Operadores Maximales en Espacios de Orlicz

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería Química
Departamento de Matemática

Tesis Presentada para obtener el título de
Doctor en Matemática
Especialidad: Análisis

Bruno Bongioanni

Director: Eleonor Harboure
Co-Director: Liliana Forzani

Defendida ante el jurado compuesto por: Dr. Hugo Aimar
Dr. Carlos Segovia
Dr. Felipe Zo

Febrero 2004

Agradezco enormemente a mis directoras, por su constante dedicación y apoyo, tanto en lo académico como en lo personal, durante estos cuatro años. También a CONICET y UNL por brindar el soporte económico para la realización de este trabajo.

Resumen

Sea (Ω, μ) un espacio de medida finita, $L^{\Phi}(\Omega)$ y $L^{\Psi}(\Omega)$ espacios de Orlicz asociados a las funciones de crecimiento $\Phi(t) = \int_0^t a(s)ds$ y $\Psi(t) = \int_0^t b(s)ds$, donde a y b son positivas y continuas definidas en $[0, \infty)$. Uno de los propósitos principales de este trabajo es determinar la relación entre las funciones a y b para afirmar que un operador T, sublineal, homogéneo positivo, de tipo débil restringido (p, p) y de tipo fuerte (∞, ∞), mapee $L^{\Psi}(\Omega)$ en $L^{\Phi}(\Omega)$, estudiando *desigualdades modulares*. Si los espacios de Orlicz que intervienen son provistos con la norma de Luxemburg, los resultados implican acotación en dicha norma. La relación que se encuentra en a y b es ajustada, ya que se prueba que es necesaria para la acotación de los operadores maximales laterales de promedios Cesàro. Se realiza el mismo análisis para operadores de tipo débil (condición más fuerte que la de débil restringido) donde el operador modelo es la maximal de promedios p. También se tratan *desigualdades alrevés*, que son usadas para determinar el espacio de Orlicz al que pertenece una función cuando se tiene información sobre alguna maximal. Las técnicas empleadas sirven al estudio de otras maximales menos conocidas de tipo Cesàro fraccionarias (maximales laterales Cesàro y maximales laterales fraccionarias aparecen como casos particulares), para las que se obtienen desigualdades en norma. Además, se obtienen resultados para composición de operadores y operadores que se sabe son acotados en espacios de Lorentz con índice intermedio entre 1 e ∞.

Índice general

Introducción

Las técnicas de interpolación real, constituyen hoy en día una herramienta esencial para obtener propiedades de acotación de operadores. Hasta en los casos más básicos del análisis armónico, como la función maximal de Hardy-Littlewood y la trasformada de Hilbert, el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz aparece en todos los textos como respuesta para tratar el comportamiento sobre los espacios de Lebesgue. Sin embargo, cabe destacar que el primer resultado de Riesz en 1925 sobre la acotación de la trasformada de Hilbert en L^p, para $1 < p < \infty$ usaba métodos complejos y el Teorema de Interpolación de Riesz (un tratamiento de este tipo puede verse en [5]).

En 1939 aparece el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, con una técnica de variable real que da una prueba mucho más simple y extensible a una amplia clase de operadores, totalmente diferente de las ahora viejas técnicas de Riesz y teoría analítica de funciones complejas.

Una versión simple y muy útil de este resultado, dice que si un operador sublineal es acotado en L^∞ y satisface una desigualdad más débil que ser acotado en L^p, con $p \geq 1$, entonces es acotado en todos los L^q intermedios ($p < q < \infty$). La desigualdad débil mencionada, que llamamos *tipo débil* (ver definición 1.16), es satisfecha por muchos operadores, no así la acotación fuerte.

Posteriormente en [10], R.A. Hunt, debilita aún más las hipótesis sobre el operador, requiriendo lo que llamamos *tipo débil restringido* (ver definición 1.17), y obtiene las mismas conclusiones de acotación en L^q que en el caso anterior. Sin embargo, es razonable suponer que de alguna manera se debería notar la diferencia entre un operador que es solamente de tipo débil restringido y *no* de tipo débil con otro que sí sea de tipo débil. El problema yace en que la escala de los espacios de Lebesgue, no es suficientemente rica para este fin, ya que cualquier espacio intermedio L^q con $q > p$, en algún sentido se encuentra demasiado *lejos* del L^p como para *apreciar* la diferencia que presentan los dos tipos de operadores. Resulta entonces natural, ampliar la escala de espacios para los que se obtengan resultados de interpolación considerando, por ejemplo, la familia de los *espacios de Orlicz* y estudiar el comportamiento de los distintos operadores sobre estos nuevos espacios.

Esta idea, quizás sólo una curiosidad al principio, cobró impulso cuando en el transcurso de un seminario dictado por F. Martín Reyes nos enfrentamos con un operador útil en problemas de diferenciación, el maximal de promedios Cesàro-α, con $0 < \alpha < 1$, que tiene exactamente estas propiedades: es acotado en L^∞, es de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\alpha)$, y además, no es de tipo débil $(1/\alpha, 1/\alpha)$.

Este problema inicial, que tratamos en el Capítulo 2, dio lugar a una serie de interrogantes y nuevas situaciones, tratando otros operadores con diferentes propiedades en los extremos y estudiando su comportamiento con toda precisión sobre los espacios de Orlicz.

Todas las situaciones para las que extendemos las técnicas de Marcinkiewicz a espacios de Orlicz, están basadas y guiadas por ejemplos concretos, que a su vez muestran que los resultados obtenidos a través de las interpolación son óptimos.

En este trabajo, resolvemos el problema de hallar condiciones necesarias y suficientes para que ciertos operadores satisfagan desigualdades que permiten acotaciones entre espacios de Orlicz, suponiendo conocido el comportamiento del operador en dos extremos. En los Capítulos 2 y 3 tratamos y comparamos operadores con propiedades de tipo débil (p,p) y débil restringido (p,p), para $p>1$, y acotado en L^∞. Nuestros modelos serán la maximal de promedios p, y la de promedios Cesàro $1/p$, definidos el intervalo $[0,1]$ con la medida de Lebesgue, o con un peso en alguna de las clases de pesos más conocidas.

En el capítulo 4 tratamos el problema de operadores que *mejoran*, esto es, que aplican espacios de Lebesgue L^p en L^q con $q>p$, y que son de tipo débil restringido en un extremo y fuerte en el otro. Nuestro modelo aquí es una maximal fraccionaria asociada con los promedios Cesàro.

En el Capítulo 5 presentamos resultados de acotación para un operador que es composición de operadores que satisfacen cierta desigualdad que implica el tipo débil restringido y acotación en L^∞ juntos, como por ejemplo, la maximal de los promedios Cesàro α y probamos que el resultado es óptimo. También tratamos un caso de maximal *fuerte* relacionada con los promedios Cesàro en $\mathbb{R}^n$ que, por su forma, puede resolverse por medio del caso unidimensional.

En el Capítulo 6 damos un teorema de interpolación que permite englobar los resultados expuestos en el Capítulo 2. Además, se trata el caso de operadores que combinan tipo restringido y tipo débil en los extremos. Aplicamos las conclusiones a un operador que surge en el estudio del operador maximal del calor correspondiente a expansiones en series de funciones de Laguerre en $\mathbb{R}^+$, como ha sido mostrado por R. Macías, C. Segovia y J.L. Torrea. También, dedicamos una sección al problema en que el espacio no es necesariamente de medida finita, y reunimos las versiones correspondientes de los teoremas desarrollados en capítulos precedentes.

En casi todos los casos que tratamos hemos elegido trabajar con operadores que actúan sobre funciones definidas sobre un intervalo finito de la recta real. La elección del caso unidimensional se ha hecho para facilitar las cuentas cuando queremos probar que las condiciones encontradas son óptimas. De hecho, todos los resultados, permanecen invariantes para el caso n-dimensional. Por otra parte, nos decidimos a considerar espacios de medida finita ya que, por un lado en este caso los espacios de Orlicz están ordenados por la inclusión dependiendo de la forma en la que las funciones de crecimiento se comportan en el infinito. Por otra parte, el tipo de resultado que buscamos tienen como arquetipo el resultado de Stein sobre la función maximal de Hardy-Littlewood, en el que se afirma que si f tiene soporte en una intervalo I de $\mathbb{R}$ y pertenece al espacio $L\log(2+L)(I)$ entonces Mf es integrable en I. Este es un resultado esencialmente de medida finita sobre el comportamiento local de la maximal para una función con soporte en una intervalo. La diferencia con el caso de medida finita que planteamos es que cuando tomamos Mf para x en I, consideramos promedios sobre cualquier intervalo en la recta y no necesariamente contenido en I. Sin embargo, sabemos que para una función con soporte compacto, las dos maximales resultan equivalentes. Esto también sucede para todos los operadores maximales que consideraremos en este trabajo. De aquí que, resultados locales como los de Stein, se pueden deducir de los que damos para medida finita.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo inicial daremos un breve vistazo a los conceptos básicos requeridos para la lectura de esta tesis. Muchos de los resultados son conocidos por aquel lector que ha estudiado un poco de Análisis Real. Resultaría muy extenso si incluyéramos todas las demostraciones. El lector interesado podrá consultar la bibliografía citada. Sin embargo, para mayor claridad, e incluso para una mayor comprensión de las técnicas a desarrollar en capítulos posteriores, incluimos algunas pruebas, en particular, las de aquellos resultados que no suelen encontrarse en la bibliografía tal como los necesitaremos.

1.1. Distribución y reordenada de una función

Sea (Ω, μ) un espacio de medida, denotamos por $\mathfrak{M}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles con dominio Ω y valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función en $\mathfrak{M}(\Omega)$, llamamos *función de distribución*, a la función $\mu_f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty]$ definida por

$$\mu_f(t) = \mu(\{x \in \Omega : \ |f(x)| > t\}) \text{ , para } t \geq 0.$$

También definimos la *función reordenada* de f, por

$$f^*(s) = \text{ínf}\{t \geq 0 : \ \mu_f(t) > s\} \text{ , para } s \geq 0.$$

La función distribución y la función reordenada tienen las siguientes propiedades (ver [23] pág. 189, y [1] pág. 37,41 y 44).

Proposición 1.1. *Para toda f y g en $\mathfrak{M}(\Omega)$, tenemos*

(I) μ_f y f^* son no-decrecientes y continuas por derecha.

(II) $\mu_f(f^*(t)) \leq t$ para todo $t > 0$.

(III) f y f^* tienen la misma distribución.

(IV) Si $f \leq g$, entonces $\mu_f \leq \mu_g$ y $f^* \leq g^*$.

(V) $\int_\Omega |f\, g| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)\, g^*(s) ds$.

1.2. Espacios de Lebesgue: los L^p.

Si $0 < p \leq \infty$, el *espacio de Lebesgue* L^p, se define como

$$L^p(\Omega) = \{f \in \mathfrak{M}(\Omega) : \int_\Omega |f|^p < \infty\}.$$

en el caso de que p sea finito, y

$$L^\infty(\Omega) = \{f \in \mathfrak{M}(\Omega) : \text{existe un número } M > 0 \text{ tal que } \mu_f(M) = 0\}.$$

Denotamos simplemente L^p cuando el conjunto Ω está sobreentendido.

Para $p \geq 1$, podemos definir una norma en L^p, la *norma p*,

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}, \tag{1.1}$$

si $p < \infty$, y

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{M > 0 : \ \mu_f(M) = 0\},$$

en el caso $p = \infty$. Con esta norma, el L^p es un espacio de Banach. Cuando $0 < p < 1$, la cantidad (1.1) anterior no es una norma en L^p. Sin embargo, $\int_\Omega |f|^p$ es una distancia que hace del L^p un espacio de Frechet.

Si Ω tiene medida finita, los espacios de Lebesgue están ordenados por la inclusión, ya que si $0 < p < q$, entonces $L^p \subset L^q$.

1.3. Espacios de Orlicz

Llamaremos *función de crecimiento*, a una función $\Psi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty]$ no decreciente, tal que $\text{lím}_{t\to 0} \Psi(t) = \Psi(0) = 0$ y $\text{lím}_{t\to\infty} \Psi(t) = \infty$. El *espacio de Orlicz* asociado a una función de crecimiento Ψ, es el conjunto definido por

$$L^\Psi(\Omega) = \{f \in \mathfrak{M}(\Omega) : \int_\Omega \Psi(\epsilon\,|f|)\,d\mu < \infty \text{ para algún } \epsilon > 0\ \}.$$

Escribimos simplemente L^Ψ cuando el espacio de medida subyacente está sobreentendido.

En L^Ψ, definimos el siguiente funcional

$$\|f\|_\Psi = \text{ínf}\left\{s > 0 : \ \int_\Omega \Psi\left(\frac{|f|}{s}\right)\,d\mu \leq 1\right\}. \tag{1.2}$$

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [6].

Proposición 1.2. *Sea Ψ una función de crecimiento y f perteneciente a L^Ψ.*

$$\|f\|_\Psi \leq 1 \quad \textit{si, y sólo si} \quad \int_\Omega \Psi(|f|)\,d\mu \leq 1. \tag{1.3}$$

Sea γ un número real, decimos que una función de crecimiento Ψ tiene un *tipo inferior en el infinito*[1] γ, si existen constantes $t_0 > 0$ y $C > 0$, tales que

$$\Psi(s\,t) \leq C\, s^{\gamma}\, \Psi(t) \;\text{ para todo } 0 < s < 1 \text{ y todo } st > t_0. \tag{1.4}$$

Por otro lado, decimos que Ψ tiene un *tipo superior en el infinito* γ si existen constantes $t_0 > 0$ y $C > 0$, tales que

$$\Psi(s\,t) \leq C\, s^{\gamma}\, \Psi(t) \;\text{ para todo } s > 1 \text{ y todo } t > t_0. \tag{1.5}$$

Si la función Ψ tiene un tipo inferior positivo en el infinito, el funcional (1.2) define una *casinorma* en L^{Ψ}, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Sea Ψ una función de crecimiento.*

(I) $\|f\|_{\Psi} = 0$ *si, y sólo si, $f = 0$ en casi todo punto.*

(II) $\|\lambda\, f\|_{\Psi} = |\lambda|\; \|f\|_{\Psi}$, *para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in L^{\Psi}$.*

(III) *Si $\mu(\Omega) < \infty$ y Ψ tiene un tipo inferior positivo en el infinito, entonces existe una constante C tal que*

$$\|f + g\|_{\Psi} \leq C\,(\|f\|_{\Psi} + \|g\|_{\Psi}),$$

para toda f y g en L^{Ψ}.

(IV) *Si Ψ es convexa, entonces*

$$\|f + g\|_{\Psi} \leq \|f\|_{\Psi} + \|g\|_{\Psi},$$

para toda f y g en L^{Ψ}.

Demostración. La propiedad (I) se deduce de la continuidad de Ψ en 0 y del teorema de la convergencia dominada. La propiedad (II) es una simple consecuencia de la definición de ínfimo. Para probar (IV), observando que si f y g pertenecen al espacio L^{Ψ},

$$\frac{\|f\|_{\Psi}}{\|f\|_{\Psi} + \|g\|_{\Psi}} + \frac{\|g\|_{\Psi}}{\|f\|_{\Psi} + \|g\|_{\Psi}} = 1. \tag{1.6}$$

La hipótesis de convexidad de Ψ nos permite obtener

$$\int_{\Omega} \Psi\left(\frac{|f + g|}{\|f\|_{\Psi} + \|g\|_{\Psi}}\right) d\mu$$

menor o igual que

$$\frac{\|f\|_{\Psi}}{\|f\|_{\Psi} + \|g\|_{\Psi}} \int_{\Omega} \Psi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\Psi}}\right) d\mu + \frac{\|g\|_{\Psi}}{\|f\|_{\Psi} + \|g\|_{\Psi}} \int_{\Omega} \Psi\left(\frac{|g|}{\|g\|_{\Psi}}\right) d\mu,$$

[1] Estas definiciones de tipo inferior en el infinito y tipo superior en el infinito se deben a que se exigen la desigualdades correspondientes para valores grandes de t, y se da la definición *tipo inferior global* y *tipo superior global* cuado exigimos las desigualdades para todo $t > 0$.

y por la Proposición 1.2, esta expresión es menor o igual que 1.

Dado que (1.6) es menor o igual que 1, por la definición (1.2) obtenemos

$$\|f+g\|_\Psi \leq \|f\|_\Psi + \|g\|_\Psi.$$

Para probar la propiedad (iii), dado que Ψ es no decreciente, si f y g pertenecen a L^Ψ, tenemos para $C>0$,

$$\int_\Omega \Psi\left(\frac{|f+g|}{C(\|f\|_\Psi + \|g\|_\Psi)}\right) d\mu \tag{1.7}$$

menor o igual que

$$\int_{\{|f|>|g|\}} \Psi\left(\frac{2|f|}{C\|f\|_\Psi}\right) d\mu + \int_{\{|f|\leq|g|\}} \Psi\left(\frac{2|g|}{C\|g\|_\Psi}\right) d\mu. \tag{1.8}$$

Como Ψ tiene un tipo inferior positivo en el infinito, existen constantes γ, D y t_0 tales que, si $C>2$,

$$\int_\Omega \Psi\left(\frac{2|f|}{C\|f\|_\Psi}\right) d\mu$$

resulta menor o igual que

$$\Psi\left(\frac{2\,t_0}{C}\right)\mu(\Omega) + D\left(\frac{2}{C}\right)^\gamma \int_{\{\frac{|f|}{\|f\|_\Psi}>t_0\}} \Psi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Psi}\right) d\mu. \tag{1.9}$$

Por la proposición 1.2,

$$\int_{\{\frac{|f|}{\|f\|_\Psi}>t_0\}} \Psi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Psi}\right) d\mu \leq \int_\Omega \Psi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Psi}\right) d\mu \leq 1,$$

y como Ψ es continua en 0, podemos elegir C suficientemente grande para que la expresión (1.9) resulte menor o igual que $\frac{1}{2}$. Observemos que C depende de $\mu(\Omega)$, Ψ y las constantes de la desigualdad que da el tipo inferior en el infinito, pero no de f. El mismo razonamiento puede ser aplicado al segundo miembro de (1.8), para obtener que (1.8) sea menor que 1.

Finalmente, como (1.7) es menor o igual que 1, por la definición 1.2, resulta

$$\|f+g\|_\Psi \leq C(\|f\|_\Psi + \|g\|_\Psi).$$

$\square$

Como lo indica la proposición anterior, cuando la función Ψ es convexa, el funcional (1.2) es una norma en el espacio de Orlicz L^Ψ. A esta norma se la llama usualmente *norma de Luxemburg* . En el caso en que Ψ sea una potencia, $\Psi(t)=t^p$ con $p>0$, tenemos $L^\Psi = L^p$, y si $p \geq 1$, la norma de Luxemburg coincide con la norma p dada por (1.1).

Una función Ψ_1 es *equivalente* a otra función Ψ_2, y lo denotaremos $\Psi_1 \sim \Psi_2$, si existen constantes no negativas t_0, c_1 y c_2 tales que

$$c_1\Psi_1(c_1\,t) \leq \Psi_2(t) \leq c_2\Psi_1(c_2\,t) \qquad \forall\; t>t_0.$$

Si Ω tiene medida finita, es inmediato que, si Ψ_1 es equivalente a Ψ_2, entonces $L^{\Psi_1}(\Omega) = L^{\Psi_2}(\Omega)$. El recíproco también es cierto cuando la medida μ tiene cierta *continuidad*, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 1.4. *Sea (Ω, μ) un espacio de medida, con $\mu(\Omega) < \infty$, tal que para todo conjunto $E \subset \Omega$ y cualquier número $\delta < \mu(E)$, siempre podemos encontrar un conjunto medible $F \subset E$ tal que $\mu(F) = \delta$. Sean Ψ y Φ funciones de crecimiento. Si L^Ψ es un subconjunto de L^Φ, entonces existen constantes C y t_0 tales que*

$$\Phi(t) \leq C\,\Psi(C\,t) \qquad \forall t > t_0. \tag{1.10}$$

Demostración. Supongamos que (1.10) no sea cierto. Entonces, podemos elegir una sucesión creciente de números $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ tales que

$$\Phi(s_n) \geq 2^n\,\Psi(2^n\,s_n) \tag{1.11}$$

Dado que Ψ es una función de crecimiento, podemos tomar s_1 tal que $\Psi(2\,s_1) > 1$.

Por las propiedades de μ, podemos elegir una colección de conjuntos medibles $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, disjuntos, tales que

$$\mu(E_n) = \frac{\mu(\Omega)}{2^n\,\Psi(2^n\,s_n)}$$

para todo $n \geq 1$.

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^n\,\Psi(2^n\,s_n) & \text{si } x \in E_n \\ 0 & \text{si } x \notin \cup_{n=1}^\infty E_n. \end{cases}$$

Esta función está en L^Ψ, ya que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Psi(f) &= \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} \Psi(f) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)\Psi(2^n\,s_n) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(\Omega)}{2^n} < \infty. \end{aligned}$$

Por otro lado, f no pertenece a L^Φ; en efecto, sea $0 < \epsilon < 1$, entonces, existe un entero positivo n_ϵ tal que $\epsilon\,2^{n_\epsilon} > 1$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(\epsilon\,f) &= \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} \Phi(\epsilon\,f) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)\,\Phi(\epsilon\,2^n\,s_n) \\ &\geq \sum_{n=n_\epsilon}^\infty \frac{\mu(\Omega)\,\Phi(2^n s_n)}{2^n\,\Psi(s_n)} \\ &\geq \sum_{n=n_\epsilon}^\infty \mu(\Omega) = \infty. \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición será de gran utilidad en las técnicas de demostración de los capítulos que siguen.

Proposición 1.5. *Sea* $b : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ *y*

$$\Psi(t) = \int_0^t b(s)ds.$$

Si (Ω,μ) *es un espacio de medida* σ*-finito (ver [7]) y* $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$*, entonces*

$$\int_\Omega \Psi(|f(x)|)\mu(x) = \int_0^\infty b(s)\mu_f(s)ds, \tag{1.12}$$

Demostración. Por la definición de Ψ, el miembro derecho de (1.12) es igual a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\int_0^{|f(x)|} b(s)ds \right) d\mu(x) \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^\infty \chi_{\{r:r<|f(x)|\}}(s)b(s)ds \right) d\mu(x) \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^\infty \chi_{\{y:s<|f(y)|\}}(x)b(s)ds \right) d\mu(x),
\end{aligned}$$

y por el teorema de Fubini-Tonelli (pág. 65 [7]), tenemos que lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\int_\Omega \chi_{\{y:s<|f(y)|\}}(x)b(s)d\mu(x) \right) ds \\
&= \int_0^\infty \left(\int_\Omega \chi_{\{y:s<|f(y)|\}}(x)d\mu(x)b(s) \right) ds \\
&= \int_0^\infty \mu\left(\{y : s < |f(y)|\}\right) b(s)ds,
\end{aligned}$$

que es el miembro izquierdo de (1.12). □

Consideremos el espacio $[0,1]$ con la medida de Lebesgue y la función en $\mathfrak{M}([0,1])$ definida por

$$f(x) = \frac{\chi_{(0,1/2)}(x)}{x\log^2(x)}.$$

La función f es un ejemplo de una función que pertenece a L^1, pero no pertenece a ningún espacio de Lebesgue L^p con $p > 1$.

Cuando ampliamos nuestra gama de espacios, y miramos los espacios de Orlicz, obtenemos que toda función de L^1 está en algún espacio de Orlicz estrictamente contenido el L^1, como lo muestra la siguiente proposición.

Teorema 1.1. *Sea* $\mu(\Omega) < \infty$ *y* f *una función en* $L^1(\Omega)$*. Entonces, existe una función* Ψ *de la forma*

$$\Psi(t) = \int_0^t b(s)ds,$$

con b creciente a infinito y continua, tal que

$$\int_\Omega \Psi(|f|)d\mu < \infty.$$

Demostración. Sea $G_n = \{x \in \Omega : \ n-1 \leq |f(x)| \leq n\}$, para $n = 1, 2, ...$ Ya que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu(G_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,\mu(G_n) + \mu(\Omega)\\ &\leq \int_\Omega |f|d\mu + \mu(\Omega) < \infty,\end{aligned}$$

existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ creciente a ∞, con $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, n\, \mu(G_n) < \infty.$$

Consideremos la función

$$b(s) = \begin{cases} 2\alpha_1\, t & \text{para } 0 \leq t < 1/2 \\ \alpha_n & \text{para } n - \frac{1}{2} \leq t < n, \text{ con } n \geq 1, \\ 2(\alpha_n - \alpha_{n-1})(t-n) + \alpha_{n-1} & \text{para } n \leq t < n + \frac{1}{2}, \text{ con } n \geq 1. \end{cases}$$

Sea $\Psi(t) = \int_0^t b(s)ds$. Dado que $\Psi(n) \leq \alpha_n\, n$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi(|f|)d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} \Psi(|f|)d\mu\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n)\,\Psi(n)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha_n\,\Psi(n) < \infty\end{aligned}$$

□

1.4. Espacios de Lorentz

Sean $p > 0$ y $q > 0$. Si f es una función en $\mathfrak{M}(\Omega)$ definimos los siguientes funcionales

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left\{ q \int_0^\infty \left[t\mu_f(t)^{1/p}\right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} & \text{si } p \text{ y } q \text{ son finitos,} \\ \sup_{t>0} t\mu_f(t)^{1/p} & \text{si } q = \infty. \end{cases} \tag{1.13}$$

También podemos escribir las cantidades (1.13) en términos de la reordenada:

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left\{ \frac{q}{p} \int_0^\infty \left[t^{1/p}f^*(t)\right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} & \text{si } p \text{ y } q \text{ son finitos,} \\ \sup_{t>0} t^{1/p}f^*(t) & \text{si } q = \infty. \end{cases} \tag{1.14}$$

Una demostración de este hecho se encuentra en [23].

El *espacio de Lorentz* se define como

$$L^{p,q}(\Omega) = \{f \in \mathfrak{M}(\Omega) : \|f\|_{p,q} < \infty\}.$$

De la misma manera que los espacios de Lebesgue los denotaremos simplemente $L^{p,q}$. El funcional $\|f\|_{p,q}$ define una casinorma en el espacio $L^{p,q}$ (Ver [23]). Notemos que cuando $p = q$, por la fórmula (1.13) y la Proposición 1.5, tenemos $L^{p,q} = L^p$.

Si $p \geq 1$ y $1 \leq q < r$, entonces $L^{p,q}$ está estrictamente contenido en $L^{p,r}$. La demostración puede encontrarse en [23].

1.5. Operadores

Si (Ω_1, μ_1) y (Ω_2, μ_2) son espacios de medida, llamamos *operador*, a una aplicación $T : \mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{M}(\Omega_2)$, donde el dominio $\mathfrak{D}$ es un subconjunto de $\mathfrak{M}(\Omega_1)$. Por simplicidad en la notación, trabajaremos con (Ω_1, μ_1) igual a (Ω_2, μ_2), ya que no existe ninguna dificultad, en adaptar la demostraciones de los resultados de esta tesis, al caso de espacios distintos.

De ahora en adelante, trabajaremos siempre con un operador $T : \mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{M}(\Omega)$, donde $\mathfrak{D}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{M}(\Omega)$ con la propiedad de contener a todas las funciones características de conjuntos de medida finita y, siempre que $f \in \mathfrak{D}$ y $t > 0$, entonces toda truncación

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq t \\ t & \text{si } f(x) > t, \end{cases}$$

también pertenezca a $\mathfrak{D}$.

Sean $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ subespacios de $\mathfrak{M}(\Omega)$, con normas (o casinormas) $\|\cdot\|_{\mathfrak{D}_1}$ y $\|\cdot\|_{\mathfrak{D}_2}$ respectivamente. Diremos que $T : \mathfrak{D}_1 \mapsto \mathfrak{D}_2$ es *acotado* de $\mathfrak{D}_1$ en $\mathfrak{D}_2$, si existe una constante C tal que

$$\|Tf\|_{\mathfrak{D}_2} \leq C\|f\|_{\mathfrak{D}_1} \qquad \text{para toda } f \in \mathfrak{D}_1.$$

Cuando $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$, diremos simplemente que T es *acotado en* $\mathfrak{D}_1$.

Un operador T es *casisubaditivo* si existe una constante C tal que para toda f y g en su dominio, se satisface

$$|T(f+g)| \leq C(|T(f)| + |T(g)|).$$

Si la desigualdad anterior se satisface con $C = 1$, decimos que T es *subaditivo*.

Un operador T es *homogéneo positivo*, si para toda f en su dominio y todo número $\lambda > 0$, se tiene

$$T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

Cuando T es subaditivo y homogéneo positivo, decimos que T es *sublineal*.

Un operador T *conserva el orden*, si para toda f y g en su dominio,

$$|f| \leq g, \text{ implica } \; Tf \leq Tg.$$

Otras propiedades un poco menos básicas, pero muy importantes en las Teorías de Interpolación, son los *tipos* de un operador. Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, T es de *tipo* *fuerte* (p,q), si T es acotado de L^p en L^q con sus respectivas normas p y q, esto es, existe una constante A tal que para toda f en $\mathfrak{D}$ se tiene que

$$\|Tf\|_q \leq A\|f\|_p \ . \tag{1.15}$$

Una noción más débil que la acotación es, como su nombre lo indica, el *tipo débil* (p,q), cuando existe una constante A tal que para toda f en $\mathfrak{D}$ se tiene que

$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq A\|f\|_p \ . \tag{1.16}$$

Notemos que la desigaldad (1.15) implica la desigualdad (1.16) ya que

$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq \|Tf\|_q \ .$$

También existe una noción aún más débil que la anterior. Decimos que T es de *tipo débil restringido* (p,q), si existe una constante A tal que para toda f en $\mathfrak{D}$ se tiene que

$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq A\,\|f\|_{p,1} \ . \tag{1.17}$$

Notemos también que como

$$\|f\|_{p,1} \leq \|f\|_p \ ,$$

la desigualdad (1.16) implica la desigualdad (1.17).

A veces, si un operador satisface la desigualdad de tipo débil (p,q) para todas las funciones características de conjuntos de medida finita entonces, se puede probar que el operador es de tipo débil restringido (p,q), como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 1.6. *Sea T un operador sublineal. Si existe C tal que*

$$\|T\chi_E\|_{q,\infty} \leq C\,\mu_1(E)^{1/p} \ , \text{ para todo conjunto } \mu\text{-medible } E \subset \Omega, \tag{1.18}$$

entonces, T es de tipo débil restringido (p,q).[2]

En [23] puede encontrarse una demostración de este resultado, para el caso en que T es lineal. Sin embargo, es válida la misma demostración cuando T es sublineal.

