RAZONES DE SER DEL NÚMERO RACIONAL DESDE UNA PERSPECTIVA EPISTEMOLÓGICA

Pilatti, Belén

Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL
Director/a: Scaglia, Sara

Área: Humanidades

Palabras claves: número racional, legitimidad, sentido.

INTRODUCCIÓN

La preocupación por la construcción del sentido de las nociones matemáticas estudiadas por parte de los alumnos es compartida por todos los miembros de la comunidad de educadores matemáticos. En torno a esta problemática, es posible identificar distintos enfoques que ponen el acento en diferentes cuestiones que atañen al trabajo matemático en el aula.
La Teoría Antropológica de lo Didáctico asume sobre esta cuestión una perspectiva que caracterizamos como epistemológica. Chevallard (2013) afirma que los saberes matemáticos son obras que tienen una o varias razones de ser, que motivaron su creación y su empleo. Un determinado saber permite brindar una respuesta a una o varias preguntas. Este autor sostiene una mirada crítica sobre la tendencia a ocultar en la enseñanza las razones de ser de los saberes, que son valorados por sí mismos. Los saberes “se convierten, pues, en monumentos que uno visita, que uno reverencia y frente a los cuales conviene inclinarse sin siquiera intentar conocer las razones de ser que antaño le dieron vida” (p.25).
En el marco de esta teoría, Bosch, García, Gascón y Ruiz Higueras (2006; p.42) afirman que, para que una cuestión matemática pueda estudiarse con sentido en la escuela es necesario:

- Que provenga de cuestiones que la Sociedad propone para que se estudien en la escuela (legitimidad cultural o social).
- Que aparezca en ciertas situaciones ‘umbilicales’ de la matemática, esto es, situadas en la raíz central de las matemáticas (legitimidad matemática).
- Que conduzca a alguna parte, esto es, que esté relacionada con otras cuestiones que se estudian en la escuela, sean matemáticas o relativas a otras disciplinas (legitimidad funcional)

Si para una cuestión determinada no se construye una jerarquía que cumpla los postulados (1), (2) y (3), tal cuestión carece de sentido, puesto que ha desaparecido la razón de ser de su estudio en la escuela.

Una segunda perspectiva para abordar la construcción del sentido, que denominamos sociocultural, pone el foco en el papel de las interacciones que se producen entre los sujetos durante el trabajo en el aula de matemática.

Título del proyecto: La construcción del sentido en el aula de matemática desde distintas perspectivas teóricas
Instrumento: CAI+D Tipo I Proyectos de Investigación (PI)
Año convocatoria: 2016
Organismo financiador: UNL
Director/a: Scaglia, Sara

OBJETIVOS

Se plantea como objetivo general de la investigación estudiar la problemática de la construcción del sentido de la noción de número racional desde las perspectivas epistemológica y sociocultural. Como objetivos específicos, se propone: caracterizar las razones de ser de la noción de número racional; diseñar tareas que atiendan a las razones de ser caracterizadas para los números racionales y, finalmente, analizar en qué medida las interacciones en el aula influyen en los sentidos construidos en torno a la noción de número racional.
En este trabajo se describen algunos avances realizados para abordar el primero de los objetivos específicos.

METODOLOGÍA

En el marco de la modalidad cualitativa, para cumplimentar el primer objetivo específico, se lleva a cabo una investigación documental que Yuni y Urbano (2003) definen como:

> "estrategia metodológica de obtención de información, que supone por parte del investigador el instruirse acerca de la realidad objeto de estudio a través de documentos de diferente materialidad (escritos, visuales, numéricos, etc.), con el fin de acreditar las justificaciones e interpretaciones que realiza en el análisis y reconstrucción de un fenómeno que tiene características de historicidad" (p.74-75)

Los documentos analizados son documentos curriculares, investigaciones en educación matemática y libros de educación matemática y de matemática.

