UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis Armónico**

Título de la tesis:

Desigualdades mixtas para operadores del Análisis Armónico

Unidad de investigación donde se realizó:

Departamento de Matemática – FIQ – UNL

Autor:
Lic. Fabio Berra

Directora de Tesis:
Dra. Gladis Pradolini

Codirectora de Tesis:
Dra. Marilina Carena

Jurado compuesto por:
Dr. Aníbal Chicco Ruiz
Dr. Sheldy Ombrosi
Dr. Carlos Pérez

Santa Fe, Argentina - 2019

A mis padres, Nora y Miguel, y a mi hermana, Virginia
A la memoria de mi abuela Graciela

Índice general

Resumen

En esta tesis se estudian desigualdades mixtas para distintos operadores del Análisis Armónico. Como es bien sabido estas desigualdades surgieron, entre otras cosas, ante la necesidad de pruebas alternativas de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood entre espacios de Lebesgue con un peso en la clase A_p de Muckenhoupt. La idea original de Sawyer consiste en definir un operador auxiliar S que resulta ser una perturbación no estándar del operador maximal M, la cual es ocasionada por un peso v de la clase A_1. Concretamente, el resultado de Sawyer establece que, si u y v son pesos en la clase A_1 y S es el operador definido por $Sf = M(fv)/v$, entonces S es de tipo débil $(1, 1)$ con respecto a la medida $d\mu(x) = u(x)v(x)dx$. Otros autores consideraron variantes de estas desigualdades en relación a los pesos y a los operadores involucrados. Por ejemplo, se conocen desigualdades mixtas para el operador M y para operadores de Calderón-Zygmund, con peso u perteneciente a la clase A_1 de Muckenhoupt y con $v \in A_\infty(u)$. Sin embargo, no hay antecedentes en la literatura de este tipo de desigualdades para los conmutadores de operadores clásicos del Análisis Armónico.

En la primera parte de esta tesis se estudian desigualdades mixtas para conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund, T_b^m, con símbolo b en la clase BMO y para el caso $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$. La desigualdad mixta obtenida es de tipo modular e involucra a la función de Young $\Phi_m(t) = t(1+\log^+ t)^m$. En el caso $v = 1$, se obtiene la desigualdad de tipo débil modular de dicho conmutador, la cual es conocida en la literatura. Se prueban además desigualdades mixtas para una amplia gama de operadores, y sus conmutadores de orden superior con símbolos en BMO. Estos operadores son de convolución con un núcleo que satisface condiciones de regularidad asociadas a funciones de Young. Estas condiciones resultan ser generalizaciones de la clásica condición de Hörmander para operadores de Calderón-Zygmund. Los resultados obtenidos extienden los conocidos para el caso $v = 1$ y están contenidos en el Capítulo 2.

En el Capítulo 3 se aborda el estudio de desigualdades mixtas para el operador maximal fraccionario, M_γ, $0 < \gamma < n$. En esta instancia, una herramienta útil es una desigualdad puntual de tipo Hedberg con pesos entre M_γ y M, sumado a las estimaciones mixtas conocidas para este último operador. Una vez obtenida la desigualdad mixta para M_γ, un teorema de extrapolación permite derivar el resultado para el operador integral fraccionaria I_γ. Como aplicación directa de las estimaciones obtenidas se prueban desigualdades mixtas para conmutadores de operadores

de Calderón-Zygmund y de I_γ, ambos con símbolos pertenecientes a la clase Lipschitz.

Finalmente, en el Capítulo 4 se exhiben desigualdades mixtas para generalizaciones de los operadores M y M_γ. Dichas generalizaciones se relacionan con operadores maximales M_Φ y su correspondiente versión fraccionaria, $M_{\gamma,\Phi}$, asociadas a una función de Young Φ. En particular, la función Φ_m introducida anteriormente, define operadores maximales que se relacionan estrechamente con los conmutadores de los operadores de Calderón-Zygmund y del operador integral fraccionaria, ya que ejercen un control en norma sobre los mismos. Se prueban así desigualdades mixtas en el caso en que los pesos u y v son independientes. Se estudian, además, desigualdades mixtas para M_Φ donde una de las funciones peso involucrada no es ni siquiera localmente integrable.

Las demostraciones de todos los resultados obtenidos se encuentran en el Capítulo 5.

Introducción

En Análisis Armónico resulta de interés conocer propiedades de continuidad de ciertos operadores, los cuales surgen a partir del estudio de la regularidad que presentan algunas soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Ejemplos clásicos de estos operadores son los de Calderón-Zygmund (OCZ) y sus conmutadores, operadores de tipo convolución con un núcleo que satisface cierta condición de tamaño y regularidad y el operador integral fraccionaria, entre otros. El problema entonces reside en poder estimar el "tamaño" de $\mathcal{T}f$ en términos del "tamaño" de f, los cuales vienen dados por una norma en algún espacio de medida, como los espacios de Lebesgue clásicos. De esta manera, las desigualdades que se buscan obtener, a veces, son de la forma

$$\|\mathcal{T}f\|_{L^q(v)} \leq C\,\|f\|_{L^p(w)}\,,$$

donde v y w son funciones positivas y localmente integrables, denominadas pesos.

Con el objeto de lograr tales estimaciones resulta de gran utilidad asociarle a cada operador $\mathcal{T}$, una función maximal $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ que lo "controle" en algún sentido. Este control se ve reflejado en un tipo de desigualdad muy estudiada en Análisis Armónico, que es la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}f(x)|^p w(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}f(x))^p w(x)\,dx, \tag{0.1}$$

donde $0 < p < \infty$ y w es un peso. Cuando $w = 1$, esta desigualdad fue probada en [9] para el caso en que $\mathcal{T}$ es un OCZ y $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood clásico, definido por

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\,dy.$$

Por otra parte, en [2] se probó la correspondiente versión en el caso en que $\mathcal{T}$ es el operador integral fraccionaria y $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ la maximal fraccionaria. Estas dos desigualdades fueron extendidas luego en [10] y [33] respectivamente, cuando w es un peso de la clase A_∞ de Muckenhoupt.

En esta dirección, conocer el comportamiento de los operadores maximales resulta de utilidad para obtener estimaciones de otros operadores. En [32], el autor da condiciones necesarias y suficientes en la función peso w en $\mathbb{R}$ para que el operador maximal M resulte acotado en $L^p(w)$. Estas condiciones dan origen a las clases A_p de Muckenhoupt.

Este resultado fue extendido luego a mayores dimensiones en [10]. Cuando $p = 1$ se sabe que el operador no es de tipo fuerte $(1, 1)$ pero, sin embargo, resulta ser de tipo débil $(1, 1)$. Esto es, para todo $t > 0$, se verifica

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)\, dx$$

si y solo si $w \in A_1$. Los lemas de cubrimiento clásicos hacen posible obtener estimaciones como la de arriba de una forma más o menos sencilla. Esta desigualdad nos muestra que el comportamiento de M no es el mismo para el caso extremo $p = 1$ que para $p > 1$. Dado que $L^p(w) \subsetneq L^{p,\infty}(w)$, podemos decir que el comportamiento de M en el caso extremo es "peor". No obstante, por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, las estimaciones de tipo débil en el extremo permiten obtener las acotaciones de tipo fuerte. Esta idea fue utilizada por Sawyer en [41] y dio origen a lo que conocemos como desigualdades mixtas. La filosofía de este trabajo consistió en definir un operador auxiliar S, que es una perturbación del operador M a través de la intervención de un peso v de la clase A_1. Precisamente,

$$Sf(x) = \frac{M(fv)(x)}{v(x)}.$$

Sawyer demostró que, si u y v son pesos de la clase A_1, entonces la desigualdad

$$uv(\{x \in \mathbb{R} : Sf(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| u(x) v(x)\, dx \tag{0.2}$$

vale para todo $t > 0$. La prueba de este resultado es bastante compleja dado que el peso v que aparece dividiendo hace que los conjuntos de nivel se modifiquen drásticamente, de modo que los argumentos clásicos de cubrimiento no aplican. Una motivación importante para estudiar este tipo de desigualdades es el hecho de que las mismas permiten dar una demostración alternativa (y muy sencilla) de la acotación de M en $L^p(w)$ cuando $w \in A_p$. En efecto, (0.2) nos dice que S es de tipo débil $(1, 1)$ con respecto a la medida $d\mu(x) = u(x)v(x)\, dx$, y no es difícil ver que también es de tipo fuerte (∞, ∞) con respecto a la misma medida. El teorema de interpolación de Marcinkiewicz permite luego concluir que S es de tipo fuerte (p, p) con respecto a μ, para todo $1 < p < \infty$. Por otro lado, si $w \in A_p$, puede descomponerse como $w = uv^{1-p}$, donde u y v son pesos de la clase A_1, en virtud del teorema de factorización de Jones. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (Mf(x))^p w(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{M(vf/v)(x)}{v(x)} \right)^p u(x)v(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (S(f/v)(x))^p u(x)v(x)\, dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p u(x)[v(x)]^{1-p}\, dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Otro tipo similar de estimaciones con pesos ya había sido estudiado previamente en [34], donde se prueba que la desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{T}f(x)|(w(x))^{1/p} > t\}| \leq \frac{C}{t^p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)\, dx \tag{0.3}$$

vale para todo $t > 0$, siempre que $p \geq 1$ y $w \in A_p$. Más adelante, en [4] se prueba que si $u \in A_1$ y $v(x) = |x|^{-d}$, con $d \neq 1$, entonces se verifica que

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{|\mathcal{T}f(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq C\int_{\mathbb{R}} |f(x)|u(x)\, dx. \tag{0.4}$$

En ambos casos $\mathcal{T}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood o la transformada de Hilbert.

En [41] se plantea la conjetura de que la desigualdad (0.2) es cierta también para la transformada de Hilbert. Esta conjetura fue demostrada veinte años más tarde en [11]. En este trabajo se extiende la estimación de Sawyer a mayores dimensiones, tanto para el operador maximal de Hardy-Littlewood como para OCZ. Se consideran, además, dos tipos de condiciones diferentes en el par de pesos: $u, v \in A_1$ o $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$. La segunda condición es más adecuada para trabajar con herramientas clásicas, como por ejemplo la descomposición de Calderón-Zygmund. Esto se debe a que, en este caso, los pesos u y v están relacionados, en el sentido de que $uv \in A_\infty$. La otra condición, que es la considerada por Sawyer en su trabajo, exige realizar un argumento de descomposición muy delicado. La idea central es utilizar un argumento de "cubos principales", que fue presentado en [34] para la prueba de (0.3). Otro aspecto importante para destacar de [11] es que el resultado principal puede obtenerse si se prueba la desigualdad mixta para $M_{\mathcal{D}}$, el operador maximal de Hardy-Littlewood definido sobre cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$. Una vez obtenido este, un teorema de extrapolación que involucra al conocido algoritmo de iteración de Rubio de Francia para construir pesos de la clase A_1, permite deducir la correspondiente desigualdad mixta para M y T, con T un OCZ.

Por otra parte, en [11] se conjetura que las desigualdades mixtas probadas deberían ser ciertas también en el caso más general $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Esta conjetura fue probada recientemente en [25]. Concretamente, se probó que si $u \in A_1$, $v \in A_\infty$ y $\mathcal{T}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood o un OCZ, entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|u(x)v(x)\, dx.$$

En vista de lo expuesto hasta aquí, las desigualdades anteriores valen no solo cuando el producto de los pesos involucrados es bueno, sino también en casos donde puede ser muy singular.

En esta tesis se extenderán algunos de los resultados mencionados a otros operadores del Análisis Armónico. En el Capítulo 2 se presentan desigualdades mixtas para conmutadores T_b^m de un OCZ, con símbolo $b \in \mathrm{BMO}$ en el caso en que u es un peso de A_1 y v está en $A_\infty(u)$. A diferencia de lo que ocurre con T, su conmutador no satisface una desigualdad de tipo débil $(1,1)$, sino que verifica una desigualdad de tipo modular que involucra a la función de Young $\Phi_m(t) = t(1 + \log^+ t)^m$, tal como se muestra en [37]. La desigualdad mixta que se obtiene en este caso también es del mismo estilo y, cuando $v = 1$, permite recuperar el tipo débil modular correspondiente. También se estudian desigualdades para operadores de convolución con un núcleo que satisface una regularidad de tipo Hörmander generalizada, la cual es una extensión de la clásica condición de suavidad que satisface un OCZ. Para ello, fue necesario obtener primero una estimación mixta para el operador, la cual se utilizó luego para la obtención de las correspondientes estimaciones para los conmutadores de orden superior.

Los resultados finales extienden, en algún sentido, las estimaciones dadas en [26] para el operador y para sus conmutadores de orden superior.

En el Capítulo 3 se exploran desigualdades mixtas en el contexto fraccionario. La idea en esta parte es similar a la utilizada en [11]: estudiar primero el operador maximal fraccionario M_γ y luego, sabiendo que el par $(I_\gamma f, M_\gamma f)$ satisface una estimación del estilo de (0.1) una adaptación del teorema de extrapolación mencionado anteriormente permite concluir el mismo tipo de estimación mixta para I_γ. La clave para obtener la desigualdad mixta para M_γ es utilizar una desigualdad puntual que la relaciona con el operador maximal de Hardy-Littlewood clásico, y luego utilizar las estimaciones mixtas conocidas para éste último.

Como aplicación directa de estas estimaciones se obtienen desigualdades mixtas para conmutadores de cierta clase de OCZ y de I_γ, ambos con símbolo Lipschitz. La idea para lograr estas acotaciones consiste en utilizar otra estimación puntual, del estilo

$$|\mathcal{T} f(x)| \leq C I_{\gamma_0}|f|(x),$$

donde $\mathcal{T}$ es uno de los operadores mencionados y γ_0 es un índice adecuado.

Finalmente, en el Capítulo 4 se exhiben desigualdades mixtas para operadores maximales generalizados M_Φ, definidos a partir de promedios asociados a una función de Young Φ. Estos operadores son, en general, más singulares que el operador M y las estimaciones débiles que verifican incluyen expresiones de tipo modular que involucran a la función Φ. En este capítulo se considera una familia de funciones de Young que incluye a $\Phi_m(t) = t(1 + \log^+ t)^m$. Este tipo de funciones tiene especial interés dado que sus operadores maximales asociados son los que controlan, en el sentido de (0.1), a los conmutadores de orden superior de un OCZ. Siguiendo algunas ideas de los trabajos [41] y [11] se prueban desigualdades mixtas para M_Φ, con Φ una función de Young con ciertas propiedades, para el caso en que los pesos u y v son independientes. Estas estimaciones extienden los tipos débiles conocidos, que se recuperan al considerar $v = 1$. Como aplicación de estos resultados se obtienen desigualdades mixtas para el operador maximal fraccionario generalizado $M_{\gamma,\Phi}$. Estas estimaciones permiten dar una demostración alternativa de la acotación de este operador en espacios de Lebesgue con pesos.