1.6. Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz

En 1939, J. Marcinkiewicz presentaba por primera vez en [15], un teorema de interpolación que llevaría su nombre. Hoy en día, existen varias versiones mejoradas de aquel resultado. Algunas de ellas se exhiben a continuación, y recomendamos al lector interesado leer las demostraciones en [23] o [4].

Teorema 1.2. *Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador sublineal de tipo débil (p_i,p_i), para $i = 0,1$. Entonces, T es de tipo fuerte (p,p) para todo $p_0 < p < p_1$.*

Otra versión muestra que, en el teorema anterior, se pueden debilitar las hipótesis en los extremos.

[2] Algunos autores toman (1.18) como definición de tipo débil restringido.

Teorema 1.3. *Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador sublineal de tipo débil restringido (p_i, p_i), para $i = 0, 1$. Entonces, T es de tipo fuerte (p, p) para todo $p_0 < p < p_1$.*

La siguiente versión más general, publicada por Zygmund en 1956 (ver [25]), permite obtener resultados de acotación para operadores que *mejoran*, esto es, operadores que aplican espacios L^p en espacios L^q, con $q \geq p$.

Teorema 1.4. *Sea T un operador sublineal de tipo débil (p_i, q_i), donde $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, para $i = 0, 1$; $p_0 < p_1$ y $q_0 \neq q_1$. Si $0 < \theta < 1$,*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1} \ ,$$

entonces, T es de tipo fuerte (p, q) con constante dependiente de θ.

También tenemos una versión más fuerte del teorema anterior, que es una adaptación de [10] presentada por Stein y Weiss en [23].

Teorema 1.5. *Sea T un operador sublineal de tipo débil restringido (p_i, q_i) para $i = 0, 1$; con $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y $q_0 \neq q_1$. Si $0 < \theta < 1$,*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1} \ ,$$

y $1 \leq r \leq \infty$, entonces, existe una constante C dependiente de θ, tal que

$$\|Tf\|_{p,r} \leq C \, \|f\|_{q,r}$$

para toda f en el dominio de T.

En particular, el teorema anterior nos permite obtener que T es de tipo fuerte (p, q) para p y q con la forma dada, cuando $p \leq q$.

Podemos ilustrar con un ejemplo, por qué es necesario en el Teorema 1.4 pedir que $p_i \leq q_i$. Sea $\Omega = [0, 1]$ con la medida de Lebesgue. Consideremos el operador

$$Tf(x) = \frac{f(x)}{x^{1/2}}$$

Es fácil ver que este operador lineal es de tipo débil $(2, 1)$ y tipo débil $(\infty, 2)$. Sea $0 < \theta < 1$. Si el resultado fuera cierto en este caso, entonces T debería ser acotado de $L^{\frac{2}{\theta}}$ en $L^{\frac{2}{\theta+1}}$, ya que

$$\frac{\theta}{2} + \frac{(1-\theta)}{\infty} = \frac{\theta}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\theta}{1} + \frac{(1-\theta)}{2} = \frac{\theta+1}{2}.$$

Sin embargo, el operador T no aplica $L^{\frac{2}{\theta}}$ en $L^{\frac{2}{\theta+1}}$, porque si consideramos la función

$$f(x) = \frac{\chi_{(0,1/2)}(x)}{x^{\frac{\theta}{2}} |\log(x)|^{(1+\theta)\frac{\theta}{2}}},$$

entonces

$$\int_0^1 f(x)^{\frac{2}{\theta}} \, dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x|\log(x)|^{(1+\theta)}} < \infty,$$

y por otro lado,

$$\int_0^1 Tf(x)^{\frac{2}{\theta+1}} \, dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x|\log(x)|^{\theta}} = \infty.$$

Capítulo 2

Interpolación modular

Los teoremas de interpolación 1.2 y 1.3 aseguran que si empezamos con un operador de tipo débil (p, p) o de tipo débil restringido (p, p) en una punta, y tipo (∞, ∞) en la otra, el resultado de acotación es el mismo para los espacios intermedios L^q, con $p < q < \infty$.

Uno de los principales objetivos de este capítulo, es estudiar interpolación cuando los L^p son reemplazados por una clase más general, los espacios de Orlicz.

Los resultados siguientes muestran que si $p > 1$, las propiedades de acotación difieren, según empecemos con un operador de tipo débil (p, p), o con uno de tipo débil restringido (p, p). Observemos que si $p = 1$, tipo débil restringido $(1, 1)$ es lo mismo que tipo débil $(1, 1)$.

Los operadores que modelarán las dos situaciones, serán el operador de promedios p y otro relacionado con promedios Cesàro.

Las conclusiones en cada caso aparecen en las secciones 2.3 y 2.4. Los resultados obtenidos para el operador de promedios p, podrían ser obtenidos del caso $p = 1$, que es la Maximal de Hardy-Littlewood, estudiado en [12]. Incluimos la demostración, ya que por un lado nos servirá de guía para el caso Cesàro, y por otro, aportamos un método más sencillo para una de las implicaciones.

Finalmente, en la Sección 2.5, tratamos el problema de las desigualdades al revés, esto es, cuando T aparece en el miembro derecho. Estas desigualdades, son útiles para deducir propiedades del tamaño de una función f a partir del comportamiento de Tf. Analizaremos estas desigualdades para los dos tipos de operadores.

2.1. Desigualdades modulares

Sea (Ω, μ) un espacio de medida, con $\mu(\Omega) < \infty$, Ψ y Φ funciones de cecimiento. Diremos que un operador T satisface la *desigualdad modular* (Ψ, Φ) , si existe una constante C tal que

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\, d\mu \leq C + C \int_\Omega \Psi(C\,|f|)\, d\mu, \tag{2.1}$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$.

Este tipo de desigualdades son conocidas en la literatura como *desigualdades modulares* y su nombre se debe a que el funcional

$$\rho(f) = \int_\Omega \Psi(|f|)d\mu \qquad \text{para toda } f \in \mathfrak{M}(\Omega),$$

es un *modular*[1] en el espacio vectorial $\mathfrak{M}(\Omega)$.

En este capítulo encontraremos condiciones sobre las funciones Ψ y Φ para obener desigualdades modulares para operadores de tipo (∞, ∞), que no son de tipo fuerte (p, p) pero con tipo débil o tipo débil restringido, para $p \geq 1$. De ahora en adelante, las funciones Ψ y Φ serán siempre funciones de crecimiento con la forma,

$$\Phi(t) = \int_0^t a(s)ds \quad \text{y} \quad \Psi(t) = \int_0^t b(s)ds$$

para todo $t \geq 0$, donde a y b son funciones medibles no negativas, definidas en la semirrecta $[0, \infty)$.

2.2. La función maximal de Hardy-Littlewood.

Sea I_0 un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y consideremos el espacio (I_0, dx). Para una función localmente integrable $f \in \mathfrak{M}(I_0)$, definimos la función maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f| \ ,$$

donde el supremo se toma sobre todos lo intervalos $I \subset I_0$ que contienen al punto x.

Es fácil ver que esta maximal así definida, coincide para todo $x \in I_0$, con su análogo que toma promedios sobre cualquier intervalo acotado cuando es aplicada a funciones con soporte[2] en I_0.

Se comprueba fácilmente que M es sublineal. Es bien conocido que M es de tipo débil $(1, 1)$ y tipo (∞, ∞) (ver, por ejemplo [4]), luego, por el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz 1.2, podemos obtener que M es de tipo fuerte (p, p) para todo $p > 1$, esto es, que existe C tal que

$$\|Mf\|_{L^p(I_0)} \leq C\|f\|_{L^p(I_0)}$$

para toda $f \in L^p(I_0)$. En particular, la desiguadad anterior nos permite obtener desiguadades modulares (t^p, t^p) para M, ya que

$$\int_{I_0} |Mf|^p \leq C^{1/p} \int_{I_0} |f|^p, \tag{2.2}$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(I_0)$.

La desigualdad (2.2) da una idea de la integrabilidad p de la Maximal en un intervalo acotado. Es posible llevar esta situación al límite $p = 1$. Un conocido resultado se Stein,

[1] Una definición de *modular* puede encontrarse en [14].

[2] El *soporte* de una función es el conjunto donde f es distinta de cero.

dice cómo es la integrabilidad local del operador M a través de desiguadades modulares. Afirma que si I_0 es cualquier intervalo acotado, entonces existe C tal que

$$\int_{I_0} |Mf| \leq |I_0| + C \int_{I_0} |f| \log^+(|f|), \tag{2.3}$$

para toda f con soporte en I_0.

En [12], se estudia el operador maximal de Hardy-Littlewood en el toro $\mathbb{T}$ definida de manera análoga a su versión en $\mathbb{R}$. Bajo ciertas hipótesis en las funciones a y b, se prueba que existe una constante C tal que

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi(|Mf|)\, d\mu \leq C + C \int_{\mathbb{T}} \Psi(C\,|f|)\, d\mu, \tag{2.4}$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$ si, y sólo si, existe C tal que

$$\int_1^t \frac{a(s)}{s} ds \leq Cb(Ct) \qquad \text{para todo } t > 1. \tag{2.5}$$

Las propiedades del operador M que se usan para demostrar que la propiedad (2.5) implica la desigualdad (2.4), son solamente el tipo débil $(1,1)$ y el tipo fuerte (∞,∞). Como veremos a continuación, es fácil extender este resultado a operadores de tipo débil (p,p), con $p > 1$, y tipo fuerte (∞,∞).

2.3. Maximal de promedios p

Para el desarrollo de ciertas técnicas de interpolación, es necesario tener un control del tamaño de la distribución de Tf en términos de la distribución de f. Comenzamos esta sección con en siguiente lema.

Lema 2.1. *Sea T un operador sublineal de tipo débil (p,p), $p > 1$, y tipo fuerte (∞,∞), con constantes A y B respectivamente. Entonces, para toda f en $\mathfrak{D}$,*

$$\mu_{Tf}(t) \leq \frac{p(2A)^p}{t^p} \int_{t/2B}^{\infty} s^{p-1} \mu_f(s) ds \qquad \textit{para todo } t > 0.$$

Demostración. Sea $f \in \mathfrak{D}$ dada. Para $t > 0$, definamos

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < t/2B \\ t/2B & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y $f^t = f - f_t$.

Como T es subaditivo,

$$\mu(\{|Tf| > t\}) \leq \mu(\{|Tf^t| > t/2\}) + \mu(\{|Tf_t| > t/2\}).$$

Dado que T es acotado en L^∞, tenemos $|Tf_t(x)| \leq t/2$ para casi todo $x \in \Omega$, lo que implica que $\mu(\{|Tf_t| > t/2\}) = 0$.

Por otro lado, si usamos el tipo débil (p,p) de T, obtenemos

$$\mu(\{|Tf^t| > t/2\}) \leq \left(\frac{2A}{t}\|f^t\|_p\right)^p.$$

Como $\mu_{f^t}(s) = \mu_f(s + t/2B)$ para todo $s > 0$, por medio de un cambio de variables tenemos

$$\begin{aligned}
\|f^t\|_p^p &= p\int_0^\infty s^{p-1}\mu_{f^t}(s)ds \\
&= p\int_{t/2B}^\infty (s - t/2B)^{p-1}\mu_f(s)ds \\
&\leq p\int_{t/2B}^\infty s^{p-1}\mu_f(s)ds,
\end{aligned}$$

y esto completa la demostración. □

El siguiente resultado de interpolación que generaliza el Teorema 1.2 a los espacios de Orlicz con medida finita.

Teorema 2.2. *Sea T un operador sublineal de tipo débil (p,p) con $p \geq 1$, y tipo fuerte (∞,∞). Si para cierta constante C, las funciones a y b satisfacen la condición*

$$t^{p-1}\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\,ds \leq C\,b(C\,t) \qquad \textit{para todo } t \geq 1, \tag{2.6}$$

entonces, T satisface la desigualdad modular (Ψ, Φ), esto es, existe C tal que

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\,d\mu \leq C + C\int_\Omega \Psi(C\,|f|)\,d\mu \qquad \textit{para toda } f \in \mathfrak{D}.$$

Demostración. Sea f una función en $\mathfrak{D}$. Por la Proposición 1.5,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(|Tf|)d\mu &= \int_0^\infty a(t)\mu_{Tf}(t)dt \\
&= \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) a(t)\mu_{Tf}(t)dt \\
&\leq \mu(\Omega)\Phi(1) + \int_1^\infty a(t)\mu_{Tf}(t)dt.
\end{aligned}$$

Por Lema 2.1 y el Teorema de Fubini-Tonelli, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty a(t)\mu_{Tf}(t)dt &\leq \int_1^\infty a(t)\left(\frac{p(2A)^p}{t^p}\int_{t/2B}^\infty s^{p-1}\mu_f(s)ds\right)dt \\
&= p(2A)^p\int_{1/2B}^\infty \mu_f(s)\left(s^{p-1}\int_1^{2Bt}\frac{a(t)}{t^p}dt\right)ds.
\end{aligned}$$

Si ahora, aplicamos la desigualdad (2.6), la integral anterior resulta menor o igual a

$$\begin{aligned}\frac{p\,C\,(2A)^p}{(2B)^{p-1}}\int_{1/2B}^{\infty} b(2BCs)\,\mu_f(s)\,ds &\leq p\,(\frac{A}{B})^p 2BC\int_0^{\infty} b(2BCs)\,\mu_f(s)\,ds\\ &= p\,(\frac{A}{B})^p\int_{\Omega}\Psi(2BC|f|)\,d\mu,\end{aligned}$$

y con esto completamos la prueba. □

Aplicaremos el resultado anterior al *operador maximal de promedios* p, definido, para $f\in\mathfrak{M}([0,1])$ como

$$\mathcal{M}_p f(x) = \sup_{x\in I}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^p\right)^{1/p} \tag{2.7}$$

donde el supremo se toma sobre todos los intervalos contenidos en el $[0,1]$ que contienen al punto x.

El operador $\mathcal{M}_p$ satisface las hipótesis del Teorema 2.2, ya que es sublineal y además, es de los tipos requeridos como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Si $1\leq p<\infty$, el operador $\mathcal{M}_p$, es de tipo débil (p,p) y tipo fuerte (∞,∞).*

Demostración. Ya que $\mathcal{M}_p f = [M(|f|^p)]^{1/p}$ para toda f y la maximal M es de tipo débil $(1,1)$, para toda f una función medible y $t>0$, tenemos

$$\begin{aligned}|\{|\mathcal{M}_p f|>t\}| &= |\{|M(|f|^p)|>t^p\}|\\ &\leq \frac{C}{t^p}\int_{[0,1]}|f|^p\\ &= \frac{C}{t^p}\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Es decir, $\mathcal{M}_p$ es de tipo débil (p,p). El tipo (∞,∞) se deduce fácilmente, ya que

$$\|\mathcal{M}_p f\|_\infty = \left\|[M(|f|^p)]^{1/p}\right\|_\infty = \|M(|f|^p)\|_\infty^{1/p} = \||f|^p\|_\infty^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

□

El siguiente resultado para el operador $\mathcal{M}_p$ afirma que, en particular, que la condición (2.6) es lo mejor que podemos decir sobre la desigualdad modular (2.1), si sólo sabemos, acerca del operador T, el tipo débil (p,p) y tipo (∞,∞).

Teorema 2.3. *Sea $p\geq 1$ y b monótona. Existe una constante C tal que*

$$\int_0^1 \Phi(|\mathcal{M}_p f(x)|)\,dx \leq C + C\int_0^1 \Psi(C\,|f(x)|)\,dx\,, \tag{2.8}$$

para toda $f\in\mathfrak{M}([0,1])$ si, y sólo si, se satisface (2.6).

Demostración. Como el operador $\mathcal{M}_p$ es simultáneamente de tipo débil (p,p) y de tipo fuerte (∞,∞), por el Teorema 2.2 la condición (2.6) implica la desigualdad modular (2.8).

Para ver la otra implicación, supongamos que se satisface (2.8). Fijemos $t>1$ y sea $f_t = t\chi_{[0,1/t^p)}$ en $\mathfrak{M}([0,1])$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_p f_t(x) &\geq \left[\frac{1}{x}\int_0^x [f_t(y)]^p dy\right]^{1/p} \\
&= \left[\frac{t^p}{x}\int_0^x \chi_{[0,1/t^p)} dy\right]^{1/p} \\
&\geq \begin{cases} t & \text{si } x\in[0,1/t^p) \\ \frac{1}{x^{1/p}} & \text{si } x\in(1/t^p,1). \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces, para $1<s<t$,

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathcal{M}_p f_t}(s) &= |\{x : \mathcal{M}_p f_t(x) > s\}| \\
&\geq |\{x\in(0,1/t^p] : t>s\} \cup \{x\in(1/t^p,1] : \frac{1}{x^{1/p}} > s\}| \\
&= |(0,1/t^p] \cup \{x\in(1/t^p,1] : x < \frac{1}{s^p}\}| \\
&= |(0,1/s^p]| \\
&= \frac{1}{s^p},
\end{aligned}$$

y, consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Phi(|\mathcal{M}_p f_t|) &= \int_0^\infty a(s)\mu_{\mathcal{M}_p f_t}(s) ds \\
&\geq \int_1^t a(s)\mu_{\mathcal{M}_p f_t}(s) ds \\
&\geq \int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Por otra parte, sea

$$L = \liminf_{s\to\infty} \frac{b(s)}{s^{p-1}}.$$

Si este límite es cero, es fácil ver que existe una función f en L^Ψ, tal que $\mathcal{M}_p f = \infty$ en todas partes en $[0,1]$. Primero observemos que como b es monótona, si b no decrece, entonces

$$\Psi(t) = \int_0^t b(s)\, ds \leq t b(t),$$

por lo tanto $L=0$ implica

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{\Psi(s)}{s^p} = 0. \tag{2.10}$$

Si, en caso contrario, b decrece, existe D tal que $b(s) \leq D$, para todo $s > s_0$. Entonces, si $t > \text{máx}\{s_0, 1\}$,

$$\Psi(t) = \int_0^t b(s)\, ds \leq \Psi(s_0) + D\, t \leq (\Psi(s_0) + D)\, t,$$

y también tenemos (2.10).

Por lo tanto, podemos elegir una sucesión creciente de números t_n, $n \geq 1$, tales que $t_n > 2^n$ y $\dfrac{\Psi(t_n)}{t_n^p} < \dfrac{1}{2^n}$. Resulta entonces, que la función

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{I_n}, \text{ con } I_n = \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t_k^p}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k^p} \right),$$

tiene las propiedades buscadas, ya que

$$\int_0^1 \Psi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \Psi(t_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi(t_n)}{t_n^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

y sin embargo,

$$\mathcal{M}_p f(x) \geq \left(\int_0^1 f^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| t_n^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 \right)^{1/p} = \infty.$$

Debido a esto, sólo nos interesará considerar las funciones b para las cuales

$$\liminf_{s \to \infty} \frac{b(s)}{s^{p-1}} > 0,$$

y como b es monótona, entonces debe ser no-decreciente en la semirrecta $[1, \infty)$.

Dado que

$$\mu_{f_t}(s) = \begin{cases} 1/t^p & \text{si } 0 < s < t \\ 0 & \text{si } s \geq t \end{cases},$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(C'|f_t|) &= C' \int_0^{\infty} b(C's) \mu_{f_t}(s) ds \\ &= \frac{C'}{t^p} \int_0^t b(C's) ds \\ &\leq C'\Psi(1) + \frac{C'}{t^p} \int_1^t b(C's) ds \\ &\leq C'\Psi(1) + \frac{C' b(C't)}{t^{p-1}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora, como $\liminf\limits_{s\to\infty} \dfrac{b(s)}{s^{p-1}} = L > 0$, existe un s_0 tal que $M \leq \dfrac{b(s)}{s^{p-1}}$ para $s > s_0$, con $M = 1$ si $L = \infty$ y $M = \dfrac{L}{2}$ cuando L es finito. Entonces, de (2.9) y (2.11),

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds &\leq \int_0^1 \Phi(|\mathcal{M}_p f_t|) \\
&\leq C' + C' \int_0^1 \Psi(C'|f_t|) \\
&\leq C' + C'^2\Psi(1) + \frac{C'^2 b(C't)}{t^{p-1}} \\
&\leq \frac{C' + C'^2\Psi(1)}{M s_0^{p-1}} \frac{b(s_0 t)}{t^{p-1}} + \frac{C'^2 b(C't)}{t^{p-1}} \\
&\leq C t^{1-p} b(Ct).
\end{aligned}$$

con $C = \max\left\{C', s_0, C'^2 + \dfrac{C' + C'^2\Psi(1)}{M s_0^{p-1}}\right\}$ y como esta constante es independiente de t, se sigue (2.6). □

2.4. Maximales Cesàro

Para $p > 1$, existen operadores que son de tipo débil restringido (p, p), pero no de tipo débil (p, p). Un ejemplo, son los operadores *maximales laterales de promedios Cesàro de orden* α, con $0 < \alpha < 1$, definidos para $f \in \mathfrak{M}([0,1])$ y $x \in [0,1]$ por

$$M_\alpha^+ f(x) = \sup_{x<c\leq 1} \frac{1}{(c-x)^\alpha} \int_x^c |f(s)|(c-s)^{\alpha-1} ds, \tag{2.12}$$

que toma promedios hacia la derecha, y

$$M_\alpha^- f(x) = \sup_{0\leq c<x} \frac{1}{(x-c)^\alpha} \int_c^x |f(s)|(s-c)^{\alpha-1} ds \tag{2.13}$$

que los toma hacia la izquierda.

Existen versiones en toda la recta de estos operadores, donde los promedios se toman sin estar restringidos al intervalo $[0,1]$. Como en el caso de la maximal, coinciden en el $[0,1]$ para funciones soportadas en este intervalo.

Proposición 2.2. *Para* $0 < \alpha < 1$, *los operadores* M_α^+, M_α^- *son de tipo débil restringido* $(1/\alpha, 1/\alpha)$ *y tipo fuerte* (∞, ∞), *y además, no son de tipo débil* $(1/\alpha, 1/\alpha)$.

Demostración. Sea $E \subset [0,1]$. Tomemos $0 \le x < c \le 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{(c-x)^\alpha}\int_x^c \chi_E(s)(c-s)^{\alpha-1}ds &\le \frac{\alpha}{(c-x)^\alpha}\int_0^\infty \chi_{[0,|E\cap[x,c)|]}(s)s^{\alpha-1}ds \\ &\le \frac{\alpha}{(c-x)^\alpha}\int_0^{|E\cap[x,c)|} s^{\alpha-1}ds \\ &= \frac{|E\cap[x,c)|^\alpha}{(c-x)^\alpha} \\ &= \left[\frac{\int_x^c \chi_E}{(c-x)}\right]^\alpha \\ &\le [M(\chi_E)(x)]^\alpha,\end{aligned}$$

donde M es la maximal de Hardy-Littlewood en el $[0,1]$. La primera desigualdad se debe al hecho de que la integral del producto es menor o igual que la integral del producto de las reordenadascomo lo indica la Proposición 1.1. Como x y c son arbitrarios,

$$M_\alpha^+(\chi_E)(x) \le [M(\chi_E)(x)]^\alpha \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que M es de tipo débil $(1,1)$, entonces

$$\begin{aligned}|\{M_\alpha^+(\chi_E) > t\}| &\le |\{M(\chi_E) > t^{1/\alpha}\}| \\ &\le \frac{C}{t^{1/\alpha}}\|\chi_E\|_1.\end{aligned}$$

Probaremos ahora que M_α^+ es de tipo débil (∞,∞). Sea f medible y $0 \le x < c \le 1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{(c-x)^\alpha}\int_x^c |f(s)|(c-s)^{\alpha-1}ds &\le \frac{\alpha\,\|f\|_\infty}{(c-x)^\alpha}\int_x^c (c-s)^{\alpha-1}ds \\ &= \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Luego,

$$\|M_\alpha^+ f\|_\infty \le \|f\|_\infty.$$

Las mismas conclusiones son válidas para el operador M_α^-. Ahora, veamos que M_α^- no es de tipo débil (p,p), más aún, si $q > 1$ entonces, M_α^- no aplica $L_{1/\alpha,q}$ en $L_{1/\beta,\infty}$.

Sea

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \log(1/x)}\chi_{(0,1/2)}(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en } [0,1].$$

Tenemos que la reordenada de f es

$$f^*(t) = \frac{1}{t^\alpha \log(1/t)}\chi_{(0,1/2)}(t) \text{ para todo } t > 0.$$

Esta función pertenece a $L^{1/\alpha,q}$ para $q > 1$, de hecho,

$$\|f\|_{1/\alpha,q}^q = q\alpha\int_0^\infty [t^\alpha f^*(t)]^q \frac{dt}{t}$$

$$= q\alpha\int_0^{1/2} \frac{dt}{t\log^q(1/t)} < \infty$$

Sinembargo, para $0 < x < 1/2$,

$$\begin{aligned} M_\alpha^- f(x) &\geq \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x |f(s)| s^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x \frac{1}{s \log(1/s)} dt = \infty. \end{aligned}$$

Y con esto, vemos que $M_\alpha^- f$ no puede pertenecer a ningún espacio en donde exijamos que las funciones no sean infinito en un conjunto de medida positiva, en particular, cualquier espacio de Lorentz. $\square$

Es inmediato adaptar la demostración anterior para los operadores M_α^+ y M_α^- en sus versiones en todo $\mathbb{R}$.

Para la demostración del próximo resultado de interpolación, necesitamos un análogo del Lema 2.1.

Lema 2.4. *Sea T un operador sublineal de tipo débil restringido (p, p) y tipo fuerte (∞, ∞) con constantes A y B respectivamente. Luego, para cada función f en el dominio de T,*

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left[\frac{2A}{t} \int_{t/2B}^\infty \mu_f(s)^{1/p} ds \right]^p \qquad \textit{para todo } t > 0$$

Demostración. Sea $f \in \mathfrak{D}$ y $t > 0$. Definamos f^t y f_t como en la demostración del Lema 2.1. Como T es subaditivo,

$$\mu(\{|Tf| > t\}) \leq \mu(\{|Tf^t| > t/2\}) + \mu(\{|Tf_t| > t/2\}).$$

y de la misma manera que en el Lema 2.1, obtenemos $\mu(\{|Tf_t| > t/2\}) = 0$.

Por otra parte, como T es de tipo débil restringido (p, p) y por la forma de la distribución de f^t,

$$\begin{aligned} \mu(\{|Tf^t| > t/2\}) &\leq \left[\frac{2A}{t} \int_0^\infty \mu_{f^t}(s)^{1/p} ds \right]^p \\ &\leq \left[\frac{2A}{t} \int_{t/2B}^\infty \mu_f(s)^{1/p} ds \right]^p, \end{aligned}$$

y esto completa la demostración. $\square$

El siguiente resultado generaliza el Teorema de interpolación 1.3 cuando el conjunto Ω tiene medida finita.

Teorema 2.5. *Sea T un operador sublineal de tipo débil restringido (p, p) con $1 < p < \infty$, y tipo fuerte (∞, ∞). Sea $p' = \frac{p}{p-1}$. Si existe una constante C, tal que a y b satisfacen*

$$\sup_{t \geq 1} \left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds \right)^{1/p} \left(\int_t^\infty b(C\, s)^{-p'/p} ds \right)^{1/p'} < \infty \tag{2.14}$$

entonces, T satisface la desigualdad modular (Ψ, Φ), esto es, existe C tal que

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\, d\mu \leq C + C \int_\Omega \Psi(C\, |f|)\, d\mu,$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$.

Demostración. Llamemos D al supremo en la expresión (2.14), entonces, para todo $t > 1$,

$$\left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds\right)^{1/p} \left(\int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p} ds\right)^{1/p'} \leq D. \tag{2.15}$$

Sea f una función en el dominio de T. Del Lema 2.4,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(|Tf|)d\mu &= \int_0^\infty a(s)\mu_{Tf}(s)ds \\
&\leq \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) a(s)\mu_{Tf}(s)ds \\
&\leq \Phi(1)\mu(\Omega) + A^p \int_1^\infty a(s) \left[\frac{2}{s}\int_{s/2B}^\infty \mu_f(t)^{1/p}dt\right]^p ds \\
&= \Phi(1)\mu(\Omega) + \left(\frac{A}{B}\right)^p \int_1^\infty a(s)\left[\frac{1}{s}\int_s^\infty \mu_f(t/2B)^{1/p}dt\right]^p ds.
\end{aligned}$$

Ahora, si llamamos $h(t) = \left[\int_t^\infty b(Cr)^{-p'/p}dr\right]^{1/pp'}$ y $g(t) = \mu_f(t/2B)^{1/p}$, tenemos, por la desigualdad de Hölder y el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty a(s)\left[\frac{1}{s}\int_s^\infty g(t)dt\right]^p ds \\
&= \int_1^\infty a(s)\left[\frac{1}{s}\int_s^\infty g(t)h(t)b(Ct)^{1/p}\frac{1}{h(t)b(Ct)^{1/p}}dt\right]^p ds \\
&\leq \int_1^\infty \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_s^\infty (g(t)h(t))^p b(Ct)dt\right]\left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}h(r)^{-p'}dr\right]^{p/p'} ds \\
&= \int_1^\infty [g(t)h(t)]^p b(Ct)\left\{\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}h(r)^{-p'}dr\right]^{p/p'} ds\right\} dt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}h(r)^{-p'}dr = p'\left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}dr\right]^{1/p'}$$

y

$$\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_1^s \frac{a(r)}{r^p}dr\right]^{-1/p'} ds = p\left[\int_1^t \frac{a(r)}{r^p}dr\right]^{1/p}.$$

Si usamos la desigualdad (2.15) dos veces,

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty [g(t)h(t)]^p b(Ct)\left\{\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}h(r)^{-p'}dr\right]^{p/p'} ds\right\}dt\\
&= (p')^{p/p'}\int_1^\infty [g(t)h(t)]^p b(Ct)\left\{\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}dr\right]^{p/(p')^2} ds\right\}dt\\
&\leq (p')^{p/p'}D^{p/p'}\int_1^\infty [g(t)h(t)]^p b(Ct)\left\{\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_1^s \frac{a(r)}{r^p}dr\right]^{-1/p'} ds\right\}dt\\
&\leq p(p')^{p/p'}D^{p/p'}\int_1^\infty [g(t)h(t)]^p b(Ct)\left[\int_1^t \frac{a(r)}{r^p}dr\right]^{1/p} dt\\
&\leq p(p')^{p/p'}D^{p}\int_1^\infty [g(t)h(t)]^p b(Ct)\left[\int_t^\infty b(Cr)^{-p'/p}dr\right]^{-1/p'} dt\\
&\leq p(p')^{p/p'}D^{p}\int_1^\infty g(t)^p b(Ct)dt\\
&\leq \frac{p(p')^{p/p'}D^{p}}{C}\int_\Omega \Psi(4BC|f|)d\mu,
\end{aligned}$$

y esto completa la demostración. □

Para probar que las condiciones del teorema anterior son óptimas, introduciremos un operador lineal muy relacionado con el operador M_α^-. Sea $1 < p < \infty$, para $f \in \mathfrak{M}([0,1])$, definimos el operador

$$\mathcal{H}_p f(x) = \frac{1}{px^{1/p}}\int_0^x f(s)s^{1/p-1}ds \qquad \text{para todo } x \in [0,1]. \tag{2.16}$$

Para $p = 1$ este es el operador de Hardy en el intervalos.

