



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA**

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

Doctor en Matemática

EN EL CAMPO DE: **Análisis**

TÍTULO DE LA TESIS:

Análisis fractal de conjuntos de Cantor no lineales

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Departamento de Matemática – FIQ
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL)

AUTOR:

Ignacio Andrés García

DIRECTORA DE TESIS:
Dra. Ursula María Molter

CODIRECTOR DE TESIS:
Dr. Roberto Aníbal Scotto

DEFENDIDA ANTE EL JURADO COMPUESTO POR:

Dr. Tomás Godoy
Dr. Pablo Andrés Panzone
Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2008

Dedico esta tesis a la memoria de mi madre

Agradecimientos

Ante todo a mis directores, Ursula y Roberto, por todo lo que aprendí de ellos durante estos años. Por la libertad que me dieron, por escuchar, alentar y guiar cualquier idea que surgiera. Por la paciencia que me tuvieron y por aconsejarme en toda circunstancia. Muchas gracias! Particularmente agradezco a Roberto por su buena predisposición para dirigirme en Santa Fe y además para acompañarme *n*-veces a Buenos Aires para las reuniones con Ursula.

A mi viejo y a mis hermanos les agradezco muchísimo por estar cerca *siempre* y apoyarme en todo momento.

Quiero darle las gracias a Hugo Aimar por contactarme con Ursula.

Estoy profundamente agradecido con el IMAL por las excelentes condiciones que me ha dado para que realice estos estudios. A Liliana Forzani por sus consejos para la defensa; a todos los que fueron y son mis compañeros de oficina; a mis *hermanitas y amigas* Ivana y Marilina por ayudarme incansablemente a sortear todos mis *ouch!* (y sobretodo a prevenirlos): gracias che!

Doy las gracias a CONICET por el apoyo económico recibido durante este período.

Agradezco a los miembros del jurado por haber aceptado leer este trabajo, por los valiosos comentarios y sugerencias que me hicieron.

También quiero agradecer a Carlos Cabrelli por sus comentarios y al grupo del seminario de análisis armónico de la UBA por haberme adoptado.

A los profesores que me formaron desde la licenciatura.

A mis amigos de siempre, en especial a Andrés Koropecski, por culpa de quien estudio matemática: salú!

A todos los que me saludaron desde la ventana mientras escribía este trabajo: gracias por no jactarse de su tiempo libre!

A Mabel por los "*arrolladitos*".

Y por este último tiempo mi gratitud a Yadira: gracias por la alegría y el apoyo que me das a pesar de la distancia :).

Ignacio Andrés Garcia

Índice general

<i>Agradecimientos</i>	III
Resumen	VII
Introducción	IX
Capítulo 1. Preliminares de teoría de la medida	1
Medidas	1
Diferenciación de medidas	3
Análisis de Fourier de medidas en \mathbb{R}	3
Capítulo 2. Funciones de dimensión de Conjuntos de Cantor	5
Introducción	5
2.1. Medida y dimensión packing	8
2.2. Conjunto de Cantor asociado a una sucesión	11
2.3. Sobre la dimensionalidad de conjuntos	15
2.4. Análisis de conjuntos cut-out	18
2.5. Caracterización de la dimensión de C_a	22
Capítulo 3. Sistemas iterados de funciones	31
Introducción	31
3.1. Definición de sistemas iterados	31
3.2. Sistemas regulares	36
3.3. Sistemas conjugados	42
3.4. Conjuntos de tipo Cookie-cutter	43
3.5. Medidas asociadas a un SIF	46
Capítulo 4. Conjuntos de Cantor definidos dinámicamente	53
Introducción	53
4.1. Prueba del Teorema 3.1	53
4.2. Conjuntos de Cantor centrales definidos dinámicamente	63
4.3. Conjugación. Función escala	72
Capítulo 5. Suma de conjuntos de Cantor	85
Introducción	85
5.1. Espesuras	89
5.2. Enunciado de los resultados globales	94
5.3. Demostración de los Teoremas 5.17 y 5.20	97
5.4. Comentarios y algunos problemas abiertos	104
Conclusiones	107

Bibliografía	109
Índice alfabético	113

Resumen

Estudiamos la dimensionalidad de conjuntos de Cantor asociados a sucesiones numéricas. Dada una sucesión no creciente, positiva y sumable a tenemos asociado un conjunto de Cantor C_a , que se construye quitando sucesivamente del intervalo $[0, \sum_{j \geq 1} a_j]$, intervalos abiertos de longitud a_j , como se hace en la construcción del conjunto ternario clásico. Cada C_a tiene asociada una función de dimensión h_a tal que la medida h_a -Hausdorff de C_a es finita y positiva ([CMMS04]). Uno de los principales resultados obtenidos, esencialmente dual al obtenido por Besicovitch y Taylor en [BT54], consiste en estimar la premedida packing de tales conjuntos a través del decaimiento de la sucesión asociada. Esto nos permite comprender las funciones de dimensión encontradas en [CMMS04]. Como consecuencia se obtienen resultados sobre C_p , el conjunto asociado a la sucesión $\{1/n^p\}$, $p > 1$; este conjunto fue definido en [CMPS05], donde se probó que es un $x^{1/p}$ -conjunto. Un corolario inmediato es $P_0^{1/p}(C_p) < +\infty$.

En la segunda parte estudiamos aspectos dinámicos de los conjuntos de Cantor considerados al comienzo. Un sistema iterado de funciones (SIF) es una familia de contracciones $\{f_0, \dots, f_m\}$ tal que $f_i : D \rightarrow D$, $i = 0, \dots, m$, donde D es un subconjunto cerrado de \mathbb{R} . Un SIF tiene un único *atractor* compacto K , que satisface $K = \bigcup_{i=0}^m f_i(K)$ (cf. [Hut81]). Además, si $P = \{p_0, \dots, p_m\}$ son pesos (números reales y positivos que suman 1), existe una única medida de probabilidad soportada en K que cumple

$$(R.1) \quad \mu^P(A) = \sum_{i=0}^m p_i \mu^P(f_i^{-1}(A)), \quad \text{para todo } A \text{ boreliano.}$$

Mostramos que el conjunto de Cantor C_p es atractor de un sistema iterado *hiperbólico* $\{f_{p,0}, f_{p,1}\}$ ([Fal97] y [PT93]); también estudiamos la posibilidad de tener este tipo de resultados para otras sucesiones. Además, la estructura dinámica sobre los conjuntos C_p nos permite utilizar resultados de Sullivan [Sul88] para relacionarlos con conjuntos auto-similares. Más precisamente, sea Λ_r el conjunto de Cantor auto-similar atractor del sistema $\{g_{r,0}, g_{r,1}\}$, donde $g_{r,i} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $g_{r,0}(x) = rx$ y $g_{r,1}(x) = rx + 1 - r$. Se obtiene que $\{f_{p,0}, f_{p,1}\}$ es $\mathcal{C}^{1+1/p}$ -conjugado a $\{g_{2^{-p},0}, g_{2^{-p},1}\}$; esto es, existe un difeomorfismo $h_p : [0, 1] \rightarrow I$, con derivada $\frac{1}{p}$ -Hölder continua, tal que $f_{p,i} \circ h_p = h_p \circ g_{2^{-p},i}$, para $i = 0, 1$ (I es el menor intervalo que contiene a C_p). Luego, si μ_r denota la medida como en (R.1) asociada a $\{g_{r,0}, g_{r,1}\}$ y ν_p la medida asociada a $\{f_{p,0}, f_{p,1}\}$, ambas con pesos $P = \{1/2, 1/2\}$, entonces se tiene la relación $\nu_p = \mu_{2^{-p}} \circ h_p^{-1}$.

Motivados por Fan, Lau y Ngai [FLN00] y Hu y Lau [HL01], que estudiaron la estructura multifractal de la m -ésima medida convolución $\mu = \mu_{1/3} * \dots * \mu_{1/3}$, y por la última igualdad establecida en el párrafo precedente, estudiamos en el último

capítulo la convolución de las medidas ν_p . Las medidas que satisfacen (R.1) son de tipo puro, i.e., o bien singulares o bien absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue. En general no se sabe si esta propiedad es preservada por la convolución de medidas de este tipo. En el caso auto-similar, si las similitudes asociadas a los sistemas tienen la misma razón de contracción, entonces puede garantizarse que la convolución también es auto-similar y por lo tanto de tipo puro. Tal es el caso de la medida μ que estudiaron Lau *et al.* Adaptamos resultados de [PS98] para mostrar que, fijado $q > 1$, la medida $\nu_p * \nu_q$ es absolutamente continua con densidad en $L^2(\mathbb{R})$ p.c.t. $p \in (1, q/(q-1))$. Además adaptamos los resultados de este artículo correspondientes a la dimensión de $C_p + C_q$.

Introducción

Los objetos de estudio de este trabajo son los *conjuntos de Cantor*, que son subconjuntos compactos, perfectos y totalmente desconexos en \mathbb{R} con la topología usual. Este tipo de conjuntos surgen en diversas áreas de las matemáticas. Por ejemplo, en análisis de Fourier en relación con los conjuntos de unicidad para las series trigonométricas; en sistemas dinámicos como conjuntos invariantes de estos; en teoría de números en conexión con aproximaciones diofánticas. Además son interesantes por sí mismos como ejemplos teóricos.

El ejemplo clásico es el conjunto de Cantor ternario se construye como sigue. Sean E_0 el intervalo cerrado $[0, 1]$ y E_1 el conjunto obtenido de quitar el tercio central de E_0 , de modo que E_1 consiste de los dos intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$. Quitando de cada uno de estos intervalos el tercio central se obtiene E_2 ; así, E_2 consiste de los cuatro intervalos cerrados $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $[\frac{8}{9}, 1]$. Continuando de esta forma, se tiene que E_k consiste de 2^k intervalos cerrados de longitud 3^{-k} obtenidos de quitar los tercios centrales de los intervalos de E_{k-1} . El *conjunto de Cantor ternario* $\Lambda_{\frac{1}{3}}$ consiste de los números que están en E_k para todo k , esto es, $\Lambda_{\frac{1}{3}} = \bigcap_{k \geq 0} E_k$.

Una forma de construir conjuntos de Cantor es por medio de sucesiones. Dada una sucesión positiva y sumable $a = \{a_j\}$, sea I_a un intervalo cerrado de longitud $\sum_j a_j$. Siguiendo [CMPS05], el conjunto de Cantor C_a asociado a la sucesión a se define por etapas de la siguiente manera: en la primer etapa, quitamos de I_a un intervalo abierto L_1 de longitud a_1 , resultando dos intervalos cerrados I_1^1 y I_2^1 , y la *laguna* L_1 entre ellos. Habiendo completado la etapa k -ésima, tenemos los intervalos cerrados $I_0^k, \dots, I_{2^k-1}^k$ contenidos en I_a . La etapa $k+1$ consiste en remover del intervalo I_l^k un intervalo abierto L_{2^k+l} de tamaño a_{2^k+l} . Tenemos entonces dos intervalos cerrados I_{2l}^{k+1} y I_{2l+1}^{k+1} contenidos en I_l^k que satisfacen

$$I_l^k = I_{2l}^{k+1} \cup L_{2^k+l} \cup I_{2l+1}^{k+1}.$$

La posición de las lagunas removidas en cada etapa queda definida de forma única por la construcción. Luego, el *conjunto de Cantor asociado a la sucesión a* se define como

$$C_a := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{2^k-1} I_l^k = I_a \setminus \bigcup_{j>0} L_j.$$

Es claro que este conjunto tiene medida de Lebesgue nula.

La construcción dada arriba es general, en el sentido de que a cada conjunto de Cantor C en \mathbb{R} de medida de Lebesgue nula se le puede asignar una sucesión a de forma tal que $C = C_a$.

En esta tesis sólo consideraremos conjuntos de Cantor de medida de Lebesgue nula y asociados a una sucesión no creciente.

Ejemplo. El conjunto ternario de Cantor clásico $\Lambda_{\frac{1}{3}}$ es el asociado a la sucesión $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \dots\}$.

En general, el conjunto r -ádico Λ_r , $0 < r < 1/2$, es el conjunto de Cantor en $[0, 1]$ tal que los intervalos de la k -ésima etapa tienen longitud r^k .

Este ejemplo es un caso particular de conjuntos de Cantor *centrales*, que son aquéllos tales que las lagunas que se remueven en cada etapa tienen todas la misma longitud.

Es sabido (ver Sección 2.2, Proposición 2.14) que cualesquiera dos conjuntos de Cantor son homeomorfos, o sea, desde el punto de vista topológico son indistinguibles. Una de las formas clásicas de comprenderlos en forma cuantitativa es por medio de la medida y dimensión de Hausdorff. Para poder introducir estos conceptos, son necesarias algunas definiciones previas.

Una función $h : (0, \lambda_h] \rightarrow (0, \infty]$, donde $\lambda_h > 0$, es una *función de dimensión* si es continua, no decreciente y $h(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$. Denotamos con \mathcal{D} al conjunto de las funciones de dimensión. Un δ -*cubrimiento de E* es una familia numerable de subconjuntos de \mathbb{R} que cubren a E y que tienen diámetros menores o iguales que δ . Definimos la h -medida de Hausdorff de E como

$$\mathcal{H}^h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(|U_i|) : E \subset \bigcup_i U_i \text{ y } |U_i| \leq \delta \right\}.$$

Decimos que E es un h -conjunto si $0 < \mathcal{H}^h(E) < +\infty$.

Cuando $g_s(x) = x^s$, para $s \geq 0$, denotamos \mathcal{H}^{g_s} como \mathcal{H}^s (\mathcal{H}^0 es la medida cuenta puntos). En este caso, existe un único valor t para el cual $\mathcal{H}^s(E) = 0$ si $s > t$ y $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$ si $s < t$ (ver Proposición 2.19).

Definición. La *dimensión de Hausdorff* del conjunto E se define como

$$\dim_H E = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = +\infty\}.$$

Esta propiedad permite hacer una clasificación intuitiva sobre cuán *flaco* es un subconjunto de \mathbb{R} de medida de Lebesgue nula. En el caso del conjunto ternario es sabido que $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(\Lambda_{\frac{1}{3}}) = 1$ (ver el libro de Falconer [Fal86]). En particular, $\dim_H \Lambda_{\frac{1}{3}} = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Ejemplo. Sea C_p el conjunto de Cantor asociado a la sucesión $\{1/n^p\}$. En [CMPS05] se muestra que $\dim_H C_p = \frac{1}{p}$. Más aún, $0 < \mathcal{H}^{\frac{1}{p}}(C_p) < +\infty$.

Si E es un conjunto y $t = \dim_H E$, entonces puede ocurrir que $\mathcal{H}^t(E) = 0$, en cuyo caso E es ‘despreciado’ por esta medida. Por otro lado, si $\mathcal{H}^t(E) = +\infty$, ésta no es una buena medida para E pues en general no resulta σ -finita. Diremos que un conjunto E es *dimensional* si existe al menos una $h \in \mathcal{D}$ que hace a E un h -conjunto. No todo conjunto es dimensional (damos un ejemplo debido a Best [Bes39] en la Sección 2.3 del Capítulo 2); por ejemplo, Elekes y Keleti en [EK06] probaron que el conjunto de los números de Liouville, que tiene dimensión de Hausdorff nula, no es dimensional. No obstante, Cabrelli *et al.* [CMMS04] probaron el siguiente resultado para un conjunto de Cantor asociado a una sucesión no creciente a :

- 1) C_a es dimensional; esto es, existe $h_a \in \mathcal{D}$ que hace de C_a un h_a -conjunto.

- ii) Si $c_1 n^{-1/s} \leq a_n \leq c_2 n^{-1/s} \quad \forall n$ para constantes c_1 y c_2 , finitas y positivas, entonces $h_a \equiv x^s$ (ver la definición en el Capítulo 2, Sección 2.3) y por lo tanto C_a es un s -conjunto.

Pero en otros casos, donde no se cumple la condición de ii), el comportamiento de estas funciones no es tan claro. Por ejemplo, existe una sucesión \tilde{a} para la cual $C_{\tilde{a}}$ es un s -conjunto pero $h_{\tilde{a}} \not\equiv x^s$ ([CHM03]). En consecuencia, la función dada en i) podría ser demasiado general para proveer una idea satisfactoria sobre el tamaño del conjunto.

Para entender esta situación, en el Capítulo 2 estudiamos la premedida packing de estos conjuntos, que se define como sigue. Un δ -packing de un conjunto dado E es una familia disjunta de bolas abiertas, centradas en E y con diámetros menores o iguales a δ . La h -premedida packing de E se define como

$$P_0^h(E) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(|U_i|) : \{B_i\}_i \text{ es } \delta\text{-packing de } E \right\}.$$

En [BT54], Besicovitch y Taylor relacionaron $\mathcal{H}^s(C_a)$ con el decaimiento de la sucesión a . Esto es válido para cualquier función $h \in \mathcal{D}$ (ver Proposición 2.29). En la Sección 2.5 del Capítulo 2 damos en el Teorema 2.31 el resultado dual para el caso packing. Como consecuencia de éste, podemos caracterizar completamente cuándo una función de dimensión es equivalente a una función potencia (Teorema 2.33). Esto es, dadas una sucesión no creciente a y una función $h \in \mathcal{D}$ obtenemos que

$$h \equiv x^s \iff 0 < \mathcal{H}^s(C_a) \leq P_0^s(C_a) < +\infty$$

(notamos que siempre $\mathcal{H}^s \leq P_0^s$). Por consiguiente, para tener $x^s \equiv h_a$, no sólo es necesario que C_a sea un s -conjunto sino además que $P_0^s(C_a) < +\infty$.

Además, como consecuencia del Teorema 2.31 obtenemos que $P_0^{1/p}(C_p) < +\infty$, lo que hace a éste un conjunto de Cantor ‘no lineal’ sumamente interesante.

El siguiente objetivo de la tesis es estudiar desde el punto de vista dinámico a los conjuntos de Cantor considerados al comienzo. Por tal motivo, en el Capítulo 3 damos una introducción de la teoría de sistemas iterados que nos será útil para los capítulos siguientes.

Un sistema iterado de funciones (que denotamos SIF) es una familia de contracciones $\{f_0, \dots, f_m\}$ de forma tal que $f_i : D \rightarrow D$, $i = 0, \dots, m$, donde D es un subconjunto cerrado de \mathbb{R} . Un resultado clásico de Hutchinson (cf [Hut81]) afirma que un SIF determina un único compacto no vacío K , el *atractor* del sistema, que satisface

$$(I.1) \quad K = \bigcup_{i=0}^m f_i(K).$$

Para obtener información topológica y dimensional del atractor de un SIF, deben imponerse condiciones sobre éste para restringir el conjunto de los compactos atractores. Cuando las contracciones son *similitudes* con *razones* r_i , i.e.,

$$|f_i(x) - f_i(y)| = r_i |x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in D,$$

el sistema se llama *auto-similar* y el atractor recibe el nombre de *conjunto auto-similar*. En este caso, el único real positivo s que satisface

$$(I.2) \quad r_0^s + \dots + r_m^s = 1$$

provee una cota superior para la dimensión de Hausdorff del atractor K . Más aún, si en (I.1) la unión es disjunta, entonces $0 < \mathcal{H}^s(K) \leq P_0^s(K) < +\infty$. El ejemplo más sencillo de estos es el sistema $\{g_{r,0}, g_{r,1}\}$, definido en $I = [0, 1]$ por

$$(I.3) \quad g_{r,0}(x) = rx \quad \text{y} \quad g_{r,1}(x) = rx + 1 - r,$$

donde $0 < r < \frac{1}{2}$. El atractor resulta el conjunto de Cantor r -ádico Λ_r .

Se pueden considerar sistemas con funciones más generales que similitudes. Un sistema es *regular* si las funciones son continuamente diferenciables y las derivadas cumplen

- $0 < \alpha < |f'_i(x)| < \beta < 1$, para todo $x \in D$,
- *propiedad de distorsión acotada*;

esta última condición dice que las derivadas de las composiciones finitas $f_{\omega_1} \circ \dots \circ f_{\omega_k}$, donde $\omega_i = 0, \dots, m$, se comportan esencialmente como si fueran derivadas de funciones lineales. Si las funciones tienen derivadas η -Hölder continuas, $\eta > 0$, o satisfacen la condición de Dini, entonces tienen esta propiedad. Este tipo de sistemas tienen asociada una función $\Upsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que posee un único cero. Este valor da una cota superior para la dimensión del atractor, y la ecuación $\Upsilon(s) = 0$ (conocida como la ecuación de Bowen) generaliza (I.2). Nuevamente, si en (I.1) la unión es disjunta, entonces $0 < \mathcal{H}^s(K) \leq P_0^s(K) < +\infty$, por lo que los atractores de estos sistemas resultan ‘buenos’ para las medidas Hausdorff y packing.

Una clase particular de sistemas regulares son los conocidos como *cookie-cutter* en el contexto fractal o como *hiperbólicos* en dinámica hiperbólica (cf. [Fal97] y [PT93]). En este caso D es un intervalo cerrado, $f_i(D) \cap f_j(D) = \emptyset$ si $i \neq j$ y las derivadas satisfacen una propiedad de distorsión más fuerte que la distorsión acotada, pero que también la cumplen las funciones con derivadas Hölder o Dini. Generalmente (ver [Fal97], [PT93]) a estos sistemas directamente se los asume con derivadas Hölder continuas, pero para esta tesis es necesario considerarlos con esta condición más general. Los atractores de estos sistemas resultan conjuntos de Cantor de medida de Lebesgue nula.

En el Capítulo 4 (Teorema 4.1) probamos que el conjunto de Cantor C_p considerado en [CMPS05] es atractor de un sistema hiperbólico $\{f_{p,0}, f_{p,1}\}$ con derivadas $1/p$ -Hölder continuas, siendo $1/p$ el mayor índice de suavidad que puede tener un sistema que tenga como atractor a C_p .

En la Sección 4.2 del mismo capítulo consideramos conjuntos de Cantor centrales. Estudiamos cómo depende de la sucesión que los define que resulten hiperbólicos, y si esto sucede, cómo depende de la sucesión la *suavidad* de la derivada. Resultados en esta dirección fueron obtenidos previamente por R. Bamón *et al* en [BMPV97].

En la última sección introducimos la función escala de Sullivan, que es una función que tiene asociado todo sistema hiperbólico y ‘guarda’ la geometría del atractor en escalas pequeñas. La estructura dinámica sobre los conjuntos C_p nos permite utilizar un resultado de Sullivan [Sul88] para relacionarlos con los conjuntos auto-similares Λ_r . Más precisamente, obtenemos que $(C_p, \{f_0, f_1\})$ es conjugado a $(\Lambda_{1/2^p}, \{g_{2^{-r},0}, g_{2^{-r},1}\})$ con una conjugación perteneciente al espacio $\mathcal{C}^{1+1/p}$; esto es, existe un difeomorfismo $h_p : [0, 1] \rightarrow I_p$ que preserva el orden, con derivada $1/p$ -Hölder continua, tal que $f_i^p \circ h_p = h_p \circ g_i^{2^{-p}}$, para $i = 0, 1$ (I_p es el menor intervalo que contiene a C_p). Este resultado es consecuencia de que ambos conjuntos

tienen la misma función escala y ésta es un invariante completo, i.e., dos conjuntos hiperbólicos son \mathcal{C}^1 conjugados si y sólo si tienen la misma función escala.

El problema central del último capítulo es el estudio de la medida convolución $\mathcal{H}^{\frac{1}{p}} \lfloor_{C_p} * \mathcal{H}^{\frac{1}{q}} \lfloor_{C_q}$. Como el soporte de la convolución está contenido en la suma de los soportes, este problema está ligado al del estudio de la morfología del conjunto $C_p + C_q$. La motivación de nuestro problema se debe a los trabajos de Fan, Lau y Ngai [FLN00] y de Hu y Lau [HL01], que estudiaron la estructura multifractal de la m -ésima convolución de la medida $\mu_{1/3} = \mathcal{H}^s \lfloor_{\Lambda_{\frac{1}{3}}}$, donde $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ y $\mathcal{H}^s \lfloor_{\Lambda_{\frac{1}{3}}}$ es la restricción de la medida de Hausdorff s -dimensional al conjunto $\Lambda_{\frac{1}{3}}$.

Sea $\{f_0, \dots, f_m\}$ un SIF. En [Hut81] se prueba que si $P = \{p_0, \dots, p_m\}$ son pesos (números reales y positivos que suman 1), entonces existe una única medida de probabilidad soportada en el atractor K que cumple

$$(I.4) \quad \mu^P(A) = \sum_{i=1}^n p_i \mu^P(f_i^{-1}(A)), \quad \text{para todo } A \text{ boreliano.}$$

Cuando el sistema es auto-similar, ésta se denomina *medida auto-similar*. Es conocido que esta medida es de tipo puro, es decir, o bien absolutamente continua o bien singular con respecto a la medida de Lebesgue (cf. [PSS00a]). Para tener una idea más precisa de la medida, en el primer caso interesa saber a qué espacio funcional pertenecen las derivadas, o sea, dar una idea de su ‘suavidad’. En el segundo, estimar la dimensión de esta medida, lo que da una idea del grado de singularidad. El análisis multifractal provee una noción de cómo varía localmente la estructura ‘fractal’ de estas medidas.

Un caso particular es la medida auto-similar μ_r asociada al sistema $\{g_{r,0}, g_{r,1}\}$ definido como en (I.3) y con pesos $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Esta medida recibe el nombre de *convolución de Bernoulli* y su soporte es el conjunto de Cantor Λ_r . Más aún, se tiene que $\mu_r = \mathcal{H}^{s_r} \lfloor_{\Lambda_r}$, donde $s_r = \frac{-\log 2}{-\log r}$. Trivialmente esta medida es singular, ya que el soporte tiene medida de Lebesgue nula.

Consideremos la convolución $\mu_r * \mu_r$. Esta medida también resulta auto-similar, pues las funciones $g_{r,i}$ tienen la misma razón de contracción. Por lo tanto es de tipo puro. Pero si el conjunto $\Lambda_r + \Lambda_r$ contiene un intervalo, no resulta trivial decidir si es singular o absolutamente continua. Cuando $r = \frac{1}{3}$, esta medida es singular aunque su soporte es $\Lambda_{\frac{1}{3}} + \Lambda_{\frac{1}{3}} = [0, 2]$. Esto se debe a que su transformada de Fourier no tiende a 0 en el infinito, pues como consecuencia de un resultado de Erdős (ver [Erd39]) que presentaremos en la introducción de este último capítulo, la transformada de Fourier de $\mu_{\frac{1}{3}}$ no tiende a 0.

Por los resultados del Capítulo 4, C_p tiene asociado el sistema $\{f_{p,0}, f_{p,1}\}$. Luego, para los pesos $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ tenemos una medida v_p soportada en C_p que satisface (I.4). Además, como este sistema es conjugado a $\{g_{r,0}, g_{r,1}\}$, podemos concluir que $v_p = \mu_{2^{-p}} \circ h_p^{-1}$, donde h_p es la conjugación entre los sistemas. De aquí se sigue que $\mathcal{H}^{\frac{1}{p}} \lfloor_{C_p}$ es equivalente a v_p , y por consiguiente, nos interesa estudiar la convolución de estas medidas. Uno de los principales inconvenientes es que no se puede garantizar de antemano que $v_p * v_p$ sea de tipo puro, pues no sabemos siquiera si esta medida satisface una identidad como en (I.4).

Estudiamos entonces cuándo la medida Lebesgue de $C_p + C_q$, que contiene al soporte de $v_p * v_q$, es positiva (ver Teorema 5.15), ya que cuando esta medida es nula, la medida $v_p * v_q$ trivialmente es singular.

Adaptando los resultados de Peres y Solomyak ([PS98]) para las convoluciones de Bernoulli, mostramos (ver Corolario 5.21) que, fijado $q > 1$, la medida $v_p * v_q$ es absolutamente continua con densidad en $L^2(\mathbb{R})$ para casi todo $p \in (1, q/(q-1))$. Además pueden adaptarse los resultados de este artículo para obtener (ver Corolario 5.18) los resultados correspondientes a la dimensión de $C_p + C_q$. Destacamos que estas adaptaciones se hacen del contexto lineal de sistemas auto-similares, a uno no lineal, que es el del conjunto C_p .

Preliminares de teoría de la medida

En este capítulo damos un resumen de conceptos y resultados clásicos de teoría de la medida que usaremos en la tesis.

Sea X un espacio métrico. Denotamos con $B_r(x)$ la bola abierta de radio r centrada en $x \in X$, i.e.,

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Medidas

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una *medida* en X es una función de conjuntos $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$, donde $\mathcal{P}(X)$ son las partes del conjunto X , que verifica:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- (*monotonía*) Si $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$;
- (σ -*subaditividad*) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, para $A_1, A_2, \dots \subset X$.

En el contexto de la teoría de la medida, una función de conjuntos como en la definición es conocida como *medida exterior*, resevándose el término *medida* para una función no negativa μ definida en una σ -álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ de conjuntos, que se anula en el conjunto vacío y es σ -aditiva, i.e., si $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ es una familia numerable y disjunta, entonces

$$\mu\left(\bigcup A_i\right) = \sum \mu(A_i).$$

No obstante, considerar medidas en el sentido de la Definición 1.1 es una conveniencia más que una restricción. En efecto, si ν es una función de conjuntos no negativa que es σ -aditiva y está definida en una σ -álgebra \mathcal{A} de subconjuntos de X , entonces puede extenderse a una medida (en el sentido de la Definición 1.1) por medio de

$$\nu^*(A) = \inf\{\nu(B) : A \subset B \in \mathcal{A}\}$$

(ver el Capítulo 1 del libro de Mattila [Mat95]). Por otro lado, una medida μ provee una función de conjuntos σ -aditiva cuando se restringe a la σ -álgebra de conjuntos μ -medibles.

Definición 1.2. Un conjunto $A \subset X$ es μ -medible si

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \quad \text{para todo } E \subset X.$$

Recordemos que la familia de *conjuntos de Borel en X* es la menor σ -álgebra que contiene a los subconjuntos abiertos de X .

Definición 1.3. Sea μ una medida en X .

1. μ es *finita* si $\mu(X) < +\infty$.

2. μ es *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe $r > 0$ tal que

$$\mu(B_r(x)) < +\infty.$$

3. μ es una *medida de Borel* si todos los conjuntos borelianos son μ -medibles.

4. μ es *Borel regular* si para cada $A \subset X$ existe un conjunto de Borel $B \subset X$ tal que $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$.

5. μ es una *medida de Radon* si es una medida de Borel y además

I) $\mu(K) < +\infty$ para cada $K \subset X$ compacto,

II) $\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V, K \text{ es compacto}\}$ para cada $V \subset X$ abierto,

III) $\mu(A) = \inf\{\mu(V) : A \subset V, V \text{ abierto}\}$ para $A \subset X$.

Ejemplos 1.4.

1. La medida de Lebesgue \mathcal{L} en \mathbb{R} es una medida de Radon.

2. La *medida de Dirac* δ_a en un punto $a \in X$ se define por $\delta_a(A) = 1$, si $a \in A$, $\delta_a(A) = 0$, si $a \notin A$. Ésta es una medida de Radon en X .

3. La restricción de una medida μ a un conjunto $A \subset X$ se define como

$$\mu|_A(B) = \mu(A \cap B), \quad \text{para } B \subset X.$$

$\mu|_A$ resulta una medida. Además, si μ es Borel regular y A es μ -medible con $\mu(A) < +\infty$ entonces $\mu|_A$ también es Borel regular.

Recordamos que si μ es una medida de Borel en un espacio métrico separable X , el *soporte de μ* , $\text{sop } \mu$, se define como el menor conjunto cerrado F tal que $\mu(X \setminus F) = 0$.

Para una medida μ , sea $\|\mu\| = \mu(X)$. Dado $A \in X$, definimos

$$\mathcal{M}(A) := \left\{ \mu : \mu \text{ es una medida de Radon con soporte compacto,} \right. \\ \left. \text{sop } \mu \subset A \text{ y } 0 < \|\mu\| < +\infty \right\}.$$

Vimos que la restricción de una medida a un subconjunto provee una nueva medida. Otra forma de obtener medidas a partir de una dada es la siguiente.

Definición 1.5. Sea μ una medida en X y $f : X \rightarrow Y$ una función. La *imagen de la medida μ por f* se define como

$$\mu \circ f^{-1}(A) := \mu(f^{-1}(A)), \quad \text{para } A \subset Y.$$

Se tiene que $\mu \circ f^{-1}$ es una medida en Y . Además, si μ es de Borel y f es una función de Borel entonces $\mu \circ f^{-1}$ también resulta de Borel.

Teorema 1.6. Sean X e Y espacios métricos separables. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y μ es una medida de Radon en X con soporte compacto entonces $\mu \circ f^{-1}$ es de Radon. Además, $\text{sop}(\mu \circ f^{-1}) = f(\text{sop } \mu)$.

Denotamos con $\mathcal{C}_0(X)$ al conjunto de las funciones reales con soporte compacto en X .

Definición 1.7. Sean μ, μ_1, μ_2, \dots medidas en $\mathcal{M}(X)$. Decimos que la sucesión $\{\mu_i\}$ converge débilmente a μ ,

$$\mu_i \xrightarrow{w} \mu,$$

si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_i = \int \varphi d\mu \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{C}_0(X).$$

Diferenciación de medidas

Damos ahora los conceptos y resultados que usaremos sobre diferenciación de medidas. Para las pruebas ver [Mat95], Capítulo 2.

Definición 1.8. Sean μ una medida de Borel localmente finita en \mathbb{R} . La derivadas inferior y superior de μ con respecto a la medida de Lebesgue se definen como

$$\underline{D}(\mu, x) = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{2r},$$

y

$$\overline{D}(\mu, x) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{2r}.$$

En los puntos x donde el límite existe, definimos la derivada de μ como

$$D(\mu, x) = \underline{D}(\mu, x) = \overline{D}(\mu, x).$$

Proposición 1.9. Si μ es una medida de Radon en \mathbb{R} , entonces la derivada $D(\mu, x)$ existe y es finita para \mathcal{L} -casi todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.10. Sean μ y η medidas en $\mathcal{M}(X)$. Decimos que μ es *absolutamente continua con respecto a η* , denotado $\mu \ll \eta$, si para cada $A \subset X$ tal que $\eta(A) = 0$ se tiene que $\mu(A) = 0$. Decimos que μ y η son *mutuamente singulares* si existe $A \subset X$ boreliano tal que $\eta(A) = \mu(X \setminus A) = 0$.

El siguiente resultado es una combinación del Teorema de Radon-Nikodym y la descomposición de Lebesgue.

Teorema 1.11. Sea μ una medida de Radon finita en \mathbb{R} y sea $f(x) = D(\mu, x)$. Entonces existe una una medida de Radon ν tal que \mathcal{L} y ν son mutuamente singulares y

$$\mu(B) = \int_B f d\mathcal{L} + \nu(B), \quad \text{para todo boreliano } B \subset \mathbb{R}.$$

Más, aún, $\mu \ll \mathcal{L}$ si y sólo si $\nu = 0$.

La descomposición de μ como suma de una medida absolutamente continua y otra singular con respecto a la medida de Lebesgue se denomina *descomposición de Lebesgue de μ* . Además, la derivada $f = D(\mu, \cdot)$ también es conocida como la *densidad* de μ con respecto a \mathcal{L} .

A continuación, resumimos los resultados que usaremos sobre la derivada inferior en el Capítulo 5.

Proposición 1.12. Sea μ una medida de Radon en \mathbb{R} . Luego $\mu \ll \mathcal{L}$ si y sólo si $\underline{D}(\mu, x) < +\infty$ para μ -casi todo $x \in \mathbb{R}$. Más aún, si $\int \underline{D}(\mu, x) d\mu(x) < +\infty$, entonces la densidad de μ pertenece al espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Análisis de Fourier de medidas en \mathbb{R}

Definición 1.13. La *convolución* de las medidas η y μ , denotada $\eta * \mu$, se define como

$$\eta * \mu(E) := \iint \chi_E(x+y) d\eta(x)d\mu(y).$$

Si $\eta, \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ entonces $\eta * \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Para relacionar el soporte de la convolución con el de las medidas, necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.14. Dados $E, F \subset \mathbb{R}$, definimos la suma aritmética de estos conjuntos, denotada $E + F$, como

$$E + F := \{x + y : x \in E, y \in F\}.$$

Proposición 1.15. El soporte de la convolución está contenido en la suma de los soportes, i.e., $\text{sop}(\eta * \mu) \subset \text{sop} \eta + \text{sop} \mu$.

Definición 1.16. La transformada de Fourier de una medida $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ se define como

$$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{i\xi x} d\mu(x).$$

La transformada de Fourier se comporta con respecto al producto convolución de la siguiente manera.

Proposición 1.17. Dadas $\eta, \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ se tiene que $\widehat{\eta * \mu} = \hat{\eta} \cdot \hat{\mu}$.

La prueba de la siguiente proposición puede encontrarse en el libro de Folland [Fol99] (ver el comentario posterior a la Proposición 8.50 de aquel libro)

Proposición 1.18. Supongamos que μ_1, μ_2, \dots y μ pertenecen a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Si $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ y $\|\mu_k\| \rightarrow \|\mu\|$ entonces $\hat{\mu}_k \rightarrow \hat{\mu}$ puntualmente.

El siguiente resultado se conoce como el Lema de Riemann-Lebesgue.

Proposición 1.19. Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x) dx = 0.$$

En particular, si $\hat{\mu}(\xi) \not\rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \infty$ entonces μ no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Definición 1.20. Las medidas μ y $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ son *equivalentes*, y lo denotamos $\mu \approx \nu$, si existen constantes $0 < c_1, c_2 < +\infty$ tales que

$$c_1\mu(A) \leq \nu(A) \leq c_2\nu(A), \quad \text{para todo } A \text{ boreliano.}$$

Directamente de las Definiciones 1.20, 1.13 y 1.8 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.21. Sean μ_i y ν_i , $i = 1, 2$, medidas tales que $\mu_i \approx \nu_i$. Entonces $\mu_1 * \mu_2 \approx \nu_1 * \nu_2$. Además, si $\mu_1 * \mu_2 \ll \mathcal{L}$ con una densidad en $L^2(\mathbb{R})$ entonces $\nu_1 * \nu_2$ también tienen una densidad en $L^2(\mathbb{R})$.

Funciones de dimensión de Conjuntos de Cantor

Introducción

Un *conjunto de Cantor* es un subconjunto de la recta que es compacto, perfecto y totalmente disconexo con la topología usual. Consideramos únicamente conjuntos de Cantor de medida de Lebesgue nula. Distintas clases de estos conjuntos aparecen en diversas áreas de la matemática, por ejemplo en teoría de números, en sistemas dinámicos y también son interesantes por sí mismos como ejemplos teóricos.

El ejemplo clásico es el conjunto de Cantor ternario, que se construye como sigue. Sean E_0 el intervalo cerrado $[0, 1]$ y E_1 el conjunto obtenido de quitar el tercio central de E_0 , de modo que E_1 consiste de los dos intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$. Quitando de cada uno de estos intervalos el tercio central se obtiene E_2 ; así, E_2 consiste de los cuatro intervalos cerrados $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $[\frac{8}{9}, 1]$. Continuando de esta forma, se tiene que E_k consiste de 2^k intervalos cerrados de longitud 3^{-k} obtenidos de quitar los tercios centrales de los intervalos de E_{k-1} . El *conjunto de Cantor ternario* $\Lambda_{\frac{1}{3}}$ consiste de los números que están en E_k para todo k , esto es, $\Lambda_{\frac{1}{3}} = \bigcap_{k \geq 0} E_k$.

Es sabido (ver Sección 2.2, Proposición 2.14) que desde el punto de vista topológico cualesquiera dos conjuntos de Cantor no se pueden distinguir, o sea, son homeomorfos.

Medidas de Hausdorff. Una de las formas clásicas de comprender a los conjuntos de Cantor desde un enfoque cuantitativo es por medio de la medida de Hausdorff. La idea de la construcción de esta medida se debe a Carathéodory [Ca14], quien estaba interesado en la siguiente pregunta:

¿Cuál es la 'longitud' natural de un conjunto E de \mathbb{R}^d ?

Entonces introdujo la siguiente medida. Sea $s \geq 0$. Dado $E \subset \mathbb{R}^d$ denotamos con $|E|$ al diámetro del conjunto E , medido con la distancia euclídea. Un δ -*cubrimiento* de E es una familia numerable de subconjuntos de \mathbb{R}^d que cubren a E y que tienen diámetros menores o iguales que δ . Definimos

$$(2.1) \quad \mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : E \subset \bigcup_i U_i \text{ y } |U_i| \leq \delta \right\}.$$

Este ínfimo crece cuando δ decrece, por lo que el límite define una medida:

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

Observación 2.1. En rigor, la construcción dada por Carathéodory es para valores $s \in \mathbb{N}$, pero Hausdorff (cf. [Hau18]) fue quien comprendió que ésta tiene sentido y es útil aún cuando el parámetro entero es reemplazado por cualquier

número real positivo. Por esta razón \mathcal{H}^s se conoce como la *medida de Hausdorff s -dimensional*.

Las medidas de Hausdorff generalizan la medida de Lebesgue: si $s = d = 1$, entonces \mathcal{H}^s coincide con \mathcal{L} , la medida de Lebesgue unidimensional; en general, cuando $s = d$, \mathcal{H}^s es un múltiplo de la medida de Lebesgue d -dimensional (ver el Teorema 1.12 del libro de Falconer [Fal86]). La ventaja de esta familia de medidas puede entenderse de la siguiente manera. Cuando consideramos una curva ‘suave’ en el espacio, la medida de Lebesgue tridimensional toma a este objeto como un conjunto de medida nula, lo desprecia. Pero uno tiene la intuición de que este objeto, aunque es parte de un espacio tridimensional, tiene dimensión 1, por lo que no es conveniente medirlo con la misma ‘regla’ que se mide a un conjunto tridimensional. La medida de Hausdorff unidimensional \mathcal{H}^1 es una medida en \mathbb{R}^3 que distingue justamente a este tipo de conjuntos.

La observación de Hausdorff se basa en que esta misma idea es igualmente aplicable a exponentes dimensionales no enteros, por lo que estas medidas generalizan la idea de longitud, área, etc: la propiedad fundamental de estas medidas es que cada conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ tiene asociado un único valor, $\dim_H E$, en el parámetro s , para el cual $\mathcal{H}^s(E)$ *salta* de infinito a cero, i.e.

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} +\infty & \text{para } s < \dim_H E \\ 0 & \text{para } \dim_H E < s \end{cases}$$

(ver Proposición 2.19). El valor $\dim_H E$ es conocido como la *dimensión de Hausdorff* del conjunto E , que resulta siempre $0 \leq \dim_H E \leq d$ (ver [Fal86], pág. 8). Esta propiedad permite hacer una clasificación intuitiva sobre cuán *flaco* es un subconjunto de \mathbb{R}^d de medida de Lebesgue nula, que es el caso en el que estamos interesados en esta tesis.

Como ejemplo, Hausdorff probó en su artículo que el conjunto ternario $\Lambda_{\frac{1}{3}}$ tiene dimensión de Hausdorff $\log 2 / \log 3$; más aún, puede probarse (ver [Fal86], Teorema 1.14) que para $t = \log 2 / \log 3$ se tiene que $\mathcal{H}^t(\Lambda_{\frac{1}{3}}) = 1$.

Un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^d$ que verifica $0 < \mathcal{H}^s(E) < +\infty$ se denomina *s -conjunto*. Es claro que la dimensión de Hausdorff de un s -conjunto es s .

Por otro lado, aunque todo conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^d$ tiene asociada su dimensión de Hausdorff (que da una idea de su tamaño), puede ocurrir que la medida de Hausdorff en el exponente $s = \dim_H E$ sea nula o infinito, i.e., que E no sea un s -conjunto (ejemplos se verán más adelante), en cuyo caso la medida de Hausdorff s -dimensional puede no resultar una buena medida para el conjunto: si la medida es nula está despreciando al conjunto; si es infinita puede no ser σ -finita. Por esta razón es necesario introducir una noción más fina de medidas de Hausdorff (que es en realidad la definición que dio Hausdorff).

Una función $h : (0, \lambda_h] \rightarrow (0, \infty]$, donde $\lambda_h > 0$, es una *función de dimensión* si es continua, no decreciente y $h(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$. Por *no decreciente* entendemos *monótona no decreciente*. Denotamos con \mathcal{D} al conjunto de las funciones de dimensión. Definimos la h -medida de Hausdorff de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ de la misma forma que lo hicimos con las potencias, esto es,

$$\mathcal{H}^h(E) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(|U_i|) : E \subset \bigcup_i U_i \text{ y } |U_i| \leq \delta \right\}.$$

Notar que cuando consideramos las funciones x^s , para $s > 0$, obtenemos la medida de Hausdorff s -dimensional \mathcal{H}^s .

Observación 2.2. Frecuentemente resulta conveniente, en lugar de considerar cubrimientos con conjuntos arbitrarios, tomarlos con conjuntos abiertos o alternativamente cerrados. Aunque en estos casos pueden obtenerse distintos valores de \mathcal{H}_δ^h , el valor del límite \mathcal{H}^h es el mismo (ver el Teorema 28 del libro de Rogers [Rog98]).

Esta generalización de la medida permite tener una clase más grande de conjuntos donde la medida de Hausdorff resulta una ‘buena’ medida. Según la definición dada por Hausdorff en [Hau18], un conjunto acotado E tiene dimensión $h \in \mathcal{D}$ si se cumple que $0 < \mathcal{H}^h(E) < +\infty$, i.e., si E es un h -conjunto. Esto generaliza la idea del tamaño de un conjunto: de un número pasa a ser una función en \mathcal{D} .

Un conjunto E es *dimensional* si existe al menos una $h \in \mathcal{D}$ que hace a E un h -conjunto. Pese a esta forma general de las medidas de Hausdorff, no todo conjunto es dimensional. Por ejemplo, recientemente Elekes y Keleti [EK06] probaron que el conjunto de los números de Liouville, que tiene dimensión de Hausdorff nula, no es dimensional. Damos un ejemplo de un conjunto de Cantor no dimensional en el Ejemplo 2.17, que se debe a Best [Bes39].

Sobre el problema principal de este capítulo. En el artículo [CMMS04], Cabrelli *et al.*, basados en el trabajo de Besicovitch y Taylor [BT54], probaron el siguiente resultado para un conjunto de Cantor C_a asociado a una sucesión monótona no creciente a (que definiremos en la Sección 2.2):

- i) C_a es dimensional; esto es, existe $h_a \in \mathcal{D}$ que hace de C_a un h_a -conjunto.
- ii) Si la sucesión verifica

$$c_1 n^{-1/s} \leq a_n \leq c_2 n^{-1/s} \quad \text{para todo } n,$$

donde c_1 y c_2 son constantes finitas y positivas, entonces $h_a \equiv x^s$ (ver la Definición 2.18 en la Sección 2.3) y por lo tanto, C_a es un s -conjunto.

Luego, bajo la hipótesis de ii), la definición general de dimensión dada por Hausdorff (por medio de funciones en \mathcal{D}) es consistente para C_a , ya que las funciones h_a y x^s son ‘equivalentes’. Pero en otros casos, donde no se cumple esta hipótesis, el comportamiento de las funciones de dimensión h_a no es tan claro. Por ejemplo, existe una sucesión \tilde{a} para la cual $C_{\tilde{a}}$ es un s -conjunto pero $h_{\tilde{a}} \not\equiv x^s$ ([CHM03]). Esto muestra que la definición de dimensión generalizada puede resultar ambigua, es decir, las funciones de dimensión h_a pueden llegar a ser demasiado ‘generales’ para proveer una idea satisfactoria sobre el tamaño del conjunto C_a .

Para entender esta situación, estudiamos la premedida packing de estos conjuntos, que se define como sigue. Un δ -packing de un conjunto dado E es una familia disjunta de bolas abiertas, centradas en E y con diámetros menores o iguales a δ . La premedida packing se define en forma dual a como se construye la medida de Hausdorff; en lugar de minimizar cubrimientos se maximizan packings: dada $h \in \mathcal{D}$ sea

$$P_\delta^h(E) = \sup \left\{ \sum_i h(|B_i|) : \{B_i\} \text{ es } \delta\text{-packing de } E \right\}.$$

Este supremo decrece cuando δ decrece. La h -premedida packing de E es

$$P_0^h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P_\delta^h(E).$$

En [BT54] se relaciona $\mathcal{H}^s(C_a)$ con el decaimiento de la sucesión a . Esto es válido para cualquier función $h \in \mathcal{D}$ (ver Teorema 2.29). En la Sección 2.5 damos en el Teorema 2.31 el resultado dual para el caso packing. Como consecuencia de éste, podemos caracterizar completamente cuándo una función de dimensión es equivalente a una función potencia (Teorema 2.33). Esto es, dadas una sucesión no creciente a y una función $h \in \mathcal{D}$ obtenemos que

$$h \equiv x^s \iff 0 < \mathcal{H}^s(C_a) \leq P_0^s(C_a) < +\infty.$$

Por consiguiente, para tener $x^s \equiv h_a$, no sólo es necesario que C_a sea un s -conjunto sino además que $P_0^s(C_a) < +\infty$.