Los resultados originales presentados en esta tesis están expuestos en los Capítulos 2, 3 y 4. A continuación se exhibe el listado de las contribuciones realizadas:

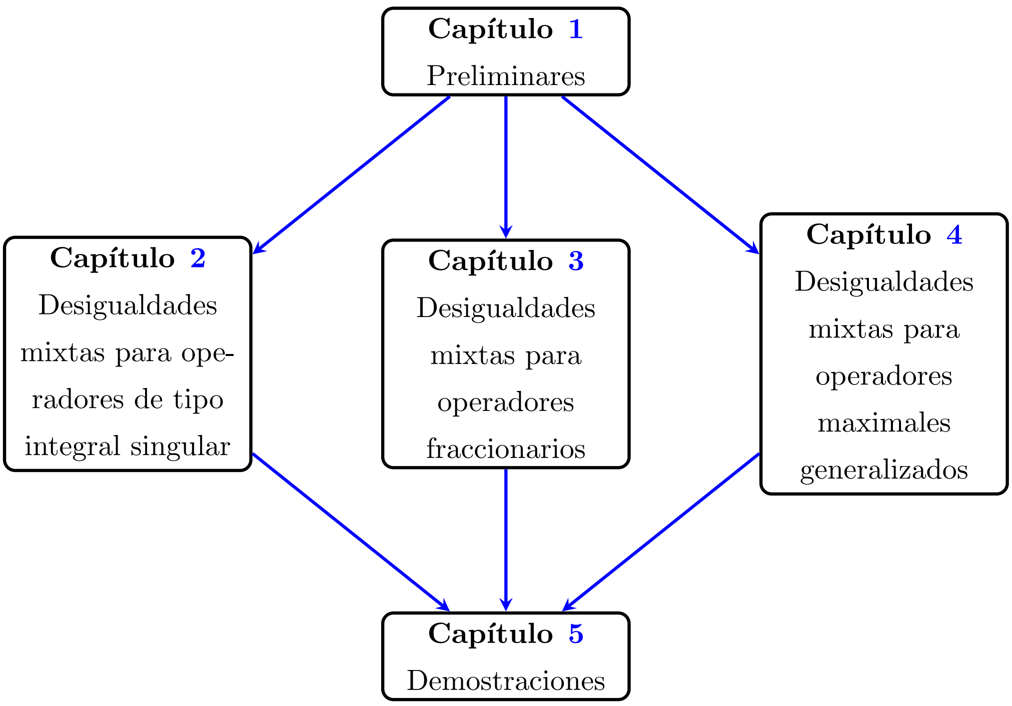
- Fabio Berra, Marilina Carena and Gladis Pradolini. Mixed weak estimates of Sawyer type for fractional integrals and some related operators. *J. Math. Anal. Appl.*, **479**(**2**):1490–1505, 2019.

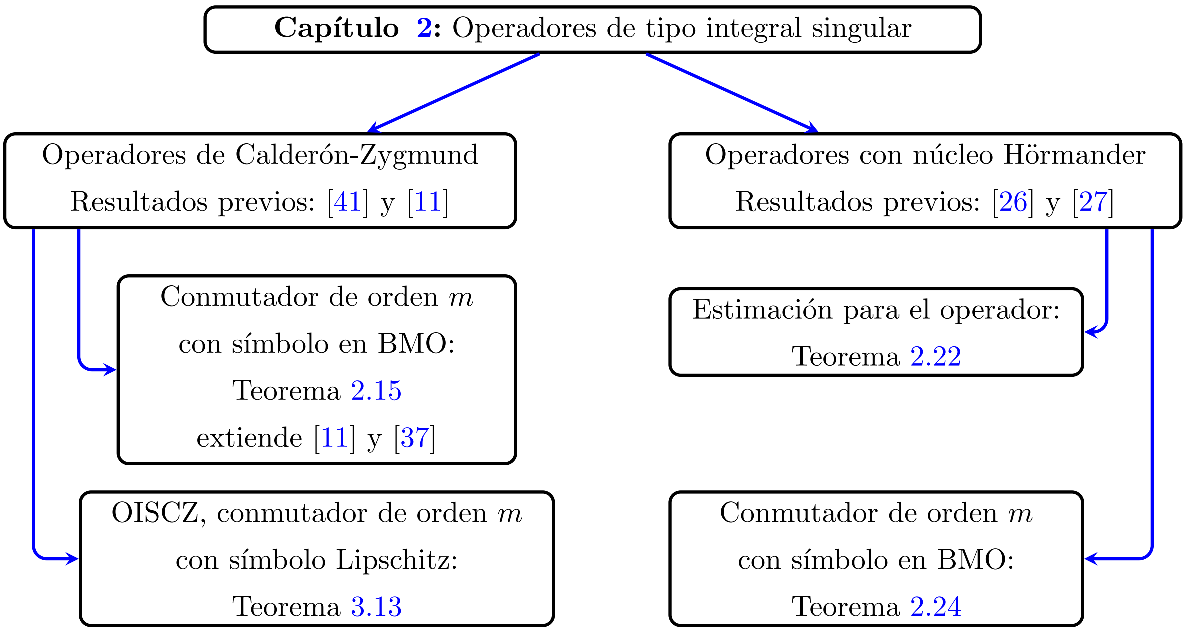
- Fabio Berra. Mixed weak estimates of Sawyer type for generalized maximal operators *Proc. Amer. Math. Soc.*, **147**(**10**):4259–4273, 2019.

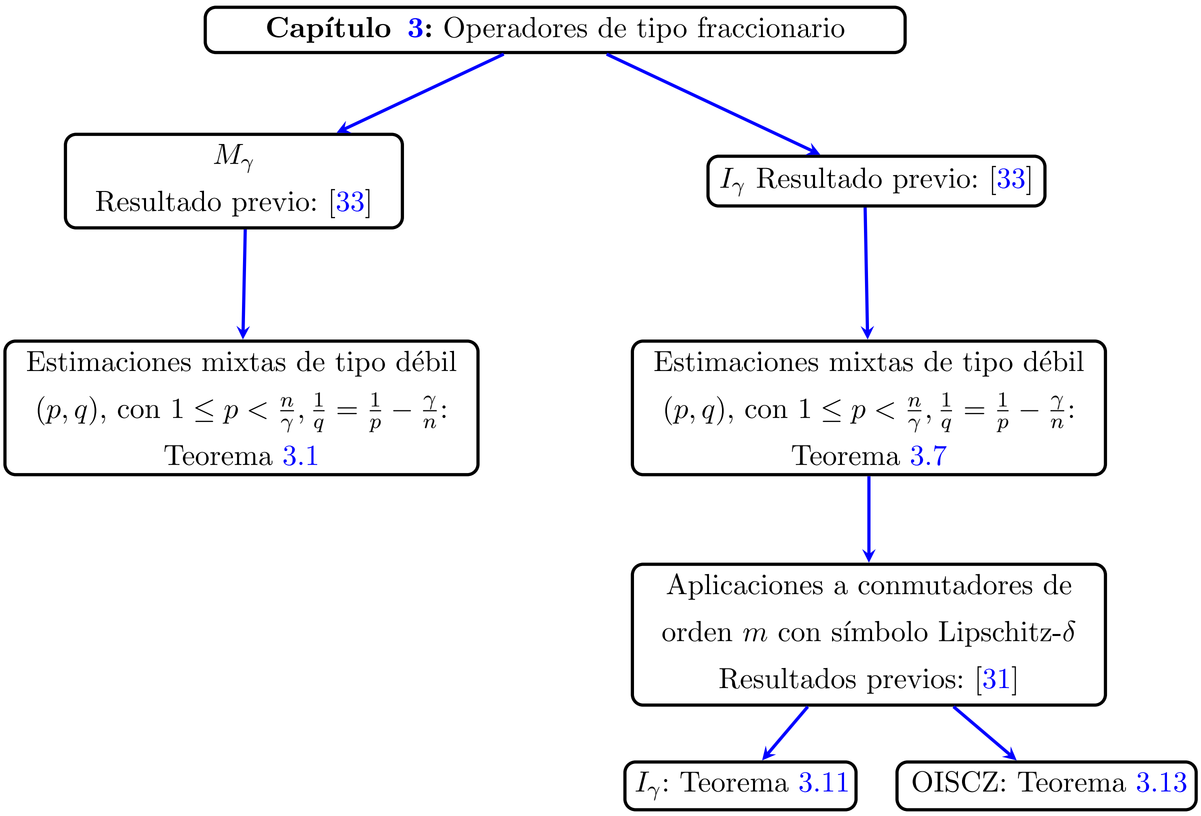
- Fabio Berra, Marilina Carena and Gladis Pradolini. Mixed weak estimates of Sawyer type for commutators of generalized singular integrals and related operators. *Michigan Math. J.*, **68**(**3**):527–564, 2019.

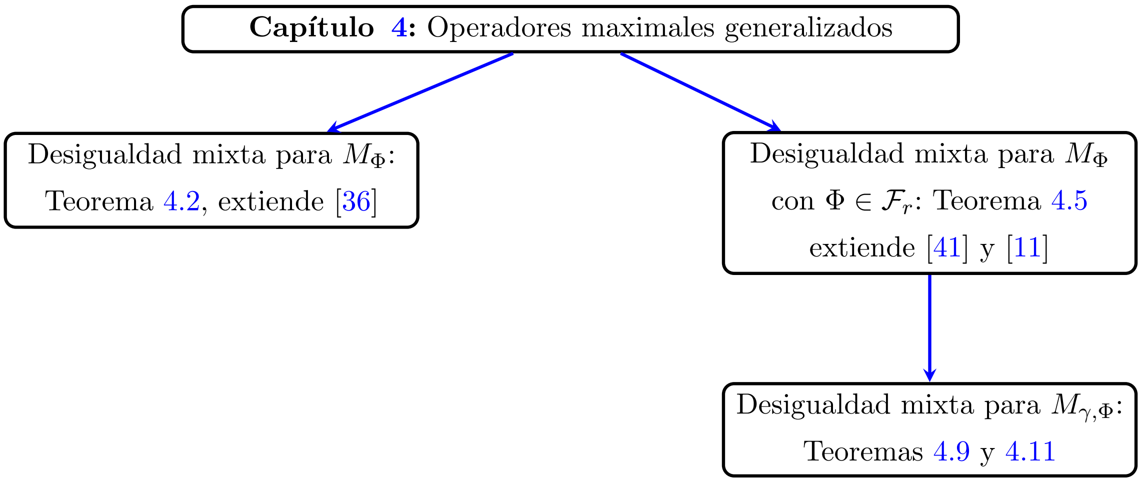
- Fabio Berra, Marilina Carena and Gladis Pradolini. Improvements on Sawyer type estimates for generalized maximal functions. *Math. Nachr. Journal*, in press.

Presentamos ahora un bosquejo gráfico de la organización de esta tesis. Comenzamos con la distribución y relación entre los capítulos.




Capítulo 2: Operadores de tipo integral singular
Operadores de Calderón-Zygmund
Resultados previos: [41] y [11]
Operadores con núcleo Hörmander
Resultados previos: [26] y [27]
Conmutador de orden m
con símbolo en BMO:
Teorema 2.15
extiende [11] y [37]
Estimación para el operador:
Teorema 2.22
OISCZ, conmutador de orden m
con símbolo Lipschitz:
Teorema 3.13
Conmutador de orden m
con símbolo en BMO:
Teorema 2.24


Capítulo 3: Operadores de tipo fraccionario
M_γ
Resultado previo: [33]
I_γ Resultado previo: [33]
Estimaciones mixtas de tipo débil
(p,q), con $1 \leq p < \frac{n}{\gamma}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{n}$:
Teorema 3.1
Estimaciones mixtas de tipo débil
(p,q), con $1 \leq p < \frac{n}{\gamma}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{n}$:
Teorema 3.7
Aplicaciones a conmutadores de
orden m con símbolo Lipschitz-δ
Resultados previos: [31]
I_γ: Teorema 3.11
OISCZ: Teorema 3.13


Capítulo 4: Operadores maximales generalizados
Desigualdad mixta para M_Φ: Teorema 4.2, extiende [36]
Desigualdad mixta para M_Φ con $\Phi \in \mathcal{F}_r$: Teorema 4.5 extiende [41] y [11]
Desigualdad mixta para $M_{\gamma,\Phi}$: Teoremas 4.9 y 4.11

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos los conceptos y definiciones necesarios para la lectura de esta tesis. La mayoría de los resultados aquí expuestos son bien conocidos, por lo que no incluiremos su prueba. No obstante, el lector interesado podrá encontrar las demostraciones omitidas en el Apéndice. En la primera sección definiremos las funciones de Young y algunas de sus propiedades más importantes. En la segunda, introduciremos los espacios funcionales clásicos con los que trabajaremos. Los mismos se describen en términos de una medida μ que estará dada, en general, por la expresión $d\mu(x) = w(x)\,dx$, donde w es un peso. Este caso incluye a la medida de Lebesgue cuando $w = 1$. Las clases de pesos que consideraremos, junto a sus propiedades elementales, están expuestas en la Sección 1.3. Finalmente, en la Sección 1.4 introduciremos los operadores maximales que aparecerán a lo largo de la tesis, junto a las propiedades de continuidad más relevantes de los mismos.

1.1. Funciones de Young

Entenderemos por función **creciente** a una función que crece en sentido amplio, es decir, si $s < t$ entonces $f(s) \leq f(t)$. Cuando esta última desigualdad es estricta diremos que f es **estrictamente creciente**.

Con la notación $f \lesssim g$ entenderemos que existe una constante positiva C de modo que la desigualdad $f(t) \leq Cg(t)$ vale para todo t en el dominio de f y g. En general, en una cadena de desigualdades del tipo $\lesssim$ conservaremos el símbolo C para la constante que aparece en cada paso, aun cuando la misma cambie de un miembro al siguiente. Diremos que dos funciones f y g son **equivalentes**, y lo denotaremos $f \approx g$, si $f \lesssim g$ y $g \lesssim f$.

Una función $f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ es **convexa** si se cumple que

$$f(\theta s + (1-\theta)t) \leq \theta f(s) + (1-\theta) f(t),$$

para todo $0 \leq \theta \leq 1$ y todos $0 \leq s, t < \infty$.

Decimos que $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ es una **función de Young** si es estrictamente creciente, convexa, $\Phi(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$.

Si bien esta definición permite que las funciones tomen el valor infinito en un conjunto de medida positiva, en esta tesis trabajaremos con funciones de Young que son finitas en todo punto. En este caso, la convexidad de Φ implica la continuidad en $[0,\infty)$. Ejemplos típicos son las funciones de tipo potencia $\varphi(t) = t^p$ para $1 \le p < \infty$, y las de tipo $L\log L$ dadas por $\varphi(t) = t^r(1 + \log^+ t)^\delta$, con $r \ge 1$, $\delta \ge 0$ y donde $\log^+ t =: \max\{\log t, 0\}$.

Sea $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ una función. Decimos que Φ es **submultiplicativa** si

$$\Phi(st) \le \Phi(s)\Phi(t),$$

para todos $s, t \ge 0$.

Decimos que Φ es **duplicante** o satisface la **condición $\triangle_2$** si existe una constante positiva C de modo que

$$\Phi(2t) \le C\Phi(t), \tag{1.1}$$

para todo $t \ge 0$.

Es inmediato de estas definiciones que toda función submultiplicativa es duplicante.

Lema 1.1. *Sean $\Phi, \Psi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ funciones crecientes, tales que $\Psi \in \triangle_2$ y existe una constante $L \ge 1$ de modo que*

$$\Psi(t/L) \le \Phi(t) \le \Psi(Lt), \qquad \textit{para todo } t.$$

Entonces $\Phi \approx \Psi$.

Lema 1.2. *Sea Φ una función convexa que verifica $\Phi(0) = 0$. Entonces:*

(a) $\Phi(at) \le a\Phi(t)$, *para* $0 \le a \le 1$*;*

(b) $\Phi(At) \ge A\Phi(t)$, *para* $A > 1$.

Observación 1.3. El ítem (b) del lema anterior nos dice que si Φ es de Young, entonces $\Psi(t) = \Phi(t)/t$ es creciente. En efecto, si $t_1 < t_2$ entonces

$$\frac{\Phi(t_1)}{t_1} = \frac{t_2}{t_1}\frac{\Phi(t_1)}{t_2} \le \frac{\Phi\left(\frac{t_2}{t_1}t_1\right)}{t_2} = \frac{\Phi(t_2)}{t_2}.$$

En particular, $\lim_{s\to 0^+} \Phi(s)/s \le \Phi(t)/t$, para todo $t > 0$. Esto nos dice que toda función de Young es derivable por derecha en $t = 0$. Denotaremos con $\Phi'(0) = \lim_{t\to 0^+} \Phi(t)/t$.