Observación 1. Notemos que si f es una función decreciente, entonces $\mathcal{H}_p f$ también lo es; en efecto, si $0 < x < y$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_p f(x) &= \frac{1}{x^{1/p}}\int_0^x f(s)s^{1/p-1}ds\\
&= \frac{1}{x^{1/p}}\int_0^y f(\frac{x}{y}t)\left(\frac{x}{y}t\right)^{1/p-1}\frac{x}{y}dt\\
&= \frac{1}{y^{1/p}}\int_0^y f(\frac{x}{y}t)t^{1/p-1}dt\\
&\geq \frac{1}{y^{1/p}}\int_0^y f(t)t^{1/p-1}dt\\
&= \mathcal{H}_p f(y),
\end{aligned}$$

También podemos notar de la desigualdad anterior, que si f es estrictamente decreciente, también $\mathcal{H}_p f$ será estrictamente decreciente.

Proposición 2.3. *Sea $1 < p < \infty$. El operador $\mathcal{H}_p$ es de tipo débil restringido (p, p) y de tipo (∞, ∞).*

Demostración. Sea f una función medible de $[0, 1]$. Si $x > 0$, el promedio $\mathcal{H}_p f(x)$ es menor o igual que el supremo $M^-_{1/p} f(x)$. Por lo tanto $\mathcal{H}_p f(x) \leq \mathcal{M}^-_{1/p} f(x)$ para todo $0 \leq x \leq 1$ y entonces $\|\mathcal{H}_p f\|_{p,\infty} \leq \|\mathcal{M}_{1/p} f\|_{p,\infty}$. Dado que $\mathcal{M}^-_{1/p}$ es de tipo débil restringido (p, p) y tipo (∞, ∞) (ver Proposición 2.2), tenemos que $\mathcal{H}_p$ también lo es. □

El siguiente teorema nos dice que, como en el caso del tipo débil, la condición (2.14) para a y b es óptima.

Teorema 2.6. *Sea $p > 1$ y b monótona. Existe una constante C tal que*

$$\int_0^1 \Phi(\mathcal{H}_p f(x))\, dx \leq C + C \int_0^1 \Psi(C|f(x)|)\, dx \ , \tag{2.17}$$

para toda $f \in \mathfrak{M}([0, 1])$ si, y sólo si, se verifica la condición (2.14).

Demostración del Teorema 2.6. Como el operador $\mathcal{H}_p$ es simultáneamente de tipo débil restringido (p, p) y de tipo fuerte (∞, ∞) en $[0, 1]$, el Teorema 2.5 nos dice que (2.14) implica (2.17).

Para probar la otra implicación, supongamos que (2.17) se satisface. Supondremos primero, que b tiene la propiedad

$$\int_1^\infty b(s)^{-p'/p} ds < \infty. \tag{2.18}$$

Fijemos $t > 1$. Para $s > 0$, sea

$$h_t(s) = \frac{1}{A_t^p}\, b(Cs)^{-p'},$$

donde $A_t = t\, b(Ct)^{-p'/p} + \int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p} ds$ y $C > \max\{(C')^2, 1\}$ es tal que $\int_1^\infty b(Cs)^{-p'/p} < (C')^{-p'/p}$. Observemos que en este caso, el hecho de que b sea monótona y la condición (2.18), implican que b es no-decreciente y $\lim_{s\to\infty} b(s) = \infty$. Entonces, h_t es no creciente, $\lim_{s\to\infty} h_t(s) = 0$ y $h_t^{-1}(s)$ está bien definida para $s > 0$. Consideremos la función $f_t \in \mathfrak{M}([0, 1])$ definida por

$$f_t = h_t^{-1} \chi_{(0, h_t(t))}. \tag{2.19}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} h_t(t) = \frac{1}{A_t^p}\, b(Ct)^{-p'} &\leq \left[\frac{b(Ct)^{-p'/p}}{A_t}\right]^p \\ &\leq \left[\frac{b(Ct)^{-p'/p}}{t\, b(Ct)^{-p'/p}}\right]^p \leq \frac{1}{t^p} \leq 1, \end{aligned}$$

y por lo tanto, $h_t(t)$ es un punto del $[0, 1]$. La distribución de f_t es

$$\begin{aligned} \mu_{f_t}(s) &= |\{x \in (0, 1] :\ f_t(x) > s\}| \\ &= |\{x \in (0, 1] :\ h_t^{-1}(x) > s \text{ and } x < h_t(t)\}| \\ &= |\{x \in (0, 1] :\ x < h_t(s) \text{ and } x < h_t(t)\}| \\ &= \min\{h_t(s), h_t(t)\}, \end{aligned}$$

para todo $s > 0$.

Como b es no-decreciente, tenemos

$$\begin{aligned}
C' \int_0^1 \Psi(C'|f_t(x)|)\,dx &= C'^2 \int_0^\infty b(C's)\mu_{f_t}(s)ds \\
&\leq C\left[h_t(t)\int_0^t b(Cs)ds + \int_t^\infty b(Cs)h_t(s)ds\right] \\
&\leq C\left[tb(Ct)h_t(t) + \int_t^\infty b(Cs)h_t(s)ds\right] \\
&\leq C\frac{1}{A_t^p}\left[tb(Ct)^{-p'/p} + \int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p}ds\right] \\
&\leq C\left[tb(Ct)^{-p'/p} + \int_t^\infty b(Cs)^{-p/p'}ds\right]^{-p'/p} \\
&\leq C\left[\int_t^\infty b(Cr)^{-p'/p}dr\right]^{-p/p'}.
\end{aligned}$$

Entonces, por la elección de C, tenemos

$$C' + C'\int_0^1 \Psi(C'|f_t(x)|)\,dx \leq 2C\left[\int_t^\infty b(Cr)^{-p'/p}dr\right]^{-p/p'}. \tag{2.20}$$

Por otra parte, veremos que

$$\mu_{\mathcal{H}_p f_t}(s) \geq \frac{1}{s^p} \quad \text{para todo } s \in (1,t), \tag{2.21}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Phi(|\mathcal{H}_p f_t(x)|)\,dx &= \int_0^\infty a(s)\mu_{\mathcal{H}_p f_t}(s)ds \\
&\geq \int_1^t \frac{a(s)}{s^p}ds.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por consiguiente, de (2.22) y (2.20) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}ds &\leq \int_0^1 \Phi(|\mathcal{H}_p f_t(x)|)\,dx \\
&\leq C' + C'\int_0^1 \Psi(C'|f_t(x)|)\,dx \\
&\leq 2C\left[\int_t^\infty b(Cr)^{-p'/p}dr\right]^{-p/p'}.
\end{aligned}$$

Como C no depende de t, se satisface (2.14).

Resta probar la desigualdad (2.21). Como

$$\lim_{s\to\infty} h_t(s) = 0,$$

tenemos

$$\lim_{x\to 0} f_t(x) = \infty,$$

y luego, dado que $\mathcal{H}_p f_t \geq f_t$, resulta

$$\lim_{x\to 0} \mathcal{H}_p f_t(x) = \infty.$$

Además, $\mathcal{H}_p f_t$ es continua y no creciente en $(0,1]$ (Ver la Observación 1); por lo tanto, la imagen de la función $\mathcal{H}_p f_t$ es la semirrecta $[\mathcal{H}_p f_t(1), \infty)$. Para $\mathcal{H}_p f_t(1) < s < t$, tenemos

$$\mu_{\mathcal{H}_p f_t}(s) = |\{x : \ \mathcal{H}_p f_t(x) > s\}| = x_s$$

donde $x_s \in (0,1]$, es tal que

$$s = \mathcal{H}_p f_t(x_s) = \frac{1}{x_s^{1/p}} \int_0^{x_s} f_t(x) x^{1/p-1} dx.$$

Por consiguiente,

$$x_s = \frac{1}{s^p} \left[\int_0^{x_s} f_t(x) x^{1/p-1} dx \right]^p.$$

Como $\mathcal{H}_p f_t \geq f_t$ y $s < t$,

$$x_s = \mu_{\mathcal{H}_p f_t}(s) \geq \mu_{f_t}(s) \geq \mu_{f_t}(t) = h_t(t).$$

Luego, como f_t es no negativa,

$$\begin{aligned} \int_0^{x_s} f_t(x) x^{1/p-1} dx &\geq \int_0^{h_t(t)} f_t(x) x^{1/p-1} dx \\ &= \int_0^{h_t(t)} h_t^{-1}(x) x^{1/p-1} dx. \end{aligned}$$

Si aplicamos un cambio de variables, la integral anterior es igual a

$$\begin{aligned} \int_0^{(h_t(t))^{1/p}} h_t^{-1}(y^p) dy &= t(h_t(t))^{1/p} + \int_t^\infty (h_t(r))^{1/p} dr \\ &= \frac{1}{A_t} \left[tb(Ct)^{-p'/p} + \int_t^\infty b(Cr)^{-p'/p} dr \right] \\ &= 1, \end{aligned}$$

y entonces $x_s \geq \frac{1}{s^p}$, en el caso en que $\mathcal{H}_p f_t(1) < s < t$.

Si, en cambio, $1 < s < \mathcal{H}_p f_t(1)$, es obvio que $\mu_{\mathcal{H}_p f_t}(s) = 1 > \frac{1}{s^p}$, y entonces tenemos (2.21).

Para finalizar la prueba de este teorema, sólo queda considerar el caso en que la función b no tiene la propiedad (2.18), es decir,

$$\int_1^\infty b(s)^{-p'/p} ds = \infty. \tag{2.23}$$

Veremos que, en esta situación, el operador $\mathcal{H}_p$ no puede aplicar el espacio $L^{\Psi}([0,1])$ en el espacio $L^{\Phi}([0,1])$.

Como b es monótona, podemos suponer que b es creciente. Si no lo fuera, podríamos tomar otra función $\tilde{b}$ creciente, tal que $b \leq \tilde{b}$ y que satisfaga (2.23), y es suficiente realizar la siguiente construcción con la función $\tilde{b}$ en lugar de la b, porque $L^{\tilde{\Psi}} \subset L^{\Psi}$.

Consideremos la función

$$f = h^{-1}\chi_{[0,1]}$$

en $\mathfrak{M}([0,1])$, donde

$$h(s) = \frac{Kb(s)^{-p'}}{\left(\int_{1/2}^{s} b^{-p'/p}(r)dr\right)^{p}}, \text{ para todo } s \geq 1,$$

donde K es tal que $h(1) = 1$. Notemos que h es decreciente, y entonces f está bien definida. Primero, veamos que f está en $L^{\Psi}([0,1])$. Como $\int_1^\infty b^{-p'/p} = \infty$ y $b^{-p'/p}$ es continua y decreciente en $[1,\infty)$, existe una sucesión de números $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ con $x_n > 1$, tales que $\int_1^{x_n} b^{-p'/p} = n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Entonces, como $\mu_f(s) = h(s)$ para $s > 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Psi(|f(x)|)\,dx &= \int_0^\infty b(s)\mu_f(s)ds \\ &\leq \int_0^1 b(s)ds + \int_1^\infty b(s)h(s)ds\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{K}\int_1^\infty b(s)h(s)ds &= \int_1^\infty \frac{b(s)^{-p'/p}}{\left(\int_{1/2}^{s} b^{-p'/p}\right)^{p}}ds \\ &\leq \int_1^{x_1} \frac{b(s)^{-p'/p}}{\left(\int_{1/2}^{1} b^{-p'/p}\right)^{p}}ds + \sum_{n=1}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{b(s)^{-p'/p}}{\left(\int_1^{x_n} b^{-p'/p}\right)^{p}}ds \\ &= \frac{1}{\left(\int_{1/2}^{1} b^{-p'/p}\right)^{p}} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\int_1^{x_{n+1}} b^{-p'/p} - \int_1^{x_n} b^{-p'/p}}{\left(\int_1^{x_n} b^{-p'/p}\right)^{p}} \\ &= \frac{1}{\left(\int_{1/2}^{1} b^{-p'/p}\right)^{p}} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty.\end{aligned}$$

Para probar que $\mathcal{H}_p f$ no está en $L^{\Phi}([0,1])$, veremos que $\mathcal{H}_p f(x) = \infty$ para todo

$x \in [0,1]$. Como $\mathcal{H}_p f$ es decreciente en $[0,1]$, es suficiente ver que $\mathcal{H}_p f(1) = \infty$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K^{1/p}}\mathcal{H}_p f(1) &= \frac{1}{K^{1/p}}\int_0^1 h^{-1}(r) r^{1/p-1} dr \\
&\geq \frac{1}{K^{1/p}}\int_1^\infty h(r)^{1/p} dr \\
&= \int_1^\infty \frac{b(s)^{-p'/p}}{\int_{1/2}^s b^{-p'/p}} ds \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{b(s)^{-p'/p}}{\int_{1/2}^s b^{-p'/p}} ds \\
&\geq \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{b(s)^{-p'/p}}{\int_{1/2}^{x_{n+1}} b^{-p'/p}} ds \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{\int_1^{x_{n+1}} b^{-p'/p} - \int_1^{x_n} b^{-p'/p}}{\int_{1/2}^1 b^{-p'/p} + \int_1^{x_{n+1}} b^{-p'/p}} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\int_{1/2}^1 b^{-p'/p} + 1 + n} = \infty,
\end{aligned}$$

y de esta manera hemos completado la demostración. □

Debemos mencionar que un resultado similar al Teorema 2.6 fue obtenido en [3]. A diferencia de tal trabajo, en el que se obtienen desigualdades en norma, obtenemos desigualdades modulares con hipótesis más débiles sobre las funciones Φ y Ψ que definen los espacios donde se obtiene la acotación. Además, para probar la necesidad de la condición 2.14 usamos un procedimiento constructivo.

Como consecuencia del Teorema 2.6, podemos inferir el siguiente resultado.

Teorema 2.7. *Sea $0 < \alpha < 1$ y b monótona. Existe una constante C tal que*

$$\int_0^1 \Phi(|M_\alpha^- f(x)|)\, dx \leq C + C \int_0^1 \Psi(C\,|f(x)|)\, dx\,, \tag{2.24}$$

para toda $f \in \mathfrak{M}([0,1])$ si, y sólo si, existe C tal que

$$\sup_{t\geq 1}\left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^{1/\alpha}}\, ds\right)^\alpha \left(\int_t^\infty b(C\,s)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, ds\right)^{1-\alpha} < \infty. \tag{2.25}$$

El mismo resultado es válido para el operador M_α^+.

Demostración. El operador M_α^- es de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\alpha)$ y de tipo fuerte (∞,∞), y dado que la expresión (2.25) es la condición (2.14) con $p = 1/\alpha$, se sigue del Teorema 2.5 que (2.25) es suficiente. Para ver que es necesaria, basta observar el hecho de que para $f \in \mathfrak{M}([0,1])$ tenemos $M_\alpha^- f(x) \geq \mathcal{H}_{1/\alpha} f(x)$, para casi todo $x \in [0,1]$, y por lo tanto, el resultado es consecuencia del Teorema 2.6. Para M_α^+, podemos deducirlo de que $M_\alpha^+ f(x) = M_\alpha^- g(-x)$, con $g(x) = f(1/2 - x)$, para todo $x \in [0,1]$, ya que estas dos funciones tienen la misma función de distribución. □

Observación 2. Los teoremas anteriores indican que la condición (2.14) implica la (2.6), porque la condición (2.14) implica la desigualdad modular (Ψ, Φ) para $\mathcal{M}_p$, por ser de tipo débil, y en particular de tipo débil restringido, y la desigualdad modular (Ψ, Φ) para $\mathcal{M}_p$ implica la condición (2.6). Pero también podemos verlo directamente, si ponemos la condición (2.6) en la forma: existe C tal que

$$\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\, ds \leq C\, \frac{b(C\,t)}{t^{p-1}} \qquad \text{para todo } t \geq 1,$$

y la (2.14), como: existe C tal que

$$\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\, ds \leq C \left[\int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p} ds\right]^{-p/p'} \qquad \text{para todo } t \geq 1,$$

ya que si b es una función creciente,

$$\begin{aligned}\left[\int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p} ds\right]^{-p/p'} &\leq \left[\int_t^{2t} b(Cs)^{-p'/p} ds\right]^{-p/p'} \\ &\leq \left[t b(C2t)^{-p'/p}\right]^{-p/p'} \\ &= t^{1-p} b(2Ct).\end{aligned}$$

Por otra parte, (2.6) no implica (2.14), ya que el par

$$a(t) = t^{p-1} \quad \text{y} \quad b(t) = t^{p-1}\log(t+1),$$

satisface (2.6), pero no (2.14), en efecto,

$$\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds = \int_1^t \frac{s^{p-1}}{s^p} ds = \log(t) \leq \frac{t^{p-1}\,\log(t+1)}{t^{p-1}} = \frac{b(t)}{t^{p-1}}, \tag{2.26}$$

para todo $t > 1$, que es (2.6).

Sin embargo, si $p > 2$,

$$\left(\int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p} ds\right)^{-p/p'} = \left(\int_t^\infty \frac{ds}{Cs\log(Cs+1)^{p'/p}}\right)^{-p/p'} = 0$$

para cualquier $t > 1$, es decir, no se satisface (2.14).

En el caso $1 < p < 2$, tenemos

$$\left(\int_t^\infty \frac{ds}{Cs\log(Cs+1)^{p'/p}}\right)^{-p/p'} \leq \frac{1}{C}\, \log(Ct)^{2-p},$$

y por lo tanto (2.14) no se satisface para valores de t mayores a C y $\dfrac{e^{2^{\frac{1}{p-1}}}}{C}$.

Es decir, que (2.14) es estrictamente más fuerte que (2.6).

Ahora presentamos algunos ejemplos de pares de espacios L^Ψ y L^Φ que ilustran los teoremas anteriores. Los ejemplos más interesantes, son aquellos en que las funciones a y b satisfacen las condiciones tales que le miembro derecho con el izquierdo sean equivalentes, ya que dada a, la b que satisfaga tal equivalencia será la que corresponda al espacio L^Ψ más grande que T aplicará en L^Φ.

Ejemplo 1. Sea $q > p$ y $a(t) = t^{q-1}$ para todo $t > 1$. Si calculamos el lado izquierdo de (2.6),

$$t^{p-1}\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}ds = \frac{1}{q-p}t^{q-1}$$

y por lo tanto podemos tomar $b(t) = a(t)$.

Este par satisface tanto (2.6) como (2.14) y por los teoremas 2.2 y 2.5, todo operador sublineal de tipo fuerte (∞,∞) y tipo débil (p,p) o débil restringido (p,p) satisface,

$$\int_\Omega |Tf|^p \le C + C\int_\Omega |f|^p \qquad \text{para toda } f \in \mathfrak{M}(\Omega),$$

y esta desiguadad implica que si $\|f\|_p = 1$, entonces $\|Tf\|_p \le (2C)^{1/p}$, y T resulta acotado en L^p, recuperando de esta manera los resultados clásicos de los teoremas 1.2 y 1.3 cuando $\mu(\Omega) < \infty$.

Ejemplo 2. Sea f una función con soporte en un intervalo I y $\mathcal{M}_p$ el operador como en (2.7) pero que toma promedios en todo $\mathbb{R}$. No es difícil darse cuenta que $\chi_I\mathcal{M}_pf$ es un operador que está en las hipótesis del Teorema 2.2. Entonces, si $a(t) = t^{p-1}$, observamos la desigualdad (2.26), podemos tomar $b(t) \sim t^{p-1}\log(1+t)$ y por el Teorema 2.2, resulta que el operador $\mathcal{M}_p$ satisface para cierta constante C,

$$\int_I |\mathcal{M}_pf|^p \le C + C\int_I \Psi(|f|)\,,$$

para toda f con soporte en I, donde $\Psi(t) = t^p\log(1+t)$. Además, si observamos la demotración de tal teorema, podemos notar que existe una constante C que depende sólo del las constantes A, B de los tipos del operador y de p, tal que,

$$\int_I |\mathcal{M}_pf|^p \le C|I| + C\int_I \Psi(|f|)\,,$$

para toda f con soporte en I. Los resultados en la Sección 2.5, nos darán una especie de recíproco de este caso, y veremos que siempre que $\mathcal{M}_pf$ pertenezca a $L^p(I)$, la función f deberá ser de $L^\Psi(I)$, obteniendo de esta manera un resultado análogo al de Stein para la maximal de Hardy-Littlewood.

Ejemplo 3. Sea $b(t) \sim t^{p-1}\log^\gamma(1+t)$, con $\gamma > p-1$, entonces

$$\left(\int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p}ds\right)^{-p/p'} \sim [\log(t)]^{\gamma-p+1},$$

por lo tanto, podemos tomar $a(t) \sim t^{p-1}\log^{\gamma-p}(1+t)$, ya que

$$\int_1^t \frac{a(t)}{t^p}dt \sim [\log(t)]^{\gamma-p+1}$$

Por el Teorema 2.7 el operador M_α^- satisface la desigualdad modular (2.24) y por lo tanto aplica $L^\Psi([0,1])$ en $L^\Phi([0,1])$, donde $\Psi(t) \sim t^p \log^\gamma(1+t)$ y $\Phi(t) \sim t^p \log^{\gamma-p}(1+t)$. En el caso especial cuando $\gamma = p$, tenemos que el operador $M_{1/p}^-$ aplica L^Ψ en L^p, donde $\Psi(t) \sim t^p \log^p(1+t)$ y este es el mejor espacio posible. Observemos que el número γ puede ser más chico que p, y en este caso el espacio L^Φ es más grande que el L^p!

2.5. Desigualdades al revés

Esta sección está dedicada a desigualdades al revés y encontraremos algunas respuestas a la siguientes preguntas: Si tenemos una función f tal que $\mathcal{M}_p f$ está en L^Φ, ¿qué podemos decir acerca de f? Y la misma pregunta para $M_{1/p}^+$.

Sabemos que si tenemos una función f cuya maximal Mf se encuentra en $L^1(\mathbb{T})$, podemos asegurar que la misma f se encuentra en $L\log^+ L(\mathbb{T})$. Este hecho es generalizado en [11], donde el autor encuentra que, bajo apropiadas condiciones sobre las funciones a y b, existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$\int_{\mathbb{T}} \Psi\left(c_1|f|\right) \leq c_2 + c_2 \int_{\mathbb{T}} \Phi\left(Mf\right) \tag{2.27}$$

para toda f con $\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1$ si, y sólo si, existe una constante c_3 tal que

$$b(c_3 t)c_3 \leq \int_1^t \frac{a(s)}{s}\, ds \qquad \text{para todo } t \geq 1.$$

En esta sección, analizaremos desigualdades de este tipo, para los operadores $\mathcal{M}_p$ y $M_{1/p}^-$. Trataremos primero al operador $\mathcal{M}_p$. Las conclusiones en este caso podrían deducirse de los resultados de [11] para $p = 1$. Sin embargo, inculimos una prueba detallada con dos propósitos. Por un lado, para probar que la condición en las funciones a y b es necesaria, usamos un argumento constructivo, que simplifica considerablemente la prueba dada en [11]. Por otra parte, la demostración de que las condición en a y b es suficiente sigue la técnica basada en estimaciones de la distribución. Como veremos, si bien podemos obtener una estimación de la distribución del operador M_α^-, en este caso no son válidas desigualdades modulares al revés. Comenzamos con el siguiente lema que da una estimación de la distribución del operador $\mathcal{M}_p$.

Lema 2.8. *Si $p \geq 1$,*

$$\frac{1}{2t^p}\int_t^\infty \mu_f(s)s^{p-1}\, ds \leq \mu_{\mathcal{M}_p f}(t) \qquad \textit{para todo} \quad t \geq \|f\|_{L^p([0,1])}.$$

Demostración. Para $p = 1$, el resultado se prueba en [24], p.93. Si $p > 1$, sea f en $L^p([0,1])$ y $t \geq \|f\|_{L^p([0,1])} = \left(\int_{[0,1]} |f|^p\right)^{1/p}$. Ya que la afirmación es cierta para la maximal $M = \mathcal{M}_1$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t^p}\int_t^\infty \mu_f(s)s^{p-1}\, ds &= \frac{1}{2t^p}\int_{t^p}^\infty \mu_{|f|^p}(s)\, ds \\ &\leq \mu_{Mf^p}(t^p) \\ &= \mu_{\mathcal{M}_p f}(t). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.9. *Existe una constante C' tal que*

$$\int_{[0,1]} \Psi(|f|) \leq C' + C' \int_{[0,1]} \Phi(C' \mathcal{M}_p f) \tag{2.28}$$

para toda $f \in \mathfrak{M}([0,1])$ con $\|f\|_{L^p([0,1])} = 1$ si, y sólo si, para alguna constante C,

$$b(t) \leq C\, t^{p-1} \int_1^{C\,t} \frac{a(s)}{s^p}\, ds \qquad \textit{para todo } t \geq 1. \tag{2.29}$$

Demostración. Supongamos que la desigualdad (2.29) es cierta. Sea f una función en $\mathfrak{M}([0,1])$ tal que $\int_{[0,1]} f^p = 1$,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \Psi(|f|) &= \int_0^\infty b(t)\mu_f(t)\, dt \\ &= \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) b(t)\mu_f(t)\, dt \\ &\leq \Psi(1) + \int_1^\infty b(t)\mu_f(t)\, dt. \end{aligned}$$

De la desigualdad (2.29), el teorema de Fubini y el Lema 2.8, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_1^\infty b(t)\mu_f(t)\, dt &\leq C \int_1^\infty \left(t^{p-1} \int_1^{C\,t} \frac{a(s)}{s^p}\, ds\right) \mu_f(t)\, dt \\ &\leq C \int_1^\infty \frac{a(s)}{s^p} \left(\int_{s/C}^\infty t^{p-1}\mu_f(t)\, dt\right) ds \\ &\leq 2C \int_1^\infty a(s)\mu_{\mathcal{M}_p f}(s/C)\, ds \\ &\leq 2C \int_{[0,1]} \Phi(C\, \mathcal{M}_p f), \end{aligned}$$

y con esto probamos que (2.29) implica (2.28).

Veremos ahora que (2.29) es una consecuencia de (2.28). Para $t \geq 1$, sea $f_t = t\chi_{(0,1/t^p)}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \Psi(|f_t|) &= \int_0^\infty b(s)\, \mu_{f_t}(s)\, ds \\ &= \frac{1}{t^p} \int_0^t b(s)\, ds \\ &\geq \frac{1}{2t^{p-1}}\, b(t/2), \end{aligned}$$

donde usamos que b es una función creciente.

Por otra parte, usando el tipo débil (p,p) del operador $\mathcal{M}_p$,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \Phi(\mathcal{M}_p f_t) &= \int_0^\infty a(s)\,\mu_{\mathcal{M}_p f_t}(s)\,ds \\ &\leq \Phi(1) + \int_1^t a(s)\,\mu_{\mathcal{M}_p f_t}(s)\,ds \\ &\leq \Phi(1) + A\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\,ds.\end{aligned}$$

Dado que $\displaystyle\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\,ds$ es creciente con t, resulta (2.29). □

Consideremos $\mathcal{M}_p$ como en el ejemplo 2. Si $a(t) = t^{p-1}$, podemos tomar $b(t) \sim t^{p-1}\log(1+t)$ y por el Teorema 2.9, resulta que para cierta constante C,

$$\int_I \Psi(|f|) \leq C + C\int_I |\mathcal{M}_p f|^p\,,$$

para toda f con soporte en I, tal que $\int_I |f|^p = 1$, donde $\Psi(t) = t^p\log(1+t)$. Y no es difícil ver que entonces, existe C tal que

$$\int_I \Psi(|f|) \leq C|I|\left(\int_I |f|^p\right) + C\int_I |\mathcal{M}_p f|^p\,,$$

para toda f con soporte en I.

Notemos que si sumamos esta desigualdad a la del Ejemplo 2 recuperamos el resultado de Stein, que para todo intervalo I, $\mathcal{M}_p f$ pertenece a $L^p(I)$ si, y sólo si, f se encuentra en $L^\Psi(I)$, con $\Psi(t) = t^p\log(1+t)$.

Para los operadores M_α^+ y M_α^-, con $\alpha = 1/p$, la situación es diferente. Estamos interesados en saber qué ocurre si a y b satisfacen la desigualdad opuesta a la (2.14), esto es, que para alguna constante C,

$$\left(\int_t^\infty b(s)^{-p'/p}\,ds\right)^{-p/p'} \leq C\int_1^{C\,t} \frac{a(s)}{s^p}\,ds \qquad \text{par todo} t \geq 1. \tag{2.30}$$

Si f es creciente, $M_\alpha^- f = f$, y por lo tanto un resultado análogo al Teorema 2.9 no es posible. De hecho, el par $a(s) = s^p$ y $b(s) = s^{p-1}\log^p(s)$ satisface (2.30), pero podemos encontrar una función creciente f en el $[0,1]$ tal que $\int_{[0,1]} \Psi(|f|) < \infty$ y $\int_{[0,1]} \Phi(c|f|) = \infty$ para todo $c > 0$ (tomar, por ejemplo $f(x) = h^{-1}(1-x)\chi_{[0,1]}(x)$, con $h(t) = \frac{1}{(t\log t)^p}$).

La naturaleza lateral de M_α^- implica que el operador no agranda funciones crecientes. Sin embargo, para todas las funciones decrecientes, tenemos un análogo al Lema 2.8.

Lema 2.10. *Sea f positiva y decreciente en el $[0,1]$. Luego,*

$$\left[\frac{1}{p\,t}\int_{\{f>t\}} f(x)x^{1/p-1}\,dx\right]^p \leq |\{x:\ M_{1/p}^- f(x) > t\}|\ ,$$

para todo $t > \|f\|_{p,1} = \|f\|_{L^{p,1}([0,1])}$.