Estos resultados forman parte del trabajo en colaboración con Molter y Scotto [GMS07].

El resto del capítulo se organiza como sigue. En la siguiente sección definimos la medida y dimensión packing y además las dimensiones box, que sirven como parámetros para describir la irregularidad de conjuntos que no son ‘suaves’. Damos estas definiciones pues en la Sección 2.4 estudiaremos los conjuntos denominados *cut-out* (una traducción al castellano sería “recortados”), que son subconjuntos compactos de \mathbb{R} asociados a una sucesión sumable y monótona no creciente.

En la Sección 2.2 definimos el conjunto de Cantor asociado a una sucesión. En la Sección 2.3 damos una extensión de la noción de dimensión.

2.1. Medida y dimensión packing

Por la definición de P_0^h , es claro que es monótona, $P_0^h(\emptyset) = 0$ y $P_0^h(\{x\}) = 0$. Además es finitamente subaditiva, pero no necesariamente es σ -subaditiva. Para ver esto basta con considerar la función $h = x^s$, $s > 0$, y un conjunto denso y numerable, por ejemplo en \mathbb{R} el conjunto $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, los racionales de $[0, 1]$.

Luego, para obtener una medida es necesario realizar un paso más. La *h-medida packing* \mathcal{P}^h se define usando un método estándar para la construcción de medidas a partir de una premedida (ver por ejemplo [Rog98], Capítulo 1):

$$\mathcal{P}^h(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} P_0^h(E_i) : E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}.$$

Esta medida fue introducida por Tricot en [Tri82], Taylor y Tricot en [TT85], e independientemente por Sullivan en [Sul84]. La importancia de la misma es que en muchas situaciones actúa en forma dual a la medida de Hausdorff. Por ejemplo, generalmente es mucho más trabajoso dar cotas por debajo de la medida de Hausdorff de un conjunto que por arriba, mientras que en el caso packing las complicaciones son opuestas. Muchas veces también es de esperar que un resultado válido para la medida de Hausdorff tenga su contraparte en el caso packing, como ocurre con los resultados que obtenemos en la Sección 2.5.

Es inmediata de la definición la desigualdad $\mathcal{P}^h(E) \leq P_0^h(E)$ para todo subconjunto E . Para dar una relación con la medida de Hausdorff es necesario restringir el conjunto \mathcal{D} .

Una función $h \in \mathcal{D}$ es *duplicante* si existe una constante $c_h > 0$ tal que

$$(2.2) \quad h(2t) \leq c_h h(t), \quad \forall t \in (0, \lambda_h/2].$$

Por ejemplo, las funciones potencia g_s son duplicantes.

Bajo la hipótesis de que $h \in \mathcal{D}$ sea duplicante, se tiene que

$$(2.3) \quad \mathcal{H}^h(E) \leq \mathcal{P}^h(E).$$

La demostración se puede encontrar en el Lema 5.11 de [TT85] o en el Teorema 5.12 del libro de Mattila [Mat95] para las funciones potencia, cuya prueba es la misma que para el caso general.

Observación 2.3. En la desigualdad (2.3) puede pasar incluso que $\mathcal{H}^h(E) = 0$ y $\mathcal{P}^h(E) = +\infty$. De hecho, frecuentemente se tiene que $\mathcal{H}^h(E) < \mathcal{P}^h(E)$, salvo cuando ambas son 0 o $+\infty$. La condición $0 < \mathcal{H}^h(E) = \mathcal{P}^h(E) < +\infty$ es una condición de regularidad muy fuerte; por ejemplo, cuando $h = x^s$, con $0 < s < d$, esta igualdad se tiene si y sólo si s es un entero y $\mathcal{P}^s|_E$ es una medida s -rectificable (ver Teorema 17.11 de [Mat95]). Notamos además que esto último dice que para conjuntos ‘suaves’ de dimensión entera las medidas \mathcal{H}^s y \mathcal{P}^s coinciden, por lo que $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \dots$ también generalizan los conceptos de longitud, área, \dots , etc.

Observación 2.4. La medida \mathcal{H}^h es Borel-regular siempre que $h \in \mathcal{D}$ sea continua a derecha [Rog98]. Por otro lado, \mathcal{P}^h y \mathcal{P}_0^h son Borel-regulares para $h \in \mathcal{D}$ continua por izquierda ([TT85], Lema 3.2). Como en esta tesis estamos interesados en ambas medidas, pedimos en la definición que las funciones de dimensión sean continuas.

Al igual que con las medidas de Hausdorff, dado un conjunto E existe un único valor crítico $\dim_P E$, la *dimensión packing* de E , tal que $\mathcal{P}^s(E) = 0$ si $s > \dim_P E$ y $\mathcal{P}^s(E) = +\infty$ si $s < \dim_P E$ (ver Proposición 2.19), esto es

$$\dim_P E = \inf\{s > 0 : \mathcal{P}^s(E) = 0\} = \sup\{s > 0 : \mathcal{P}^s(E) = +\infty\}.$$

Análogamente para la familia de premedidas packing $\{P_0^s\}$ denotamos con ΔE su valor crítico. De (2.3), se tiene la siguiente relación:

$$\dim_H E \leq \dim_P E \leq \Delta E,$$

y todas las desigualdades pueden ser estrictas.

Propiedades básicas de las dimensiones. Las dimensiones de Hausdorff y packing satisfacen las siguientes propiedades, que esencialmente son las que se espera que cumpla cualquier definición razonable de dimensión. Aquí, \dim denota \dim_H o \dim_P .

-*Conjuntos abiertos.* Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es abierto entonces $\dim E = d$, pues E contiene una bola con volumen d -dimensional positivo.

-*Conjuntos suaves.* Si E es una subvariedad suave m -dimensional de \mathbb{R}^d entonces $\dim E = m$.

-*Monotonía.* Si $E_1 \subset E_2$ entonces $\dim E_1 \leq \dim E_2$. Esto se sigue de la monotonía de la medida.

- *σ -estabilidad.* $\dim(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim E_i$, que es consecuencia de la σ -subaditividad de la medida y la monotonía.

-*Conjuntos numerables.* Si E es numerable entonces $\dim E = 0$, ya que los conjuntos puntuales tienen dimensión 0 y \dim es σ -estable.

Definición 2.5. Una función $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ es *Lipschitz* con constante c si para todo $x, y \in E$ se tiene que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq c|x - y|$. Una función es *bi-Lipschitz* si es Lipschitz e inversible con inversa Lipschitz.

Un caso particular de funciones Lipschitz es cuando ϕ es una *similitud* con *razón de contracción* r , esto es,

$$|\phi(x) - \phi(y)| = r|x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Como consecuencia del teorema del valor medio, toda función con derivada continua y acotada es Lipschitz. El siguiente es un resultado clásico (ver [Fal86], Lema 1.8).

Proposición 2.6. *Sea ϕ una función Lipschitz con constante c definida en $E \subset \mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{H}^s(\phi(E)) \leq c^s \mathcal{H}^s(E)$.*

Este resultado sigue valiendo si reemplazamos \mathcal{H}^s por \mathcal{P}^s , así como el siguiente, que generaliza la propiedad de escalamiento de la longitud, área, volumen, etc.

Proposición 2.7. *Si ϕ es una similitud entonces $\mathcal{H}^s(\phi(E)) = r^s \mathcal{H}^s(E)$.*

-*Invariancia Lipschitz.* Si $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ es Lipschitz entonces $\dim(\phi(E)) \leq \dim E$.

-*Invariancia bi-Lipschitz.* Si $\phi : E \rightarrow \phi(E)$ es bi-Lipschitz entonces $\dim(\phi(E)) = \dim E$.

-*Invariancia geométrica.* \dim preserva movimientos rígidos. Esto es consecuencia de la propiedad anterior.

Por otro lado, Δ conserva todas estas propiedades salvo que sólo es *finitamente estable*, o sea, $\Delta(\bigcup_{i=1}^k E_i) = \max_{1 \leq i \leq k} \Delta E_i$. Esto se sigue de la subaditividad finita de la premedida packing.

Dimensiones box. La dimensión de Hausdorff no es práctica, en el sentido que suele ser difícil de calcular aún en ejemplos elementales. Esto se debe a cómo nos acercamos al conjunto, o sea, dado $E \subset \mathbb{R}^d$, para cada $\delta > 0$ buscamos

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es } \delta\text{-cubrimiento de } E \right\}.$$

Dar una buena aproximación de este ínfimo puede ser un problema completamente no trivial.

Esta definición puede simplificarse si a los elementos del cubrimiento los tomamos con el mismo diámetro: dado $E \subset \mathbb{R}^d$ acotado, sea $N(E, \delta)$ el mínimo número de conjuntos de diámetro δ necesarios para cubrir E , i.e.,

$$N(E, \delta) = \min \left\{ k : E \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta), \text{ con } x_i \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Luego, $N(E, \delta)\delta^s$ juega el papel de $\mathcal{H}_\delta^s(E)$. Uno está tentado entonces a introducir la cantidad

$$\nu(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(E, \delta)\delta^s,$$

pero ésta no da una medida. No obstante se puede definir un índice dimensional. Las *dimensiones box inferior* y *superior* de E se definen como

$$\overline{\dim}_B E = \inf \left\{ s : \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} N(E, \delta)\delta^s = 0 \right\}$$

y

$$\underline{\dim}_B E = \inf \left\{ s : \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} N(E, \delta)\delta^s = 0 \right\}$$

respectivamente. Cuando los límites inferior y superior coinciden, el valor común es la *dimensión box* de E y lo denotamos $\dim_B E$.

La definición de la dimensión box data de los años 30 y ha sido denominada de varias formas debido a sus diversas apariciones en la matemática: dimensión de Minkowski, densidad logarítmica, dimensión de entropía, dimensión métrica.

Definiciones equivalentes se obtienen si reemplazamos $N(E, \delta)$ por cualquiera de las siguientes cantidades (ver Sec. 3.1 de [Fal90]):

- el menor número de bolas abiertas de radio δ que cubren E ,
- el menor número de bolas cerradas de radio δ que cubren E ,
- el mayor número de bola disjuntas centradas en E ,
- el menor número de cubos de lado δ que cubren E ,
- la cantidad de cubos de una δ -malla que intersecan a E (un cubo de una δ -malla es de la forma $[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta) \times \cdots \times [m_d\delta, (m_d + 1)\delta)$, donde m_1, \dots, m_d son enteros), de aquí el nombre de box (caja en inglés).

Además, estas dimensiones pueden expresarse como los siguientes límites:

$$\underline{\dim}_B E = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(E, \delta)}{\log 1/\delta} \quad \text{y} \quad \overline{\dim}_B E = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(E, \delta)}{\log 1/\delta}.$$

Las dimensiones box se relacionan con la de Hausdorff de la siguiente manera:

$$\dim_H E \leq \underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E \leq d;$$

nuevamente, todas estas desigualdades pueden ser estrictas (ver [Mat95], Sec. 5.3).

En [Tri82] se prueba que ΔE coincide con la dimensión box superior de E . En particular, $\overline{\dim}_B$ conserva las propiedades de Δ dadas en la subsección anterior.

Observamos que la dimensión box inferior es monótona y Lipschitz invariante pero no es finitamente estable.

2.2. Conjunto de Cantor asociado a una sucesión

Sea $a = \{a_j\}$ una sucesión positiva, monótona no creciente y sumable. Sea I_a un intervalo cerrado de longitud $\sum_j a_j$. Siguiendo [CMPS05], a continuación definimos por etapas el conjunto de Cantor C_a asociado a la sucesión a , que tiene de medida de Lebesgue nula (ver Figura 2.1). En la primera etapa, quitamos de I_a un intervalo abierto L_1 de longitud a_1 , resultando dos intervalos cerrados I_1^1 y I_2^1 , y una laguna de longitud a_1 entre ellos; el intervalo L_1 , como mostraremos luego, queda determinado de forma única por la sucesión. Habiendo completado la etapa k -ésima, tenemos los intervalos cerrados $I_0^k, \dots, I_{2^k-1}^k$ contenidos en I_a . La etapa $k+1$ consiste en remover del intervalo I_l^k un intervalo abierto L_{2^k+l} de tamaño a_{2^k+l} ; nuevamente, la posición de esta laguna queda unívocamente determinada. Tenemos entonces dos intervalos cerrados I_{2l}^{k+1} y I_{2l+1}^{k+1} contenidos en I_l^k que satisfacen

$$(2.4) \quad I_l^k = I_{2l}^{k+1} \cup L_{2^k+l} \cup I_{2l+1}^{k+1}.$$

Como se observó, para que esta construcción sea posible, la posición de las lagunas removidas en cada etapa no es arbitraria, pues la longitud de cada intervalo cerrado de la etapa k es la suma de las longitudes de todas las lagunas que se quitan de él en en las siguientes etapas. Para precisar esto, notemos que iterando en cada uno de los intervalos cerrados del lado derecho de la igualdad (2.4) se deduce que

$$(2.5) \quad I_l^k \doteq \bigcup_{n \geq k} \bigcup_{j=l2^{n-k}}^{(l+1)2^{n-k}-1} L_{2^n+j},$$

donde \doteq significa que la igualdad válida salvo un conjunto de medida nula. Luego

$$(2.6) \quad |I_l^k| = \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{j=l2^{n-k}}^{(l+1)2^{n-k}-1} a_{2^n+j}.$$

En particular, cuando hacemos $k = l = 0$, tenemos el extremo derecho de L_1 . Una vez definida esta laguna, inductivamente obtenemos las posiciones de todas la lagunas.

Denotamos con E_k a la unión de los intervalos cerrados de la k -ésima etapa,

$$(2.7) \quad E_k = \bigcup_{l=0}^{2^k-1} I_l^k = I_a \setminus \bigcup_{i=1}^{2^k-1} L_i.$$

Por (2.4) tenemos que las etapas están anidadas, i.e., $E_{k+1} \subset E_k$. Definimos entonces

$$C_a := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = I_a \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i,$$

que resulta un conjunto de Cantor:

- *Compacto*: Es la intersección de compactos anidados.
- *Perfecto*: Si $x \in C_a$ entonces $x \in I_j^k$ para cada $k \geq 1$. Estos intervalos están anidados, decrecen a x y sus extremos pertenecen a C_a .
- *Totalmente disconexo*: Esto es cierto pues la longitud de los intervalos I_l^k decrece a 0 cuando $k \rightarrow \infty$ (ver Observación 2.9).

Además, como $|I_a| = \sum_{i=1}^{\infty} |L_i|$, se sigue que C_a tiene medida de Lebesgue nula.

Definición 2.8. C_a es el conjunto de Cantor asociado a la sucesión a .

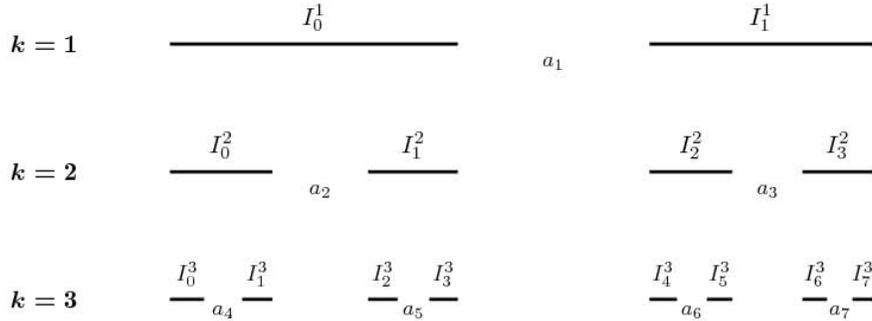


FIGURA 2.1

Observación 2.9. Por la definición de E_k tenemos que $|I_l^k| < \sum_{j \geq 2^{k+1}} a_j$ para $0 \leq l < 2^k$, esto es, los diámetros $|I_l^k|$ decrecen uniformemente a 0 cuando k crece.

Notamos que todo conjunto de Cantor C en \mathbb{R} de medida de Lebesgue nula puede construirse de esta forma; o sea, existe una sucesión sumable y positiva a tal que $C_a = C$. En efecto, sea I el menor intervalo que contiene a C . Por compacidad, el complemento de C en I es la unión disjunta de la familia de intervalos abiertos

$\{U_i\}$. Para construir la sucesión a , tomamos de esta familia un intervalo de longitud máxima U_{i_1} y definimos $a_1 = |U_{i_1}|$. Por ser C perfecto, tenemos a izquierda y a derecha de U_{i_1} infinitos intervalos. Sean U_{i_2} y U_{i_3} intervalos de longitud máxima a izquierda y a derecha de U_{i_1} respectivamente. Definimos $a_2 = |U_{i_2}|$ y $a_3 = |U_{i_3}|$. Continuando de esta forma obtenemos una sucesión $a = \{a_j\}$ que cumple $C_a = C$.

Observamos que el argumento dado arriba sirve también para mostrar que todo conjunto de Cantor C , *no necesariamente de medida de Lebesgue nula*, puede expresarse como $C = \bigcap_{k \geq 1} E_k$, i.e., la intersección de etapas anidadas compuestas por 2^k intervalos cerrados y disjuntos cuyos extremos pertenecen a C .

Ejemplo 2.10. El conjunto ternario de Cantor clásico $\Lambda_{\frac{1}{3}}$ es el asociado a la sucesión $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \dots \right\}$.

En general, el conjunto r -ádico Λ_r , $0 < r < 1/2$, es el conjunto de Cantor en $[0, 1]$ cuyas lagunas que se remueven en la k -ésima etapa tienen todas longitud $r^{k-1}\xi$, donde $\xi = 1 - 2r$. Este conjunto es el asociado a la sucesión $\left\{ \xi, r\xi, r\xi, r^2\xi, r^2\xi, r^2\xi, r^2\xi, \dots \right\}$. Notamos que los intervalos cerrados de la k -ésima etapa tienen longitud r^k .

Puede probarse que Λ_r es un s_r -conjunto, con $s_r = \frac{\log 2}{-\log r}$. No daremos la prueba, que puede encontrarse en [Mat95], Sección 4.10. El argumento para ver esto es que uno espera que los intervalos de la etapa k den una buena aproximación de la medida de Hausdorff a medida que k crece. Tenemos entonces 2^k intervalos de longitud r^k que cubren al conjunto, y ya que $r^{s_r} = 1/2$, el tamaño de este cubrimiento es igual a 1. Esto da una cota superior de la medida.

Más aún, $\mathcal{H}^{s_r}(\Lambda_r) = 1$ (ver el comentario posterior al Teorema 1.14 de [Fal86]).

Ejemplo 2.11. El conjunto de Cantor C_p es el asociado a la sucesión $\{1/n^p\}$. En [CMPS05] se prueba que es un $1/p$ -conjunto; en particular, $\dim_H C_p = 1/p$. Consideraremos nuevamente este conjunto al final del capítulo.

Los conjuntos del Ejemplo 2.10 son un caso particular de conjuntos de Cantor centrales, que son esenciales para las pruebas de la Sección 2.5.

Definición 2.12. Decimos que un conjunto de Cantor es *central* si para cada $k \geq 1$, los intervalos cerrados que constituyen la etapa k -ésima tienen todos la misma longitud.

Observación 2.13. Claramente esta definición equivale a que todas las lagunas que se remueven de la etapa k tengan la misma longitud. Luego, si C_a es un conjunto de Cantor central entonces la sucesión a tiene la forma

$$(2.8) \quad a_{2^k+j} = \lambda_k \quad 0 \leq j < 2^k, \quad k \geq 0.$$

El espacio simbólico. En esta subsección damos el resultado que afirma que, desde el punto de vista topológico, los conjuntos de Cantor no se pueden distinguir. Éste es un resultado conocido y para su prueba necesitamos introducir el espacio simbólico.

Dado $n \geq 1$, Ω_n denota el conjunto de sucesiones de n términos formadas por ceros y unos, esto es,

$$\Omega_n = \{\omega_1 \dots \omega_n : \omega_j = 0, 1\} = \{0, 1\}^n;$$

Ω_0 denota la sucesión vacía. Sea $\Omega^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ el conjunto de todas las sucesiones finitas. Notamos que Ω^* son todos los números binarios. Dada $\omega \in \Omega_n$, denotamos

con $\ell(\omega)$ su representación decimal, i.e.,

$$\ell(\omega) = \sum_{j=1}^n \omega_j 2^{n-j}.$$

Definamos

$$\Omega^+ = \{\omega_1 \omega_2 \dots : \omega_j = 0, 1\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}},$$

que son las sucesiones infinitas de ceros y unos. Los elementos de $\Omega^+ \cup \Omega^*$ se llaman *palabras*. Dada una palabra ω , denotamos con ω_j su *j-ésima componente*; la cantidad de componentes de una palabra finita ω se denomina su *longitud*, y se denota $|\omega|$; las palabras de Ω^+ tienen longitud infinita. La *n-truncación* de $\omega \in \Omega^+$ es $\omega^n = \omega_1 \dots \omega_n$. Si τ es una palabra finita, entonces $\tau\omega$ denota la palabra $\tau_1 \dots \tau_n \omega_1 \dots$

El *m-cilindro* correspondiente a $\omega \in \Omega^+$ es el conjunto

$$c_m(\omega) := \{\tau \in \Omega^+ : \omega_i = \tau_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

Definimos una métrica $d : \Omega^+ \times \Omega^+ \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(\omega, \tau) = \begin{cases} 2^{-|\omega \wedge \tau|} & \text{si } \omega \neq \tau \\ 0 & \text{si } \omega = \tau \end{cases},$$

donde $|\omega \wedge \tau| = \min\{k : \omega_k \neq \tau_k\}$. El espacio (Ω^+, d) es el *espacio simbólico*, y sirve como modelo topológico para todos los conjuntos de Cantor.

Notamos que con esta métrica, $c_m(\omega)$ es la bola centrada en ω de radio 2^{-m} .

La prueba de la siguiente proposición la tomamos de una dada por Bedford en [Bed91] para un caso particular de conjuntos de Cantor.

Proposición 2.14. *Cualesquiera dos conjuntos de Cantor son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{l=0}^{2^k-1} I_l^k$ un conjunto de Cantor. Mostraremos que C es homeomorfo a Ω^+ . La proposición se sigue pues la composición de homeomorfismos es transitiva.

Dada $\omega \in \Omega^+$, pongamos

$$I_\omega^k := I_{\ell(\omega^k)}^k, \quad \text{para todo } k.$$

Debido a que

$$\ell(\omega^{k+1}) = \begin{cases} 2\ell(\omega^k) & \text{si } \omega_{k+1} = 0 \\ 2\ell(\omega^k) + 1 & \text{si } \omega_{k+1} = 1 \end{cases}$$

se sigue de (2.4) que $I_\omega^{k+1} \subset I_\omega^k$, por lo que $\{I_\omega^k\}$ es una familia encajada de intervalos cerrados. Definimos entonces $\pi : \Omega^+ \rightarrow C$ como

$$\pi(\omega) = \bigcap_{k \geq 1} I_\omega^k.$$

El mapeo π es un biyección. En efecto, dados $\omega \neq \tau$, sea n tal que $\omega_n \neq \tau_n$. Entonces $I_\omega^n \cap I_\tau^n = \emptyset$, y por estar los intervalos encajados tenemos que $\pi(\omega) \neq \pi(\tau)$. Además, dado $x \in C$, podemos construir su preimagen como sigue:

$$\omega_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I_0^1 \\ 1 & \text{si } x \in I_1^1 \end{cases}$$

y recursivamente,

$$\omega_{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I_{\omega_1 \dots \omega_k 0}^{k+1} \\ 1 & \text{si } x \in I_{\omega_1 \dots \omega_k 1}^{k+1} \end{cases}$$

Para mostrar que π es continua notemos que cualquier sucesión en Ω^+ que converja a ω está contenida *finalmente* en el conjunto $c_m(\omega)$ para cada $m \geq 1$. Como

$$(2.9) \quad \pi(c_m(\omega)) = I_\omega^m \cap C,$$

entonces π es continua si $|I_\omega^m| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ para todo $\omega \in \Omega^+$. Si esto último no es cierto, entonces por estar los intervalos encajados, existen $\varepsilon > 0$ y ω tales que $|I_\omega^m| > \varepsilon$ para todo m . Luego, la intersección de estos intervalos, que está contenida en C , contiene un intervalo, lo que contradice que el conjunto sea totalmente desconexo.

El argumento para ver la continuidad de π^{-1} es análogo: aplicamos π^{-1} en la igualdad (2.9) y notamos que $c_m(\omega) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. \square

Observación 2.15. Como consecuencia de la prueba de esta proposición, el espacio simbólico resulta compacto, perfecto y totalmente desconexo, pues es homeomorfo a cualquier conjunto de Cantor.

2.3. Sobre la dimensionalidad de conjuntos

Dijimos que un conjunto E es dimensional si existe una función $h \in \mathcal{D}$ tal que $0 < \mathcal{H}^h(E) < +\infty$. Comenzamos mostrando que esto no siempre es posible dando dos ejemplos de conjuntos no dimensionales.

Ejemplos de conjuntos no dimensionales.

Ejemplo 2.16. Sea $E = \{1/n\} \cup \{0\}$. Para cada $h \in \mathcal{D}$, puesto que $h(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$ tenemos que $\mathcal{H}^h(\{x_0\}) = 0$ para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, lo que expresa que \mathcal{H}^h es una medida que no tiene *átomos*. Se sigue de la sigma aditividad que

$$\mathcal{H}^h(E) = \mathcal{H}^h(0) + \sum_{n \geq 1} \mathcal{H}^h(\{1/n\}) = 0,$$

por lo que E es un compacto no dimensional.

Si a \mathcal{D} le agregamos la función $h_0 := 1$, que puede pensarse como el caso límite de las funciones potencia $g_s = x^s$, $s > 0$, entonces \mathcal{H}^{h_0} resulta la medida *cuenta puntos*. Es inmediato entonces, por tener E infinitos elementos, que $\mathcal{H}^{h_0}(E) = +\infty$, lo que igual no lo convierte en un conjunto dimensional.

Este es un ejemplo trivial de conjunto no dimensional. Obviamente si consideramos una medida sin átomos entonces todo conjunto numerable tiene medida nula. El siguiente ejemplo, debido a Best ([Bes39]), muestra la existencia de conjuntos de Cantor no dimensionales. Sólo damos un bosquejo de la prueba.

Ejemplo 2.17. Sea Λ_r el conjunto de Cantor r -ádico, que es un s_r -conjunto, donde $s_r = \frac{\log 2}{-\log r}$.

Sea $I_n = [1/(n+1), 1/n]$, de modo que se tiene la unión disjunta

$$[0, 1] = \bigcup_{n \geq 1} I_n \cup \{0\}.$$

Sea E_n la contracción afín de razón $(n(n+1))^{-1}$ de Λ_r al intervalo I_n . Luego, por la Proposición 2.7, $\mathcal{H}^s(E_n) = n(n+1)^{-r} \mathcal{H}^s(\Lambda_r)$. Definimos

$$E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \cup \{0\}.$$

Claramente E es compacto, perfecto y totalmente desconexo, i.e., un conjunto de Cantor. Como las transformaciones afines preservan la dimensión, se sigue de la σ -estabilidad de la dimensión que $\dim_H E = s_r$. Además, como

$$\mathcal{H}^{s_r}(E) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)^{-\frac{\log 2}{\log r}} \mathcal{H}^{s_r}(\Lambda_r)$$

y $\mathcal{H}^{s_r}(\Lambda_r) > 0$, si elegimos $r \leq 1/4$ tenemos que $\mathcal{H}^{s_r}(E) = +\infty$.

Para mostrar que para E no existe $h \in \mathcal{D}$ tal que $0 < \mathcal{H}^h(E) < +\infty$ se consideran dos casos:

- (I) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)/x^{s_r} = 0$: en este caso se tiene que $\mathcal{H}^h(E) = 0$, pero no daremos aquí la prueba.
- (II) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)/x^{s_r} = k$, con $0 < k \leq +\infty$: usando un argumento como en la prueba de la Proposición 2.19 es sencillo mostrar que $\mathcal{H}^h(E) = +\infty$.

Noción de dimensión. La definición de conjunto dimensional no es precisa ya que sólo involucra una función de dimensión, o sea, que h sea la dimensión de E dice únicamente que hay una medida de Hausdorff que mide bien al conjunto, pero no se tiene una idea de qué ocurre con otras funciones de dimensión en relación con h . Introducimos entonces un orden parcial en \mathcal{D} (ver [Rog98]), que será nuestra forma de comparar sus elementos.

Definición 2.18. Sean f y h en \mathcal{D} .

- f es menor que h , y lo denotamos $f \prec h$, si

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)/f(x) = 0.$$

- f es equivalente a h , y lo denotamos $f \equiv h$, si

$$0 < c_1 = \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)} = c_2 < +\infty.$$

Ponemos $f \preceq g$ cuando $f \prec g$ o $f \equiv g$. Decimos que f y g no se pueden comparar cuando no es posible ninguna de las relaciones $f \prec g$, $g \prec f$ y $f \equiv g$.

Notar que esta definición es consistente con la ley usual de las funciones potencia: $x^s \prec x^t$ sii $s < t$.

Proposición 2.19. Si ν^g es cualquiera de las medidas \mathcal{H}^g , \mathcal{P}_0^g o \mathcal{P}^g , entonces se tiene:

- I) Si $f \prec h$ entonces: $\nu^f(E) < +\infty \implies \nu^h(E) = 0$.
- II) Si $f \equiv h$ entonces:
 - a) $\nu^f(E) < +\infty \iff \nu^h(E) < +\infty$.
 - b) $0 < \nu^f(E) \iff 0 < \nu^h(E)$.
 - c) En particular, E es un f -conjunto si y sólo si E es un h -conjunto.

DEMOSTRACIÓN. I) Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta_0 > 0$ tal que $0 < x < \delta_0$ implique $h(x)/f(x) < \varepsilon$. Luego, para cualquier δ -cubrimiento $\{U_j\}_{j=1}^\infty$ de E , con $0 < \delta \leq \delta_0$,

$$\sum_{j \geq 1} h(|U_j|) = \sum_{j \geq 1} \frac{h(|U_j|)}{f(|U_j|)} f(|U_j|) \leq \varepsilon \sum_{j \geq 1} f(|U_j|),$$

de donde se sigue que $\mathcal{H}^h(E) \leq \varepsilon \mathcal{H}^f(E)$. La demostración para la premedida packing es análoga cambiando δ -cubrimiento por δ -packing. Finalmente, si $\mathcal{P}^f(E) <$

$+\infty$, hay un cubrimiento $\{E_i\}_i$ de E tal que $\sum_i P^f(E_i) < +\infty$, y por el caso anterior, $\sum_i P^h(E_i) = 0$, de donde $\mathcal{P}^h(E) = 0$.

II) Por definición de $\underline{\lim}$ y $\overline{\lim}$, existe δ_0 y constantes finitas y positivas \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 tales que $\tilde{c}_1 < h(x)/f(x) < \tilde{c}_2$ cuando $0 < x < \delta_0$. Usando esto obtenemos

$$\tilde{c}_1 \sum_i f(|U_i|) \leq \sum_i h(|U_i|) \leq \tilde{c}_2 \sum_i f(|U_i|),$$

donde $\{U_i\}$ puede ser un δ -cubrimiento o un δ -packing de E , $0 < \delta < \delta_0$. Entonces,

$$\tilde{c}_1 \nu^f(E) \leq \nu^h(E) \leq \tilde{c}_2 \nu^f(E),$$

de donde se sigue el resultado. \square

Luego, si dos funciones de dimensión se pueden comparar entonces las medidas de Hausdorff (y packing) correspondientes están relacionadas. Esto nos conduce a una noción de dimensión de los subconjuntos de \mathbb{R}^d : supongamos que \mathcal{F} es un subconjunto no vacío de \mathcal{D} , linealmente ordenado por \prec , que tiene mínimo h_* , máximo h^* (si originalmente \mathcal{F} no tiene mínimo, definimos $h_* := 1$), y que además es *orden-completo*, esto es, cada una de sus partes no vacías que tiene cota superior tiene supremo. Bajo estas hipótesis sobre \mathcal{F} , podemos definir una generalización de \dim_H , o sea, una función $\dim_{\mathcal{F}} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}$ tal que si f y $g \in \mathcal{F}$ satisfacen $f \prec \dim_{\mathcal{F}} E$ y $\dim_{\mathcal{F}} E \prec g$, entonces $\mathcal{H}^f(E) = +\infty$ y $\mathcal{H}^g(E) = 0$. Para esto definimos

$$\dim_{\mathcal{F}} E = \sup \{ h \in \mathcal{F} : \mathcal{H}^h(E) < +\infty \},$$

donde por convención, $\sup\{\emptyset\} = h_*$.

Poniendo $\mathcal{F}_1 = \{x^s\}_{s \geq 0}$, como tenemos que $x^s \preceq x^t$ si y sólo si $s \leq t$, podemos hacer la identificación $\dim_{\mathcal{F}_1} = \dim_H$.

Observamos que $\dim_{\mathcal{F}}$ conserva las propiedades básicas de dimensión dadas en la Sección 2.1, esto es:

σ -estabilidad: Si $C = \{C_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$ entonces

$$\dim_{\mathcal{F}} \left(\bigcup_{j \geq 1} C_j \right) = \sup_{j \geq 1} \{ \dim_{\mathcal{F}} C_j \}.$$

En efecto, sea $h = \sup_{j \geq 1} \{ \dim_{\mathcal{F}} C_j \}$. Si $h \prec f$, entonces, para cada $j \geq 1$, $\dim_{\mathcal{F}} C_j \prec f$, y por definición de dimensión y σ -subaditividad de la medida, $\mathcal{H}^f \left(\bigcup_{j \geq 1} C_j \right) = 0$. Por otro lado, si $g \prec h$, por definición de supremo, existe j_0 tal que $g \prec \dim_{\mathcal{F}} C_{j_0}$, y por la monotonía de la medida se sigue que

$$\mathcal{H}^g \left(\bigcup_{j \geq 1} C_j \right) = +\infty.$$

Conjuntos numerables: Se tiene que $\dim_{\mathcal{F}} \{x\} = h_*$, pues para cada $f \in \mathcal{F}$, su medida es $\mathcal{H}^f(\{x\}) = 0$. Luego, por la σ -estabilidad, si E es un conjunto numerable entonces $\dim_{\mathcal{F}}(E) = h_*$.

Monotonía: Si $A \subset B$ entonces $\dim_{\mathcal{F}} B \preceq \dim_{\mathcal{F}} A$. Esto es consecuencia de la σ -estabilidad.

Invariancia por funciones de tipo Lipschitz: Para esta propiedad necesitamos que las funciones de \mathcal{F} satisfagan la propiedad de duplicación (2.2).

- Si $\psi : C \rightarrow \psi(C)$ es Lipschitz (con constante c) entonces

$$\dim_{\mathcal{F}} \psi(C) \preceq \dim_{\mathcal{F}} C.$$

En efecto, si $\{U_j\}$ es un δ -cubrimiento de C , se tiene que $\psi(U_j \cap C)$ es un $c\delta$ -cubrimiento de $\psi(C)$, por lo que, si k es un entero tal que $c2^{-k} \leq 1$ y usando que h es no decreciente y satisface (2.2), se tiene que

$$\sum_j h(|\psi(U_j \cap C)|) \leq \sum_j h(c|U_j \cap C|) \leq c_h^k \sum_j h(|U_j \cap C|),$$

y entonces

$$(2.10) \quad \mathcal{H}^h(\psi(C)) \leq c_h^k \mathcal{H}^h(C).$$

Pongamos $f = \dim_{\mathcal{F}} \psi(C)$ y $g = \dim_{\mathcal{F}} C$. Si $g \prec f$, por la definición de $\dim_{\mathcal{F}}$ se tiene que $\mathcal{H}^f(C) = 0$, y por (2.10), $\mathcal{H}^f(\psi(C)) = 0$; además, $\mathcal{H}^g(\psi(C)) = \infty$. Luego, por la definición de f , existe $h \in \mathcal{F}$ que satisface $g \prec h$ y $h \prec f$; pero entonces $\mathcal{H}^h(C) = 0$ por la definición de g , y por (2.10) se sigue que $\mathcal{H}^h(\psi(C)) = 0$, lo que contradice la definición de f . Como \mathcal{F} es linealmente ordenado, concluimos que $f \preceq g$, que es lo que queríamos demostrar.

- Si $\varphi : C \rightarrow \varphi(C)$ tiene inversa Lipschitz ($|x - y| \leq k |\varphi(x) - \varphi(y)|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, para algún $k > 0$), entonces $\dim_{\mathcal{F}} C \preceq \dim_{\mathcal{F}} \varphi(C)$. Este resultado se obtiene siguiendo un razonamiento análogo al anterior.

Notamos que $\dim_{\mathcal{F}} \psi(C) = \dim_{\mathcal{F}} C$ cuando ψ es bi-Lipschitz. En particular, $\dim_{\mathcal{F}}$ preserva movimientos rígidos.

Obviamente una buena generalización de \dim_H en este sentido debe contener a la familia $\{x^s\}_{s \geq 0}$. Al final del capítulo exhibimos un ejemplo de una familia de funciones de dimensión que dan una generalización natural de \dim_H .

2.4. Análisis de conjuntos cut-out

En esta sección estudiamos las dimensiones fractales usuales de la siguiente familia de conjuntos.

Definición 2.20. Sea $a = \{a_k\}$ una sucesión positiva, monótona no creciente y sumable. Sea I_a un intervalo cerrado de longitud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Definimos \mathcal{C}_a como la familia de todos los conjuntos cerrados E que están contenidos en I_a y son de la forma $E = I_a \setminus \bigcup_{j \geq 1} U_j$, donde $\{U_j\}$ es una familia disjunta de intervalos abiertos contenidos en I_a tales que $|U_k| = a_k \forall k$. Los elementos de \mathcal{C}_a se denominan *conjuntos cut-out* asociados a la sucesión a .

Notamos que todo miembro de \mathcal{C}_a tiene medida de Lebesgue nula. Más aún, todo compacto de medida nula de \mathbb{R} , salvo traslaciones, pertenece a \mathcal{C}_a para alguna sucesión a .

Observación 2.21. El conjunto de Cantor asociado a la sucesión a pertenece a \mathcal{C}_a . En este caso, ya que a es no creciente, la sucesión $\{|I_j^k|\}_{(k,j)}$, con $1 \leq j \leq 2^k$ y $k \geq 1$, es (lexicográficamente) no creciente.

Analizamos el comportamiento de las dimensiones fractales Hausdorff y box de los elementos de \mathcal{C}_a por medio de la sucesión a que los define.

Besicovitch y Taylor en [BT54] relacionaron la medida y dimensión de Hausdorff \mathcal{H}^s de $E \in \mathcal{C}_a$ con el decaimiento de la sucesión a . Para motivar esta relación, sea

$$r_n = \sum_{j \geq n} a_j$$

de modo que r_n decrece a 0 y pongamos $b_n = r_n/n$. Consideremos el conjunto de Cantor $C_a = \bigcap E_k$. Es de esperar que los cubrimientos formados por los intervalos de la k -ésima etapa E_k , a medida que k crece, den una buena aproximación de $\mathcal{H}^s(C_a)$. Si ponemos como en la ecuación (2.7)

$$E_k = \bigcup_{l=0}^{2^k-1} I_l^k = I_a \setminus \bigcup_{i=1}^{2^k-1} L_i,$$

con $|L_i| = a_i$, entonces notamos que la longitud promedio de estos intervalos cerrados es

$$\sum_{l=0}^{2^k-1} \frac{|I_l^k|}{2^k} = \frac{r_{2^k}}{2^k} = b_{2^k}.$$

Luego, reemplazando la longitud de cada intervalo por su longitud promedio es razonable pensar que la sucesión $2^k b_{2^k}$ da asintóticamente información sobre $\mathcal{H}^s(C_a)$. El artículo [BT54] muestra que esta intuición es correcta.

Damos a continuación el Lema 1 de [BT54] con su corolario. La demostración es la formalización del argumento dado arriba.

Lema 2.22. *Sea a una sucesión positiva, monótona no creciente y sumable y sea $E \in \mathcal{C}_a$. Luego, para $0 < s \leq 1$ se tiene que*

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n b_n^s.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n b_n^s < +\infty$ pues si no es trivial. Denotemos con $\{U_j\}$ a los intervalos complementarios de E en I_a con $|U_j| = a_j$ (como en la Definición 2.20). Para cada $n \geq 2$, sea

$$F_n = I_a \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} U_j,$$

de modo que E_n consiste de n intervalos cerrados $\{J_i^n\}_{i=1}^n$ (un punto aislado se considera un intervalo degenerado) cuya longitud total es r_n . Además $E \subset F_n$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$. Por definición de límite inferior y ya que r_n decrece a 0, existe m tal que

$$r_m < \delta \quad \text{y} \quad m b_m^s < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n b_n^s + \varepsilon,$$

por lo que F_m resulta un δ -cubrimiento de E . Para estimar el tamaño de este cubrimiento, puesto que la potencia x^s es cóncava, podemos usar la desigualdad de Jensen para obtener

$$\sum_{i=1}^m |J_i^m|^s \leq m \left(\frac{r_m}{m} \right)^s < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n b_n^s + \varepsilon.$$

Como δ es arbitrario se tiene que

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n b_n^s + \varepsilon,$$

de donde se sigue el resultado pues ε también es arbitrario. \square

Si definimos el número

$$\alpha(a) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n, \text{ donde } nb_n^{\alpha_n} = 1 \ \forall n,$$

entonces se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.23. *Para $E \in \mathcal{C}_a$ se tiene que $0 \leq \dim_H E \leq \alpha(a)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha(a) = 1$ no hay nada que probar. Si $\alpha(a) < 1$ y s cumple $\alpha(a) < s \leq 1$ entonces se tiene que $\varliminf_{n \rightarrow \infty} nb_n^s = 0$. Luego $\mathcal{H}^s(E) = 0$ por el Lema 2.22, de donde $\dim_H E \leq \alpha(a)$. \square

Además, es inmediato del Lema 2.22 que para todo $E \in \mathcal{C}_a$ se tiene que

$$\dim_H E \leq \inf\{s > 0 : \varliminf nb_n^s < +\infty\}.$$

De hecho, no es complicado ver que $\alpha(a) = \inf\{s > 0 : \varliminf nb_n^s < +\infty\}$ (ver la Proposición 4 de [CMMS04]). Además, como consecuencia de otro resultado de [BT54] (ver Proposición 2.29 en la siguiente sección), se deduce que

$$(2.11) \quad \dim_H C_a = \inf\{s > 0 : \varliminf nb_n^s < +\infty\},$$

por lo que $\dim_H C_a = \alpha(a)$. En la siguiente sección (Teorema 2.31) obtenemos el resultado simétrico para el caso packing:

$$(2.12) \quad \Delta C_a = \inf\{s > 0 : \overline{\lim} nb_n^s < +\infty\}.$$

Por otro lado, para estudiar las dimensiones box, notamos primero (ver [Fal97], pág. 52) que todo $E \in \mathcal{C}_a$ tiene la misma dimensión box superior y la misma dimensión box inferior. Éstas se relacionan con las constantes

$$(2.13) \quad \gamma(a) = \varliminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 1/k}{\log a_k} \quad \text{y} \quad \beta(a) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 1/k}{\log a_k}.$$

En efecto, dado $E \in \mathcal{C}_a$ las Proposiciones 3.6 y 3.7 de [Fal97] dicen respectivamente que

$$(2.14) \quad \gamma(a) \leq \underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E \leq \beta(a)$$

y

$$(2.15) \quad -\frac{1 - \underline{\dim}_B E}{\underline{\dim}_B E(1 - \overline{\dim}_B E)} \leq -\frac{1}{\gamma(a)} \leq -\frac{1}{\beta(a)} \leq -\frac{1}{\overline{\dim}_B E}.$$

Como consecuencia de estos resultados, la dimensión box de $E \in \mathcal{C}_a$ existe si y sólo si $\gamma(a) = \beta(a)$, en cuyo caso

$$\dim_B E = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 1/k}{\log a_k}.$$

Además, de las desigualdades es inmediato que $\overline{\dim}_B E = \beta(a)$. Usando esto, por la primera desigualdad de (2.15) se obtiene la siguiente cota para la dimensión box inferior:

$$\underline{\dim}_B E \leq \frac{\gamma(a)}{1 - \beta(a) + \gamma(a)}.$$

Este resultado mejora el obtenido en [CMMS04], ya que en la Proposición 4 de ese trabajo se prueba que

$$\dim_H E \leq \frac{\gamma(a)}{1 - \beta(a) + \gamma(a)}.$$

Por otro lado Tricot en [Tri95] prueba que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \beta(a) = \overline{\dim}_B E.$$

A continuación probamos un resultado simétrico para $\underline{\dim}_B$, es decir, probamos que (Proposición 2.25) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \underline{\dim}_B E$. Si denotamos $d_k = \frac{\log 1/k}{\log a_k}$, el resultado de Tricot dice que $\overline{\lim} d_k = \overline{\lim} \alpha_k$. Sin embargo *no* vale lo mismo para el límite inferior, ya que (como señalamos) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \underline{\dim}_B E$ y en [CMMS04] se prueba que $\gamma(a) = \underline{\lim} d_k$ puede ser estrictamente menor que $\underline{\dim}_B E$.

Asociamos a la sucesión a las sucesiones sumables \underline{a} y \overline{a} definidas como

$$\underline{a}_n = a_{2^{r+1}-1} \quad \text{y} \quad \overline{a}_n = a_{2^r},$$

con $2^r \leq n < 2^{r+1}$; luego $\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n \forall n$.

Observamos que los conjuntos $C_{\underline{a}}$ y $C_{\overline{a}}$ son conjuntos centrales. El siguiente resultado es la Proposición 3.1 de [CHM97].

Proposición 2.24. *Si C es un conjunto de Cantor central entonces*

$$\dim_H C = \underline{\dim}_B C.$$

Probamos ahora el resultado prometido.

Proposición 2.25. *Para toda sucesión a no creciente tenemos que*

$$\underline{\dim}_B C_a = \dim_H C_a = \alpha(a).$$

Observación 2.26. Esta proposición en particular dice que para estos conjuntos C_a , la dimensión de Hausdorff y la box inferior coinciden.

DEMOSTRACIÓN. Mostramos primero que

$$\underline{\lim} n b_n^s \leq \underline{\lim} n \overline{b}_n^s \leq 8 \underline{\lim} n b_n^s.$$

La primera desigualdad es inmediata pues $b_n \leq \overline{b}_n$. Para la otra, sea $\{n_j\}$ una subsucesión de los naturales. Entonces existe una sucesión $\{l_j\}$ que verifica $2^{l_j-1} \leq n_j < 2^{l_j}$, de donde $2^{l_j} b_{2^{l_j}}^s \leq 2 n_j b_{n_j}^s$ y por consiguiente

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} 2^k b_{2^k}^s \leq 2 \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n b_n^s.$$

Ahora para $2^{i_n} \leq n < 2^{i_n+1}$,

$$\begin{aligned} \overline{r}_n &\leq \sum_{k \geq 2^{i_n}} \overline{a}_k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{i_n+k} a_{2^{i_n+k}} \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{i_n+k-1} a_{2^{i_n+k-1}} = 2 r_{2^{i_n-1}} \leq 2 r_{2^{i_n-1}}; \end{aligned}$$

se sigue que $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \overline{b}_n^s \leq 4 \underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} 2^j b_{2^j}^s \leq 8 \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n b_n^s$.

Luego, por (2.11) se sigue que $\dim_H C_a = \dim_H C_{\overline{a}}$, y por la Proposición 2.24 tenemos que

$$\dim_H C_a = \underline{\dim}_B C_{\overline{a}}.$$

Por otro lado, con la notación usada en la definición de la dimensión box, tenemos que $N(C_a, \delta) \leq N(C_{\overline{a}}, \delta)$ (se hacen corresponder los puntos de C_a y $C_{\overline{a}}$ con una biyección que preserve el orden; luego, si dos puntos de $C_{\overline{a}}$ están contenidos en un abierto U , los puntos correspondientes de C_a van a estar contenidos en un abierto del mismo diámetro que U), por lo que $\underline{\dim}_B C_a \leq \underline{\dim}_B C_{\overline{a}}$. \square

Por esta proposición tenemos en particular que

$$\underline{\dim}_B E = \inf\{s > 0 : \underline{\lim} nb_n^s < +\infty\}$$

para cualquier $E \in \mathcal{C}_a$. Por otro lado, ya que el exponente crítico asociado a la premedida packing de un conjunto dado es la dimensión box superior ([Tri82]), es claro que $\overline{\dim}_B E = \inf\{s > 0 : \overline{\lim} nb_n^s < +\infty\}$.