Sea $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ una función creciente. La **inversa generalizada** de Φ está definida como

$$\Phi^{-1}(t) = \inf\{s \ge 0 : \Phi(s) \ge t\},$$

con la convención $\text{ínf}\,\emptyset = \infty$.

En general, si $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ es una función, denotaremos con $\Phi^{-1}(t)$ a su función inversa generalizada evaluada en t y con $(\Phi(t))^{-1}$ al recíproco del número real $\Phi(t)$, siempre que sea positivo, a fin de evitar ambigüedades.

En [20] se demuestran algunos de los resultados que siguen a continuación para el caso de funciones más generales. Aquí daremos la prueba de los más importantes para nuestros propósitos. El siguiente lema reúne algunas propiedades útiles de las funciones inversas generalizadas.

Lema 1.4. *Sean $\Phi, \Psi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ funciones crecientes y continuas por izquierda. Entonces se cumple que:*

(a) *Φ^{-1} es creciente y $\Phi^{-1}(\Phi(t)) \leq t$, para todo t;*

(b) *Φ^{-1} es continua por izquierda y $\Phi(\Phi^{-1}(t)) \leq t$, para todo t;*

(c) *si $\Phi \leq \Psi$, entonces $\Psi^{-1} \leq \Phi^{-1}$.*

(d) *si $\Phi(0) = 0$, entonces $(\Phi^{-1})^{-1} = \Phi$.*

Demostración. Para probar el ítem (a) observemos que, si $t_1 < t_2$, entonces

$$\{s \geq 0 : \Phi(s) \geq t_2\} \subseteq \{s \geq 0 : \Phi(s) \geq t_1\},$$

lo cual implica que $\Phi^{-1}(t_1) \leq \Phi^{-1}(t_2)$. Fijado $t \geq 0$, notar que

$$t \in \{s \geq 0 : \Phi(s) \geq \Phi(t)\},$$

de donde inmediatamente se tiene que $\Phi^{-1}(\Phi(t)) \leq t$.

Pasemos a la prueba de (b). Para ver la continuidad por izquierda, fijemos $t > 0$ y consideremos una sucesión $\{t_k\}_k$ tal que $t_k \nearrow t$. Por ser Φ^{-1} creciente, $\Phi^{-1}(t_k) \leq \Phi^{-1}(t)$ para todo k. En consecuencia, el límite $\text{lím}_{k\to\infty} \Phi^{-1}(t_k)$ existe y no supera a $\Phi^{-1}(t)$. Para ver la otra desigualdad veamos primero que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$t \leq \Phi(\Phi^{-1}(t) + \varepsilon). \tag{1.2}$$

En efecto, notemos que si $\Phi(u) < t$ entonces $\Phi^{-1}(t) \geq u$. Si suponemos que (1.2) no vale, tomando $u = \Phi^{-1}(t) + \varepsilon$ obtenemos que $\Phi^{-1}(t) \geq \Phi^{-1}(t) + \varepsilon$, una contradicción. Entonces podemos concluir que

$$\Phi\left(\Phi^{-1}(t_k) + \varepsilon\right) \geq t_k,$$

para todo $\varepsilon > 0$. De esta manera,

$$t = \lim_{k\to\infty} t_k \leq \lim_{k\to\infty} \Phi\left(\Phi^{-1}(t_k) + \varepsilon\right) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty} \Phi^{-1}(t_k) + \varepsilon\right).$$

Combinando esta estimación con el ítem (a) concluimos que

$$\Phi^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\lim_{k\to\infty} \Phi^{-1}(t_k) + \varepsilon\right)\right) \leq \lim_{k\to\infty} \Phi^{-1}(t_k) + \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Entonces $\lim_{k\to\infty} \Phi^{-1}(t_k) = \Phi^{-1}(t)$, como queríamos demostrar. Para ver la desigualdad supongamos, por el contrario, que $\Phi(\Phi^{-1}(t)) > t$. Como Φ es continua por izquierda, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Phi(\Phi^{-1}(t) - \varepsilon) > t$. Entonces $s = \Phi^{-1}(t) - \varepsilon$ es uno de los elementos que compite para el ínfimo en la definición de $\Phi^{-1}(t)$, de donde $\Phi^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(t) - \varepsilon$, lo cual es absurdo.

Para probar (c) notemos simplemente que

$$\{s \geq 0 : \Phi(s) \geq t\} \subseteq \{s \geq 0 : \Psi(s) \geq t\},$$

y al tomar ínfimo obtenemos $\Psi^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(t)$.

Por último, probemos (d). Si $t = 0$ la igualdad es inmediata. Consideremos $t > 0$ y $0 < \varepsilon < t$. Si $0 \leq s \leq \Phi(t - \varepsilon)$, la parte (a) nos da $\Phi^{-1}(s) \leq \Phi^{-1}(\Phi(t-\varepsilon)) \leq t - \varepsilon$. Entonces,

$$(\Phi^{-1})^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0 : \Phi^{-1}(s) \geq t\} \geq \Phi(t - \varepsilon).$$

Como Φ es continua por izquierda, haciendo $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos que $(\Phi^{-1})^{-1}(t) \geq \Phi(t)$.

Para ver la otra desigualdad, consideremos $\varepsilon > 0$ y observemos que si $\Phi(s) \geq \Phi(t) + \varepsilon$, entonces $s \geq t$, y la definición de inversa generalizada implica que $\Phi^{-1}(\Phi(t) + \varepsilon) \geq t$. Aplicando $(\Phi^{-1})^{-1}$ y utilizando las partes (a) y (b) tenemos que $(\Phi^{-1})^{-1}(t) \leq \Phi(t) + \varepsilon$. Haciendo $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos la desigualdad deseada. $\square$

Observación 1.5. Si Φ es una función invertible y creciente, entonces su función inversa generalizada coincide con la inversa usual. En efecto, es fácil ver que

$$\{s \geq 0 : \Phi(s) \geq \Phi(t)\} = \{s \geq 0 : s \geq t\}$$

y entonces

$$t = \inf\{s \geq 0 : s \geq t\} = \inf\{s \geq 0 : \Phi(s) \geq \Phi(t)\} = \Phi^{-1}(\Phi(t)).$$

El siguiente resultado nos da estimaciones similares a las del Lema 1.2 para la función inversa generalizada.

Lema 1.6. *Sea $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ una función convexa y creciente que verifica $\Phi(0) = 0$. Entonces tenemos que:*

(a) $\Phi^{-1}(at) \geq a\Phi^{-1}(t)$, *si* $0 \leq a \leq 1$;

(b) $\Phi^{-1}(At) \leq A\Phi^{-1}(t)$, *si* $A \geq 1$.

Lema 1.7. *Sea* $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ *una función convexa y continua por izquierda que verifica* $\Phi(0) = 0$ *y* $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$. *Si definimos*

$$t_0 = \sup\{t \geq 0 : \Phi(t) = 0\} \quad y \quad t_\infty = \inf\{t \geq 0 : \Phi(t) = \infty\},$$

entonces

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) = \begin{cases} 0, & si \quad t \leq t_0; \\ t, & si \quad t_0 < t \leq t_\infty; \\ t_\infty, & si \quad t > t_\infty. \end{cases}$$

Demostración. Como Φ es continua por izquierda tenemos que $\Phi(t) = 0$ para $0 \leq t \leq t_0$ y, en consecuencia, $\Phi^{-1}(\Phi(t)) = 0$ para todo $t \leq t_0$. Consideremos ahora $t_0 < t \leq t_\infty$. Como Φ es convexa y positiva en este intervalo, tenemos que es estrictamente creciente y por lo tanto invertible. Así, $\Phi^{-1}(\Phi(t)) = t$ en virtud de la Observación 1.5. Finalmente, si $t > t_\infty$ entonces $\Phi(t) = \infty$ y $\Phi^{-1}(\Phi(t)) = t_\infty$. □

Observación 1.8. En el caso en que la función Φ sea de Young, tenemos que $t_0 = 0$ y $t_\infty = \infty$, con lo cual Φ es invertible y se verifica que $\Phi^{-1}(\Phi(t)) = t$ para todo t.

Lema 1.9. *Sean* $\Phi, \Psi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ *dos funciones crecientes tales que* $\Phi \approx \Psi$. *Entonces existe una constante* $L \geq 1$ *tal que*

$$\Phi^{-1}(t/L) \leq \Psi^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(tL),$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Por hipótesis, sabemos que existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1\Psi(t) \leq \Phi(t) \leq C_2\Psi(t)$$

para todo $t \geq 0$. Sea $L = \max\{C_1^{-1}, C_2\}$. Entonces

$$\Psi^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0 : \Psi(s) \geq t\} \geq \inf\{s \geq 0 : \Phi(s) \geq C_1 t\} = \Phi^{-1}(C_1 t) \geq \Phi^{-1}\left(\frac{t}{L}\right),$$

pues Φ^{-1} es creciente. Por otro lado,

$$\Phi^{-1}(tL) \geq \inf\left\{s \geq 0 : \Psi(s) \geq t\frac{L}{C_2}\right\} \geq \inf\{s \geq 0 : \Psi(s) \geq t\} = \Psi^{-1}(t),$$

por ser Ψ^{-1} creciente. Luego, hemos obtenido que

$$\Phi^{-1}(t/L) \leq \Psi^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(tL),$$

y esto completa la prueba. □

Combinando los Lemas 1.1 y 1.9 podemos obtener el siguiente resultado, del cual haremos uso luego.

Corolario 1.10. *Sean* $\Phi, \Psi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ *dos funciones crecientes tales que* $\Phi \approx \Psi$ *y* $\Psi^{-1} \in \triangle_2$. *Entonces* $\Psi^{-1} \approx \Phi^{-1}$.

En algunas ocasiones podremos debilitar la condición de que la función involucrada sea creciente. Diremos que una función $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ es **casi creciente** si existe una constante $K \geq 1$ tal que

$$\Phi(s) \leq K\Phi(t)$$

para todo $0 \leq s < t$.

Integrando la desigualdad anterior con respecto a s obtenemos que

$$\int_0^t \Phi(s)\, ds \leq K t \Phi(t),$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Phi(s)\, ds \leq K\Phi(t), \qquad \text{para todo } t > 0. \tag{1.3}$$

Si Φ satisface (1.3) diremos que es una función **débilmente casi creciente**.

Sea $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ una función que verifica que $\lim_{t\to 0^+} \Phi(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$, es continua por izquierda y $\Phi(t)/t$ es casi creciente en $(0, \infty)$. La **función complementaria** de Φ se denota por $\tilde{\Phi}$ y se define, para $t \geq 0$, como

$$\tilde{\Phi}(t) = \sup\{ts - \Phi(s) : s \geq 0\}.$$

De esta definición se sigue inmediatamente que Φ y $\tilde{\Phi}$ satisfacen la **desigualdad de Young** (ver, por ejemplo, [40]), es decir,

$$st \leq \Phi(s) + \tilde{\Phi}(t). \tag{1.4}$$

El siguiente lema reúne algunas propiedades importantes de las funciones complementarias.

Lema 1.11. *Si* $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ *es una función con las propiedades mencionadas anteriormente, entonces*

(a) $\tilde{\Phi}(0) = 0$;

(b) $\tilde{\Phi}$ *es convexa, creciente y continua por izquierda;*

(c) $\lim_{t\to 0^+} \tilde{\Phi}(t) = 0$ *y* $\lim_{t\to\infty} \tilde{\Phi}(t) = \infty$.

Demostración. Para probar el inciso (a), por la definición de $\tilde{\Phi}$ tenemos que

$$\tilde{\Phi}(0) = \sup\{-\Phi(s) : s \geq 0\} = 0.$$

Veamos (b). Si $t_1 < t_2$ entonces $t_1 s - \Phi(s) < t_2 s - \Phi(s)$, para todo $s \geq 0$. De esta manera,

$$\sup\{t_1 s - \Phi(s) : s \geq 0\} \leq \sup\{t_2 s - \Phi(s) : s \geq 0\},$$

lo cual muestra que $\tilde{\Phi}(t_1) \leq \tilde{\Phi}(t_2)$. Para mostrar que $\tilde{\Phi}$ es convexa, dados t_1, t_2 y $0 \leq \theta \leq 1$, notemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(\theta t_1 + (1-\theta)t_2) &= \sup_{s\geq 0}\{s(\theta t_1 + (1-\theta)t_2) - \Phi(s)\} \\
&= \sup_{s\geq 0}\{\theta(st_1 - \Phi(s)) + (1-\theta)(st_2 - \Phi(s))\} \\
&\leq \theta \sup_{s\geq 0}\{st_1 - \Phi(s)\} + (1-\theta)\sup_{s\geq 0}\{(st_2 - \Phi(s))\} \\
&= \theta\tilde{\Phi}(t_1) + (1-\theta)\tilde{\Phi}(t_2).
\end{aligned}$$

Probemos ahora la continuidad por izquierda. Sea $t_\infty = \text{ínf}\{t \geq 0 : \tilde{\Phi}(t) = \infty\}$. La convexidad implica continuidad en $[0, t_\infty)$. Si $t_\infty = \infty$ no hay nada que probar. Si $t_\infty < \infty$, entonces es claro que $\tilde{\Phi}(t) = \infty$ en (t_∞, ∞). En este caso basta con mostrar la continuidad por izquierda en t_∞. Para cada $0 < \lambda < 1$ tenemos que $\tilde{\Phi}(\lambda t_\infty) \leq \tilde{\Phi}(t_\infty)$, lo cual implica que $\text{lím sup}_{\lambda\to 1^-} \tilde{\Phi}(\lambda t_\infty) \leq \tilde{\Phi}(t_\infty)$. Sea ahora $m < \tilde{\Phi}(t_\infty)$ y t_0 tal que $t_0 t_\infty - \tilde{\Phi}(t_0) \geq m$. Entonces, por la definición de $\tilde{\Phi}$, tenemos:

$$\liminf_{\lambda\to 1^-} \tilde{\Phi}(\lambda t_\infty) \geq \liminf_{\lambda\to 1^-}(t_0\lambda t_\infty - \Phi(t_0)) = t_0 t_\infty - \Phi(t_0) \geq m,$$

y haciendo $m \to \tilde{\Phi}(t_\infty)$ obtenemos que $\text{lím}_{\lambda\to 1^-} \tilde{\Phi}(\lambda t_\infty) = \tilde{\Phi}(t_\infty)$.

Para terminar, veamos (c). Como $\text{lím}_{t\to 0^+} \Phi(t) = 0$, existe $s_1 > 0$ tal que $\Phi(s_1) < \infty$. Para todo $t > 0$, $\tilde{\Phi}(t) \geq s_1 t - \Phi(s_1)$, o bien $\tilde{\Phi}(t) + \Phi(s_1) \geq s_1 t$. Esto nos dice que $\text{lím}_{t\to\infty} \tilde{\Phi}(t) = \infty$. Por otro lado, existe $s_2 > 0$ tal que $\Phi(s_2) > 0$. Por la condición casi creciente de $\Phi(t)/t$ tenemos que

$$\frac{\Phi(s_2)}{Ks_2} \leq \frac{\Phi(s)}{s}, \text{ para todo } s \geq s_2.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(t) &= \sup_{s\geq 0}\{ts - \Phi(s)\} \\
&\leq \sup_{0\leq s<s_2}\{ts - \Phi(s)\} + \sup_{s\geq s_2}\{ts - \Phi(s)\} \\
&\leq ts_2 + \sup_{s\geq s_2}\left\{ts - \frac{\Phi(s_2)}{Ks_2}s\right\}.
\end{aligned}$$

Notar que si $t < \Phi(s_2)/(Ks_2)$, el supremo en la última desigualdad es cero. Esto, combinado con el hecho de que $\tilde{\Phi} \geq 0$, nos permite concluir que $\text{lím}_{t\to 0^+} \tilde{\Phi}(t) = 0$. $\square$

Observación 1.12. Si $\Phi(t) = t$ entonces $\tilde{\Phi}(t) = \infty\mathcal{X}_{(1,\infty)}(t)$. Este ejemplo nos muestra que, aun cuando $\Phi(t) < \infty$ para todo t, su función complementaria puede tomar el valor ∞. También es claro que si $\tilde{\Phi}(t_0) = \infty$ para algún t_0, entonces $\tilde{\Phi}(t) = \infty$ en $[t_0, \infty)$ dado que $\tilde{\Phi}$ es creciente.

