gamma^g$ con $\Gamma^s \cap \Gamma^g = \emptyset$, donde Γ^s es la porción de la frontera sobre la cual se aplican condiciones de tipo Dirichlet y sobre Γ^g se imponen condiciones de tipo Neumann. Las condiciones de contorno se escriben entonces como

$$\begin{cases} u = s & \text{sobre } \Gamma^s \\ \boldsymbol{\kappa} \nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{sobre } \Gamma^g \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior unitaria a Γ^g , mientras que $s(x)$ y $g(x)$ son funciones dadas.

La discretización de la ecuación de gobierno (B.1) se realiza mediante el Método de Elementos Finitos estabilizados mediante la técnica SUPG (*Streamline Upwind/Petrov-Galerkin*) [20]. Consideremos una discretización por elementos finitos del dominio Ω en n_{el} sub-dominios Ω^e , $e = 1, 2, \dots, n_{\text{el}}$. Basándose en esta discretización se definen los espacios de elementos finitos para las funciones de prueba y las de peso \mathcal{S}^h y \mathcal{V}^h , respectivamente (véase la ecuación (B.4)). Dentro de cada elemento, las funciones de prueba varían en forma lineal en el caso de triángulos y tetraedros, en 2D y 3D respectivamente, y en forma bilineal para cuadrángulos (2D).

Luego, la formulación por elementos finitos del problema (B.1)-(B.2) aplicando SUPG se escribe como:

Hallar $u^h \in \mathcal{S}^h$ tal que $\forall w^h \in \mathcal{V}^h$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w^h (\mathbf{b} \cdot \nabla u^h + cu^h) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w^h \cdot \boldsymbol{\kappa} \nabla u^h d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau \mathbf{b} \cdot \nabla w^h [\mathbf{b} \cdot \nabla u^h + cu - \nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \nabla u) - f] d\Omega^e \\ & = \int_{\Omega} w^h f d\Omega + \int_{\Gamma^g} w^h g d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^h &= \{u^h | u^h \in H^{1h}(\Omega), u^h|_{\Omega^e} \in P^1(\Omega^e), u^h = s \text{ sobre } \Gamma^s\} \\ \mathcal{V}^h &= \{w^h | w^h \in H^{1h}(\Omega), w^h|_{\Omega^e} \in P^1(\Omega^e), w^h = 0 \text{ sobre } \Gamma^s\}\end{aligned}\tag{B.4}$$

siendo $H^{1h}(\Omega)$ el espacio funcional de Sobolev de dimensión finita sobre Ω y $P^1(\Omega^e)$ el conjunto de polinomios lineales sobre el elemento Ω^e .

La sumatoria de integrales a nivel elemental que aparece en la ecuación (B.3) se le agrega a la formulación variacional con el objetivo de estabilizar los cálculos cuando se presentan inestabilidades numéricas. En el rango de advección dominante estos términos previenen las oscilaciones nodo-a-nodo de la variable incógnita, donde τ es un operador algebraico. En esta tesis, el operador algebraico τ se define como [17]

$$\tau = \frac{h}{2\|\mathbf{b}\|} \begin{cases} \frac{Pe}{3} & \text{si } Pe \leq 3 \\ 1 & \text{si } Pe > 3 \end{cases}\tag{B.5}$$

donde $Pe = \frac{h\|\mathbf{b}\|}{2\kappa}$ es el número de Péclet del elemento y h es el tamaño del elemento calculado como la longitud del elemento en la dirección de la línea de corriente, i.e.

$$h = \frac{2}{\sum_{a=1}^{n_{\text{en}}} \|\mathbf{s} \cdot \nabla N_a\|}\tag{B.6}$$

siendo N_a la función de prueba asociada con el nodo a , n_{en} el número de nodos del elemento y $\mathbf{s} = \mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$, el versor en la dirección local de la velocidad.