2.5. Caracterización de la dimensión de C_a

El siguiente teorema generaliza a cualquier función $h \in \mathcal{D}$ el resultado establecido en el Lema 6 de [BT54] para las funciones x^s (c.f. [CHM03]). Muestra que $\mathcal{H}^h(C_a)$ se comporta como $nh(b_n)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para la prueba, que es una leve modificación de la dada en [BT54], necesitamos los siguientes lemas.

Lema 2.27. *Sea $C_{\tilde{a}}$ un conjunto de Cantor central asociado a la sucesión $\tilde{a} = \{\tilde{a}_n\}$. Entonces $|I_l^k| = b_{2^k}$, con $0 \leq l < 2^k$.*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que por (2.8), la sucesión tiene la forma $\tilde{a}_{2^n+j} = \lambda_n$, con $0 \leq j < 2^n$, $n \geq 0$. Entonces, por (2.6) se tiene que

$$\begin{aligned} |I_0^k| &= \sum_{n \geq k} \sum_{j=0}^{2^{n-k}-1} \tilde{a}_{2^n+j} = \sum_{n \geq k} 2^{n-k} \lambda_n \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{n \geq k} \sum_{j=0}^{2^n-1} \tilde{a}_{2^n+j} = \frac{1}{2^k} \sum_{m \geq 2^k} \tilde{a}_m = b_{2^k}, \end{aligned}$$

y como $|I_l^k| = |I_0^k|$, el lema queda demostrado. \square

Lema 2.28. *Sea $C = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{l=0}^{2^k-1} I_l^k$ un conjunto de Cantor. Si un intervalo J contiene $2^l - 1$ intervalos de la etapa N , entonces contiene al menos un intervalo de etapa de la etapa $N - l + 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Cada intervalo de la etapa $N - l + 1$ contiene 2^{l-1} intervalos de la etapa N . Sean $I_j^N, \dots, I_{j+2^{l-2}}^N$ los intervalos de la etapa N contenidos en J . Sabemos que I_j^N está contenido en algún intervalo I' de la etapa $N - l + 1$. En el peor de los casos posibles, I_{j-1}^N tiene el mismo extremo izquierdo que I' . Pero entonces, los 2^{l-1} intervalos $I_{j+2^{l-1}-1}^N, \dots, I_{j+2^l-2}^N$ están contenidos en un intervalo de la etapa $N - l + 1$. \square

Teorema 2.29. *Sea C_a un conjunto de Cantor asociado a una sucesión monótona no creciente. Para $h \in \mathcal{D}$, tenemos que*

$$\frac{1}{8} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n) \leq \mathcal{H}^h(C_a) \leq 4 \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n).$$

DEMOSTRACIÓN. Mostramos primero que $\mathcal{H}^h(C_a) \leq 4 \underline{\lim} nh(b_n)$. Notemos que

$$|I_j^k| = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_{2^{k+i}} = \underline{b}_{2^k} \quad \text{para } 0 \leq j < 2^k, k > 0.$$

Luego, por las identidades

$$|I_0^k| = a_{2^k} + (a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}+1}) + (a_{2^{k+2}} + a_{2^{k+2}+1} + a_{2^{k+2}+2} + a_{2^{k+2}+3}) + \dots,$$

$$|\underline{I}_0^{k-1}| = a_{2^k-1} + (a_{2^{k+1}-1} + a_{2^{k+1}-1}) + \\ + (a_{2^{k+2}-1} + a_{2^{k+2}-1} + a_{2^{k+2}-1} + a_{2^{k+2}-1}) + \dots,$$

la Observación 2.21 y el Lema 2.27, tenemos la siguiente estimación

$$(2.16) \quad |I_j^k| \leq |I_0^k| \leq |\underline{I}_0^{k-1}| = b_{2^{k-1}} \leq b_{2^k-1},$$

y de aquí $\sum_{j=0}^{2^k-1} h(|I_j^k|) \leq 2^k h(b_{2^k-1})$.

Dado $\delta > 0$ existe k_δ tal que $|I_0^k| < \delta$ para $k \geq k_\delta$, esto es, para $k \geq k_\delta$, los intervalos cerrados de la k -ésima etapa forman un δ -cubrimiento de C_a , lo que implica que

$$\mathcal{H}^h(C_a) \leq 2 \liminf_{k \rightarrow \infty} 2^k h(b_{2^k}),$$

y por esto $\mathcal{H}^h(C_a) \leq 4 \liminf n h(b_n)$.

Resta probar la primera desigualdad. Supongamos que $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} n h(b_n)$ pues si no es trivial. Más aún, supongamos que $\liminf_{n \rightarrow \infty} n h(b_n) < +\infty$; una sencilla modificación del argumento que daremos sirve para el caso $\liminf_{n \rightarrow \infty} n h(b_n) = +\infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe N_0 tal que

$$(2.17) \quad 2^k h(b_{2^k}) \geq (1 - \varepsilon) \liminf_{n \rightarrow \infty} n h(b_n) \quad \text{para } k \geq N_0.$$

Sea δ cualquier número que cumple

$$(2.18) \quad 0 < \delta < a_{2^{N_0}}.$$

Sea $\{U_j\}$ un δ -cubrimiento con intervalos abiertos de C_a . Existe un natural N tal que

$$E_k \subset \bigcup_j U_j \quad \text{para todo } k \geq N,$$

ya que si no tendríamos una sucesión decreciente de compactos no vacíos con intersección $C_a \setminus \bigcup_j U_j = \emptyset$. Por compacidad podemos suponer que contiene un número finito de intervalos. Además podemos asumir que los intervalos $\{U_j\}$ son disjuntos, pues si no los podemos achicar de forma tal que sigan cubriendo al conjunto. Reemplacemos ahora a cada U_j por el menor intervalo cerrado V_j tal que $V_j \supset U_j \cap E_N$. De esta forma, obtenemos un cubrimiento de C_a que consiste de un número finito de intervalos cerrados.

Si V_j contiene n_j intervalos cerrados de E_N , entonces

$$(2.19) \quad \sum_j n_j = 2^N,$$

ya que cada intervalo de E_N está contenido exactamente en un intervalo de $\{V_j\}$. Sea l_j el único entero tal que

$$(2.20) \quad 2^{l_j} \leq n_j < 2^{l_j+1}.$$

Por el Lema 2.28 se sigue que V_j contiene un intervalo $I_i^{N-l_j+1}$ de la etapa $N-l_j+1$. Usando la Observación 2.21 obtenemos que

$$(2.21) \quad |V_j| \geq |I_i^{N-l_j+1}| \geq |I_0^{N-l_j+2}| \geq b_{2^{N-l_j+2}}.$$

Luego, por (2.18) tenemos que $b_{2^{N-l_j+2}} < a_{2^{N_0}}$, y entonces $N-l_j+2 > N_0$. Asimismo, como h es no decreciente tenemos que

$$h(|V_j|) \geq h(b_{2^{N-l_j+2}}).$$

En consecuencia, de (2.17) se sigue que

$$h(|V_j|) > (1 - \varepsilon) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n)/2^{N-l_j+2},$$

y por lo tanto, de (2.19) y (2.20), tenemos la cota

$$\sum_j h(|U_j|) > \frac{1}{8}(1 - \varepsilon) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n).$$

Como $\{U_j\}$ es un δ -cubrimiento arbitrario tenemos que

$$\mathcal{H}^h(C_a) \geq \frac{1}{8}(1 - \varepsilon) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n),$$

y el resultado se sigue haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Observación 2.30. Como consecuencia de este resultado, cualquier $h \in \mathcal{D}$ que verifique $h(b_n) = 1/n$ hace a C_a un h -conjunto. Esta es la condición que satisface la función $h_a \in \mathcal{D}$ encontrada en [CMMS04], que además se construye de forma tal que resulte cóncava. En ese artículo, la concavidad se usa para probar que $\mathcal{H}^{h_a}(C_a) < +\infty$ (ver [CMMS04], prueba del Teorema 3). Notamos que usando el Teorema 2.29 *no es necesario* pedir esta propiedad a la función de dimensión.

Una de las formas posibles de construir una función $h \in \mathcal{D}$ que haga que C_a sea un h -conjunto es interpolando linealmente los puntos $(b_{n+1}, 1/(n+1))$ y $(b_n, 1/n)$, $\forall n > 0$, y poniendo $h(0) = 0$. Esta función resulta cóncava, lo que se ve sencillamente mostrando que la pendiente en el intervalo (b_{n+1}, b_n) es mayor o igual que la pendiente en (b_n, b_{n-1}) . Esto equivale a que $a_n \geq a_{n+1}$.

Probamos ahora el siguiente teorema, que es en cierto sentido dual al resultado anterior.

Teorema 2.31. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.29, tenemos que,*

$$\frac{1}{8} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n) \leq P_0^h(C_a) \leq 8 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n).$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera desigualdad, supongamos que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n) > d.$$

Para probar que $P_0^h(C_a) \geq d/8$ basta con encontrar, para cada $\delta > 0$, un δ -packing $\{B_i\}_i$ de C_a con $\sum_i h(|B_i|) > d/8$. Notemos que como $\{a_n\}$ es monótona no creciente, tenemos que

$$(2.22) \quad h(b_{2^k}) = h\left(\frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{2^k-1} |I_i^k|\right) \leq h(|I_0^k|).$$

Por hipótesis existe una subsucesión $\{n_j\}_{j \geq 1}$ tal que $n_j h(b_{n_j}) > d$. Para cada j , sea k_j el entero que cumple $2^{k_j} \leq n_j < 2^{k_j+1}$; entonces, por ser $\{b_n\}$ decreciente, se sigue de (2.22) que

$$(2.23) \quad d < n_j h(b_{n_j}) < 2^{k_j+1} h(b_{2^{k_j}}) \leq 2^{k_j+1} h(|I_0^{k_j}|).$$

Tomemos j suficientemente grande de forma tal que $|I_0^{k_j}| < \delta$. El diámetro de este intervalo es menor que el de todo intervalo de la etapa $k_j - 1$, por lo que la familia de

intervalos $\{B_i\}_{i=0}^{2^{k_j-2}-1}$, donde B_i está centrado en el extremo derecho del intervalo $I_{2i}^{k_j-1}$ y $|B_i| = |I_0^{k_j}|$, resulta un δ -packing de C_a , y por (2.23),

$$\sum_i h(|B_i|) = 2^{k_j-2} h(|I_0^{k_j}|) > d/8.$$

Para la segunda desigualdad, dado $\{B_i\}_{i=1}^N$ un δ -packing de C_a , definimos

$$k_i = \text{mín}\{k : I_j^k \subset B_i \text{ para algún } 0 \leq j < 2^k\}.$$

Por la definición de k_i , B_i está centrada en un intervalo de la etapa $k_i - 1$ pero no lo contiene, por lo que $|B_i| < |I_{j_i}^{k_i-2}|$, donde $I_{j_i}^{k_i-2}$ es el intervalo de la etapa $k_i - 2$ que contiene al centro de B_i . Luego, por la monotonía de h y (2.16),

$$(2.24) \quad \sum_{i=1}^N h(|B_i|) \leq \sum_{i=1}^N h(|I_{j_i}^{k_i-2}|) \leq \sum_{i=1}^N h(b_{2^{k_i-3}}).$$

Podemos suponer además que $|B_1| \geq \dots \geq |B_N|$, de donde $k_1 \geq \dots \geq k_N$. Denotemos $l_1 > \dots > l_M$ a los k_i que no se repiten. Sea θ_m la cantidad de veces que se repite l_m , o sea, θ_m cuenta cuántas de las bolas $\{B_i\}_{i=1}^N$ contienen un intervalo de la etapa l_m pero no de la anterior. Puesto que $\{B_i\}_{i=1}^N$ es una familia disjunta, θ_1 no puede exceder la cantidad de intervalos que hay en la etapa l_1 , que es 2^{l_1} ; cada bola del packing asociada a l_1 contiene $2^{l_2-l_1}$ intervalos de la etapa l_2 , por lo que $\theta_2 < 2^{l_2} - \theta_1 2^{l_2-l_1}$. Continuando de esta forma obtenemos que

$$\theta_M \leq 2^{l_M} - \sum_{i=1}^{M-1} \theta_i 2^{l_M-l_i} = 2^{l_M} \left(1 - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\theta_i}{2^{l_i}} \right),$$

y entonces $\sum_{i=1}^M \theta_i / 2^{l_i} \leq 1$.

Elegimos δ suficientemente chico de forma tal que $2^{l_1-3} \geq n_0$, donde

$$\sup_{n \geq n_0} nh(b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n) + \varepsilon.$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^N h(|B_i|) \leq \sum_{j=1}^M \frac{\theta_j}{2^{l_j-3}} 2^{l_j-3} h(b_{2^{l_j-3}}) \leq 8 \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nh(b_n) + \varepsilon \right),$$

de donde se sigue el teorema. \square

Por el Teorema 2.31 obtenemos que $P_0^{h_a}(C_a) < +\infty$, y por lo tanto los conjuntos de Cantor asociados a sucesiones no crecientes no sólo son dimensionales sino que además tienen una función de dimensión que simultáneamente *equipara* los procesos de cubrimiento y empaquetamiento.

Ahora estamos en condiciones de completar la caracterización prometida en la introducción del capítulo. Para esto necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.32. Sean $h, g \in \mathcal{D}$. Asumamos que $0 < \mathcal{H}^h(C_a)$ y $P_0^h(C_a) < +\infty$.

Luego

- a) $h \equiv g \iff 0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} ng(b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} ng(b_n) < +\infty$;
- b) $g \prec h \iff \lim_{n \rightarrow \infty} ng(b_n) = +\infty$;
- c) $h \prec g \iff \lim_{n \rightarrow \infty} ng(b_n) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por los Teoremas 2.29 y 2.31, como $\mathcal{H}^h(C_a) > 0$ y $P_0^h(C_a) < +\infty$, existen constantes $0 < c_h$ y $C_h < +\infty$ tales que

$$c_h 1/n \leq h(b_n) \leq C_h 1/n,$$

de donde se siguen las tres condiciones necesarias. Por otro lado, si $\{y_j\}$ es una sucesión que decrece a 0, entonces existe una subsucesión $\{n_j\}$ tal que

$$b_{n_j+1} \leq y_j < b_{n_j}.$$

Por esto,

$$\frac{g(y_j)}{h(y_j)} \leq \frac{g(b_{n_j})}{h(b_{n_j+1})} \leq 2c_h^{-1} n_j g(b_{n_j})$$

y

$$\frac{g(y_j)}{h(y_j)} \geq (2C_h)^{-1} (n_j + 1) g(b_{n_j+1});$$

de aquí se siguen las condiciones suficientes. \square

Tenemos ahora el principal resultado de esta parte.

Teorema 2.33. *Sea a una sucesión monótona no creciente, y sea $h \in \mathcal{D}$ tal que $0 < \mathcal{H}^h(C_a)$ y $P_0^h(C_a) < +\infty$. Entonces, para $g \in \mathcal{D}$ tenemos:*

- a) $h \equiv g \iff 0 < \mathcal{H}^g(C_a)$ y $P_0^g(C_a) < +\infty$;
- b) $g \prec h \iff \mathcal{H}^g(C_a) = +\infty$;
- c) $h \prec g \iff P_0^g(C_a) = 0$.

En particular, h será equivalente a x^s si y sólo si $0 < \mathcal{H}^s(C_a) \leq P_0^s(C_a) < +\infty$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba es inmediata por los Teoremas 2.29 y 2.31 y por el Lema 2.32. \square

Corolario 2.34. *Sea $\alpha = \dim_H C_a$ y $\beta = \Delta C_a$. Sea h_a una función de dimensión de C_a .*

- a) *Si $s < \alpha$ y $\beta < t$ entonces $x^s \prec h_a$ y $h_a \prec x^t$. Si $\mathcal{H}^\alpha(C_a) = +\infty$ entonces $x^\alpha \prec h_a$, y si $\mathcal{H}^\alpha(C_a) < +\infty$ entonces $x^\alpha \not\prec h_a$. Si $P_0^\beta(C_a) = 0$ entonces $h_a \prec x^\beta$, y si $P_0^\beta(C_a) > 0$ entonces $h_a \not\prec x^\beta$.*
- b) *En el caso $\alpha < \beta$, $h_a \not\equiv x^s$ para ningún $s \geq 0$. Además, si $\alpha < t < \beta$ entonces h_a no es comparable con x^t . En los casos límite, si $\mathcal{H}^\alpha(C_a) < +\infty$ entonces h_a no es comparable con x^α , y si $P_0^\beta(C_a) > 0$, entonces h_a no es comparable con x^β .*

DEMOSTRACIÓN. En el caso $\mathcal{H}^\alpha(C_a) < +\infty$, si x^α satisficiera $x^\alpha \prec h_a$, la Proposición 2.19 implicaría que $\mathcal{H}^{h_a}(C_a) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x^\alpha \not\prec h_a$. Análogamente, $P_0^\beta(C_a) > 0$ implica que $h_a \not\prec x^\beta$, pues si no $P_0^{h_a}(C_a) = +\infty$, contradiciendo el Teorema 2.31. El resto de las afirmaciones del ítem a) son inmediatas por el Teorema 2.33.

Para mostrar b), si $h_a \equiv x^s$ para algún $s \geq 0$ entonces $0 < \mathcal{H}^s(C_a) \leq P_0^s(C_a) < +\infty$, de donde $\alpha = \beta$. Además, por la Proposición 2.19, se sigue que $x^s \not\prec h$ cuando $s > \dim C_a$, y también $h_a \not\prec x^s$ si $0 \leq s < \beta$. \square

Notamos que por las igualdades $\alpha = \underline{\dim}_B C_a$ y $\beta = \overline{\dim}_B C_a$, la parte b) de este corolario enfatiza que para tener $h_a \equiv x^s$ es necesario que $\underline{\dim}_B C_a = \overline{\dim}_B C_a$. Pero esta última condición y el hecho de que C_a es un α -conjunto no son suficientes para

asegurar la equivalencia, y así la hipótesis del Teorema 2.33 a) no puede debilitarse pidiendo sólo la *existencia de la dimensión box* y que C_a sea un α -conjunto.

Teorema 2.35. *Para cada $0 < s < 1$, hay un conjunto de Cantor C_a asociado a una sucesión $a = \{a_j\}$ monótona no creciente que cumple $\dim_H C_a = \overline{\dim}_B C_a = s$ y $0 < \mathcal{H}^s(C_a) < +\infty$, pero $P_0^s(C_a) = +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN: Para construir esta sucesión ponemos $\lambda_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{s+\varepsilon_k}}$, donde

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{s \log l}{k}, & 2^m < k \leq 2^{m+1}, l = k - 2^m, m \text{ par} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

Definamos $a_j = \lambda_k$ para $2^{k-1} \leq j < 2^k$ y $k \geq 1$. El conjunto de Cantor central C_a nos provee el ejemplo. De hecho, es sencillo verificar que a es sumable, decreciente y, usando (2.13), que $\dim C_a = \overline{\dim}_B C_a = s$. A continuación verificamos las afirmaciones sobre las medidas:

- $0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nb_n^s$: Ya que

$$b_{2^k} = \sum_{i \geq 0} 2^i \lambda_{k+1+i} \quad \text{y} \quad \lambda_j \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{j}{s}} \quad \forall j,$$

tenemos que

$$2^k b_{2^k}^s \geq 2^k \left(\sum_{i \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+1+i-i}{s}} \right)^s = \frac{1}{2} \left(\sum_{i \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{s}-1\right)i} \right)^s = c_s > 0$$

y recordemos que $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nb_n^s \sim \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} 2^k b_{2^k}^s$.

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nb_n^s = +\infty$: Sea $n_j = 2^{2^j-1}$, j impar. Luego

$$b_{n_j} = \sum_{i \geq 0} 2^i \lambda_{2^j+i} > \lambda_{2^j};$$

por consiguiente

$$n_j b_{n_j}^s \geq 2^{2^j-1} \lambda_{2^j}^s = 2^{\frac{2^j(j-1) \log 2}{2^j+(j-1) \log 2} - 1},$$

que crece a infinito con j .

- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nb_n^s < +\infty$: Ahora ponemos $n_j = 2^{2^j}$ para j impar y observamos que

$$(2.25) \quad n_j b_{n_j}^s = n_j \left(\sum_{i \geq 0} 2^i \lambda_{2^j+1+i} \right)^s = \left(\sum_{i \geq j} \sum_{l=1}^{2^i} 2^{2^i+l+2^j \left(\frac{1-s}{s}\right)-1} \lambda_{2^i+l} \right)^s.$$

Cada suma en l está acotada por un término geométrico; más precisamente, si j es suficientemente grande existe una constante C_s que depende sólo de s tal que

$$\sum_{l=1}^{2^i} 2^{2^i+l+2^j \left(\frac{1-s}{s}\right)} \lambda_{2^i+l} \leq C_s \left(\frac{1}{2}\right)^{i-j},$$

o equivalentemente,

$$(2.26) \quad \sum_{l=1}^{2^i} 2^l \lambda_{2^i+l} \leq C_s \left(\frac{1}{2}\right)^{2^i+2^j \left(\frac{1-s}{s}\right)+i-j}.$$

Esto no es difícil de ver cuando i es impar. Para i par obtenemos

$$\sum_{l=1}^{2^i} 2^l \lambda_{2^i+l} < C_s \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2^i}{s+\varepsilon}}$$

para ε chico. Luego (2.26) será cierta si

$$(2.27) \quad 2^i \left(\frac{1-(s+\varepsilon)}{s+\varepsilon}\right) \geq 2^j \left(\frac{1-s}{s}\right) + i - j.$$

Pero la desigualdad (2.27) se tiene para todo $i > j$ eligiendo ε chico y j grande tales que $\varepsilon_{2^j} < \varepsilon$. \square

Observación 2.36. La hipótesis de monotonía no creciente de la sucesión a en los Teoremas 2.29 y 2.31 no se puede remover, como lo muestran los siguientes argumentos.

Si a es una sucesión no creciente y \tilde{a} es cualquier reordenación de a entonces $r_n^a \leq r_n^{\tilde{a}}$. Luego, por (2.11) y como $C_{\tilde{a}} \in \mathcal{C}_a$, tenemos que

$$\inf\{s > 0 : \underline{\lim} n(b_n^{\tilde{a}})^s < +\infty\} \geq \dim C_a \geq \dim C_{\tilde{a}}.$$

Observamos además que cada sucesión positiva y sumable a tiene una reordenación z para la cual $\dim C_z = 0$ (ver [CMPS05]). Esto muestra el contraejemplo para la Proposición 2.29.

Para el caso del Teorema 2.31 veamos que (2.12) no necesariamente es cierta para una sucesión general. Sea \tilde{a} un reordenamiento de a . Sea

$$\eta(\tilde{a}) := \inf\{s > 0 : \overline{\lim} n(b_n^{\tilde{a}})^s < +\infty\}$$

y consideremos $\beta(\tilde{a})$ como se definió en la Sección 2.4. Notar que si $t > \eta(\tilde{a})$ entonces $\tilde{a}_n < Cn^{1-1/t} \forall n$, y de aquí $\beta(\tilde{a}) \leq \frac{t}{1-t}$, lo que implica que $\beta(\tilde{a}) \leq \frac{\eta(\tilde{a})}{1-\eta(\tilde{a})}$. Por consiguiente $\frac{\beta(\tilde{a})}{1+\beta(\tilde{a})} \leq \eta(\tilde{a})$. Luego, para mostrar que este teorema no es cierto en general, exhibimos una sucesión no creciente a y un reordenamiento \tilde{a} de ésta para el cual

$$(2.28) \quad \beta(a) < \frac{\beta(\tilde{a})}{1+\beta(\tilde{a})}$$

y así $\Delta C_{\tilde{a}} = \Delta C_a = \beta(a) < \eta(\tilde{a})$, donde Δ es el exponente crítico para P_0^s , la premedida packing. Para $a_n = \frac{1}{n^p}$, pongamos

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} a_{3^k}, & n = \lceil \log 3^k \rceil, n \neq 3^j \forall j \\ a_{\lceil \log 3^k \rceil}, & n = 3^k, n \neq \lceil \log 3^j \rceil \forall j, \\ a_n, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\lceil s \rceil$ denota el menor entero mayor que s . Notar que este es un reordenamiento de a ya que la sucesión $\{\lceil \log 3^k \rceil\}$ es estrictamente creciente y $\lceil \log 3^{3^l} \rceil \neq 3^j$ para cada l y cada j . Es sencillo verificar que $\beta(a) = 1/p$ y que $\beta(\tilde{a}) = \frac{\log 3}{p}$. Por lo tanto (2.28) vale para $p > \frac{\log 3}{\log 3-1}$.

No obstante, los Teoremas 2.29 y 2.31 siguen siendo válidos cuando C_a es central y de medida de Lebesgue nula, sin pedir ninguna condición sobre el decrecimiento de a . En efecto, donde se necesita la hipótesis de decaimiento en el primer teorema es en la desigualdad (2.21), mientras que en el segundo es en las desigualdades (2.23) y (2.24); todas éstas siguen valiendo para conjuntos de Cantor centrales.

Además, a cada conjunto de Cantor asociado a una sucesión monótona no creciente le corresponde un conjunto de Cantor central con h -medida de Hausdorff y h -premedida packing equivalentes, por lo que los resultados para conjuntos asociados a sucesiones no crecientes pueden ser deducidos de los resultados para conjuntos centrales.

Una generalización de \dim_H . A continuación damos una aplicación de los resultados de esta sección.

Sean $p > 1$ y $q \in \mathbb{R}$. Consideremos la sucesión a definida por $a_n = (\log n)^q/n^p$, $\forall n > 1$. Denotamos $C_{p,q}$ al conjunto de Cantor asociado a la sucesión a y definimos la función de dimensión $h_{p,q}(x) = x^{\frac{1}{p}}/(-\log x)^{\frac{q}{p}}$. Observamos que ésta es una función duplicante.

Ya que $\gamma(a) = \beta(a) = 1/p$, tenemos que $\dim_H C_{p,q} = \dim_B C_{p,q} = 1/p$ para cualquier q . Además, si $q = 0$, $C_p := C_{p,0}$, que como ya dijimos en el Ejemplo 2.11, es un $1/p$ -conjunto. Más aún, ya que en este caso $r_n \sim 1/n^{p-1}$, el Teorema 2.31 implica que $P_0^{\frac{1}{p}}(C_p) < +\infty$. El siguiente corolario extiende estos resultados.

Corolario 2.37. *Con la notación de arriba,*

$$0 < \mathcal{H}^{h_{p,q}}(C_{p,q}) \leq P_0^{h_{p,q}}(C_{p,q}) < +\infty.$$

En particular, $C_{p,q}$ es un $h_{p,q}$ -conjunto.

DEMOSTRACIÓN. Mostramos que $r_n \sim (\log n)^q/n^{p-1}$, de donde es fácil ver que $h_{p,q}(b_n) \sim 1/n$. Supongamos primero que $q \geq 0$. En este caso tenemos

$$r_n \geq (\log n)^q \sum_{k \geq n} k^{-p} \geq c_1 \frac{(\log n)^q}{n^{p-1}}$$

y

$$r_n \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{(\log t)^q}{t^p} dt,$$

que integrando por partes resulta

$$\begin{aligned} r_n &\leq \frac{1}{p-1} \left(\frac{(\log(n-1))^q}{(n-1)^{p-1}} + q \int_{n-1}^{\infty} \frac{(\log t)^{q-1}}{t^p} dt \right) \\ &= c_1 \frac{(\log n)^q}{n^{p-1}} + O\left(\frac{(\log n)^{q-1}}{n^{p-1}}\right) \\ &\leq c_2 \frac{(\log n)^q}{n^{p-1}}, \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes que sólo dependen de p y q .

Supongamos ahora que $q < 0$. En este caso es fácil ver que

$$r_n \leq c_3 (\log n)^q/n^{p-1}.$$

Por otro lado, integrando por partes dos veces y ya que $q(q-1) > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} r_n &\geq \frac{1}{p-1} \left(\frac{(\log n)^q}{n^{p-1}} + \frac{q}{p-1} \frac{(\log n)^{q-1}}{n^{p-1}} + \frac{q(q-1)}{p-1} \int_n^{\infty} \frac{(\log t)^{q-2}}{t^{p-1}} dt \right) \\ &\geq \frac{1}{p-1} \frac{(\log n)^q}{n^{p-1}} \left(1 + \frac{q}{p-1} (\log n)^{-1} \right); \end{aligned}$$

tomando n suficientemente grande se tiene que $r_n \geq c_4 (\log n)^q/n^{p-1}$. \square

Notamos que $h_{p,q} \preceq h_{s,t}$ si y sólo si $(1/p, q) \leq_l (1/s, t)$ (aquí \leq_l denota el orden lexicográfico en $(0, 1) \times \mathbb{R}$). Definamos $\mathcal{H}^{\frac{1}{p}, q} = \mathcal{H}^{h_{p,q}}$, de modo que se tiene que $\mathcal{H}^{\frac{1}{p}, 0} = \mathcal{H}^{\frac{1}{p}}$. Como consecuencia del corolario anterior, concluimos lo siguiente. Si $q < 0$, entonces $(1/p, q) <_l (1/p, 0)$, de donde se sigue que $\mathcal{H}^{\frac{1}{p}, q}(C_{p,q}) = 0$, ya que $\mathcal{H}^{p,q}(C_{p,q}) < +\infty$. Por otro lado, si $q > 0$, entonces $(1/p, 0) <_l (1/p, q)$ y $\mathcal{H}^{p,q}(C_{p,q}) > 0$ implican que $\mathcal{H}^{\frac{1}{p}, q}(C_{p,q}) = +\infty$. Luego, la familia

$$\mathcal{F}_2 := \{h_{p,q}\}_{p>1, q \in \mathbb{R}} \cup \{x\} \cup \{1\},$$

provee una clasificación más precisa que la usual, $\dim_{\mathcal{F}_1} = \{x^s\}_{0 \leq s \leq 1}$; o sea, puede distinguir más conjuntos. Además, la dimensión inducida por esta familia, denotada $\dim_{\mathcal{F}_2}$, puede pensarse como el conjunto $((0, 1) \times \mathbb{R}) \cup \{(0, 0)\} \cup \{(1, 0)\}$ ordenado con \leq_l , y la función de conjuntos \dim_H resulta la restricción de este orden al conjunto $(0, 1) \times \{0\}$.

Sistemas iterados de funciones

Introducción

Hacemos aquí una recopilación de la teoría de sistemas iterados que nos será útil en el resto de la tesis.

La definición de un conjunto necesita de una regla o especificación de los elementos que pertenecen al mismo. Por ejemplo, en el capítulo anterior, para definir un conjunto de Cantor asociado a una sucesión, necesitamos indicar en cada etapa cuál es el intervalo abierto que debe removerse. Frecuentemente, esta especificación viene dada por medio de una función, como por ejemplo, ‘ser el conjunto de puntos que anulan la función’. Desde este punto de vista también se pueden definir conjuntos de Cantor. Éste es el enfoque que nos interesa presentar en este capítulo: ver conjuntos de Cantor definidos por medio de *sistemas iterados de funciones*. Bajo ciertas hipótesis sobre estos sistemas se puede obtener información sobre la dimensión del conjunto.

3.1. Definición de sistemas iterados

Trabajamos en \mathbb{R} con la métrica dada por el valor absoluto.

Un *sistema iterado de funciones* (que denotamos SIF) es una familia de contracciones $\{f_0, \dots, f_m\}$ en D , donde D es un subconjunto cerrado no vacío de \mathbb{R} . Esto es, para cada $i = 1, \dots, m$ tenemos que $f_i : D \rightarrow D$ y

$$(3.1) \quad |f_i^n(x) - f_i^n(y)| \leq r_i |x - y|,$$

para todo $x, y \in D$ y todo $n \geq n_0$, con $r_i < 1$. Cuando $n_0 = 1$, f_i son *contracciones estrictas*.

La propiedad fundamental de un sistema iterado es que determina un único atractor. Más precisamente, sea \mathcal{S} la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de D , i.e.,

$$\mathcal{S} = \{A \subset D : A \neq \emptyset \text{ es compacto}\}.$$

En \mathcal{S} definimos una métrica d_H de la siguiente manera:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon \text{ y } B \subset A_\varepsilon\}$$

donde A_ε es el ε -entorno de A definido como

$$A_\varepsilon = \{x \in D : |x - a| < \varepsilon, \text{ para algún } a \in A\};$$

esta métrica de conjuntos es conocida como la *métrica de Hausdorff*. El siguiente resultado es clásico y puede encontrarse por ejemplo en [Fal90], Teorema 9.1 para el caso de contracciones estrictas.

Teorema 3.1. Sean $\{f_0, \dots, f_m\}$ como en (3.1). Entonces existe un único compacto no vacío K que es invariante por f_i , esto es,

$$(3.2) \quad K = \bigcup_{i=0}^m f_i(K).$$

Más aún, si definimos $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ por

$$f(E) = \bigcup_{i=0}^m f_i(E)$$

y llamamos f^k a la k -ésima iteración de f , definida inductivamente por $f^0(E) = E$ y $f^k(E) = f(f^{k-1}(E))$, entonces para cualquier $A \in \mathcal{S}$ se tiene que

$$(3.3) \quad f^n(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} K,$$

donde la convergencia es en la métrica de Hausdorff. Además, si $f_i(A) \subset A$ entonces

$$K = \bigcap_{n \geq 1} f^n(A).$$

Definición 3.2. En vista de (3.3), el único compacto invariante recibe el nombre de *atractor* del sistema iterado (ver [Hut81], [Fal86]).

Como $K = \bigcup_{i=0}^m f_i(K)$ se puede pensar que K es un conjunto en algún sentido auto-similar, ya que se escribe como unión de “copias” de sí mismo. En este trabajo sin embargo reservaremos este término para un caso particular de estos atractores (ver definición 3.10).

Observación 3.3. En lugar de $D \subset \mathbb{R}$ podríamos haber considerado cualquier espacio métrico completo, pero para nuestros propósitos no es necesario. Más aún, en los capítulos siguientes trabajaremos únicamente con el caso particular de SIF formados por dos funciones.

Ejemplo 3.4. Consideremos el conjunto ternario $\Lambda_{\frac{1}{3}}$. Notemos que $\Lambda_{\frac{1}{3}} \cap [0, \frac{1}{3}]$ y $\Lambda_{\frac{1}{3}} \cap [\frac{2}{3}, 1]$ son similares a $\Lambda_{\frac{1}{3}}$ pero escalados por un factor de $\frac{1}{3}$. Luego, $\Lambda_{\frac{1}{3}}$ resulta el atractor del sistema dado por las funciones $g_0, g_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definidas por $g_0(x) = \frac{1}{3}x$ y $g_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

En muchos casos los atractores tienen propiedades fractales: poseer una estructura geométrica fina, es decir, a medida que las escalas disminuyen el conjunto conserva sus detalles; tener las dimensiones fractales menores que la dimensión topológica del espacio ambiente. Pero, en general, no puede decirse mucho sobre la estructura del atractor sin imponer más condiciones sobre las contracciones, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.5. Sea $\{f_0, f_1\}$ el SIF en \mathbb{R} definido por $f_0(x) = 0$ y $f_1(x) = 1$. Claramente el atractor es $K = \{0, 1\}$.

Ejemplo 3.6. Para $0 < r < 1$, consideremos el SIF $\{g_{r,0}, g_{r,1}\}$ definido en $I = [0, 1]$ por

$$g_{r,0}(x) = rx, \quad \text{y} \quad g_{r,1}(x) = rx + 1 - r.$$

Notamos primero que si $r \geq 1/2$ entonces

$$g_{r,0}([0, 1]) = [0, r] \supset [0, 1/2] \quad \text{y} \quad g_{r,1}([0, 1]) = [1 - r, 1] \supset [1/2, 1],$$

por lo que $I = g_{r,0}(I) \cup g_{r,1}(I)$, i.e., en este caso I es el atractor.

Por otro lado, si $r < 1/2$, el atractor es el conjunto r -ádico Λ_r , pues es sencillo verificar que para cada k , los intervalos cerrados de la etapa k tienen longitud r^k , mientras que las lagunas, longitud $r^{k-1}(1-2r)$.

Otra representación de Λ_r es la siguiente. Recordemos que Ω^+ son las sucesiones de 0 y 1. Sea

$$K_r := \left\{ (1-r) \sum_{j \geq 0} \omega_{j+1} r^j : \omega \in \Omega^+ \right\},$$

el conjunto de las *expansiones r -ádicas* con coeficientes 0 y $1-r$. Este es un conjunto compacto. Además, dado $\omega \in \Omega^+$, por la linealidad de las similitudes y como tienen razón de contracción r , tenemos que

$$(1-r) \sum_{j \geq 0} \omega_{j+1} r^j \xrightarrow{g_{r,i}} (1-r) \sum_{j \geq 0} \omega_{j+1} r^{j+1} + i(1-r).$$

Por esto último se deduce fácilmente que K_r es invariante para el sistema $\{g_{r,0}, g_{r,1}\}$. Entonces, por unicidad del atractor, se tiene que $\Lambda_r = K_r$.

Un SIF $\{f_0, \dots, f_m\}$ provee una codificación natural al conjunto atractor. Para ver esto, necesitamos el espacio simbólico introducido en la Sección 2.2, salvo que ahora

$$\Omega_n := \{0, \dots, m\}^n \quad \text{y} \quad \Omega^+ := \{0, \dots, m\}^{\mathbb{N}}.$$

En Ω^+ tenemos la topología inducida por la métrica $d : \Omega^+ \times \Omega^+ \rightarrow [0, +\infty)$ que se define como antes:

$$d(\omega, \tau) = \begin{cases} 2^{-|\omega \wedge \tau|} & \text{si } \omega \neq \tau \\ 0 & \text{si } \omega = \tau \end{cases},$$

donde $|\omega \wedge \tau| = \min\{k : \omega_k \neq \tau_k\}$.

Definimos además la *aplicación shift* $\sigma : \Omega^+ \rightarrow \Omega^+$ por $\sigma(\omega) := \omega_2 \omega_3 \dots$. También consideramos este mapeo restringido a Ω_n , esto es $\sigma : \Omega_n \rightarrow \Omega_{n-1}$ se define como $\sigma(\omega) := \omega_2 \dots \omega_n$.

Para abreviar la notación, dados $\omega \in \Omega_n$ y $X \subset D$ definimos

$$f_\omega = f_{\omega_1} \circ \dots \circ f_{\omega_n} \quad \text{y} \quad X_\omega = f_\omega(X).$$

Supongamos que $A \in \mathcal{S}$ es tal que

$$(3.4) \quad f_i(A) \subset A, \quad i = 0, \dots, m.$$

Luego $f(A) \subset A$, de donde $f^{n+1}(A) \subset f^n(A)$ para cada $n \geq 1$. Entonces $\{f^n(A)\}$ es una sucesión decreciente, que por (3.3) converge al atractor K . Puesto que

$$f^n(A) = \bigcup_{\omega \in \Omega_n} f_{\omega_1 \dots \omega_n}(A),$$

se sigue que

$$K = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{\omega \in \Omega_n} f_{\omega_1 \dots \omega_n}(A).$$

Nótese la analogía con la construcción de conjuntos de Cantor dada en el Capítulo 1; K es la intersección de etapas $f^n(A)$ que están ‘anidadas’. Además, para $\omega \in \Omega^+$ se tiene que $f_{\omega_1 \dots \omega_{n+1}}(A) \subset f_{\omega_1 \dots \omega_n}(A)$ y

$$(3.5) \quad |f_{\omega_1 \dots \omega_n}(A)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

esto último pues

$$|f_{\omega_1 \dots \omega_n}(A)| \leq \bar{r}^n |A|,$$

donde $\bar{r} = \max\{r_1, \dots, r_m\}$. Existe entonces una correspondencia $\pi_A : \Omega \rightarrow K$ que se define por

$$(3.6) \quad \pi_A(\omega) \in \bigcap_{n \geq 1} f_{\omega_1 \dots \omega_n}(A),$$

i.e., $\pi_A(\omega)$ es el único punto de la intersección de arriba. Observamos que siempre puede construirse esta correspondencia ya que puede elegirse $A = K$ o $A = D$.

Proposición 3.7. *Sea $\{f_0, \dots, f_m\}$ un SIF y sea $A \in \mathcal{S}$ un conjunto que cumple (3.4). Entonces $\pi_A = \pi_K := \pi$, por lo que no depende de A . El mapeo π es sobreyectivo.*

Si las funciones f_i son inyectivas y A cumple además que

$$(3.7) \quad f_i(A) \cap f_j(A) = \emptyset, \quad \text{con } i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq m,$$

entonces π es un homeomorfismo, por lo que K resulta un conjunto de Cantor.

DEMOSTRACIÓN: Daremos la prueba de la inyectividad de π , que se prueba con los mismos argumentos usados en la prueba de la Proposición 2.14. El rol de I_ω^k en aquella prueba ahora lo cumple $f_{\omega_1 \dots \omega_k}(K)$. La sobreyectividad y la bicontinuidad (con las hipótesis correspondientes) se siguen también como en aquella proposición. Notamos que para la bicontinuidad se usa (3.5).

Sean $\omega \neq \tau \in \Omega^+$. Existe n tal que $\omega_i = \tau_i$ para $1 \leq i < n$ y $\omega_n \neq \tau_n$. Por ser inyectivas las funciones del sistema, tenemos por (3.7) que

$$A_{\omega^n} \cap A_{\tau^n} = f_{\omega_1 \dots \omega_{n-1}}(f_{\omega_n}(A) \cap f_{\tau_n}(A)) = \emptyset.$$

Por lo tanto $\pi_A(\omega) \neq \pi_A(\tau)$.

Finalmente, veamos que $\pi_A = \pi_K$, lo que implica que π no depende del conjunto A que cumpla (3.4). Debido a que $K \subset A$, tenemos que

$$f_{\omega_1 \dots \omega_k}(K) \subset f_{\omega_1 \dots \omega_k}(A),$$

y como estos dos conjuntos decrecen a un punto, se sigue que $\pi_K(\omega) = \pi_A(\omega)$. \square

Definición 3.8. Dado un SIF $\{f_0, \dots, f_m\}$, el mapeo π definido en (3.6) es la *proyección de Ω^+ en el atractor K* .

Para el conjunto Λ_r tenemos una fórmula explícita para la proyección.

Proposición 3.9. *La proyección $\Pi_r : \Omega^+ \rightarrow \Lambda_r$ está dada por*

$$\Pi_r(\omega) = (1-r) \sum_{j \geq 0} \omega_{j+1} r^j.$$

DEMOSTRACIÓN: Denotemos $g_i = g_{r,i}$, donde $g_{r,i}$ es como en el Ejemplo 3.6. Dado $\omega \in \Omega^+$, sea $I_\omega^n = g_{\omega_1 \dots \omega_n}([0, 1])$, de modo que $\Pi_r(\omega) = \bigcap_{n \geq 1} I_\omega^n$.

Por la linealidad de las funciones g_i tenemos la identidad

$$g_{\omega_1 \dots \omega_n}(x) = r^n x + (1-r) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{j+1} r^j,$$

de donde

$$I_\omega^n = \left[(1-r) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{j+1} r^j, r^n + (1-r) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{j+1} r^j \right].$$

Si ponemos $p(\omega) := (1-r) \sum_{j \geq 0} \omega_{j+1} r^j$, entonces para todo n tenemos que $p(\omega) \in I_{\omega^n}$, por lo que $\Pi_r(\omega) = p(\omega)$, que es lo queríamos demostrar. \square

Cuando las funciones de un SIF cumplen que $f_i(K) \cap f_j(K) = \emptyset$, para $i \neq j$, $0 \leq i, j \leq m$, se dice que el sistema satisface la *condición de separación fuerte*. Como muestra la Proposición 3.7, imponiendo esta condición de separación en el SIF conocemos propiedades topológicas del atractor. Una condición de separación más débil sobre el SIF, clásica en el estudio de la geometría fractal, permite dar información precisa sobre la dimensión del atractor de ciertas clases de SIF. Decimos que un SIF satisface la *condición de conjunto abierto* si existe un abierto no vacío y acotado $V \subset D$ tal que

$$\bigcup_{i=0}^m f_i(V) \subset V,$$

y la unión es disjunta.

Definición 3.10. Un SIF se llama *auto-similar* si las contracciones son similitudes. En este caso el atractor se denomina *conjunto auto-similar*.

Sean $\{f_0, \dots, f_m\}$ similitudes con razón de contracción r_i . Sea s el único real positivo que satisface

$$(3.8) \quad r_0^s + \dots + r_m^s = 1$$

(la función $p(t) = r_0^t + \dots + r_m^t$ es decreciente, continua, $f(0) = m$ y tiende a 0 en el infinito). Este número es conocido como la *dimensión de similitud* de K , y provee una cota superior para la dimensión de Hausdorff de K , como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 3.11. Si s es la dimensión de similitud de un atractor auto-similar K , entonces

$$\mathcal{H}^s(K) \leq |K|^s < +\infty.$$

En particular, $\dim K \leq s$.

DEMOSTRACIÓN: Elevando a la k -ésima potencia la ecuación (3.8), se tiene que

$$(3.9) \quad \sum_{\omega \in \Omega_k} (r_{\omega_1} \dots r_{\omega_k})^s = 1.$$

Por ser las contracciones similitudes, tenemos que $|K_i| = r_i |K|$. Además, iterando k veces (3.2), resulta que $K = \bigcup_{\omega \in \Omega_k} K_\omega$. Luego, fijado $\delta > 0$, para k suficientemente grande, $\{K_\omega\}_{\omega \in \Omega_k}$ es un δ -cubrimiento de K , por lo que

$$\mathcal{H}_\delta^s(K) \leq \sum_{\omega \in \Omega_k} |K_\omega|^s = |K|^s.$$

El resultado se sigue haciendo $\delta \rightarrow 0$. \square

En realidad, se tiene el mismo resultado pero cambiando \mathcal{H}^s por P_0^s (damos la prueba para un caso más general en la Proposición 3.22). Luego, ya que $\overline{\dim}_B$ coincide con el exponente dimensional crítico para la premedida packing, se sigue que $\overline{\dim}_B K \leq s$. Esta desigualdad puede ser estricta. Por ejemplo, si consideramos el sistema del Ejemplo 3.6 para $r = 3/4$, entonces

$$s = \log 2 / \log(4/3) > 1 = \overline{\dim}_B K_{\frac{3}{4}}.$$

Por otro lado, Hutchinson ([Hut81]), inspirado en el trabajo de Moran [Mor46], probó bajo la hipótesis de la condición de conjunto abierto, que $0 < \mathcal{H}^s(K)$ (ver el Teorema 3.23), por lo que en este caso

$$\dim K = \dim_P K = \overline{\dim}_B K = s.$$

Falconer en [Fal89] obtuvo que $\dim K = \overline{\dim}_B K$ para cualquier conjunto auto-similar (no solamente los que satisfacen la condición de conjunto abierto).

Usando un resultado de Bandt y Graf [BG92], Schief [Sch94] probó que en realidad la condición de conjunto abierto equivale a que $0 < \mathcal{H}^s(K)$. Pero esto no es válido en el caso packing, pues Peres *et. al.* en [PSS00b] mostraron la existencia de una familia de conjuntos auto-similares en la recta que cumplen que en su dimensión tienen medida de Hausdorff nula pero medida packing finita y positiva.

3.2. Sistemas regulares

Queremos considerar funciones más generales que similitudes. Por ejemplo, las funciones $f_0, f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definidas por

$$f_0(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}x^2, \quad f_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{1}{10}x^2$$

dan un atractor K que es una ‘perturbación no lineal’ del conjunto ternario $\Lambda_{\frac{1}{3}}$.

Definición 3.12. Decimos que $\{f_i : I \rightarrow I\}_{i=0, \dots, m}$, donde I es un intervalo cerrado, es un *sistema iterado regular* si f_i es continuamente diferenciable y satisface las siguientes propiedades:

Contractividad: Existen $0 < \alpha, \beta < 1$ y $c > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $\omega \in \Omega_n$,

$$(3.10) \quad \alpha^n < |f'_\omega(x)| < c\beta^n \quad \text{para todo } x \in I.$$

Distorsión acotada: Existe $b \geq 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $\omega \in \Omega_n$,

$$(3.11) \quad b^{-1} \leq \frac{|f'_\omega(x)|}{|f'_\omega(y)|} \leq b \quad \text{para todo } x, y \in I.$$

Por la segunda desigualdad de la condición (3.10), las funciones de este tipo de sistemas iterados no necesariamente tienen que ser contracciones estrictas, pero sí tienen que serlo todas las posibles combinaciones de n iteraciones para todo n suficientemente grande. Esto nos asegura que las sucesivas imágenes de I decrecen geoméricamente, como vemos en la parte del siguiente lema.