Demostración. Dado que f es decreciente,

$$\|f\|_{p,1} = \frac{1}{p}\int_0^1 f(x)x^{1/p-1}\,dx,$$

y por la misma razón, $M^-_{1/p}f(x) = \mathcal{H}_p f(x)$ es decreciente y continua (ver la Observación 1), entonces

$$\{x:\ M^-_{1/p}f(x) > t\} = (0, x_t),$$

con x_t en el $[0,1]$. Para $t > \|f\|_{p,1} = M^-_{1/p}f(1)$,

$$t = \frac{1}{px_t^{1/p}}\int_0^{x_t} f(y)y^{1/p-1}\,dy$$

y por lo tanto

$$x_t = \left[\frac{1}{p\,t}\int_0^{x_t} f(y)y^{1/p-1}\,dy\right]^p.$$

Además, $f(x) \leq M^-_{1/p}f(x)$ para todo x, entonces

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{p\,t}\int_{\{f>t\}} f(x)x^{1/p-1}\,dx\right]^p &\leq \left[\frac{1}{p\,t}\int_{\{M^-_{1/p}f>t\}} f(x)x^{1/p-1}\,dx\right]^p \\ &= \left[\frac{1}{p\,t}\int_0^{x_t} f(x)x^{1/p-1}\,dx\right]^p \\ &= x_t = |\{x:\ M^-_{1/p}f(x) > t\}|.\end{aligned}$$

□

Luego de probar el Lema 2.10, podríamos esperar que fuera cierto un resultado análogo al Teorema 2.9, para funciones decrecientes, esto es, que la desigualdad (2.30) implicara que

$$\int_{[0,1]} \Psi(|f|) \leq C + C\int_{[0,1]} \Phi(M^-_\alpha f), \tag{2.31}$$

para toda función f decreciente en el $[0,1]$ tal que $\|f\|_{p,1} = 1$. Sin embargo, esto no es cierto, como nos muestra el siguiente ejemplo.

Consideremos las funciones generadoras

$$\Phi(t) = \alpha t^{1/\alpha} \quad \text{y} \quad \Psi(t) = t^{1/\alpha}[\log(1+t)]^{1/\alpha}.$$

Para $n \geq 1$, sea $f_n = n\chi_{[0,1/n^{1/\alpha}]}$. Tenemos

$$\|f_n\|_{1/\alpha,1} = \alpha\int_0^1 f_n(x)x^{\alpha-1}\,dx = 1,$$

para todo $n \geq 1$.

Veremos que la desigualdad (2.31) no puede ser cierta para todas las f_n.

Si $x \in [0, 1/n^{1/\alpha})$, tenemos $M_\alpha^- f_n(x) = n$; de hecho, si $0 < c < x$,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{(x-c)^\alpha}\int_c^x f_n(y)(y-c)^{\alpha-1}\,dy &= \frac{\alpha n}{(x-c)^\alpha}\int_c^x (y-c)^{\alpha-1}\,dy\\ &= \frac{\alpha}{(x-c)^\alpha}\int_0^{x-c} y^{\alpha-1}\,dy\\ &= n.\end{aligned}$$

Si $x \in [1/n^{1/\alpha}, 1)$, tenemos $M_\alpha^- f_n(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Para ver esto, sea $0 < c < x$. Si $1/n^{1/\alpha} < c < x$, entonces $\dfrac{\alpha}{(x-c)^\alpha}\displaystyle\int_c^x f_n(y)(y-c)^{\alpha-1}\,dy = 0$. Si $c < 1/n^{1/\alpha}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{(x-c)^\alpha}\int_c^x f_n(y)(y-c)^{\alpha-1}\,dy &= \frac{\alpha n}{(x-c)^\alpha}\int_c^{1/n^{1/\alpha}} (y-c)^{\alpha-1}\,dy\\ &= \frac{\alpha n}{(x-c)^\alpha}\int_0^{1/n^{1/\alpha}-c} y^{\alpha-1}\,dy\\ &= \frac{n(1/n^{1/\alpha}-c)^\alpha}{(x-c)^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}\end{aligned}$$

y

$$\frac{\alpha}{x^\alpha}\int_0^x f_n(y)y^{\alpha-1}\,dy = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$M_\alpha^- f_n(x) = \begin{cases} n & \text{if } x \in (0, 1/n^{1/\alpha}] \\ \frac{1}{x^\alpha} & \text{if } x \in (1/n^{1/\alpha}, 1] \end{cases}$$

y su función distribución es

$$\mu_{M_\alpha^- f_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t > n \\ \frac{1}{t^{1/\alpha}} & \text{if } 1 < t < n \\ 1 & \text{if } 0 < t < 1, \end{cases}$$

mientras que la distribución de f_n, está dada por

$$\mu_{f_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t > n \\ 1/n^{1/\alpha} & \text{if } 1 < t < n \\ 1 & \text{if } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Ahora,

$$\int_{[0,1]} \Psi(f_n) = \frac{\Psi(n)}{n^{1/\alpha}} = (\log(1+n))^{1/\alpha}$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \Phi(C\, M_\alpha^- f_n) &= C\int_0^\infty a(C\,s)\mu_{M_\alpha^- f_n}(s)\,ds\\ &= \Phi(C) + C^{\alpha-1}\int_1^n \frac{1}{s}\,ds = \Phi(C) + C^{\alpha-1}\log(n).\end{aligned}$$

Por lo tanto, si n es suficientemente grande, vemos que no es posible la existencia de una constante C, que no dependa de n, tal que

$$\int_{[0,1]} \Psi(f_n) \leq C + C \int_{[0,1]} \Phi(C\, M_\alpha^- f_n) \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

2.6. Desigualdades en norma

Terminamos el capítulo con la siguiente proposición que nos muestra que las desigualdades modulares implican desigualdades en norma. Y por lo tanto, los resultados de este capítulo nos permiten obtener acotación entre espacios de Orlicz cuando estemos considerando norma de Luxemburg o cualquier otra equivalente.

Proposición 2.4. *Sea T un operador homogéneo positivo y supongamos que Ψ y Φ tienen un tipo inferior positivo en el infinito. Si T satisface la desigualdad modular*

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\, d\mu \leq C + C \int_\Omega \Psi(C\,|f|)\, d\mu,$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$ entonces, existe una constante C tal que

$$\|Tf\|_\Phi \leq C\,\|f\|_\Psi \qquad \textit{para toda } f \in L^\Psi(\Omega).$$

Demostración. Sea f tal que $\|f\|_\Psi \leq \frac{1}{C}$. Por la Proposición 1.2 y la propiedad II del funcional $\|\cdot\|_\Phi$ en la Proposición 1.3, resulta, $\int_\Omega \Psi(C|f|)\, d\mu \leq 1$. Por consiguiente,

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\, d\mu \leq 2C.$$

Como Φ tiene un tipo inferior positivo en el infinito, existe $\gamma > 0$, D y t_0 tal que, si $\lambda > 1$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi\left(\frac{|Tf|}{\lambda}\right) d\mu &\leq \int_{\{|Tf|\leq t_0\}} \Phi\left(\frac{|Tf|}{\lambda}\right) d\mu + \frac{D}{\lambda^\gamma}\int_{\{|Tf|>t_0\}} \Phi(|Tf|)\, d\mu \\ &\leq \Phi\left(\frac{t_0}{\lambda}\right)\mu(\Omega) + \frac{D}{\lambda^\gamma}\int_\Omega \Phi(|Tf|)\, d\mu \\ &< 1,\end{aligned}$$

para λ suficientemente grande, ya que Φ es continua en 0. De (2.6) y la definición de la norma de Luxemburg, resulta

$$\|Tf\|_\Phi \leq \lambda.$$

Finalmente, si f es una función cualquiera en $\mathfrak{D}$, como T es homogéneo positivo, tenemos

$$\frac{\|Tf\|_\Phi}{\lambda\, C\,\|f\|_\Psi} = \frac{\left\|T\left(\frac{f}{C\,\|f\|_\Psi}\right)\right\|_\Phi}{\lambda} \leq \frac{\lambda}{\lambda} = 1.$$

□

Podemos presentar entonces las versiones en norma de los teoremas de interpolación.

Teorema 2.11. *Sea T un operador sublineal de tipo débil (p,p) con $p \geq 1$, y tipo fuerte (∞,∞) y supongamos que Ψ y Φ tienen un tipo inferior positivo en el infinito. Si para cierta constante C, las funciones a y b satisfacen la condición*

$$t^{p-1}\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\,ds \leq C\,b(C\,t) \qquad \textit{para todo } t \geq 1,$$

entonces, T es acotado de $L^\Psi(\Omega)$ en $L^\Phi(\Omega)$, esto es, existe C tal que

$$\|Tf\|_\Phi \leq C\|f\|_\Psi \qquad \textit{para toda } f \in L^\Psi(\Omega).$$

La condición sobre las funciones a y b de este teorema es óptima, ya que considerando el operador $\mathcal{M}_p$ en el $[0,1]$, se puede probar que es necesaria.

Teorema 2.12. *Sea T un operador sublineal de tipo débil restringido (p,p) con $1 < p < \infty$, y tipo fuerte (∞,∞). Sea $p' = \frac{p}{p-1}$. Si existe una constante C, tal que a y b satisfacen*

$$\sup_{t\geq 1}\left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\,ds\right)^{1/p}\left(\int_t^\infty b(C\,s)^{-p'/p}\,ds\right)^{1/p'} < \infty$$

entonces, T es acotado de $L^\Psi(\Omega)$ en $L^\Phi(\Omega)$, esto es, exite C tal que

$$\|Tf\|_\Phi \leq C\|f\|_\Psi \qquad \textit{para toda } f \in L^\Psi(\Omega).$$

Volveremos sobre desigualdades en norma en el Capítulo 4 donde estudiaremos operadores fraccionarios, y veremos que la condición sobre a y b del Teorema 2.12 son óptimas.

Capítulo 3

Más sobre $\mathcal{M}_p$ y M_α^-

Los Teoremas 2.3 y 2.7 son útiles para estudiar el comportamiento de los operadores $\mathcal{M}_p$ y $M_{1/p}^-$, con $p > 1$, cerca del espacio L^p, que es el extremo donde no hay acotación fuerte, logrando de esta manera, más información de la que se obtendría con los teoremas de interpolación 1.2 y 1.3. En la Sección 3.1 estudiamos aspectos del comportamiento de cada operador.

En la secciones 3.2 y 3.3 tratamos desigualdades modulares con pesos para los operadores de promedios p y promedios Cesàro. Encontramos que las condiciones en las funciones de crecimiento son las mismas que en el caso de la medida de Lebesgue.

Todos los resultados obtenidos en este capítulo para M_α^- también son válidos para M_α^+, con los cambios correspondientes.

3.1. Comparación

El Teroema 1.2, nos permite asegurar que $\mathcal{M}_p$, es acotado de L^q en L^q para todo $q > p$, por lo tanto, tenemos desigualdades modulares (Ψ, Ψ) para $\Psi(t) = t^q$. De acuerdo con el Teorema 2.3 podemos estudiar desiguldades modulares (Ψ, Φ) verificando las condición (2.6). Encontramos entonces, que desiguadades modulares (Ψ, Ψ) no son ciertas cuando estamos en dominios demasiado cercanos a L^p. Por ejemplo, podemos tomar $\Psi(t) = [t\log(t)]^p$. Para el operador $M_{1/p}^-$ tenemos la misma situación.

Los operadores $\mathcal{M}_p$ y $M_{1/p}^-$ no tienen el mismo comportamiento cerca del L^p. Por ejemplo, si $\Psi(t) = t^p\log(t)$ y $\Phi(t) = t^p$, el operador $\mathcal{M}_p$ satisface la desigualdad modular (Ψ, Φ), sin embargo, el operador $M_{1/p}^-$ no.

De esta manera, surgen naturalmente algunas preguntas:

(a) Para $q > p$, sabemos que $\mathcal{M}_p$ aplica L^q en L^q. ¿Cuáles son todas las funciones crecientes b tales que $\mathcal{M}_p$ aplica L^Ψ en sí mismo?

(b) ¿Cuáles son las funciones crecientes b tales que $M_{1/p}^-$ aplica L^Ψ en sí mismo?

(c) Ya que las condiciones (2.6) y (2.14) no son equivalentes, para cuáles b, los operadores $\mathcal{M}_p$ y $M_{1/p}^-$ aplican L^Ψ en el mismo L^Φ? Esto es, cuándo los operadores tienen el mismo comportamiento?

A continuación, presentaremos algunos hechos sobre funciones reales que nos serán de gran ayuda para dar respuesta a estos interrogantes (ver [13], p.6, y [17], p.131).

Lema 3.1. *Sea b una función no-negativa y no-decreciente definida en el $[0,\infty)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) *Existe una constante C tal que*

$$\int_t^\infty b^{-p'/p} \leq C\, t b^{-p'/p}(t) \tag{3.1}$$

para todo $t \geq 1$.

(II) *Existe una constante C tal que*

$$\int_1^t \frac{b(s)}{s^p}\, ds \leq C\, t^{1-p}\, b(t) \tag{3.2}$$

para todo $t \geq 1$.

(III) *exiten constantes C y $\gamma > 1$ tales que*

$$b^{-p'/p}(s\,t) \leq C\, s^{-\gamma} b^{-p'/p}(t),$$

para todo $s \geq 1$ y $t \geq 1$.

(IV) *Existen constantes C y $\eta > p-1$ tales que*

$$b(s\,t) \leq C\, s^\eta b(t) \tag{3.3}$$

para todo $0 \leq s \leq 1$ y $st \geq 1$, es decir, b tiene un tipo inferior en el infinito.

Demostración del Lema 3.1. La equivalencia entre (III) y (IV) es trivial. Para ver que (III) implica (I), sea $t \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}\int_t^\infty b^{-p'/p}(s)\, ds &= t \int_1^\infty b^{-p'/p}(tr)\, dr \\ &\leq C\, t b^{-p'/p}(t) \int_1^\infty r^{-\gamma}\, dr \\ &= \frac{C}{1+\gamma} t b^{-p'/p}(t)\end{aligned}$$

Probemos que (I) implica (III). Sea $t \geq 1$ y $s \geq 1$. Si llamamos $h = b^{-p'/p}$, por la condición (I), tenemos

$$\frac{h(r)}{\int_r^\infty h} \geq \frac{1}{C\, r},$$

para todo $r > 1$. Primero, supongamos $s > 2$. Integrando entre t y $st/2$,

$$\log\left(\frac{\int_t^\infty h}{\int_{st/2}^\infty h}\right) \geq \frac{\log(s/2)}{C}$$

y tomando la exponencial en ambos lados de la desigualdad, obtenemos

$$\int_t^\infty h \geq (s/2)^{1/C} \int_{st/2}^\infty h.$$

Teniendo en cuenta que h es no-creciente, y las desigualdades (3.1) y (3.1),

$$\begin{aligned} ts^{1+1/C}\, h(s\,t) &\leq 2s^{1/C} \int_{st/2}^\infty h \\ &\leq 2^{1+1/C} \int_t^\infty h \\ &\leq 2^{1+1/C} C\, t\, h(t). \end{aligned}$$

Entonces, para $s > 2$,

$$h(s\,t) \leq 2^{1+1/C} C\, s^{-(1+1/C)}\, h(t).$$

Si en cambio, $1 \leq s < 2$, como h es no-creciente,

$$h(s\,t) \leq h(t) \leq 2^{1+1/C} s^{-(1+1/C)}\, h(t).$$

Ahora, probaremos la equivalencia entre (II) y (IV).

Supongamos que vale (IV). Sea $t \geq 1$, como $\eta > p - 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{b(s)}{s^p}\, ds &= \int_1^t \frac{b(\frac{s}{t} t)}{s^p}\, ds \\ &\leq C\, t^{-\eta}\, b(t) \int_1^t s^{\eta - p}\, ds \\ &= \frac{C}{\eta + 1 - p}\, b(t)\, t^{1-p}. \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos (II) y sea $0 \leq s \leq 1$ y $st \geq 1$. De la desigualdad (3.2), obtenemos

$$\frac{b(u)/u^p}{\int_1^r \frac{b(u)}{u^p}\, ds} \leq \frac{1}{C\, r}$$

y, de la misma manera que en la prueba de que (I) implica (III), tenemos para $0 \leq s < 1/2$, integrando entre $2ts$ y t,

$$\log \left(\frac{\int_1^t \frac{b(u)}{u^p}\, du}{\int_1^{2st} \frac{b(u)}{u^p}\, du} \right) \geq \frac{\log(1/2s)}{C},$$

luego, tomando la exponencial en los dos lados de la desigualdad,

$$\int_1^{2st} \frac{b(u)}{u^p}\, du \leq 2^{1/C} s^{1/C} \int_1^t \frac{b(u)}{u^p}\, du$$

y por lo tanto, usando (3.2) nuevamente,

$$\begin{aligned}
b(s\,t) &= \frac{(s\,t)^{p-1}}{(p-1)(1-2^{1-p})}\, b(s\,t) \int_{st}^{2st} \frac{1}{u^p}\, du \\
&\leq \frac{(s\,t)^{p-1}}{(p-1)(1-2^{1-p})} \int_{st}^{2st} \frac{b(u)}{u^p}\, du \\
&\leq \frac{2^{1/C}}{(p-1)(1-2^{1-p})} t^{p-1}\, s^{p-1+1/C} \int_1^t \frac{b(u)}{u^p}\, du \\
&\leq \frac{C\,2^{1/C}}{(p-1)(1-2^{1-p})} s^{p-1+1/C} b(t).
\end{aligned}$$

Si $1/2 < s \leq 1$, dado que b es creciente,

$$b(s\,t) \leq 2^{p-1+1/C} s^{p-1+1/C}\, b(t)$$

y con esto, completamos la demostración. □

Los siguientes corolarios 3.2 y 3.3 dan respuestas a las preguntas (a), (b). Son consecuencia directa de los Teoremas 2.3 y 2.7, y del Lema 3.1.

Corolario 3.2. *Existe una constante C tal que*

$$\int_0^1 \Psi(|\mathcal{M}_p f(x)|)\, dx \leq C + C \int_0^1 \Psi(C\,|f(x)|)\, dx\,,$$

para toda $f \in \mathfrak{M}([0,1])$ si, y sólo si, Ψ tiene un tipo inferior en el infinito mayor que p.

Corolario 3.3. *Existe una constante C tal que*

$$\int_0^1 \Psi(|M_\alpha^- f(x)|)\, dx \leq C + C \int_0^1 \Psi(C\,|f(x)|)\, dx\,,$$

para toda $f \in \mathfrak{M}([0,1])$ si, y sólo si, Ψ tiene un tipo inferior en el infinito mayor que p.

Para contestar la pregunta (c), establecemos el siguiente corolario.

Corolario 3.4. *Sea Ψ una función de crecimiento tal que $t^{p-1}b(t)$ es creciente en $t > 1$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) *Para toda Φ, $\mathcal{M}_p$ satisface la desigualdad modular* (2.8) *si, y sólo si, $M_{1/p}^-$ satisface la desiguadad modular* (2.24).

(II) *Ψ tiene un tipo inferior en el infinito mayor que p.*

Demostración. Para probar que (I) implica (II), fijemos Ψ y supongamos que para toda Φ, si $\mathcal{M}_p$ satisface la desigualdad modular (Ψ, Φ), entonces $M_{1/p}^-$ también. Podemos suponer, sin perder generalidad, que b' existe (si b no es diferenciable, siempre podemos encontrar una función equivalente que sí lo sea). Como $t^{1-p}b(t)$ es creciente tiene derivada positiva igual a

$$\frac{b'(t)}{t^{p-1}} - (p-1)\frac{b(t)}{t^p}$$

para todo $t > 1$ y por lo tanto la función,

$$a(t) = \begin{cases} [b'(1) - (p-1)b(1)]\, t & \text{para } 0 < t \leq 1, \\ tb'(t) - (p-1)b(t) & \text{para } t > 1, \end{cases}$$

es positiva, continua y

$$\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\, ds = t^{1-p}\, b(t) - b(1). \tag{3.4}$$

Entonces, como $t^{1-p}\, b(t) - b(1) \leq t^{1-p}\, b(t)$, tenemos que a y b satisfacen la condición (2.6). Por el Teorema 2.3 tenemos que $\mathcal{M}_p$ satisface la desigualdad modular (Ψ, Φ), y por hipótesis, $M^-_{1/p}$ también. Entonces, el Teorema 2.7 nos dice que vale (2.14), esto es, existe una constante C tal que para todo $t > 1$

$$\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\, ds \leq \left(\int_t^\infty b(C\, s)^{-p'/p}\, ds\right)^{-p/p'}. \tag{3.5}$$

Nuevamente, por ser $t^{1-p}b(t)$ creciente, tenemos que existe una constante C_1 tal que para todo $t > C_1$

$$t^{1-p}\, b(t) > 2\, b(1),$$

Por consiguiente, de (3.4) y (3.5) tenemos

$$\frac{b(t)}{2t^{p-1}} \leq C^{p/p'} \left(\int_{t/C}^\infty b(s)^{-p'/p}\, ds\right)^{-p/p'}$$

para todo $t > C_1$. Esto implica que si tomamos $C_2 = \max\{C, C_1\}$, entonces se satisface (3.1) con $b(C_2 t)$ en lugar de $b(t)$. Finalmente, por el Lema 3.1 resulta que $C_2\Psi(C_2 t)$ tiene un tipo inferior en el infinito mayor que p y por lo tanto, también Ψ.

Por otra parte, si suponemos que Ψ tiene un tipo inferior en el infinito mayor que p, por el Lema 3.1, tenemos que vale (3.1), y por lo tanto, la desigualdad (2.6) implica (2.14) y luego, una desiguadad modular (Ψ, Φ) para $\mathcal{M}_p$, implica la misma para $M^-_{1/p}$. Dado que la desigualdad (2.14) es más fuerte que la desigualdad (2.6), usando los Teoremas 2.3 y 2.7, una desigualdad modular (Ψ, Φ) para $M^-_{1/p}$ siempre implica la misma desiguadad para $\mathcal{M}_p$. $\square$

3.2. Desigualdades con pesos

Los resultados obtenidos para los operadores $\mathcal{M}_p$ y M^-_α en el capítulo anterior pueden ser generalizados cuando consideramos una medida inducida por un peso. Para no dificultar la notación, trabajaremos en el intervalo $[0, 1]$, pero no hay dificultad en extender los resultados a un intervalo cualquiera I de la recta.

Llamaremos *peso* en Ω a toda función medible y no negativa $w:\Omega\mapsto\mathbb{R}$. Dado un peso w en Ω y una función de crecimiento Ψ, podemos introducir la siguiente generalización de espacio de Orlicz: el *Espacio de Orlicz pesado*, definido como

$$L^\Psi(\Omega,w)=\{f\in\mathfrak{M}(\Omega):\int_\Omega\Psi(\epsilon\,|f|)\,w\,d\mu<\infty\text{ para algún }\epsilon>0\}.$$

Un peso w definido en el intervalo $[0,1]$ con la medida de Lebesgue, se dice que está en $A_1([0,1])$ si existe una constante C tal que para todo intervalo $I\subset[0,1]$

$$\frac{1}{|I|}\int_I w\leq C\,\operatorname*{ínf}_I w.$$

Se sabe que $A_1([0,1])$ son los pesos que caracterizan el tipo $(1,1)$ de la maximal M en el $[0,1]$ (Ver por ejemplo [22]), y como $\mathcal{M}_pf=(M|f|^p)^{1/p}$, vemos que $A_1([0,1])$ también caracteriza el tipo débil (p,p) de $\mathcal{M}_p$. El siguiente teorema establece cuáles son los posibles pares a y b, para los cuales el operador $\mathcal{M}_p$ satisface la desigualdad modular (Ψ,Φ). De hecho, resulta que la condición sobre a y b es la misma que para el caso $w=1$.

Teorema 3.5. *Sea w un peso en $A_1([0,1])$. Existe una constante C' tal que*

$$\int_0^1\Phi(|\mathcal{M}_pf(x)|)\,w(x)\,dx\leq C'+C'\int_0^1\Psi(C'\,|f(x)|)\,w(x)\,dx\tag{3.6}$$

para toda $f\in\mathfrak{M}([0,1])$ si, y sólo si, se satisface (2.6).

Del teorema anterior y el Teorema 2.3 se desprende el siguiente corolario.

Corolario 3.6. *Si $\mathcal{M}_p$ satisface* (3.6) *con $w=1$, entonces satisface* (3.6) *para todo w en A_1.*

Demostración del Teorema 3.5. Supongamos que se satisface (2.6). Como w está en $A_1([0,1])$, el operador $\mathcal{M}_p$ es de tipo débil (p,p), y estamos dentro de las hipótesis del Teorema 2.2. Por lo tanto, existe una constante C tal que la desigualdad (3.6) se satisface.

Veamos ahora que (2.6) es consecuencia de (3.6). Usaremos la notación $w(E)=\int_E w$ para cualquier conjunto medible E. Sin perder generalidad, podemos suponer que $w([0,1])=1$, y que el 0 es un punto de Lebesgue de w con $w(0)>0$. Sea $t\geq1$ fijo, $y_t\in[0,1]$ tal que $w([0,y_t))=\dfrac{1}{t^p}$ y

$$f_t=t\chi_{[0,x_t)},$$

con $x_t=\max\{y_t,\dfrac{1}{t^p}\}$. Como

$$w(\{|f_t|>s\})=\begin{cases}0 & \text{si } s\geq t\\ w([0,x_t)) & \text{si } 0<s<t\end{cases}$$

tenemos

$$\int_0^1\Psi(|f(x)|)w(x)\,dx=\int_0^\infty b(s)w(\{|f_t|>s\})\,ds\leq w([0,x_t))\,t\,b(t).$$

Si $x_t = y_t$,

$$w([0,x_t)) = w([0,y_t)) = \frac{1}{t^p},$$

y en el caso $x_t = \dfrac{1}{t^p}$, podemos usar que w está en $A_1([0,1])$ y entonces

$$w([0,x_t)) \leq \frac{1}{t^p} w([0,\frac{1}{t^p}])\, t^p \leq \frac{1}{t^p} \operatorname{ínf}\{0 \leq x \leq 1/t^p :\ w(x)\} \leq \frac{w(0)}{t^p}.$$

Por otra parte, dado que

$$\mathcal{M}_p f_t(x) = \begin{cases} t & \text{si } x \in [0,x_t] \\ \dfrac{t x_t^{1/p}}{x^{1/p}} & \text{si } x \in (x_t, 1], \end{cases}$$

la distribución de $\mathcal{M}_p f_t$ con respecto a w está dada por

$$w(\{\mathcal{M}_p f_t > s\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq s \\ w([0, \dfrac{t^p x_t}{s^p}]) & \text{si } t x_t^{1/p} < s < t \\ 1 & \text{if } 0 < s < t x_t^{1/p}, \end{cases}$$

y luego,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(\mathcal{M}_p f_t(x)) w(x)\, dx &= \int_0^\infty a(s) w(\{\mathcal{M}_p f_t > s\})\, ds \\ &\geq \int_1^t a(s) w([0, \frac{t^p x_t}{s^p}])\, ds \\ &\geq \int_1^t a(s) w([0, \frac{1}{s^p}])\, ds \\ &\geq \operatorname{ínf}\left\{ 0 \leq x \leq 1 :\ \frac{w([0,x])}{x} \right\} \int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\, ds. \end{aligned}$$

Como consecuecia del hecho de que 0 es un punto de Lebesgue de w y $w(0) > 0$, existe un número $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tal que si $x \in [0,\delta)$, tenemos $\dfrac{w([0,x])}{x} > w(0)/2$. Por lo tanto,

$$\operatorname{ínf}\left\{ \frac{w([0,x])}{x} : 0 \leq x \leq 1 \right\} \geq \operatorname{ínf}\{w(0)/2, w([0,\delta])\} > 0$$

y esto completa la demostración. $\square$

En [16] los autores caracterizan los pesos para el tipo débil restringido $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$ de los operadores M_α^- y M_α^+. Para M_α^-, esta clase de pesos llamada $A_1^-([0,1])$, está definida por los pesos w tales que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b w \leq C\, w(a) \qquad \forall 0 \leq a < b \leq 1. \tag{3.7}$$

Para el operador M_α^+, la clase $A_1^+([0,1])$ se define de manera análoga (ver [16]).

Teorema 3.7. *Sea w un peso en $A_1^-([0,1])$, luego, para alguna constante C'*

$$\int_0^1 \Phi(M_\alpha^- f(x))\, w(x)\, dx \le C' + C' \int_0^1 \Psi(C'\, |f(x)|)\, w(x)\, dx \tag{3.8}$$

para toda $f \in \mathfrak{M}([0,1])$ si, y sólo si, la condición (2.14) se satisface con $p = 1/\alpha$.

Demostración. Como w está en $A_1^-([0,1])$, el operador M_α^- es simultáneamente de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\alpha)$ y de tipo fuerte (∞, ∞) (ver [16]), del Teorema 2.5 tenemos que (2.14) implica (3.8).

Por otro lado, supongamos que vale (3.8). Supongamos que 0 es un punto de Lebesgue de w y que $w(0) > 0$. Por la desigualdad (3.7), si para algún x, $w(x) = 0$, entonces $w(y) = 0$ para $y > x$. Luego, podemos suponer $w(x) > 0$ en casi todo punto. Sea $g : [0,1] \mapsto [0,1]$ definida por

$$g(x) = w([0,x]). \tag{3.9}$$

Como $w(x) > 0$ en casi todo punto, tenemos que g es estrictamente creciente y por lo tanto g^{-1} es una función bien definida con dominio e imagen iguales al intervalo $[0,1]$. Además, por la desigualdad (3.7), tenemos

$$g(x) = w([0,x]) \le w(0)x \tag{3.10}$$

y

$$g^{-1}(x) \ge \frac{x}{w(0)}. \tag{3.11}$$

Supongamos primero que b tiene la propiedad

$$\int_1^\infty b(s)^{-p'/p}\, ds < \infty. \tag{3.12}$$

Sea $t \ge 1$ fijo, y definimos para $s > 0$,

$$h_t(s) = A_t\, b(C\, s)^{-p'}$$

con

$$A_t = w(0) \left[t\, b(C\, t)^{-p'/p} + \int_t^\infty b(C\, s)^{-p'/p}\, ds \right]^{-p},$$

y $C > (C')^2$ tal que $\int_1^\infty b(C\, s)^{-p'/p} < (C')^{-p'/p}$. Observemos que b es creciente, $\lim_{s\to\infty} b(s) = \infty$, h_t es decreciente y $\lim_{s\to\infty} h_t(s) = 0$; luego, $h_t^{-1}(r)$ es una función bien definida para $r > 0$.