Lema 1.13. *Sea $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ una función convexa y continua por izquierda, tal que $\text{lím}_{t\to 0^+} \Phi(t) = 0$ y $\text{lím}_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$. Si $b = \text{lím}_{t\to 0^+} \Phi(t)/t = \Phi'(0)$, entonces $\tilde{\Phi}(t) = 0$ si y solo si $t \leq b$.*

Demostración. Como Φ es convexa, $\Psi(s) = \Phi(s)/s$ es creciente. En particular, $b \leq \Psi(s)$ para todo s. Además:

$$\tilde{\Phi}(t) = \sup_{s\geq 0} \{s\,(t - \Psi(s))\}\,.$$

Si $t \leq b$, entonces $t - \Psi(s) \leq 0$, con lo cual $\tilde{\Phi}(t) = 0$. Recíprocamente, si $t > b$ existe un $s_0 > 0$ tal que $t - \Psi(s_0) > 0$. Así, $\tilde{\Phi}(t) > 0$. $\square$

El siguiente lema nos da una relación importante que verifican las inversas de una función de Young y su complementaria.

Lema 1.14. *Sea Φ una función de Young. Entonces*

$$\frac{t}{2} \leq \Phi^{-1}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t) \leq 2t,$$

para todo $0 < t < \infty$.

Demostración. Por la definición de $\tilde{\Phi}$ podemos escribir, para $s > 0$,

$$\tilde{\Phi}\left(\frac{\Phi(s)}{s}\right) = \sup_{z\geq 0}\left\{z\frac{\Phi(s)}{s} - \Phi(z)\right\} = \sup_{z\geq 0}\left\{z\left(\frac{\Phi(s)}{s} - \frac{\Phi(z)}{z}\right)\right\}.$$

Como Φ es de Young, $\Psi(t) = \Phi(t)/t$ es creciente, con lo cual el supremo de arriba se alcanza en $[0, s]$. Así,

$$\sup_{z\in[0,s]}\left\{z\left(\frac{\Phi(s)}{s} - \frac{\Phi(z)}{z}\right)\right\} \leq \sup_{z\in[0,s]}\left\{z\frac{\Phi(s)}{s}\right\} \leq \Phi(s).$$

Por otro lado, eligiendo $z = s$

$$\tilde{\Phi}\left(2\frac{\Phi(s)}{s}\right) = \sup_{z\geq 0}\left\{2z\frac{\Phi(s)}{s} - \Phi(z)\right\} \geq 2\Phi(s) - \Phi(s) = \Phi(s).$$

De esta manera, tenemos que

$$\tilde{\Phi}\left(\frac{\Phi(s)}{s}\right) \leq \Phi(s) \leq \tilde{\Phi}\left(2\frac{\Phi(s)}{s}\right).$$

Dado que Φ es de Young, fijado $t > 0$ existe $s > 0$ tal que $\Phi(s) = t$ y $\Phi^{-1}(t) = s$ en virtud de la Observación 1.8. Entonces

$$\frac{\Phi(s)}{s} = \frac{t}{\Phi^{-1}(t)} =: u$$

y podemos escribir la desigualdad de arriba como

$$\tilde{\Phi}(u) \leq t \leq \tilde{\Phi}(2u).$$

Utilizando la parte (a) del Lema 1.4 obtenemos que

$$\tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{\Phi}(u)) \leq \tilde{\Phi}^{-1}(t) \leq 2u = \frac{2t}{\Phi^{-1}(t)}, \tag{1.5}$$

de donde se sigue que $\Phi^{-1}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t) \leq 2t$.

Para ver la otra desigualdad, supongamos primero que $\Phi'(0) = \lim_{t\to 0^+} \Phi(t)/t = 0$. En este caso, por el Lema 1.13 tenemos que $\tilde{\Phi}(t) > 0$ para todo $t > 0$. El Lema 1.7 nos da $\tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{\Phi}(u)) = \min\{u, u_\infty\}$, donde $u_\infty = \inf\{s > 0 : \tilde{\Phi}(s) = \infty\}$. Si $u \leq u_\infty$, entonces por (1.5) tenemos que

$$u = \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{\Phi}(u)) \leq \tilde{\Phi}^{-1}(t)$$

o, equivalentemente, $t \leq \Phi^{-1}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t)$. Si $u > u_\infty$ entonces $\infty = \tilde{\Phi}(u) \leq t < \infty$, con lo cual este caso no puede ocurrir.

Supongamos ahora que $\Phi'(0) = b > 0$. Definimos $\eta(t) = \Phi(t) - bt$. Entonces η es convexa y $\eta'(0) = 0$. Como $\Phi(t) \leq 2\max\{bt, \eta(t)\}$, la parte (c) del Lema 1.4 y el Lema 1.6 nos permiten concluir que

$$\Phi^{-1}(s) \geq \frac{1}{2}\min\left\{\frac{s}{b}, \eta^{-1}(s)\right\}. \tag{1.6}$$

Por otra parte, si $s > b$ obtenemos que

$$\tilde{\Phi}(s) = \sup_{z\geq 0}\{zs - \Phi(z)\} = \sup_{z\geq 0}\{z(s-b) - (\Phi(z) - zb)\} = \tilde{\eta}(s-b).$$

Si $0 \leq s < b$ entonces el segundo supremo de arriba es 0, con lo cual

$$\tilde{\Phi}(s) = \tilde{\eta}(\max\{s-b, 0\}),$$

dado que $\tilde{\eta}(0) = 0$. Con esto,

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}^{-1}(t) + b &= \inf\{z \geq 0 : \tilde{\eta}(z) \geq t\} + b \\
&= \inf\{z + b : z \geq 0 \text{ y } \tilde{\eta}(z) \geq t\} \\
&= \inf\{u \geq b : \tilde{\eta}(u-b) \geq t\} \\
&= \inf\{r \geq 0 : \tilde{\Phi}(r) \geq t\} \\
&= \tilde{\Phi}^{-1}(t).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\tilde{\Phi}^{-1}(t) = \tilde{\eta}^{-1}(t) + b. \tag{1.7}$$

Combinando (1.6) y (1.7) obtenemos que

$$\Phi^{-1}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t) \geq \frac{1}{2}\min\left\{\frac{t}{b}, \eta^{-1}(t)\right\}(b + \tilde{\eta}^{-1}(t)) \geq \frac{t}{2},$$

dado que $\eta^{-1}(t)\tilde{\eta}^{-1}(t) \geq t$ por lo probado en el otro caso, ya que $\eta'(0) = 0$. La prueba queda completa. □

En algunas ocasiones resultará de utilidad acotar una función por otra de tipo potencia. Para ello, definiremos los conceptos de tipo superior e inferior.

Dado $0 < q < \infty$, diremos que una función $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ es de **tipo inferior** q si existe una constante positiva C de modo que

$$\Phi(st) \leq C s^q \Phi(t),$$

para todo $t \geq 0$ y todo $0 \leq s \leq 1$. Análogamente, Φ es de **tipo superior** q si la desigualdad de arriba vale para todo $t \geq 0$ y $s \geq 1$.

Decimos que una función $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ pertenece a la **clase** $\boldsymbol{B_p}$, $1 < p < \infty$, si existe una constante positiva c de modo que

$$\int_c^\infty \frac{\Phi(s)}{s^p} \frac{ds}{s} < \infty. \tag{1.8}$$

Esta condición fue introducida por C. Pérez en [39] y guarda estrecha relación con la acotación del operador maximal generalizado M_Φ asociado a la función Φ de Young (ver Teorema 1.57).

Existe una relación entre las clases B_p y el tipo superior de Φ, la cual se resume en la siguiente proposición.

Proposición 1.15. *Sean $r \geq 1$ y $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ una función de tipo superior r. Entonces $\Phi \in B_p$ para todo $p > r$.*

Demostración. Fijemos $p > r$. Tomando $c = 1$ podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\Phi(s)}{s^p} \frac{ds}{s} &\lesssim \int_1^\infty s^{r-p-1}\, ds \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^{r-p}}{r-p} - \frac{1}{r-p} \right) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

El siguiente lema establece un control para las funciones de Young en B_p por otra de tipo potencia, para t suficientemente grande.

Lema 1.16. *Sean $1 < p < \infty$ y Φ una función de Young en la clase B_p. Entonces existe una constante positiva C_p tal que $\Phi(t) \leq C_p t^p$, para todo $t \geq c$, donde c es la constante que aparece en* (1.8).

Demostración. Como $\Phi \in B_p$, sabemos que $0 < \alpha_p < \infty$, donde

$$\alpha_p = \int_c^\infty \frac{\Phi(s)}{s^p} \frac{ds}{s}.$$

Entonces, si $t \geq c$

$$\alpha_p \geq \int_t^{2t} \frac{\Phi(s)}{s^p} \frac{ds}{s} \geq \Phi(t) \int_t^{2t} s^{-p-1}\, ds = \frac{\Phi(t)}{p} \left(t^{-p} - (2t)^{-p} \right) = \frac{\Phi(t)}{p} \frac{2^p - 1}{2^p} t^{-p},$$

y esto implica la tesis tomando $C_p = \alpha_p p \frac{2^p}{2^p-1}$.

□

La siguiente proposición resultará útil para estimar una función de Young evaluada en un producto por la suma de dos funciones de Young adecuadas, evaluadas en cada uno de los factores. Esta estimación permite deducir la desigualdad de Hölder generalizada (ver Teorema 1.53).

Proposición 1.17. *Sean Φ, Ψ y $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty]$ tres funciones de Young tales que*

$$\Psi^{-1}(t)\eta^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(t),$$

para todo t. Entonces, tenemos que

$$\Phi(st) \leq \Psi(s) + \eta(t),$$

para todos s y t.

Como mencionamos al comienzo, las funciones del tipo $L^r(\log L)^\delta$ con $r \geq 1$ y $\delta \geq 0$ son de Young. Finalizaremos esta sección enunciando algunas propiedades de este tipo de funciones, que serán de utilidad en la prueba de los resultados principales. La demostración de las mismas puede encontrarse en el Apéndice.

Proposición 1.18. *Sea $\Phi(t) = t^r(1 + \log^+ t)^\delta$, donde $r > 0$ y $\delta \geq 0$. Entonces:*

(a) *Φ es submultiplicativa;*

(b) *$\Phi(t) \approx \Psi(t)$, donde $\Psi(t) = t^r \log(e + t)^\delta$;*

(c) *$\Phi^{-1}(t) \approx t^{1/r}(1 + \log^+ t)^{-\delta/r}$;*

(d) *si $r > 1$, $\tilde{\Phi}(t) \approx t^{r'}(1 + \log^+ t)^{-\delta/(r-1)}$. Si $r = 1$ y $\delta > 0$, $\tilde{\Phi}(t) \approx (e^{t^{1/\delta}} - e)\mathcal{X}_{(1,\infty)}(t)$;*

(e) *para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante positiva C tal que $\Phi(t) \leq Ct^{r+\varepsilon}$, para $t \geq 1$.*

1.2. Espacios de medida

Sea X un conjunto no vacío. Un **álgebra** $\mathcal{A}$ sobre X es una colección no vacía de subconjuntos de X que es cerrada bajo uniones finitas y complementos, es decir que si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ y que si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$. Una **σ-álgebra** $\mathcal{C}$ sobre X es un álgebra que es cerrada por uniones numerables.

Sea X un conjunto no vacío, dotado con una σ-álgebra $\mathcal{C}$. Una **medida** μ es una función $\mu : \mathcal{C} \to [0,\infty]$ tal que

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- si $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ es una colección disjunta de elementos en $\mathcal{C}$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

Si $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra, entonces $(X, \mathcal{C})$ es un **espacio medible** y los elementos de $\mathcal{C}$ son **conjuntos medibles**. Si μ es una medida en $(X, \mathcal{C})$ entonces diremos que $(X, \mathcal{C}, \mu)$ o directamente (X, μ) es un **espacio de medida**.

Si X es un espacio euclídeo, la medida clásica por excelencia es la medida de Lebesgue. Si E es un conjunto medible Lebesgue, denotaremos con $|E|$ a la medida de Lebesgue de E. Si $X = \mathbb{R}$ y $E = (a, b)$, entonces $|E| = b - a$. Más generalmente, en $\mathbb{R}^n$, $|\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

Sean $(X, \mathcal{C}_X)$ e $(Y, \mathcal{C}_Y)$ espacios medibles. Diremos que una función $f : X \to Y$ es $(\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y)$-**medible** o simplemente **medible** si $\{x \in X : f(x) \in B\} \in \mathcal{C}_X$ para todo $B \in \mathcal{C}_Y$. Sea (X, μ) un espacio de medida. Un conjunto $N \subseteq X$ que verifica $\mu(N) = 0$ se llama **conjunto nulo**. Si una propiedad se verifica para todo punto $x \in X$ salvo para puntos de un conjunto nulo, diremos que la propiedad se satisface en **casi todo punto** con respecto a μ y lo denotaremos c.t.p.(μ). Si f es una función medible definida sobre X, diremos que f es **integrable** si

$$\int_X |f(x)|\, d\mu(x) < \infty.$$

Si E es cualquier subconjunto medible de X, f es integrable sobre E si $f\mathcal{X}_E$ es integrable. Aquí $\mathcal{X}_E$ denota la función característica del conjunto E, que toma el valor 1 si $x \in E$, y 0 si no.

Cuando resulte claro del contexto cuál es la medida con la que estamos trabajando y no sea necesario explicitar la variable de integración, usaremos la notación

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \int_E f.$$

Los espacios $L^p(X, \mu)$ son espacios de funciones que juegan un papel muy importante en la acotación de algunos de los operadores más conocidos del Análisis Armónico. Para $1 \leq p \leq \infty$, estos espacios resultan normados y completos con la norma dada por

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} := \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Para $p = \infty$ se define

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} := \inf \{M > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Los **espacios** $L^p(X, \mu)$ se definen entonces como los conjuntos de funciones $\mu-$medibles cuya norma p es finita, es decir,

$$L^p(X, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ medibles } : \|f\|_{L^p(X,\mu)} < \infty \right\}.$$

El caso $p = 1$ corresponde al espacio $L^1(X, \mu)$ de las funciones integrables. Denotaremos con $L^1_{loc}(X)$ al espacio de las funciones **localmente integrables** sobre X, es decir, aquellas que son integrables sobre conjuntos compactos de X. Más generalmente, dada una función φ podemos definir $L^\varphi_{loc}(X)$ como el espacio de funciones que verifican que $\varphi(f) \in L^1_{loc}(X)$. En el caso $\varphi(t) = t^p$ denotaremos esto directamente como $L^p_{loc}(X)$.

Cuando $X = \mathbb{R}^n$ y μ sea la medida de Lebesgue escribiremos simplemente L^p en lugar de $L^p(X,\mu)$.

Cabe destacar que cuando $0 < p < 1$, $L^p(X,\mu)$ no es un espacio normado pues no se verifica la desigualdad triangular. Sin embargo, sí se trata de una casi-norma pues se puede probar que

$$\|f+g\|_{L^p(X,\mu)} \leq 2^{(1-p)/p}\left(\|f\|_{L^p(X,\mu)} + \|g\|_{L^p(X,\mu)}\right).$$

Diremos que dos funciones $f, g \in L^p(X,\mu)$ son iguales si $f(x) = g(x)$ en c.t.p.(μ) $x \in X$.