Lema 3.13. Sea $\{f_0, \dots, f_m\}$ un sistema regular. Se tiene que:

(I) Dado $\omega \in \Omega_n$,

$$|I_\omega| \leq c\beta^n |I|.$$

(II) Si $A \subset I$ entonces

$$|A|b^{-1} \leq \frac{|A_\omega|}{|f'_\omega(x)|} \leq b|A| \quad \text{para todo } x \in I.$$

(III) Además, para todo $\tau \in \Omega_l$

$$b^{-1}|A_\omega||A_\tau| \leq |A_{\omega\tau}||A| \leq b|A_\omega||A_\tau|.$$

En particular

$$\alpha b^{-1}|A_\omega| \leq |A_{\omega i}| \leq |A_\omega|c\beta b.$$

DEMOSTRACIÓN. (i) Sea $I = [a, b]$. Por (3.10), f_ω es monótona en I , de donde se sigue por el teorema del valor medio que

$$|I_\omega| = |f_\omega(I)| = |f_\omega(a) - f_\omega(b)| = |f'_\omega(\xi)||I|,$$

con $\xi \in I$. Luego, para cada $\omega \in \Omega_n$ tenemos que

$$|I_\omega| \leq c\beta^n |I|.$$

(ii) Por la igualdad $|A| = |\overline{A}|$, podemos suponer que A es cerrado. Sean $y, z \in A$ tales que $|A_\omega| = |f_\omega(y) - f_\omega(z)|$. Entonces

$$|A_\omega| = |f'_\omega(\xi)||y - z| \leq b|f'_\omega(x)||A|,$$

donde ξ es un punto de la cápsula convexa de A . Por otro lado, si $\tilde{y}, \tilde{z} \in A$ son tales que $|A| = |\tilde{y} - \tilde{z}|$ entonces

$$|A_\omega| \geq |f_\omega(\tilde{y}) - f_\omega(\tilde{z})| \geq b^{-1}|f'_\omega(x)||A|.$$

(iii) Como $A_{\omega\tau} = f_\omega(A_\tau)$, existen $x, y \in A_\tau$ tales que

$$|A_{\omega\tau}| = |f_\omega(x) - f_\omega(y)| = |f'_\omega(\xi)||x - y| \leq |f'_\omega(\xi)||A_\tau|.$$

Por otro lado, si $\tilde{x}, \tilde{y} \in A_\tau$ cumplen que $|A_\tau| = |\tilde{x} - \tilde{y}|$, entonces

$$|A_{\omega\tau}| \geq |f_\omega(\tilde{x}) - f_\omega(\tilde{y})| = |f'_\omega(\tilde{\xi})||A_\tau|.$$

Luego, (iii) se obtiene de (ii).

La última afirmación es válida pues $\alpha|A| \leq |A_i| \leq \beta|A|$. \square

La propiedad de distorsión acotada tiene consecuencias geométricas que permiten dar información sobre las dimensiones fractales del atractor. Notemos que si J y \tilde{J} son intervalos y $\omega \in \Omega_n$, entonces por el Lema 3.13 (iii)

$$b^{-2} \frac{|J|}{|\tilde{J}|} \leq \frac{|J_\omega|}{|\tilde{J}_\omega|} \leq b^2 \frac{|J|}{|\tilde{J}|},$$

por lo que para cada $\omega \in \Omega_n$, f_ω preserva, salvo una constante fija, las razones entre las longitudes de las imágenes de intervalos.

A veces resulta conveniente expresar la condición (3.11) de la siguiente manera:

$$|\log |f'_\omega(x)| - \log |f'_\omega(y)|| \leq \log b.$$

Antes de ver las consecuencias de la distorsión acotada, veamos qué clase de funciones tienen esta propiedad.

Definiciones 3.14. Una función $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ es η -Hölder continua con constante \tilde{c} y exponente $\eta > 0$ si $|g(x) - g(y)| \leq \tilde{c}|x - y|^\eta$ para todo $x, y \in D$. Denotamos con $\mathcal{C}^\eta(I)$ a la clase de estas funciones.

El *módulo de continuidad* de la función g se define como

$$m_g(t) = \sup_{x, y \in I} \{|g(x) - g(y)| : |x - y| \leq t\}.$$

Decimos que g satisface la *condición de Dini* si

$$(3.12) \quad \int_0^1 m_g(t) \frac{dt}{t} < +\infty.$$

Denotamos con $\mathcal{C}^{\text{DINI}}(I)$ al conjunto de todas las funciones definidas en I que satisfacen la condición de Dini.

Proposición 3.15. *Toda función η -Hölder continua satisface la condición de Dini.*

DEMOSTRACIÓN: Es inmediata la cota $m_g(t) \leq \tilde{c}t^\eta$, por lo que (3.12) resulta finita. \square

Si $\mathcal{C}^0(I)$ denota las funciones continuas en I y $\mathcal{C}^1(I)$ las funciones con derivada continua, entonces si $\alpha < \eta$ tenemos las contenciones

$$\mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^\eta(I) \subset \mathcal{C}^\alpha(I) \subset \mathcal{C}^{\text{DINI}}(I) \subset \mathcal{C}^0(I),$$

por lo que estos espacios funcionales dan escalas intermedias entre la continuidad y la suavidad.

El siguiente es un resultado conocido (ver [FJ99]).

Teorema 3.16. *Supongamos que el sistema $\{f_0, \dots, f_m\}$ satisface la propiedad de contractividad (3.10). Si las derivadas cumplen la condición de Dini, entonces el sistema tiene la propiedad de distorsión acotada. Más aún, si J es un intervalo con $|J| \leq \delta$ y $x, y \in J$, tenemos la cota*

$$(3.13) \quad |\log |f'_\omega(x)| - \log |f'_\omega(y)|| \leq D_\delta,$$

donde

$$D_\delta = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} (m_{f'_0} + \dots + m_{f'_m})(c\beta^j \delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

con α, β y c como en la Definición 3.12.

Para la prueba del teorema necesitamos el siguiente resultado.

Lema 3.17. *Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión decreciente tal que $\frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} \geq c' > 0$ para todo n . Entonces $\sum_{n \geq 1} m_g(\alpha_n) < +\infty$ si g satisface la condición Dini.*

DEMOSTRACIÓN: Usando que el módulo de continuidad es monótono no decreciente, tenemos que

$$\begin{aligned} +\infty > \int_0^{\alpha_1} m_g(t) \frac{dt}{t} &= \sum_{n \geq 1} \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} m_g(t) \frac{dt}{t} \\ &\geq \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} m_g(\alpha_{n+1}) \\ &\geq c' \sum_{n \geq 1} m_g(\alpha_{n+1}), \end{aligned}$$

que es lo que afirma el lema. \square

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.16: Por la definición de módulo de continuidad, si $x, y \in I$, con $|x - y| \leq \rho$, entonces

$$|f'_i(x)| - |f'_i(y)| \leq |f'_i(x) - f'_i(y)| \leq m_{f'_i}(\rho).$$

Por contractividad tenemos que $\alpha < |f'_i(y)|$, de donde se sigue que

$$\frac{|f'_i(x)|}{|f'_i(y)|} \leq 1 + \frac{m_{f'_i}(\rho)}{\alpha} \leq \exp\left(\frac{m_{f'_i}(\rho)}{\alpha}\right),$$

o equivalentemente

$$(3.14) \quad |\log |f'_i(x)| - \log |f'_i(y)|| \leq \frac{1}{\alpha} m_{f'_i}(\rho).$$

Sean $x, y \in J$. Notemos que por la regla de la cadena,

$$(3.15) \quad f'_\omega(x) = f'_{\omega_1}(f_{\omega_2 \dots \omega_n}(x)) \cdot f'_{\omega_2}(f_{\omega_3 \dots \omega_n}(x)) \cdot \dots \cdot f'_{\omega_n}(x).$$

Recordemos que $\sigma(\omega) = \omega_2 \dots \omega_n$, por lo que $\sigma^j(\omega) = \omega_{j+1} \dots \omega_n$. Luego

$$|\log |f'_\omega(x)| - \log |f'_\omega(y)|| \leq \sum_{j=1}^n |\log |f'_{\omega_j}(f_{\sigma^j(\omega)}(x))| - \log |f'_{\omega_j}(f_{\sigma^j(\omega)}(y))||$$

Como $f_{\sigma^j(\omega)}(x), f_{\sigma^j(\omega)}(y) \in J_{\sigma^j(\omega)}$, se tiene por el Lema 3.13 (i) que

$$|f_{\sigma^j(\omega)}(x) - f_{\sigma^j(\omega)}(y)| \leq c\beta^{n-j}\delta,$$

y entonces por (3.14),

$$|\log |f'_{\omega_j}(f_{\sigma^j(\omega)}(x))| - \log |f'_{\omega_j}(f_{\sigma^j(\omega)}(y))|| \leq \frac{1}{\alpha} m_{f'_i}(c\beta^{n-j}\delta).$$

Finalmente, reordenando la suma obtenemos

$$(3.16) \quad \begin{aligned} |\log |f'_\omega(x)| - \log |f'_\omega(y)|| &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n m_{f'_i}(c\beta^{n-j}\delta) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} (m_{f'_0}(c\beta^j\delta) + \dots + m_{f'_m}(c\beta^j\delta)) < +\infty, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene por el Lema 3.17.

Para ver que $D_\delta \rightarrow 0$, sea l el mayor entero tal que $\delta \leq \beta^l$. Notamos que l crece a ∞ cuando δ decrece a 0. Entonces, por la monotonía del módulo de continuidad,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (m_{f'_0}(c\beta^j\delta) + \dots + m_{f'_m}(c\beta^j\delta)) &\leq \sum_{j=0}^{n-1} (m_{f'_0}(c\beta^{j+l}) + \dots + m_{f'_m}(c\beta^{j+l})) \\ &= \sum_{j=l}^{n-1+l} (m_{f'_0}(c\beta^j) + \dots + m_{f'_m}(c\beta^j)), \end{aligned}$$

y esta última expresión tiende a 0 cuando l crece, pues $\alpha_j = c\beta^j$ cumple la hipótesis del Lema 3.17. \square

Corolario 3.18. *Si el sistema $\{f_0, \dots, f_m\}$ satisface (3.10) y las derivadas son η -Hölder continuas, entonces*

$$(3.17) \quad |\log |f'_\omega(x)| - \log |f'_\omega(y)|| \leq C\delta^\eta$$

donde $x, y \in J$ y $|J| \leq \delta$.

DEMOSTRACIÓN: Como $m_{f'_i}(t) \leq c_i t^\eta$, se sigue de las desigualdades (3.16) que

$$\begin{aligned} |\log |f'_\omega(x)| - \log |f'_\omega(y)|| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} (c_0 + \dots + c_m)(c\beta^j\delta)^\eta \\ &< (c_0 + \dots + c_m) \frac{c^\eta}{1-\beta} \delta^\eta, \end{aligned}$$

que es lo que afirmamos. \square

Un caso particular de sistemas regulares son aquellos donde las transformaciones son similitudes. Como ya mencionamos, en este caso el sistema tiene asociada la dimensión de similitud, que es la única solución de la ecuación (3.8), y que da una cota para las dimensiones del atractor.

Para los sistemas regulares en general también podremos relacionar la dimensión de atractor con la solución de una ecuación asociada al sistema. Veremos a continuación esta ecuación y su buena definición.

Teorema 3.19. *Sea $\{f_0, \dots, f_m\}$ un SIF regular. Para todo $s \in \mathbb{R}$, el límite*

$$(3.18) \quad \Upsilon(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\omega \in \Omega_k} |f'_\omega(x)|^s$$

existe y su valor es independiente de $x \in I$. Además se tiene la cota

$$(3.19) \quad b^{-1} \exp(k\Upsilon(s)) \leq \sum_{\omega \in \Omega_k} |f'_\omega(x)|^s \leq b \exp(k\Upsilon(s))$$

Para la prueba es necesario el siguiente resultado (ver [Fal97], Corolario 1.2).

Lema 3.20. *Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que la sucesión $\{a_k\}$ satisface*

$$a_{k+m} \leq a_k + a_m + c$$

para todo $k, m \in \mathbb{N}$. Entonces $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_k/k$ existe (puede ser $-\infty$). Además, $a_k \geq ka - c$ para todo k .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.19: Sea $s_k = \sum_{\omega \in \Omega_k} |f'_\omega(x)|^s$. La idea es mostrar que la sucesión $\{s_k\}$ es sub-multiplicativa: $s_{k+m} \leq b s_k s_m$, donde b es la cota de la distorsión. Entonces la convergencia se seguirá del Corolario 3.20.

Tenemos que

$$s_{k+m} = \sum_{\omega \in \Omega_{k+m}} |f'_\omega(x)|^s = \sum_{\kappa \in \Omega_k} \sum_{\tau \in \Omega_m} |f'_{\kappa\tau}(x)|^s.$$

Por la regla de la cadena, si ponemos $y = f_\tau(x)$, entonces

$$f'_{\kappa\tau}(x) = (f_\kappa \circ f_\tau)'(x) = f'_\kappa(y) \cdot f'_\tau(x).$$

Luego,

$$s_{k+m} = \sum_{\tau \in \Omega_m} |f'_\tau(x)|^s \sum_{\kappa \in \Omega_k} |f'_\kappa(y)|^s.$$

Usando la distorsión acotada (3.11), se sigue que

$$(3.20) \quad b^{-1} \sum_{\kappa \in \Omega_k} |f'_\kappa(x)|^s \leq \sum_{\kappa \in \Omega_k} |f'_\kappa(y)|^s \leq b \sum_{\kappa \in \Omega_k} |f'_\kappa(x)|^s;$$

en consecuencia

$$b^{-1} s_k s_m \leq s_{k+m} \leq b s_k s_m.$$

Poniendo $a_k = \log s_k$ tenemos que

$$a_k + a_m - \log b \leq a_{k+m} \leq a_k + a_m + \log b,$$

y por el Corolario 3.20, el límite (3.18) existe para $x \in I$. Además, si en (3.20) tomamos logaritmos y dividimos por k , vemos que el límite no depende del punto $x \in I$ elegido.

Finalmente, aplicando el Corolario 3.20 a las sucesiones $\{a_k\}$ y $\{-a_k\}$ obtenemos que

$$k\Upsilon(s) - \log b \leq a_k \leq k\Upsilon(s) + \log b,$$

de donde

$$b^{-1} \exp(k\Upsilon(s)) \leq s_k \leq b \exp(k\Upsilon(s)),$$

lo que concluye la prueba del teorema. \square

El siguiente es el Lema 5.2 de [Fal97].

Lema 3.21. $\Upsilon(s)$ es continua y estrictamente decreciente, con

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Upsilon(s) = +\infty \quad y \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \Upsilon(s) = -\infty.$$

En particular, Υ tiene un único cero.

Observamos que en el caso en que las funciones f_i del sistema son similitudes con razón de contracción r_i , tenemos que

$$\Upsilon(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\omega \in \Omega_k} (r_{\omega_1} \cdots r_{\omega_k})^s.$$

Luego, si s_d es la dimensión de similitud, se sigue de la igualdad (3.9) que $\Upsilon(s_d) = 0$.

Veamos ahora de qué forma se relaciona el cero de Υ con la dimensión del atractor de un SIF regular. El siguiente resultado, aunque es conocido, no aparece demostrado en la literatura clásica.

Proposición 3.22. Sea K el atractor de un SIF regular y sea s tal que $\Upsilon(s) = 0$. Entonces $P_0^s(K) < +\infty$.

DEMOSTRACIÓN: Por la igualdad $\Upsilon(s) = 0$, se sigue de (3.19) que

$$b^{-1} \leq \sum_{\omega \in \Omega_n} |f'_\omega(x)|^s \leq b$$

para todo $n \geq 0$. Luego, por las desigualdades (II) del Lema 3.13,

$$(3.21) \quad b^{-2}|K|^s \leq \sum_{\omega \in \Omega_n} |K_\omega|^s \leq b^2|K|^s.$$

Dado $0 < \delta < |K|$, sea B la bola centrada en $x \in K$ de radio δ . Como $|K_\omega| \leq c\beta^n|K|$ para todo $\omega \in \Omega_n$, sea k el primer natural tal que $K_\omega \subset B$ para algún $\omega \in \Omega_k$. Luego, por el Lema 3.13,

$$|B| \leq 2|K_{\omega_1 \dots \omega_{k-1}}| \leq 2b/\alpha|K_\omega|.$$

Consideremos ahora un δ -packing $\{B_j\}_{j=1}^N$ de K . A cada B_j le corresponde un natural n_j y una palabra ω^j en Ω_{n_j} tal que $K_{\omega^j} \subset B_j$. Entonces

$$\sum_{j=1}^N |B_j|^s \leq (2b/\alpha)^s \sum_{j=1}^N |K_{\omega^j}|^s.$$

Sea $n^* = \max\{n_1, \dots, n_N\}$. La idea es acotar el tamaño del packing dado por el tamaño del cubrimiento $\{K_\omega\}_{\omega \in \Omega_{n^*}}$.

Por el Lema 3.13 (III) y por la primera desigualdad de (3.21) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in \Omega_{n^* - n_j}} |K_{\omega^j \tau}|^s &\geq b^{-s}|K|^{-s}|K_{\omega^j}|^s \sum_{\tau \in \Omega_{n^* - n_j}} |K_\tau|^s \\ &\geq b^{-2-s}|K_{\omega^j}|^s. \end{aligned}$$

Además, puesto que $K_{\omega^j} \cap K_{\omega^{j'}} = \emptyset$, los conjuntos del nivel \tilde{k}

$$\{K_{\omega^j \tau}\}_{\tau \in \Omega_{n^* - n_j}} \quad \text{y} \quad \{K_{\omega^{j'} \tau}\}_{\tau \in \Omega_{n^* - n_{j'}}$$

son disjuntos. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |B_j|^s &\leq (2b/\alpha)^s \sum_{j=1}^N |K_{\omega^j}|^s \\ &\leq (2/\alpha)^s b^{2(1+s)} \sum_{j=1}^N \sum_{\tau \in \Omega_{n^* - n_j}} |K_{\omega^j \tau}|^s \\ &\leq (2/\alpha)^s b^{2(1+s)} \sum_{\omega \in \Omega_{n^*}} |K_{\omega}|^s \\ &\leq (2/\alpha)^s b^{2(2+s)} |K|^s, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (3.21). Se sigue que

$$P_0^s(K) \leq (2/\alpha)^s b^{2(2+s)} |K|^s < +\infty,$$

lo que concluye la prueba. \square

Bajo la hipótesis de la condición de conjunto abierto, el cero de Υ es la dimensión del atractor. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado. La demostración es análoga a la dada, para el caso auto-similar, en el Teorema 8.6 de [Fal86] (ver también [Fal97], Teorema 5.3).

Teorema 3.23. *Si un SIF regular satisface la condición de conjunto abierto, entonces $0 < \mathcal{H}^s(K)$, donde s es tal que $\Upsilon(s) = 0$. En particular $s = \dim K = \overline{\dim}_B K$.*

La función Υ fue originalmente introducida por Bowen en el contexto de establecer la dimensión de Hausdorff de algunos conjuntos especiales (ver [Bow79]).

3.3. Sistemas conjugados

Hemos analizado hasta aquí conceptos relacionados con la dimensión de los atractores de los sistemas regulares. Introducimos ahora la noción de conjugación entre dos SIF y mostramos que bajo ciertas hipótesis las dimensiones de los atractores están relacionadas.

Definición 3.24. Los sistemas iterados $\{f_i : I \rightarrow I\}_{i=0, \dots, m}$ y $\{\tilde{f}_i : \tilde{I} \rightarrow \tilde{I}\}_{i=0, \dots, m}$ son *conjugados* si existe un homeomorfismo $h : I \rightarrow \tilde{I}$ tal que

$$(3.22) \quad h \circ f_i = \tilde{f}_i \circ h.$$

La función h es la *conjugación* entre los sistemas.

Si la conjugación es un difeomorfismo \mathcal{C}^1 , entonces los sistemas se dicen \mathcal{C}^1 -conjugados. De la misma forma se definen las conjugaciones $\mathcal{C}^{k+\eta}$, $\mathcal{C}^{k+\text{Dini}}$ y \mathcal{C}^∞ .

Los atractores de sistemas conjugados están relacionados de la siguiente manera.

Proposición 3.25. Sean $\{f_0, \dots, f_m\}$ y $\{\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_m\}$ dos sistemas conjugados con atractores C y \tilde{C} respectivamente. Entonces, si h es la conjugación, se tiene que

$$\tilde{C} = h(C).$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de (3.22) que

$$\bigcup_{i=0}^m \tilde{f}_i(h(C)) = \bigcup_{i=0}^m h \circ f_i(C) = h(C).$$

Por la unicidad del atractor se sigue el resultado. \square

Por esta proposición, los atractores de sistemas conjugados tienen las mismas propiedades topológicas. La siguiente es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.6.

Proposición 3.26. Sean C y \tilde{C} los atractores de dos sistemas bi-Lipschitz-conjugados. Luego, $0 < \mathcal{H}^s(C)$ ($\mathcal{H}^s(C) < +\infty$) si y sólo si $0 < \mathcal{H}^s(\tilde{C})$ ($\mathcal{H}^s(\tilde{C}) < +\infty$). Lo mismo vale para \mathcal{P}^s y \mathcal{P}_0^s . En particular, las \mathcal{C}^1 -conjugaciones preservan las dimensiones fractales.

Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 3.27. Sea $(C, \{f_i : I \rightarrow I\}_{i=0, \dots, m})$ un sistema regular. Luego, un \mathcal{C}^1 -difeomorfismo $h : I \rightarrow \tilde{I}$ induce el sistema \mathcal{C}^1 -conjugado $(h(C), \{g_0, \dots, g_m\})$, donde $g_i = h \circ f_i \circ h^{-1}$. Este sistema resulta regular.

DEMOSTRACIÓN: Notamos primero que para $\omega \in \Omega_n$ se tiene que

$$g'_\omega(x) = h'(f_\omega \circ h^{-1}(x)) f'_\omega(h^{-1}(x)) (h^{-1})'(x).$$

Sean $M_0 = \min_x |h'(x)|$ y $M_1 = \max_x |h'(x)|$. Luego

$$(3.23) \quad |g'_\omega(x)| \leq \frac{M_1}{M_0} |f'_\omega(h^{-1}(x))| \leq c \frac{M_1}{M_0} \beta^n$$

y

$$|g'_\omega(x)| \geq \frac{M_0}{M_1} \alpha^n > \left(\frac{M_0}{M_1} \alpha \right)^n,$$

por lo que $\{g_0, g_1\}$ satisface la contractividad. La distorsión acotada se verifica de la misma forma. \square

Observación 3.28. Puede ocurrir que las funciones f_i de la proposición sean contracciones estrictas, i.e., que $|f_i(x) - f_i(y)| < r_i |x - y|$, con $r_i < 1$, pero que sin embargo las funciones del sistema inducido no lo sean, como se ve en (3.23).

3.4. Conjuntos de tipo Cookie-cutter

Antes de introducir los sistemas iterados con los que trabajaremos, necesitamos pedir una condición de distorsión más fuerte.

Definición 3.29. Un sistema regular $\{f_0, f_1\}$ satisface la *propiedad de distorsión acotada fuerte* (DAF) si existe una sucesión $\{B_l\}$ tal que para todo $x, y \in J$, con $|J| \leq c\beta^l$, y toda $\omega \in \Omega_n$, se tiene que

$$(3.24) \quad \frac{|f'_\omega(x)|}{|f'_\omega(y)|} \leq B_l \quad \text{con} \quad B_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 1.$$

Observación 3.30. Es claro que DAF implica distorsión acotada. Sin embargo no tenemos ejemplos que nieguen el recíproco.

Observación 3.31. Por el Teorema 3.16 y el Corolario 3.18, los sistemas regulares cuyas derivadas son Dini o η -Hölder continuas satisfacen esta propiedad. Para este último caso podemos elegir $B_l = \tilde{c}e^{\beta^l}$, con \tilde{c} independiente de l .

Definición 3.32. Un sistema iterado $\{f_0, f_1\}$, con $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, es de tipo *cookie-cutter* o *hiperbólico* si es regular, satisface la propiedad DAF y además se cumple la siguiente condición de separación:

$$(3.25) \quad 0 = f_0(0) < f_0(1) < f_1(0) < f_1(1) = 1.$$

Al atractor de este sistema se lo denomina *conjunto cookie-cutter* o *hiperbólico*. Si las derivadas son estrictamente menores que 1, entonces el conjunto es *estrictamente hiperbólico*. Cuando las derivadas de f_i son α -Hölder continuas, el conjunto se dice que es $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ -*hiperbólico*, y análogamente cuando las derivadas son Dini, se dirá que es $\mathcal{C}^{\text{DINI}}(I)$.

Observación 3.33. En la definición puede tomarse cualquier intervalo cerrado I en lugar de $[0, 1]$.

Notamos además que la condición (3.25) implica que las derivadas de las funciones del sistemas son positivas en todo punto de su dominio.

Los sistemas hiperbólicos satisfacen la propiedad de separación fuerte. Esto nos dice que en particular también cumplen la condición de conjunto abierto. Por la Proposición 3.7 y el Teorema 3.23 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.34. *Sea C un conjunto hiperbólico. Entonces C es un conjunto de Cantor y además verifica*

$$0 < \mathcal{H}^s(C) \leq P_0^s(C) < +\infty,$$

donde s es tal que $\Upsilon(s) = 0$.

Notamos que por este teorema, la dimensión de Hausdorff de los conjuntos cookie-cutter es positiva, ya que Υ es una función decreciente que verifica $\Upsilon(0) = \log 2$. En la siguiente proposición, siguiendo [Bed91], mostramos a que los conjuntos hiperbólicos tienen medida de Lebesgue nula. Esta medida coincide con la de Hausdorff 1-dimensional, lo que implica, por el teorema anterior, que la dimensión de los conjuntos hiperbólicos es estrictamente menor que 1.

Haremos uso del siguiente lema.

Lema 3.35. *Existe una constante $c > 0$ tal que para todo $n \geq 0$ y $\omega \in \Omega_n$,*

$$|L_\omega| \geq c|I_\omega|.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3.13 (ii) (eligiendo el mismo $x \in I$ en ambos casos) tenemos que

$$\frac{|L_\omega|}{|I_\omega|} \geq b^{-2} \frac{|L|}{|I|}.$$

□

Denotamos con \mathcal{L} a la medida de Lebesgue.

Proposición 3.36. *Si C es de tipo cookie-cutter, entonces $\mathcal{L}(C) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$C \subset \bigcup_{\omega \in \Omega_n} I_\omega.$$

Por ser I_ω la unión disjunta

$$I_\omega = I_{\omega_0} \bigcup L_\omega \bigcup I_{\omega_1},$$

se sigue del Lema 3.35 que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(I_\omega) &= \mathcal{L}(I_{\omega_0}) + \mathcal{L}(L_\omega) + \mathcal{L}(I_{\omega_1}) \\ &\geq \mathcal{L}(I_{\omega_0}) + c\mathcal{L}(I_\omega) + \mathcal{L}(I_{\omega_1}). \end{aligned}$$

Luego

$$(1 - c)\mathcal{L}(I_\omega) \geq \mathcal{L}(I_{\omega_0}) + \mathcal{L}(I_{\omega_1}),$$

lo que implica que

$$(1 - c)^n \mathcal{L}(I) \geq \mathcal{L}\left(\bigcup_{\omega \in \Omega_n} I_\omega\right) \geq \mathcal{L}(C).$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ se tiene el resultado. \square

Observación 3.37. Si sólo se pide que las derivadas sean \mathcal{C}^1 (sin ninguna condición de distorsión) no se puede garantizar que el atractor tenga medida de Lebesgue nula. Un ejemplo de esto puede encontrarse en la pág. 81 de [PT93]. Además, sin pedir ninguna condición de distorsión, si el atractor tiene medida de Lebesgue nula tampoco puede garantizarse que la medida de Hausdorff sea finita y positiva en su dimensión. Veremos un ejemplo en la Proposición 4.35 de la Sección 4.3, donde mostramos que el conjunto $C_{p,1}$, asociado a la sucesión $\{\frac{\log n}{n^p}\}$, es atractor de un sistema cuyas funciones tienen derivada continua. Sin embargo, $\dim_H C_{p,1} = 1/p$ y $\mathcal{H}^{\frac{1}{p}}(C_{p,1}) = +\infty$, como vimos al final del Capítulo 2.

Otra consecuencia de la separación fuerte es que los atractores hiperbólicos tienen una buena codificación.

Para cada $\omega \in \Omega_n$, si ponemos $J_\omega^n := f_{\omega_1} \circ \dots \circ f_{\omega_n}(I)$, entonces el atractor hiperbólico tiene la forma

$$C = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{\omega \in \Omega_n} J_\omega^n.$$

Consideremos en Ω^+ el orden lexicográfico, que denotamos con \prec . Vimos en la Proposición 3.7 que la proyección $\pi : \Omega^+ \rightarrow C$ definida por

$$\pi(\omega) \in \bigcap_{n \geq 1} J_\omega^n$$

es un homeomorfismo. En este caso podemos decir algo más.

Proposición 3.38. Dado un conjunto cookie-cutter C , la proyección $\pi : \Omega^+ \rightarrow C$ preserva el orden.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\omega \prec \tau$. Entonces existe un entero n tal que $\omega_i = \tau_i$, con $1 \leq i < n$ pero $\omega_n = 0$ y $\tau_n = 1$. Por definición, $\pi(\omega) \in J_{\omega_1 \dots \omega_{n-1} 0}^n$ y $\pi(\tau) \in J_{\omega_1 \dots \omega_{n-1} 1}^n$, de donde $\pi(\omega) \prec \pi(\tau)$, ya que por la condición de separación (3.25), cualquier punto de $J_{\omega_1 \dots \omega_{n-1} 0}^n$ es menor que cualquiera de $J_{\omega_1 \dots \omega_{n-1} 1}^n$. \square

Por esta proposición, identificaremos al conjunto C con el conjunto simbólico Ω^+ , permitiéndonos el siguiente abuso de notación: el punto $\omega \in \Omega^+$ se identificará directamente, sin hacer explícito el homeomorfismo, con el único punto de C que pertenece a cada intervalo J_ω^n , $n \geq 1$, denotando esto con la igualdad $\omega = \bigcap_{n \geq 1} J_\omega^n$, que es abusiva también pues el lado izquierdo es el único elemento del conjunto del lado derecho. También por esta razón, pensaremos a Ω^+ inmerso en la recta pues su orden (lexicográfico) es consistente con el usual de los reales.

Terminamos esta sección dando una representación para los intervalos (y lagunas) que forman a C y que nos será útil en el próximo capítulo. Denotemos con L a la laguna *inicial* del conjunto cookie-cutter C , i.e., $L = (f_0(1), f_1(0))$.

Proposición 3.39. *Para $\omega \in \Omega_k$ tenemos que*

$$J_\omega^k = [\omega\widehat{0}, \omega\widehat{1}] \quad \text{y} \quad L_\omega = (\omega 0\widehat{1}, \omega 1\widehat{0}).$$

DEMOSTRACIÓN: La función f_i es estrictamente creciente ya que es un difeomorfismo que satisface (3.25), por lo que, si $J = [a, b]$ es un intervalo entonces

$$f_i(J) = [f_i(a), f_i(b)].$$

Luego, para cada $\omega \in \Omega_k$, la composición f_ω también tiene esta propiedad, de donde

$$J_\omega^k = f_\omega([0, 1]) = [f_\omega(0), f_\omega(1)].$$

Además, como $f_0(0) = 0$ y $f_1(1) = 1$, tenemos que

$$0 = \bigcap_{n \geq 1} J_0^n =: \widehat{0} \quad \text{y} \quad 1 = \bigcap_{n \geq 0} J_1^n =: \widehat{1}.$$

Entonces

$$f_\omega(0) = f_\omega\left(\bigcap_{n \geq 1} J_0^n\right) = \bigcap_{n \geq 1} f_\omega\left(J_0^n\right) = \bigcap_{n \geq 1} J_{\omega\widehat{0}}^{k+n} = \omega\widehat{0},$$

donde la segunda igualdad es válida pues f_ω es 1-1. De la misma forma obtenemos que el extremo derecho de J_ω^k es $\omega\widehat{1}$.

Por último observamos que el extremo izquierdo (derecho) de L_ω es el derecho de $J_{\omega\widehat{0}}^{k+1}$ (izquierdo de $J_{\omega\widehat{1}}^{k+1}$). \square

3.5. Medidas asociadas a un SIF

Además de tener un único compacto no vacío como atractor, un sistema iterado de funciones permite definir medidas invariantes soportadas en este conjunto y que resultan la forma natural de medir en el atractor. Para aclarar esto, sea $\{f_0, \dots, f_m\}$ un SIF en $D \subset \mathbb{R}$ y consideremos pesos $P = \{p_0, \dots, p_m\}$, i.e., $0 < p_i < 1$ y $p_0 + \dots + p_m = 1$. Supongamos que se satisface la condición de separación fuerte y que las funciones del sistema son inyectivas. Luego, para cada $k \geq 1$ y $\omega \in \Omega_k$, los conjuntos $K_{\omega_0}, \dots, K_{\omega_m}$ son disjuntos. Entonces, una medida *natural* μ de K , relativa a los pesos P , debería satisfacer que la proporción de masa que aporta K_{ω_i} al conjunto K_ω es p_i , i.e.,

$$\mu(K_{\omega_i}) = p_i \mu(K_\omega).$$

Esto lleva a que μ cumpla

$$(3.26) \quad \mu(K_\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} \dots p_{\omega_k} \quad \text{para todo } \omega \in \Omega_k, \quad k \geq 1.$$

En este caso de separación fuerte, puede definirse una medida de Borel soportada en K imponiendo (3.26) y extendiéndola a todo $A \subset \mathbb{R}$ como

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_j \mu(V_j) : A \cap K \subset \bigcup_j V_j, V_j \in \mathcal{K} \right\},$$

donde \mathcal{K} es la familia de todos los conjuntos K_ω , con $\omega \in \Omega^*$ (ver [Fal97], Sección 1.3). Para sistemas iterados en general, la existencia de este tipo de medidas fue probada por Hutchinson ([Hut81]), y la enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.40. *Sea $\{f_0, \dots, f_m\}$ un SIF en $D \subset \mathbb{R}$ con pesos asociados $P = \{p_0, \dots, p_m\}$. Existe una única medida de probabilidad $\mu^P \in \mathcal{M}(K)$ tal que*

$$(3.27) \quad \mu^P(A) = \sum_{i=0}^m p_i \mu^P(f_i^{-1}(A))$$

para todo A boreliano. Además, si se cumple la condición de separación fuerte, entonces μ^P verifica (3.26).

DEMOSTRACIÓN. Ver [Fal97] pág. 37. De la prueba de este teorema sólo diremos que la existencia y unicidad de la medida son consecuencia del teorema del punto fijo de Banach. En efecto, sea $\mathcal{M}^1(D) := \{\mu \in \mathcal{M}(D) : \mu(D) = 1\}$. En $\mathcal{M}^1(D)$ se define una métrica d como

$$(3.28) \quad d(\nu_1, \nu_2) = \sup \left\{ \left| \int g d\nu_1 - \int g d\nu_2 \right| : Lip g \leq 1 \right\}$$

donde $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $Lip g = \sup_{x \neq y} \{|g(x) - g(y)|/|x - y|\}$. Luego, $(\mathcal{M}^1(D), d)$ es un espacio métrico completo, y la aplicación $\psi : \mathcal{M}^1(D) \rightarrow \mathcal{M}^1(D)$, definida por

$$\psi(\nu)(A) = \sum_{i=0}^m p_i \nu(f_i^{-1}(A)),$$

resulta una contracción, por lo que tiene un único punto fijo μ^P . \square

Observación 3.41. Para que este resultado valga en un espacio métrico general, la prueba en [Hut81] funciona para el caso en que el espacio es compacto. No queda claro que sea válida en general para espacios métricos completos.

Observación 3.42. La convergencia débil en $\mathcal{M}^1(D)$ es equivalente a la convergencia dada por la métrica (3.28), lo que puede verse en el la Sección 1.3 de [Fal97].

Definición 3.43. La medida μ^P es la *medida invariante* con respecto al sistema $\{f_0, f_1\}$ y con pesos P .

Para el caso particular en que $\{f_0, \dots, f_m\}$ es un sistema de similitudes con razones r_i , las medidas dadas en este teorema reciben el nombre de *medidas auto-similares*. La medida auto-similar se llama *natural* si $p_i = r_i^s$, donde s es la dimensión de similitud del atractor auto-similar.

Proposición 3.44. *Sea $\{f_0, \dots, f_m\}$ un sistema auto-similar con atractor K . Si $0 < \mathcal{H}^s(K) < +\infty$, entonces $\mathcal{H}^s \lfloor_K$ es un múltiplo de la medida auto-similar natural. Lo mismo vale para \mathcal{P}^s .*

DEMOSTRACIÓN: Notamos que la por ser el conjunto auto-similar K un s -conjunto, se tiene que s es la dimensión de similitud de K . Como el atractor satisface $K = \bigcup_{i=0}^m K_i$, tenemos por la subaditividad y la Proposición 2.7 que

$$\mathcal{H}^s(K) \leq \sum_{i=0}^m \mathcal{H}^s(K_i) = \mathcal{H}^s(K) \sum_{i=0}^m r_i^s = \mathcal{H}^s(K).$$

Luego, la desigualdad de arriba es una igualdad, por lo que $\mathcal{H}(K_0 \cap K_1) = 0$. Entonces, para cualquier boreliano $A \subset K$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(A) &= \sum_{i=0}^m \mathcal{H}^s(A \cap K_i) \\ &= \sum_{i=0}^m \mathcal{H}^s(f_i(f_i^{-1}A \cap K)) \\ &= \sum_{i=0}^m r_i^s \mathcal{H}^s(f_i^{-1}(A) \cap K). \end{aligned}$$

Se sigue $\mathcal{H}^s|_K$ satisface la ecuación que define a la medida auto-similar natural, por lo que es un múltiplo de ésta. \square

En el Capítulo 5 necesitaremos de la siguiente propiedad de las medidas auto-similares.

Proposición 3.45. *Sea K un conjunto auto-similar cuyo sistema satisface la condición de separación fuerte y sea μ la medida auto-similar natural correspondiente. Entonces existe una constante $c \geq 1$ tal que para todo $x \in K$ y $0 < r < \underline{r}^{-1}|K|$ tenemos que*

$$c^{-1}r^s \leq \mu(B_r(x)) \leq cr^s,$$

donde $B_r(x) = (x - r, x + r)$, s es la dimensión de similitud del atractor y \underline{r} es la menor de las razones de contracción.

DEMOSTRACIÓN: Por simplicidad supongamos que el sistema tiene dos similitudes $\{f_0, f_1\}$ definidas en $I = [0, 1]$, de modo que $|K| = 1$. Notemos que por la separación fuerte, tenemos que $\delta := \text{dist}(I_0^1, I_1^1) > 0$ y además, por la Proposición 3.40, que $\mu(K_\tau) = r_\tau^s$ para toda palabra finita τ .

Sean $x \in K$ y $\omega \in \Omega^+$ tal que $\pi(\omega) = x$, donde π es la proyección. Existe entonces un natural n tal que

$$(3.29) \quad r_{\omega^n} \leq r < \underline{r}^{-1}r_{\omega^{n-1}}.$$

Sea $\lambda = \delta \underline{r}$. Si mostramos que

$$(3.30) \quad B_{\lambda r}(x) \cap K \subset K_{\omega^n} \subset B_r(x),$$

entonces

$$\mu(B_r(x)) \geq r_\omega^s > \underline{r}^{2s}r^s$$

y, poniendo $t = \lambda r$,

$$\mu(B_t(x)) \leq r_\omega^s \leq \lambda^{-s}t^s,$$

lo que prueba la proposición.

Mostremos (3.30). La segunda contención se sigue de la primera desigualdad en (3.29). Por otro lado, para cada $\tilde{\omega} \in \Omega_n$, con $\tilde{\omega} \neq \omega^n$, tenemos que

$$\text{dist}(I_{\omega^n}^n, I_{\tilde{\omega}^n}^n) \geq \delta r_{\omega^{n-1}}.$$

Luego, por la segunda desigualdad en (3.29), obtenemos que $B_{\lambda r}(x) \cap I_\omega^n = \emptyset$, de donde se sigue la contención restante. \square

Una propiedad importante de las medidas auto-similares es la siguiente.

Proposición 3.46. *Toda medida auto-similar es de tipo puro, i.e., es o bien absolutamente continua o bien singular con respecto a la medida de Lebesgue.*

No daremos la prueba aquí. Observamos que toda medida auto-similar, cuyas similitudes tengan la misma razón de contracción, es una convolución infinita de medidas discretas (con la convergencia débil), y estas medidas son de tipo puro, como mostraron Jessen y Wintner en [JW35]. Otra forma de demostrar la Proposición 3.46, es aplicar la descomposición de Lebesgue a la medida auto-similar y verificar que tanto la parte singular como la absolutamente continua satisfacen la identidad (3.27), y por unicidad una de las dos debe ser cero (ver [PSS00a]).

Volvemos ahora a las medidas invariantes de un SIF en general. Damos a continuación una representación alternativa de estas medidas que nos será útil. Para hacer esto, necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.47. La *medida de Bernoulli* en Ω^+ con pesos $P = \{p_0, \dots, p_m\}$ se define como el producto infinito

$$\Psi^P = \bigotimes_{n=0}^{\infty} (p_0 \delta_0 + \dots + p_m \delta_m),$$

donde recordemos que δ_i es la medida probabilística de Dirac en $\{0, \dots, m\}$, que está determinada por la igualdad $\delta_i(\{i\}) = 1$.

Recordemos que la aplicación $\sigma : \Omega^+ \rightarrow \Omega^+$ se define como $\sigma(\omega) = \omega_2 \omega_3 \dots$. Denotemos con θ_i la i -ésima inversa de σ , esto es, $\theta_i(\omega) = i\omega$.

Usaremos el siguiente lema.

Lema 3.48. Ψ^P es invariante con respecto a $\{\theta_0, \dots, \theta_m\}$, las inversas de la aplicación shift, esto es

$$\Psi^P = \sum_{i=0}^m p_i \Psi^P \circ \theta_i^{-1}.$$

La prueba del lema es sencilla. Sólo hay que verificar que las dos medidas coinciden en el álgebra de los cilindros $C_k(\omega) = \{\tau \in \Omega^+ : \tau_i = \omega_i, 1 \leq i \leq k\}$, $\omega \in \Omega_k$, $k \geq 1$. La igualdad de las medidas se sigue por un conocido teorema de extensión de medidas (ver [Fol99], Sección 1.4).

Proposición 3.49. Sean $\{f_0, \dots, f_m\}$ un SIF con cada f_i es inyectiva, y sea μ^P la medida asociada que satisface (3.27) con pesos P . Se tiene que

$$\mu^P = \Psi^P \circ \pi^{-1},$$

donde π es la proyección de Ω^+ en el atractor K dada en la Definición 3.8.

DEMOSTRACIÓN: Por el lema anterior, Ψ^P es invariante por $\{\theta_0, \dots, \theta_m\}$. Además, $\pi \circ \theta_i = f_i \circ \pi$. En efecto,

$$\pi(\theta_i(\omega)) \in \bigcap_{n \geq 1} K_{(i\omega)^n} = \bigcap_{n \geq 1} f_i(K_{\omega^{n-1}}) = f_i\left(\bigcap_{n \geq 1} K_\omega\right),$$

por lo que $\pi(\theta_i(\omega)) = f_i(\pi(\omega))$.

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\Psi^P \circ \pi^{-1}(A) &= \sum_{i=0}^m p_i \Psi^P \circ \theta_i^{-1}(\pi^{-1}(A)) \\ &= \sum_{i=0}^m p_i (\Psi^P \circ \pi^{-1}) \circ f_i^{-1}(A).\end{aligned}$$

Por unicidad de la medida invariante se sigue la proposición. \square

Las medidas invariantes de sistemas conjugados se relacionan de la siguiente manera.

Proposición 3.50. Sean $\{f_0, f_1\}$ y $\{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1\}$, con $f_i : I \rightarrow I$ y $\tilde{f}_i : \tilde{I} \rightarrow \tilde{I}$, dos sistemas con medidas invariantes μ^P y $\tilde{\mu}^P$, respectivamente, donde $P = \{p_0, p_1\}$ son pesos. Si los sistemas son conjugados con una conjugación $h : I \rightarrow \tilde{I}$, entonces

$$\mu^P = \tilde{\mu}^P \circ h$$

DEMOSTRACIÓN: Por la ecuación de conjugación (3.22) se sigue que

$$\tilde{f}_i^{-1} \circ h = h \circ f_i^{-1}.$$

Luego, dado $A \subset I$, tenemos por (3.27) que

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}^P \circ h(A) &= p_0 \tilde{\mu}^P(\tilde{f}_0^{-1} \circ h(A)) + p_1 \tilde{\mu}^P(\tilde{f}_1^{-1} \circ h(A)) \\ &= p_0 \tilde{\mu}^P(h \circ f_0^{-1}(A)) + p_1 \tilde{\mu}^P(h \circ f_1^{-1}(A)).\end{aligned}$$

Por unicidad de la medida invariante se sigue que $\mu^P = \tilde{\mu}^P \circ h$. \square

Convoluciones de Bernoulli. Consideremos la medida auto-similar μ_r asociada al sistema $\{rx, rx + (1-r)\}$, que consideramos en el Ejemplo 3.6, con pesos $(1/2, 1/2)$. Esta medida está soportada en el conjunto de Cantor Λ_r cuando $0 < r < 1/2$ y cuando $1/2 \leq r < 1$ el soporte es el intervalo $[0, 1]$.

Notamos que por la prueba del Teorema 3.40, para cualquier $\nu \in \mathcal{M}([0, 1])$, las iteraciones de $\psi^k(\nu)$ convergen débilmente a μ_r . Si elegimos la medida δ_0 , entonces, las sucesivas iteraciones quedan:

$$\begin{aligned}\psi(\delta_0) &= \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_{1-r}), \\ \psi^2(\delta_0) &= \frac{1}{4}(\delta_0 + \delta_{(1-r)r} + \delta_{1-r} + \delta_{(1-r)(r+1)}),\end{aligned}$$

y en general

$$(3.31) \quad \psi^k(\delta_0) = \frac{1}{2^k} \sum_{\omega \in \Omega_k} \delta_{(1-r)t(\omega)},$$

donde $t(\omega) = \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{j+1} r^j$ es la representación en base r de ω .

Por otro lado, es sencillo verificar que $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$. Además, el producto convolución es distributivo con respecto a la suma. Luego, de forma inductiva se deduce que

$$(3.32) \quad \psi^k(\delta_0) = \prod_{j=0}^{k-1} * \frac{1}{2} (\delta_0 + \delta_{(1-r)r^j}),$$

donde $\prod *$ denota el producto convolución. Cuando $k \rightarrow \infty$, obtenemos la identidad

$$(3.33) \quad \mu_r = \prod_{j=0}^{\infty} * \frac{1}{2} (\delta_0 + \delta_{(1-r)r^j}),$$

donde la convergencia es la débil. Entonces μ_r es la distribución de la serie aleatoria

$$Y_r = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n r^n,$$

donde los coeficientes ε_n valen 0 o 1, y son elegidos independientemente con probabilidad $1/2$. Por esta razón, μ_r se conoce también como *convolución de Bernoulli*.

Observamos que la linealidad del sistema nos permitió obtener la expresión (3.33), de donde puede verse fácilmente la siguiente propiedad fundamental de estas medidas.

Proposición 3.51. *La transformada de Fourier de la convolución de Bernoulli está dada por*

$$(3.34) \quad \hat{\mu}_r(\xi) = e^{\frac{1}{2}i\xi} \prod_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2}\xi(1-r)r^n\right).$$

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 1.17 y puesto que $\hat{\delta}_a(\xi) = e^{i\xi a}$, tenemos por (3.32) que la transformada de Fourier de $\psi^{k+1}(\delta_0)$ es

$$\begin{aligned} \left(\prod_{n=0}^k * \frac{1}{2} (\delta_0 + \delta_{(1-r)r^n}) \right)^\wedge &= \prod_{n=0}^k \frac{1}{2} (1 + e^{i\xi(1-r)r^n}) \\ &= \prod_{n=0}^k e^{\frac{1}{2}i\xi(1-r)r^n} \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{2}i\xi(1-r)r^n} + e^{\frac{1}{2}i\xi(1-r)r^n}) \\ &= e^{\frac{1}{2}i\xi(1-r)^{k+1}} \prod_{n=0}^k \cos\left(\frac{1}{2}\xi(1-r)r^n\right). \end{aligned}$$

Luego, por la Proposición 1.18, tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos (3.34). \square

Retornaremos a las convoluciones de Bernoulli en el Capítulo 5.