Apéndice C

Algoritmo *Breadth First Search*

La definición para el algoritmo BFS es la siguiente [28]

Definición: *El algoritmo Breadth First Search (BFS) es un algoritmo de búsqueda que considera los vecinos de un vértice, i.e. los vértices adyacentes al predecesor del vértice considerado en la búsqueda, antes que cualquier otro vértice adyacente al actual, de manera tal que los extremos son recorridos al final.*

La descripción detallada del algoritmo BFS está dado por el siguiente pseudocódigo

```
Desmarcar todos los vertices
Elegir algun vertice inicial x
Marcar x
Inicializar la lista L = x
Inicializar el arbol T = x
Definir el nivel de x, LS(x) = 0
Mientras la lista L sea no vacia
    Elegir algun vertice v del principio de la lista L
    Visitar v
    Eliminar v de la lista L
    Para cada vecino no marcado w
        Marcar w
        Hacer LS(w) = LS(v)+1
        Agregar w al final de la lista L
        Agregar la arista (v,w) a T
```

Bibliografía

- [1] D.N. Arnold. A concise introduction to numerical analysis. Technical report, University of Minnesota, 2001.
- [2] M.B. Bergallo, C.E. Neuman, and V.E. Sonzogni. Composite mesh concept based FEM error estimation and solution improvement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:755–774, 2000.
- [3] M.B. Bergallo, C.E. Neuman, and V.E. Sonzogni. Elliptic problems with essential border singularities: improved solution and qualitative error estimation. In G. Buscaglia, E. Dari, and O. Zamonsky, editors, *Mecánica Computational Vol. XXI-II*, pages 2979–2998, 2004.
- [4] M. Bolten, S. Friedhoff, A. Frommer, and M. Heming. Algebraic multigrid methods for laplacian of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 434:2225–2243, 2011.
- [5] A. Brandt. Multi level adaptive solutions to boundary value problems. *Mathematics Of Computations*, 31:333–390, 1977.
- [6] M. Brandt, S. McCormick, and J. Ruge. Algebraic multigrid (AMG) for automatic multigrid solution with application to geodetic computations. Technical report, Colorado University, 1982.
- [7] M. Brezina, A. Cleary, R. Falgout, V. Henson, J. Jones, T. Manteuffel, S. McCormick, and J. Ruge. Algebraic Multigrid based on element interpolation AMGe. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 22:1570–1592, 2000.
- [8] W. Briggs. *A Multigrid Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988.
- [9] W.L. Briggs, V.E. Hemson, and S.F McCormick. *A Multigrid Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [10] T.F. Chan, S. Go, and L. Zikatanov. Lecture notes on multilevel methods for elliptic problems on unstructured grids. In *VKI 28th Computational Fluid Dynamics*, pages 1–76, 1997.
- [11] T.F. Chan and W.L. Wan. Robust multigrid methods for nonsmooth coefficient elliptic linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123:323–352, 2003.