Dado $1 < p < \infty$ denotaremos con p' al **exponente conjugado** de p, es decir, el número que satisface $1/p + 1/p' = 1$. De esta relación, $p' = p/(p-1)$. Además, para los casos extremos $p = 1$ y $p = \infty$ denotamos respectivamente $1' = \infty$ y $\infty' = 1$.

El siguiente teorema nos da la clásica desigualdad de Hölder para los espacios $L^p(X,\mu)$, la cual nos dice que el producto de una función de $L^p(X,\mu)$ y otra de $L^{p'}(X,\mu)$ siempre es una función de $L^1(X,\mu)$. La prueba puede encontrarse, por ejemplo, en [18].

Teorema 1.19 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea (X,μ) un espacio de medida. Si f y g son funciones medibles y $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$\|fg\|_{L^1(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} \|g\|_{L^{p'}(X,\mu)},$$

donde p' es el exponente conjugado de p.

Como consecuencia de este teorema tenemos la siguiente desigualdad.

Corolario 1.20. *Sean (X,μ) un espacio de medida, $E \subseteq X$ un conjunto de medida finita, $p > 1$ y $f \in L^p(X,\mu)$. Entonces*

$$\left(\frac{1}{|E|}\int_E |f(x)|\, d\mu(x)\right)^p \leq \frac{1}{|E|}\int_E |f(x)|^p\, d\mu(x).$$

Esto nos permite probar, además, que si $\mu(X) < \infty$, $L^p(X,\mu) \subseteq L^q(X,\mu)$ cuando $1 \leq q < p$.

Observación 1.21. La desigualdad anterior es válida en un contexto más general. Más precisamente, si φ es una función no negativa y convexa, entonces

$$\varphi\left(\frac{1}{|E|}\int_E |f(x)|\, dx\right) \leq \frac{1}{|E|}\int_E \varphi(|f(x)|)\, dx,$$

para cualquier conjunto medible E con $0 < |E| < \infty$. Esta desigualdad se conoce como **Desigualdad de Jensen**.

La **función de distribución** $d_f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ de una función medible f en (X,μ) está dada por

$$d_f(t) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}).$$

Esta función nos da alguna información acerca del "tamaño" de f y es sencillo ver que es decreciente, entre otras propiedades.

La siguiente proposición resulta de utilidad para calcular integrales con respecto a una medida μ de expresiones que involucren a cierta función f, a través de una integral en $\mathbb{R}$ utilizando su función de distribución d_f. Una prueba de la misma puede encontrarse en [13].

Proposición 1.22. *Sean (X,μ) un espacio de medida y $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función creciente, derivable y que verifica que $\varphi(0)=0$. Entonces*

$$\int_X \varphi(f(x))\,d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi'(t) d_f(t)\,dt.$$

Otro espacio que consideraremos es el denotado por $L^{p,\infty}(X,\mu)$ y también conocido como $L^p(X,\mu)$-débil. Este espacio se define como el conjunto de todas las funciones μ-medibles tales que la cantidad

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} :&= \operatorname{ínf}\left\{C>0 : d_f(\lambda) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\right)^p\right\}\\ &= \sup_{t>0} t d_f(t)^{1/p}\end{aligned}$$

es finita. Se puede ver que $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ no es una norma, dado que no se verifica la desigualdad triangular. Luego, si $0<p<\infty$, $L^{p,\infty}(X,\mu)$ es un espacio vectorial casi-normado.

El espacio $L^\infty(X,\mu)$-débil coincide, por definición, con $L^\infty(X,\mu)$. El siguiente resultado establece una relación entre $L^p(X,\mu)$ y $L^{p,\infty}(X,\mu)$.

Teorema 1.23 (Desigualdad de Tchebychev)**.** *Sea $0<p<\infty$ y $f \in L^p(X,\mu)$. Entonces*

$$d_f(t) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p(X,\mu)}}{t}\right)^p.$$

Esta desigualdad implica directamente que $L^p(X,\mu) \subseteq L^{p,\infty}(X,\mu)$. Además, como es bien sabido, esta contención es estricta.

Si f es una función medible en un espacio de medida (X,μ), se define la **reordenada no creciente** de f como la función $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ dada por

$$f^*(t) = \operatorname{ínf}\{s>0 : d_f(s) \leq t\}.$$

De esta definición, podemos observar que f^* es decreciente y, en el caso en que $\mu(X)<\infty$, está soportada en el intervalo $[0,\mu(X)]$. También puede probarse (ver, por ejemplo, [18]) que

$$\sup_{t>0} t^s f^*(t) = \sup_{r>0} r(d_f(r))^s, \quad 0<s<\infty. \tag{1.9}$$

Si (X,μ) es un espacio de medida y $0<p,q\leq\infty$, se define

$$\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & \text{si } q<\infty;\\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & \text{si } q=\infty.\end{cases}$$

El conjunto de todas las funciones medibles f en (X,μ) tales que $\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} < \infty$ se conoce como **espacio de Lorentz** $L^{p,q}(X,\mu)$. Cuando $q=\infty$, usando (1.9) se deduce que estos espacios son los $L^p(X,\mu)$-débiles.

La siguiente proposición, cuya demostración es directa, será de utilidad en algunas estimaciones.

Proposición 1.24. *Sean (X,μ) un espacio de medida, f una función medible y $1 \le p < \infty$. Entonces*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \|f^p\|_{L^{1,\infty}(X,\mu)}^{1/p}.$$

Si (X,μ) es un espacio de medida y Φ es una función de Young, se define el **espacio de Orlicz** $L^\Phi(X,\mu)$ como el conjunto de funciones medibles sobre (X,μ) que verifican que

$$\int_X \Phi\left(\varepsilon|f(x)|\right) d\mu(x) < \infty \qquad \text{para algún } \varepsilon > 0.$$

Si consideramos el funcional

$$\rho_\Phi(f) = \int_X \Phi(|f(x)|)\, d\mu(x),$$

entonces la cantidad

$$\|f\|_{L^\Phi(X,\mu)} := \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_X \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x) \le 1\right\}$$

define una norma en $L^\Phi(X,\mu)$.

Los espacios $L^\Phi(X,\mu)$ pueden verse como una generalización de los $L^p(X,\mu)$. No es difícil comprobar que si consideramos $\Phi(t)=t^p$, $1\le p<\infty$, tenemos que $L^\Phi(X,\mu) = L^p(X,\mu)$, pues

$$\begin{aligned}\int_X \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x) \le 1 &\Longleftrightarrow \int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) \le \lambda^p\\ &\Longleftrightarrow \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} \le \lambda,\end{aligned}$$

y el ínfimo de tales λ resulta ser justamente $\|f\|_{L^p(X,\mu)}$.

Otras propiedades interesantes de la norma $\|\cdot\|_{L^\Phi(X,\mu)}$ son que $\|f\|_{L^\Phi(X,\mu)} \le 1$ si y solo si $\rho_\Phi(f) \le 1$ y que $\rho_\Phi(f/\|f\|_{L^\Phi(X,\mu)}) \le 1$. Una prueba de las mismas puede encontrarse en [40].

El **espacio de Orlicz débil** $\tilde{L}^\Phi(X,\mu)$ se define como el conjunto de funciones medibles en (X,μ) para las cuales

$$\sup_{t>0} \Phi(t)\mu(\{x\in X : |f(x)| > t\}) < \infty.$$

Variantes útiles de todos los espacios introducidos resultan ser los espacios pesados, donde la medida está dada por $d\nu(x) = w(x)\, d\mu(x)$, siendo w un **peso**, es decir, una función positiva y localmente integrable. Más adelante se detallarán propiedades importantes de estas funciones y las clases más usuales de las mismas. Así, por ejemplo, el espacio $L^p(X,\nu)$ está dado, para $1 \leq p < \infty$, como el conjunto de funciones medibles para las cuales

$$\left(\int_X |f(x)|^p w(x)\, d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Entonces, se tiene que $f \in L^p(X,\nu)$ si y solo si $fw^{1/p} \in L^p(X,\mu)$. Para el caso $p = \infty$, notar que, si E es ν-medible,

$$\nu(E) = \int_E w(x) d\mu(x),$$

y esto nos dice que $d\nu/d\mu = w$ y ν es absolutamente continua con respecto a μ, es decir, $\mu(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$. Además, si $\nu(E) = 0$ entonces debe ser $\mu(E) = 0$ ya que w es un peso. Así, los conjuntos nulos con respecto a ambas medidas coinciden, lo que nos conduce a que $L^\infty(X,\nu) = L^\infty(X,\mu)$.

Cuando $X = \mathbb{R}^n$ y μ sea la medida de Lebesgue, denotaremos a estos espacios simplemente por $L^p(w)$.

1.3. Clases de pesos

En la sección anterior se definió un peso w como una función positiva y localmente integrable. En esta sección consideraremos el espacio $X = \mathbb{R}^n$ y μ la medida de Lebesgue. Los pesos juegan un papel muy importante a la hora de establecer las acotaciones de algunos operadores del Análisis Armónico, tales como la maximal de Hardy-Littlewood o los operadores de Calderón-Zygmund. Gran parte de la teoría de integrales singulares involucra el problema de determinar cuáles son los pesos adecuados para lograr acotaciones entre diferentes espacios. Uno de los primeros resultados sobre esto, que motivó la definición de las conocidas clases A_p, se debe a Benjamin Muckenhoupt en los años 70.

Sea w un peso y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida positiva. Denotaremos con $w(E) = \int_E w(x)\, dx$ y definimos el **promedio** de w sobre E por

$$w_E = \frac{w(E)}{|E|}.$$

También denotaremos con $\operatorname{ínf}_E w$ y $\sup_E w$ al ínfimo y supremo esencial de w sobre el conjunto E, respectivamente. Esto es,

$$\operatorname*{ínf}_E w = \sup\{M > 0 : |\{x \in E : w(x) < M\}| = 0\}, \text{ y}$$
$$\sup_E w = \operatorname{ínf}\{M > 0 : |\{x \in E : w(x) > M\}| = 0\}.$$

Para las definiciones que siguen utilizaremos cubos en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados, es decir, $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ donde $a_i < b_i$, $1 \leq i \leq n$. Con $\ell(Q)$ denotaremos a la longitud del lado del cubo Q, esto es, $\ell(Q) = b_i - a_i$, para todo i.

En algunos casos será útil trabajar con bolas en lugar de cubos. Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, denotaremos con $B(x,r)$ a la bola centrada en el punto x y con radio r, es decir,

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}.$$

Dada una función medible f denotaremos con L_f al **conjunto de puntos de Lebesgue de f**. Este conjunto está dado por

$$L_f = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|\, dy = 0 \right\}.$$

Cuando $f \in L^1_{loc}$, $|\mathbb{R}^n \setminus L_f| = 0$ (ver, por ejemplo, [14]).

Observación 1.25. Dado un número $r > 0$, si Q_r es el cubo centrado en x con $\ell(Q) = 2r$ entonces

$$B(x,r) \subseteq Q_r \subseteq B(x, \sqrt{n}r),$$

con lo cual $B(x,r)$ y Q_r tienen medida comparable. Además, cada uno está contenido en un dilatado del otro, también con medidas comparables. Esto nos permite trabajar indistintamente con bolas o cubos en la definición de L_f. Más aún, los operadores maximales que introduciremos más adelante, definidos a partir de bolas o de cubos, resultan equivalentes.

La primera familia de pesos que presentaremos es la **clase** A_p de Muckenhoupt. Diremos que un peso w está en A_p, para $1 < p < \infty$, si existe una constante positiva C tal que para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ se satisface

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'}\, dx \right)^{p-1} \leq C, \tag{1.10}$$

donde p y p' son exponentes conjugados.

La desigualdad (1.10) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\sup_Q |Q|^{-1} \left\| w^{1/p} \mathcal{X}_Q \right\|_{L^p} \left\| w^{-1/p} \mathcal{X}_Q \right\|_{L^{p'}} < \infty. \tag{1.11}$$

Observación 1.26. Notar que el producto de los promedios que aparecen arriba es siempre mayor o igual que 1. En efecto,

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1/p} w^{-1/p} \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-p'/p} \right)^{1/p'} \\ &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

y elevando a la p ambos miembros resulta

$$1 \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{p-1}.$$

Si además $w \in A_p$, este producto de promedios está acotado superiormente. Esto permite pensar a la clase A_p como una especie de desigualdad de Hölder "al revés". Más adelante veremos que, efectivamente, los pesos de A_p verifican una desigualdad de este estilo.

Cuando $p = 1$ decimos que w pertenece a la **clase** A_1 de Muckenhoupt si existe una constante positiva C tal que, para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)\, dx \leq Cw(x), \tag{1.12}$$

para casi todo $x \in Q$. De esta definición se desprende rápidamente que si $w \in A_1$, entonces el promedio de w sobre el cubo Q es comparable al ínfimo esencial de w en ese cubo. Teniendo en cuenta (1.11), si $p = 1$, entonces $p' = \infty$ y obtenemos la siguiente forma equivalente de (1.12):

$$\sup_Q |Q|^{-1} \|w\mathcal{X}_Q\|_{L^1} \|1/w\mathcal{X}_Q\|_{L^\infty} < \infty. \tag{1.13}$$

Si $p = \infty$, se define la **clase** A_∞ como

$$A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p.$$

Existen muchas otras maneras de describir la clase A_∞. Las mismas pueden encontrarse en [18]. Una de las más conocidas es la siguiente: $w \in A_\infty$ si y solo si existen constantes positivas C y ε tales que

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\varepsilon \tag{1.14}$$

para todo cubo Q y todo subconjunto medible E de Q.

Dado $w \in A_p$, la constante más chica para la cual se verifican las condiciones (1.10) o (1.12) se denomina **constante característica** A_p **de** w y se denota por $[w]_{A_p}$.

La siguiente proposición nos da algunas de las propiedades más importantes de los pesos A_p.

Proposición 1.27. *Para un peso w valen las siguientes propiedades:*

(a) $[w]_{A_p} \geq 1$, *para* $1 \leq p < \infty$;

(b) *las clases A_p son crecientes en p, es decir, si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $A_p \subseteq A_q$ y $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$;*

(c) *si $w \in A_p$, con $1 < p < \infty$, entonces $\sigma := w^{1-p'} \in A_{p'}$ con $[\sigma]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1}$;*

(d) *si w_0, w_1 son pesos de la clase A_1, entonces $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$, para todo $1 < p < \infty$;*

(e) *si $w \in A_p$ para algún p, entonces la medida $d\mu(x) = w(x)\, dx$ es duplicante, esto es, existe una constante $C = C(n,p) \geq 1$ tal que*

$$w(2Q) \leq Cw(Q),$$

para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$.

Demostración. Las pruebas de los incisos (a) a (d) pueden encontrarse en [18] o en [13]. Probemos entonces (e). Si $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, de la hipótesis en w y la Observación 1.26 tenemos

$$\begin{aligned} w(2Q) &= |2Q|^p \left(\frac{w(2Q)}{|2Q|}\right)\left(\frac{w^{1-p'}(2Q)}{|2Q|}\right)^{p-1}\left(w^{1-p'}(2Q)\right)^{1-p} \\ &\le [w]_{A_p} 2^{np}\left(\frac{w^{1-p'}(Q)}{|Q|}\right)^{1-p}\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^{-1} w(Q) \\ &\le [w]_{A_p} 2^{np} w(Q). \end{aligned}$$

□

La recíproca del inciso (d) de la proposición anterior también es cierta, y forma parte de un importante teorema debido a Peter Jones en [22].