Conjuntos de Cantor definidos dinámicamente

Introducción

El objetivo de este capítulo es relacionar los conjuntos de Cantor asociados a sucesiones con los conjuntos dinámicamente definidos, o sea, los que son atractores de un sistema iterado $\{f_0, f_1\}$. Como vimos en el capítulo anterior, los atractores de sistemas hiperbólicos, que son conjuntos de Cantor, tienen la propiedad de que en su dimensión tienen medida de Hausdorff positiva y packing finita. Nuestro propósito es estudiar el problema inverso: cuáles son los conjuntos de Cantor asociados a una sucesión que son atractores de un SIF hiperbólico.

Consideremos el conjunto C_p , definido en el Capítulo 2 como el conjunto de Cantor asociado a la sucesión $\{1/n^p\}$. Por la Proposición 2.37, sabemos que

$$0 < \mathcal{H}^{1/p}(C_p) \leq \mathcal{P}^{1/p}(C_p) < +\infty,$$

por lo que es posible que C_p sea un atractor hiperbólico. Esto es cierto, pues tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1. *El conjunto de Cantor $C_p = \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{\omega \in \Omega_k} I_{\ell(\omega)}^k$ asociado a la sucesión $\{1/n^p\}$ es estrictamente $\mathcal{C}^{1+1/p}$ -hiperbólico. Además, éste es el mayor índice de suavidad que puede tener cualquier otro sistema hiperbólico $\{f_0, f_1\}$ que tenga como atractor a C_p y que verifique $f_\omega(I) = I_{\ell(\omega)}^k$, para todo $\omega \in \Omega_k$, $k \geq 1$.*

En la Sección 4.1 damos una demostración detallada del Teorema 4.1. Motivados por este resultado, en la Sección 4.2 consideramos conjuntos de Cantor centrales. Dado un conjunto C_a central, como vimos anteriormente, la sucesión $a = \{a_k\}$ tiene al forma $a_{2^n+j} = \lambda_n$, con $0 \leq j < 2^n$ y $n \geq 0$. Damos entonces condiciones sobre la sucesión $\{\lambda_n\}$ para que C_a resulte atractor de sistema $\{f_0, f_1\}$ con derivadas continuas (ver Teorema 4.17). La suavidad de estas derivadas está relacionada con el comportamiento asintótico del cociente λ_{n+1}/λ_n (Teoremas 4.17, 4.18, 4.20 y 4.22). Gustavo Moreira nos informó que una caracterización de los conjuntos centrales que son atractores de sistemas con derivadas Hölder continuas ya había sido dada por Bamón *et al* en [BMPV97] (ver Observación 4.25).

En la última sección de este capítulo, nos ocupamos de las conjugaciones de sistemas hiperbólicos. Sullivan en [Sul88] introdujo la función escala y probó que es un \mathcal{C}^1 -invariante para estos sistemas (Teorema 4.32). Usamos este resultado para mostrar que C_p es conjugado al conjunto de Cantor clásico Λ_{2-p} . Para la completitud de la tesis, al final de la sección damos una prueba del resultado de Sullivan que tomamos del artículo de Bedford y Fisher [BF97].

4.1. Prueba del Teorema 3.1

La prueba está motivada por la siguiente observación.

Proposición 4.2. *Supongamos que $C = \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{\omega \in \Omega_k} J_\omega^k$ es un conjunto de Cantor de tipo cookie-cutter, o sea, es el atractor de un SIF $\{f_0, f_1\}$ continuamente diferenciable. Entonces las derivadas quedan determinadas de manera única en todo $\omega \in C$ por el siguiente límite:*

$$(4.1) \quad f'_i(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|J_{i\omega}^{n+1}|}{|J_\omega^n|}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\omega \in \Omega$. Usando la definición de $J_{i\omega}^{k+1}$ y el teorema del valor medio, obtenemos que

$$(4.2) \quad |J_{i\omega}^{k+1}| = |f_i(J_\omega^k)| = f'_i(\xi_k) |J_\omega^k|,$$

donde $\xi_k \in J_\omega^k$. Cuando k tiende a infinito, ξ_k tiende al único punto de la intersección $\bigcap_{k \geq 1} J_\omega^k$, que es $\omega \in C$. Luego, si las derivadas son continuas, quedan definidas de manera única en todo C por la expresión (4.1). \square

Sea $\tilde{C} = \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{\omega \in \Omega_k} I_{\ell(\omega)}^k$ un conjunto de Cantor asociado a una sucesión, donde recordemos que $\ell(\omega) = \sum_{j=1}^k \omega_j 2^{k-j}$ es la representación decimal de $\omega \in \Omega_k$. Luego, para probar que \tilde{C} de tipo cookie-cutter con derivadas continuas y *positivas*, analizamos para cada $\omega \in \Omega^+$ la sucesión de cocientes

$$(4.3) \quad \left\{ |I_{\ell(i\omega^k)}^{k+1}| / |I_{\ell(\omega^k)}^k| \right\}_k.$$

Si converge para cada $\omega \in \Omega^+$, entonces provee los valores de la derivada en todo \tilde{C} de un sistema iterado continuamente diferenciable que cumpla con la condición

$$(4.4) \quad J_\omega^k = I_{\ell(\omega)}^k, \quad \text{para } k \geq 1 \text{ y } \omega \in \Omega_k.$$

Nótese que si el sistema satisface esta condición, entonces tiene a \tilde{C} como su atractor. Por consiguiente, una vez verificada la existencia del límite, para que el conjunto resulte de tipo cookie-cutter bastará con extender las derivadas a todo I de forma tal que el sistema cumpla (4.4).

Dividimos entonces la prueba del Teorema 4.1 en dos partes. Primero mostramos que si C_p es atractor de un sistema suave, entonces las derivadas quedan definidas de forma única en todo C_p . Teniendo esta definición, en la segunda parte extendemos adecuadamente las derivadas a todo el intervalo I de forma que C_p resulte un atractor hiperbólico.

Definición de las derivadas en C_p y propiedades. Denotemos

$$C_p = \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{\omega \in \Omega_k} I_{\ell(\omega)}^k.$$

Observamos que sólo es necesario calcular el límite de la sucesión (4.3) para cada punto ω que sea extremo de un intervalo de la construcción de C_p . Esto se debe a que los extremos forman un subconjunto denso de C_p y a que la extensión de las derivadas resultará continua. O sea, por el Lema 3.39, consideraremos los puntos de la forma $\omega \hat{u}$, donde $u = 0$ o $u = 1$ y $\omega \in \Omega_k$, $k \geq 1$. En realidad podríamos tomar sólo los extremos izquierdos (o los derechos) porque también son densos en C_p , pero considerar ambos casos nos provee, por ejemplo, el Lema 4.5.

Usamos la siguiente estimación, que es el Lema 3.2 de [CMPS05]:

$$(4.5) \quad \left(\frac{1}{2^k + l + 1} \right)^p \frac{2^p}{2^p - 2} \leq |I_l^k| \leq \frac{2^p}{2^p - 2} \left(\frac{1}{2^k + l} \right)^p.$$

Observación 4.3. Sabemos que los intervalos de las etapas en la construcción de C_p son estrictamente decrecientes, hecho que inmediatamente hace imposible que el conjunto sea auto-similar. No obstante, la desigualdad (4.5) muestra lo paulatino de este decrecimiento, lo que hace pensar en la posibilidad de una *casi* auto-similitud.

Sea $\omega \in \Omega_k$ con $k \geq 1$. Por (4.5) se sigue que

$$\left(\frac{2^n + \ell((\omega\widehat{u})^n)}{2^{n+1} + \ell(i(\omega\widehat{u})^n) + 1} \right)^p \leq \frac{|I_{\ell(i(\omega\widehat{u})^n)}^{n+1}|}{|I_{\ell((\omega\widehat{u})^n)}^n|} \leq \left(\frac{2^n + \ell((\omega\widehat{u})^n) + 1}{2^{n+1} + \ell(i(\omega\widehat{u})^n)} \right)^p.$$

De las igualdades

$$\ell((\omega\widehat{u})^n) = \sum_{j=1}^k \omega_j 2^{n-j} + u(2^{n-k} - 1) = 2^{n-k}(\ell(\omega) + u(1 - 1/2^{n-k}))$$

y

$$\ell(i(\omega\widehat{u})^n) = i2^n + \ell((\omega\widehat{u})^n),$$

tenemos que

$$\frac{|I_{\ell(i(\omega\widehat{u})^n)}^{n+1}|}{|I_{\ell((\omega\widehat{u})^n)}^n|} \leq \left(\frac{2^k + \ell(\omega) + u(1 - 1/2^{n-k}) + 1/2^{n-k}}{2^{k+1} + i2^k + \ell(\omega) + u(1 - 1/2^{n-k})} \right)^p,$$

con una cota similar por debajo. Como $\ell(\omega)$ no depende de n , vemos entonces que para el caso de C_p , el límite de la sucesión (4.3) existe. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.4. Si C_p es atractor de un sistema iterado de funciones $\{f_0, f_1\}$ definidas en I , continuamente diferenciables y que satisface (4.4), entonces las derivadas quedan determinadas de manera única en todo C_p . La definición en los extremos de las etapas está dada por la fórmula

$$(4.6) \quad G_i(\omega\widehat{u}) = \left(\frac{2^k + \ell(\omega) + u}{2^{k+1} + i2^k + \ell(\omega) + u} \right)^p, \quad \omega \in \Omega_k.$$

Sean F_0 y F_1 las derivadas de las funciones de un sistema como en la proposición anterior. Tenemos el siguiente lema.

Lema 4.5. F_i tiene las siguientes propiedades.

- (a) F_i coincide en los extremos de cada laguna; más precisamente, en los extremos de $L_{2^k + \ell(\omega)}$ se tiene que $F_i(\omega 0\widehat{1}) = F_i(\omega 1\widehat{0})$, $\omega \in \Omega_k$, $k \geq 0$.
- (b) F_i es creciente en C_p .
- (c) Para todo $\omega \in \Omega_k$, $(\frac{1}{2})^p \leq F_0(\omega) \leq (\frac{2}{3})^p$ y $(\frac{1}{3})^p \leq F_1(\omega) \leq (\frac{1}{2})^p$.

DEMOSTRACIÓN: (a) Se obtiene inmediatamente de la definición, debido a que $\ell(\omega 1) = \ell(\omega 0) + 1$.

(b) Por la parte (a) de este lema y por continuidad de F_i , basta con mostrar que F_i es creciente en los extremos izquierdos. Sean $\omega \in \Omega_{k-1}$, $v \in \Omega_{l-1}$ y supongamos que $\omega 1\widehat{0} \prec v 1\widehat{0}$. Por (4.6) debemos ver que

$$\left(\frac{2^k + \ell(\omega 1)}{2^{k+1} + i2^k + \ell(\omega 1)} \right)^p < \left(\frac{2^l + \ell(v 1)}{2^{l+1} + i2^l + \ell(v 1)} \right)^p.$$

Sacando la potencia, pasando términos y simplificando, esta desigualdad es equivalente a

$$2^l \ell(\omega 1) < 2^k \ell(v 1).$$

Sea $h \leq \min(k-1, l-1)$ el primer entero tal que $\omega_h \neq v_h$, por lo que $\omega_j = v_j$ para $j < h$, $\omega_h = 0$ y $v_h = 1$. Definamos $\omega_k = v_l = 1$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 2^l \ell(\omega 1) &= 2^l \sum_{j=1}^{h-1} \omega_j 2^{k-j} + 2^l \sum_{j=h+1}^k \omega_j 2^{k-j} \\ &\leq \sum_{j=1}^{h-1} \omega_j 2^{k+l-j} + 2^l (2^{k-h} - 1) \\ &< \sum_{j=1}^{h-1} v_j 2^{k+l-j} + 2^{k+l-h} \\ &\leq 2^k \sum_{j=1}^{l-1} v_j 2^{l-j} = 2^k \ell(v 1). \end{aligned}$$

(c) es consecuencia de (b) y de evaluar las funciones en los extremos de I . \square

El ítem (c) enfatiza que las derivadas son estrictamente menores que 1 en todo C_p .

La siguiente proposición muestra que la mayor suavidad que se puede esperar de un sistema iterado que tenga como atractor a C_p y que satisfaga las hipótesis del Teorema 4.1 es que sus derivadas sean Hölder continuas con exponente $1/p$.

Proposición 4.6. $F_i \in \mathcal{C}^{\frac{1}{p}}(C_p)$ pero $F_i \notin \mathcal{C}^\eta(C_p)$ para ningún $\eta > 1/p$.

DEMOSTRACIÓN: Queremos mostrar que existe una constante C tal que para cualesquiera $x, z \in C_p$ se cumple que $|F_i(x) - F_i(z)| \leq C|x - z|^{\frac{1}{p}}$. Separamos la prueba en tres casos, donde siempre suponemos $x < z$.

Caso (i): x y z son extremos de un mismo intervalo de la etapa m . Por la Observación 3.39, existe $\omega \in \Omega_m$ tal que $x = \omega \widehat{0}$ y $z = \omega \widehat{1}$. Usando la fórmula (4.6), escribamos $F_i(\omega \widehat{0}) = \left(\frac{a}{b}\right)^p$ y $F_i(\omega \widehat{1}) = \left(\frac{a+1}{b+1}\right)^p$, con $a = 2^k + \ell(\omega)$ y $b = 2^{k+1} + i2^k + \ell(\omega)$. Sacando denominador común y usando el teorema del valor medio (donde $a < \xi < b$) tenemos que

$$F_i(\omega \widehat{1}) - F_i(\omega \widehat{0}) = \frac{p(ab + \xi)^{p-1}(b-a)}{(b(b+1))^p} = \frac{p(a + \xi/b)^{p-1}2^k(1+i)}{b(b+1)^p},$$

pues $b-a = 2^k(1+i)$. De las definiciones puede verificarse sencillamente que

$$1/5 \leq \frac{a + \xi/b}{b+1}, \frac{2^k(1+i)}{b} \leq 1.$$

Por (4.5),

$$\frac{2^p}{2^{p+1}-4} a^{-p} \leq |J_\omega^k| \leq \frac{2^p}{2^p-2} a^{-p}.$$

Entonces existen constantes finitas y positivas c_1 y c_2 que sólo dependen de p tales que

$$(4.7) \quad c_1 |J_\omega^k|^{\frac{1}{p}} \leq F_i(\omega \widehat{1}) - F_i(\omega \widehat{0}) \leq c_2 |J_\omega^k|^{\frac{1}{p}}.$$

La última desigualdad dice que F_i es Hölder continua con exponente $1/p$ en los extremos de cada intervalo de cualquier etapa en la construcción de C_p . Por otro lado, la primera desigualdad muestra que el exponente $1/p$ no puede mejorarse. De hecho, la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que $F_i(\omega\hat{1}) - F_i(\omega\hat{0}) \leq c|J_\omega^k|^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, implicaría que $0 < c_1c^{-1} \leq |J_\omega^k|^\varepsilon$ para todo k , lo que es imposible pues los diámetros de estos intervalos decrecen a 0 con k . Por lo tanto, la segunda afirmación de la proposición también queda demostrada.

Caso (ii): x y z son extremos arbitrarios de intervalos en la construcción de C_p . Necesitaremos el siguiente resultado de [CMPS05] (Lema 3.5):

$$\text{Sea } J \text{ un intervalo abierto y } k \in \mathbb{N}. \text{ Entonces } \sum_{I_i^k \subset J} |I_i^k|^{\frac{1}{p}} \leq 4|J|^{\frac{1}{p}}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $L_\varepsilon = (x - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Por construcción, x y z son extremos de intervalos de una misma etapa k . Sean $x = x_0 < \dots < x_N = z$ son todos los extremos de la etapa k que están entre x y z entonces; por el Lema 4.5 (a) se tiene que $F_i(x_{n+1}) - F_i(x_n) = 0$ si (x_n, x_{n+1}) es una laguna. Por consiguiente, haciendo una suma telescópica sobre las imágenes de los extremos de la etapa k , usando (4.7) y el lema citado obtenemos que

$$\begin{aligned} |F_i(x) - F_i(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} F_i(x_k) - F_i(x_{k+1}) \right| \leq \sum_{\omega: J_\omega^k \subset L_\varepsilon} |F_i(\omega\hat{1}) - F_i(\omega\hat{0})| \\ &\leq c_2 \sum_{\omega: J_\omega^k \subset L_\varepsilon} |J_\omega^k|^{\frac{1}{p}} \leq 4c_2 |L_\varepsilon|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Caso (iii): x y z son puntos arbitrarios de C_p . Sea $\varepsilon > 0$. Los extremos de todas las etapas forman un subconjunto denso de C_p . La continuidad de F_i nos permite elegir uno de estos extremos x_ε suficientemente cercano a x de forma tal que

$$|F_i(x) - F_i(x_\varepsilon)| < \varepsilon,$$

y análogamente podemos elegir un extremo z_ε para z . Por el caso anterior se tiene que

$$|F_i(x) - F_i(z)| \leq |F_i(x_\varepsilon) - F_i(z_\varepsilon)| + 2\varepsilon \leq c|x - z|^{\frac{1}{p}} + 2\varepsilon,$$

y el resultado se tiene haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Extensión de las derivadas. Recordemos que si las derivadas son positivas, entonces f_i preserva el orden, por lo que $f_0(0) = 0$ y $f_1(|I|) = |I|$. Con estos valores, una vez construidas las derivadas F_0 y F_1 , definimos

$$(4.8) \quad f_0(x) = \int_0^x F_0 \quad \text{y} \quad f_1(x) = \int_0^x F_1 + c,$$

con $c = |I_0^1| + 1$, pues 1 es la longitud de la primer laguna.

Por la Proposición 4.4, sabemos cuánto tiene que valer F_i en los extremos de C_p . Para extenderla a todo el intervalo I , es conveniente, en lugar de trabajar con los intervalos cerrados que constituyen las etapas, trabajar con las lagunas, pues se simplifican tanto los cálculos como la notación. La condición (4.4) equivale a que lagunas que forman la etapa n sean enviadas por f_i a lagunas correspondientes de la etapa $n+1$. Pero como muestra el siguiente lema, podemos trabajar directamente con la longitud de las lagunas.

Lema 4.7. *La condición (4.4) es equivalente a que $f_0(0) = 0$, $f_1(|I|) = |I|$ y*

$$(4.9) \quad |L_{2^{n+1}+\ell(i\omega)}| = \int_{L_{2^n+\ell(\omega)}} F_i, \quad \omega \in \Omega_n, \quad n \geq 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Comencemos suponiendo que (4.9) es cierta. Notemos primero que por la igualdad $I_{\ell(\omega)}^n = \bigcup_{k \geq n} \bigcup_{\lambda \in \Omega_{k-n}} L_{2^k+\ell(\omega\lambda)}$ se sigue que

$$(4.10) \quad \begin{aligned} |I_{\ell(\omega)}^n| &= \sum_{k \geq n} \sum_{\lambda \in \Omega_{k-n}} |L_{2^k+\ell(\omega\lambda)}| \\ &= \sum_{k \geq n} \sum_{\lambda \in \Omega_{k-n}} \int_{L_{2^{k-1}+\ell(\tilde{\omega}\lambda)}} F_{\omega_1} \\ &= \int_{I_{\ell(\tilde{\omega})}^{n-1}} F_{\omega_1} = |f_{\omega_1}(I_{\ell(\tilde{\omega})}^{n-1})|. \end{aligned}$$

Usando esta igualdad para $n = 1$ tenemos que $|J_i^1| = |I_i^1|$. Cuando $i = 0$ ($i = 1$) ambos intervalos tienen el mismo extremo izquierdo (derecho) pues $f_0(0) = 0$ ($f_1(|I|) = |I|$). Por consiguiente, ya que los intervalos tienen igual longitud y un extremo en común, tenemos que $J_i^1 = I_i^1$. Inductivamente, supongamos que para $n \geq 1$ se cumple que $J_\omega^n = I_{\ell(\omega)}^n$ para todo $\omega \in \Omega_n$. Entonces

$$|J_{\omega_i}^{n+1}| = |f_{\omega_1}(J_{\tilde{\omega}_i}^n)| = |I_{\ell(\omega_i)}^{n+1}|,$$

donde en la última igualdad usamos la hipótesis inductiva y (4.10). Entonces cada intervalo de la etapa $n + 1$ en la construcción dinámica tiene igual longitud que su correspondiente en la construcción asociada a la sucesión. Además, por construcción sabemos que

$$(4.11) \quad I_{\ell(\omega)}^n = I_{\ell(\omega_0)}^{n+1} \bigcup L_{2^n+\ell(\omega)} \bigcup I_{\ell(\omega_1)}^{n+1},$$

y por otro lado, la hipótesis inductiva garantiza que

$$(4.12) \quad \begin{aligned} I_{\ell(\omega)}^n &= f_{\omega_1}(J_{\tilde{\omega}}^{n-1}) = f_{\omega_1}(I_{\ell(\tilde{\omega})}^{n-1}) \\ &= f_{\omega_1}(I_{\ell(\tilde{\omega}_0)}^n \bigcup L_{2^{n-1}+\ell(\tilde{\omega})} \bigcup I_{\ell(\tilde{\omega}_1)}^n) \\ &= J_{\omega_0}^{n+1} \bigcup f_{\omega_1}(L_{2^{n-1}+\ell(\tilde{\omega})}) \bigcup J_{\omega_1}^{n+1}. \end{aligned}$$

Luego, ya que f_{ω_1} es creciente, el extremo izquierdo de $J_{\omega_0}^{n+1}$ es el extremo izquierdo de $I_{\ell(\omega)}^n$, que por (4.11) es el mismo que el izquierdo de $I_{\ell(\omega_0)}^{n+1}$. Entonces $J_{\omega_0}^{n+1} = I_{\ell(\omega_0)}^{n+1}$, y análogamente se obtiene que $J_{\omega_1}^{n+1} = I_{\ell(\omega_1)}^{n+1}$. Por lo tanto $J_\omega^n = I_{\ell(\omega)}^n$ para todo $\omega \in \Omega_n$, $n \geq 1$.

Por otro lado, si vale (4.4) ya observamos que $f_0(0) = 0$ y $f_1(|I|) = |I|$; además, por (4.11) y (4.12) tenemos que $f_{\omega_1}(L_{2^{n-1}+\ell(\tilde{\omega})}) = L_{2^n+\ell(\omega)}$, de donde se sigue la igualdad (4.9). \square

Por lo tanto, C_p será $\mathcal{C}^{1+\frac{1}{p}}$ -hiperbólico si podemos extender las funciones F_i a todo el intervalo I de forma que se mantenga la continuidad Hölder y que se satisfaga la ecuación (4.9). Notamos aquí que para una laguna fija dada siempre es posible definir una función \mathcal{C}^1 que satisfaga esta ecuación y en los extremos cumpla con (4.6), pero para nuestro propósito esto no alcanza, pues es necesario tener un control *uniforme* sobre las constantes Hölder de *todas* las lagunas.

Recordemos que por el Lema 4.5 (a), F_i toma los mismos valores en los extremos de cada laguna. Si definimos F_i en $L_{2^n+\ell(\omega)}$ constantemente igual a $F_i(\omega\widehat{10})$, que es el valor en los extremos de esta laguna, entonces

$$\begin{aligned} \int_{L_{2^n+\ell(\omega)}} F_i &= F_i(\omega\widehat{10})|L_{2^n+\ell(\omega)}| \\ &= \left(\frac{2^{n+1} + \ell(\omega\widehat{1})}{2^{n+2} + i2^{n+1} + \ell(\omega\widehat{1})} \right)^p \left(\frac{1}{2^n + \ell(\omega)} \right)^p. \end{aligned}$$

Como $\ell(\omega\widehat{1}) = 2\ell(\omega) + 1$ y $\ell(i\omega) = i2^n + \ell(\omega)$, es sencillo verificar que

$$|L_{2^{n+1}+\ell(i\omega)}| < \int_{L_{2^n+\ell(\omega)}} F_i.$$

Luego, F_i no puede extenderse de esta manera pues tiene demasiada área en la laguna. Para restar área y obtener la que necesitamos, definimos a F_i de modo que su gráfica coincida con los lados iguales de un triángulo isósceles, como se muestra en la Figura 4.1. Esta construcción será posible siempre que el triángulo quede por encima del eje x , ya que necesitamos que la derivada sea positiva. Esto ocurre para toda laguna cuyo índice es lo suficientemente grande (dependiendo de p). En efecto, sea R el área del rectángulo con base $L_{2^n+\ell(\omega)}$ y altura $F_i(\omega\widehat{10})$ (el rectángulo punteado en la figura); notar que el área bajo el triángulo (rayada en la figura) decrece continuamente a medida que el vértice se aproxima al eje x , siendo ésta igual a $1/2R$ cuando lo toca. Luego, por la condición (4.9), hay que verificar que $1/2R < |L_{2^{n+1}+\ell(i\omega)}|$ para todo n grande. Denotemos con $h_{2^n+\ell(\omega)}^i$ a la altura de este triángulo.

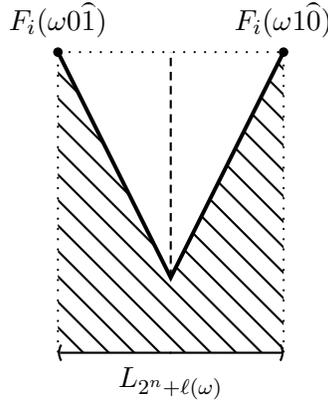


FIGURA 4.1

Lema 4.8. *Existe un entero n_p tal que en toda laguna $L_{2^n+\ell(\omega)}$, con $\omega \in \Omega_n$ y $n \geq n_p$, se puede extender a las funciones F_i como se indicó arriba. Más aún, para estas lagunas se tiene que $h_{2^n+\ell(\omega)}^i \leq \frac{p}{2^n}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $l = \ell(\omega)$, de modo que $\ell(\omega 1) = 2l + 1$ y $\ell(i\omega) = i2^n + l$. Como ya observamos, para la primera afirmación hay que verificar que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n + l} \right)^p \left(\frac{2^{n+1} + 2l + 1}{2^{n+2} + i2^{n+1} + 2l + 1} \right)^p < \left(\frac{1}{2^{n+1} + i2^n + l} \right)^p.$$

Para simplificar la notación ponemos $a = 2^n + l$. Entonces esta desigualdad equivale a

$$\left(\left(\frac{2a + 1}{2a} \right) \left(\frac{a + 2^n(1 + i)}{a + 2^n(1 + i) + 1/2} \right) \right)^p < 2,$$

y como cada factor del producto del lado derecho tiende a 1, se sigue que la desigualdad es válida para todo $n \geq n_p$, donde n_p es un entero que depende de p .

Para $n \geq n_p$ conocemos el área del triángulo, por lo que podemos estimar su altura como sigue:

$$\begin{aligned} h_{2^n+l}^i &= 2 \frac{R_{2^n+l}^i - |L_{2^{n+1}+i2^n+l}^i|}{|L_{2^n+l}|} \\ &= 2 \left[\left(\frac{2^{n+1} + 2l + 1}{2^{n+2} + i2^{n+1} + 2l + 1} \right)^p - \left(\frac{2^n + l}{2^{n+1} + i2^n + l} \right)^p \right]. \end{aligned}$$

Con a como antes, usando el teorema del valor medio (donde $0 < \xi < 1/2$), obtenemos

$$\begin{aligned} h_{2^n+l}^i &= 2 \left[\left(\frac{a + 1/2}{a + 2^n(1 + i) + 1/2} \right)^p - \left(\frac{a}{a + 2^n(1 + i)} \right)^p \right] \\ &= 2p \left(\frac{a + \xi}{a + \xi + 2^n(1 + i)} \right)^{p-1} \frac{2^n(1 + i)}{(a + 2^n(1 + i) + \xi)^2} \frac{1}{2} \\ &< \frac{p}{2^n}. \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba del lema. \square

A continuación definimos F_i , que será el límite de una sucesión de funciones $\{F_i^n\}$. Sea G_i la función definida en los extremos de C_p mediante la fórmula (4.6), i.e.,

$$G_i(\omega \hat{u}) = \left(\frac{2^k + \ell(\omega) + u}{2^{k+1} + i2^k + \ell(\omega) + u} \right)^p, \quad \omega \in \Omega_k.$$

Cada F_i^n interpola de forma adecuada los valores de G_i en los extremos de los intervalos cerrados que forman la n -ésima etapa. Para comenzar, en cada laguna L_k , $1 \leq k \leq 2^{n_p} - 1$, definimos $F_i^{n_p}$ interpolando los valores de G_i en el extremo de esa laguna de manera que resulte \mathcal{C}^1 y que el área en la laguna sea la indicada en la igualdad (4.9). En el resto del intervalo I , o sea, en los intervalos cerrados que constituyen la etapa n_p , la definimos interpolando linealmente, de manera que $F_i^{n_p}$ resulte continua. Cuando $n > n_p$, definimos $\{F_i^n\}$ en forma inductiva: En la laguna L_k , con $1 \leq k < 2^{n-1}$, F_i^n coincide con F_i^{n-1} . En las lagunas restantes que forman la etapa n , o sea en $L_{k'}$, con $2^{n-1} \leq k' < 2^n$, definimos la gráfica de F_i^n como los lados del triángulo isósceles antes mencionado. En el resto del intervalo I interpolamos linealmente, de forma que F_i^n sea continua.

La sucesión $\{F_i^k\}_k$ tiene la siguiente propiedad.

Lema 4.9. $\{F_i^k\}_k$ es una sucesión de Cauchy uniforme.

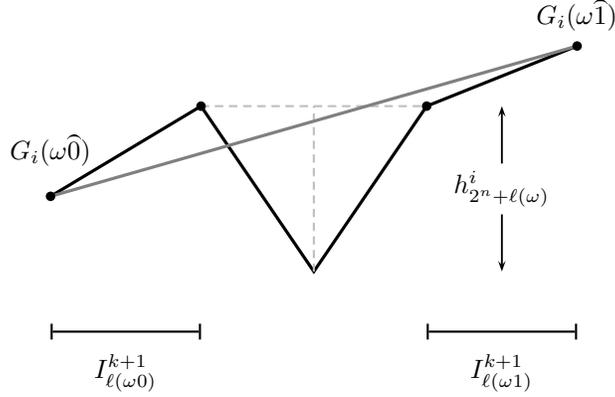


FIGURA 4.2. F_i^k en gris y F_i^{k+1} en negro.

DEMOSTRACIÓN: Dados $m < n$ podemos escribir

$$F_i^n - F_i^m = \sum_{k=m}^{n-1} F_i^{k+1} - F_i^k,$$

por lo que para mostrar que la sucesión es de Cauchy uniforme basta con ver que $\|F_i^{k+1} - F_i^k\|_\infty = O\left(\frac{1}{2^k}\right)$ para todo $k \geq n_p$.

Para esto, notamos que F_i^k y F_i^{k+1} coinciden en las lagunas complementarias de la etapa k , por lo que tenemos que estimar su diferencia para valores en los intervalos cerrados de dicha etapa. Sea $x \in I_{\ell(\omega)}^k = [\omega\hat{0}, \omega\hat{1}]$, con $\omega \in \Omega_k$. Debido a que las funciones son crecientes en C_p , tenemos que (ver Figura 4.2)

$$G_i(\omega\hat{0}) \leq G_i^k(x) \leq G_i(\omega\hat{1})$$

y

$$G_i(\omega\hat{0}) - h_{2^{k+\ell(\omega)}}^i \leq G_i^{k+1}(x) \leq G_i(\omega\hat{1}).$$

Luego

$$(4.13) \quad |G_i^{k+1}(x) - G_i^k(x)| \leq G_i(\omega\hat{1}) - G_i(\omega\hat{0}) + h_{2^{k+\ell(\omega)}}^i.$$

Por la estimación del Lema 4.8 y de la desigualdad (4.7) en la demostración de la Proposición 4.6, como $|I_{\ell(\omega)}^k| \leq C2^{-kp}$, el lema queda demostrado. \square

Por el lema anterior, tenemos entonces que la sucesión de funciones continuas $\{F_i^k\}_k$ converge uniformemente a una función F_i , que entonces resulta continua. Teniendo las derivadas F_i , integramos como en (4.8) para obtener un sistema $\{f_{p,0}, f_{p,1}\}$ que tiene como atractor a C_p .

Observación 4.10. Este sistema no es único, lo que es claro por la *libertad* que se tiene al extender las derivadas en las lagunas.

Debido a que las derivadas de las funciones del sistema $\{f_{p,0}, f_{p,1}\}$ son continuas, se tiene por la Proposición 4.6 que son $1/p$ -Hölder continuas en todo C_p . Finalizamos la prueba del Teorema 4.1 mostrando que tienen esta suavidad en todo el intervalo I . Para esto haremos uso del siguiente lema.

Lema 4.11. *Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $a < c < b$ tal que la restricción de f al intervalo $(a, c]$ es α -Hölder continua con constante C_1 y f en $[c, b)$ es α -Hölder continua con constante C_2 . Luego f es α -Hölder continua en todo (a, b) con constante $C = 2 \max\{C_1, C_2\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x \in (a, c)$ e $y \in (c, b)$. Luego

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq C_2(y - c)^\alpha + C_1(c - x)^\alpha \\ &\leq 2 \max\{C_2(y - c)^\alpha, C_1(c - x)^\alpha\} \\ &\leq C \max\{(y - c + c - x)^\alpha, (c - x + y - c)^\alpha\} = C(y - x)^\alpha, \end{aligned}$$

de donde se sigue el lema. \square

FIN DE LA PRUEBA DEL TEOREMA 4.1: Veamos primero que F_i es $1/p$ -Hölder continua en cada laguna L_{2^k+l} , con constante \tilde{C} independiente de l y k .

En efecto, si $k \leq n_p$ entonces F_i es diferenciable pues coincide con $F_i^{n_p}$ en esta laguna. Luego, y por ser $p > 1$ y la laguna acotada, se tiene que es $1/p$ -Hölder continua allí. Como que hay un número finito de tales lagunas, la constante Hölder puede elegirse como el máximo de las constantes en cada laguna.

En el caso en que $k > n_p$, por definición de F_i sabemos que en esta laguna su gráfica está dada por un triángulo. Denotemos con s al punto medio de la laguna. Sean x y z en L_{2^k+l} . Supongamos primero que $s \leq x, z$. Entonces

$$|F_i(x) - F_i(z)| = m_{2^k+l}^i |x - z| = m_{2^k+l}^i |x - z|^{1-\frac{1}{p}} |x - z|^{\frac{1}{p}}$$

donde $m_{2^k+l}^i$ es la pendiente del lado del triángulo. Si $h_{2^k+l}^i$ es la altura del triángulo, usando la estimación en la demostración del Lema 4.9 se tiene que

$$m_{2^k+l}^i = \frac{h_{2^k+l}^i}{\frac{1}{2}|L_{2^k+l}|} \leq C \frac{(2^k + l + 1)^p}{2^k},$$

y por la desigualdad $|x - z| \leq 1/2|L_{2^k+l}|$, se sigue que

$$|F_i(x) - F_i(y)| \leq C \frac{(2^k + l + 1)^p}{2^k(2^k + l)^{p(1-\frac{1}{p})}} |x - z|^{\frac{1}{p}} \leq C |x - z|^{\frac{1}{p}}.$$

Para $x, z \leq s$, el caso es simétrico al anterior. Finalmente, cuando $x < s < z$ se deduce del Lema 4.11.

Sea C el máximo entre \tilde{C} y la constante dada por la Proposición 4.6. Tomemos x y z en I con $x < z$. Si estos puntos están en dos lagunas distintas, sean e_x y e_z los extremos derecho e izquierdo de las lagunas a la que pertenecen x y z respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} |F_i(x) - F_i(z)| &\leq |F_i(x) - F_i(e_x)| + |F_i(e_x) - F_i(e_z)| + |F_i(e_z) - F_i(z)| \\ &\leq C \left(|x - e_x|^{\frac{1}{p}} + |e_x - e_z|^{\frac{1}{p}} + |e_z - z|^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\leq 3C |x - z|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Los restantes casos posibles, por ejemplo que x pertenezca a C_p y z esté en alguna laguna, se deducen de igual manera. \square

4.2. Conjuntos de Cantor centrales definidos dinámicamente

En esta sección analizamos el siguiente problema. Sea C_a un conjunto de Cantor central. ¿Qué condiciones debe cumplir la sucesión a para que C_a sea un atractor hiperbólico? Obtenemos una condición suficiente sobre la sucesión para que esto sea posible. Además, cuando se cumple esta condición, analizamos la relación entre el decaimiento de la sucesión y la suavidad de las funciones del sistema.

Observación 4.12. Sabemos que $\dim C_p = 1/p$ y además que $1/p$ es el mayor exponente de suavidad Hölder que puede tener un sistema que tenga como atractor a este conjunto. Queremos enfatizar que no necesariamente tiene que existir una relación directa entre la suavidad del sistema y la dimensión de su atractor. Por ejemplo, el conjunto de Cantor clásico $\Lambda_{\frac{1}{3}}$ es C^∞ -hiperbólico, pues las funciones del sistema del Ejemplo 3.6 son lineales; sin embargo, $\dim_H \Lambda_{\frac{1}{3}} = \log 2 / \log 3$.

Consideraciones preliminares. Sea C_a un conjunto de Cantor central. Recordemos que por definición, para cada $k \geq 1$, los intervalos cerrados que forman la k -ésima etapa de C_a tienen todos la misma longitud, o equivalentemente, que las lagunas que se remueven en la etapa k -ésima tienen todas igual longitud. Por esto último, la sucesión $a = \{a_k\}$ tiene la forma

$$a_{2^n+j} = \lambda_n \quad 0 \leq j < 2^n, \quad n \geq 0.$$

Por el Teorema 3.34 del Capítulo 3, si C_a es un atractor hiperbólico entonces verifica

$$0 < \mathcal{H}^s(C_a) \leq P_0^s(C_a) < +\infty,$$

lo que equivale, por los Teoremas 2.29 y 2.31 del Capítulo 2, a que la sucesión cumpla las desigualdades

$$(4.14) \quad 0 < \varliminf_{n \rightarrow \infty} nb_n^s \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nb_n^s < +\infty,$$

donde $b_n = r_n/n = \frac{1}{n} \sum_{j \geq n} a_j$.

En general, esta última condición no es suficiente para que el conjunto resulte atractor de un sistema iterado con derivadas continuas (ver Proposición 4.15). Pedimos entonces una hipótesis más fuerte a la sucesión; a saber, que satisfaga

$$(4.15) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k b_{2^k}^s = A \quad \text{con } 0 < A < +\infty.$$

La necesidad de esta condición aparece en la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 4.13. Sea $C_a = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{\omega \in \Omega_k} I_{\ell(\omega)}^k$ un conjunto de Cantor central cuya sucesión satisface (4.15) y supongamos además que C_a es el atractor de un sistema continuamente diferenciable $\{f_0, f_1\}$ que verifica

$$(4.16) \quad J_\omega^k = I_{\ell(\omega)}^k, \quad k \geq 1, \quad \omega \in \Omega_k,$$

donde $J_\omega^k := f_\omega(I)$. Entonces

$$(4.17) \quad f'_i(\omega) = \frac{1}{2^{1/s}}$$

para todo $\omega \in \Omega^+ = C_a$.

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 4.2, tenemos que verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|J_{i\omega}^{n+1}|}{|J_\omega^n|} = \frac{1}{2^{1/s}} \quad \text{para todo } \omega \in \Omega^+.$$

Por hipótesis, existe una sucesión $\{A_n\}$ que tiende a A tal que $b_{2^n} = A_n/2^{n/s}$. Además, $|I_{\ell(\omega)}^n| = b_{2^n}$ ya que C_a es central (ver Lema 2.27). Luego

$$(4.18) \quad \frac{|I_{\ell(i\omega^n)}^{n+1}|}{|I_{\ell(\omega^n)}^n|} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{2^{n/s}}{2^{(n+1)/s}} \longrightarrow \frac{1}{2^{1/s}},$$

que es lo que queríamos probar. \square

Observación 4.14. (4.15) \implies (4.14), y por consiguiente

$$0 < \mathcal{H}^s(C_a) \leq P_0^s(C_a) < +\infty.$$

De hecho, dada $\{n_j\}$ una subsucesión de los naturales, sea $l_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$2_j^{l_j} \leq n_j < 2^{l_j+1}.$$

Usando que $\{b_n\}$ es decreciente es sencillo verificar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2^k b_{2^k}^s \sim \lim_{n \rightarrow \infty} n b_n^s \quad \text{y} \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} 2^k b_{2^k}^s \sim \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n b_n^s.$$

En general, no puede esperarse que si se debilita la condición (4.15) se obtenga que el conjunto C_a resulte hiperbólico, como mostramos a continuación.

Proposición 4.15. *Existe un conjunto de Cantor central C_a tal que la sucesión verifica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n b_{2^n}^s = A \quad \text{y} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2^n b_{2^n}^s = B$$

con $0 < A < B < +\infty$, pero que no puede ser atractor de un sistema diferenciable que cumpla la condición (4.16).

DEMOSTRACIÓN: Daremos un ejemplo de un conjunto de Cantor

$$C = \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{\omega \in \Omega_k} I_{\ell(\omega^k)}^k$$

para el cual el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|I_{\ell(i\omega)}^{n+1}|}{|I_{\ell(\omega)}^n|}$$

no existe para ningún $\omega \in \Omega$. Esto, por la Proposición 4.2, implica el resultado.

Elijamos A y B que cumplan

$$2^{1-\frac{1}{s}} < \left(\frac{A}{B}\right)^{1/s} < 2^{\frac{1}{s}-1}.$$

Pongamos $A' = A^{1/s}$ y $B = B^{1/s}$. Sean

$$c := A' - 2^{1-1/s} B' > 0 \quad \text{y} \quad d := B' - 2^{1-1/s} A' > 0,$$

y definamos

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{c}{2^{n/s}} & n \text{ par} \\ \frac{d}{2^{n/s}} & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Primero supongamos que n es par. Entonces

$$\begin{aligned} b_{2^n} &= \sum_{j \geq 0} 2^j \lambda_{n+j} = \sum_{j \geq 0} \left(2^{2j} \frac{c}{2^{\frac{n+2j}{s}}} + 2^{2j+1} \frac{d}{2^{\frac{n+2j+1}{s}}} \right) \\ &= \frac{(c + d/2^{1/s-1})}{2^{n/s}} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^{(1/s-1)2j}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(c + d/2^{1/s-1})}{2^{n/s}} \frac{2^{2(1/s-1)}}{2^{2(1/s-1)-1}} = \frac{A^{1/s}}{2^{n/s}}.$$

Análogamente, para n impar se tiene que $b_{2^n} = \frac{B^{1/s}}{2^{n/s}}$. Por consiguiente,

$$2^n b_{2^n}^s = \begin{cases} A & n \text{ par} \\ B & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Finalmente, por la igualdad $|I_l^n| = |I_0^n| = b_{2^n}$, es claro que el límite (4.1) no puede existir. \square

En la Observación 2.36 del Capítulo 1 dijimos que para conjuntos centrales no es necesario asumir que la sucesión sea monótona no creciente para que valgan los Teoremas 2.29 y 2.31. No obstante, si la sucesión satisface (4.15) entonces resulta monótona no creciente a partir de k suficientemente grande.

Proposición 4.16. *Existen constantes $0 < c_0 \leq c_1 < +\infty$ tales que*

$$(4.19) \quad \frac{1}{2^{k/s}} c_0 \leq \lambda_k \leq c_1 \frac{1}{2^{k/s}}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por la igualdad

$$|I_0^k| = |I_0^{k+1}| + \lambda_k + |I_1^{k+1}| = 2|I_0^{k+1}| + \lambda_k$$

y si A_k es como en la prueba de la Proposición 4.13, tenemos que

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \lambda_k &= |I_0^k| - 2|I_0^{k+1}| \\ &= b_{2^k} - 2b_{2^{k+1}} = \frac{A_k}{2^{k/s}} - 2\frac{A_{k+1}}{2^{(k+1)/s}} \\ &= \frac{1}{2^{k/s}} \left(A_k - \frac{A_{k+1}}{2^{1/s-1}} \right), \end{aligned}$$

lo que demuestra (4.19). \square

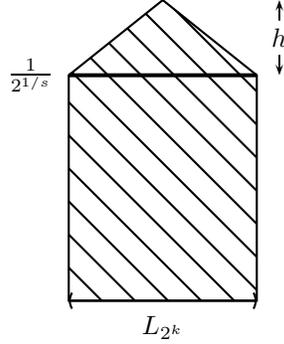
Resultados de esta sección. A continuación mostramos que los conjuntos centrales que cumplen la ecuación (4.15) son atractores de sistemas con derivadas continuas (Teorema 4.17). A pesar de las desigualdades (4.19), que dan el comportamiento asintótico de la sucesión $\{\lambda_k\}$, estos sistemas no tienen todos el mismo grado de suavidad. Resultados en esta dirección se dan en los Teoremas 4.18, 4.20 y 4.22. Al final de la sección damos ejemplos de sistemas cuyas derivadas no satisfacen la condición de Dini.

Nuestro primer resultado es el siguiente teorema.

Teorema 4.17. *Todo conjunto de Cantor central asociado a una sucesión que satisface (4.15) es atractor de un sistema iterado de funciones $\{f_0, f_1\}$ continuamente diferenciables cuyas derivadas cumplen $0 < f_i'(x) < 1$ en todo su dominio.*

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 4.13, sabemos que si existe un sistema como en el enunciado entonces $f_i'(x) = 1/2^{1/s}$ para todo $x \in C_a$. Entonces tenemos que extender las derivadas a todo I . Por el Lema 4.7 de la sección anterior, la extensión tiene que cumplir

$$(4.21) \quad \int_{L_{2^{n+j}}} f_i' = \lambda_{n+1}$$

FIGURA 4.3. El área rayada es λ_{n+1} .

para $0 \leq j < 2^n$, $n \geq 0$, $i = 0, 1$. Esta igualdad sólo depende de n , en particular no depende de i , por lo que podemos construir el sistema de forma tal que $f'_0 = f'_1 =: f'$, o sea que f_0 es una traslación de f_1 . Esto refleja la simetría de C_a .

Notamos que si se tiene la igualdad

$$(4.22) \quad \lambda_{n+1} = \frac{1}{2^{1/s}} \lambda_n$$

entonces se puede definir a f' constantemente igual a $1/2^{1/s}$ en cada laguna L_{2^n+j} , $0 \leq j < 2^n$, ya que en sus extremos toma este valor. En caso contrario, f' debe definirse de forma de sumar o restar área sobre la laguna según la desigualdad. Si tenemos $\lambda_{n+1} > \frac{1}{2^{1/s}} \lambda_n$, entonces hay que sumar área. Para hacerlo con un triángulo de altura h (ver Figura 4.3) debe cumplirse que

$$(4.23) \quad \frac{1}{2^{1/s}} + h < 1.$$

de forma que la derivada sea menor que 1. Como

$$\frac{1}{2^{1/s}} \lambda_n + \frac{1}{2} \lambda_n h = \lambda_{n+1},$$

entonces, despejando h y usando (4.23), es preciso que

$$(4.24) \quad \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - \frac{1}{2^{1/s}} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{1/s}} \right).$$

Por otro lado, si tenemos $\lambda_{n+1} < \frac{1}{2^{1/s}} \lambda_n$, entonces para restar área con un triángulo, debe cumplirse que el vértice de éste quede por encima del eje x (como hicimos en la discusión previa al Lema 4.8 en la sección anterior), ya que necesitamos que las derivadas sean positivas. Para esto tiene que cumplirse que

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2^{1/s}} \lambda_n < \lambda_{n+1},$$

o equivalentemente que

$$(4.25) \quad -\frac{1}{2} \frac{1}{2^{1/s}} < \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - \frac{1}{2^{1/s}}.$$

Pero para todo n suficientemente grande valen (4.25) y (4.24). En efecto, se sigue de (4.20) y (4.18) que

$$\frac{\lambda_n}{|I_0^{n+1}|} = \frac{|I_0^n| - 2|I_0^{n+1}|}{|I_0^{n+1}|} \longrightarrow 2^{1/s} - 2,$$

por lo que

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\lambda_{n+1}}{|I_0^{n+2}|} \frac{|I_0^{n+2}|}{|I_0^{n+1}|} \frac{|I_0^{n+1}|}{\lambda_n} \longrightarrow \frac{1}{2^{1/s}},$$

o equivalentemente,

$$(4.26) \quad \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - \frac{1}{2^{1/s}} \right| \longrightarrow 0.$$

Luego, elegimos n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumplan (4.25) y (4.24).