Legitimidad del estudio de número racional en la escuela secundaria

Legitimidad cultural o social
El currículo de matemática de la provincia de Santa Fe (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2014) se organiza en torno a cuatro ejes (Números y Operaciones, Geometría y Medida, Álgebra y Funciones y Estadística y Probabilidad). Al interior de cada eje se incluye un listado de nociones matemáticas a abordar. El estudio de los números racionales se propone en el Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada durante los tres primeros años en el eje denominado Números y Operaciones.
En primer año se plantea explícitamente el estudio de los "Números Racionales Positivos en su expresión fraccionaria y como número decimal" (p.53). Señalamos que no es lo mismo 'expresión decimal' que 'número decimal', por lo cual no es claro el alcance de esta frase. Se alude a la recuperación de los distintos significados para la noción de fracción: razón, porcentaje, escala, probabilidad y punto sobre la recta numérica. Se sugiere el abordaje de la noción de densidad a partir de la representación de los números en la recta numérica.
En segundo año se propone trabajar también con distintas escrituras y se añade la notación científica. Se hace en esta oportunidad un uso adecuado de 'expresión decimal'. Se incluye referencia a "Propiedades de equivalencia, orden, discretitud y densidad de los Números Racionales" (p.55). Cabe señalar que es inadecuado atribuir la propiedad de discretitud al conjunto de números racionales.
En tercer año se plantea la recuperación de nociones trabajadas en años anteriores y se sugiere el estudio de la propiedad de densidad en la recta numérica a partir de la utilización de recursos tecnológicos.
Según Bosch et al. (2006) una organización como la descripta favorece la desarticulación del currículo y la desaparición de las razones de ser del estudio de las nociones matemáticas en la escuela. Si bien se asume que los contenidos forman parte de una organización mayor (las

matemáticas) no se especifica el modo de articular estos contenidos para estudiarlos en las instituciones escolares. En el diseño curricular analizado se atribuye un papel central a la resolución de problemas y se asigna al profesor la tarea de "seleccionar, secuenciar y vincular los contenidos explicitados en los distintos ejes de estas Orientaciones, favoreciendo la interrelación e integración en situaciones que problematicen el conocimiento" (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2014, p.48). Bosch et al. (2006) afirman, sin embargo, que el trabajo del profesor queda relegado a los últimos niveles de determinación del currículo (tema, sector) y por tanto su incidencia es local y en grado insignificante.

Legitimidad matemática

Con respecto a la legitimidad matemática, Fava (1978) afirma que existen dos formas de llegar al concepto de número racional. La primera surge de la "conveniencia de resolver exactamente el problema de la división, para lo cual los números enteros resultan insuficientes" (p.49). En términos algebraicos refiere a que la ecuación $a\,.\,x = b$ siendo a y b números enteros y a distinto de cero, que sólo tiene solución en el conjunto de los números enteros cuando b es múltiplo de a, siempre tiene solución en el conjunto de los números racionales. Saiz, Gorostegui y Vilotta (2011) afirman que esta cuestión debería trabajarse en el nivel secundario. La existencia de la solución se basa en el hecho de que el conjunto de los racionales con las operaciones de adición y multiplicación usuales tiene estructura de cuerpo: la solución de la ecuación es $x = b\,.\,a^{-1}$ donde a^{-1} es el inverso multiplicativo de a, siendo a no nulo.

La segunda forma planteada por Fava para llegar al número racional refiere a la necesidad de medir cantidades de magnitudes (longitud, área, volumen, masa, tiempo, etc.). Según el autor, el número racional permite expresar la relación entre dos cantidades de cualquier magnitud cuando éstas son conmensurables.

En términos de la magnitud longitud, Fava define "diremos que las longitudes $A = \bar{a}$ y $B = \bar{b}$ son conmensurables (o bien que los segmentos a y b lo son), si existe un elemento $\mathrm{r} \in \mathrm{Q}_{+}$ tal que $A = rB$. En tal caso, el número r se llama el cociente (o razón) entre A y B y se escribe $r = A/B$" (p.56). Este autor propone una primera definición de número racional en términos de una función definida de L en L, siendo L el conjunto de todas las longitudes de segmentos. Una limitación que el mismo autor plantea para esta definición es que sólo abarca a los números racionales positivos. Con el fin de superarla se propone una nueva definición en términos de clases de equivalencias entre pares ordenados de números enteros (Fava, 1978; Freudenthal, 1983; Epelbaum y Chena, 1985).

