PRODUCTOS INFINITOS NUMÉRICOS.

Mara Perez[1]

Facultad de Ingeniería Química - UNL[1]
Director/a: Gladis Pradolini
Codirector/a: Roberto Scotto

Área: Ciencias Exactas

Palabras claves: Productos infinitos, series, convergencia.

INTRODUCCIÓN

Los productos infinitos, como su nombre lo indica, deben ser entendidos de manera análoga a las series numéricas, pero cambiando las sumas parciales por productos parciales. Al tratarse de un producto infinito aparecen naturalmente nociones de convergencia, como ocurre en las series. De hecho, Si a_n es una sucesión de números positivos, se tiene que la convergencia del producto infinito de ellos es equivalente a la convergencia de la serie numérica de sus logaritmos naturales, esto es

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \; si \; y \; sólo \; si \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n < \infty$$

Un ejemplo interesante de producto infinito es el producto de Viète (1593), que se considera la primera representación infinita de π y que se define por

$$\frac{2}{\pi} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\right)\cdots$$

,

pudiendo demostrarse usando argumentos geométricos básicos. Otro producto infinito conocido relacionado con π es el de Wallis (1656), definido por

1 Proyecto en el que se enmarca: Caracterización de espacios funcionales asociados a sistemas ortogonales, I+D, año 2017, UNL, Roberto Scotto.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\ldots$$

La identidad anterior puede probarse usando nociones elementales de Álgebra básica, el Teorema de Pitágoras y la fórmula del área de un círculo de radio r.

En 1735 Euler prueba la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

que solventaba el llamado Problema de Basilea, para lo cual utilizó la fórmula del producto infinito de Euler para la función seno. Si bien la prueba original de Euler es errónea, el resultado es correcto y ha sido motivo de discusión para los científicos de la época. Estos son solo algunos ejemplos de productos infinitos de interés, entre los tantos que existen en la literatura.

OBJETIVOS

El objetivo central es avanzar en el conocimiento sobre productos infinitos numéricos y sus aplicaciones usando como soporte la teoría de series numéricas. Como objetivos particulares se propone:

- Establecer una conexión entre la teoría de productos infinitos numéricos y series numéricas, analizando propiedades de convergencia, similitudes y ventajas de utilizar una o la otra.
- Ver aplicaciones y ejemplos de productos infinitos numéricos.

METODOLOGÍA

Con el fin de estudiar la convergencia, las nociones básicas y las propiedades, como primera actividad abordamos la lectura del capítulo VII de [K] correspondiente a productos infinitos numéricos. Definimos así las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales es posible definir productos infinitos que converjan a un número real no nulo.

Sea $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ una sucesión de números. Queremos definir el producto infinito $\prod_{i=1}^{\infty} u_i$, para lo cual debemos, en primer lugar, darle sentido a la idea de multiplicar números infinitamente. Definimos el *producto parcial* como

$$P_n=\prod_{i=1}^{n} u_i$$

es decir, al producto de los primeros *n* factores. De esta manera, diremos que un producto infinito converge, si existe el límite $\lim_{n\to\infty} P_n$ y además es no nulo.

Esta última observación es necesaria ante la ambigüedad que genera el cero. Un ejemplo de ello es de naturaleza algebraica: Se sabe que en un producto finito el valor del producto es nulo si y sólo si alguno de los factores es nulo. Sin embargo, si consideramos productos infinitos en los que los factores son cada vez más cercanos a cero, el límite es también cero. En este caso, diremos que el producto infinito *diverge* a cero.

A partir de allí, se derivan algunos resultados importantes, teniendo como eje principal la relación que pueda establecerse entre un producto infinito y una serie numérica asociada. Entre los principales:

1. Si un producto infinito converge entonces $\lim_{n \to \infty} u_n = 1$.

Nótese el paralelismo de esta propiedad con la correspondiente para series numéricas: Si $\sum a_n$ converge entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

2. Un producto de la forma $\prod_{n=1}^{\infty} (1 \pm a_n)$, con $a_n > 0$, converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

3. Si $|a_n| < 1$, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge sí y sólo si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \log(1 + a_i)$ converge.

4. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente y $|a_n| < 1$, entonces $P_n \quad e^{S_n}$, dónde S_n es la n-ésima suma parcial de la serie $\sum a_n$. Esto es, el producto y la serie convergen o divergen simultáneamente.

Para cada uno de los resultados anteriores, abordamos distintos ejemplos propuestos. Además, resultó de interés encontrar productos infinitos que representen el carácter *necesario* y/o suficiente de algunas condiciones. Por ejemplo, el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} n$ diverge puesto que el término n-ésimo *n* no tiende a uno, así como la divergencia del producto

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + (-1)^n \sqrt{\frac{2}{n+1}}\right)$$

muestra la necesidad de tener la condición $a_i > 0$ en el punto **2**.

CONCLUSIONES

Algunas aplicaciones de lo expuesto anteriormente resultan ser los siguientes.

• El producto $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Este resultado puede verse como otra prueba más sencilla de que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Si desarrollamos el producto parcial correspondiente, puede verse que $P_n = n + 1$, de donde fácilmente se deduce que $P_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Cabe observar también que es posible estudiar la divergencia de este producto con cualquiera de los 4 puntos presentado antes. Por ejemplo, usando 4 y suponiendo cierto que la serie armónica diverge.

• El producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)$ converge a 2.

Lo interesante de este resultado es que los productos parciales pueden relacionarse con propiedades de los números de Fermat, que se definen como los enteros de la forma $F_n=2^{2^n}+1$, donde n es un natural. Estos números tienen la propiedad de que $F_n=F_0 F_1 \ldots F_{n-1}+2$. Entonces, si escribimos el término n-ésimo del producto como $\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$ y usamos la propiedad de recurrencia dada, tenemos que el P_n es

$$P_n=\frac{F_{n+1}-2}{2^{\sum 2^j}}.$$

Luego, utilizando la suma de una serie geométrica, se tiene

$$P_n=\frac{F_{n+1}-2}{2^{\sum 2^j}}=\frac{F_{n+1}-2}{2^{2^{n+1}+1}}=2\left(1-\frac{1}{F_{n+1}-1}\right)$$

de donde se deduce que $P_n \to 2$ cuando $n \to \infty$.

• El producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{an-1}\right)$ converge a $\sqrt[a]{2}$, para valores de a distintos de $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$.

Si prueba que

$$\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{ak-1}\right)=\prod_{v=n+1}^{2n}\left(1-\frac{1}{va}\right)^{-1},$$

se puede deducir el resultado utilizando el desarrollo en series de Taylor de la función logarítmica, la obtención de la constante de Euler γ por el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\log n\right]=\gamma$$

y escribiendo

$$\sum_{v=n+1}^{2n}\frac{1}{v}=\sum_{v=1}^{2n}\frac{1}{v}-\log(2n)-\left(\sum_{v=1}^{2n}\frac{1}{v}-\log n\right)+\log 2.$$

De estos resultados y la ecuación antes obtenida para el producto parcial, se deduce que

$$\prod_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{1}{va}\right)\to \exp\left\{\frac{-1}{a}\log 2\right\}$$

o equivalentemente

$$\prod_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{1}{va}\right)^{-1}\rightarrow 2^{\frac{1}{a}}$$

como se quería probar. Resta probar la afirmación hecha al comienzo, que fácilmente se hace por inducción.

Sintetizando otros resultados:

- $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ converge a 1.
- $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ converge si la serie $\sum_{n=1}^{n}|x_n|^2$ converge.
- $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^n}$ converge a $\frac{2}{\pi}$. Cabe destacar que para probar este resultado se utiliza el producto de Viète, mencionado en el plan de trabajo propuesto (ver anexo).
- $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$ converge a $\frac{\sin x}{x}$. Para este caso, se utilizan identidades trigonométricas. Notar que este resultado permite escribir la función seno como un producto infinito.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

[A] Artzrouni, M. (1986) *On the Convergence of Infinite Products of Matrices*, Linear Algebra and its Applications 74, 11-21.

[K] Knopp, K. (1951) *Theory and Application of Infinite Series*, Blackie & Son Limited, London and Glasgow,.