- [12] Y. Ge. Multigrid method and fourth-order compact difference discretization scheme with unequal meshsizes for 3d poisson equation. *Journal of Computational Physics*, 229:6318–6391, 2010.
- [13] D. Göddeke and R. Strzodka. Cyclic reduction tridiagonal solvers on GPUs applied to mixed-precision multigrid. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 22(1):22–32, 2011.
- [14] P. Grisvard. Problemes aux limites dans les polygones, mode d’emploi. In *EDF Bull. Direct. Etud. Rech. Ser. C. Math. Inform.*, pages 21–59, 1986.
- [15] W. Hackbusch and U. Trottenberg. *Multigrid Methods*. Springer Verlag, 1982.
- [16] E. Haye and M. Bergallo. Regularidad y reducción del error en un problema de interfase para el laplaciano bidimensional. In *Mecánica Computacional Vol. XXIII*, AMCA, Argentina, 2004.
- [17] T.J.R. Hughes, G. Scovazzi, and L.P. Franca. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, chapter Multiscale and stabilized methods. John Wiley & Sons, Ltd., 2004.
- [18] B.R. Hutchinson and G.D. Raithby. A Multigrid method based on the additive correction strategy. *Numerical Heat Transfer*, 9:511–537, 1986.
- [19] HYPRE. <http://acts.nersc.gov/hypre/>, Febrero 2010.
- [20] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, 1987.
- [21] J. Jones and P. Vassilevski. AMGe based on element agglomeration. Technical report, CASC Lawrence Livermore National Laboratory, 1999.
- [22] J. Kim, K. Kang, and J. Lowengrud. Conservative multigrid methods for ternary Cahn-Hilliard systems. *Communications in Mathematical Sciences*, 2:53–77, 2004.
- [23] B. Koobus, M. Lallemand, and A. Dervieux. Unstructured volumen agglomeration MG: solution of the Poisson equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18:27–42, 1994.
- [24] D. Lahaye, H. De Gersen, and K. Hameyer. Algebraic multigrid for complex symmetric systems. *IEEE Trans. on Magnetics*, 36(4):1535–1538, 2000.
- [25] I. Martín and F. Tirado. Relationship between efficiency and execution time of multigrid methods on parallel computers. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 8(6):562–573, 1997.
- [26] D. Mavriplis. Multigrid techniques for unstructured meshes. Technical report, ICASE, 1995.
- [27] S. Mc Cormick, W. Briggs, and V. Hemson. *A Multigrid Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [28] NIST. <http://xlinux.nist.gov/dads/HTML/breadthfirst.html>, Enero 2011.

- [29] T. Okusanya. *Algebraic Multigrid for Stabilized Finite Element Discretizations of the Navier Stokes Equations*. PhD thesis, MIT, 2002.
- [30] M. Petzoldt. A posteriori error estimator for elliptic equations with discontinuous diffusion coefficient. In *Preprint 533, WIAS-Berlin*, Berlin, 1999.
- [31] M. Petzoldt. Regularity results for interface problems in 2d. In *Preprint 565, WIAS-Berlin*, Berlin, 2000.
- [32] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988-1992.
- [33] S. Reitzinger, U. Schreiber, and U. Reinen. Algebraic multigrid for complex symmetric matrices and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (155):405–421, 2003.
- [34] S. Sarraf, M. Bergallo, and V. Sonzogni. Problemas elípticos resueltos mediante Mallas Compuestas aplicando métodos Multigrilla. In *Mecánica Computacional Vol. XXVI, AMCA*, Córdoba, Argentina, 2007. pp. 696-710.
- [35] V. Sonzogni, M. Bergallo, and C. Neuman. Uso de una malla compuesta para estimar errores de discretización y mejorar la solución en elementos finitos. In *Mecánica Computacional Vol. XVI, AMCA*, Argentina, 1996. pp. 123-132.
- [36] V. Sonzogni, M. Bergallo, and C. Neuman. Improving a finite element solution by means of a composite mesh. In *IV World Congress on Computational Mechanics*, Argentina, 1998. Part I, Section 3, Paper 8.
- [37] G. Strang and G. Fix. *Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Series in Automatic Computation, 1973.
- [38] P. Thum, T. Clees, G. Weyns, and J. Deconinck. Efficient algebraic multigrid for migration-diffusion-convection-reaction systems arising in electrochemical simulations. *Journal of Computational Physics*, (229):7260–7276, 2010.
- [39] S. Toro, V. Sonzogni, and C. Neuman. Elementos finitos de diferentes órdenes para problemas de elasticidad plana y mezcla de sus mallas. In *Mecánica Computacional Vol. XXIV, AMCA*, Argentina, 2005. pp. 3171-3185.
- [40] V. Venkatakrishnan and D. Mavriplis. Agglomeration Multigrid for the 3D Euler equations. In *AIAA*, 1994.
- [41] P. Wesseling. *An Introduction to Multigrid Methods*. John Wiley & Sons, 1992.
- [42] Jinchao Xu. An introduction to Multigrid convergence theory. In *Winter School on Iterative Methods in Scientific Computing and Their Applications*, 1995.