Otro aspecto de la noción de número racional que interesa destacar es la propiedad de densidad mencionada, que refiere a que dados dos racionales a y b tales que $a < b$, existe siempre otro racional c tal que $a < c < b$ (Epelbaum y Chena, 1985).

Legitimidad funcional

La noción de número racional permite dar respuestas a cuestiones problemáticas vinculadas con la propia matemática y con otras disciplinas. Distintos autores (Llinares Ciscar y Sánchez García, 2000; Freudenthal, 1983) enumeran diversos significados para la noción de fracción. Seguimos a Llinares Ciscar y Sánchez García (2000) que proponen las siguientes interpretaciones:

a) La relación parte-todo y la medida: se utiliza para expresar la relación que existe entre un todo (continuo o discreto) y el número de partes congruentes en que éste se ha dividido (cuando son conmensurables).

b) Las fracciones como cociente: interpretación que asocia la fracción con la operación de dividir un número natural por otro.

c) La fracción como razón: se interpreta a la fracción como un índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud. Dos aspectos de esta interpretación son la probabilidad y el porcentaje.
d) La fracción como operador: refiere al papel de la fracción cuando se interpreta como algo que actúa sobre una situación y la modifica.
En la modelización matemática de situaciones en las que se ponen en juego una o más magnitudes (escalares o vectoriales), dada una unidad se asigna a cada cantidad de magnitud un número real y viceversa. No obstante, "ninguna medición con instrumentos podrá devolver una medida exacta. El número racional es la respuesta exacta en la modelización matemática de la situación real" (Barrero et al., 2006, p.12). Esa es la razón por la cual es bastante común utilizar el contexto de la medida para abordar el estudio de los números racionales en la escuela secundaria. Sadovsky (2005) sostiene que "la referencia a la medición no permite atrapar algunas ideas esenciales inherentes al funcionamiento de los números racionales, como por ejemplo la noción de densidad" (p.104). Para interpretar esta noción, por tanto, es preciso abandonar el contexto de la medición.

CONCLUSIONES

Sin pretensiones de exhaustividad, consideramos que en el análisis realizado se explicitaron aspectos centrales del número racional que resultan útiles para considerar en el diseño de situaciones problemáticas para abordarlo con sentido en la escuela. En particular mencionamos: la posibilidad de hallar (cuando ésta existe) la solución de una ecuación de primer grado en una variable, la consideración del contexto de medición como una vía de entrada que, por un lado, permite abordar la noción de conmensurabilidad pero que, por el otro, resulta insuficiente para atrapar la densidad del conjunto de números racionales, y, finalmente, el reconocimiento de diversos significados que dan cuenta de la utilidad de la fracción para la interpretación de situaciones de la matemática, de otras disciplinas y de la vida cotidiana.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Barrero, H., Beltrán, S., Bifano, F., Carpintero, C., Fioriti, G., Itzcovich, H., Sessa, C. y Veiga, S., 2006. Matemática: Números racionales. Ministerio de Educación, Buenos Aires.
Bosch, M., García, F.J., Gascón, J. y Ruiz Higueras, L., 2006. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Educación Matemática, 18(2), 37-74.
Chevallard, Y., 2013. La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica. Libros del Zorzal, Buenos Aires.
Epelbaum, M. y Chena, L., 1985. Epistemología y fundamentos de matemática. 1. Números: natural. Entero. Racional. Escuela Universitaria del Profesorado – UNL, Santa Fe.
Fava, N. A., 1978. El número. Docencia, Buenos Aires.
Freudenthal, H., 1983. Didactical Phenomenology oh Mathematical Structures. Reidel, Dordrecht.
Llinares Ciscar, S. y Sánchez García, V., 2000. Fracciones. Síntesis, España.
Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, 2014. Diseño curricular. Educación secundaria orientada provincia de Santa Fe. Matemática. Recuperado de https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf
Sadovsky, P., 2005. Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Libros del Zorzal, Buenos Aires.
Saiz, I., Gorostegui, E. y Vilotta, D., 2011. La matemática necesaria para la enseñanza de los racionales en secundario. Yupana, 11, 11-20.
Yuni, J. A. y Urbano C. A., 2003. Recursos Metodológicos para la preparación de Proyectos de Investigación. Volumen II. Editorial Brujas, Córdoba.