A continuación construimos f' , que será el límite uniforme una sucesión de funciones $\{F^n\}$, que están definidas en I de forma análoga a como lo hicimos en el caso de C_p .

Definimos F^{n_0} igual a $\frac{1}{2^{1/s}}$ en los intervalos de la etapa n_0 , y en cada laguna complementaria (de longitud λ_n , con $n < n_0$) interpolamos en los extremos con funciones C^∞ , de forma que se cumpla (4.21). Definida F^n , con $n \geq n_0$, entonces definimos F^{n+1} de forma tal que coincide con F^n en las lagunas complementarias a la etapa n y en los intervalos de la etapa $n+1$ (en este caso vale $\frac{1}{2^{1/s}}$), mientras que en las lagunas que forman la etapa $n+1$, la definimos de forma que su gráfica coincida con los lados del triángulo de forma que se cumpla (4.21).

La sucesión de funciones $\{F^n\}$ es de Cauchy uniforme. En efecto, si h_k denota la altura de los triángulos correspondientes a las lagunas L_{2^k+l} , entonces para $n_0 < m < n$ tenemos que

$$(4.27) \quad |F^m(x) - F^n(x)| \leq \sup_{k>m} h_k.$$

Pero si $\lambda_{k+1} > \frac{1}{2^{1/s}} \lambda_k$ (el caso en que hay que sumar área), entonces

$$\frac{1}{2} \lambda_k h_k + \frac{1}{2^{1/s}} \lambda_k = \lambda_{k+1},$$

y si $\lambda_{k+1} < \frac{1}{2^{1/s}} \lambda_k$, entonces

$$\lambda_{k+1} + \frac{1}{2} \lambda_k h_k = \frac{1}{2^{1/s}} \lambda_k.$$

En cualquier caso tenemos que

$$(4.28) \quad h_k = 2 \left| \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \frac{1}{2^{1/s}} \right|,$$

de donde se sigue por (4.26) que el supremo en (4.27) tiende a 0 cuando $m \rightarrow \infty$, y por lo tanto, $\{F^n\}$ es una sucesión de Cauchy uniforme.

Definimos entonces $f' := \lim_{n \rightarrow \infty} F^n$, que resulta una función continua y además $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in I$. Luego,

$$f_0(x) = \int_0^x f'(t) dt \quad y \quad f_1(x) = \int_0^x f'(t) dt + |I_0^1| + \lambda_0$$

son las funciones de un sistema que tiene como atractor a C_a . \square

En la Sección 3.2 dijimos que, como consecuencia de la propiedad de distorsión acotada, las medidas de Hausdorff y packing resultan *adecuadas* para el atractor de un sistema regular que cumple la separación fuerte. Un caso particular de sistemas que tienen esta propiedad de distorsión son aquellos cuyas funciones tienen derivadas que satisfacen la condición de Dini o de continuidad Hölder.

Ahora estamos en una situación inversa: tenemos conjuntos de Cantor cuyas medidas de Hausdorff y packing son finitas y positivas en su dimensión, y que además son atractores de sistemas continuamente diferenciables. Entonces, analizamos a continuación cómo están relacionadas las derivadas de las funciones de estos sistemas con la sucesión que define a su atractor.

Consideremos la sucesión $\{u_k\}$ definida como

$$u_k := \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \frac{1}{2^{1/s}}.$$

Notamos que la condición (4.15) nos permitió mostrar en la prueba del Teorema 4.17 que $u_k \rightarrow 0$, y esto asegurar que existen sistemas con derivadas continuas que tienen como atractor a C_a . Resulta que la velocidad de convergencia a 0 de esta sucesión provee información sobre la ‘suavidad’ de las funciones del sistema, como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 4.18. *Sea $\{f_0, f_1\}$ el sistema que tiene como atractor a C_a dado por el Teorema 4.17. Si $\{u_k\} \in \ell^1$, entonces el sistema tiene la propiedad de distorsión acotada (3.11).*

DEMOSTRACIÓN: Por la definición de distorsión acotada, debemos mostrar que existe $b \geq 1$ tal que si $n \geq 1$ y $\omega \in \Omega_n$, se tiene que

$$(4.29) \quad b^{-1} \leq \frac{|f'_\omega(x)|}{|f'_\omega(y)|} \leq b \quad \text{para todo } x, y \in I.$$

Notamos primero que si $z \in L_\tau$, con $\tau \in \Omega_k$ y $k \geq n_0$, donde n_0 es como en la prueba del Teorema 4.17, entonces por la igualdad (4.28) tenemos que

$$\frac{1}{2^{1/s}} - 2|u_k| \leq f'_i(z) \leq \frac{1}{2^{1/s}} + 2|u_k|.$$

Definamos entonces la sucesión $\{\tilde{u}_k\}$ como $\tilde{u}_k := u_k$ si $k \geq n_0$ y para $1 \leq k < n_0$, \tilde{u}_k verifica

$$0 < \frac{1}{2^{1/s}} - 2|\tilde{u}_k| \leq f'_i(z) \leq \frac{1}{2^{1/s}} + 2|\tilde{u}_k|,$$

para todo $z \in L_\tau$, $\tau \in \Omega_k$.

Recordemos que por la regla de la cadena,

$$f'_\omega(x) = \prod_{t=1}^n f'_{\omega_t}(f_{\sigma^t(\omega)}(x)).$$

Si $x, y \in C_a$ entonces $f_{\sigma^t(\omega)}(x) \in C_a$. Se sigue de la Proposición 4.13 que $f'_\omega(x) = \frac{1}{2^{n/s}}$, por lo que el cociente en (4.29) es igual a 1.

Consideremos entonces $x, y \notin C_a$. Supongamos que $x \in L_\tau$ e $y \in L_{\tau'}$, con $\tau \in \Omega_m$ y $\tau' \in \Omega_{m'}$. Como $f_{\sigma^t(\omega)}(x)$ pertenece a una laguna de la etapa $m+n-t+1$, tenemos que

$$\frac{1}{2^{1/s}} - 2|\tilde{u}_{m+n-t+1}| \leq f'_{\omega_t}(f_{\sigma^t(\omega)}(x)) \leq \frac{1}{2^{1/s}} + 2|\tilde{u}_{m+n-t+1}|.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{|f'_\omega(x)|}{|f'_\omega(y)|} &\leq \prod_{t=1}^n \frac{\frac{1}{2^{1/s}} + 2|\tilde{u}_{m+n-t+1}|}{\frac{1}{2^{1/s}} - 2|\tilde{u}_{m'+n-t+1}|} \\ &= \prod_{r=1}^n \frac{\frac{1}{2^{1/s}} + 2|\tilde{u}_{m+r}|}{\frac{1}{2^{1/s}} - 2|\tilde{u}_{m'+r}|} \\ &= \prod_{r=1}^n \left(1 + \frac{2|\tilde{u}_{m+r}| + 2|\tilde{u}_{m'+r}|}{\frac{1}{2^{1/s}} - 2|\tilde{u}_{m'+r}|} \right). \end{aligned}$$

Este producto está uniformemente acotado si y sólo si

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2|\tilde{u}_{m+r}| + 2|\tilde{u}_{m'+r}|}{\frac{1}{2^{1/s}} - 2|\tilde{u}_{m'+r}|} < +\infty.$$

Esto es cierto porque $\frac{1}{2^{1/s}} - 2|\tilde{u}_{m'+r}| > c > 0$ y por la hipótesis de sumabilidad de absoluta de $\{u_k\}$, ya que $\tilde{u}_k = u_k$ para $k \geq n_0$.

La primera desigualdad de (4.29) se obtiene de la misma manera. \square

Observación 4.19. No sabemos si el sistema del teorema anterior satisface la propiedad DAF.

Para dar un recíproco de este teorema tenemos que poner una hipótesis más restrictiva.

Teorema 4.20. *Sea $\{f_0, f_1\}$ un sistema continuamente diferenciable cuyo atractor es C_a . Si las derivadas cumplen la condición de Dini, entonces $\{u_k\} \in \ell^1$.*

Para la prueba necesitamos la siguiente estimación.

Lema 4.21. *Se tiene que $|u_{k+1}| \leq m_{f'_i}(\lambda_k)$ para todo $k \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que primero que $\lambda_{k+1} < \frac{1}{2^{1/s}} \lambda_k$. Guiándonos con la Figura 4.4, el rectángulo rayado tiene área λ_{k+1} , por lo que su altura es $T = \lambda_{k+1}/\lambda_k$. Denotemos $L_{2^k} = (a, b)$. Sabemos que f'_i es continua, que el área bajo su gráfica en L_{2^k} es λ_{k+1} y además que $f'_i(a) = 1/2^{1/s}$. Por consiguiente, existe $x \in L_{2^k}$ tal que $f'_i(x) = T = \lambda_{k+1}/\lambda_k$. Entonces

$$|u_k| = \left| \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \frac{1}{2^{1/s}} \right| = |f'_i(x) - f'_i(a)| \leq m_{f'_i}(\lambda_k).$$

El caso restante se deduce de la misma forma. \square

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.20: Usando la monotonía no decreciente de $m_{f'_i}$, tenemos que

$$\begin{aligned} +\infty &> \int_0^{\lambda_0} m_{f'_i}(t) \frac{dt}{t} = \sum_{k \geq 0} \int_{\lambda_{k+1}}^{\lambda_k} m_{f'_i}(t) \frac{dt}{t} \\ &\geq \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\lambda_k} m_{f'_i}(\lambda_{k+1}) \\ &\geq \sum_{k \geq 0} \left(1 - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \right) |u_{k+2}|. \end{aligned}$$

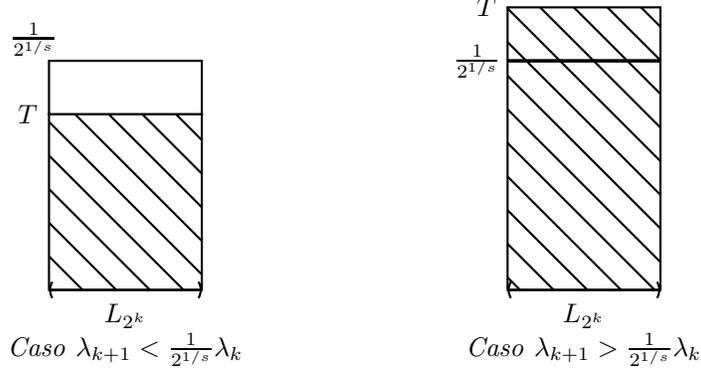


FIGURA 4.4

Se sigue que $\{u_k\} \in \ell^1$ pues por (4.26), $1 - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > c > 0$ para todo k suficientemente grande. \square

Observamos que si C_a es atractor de un sistema con derivadas η -Hölder continuas, entonces la estimación del Lema 4.21 nos dice que $|u_k| \leq c\lambda_k^\eta$, ya que en este caso $m_{f'_i}(t) \leq ct^\eta$. Esta condición de decaimiento caracteriza completamente a este tipo de sistemas.

Teorema 4.22. *Sea a una sucesión que cumple la condición (4.15). Luego, el conjunto de Cantor central C_a es estrictamente $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -hiperbólico si y sólo si*

$$(4.30) \quad \left| \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \frac{1}{2^{1/s}} \right| \lesssim \lambda_k^\eta.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el comentario previo al enunciado, sólo resta ver que el sistema del Teorema 4.17 tiene derivadas η -Hölder continuas si se cumple (4.30). Por ser las derivadas continuas y por el Lema 4.11 de la sección anterior, basta con probar que f'_i es η -Hölder en cada laguna con constante uniformemente acotada.

En las primeras lagunas, f'_i se definió \mathcal{C}^∞ , por lo que se puede elegir una constante uniforme en éstas. Si en $L_{2^{k+j}}$ la derivada f'_i está definida por un triángulo, entonces la longitud de su base es λ_k y la de su altura es $h_k = 2|u_k|$. Entonces la pendiente m_k del lado cumple $|m_k| = 4|u_k|/\lambda_k$, por lo que, si $x, y \in L_{2^{k+j}}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f'_i(x) - f'_i(y)| &\leq |m_k||x - y| \\ &= \frac{4u_k}{\lambda_k} |x - y|^{1-\eta} |x - y|^\eta \\ &\leq \frac{4u_k}{\lambda_k} \lambda_k^{1-\eta} |x - y|^\eta \\ &\leq C|x - y|^\eta, \end{aligned}$$

donde, por hipótesis, C es una contante independiente de k . Esto da una cota uniforme de la constante Hölder en las lagunas definidas con triángulos. \square

Ejemplos. Finalizamos esta sección dando un par de ejemplos de conjuntos centrales que tienen sistemas como los que consideramos hasta aquí. Observamos que no pudimos encontrar contraejemplos a los recíprocos de los Teoremas 4.18 y 4.20, i.e., ejemplos donde los sistemas tengan la propiedad de distorsión acotada pero $\{u_k\} \notin \ell^1$ o sistemas tales que $\{u_k\} \in \ell^1$ pero que sus derivadas no sean de tipo Dini.

La forma general de los ejemplos es la siguiente. Dada una sucesión $\{u_k\}$, definimos la sucesión $\{\lambda_k\}$ como sigue: $\lambda_0 = 1$ y para $k > 0$,

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{1}{2^{1/s}}(1 + u_{k+1}).$$

Entonces

$$\lambda_k = \frac{1}{2^{k/s}} \prod_{j=1}^k (1 + u_j).$$

Para verificar que se cumple (4.15), y en particular que la sucesión $a = \{a_n\}$, definida por $a_{2^k+j} = \lambda_k$, $0 \leq j < 2^n$, es sumable, notamos que

$$\begin{aligned} 2^k b_{2^k}^s &= 2^k \left(\sum_{n \geq k} 2^{n-k} \lambda_n \right)^s \\ &= \lambda_0^s \left(\sum_{n \geq k} \left(\frac{1}{2^{1/s-1}} \right)^{n-k} \prod_{j=1}^n (1 + u_j) \right)^s. \end{aligned}$$

Luego, si el producto $\prod_{j=1}^n (1 + u_j)$ converge cuando $n \rightarrow \infty$ a un límite $0 < L < +\infty$, entonces la sucesión a es sumable y además vale (4.15). Cuando la sucesión $\{u_k\}$ es positiva, la convergencia del producto de arriba es equivalente a la sumabilidad de esta sucesión.

Recordemos que por la Proposición 4.16, la condición (4.15) implica que la sucesión $\{\lambda_k\}$ se comporta como

$$(4.31) \quad \frac{1}{2^{k/s}} c_0 \leq \lambda_k \leq c_1 \frac{1}{2^{k/s}}.$$

con $0 < c_0, c_1 < +\infty$.

Ejemplo 4.23. Si definimos $u_k := k^{-t}$, con $t > 1$, $k \geq 1$, entonces tenemos que $\{u_k\} \in \ell^1$. Por el Teorema 4.18, obtenemos un ejemplo de un conjunto de Cantor central C_a que es atractor de un sistema con derivadas continuas que tienen la propiedad de distorsión acotada. En particular, $0 < \mathcal{H}^s(C_a) \leq P_0^s(C_a) < +\infty$. Observamos que las derivadas de este sistema no pueden ser η -Hölder continuas para ningún $\eta > 0$, pues

$$\left| \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \frac{1}{2^{1/s}} \right| = \frac{1}{2^{1/s}} u_k = \frac{1}{2^{1/s}} \frac{1}{k^t}$$

y por (4.31), no se cumple la desigualdad (4.30) del Teorema 4.22.

No pudimos verificar si las derivadas son de tipo Dini, pero creemos que muy probablemente lo sean.

Ejemplo 4.24. Sea $u_k := (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$. En este caso

$$\prod_{j=1}^n (1 + u_j) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 1 + \frac{1}{n}, & n \text{ impar,} \end{cases}$$

por lo que vale (4.15). Luego, por el Teorema 4.20, un sistema que tenga como atractor a C_a no puede tener derivadas que cumplan la condición de Dini ya que $\{u_k\} \notin \ell^1$.

No sabemos si en este ejemplo, el sistema dado por el Teorema 4.17 no cumple la propiedad de distorsión acotada.

Observación 4.25. En [BMPV97] se dan condiciones necesarias y suficientes en la sucesión para que el conjunto de Cantor central resulte \mathcal{C}^r , con $r \in [1, +\infty]$. De hecho, la condición 4.30 es la misma que el ítem (i') del Teorema A de ese artículo. Más aún, allí se da una clasificación de conjuntos de Cantor centrales salvo \mathcal{C}^r -difeomorfismos locales.

4.3. Conjugación. Función escala

En la Sección 3.3 mostramos que una \mathcal{C}^1 -conjugación entre sistemas hiperbólicos preserva las dimensiones fractales de sus atractores. Definimos aquí la función escala $R : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_0^-} \rightarrow \mathbb{R}^3$, que es otro invariante para este tipo de conjuntos y fue introducida por Sullivan en [Sul88] para conjuntos $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -hiperbólicos. En ese artículo se muestra que R es η -Hölder continua (con respecto a la β -métrica en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}_0^-}$, que es análoga a la que usamos en Ω^+ y que definiremos en la siguiente subsección) y además, que es un invariante completo para esta clase de conjuntos, i.e., dos conjuntos $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -hiperbólicos son $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -conjugados si y sólo si tienen la misma función escala. Incluimos al final de esta sección una prueba de este hecho (en el artículo [Sul88] se dan sólo esquemas de las demostraciones). Seguimos el artículo de Bedford y Fisher [BF97] pero con leves modificaciones para trabajar con conjuntos hiperbólicos. Bajo esta hipótesis sólo podemos garantizar la continuidad de la función escala.

Usando esta función como herramienta, obtenemos que C_p es $\mathcal{C}^{1+1/p}$ -conjugado a Λ_{2-p} (ver Teorema 4.33). Además, en relación con una afirmación hecha en [BF97] (ver Observación 4.36), mostramos que la función escala no determina la suavidad de las derivadas de las funciones del sistema. Por ejemplo, un conjunto hiperbólico puede no satisfacer la condición Dini aunque su función escala sea η -Hölder continua para algún $\eta > 0$. Los conjuntos centrales estudiados en la sección anterior nos sirven para ejemplificar esta situación. Más aún, en la Proposición 4.35 mostramos que existen atractores \mathcal{C}^1 que no cumplen la propiedad de distorsión acotada (3.11) pero que sin embargo tienen función escala η -Hölder continua.

Preliminares. Por simplicidad supongamos que $I = [0, 1]$.

Sea Δ es el simplex unitario de \mathbb{R}^3 , i.e.,

$$\Delta = \{(a, b, c) : a + b + c = 1, a, b, c \geq 0\}.$$

Denotamos con $\text{int}(\Delta)$ al interior de Δ .

Sea $\Omega^- := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_0^-}$, el conjunto de las sucesiones de 0 y 1 con coordenadas no positivas, i.e.,

$$\Omega^- = \{\dots \alpha_{-2} \alpha_{-1} \alpha_0 : \alpha_j = 0, 1\}.$$

Para $\alpha \in \Omega^-$ y $n \geq 0$, sea $\alpha^n = \alpha_{(n-1)} \dots \alpha_0$ la n -truncación de α por izquierda. Además, si $\omega \in \Omega_k$, la concatenación en Ω^- se define como el elemento $\alpha\omega \in \Omega^-$ dado por $\dots \alpha_{-1}\alpha_0\omega$ (la coordenada 0 de $\alpha\omega$ es ω_k).

Dado $\beta \in (0, 1)$, la β -métrica en Ω^- se define como $d_\beta(\alpha, \tau) = \beta^n$, donde n es el mayor entero no negativo tal que $\alpha_{-j} = \tau_{-j}$ para todo $0 \leq j < n$. La topología inducida por esta métrica coincide con la topología producto en Ω^- .

Observación 4.26. Para $\beta, \tilde{\beta} \in (0, 1)$, se tiene la siguiente relación entre métricas

$$d_{\tilde{\beta}} = (d_\beta)^{\log \tilde{\beta} / \log \beta},$$

por lo que si una función es η -Hölder continua con respecto a la métrica d_β , entonces resulta $\eta \cdot (\log \tilde{\beta} / \log \beta)$ -Hölder continua con respecto a $d_{\tilde{\beta}}$.

Sea $R : \Omega^- \rightarrow \text{int}(\Delta)$ una función continua. Denotemos sus componentes como $R = (R^l, R^g, R^r)$. Por definición, la suma de estas tres componentes es 1 y cada una es estrictamente positiva.

Por medio de la función R podemos asociar a cada $\alpha \in \Omega^-$ un conjunto de Cantor C^α , el *conjunto de Cantor razón (ratio Cantor set)*, como sigue: la razón del intervalo correspondiente a $\omega \in \Omega_n$ de la etapa n y sus subintervalos de la etapa $n + 1$ está dada por los valores de $R(\alpha\omega)$. Definimos primero $I_0^\alpha = [0, R^l(\alpha)]$ y $I_1^\alpha = [1 - R^r(\alpha), 1]$. El intervalo izquierdo I_0^α tiene subintervalos I_{00}^α y I_{01}^α , cuyas longitudes están definidas por los cocientes

$$\frac{|I_{00}^\alpha|}{|I_0^\alpha|} = R^l(\dots \alpha_{-1}\alpha_0 0), \quad \frac{|I_{01}^\alpha|}{|I_0^\alpha|} = R^r(\dots \alpha_{-1}\alpha_0 1)$$

y el extremo izquierdo de I_{00}^α y el derecho de I_{01}^α coinciden con el izquierdo y el derecho de I_0^α , respectivamente. Inductivamente, para $\omega \in \Omega_n$, $n \geq 1$, $I_{\omega_1 \dots \omega_n}^\alpha$ es un subintervalo de $I_{\omega_1 \dots \omega_n}^\alpha$ cuya longitud cumple

$$(4.32) \quad \frac{|I_{\omega_1 \dots \omega_n 0}^\alpha|}{|I_{\omega_1 \dots \omega_n}^\alpha|} = R^l(\alpha\omega)$$

y su extremo izquierdo coincide con el de $I_{\omega_1 \dots \omega_n}^\alpha$. Definimos $I_{\omega_1 \dots \omega_n}^\alpha$ de forma análoga.

Por ser continua, R toma valores en un compacto del interior de Δ , por lo que sus coordenadas están uniformemente acotadas por encima de 0 y por debajo de 1. Esto nos permite garantizar que la familia de intervalos $\{I_\omega^\alpha\}_{\omega \in \Omega_k}$ es disjunta.

Finalmente, el conjunto inducido por R y α se define como

$$(4.33) \quad C^\alpha = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{\omega \in \Omega_n} I_\omega^\alpha.$$

Por lo observado en el último párrafo, C^α es un conjunto de Cantor. Tenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 4.27. *Sea $R : \Omega^- \rightarrow \text{int}(\Delta)$ una función continua. Entonces R asocia a cada $\alpha \in \Omega^-$ el conjunto de Cantor C^α definido en (4.33).*

Nuestro siguiente objetivo es presentar la función escala introducida por Sullivan.

La función escala. Cuando consideramos la imagen difeomorfa de un conjunto hiperbólico, la estructura local de éste no puede cambiar de forma significativa, i.e., asintóticamente, los cocientes entre los intervalos que decrecen a un punto del conjunto y los correspondientes de las imágenes por el difeomorfismo deben coincidir.

Definición 4.28. La razón geométrica de C es la función $R_{n,\omega} : \mathbb{N} \times \Omega \rightarrow \Delta$ definida por

$$R_{n,\omega} = (|I_{\omega^{n_0}}|, |I_{\omega^n}|, |I_{\omega^{n_1}}|) / |I_{\omega^n}|.$$

Conociendo la razón geométrica podemos reconstruir C definiendo sus etapas inductivamente. Por otra parte, para reconstruir C salvo una conjugación \mathcal{C}^1 , i.e., el conjunto reconstruido es \mathcal{C}^1 -conjugado a C , sólo basta con conocer el comportamiento asintótico de la razón geométrica cuando $n \rightarrow \infty$. En efecto, si ϕ es un difeomorfismo \mathcal{C}^1 de I entonces

$$(4.34) \quad \frac{|\phi(I_{\omega^{n_0}})|}{|\phi(I_{\omega^n})|} = \frac{|\phi'(\xi)| |I_{\omega^{n_0}}|}{|\phi'(\tilde{\xi})| |I_{\omega^n}|},$$

donde $\phi'(\xi)/\phi'(\tilde{\xi}) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$ por la continuidad de ϕ' . O sea, el comportamiento asintótico de la razón geométrica es un \mathcal{C}^1 -invariante.

Pero dada $\omega \in \Omega^+$, no necesariamente puede definirse una razón geométrica asintótica en n ; esto es, no puede garantizarse la existencia de $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,\omega}$. Para ver esto, tomamos el siguiente argumento de Bedford en [Bed91].

Supongamos que C es atractor del sistema cookie-cutter $\{f_0, f_1\}$. Fijemos $\omega \in \Omega^+$. En el nivel n , los intervalos $I_{\omega^n}, I_{\omega^{n_0}}, I_{\omega^{n_1}}$ son las imágenes por la composición $f_{\omega_1} \circ \dots \circ f_{\omega_n}$ de los intervalos iniciales I, I_0, I_1 respectivamente. La función f_{ω_n} es la que aporta mayor distorsión no lineal a la razón geométrica, pues es la que primero se aplica. Por otro lado, f_{ω_1} produce poco efecto ya que se aplica al intervalo $I_{\omega_2 \dots \omega_n}$, que tiene diámetro chico. Entonces, a medida que n crece, f_{ω_n} cambia y no podemos dar un control de la distorsión.

Para ser más explícitos, notemos que

$$I_{\omega^{n_0}} = f_{\omega^{n_0}}(f_{\omega^{n_1+0}}^{-1}(I_{\omega^{n_1+0}})),$$

por lo que

$$\frac{|I_{\omega^{n_0}}|}{|I_{\omega^n}|} = \frac{|(f_{\omega^n} \circ f_{\omega^{n_1+0}}^{-1})'(\xi)| |I_{\omega^{n_1+0}}|}{|(f_{\omega^n} \circ f_{\omega^{n_1+0}}^{-1})'(\tilde{\xi})| |I_{\omega^{n_1+0}}|}$$

para $\xi \in I_{\omega^{n_1+0}}$ y $\tilde{\xi} \in I_{\omega^{n_1}}$. El cociente de las derivadas es el término de distorsión. Si ponemos $x = f_{\omega^{n_1+0}}^{-1}(\xi)$ e $y = f_{\omega^{n_1+0}}^{-1}(\tilde{\xi})$, entonces sólo podemos decir que $x, y \in I$. Luego, usando la regla de la cadena y la propiedad DAF (3.24), la distorsión queda acotada por

$$b^{-1}B_n^{-1} \leq \frac{|f_{\omega^n}'(x)| |f_{\omega^{n_1+0}}'(\xi)|}{|f_{\omega^n}'(y)| |f_{\omega^{n_1+0}}'(\tilde{\xi})|} \leq bB_n$$

que no puede asegurarse que converja a 1 cuando n crece.

Si componemos las funciones en la dirección opuesta entonces se puede asegurar convergencia asintótica, pero esta sucesión de razones geométricas no corresponde a puntos de Ω^+ sino a elementos del espacio simbólico Ω^- , que Sullivan denominó *conjunto de Cantor dual*. Entonces, para cada $\alpha \in \Omega^-$ definimos

$$R_n(\alpha) = (|I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0 0}|, |I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0}|, |I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0 1}|) / |I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0}|,$$

o sea $R_n : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Teorema 4.29. *Dado un conjunto cookie-cutter, la sucesión $\{R_n(\alpha)\}$ converge para cada $\alpha \in \Omega^-$. Su límite R es una función continua (con cualquier β -métrica).*

DEMOSTRACIÓN: Denotemos las coordenadas de R_n por $R_n = (R_n^l, R_n^g, R_n^r)$. Veremos que para cada $\alpha \in \Omega^-$, $\{R_n^l(\alpha)\}$ es una sucesión de Cauchy. Para la tercera coordenada la prueba es igual, mientras para la restante notamos que

$$R_n^g(\alpha) = 1 - R_n^l(\alpha) - R_n^r(\alpha).$$

Usando el teorema del valor medio tenemos que

$$|I_{\alpha^{n+m}}| = |f_{\alpha_{-(m+n-1)} \dots \alpha_{-n}}(I_{\alpha^n})| = |f'_{\alpha_{-(m+n-1)} \dots \alpha_{-n}}(\xi)| |I_{\alpha^n}|,$$

con $\xi \in I_{\alpha^n}$. Luego, por la propiedad DAF obtenemos

$$B_n^{-1} \frac{|I_{\alpha^n}|}{|I_{\alpha^n}|} \leq \frac{|I_{\alpha^{(m+n)}}|}{|I_{\alpha^{(m+n)}}|} \leq B_n \frac{|I_{\alpha^n}|}{|I_{\alpha^n}|}.$$

Como $|L_{\alpha^n}| = |I_{\alpha^n}| - (|I_{\alpha^n_0}| + |I_{\alpha^n_1}|)$, se sigue que

$$B_n^{-1} R_{n+m}^l(\alpha) \leq R_n^l(\alpha) \leq B_n R_{n+m}^l(\alpha),$$

de donde

$$(4.35) \quad R_{m+n}^l(\alpha)(B_n^{-1} - 1) \leq R_n^l(\alpha) - R_{n+m}^l(\alpha) \leq (B_n - 1)R_{n+m}^l(\alpha).$$

Entonces $\{R_n^l(\alpha)\}$ es de Cauchy, pues recordemos que $B_n \searrow 1$. Denotemos con $R = (R^l, R^g, R^r)$ a su límite.

Para ver la continuidad, sean $\alpha, \tau \in \Omega^-$ tales que $\alpha^n = \tau^n$, i.e., coinciden en las coordenadas $-(n-1), \dots, -1, 0$. Por definición, $R_n(\alpha) = R_n(\tau)$. Luego, haciendo $m \rightarrow \infty$ en (4.35) obtenemos

$$R^l(\alpha)(B_n^{-1} - 1) \leq R_n^l(\tau) - R^l(\alpha) \leq (B_n - 1)R^l(\alpha),$$

de donde

$$(4.36) \quad R^l(\alpha)(B_n^{-1} - 1) \leq R^l(\tau) - R^l(\alpha) \leq (B_n - 1)R^l(\alpha),$$

pues $B_n \searrow 1$. Por lo tanto R es continua. \square

Notamos que por ser continua y con dominio compacto, la imagen de R está estrictamente contenida en el interior de Δ .

Definición 4.30. La función $R : \Omega^- \rightarrow \text{int}(\Delta)$ definida por

$$R(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\alpha)$$

es la *función escala asociada al conjunto hiperbólico* C .

Usando la notación del Capítulo 3, recordemos que para un sistema $\{f_0, f_1\}$ con la propiedad de contractividad, el número $\beta \in (0, 1)$ denota la cota superior de las derivadas, i.e., para $\omega \in \Omega_n$, $|f'_\omega(x)| \leq c\beta^n$.

Proposición 4.31. *Si C es $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -hiperbólico, entonces la función escala es η -Hölder continua con respecto a la β -métrica.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha, \tau \in \Omega^-$ tales que $\alpha^n = \tau^n$ pero $\alpha_{-n} \neq \tau_{-n}$, de modo que $d_\beta(\alpha, \tau) = \beta^n$. De las desigualdades (4.36), se sigue que

$$B_n^{-1} \leq \frac{R^l(\tau)}{R^l(\alpha)} \leq B_n.$$

Notamos que en este caso, como las derivadas de las funciones del sistema son η -Hölder continuas, tenemos por la Observación 3.31 que $B_n = \tilde{c}e^{\beta^{n\eta}}$, con \tilde{c} independiente de n . Tomando logaritmos, tenemos que

$$|\log R^l(\tau) - \log R^l(\alpha)| \leq c'd_\beta(\alpha, \tau)^\eta.$$

Entonces $\log R$ es Hölder continua con exponente η , por lo que R también lo es. \square

Como mencionamos anteriormente, la importancia de la función escala es que resulta un \mathcal{C}^1 -invariante *completo* para conjuntos cookie-cutter.

Teorema 4.32 (Sullivan). *Dos conjuntos $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -hiperbólicos son $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -conjugados si y sólo si tienen la misma función escala.*

Notamos que el argumento para mostrar que dos conjuntos \mathcal{C}^1 -conjugados tienen la misma función escala es idéntico al que se utilizó en la discusión previa a la ecuación (4.34). Para la completitud del trabajo, al final de esta sección damos la prueba de la implicación opuesta, aunque respecto a la conjugación sólo mostraremos que es \mathcal{C}^1 .

Como consecuencia del Teorema de Sullivan, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.33. *El sistema $(C_p, \{f_{p,0}, f_{p,1}\})$ es $\mathcal{C}^{1+\frac{1}{p}}$ -conjugado al sistema auto-similar $(\Lambda_{2^{-p}}, \{2^{-p}x, 2^{-p}x + (1 - 2^{-p})\})$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 4.32, sólo debemos verificar que las funciones escala de los conjuntos coinciden. Como $\Lambda_{2^{-p}}$ tiene razón de contracción 2^{-p} , es inmediato que su función escala es

$$R(\alpha) = \left(\frac{1}{2^p}, \frac{2^p - 2}{2^p}, \frac{1}{2^p} \right).$$

Veamos que esta es también la función escala de C_p . Recordemos que, para $\alpha \in \Omega^-$,

$$\left(\frac{1}{2^n + \ell(\alpha) + 1} \right)^p \frac{2^p}{2^p - 2} \leq |I_{\ell(\alpha^n)}| \leq \frac{2^p}{2^p - 2} \left(\frac{1}{2^n + \ell(\alpha)} \right)^p.$$

Luego, como $\ell(\alpha^n i) = 2\ell(\alpha^n) + i$ para $i = 0, 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|I_{\alpha^n i}|}{|I_{\alpha^n}|} &\leq \left(\frac{2^n + \ell(\alpha^n) + 1}{2^{n+1} + \ell(\alpha^n i)} \right)^p \\ &\leq \frac{1}{2^p} \left(1 + \frac{1}{2^n + \ell(\alpha^n)} \right)^p \longrightarrow \frac{1}{2^p}. \end{aligned}$$

La misma cota se obtiene por debajo, con lo que $|I_{\alpha^n i}|/|I_{\alpha^n}| \rightarrow 1/2^p$. Además, como $L_{\alpha^n} = L_{2^n + \ell(\alpha^n)}$ tenemos que

$$\frac{|L_{\alpha^n}|}{|I_{\alpha^n}|} \leq \frac{2^p - 2}{2^p} \left(1 + \frac{1}{2^n + \ell(\alpha^n)} \right)^p \longrightarrow \frac{2^p - 2}{2^p},$$

por lo que las funciones escala coinciden. \square

Este resultado dice que desde el punto de vista dinámico, los sistemas

$$(C_p, \{f_{p,0}, f_{p,1}\}) \quad \text{y} \quad (\Lambda_{2^{-p}}, \{2^{-p}x, 2^{-p}x + (1 - 2^{-p})\})$$

son dinámicamente equivalentes.

Veamos ahora que no existe relación entre la suavidad de la función escala y la suavidad de las derivadas de las funciones del sistema.

Sea \tilde{C}_s un conjunto central s -dimensional tal que su sucesión verifica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k b_{2^k}^s = A \quad \text{con } 0 < A < +\infty.$$

Por el Teorema 4.17 de la sección anterior, \tilde{C}_s es atractor de un sistema \mathcal{C}^1 ; además vimos ejemplos de esta clase de atractores donde su sistema no es $\mathcal{C}^{1+\eta}$ para ningún $\eta > 0$ (Ejemplo 4.23), y más aún, donde las derivadas no cumplen la condición de Dini (Ejemplo 4.24). Mostramos a continuación que la función escala de \tilde{C}_s es constante, lo que implica que no puede haber relación entre la suavidad de la función escala y la suavidad de las derivadas.

Proposición 4.34. *La función escala R de \tilde{C}_s es constante y está dada por*

$$R(\alpha) = \left(\frac{1}{2^{1/s}}, \frac{2^{1/s} - 2}{2^{1/s}}, \frac{1}{2^{1/s}} \right).$$

En particular es η -Hölder continua para cualquier $\eta > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n \geq 1$, los intervalos de la n -ésima etapa de \tilde{C}_s tienen la misma longitud, lo que implica que $R_n(\alpha) = R(\hat{0})$, para todo $\alpha \in \Omega^-$, donde $\hat{0} \in \Omega^-$ tiene todas coordenadas 0. Luego,

$$\begin{aligned} R^l(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\hat{0}) \\ (4.37) \quad &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|I_0^{n+1}|}{|I_0^n|} = \frac{1}{2^{1/s}}, \end{aligned}$$

donde (4.37) es cierta por la igualdad (4.18) de la sección anterior. Esto concluye la prueba. \square

La siguiente proposición muestra que la continuidad Hölder de la función escala del atractor de un sistema ni siquiera asegura que éste cumpla la propiedad de distorsión acotada (3.11).

Proposición 4.35. *Sea $C_{p,1}$ el conjunto de Cantor asociado a la sucesión $\{(\log n)/n^p\}$. Este conjunto es atractor de un sistema iterado $\{f_0, f_1\}$, con $f_i \in \mathcal{C}^1$. Las derivadas no tienen la propiedad de distorsión acotada (3.11). Sin embargo, el atractor tiene función escala constante, y por lo tanto η -Hölder continua, para cualquier $\eta > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $\dim_H C_{p,1} = 1/p$ y además que

$$\mathcal{H}^{1/p}(C_{p,1}) = +\infty$$

(ver la discusión siguiente al Corolario 2.37 al final del Capítulo 2), por lo que no puede ser atractor de un sistema que tenga la propiedad de distorsión acotada. Dejamos para el final la prueba de que es atractor de un sistema con derivadas continuas, aunque sólo daremos un esquema de ésta, pues sigue los mismos pasos (y las cuentas son muy similares) que la prueba del Teorema 4.1 para el caso de C_p .

Mostramos a continuación que la función escala R para este conjunto existe y está dada por $R(\alpha) = \left(\frac{1}{2^p}, \frac{2^p-2}{2^p}, \frac{1}{2^p}\right)$, para todo $\alpha \in \Omega^-$.

Comenzamos estimando el tamaño del intervalo I_l^k , $0 \leq l < 2^k$, $k \geq 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |I_l^k| &= \sum_{n \geq k} \sum_{j=l2^{n-k}}^{(l+1)2^{n-k}-1} \frac{\log(2^n + j)}{(2^n + j)^p} \\ &< \sum_{n \geq k} 2^{n-k} \frac{\log(2^n + (l+1)2^{n-k})}{(2^n + l2^{n-k})^p} \\ &= \frac{1}{(2^k + l)^p} \sum_{j \geq 0} \frac{\log(2^j(2^k + l + 1))}{2^{(p-1)j}}, \end{aligned}$$

y por otro lado que

$$\begin{aligned} |I_l^k| &> \sum_{n \geq k} 2^{n-k} \frac{\log(2^n + l2^{n-k})}{(2^n + (l+1)2^{n-k})^p} \\ &= \frac{1}{(2^k + l + 1)^p} \sum_{j \geq 0} \frac{\log(2^j(2^k + l))}{2^{(p-1)j}}. \end{aligned}$$

Si ponemos $c_p = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^{(p-1)j}}$ y $\tilde{c}_p = \sum_{j \geq 0} \frac{\log 2^j}{2^{(p-1)j}}$, entonces tenemos la estimación

$$(4.38) \quad \frac{1}{(2^k + l + 1)^p} (\tilde{c}_p + c_p \log(2^k + l)) \leq |I_l^k| \leq (\tilde{c}_p + c_p \log(2^k + l + 1)) \frac{1}{(2^k + l)^p}.$$

Luego, para $\alpha \in \Omega^-$, tenemos que

$$\frac{|I_{\alpha^n i}|}{|I_{\alpha^n}|} \leq \left(\frac{2^n + \ell(\alpha^n) + 1}{2^{n+1} + \ell(\alpha^n i)} \right)^p \cdot \frac{\tilde{c}_p + c_p \log(2^{n+1} + \ell(\alpha^n i) + 1)}{\tilde{c}_p + c_p \log(2^n + \ell(\alpha^n))} \rightarrow \frac{1}{2^p},$$

ya que el segundo factor en el producto tiende a 1. La cota por debajo se obtiene de la misma manera.

Por lo tanto, $C_{p,1}$ tiene función escala $R(\alpha) = \left(\frac{1}{2^p}, \frac{2^p-2}{2^p}, \frac{1}{2^p}\right)$.

Veamos ahora que $C_{p,1}$ es atractor de un sistema $\{f_0, f_1\}$ con derivadas continuas que cumple $f_\omega(I) = I_{\ell(\omega)}^k$ para todo $\omega \in \Omega_k$, $k \geq 1$. Dado $\omega \in \Omega_k$, usando la estimación (4.38) obtenemos para $u = 0, 1$ que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{I^{n+1}}{I_{\ell(i(\omega \hat{u})^n)}} \right|}{\left| \frac{I^n}{I_{\ell((\omega \hat{u})^n)}} \right|} = \left(\frac{2^k + \ell(\omega) + u}{2^{k+1} + i2^k + \ell(\omega) + u} \right)^p.$$

Por la Proposición 4.2, este límite da los valores de las derivadas en los extremos de los intervalos. Notamos que son los mismos valores que se obtuvieron en el caso de C_p , por lo que en los extremos de cada laguna estos valores coinciden.

Las derivadas en cada laguna no se pueden extender de forma constante, y en este caso también tenemos que restar área, lo que puede hacerse con triángulos, pues para las alturas de éstos se obtienen las mismas cotas que en el Lema 4.8. \square

Observación 4.36. En el ítem (3) de la introducción del artículo [BF97] (pág. 534) se afirma que si un conjunto de Cantor C tiene una función escala que es Hölder continua y acotada, entonces C es $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -hiperbólico para algún $\eta > 0$.

Por las proposiciones anteriores tenemos contraejemplos que muestran que esta afirmación no es cierta. Con respecto a esto, queremos aclarar que el problema es *cómo* debe interpretarse el concepto de continuidad Hölder de la función escala. Sullivan llamó continuidad Hölder ([Sul88], comentario previo al Teorema 5) a la *determinación exponencialmente rápida* de las coordenadas de R ; es decir, por ejemplo para la primera coordenada, como

$$R^l(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|I_{\alpha^n 0}|}{|I_{\alpha^n}|},$$

entonces, si C_n es tal que

$$R^l(\alpha) = C_n \frac{|I_{\alpha^n 0}|}{|I_{\alpha^n}|},$$

la definición de Sullivan pide que $\log C_n$ decrezca exponencialmente a 0. Bajo esta hipótesis, las derivadas del sistema son Hölder ([Sul88], Teorema 5). Recíprocamente, cuando las derivadas son Hölder, los cocientes de los intervalos convergen exponencialmente (i.e., la función escala es Hölder con la definición de Sullivan), como se ve en la prueba de la Proposición 4.31. Por otro lado, si se considera la definición de continuidad Hölder de la función escala en el sentido clásico (como en Bedford y Fisher), entonces se está perdiendo información de cómo es la convergencia de los cocientes y no se puede asegurar la suavidad Hölder de las derivadas de las funciones del sistema.

Prueba del Teorema 4.32. Antes de comenzar con la prueba, damos un esquema de ésta. Seguimos el argumento dado en [BF97]. Sean $(C, \{f_0, f_1\})$ y $(\tilde{C}, \{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1\})$ dos sistemas con la misma función escala R . Por el Teorema 4.29, $R : \Omega^- \rightarrow \text{int}(\Delta)$ es continua, y por consiguiente, asocia a cada $\alpha \in \Omega^-$ un conjunto de Cantor C^α , como vimos en la Proposición 4.27. Esta familia de conjuntos recibe el nombre de *conjuntos límite*. Cada conjunto límite C^α es \mathcal{C}^1 -conjugado a C y a \tilde{C} (Teorema 4.39) por conjugaciones Φ^α y $\tilde{\Phi}^\alpha$ respectivamente, que se construyen a continuación (ver Teorema 4.37). Estos dos sistemas en C^α son conjugados (Lema 4.40), de donde se sigue finalmente que C y \tilde{C} son \mathcal{C}^1 conjugados.

Comenzamos con la prueba del Teorema 4.32. Para cada $\alpha \in \Omega^-$, damos ahora la construcción de un difeomorfismo Φ^α que conjugue C con su conjunto límite C^α .

Sea $(C, \{\varphi_0, \varphi_1\})$ un sistema hiperbólico (que preserve el orden). Dada una palabra $\omega \in \Omega_n$, sea A_ω la transformación afín del intervalo I_ω a I , i.e.,

$$A_\omega(x) = \frac{x - \varphi_\omega(0)}{|I_\omega|}.$$

Para $\alpha \in \Omega^-$, sea $A_n^\alpha = A_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0}$ de modo que

$$A_n^\alpha : I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0} \rightarrow I$$

es una expansión afín. Además, si $k > n$, denotemos con $\varphi_{k,n}^\alpha : I \rightarrow I_{\alpha_{-(k-1)} \dots \alpha_{-n}}$ al difeomorfismo

$$\varphi_{k,n}^\alpha = \varphi_{\alpha_{-(k-1)} \dots \alpha_{-n}},$$

y pongamos $\varphi_n^\alpha = \varphi_{n,0}^\alpha$. Luego, para $k > n$, definimos el difeomorfismo $\Phi_{k,n}^\alpha : I \rightarrow I$ como

$$\Phi_{k,n}^\alpha = A_k^\alpha \circ \varphi_{k,n}^\alpha \circ (A_n^\alpha)^{-1}.$$

Las siguientes son consecuencias inmediatas de la definición:

1) para $m > k > n$, $\Phi_{m,n}^\alpha = \Phi_{m,k}^\alpha \circ \Phi_{k,n}^\alpha$;

$$2) \Phi_{n,0} = A_n^\alpha \circ \varphi_n^\alpha.$$

La norma \mathcal{C}^1 de una función $f \in \mathcal{C}^1(I)$ se define como $\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Resulta que la sucesión $\{\Phi_n^\alpha\}$ es convergente con esta norma.

Teorema 4.37. *Sea $(C, \{\varphi_0, \varphi_1\})$ un sistema hiperbólico (que preserva el orden). Para cada $\alpha \in \Omega^-$, el límite*

$$\Phi^\alpha \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^\alpha$$

existe y es un difeomorfismo de I en I que preserva el orden. La convergencia es de orden $O(\log B_n)$ en la norma \mathcal{C}^1 .

DEMOSTRACIÓN: Usando la propiedad DAF, mostramos que para n grande y $k > n$ arbitrario, $\Phi_{k,n}^\alpha$ está cerca de la identidad (en norma \mathcal{C}^1). La convergencia se seguirá pues

$$(4.39) \quad \Phi_k^\alpha = \Phi_{k,n}^\alpha \circ \Phi_n^\alpha.$$

Dado $x \in I$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\Phi_{k,n}^\alpha)'(x) &= (A_k^\alpha \circ \varphi_{k,n}^\alpha \circ (A_n^\alpha)^{-1})'(x) \\ &= \frac{|I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0}|}{|I_{\alpha_{-(k-1)} \dots \alpha_0}|} \varphi'_{\alpha_{-(k-1)} \dots \alpha_n}(y), \end{aligned}$$

donde $y = (A_n^\alpha)^{-1}(x) \in I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0}$. Ya que

$$\begin{aligned} |I_{\alpha_{-(k-1)} \dots \alpha_0}| &= |\varphi_{\alpha_{-(k-1)} \dots \alpha_n}(I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0})| \\ &= |\varphi'_{\alpha_{-(k-1)} \dots \alpha_n}(\xi)| |I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0}|, \quad \xi \in I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0}, \end{aligned}$$

se tiene por la propiedad DAF que

$$(4.40) \quad B_n^{-1} \leq (\Phi_{k,n}^\alpha)'(x) \leq B_n$$

para todo $k > n$, $\alpha \in \Omega^-$ y $x \in I$. Fijado n , esto implica que la sucesión $\{(\Phi_{k,n}^\alpha)'\}_k$ es de Cauchy uniforme. En efecto, si $m > k > n$,

$$\begin{aligned} |(\Phi_{m,n}^\alpha(x))' - (\Phi_{k,n}^\alpha(x))'| &= |(\Phi_{m,k}^\alpha \circ \Phi_{k,n}^\alpha(x))' - (\Phi_{k,n}^\alpha(x))'| \\ &= |(\Phi_{k,n}^\alpha(x))'(\Phi_{m,k}^\alpha(\Phi_{k,n}^\alpha(x))' - 1)|, \end{aligned}$$

por lo que

$$(4.41) \quad B_n^{-1}(B_k^{-1} - 1) \leq (\Phi_{m,n}^\alpha(x))' - (\Phi_{k,n}^\alpha(x))' \leq B_n(B_k - 1),$$

que tiende a 0 cuando $k \rightarrow \infty$. Notamos que esto vale para todo $n \geq 0$.