Teorema 1.28 (Teorema de factorización de Jones)**.** *Un peso w pertenece a la clase A_p, $1 < p < \infty$, si y solo si existen pesos w_0, w_1 en la clase A_1 tales que $w = w_0 w_1^{1-p}$.*

La siguiente proposición da una manera de estimar el conjunto de nivel de un peso de A_∞ cuando está restringido a un cubo Q de $\mathbb{R}^n$. Si bien en [34] esta propiedad se prueba suponiendo que w está en la clase A_1, la misma demostración puede adaptarse para $w \in A_\infty$.

Proposición 1.29. *Sea $w \in A_\infty$, $\lambda > 0$ y Q un cubo de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existen constantes positivas C_0 y ξ de modo que*

$$|\{w(x) > \lambda\} \cap Q| \le C_0 |Q| \left[\frac{1}{\lambda |Q|}\int_Q w(x)\,dx\right]^{1+\xi}.$$

Demostración. Como $w \in A_\infty$, existen constantes positivas C and ε tales que, para cada cubo Q y cada $E \subseteq Q$ medible, se tiene que

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \le C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\varepsilon}. \tag{1.15}$$

Sea $E_\lambda = \{w(x) > \lambda\} \cap Q$. Utilizando la desigualdad de Tchebychev y (1.14) tenemos que

$$|E_\lambda| \le \frac{1}{\lambda} w(E_\lambda) \le \frac{C}{\lambda}\left(\frac{|E_\lambda|}{|Q|}\right)^{\varepsilon} w(Q),$$

y esto implica que

$$|E_\lambda| \le |Q|\left(\frac{C}{\lambda|Q|} w(Q)\right)^{1/(1-\varepsilon)}.$$

Tomando $\xi = 1/(1-\varepsilon) - 1$ y $C_0 = C^{1/(1-\varepsilon)}$ se sigue el resultado. □

Una propiedad importante que satisfacen todos los pesos de la clase A_p, $1 \le p \le \infty$, es la propiedad **reverse Hölder** o propiedad de **Hölder al revés**. Dado un número $s > 1$ decimos que $w \in \mathrm{RH}_s$ si existe una constante positiva C tal que, para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s(x)\,dx\right)^{1/s} \le \frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx. \tag{1.16}$$

El nombre “Hölder al revés” proviene del hecho de que la desigualdad en sentido contrario vale trivialmente utilizando la desigualdad clásica de Hölder con exponentes s y s'.

Para $s = \infty$, se define la clase RH_∞ como el conjunto de todos los pesos w que satisfacen

$$\sup_Q w \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w(x)\, dx. \tag{1.17}$$

La constante más chica para la cual valen las desigualdades de arriba se denota $[w]_{\mathrm{RH}_s}$. Las clases RH_s son decrecientes en s, y además $\mathrm{RH}_\infty \subseteq \mathrm{RH}_s$ para todo $s > 1$.

La condición reverse Hölder la cumplen todos los pesos de A_p, y permite probar que estas clases son abiertas. Es decir, si $w \in A_p$ con $p > 1$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$. Estos resultados se establecen en la siguiente proposición.

Proposición 1.30. *Si $w \in A_p$ entonces:*

(a) *existe $s > 1$ tal que $w \in \mathrm{RH}_s$;*

(b) *existe $\delta > 0$ tal que $w^{1+\delta} \in A_p$;*

(c) *si $p > 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$.*

Observación 1.31. Si $w \in A_p$ se tiene que $w^\alpha \in A_p$ para todo $0 < \alpha \leq 1$, lo cual es consecuencia inmediata de la desigualdad de Jensen. En general, no es cierto que $w^r \in A_p$ para cualquier $r > 1$, pero la parte (b) de la proposición anterior nos dice que esto vale siempre que el exponente sea suficientemente cercano a 1.

Una relación importante entre las clases RH_s y las clases A_p, debida a Strömberg y Wheeden, puede encontrarse en [42] y se enuncia a continuación.

Proposición 1.32. *Un peso $w \in \mathrm{RH}_s$, $1 < s < \infty$, si y solo si $w^s \in A_\infty$.*

Como consecuencia inmediata de esta proposición y de la Observación 1.31, tenemos que $\mathrm{RH}_s \subseteq A_\infty$ para $1 < s \leq \infty$. Para probar la proposición anterior usaremos el siguiente resultado.

Lema 1.33. *Sean $p \geq 1$ y $s > 1$. Entonces $w \in A_p \cap \mathrm{RH}_s$ si y sólo si $w^s \in A_q$, donde $q = 1 + s(p-1)$.*

Demostración. Supongamos primero que $w \in A_p \cap \mathrm{RH}_s$. Entonces, puesto que $q - 1 = s(p-1)$ y $s(1-q') = 1 - p'$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{s(1-q')}\right)^{q-1} &\leq [w]_{\mathrm{RH}_s}^s \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^s \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{s(p-1)} \\ &\leq [w]_{\mathrm{RH}_s}^s [w]_{A_p}^s.\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todos los cubos Q, obtenemos que $w^s \in A_q$.

Recíprocamente, supongamos que $w^s \in A_q$ con $q = 1+s(p-1)$. Veamos primero que $w \in A_p$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{s(1-q')}\right)^{(q-1)/s}\\ &\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)^{1/s}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{s(1-q')}\right)^{(q-1)/s}\\ &\le [w^s]_{A_q}^{1/s},\end{aligned}$$

lo que nos dice que $w \in A_p$. Por otra parte, utilizando esto y la Observación 1.26

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{s(1-q')}\right)^{q-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{s(1-q')}\right)^{1-q}\\ &\le [w^s]_{A_q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{s(1-q')}\right)^{s(1-p)}\\ &\le [w^s]_{A_q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{s},\end{aligned}$$

y elevando a la $1/s$ obtenemos que $w \in \mathrm{RH}_s$. □

Demostración de la Proposición 1.32. Notemos que, para demostrar que $w^s \in A_\infty$, bastará con probar que $\mathrm{RH}_s \subseteq A_\infty$. Si esto vale, entonces existe $p > 1$ tal que $w \in \mathrm{RH}_s \cap A_p$. El Lema 1.33 establece entonces que $w^s \in A_{1+s(p-1)} \subseteq A_\infty$. Veamos entonces que $\mathrm{RH}_s \subseteq A_\infty$. Fijemos un cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ y E un subconjunto medible de Q. Entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}w(E) &\le (w^s(E))^{1/s}|E|^{1/s'}\\ &\le |Q|^{1/s}\left(\frac{w^s(Q)}{|Q|}\right)^{1/s}|E|^{1/s'}\\ &\le [w]_{\mathrm{RH}_s} w(Q)\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{1/s'},\end{aligned}$$

y esto nos dice que $w \in A_\infty$, en virtud de (1.14). Recíprocamente, si $w^s \in A_\infty$, entonces existe $q > 1$ tal que $w^s \in A_q$, y tomando $p = 1+(q-1)/s$ el Lema 1.33 nos dice que $w \in A_p \cap \mathrm{RH}_s$. □

Una propiedad muy importante de la clase RH_∞ es que cualquier potencia positiva de un peso en esta clase, sigue perteneciendo a la misma. Esto es precisamente lo que establece el siguiente resultado.

Proposición 1.34. *Si $w \in \mathrm{RH}_\infty$, entonces $w^r \in \mathrm{RH}_\infty$ para todo $r > 0$.*

Demostración. Supongamos primero que $r > 1$. Entonces, si $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_Q w^r &\le \left(\frac{[w]_{\mathrm{RH}_\infty}}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)^r\\ &\le [w]_{\mathrm{RH}_\infty}^r\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r(x)\,dx,\end{aligned}$$

en virtud de la desigualdad de Jensen. Si $0 < r < 1$, puesto que $\mathrm{RH}_\infty \subseteq A_\infty$ y $w = (w^r)^{1/r} \in A_\infty$, tenemos que $w^r \in \mathrm{RH}_{1/r}$ debido a la Proposición 1.32. Con esto,

$$\begin{aligned}\sup_Q w^r &\le \left(\frac{[w]_{\mathrm{RH}_\infty}}{|Q|}\int_Q (w^r(x))^{1/r}\,dx\right)^r\\ &\le [w]_{\mathrm{RH}_\infty}^r [w^r]_{\mathrm{RH}_{1/r}} \frac{1}{|Q|}\int_Q w^r(x)\,dx,\end{aligned}$$

lo que nos da el resultado deseado. □

La siguiente proposición reúne algunas propiedades referentes a los espacios A_p y RH_s, que serán utilizadas a lo largo de la presente tesis. La prueba de las mismas puede encontrarse en [12].

Proposición 1.35. *Valen las siguientes afirmaciones:*

(a) *$w \in A_\infty$ si y solo si $w = w_1 w_2$, con $w_1 \in A_1$ y $w_2 \in \mathrm{RH}_\infty$;*

(b) *si $w \in A_1$, entonces $1/w \in \mathrm{RH}_\infty$;*

(c) *si $u, v \in \mathrm{RH}_\infty$, entonces $uv \in \mathrm{RH}_\infty$.*

Observación 1.36. El inciso (a) es equivalente a afirmar que $w \in A_\infty$ si y solo si existen números $p, s > 1$ de modo que $w = w_1 w_2$, con $w_1 \in A_1 \cap \mathrm{RH}_s$ y $w_2 \in \mathrm{RH}_\infty \cap A_p$. Por otra parte, la propiedad (b) establece que los inversos multiplicativos de pesos de A_1 siempre pertenecen a RH_∞. Sin embargo, puede probarse que la recíproca no siempre vale: existen pesos w de RH_∞ tales que $1/w \notin A_1$. Para ilustrar un ejemplo, consideremos el peso $w = |x|^n$ definido en $\mathbb{R}^n$. Como dijimos anteriormente, es equivalente trabajar en todas las definiciones con pesos o con bolas, y como w es un peso radial, para este caso las cuentas resultan más sencillas sobre bolas. Separemos las bolas de $\mathbb{R}^n$ en dos familias

$$\mathcal{F}_1 = \{B = (x_B, R) : |x_B| \le R\} \text{ y } \mathcal{F}_2 = \{B = (x_B, R) : |x_B| > R\}.$$

Notemos que las bolas de la familia $\mathcal{F}_1$ contienen al origen, y las de $\mathcal{F}_2$ no. Para las bolas $B \in \mathcal{F}_1$ podemos estimar

$$|x|^n \le 2^n(|x - x_B|^n + |x_B|^n) \le 2^{n+1} R^n,$$

mientras que para las de $\mathcal{F}_2$

$$|x|^n \le 2^n(|x - x_B|^n + |x_B|^n) \le 2^n(R^n + |x_B|^n) \le 2^{n+1}|x_B|^n.$$

Además, tenemos que

$$\frac{1}{|B|}\int_B |x|^n\,dx \approx R^n \quad \text{y} \quad \frac{1}{|B|}\int_B |x|^n\,dx \approx |x_B|^n,$$

para las bolas de las familias $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, respectivamente. Combinando estas estimaciones, se sigue fácilmente que $\sup_B w \leq C|B|^{-1}\int_B w\,dx$. Es decir, $w \in \mathrm{RH}_\infty$, pero es claro que $w^{-1} \notin A_1$ (ver, por ejemplo, [18], Example 9.1.6).

No obstante, sí es cierto que los inversos multiplicativos de pesos de RH_∞, elevados a cierta potencia, pertenecen a la clase A_1. Este hecho se enuncia en la siguiente proposición, cuya prueba también puede encontrarse en [12].

Proposición 1.37. *Si $w \in \mathrm{RH}_\infty \cap A_p$, entonces $w^{1-p'} \in A_1$.*

Otra propiedad interesante de los pesos de la clase RH_∞ es que al multiplicarlos por pesos de A_∞ el producto se preserva en A_∞. Más precisamente, probamos el siguiente resultado.

Proposición 1.38. *Si $u \in \mathrm{RH}_\infty$ y $w \in A_\infty$, entonces $uw \in A_\infty$.*

Demostración. Para probar que $uw \in A_\infty$ bastará con ver que existe un número real $s > 1$ tal que $uw \in \mathrm{RH}_s$, en virtud de la Proposición 1.32. Como $w \in A_\infty$, por la parte (a) de la Proposición 1.35 tenemos que $w = w_1 w_2$, con $w_1 \in A_1$ y $w_2 \in \mathrm{RH}_\infty$. La parte (c) del mismo resultado nos dice que $uw_2 \in \mathrm{RH}_\infty$. Como $w_1 \in A_1$, existe $s > 1$ de modo que $w_1 \in \mathrm{RH}_s$. Luego

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (uw)^s\right)^{1/s} &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (uw_2w_1)^s\right)^{1/s}\\ &\leq \sup_Q uw_2 \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1^s\right)^{1/s}\\ &\leq [uw_2]_{\mathrm{RH}_\infty}[w_1]_{\mathrm{RH}_s}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q uw_2\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1\right)\\ &\leq [uw_2]_{\mathrm{RH}_\infty}[w_1]_{\mathrm{RH}_s}[w_1]_{A_1}\left(\inf_Q w_1\right)\frac{1}{|Q|}\int_Q uw_2\\ &\leq [uw_2]_{\mathrm{RH}_\infty}[w_1]_{\mathrm{RH}_s}[w_1]_{A_1}\frac{1}{|Q|}\int_Q uw,\end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

En general, no es cierto que el producto de un peso de A_1 por otro de A_p permanezca en la clase A_p. Sin embargo, sí es cierto si elegimos una potencia suficientemente chica del segundo peso. La siguiente proposición establece este resultado, que fue probado en [11].

Proposición 1.39. *Sea $u \in A_1$ y $v \in A_p$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$, que depende solamente de $[u]_{A_1}$, tal que $uv^\varepsilon \in A_p$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Otra clase de pesos que desempeña un papel fundamental en la acotación de los operadores fraccionarios es la **clase $A_{p,q}$**. Sean $1 < p, q < \infty$. Diremos que $w \in A_{p,q}$ si existe una constante positiva C tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^q\right)^{1/q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'}\right)^{1/p'} \leq C, \tag{1.18}$$

para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$.

Notemos que la desigualdad anterior puede escribirse, de manera equivalente, como

$$|Q|^{1/p-1/q-1} \|w\mathcal{X}_Q\|_{L^q} \|1/w\mathcal{X}_Q\|_{L^{p'}} \leq C,$$

para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Esta última expresión nos permite ver cómo resulta la condición para los casos extremos, $p = 1$ o $q = \infty$. En dichos casos los promedios correspondientes son reemplazados por el supremo esencial de $1/w$ o de w en el cubo Q, respectivamente. Tales condiciones resultan

$$w \in A_{1,q} \quad \text{si} \quad \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^q\right)^{1/q} \left\|\frac{1}{w}\mathcal{X}_Q\right\|_{L^\infty} < \infty \tag{1.19}$$

y

$$w \in A_{p,\infty} \quad \text{si} \quad \sup_Q \|w\mathcal{X}_Q\|_{L^\infty} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'}\right)^{1/p'} < \infty. \tag{1.20}$$

La menor de las constantes C para las que valen (1.18), (1.19) o (1.20) se denomina **constante característica** $A_{p,q}$ de w y se denota por $[w]_{A_{p,q}}$.

Las clases $A_{p,q}$ guardan una relación con las clases A_p antes definidas. Dicha relación está contenida en la siguiente proposición, cuya prueba puede encontrarse en el Apéndice.