Consideremos ahora $f_t \in \mathfrak{M}([0,1])$ definida por

$$f_t(x) = h_t^{-1}(g(x))\chi_{(0,y_t)}(x),$$

con $y_t = \min\{g^{-1}(h_t(t)), 1\}$. La distribución de f_t es, para $s > 0$,

$$\begin{aligned} w(\{|f_t| > s\}) &= w(\{x \in (0,1] :\ f_t(x) > s\}) \\ &= w(\{x \in (0,1] :\ h_t^{-1}(g(x)) > s \text{ and } x < y_t\}) \\ &= w(\{x \in (0,1] :\ g(x) < h_t(s) \text{ and } x < y_t\}) \\ &= \min\{h_t(s), h_t(t), 1\}. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior, y del hecho de que b es creciente, tenemos

$$\begin{aligned} C' \int_0^1 \Psi(C'\,|f_t(x)|)w(x)\,dx &= C'^2 \int_0^\infty b(C'\,s)w(\{|f_t| > s\})\,ds \\ &\le C\left[h_t(t)\int_0^t b(C\,s)\,ds + \int_t^\infty b(C\,s)h_t(s)\,ds\right] \\ &\le C\left[t\,b(C\,t)h_t(t) + \int_t^\infty b(C\,s)h_t(s)\,ds\right] \\ &= C A_t\left[t\,b(C\,t)^{-p'/p} + \int_t^\infty b(C\,s)^{-'p/p}\,ds\right] \\ &\le C\,w(0)\left[\int_t^\infty b(C\,s)^{-'p/p}\,ds\right]^{-p/p'}. \end{aligned}$$

Luego, por la elección de C,

$$C' + C'\int_0^1 \Psi(C'\,|f_t(x)|)w(x)\,dx \le (1 + w(0))\,C\left[\int_t^\infty b(C\,r)^{-p'/p}\,dr\right]^{-p/p'}. \tag{3.13}$$

Por otra parte, veremos que

$$w(\{M_\alpha^- f_t > s\}) \ge \frac{c_0}{s^p} \quad \text{para todo } s \in (1, t), \tag{3.14}$$

para cierta constante c_0 dependiente sólo de w. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi(|M_\alpha^- f_t(x)|)w(x)\,dx &= \int_0^\infty a(s)w(\{M_\alpha^- f_t > s\})\,ds \\ &\ge c_0 \int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\,ds. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Luego, de las desigualdades (3.15) y (3.13), obtenemos

$$\begin{aligned} c_0 \int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\,ds &\le \int_0^1 \Phi(|M_\alpha^- f_t(x)|)w(x)\,dx \\ &\le C' + C'\int_0^1 \Psi(C'\,|f_t(x)|)w(x)\,dx \\ &\le (1 + w(0))\,C\left[\int_t^\infty b(C\,r)^{-p'/p}\,dr\right]^{-p/p'}. \end{aligned}$$

Como C y c_0 no dependen de t, esto es (2.14).

Queda probar la desigualdad (3.14). Consideremos el operador $\mathcal{H}_p$ con $p \ge 1$ definido en (2.16).

Como $\mathcal{H}_p f(x) \le M_\alpha^- f(x)$ para toda f en $\mathfrak{M}([0,1])$ y todo x en el $[0,1]$, basta probar (3.14) par $\mathcal{H}_p$ en lugar de M_α^-. Dado que $\lim_{s\to\infty} h_t(s) = 0$, tenemos $\lim_{x\to 0} f_t(x) = \infty$, y entonces $\lim_{x\to 0} \mathcal{H}_p f_t(x) = \infty$ (para cualquier función decreciente h, $\mathcal{H}_p h \ge h$). Además,

$\mathcal{H}_p f_t$ es continua y decreciente en el $(0,1]$. Consecuentemente, la imagen de la $\mathcal{H}_p f_t$ es la semirrecta $[\mathcal{H}_p f_t(1), \infty)$. Para los números s tales que $\mathcal{H}_p f_t(1) < s < t$, tenemos

$$w(\{x : \ \mathcal{H}_p f_t(x) > s\}) = w([0, x_s)),$$

donde x_s es un punto del $(0,1]$ tal que

$$s = \mathcal{H}_p f_t(x_s) = \frac{1}{p\, x_s^{1/p}} \int_0^{x_s} f_t(x) x^{1/p-1}\, dx.$$

Por lo tanto, $x_s = \left[\dfrac{1}{p\, s} \displaystyle\int_0^{x_s} f_t(x) x^{1/p-1}\, dx\right]^p$.

Dado que $\mathcal{H}_p f_t \geq f_t$, la función f_t es decreciente, el número $t > s$ y se satisface la desigualdad (3.11), entonces

$$x_s \geq f_t^{-1}(t) = g^{-1}(h_t(t)) \geq \frac{1}{w(0)} h_t(t).$$

Por la definición de g en la fórmula (3.10) y como h_t^{-1} es una función decreciente,

$$f_t(x) \geq h_t^{-1}(g(x)) \geq h_t^{-1}(w(0)x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_s} f_t(x) x^{1/p-1}\, dx &\geq \int_0^{\frac{h_t(t)}{w(0)}} h_t^{-1}(w(0)x) x^{1/p-1}\, dx \\
&= \frac{1}{w(0)^{1/p}} \int_0^{(h_t(t))^{1/p}} h_t^{-1}(y^p)\, dy \\
&= \frac{1}{w(0)^{1/p}} \left[t (h_t(t))^{1/p} + \int_t^\infty (h_t(r))^{1/p}\, dr \right] \\
&= \left(\frac{A_t}{w(0)}\right)^{1/p} \left[t\, b(C\, t)^{-p'/p} + \int_t^\infty b(C\, r)^{-p'/p}\, dr \right] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Si $\mathcal{H}_p f_t(1) < s < t$, tenemos $x_s \geq \dfrac{1}{(p\, s)^p}$. Por lo tanto,

$$w([0, x_s)) \geq w([0, 1/(p\, s)^p]) = \frac{\int_0^{1/(p\, s)^p} w}{|[0, 1/(p\, s)^p]|} \frac{1}{(p\, s)^p} \geq \frac{c_1}{(p\, s)^p},$$

donde $c_1 = \text{ínf}\left\{0 \leq x \leq 1 : \dfrac{w([0,x])}{x}\right\}$ es un número positivo (de la misma manera que vimos en la demostración del Teorema 3.5). Si, en cambio, $1 < s < \mathcal{H}_p f_t(1)$, es obvio que

$$w(\{\mathcal{H}_p f_t > s\}) = 1 > \frac{1}{s^p}.$$

Consecuentemente,

$$w(\{\mathcal{H}_p f_t > s\}) \geq \frac{c_0}{s^p},$$

con $c_0 = \text{mín}\{1, c_1\}$.

Para finalizar la prueba del este teorema, resta ver el caso en que

$$\int_1^\infty b(s)^{-p'/p}\,ds = \infty.$$

En esta situación, el operador $\mathcal{H}_p$ no puede satisfacer la desigualdad modular (3.8). Consideremos la función

$$f(x) = h^{-1}(g(x))\chi_{[0,1]}(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } [0,1],$$

donde g es la función definida en (3.9) y

$$h(t) = \frac{K\,b(t)^{-p'}}{\left(\int_{1/2}^t b^{-p'/p}\,ds\right)^p}\ , \ \text{ para } t \geq 1,$$

con K tal que $h(1) = 1$. Notemos que h es decreciente, y entonces f es una función bien definida, perteneciente a $\mathfrak{M}([0,1])$.

Primero, veamos que f está $L^\Psi([0,1])$. Como $\int_1^\infty b^{-p'/p} = \infty$ y la función $b^{-p'/p}$ es decreciente, existe una sucesión de números $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\int_1^{x_n} b^{-p'/p} = n$ y $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si tomamos $x_0 = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K}\int_1^\infty b(s)\,h(s)\,ds &= \int_1^\infty \frac{b(s)^{-p'/p}}{\left(\int_{1/2}^s b^{-p'/p}\right)^p}\,ds \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{b(s)^{-p'/p}}{\left(\int_{1/2}^s b^{-p'/p}\right)^p}\,ds \\
&\leq \int_1^{x_1} \frac{b(s)^{-p'/p}}{\left(\int_{1/2}^1 b^{-p'/p}\right)^p}\,ds + \sum_{n=1}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{b(s)^{-p'/p}}{\left(\int_1^{x_n} b^{-p'/p}\right)^p}\,ds.
\end{aligned}$$

El primer término de la última expersión está acotado por

$$\frac{1}{\left(\int_{1/2}^1 b^{-p'/p}\right)^p} < \infty$$

y el segundo por

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\int_1^{x_{n+1}} b^{-p'/p} - \int_1^{x_n} b^{-p'/p}}{\left(\int_1^{x_n} b^{-p'/p}\right)^p} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty.$$

Como para $s > 1$, $w(\{|f| > s\}) = h(s)$, resulta que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Psi(|f(x)|)\,w(x)\,dx &= \int_0^\infty b(s)w(\{|f| > s\})\,ds \\
&\leq \int_0^1 b(s)\,ds + \int_1^\infty b(s)\,h(s)\,ds < \infty.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\mathcal{H}_p f$ no está en $L^\Phi([0,1],v)$, más aún, mostraremos que $\mathcal{H}_p f(x)=\infty$ para todo $x\in[0,1]$. Como $\mathcal{H}_p f$ es decreciente, es suficiente probar que $\mathcal{H}_p f(1)=\infty$. De hecho,

$$\begin{aligned}\frac{1}{K^{1/p}}\mathcal{H}_p f(1) &= \frac{1}{pK^{1/p}}\int_0^1 h^{-1}(g(r))r^{1/p-1}\,dr\\ &= \frac{p}{K^{1/p}}\int_0^1 h^{-1}(g(t^p))\,dt\\ &\geq \frac{1}{K^{1/p}}\int_1^\infty \left[g^{-1}(h(r))\right]^{1/p}\,dr\end{aligned}$$

y de la desigualdad (3.11),

$$\begin{aligned}\frac{1}{K^{1/p}}\int_1^\infty \left[g^{-1}(h(r))\right]^{1/p}\,dr &\geq \frac{1}{(w(0)K)^{1/p}}\int_1^\infty h(r)^{1/p}\,dr\\ &= \frac{1}{w(0)^{1/p}}\int_1^\infty \frac{b(s)^{-p'/p}}{\int_{1/2}^s b^{-p'/p}}\,ds\,.\end{aligned}$$

Finalmente, resulta

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{b(s)^{-p'/p}}{\int_{1/2}^s b^{-p'/p}}\,ds &= \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{b(s)^{-p'/p}}{\int_{1/2}^s b^{-p'/p}}\,ds\\ &\geq \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{b(s)^{-p'/p}}{\int_{1/2}^{x_{n+1}} b^{-p'/p}}\,ds\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{\int_1^{x_{n+1}} b^{-p'/p}-\int_1^{x_n} b^{-p'/p}}{\int_{1/2}^1 b^{-p'/p}+\int_1^{x_{n+1}} b^{-p'/p}}\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\int_{1/2}^1 b^{-p'/p}+1+n}=\infty.\end{aligned}$$

□

3.3. Desigualdades al revés con pesos

Podemos obtener el mismo resultado que en la sección 2.5, pero con un peso en una clase conveniente.

Un peso w está en $A'_\infty([0,1])$ si existe una constante C tal que

$$\sup_I w \leq C\frac{w(2I)}{|I|}$$

para todo intervalo I del $[0,1]$.

Para la demostración del siguiente resultado ver [18].

Lema 3.8. *w pertenece a A'_∞, si y sólo si, existe una constante C tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{\{|f|>t\}} |f|\, w \le Cw(\{Mf > t\})$$

para toda f y todo $t > \int_{[0,1]} f\, w$.

Por la definición de $\mathcal{M}_p$ para $p \ge 1$, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata del lema anterior.

Lema 3.9. *Si w pertenece a A'_∞, entonces existe una constante C tal que*

$$\frac{1}{t^p}\int_{\{|f|>t\}} |f|^p\, w \le Cw(\{\mathcal{M}_p f > t\})$$

para toda f y todo $t > \left(\int_{[0,1]} f^p\, w\right)^{1/p}$.

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 2.9.

Teorema 3.10. *Sea w un peso en A'_∞. Existe una constante C tal que, para toda f con $\int_{[0,1]} f^p\, w = 1$,*

$$\int_{[0,1]} \Psi(|f|)w \le C + C\int_{[0,1]} \Phi(|\mathcal{M}_p f|)w \tag{3.16}$$

si, y sólo si, a y b satisfacen (2.29).

Demostración. Supongamos que la desigualdad (2.29) se cumple. Sea f una función en $\mathfrak{M}([0,1])$ tal que $\int_{[0,1]} f^p\, w = 1$. Dado que w pertenece a la clase A'_∞, tenemos que existe C independiente de f tal que

$$\begin{aligned} Cw(\{\mathcal{M}_p f > t\}) &\ge \frac{1}{t^p}\int_{\{|f|>t\}} |f|^p\, w \\ &= w(\{|f| > t\}) + \frac{1}{t^p}\int_t^\infty s^{p-1} w(\{|f| > s\})\, ds \\ &\ge \frac{1}{t^p}\int_t^\infty s^{p-1} w(\{|f| > s\})\, ds. \end{aligned}$$

Usando esta desigualdad, de manera análoga al Teorema 2.9, llegamos a

$$\int_{[0,1]} \Psi(|f|)\, w \le \Psi(1) + 2C\int_{[0,1]} \Phi(C\,\mathcal{M}_p f)\, w,$$

y con esto probamos que (2.29) implica (3.16).

Veamos ahora, que (3.16) implica (2.29). Sin perder generalidad, como en la demostración del Teorema 3.5, podemos suponer que 0 es un punto de Lebesgue de w y $w(0) > 1$. Sea $t > 1$, entonces existe $y_t \in [0,1]$ tal que $w([0, y_t)) = \dfrac{1}{t^p}$. Consideremos la función

$$f_t = t\chi_{[0,x_t)},$$

con $x_t = \text{mín}\{y_t, \frac{1}{t^p}\}$. Como

$$w(\{|f_t| > s\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \geq t \\ w([0, x_t)) & \text{si } 0 < s < t, \end{cases}$$

y w está en A'_∞,

$$\begin{aligned} t^p\, w([0, x_t)) &\geq \text{mín}\{1, t^p\, w([0, 1/t^p))\} \\ &\geq \text{mín}\{1, \sup_{x \in [0, 1/2t^p)} w(x)\} \\ &\geq \text{mín}\{1, w(0)\} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(|f(x)|) w(x)\, dx &= \int_0^\infty b(s) w(\{|f_t| > s\})\, ds \\ &= w([0, x_t))\, \frac{t}{2}\, b(t/2) \\ &\geq \frac{t^{1-p}}{2}\, b(t/2). \end{aligned}$$

Por otra parte, si tenemos en cuenta que

$$w(\{\mathcal{M}_p f_t > s\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq s \\ w([0, \frac{t^p x_t}{s^p}]) & \text{si } t x_t^{1/p} < s < t \\ 1 & \text{if } 0 < s < t x_t^{1/p}, \end{cases}$$

como $t^p\, x_t \leq 1$, para $1 < s < t$,

$$\begin{aligned} w(\{\mathcal{M}_p f_t > s\}) &\leq w([0, \frac{t^p x_t}{s^p}]) \\ &\leq w([0, \frac{1}{s^p}]) \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} w(x)\, \frac{1}{s^p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(\mathcal{M}_p f_t(x)) w(x)\, dx &= \int_0^\infty a(s) w(\{\mathcal{M}_p f_t > s\})\, ds \\ &\leq \Phi(1) w([0,1]) + \sup_{x \in [0,1]} w(x) \int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\, ds \\ &\leq \Phi(1) w([0,1]) + w([0,1]) \int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\, ds \end{aligned}$$

y esto completa la demostración. □

Capítulo 4

Interpolación en norma

Hasta ahora consideramos siempre operadores T que conservan los espacios de Lebesgue, esto es, aplican el espacio L^p en sí mismo, dentro de su rango de acotación fuerte. Muchos operadores en análisis, como la maximal fraccionaria y la integral fraccionaria, tienen propiedades de acotación mejores que las anteriores, ya que, en su rango de acotación fuerte, resultan acotados de L^p en espacios L^q con $q > p$. Cuando estamos en medida finita, L^q está contenido en L^p, por lo tanto, tiene sentido decir que mejoran la integrabilidad. Ya que desigualdades modulares del tipo 2.1 no son válidas en este contexto nos concentraremos en estudiar desigualdades en norma de Luxemburg.

Nuestro objetivo es obtener acotación en espacios de Orlicz de ciertos operadores que mejoran, llamados maximales Cesàro fraccionarios, que presentaremos en la Sección 4.1. Para ello, en la Sección 4.2, obtendremos un teorema de interpolación que da desigualdades en en normas de Luxemburg. Casos especiales de este operador son las maximales laterales Cesàro y las maximales laterales fraccionarias. En [9], los autores tratan la maximal fraccionaria de orden entre cero y uno, definida en un conjunto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$, obteniendo resultados de acotación en norma para este operador. En [2], el autor presenta un teorema de interpolación en espacios de Orlicz y obtiene desigualdades en normas de Luxemburg. La hipótesis sobre el operador es que sea de tipo débil restringido en ambos extremos. Si bien estos resultados pueden ser aplicados al operador maximal Cesàro fraccionario que consideraremos, no son óptimos ya que este operador es de tipo fuerte en uno de sus extremos.

4.1. Operadores Cesàro fraccionarios

Sean $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$. Definamos los *operadores maximales laterales Cesàro fraccionarios*, para $f \in \mathfrak{M}([0,1])$, como

$$M^+_{\alpha,\beta}f(x) = \sup_{x<c<1} \frac{\alpha}{(c-x)^\beta} \int_x^c \frac{|f(s)|}{(c-s)^{1-\alpha}} ds,$$

$$M^-_{\alpha,\beta}f(x) = \sup_{0<c<x} \frac{\alpha}{(x-c)^\beta} \int_c^x \frac{|f(s)|}{(s-c)^{1-\alpha}} ds,$$

para todo x en el $[0,1]$.

De la misma manera que los operadores definidos en el Capítulo 2, existen las versiones en $\mathbb{R}$ de estos operadores.

Observemos cuando $\alpha = \beta$ recuperamos los operadores Cesàro de orden α del Capítulo 2. Si $\alpha = 1$ y $0 < \beta < 1$ el operador $M^+_{\alpha,\beta}$ es la versión lateral de la maximal fraccionaria.

Proposición 4.1. *Para $0 < \beta < \alpha < 1$, $M^+_{\alpha,\beta}$ y $M^-_{\alpha,\beta}$ son de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\beta)$ y tipo $(\frac{1}{\alpha-\beta}, \infty)$.*

Demostración. Sea E un conjunto de medida finita. Tomemos $0 \leq x < c \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{(c-x)^\beta}\int_x^c \chi_E(s)(c-s)^{\alpha-1}ds &\leq \frac{\alpha}{(c-x)^\beta}\int_0^\infty \chi_{[0,|E\cap[x,c)|]}(s)s^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{\alpha}{(c-x)^\beta}\int_0^{|E\cap[x,c)|} s^{\alpha-1}ds \\
&= \frac{|E\cap[x,c)|^\alpha}{(c-x)^\beta} \\
&= \left[\frac{\int_x^c \chi_E}{(c-x)^{\beta/\alpha}}\right]^\alpha \\
&\leq \left[\bar{\mathcal{M}}_{1-\frac{\beta}{\alpha}}(\chi_E)(x)\right]^\alpha
\end{aligned}$$

Aquí, $\bar{\mathcal{M}}_{1-\frac{\beta}{\alpha}}$ es la maximal fraccionaria de orden $1-\frac{\beta}{\alpha}$. La primera desigualdad se debe al hecho de que la integral del producto es menor o igual que la integral del producto de las reordenadas (ver Proposición 1.1. Como x y c son arbitrarios,

$$M^+_{\alpha,\beta}(\chi_E)(x) \leq \left[\bar{\mathcal{M}}_{1-\frac{\beta}{\alpha}}(\chi_E)(x)\right]^\alpha \qquad \forall x.$$

La maximal fraccionaria de orden $\bar{\mathcal{M}}_{1-\frac{\beta}{\alpha}}$, por estar acotada por la integral fraccionaria del mismo orden, es de tipo débil $(1, \frac{\alpha}{\beta})$ (ver por ejemplo [21]), entonces

$$\begin{aligned}
|\{M^+_{\alpha,\beta}(\chi_E) > t\}| &\leq |\{\bar{\mathcal{M}}_{1-\frac{\beta}{\alpha}}(\chi_E) > t^{1/\alpha}\}| \\
&\leq \frac{C}{t^{1/\alpha}}\|\chi_E\|_{\alpha/\beta} \\
&= C\left(\frac{\|\chi_E\|_{1/\beta}}{t}\right)^{1/\alpha}
\end{aligned}$$

Para ver que $M^+_{\alpha,\beta}$ es de tipo débil $(\frac{1}{\alpha-\beta}, \infty)$, sea $f \geq 0$ localmente integrable. Sea

$x \in [0,1]$ y $c > x$. Si aplicamos la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{(c-x)^\beta}\int_x^c |f(s)|(c-s)^{\alpha-1}ds \\
&\qquad\leq \frac{\alpha}{(c-x)^\beta}\left[\int_x^c |f(s)|^{\frac{1}{\alpha-\beta}}ds\right]^{\alpha-\beta}\left[\int_x^c (c-x)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha+\beta}}\right]^{1-\alpha+\beta} \\
&\qquad= \frac{\alpha}{(c-x)^\beta}\left[\int_0^{c-x} x^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha+\beta}}\right]^{1-\alpha+\beta}\left[\int_x^c |f(s)|^{\frac{1}{\alpha-\beta}}ds\right]^{\alpha-\beta} \\
&\qquad= \frac{\alpha}{(c-x)^\beta}\left[(c-x)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha+\beta}+1}\right]^{1-\alpha+\beta}\left[\int_x^c |f(s)|^{\frac{1}{\alpha-\beta}}ds\right]^{\alpha-\beta} \\
&\qquad= \alpha\left[\int_x^c |f(s)|^{\frac{1}{\alpha-\beta}}ds\right]^{\alpha-\beta} \\
&\qquad\leq \alpha\|f\|_{\frac{1}{\alpha-\beta}}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|M^+_{\alpha,\beta}f\|_\infty \leq \alpha\|f\|_{\frac{1}{\alpha-\beta}}.$$

De la misma manera se obtienen las estimaciones para $M^-_{\alpha,\beta}$.

□

En términos de los espacios de Lorentz, podemos decir que $M^-_{\alpha,\beta}$ es acotado de $L_{1/\alpha,1}$ en $L_{1/\beta,\infty}$. Veamos que $M^-_{\alpha,\beta}$ no puede aplicar ningún espacio de Lorentz más grande que $L_{1/\alpha,1}$. Esto es, si $q > 1$ entonces, $M^-_{\alpha,\beta}$ no aplica $L_{1/\alpha,q}$ en $L_{1/\beta,\infty}$. En particular, $M^-_{\alpha,\beta}$ no es de tipo débil $(1/\alpha, 1/\beta)$.

Sea

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \log(1/x)}\chi_{(0,1/2)}(x).$$

Esta función pertenece a $L^{1/\alpha,q}$ para $q > 1$, de hecho,

$$\begin{aligned}
\|f\|^q_{1/\alpha,q} =& q\alpha\int_0^\infty [t^\alpha f^*(t)]^q\,\frac{dt}{t} \\
= q\alpha\int_0^{1/2}\frac{dt}{t\log^q(1/t)} < \infty
\end{aligned}$$

Sin embargo, para $0 < x < 1/2$,

$$\begin{aligned}
M^-_{\alpha,\beta}f(x) &\geq \frac{\alpha}{x^\beta}\int_0^x |f(s)|s^{\alpha-1}ds \\
&= \frac{\alpha}{x^\beta}\int_0^x \frac{1}{s\log(1/s)}dt = \infty.
\end{aligned}$$

Y con esto vemos que $M^-_{\alpha,\beta}f$ no puede pertenecer a ningún espacio en donde exijamos que la función no sea infinita en un conjunto de medida positiva, en particular cualquier espacio de Lorentz. La misma conclusión es válida para $M^+_{\alpha,\beta}$.

4.2. Acotación en L^Ψ

El siguiente Teorema de Interpolación nos permitirá obtener acotaciones en norma en espacios de Orlicz de los operadores Cesàro fraccionarios.

Teorema 4.1. *Sea $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ y $T : \mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{M}$, un operador de tipo débil restringindo $(1/\alpha, 1/\beta)$ y de tipo $(\frac{1}{\alpha-\beta}, \infty)$. Supongamos que Ψ y Φ tienen un tipo inferior positivo en el infinito, y que las funciones $b(t)$ y $\frac{t^{1-\alpha+\beta}}{b(t)^{\alpha-\beta}}$ son crecientes. Si para alguna constante C_1, a y b satisfacen*

$$\sup_{t>1} \left(\int_1^{\frac{t^{1-\alpha+\beta}}{b(C_1\, t)^{\alpha-\beta}}} \frac{a(s)}{s^{1/\beta}} ds \right)^\beta \left(\int_t^\infty b(C_1\, s)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} ds \right)^{1-\alpha} < \infty \tag{4.1}$$

luego, existe una constante C_2, tal que

$$\|Tf\|_\Phi \leq C_2 \, \|f\|_\Psi \qquad \textit{para toda } f \in \mathfrak{D}.$$

Demostración. Como el operador T es de tipo fuerte $(\frac{1}{\alpha-\beta}, \infty)$, existe B tal que

$$\|Tf\|_\infty \leq B\|f\|_{\frac{1}{\alpha-\beta}} \qquad \text{para toda } f \in \mathfrak{D}.$$

Supongamos que vale (4.1), entonces, si tomamos C mayor que $2B$, C_1 y el supremo de (4.1), como la función b es creciente, tenemos que para todo $t > 1$,

$$\left(\int_1^{\frac{t^{1-\alpha+\beta}}{b(Ct)^{\alpha-\beta}}} \frac{a(s)}{s^{1/\beta}} ds \right)^\beta \left(\int_t^\infty b(Cs)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} ds \right)^{1-\alpha} < C \tag{4.2}$$

Sea f una función en el dominio de T tal que $\|f\|_\Psi \leq \frac{1}{C}$. Por hitpótesis,

$$\frac{t^{1-\alpha+\beta}}{b(t)^{\alpha-\beta}}$$

es creciente, y entonces la función

$$\frac{t^{1-\alpha+\beta}}{b(Ct)^{\alpha-\beta}}$$

también lo es, luego, tiene una inversa que llamaremos λ.

Sea $f_s = \min\{\lambda(s), |f|\}$, y $f^s = f - f_s$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(|Tf|)d\mu &= \int_0^\infty a(s)\mu_{Tf}(s)ds \\
&\leq \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) a(s)\mu_{Tf}(s)ds \\
&\leq \Phi(1)\mu(\Omega) + \int_1^\infty a(s) \left[\mu_{Tf^s}(s/2) + \mu_{Tf_s}(s/2) \right] ds.
\end{aligned}$$

Para $s>0$, la distribución de la f_s es

$$\mu_{f_s}(t) = \begin{cases} \mu_f(t) & \text{if } 0<t<\lambda(s) \\ 0 & \text{if } t \geq \lambda(s) \end{cases}$$

luego,

$$\begin{aligned} \|Tf_s\|_\infty &\leq B\|f_s\|_{\frac{1}{\alpha-\beta}} \\ &= B\left[\int_0^\infty t^{\frac{1}{\alpha-\beta}-1}\mu_{f_s}(t)dt\right]^{\alpha-\beta} \\ &= B\left[\int_0^{\lambda(s)} t^{\frac{1}{\alpha-\beta}-1}\mu_f(t)dt\right]^{\alpha-\beta} \\ &= B\left[\int_0^{\lambda(s)} \frac{t^{\frac{1}{\alpha-\beta}-1}}{b(Ct)}b(Ct)\mu_f(t)dt\right]^{\alpha-\beta} \\ &\leq \frac{B}{C}\left[\frac{\lambda(s)^{\frac{1}{\alpha-\beta}-1}}{b(C\lambda(s))}\int_\Omega \Psi(C|f|)\right]^{\alpha-\beta} \\ &\leq \frac{s}{2} \end{aligned}$$

Esto implica que $\mu_{Tf_s}(s/2)=0$, para todo $s>0$, y entonces

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)d\mu \leq \Phi(1)\mu(\Omega) + \int_1^\infty a(s)\mu_{Tf_s}(s/2)ds$$

Como el operador T es de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\beta)$, tenemos que existe una constante A tal que, para todo $s>0$,

$$\mu_{Tf^s}(s) \leq A\,\left[\frac{1}{s}\int_0^\infty \mu_{f^s}^\alpha\right]^{1/\beta},$$

además,

$$\mu_{f^s}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0<t<\lambda(s) \\ \mu_f(t+\lambda(s)) & \text{if } t \geq \lambda(s) \end{cases}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty a(s)\mu_{Tf^s}(s/2)ds &\leq A\int_1^\infty a(s)\left[\frac{2}{s}\int_0^\infty \mu_{f^s}^\alpha\right]^{1/\beta} ds \\ &= 2^{1/\beta}A\int_1^\infty a(s)\left[\frac{1}{s}\int_{\lambda(s)}^\infty \mu_f(t)^\alpha dt\right]^{1/\beta} ds. \end{aligned}$$

Ahora, si llamamos

$$h(t) = \left[\int_t^\infty b(Cr)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}dr\right]^{\alpha(1-\alpha)}$$

y

$$g(t) = \mu_f(t)h(t)^{1/\alpha}b(Ct)$$

por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty a(s)\left[\frac{1}{s}\int_{\lambda(s)}^\infty \mu_f^\alpha(t)dt\right]^{1/\beta} ds\\ &= \int_1^\infty a(s)\left[\frac{1}{s}\int_{\lambda(s)}^\infty \frac{g(t)^\alpha}{h(t)b(Ct)^\alpha}dt\right]^{1/\beta} ds\end{aligned}$$

es menor o igual a

$$\int_1^\infty \frac{a(s)}{s^{1/\beta}}\left[\int_{\lambda(s)}^\infty g(t)dt\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\left(\int_{\lambda(s)}^\infty b(Cr)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}h(r)^{-\frac{1}{1-\alpha}}dr\right)^{\frac{1-\alpha}{\beta}} ds. \tag{4.3}$$

Si usamos integración por partes y la desigualdad (4.2),

$$\begin{aligned}\int_{\lambda(s)}^\infty b(Cr)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}h(r)^{-\frac{1}{1-\alpha}}dr &= \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_{\lambda(s)}^\infty b(Cr)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}dr\right)^{1-\alpha}\\ &\le \frac{C}{1-\alpha}\left(\int_1^s \frac{a(r)}{r^{1/\beta}}dr\right)^{-\beta}\end{aligned}$$

y por lo tanto, la expresión (4.3) puede ser acotada por

$$C_3\int_1^\infty \frac{a(s)}{s^{1/\beta}}\left[\int_{\lambda(s)}^\infty g(t)dt\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\left(\int_1^s \frac{a(r)}{r^{1/\beta}}dr\right)^{-(1-\alpha)} ds,$$

con $C_3 = \left(\frac{C}{1-\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{\beta}}$, y la desigualdad integral de Minkowski, nos dice que la última expresión es menor o igual a

$$C_3\left\{\int_1^\infty g(t)\left[\int_1^{\lambda^{-1}(t)} \frac{a(s)}{s^{1/\beta}}\left(\int_1^s \frac{a(r)}{r^{1/\beta}}dr\right)^{-(1-\alpha)} ds\right]^{\beta/\alpha} dt\right\}^{\alpha/\beta},$$

que integrando por partes la integral interior y usando nuevamente la desigualdad (4.2), resulta menor o igual a

$$C_4\left\{\int_1^\infty g(t)\left[\int_t^\infty b(Cr)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}dr\right]^{-(1-\alpha)} dt\right\}^{\alpha/\beta},$$

con $C_4 = C_3\dfrac{C^{\alpha/\beta}}{\alpha}$, y de la definición de g, lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}C_4\left[\int_1^\infty \mu_f(t)b(Ct)dt\right]^{\alpha/\beta} &\le C_4\left[\int_\Omega \Psi(Cf)d\mu\right]^{\alpha/\beta}\\ &\le C_4.\end{aligned}$$

Hemos probado que si f es tal que $\|Cf\|_\Psi \leq 1$, entonces

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)d\mu \leq \mu(\Omega)\Phi(1) + 2^{1/\beta}A\,C_4.$$

Finalmente, como Φ tiene un tipo inferior γ, esto es, existe una constante D, tal que

$$\Phi(s\,t) \leq D\,s^\gamma\,\Phi(t)$$

para todo $t > 1$ y $0 < s < 1$, usamos que T es homogéneo positivo, para obtener que si $f \in \mathfrak{D}$ entonces, tomando $C_5 = \text{máx}\{[D(\Psi(1)\mu(\Omega) + 2^{1/\beta}A\,C_4)]^{1/\gamma}, C, 1\}$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi\left(\frac{|Tf|}{C_5^2\|f\|_\Psi}\right)d\mu &\leq \frac{D}{C_5^\gamma}\int_\Omega \Phi\left(\left|T\left(\frac{f}{C_5\|f\|_\Psi}\right)\right|\right)d\mu \\ &\leq \frac{D}{C_5^\gamma}(\Psi(1)\mu(\Omega) + 2^{1/\beta}C_4) \\ &\leq 1\end{aligned}$$

y esto completa la demostración con $C_2 = C_5^2$. □

Nuestro próximo paso será aplicar este teorema al caso de las maximales Cesàro fraccionarias, y probaremos además que para desigualdades en norma, las conclusiones del teorema anterior son óptimas. En consecuencia, en lo que sigue trabajaremos con funciones Ψ y Φ convexas. Comenzamos enunciando y demostrando algunos lemas previos.