En consecuencia, existe el límite $g_{\infty,n}^\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} (\Phi_{k,n}^\alpha)'$ y es una función continua. Además, $\Phi_{k,n}^\alpha(0) = 0$ para todo k . Luego, por el teorema fundamental del cálculo, el límite

$$\Phi_{\infty,n}^\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{k,n}^\alpha$$

existe y $(\Phi_{\infty,n}^\alpha)' = \lim_{k \rightarrow \infty} (\Phi_{k,n}^\alpha)'$. Tomando $n = 0$, tenemos que $\Phi^\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k^\alpha$ existe, es una función continuamente diferenciable y la derivada está acotada por debajo y por arriba por $B_0^{\mp 1}$, por lo que Φ^α es un difeomorfismo de I en I que preserva el orden.

Para ver el orden de convergencia en la norma \mathcal{C}^1 , observamos que si $f : I \rightarrow I$ es \mathcal{C}^1 y $f(0) = 0$ entonces, como consecuencia del teorema del valor medio, $\|f\|_{\mathcal{C}^1} \leq 2\|f'\|_\infty$. Notamos también que tomando límite en (4.39) tenemos para cada n que

$$\Phi^\alpha = \Phi_{\infty,n}^\alpha \circ \Phi_n^\alpha.$$

Entonces, por (4.40),

$$\begin{aligned} \|\Phi^\alpha - \Phi_n^\alpha\|_{\mathcal{C}^1} &\leq 2\|(\Phi_{\infty,n}^\alpha \circ \Phi_n^\alpha)' - (\Phi_n^\alpha)'\|_\infty \\ &\leq 2B_0\|(\Phi_{\infty,n}^\alpha)' - 1\|_\infty. \end{aligned}$$

Ahora bien, $\|(\Phi_{\infty,n}^\alpha)' - 1\|_\infty \leq \max(B_n - 1, 1 - B_n^{-1}) = B_n - 1$ y
 $t - 1 \leq B_0 \log t$ para $1 \leq t \leq B_0$.

Se sigue entonces que

$$\|\Phi^\alpha - \Phi_n^\alpha\|_{\mathcal{C}^1} \leq 2B_0^2 \log B_n,$$

que es lo que queríamos probar. \square

Observación 4.38. Cuando el sistema es $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -hiperbólico, puede probarse que la sucesión $\{\Phi_n^\alpha\}_n$ es precompacta en $\mathcal{C}^{1+\eta}(I)$, por lo que en este caso $\Phi^\alpha \in \mathcal{C}^{1+\eta}(I)$ (ver [BF97], Teorema 6.1).

Por el teorema anterior, dado $\alpha \in \Omega^-$, el sistema $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ induce el sistema \mathcal{C}^1 -conjugado

$$\{\Phi^\alpha \circ \varphi_0 \circ (\Phi^\alpha)^{-1}, \Phi^\alpha \circ \varphi_1 \circ (\Phi^\alpha)^{-1}\},$$

que por la Proposición 3.27, su atractor es $\Phi^\alpha(C)$.

Teorema 4.39. Usando la misma notación que en el Teorema 4.37, para cada $\alpha \in \Omega^-$, $\Phi^\alpha(C)$ es el conjunto límite inducido por la función escala de C , i.e., $\Phi^\alpha(C) = C^\alpha$. Por lo tanto, C es \mathcal{C}^1 -conjugado a C^α para todo $\alpha \in \Omega^-$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $C(\alpha) := \Phi^\alpha(C)$ y para cada n , sea $C_n(\alpha) := \Phi_n^\alpha(C)$. Probaremos que $I_\omega^\alpha = I_\omega^{(\alpha)}$, para todo $\omega \in \Omega_k$, donde estos son los intervalos de la k -ésima de C^α y $C(\alpha)$ respectivamente.

Por estar inducido por el difeomorfismo Φ^α , los intervalos de $C(\alpha)$ cumplen $I_\omega^{(\alpha)} = \Phi^\alpha(I_\omega)$, para todo $\omega \in \Omega_k$. Análogamente, los intervalos de $C_n(\alpha)$ son $I_\omega^{(\alpha),n} = \Phi_n^\alpha(I_\omega)$. Luego, como consecuencia de la convergencia uniforme, tenemos que $|I_\omega^{(\alpha)}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |I_\omega^{(\alpha),n}|$. Además, de la igualdad

$$|I_\omega^{(\alpha),n}| = |A_n^\alpha \circ \varphi_n^\alpha(I_\omega)| = |A_n^\alpha(I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0 \omega})| = \frac{|I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0 \omega}|}{|I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0}|},$$

se sigue que

$$\frac{|I_{\omega^i}^{(\alpha),n}|}{|I_\omega^{(\alpha),n}|} = \frac{|I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0 \omega^i}|}{|I_{\alpha_{-(n-1)} \dots \alpha_0 \omega}|}.$$

El lado derecho de esta igualdad converge a una coordenada de $R(\alpha\omega)$ (la primera si $i = 0$ o la tercera si $i = 1$). Entonces, por la definición de I_ω^α (ver 4.32),

$$(4.42) \quad \frac{|I_{\omega^i}^{(\alpha)}|}{|I_\omega^{(\alpha)}|} = \frac{|I_{\omega^i}^\alpha|}{|I_\omega^\alpha|} \quad \text{para todo } \omega \in \Omega_k.$$

Como $I^\alpha = I^{(\alpha)} = I$, tenemos por esta última igualdad que $|I_0^\alpha| = |I_0^{(\alpha)}|$. Luego, por ser 0 el extremo izquierdo de los intervalos I_0^α y $I_0^{(\alpha)}$, obtenemos que $I_0^\alpha = I_0^{(\alpha)}$. Análogamente $I_1^\alpha = I_1^{(\alpha)}$. Finalmente, por la construcción de los conjuntos y usando (4.42), es sencillo verificar inductivamente que todos los intervalos correspondientes coinciden. \square

El siguiente es el Lema 7.3 de [BF97].

Lema 4.40. *Sea $(C, \{f_0, f_1\})$ un sistema $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -hiperbólico y sea $\{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1\}$ otro sistema $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -hiperbólico definido en el mismo intervalo I . Si $f_\omega(I) = \tilde{f}_\omega(I)$ para toda palabra finita ω , entonces los sistemas son $\mathcal{C}^{1+\eta}$ -conjugados.*

DEMOSTRACIÓN: Buscamos un \mathcal{C}^1 -difeomorfismo $\Phi : I \rightarrow I$ que cumpla

$$\tilde{f}_i \circ \Phi = \Phi \circ f_i,$$

que por inducción equivale a

$$(4.43) \quad \tilde{f}_\omega \circ \Phi = \Phi \circ f_\omega,$$

para todo $\omega \in \Omega_n$, $n \geq 1$.

Por hipótesis, $f_i = \tilde{f}_i$ en todos los extremos de los intervalos que forman las etapas de C , y por continuidad, coinciden en todo C . Luego Φ es la identidad en C . Definimos Φ en la laguna inicial L también como la identidad. En las restantes lagunas, la ecuación de conjugación (4.43) determina a Φ de forma única. Para ver esto, dada $\omega \in \Omega_n$, consideremos la laguna $L_\omega = f_\omega(L)$. Si $x \in L_\omega$, como $f_\omega : L \rightarrow L_\omega$ es una biyección, entonces $f_\omega^{-1}(x) \in L$. Luego, por (4.43) y por ser Φ la identidad en L , tenemos que

$$\tilde{f}_\omega \circ \Phi \circ f_\omega^{-1}(x) = \tilde{f}_\omega \circ f_\omega^{-1}(x),$$

por lo que definimos

$$\Phi(x) := \tilde{f}_\omega \circ f_\omega^{-1}(x)$$

para $x \in L_\omega$. Observamos que ϕ manda a la L_ω en sí misma.

Para verificar que Φ es una conjugación, si $x \in L_\omega$, con $\omega \in \Omega_n$ (si $x \in C \cup L$ es trivial) entonces $f_i(x) \in L_{i\omega}$, por lo que

$$\Phi \circ f_i(x) = \tilde{f}_{i\omega} \circ f_{i\omega}^{-1}(f_i(x)) = \tilde{f}_i \circ (\tilde{f}_\omega \circ f_\omega^{-1})(x) = \tilde{f}_i \circ \Phi(x).$$

Una forma de probar que Φ es un \mathcal{C}^1 -difeomorfismo, es definiendo una sucesión de funciones $\Phi_n : I \rightarrow I$ como sigue. Φ_0 es la identidad; $\Phi_1 = \Phi_0$ en L y es igual a $\tilde{f}_i \circ f_i^{-1}$ en I_i . Inductivamente, Φ_n coincide con Φ_{n-1} en $I \setminus \bigcup_{\omega \in \Omega_n} I_\omega$; en I_ω se define como $\tilde{f}_\omega \circ f_\omega^{-1}$. Notamos que Φ_n es la identidad en $C \cup L$, pues $\tilde{f}_\omega \circ f_\omega^{-1}$ es la identidad en C .

La sucesión $\{\Phi_n\}$ converge uniformemente a Φ . Además, para $\omega \in \Omega_n$, Φ_n restringida a $C \cap I_\omega$ es la identidad en $C \cap I_\omega$. Como C es denso en sí mismo, se sigue que $\Phi'_n = 1$ en aquel conjunto. Por consiguiente, cuando Φ_n se pega con Φ_{n-1} en un extremo p del intervalo I_ω , las dos funciones y sus derivadas coinciden en p . Asimismo, la derivada de Φ_n es η -Hölder continua en cada I_ω , $\omega \in \Omega_n$, con constante independiente de n . Por lo tanto, Φ' existe y es η -Hölder continua, como queríamos demostrar. \square

Con estas resultados estamos en condiciones de concluir la prueba del Teorema de Sullivan.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.32: Sean $(C, \{f_0, f_1\})$ y $(\tilde{C}, \{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1\})$ dos sistemas con la misma función escala R . Fijado $\alpha \in \Omega^-$, el conjunto límite C^α es \mathcal{C}^1 -conjugado a C y a \tilde{C} por los difeomorfismos Φ^α y $\tilde{\Phi}^\alpha$, respectivamente. Estos difeomorfismos son los dados por el Teorema 4.37. Sean

$$g_i := \Phi^\alpha \circ f_i \circ (\Phi^\alpha)^{-1} \quad \text{y} \quad \tilde{g}_i := \tilde{\Phi}^\alpha \circ \tilde{f}_i \circ (\tilde{\Phi}^\alpha)^{-1}$$

las funciones de los sistemas inducidos correspondientes, $i = 0, 1$.

Notamos que $g_i = \tilde{g}_i$ en C^α . Para ver esto, por la continuidad de las funciones, basta con mostrar que coinciden en los extremos de los intervalos de la etapa k , para todo $k \geq 1$. Dado $\omega \in \Omega_k$, denotemos con I_ω^α al intervalo cerrado de la etapa k de C^α correspondiente a ω . Sean I_ω e \tilde{I}_ω los intervalos de C y \tilde{C} , respectivamente. Por la prueba del Teorema 4.39 tenemos que $\Phi^\alpha(I_\omega) = I_\omega^\alpha = \tilde{\Phi}^\alpha(\tilde{I}_\omega)$. Entonces

$$g_i(I_\omega^\alpha) = g_i(\Phi^\alpha(I_\omega)) = \Phi^\alpha(f_i(I_\omega)) = I_{i\omega}^\alpha,$$

y de igual manera obtenemos $\tilde{g}_i(I_\omega^\alpha) = I_{i\omega}^\alpha$. Debido a que todos los difeomorfismos preservan el orden, se sigue que $g_i = \tilde{g}_i$ en los extremos de I_ω , para todo $\omega \in \Omega_k$, $k \geq 1$.

Luego, los sistemas $\{g_0, g_1\}$ y $\{\tilde{g}_0, \tilde{g}_1\}$ cumplen las hipótesis del Lema 4.40, por lo están \mathcal{C}^1 -conjugados por una conjugación Φ . Por lo tanto, la composición

$$h := (\tilde{\Phi}^\alpha)^{-1} \circ \Phi \circ \Phi^\alpha$$

es una conjugación \mathcal{C}^1 entre los sistemas $\{f_0, f_1\}$ y $\{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1\}$. □

Suma de conjuntos de Cantor

Introducción

La última parte de este trabajo está dedicada al estudio de la dimensión de Hausdorff de la suma aritmética de dos conjuntos de Cantor en la familia $\{C_p\}$ y al de la convolución de medidas soportadas en estos conjuntos.

La estructura topológica de la suma de

Motivación. Recordemos que por la Proposición 3.46 del Capítulo 3 la convolución de Bernoulli $\mu_r = \prod_{j=0}^{\infty} * \frac{1}{2} (\delta_0 + \delta_{(1-r)r^j})$ es de tipo puro: o bien singular o bien absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Cuando $0 < r < 1/2$, su soporte es el conjunto de Cantor r -ádico Λ_r , por lo que en este caso trivialmente es singular con respecto a la medida de Lebesgue. Para $r = 1/2$, se verifica fácilmente usando (3.27) que $\mu_{1/2}$ es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. Por otro lado, para $1/2 < r < 1$, aunque el soporte de μ_r sea el intervalo $[0, 1]$, no necesariamente se tiene continuidad absoluta, como se lo muestra el siguiente resultado debido a Erdős ([Erd39]). Daremos antes algunas definiciones.

Un *entero algebraico* es una raíz de un polinomio mónico con coeficientes enteros. El *polinomio minimal* de un entero algebraico θ es el polinomio mónico con coeficientes enteros de menor grado que tiene como raíz a θ .

Definición 5.1. Un entero algebraico $\theta > 1$ es un *número de Pisot* si todas las conjugadas de Galois de θ (i.e. las otras raíces del polinomio minimal) tienen módulo menor que 1.

Teorema 5.2 (Erdős 1939). *Si $r \neq 1/2$ y $1/r$ es un número de Pisot, entonces μ_r es singular. Más aún, la transformada de Fourier $\hat{\mu}_r(\xi)$ no tiende a 0 cuando $\xi \rightarrow \infty$.*

La propiedad fundamental de un número de Pisot θ , es que $\text{dist}(\theta^n, \mathbb{Z})$ tiende a 0 de forma geométrica. De hecho, sean $\theta_2, \dots, \theta_k$ las conjugadas de Galois de θ . Entonces $\theta^n + \sum_{j=2}^k \theta_j^n$ es un entero para todo $n \in \mathbb{N}$, pues es una función simétrica de las raíces del polinomio mínimo de θ . Por hipótesis, $\max_{2 \leq j \leq k} |\theta_j| =: \rho \in (0, 1)$, por lo que

$$(5.1) \quad \text{dist}(\theta^n, \mathbb{Z}) \leq (k-1)\rho^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.2: Sea $\theta = 1/r$. Tomando módulo en la identidad (3.34), si $N \geq 1$, tenemos para $c = 2/(1-r)$ que

$$(5.2) \quad \begin{aligned} |\hat{\mu}_r(\pi c \theta^N)| &= |\cos(\pi \theta^N) \cos(\pi \theta^{N-1}) \cdots \cos(\pi \theta)| \cdot |\cos(\pi) \cos(\pi r) \cos(\pi r^2) \cdots| \\ &= \prod_{n=1}^N |\cos(\pi \theta^n)| \cdot |\hat{\mu}_r(c\pi)|. \end{aligned}$$

Como $\theta \neq 2$ es un número de Pisot, entonces $\theta^n \neq 2$ y además $\theta^n \neq h + \frac{1}{2}$, donde h es un entero (ver pág. 41 del libro de Salem [Sal63]). Luego $|\hat{\mu}_r(\pi c \theta^N)| \neq 0$. Por (5.1) y (5.2) tenemos que

$$|\hat{\mu}_r(\pi c \theta^N)| \geq \prod_{n=1}^{\infty} |\cos(\pi(k-1)\rho^n)| \cdot |\hat{\mu}_r(c\pi)| := \delta > 0,$$

para todo $N \geq 1$. Por lo tanto, $\hat{\mu}_r(\xi) \not\rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \infty$. Por la Proposición 1.19 (Riemann-Lebesgue), μ_r no es absolutamente continua, por lo que resulta singular debido al Teorema 3.46. \square

Claramente los números enteros son de Pisot. Un ejemplo de número de Pisot menor que 2 es el número de oro $\iota = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por el Teorema 5.2, μ_ι es una medida singular cuyo soporte es el intervalo $[0, 1]$. Esta medida ha sido estudiada en profundidad (ver por ejemplo [Lau93], [Hu97], [LN98] y [LN99]).

Observación 5.3. Sea S_\perp el conjunto de parámetros $r \in (1/2, 1)$ tales que μ_r es singular. Un problema que continúa abierto es determinar si S_\perp contiene algún elemento que no sea recíproco de un número de Pisot. Salem [Sal44] probó que $\hat{\mu}_r(\xi) \rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \infty$ si r no es recíproco de un número de Pisot, por lo que la prueba del Teorema 5.2 no puede extenderse para encontrar otros valores de singularidad.

Por otro lado, el primer resultado importante con respecto a la continuidad absoluta de las convoluciones de Bernoulli también fue dado por Erdős ([Erd40]), quien probó que existe $a < 1$ (muy cercano a 1) tal que $S_\perp \cap (a, 1)$ tiene medida de Lebesgue nula, y además, que existe una sucesión $a_k \uparrow 1$ tal que μ_r tiene una densidad $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ para Lebesgue-casi todo $r \in (a_k, 1)$. Más recientemente, en [Sol95], Solomyak probó que μ_r es absolutamente continua para casi todo $r \in (1/2, 1)$ con respecto a la medida de Lebesgue. Más aún, Peres y Schlag ([PS00]) demostraron que la dimensión de Hausdorff de $S_\perp \cap (b, 1)$ es menor que 1 para cualquier $b > 1/2$. No obstante, poco se sabe sobre valores particulares del parámetro r para los cuales μ_r es absolutamente continua. El conjunto explícito más grande que se conoce hasta el momento fue dado por Garsia en [Gar62], y consiste de un subconjunto de recíprocos de enteros algebraicos, por lo que el conjunto es numerable.

Volvamos ahora a nuestra motivación. Consideremos la medida convolución $\mu_r * \mu_r$. Recordemos que el sistema de similitudes correspondiente a μ_r es $\{rx, rx + (1-r)\}$. Como la razón de similitud es la misma para las dos funciones, es sencillo verificar que la medida convolución también resulta auto-similar con pesos $\{1/4, 1/2, 1/4\}$, siendo su sistema

$$\{rx, rx + (1-r), rx + 2(1-r)\}.$$

Por consiguiente, $\mu_r * \mu_r$ es una medida de tipo puro cuyo soporte está contenido en el conjunto $\Lambda_r + \Lambda_r$, por lo que es importante conocer la estructura de éste.

Cuando $\Lambda_r + \Lambda_r$ contiene un intervalo abierto, no es trivial decidir si la convolución es singular o absolutamente continua. Como $\widehat{\mu_r * \mu_r} = \hat{\mu}_r \cdot \hat{\mu}_r$, si r es el recíproco de un número de Pisot, se sigue por el Teorema 5.2 que la convolución es singular. Un caso particular es cuando consideramos $r = \frac{1}{3}$. La medida $\mu_{\frac{1}{3}} * \mu_{\frac{1}{3}}$ es singular aunque su soporte es $\Lambda_{\frac{1}{3}} + \Lambda_{\frac{1}{3}} = [0, 2]$.

La estructura multifractal de la m -ésima convolución de $\mu_{\frac{1}{3}}$, que es una forma de medir la singularidad de una medida, fue estudiada por Fan, Lau y Ngai en [FLN00] y por Hu y Lau en [HL01].

Algunos resultados conocidos sobre la suma $\Lambda_r + \Lambda_s$ son:

- Como consecuencia del Lema de Newhouse, que usa el concepto de espesura (ver Ejemplo 5.10)

$$\frac{r}{1-2r} \cdot \frac{s}{1-2s} \geq 1 \implies \Lambda_r + \Lambda_s = [0, 2].$$

Además, en el Corolario 4.5 de [CHM02] se prueba que el recíproco es cierto cuando $\frac{\log s}{\log r}$ es irracional.

- Notamos que la desigualdad $\dim_H(\Lambda_r + \Lambda_s) \leq \dim_H \Lambda_r + \dim_H \Lambda_s$ siempre es cierta por un resultado general sobre la suma algebraica de conjuntos (ver Proposición 5.4). Más aún, para \mathcal{L} -casi todo $r \in (0, 1/2)$,

$$(5.3) \quad \dim_H \Lambda_r + \dim_H \Lambda_s < 1 \implies \dim_H(\Lambda_r + \Lambda_s) = \dim_H \Lambda_r + \dim_H \Lambda_s,$$

$$(5.4) \quad \dim_H \Lambda_r + \dim_H \Lambda_s > 1 \implies \mathcal{L}(\Lambda_r + \Lambda_s) > 0.$$

Estos resultados son un caso particular de los obtenidos por Peres y Solomyak en [PS98] para familias de conjuntos de Cantor auto-similares homogéneos (que definimos en la Observación 5.22).

- Recientemente, Peres y Schmerkin en [PSchm07] mostraron que si $\frac{\log s}{\log r}$ es irracional, se tiene la fórmula

$$\dim_H(\Lambda_r + \Lambda_s) = \min\{\dim_H \Lambda_r + \dim_H \Lambda_s, 1\}.$$

Además es conocido que $\dim_H(\Lambda_r + \Lambda_s) < \dim_H \Lambda_r + \dim_H \Lambda_s$ cuando $\frac{\log s}{\log r}$ es racional (una prueba de esto puede encontrarse también en [PSchm07]). Notar que estos resultados mejoran (5.3) ya que dicen explícitamente para qué valores del parámetro vale la fórmula.

Por otro lado, la estructura de la suma aritmética de conjuntos de Cantor es relevante en problemas relacionados con aproximaciones diofánticas y, en dinámica suave, está fuertemente conectada con el estudio de tangencias homoclínicas (ver [PT93]). En este contexto Palis conjeturó que la suma de dos conjuntos $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ hiperbólicos o bien tiene medida de Lebesgue nula, o si no contiene un intervalo abierto. Esto no siempre es cierto, como mostró Sannami ([San92]). Pero su ejemplo es rígido, por lo que se continuó conjeturando que *genéricamente* el resultado es válido.

Moreira [M96] introdujo el concepto de intersección estable de conjuntos de Cantor hiperbólicos para obtener resultados sobre bifurcaciones homoclínicas de forma más sencilla a como se obtienen con sumas de conjuntos de Cantor. Informalmente los conjuntos hiperbólicos C_1 y C_2 tienen intersección estable si hay un entorno del par (C_1, C_2) (con la topología $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$) tal que para cualquier par $(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2)$ en ese entorno se tiene que $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \neq \emptyset$ (aquí por hiperbólico entendemos que las derivadas son al menos η -Hölder continuas para algún $\eta > 0$).

El estudio de intersecciones estables está relacionado con la suma aritmética, pues si C_1 y $-C_2$ tienen intersección estable entonces $C_1 + C_2$ contiene un intervalo. Más generalmente, si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que C_1 y $-C_2 + t$ se intersecan establemente entonces $t \in \text{int}(C_1 + C_2)$. Además la intersección estable es más general que el

hecho de que el producto de las espesuras de los conjuntos sea mayor que 1, que también garantiza que la suma contenga un intervalo (ver Proposición 5.9).

Moreira y Yoccoz [MY01] probaron que hay un subconjunto residual (abierto y denso) \mathcal{U} del conjunto

$$\Theta = \left\{ (C_1, C_2) \text{ son conjuntos de Cantor hiperbólicos con } \dim_H C_1 + \dim_H C_2 > 1 \right\}$$

tal que si $(C_1, C_2) \in \mathcal{U}$ entonces existe $t \in C_1 + C_2$ (de hecho un abierto y denso en este conjunto) tal que C_1 y $-C_2 + t$ se intersecan establemente, y por consiguiente $C_1 + C_2$ contiene un intervalo abierto. Esto prueba que la conjetura de Palis es cierta genéricamente (vale en un conjunto residual) en la topología $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$, pues cuando $\dim_H C_1 + \dim_H C_2 < 1$ es fácil ver que $\dim_H(C_1 + C_2) < 1$ (ver Proposición 5.4).

Todavía no se sabe si esta conjetura es cierta en la topología \mathcal{C}^1 o en el caso de conjuntos auto-similares. En particular, no se sabe aún si $\Lambda_r + \Lambda_s$ tiene interior no vacío cuando $1 < \dim_H \Lambda_r + \dim_H \Lambda_s < 1 + \delta$ y δ es suficientemente chico.

Sobre los problemas de este capítulo. Los resultados de este capítulo tuvieron como origen el estudio de la medida convolución $\mathcal{H}^{\frac{1}{p}} \lfloor_{C_p} * \mathcal{H}^{\frac{1}{q}} \lfloor_{C_q}$. Como el soporte de la convolución está contenido en la suma de los soportes, este problema está ligado al del estudio de la morfología del conjunto $C_p + C_q$.

Por los resultados del Capítulo 4, el conjunto C_p tiene asociado el sistema $\{f_{p,0}, f_{p,1}\}$. Luego, para los pesos $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ tenemos la medida invariante v_p soportada en C_p que satisface

$$(5.5) \quad v_p(A) = \frac{1}{2}v_p(f_{0,p}^{-1}(A)) + \frac{1}{2}v_p(f_{1,p}^{-1}(A)) \quad \text{para todo } A \text{ boreliano.}$$

Por ser los sistemas correspondientes conjugados, se sigue de la Proposición 3.50 que $v_p = \mu_{2^{-p}} \circ h_p^{-1}$, donde h_p es la conjugación entre los sistema. De aquí se deduce que $\mathcal{H}^{\frac{1}{p}} \lfloor_{C_p}$ es equivalente a v_p (ver la demostración del Corolario 5.21), y por consiguiente, nos interesa estudiar la convolución de estas medidas.

Uno de los principales inconvenientes es que no se puede garantizar de antemano que $v_p * v_p$ sea de tipo puro, pues no sabemos siquiera si esta medida satisface una identidad como en (5.5).

Estudiamos entonces cuándo la medida Lebesgue de $C_p + C_q$, que contiene al soporte de $v_p * v_q$, es positiva (ver Teorema 5.15), ya que cuando esta medida es nula, la medida $v_p * v_q$ trivialmente es singular.

En la Sección 5.1, utilizamos los conceptos de espesura y espesura local para dar condiciones suficientes para que $C_p + C_q$ contenga un intervalo abierto.

Luego, adaptando resultados de [PS98] (los Teoremas 1.1 y 2.1 de ese artículo), mostramos (ver Corolario 5.21) que, fijado $q > 1$, la medida $v_p * v_q$ es absolutamente continua con densidad en $L^2(\mathbb{R})$ para casi todo $p \in (1, q/(q-1))$. Además pueden adaptarse los resultados de este artículo para obtener (ver Corolario 5.18) los resultados correspondientes a la dimensión de $C_p + C_q$. Esto se contrapone con el hecho de que nos resultó imposible establecer un resultado análogo si fijamos ambos valores, p y q .

En síntesis, los resultados obtenidos en este capítulo sobre la suma $C_p + C_q$ son los siguientes:

- Sección 5.1. Usando espesuras obtenemos que

$$\frac{1}{2^p(2^p-2)} \frac{1}{2^q(2^q-2)} \geq 1 \implies C_p + C_q = \left[0, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^q}\right].$$

Esta cota puede mejorarse considerando espesuras locales, pero no puede concluirse que la suma sea un intervalo:

$$\frac{1}{(2^p-2)} \frac{1}{(2^q-2)} > 1 \implies C_p + C_q \text{ contiene un intervalo abierto.}$$

- Secciones 5.2 y 5.3. Por la adaptación de los resultados de [PS98], para \mathcal{L} -casi todo $p > 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \dim_H C_p + \dim_H C_q < 1 &\implies \dim_H(C_p + C_q) = \dim_H C_p + \dim_H C_q, \\ \dim_H C_p + \dim_H C_q > 1 &\implies \mathcal{L}(C_p + C_q) > 0. \end{aligned}$$

En particular, para \mathcal{L} -casi todo $p > 1$ tenemos la fórmula

$$\dim_H(C_p + C_q) = \min\{\dim_H C_p + \dim_H C_q, 1\}.$$

Al final del capítulo hacemos algunos comentarios sobre estos resultados y planteamos problemas abiertos.

5.1. Espesuras

La suma de dos conjuntos de Cantor es siempre un conjunto compacto y perfecto. Cuando este conjunto tiene interior vacío resulta nuevamente un conjunto de Cantor. Una condición suficiente para que esto ocurra está dada en la siguiente proposición, que es un resultado general sobre la dimensión de Hausdorff de la suma de conjuntos.

Proposición 5.4. *Sean $E, F \subset \mathbb{R}$ tales que $\dim_H F = \overline{\dim}_B F$. Entonces*

$$\dim_H(E + F) \leq \dim_H E + \dim_H F.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función Lipschitz definida por $f(x, y) = x + y$. Por la Proposición 2.6 tenemos que

$$\dim_H(E + F) = \dim_H(f(E \times F)) \leq \dim_H(E \times F).$$

Por la hipótesis sobre la dimensión de F , vale la fórmula del producto (ver pag. 94 de [Fal90])

$$\dim_H(E \times F) \leq \dim_H E + \dim_H F,$$

de donde se sigue el resultado. \square

En consecuencia, como $\dim_H C_q = \overline{\dim}_B C_q$, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.5. *Si $1/p + 1/q < 1$ entonces $\mathcal{L}(C_p + C_q) = 0$; por consiguiente $C_p + C_q$ es un conjunto de Cantor.*

En la siguiente sección enunciamos un resultado que provee información más precisa que la dada en este corolario (ver Corolario 5.18 (a)).

Por otra parte, para determinar si la suma tiene interior no vacío, Newhouse introdujo el concepto de *espesura* de un conjunto de Cantor. A continuación, siguiendo el Capítulo 4 del libro de Palis y Takens [PT93], definimos este concepto (y el de espesura local) y damos un lema clásico de Newhouse. Como consecuencia de éste, obtenemos en la Proposición 5.11 y el Teorema 5.15 condiciones suficientes para que la suma $C_p + C_q$ contenga (sea) un intervalo con interior no vacío.

Definición 5.6. Sea C un conjunto de Cantor en la recta. Dada una laguna L de C , un *punte* B de L es un intervalo maximal que tiene un extremo común con L y no interseca ninguna laguna cuya longitud sea al menos la de L . Decimos que (B, L) es un *par punte/laguna* de C . La *espesura* de C se define como

$$\tau(C) = \inf \left\{ \frac{|B|}{|L|} : (B, L) \text{ es un par punte/laguna} \right\}.$$

Observación 5.7. Es inmediato de la definición que

$$\tau(C + t) = \tau(C) \quad \text{y} \quad \tau(sC) = \tau(C)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde

$$sC := \{sx : x \in C\}.$$

En particular, $\tau(-C + t) = \tau(C)$.

El siguiente es un resultado clásico.

Lema 5.8 (Newhouse). Sean C_1 y C_2 conjuntos de Cantor en la recta con espesuras τ_1 y τ_2 . Si $\tau_1 \cdot \tau_2 \geq 1$ entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

- C_1 está contenido en una laguna de C_2 ;
- C_2 está contenido en una laguna de C_1 ;
- $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN: Asumamos que ninguno de los conjuntos está contenido en una laguna del otro y además que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Mostraremos que esto conduce a una contradicción.

Si L_1, L_2 son lagunas acotadas de C_1, C_2 , decimos que (L_1, L_2) es un *par ligado* si L_1 contiene exactamente un extremo de L_2 (y viceversa). Veamos primero que hay al menos uno de estos pares. En efecto, que no se cumplan las dos primeras condiciones significa que los intervalos iniciales de los conjuntos se intersecan, i.e., $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$; esta intersección tiene interior no vacío pues los conjuntos son disjuntos. Sean L_1 una laguna de C_1 contenida en esta intersección y sea L_2 una laguna de C_2 que interseca a L_1 . Si no están ligadas, entonces una está contenida en el interior de la otra. Supongamos que $L_1 \subset L_2$ (el otro caso es similar). Luego, uno de los extremos de L_2 , al que llamamos u , pertenece a $I_1 \cap I_2$, por lo que $u \in I_1 \setminus C_1$, de donde se sigue que u está en una laguna \tilde{L}_1 de C_1 que no interseca al otro extremo de L_2 , y por consiguiente (\tilde{L}_1, L_2) es un par ligado.

Dado un par ligado (L_1, L_2) , mostraremos a continuación que entonces existe

- o un par ligado (\tilde{L}_1, L_2) con $|\tilde{L}_1| < |L_1|$;
- o un par ligado (L_1, \tilde{L}_2) con $|\tilde{L}_2| < |L_2|$.

En efecto, supongamos que la intersección de las lagunas es como en la Figura 5.1. Sea B_j^l el punte de L_j correspondiente a su extremo izquierdo $j = 1, 2$, y sea B_j^r el correspondiente al extremo derecho. Como $\tau_1 \cdot \tau_2 \geq 1$, entonces

$$\frac{|B_1^r|}{|L_1|} \cdot \frac{|B_2^l|}{|L_2|} \geq 1.$$

Luego, $|B_1^r| \geq |L_2|$ o $|B_2^l| \geq |L_1|$, o ambos. Entonces, el extremo derecho de L_2 está en B_1^r o el extremo izquierdo de L_1 está en B_2^l , o ambos. Asumamos lo primero y llamemos u al extremo izquierdo de L_2 . Luego $u \in C_2$, por lo que $u \notin C_1$, de donde u pertenece a una laguna \tilde{L}_1 de C_1 con $|\tilde{L}_1| < |L_1|$, esto último por ser B_1^r un punte de L_1 . Por lo tanto, (\tilde{L}_1, L_2) es el par requerido.

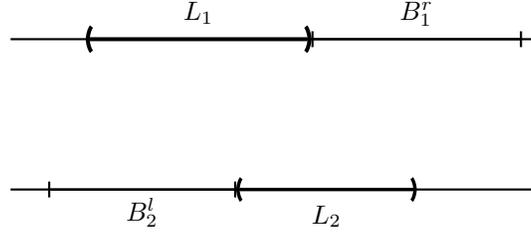


FIGURA 5.1

Para terminar la prueba, notamos que la afirmación del párrafo anterior contradice que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, ya que obtenemos una sucesión de pares ligados (L_1^i, L_2^i) tales que $|L_1^i|$ o $|L_2^i|$ decrece a cero, pues la suma de las longitudes de las lagunas acotadas es finita. Si $|L_1^i|$ tiende a cero, tomando $q_i \in L_1^i$, entonces cualquier punto de acumulación de $\{q_i\}$ pertenece a $C_1 \cap C_2$. \square

Como consecuencia de este lema se obtienen condiciones suficientes para que la suma de dos conjuntos de Cantor contenga un intervalo abierto. Para ver esto, notemos que si $E, F \subset \mathbb{R}$ entonces el conjunto suma $E + F$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$E + F = \{t \in \mathbb{R} : E \cap (-F + t) \neq \emptyset\}.$$

Llamamos *intervalo inicial* de un conjunto de Cantor C al menor intervalo cerrado que lo contiene. Sean I_1 e I_2 los intervalos iniciales de $C_1 \subset I_1$ y $C_2 \subset I_2$. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.9. *Sean C_1, C_2 conjuntos de Cantor con espesuras τ_1 y τ_2 respectivamente. Si $\tau_1 \cdot \tau_2 \geq 1$ entonces $C_1 + C_2$ es una unión finita de intervalos cerrados; en particular contiene un intervalo abierto. Además, si ninguna traslación de cualquiera de los conjuntos está contenida en una laguna acotada del otro, entonces $C_1 + C_2$ es un intervalo.*

DEMOSTRACIÓN: Comencemos con la segunda afirmación. Si $t \in I_1 + I_2$ entonces $I_1 \cap (-I_2 + t) \neq \emptyset$, por lo que C_1 no está contenido en una laguna no acotada de $-C_2 + t$; además, por hipótesis tampoco está contenido en una laguna acotada de éste (y viceversa). Por el Lema de Newhouse $C_1 \cap (-C_2 + t) \neq \emptyset$, de donde se tiene que $I_1 + I_2 \subset C_1 + C_2$. La contención opuesta es trivial.

Para la primera parte, sean $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$ las longitudes de todas las lagunas acotadas de C_1 y análogamente, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots$ las de C_2 . Supongamos sin pérdida de generalidad que $|I_1| \leq |I_2|$. Si $\beta_{N+1} \leq |I_1| < \beta_N$ para algún N , entonces hay traslaciones de C_1 contenidas en lagunas acotadas de C_2 . Descomponemos entonces a C_2 como la unión disjunta

$$C_2 = C_2^1 \cup \dots \cup C_2^{N+1}$$

resultante de remover de I_2 las lagunas de longitudes β_1, \dots, β_N y hacer la intersección con C_2 . Luego ninguna traslación de C_1 está contenida en una laguna acotada de C_2^j , $1 \leq j \leq N + 1$. Además, por mover las lagunas de mayor tamaño, todo puente/laguna de C_2^j es uno de C_2 , de donde se sigue que $\tau(C_2^j) \geq \tau(C_2)$. Para

terminar la prueba resta ver que ninguna traslación de C_2^j está contenida en una laguna acotada de C_1 , $1 \leq j \leq N + 1$. Sea I_2^j el intervalo inicial de C_2^j . De éstos, puede verse fácilmente por inducción que hay uno de longitud mínima que es un puente de C_2 ; llamémoslo I_* y sea β_k , $1 \leq k \leq N$, la longitud de la laguna correspondiente a este puente. Luego, si una traslación de C_2^j está contenida en una laguna acotada de C_1 , entonces $\alpha_1 > |I_2^j| \geq |I_*|$, por lo que

$$1 > \frac{|I_*|}{\alpha_1} = \left(\frac{|I_*|}{\beta_k} \frac{|B_1|}{\alpha_1} \right) \frac{\beta_k}{|B_1|},$$

donde B_1 es el puente de la laguna de longitud α_1 . Esto es imposible por la hipótesis sobre el producto de las espesuras y porque $|B_1| < |I_1| < \beta_k$. \square

Ejemplo 5.10. Para $0 < r < 1/2$, el conjunto de Cantor r -ádico tiene espesura $\tau(\Lambda_r) = r/(1-2r)$ como se ve fácilmente por tener razón de contracción constante. Por la Proposición 5.9, si

$$\tau(\Lambda_r) = \frac{r}{1-2r} \geq 1,$$

esto es, si $r \geq 1/3$, entonces $\Lambda_r + \Lambda_r = [0, 2]$.

Por este ejemplo, es de esperar que tengamos la misma cota para la suma de C_p , o sea, ya que este conjunto es ‘parecido’ a $\Lambda_{2^{-p}}$, deberíamos tener que $C_p + C_p$ es un intervalo cuando

$$(5.6) \quad \frac{2^{-p}}{1-2 \cdot 2^{-p}} = \frac{1}{2^p-2} \geq 1.$$

La siguiente proposición sin embargo muestra que usando espesuras, no podemos deducir esto.

Proposición 5.11. Para el conjunto C_p se tiene la cota

$$(5.7) \quad \frac{1}{2^p} \frac{1}{2^p-2} \leq \tau(C_p) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p \frac{1}{2^p-2}.$$

En consecuencia, $C_p + C_q = [0, \sum_{n \geq 1} 1/n^p + 1/n^q]$ cuando

$$\frac{1}{2^p(2^p-2)} \frac{1}{2^q(2^q-2)} \geq 1.$$

En particular, $C_p + C_p = [0, 2 \sum_{n \geq 1} 1/n^p]$ si

$$(5.8) \quad \frac{1}{2^p} \frac{1}{2^p-2} \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓN: Para la laguna L_{2^k+j} del conjunto C_p , con $0 \leq j < 2^k$, $k \geq 0$, como los intervalos de las etapas de este conjunto son decrecientes, el puente de esta laguna que hace mínimo el cociente (de la definición de espesura) es el que está a la derecha de la laguna, que es el intervalo $I_{2^j+1}^{k+1}$ de la etapa $k+1$. Entonces, por las desigualdades (4.5) de la Sección 4.1 del capítulo anterior,

$$\frac{2^p}{2^p-2} \left(\frac{2^k+j}{2^{k+1}+2j+2} \right)^p \leq \frac{|I_{2^j+1}^{k+1}|}{|L_{2^k+j}|} \leq \frac{2^p}{2^p-2} \left(\frac{2^k+j}{2^{k+1}+2j+1} \right)^p,$$

o equivalentemente,

$$(5.9) \quad \frac{1}{2^p-2} \left(\frac{2^k+j}{2^k+j+1} \right)^p \leq \frac{|I_{2^j+1}^{k+1}|}{|L_{2^k+j}|} \leq \frac{1}{2^p-2} \left(\frac{2^k+j}{2^k+j+1/2} \right)^p.$$

Luego, las cotas para los cocientes puente/laguna *crecen* a $1/(2^p - 2)$ cuando j y k crecen. Por esta razón, si $k = j = 0$, por la primera desigualdad de (5.9) obtenemos una cota por debajo para todos los cocientes de pares puente/laguna y por lo tanto una cota por debajo para la espesura de C_p , que es la primera desigualdad en (5.7); además, cuando $k = j = 0$, obtenemos la menor cota superior, que es la segunda desigualdad de (5.7). \square

Observamos que, por (5.6) y la segunda desigualdad de (5.7), hay un intervalo abierto J en el conjunto de parámetros tal que si $p \in J$, entonces $\Lambda_{2^{-p}} + \Lambda_{2^{-p}}$ es un intervalo pero no sabemos qué ocurre con $C_p + C_p$.

Notamos además que para estimar la espesura, en la prueba de la Proposición 5.11 sólo precisamos intervalos de la primera etapa de la construcción de C_p (cuando tomamos $k = j = 0$), lo que refleja el carácter global de la definición de espesura. Se pueden obtener cotas más precisas para la suma de C_p si consideramos espesuras locales.

Sea $C = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{\omega \in \Omega_k} I_{\ell(\omega)}^k$ un conjunto de Cantor. Dado $x \in C$, sea $\omega \in \Omega^+$ la única palabra tal que $\pi(\omega) = x$. Luego, el conjunto de Cantor

$$C_x^k := C \cap I_{\ell(\omega^k)}^k$$

decrece a $\{x\}$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Definición 5.12. Con la notación dada en el párrafo precedente, definimos la *espesura local de C en x* como

$$\tau_{\text{loc}}(C, x) := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \tau(C_x^k).$$

Para espesuras locales tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.13. Sean C_1, C_2 conjuntos de Cantor. Si existen $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$ tales que $\tau_{\text{loc}}(C_1, x_1) \cdot \tau_{\text{loc}}(C_2, x_2) > 1$, entonces $C_1 + C_2$ contiene un intervalo abierto. Además, si

$$\inf_{x \in C_1, y \in C_2} \left\{ \tau_{\text{loc}}(C_1, x) \cdot \tau_{\text{loc}}(C_2, y) \right\} > 1$$

entonces la suma es una unión finita de intervalos cerrados.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\tau_i = \tau_{\text{loc}}(C_i, x_i)$. Elijamos $\delta > 0$ tal que

$$(\tau_1 - \delta)(\tau_2 - \delta) > 1.$$

Por definición de límite superior, existe $k_i > 0$ tal que

$$\tau_i - \delta < \tau(C_{x_i}^{k_i}).$$

Aplicando la Proposición 5.9 a los conjuntos de Cantor $C_{x_i}^{k_i}$ se tiene la primera afirmación.

Para la segunda, cada $(x, y) \in C_1 \times C_2$ tiene asociado un par $V_{x,y} = (C_{1,x}^{k_x}, C_{2,y}^{k_y})$ tal que

$$\tau_{\text{loc}}(C_{1,x}^{k_x}) \cdot \tau_{\text{loc}}(C_{2,y}^{k_y}) > 1.$$

Estos pares forman un cubrimiento abierto del compacto $C_1 \times C_2$, por lo que existen $(x_i, y_i) \in C_1 \times C_2$, $1 \leq i \leq N$, tales que

$$C_1 + C_2 = \bigcup_{i=1}^N (C_{1,x_i}^{k_{x_i}} + C_{2,y_i}^{k_{y_i}}).$$

El resultado se sigue de la Proposición 5.9. \square

Observación 5.14. En la prueba de la proposición precedente necesitamos pedir que el producto de las espesuras sea *estrictamente* mayor que 1. Además, no podemos asegurar en este caso que la suma de los conjuntos sea un intervalo, ya que estamos aplicando la Proposición 5.9 a subconjuntos de Cantor de los conjuntos C_i .

En general, los conjuntos hiperbólicos tienen espesura local constante, i.e., independiente del punto $x \in C$ (ver [PT93], pág. 83). No haremos uso de este resultado, pues para el conjunto C_p , como vemos a continuación, esto es sencillo de verificar.

Proposición 5.15. *La espesura local de C_p es constante. Su valor es*

$$\tau_{loc}(C_p) = \frac{1}{2^p - 2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Notamos que todo par puente/laguna de $C_{p,x}^k$ es un par de C_p . Entonces, por las desigualdades (5.9), tenemos que

$$\frac{1}{2^p - 2} \left(\frac{2^k}{2^k + 1} \right)^p \leq \tau(C_{p,x}^k) \leq \frac{1}{2^p - 2} \left(\frac{2^k}{2^k + 1/2} \right)^p.$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$ obtenemos el resultado. \square

Como consecuencia de las Proposiciones 5.13 y 5.15 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.16. *Sean $p, q > 1$ tales que*

$$\frac{1}{2^p - 2} \cdot \frac{1}{2^q - 2} > 1.$$

Entonces $C_p + C_q$ es una unión finita de intervalos. En particular, $C_p + C_p$ contiene un intervalo abierto cuando $\frac{1}{2^p - 2} > 1$.

El resultado de este teorema es similar al que vimos en el Ejemplo 5.10 para la suma $\Lambda_r + \Lambda_r$. Sin embargo, en nuestro caso no podemos garantizar que la suma sea un intervalo.

5.2. Enunciado de los resultados globales

A continuación enunciamos los resultados sobre la familia $\{C_p\}$ que son análogos a los obtenidos en [PS98] para familias de conjuntos de Cantor homogéneos, que son un caso especial de conjuntos auto-similares. Comentaremos sobre este tipo de familias en la Observación 5.22 al final de esta sección.

Las demostraciones se dan en la sección siguiente y en general siguen la misma metodología que en [PS98]. Sin embargo, para la demostraciones de los Teoremas 5.17 y 5.20 se requieren algunos lemas que tienen un tratamiento diferente. Recordemos que \mathcal{L} denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Teorema 5.17. *Sea K un compacto de \mathbb{R} . Entonces*

(a) *para \mathcal{L} -casi todo $p > 1$ tal que $\dim_H K + \dim_H C_p < 1$, tenemos que*

$$\dim_H(K + C_p) = \dim_H K + \dim_H C_p ;$$

(b) *para \mathcal{L} -casi todo $p > 1$ tal que $\dim_H K + \dim_H C_p > 1$, el conjunto $K + C_p$ tiene medida de Lebesgue positiva.*

Como $\dim_H C_p = \frac{1}{p}$, si definimos p_* tal que $\dim_H K + \frac{1}{p_*} = 1$, entonces la conclusión de la parte (a) del teorema es válida para casi todo punto del intervalo $(p_*, +\infty)$, mientras que la de la parte (b) es en el intervalo $(1, p_*)$. De este teorema es inmediato el siguiente resultado sobre la suma de conjuntos de Cantor.

Corolario 5.18. *Sea $q > 1$. Entonces*

(a) *para \mathcal{L} -casi todo p tal que $\dim_H C_p + \dim_H C_q < 1$ se tiene que*

$$\dim_H(C_p + C_q) = \dim_H C_p + \dim_H C_q;$$

(b) *para \mathcal{L} -casi todo p tal que $\dim_H C_p + \dim_H C_q > 1$, el conjunto $C_q + C_p$ tiene medida de Lebesgue positiva.*

Para enunciar el siguiente teorema, que implica la parte (b) del Teorema 5.17, necesitamos algunas definiciones.