Proposición 1.40. *Sean w un peso, $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$. Entonces se cumple que:*

(a) *$w \in A_{p,q}$ si y solo si $w^q \in A_{1+q/p'}$;*

(b) *$w \in A_{p,q}$ si y solo si $w^{-p'} \in A_{1+p'/q}$;*

(c) *$w \in A_{p,\infty}$ si y solo si $w^{-p'} \in A_1$;*

(d) *$w \in A_{1,q}$ si y solo si $w^q \in A_1$.*

A continuación introduciremos una variante de la familia A_p. Fijado un peso u, y $1 < p < \infty$, la **clase $\boldsymbol{A_p(u)}$** se define como la colección de pesos w que satisfacen

$$\sup_Q \left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q w(x)u(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q (w(x))^{1-p'}u(x)\,dx\right)^{p-1} < \infty.$$

Si $u = 1$, la clase anterior coincide con la clase A_p definida en (1.10). Para los casos $p = 1$ y $p = \infty$, las clases $A_p(u)$ se definen como en (1.12) y (1.14), respectivamente, reemplazando la medida de Lebesgue por $d\mu(x) = u(x)\,dx$.

Observación 1.41. Estas variantes de las clases A_p tienen un comportamiento similar a las A_p clásicas. Es fácil comprobar que satisfacen las propiedades de la Proposición 1.27, siempre que u sea un peso duplicante.

Por otra parte, si consideramos un peso $u \in A_1$, la clase $A_p(u)$ tiene algunas propiedades interesantes que resumimos en la siguiente proposición. Si bien las demostraciones de los incisos (a) y (b) están contenidas en [11], se incluyen aquí para facilitar la lectura.

Proposición 1.42. *Sea u un peso en la clase A_1. Entonces se tiene que:*

(a) *si $v \in A_p(u)$ entonces $uv \in A_p$, para todo $1 \leq p \leq \infty$;*

(b) *$v \in A_\infty(u)$ si y solo si $uv \in A_\infty$;*

(c) *$A_p(u) \subseteq A_p$, para todo p;*

(d) *si $v \in A_\infty(u)$ entonces $u \in A_1(v)$;*

(e) *si $uv \in A_\infty$ entonces $v \in A_\infty$.*

Demostración. Para probar el punto (a), consideremos primero $1 < p < \infty$ y fijemos un cubo Q de $\mathbb{R}^n$. Entonces, como $u \in A_1$, para casi todo punto $x \in Q$, tenemos:

$$\frac{u(Q)}{|Q|} \leq [u]_{A_1} u(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q vu\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (vu)^{1-p'}\right)^{p-1} &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q vu\right)\left(\frac{1}{|Q|}\left(\frac{u(Q)}{[u]_{A_1}|Q|}\right)^{-p'}\int_Q v^{1-p'}u\right)^{p-1} \\
&= [u]_{A_1}^p \left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q vu\right)\left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q v^{1-p'}u\right)^{p-1} \\
&\leq [u]_{A_1}^p [v]_{A_p(u)},
\end{aligned}$$

y esto nos dice que $uv \in A_p$, con $[uv]_{A_p} \leq [u]_{A_1}^p [v]_{A_p(u)}$.

Para el caso $p = 1$, tenemos

$$\frac{1}{u(Q)}\int_Q vu \leq [v]_{A_1(u)} \inf_Q v,$$

y multiplicando miembro a miembro por $u(Q)|Q|^{-1}$, obtenemos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q vu \leq [v]_{A_1(u)}\left(\inf_Q v\right)\frac{u(Q)}{|Q|}.$$

Esto implica que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q vu \leq [v]_{A_1(u)}[u]_{A_1}\inf_Q v \inf_Q u \leq [v]_{A_1(u)}[u]_{A_1}\inf_Q vu.$$

Finalmente, si $p = \infty$, existe un número $1 < q < \infty$ tal que $v \in A_q(u)$. Esto implica, por lo probado anteriormente, que $uv \in A_q \subseteq A_\infty$.

Para probar (b) notemos que, por el inciso (a), se tiene que $v \in A_\infty(u)$ implica que $uv \in A_\infty$. Recíprocamente, si $uv \in A_\infty$, consideremos un cubo Q y un subconjunto medible E de Q. Usando la condición (1.14), se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{uv(E)}{uv(Q)} &\leq [uv]_{A_\infty} \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\varepsilon \\
&= [uv]_{A_\infty} \left(\frac{u(E)}{u(Q)}\right)^\varepsilon \left(\frac{|E|}{u(E)} \frac{u(Q)}{|Q|}\right)^\varepsilon \\
&\leq [uv]_{A_\infty} [u]_{A_1}^\varepsilon \left(\frac{u(E)}{u(Q)}\right)^\varepsilon \left(\frac{\operatorname{ínf}_Q u}{\operatorname{ínf}_E u}\right)^\varepsilon \\
&\leq [uv]_{A_\infty} [u]_{A_1}^\varepsilon \left(\frac{u(E)}{u(Q)}\right)^\varepsilon,
\end{aligned}$$

y esto nos dice que $v \in A_\infty(u)$.

Probemos (c). Para ello notemos que, fijado $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{1-p'}\right)^{p-1} &\leq \left(\sup_Q \frac{1}{u}\right)^p \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q vu\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{1-p'}u\right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{u(Q)}{|Q|}\sup_Q \frac{1}{u}\right)^p \left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q vu\right)\left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q v^{1-p'}u\right)^{p-1} \\
&\leq [u]_{A_1}^p [v]_{A_p(u)}.
\end{aligned}$$

Veamos ahora (d), para lo cual debemos probar que existe una constante positiva C tal que para todo cubo Q se tenga

$$\frac{uv(Q)}{v(Q)} \leq C \operatorname*{ínf}_Q u.$$

Por (b), sabemos que $uv \in A_\infty$ y esto implica que existen $p, s > 1$ de modo que $uv \in A_p \cap \mathrm{RH}_s$. En virtud de la Observación 1.36 y el inciso (a) de la Proposición 1.35, existen dos pesos w_1, w_2 tales que $uv = w_1 w_2$, con $w_1 \in A_1 \cap \mathrm{RH}_s$ y $w_2 \in A_p \cap \mathrm{RH}_\infty$. Por (b) y (c) de la misma proposición, $z := w_2/u \in \mathrm{RH}_\infty$. Con esto, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{uv(Q)}{v(Q)} &= \frac{w_1 w_2(Q)}{w_1 z(Q)} \\
&\leq \frac{\int_Q w_1 w_2}{\operatorname{ínf}_Q w_1 \frac{|Q|}{|Q|}\int_Q z} \\
&\leq [z]_{\mathrm{RH}_\infty} \frac{1}{\operatorname{ínf}_Q w_1} \frac{1}{\sup_Q z} \frac{1}{|Q|}\int_Q w_1 w_2 \\
&\leq \frac{[z]_{\mathrm{RH}_\infty}}{\operatorname{ínf}_Q w_1 \sup_Q z} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1^s\right)^{1/s} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_2^{s'}\right)^{1/s'} \\
&\leq \frac{[z]_{\mathrm{RH}_\infty}}{\operatorname{ínf}_Q w_1 \sup_Q z} \frac{[w_1]_{\mathrm{RH}_s} w_1(Q)}{|Q|} \frac{[w_2]_{\mathrm{RH}_{s'}} w_2(Q)}{|Q|} \\
&\leq [w_1]_{A_1} [w_1]_{\mathrm{RH}_s} [w_2]_{\mathrm{RH}_{s'}} [z]_{\mathrm{RH}_\infty} \frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{zu}{\sup_Q z}
\end{aligned}$$

$$\leq [w_1]_{A_1}[w_1]_{\mathrm{RH}_s}[w_2]_{\mathrm{RH}_{s'}}[z]_{\mathrm{RH}_\infty}\frac{u(Q)}{|Q|}$$
$$\leq [w_1]_{A_1}[w_1]_{\mathrm{RH}_s}[w_2]_{\mathrm{RH}_{s'}}[z]_{\mathrm{RH}_\infty}[u]_{A_1}\inf_Q u.$$

Finalmente, para probar (e), escribimos $uv = w_1w_2$, donde $w_1 \in A_1$ y $w_2 \in \mathrm{RH}_\infty$, de acuerdo a la parte (a) de la Proposición 1.35. Si z se define como arriba, entonces $z \in \mathrm{RH}_\infty$, en virtud de los incisos (b) y (c) de la misma proposición. Luego, $v = w_1z \in A_\infty$ nuevamente por el ítem (a). □

Observación 1.43. La parte (d) de la proposición anterior nos indica una especie de dualidad entre u y v al intercambiar los roles que tienen los mismos, como peso y medida. Esta propiedad resultará de crucial importancia a la hora de probar algunos de los resultados principales de esta tesis.

1.4. Operadores maximales y sus características

El objetivo de esta sección es introducir los distintos operadores maximales con los que vamos a trabajar a lo largo de la presente tesis, así como también dar las acotaciones de los mismos en diferentes espacios.

Un **operador** es una aplicación $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios funcionales. Para expresar que T está evaluado en una función f escribiremos Tf. En general, Tf resulta en una nueva función, por lo que cuando sea necesario explicitar que se evalúa en un punto x, escribiremos $Tf(x)$.

Diremos que T es **lineal** si $T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg$, para todo par de funciones f, g y todo escalar α.

También diremos que T es **sublineal** si $|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|$, para todo par de funciones f, g y además $|T(\alpha f)| = |\alpha||Tf|$ para todo escalar α.

Sean (X, μ) un espacio de medida y $1 \leq p, q \leq \infty$. Diremos que un operador T es de **tipo fuerte** (p, q) si T mapea continuamente $L^p(X, \mu)$ en $L^q(X, \mu)$. Más precisamente, si existe una constante positiva C tal que

$$\|Tf\|_{L^q(X,\mu)} \leq C\,\|f\|_{L^p(X,\mu)}\,,$$

para toda $f \in L^p(X, \mu)$.

Diremos que T es de **tipo débil** (p, q) si T mapea continuamente $L^p(X, \mu)$ en $L^{q,\infty}(X, \mu)$, es decir, si existe una constante positiva C tal que para toda f en $L^p(X, \mu)$ vale la desigualdad

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(X,\mu)} \leq C\,\|f\|_{L^p(X,\mu)}\,.$$

Esta última desigualdad nos dice que, para todo $t > 0$,

$$\mu(\{x \in X : |Tf(x)| > t\}) \leq \left(\frac{C}{t^p}\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{q/p}.$$

Es fácil ver que si un operador T es de tipo fuerte (p,q), entonces es de tipo débil (p,q), pero en general la implicación recíproca no es cierta. Sin embargo, conocer ciertas acotaciones débiles de un operador sublineal nos permite inferir algo acerca de sus acotaciones fuertes, hecho que está contenido en el siguiente teorema.

Teorema 1.44 (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz). *Sean* $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$, *con* $p_i \leq q_i$ *para* $i = 1, 2$ *y* $q_1 \neq q_2$. *Sean* (X, μ) *e* (Y, ν) *dos espacios de medida y* $T : X \to Y$ *un operador sublineal, que verifica ser de tipo débil* (p_1, q_1) *y de tipo débil* (p_2, q_2). *Para cada* $0 < t < 1$ *definimos*

$$\frac{1}{p} = (1-t)\frac{1}{p_1} + t\frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = (1-t)\frac{1}{q_1} + t\frac{1}{q_2}.$$

Entonces T *es de tipo fuerte* (p,q).

Para definir los operadores que nos interesan, consideraremos $X = \mathbb{R}^n$ y μ la medida de Lebesgue.

Para $f \in L^1_{loc}$ se define el **operador maximal de Hardy-Littlewood** M como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos contenidos en $\mathbb{R}^n$, con lados paralelos a los ejes coordenados, que contienen a x. Observemos que M es un operador positivo, ya que $Mf = M(|f|) \geq 0$ para toda función $f \in L^1_{loc}$. Es fácil ver que este operador acota superiormente a la función a la que se aplica, es decir, que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $|f(x)| \leq Mf(x)$, lo cual se deduce del teorema de diferenciación de Lebesgue. Es conocido de la literatura que este operador es de tipo fuerte (o débil) (∞, ∞) y además de tipo débil $(1,1)$. El teorema de interpolación de Marcinkiewicz nos permite obtener, entonces, que es de tipo fuerte (p,p) para todo $1 < p \leq \infty$, esto es $\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$. Una pregunta interesante es bajo qué condiciones en un peso w la desigualdad anterior es cierta en el espacio $L^p(w)$. En [32], B. Muckenhoupt caracterizó tales pesos como los pertenecientes a la clase A_p. Si bien la prueba dada en ese trabajo es en $\mathbb{R}$, el resultado vale en $\mathbb{R}^n$ e incluso, en ciertos espacios de medida más generales, como los espacios de tipo homogéneo (ver, por ejemplo, [10], [8] y [3]). El mismo se detalla a continuación.

Teorema 1.45. *La desigualdad*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{C}{t^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\, dx$$

vale si y solo si $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$. *En particular, existe una constante positiva* C *tal que*

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}$$

para toda $f \in L^p(w)$ *si y solo si* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$.

Si w es un peso arbitrario, no necesariamente en alguna clase A_p, puede obtenerse un resultado un poco más débil para el operador M.

Teorema 1.46. *Para cada $1 < p < \infty$, existe una constante positiva C de modo que la desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)\,dx \leq \frac{C}{t^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mw(x)\,dx$$

vale para todo t positivo y todo peso w. Más aún, cuando $p = 1$ se tiene la siguiente desigualdad

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| Mw(x)\,dx.$$

El siguiente resultado, clásico en la literatura, nos da una herramienta para generar pesos en la clase A_1. Una prueba puede encontrarse en [15].

Proposición 1.47. *Sea $f \in L^1_{loc}$ y $0 \leq \delta < 1$. Entonces $(Mf)^\delta$ es un peso de la clase A_1.*

Dado $1 \leq p < \infty$, una variante de este operador maximal es el operador M_p, definido como

$$M_p f(x) = (M(|f|^p)(x))^{1/p} = \left\{ \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^p\,dy \right\}^{1/p}.$$

Utilizando la desigualdad de Jensen, resulta inmediato que $Mf \leq M_p f$. Un resultado análogo al Teorema 1.45 para este operador es el siguiente.

Teorema 1.48. *Dado $1 \leq q < \infty$, la desigualdad*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M_q f(x) > t\}) \leq \frac{C}{t^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx$$

vale si y solo si $w \in A_{p/q}$, $q \leq p < \infty$. En particular, existe una constante positiva C tal que

$$\|M_q f\|_{L^p(w)} \leq C\,\|f\|_{L^p(w)}$$

si y solo si $w \in A_p$, $q < p < \infty$.

Otro tipo de operadores maximales importantes con los que trabajaremos son aquellos asociados a funciones de Young.

Si Φ es una función de Young, μ es una medida de la forma $d\mu(x) = w(x)\,dx$, donde w es un peso y E es un conjunto medible tal que $0 < |E| < \infty$, el **promedio de tipo Luxemburgo** $\|f\|_{\Phi,E,w}$ de f sobre E está dado por

$$\|f\|_{\Phi,E,w} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{w(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)\,dx \leq 1 \right\}.$$

Observar que cuando $w = 1$, μ es la medida de Lebesgue. En este caso denotaremos simplemente $\|f\|_{\Phi,E,w} = \|f\|_{\Phi,E}$.

Si Φ es una función de Young entonces se define, para $f \in L^{\Phi}_{loc}$, el **operador maximal** $M_\Phi f$ como

$$M_\Phi f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\Phi,Q} \,.$$

A continuación daremos algunas propiedades importantes de los promedios $\|\cdot\|_{\Phi,E,w}$. Como consecuencia de la definición, tenemos que

$$\frac{1}{w(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,E,w}}\right) w(x)\, dx \leq 1. \tag{1.21}$$

En efecto, por ser un ínfimo, existe una sucesión $\{\lambda_k\}_k$ de reales positivos de modo que λ_k decrece a $\|f\|_{\Phi,E,w}$ y tal que

$$\frac{1}{w(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda_k}\right) w(x)\, dx \leq 1$$

para todo k. Luego, en virtud del lema de Fatou, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,E,w}}\right) w(x)\, dx &= \frac{1}{w(E)} \int_E \liminf_{k\to\infty} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda_k}\right) w(x)\, dx \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{w(Q)} \int_Q \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda_k}\right) w(x)\, dx \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

tal como se quería probar.