Si Ψ es una función de crecimiento con derivada continua y creciente, definimos la *conjugada* de Ψ por

$$\tilde{\Psi}(t) = \sup_{s>0}\{ts - \Psi(s)\}$$

para todo $t > 0$.

Lema 4.2. *Supongamos que a y b son funciones crecientes y continuas. Si el operador $M^-_{\alpha,\beta}$ es acotado de L^Ψ en L^Φ con constante C, entonces*

$$s^{1-\alpha+\beta} \leq CF^{-1}(s)G^{-1}(s) \qquad \textit{para todo } s > 0, \tag{4.4}$$

con

$$F(r) = \frac{1}{\beta}r^{1/\beta}\int_0^r \frac{\Phi(s)}{s}\frac{1}{s^{1/\beta}}ds$$

y

$$G(r) = \frac{1}{1-\alpha}r^{\frac{1}{1-\alpha}}\int_r^\infty \frac{\tilde{\Psi}(s)}{s}\frac{1}{s^{\frac{1}{1-\alpha}}}ds.$$

Demostración. Sea f con $\|f\|_\Psi \leq 1$ y $t > 0$. Dado que $C \geq C\,\|f\|_\Psi \geq \|M^-_\alpha f\|_\Phi$ y

$$\begin{aligned}\left|M^-_\alpha f(x)\right| &\geq \left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x |f(s)|s^{1-\alpha}ds\right| \\ &\geq \left|\frac{\chi_{(t,\infty)}(x)}{x^\beta}\int_0^x |f(s)|s^{\alpha-1}ds\right| \\ &= \left|\frac{\chi_{(t,\infty)}(x)}{x^\beta}\int_0^t |f(s)|s^{\alpha-1}ds\right|\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} C &\geq \left(\int_0^t |f(s)|s^{\alpha-1}ds\right)\left\|\frac{\chi_{(r(t),\infty)}(x)}{x^\beta}\right\|_\Phi \\ &\geq \left(\int_0^\infty |f(s)|\chi_{(0,t)}(s)s^{\alpha-1}ds\right)\left\|\frac{\chi_{(r(t),\infty)}(x)}{x^\beta}\right\|_\Phi. \end{aligned}$$

Esto es cierto para toda f con $\|f\|_\Psi \leq 1$, por lo tanto (Ver [20])

$$\left\|\frac{\chi_{(0,t)}(x)}{x^{\alpha-1}}\right\|_{\tilde{\Psi}}\left\|\frac{\chi_{(t,\infty)}(x)}{x^\beta}\right\|_\Phi \leq C.$$

Luego de un cambio de variables, por la forma de F tenemos

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\chi_{(t,\infty)}(x)}{x^\beta}\right\|_\Phi &= \text{ínf}\left\{\lambda :\ \int_t^\infty \Phi\left(\frac{1}{\lambda x^\beta}\right)dx \leq 1\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{\lambda :\ \frac{1}{\beta\lambda^{1/\beta}}\int_0^{\frac{1}{\lambda t^\beta}} \frac{\Phi(s)}{s^{\frac{1}{\beta}+1}}ds \leq 1\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{\lambda :\ \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\lambda t^\beta}\right)^{1/\beta}\int_0^{\frac{1}{\lambda t^\beta}} \frac{\Phi(s)}{s^{\frac{1}{\beta}+1}}ds \leq \frac{1}{t}\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{\lambda :\ \frac{1}{\lambda t^\beta} \leq F^{-1}(1/t)\right\} \\ &= \frac{1}{t^\beta F^{-1}(1/t)}. \end{aligned}$$

De manera similar obtenemos

$$\left\|\frac{\chi_{(0,t)}(x)}{x^{1-\alpha}}\right\|_{\tilde{\Psi}} = \frac{1}{t^{1-\alpha}G^{-1}(1/t)},$$

y si llamamos $s = 1/t$ tenemos el resultado deseado. □

Lema 4.3. *Sea $1 < p < \infty$. Supongamos que*

$$\int_1^\infty \frac{\tilde{\Psi}(s)}{s^{p+1}}ds < \infty,$$

donde $\Psi(t) = \int_0^t b$, con b creciente y continua. Entonces, la función

$$D(s) = s^p\int_s^\infty \frac{\tilde{\Psi}(s)}{s^{p+1}}ds \tag{4.5}$$

tiene derivada creciente. En particular, satisface la desiguladad

$$\frac{D(s)}{s} \leq D'(s)$$

para todo $s > 0$.

Demostración. La derivada de D es

$$D'(s) = ps^{p-1} \int_s^\infty \frac{\tilde{\Psi}(t)}{t^{p+1}} dt - \frac{\tilde{\Psi}(s)}{s}$$

Si usamos

$$p \int_s^\infty \frac{1}{t^p + 1} dt = \frac{1}{s^p}$$

tenemos

$$\begin{aligned} D'(s) &= ps^{p-1} \int_s^\infty \frac{\tilde{\Psi}(t)}{t^{p+1}} ds - ps^{p-1} \int_s^\infty \frac{1}{t^p+1} dt \tilde{\Psi}(s) \\ &= ps^{p-1} \left(\int_s^\infty \frac{\tilde{\Psi}(t)}{t^{p+1}} ds - \int_s^\infty \frac{1}{t^{p+1}} ds \tilde{\Psi}(s) \right) \end{aligned}$$

Queremos ver que

$$0 \le D''(s) = p(p-1)s^{p-2} \int_s^\infty \frac{\tilde{\Psi}(t)}{t^{p+1}} dt - ps^{p-1} \frac{\tilde{\Psi}(s)}{s^{p+1}} - \frac{\tilde{\Psi}'(s)}{s} + \frac{\tilde{\Psi}(s)}{s^2}$$

esto es lo mismo que

$$p(p-1)s^{p-2} \int_s^\infty \frac{\tilde{\Psi}(t)}{t^{p+1}} dt \ge (p-1) \frac{\tilde{\Psi}(s)}{s^2} + \frac{\tilde{\Psi}'(s)}{s}$$

que es lo mismo que

$$p(p-1)s^p \int_s^\infty \frac{\tilde{\Psi}(t)}{t^{p+1}} dt \ge (p-1)\tilde{\Psi}(s) + s\tilde{\Psi}'(s)$$

□

Lema 4.4. *Sea $1 < p < \infty$. Supongamos que*

$$\int_1^\infty \frac{\tilde{\Psi}(s)}{s^{p+1}} ds < \infty,$$

donde $\Psi(t) = \int_0^t b$, con b creciente y continua. Entonces, la conjugada de la función dada por 4.5, satisface

$$\tilde{D}(s) \le Cs^{p'} \left(\int_{Cs}^\infty \left(\frac{s}{\Psi(s)} \right)^{p-1} ds \right)^{-\frac{1}{p-1}}$$

para cierta constante C.

Demostración. Sea $M(r) = \dfrac{2r}{\Psi^{-1}(r)}$. La función M es creciente, ya que $\dfrac{\Psi(s)}{s}$ crece y $\tilde{\Psi}^{-1}(r) \le M(r)$. Entonces, si $M^{-1}(s) = \inf\{r : M(r) < s\}$, resulta $M^{-1}(s) \le \tilde{\Psi}^{-1}(s)$. Calculando la integral

$$\int_u^\infty \frac{\tilde{\Psi}(t)}{t^{p+1}} dt \ge \frac{1}{p2^p} \int_{\Psi^{-1}(M^{-1}(u))}^\infty \left[\frac{s}{\Psi(s)} \right]^{p-1} ds \tag{4.6}$$

Sea $H(u) = \displaystyle\int_u^\infty \frac{\tilde{\Psi}(s)}{s^{p+1}} ds$. De la definición de función conjugada, tenemos $\Psi^{-1}(s)\tilde{\Psi}^{-1}(s) \leq 2s$ para todo $s > 0$, y entonces

$$\frac{\Psi(2\frac{\tilde{\Psi}(u)}{u})}{\frac{\tilde{\Psi}(u)}{u}} \geq u, \tag{4.7}$$

para todo $u > 0$. Como D y Ψ son funciones con derivada creciente,

$$0 \leq D'(u) = pu^{p-1}H(u) - \frac{\tilde{\Psi}(u)}{u}$$

y $\dfrac{\Psi(s)}{s}$ es creciente en s, resulta de (4.7) y de la definición de M,

$$u \leq \frac{\Psi(2pu^{p-1}H(u))}{pu^{p-1}H(u)} = M(\Psi(2pu^{p-1}H(u))),$$

para todo $u > 0$.

Dado que H es decreciente,

$$1 \leq \frac{H(u)}{H(M(\Psi(2pu^{p-1}H(u))))}$$

para todo $u > 0$,

$$\begin{aligned} u &\leq u \left[\frac{H(u)}{H(M(\Psi(2pu^{p-1}H(u))))}\right]^{p'-1} \\ &= [u^{p-1}H(u)]^{p'-1}[H(M(\Psi(2pu^{p-1}H(u))))]^{-p'+1} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por el Lema 4.3,

$$\frac{D(u)}{u} \leq D'(u),$$

y entonces $u^{p-1}H(u) \leq D'(u)$ para todo $u > 0$, que a su vez implica

$$(D')^{-1}(u) \leq [s^{p-1}H(s)]^{-1}\big|_{s=u} \tag{4.9}$$

para todo u. Reemplazando u por $(D')^{-1}(u)$ en la desigualdad (4.8), y dado que cada factor del producto es una función creciente, la desigualdad (4.9) implica

$$(D')^{-1}(u) \leq u^{p'-1}[H(M(\Psi(2pu)))]^{1-p'} \text{ para todo } u > 0.$$

Dado que $\tilde{D}' = (D')^{-1}$ y

$$\frac{d}{du}[u^{p'}[H(M(\Psi(u)))]^{1-p'}] \geq u^{p'-1}[H(M(\Psi(u)))]^{1-p'} \text{ para todo } u > 0,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{D}(u) &\leq (2p)^{p'}u^{p'}[H(M(\Psi(2pu)))]^{1-p'} \\ &\leq (2p)^{p'}u^{p'}\left(\int_{M(\Psi(2pu))}^\infty \frac{\tilde{\Psi}(t)}{t^{p+1}}dt\right)^{1-p'} \\ &\leq (2p)^{p'}u^{p'}\left(\frac{1}{p2^p}\int_{2pu}\left[\frac{s}{\Psi(s)}\right]^{p-1} ds\right)^{1-p'}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos (4.6). $\square$

Teorema 4.5. *Sea $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ y supongamos que las funciones a y b son crecientes y continuas.*

Existe una constante A tal que

$$\|M^-_{\alpha,\beta} f\|_\Phi \leq A\|f\|_\Psi \qquad \text{para toda } f \in L^\Psi([0,1]),$$

si, y sólo si, a y b satisfacen (4.1). *El mismo resultado es cierto para $M^+_{\alpha,\beta}$.*

Demostración. Para el caso en que $\beta < \alpha$, por la Proposición 4.1 y del Teorema 4.1, tenemos que (4.1) implica la acotación de $M^-_{\alpha,\beta}$. El caso $\alpha = \beta$, es consecuencia del Teorema 2.12 del Capítulo 2.

Para la otra implicación supongamos que $M^-_{\alpha,\beta}$ es acotada de L^Ψ en L^Φ, entonces, por el Lema 4.2 tenemos

$$c\, s^{1-\alpha+\beta} \leq F^{-1}(s) G^{-1}(s)$$

para todo $s > 0$, donde c denota una constante positiva. Del hecho que

$$\tilde{G}^{-1}(s) G^{-1}(s) \leq 2s,$$

tenemos

$$c\, s^{-\alpha+\beta} \leq 2\frac{F^{-1}(s)}{\tilde{G}^{-1}(s)}$$

y si $s = \tilde{G}(t)$,

$$c\, \tilde{G}(t)^{-\alpha+\beta} \leq 2\frac{F^{-1}(\tilde{G}(t))}{t}.$$

Como F es una función creciente, si $C' = 2/c$, resulta

$$F\left(\frac{t}{C'}\tilde{G}(t)^{-\alpha+\beta}\right) < \tilde{G}(t),$$

y dado que $\tilde{\Psi}(t) \leq G(t)$, tenemos $\tilde{G}(t) \leq \Psi(t)$, y como también $\dfrac{F(t)}{t^{1/\beta}}$ es creciente,

$$F\left(\frac{t}{C'\Psi(t)^{\alpha-\beta}}\right)^\beta C'\Psi(t)^{\alpha-\beta} \leq \tilde{G}(t)^\alpha,$$

si multiplicamos por $1/t$ y usamos el Lema 4.4 con $p = 1/\alpha$, existe C tal que

$$\begin{aligned}
\left(F\left(\frac{t}{C'\Psi(t)^{\alpha-\beta}}\right)\left(\frac{t}{C'\Psi(t)^{\alpha-\beta}}\right)^{-\frac{1}{\beta}}\right)^\beta &\leq \left(\tilde{G}(t) t^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \\
&\leq C^\alpha \left(\int_{Ct}^\infty \left(\frac{s}{\Psi(s)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} ds\right)^{-(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

y por la definición de la función F,

$$\left(\int_0^{\frac{t}{C'\Psi(t)^{\alpha-\beta}}} \frac{\Phi(s)}{s^{1+1/\beta}} ds\right)^{\beta} \leq C^{\alpha}\left(\int_{Ct}^{\infty}\left(\frac{s}{\Psi(s)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} ds\right)^{-(1-\alpha)}$$

y dado que a y b son crecientes,

$$\left(\int_0^{\frac{t^{1-\alpha+\beta}}{C'b(t)^{\alpha-\beta}}} \frac{a(s)}{s^{1/\beta}} ds\right)^{\beta} \leq 2\,C^{\alpha}\left(\int_{Ct}^{\infty} b(s)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} ds\right)^{-(1-\alpha)},$$

que puede ser reducida a 4.1. □

Ya habíamos visto en el Capítulo 2 que las desigualdaes modulares implicaban las desigualdades en norma. Para el caso de la maximal lateral Cesàro α, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.6. *Sea $0 < \alpha \leq 1$ y supongamos que las funciones a y b son crecientes. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) *Existe una constante C tal que*

$$\int_0^1 \Phi(|M_\alpha^- f(x)|)\, dx \leq C + C\int_0^1 \Psi(C\,|f(x)|)\, dx\,,$$

para toda $f \in \mathfrak{M}([0,1])$.

(II) *Existe C tal que*

$$\sup_{t\geq 1}\left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^{1/\alpha}}\, ds\right)^{\alpha}\left(\int_t^{\infty} b(C\,s)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, ds\right)^{1-\alpha} < \infty.$$

(III) *Existe una constante C tal que*

$$\|M_\alpha^- f\|_\Phi \leq C\|f\|_\Psi \qquad \textit{para toda } f \in \mathfrak{M}([0,1]).$$

El resultado anterior también es válido para M_α^+.

Capítulo 5

Composición de operadores

En [19], Neuguebauer estudia desigualdades modulares para el operador que consiste en componer un número finito de veces de la maximal de Hardy-Littlewood consigo misma. Este operador composición ya no es de tipo débil $(1,1)$ y los resultados de interpolación de los Capítulos anteriores no se aplican. Resultados análogos son válidos para la maximal $\mathcal{M}_p$, y de hecho pueden ser demostrados a partir de los de la maximal de Hardy-Littlewood.

En este capítulo encontraremos las propiedades de acotación en espacios de Orlicz del operador M_α^-, con $0 < \alpha < 1$, compuesto j veces. En particular, *cerca* del extremo $L^{1/\alpha}$, veremos cómo su comportamiento empeora al incrementar j.

Daremos respuesta a este problema al estudiar desigualdades modulares para un operador que sea composición de operadores no necesariamente iguales pero con las mismas propiedades de acotación en los extremos. Este enfoque, nos permitirá también, tratar el caso de una maximal *fuerte* que considera promedios Cesàro sobre una familia de rectángulos.

5.1. Estimación de la distribución

Sean T_1, T_2, ... y T_j, j operadores definidos en $\mathfrak{M}(\Omega)$, todos ellos de tipo débil restringido (p,p), para algún $p > 1$ y tipo (∞,∞). En este capítulo estudiaremos desigualdades modulares para el operador composición

$$T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_j. \tag{5.1}$$

Por simplicidad y mayor claridad en la notación, trabajaremos en el caso en que los T_i son todos iguales, esto es $T_i = T$ para $i = 1, 2, ..., j$. No existe dificultad alguna en modificar la notación en los teoremas y lemas que siguen para obtener las mismas conclusiones para el operador (5.1) cuando los T_i no son necesariamente iguales.

Sea $T^{(j)} = \overbrace{T \circ ... \circ T}^{j \text{ veces}}$ el operdor T compuesto j veces, la siguiente proposición nos da una estimación su distribución.

Lema 5.1. *Si T es un operador que satisface para cierta constante C,*

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{C}{t} \int_{t/C}^{\infty} \mu_f(s)^{1/p} ds \right)^p \qquad \text{para todo } t > 1, \tag{5.2}$$

entonces, $T^{(j)}$ satisface

$$\mu_{T^{(j)}f}(t) \leq \left[\frac{1}{(j-1)!t} \int_t^{\infty} \mu_f(s/C^j)^{1/p} \left[\log(s/t)\right]^{(j-1)} ds \right]^p \tag{5.3}$$

para todo $t > 1$.

Demostración. Procederemos por inducción. Para $j = 1$, la desigualdad (5.3), es la desigualdad (5.2), que vale por hipótesis. Supongamos que (5.3) se satisface para algún $j \geq 1$. Si llamamos $g = T^{(j)}f$,

$$\begin{aligned} \mu(\{|T^{(j+1)}f| > t\}) &= \mu(\{|Tg| > t\}) \\ &\leq \left[\frac{C}{t} \int_{t/C}^{\infty} \mu_g(s)^{1/p} ds \right]^p \end{aligned}$$

y como vale para j, el último término es, menor o igual a

$$\left[\frac{C}{t} \int_{t/C}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!s} \int_s^{\infty} \mu_f(r/C^j)^{1/p} \left[\log(r/s)\right]^{(j-1)} dr\, ds \right]^p$$

que usando el teorema de Fubini-Tonelli, resulta igual a

$$\left[\frac{C}{(j-1)!t} \int_{t/C}^{\infty} \mu_f(r/C^j)^{1/p} \int_{t/C}^{r} \frac{1}{s} \left[\log(r/s)\right]^{(j-1)} ds\, dr \right]^p,$$

y calculando la integral interior en la última expresión, obtenemos

$$\left[\frac{C}{j!t} \int_{t/C}^{\infty} \mu_f(r/C^j)^{1/p} \left[\log(Cr/s)\right]^j dr \right]^p,$$

que resulta igual al segundo miembro de (5.3), a través de un cambio de variables. □

5.2. Desigualdades modulares para la composición

Teorema 5.2. *Sea T un operador que satisface la desigualdad* (5.2) *con constante C_1. Si para alguna constante C_2, a y b satisfacen la condición*

$$\sup_{t \geq 1} \left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} \log^{p(j-1)}(t/s)\, ds \right)^{1/p} \left(\int_t^{\infty} b(C_2\, s)^{-p'/p}\, ds \right)^{1/p'} < \infty \tag{5.4}$$

entonces, existe C tal que

$$\int_{\Omega} \Phi(|T^{(j)}f|)\, d\mu \leq C + C \int_{\Omega} \Psi(C\,|f|)\, d\mu, \tag{5.5}$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$.

Demostración. Sea C una constante más grande que C_1^j, C_2 y el supremo de la condición (5.4). Sea f una función en el dominio de $T^{(j)}$. Por el Lema 5.1, acotamos la distribución de $T^{(j)}f$, y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(|T^{(j)}f|)d\mu &= \int_0^\infty a(s)\mu_{T^{(j)}f}(s)ds \\ &\leq \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) a(s)\mu_{T^{(j)}f}(s)ds\end{aligned}$$

menor o igual a

$$\Phi(1)\mu(\Omega) + \int_1^\infty \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_s^\infty \mu_f(t/C)^{1/p}\log^{(j-1)}(t/s)\,dt\right]^p ds.$$

Ahora, si llamamos

$$h(t) = \left[\int_t^\infty b(Cr)^{-p'/p}dr\right]^{1/pp'} \quad \text{y} \quad g(t) = [\mu_f(t/C)b(Ct)]^{1/p},$$

tenemos, gracias a la desigualdad de Hölder, que

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_s^\infty \mu_f(t/C)^{1/p}\ \log^{(j-1)}(t/s)dt\right]^p ds \\ &= \int_1^\infty \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_s^\infty g(t)\ \log^{(j-1)}(t/s)h(t)\frac{1}{h(t)b(Ct)^{1/p}}dt\right]^p ds\end{aligned}$$

es menor o igual que

$$\int_1^\infty \frac{a(s)}{s^p}\left[\int_s^\infty \left[g(t)\ \log^{(j-1)}(t/s)\,h(t)\right]^p dt\right]\left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}h(r)^{-p'}dr\right]^{p/p'} ds,$$

y si aplicamos el Teorema de Fubini-Tonelli, la última expresión es igual a

$$\int_1^\infty [g(t)\,h(t)]^p \int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\ \log^{p(j-1)}(t/s)\ \left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}h(r)^{-p'}dr\right]^{p/p'} ds\,dt.$$

Como la integración por partes da

$$\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}h(r)^{-p'}dr = p'\left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p}dr\right]^{1/p'}$$

y

$$\begin{aligned}&\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\ \log^{p(j-1)}(t/s)\ \left[\int_1^s \frac{a(r)}{r^p}\ \log^{p(j-1)}(s/r)\,dr\right]^{-1/p'} ds \\ &\qquad = p\left[\int_1^t \frac{a(r)}{r^p}\ \log^{p(j-1)}(t/r)\,dr\right]^{1/p},\end{aligned}$$

si usamos la desigualdad (5.4) dos veces, obtenemos para $t > 1$,

$$\begin{aligned}
&\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} \log^{p(j-1)}(t/s) \left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p} h(r)^{-p'} dr\right]^{p/p'} ds \\
&= (p')^{p/p'} \int_1^t \frac{a(s)}{s^p} \log^{p(j-1)}(t/s) \left[\int_s^\infty b(Cr)^{-p'/p} dr\right]^{p/(p')^2} ds \\
&\le (p')^{p/p'} C^{p/p'} \int_1^t \frac{a(s)}{s^p} \log^{p(j-1)}(t/s) \left[\int_1^s \frac{a(r)}{r^p} \log^{p(j-1)}(s/r)\, dr\right]^{-1/p'} ds \\
&\le p(p')^{p/p'} C^{p/p'} \left[\int_1^t \frac{a(r)}{r^p} \log^{p(j-1)}(t/r)\, dr\right]^{1/p} \\
&\le p(p')^{p/p'} C^p \left[\int_t^\infty b(Cr)^{-p'/p} dr\right]^{-1/p'} \\
&= p(p')^{p/p'} C^p h(t)^p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(|T^{(j)} f|) d\mu &\le \Phi(1)\mu(\Omega) + p(p')^{p/p'} C^p \int_1^\infty \mu_f(t/C) b(Ct) dt \\
&\le \Phi(1)\mu(\Omega) + p(p')^{p/p'} C^{p-1} \int_\Omega \Psi(C^2 f) d\mu,
\end{aligned}$$

y esto completa la demostración. □

Ahora veremos que la condición (5.3) es necesaria si consideramos al operador $\mathcal{H}_p$. Antes de probar este resultado, veremos el siguiente lema.

Lema 5.3. *Sea $j \ge 1$ un entero. Sea f una función medible. Entonces,*

$$\mathcal{H}_p^{(j)} f(x) = \frac{1}{(j-1)!p^j\, x^{1/p}} \int_0^x f(y)\, y^{1/p-1} \log^{j-1}(x/y)\, dy, \tag{5.6}$$

para todo x en $[0,1]$.

Demostración. Procedemos por inducción. Para $j = 1$, (5.6) es la definición de $\mathcal{H}_p$. Supongamos que vale para un $j \ge 1$. Entonces, por el Teorema de Fubini-Tonelli, si x pertenece a $[0,1]$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_p^{(j+1)} f(x) &= \frac{1}{px^{1/p}} \int_0^x \mathcal{H}_p^{(j)} f(y)\, y^{1/p-1}\, dy \\
&= \frac{1}{(j-1)!p^{j+1} x^{1/p}} \int_0^x \frac{1}{y} \int_0^y f(r)\, r^{1/p-1} \log^{j-1}(y/r)\, dr\, dy \\
&= \frac{1}{(j-1)!p^{j+1} x^{1/p}} \int_0^x f(r)\, r^{1/p-1} \int_r^x \frac{1}{y} \log^{j-1}(y/r)\, dy\, dr \\
&= \frac{1}{j!p^{j+1} x^{1/p}} \int_0^x f(r)\, r^{1/p-1} \log^{j-1}(x/r)\, dr.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.4. *Sea $p > 1$ y supongamos que b es monóntona. Si la j-ésima iteración del operador $\mathcal{H}_p$ satisface para cierta constante C,*

$$\int_0^1 \Phi(|\mathcal{H}_p^{(j)} f(x)|)\, dx \leq C + C \int_0^1 \Psi(C\, |f(x)|)\, dx, \tag{5.7}$$

para toda $f \in \mathfrak{M}([0,1])$, entonces las funciones a y b satisfacen la condición (5.3).

Demostración. Supongamos $j \geq 2$ y que $\mathcal{H}_p^{(j)}$ satisface la desigualdad modular 5.7, esto es, existe una constante C tal que

$$\int_0^1 \Phi(|\mathcal{H}_p^{(j)} f(x)|)\, dx \leq C + C \int_0^1 \Psi(C\, |f(x)|)\, dx\,. \tag{5.8}$$

Trataremos primero el caso en que b tiene la propiedad de que existe una constante C_1 tal que

$$\log(t)^{(j-1)} \left(\int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p} ds \right)^{1/p'} \leq C_1. \tag{5.9}$$

Fijemos $t > 1$. Para $s > 0$, sea

$$h_t(s) = \frac{1}{A_t}\, b(Cs)^{-p'}$$

donde $A_t = t\, b(Ct)^{-p'/p} + \int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p} ds$. Observemos que en este caso, el hecho de que b sea monótona y la finitud de la integral en la expresión (5.9), implican que b es no decreciente y $\lim\limits_{s\to\infty} b(s) = \infty$. Entonces, h_t es no creciente, $\lim_{s\to\infty} h_t(s) = 0$ y $h_t^{-1}(s)$ está bien definida para $s > 0$.

Ahora, consideremos la función $f_t \in \mathfrak{M}([0,1])$ definida por

$$f_t = h_t^{-1} \chi_{(0, h_t(t))}. \tag{5.10}$$

Observemos que, si (5.8) se satisface con la constante C, entonces también se satisface para cualquier constante más grande que C, y entonces podemos suponer $b(C) \geq 1$, luego

$$h_t(t) = \frac{1}{A_t}\, b(Ct)^{-p'} \leq \frac{1}{tb(Ct)} \leq 1$$

y por lo tanto, $h_t(t)$ es un punto del $[0,1]$.

La distribución de f_t es

$$\begin{aligned} \mu_{f_t}(s) &= |\{x \in (0,1] :\ f_t(x) > s\}| \\ &= |\{x \in (0,1] :\ h_t^{-1}(x) > s \text{ y además } x < h_t(t)\}| \\ &= |\{x \in (0,1] :\ x < h_t(s) \text{ y además } x < h_t(t)\}| \\ &= \begin{cases} h_t(t) & \text{para } 0 < s \leq t \\ h_t(s) & \text{para } s > t, \end{cases} \end{aligned}$$

para todo $s > 0$.