Definición 5.19. Una *medida de Frostman con exponente* $0 < \alpha < 1$ es una medida de probabilidad $\eta \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ que satisface la condición (de Frostman): existe una constante $C > 0$ tal que

$$(5.10) \quad \eta(B_r(x)) \leq Cr^\alpha, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y } r > 0,$$

donde $B_r(x) = (x - r, x + r)$.

Sea $\Gamma_p : \Omega^+ \rightarrow C_p$ la proyección de Ω^+ en C_p definida por

$$\Gamma_p(\omega) = \bigcap_{n \geq 1} I_\omega^{n,p},$$

con $I_\omega^{n,p} := I_{\ell(\omega^n)}^{n,p}$, donde por conveniencia agregamos el supraíndice p a los intervalos de la construcción de C_p , ya que p no quedará fijo.

Consideremos una medida finita Ψ soportada en Ω^+ tal que para algún $s \in (0, 1]$ la medida producto $\Psi \times \Psi$ satisfaga

$$(5.11) \quad (\Psi \times \Psi)\{(\omega, \tau) : |\omega \wedge \tau| = k\} < C2^{-ks},$$

donde $|\omega \wedge \tau| = \min\{i : \omega_i \neq \tau_i\}$, y además

$$(5.12) \quad (\Psi \times \Psi)\{(\omega, \omega) : \omega \in \Omega^+\} = 0,$$

esto es, que la medida producto se anule en la diagonal. Denotemos con ν_p a la medida imagen de Ψ por Γ_p , i.e.,

$$(5.13) \quad \nu_p = \Psi \circ \Gamma_p^{-1}.$$

Notamos que por el Teorema 1.6 se tiene que $\text{sop}(\nu_p) = C_p$, pues Γ_p es continua.

Teorema 5.20. *Sea η una medida de Frostman y sea ν_p la medida definida en (5.13), donde suponemos que se cumplen las condiciones (5.11) y (5.12). Entonces la medida $\eta * \nu_p$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue con densidad en $L^2(\mathbb{R})$ para \mathcal{L} -casi todo $p > 1$ que verifique*

$$\alpha + \frac{s}{p} > 1.$$

Cuando Ψ es la medida de Bernoulli con pesos $(1/2, 1/2)$ entonces $s = 1$. Además, por la Proposición 3.49, tenemos que la medida ν_p es la medida invariante ν_p del sistema $(C_p, \{f_{p,0}, f_{p,1}\})$ construido en el capítulo anterior. Si elegimos $\eta = \nu_q$, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.21. *Para \mathcal{L} -casi todo p tal que $\dim_H C_p + \dim_H C_q > 1$, la medida $\nu_q * \nu_p$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue con densidad en $L^2(\mathbb{R})$. Lo mismo vale para la medida $\mathcal{H}^{\frac{1}{q}} \lfloor_{C_q} * \mathcal{H}^{\frac{1}{p}} \lfloor_{C_p}$.*

DEMOSTRACIÓN: Mostraremos que $\nu_p \approx \mathcal{H}^{\frac{1}{p}} \lfloor_{C_p}$. Luego, la segunda afirmación es consecuencia de la primera y de la Proposición 1.21, que relaciona la convolución de medidas equivalentes.

Veamos la equivalencia de las medidas. Por el Teorema 4.33, sea $h_p : [0, 1] \rightarrow I^p$ una conjugación $\mathcal{C}^{1+1/p}$ entre los sistemas, de modo que $h_p(\Lambda_{2^{-p}}) = C_p$. Para todo $A \subset \mathbb{R}$, se tiene por las Proposiciones 3.50 y 3.44 que

$$\begin{aligned} \nu_p(A) &= \mu_{2^{-p}}(h_p^{-1}(A)) \\ &= \mathcal{H}^{\frac{1}{p}}(h_p^{-1}(A) \cap \Lambda_{2^{-p}}) = \mathcal{H}^{\frac{1}{p}}(h_p^{-1}(A \cap C_p)). \end{aligned}$$

Además, h_p es una función bi-Lipschitz, pues su derivada es continua y acotada, al igual que la de su inversa. Entonces, por la Proposición 2.6, existe una constante $c > 0$ tal que

$$c^{-1} \mathcal{H}^{\frac{1}{p}}(A \cap C_p) \leq \mathcal{H}^{\frac{1}{p}}(h_p^{-1}(A \cap C_p)) \leq c \mathcal{H}^{\frac{1}{p}}(A \cap C_p).$$

Por lo tanto, $\nu_p \approx \mathcal{H}^{\frac{1}{p}} \lfloor_{C_p}$.

Resta mostrar la primera afirmación del corolario. Observamos que en la prueba del Teorema 5.20, la condición de Frostman (5.10) en la medida η se usa solamente para $x \in \text{sop } \eta$ y para valores de r pequeños. Por consiguiente, basta con mostrar que ν_q satisface (5.10) para todo $x \in C_q$ y todo r chico.

Sean $x \in C_q$ y $0 < r < 2^q \|h_q^{-1}\|_{\infty}^{-1}$. Notamos que $h_q^{-1}(B_r(x)) \subset B_{\tilde{r}}(h_q^{-1}(x))$, con $\tilde{r} := r \|h_q^{-1}\|_{\infty}$. Luego, por la Proposición 3.45, tenemos que

$$\nu_q(B_r(x)) = \mu_{2^{-q}}(h_q^{-1}(B_r(x))) \leq \mu_{2^{-q}}(B_{\tilde{r}}(h_q^{-1}(x))) \leq cr^{\frac{1}{q}},$$

por lo que concluimos la prueba. \square

Observación 5.22. La familia de conjuntos de Cantor $\{C^r\}_{r \in (0,1)}$ que se considera en [PS98] está definida por

$$C^r = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} x_j(r) r^j : x_j(r) \in D(r) \right\}, \quad \text{para } r \in (0, 1),$$

donde $D(r) = \{d_0(r), \dots, d_m(r)\}$ es un conjunto de dígitos que dependen de r , con $d(r) \in \mathcal{C}^1[0, 1]$.

Notamos que en particular, cuando $D(r) = \{0, 1 - r\}$ se obtiene la familia de conjuntos r -ádicos $\{\Lambda_r\}$.

El conjunto C^r es auto-similar ya que es el atractor del sistema de similitudes $\{rx + d_0(r), \dots, rx + d_m(r)\}$; se dice que es *homogéneo* pues todas las similitudes tienen la misma razón de contracción.

Como consecuencia de la homogeneidad, para estos conjuntos la proyección $\Pi_r : \Omega^+ \rightarrow C^r$, donde $\Omega^+ = \{0, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$, está dada por

$$\Pi_r(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} x_{\omega_{j+1}}(r) r^j,$$

lo que puede verse de la misma forma que para Λ_r (ver la Proposición 3.9).

Dados ω y $\tau \in \Omega^+$ fijos, definamos para $0 < r < 1$ la función

$$\phi_{\omega,\tau}(r) := \Pi_r(\omega) - \Pi_r(\tau) = \sum_{j=|\omega \wedge \tau|}^{\infty} (d_{\omega_j}(r) - d_{\tau_j}(r))r^j.$$

Esta función resulta derivable en r , pues los coeficientes en la serie de potencia son $\mathcal{C}^1[0, 1]$ por hipótesis.

Las pruebas de los resultados de [PS98] se basan fundamentalmente en que la derivada de $\phi_{\omega,\tau}$ es distinta de cero para todo $\omega \neq \tau$ tal que $|\omega \wedge \tau|$ es suficientemente grande.

Para nuestra adaptación, necesitamos estimar el crecimiento de la función $\psi_{\omega,\tau}$, que es la análoga a $\phi_{\omega,\tau}$ y la definimos, para $p > 1$, como

$$\psi_{\omega,\tau}(p) := \Gamma_p(\omega) - \Gamma_p(\tau).$$

En este caso, no sabemos si la proyección $\Gamma_p : \Omega^+ \rightarrow C_p$ tiene una representación como serie de potencias, por lo que no podemos asegurar *a priori* que $\psi_{\omega,\tau}(\cdot)$ sea derivable. No obstante, obtenemos esto en el Lema 5.27 usando esencialmente la derivabilidad en p de los términos de la sucesión $\{1/n^p\}_n$, que define a C_p .

5.3. Demostración de los Teoremas 5.17 y 5.20

Preliminares. Damos aquí los conceptos y resultados (clásicos) de teoría geométrica de la medida que usaremos en las pruebas de los Teoremas 5.17 y 5.20.

Definición 5.23. La β -energía de una medida $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ se define como

$$I_\beta(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |y - z|^{-\beta} d\mu(y)d\mu(z).$$

Para la prueba de los teoremas necesitamos la siguiente relación entre la β -energía de una medida y la dimensión de Hausdorff de su soporte (ver Corolario 6.6 de [Fal86]).

Proposición 5.24. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto boreliano. Si $I_s(\mu) < +\infty$ para alguna medida $\mu \in \mathcal{M}(E)$, entonces $s \leq \dim_H E$.

El siguiente resultado es conocido como el Lema de Frostman.

Proposición 5.25. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto boreliano. Entonces $\mathcal{H}^s(E) > 0$ si y sólo si existen una medida $\nu \in \mathcal{M}(E)$ y una constante C tales que $\nu(B(x, r)) \leq Cr^s$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.

Notamos que en particular, si $s < \dim_H B$, entonces por la Proposición 5.25 siempre existe una medida de Frostman con exponente s .

Haremos uso además del siguiente lema, cuya prueba puede encontrarse en [Mat95], pág. 109.

Lema 5.26. Sea η una medida de Frostman con exponente $\alpha > 0$. Si $0 < s < \alpha$ entonces $I_s(\eta) < +\infty$.

Demostraciones. Para poder demostrar los teoremas de la sección anterior, antes debemos demostrar unos lemas previos.

Primero necesitamos estimar el crecimiento de la función

$$\psi_{\omega,\tau}(p) := \Gamma_p(\omega) - \Gamma_p(\tau)$$

para todo $\omega, \tau \in \Omega^+$.

Decimos que $\omega \in \Omega^+$ es *racional* si hay una palabra finita $\gamma \in \Omega_k$ tal que $\omega = \gamma\widehat{0}$ o $\omega = \gamma\widehat{1}$; en este caso decimos que ω es un racional con palabra inicial en Ω_k . Luego, como vimos en las Proposiciones 3.38 y 3.39, la proyección Γ_p preserva el orden, y manda a cada racional con una palabra inicial de longitud k , en un extremo de un intervalo cerrado de la etapa k . Más aún, por preservar el orden, si $|\omega \wedge \tau| = k$, con ω y τ no necesariamente racionales, se tiene que $\Gamma_p(\omega)$ y $\Gamma_p(\tau)$ pertenecen al mismo intervalo de la etapa k .

Lema 5.27. *Supongamos que $|\omega \wedge \tau| = k$ con ω y τ racionales. Entonces $\psi_{\omega,\tau}$ es diferenciable y $|\psi'_{\omega,\tau}(p)| \geq k \log 2 \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^p$.*

DEMOSTRACIÓN: Para fijar ideas supongamos que $\tau \prec \omega$. El caso $\omega \prec \tau$ es similar. Dividimos la prueba en tres casos:

Caso (i): $\Gamma_p(\tau)$ y $\Gamma_p(\omega)$ son los extremos del intervalo cerrado $I_l^{k,p}$ de la etapa k -ésima, con $0 \leq l < 2^k$. Entonces

$$\psi_{\omega,\tau}(p) = |I_l^{k,p}| = \sum_{h \geq 0} \sum_{j=0}^{2^h-1} \left(\frac{1}{2^{k+h} + l2^h + j} \right)^p.$$

Luego

$$\psi'_{\omega,\tau}(p) = \sum_{h \geq 0} \sum_{j=0}^{2^h-1} \left(\frac{1}{2^{k+h} + l2^h + j} \right)^p \log \left(\frac{1}{2^{k+h} + l2^h + j} \right).$$

Como los sumandos son negativos, obtenemos:

$$\begin{aligned} |\psi'_{\omega,\tau}(p)| &= \sum_{h \geq 0} \sum_{j=0}^{2^h-1} \left(\frac{1}{2^{k+h} + l2^h + j} \right)^p \log(2^{k+h} + l2^h + j) \\ &\geq \sum_{h \geq 0} 2^h \left(\frac{1}{2^{k+h} + l2^h + 2^h} \right)^p \log(2^{k+h} + l2^h) \\ &> \left(\frac{1}{2^k + l + 1} \right)^p \log(2^k + l) \sum_{h \geq 0} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^h \\ &= \frac{2^p}{2^p - 2} \left(\frac{1}{2^k + l + 1} \right)^p \log(2^k + l). \end{aligned}$$

Nótese que en este caso, cuando $\tau \prec \omega$, la derivada de $\psi_{\omega,\tau}$ es siempre negativa.

Caso (ii): $\Gamma_p(\tau)$ y $\Gamma_p(\omega)$ son los extremos de la laguna $L_{2^k+l}^p$. Se tiene que

$$\psi_{\omega,\tau}(p) = \left(\frac{1}{2^k + l} \right)^p,$$

por lo que

$$|\psi'_{\omega,\tau}(p)| = \log(2^k + l) \left(\frac{1}{2^k + l} \right)^p.$$

En este caso la derivada también es negativa.

Caso (iii): $|\omega \wedge \tau| = k$. Sabemos que $\Gamma_p(\tau)$ y $\Gamma_p(\omega)$ están contenidos en mismo intervalo $I_l^{k,p}$ de la etapa k , y además, por ser $\tau \prec \omega$, $\Gamma_p(\tau)$ está a la izquierda de la laguna $L_{2^k+l}^p$ mientras que $\Gamma_p(\omega)$ está a su derecha. Por ser racionales, existe $k_0 > 0$ tal que $\Gamma_p(\tau)$ y $\Gamma_p(\omega)$ son extremos de intervalos de la etapa $k + k_0$. Sean

$$\tau = \gamma_0 \prec \dots \prec \gamma_N = \omega$$

todos los racionales con palabras iniciales en Ω_{k+k_0} que “están entre” τ y ω . Mirando las imágenes por Γ_p , estamos considerando de forma ordenada todos los extremos de intervalos de la etapa $k + k_0$ que están entre $\Gamma_p(\tau)$ y $\Gamma_p(\omega)$. Luego

$$\psi_{\omega,\tau}(p) = \sum_{i=1}^N \psi_{\gamma_i,\gamma_{i-1}}(p).$$

Cada uno de los sumandos es la longitud o de un intervalo de la etapa $k + k_0$ o de alguna laguna. Por los casos anteriores tenemos que cada uno de los sumandos es diferenciable y que la derivada es negativa. Más aún, existe $0 < j \leq N$ para el cual $\psi_{j,j-1} = |L_{2^k+l}^p|$. Luego $\psi_{\omega,\tau}$ es diferenciable y

$$\begin{aligned} |\psi'_{\omega,\tau}(p)| &= \sum_{i=1}^N |\psi'_{\gamma_i,\gamma_{i-1}}(p)| \\ &> |\psi'_{\gamma_j,\gamma_{j-1}}(p)| = \log(2^k + l) \left(\frac{1}{2^k + l} \right)^p, \end{aligned}$$

y el lema queda demostrado. \square

Podemos ahora establecer el siguiente lema, que es similar al Lema 2.3 de [PS98].

Lema 5.28. *Sea $I = [p_0, p_1] \subset (1, +\infty)$ un intervalo acotado y supongamos que $k = |\omega \wedge \tau|$. Entonces:*

(a) *Existe una constante C_1 tal que para todo $y, z \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\mathcal{L}\{p \in I : |y - z + \psi_{\omega,\tau}(p)| \leq r\} < C_1 \min\{p_1 - p_0, r2^{p_1(k+1)}\}.$$

(b) *Existe una constante C_2 tal que para $|\omega \wedge \tau| = k$ se tiene que*

$$|\psi_{\omega,\tau}(p)| \leq \frac{C_2}{2} \frac{1}{2^{p_0 k}} \quad \text{para todo } p \in I.$$

(c) *Dado $0 < \beta < 1$, existe una constante $C_3 = C_3(\beta)$ tal que si $|\omega \wedge \tau| = k$ se tiene que*

$$\int_I |y - z + \psi_{\omega,\tau}(p)|^{-\beta} dp \leq \begin{cases} C_3 2^{p_1(k+1)\beta} & \text{para todo } y, z \\ \mathcal{L}(I) 2^\beta |y - z|^{-\beta} & \text{si } |y - z| > C_2 \frac{1}{2^{p_0 k}}. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: (a) Supongamos primero que ω y τ son racionales. Sea

$$A_r := \{p \in I : |y - z + \psi_{\omega,\tau}(p)| \leq r\}.$$

Por el Lema 5.27, la función $\psi(p) = y - z + \psi_{\omega,\tau}(p)$ es derivable y además $|\psi'(p)| \geq k \log 2 \left(\frac{1}{2^{k+1}} \right)^p$, por lo que es monótona en I . Luego

$$\mathcal{L}(A_r) \leq \frac{2r}{\frac{k \log 2}{(2^{k+1})^{p_1}}} < C_1 r 2^{p_1(k+1)}.$$

Consideremos ahora ω y τ arbitrarios. Recordemos que

$$(5.14) \quad |I_l^{n,p}| \leq \frac{2^p}{2^p - 2} \left(\frac{1}{2^n + l} \right)^p.$$

Puesto que $p_0 > 1$, podemos elegir n suficientemente grande de forma tal que, para todo $p \in I$, los intervalos de la n -ésima etapa de C_p sean arbitrariamente chicos. Esto es, dado $\varepsilon > 0$, sea n tal que $|I_l^{n,p}| \leq \varepsilon/2$ para todo $0 \leq l < 2^n$ y $p \in I$. Consideremos los racionales

$$\tau^1 \preceq \tau \preceq \tau^2 \quad \text{y} \quad \omega^1 \preceq \omega \preceq \omega^2$$

tales que $[\Gamma_p(\tau^1), \Gamma_p(\tau^2)]$ es el intervalo de la etapa n que contiene a $\Gamma_p(\tau)$ y análogamente para ω . Entonces tenemos la igualdad

$$\psi_{\omega,\tau}(p) = \psi_{\omega,\omega^1}(p) + \psi_{\omega^1,\tau^2}(p) + \psi_{\tau^2,\tau}(p),$$

de donde

$$\begin{aligned} |y - z + \psi_{\omega,\tau}(p)| &\geq |y - z + \psi_{\omega^1,\tau^2}(p)| - |\psi_{\omega,\omega^1}(p) + \psi_{\tau^2,\tau}(p)| \\ &\geq |y - z + \psi_{\omega^1,\tau^2}(p)| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, $A_r \subset \{p \in I : |y - z + \psi_{\omega^1,\tau^2}(p)| \leq r + \varepsilon\}$; puesto que ω^1 y τ^2 son racionales, por el caso anterior tenemos que $\mathcal{L}(A_r) \leq C_1(r + \varepsilon)2^{p_1(k+1)}$, y la acotación se obtiene haciendo tender ε a 0.

(b) Los puntos $\Gamma_p(\omega)$ y $\Gamma_p(\tau)$ están contenidos en un intervalo $I_l^{k,p}$ de la etapa k ya que $|\omega \wedge \tau| = k$. Luego, por (5.14), tenemos que

$$\psi_{\omega,\tau}(p) \leq \frac{2^p}{2^p - 2} \frac{1}{2^{pk}}.$$

y el resultado se tiene pues $p_0 \leq p$.

(c) Para el caso de la primera desigualdad usamos la función de distribución:

$$\begin{aligned} \int_I |y - z + \psi_{\omega,\tau}(p)|^{-\beta} dp &= \int_0^\infty \mathcal{L}\{p \in I : |y - z + \psi_{\omega,\tau}(p)|^{-\beta} > r\} dr \\ &= \int_0^\infty \mathcal{L}\{p \in I : |y - z + \psi_{\omega,\tau}(p)| < r^{-\frac{1}{\beta}}\} dr \\ &= \int_0^{2^{p_1(k+1)\beta}} + \int_{2^{p_1(k+1)\beta}}^\infty = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \end{aligned}$$

Claramente $\mathcal{I}_1 \leq \mathcal{L}(I)2^{p_1(k+1)\beta}$. Además, por la parte (a) de este lema obtenemos:

$$\mathcal{I}_2 \leq C_1 \int_{2^{p_1(k+1)\beta}}^\infty r^{-\frac{1}{\beta}} 2^{p_1(k+1)} dr = \tilde{C} 2^{p_1(k+1)\beta}.$$

Por otro lado, si $|y - z| > C_2 \frac{1}{2^{p_0 k}}$ entonces por la parte (b) tenemos que

$$|y - z + \psi_{\omega,\tau}(p)| \geq |y - z| - |\psi_{\omega,\tau}(p)| \geq \frac{|y - z|}{2}.$$

lo que concluye la prueba del lema. \square

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.17: (a) Por la Proposición 5.4 tenemos que $\dim_H(K + C_p) \leq \dim_H K + \dim_H C_p$ ya que $\dim_H C_p = \overline{\dim}_B C_p$, por lo que resta verificar la desigualdad opuesta. Para esto, dado $\varepsilon > 0$, veremos que

$$(5.15) \quad \dim_H(K + C_p) \geq \dim_H K + \dim_H C_p - \varepsilon,$$

para casi todo $p \in (p_*, +\infty)$.

Si $\dim_H K = 0$, el resultado es inmediato. Si no, sean $\alpha_* = \dim_H K - \varepsilon$ y $\alpha \in (\alpha_*, \dim_H K)$. Dado $p_1 \in (p_*, +\infty)$ podemos encontrar $p_* < p_0 < p_1$ de forma tal que si $\beta := \alpha_* + \frac{1}{p_0}$ se tiene que

$$(5.16) \quad \beta p_1 - \alpha p_0 < 1.$$

En efecto, la función

$$h(t) := \left(\alpha_* + \frac{1}{p_1 - t} \right) p_1 - \alpha(p_1 - t)$$

es continua y $h(0) < 1$. Luego, existe $t_0 > 0$ tal que $h(t_0) < 1$ y que $p_* < p_1 - t_0$, por lo que podemos definir $p_0 := p_1 - t_0$.

Notamos que se puede cubrir $(p_*, +\infty)$ con una cantidad numerable de intervalos como los construidos arriba. Por ejemplo, si $\{p_1^n\}_n$ son los números racionales contenidos en $(p_*, +\infty)$, entonces tenemos la sucesión correspondiente $\{p_0^n\}_n$ tal que p_0^n y p_1^n cumplen (5.16) para todo n . Luego, la familia de intervalos $\{[p_0^n, p_1^n]\}$, nos sirve para hacer el cubrimiento. Por consiguiente, sólo es necesario probar (5.15) en un intervalo $I = [p_0, p_1]$.

Como $\alpha < \dim_H K$, hay una medida de Frostman η soportada en K y con exponente α . Sea Ψ la medida de Bernoulli con pesos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y sea ν_p como en (5.13), de modo que $\text{sop}(\nu_p) = C_p$. Luego, la convolución $\eta * \nu_p$ está soportada en $K + C_p$. Por consiguiente, para mostrar esta parte del teorema basta con ver que

$$\mathcal{I} = \int_I I_\beta(\eta * \nu_p) dp < +\infty,$$

pues esto implica que $I_\beta(\eta * \nu_p) < +\infty$ para \mathcal{L} -casi todo $p \in I$, y entonces, para estos valores de p , tendremos por la Proposición 5.24 que

$$\dim_H(K + C_p) \geq \beta = \alpha_* + \frac{1}{p_0} \geq \dim_H K + \dim_H C_p - \varepsilon,$$

que es lo que queremos probar.

Por la definición de la convolución, haciendo un cambio de variables y finalmente aplicando el teorema de Fubini obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_I \int_K \int_{C_p} \int_K \int_{C_p} |(y + y') - (z + z')|^{-\beta} d\nu_p(y') d\eta(y) d\nu_p(z') d\eta(z) dp \\ &= \int_I \int_K \int_{\Omega^+} \int_K \int_{\Omega^+} |(y + \Gamma_p(\omega)) - (z + \Gamma_p(\tau))|^{-\beta} d\Psi(\omega) d\eta(y) d\Psi(\tau) d\eta(z) dp \\ &= \iint_{K^2} \iint_{(\Omega^+)^2} \int_I |(y - z) + \psi_{\omega, \tau}(p)|^{-\beta} dp d\Psi(\omega) d\Psi(\tau) d\eta(y) d\eta(z), \end{aligned}$$

donde $(\Omega^+)^2 = \Omega^+ \times \Omega^+$.

Descomponemos $(\Omega^+)^2$ de la siguiente manera: sea

$$\Omega_k^2 = \{(\omega, \tau) : |\omega \wedge \tau| = k\}.$$

Entonces, si $D = \{(\omega, \omega) : \omega \in \Omega^+\}$, tenemos que $(\Omega^+)^2 = \bigcup_{k \geq 0} \Omega_k^2 \cup D$, con todas las uniones disjuntas. Como Ψ es Bernoulli con pesos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tenemos que $\Psi \times \Psi(\Omega_k^2) = \frac{1}{2^{k+1}}$. Además, por ser Ψ una medida de probabilidad, se sigue que $\Psi \times \Psi((\Omega^+)^2) = 1$. Luego $\Psi \times \Psi(D) = 0$.

Usando esta descomposición de $(\Omega^+)^2$ y el Lema 5.28 (c) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_{K^2} \sum_{k \geq 0} \iint_{\Omega_k^2} \int_I |(y-z) + \psi_{\omega, \tau}(p)|^{-\beta} dp d(\Psi \times \Psi)(\omega, \tau) d\eta(y) d\eta(z) \\ &\leq C \iint_{K^2} \left(\sum_{k: |y-z| \leq \frac{C_2}{2^{p_0 k}}} 2^{p_1 k \beta} \frac{1}{2^k} + \sum_{k: |y-z| > \frac{C_2}{2^{p_0 k}}} |y-z|^{-\beta} \frac{1}{2^k} \right) d\eta(y) d\eta(z) \\ &= C(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2). \end{aligned}$$

Para acotar \mathcal{I}_1 usamos la condición de Frostman:

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{k \geq 0} 2^{p_1 k \beta} \frac{1}{2^k} (\Psi \times \Psi) \{(y, z) : |y-z| \leq C_2 2^{-p_0 k}\} \leq C \sum_{k \geq 0} 2^{p_1 k \beta - k - p_0 k \alpha}.$$

Por (5.16) esta serie es finita. Por otro lado, si definimos

$$\kappa(y, z) = \log(C_2^{-1} |y-z|) / \log(2^{-p_0}),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &\leq C \iint_{K^2} |y-z|^{-\beta} \frac{1}{2^{\kappa(y, z)}} d\eta(y) d\eta(z) \\ &= C' \iint_{K^2} |y-z|^{-\beta} |y-z|^{\frac{1}{p_0}} d\eta(y) d\eta(z) \\ &= C' \iint_{K^2} |y-z|^{-\alpha_*} d\eta(y) d\eta(z) < +\infty. \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue del Lema 5.26 pues $\alpha_* < \alpha$ y η es una medida de Frostman.

Para demostrar la parte (b) del teorema, elegimos Ψ la medida de Bernoulli con pesos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, de modo que $s = 1$. Si $\mathcal{H}^{\dim_H K}(K) > 0$, entonces por la Proposición 5.25 existe una medida de Frostman η en K con exponente $\dim_H K$. Luego, por el Teorema 5.20, la medida $\eta * \nu_p$ es absolutamente continua para casi todo $p > 1$ tal que $\dim_H K + \dim_H C_p > 1$. Por consiguiente, para estos valores de p , como $\text{sop}(\eta * \nu_p) \subset K + C_p$, tenemos que $\mathcal{L}(K + C_p) > 0$, de donde se sigue el resultado.

En el caso en que $\mathcal{H}^{\dim_H K}(K) = 0$, podemos elegir un valor α arbitrariamente menor a $\dim_h K$, tomar una medida de Frostman para ese α , aplicar el Teorema 5.20 y finalmente hacer tender α a $\dim_H K$. \square

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.20: Tenemos una medida finita η que satisface la condición de Frostman (5.10). La medida Ψ en Ω^+ cumple (5.11) y además

$$\nu_p = \Psi \circ \Gamma_p^{-1}.$$

Sea $p_1 > 1$ tal que

$$(5.17) \quad \alpha + \frac{s}{p_1} > 1.$$

Elijamos $1 < p_0 < p_1$ tal que $\frac{p_1 - s}{p_0} < \alpha$. Probaremos que $\eta * \nu_p$ tiene una densidad en L^2 para casi todo $p \in I = [p_0, p_1]$. El teorema se sigue pues estos intervalos cubren al conjunto $\{p > 1 : \alpha + \frac{s}{p} > 1\}$.

Consideremos la derivada inferior de $\eta * \nu_p$ con respecto a la medida de Lebesgue,

$$\underline{D}(\eta * \nu_p, x) = \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} (\eta * \nu_p)[B_r(x)].$$

Si pudiésemos ver que

$$\mathcal{J}_p := \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\eta * \nu_p, x) d(\eta * \nu_p)(x) < +\infty,$$

entonces $\underline{D}(\eta * \nu_p, x)$ es finita para $(\eta * \nu_p)$ -casi todo x , y por la Proposición 1.12, se sigue que $\eta * \nu_p \ll \mathcal{L}$ y la densidad es una función de $L^2(\mathbb{R})$. Por consiguiente, para probar el teorema basta con mostrar que

$$\mathcal{T} := \int_I \mathcal{J}_p dp < +\infty.$$

Por el Lema de Fatou,

$$\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_1 := \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \int_I \int_{\mathbb{R}} (\eta * \nu_p)[B_r(x)] d(\eta * \nu_p)(x) dp.$$

Usando la definición de convolución y haciendo un cambio de variables, obtenemos

$$(5.18) \quad \mathcal{T}_1 = \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \int_I \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega^+} (\eta * \nu_p)[B_r(y + \Gamma_p(\omega))] d\Psi(\omega) d\eta(y) dp.$$

Si denotamos con \mathcal{X}_A a la función característica del conjunto A , entonces

$$\begin{aligned} (\eta * \nu_p)[B_r(y + \Gamma_p(\omega))] &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{B_r(y + \Gamma_p(\omega))} d(\eta * \nu_p)(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega^+} \mathcal{X}_{\{(z, \tau): z + \Gamma_p(\tau) \in B_r(y + \Gamma_p(\omega))\}} d\Psi(\tau) d\eta(z). \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en (5.18) y aplicando el teorema de Fubini se obtiene

$$(5.19) \quad \mathcal{T}_1 = \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \iint_{\Omega^+} \mathcal{L}(A_r(y, z, \omega, \tau)) d(\Psi \times \Psi)(\omega, \tau) d(\eta \times \eta)(y, z),$$

donde

$$\begin{aligned} A_r(y, z, \omega, \tau) &:= \{p \in I : |(y + \Gamma_p(\omega)) - (z + \Gamma_p(\tau))| \leq r\} \\ &= \{p \in I : |y - z + \psi_{\omega, \tau}(p)| \leq r\}. \end{aligned}$$

Separaremos la integral en (5.19) en dos regiones:

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2} \iint_{(\Omega^+)^2} \mathcal{L}(A_r(y, z, \omega, \tau)) \\ &= \iint_{\{|y-z| < 2r\}} \iint_{(\Omega^+)^2} + \iint_{\{|x-y| \geq 2r\}} \iint_{(\Omega^+)^2} := \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \end{aligned}$$

Para ver que $\mathcal{T}_1 < +\infty$ basta entonces con mostrar que $\mathcal{I}_1 \leq Cr$ e $\mathcal{I}_2 \leq Cr$. Descomponiendo $(\Omega^+)^2$ como en la prueba del Teorema 5.17 (a), usando el Lema 5.28 (a) y las condiciones sobre las medidas, tenemos que

$$\mathcal{I}_1 \leq C(2r)^\alpha \sum_{k \geq 0} \min\{p_1, r2^{p_1(k+1)}\} 2^{-ks}.$$

Sea k_r tal que $p_1 = r2^{p_1(k_r+1)}$, i.e., $k_r = \frac{\log(p_1/r)}{p_1 \log 2} - 1$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &\leq C(2r)^\alpha \left(\sum_{k \leq k_r} r2^{p_1(k+1)}2^{-ks} + \sum_{k > k_r} p_12^{-ks} \right) \\ &\leq C'(2r)^\alpha \left(\frac{2^{p_1}}{2^{p_1-s}-1} r2^{(p_1-s)(k_r+1)} + p_1 \frac{2^s}{2^s-1} 2^{-(k_r+1)s} \right) \\ &\leq C'' r^\alpha 2^{-(k_r+1)s}. \end{aligned}$$

Puesto que $\alpha - \frac{\log 2}{\log r} s(k_r+1) = \alpha + \frac{s}{p_1} + \frac{\log p_1}{\log r-1} > 1$, esto último por la condición 5.17, tenemos para $r < 1$ que $r^\alpha 2^{-(k_r+1)s} < r$, por lo que $\mathcal{I}_1 \leq Cr$.

Resta mostrar la cota para \mathcal{I}_2 . Notemos que si $C_2 \frac{1}{2^{p_0 k}} < |y-z|$, con C_2 como en el Lema 5.28 (b), entonces $|\psi_{\omega, \tau}(p)| < |y-z|/2$, de donde

$$|y-z + \psi_{\omega, \tau}(p)| > |y-z|/2.$$

Luego, cuando $|y-z| \geq 2r$, el conjunto $A_r(y, z, \omega, \tau)$ es vacío. Si ponemos

$$\kappa(y, z) = \frac{\log(C_2^{-1}|y-z|)}{\log(2^{-p_0})},$$

entonces por el Lema 5.28 (a) y la condición (5.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &\leq C \iint_{\mathbb{R}^2} \sum_{k \leq \kappa(y, z)} r2^{p_1(k+1)}2^{-ks} d\eta(y)d\eta(z) \\ &\leq C' r \iint_{\mathbb{R}^2} 2^{(p_1-s)\kappa(y, z)} d\eta(y)d\eta(z) \\ &= C' r \iint_{\mathbb{R}^2} 2^{-\frac{(p_1-s)}{p_0}} d\eta(y)d\eta(z). \end{aligned}$$

Como $\frac{p_1-s}{p_0} < \alpha$, por el Lema 5.26 y usando que η es una medida finita, tenemos que $\mathcal{I}_2 \leq Cr$. Por consiguiente $\mathcal{T}_1 < +\infty$, lo que concluye la prueba del teorema. \square

5.4. Comentarios y algunos problemas abiertos

1. (i) Destacamos que los resultados sobre $C_p + C_q$ correspondientes a los de [PS98], muestran que el método usado en ese artículo puede ser adaptado a familias paramétricas de conjuntos *no necesariamente lineales*. Más aún, observamos que para obtener nuestros resultados, en ningún momento fue necesario usar que C_p es atractor de un SIF.

(ii) Otra adaptación de ese artículo podría ser a la familia bi-paramétrica de conjuntos $\{C_{p,q}\}_{p>1, q \in \mathbb{R}}$ definida al final del Capítulo 2, donde $C_{p,q}$ es el conjunto de Cantor asociado a la sucesión $\{(\log n)^q/n^p\}_{n \geq 2}$. Recordemos que este conjunto tiene asociada la función de dimensión $h_{p,q} = x^{\frac{1}{p}}/(-\log x)^{\frac{q}{p}}$ y que la familia

$$\mathcal{F}_2 := \{h_{p,q}\}_{p,q} \cup \{x\} \cup \{1\},$$

cuyo orden es equivalente al lexicográfico, define la dimensión $\dim_{\mathcal{F}_2}$, que generaliza a \dim_H .

Haciendo una analogía directa con los resultados para $\{\Lambda_r\}$ y $\{C_p\}$, conjeturamos que, para cada $q \in \mathbb{R}$ fijo, para \mathcal{L} -casi todo $p > 1$ (o para \mathcal{L}^2 -casi todo $(p, q) \in (1, +\infty) \times \mathbb{R}$) se tiene que

$$\dim_{\mathcal{F}_2}(C_{p,q} + C_{p',q'}) = \min\{h_{p,q} \cdot h_{p',q'}, x\},$$

donde recordamos que la función x corresponde a los conjuntos de dimensión de Hausdorff usual igual a 1.

En este caso, deberían adaptarse también:

- el concepto de β -energía de una medida, para obtener información sobre la dimensión bi-paramétrica $\dim_{\mathcal{F}_2}$ del soporte;
- la condición de Frostman (5.10) con exponente α , para considerarse ahora con dos exponentes, (p, q) : para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $r > 0$,

$$\mu(B_r(x)) \leq Ch_{p,q}(r).$$

Además, debería ser cierto el Lema de Frostman para esta dimensión.

2. El estudio de la convolución de medidas invariantes de sistemas regulares no lineales es escaso o nulo. No hemos encontrado en la literatura ninguna referencia. Así como tampoco sobre la transformada de Fourier de este tipo de medidas.

Si bien obtuvimos resultados sobre la convolución de las medidas invariantes ν_p , nos resultó imposible hacer alguna afirmación o conjetura sobre el comportamiento de $\hat{\nu}_p(\xi)$ cuando $\xi \rightarrow \infty$, cualquiera sea el valor de $p > 1$.

La dificultad se debe a la no linealidad del problema. De hecho, aunque tengamos la igualdad $\nu_p = \mu_{2^{-p}} \circ h_p^{-1}$, la no linealidad del difeomorfismo h_p hace perder la simetría que tiene la convolución de Bernoulli $\mu_{2^{-p}}$, que fue esencial para obtener una expresión de $\hat{\mu}_{2^{-p}}$ como producto de cosenos.

Conclusiones

En [BT54], Besicovitch y Taylor relacionaron $\mathcal{H}^s(C_a)$ con el decaimiento de la sucesión a . Esto es válido para cualquier función $h \in \mathcal{D}$. En el Capítulo 2 dimos un teorema 2.31 dual al resultado de [BT54] para el caso packing. Como consecuencia de éste, pudimos caracterizar completamente cuándo una función de dimensión es equivalente a una función potencia (Teorema 2.33). Esto es, dadas una sucesión no creciente a y $h \in \mathcal{D}$ obtuvimos que

$$h \equiv x^s \iff 0 < \mathcal{H}^s(C_a) \leq P_0^s(C_a) < +\infty.$$

Por consiguiente, para tener $x^\alpha \equiv h_a$, no sólo es necesario que C_a sea un α -conjunto sino además que $P_0^\alpha(C_a) < +\infty$.

Además, como consecuencia del Teorema 2.31 obtuvimos que $P_0(C_a) < +\infty$, lo que hace a éste un conjunto de Cantor no lineal sumamente interesante.

Probamos que el conjunto de Cantor C_p considerado en [CMPS05] es atractor de un sistema hiperbólico $\{f_{p,0}, f_{p,1}\}$ con derivadas $1/p$ -Hölder continuas, siendo $1/p$ el mayor índice de suavidad que puede tener un sistema que tenga como atractor a C_p .

Adaptando los resultados de [PS98] para las convoluciones de Bernoulli, mostramos que fijado $q > 1$, la medida $\nu_p * \nu_q$ es absolutamente continua con densidad en L^2 para casi todo $p \in (1, q/(q-1))$. Además adaptamos los resultados de este artículo para obtener (ver Corolario 5.18) los resultados correspondientes a la dimensión de $C_p + C_q$.

Bibliografía

- [Bed91] Tim Bedford. Applications of dynamical systems theory to fractals—a study of cookie-cutter Cantor sets. In *Fractal geometry and analysis (Montreal, PQ, 1989)*, volume 346 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 1–44. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [Bes39] E. Best. A closed dimensionless linear set. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, 6:105–108, 1939.
- [BF97] Tim Bedford and Albert M. Fisher. Ratio geometry, rigidity and the scenery process for hyperbolic Cantor sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(3):531–564, 1997.
- [BG92] Christoph Bandt and Siegfried Graf. Self-similar sets. VII. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114(4):995–1001, 1992.
- [BMPV97] Rodrigo Bamón, Carlos G. Moreira, Sergio Plaza, and Jaime Vera. Differentiable structures of central Cantor sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(5):1027–1042, 1997.
- [Bow79] Rufus Bowen. Hausdorff dimension of quasicircles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):11–25, 1979.
- [BT54] A. S. Besicovitch and S. J. Taylor. On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure. *J. London Math. Soc.*, 29:449–459, 1954.
- [Ca14] C. Carathéodory. Über das lineare Maß von punktmengen, eine verallgemeinerung des längenbegriffs.
- [CHM97] Carlos A. Cabrelli, Kathryn E. Hare, and Ursula M. Molter. Sums of Cantor sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(6):1299–1313, 1997.
- [CHM02] Carlos A. Cabrelli, Kathryn E. Hare, and Ursula M. Molter. Sums of Cantor sets yielding an interval. *J. Aust. Math. Soc.*, 73(3):405–418, 2002.
- [CHM03] Carlos A. Cabrelli, K Hare, and Ursula M. Molter. Some counterexamples for cantor sets. *Unpublished Manuscript*, 2003.
- [CMMS04] Carlos Cabrelli, Franklin Mendivil, Ursula M. Molter, and Ronald Shonkwiler. On the Hausdorff h -measure of Cantor sets. *Pacific J. Math.*, 217(1):45–59, 2004.
- [CMPS05] C. Cabrelli, U. Molter, V. Paulauskas, and R. Shonkwiler. Hausdorff measure of p -Cantor sets. *Real Anal. Exchange*, 30(2):413–433, 2004/05.
- [EK06] Márton Elekes and Tamás Keleti. Borel sets which are null or non- σ -finite for every translation invariant measure. *Adv. Math.*, 201(1):102–115, 2006.
- [Erd39] Paul Erdős. On a family of symmetric Bernoulli convolutions. *Amer. J. Math.*, 61:974–976, 1939.
- [Erd40] Paul Erdős. On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions. *Amer. J. Math.*, 62:180–186, 1940.
- [Fal86] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*, volume 85 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [Fal89] K. J. Falconer. Dimensions and measures of quasi self-similar sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106(2):543–554, 1989.
- [Fal90] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1990. Mathematical foundations and applications.
- [Fal97] Kenneth Falconer. *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.
- [FJ99] Aihua Fan and Yumping Jiang. Lyapunov exponents, dual Lyapunov exponents, and multifractal analysis. *Chaos*, 9(4):849–853, 1999.
- [FLN00] Ai-Hua Fan, Ka-Sing Lau, and Sze-Man Ngai. Iterated function systems with overlaps. *Asian J. Math.*, 4(3):527–552, 2000.

- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [Gar62] Adriano M. Garsia. Arithmetic properties of Bernoulli convolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102:409–432, 1962.
- [GMS07] Ignacio Garcia, Ursula Molter, and Roberto Scotto. Dimension functions of Cantor sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(10):3151–3161 (electronic), 2007.
- [Hau18] Felix Hausdorff. Dimension und äußeres Maß. *Math. Ann.*, 79(1-2):157–179, 1918.
- [HL01] Tian-You Hu and Ka-Sing Lau. Multifractal structure of convolution of the Cantor measure. *Adv. in Appl. Math.*, 27(1):1–16, 2001.
- [Hu97] Tian-You Hu. The local dimensions of the Bernoulli convolution associated with the golden number. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(7):2917–2940, 1997.
- [Hut81] John E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.
- [JW35] Børge Jessen and Aurel Wintner. Distribution functions and the Riemann zeta function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 38(1):48–88, 1935.
- [Lau93] Ka-Sing Lau. Dimension of a family of singular Bernoulli convolutions. *J. Funct. Anal.*, 116(2):335–358, 1993.
- [LN98] Ka-Sing Lau and Sze-Man Ngai. L^q -spectrum of the Bernoulli convolution associated with the golden ratio. *Studia Math.*, 131(3):225–251, 1998.
- [LN99] Ka-Sing Lau and Sze-Man Ngai. L^q -spectrum of Bernoulli convolutions associated with P. V. numbers. *Osaka J. Math.*, 36(4):993–1010, 1999.
- [Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Mor46] P. A. P. Moran. Additive functions of intervals and Hausdorff measure. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 42:15–23, 1946.
- [M96] Carlos Gustavo T. de A. Moreira. Stable intersections of Cantor sets and homoclinic bifurcations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13(6):741–781, 1996.
- [MY01] Carlos Gustavo T. de A. Moreira and Jean-Christophe Yoccoz. Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions. *Ann. of Math. (2)*, 154(1):45–96, 2001.
- [PSchm07] Peres, Yuval and Schmerkin, Pablo. Resonance Between Cantor Sets *Disponibile en arXiv:math.CA/0705262v1*, 2007
- [PS98] Yuval Peres and Boris Solomyak. Self-similar measures and intersections of Cantor sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(10):4065–4087, 1998.
- [PS00] Yuval Peres and Wilhelm Schlag. Smoothness of projections, Bernoulli convolutions, and the dimension of exceptions. *Duke Math. J.*, 102(2):193–251, 2000.
- [PSS00a] Yuval Peres, Wilhelm Schlag, and Boris Solomyak. Sixty years of Bernoulli convolutions. In *Fractal geometry and stochasticity, II (Greifswald/Koserow, 1998)*, volume 46 of *Progr. Probab.*, pages 39–65. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [PSS00b] Yuval Peres, Károly Simon, and Boris Solomyak. Self-similar sets of zero Hausdorff measure and positive packing measure. *Israel J. Math.*, 117:353–379, 2000.
- [PT93] Jacob Palis and Floris Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, volume 35 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Rog98] C. A. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Sal44] R. Salem. A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan. *Duke Math. J.*, 11:103–108, 1944.
- [Sal63] Raphaël Salem. *Algebraic numbers and Fourier analysis*. D. C. Heath and Co., Boston, Mass., 1963.
- [San92] Atsuro Sannami. An example of a regular Cantor set whose difference set is a Cantor set with positive measure. *Hokkaido Math. J.*, 21(1):7–24, 1992.
- [Sch94] Andreas Schief. Separation properties for self-similar sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(1):111–115, 1994.
- [Sol95] Boris Solomyak. On the random series $\sum \pm \lambda^n$ (an Erdős problem). *Ann. of Math. (2)*, 142(3):611–625, 1995.

- [Sul84] Dennis Sullivan. Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups. *Acta Math.*, 153(3-4):259–277, 1984.
- [Sul88] Dennis Sullivan. Differentiable structures on fractal-like sets, determined by intrinsic scaling functions on dual Cantor sets. In *The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987)*, volume 48 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 15–23. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [Tri82] Claude Tricot, Jr. Two definitions of fractional dimension. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 91(1):57–74, 1982.
- [Tri95] Claude Tricot. *Curves and fractal dimension*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [TT85] S. James Taylor and Claude Tricot. Packing measure, and its evaluation for a Brownian path. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 288(2):679–699, 1985.

Índice alfabético

- condición
 - de conjunto abierto, 35
 - de Dini, 37
 - de separación fuerte, 35
- conjugación, 42
- conjunto
 - auto-similar, 35
 - cut-out, 18
 - cookie-cutter/hiperbólico, 44
- conjunto de Cantor, 5
 - r -ádico, 13
 - asociado a una sucesión, 12
 - central, 13
 - ternario, 5
- h -conjunto, 7
- s -conjunto, 6
- convolución de Bernoulli, 51

- δ -cubrimiento, 5
- δ -packing, 7
- densidad, 3
- dimensión
 - box, 10
 - box inferior, 10
 - box superior, 10
 - de Hausdorff, 6
 - de similitud, 35
 - packing, 9
- distorsión
 - acotada, 36
 - acotada fuerte, 43

- β -energía, 97
- espacio simbólico, 14
- espesura, 90
 - local, 93

- función
 - bi-Lipschitz, 9
 - de dimensión, 6
 - duplicante, 8
 - escala, 75
 - Hölder continua, 37
 - Lipschitz, 9

- módulo de continuidad, 37
- medida, 1
 - absolutamente continua, 3
 - auto-similar, 47
 - Borel regular, 2
 - de Bernoulli, 49
 - de Borel, 2
 - de Dirac, 2
 - de Frostman, 95
 - de Hausdorff, 6
 - de Radon, 2
 - finita, 1
 - imagen de una, 2
 - invariante, 47
 - localmente finita, 2
 - packing, 8
 - singular, 3
- medidas
 - equivalentes, 4

- número de Pisot, 85

- orden de funciones, 16
- premedida packing, 7

- razón geométrica, 74

- shift, 33
- similitud, 10
 - razón de contracción de una, 10
- sistema
 - auto-similar, 35
 - regular, 36
 - cookie-cutter/hiperbólico, 44
- sistema iterado de funciones, 31
 - atractor de , 32
- sistemas conjugados, 42
- soporte de una medida, 2