Por la Proposición (1.5), la forma de μ_{f_t} y del hecho de que b es no decreciente, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}\int_0^1 \Psi(C|f_t(x)|)dx &= \int_0^\infty b(Cs)\mu_{f_t}(s)ds \\ &\le h_t(t)\int_0^t b(Cs)ds + \int_t^\infty b(Cs)h_t(s)ds \\ &\le tb(Ct)h_t(t) + \int_t^\infty b(Cs)h_t(s)ds \\ &\le \frac{1}{A_t}\left[tb(Ct)^{-p'/p} + \int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p}ds\right] \\ &\le 1.\end{aligned}$$

Entonces,

$$C + C\int_{[0,1]} \Psi(C|f_t|) \le C + C^2. \tag{5.11}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Phi(|\mathcal{H}_p^{(j)} f_t(x)|)dx &= \int_0^\infty a(s)\,\mu_{\mathcal{H}_p^{(j)} f_t}(s)ds \\ &\ge \int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\,\mu_{\mathcal{H}_p^{(j)} f_t}(s)ds\end{aligned} \tag{5.12}$$

Ahora veremos que existe una constante C_2 tal que, para $1 < s < t$,

$$\mu_{\mathcal{H}_p^{(j)} f_t}(s) \ge \frac{1}{C_2}\frac{\log^{p(j-1)}(t/s)}{s^p}\left(\int_t^\infty b(Cs)^{-p'/p}\,ds\right)^{p/p'}. \tag{5.13}$$

Sea $\mathcal{H}_p^{(j)} f_t(1) < s < t$, con el mismo argumento de decrecimiento estricto de $\mathcal{H}_p^{(j)} f_t$ que en la demostración del Teorema 2.5, resulta

$$\mu_{\mathcal{H}_p^{(j)} f_t}(s) = x_s,$$

donde x_s es un punto del $[0,1]$ tal que, por el Lema (5.3)

$$s = \mathcal{H}_p^{(j)} f_t(x_s) = \frac{1}{(j-1)!p^j\, {x_s}^{1/p}}\int_0^{x_s} f(y)\,y^{1/p-1}\,\log^{j-1}(x_s/y)\,dy.$$

Entonces,

$$x_s = \left(\frac{1}{(j-1)!p^j\, s}\int_0^{x_s} f(y)\,y^{1/p-1}\,\log^{j-1}(x_s/y)\,dy\right)^p$$

Si llamamos $x_t = \mu_{\mathcal{H}_p^{(j)} f_t}(t)$, como $s < t$,

$$x_s \ge x_t,$$

y como $f(x) \le \mathcal{H}_p^{(j)} f_t(x)$ para todo x en el $[0,1]$,

$$x_t \ge \mu_{f_t}(t) = h_t(t),$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que $\log^{j-1}(x_s/y)$ decrece con y,

$$x_s \geq \left(\frac{\log^{j-1}(x_s/x_t)}{(j-1)! p^j \, s} \int_0^{h_t(t)} f_t(y) \, y^{1/p-1} \, dy \right)^p . \tag{5.14}$$

Dada que $\mathcal{H}_p^{(j)} f_t(1) < t$, resulta también que

$$x_t = \left(\frac{1}{(j-1)! p^j \, t} \int_0^{x_t} f(y) \, y^{1/p-1} \, \log^{j-1}(x_t/y) \, dy \right)^p ,$$

entonces

$$\frac{x_s}{x_t} = \left(\frac{t \int_0^{x_s} f(y) \, y^{1/p-1} \, \log^{j-1}(x_s/y) \, dy}{s \int_0^{x_t} f(y) \, y^{1/p-1} \, \log^{j-1}(x_t/y) \, dy} \right)^p \geq \left(\frac{t}{s} \right)^p .$$

Por consiguiente, de (5.14) resulta

$$x_s \geq \left(\frac{\log^{j-1}(t/s)}{(j-1)! p^{j-1} \, s} \int_0^{h_t(t)} f_t(y) \, y^{1/p-1} \, dy \right)^p .$$

Por la definición de f_t,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_0^{h_t(t)} f_t(y) \, y^{1/p-1} \, dy &= t \, h_t(t)^{1/p} + \int_t^\infty h_t(r)^{1/p} \, dr \\ &= \frac{1}{A_t^1/p} \, t \, b^{-p'/p}(Ct) + \frac{1}{A_t^1/p} \int_t^\infty b^{-p'/p}(Cr) dr \\ &= A_t^{1/'p} \\ &\geq \left(\int_t^\infty b^{-p'/p}(Cr) dr \right)^{1/p'} . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x_s \geq \left(\frac{1}{(j-1)! p^{j-2}} \right)^p \frac{\log^{p(j-1)}(t/s)}{s^p} \left(\int_t^\infty b^{-p'/p}(Cr) dr \right)^{p/p'} .$$

Si $1 < s < \mathcal{H}_p^{(j)} f_t(1)$, tenemos

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{H}_p^{(j)} f_t}(s) =& 1 \\ & \geq \frac{1}{C_1^p} \log^{p(j-1)}(t) \left(\int_t^\infty b^{-p'/p}(Cr) dr \right)^{p/p'} \\ & \geq \frac{1}{C_1^p} \frac{\log^{p(j-1)}(t/s)}{s^p} \left(\int_t^\infty b^{-p'/p}(Cr) dr \right)^{p/p'} . \end{aligned}$$

Resulta entonces, si $\dfrac{1}{C_2} = \dfrac{1}{C_1^p} + \dfrac{1}{(j-1)! p^{p(j-2)}}$, se satisface (5.13).

De (5.8), (5.11), (5.12) y (5.13) llegamos a

$$\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} \log^{p(j-1)}(t/s)\, ds \left(\int_t^\infty b(C_2\, s)^{-p'/p}\, ds\right)^{p/p'} \leq C_1\,(C+C^2)$$

y con esto, probamos que se satisface (5.4) en el caso en que b tenga la propiedad (5.9).

Para finalizar la prueba de este teorema, sólo queda considerar el caso en que la función b no tenga la propiedad (5.9). Si

$$\int_1^\infty b^{-p'/p} = \infty,$$

entonces, procedemos como en la demostración del Teorema 2.5, para probar que existe una función f en L^Ψ tal que $\mathcal{H}_p f(x) = \infty$ para todo x del intervalo $[0,1]$ y por lo tanto, $\mathcal{H}_p^{(j)} f(x) = \infty$ para todo $j \geq 1$.

Si en cambio,

$$\int_1^\infty b^{-p'/p} < \infty, \tag{5.15}$$

entonces existe una sucesión creciente de números t_n, $n = 1, 2, ...$ tales que

$$\log(t_n)^{(j-1)} \left(\int_{t_n}^\infty b(s)^{-p'/p} ds\right)^{1/p'} \geq n. \tag{5.16}$$

y además, como b es monótona y cumple (5.15), resulta b no decreciente, y podemos tomar $t_1 \geq 1$ y $b(t_1) \geq 1$.

Veremos que el operador $\mathcal{H}_p^{(j)}$ no puede satisfacer la desigualdad (5.8) para ninguna Φ creciente.

Para $n = 1, 2, ...$ sea

$$h_n(s) = \frac{b(s)^{-p'}}{A_n}\ , \text{ para todo } s \geq 0,$$

donde $A_n = t_n\, b(t_n)^{-p'/p} + \int_{t_n}^\infty b(s)^{-p'/p} ds$, y consideremos la función

$$f_n(x) = h_n^{-1}(x)\chi_{[0,h_n(t_n))}(x)\ , \text{ para todo } x \text{ en el intervalo } [0,1].$$

Como $b(t_1) \geq 1$,

$$h_n(t_n) = \frac{b(t_n)^{-p'}}{A_n} \leq \frac{1}{t_n\, b(t_n)} \leq \frac{1}{t_n} \tag{5.17}$$

y dado que $t_1 \geq 1$ y $t_n \geq t_1$, $h_n(t_n)$ es un punto del $[0,1]$.

De manera análoga a lo anterior, por la forma de la distribución de f_n,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Psi(|f_n(x)|)dx &= \int_0^\infty b(s)\mu_{f_n}(s)ds \\ &\leq h_n(t_n)\int_0^{t_n} b(s)ds + \int_{t_n}^\infty b(s)h_n(s)ds \\ &\leq \frac{1}{A_n}\left[t_n b(t_n)^{-p'/p} + \int_{t_n}^\infty b(s)^{-p'/p} ds\right] \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Por otra parte, dado que $h_n(t_n) \leq 1/t_n$,

$$\begin{aligned}
(j-1)!p^j \mathcal{H}_p^{(j)} f_n(1) &= \int_0^1 f(y)\, y^{1/p-1} \log^{j-1}(1/y)\, dy \\
&\geq \log^{j-1}(t_n) \int_0^{h_n(t_n)} f(y)\, y^{1/p-1}\, dy \\
&= \log^{j-1}(t_n)\, A_n^{1/p'} \\
&\geq \log^{j-1}(t_n) \left(\int_{t_n}^{\infty} b^{-p'/p}(r)\, dr \right)^{1/p'} \\
&\geq n.
\end{aligned}$$

y como $\mathcal{H}_p^{(j)} f_n$ es decreciente, $\mathcal{H}_p^{(j)} f_n(x) \geq \frac{n}{(j-1)!p^j}$ para todo x del intervalo $[0,1]$.

Por lo tanto, si $\mathcal{H}_p^{(j)}$ satisfaciera (5.8) para cierta constante C, como $\mathcal{H}_p^{(j)}$ es lineal, resultaría

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{n}{C\,(j-1)!\,p^j} \right) &\leq \int_0^1 \Phi(\mathcal{H}_p^{(j)}(f_n(x)/C))\, dx \\
&\leq C + C \int_0^1 \Psi(f_n(x)) dx \\
&\leq 2C
\end{aligned}$$

para todo entero positivo n, y esto es absurdo porque Φ no es acotada por ser una función de crecimiento.

$\square$

Como consecuencia de los dos teoremas anteriores, terminamos la sección con el siguiente resultado para iteraciones del operador Cesàro.

Teorema 5.5. *Existe una constante C, tal que*

$$\int_0^1 \Phi(|(M_\alpha^-)^{(j)} f(x)|)\, dx \leq C + C \int_0^1 \Psi(C\,|f(x)|)\, dx,$$

para toda $f \in \mathfrak{M}([0,1])$ si, y sólo si,

$$\sup_{t\geq 1} \left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^{1/\alpha}} \log^{\frac{j-1}{\alpha}}(t/s)\, ds \right)^{\alpha} \left(\int_t^{\infty} b(C_2\, s)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, ds \right)^{1-\alpha} < \infty.$$

5.3. La Maximal Cesàro Fuerte en $\mathbb{R}^n$

Para f localmente integrable y $x \in \mathbb{R}^n$, se define el operador maximal de Hardy-Littlewood sobre cubos, como

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \tag{5.18}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q con lados paralelos a los ejes cartesianos, que contienen al punto x. También podemos tomar rectángulos en lugar de cubos, este operador se conoce con el nombre de *Maximal Fuerte* y se define como

$$M^F f(x) = \sup_{x\in R} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y)|\, dy \tag{5.19}$$

donde el supremo se toma sobre todos los rectángulos R, con lados paralelos a los ejes cartesianos, que contienen al punto x.

La podemos escribir como

$$M^F f(x) = \sup_{a_i<x_i<b_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)} \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} ... \int_{a_n}^{b_n} |f(y)|\, dy_n \dots dy_1 \tag{5.20}$$

para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Se sabe que este operador es de tipo fuerte (p, p) para $p > 1$, sin embargo este operador no es de ningún tipo en el extremo $p = 1$. En [8] se estudian los espacios de Orlicz cercanos al L^1 que aplica este operador, por medio de desigualdades modulares.

Cuando se quiere estudiar continuidad Cesàro-α en $\mathbb{R}^n$ se define para $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, el operador *Maximal Cesàro de orden* α *en* $\mathbb{R}^n$, como

$$M_\alpha f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{\alpha}{|Q|^{(n-1+\alpha)/n}} \int_Q |f(y)| d(y, Q^c)^{\alpha-1} dy. \tag{5.21}$$

donde $d(y, Q^c)$ denota la distancia del punto y al complemento del cubo Q, el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen al punto x y con lados paralelos a los ejes cartesianos.

Cuando $n = 1$, para $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$, la expresión anterior se puede escribir como

$$M_\alpha f(x) = \sup_{c<x<d} \frac{\alpha}{d-c} \int_c^d |f(s)| \left(1 - \frac{|2s - d - c|}{d-c}\right)^{\alpha-1} ds, \tag{5.22}$$

que es una versión bilátera de las maximales laterales introducidas en el Capítulo 2.

Para $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos la *maximal Cesàro fuerte de orden* α como

$$\begin{aligned} M_\alpha^F f(x) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \sup_{r_i>0} \frac{1}{\prod_{i=1}^n r_i} \int_{x_1-r_1}^{x_1+r_1} \int_{x_2-r_2}^{x_2+r_2} ... \\ ... \int_{x_n-r_n}^{x_n+r_n} |f(y)| \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{|x_i - y_i|}{r_i}\right)^{\alpha-1} dy_n ... dy_2\, dy_1 \end{aligned} \tag{5.23}$$

para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Antes de tratar la Maximal Cesàro Fuerte, queremos mencionar que para la maximal Cesàro en $\mathbb{R}^n$ sobre cubos, se obtienen los mismos resultados que para el caso lateral unidimensional contenidos en el Teorema 2.7. Este operador sublineal, también es de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\alpha)$ y tipo fuerte (∞, ∞). De hecho, los argumentos dados en la Proposición 2.2 se pueden adaptar fácilmente, estimando la reordenada de la función $d(x, Q^c)$ para un cubo Q contenido en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, que la condición (2.25) sobre

a y b es suficiente, es una aplicación del Teorema 2.5. Por otra parte, se prueba que la condición (2.25) es necesaria, considerando una función que dependa de una de las variables y reduciendo el problema al caso unidimensional.

En lo que resta de la sección, aplicaremos el Teorema 5.2 para obtener desigualdades modulares para el operador maximal Cesàro fuerte.

Teorema 5.6. *Sea $0 < \alpha < 1$, Ω un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que las funciones a y b satisfacen*

$$\sup_{t\geq 1}\left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^{1/\alpha}} \log^{\frac{n-1}{\alpha}}(t/s)\,ds\right)^{\alpha}\left(\int_t^{\infty} b(C_2\,s)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,ds\right)^{1-\alpha} < \infty, \tag{5.24}$$

entonces existe una constante C, tal que

$$\int_{\Omega}\Phi(|M_\alpha^F f(x)|)\,dx \leq C + C\int_{\Omega}\Psi(C\,|f(x)|)\,dx, \tag{5.25}$$

para toda f con soporte en Ω.

Demostración. Para f en $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, e $i = 1, ..., n$, consideremos el operador

$$T_i f(x) = M_\alpha(f(x_1, ..., x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, ..., x_n))(x_i) \quad \text{, para todo } x \text{ en } \mathbb{R}^n,$$

entonces,

$$M_\alpha^F \leq T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_n.$$

Para $i = 1, ..., n$, veamos que el operador T_i satisface la desigualdad (5.2). Por simplicidad en la notación, supongamos $i = 1$. Sea $x' = (x_2, ..., x_n)$, entonces $x = (x_1, x')$. Dado que M_α satisface la desigualdad (5.2), si $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\mu_{T_1 f}(t) &= \int_{R^n}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ T_1 f(y)>t\}}(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}}\chi_{\{u\in\mathbb{R}:\ (M_\alpha f(\cdot,x'))(u)>t\}}(x_1)dx_1dx' \\
&\leq \int_{R^{n-1}}\left(\frac{C}{t}\int_{t/C}^{\infty}|\{x_1\in\mathbb{R}:\ f(x_1,x')>s\}|^{\alpha}ds\right)^{1/\alpha}dx',
\end{aligned}$$

y por la desigualdad integral de Minkowski, la última integral es menor o igual que

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{C}{t}\int_{t/C}^{\infty}\left(\int_{R^{n-1}}|\{x_1\in\mathbb{R}:\ f(x_1,x')>s\}|\,dx'\right)^{\alpha}ds\right]^{1/\alpha} \\
&= \left[\frac{C}{t}\int_{t/C}^{\infty}\mu_f(s)^{\alpha}ds\right]^{1/\alpha}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces, que el operador M_α^F está acotado por una composición de operadores que satifacen las hipótesis del Teorema 5.2, y así, obtenemos que la condición (5.24) implica la desigualdad modular (5.25). □

Capítulo 6

Casos especiales y extensiones

En este capítulo veremos generalizaciones de los teoremas de interpolación antes estudiados para obtener desigualdades modulares. En la sección 6.1, presentamos una versión que abarca los teoremas 2.2 y 2.5 del Capítulo 2. La Sección 6.2 trata el problema de interpolación cuando el operador es de tipo fuerte (r, r) para $p < r < q < \infty$, y tipo débil restringido (p, p) y tipo débil (q, q) en los extremos. Este resultado será aplicado al operador S_β, que presentamos en las Sección 6.3 para un estudio del comportamiento local. Este operador surge en el análisis de las propiedades de acotación del operador Maximal del Calor asociado al sistema de funciones de Laguerre ortogonales en $[0, \infty]$ para valores negativos del parámetro. La reducción de este problema al estudio de S_β nos fue comunicada personalmente por el Dr. Carlos Segovia, y forma parte de un trabajo en conjunto con R. Macías y J.L. Torrea. En esta sección, también probamos que las condiciones del Teorema presentado en la Sección 6.2 son las mejores posibles.

En las dos secciones restantes tratamos el problema de interpolación en espacios que no son necesariamente de medida finita. En la Sección 6.4 presentamos un resumen de los resultados de interpolación y desigualdades modulares en medida infinita para algunos de los operadores tratados a lo largo del texto. Aplicamos estos resultados al operador S_β en la Sección 6.5 y damos algunos ejemplos.

6.1. Más que débil restringido, menos que débil

Si T es un operador de tipo fuerte (∞, ∞) y $p > 1$, los Teoremas 2.2 y 2.5 nos muestran la diferencia que existe entre operadores que son de tipo débil, esto es acotados de $L^{p,\infty}$ en L^p, y los que son tipo débil restringindo, esto es acotados de $L^{p,1}$ en $L^{p,\infty}$. Si $1 < q < p$ tenemos, que el estacio $L^{p,q}$ está contenido en L^p y contiene a $L^{p,1}$, ya que

$$\|f\|_p \le \|f\|_{p,q} \le \|f\|_{p,1}$$

para toda f, sin importar si el espacio es, o no, de medida finita. Por lo tanto, nos preguntamos cómo son las propiedades de acotación de T, si tenemos una hipótesis intermedia entre el tipo débil y el débil restringido, esto es, que T es acotado de $L^{p,q}$ en $L^{p,\infty}$.

Para obtener el resultado de interpolación, usaremos el siguiente lema.

Lema 6.1. *Sea $1 < q < p$ y T un operador de tipo fuerte (∞, ∞) y acotado de $L^{p,q}$ en $L^{p,\infty}$. Entonces, existe una constante C tal que*

$$\mu_{Tf}(t) \leq \frac{C}{t^p} \left[\int_{t/C}^{\infty} \mu_f(s)^{q/p} s^{q-1} ds \right]^{p/q} \tag{6.1}$$

para todo $t > 0$ y para toda f en el dominio de T.

Demostración. Sea $f \in \mathfrak{D}$, $t > 0$ y $f_t = \text{máx}\{f, t/2B\}$ y $f^t = f - f_t$, donde B la constante que aparece en la desigualad del tipo fuerte (∞, ∞). Entonces,

$$\mu(\{|Tf| > t\}) \leq \mu(\{|Tf^t| > t/2\}) + \mu(\{|Tf_t| > t/2\}).$$

De la misma manera que en el Lema 2.1 del Capítulo 2, tenemos $\mu(\{|Tf_t| > t/2\}) = 0$.

Como para cierta constante A, el operador T satisface la desigualdad

$$\|Tg\|_{p,\infty} \leq A \|g\|_{p,q}, \tag{6.2}$$

para toda $g \in \mathfrak{D}$, por la definición (1.13), resulta

$$\mu(\{|Tf^t| > t/2\}) \leq \left(\frac{2A}{t} \right)^p \left\{ q \int_0^{\infty} \left[s \mu_{f_t}(s)^{1/p} \right]^q \frac{ds}{s} \right\}^{p/q},$$

y ya que $\mu_{f^t}(s) = \mu_f(s + t/2B)$ para todo $s > 0$, y μ_f es decreciete, la últimas expresión es

$$\left(\frac{2A}{t} \right)^p \left\{ q \int_{t/2B}^{\infty} \left[s \mu_f(s)^{1/p} \right]^q \frac{ds}{s} \right\}^{p/q},$$

y esto es (6.1) con $C = \text{máx}\{2B (2A)^p \, q^{p/q}\}$. □

Teorema 6.2. *Sea T un operador acotado de $L^{p,q}$ en $L^{p,\infty}$, con $1 \leq q \leq p$, y de tipo fuerte (∞, ∞). Supongamos que b es creciente. Si a y b satisfacen la desigualdad*

$$\sup_{t>1} \left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds \right)^{1/q} \left(\int_{Ct}^{\infty} b(s)^{-\frac{q}{p-q}} s^{\frac{pq-p}{p-q}} ds \right)^{p-q} < \infty \tag{6.3}$$

para $1 \leq q < p$, o bien la condición (2.6),

$$t^{p-1} \int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds \leq C \, b(C\, t) \qquad \text{para todo } t \geq 1,$$

en el caso $q = p$, entonces existe una constante C', tal que

$$\int_{\Omega} \Phi(|Tf|) d\mu \leq C' + C' \int_{\Omega} \Psi(C' f) d\mu \quad \text{para toda } f \in \mathfrak{D}.$$

Demostración. Los casos $p = q$ y $p = 1$ ya los hemos tratado en los Teoremas 2.2 y 2.5. Supongamos entonces que $1 < q < p$. Si a y b satisfacen (6.3), entonces existe una constante C_1 tal que

$$\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds \left(\int_t^\infty b(C_1 s)^{-\frac{q}{p-q}} s^{\frac{pq-p}{p-q}} ds \right)^{\frac{p-q}{q}} < C_1. \tag{6.4}$$

Sea f en el dominio de T. Por el Lema 6.1, existe una costante C_2, idependiente de f, tal que

$$\mu_{Tf}(t) \leq \frac{C_2}{t^p} \left[\int_{t/C_2}^\infty \mu_f(s)^{q/p} s^{q-1} ds \right]^{p/q}.$$

Sea $C = \max\{C_1, C_2\}$. Por la Proposición 1.5 y la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(|Tf|) d\mu &= \int_0^\infty a(t)\mu_{Tf}(t) dt \\
&\leq \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) a(t)\mu_{Tf}(t) dt \\
&\leq \Phi(1)\mu(\Omega) + \int_1^\infty a(t) \frac{C}{t^p} \left[\int_{t/C}^\infty \mu_f(s)^{q/p} s^{q-1} ds \right]^{p/q} dt \\
&\leq \Phi(1)\mu(\Omega) + \int_1^\infty \frac{a(t)}{t^p} \left[\int_t^\infty \mu_f(s/C)^{q/p} s^{q-1} ds \right]^{p/q} dt.
\end{aligned}$$

Si llamamos

$$h(s) = \left(\int_s^\infty \left[t^{\frac{p}{q}-p} b(Ct) \right]^{-\frac{q}{p-q}} dt \right)^{\frac{q(p-q)}{p^2}},$$

tenemos,

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty \frac{a(t)}{t^p} \left[\int_t^\infty \mu_f(s/C)^{q/p} s^{q-1} ds \right]^{p/q} dt \\
&\qquad = \int_1^\infty \frac{a(t)}{t^p} \left[\int_t^\infty [\mu_f(s/C)\, b(Cs)]^{q/p}\, h(s)\, \frac{s^{q-1}}{b(Cs)^{q/p} h(s)} ds \right]^{p/q} dt,
\end{aligned}$$

y aplicando la desiguadad de Hölder con el exponente $\frac{p}{q} > 1$, resulta menor o igual a

$$\int_1^\infty \frac{a(t)}{t^p} \int_t^\infty \mu_f(s/C)\, b(Cs)\, h(s)^{\frac{p}{q}}\, ds \left[\int_t^\infty \frac{r^{\frac{p(q-1)}{p-q}}}{b(Cr)^{\frac{q}{p-q}}\, h(r)^{\frac{p}{p-q}}} dr \right]^{\frac{p-q}{q}} dt.$$

Usando el teorema de Fubini, la última expresión es igual a

$$\int_1^\infty \mu_f(s/C)\, b(Cs)\, h(s)^{\frac{p}{q}} \int_1^s \frac{a(t)}{t^p} \left[\int_t^\infty \frac{r^{\frac{p(q-1)}{p-q}}}{b(Cr)^{\frac{q}{p-q}}\, h(r)^{\frac{p}{p-q}}} dr \right]^{\frac{p-q}{q}} dt\, ds. \tag{6.5}$$

Por la definición de h,

$$\int_t^\infty \frac{r^{\frac{p(q-1)}{p-q}}}{b(Cr)^{\frac{q}{p-q}}\, h(r)^{\frac{p}{p-q}}}\, dr = \int_t^\infty \frac{\left[r^{\frac{p}{q}-p}\, b(Cr)\right]^{-\frac{q}{p-q}}}{\left(\int_r^\infty \left[u^{\frac{p}{q}-p}\, b(Cu)\right]^{-\frac{q}{p-q}}\, du\right)^{\frac{q}{p}}}\, dr,$$

que integrando por partes resulta igual a

$$\frac{p}{p-q}\left[\int_t^\infty \left[r^{\frac{p}{q}-p}\, b(Cr)\right]^{-\frac{q}{p-q}}\, dr\right]^{\frac{p-q}{p}}$$

y si usamos la desigualdad (6.4), es menor o igual que

$$\frac{p}{p-q} C^{\frac{q}{p}} \left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds\right)^{-\frac{q}{p}}.$$

Por lo tanto,

$$\int_1^s \frac{a(t)}{t^p}\left[\int_t^\infty \frac{r^{\frac{p(q-1)}{p-q}}}{b(Cr)^{\frac{q}{p-q}}\, h(r)^{\frac{p}{p-q}}}\, dr\right]^{\frac{p-q}{q}} dt$$

es menor o igual que

$$\frac{p}{p-q} C^{\frac{q}{p}} \int_1^s \frac{a(t)}{t^p}\left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds\right)^{-\frac{(p-q)}{p}} dt,$$

y un cálculo de intergración por partes similar al anterior da

$$\int_1^s \frac{a(t)}{t^p}\left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} ds\right)^{-\frac{p-q}{p}} dt = \frac{p}{q}\left(\int_1^s \frac{a(t)}{t^p} dt\right)^{\frac{q}{p}},$$

y, usando nuevamente (6.4), es menor o igual a

$$\frac{p}{q} C^{\frac{q}{p}} \left(\int_s^\infty \left[r^{\frac{p}{q}-p}\, b(Cr)\right]^{-\frac{q}{p-q}}\, dr\right)^{-\frac{p-q}{p}} = \frac{p}{q} C^{\frac{q}{p}} h(s)^{-p/q},$$

por consiguiente, (6.5) es menor o igual que

$$\frac{p^2}{q(p-q)} C^{2\frac{q}{p}} \int_1^\infty \mu_f(s/C)\, b(Cs)\, ds. \tag{6.6}$$

Finalmente, ya que

$$\int_1^\infty \mu_f(s/C)\, b(Cs)\, ds \le C^2 \int_\Omega \Psi(C^2|f|)\ , \tag{6.7}$$

la demostración está completa. □

Notemos que el Teorma anterior engloba los Teoremas 2.2 y 2.5 del Capítulo 2. También podemos obtener desigualdades en norma por medio de la Proposición 2.4, si las funciones Ψ y Φ tienen tipo inferior positivo en el infinito.

A continuación probaremos que la condiciones dadas para las funciones a y b en el teorema anterior son óptimas. Si $p = q$, como vimos en el Capítulo 2, la desigualdad modular (Ψ, Φ) para el operador $\mathcal{M}_p$ implica la condición (2.6), por lo tanto consideraremos el caso $1 \le q < p$.

Teorema 6.3. *Sea $1 \le q < p$. Para $f \in \mathfrak{M}([0,1])$, definamos el operador*

$$Tf(x) = \frac{1}{x^{1/p}} \left[\int_0^x |f(s)|^q \, s^{\frac{q}{p}-1} ds \right]^{1/q} \qquad \textit{para todo } x \in [0,1].$$

Supongamos que la función b es monótona. Existe una constante C tal que

$$\int_{[0,1]} \Phi(|Tf|) \le C + C \int_{[0,1]} \Psi(Cf) \tag{6.8}$$

para toda f medible si, y sólo si, las funciones a y b satisfacen (6.3).

Demostración. Siguiendo las líneas de la demostración del la Porposición 2.3, no es difícil ver, que este operador sublineal es acotado de $L^{p,q}$ en $L^{p,\infty}$, y de tipo fuerte (∞, ∞). Por el Teorema 6.2 tenemos que la condición (6.3) implica la desigualdad modular (6.8).

Supongamos ahora, que el operador T satisface la desiguadad modular 6.8. Ya que $\frac{p}{q} > 1$, si consideramos el operador $\mathcal{H}_{\frac{p}{q}}$ definido en (2.16), tenemos que

$$Tf = (\mathcal{H}_{\frac{p}{q}} |f|^q)^{1/q}.$$

Consecuentememte,

$$\int_{[0,1]} \Phi_1(|Tf|) \le C' + C' \int_{[0,1]} \Psi_1(C'^q |f|) \qquad \text{para toda } f \text{ medible,}$$

donde

$$\Phi_1(t) = \Phi(t^{1/q}) = \int_0^{t^{1/q}} a(s) ds = \frac{1}{q} \int_0^t a(r^{1/q}) \, r^{\frac{1}{q}-1} \, dr$$

y

$$\Psi_1(t) = \Psi(t^{1/q}) = \int_0^{t^{1/q}} b(s) ds = \frac{1}{q} \int_0^t b(r^{1/q}) \, r^{\frac{1}{q}-1} \, dr.$$

Observando que el conjugado de $r = \frac{p}{q}$ es $r' = \frac{p}{p-q}$, el Teorema 2.6 afirma que existe una constante C tal que

$$\sup_{t \ge 1} \left(\int_1^t \frac{a(s^{1/q}) s^{\frac{1}{q}-1}}{s^{\frac{p}{q}}} \, ds \right)^{q/p} \left(\int_t^\infty \left[s^{\frac{1}{q}-1} \, b(C\, s) \right]^{-\frac{q}{p-q}} \, ds \right)^{\frac{q}{p-q}} < \infty$$

y esto es equivalente a (6.3) por medio de un cambio de variables. $\square$

6.2. Débil en el extremo derecho

Siempre que buscamos desigualdades modulares tratamos operadores que fueran de tipo fuerte (∞, ∞). En esta sección obtendremos resultados para operadores que tienen tipo débil restringido (p, p) con $p > 1$ en un extremo, y tipo débil (q, q) para $p < q < \infty$ en el otro.

Teorema 6.4. *Sea T un operador sublineal de tipo débil restringido (p, p) y tipo débil (q, q), donde $1 < p < q < \infty$. Si existe una constante C tal que a y b satisfacen las condiciones*

$$\sup_{t>1} \left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p} \, ds \right)^{1/p} \left(\int_t^\infty b(C\, s)^{-p'/p} \, ds \right)^{1/p'} < \infty \tag{6.9}$$

$$\sup_{t>1} \left(\int_t^\infty \frac{a(s)}{s^q} \, ds \right) \frac{t^{q-1}}{b(Ct)} < \infty \tag{6.10}$$

entonces, existe una constante C' tal que

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|) \, d\mu \le C' + C' \int_\Omega \Psi(C' \, |f|) \, d\mu,$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$.

Demostración. Sea f en el dominio de T. Por la Proposición 1.5, tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(|Tf|) d\mu &= \int_0^\infty a(t) \mu_{Tf}(t) dt \\ &\le \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) a(t) \mu_{Tf}(t) dt \\ &\le \mu(\Omega) \Phi(1) + \int_1^\infty a(t) \mu_{Tf}(t) dt. \end{aligned}$$

Consideremos $f_t = \min\{|f|, t\}$ y $f^t = f - f_t$. Como T es subaditivo,

$$\mu(\{|Tf| > t\}) \le \mu(\{|Tf^t| > t/2\}) + \mu(\{|Tf_t| > t/2\})$$

para todo $t > 0$. Entonces,

$$\int_1^\infty a(t) \mu_{Tf}(t) dt \le \int_1^\infty a(t) \mu_{Tf^t}(t/2) dt + \int_1^\infty a(t) \mu_{Tf_t}(t/2) dt.$$

Dado que T es de tipo débil restringido (p, p), existe una constante C_1 tal que el primer término de la última expresión está acotado por

$$C_1 \int_1^\infty \frac{a(t)}{t^p} \left(\int_0^\infty \mu_{f^t}(s)^{1/p} ds \right)^p dt$$

y usando la forma de la distribución de f^t resulta igual a

$$C_1 \int_1^\infty \frac{a(t)}{t^p} \left(\int_t^\infty \mu_f(s)^{1/p} ds \right)^p dt,$$

y de manera similar a la prueba del Teorema 2.5, como a y b satisfacen (6.9), podemos asegurar que existe una constante C_2 tal que esta última expresión está acotada por

$$C_2 \int_\Omega \Psi(C_2\,|f|)\,d\mu.$$

Por otro lado, dado que T es de tipo débil (p,p), existe una constante C_3 tal que

$$\int_1^\infty a(t)\mu_{Tf_t}(t/2)dt \leq C_3 \int_1^\infty \frac{a(t)}{t^p} \int_0^\infty \mu_{f_t}(s)\, s^{q-1} ds\, dt.$$

Por la forma de la μ_{f_t} y el Teorema de Fubini, la última integral resulta igual a

$$C_3 \int_1^\infty \frac{a(t)}{t^p} \int_0^t \mu_f(s)\, s^{q-1} ds\, dt = C_3 \int_1^\infty \mu_f(s)\, s^{q-1} \int_s^\infty \frac{a(t)}{t^p} dt\, ds,$$

y si usamos la desigualdad (6.10), es menor o igual que

$$C_4 \int_1^\infty \mu_f(s)\, b(Cs) ds \leq \frac{C_4}{C} \int_\Omega \Psi(C|f|)\, d\mu,$$

para cierta constante C_4.

Finalmente, si tomamos

$$C_5 = \max\{C, C_2, C_2 + C_4/C, \mu(\Omega)\Psi(1)\},$$

tenemos que T satisface la desigualdad modular

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\, d\mu \leq C_5 + C_5 \int_\Omega \Psi(C_5\,|f|)\, d\mu\,,$$

y con esto completamos la demostración. □

6.3. El operador S_β

Sea $\mathbf{m}_\beta$ el operador definido para funciones de $\mathfrak{M}([0,1])$ por

$$\mathbf{m}_\beta(f)(x) = \frac{f(x)}{x^{\beta/2}}$$

y $S_\beta = \mathbf{m}_\beta \circ \bar{\mathcal{M}}_\beta \circ \mathbf{m}_\beta$, donde $\bar{\mathcal{M}}_\beta$ es la maximal fraccionaria en $[0,1]$. Veremos que S_β es de tipo débil restringido $(\frac{2}{2-\beta}, \frac{2}{2-\beta})$ y tipo débil $(\frac{2}{\beta}, \frac{2}{\beta})$. Para esto, estudiaremos primero algunas propiedades de los operadores $\mathbf{m}_\beta$ y $\bar{\mathcal{M}}_\beta$, presentadas en la siguiente proposición.

Proposición 6.1. *En la siguiente enumeración, todas las aplicaciones se satisfacen con acotación entre los espacios.*

a) $\mathbf{m}_\beta : L^{\frac{2}{2-\beta},1} \mapsto L^1$.

b) $\mathbf{m}_\beta : L^{r,\infty} \mapsto L^{s,\infty}$, *para todos s y r tales que* $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{\beta}{2}$.

c) $\mathbf{m}_\beta : L^\infty \mapsto L^{\frac{2}{\beta},\infty}$.

d) $\bar{\mathcal{M}}_\beta : L^1 \mapsto L^{\frac{1}{1-\beta},\infty}$.

e) $\bar{\mathcal{M}}_\beta : L^{\frac{1}{\beta},\infty} \mapsto L^\infty$.

Demostración. Veamos a). Si usamos que la integral de la reordenada del producto es menor o igual que la integral del producto de las reordenadas, tenemos que para cualquier f

$$\|\mathbf{m}_\beta(f)\|_1 = \int_0^\infty \left(\frac{f(y)}{y^{\frac{\beta}{2}}}\right)^*(t)dt \leq \int_0^\infty \frac{f^*(t)}{t^{\frac{\beta}{2}}}dt = \frac{2-\beta}{2}\|f\|_{\frac{2}{2-\beta},1},$$

y con esto probamos a.

Para probar b), sean r y s tales que $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{\beta}{2}$, f en $L^{r,\infty}([0,1])$, $t > \|f\|_{r,\infty}$, y sea $k \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{\|f\|_{r,\infty}}{t} < \frac{1}{2^k}. \tag{6.11}$$

Si llamamos $\gamma = \frac{\beta}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbf{m}_\beta(f)}(t) &= \sum_{j=0}^\infty |\{x \in (\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j}) \ : \ \frac{f(x)}{x^\gamma} > t\}| \\
&\leq \sum_{j=0}^\infty |\{x \in (\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j}) \ : \ f(x)\, 2^{\gamma j} > t\}| \\
&\leq \sum_{j=0}^\infty \text{mín}\{\frac{1}{2^j}, \mu_f(t/2^{\gamma j})\},
\end{aligned}$$

que por la definición (1.13), y usando la desiguladad (6.11) resulta menor o igual que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^\infty \text{mín}\{2^j, \left(\frac{2^{\gamma j}\, \|f\|_{r,\infty}}{t}\right)^r\} &\leq \sum_{j=0}^\infty \text{mín}\{\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{r(k-\gamma j)}}\} \\
&\leq \sum_{0 \leq j \leq \frac{rk}{1+r\gamma}} \frac{1}{2^{rk-r\gamma j}} + \sum_{j > \frac{rk}{1+r\gamma}} \frac{1}{2^j} \\
&\leq \left(\frac{2^{r\gamma}}{2^{r\gamma}-1} + 1\right)\left(\frac{1}{2^k}\right)^{\frac{r}{1+r\gamma}} \\
&\leq \left(\frac{2^{r\gamma}}{2^{r\gamma}-1} + 1\right)\left(\frac{\|f\|_{r,\infty}}{t}\right)^s.
\end{aligned}$$

Si en cambio, $t \leq \|f\|_{r,\infty}$, dado que $\mu_{\mathbf{m}_\beta(f)}(t) \leq \mu([0,1]) = 1$, es inmediato que

$$t\, \mu_{\mathbf{m}_\beta f}(t)^{1/s} \leq \|f\|_{r,\infty},$$

y por lo tanto tenemos b).

Para mostrar c), consideremos f en $L^\infty([0,1])$ y $t>0$. Si $t>\|f\|_\infty$,

$$\begin{aligned}\mu_{m(f)}(t) &= |\{x\in[0,1]:\ \frac{f(x)}{x^{\frac{\beta}{2}}}>t\}| \\ &\le |\{x\in[0,1]:\ \frac{\|f\|_\infty}{x^{\frac{\beta}{2}}}>t\}| = \left(\frac{\|f\|_\infty}{t}\right)^{\frac{2}{\beta}}.\end{aligned}$$

Si $0<t<\|f\|_\infty$, es inmediato que

$$t\mu_{\mathbf{m}_\beta(f)}(t)^{\beta/2}\le\|f\|_\infty.$$

La propiedad d) es el tipo débil $(1,\frac{1}{1-\beta})$ de la maximal fraccionaria (ver Proposición 4.1). Finalmente, para la propiedad e), es suficiente observar que si f está en $L^{\frac{2}{\beta},\infty}([0,1])$, $0<h<1$ y $0<x<1$, tenemos

$$\frac{1}{h^{1-\beta}}\int_x^{x+h} f\le\frac{1}{h^{1-\beta}}\int_0^h f^*(s)ds\le\frac{1}{h^{1-\beta}}\int_0^h\frac{\|f\|_{\frac{1}{\beta},\infty}}{t^\beta}ds=\frac{1}{1-\beta}\|f\|_{\frac{1}{\beta},\infty}.$$

□

Con las propiedades anteriores podemos ver los tipos del operador S_β.

Proposición 6.2. *El operador S_β es de tipo débil restringido $(\frac{2}{2-\beta},\frac{2}{2-\beta})$ y tipo débil $(\frac{2}{\beta},\frac{2}{\beta})$.*

Demostración. De las propiedades a), d) y la propiedad b) con $s=\frac{2}{2-\beta}$ y $r=\frac{1}{1-\beta}$, tenemos que S_β es acotado de $L^{\frac{2}{2-\beta},1}$ en $L^{\frac{2}{2-\beta},\infty}$, y esto coincide con la definición de tipo débil restringido $(\frac{2}{2-\beta},\frac{2}{2-\beta})$. Finalmente, por la propiedad b) con $r=\frac{2}{\beta}$ y $r=\frac{1}{\beta}$, la propiedades e) y c), resulta S_β acotado de $L^{\frac{2}{\beta},\infty}$ en sí mismo, y dado que $L^{\frac{2}{\beta}}\subset L^{\frac{2}{\beta},\infty}$, en particular, de tipo débil $(\frac{2}{\beta},\frac{2}{\beta})$. □

El siguiente resultado que obtiene desigualdades modulares para el operador S_β, nos dice en particular, que las condiciones (6.9) y (6.10) en el Teorama 6.4 son óptimas. También implica que el operador S_β no tiene tipos mejores que la proposición anterior.

Teorema 6.5. *Sea $0<\beta<1$, y supongamos que b es no-decreciente. Existe C' tal que el operador S_β satisface la desigualdad modular*

$$\int_0^1\Phi(|S_\beta f(x)|)\,dx\le C'+C'\int_{[0,1]}\Psi(C'f(x))\,dx \tag{6.12}$$

para toda $f\in\mathfrak{M}([0,1])$ si, y sólo si, para cierta constante C, las funciones a y b satisfacen las condiciones

$$\sup_{t>1}\left(\int_1^t\frac{a(s)}{s^{\frac{2}{2-\beta}}}\,ds\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\left(\int_t^\infty b(C\,s)^{-\frac{2-\beta}{\beta}}\,ds\right)^{\frac{\beta}{2}}<\infty \tag{6.13}$$

$$\sup_{t>1}\left(\int_t^\infty\frac{a(s)}{s^{2/\beta}}\,ds\right)\frac{t^{2/\beta-1}}{b(Ct)}<\infty. \tag{6.14}$$

Demostración. Si a y b satisfacen las condiciones (6.13) y (6.14), por la Proposición 6.2 y el Teorema 6.4 podemos asegurar que S_β satisface la desigualdad modular (6.12).

Para ver la otra implicación, observemos que si f pertenece a $\mathfrak{M}([0,1])$ y x pertenece al intervalo $[0,1]$, entonces

$$S_\beta f(x) \geq \frac{1}{x^{\beta/2}} \frac{1}{x^{1-\beta}} \int_0^x \frac{f(y)}{y^{\beta/2}}\, dy = \frac{2-\beta}{2} H_{\frac{2}{2-\beta}} f(x).$$

Por lo tanto, si S_β satisface la desigualdad modular (6.12), también lo hace $H_{\frac{2}{2-\beta}}$, y por el Teorema 2.6, resulta entonces que a y b deben satisfacer la condición (6.13).

Para ver que a y b también satisfacen la condición (6.14), sea $t > 1$ y consideremos la función

$$f_t = t\chi_{[0,1]}.$$

Entonces, para $0 \leq x \leq 1$, tenemos

$$S_\beta f_t(x) \geq \frac{t}{x^{\beta/2}} \int_0^1 \frac{1}{y^{\beta/2}}\, dy = \frac{2}{2-\beta} \frac{t}{x^{\beta/2}} \geq \frac{t}{x^{\beta/2}}.$$

Podemos entonces estimar la distribución de $S_\beta f_t$ para $s > t$,

$$\begin{aligned} \mu_{S_\beta f_t}(s) &\geq \left|\left\{x \in [0,1] : \ \frac{t}{x^{\beta/2}} > s\right\}\right| \\ &= \left|\left\{x \in [0,1] : \ \left(\frac{t}{s}\right)^{2/\beta} > x\right\}\right| \\ &= \left(\frac{t}{s}\right)^{2/\beta}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Por la Proposición 1.5, y la estimación (6.15),

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi(S_\beta f_t(x))\, dx &= \int_0^\infty a(s)\, \mu_{S_\beta f_t}(s)\, ds \\ &\geq t^{2/\beta} \int_t^\infty \frac{a(s)}{s^{2/\beta}}\, ds. \end{aligned}$$

Dado que para todo $t > 1$, existe C tal que S_β satisface la desigualdad

$$\int_0^1 \Phi(|S_\beta f_t|)\, d\mu \leq C + C \int_0^1 \Psi(C\,|f_t|)\, d\mu\,,$$

entonces

$$t^{2/\beta} \int_t^\infty \frac{a(s)}{s^{2/\beta}}\, ds \leq C + C \int_0^1 \Psi(C\,|f_t|)\, d\mu = C + \Psi(Ct) \leq 2\Psi(C_1 t)\,,$$

donde C_1 es tal que $\Psi(C_1) > C$. Finalmente, ya que b es no-decreciente

$$2\Psi(C_1 t) \leq 2C_1 t\, b(C_1 t).$$

Con esto probamos que se satisface (6.14). $\square$

6.4. Medida infinita

Hasta el momento, siempre hemos trabajado sobre un espacio Ω con medida finita. En esta sección obtendremos resultados de interpolación sin suponer que el espacio tiene medida finita. Dadas Ψ y Φ, la desiguald modular que nos interesa en este contexto es que exista una constante C tal que

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\,d\mu \leq C \int_\Omega \Psi(C\,|f|)\,d\mu\,, \tag{6.16}$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$. Notemos la diferencia con la desigualdad 2.1 en la que aparece la constante C sumando en el miembro derecho.

Cada demostración de los siguientes resultados, puede realizarse siguiendo las lineas de la demostración de su análogo en medida finita. El lector no encontrará ninguna dificultad en adaptar las pruebas, ya que las modificacines necesarias, en muchos casos simplifican cada demostración.

Teorema 6.6. *Sea T de tipo débil (p, p) con $p \geq 1$, y tipo fuerte (∞, ∞). Si para cierta constante C, las funciones a y b satisfacen la condición*

$$t^{p-1}\int_0^t \frac{a(s)}{s^p}\,ds \leq C\,b(C\,t)\,, \qquad \textit{para todo } t \geq 0, \tag{6.17}$$

entonces, extiste una constante C' tal que

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\,d\mu \leq C' \int_\Omega \Psi(C'\,|f|)\,d\mu\,,$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$.

Teorema 6.7. *Sea $p \geq 1$ y b monótona. Existe una constante C' tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|\mathcal{M}_p f(x)|)\,dx \leq C' \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(C'\,|f(x)|)\,dx\,,$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ si, y sólo si, se satisface (6.17).

Teorema 6.8. *Sea T un operador de tipo débil restringido (p, p) con $1 < p < \infty$, y de tipo fuerte (∞, ∞). Sea $p' = \frac{p}{p-1}$. Si existe una constante C, tal que a y b satisfacen*

$$\sup_{t>0}\left(\int_0^t \frac{a(s)}{s^p}\,ds\right)^{1/p}\left(\int_t^\infty b(C\,s)^{-p'/p}\,ds\right)^{1/p'} < \infty \tag{6.18}$$

entonces, extiste una constante C' tal que

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\,d\mu \leq C' \int_\Omega \Psi(C'\,|f|)\,d\mu\,,$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$.

Teorema 6.9. *Sea $p>1$ y b monótona. Existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(M_\alpha^- f(x))dx \le C \int_{\mathbb{R}} \Psi(C|f(x)|)dx,$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ si, y sólo si, se satisface (6.18).

Teorema 6.10. *Sea $0<\alpha<1$ y b monótona. Existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(M_\alpha^- f(x))dx \le C \int_{\mathbb{R}} \Psi(C|f(x)|)dx,$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ si, y sólo si, se satisface (6.18) *con $p = 1/\alpha$. El mismo resultado es válido para M_α^+.*

Teorema 6.11. *Sea T un operador que satisface la desigualdad* (5.2)*. Si para alguna constante C, a y b satisfacen la condición*

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \frac{a(s)}{s^p} \log^{p(j-1)}(t/s)\, ds \right)^{1/p} \left(\int_t^\infty b(C\, s)^{-p'/p}\, ds \right)^{1/p'} < \infty \tag{6.19}$$

entonces, existe C' tal que

$$\int_\Omega \Phi(|T^{(j)} f|)\, d\mu \le C' \int_\Omega \Psi(C'\,|f|)\, d\mu\,,$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$.

Teorema 6.12. *Sea $0<\alpha<1$ y b monótona. Existe una constante C tal que la j-ésima iteración del operador M_α^- satisface la desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi((M_\alpha^-)^{(j)} f) \le C \int_{\mathbb{R}} \Psi(C|f|)$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ si, y sólo si, las funciones a y b satisfacen la condición (6.19) *con $p = 1/\alpha$.*

Teorema 6.13. *Sea $0<\alpha<1$. Si a y b satisfacen la condición* (6.19) *con $p = 1/\alpha$, entonces existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi((M_\alpha^F f) \le C \int_{\mathbb{R}} \Psi(C|f|)$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$.

Teorema 6.14. *Sea T un operador acotado de $L_{p,q}$ en $L_{p,\infty}$, con $1 \le q \le p$, y de tipo fuerte (∞,∞). Supongamos que b es creciente. Si a y b satisfacen la desigualdad*

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \frac{a(s)}{s^p} ds \right)^{1/q} \left(\int_{Ct}^\infty b(s)^{-\frac{q}{p-q}} s^{\frac{pq-p}{p-q}}\, ds \right)^{p-q} < \infty$$

para $1 \le q < p$, o bien la condición (6.17) *en el caso $q = p$, entonces existe una constante C', tal que*

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)d\mu \le C' \int_\Omega \Psi(C'f)d\mu \quad \text{para toda } f \in \mathfrak{D}.$$

Teorema 6.15. *Sea $1 < p < q < \infty$ y T un operador de tipo débil restringido (p,p) y tipo débil (q,q), donde $1 < p < q < \infty$. Si existe una constante C tal que a y b satisfacen las condiciones*

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \frac{a(s)}{s^p}\, ds \right)^{1/p} \left(\int_t^\infty b(C\,s)^{-p'/p}\, ds \right)^{1/p'} < \infty \tag{6.20}$$

y

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \frac{a(s)}{s^q}\, ds \right) \frac{t^{q-1}}{b(Ct)} < \infty \tag{6.21}$$

entonces, existe C' tal que

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\, d\mu \leq C' \int_\Omega \Psi(C'\,|f|)\, d\mu\,,$$

para toda $f \in \mathfrak{D}$.

Teorema 6.16. *Sea $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ y $T : \mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{M}$, un operador de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\beta)$ y de tipo $(\frac{1}{\alpha-\beta}, \infty)$. Supongamos que $b(t)$ y $\frac{t^{1-\alpha+\beta}}{b(t)^{\alpha-\beta}}$ son funciones crecientes. Si para alguna constante C, a y b satisfacen*

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^{\frac{t^{1-\alpha+\beta}}{b(C\,t)^{\alpha-\beta}}} \frac{a(s)}{s^{1/\beta}} ds \right)^\beta \left(\int_t^\infty b(C\,s)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} ds \right)^{1-\alpha} < \infty \tag{6.22}$$

luego, existe una constante C', tal que

$$\|Tf\|_\Phi \leq C'\, \|f\|_\Psi \qquad \text{para toda } f \in \mathfrak{D}.$$

6.5. S_β en la semirrecta

En la Sección 6.3 hemos definido el operador S_β en el intervalo $[0,1]$. Ahora, lo consideramos definido de manera similar en la semirrecta $\mathbb{R}_0^+$, esto es, para $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_0^+)$ y $x \geq 0$,

$$S_\beta f(x) = \frac{1}{x^{\frac{\beta}{2}}} \bar{\mathcal{M}}_\beta \left(\frac{f(x)}{x^{\frac{\beta}{2}}} \right),$$

donde $\bar{\mathcal{M}}_\beta$ es la maximal fraccionaria en $\mathbb{R}_0^+$.

De la misma manera que en la Sección 6.3, se prueba que S_β, es de tipo débil restringido $(\frac{2}{2-\beta}, \frac{2}{2-\beta})$ y tipo débil $(\frac{2}{\beta}, \frac{2}{\beta})$.

A continuación presentamos el siguiente resultado, que nos dice que las condiciones para las funciones a y b en el Teorama 6.15 son óptimas.

Teorema 6.17. *Sea $0 < \beta < 1$, y supongamos que b es no-decreciente. Existe C' tal que el operador S_β satisface la desigualdad modular*

$$\int_0^\infty \Phi(|S_\beta f(x)|)\, dx \leq C' \int_0^\infty \Psi(C' f(x))\, dx \tag{6.23}$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_0^+)$ si, y sólo si, para cierta constante C, las funciones a y b satisfacen las condinciones

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \frac{a(s)}{s^{\frac{2}{2-\beta}}}\, ds \right)^{\frac{2-\beta}{2}} \left(\int_t^\infty b(C\, s)^{-\frac{2-\beta}{\beta}}\, ds \right)^{\frac{\beta}{2}} < \infty \tag{6.24}$$

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \frac{a(s)}{s^{2/\beta}}\, ds \right) \frac{t^{2/\beta-1}}{b(Ct)} < \infty \tag{6.25}$$

Demostración. La demostración se realiza de manera similar a su versión en medida finita. Primero, notemos que si f pertenece a $\mathfrak{M}(\mathbb{R}_0^+)$ y $x \geq 0$, entonces

$$S_\beta f(x) \geq \frac{2}{2-\beta}\, H_{\frac{2}{2-\beta}} f(x).$$

Por lo tanto, si S_β satisface la desigualdad (6.23), también $H_{\frac{2}{2-\beta}}$, y por el Teorema 6.9 tenemos que a y b deben satisfacer la condición (6.24).

Para ver que a y b satisfacen la condición (6.24), sea $t > 0$ y consideremos la función

$$f_t = t\chi_{[0,1]}.$$

Tenemos, para $0 \leq x \leq 1$,

$$S_\beta f_t(x) \geq \frac{t}{x^{\beta/2}}.$$

Podemos entonces estimar la distribución de $S_\beta f_t$ para $s > t$,

$$\begin{aligned} \mu_{S_\beta f_t}(s) &\geq |\{x \geq 0 :\ S_\beta f_t(x) > s\}| \\ &\geq |\{0 \leq x \leq 1 :\ \frac{t}{x^{\beta/2}} > s\}| \\ &= \left(\frac{t}{s}\right)^{2/\beta}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Por un lado, como b es no decreciente, tenemos

$$\int_0^\infty \Psi(C\,|f_t(x)|)\, dx = \Psi(Ct) \leq Ct\, b(Ct).$$

Por otro lado, por la Proposición 1.5, y la estimación (6.26),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Phi(C\,|S_\beta f_t(x)|)\, dx &= \int_0^\infty a(s)\, \mu_{S_\beta f_t}(s)\, ds \\ &\geq t^{2/\beta} \int_t^\infty \frac{a(s)}{s^{2/\beta}}\, ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que para todo $t > 0$, S_β satisface la desigualdad

$$\int_0^\infty \Phi(S_\beta f_t(x))\, dx \leq C \int_0^\infty \Psi(C\,|f_t(x)|)\, dx\,,$$

y entonces, tenemos (6.21).

$\square$

Si Ψ tienen un tipo inferior mayor que $\frac{2}{2-\beta}$ y un tipo superior menor que $\frac{2}{\beta}$, entonces, tanto en 6.13 como en 6.14, los miembros derecho e izquierdo son equivalentes, y por lo tanto el operador S_β satisface la desigualdad modular

$$\int_0^\infty \Psi(|S_\beta f(x)|)\,dx \le C\int_0^\infty \Psi(C|f(x)|)\,dx$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_0^+)$, con C independiente de f, y consecuentemente, también desigualdades en norma p cuando $\frac{2}{2-\beta} < p < \frac{2}{\beta}$.

Si I es un intervalo de la semirrecta $\mathbb{R}_0^+$, los resultados de la Sección 6.3, nos permiten obtener cuál es la mejor integrabilidad local de $S_\beta(f)$ para las funciones del espacio $L^\Psi(I)$, cuando Ψ es una función que está cerca de los extremos. Por ejemplo, si $\Phi(t) = t^{\frac{2}{2-\beta}}$, podemos tomar la función

$$\Psi(t) = [t\log(1+t)]^{\frac{2}{2-\beta}}.$$

El par Ψ y Φ satisface ambas desigualdades (6.13) y (6.14), entonces podemos ver que existe C tal que

$$\int_I |S_\beta f(x)|^{\frac{2}{2-\beta}}\,dx \le C|I| + C\int_I \Psi(C|f(x)|)\,dx$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(I)$. Para este par, los miembros derecho e izquierdo de (6.13) son equivalentes, y por lo tanto la función Ψ es óptima.

En el otro extremo, si tomamos $\Psi(t) = t^{2/\beta}$, entonces por la desiguadad 6.14, la función a debe satisfacer,

$$\int_t^\infty \frac{a(s)}{s^{2/\beta}}\,ds < \infty$$

para todo $t > 0$, y esto el equivalente a decir que exista C' tal que

$$\int_{C'}^\infty \frac{a(s)}{s^{2/\beta}}\,ds < \infty, \tag{6.27}$$

por lo tanto, todas las Φ que satisfagan 6.27, también satisfacen que existe C tal que

$$\int_I \Phi(S_\beta f(x))\,dx \le C|I| + C\int_I |f(x)|^{\frac{2}{\beta}})\,dx$$

para toda $f \in \mathfrak{M}(I)$. Esto nos dice que en este caso no existe una Φ óptima .

Bibliografía

[1] C. Benett and R. Sharpley. *Interpolation of Operators.* Academic Press, Inc., 1998.

[2] A. Cianchi. An optimal interpolation theorem of Marcinkiewicz type in Orlicz spaces. *Journal of Functional Analysis*, 153:357–381, 1998.

[3] A. Cianchi. Hardy inequalities in Orlicz spaces. *Trans. AMS*, 351(6):2456–2478, 1999.

[4] M. de Guzmán. *Real Variable Methods in Fourier Analysis.* North-Holland Publishing Company, 1981.

[5] J. Duoandikoexea. *Anï¿½isis de Fourier.* Addison-Wesley/Universidad Autï¿½oma de Madrid., 1995.

[6] N. Fava and F. Zo. *Medida e Integral de Lebesgue.* Red Oímpica, 1996.

[7] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their aplications.* John Willey and Sons, 1984.

[8] E. Harboure, O. Salinas, and B. Viviani. Sharp estimates for some iterated operators in Orlicz spaces. To appear in Rocky Mountain Journal of Mathematics.

[9] E. Harboure, O. Salinas, and B. Viviani. Orlicz boundedness for certain classical operators. *Colloquium Mathematicum*, 91(2):263–282, 2002.

[10] R.A. Hunt. On $L(p,q)$ spaces. *L'Ens. Math.*, 12:249–275, 1966.

[11] Hiro-O Kita. On a converse inequality for maximal functions in Orlicz spaces. *Studia Math.*, 118(1):1–10, 1996.

[12] Hiro-O Kita. On maximal functions in Orlicz spaces. *Proc. AMS*, 124(10):3019–3025, October 1996.

[13] M. Krbec and V. Kokilashvili. *Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces.* World Scientific Publishing Co., 1991.

[14] L. Maligranda. *Orlicz Spaces and Interpolation.* Universidade Estadual de Campinas, 1989. Seminars in Mathematics.

[15] J. Marcinkiewicz. Sur l'interpolation d'operations. *C. R. Acad. des Sciences, Paris*, 208:1272–1273, 1939.

[16] F. J. Martin-Reyes and A. de la Torre. Some weighted inequalities for general one-side maximal operator. *Studia Math.*, 122(1):1–15, 1997.

[17] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. AMS*, 165:207–226, 1972.

[18] B. Muckenhoupt. Weighted reverse weak type inequalities for the Hardy-littlewood maximal function. *Pacific J. Math.*, 117(2):371–377, 1985.

[19] C. J. Neugebauer. Orlicz-type integral inequalities for operators. *J. Korean Math. Soc.*, 38(1):163–176, 2001.

[20] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz Spaces.* Marcel Dekker Inc., 1991.

[21] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princenton University Press, 1970.

[22] E. M. Stein. *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princenton University Press, 1993.

[23] E. M. Stein and G. Weiss. *Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princenton University Press, 1971.

[24] A. Torchinsky. *Real-variable Methods in Harmonic Analysis.* Academic Press, 1986.

[25] A. Zygmund. On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations. *Journal de Math.*, 35:223–248, 1956.

Índice alfabético