Proposición 1.49. *Sean Φ una función de Young, w un peso y E un conjunto medible con $0 < |E| < \infty$. Supongamos que*

$$\frac{1}{w(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)\, dx \leq C,$$

para ciertas constantes positivas λ y C. Entonces $\|f\|_{\Phi,E,w} \leq \max\{1, C\}\lambda$.

Demostración. Si $0 < C < 1$, la conclusión es inmediata por la definición de $\|f\|_{\Phi,E,w}$. Si $C \geq 1$ entonces basta observar, por el Lema 1.2, que

$$\frac{1}{w(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{C\lambda}\right) w(x)\, dx \leq \frac{1}{w(E)} \frac{1}{C} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)\, dx \leq 1. \qquad \square$$

Proposición 1.50. *Sean A y B conjuntos medibles con medida positiva y finita, tales que $A \subseteq B$ y $w(B) \leq Cw(A)$, para alguna constante positiva C. Si Φ es una función de Young, entonces $\|f\|_{\Phi,A,w} \leq \max\{C, 1\} \|f\|_{\Phi,B,w}$, para cualquier función f.*

Demostración. En virtud de la Proposición 1.49 bastará ver que

$$\frac{1}{w(A)} \int_A \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,B,w}}\right) w(x)\, dx \leq C.$$

En efecto, utilizando la hipótesis y (1.21) tenemos que

$$\frac{1}{w(A)}\int_A \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,B,w}}\right) w(x)\,dx \leq \frac{C}{w(B)}\int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,B,w}}\right) dx \leq C. \qquad \square$$

La siguiente proposición establece que si dos funciones de Young son comparables para t grande, entonces sus promedios de tipo Luxemburgo sobre un conjunto E también lo son. Esto es, los valores que toma una función para valores de t pequeños no afectan a dichos promedios.

Proposición 1.51. *Sean Φ y Ψ funciones de Young que verifican $\Phi(t) \approx \Psi(t)$ para todo $t \geq t_0 \geq 0$. Entonces $\|\cdot\|_{\Phi,E,w} \approx \|\cdot\|_{\Psi,E,w}$.*

Demostración. Consideremos una función $f \in L^{\Phi}_{loc}$. Por hipótesis existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1\Psi(t) \leq \Phi(t) \leq C_2\Psi(t),$$

para $t \geq t_0$. Entonces, para $\lambda > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(E)}\int_E \Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) w &= \frac{1}{w(E)}\int_{E\cap\{|f|\leq t_0\lambda\}} \Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) w + \frac{1}{w(E)}\int_{E\cap\{|f|>t_0\lambda\}} \Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) w\\ &\leq \Phi(t_0) + \frac{C_2}{w(E)}\int_E \Psi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) w.\end{aligned}$$

Si $\lambda = \|f\|_{\Psi,E,w}$ entonces concluimos que

$$\frac{1}{w(E)}\int_E \Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) w \leq \Phi(t_0) + C_2,$$

con lo cual $\|f\|_{\Phi,E,w} \leq (\Phi(t_0)+C_2)\,\|f\|_{\Psi,E,w}$, en virtud de la Proposición 1.49. La otra desigualdad es análoga intercambiando los roles de Φ y Ψ. $\square$

La siguiente proposición nos da una manera útil de calcular los promedios de tipo Luxemburgo a partir de ciertas expresiones de tipo modular. La prueba puede obtenerse mediante una adaptación de lo demostrado en [24].

Proposición 1.52. *Si Φ es una función de Young, E es un conjunto medible acotado con medida positiva y $w \in A_\infty$, entonces existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que*

$$C_1\,\|f\|_{\Phi,E,w} \leq \inf_{\tau>0}\left\{\tau + \frac{\tau}{w(E)}\int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\tau}\right) w(x)\,dx\right\} \leq C_2\,\|f\|_{\Phi,E,w}.$$

El siguiente teorema nos da una versión generalizada de la desigualdad de Hölder clásica, en términos de funciones de Young. Una prueba puede encontrarse en [24].

Teorema 1.53 (Desigualdad de Hölder generalizada)**.** *Sea w un peso duplicante. Sean Φ, Ψ y η funciones de Young que satisfacen la desigualdad*

$$\Psi^{-1}(t)\eta^{-1}(t) \leq c\,\Phi^{-1}(t),$$

para alguna constante positiva c y todo $t \geq t_0 > 0$. Entonces existe una constante K tal que

$$\|fg\|_{\Phi,E,w} \leq K\,\|f\|_{\Psi,E,w}\,\|g\|_{\eta,E,w}\,,$$

donde E es cualquier conjunto medible acotado con $|E| > 0$.

Como caso particular de este resultado, en virtud del Lema 1.14 se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{w(E)}\int_E |fg| \leq 2\,\|f\|_{\Phi,E,w}\,\|g\|_{\tilde{\Phi},E,w}\,. \tag{1.22}$$

Como la definición del operador M_Φ involucra promedios de tipo Luxemburgo sobre cubos o bolas de $\mathbb{R}^n$, el conjunto E que consideraremos será de este tipo.

Cuando trabajemos con las funciones $\Phi_m(t) = t(1+\log^+ t)^m$ y su función complementaria, $\tilde{\Phi}_m(t) = e^{t^{1/m}} - 1$, denotaremos a las correspondientes normas de Luxemburgo sobre un cubo Q con respecto a w como $\|\cdot\|_{L(\log L)^m,Q,w}$ y $\|\cdot\|_{\exp L^{1/m},Q,w}$, respectivamente.

Observación 1.54. En realidad, $\tilde{\Phi}_m(t) = (e^{t^{1/m}} - e)\mathcal{X}_{(1,\infty)}(t)$. Sin embargo, es fácil ver que $\tilde{\Phi}_m(t) \approx e^{t^{1/m}} - 1$ para $t \geq e$, con lo cual podemos usar cualquiera de estas expresiones en la definición de $\|\cdot\|_{\exp L^{1/m},Q,w}$ en virtud de lo expuesto en la Proposición 1.51.

El siguiente lema nos da una relación entre los promedios de tipo Luxemburgo, con y sin pesos, asociados a la función $\varphi(t) = e^t - 1$.

Lema 1.55. *Sea $\varphi(t) = e^t - 1$ y supongamos que $w \in \mathrm{RH}_s$ para algún $s > 1$. Entonces*

$$\|f\|_{\exp L,Q,w} \leq 2^{1/s'} s'[w]_{\mathrm{RH}_s}\|f\|_{\exp L,Q}.$$

Demostración. Fijemos $\lambda = s'\|f\|_{\exp L,Q}$. Para mostrar que $\|f\|_{\exp L,Q,w} \leq 2^{1/s'}[w]_{\mathrm{RH}_s}\lambda$, será suficiente probar que

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \left(e^{\frac{|f(x)|}{\lambda}} - 1\right) w(x)\,dx \leq 2^{1/s'}[w]_{\mathrm{RH}_s},$$

para cada cubo Q, en virtud de la Proposición 1.49. Aplicando la desigualdad de Hölder y la condición RH_s de w, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(Q)}\int_Q \left(e^{\frac{|f(x)|}{\lambda}} - 1\right) w(x)\,dx &\leq \frac{1}{w(Q)}\int_Q e^{\frac{|f(x)|}{\lambda}} w(x)\,dx \\ &\leq \frac{|Q|}{w(Q)}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\exp L,Q}}}\,dx\right)^{1/s'}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s(x)\,dx\right)^{1/s}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq [w]_{\mathrm{RH}_s} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\exp L,Q}}}\, dx \right)^{1/s'} \\
&= [w]_{\mathrm{RH}_s} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(e^{\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\exp L,Q}}} - 1 \right) dx + 1 \right)^{1/s'} \\
&\leq 2^{1/s'} [w]_{\mathrm{RH}_s},
\end{aligned}
$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado (1.21). Esto completa la prueba. □

La siguiente proposición nos da una versión de la desigualdad de Jensen para promedios de tipo Luxemburgo.

Proposición 1.56. *Sean Φ una función de Young, $f \in L^{\Phi}_{loc}$ y $r \geq 1$. Entonces existe una constante positiva C tal que para todo cubo Q*

$$\|f\|^r_{\Phi,Q} \leq C \|f^r\|_{\Phi,Q}.$$

Demostración. Notemos que si $t \geq 1$, entonces $\Phi(t^{1/r}) \leq \Phi(t)$. Tomando $\lambda = \|f^r\|^{1/r}_{\Phi,Q}$ podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy &= \frac{1}{|Q|} \int_{Q\cap\{|f|\leq\lambda\}} \Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy + \frac{1}{|Q|} \int_{Q\cap\{|f|>\lambda\}} \Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy \\
&\leq \Phi(1) + \frac{1}{|Q|} \int_{Q\cap\{|f|>\lambda\}} \Phi\left(\left(\frac{|f(y)|^r}{\|f^r\|_{\Phi,Q}}\right)^{1/r}\right) dy \\
&\leq \Phi(1) + \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi\left(\frac{|f(y)|^r}{\|f^r\|_{\Phi,Q}}\right) dy \\
&\leq \Phi(1) + 1,
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$\|f\|_{\Phi,Q} \leq C \|f^r\|^{1/r}_{\Phi,Q}.$$ □

Las propiedades de continuidad del operador maximal M_Φ guardan estrecha relación con la función Φ involucrada, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 1.57 ([38], Thm. 1.7)**.** *Sean $1 < p < \infty$ y Φ una función de Young duplicante. Entonces son equivalentes*

(a) *$\Phi \in B_p$;*

(b) *existe una constante positiva C de modo que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\Phi f(x))^p\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx;$$

(c) *existe una constante positiva C tal que para cualquier peso w*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\Phi f(x))^p w(x)\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mw(x)\, dx.$$

Del teorema anterior es directo que, si w pertenece a la clase A_1, y $\Phi \in B_p$, entonces $M_\Phi : L^p(w) \hookrightarrow L^p(w)$.

Es bien conocido que si w es un peso de la clase A_1, entonces $Mw(x) \le [w]_{A_1} w(x)$ en casi todo punto x. El siguiente lema nos da condiciones suficientes para tener una estimación similar para el operador M_Φ.

Lema 1.58. *Sea $w \in A_1 \cap RH_s$, para algún $s > 1$ y $\Phi \in B_s$. Entonces existe una constante positiva C tal que $M_\Phi w(x) \le Cw(x)$, para casi todo punto x.*

Demostración. Como $\Phi \in B_s$, existe C_s tal que $\Phi(t) \le C_s t^s$, para $t \ge t_0$, en virtud del Lema 1.16. Fijemos x y un cubo Q que contiene a x. Entonces, para $\lambda > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \Phi\left(\frac{w(y)}{\lambda}\right) dy &= \frac{1}{|Q|}\int_{Q\cap\{w<t_0\lambda\}} \Phi\left(\frac{w(y)}{\lambda}\right) dy + \frac{1}{|Q|}\int_{Q\cap\{w\ge t_0\lambda\}} \Phi\left(\frac{w(y)}{\lambda}\right) dy \\
&\le C + \frac{C_s}{|Q|}\int_Q \left(\frac{w(y)}{\lambda}\right)^s dy \\
&\le C + \frac{C_s}{\lambda^s} M(w^s)(x).
\end{aligned}$$

Tomando $\lambda = (M(w^s)(x))^{1/s}$ obtenemos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \Phi\left(\frac{w(y)}{\lambda}\right) dy \le C,$$

y por la Proposición 1.49 podemos concluir que

$$\|w\|_{\Phi,Q} \le C(Mw^s(x))^{1/s}$$

en virtud de la Proposición 1.49. Así, tomando supremo sobre los cubos Q que contienen a x obtenemos que

$$M_\Phi w(x) \le C(Mw^s(x))^{1/s} \le Cw(x),$$

ya que el Lema 1.33 asegura que $w^s \in A_1$. □

El siguiente teorema nos da un resultado de acotación con pesos para el operador M_Φ. Si bien en [5] se prueba una versión más general en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable, enunciaremos la versión correspondiente del caso clásico.

Teorema 1.59 ([5], Thm. 2.5)**.** *Sean $1 \le r < p < \infty$ y Φ una función de Young que satisface $\Phi \in B_\rho$, para cada $\rho > r$. Si $w \in A_{p/r}$, entonces M_Φ está acotada en $L^p(w)$.*

Por otra parte, M_Φ satisface una acotación de tipo débil modular. Esto se sintetiza en el siguiente teorema, que puede encontrarse en [23].

Teorema 1.60. *Sean Φ una función de Young y w un peso. Entonces existe una constante positiva C de modo que la desigualdad*

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\Phi f(x) > t\}\right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) Mw(x)\, dx$$

vale para todo t positivo.

Notar que cuando $\Phi(t) = t$, se tiene $M_\Phi = M$. Luego, el resultado anterior extiende el tipo débil del Teorema 1.46.

Existe una relación entre el operador maximal M de Hardy-Littlewood y el operador M_Φ, para $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)^m$, con $m \in \mathbb{N}$: M_Φ es equivalente a M^{m+1}, donde M^{m+1} denota la composición del operador M consigo mismo $m + 1$ veces. Más precisamente, existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1 M^{m+1} f(x) \leq M_\Phi f(x) \leq C_2 M^{m+1} f(x), \tag{1.23}$$

para toda $f \in L^\Phi_{loc}$ y todo x. Una prueba de esta estimación puede encontrarse en [6].

1.4.1. Interpolación modular

El teorema de interpolación de Marcinkiewicz es una herramienta poderosa que permite conocer acotaciones de tipo fuerte (p, p) de ciertos operadores sublineales siempre que satisfagan dos acotaciones de tipo débil. Estas desigualdades de tipo débil y fuerte están íntimamente relacionadas con las normas $L^{p,\infty}$ y L^p, respectivamente, asociadas a su vez a la función de Young $\varphi(t) = t^p$. Cuando en las desigualdades aparecen expresiones que involucran a una función de Young más general, estas no son exactamente estimaciones de tipo fuerte o débil, sino que simplemente nos referimos a ellas como “desigualdades de tipo débil modular”. En consecuencia, el teorema de interpolación de Marcinkiewicz no aplica y es necesario encontrar condiciones suficientes que aseguren una acotación, por ejemplo, de tipo fuerte. En esta sección daremos algunas definiciones, notación y resultados necesarios para enunciar un teorema de interpolación en este contexto, que son adaptaciones de los que aparecen en el trabajo [1] de Acinas y Favier.

Dadas dos funciones $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, diremos que $\Phi \prec \Psi$ si la colección $\{\Psi(x)\Phi(\alpha/x)\}_{\alpha>0}$ es una familia de funciones débilmente casi creciente con una constante independiente de α.

En vista de la definición anterior, si $\Phi \prec \Psi$ entonces existe una constante positiva ρ tal que la desigualdad

$$\frac{1}{x}\int_0^x \Psi(t)\Phi(\alpha/t)\, dt \leq \rho\Psi(x)\Phi(\alpha/x)$$

vale para todo $x > 0$ y todo $\alpha > 0$.

El teorema de interpolación que utilizaremos en este contexto es el siguiente.

Teorema 1.61. *Sean μ una medida y $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función no decreciente. Sean F y G funciones no negativas que satisfacen*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > \lambda\}) \leq C \int_{\{x: G(x) > c\lambda\}} \Phi\left(\frac{G(x)}{\lambda}\right) d\mu(x), \tag{1.24}$$

para algún par de constantes positivas C y c, y todo $\lambda > 0$. Sea Ψ una función en $\mathcal{C}^1([0,\infty))$ tal que $\Psi(0) = 0$, Ψ' es no decreciente y además $\Phi \prec \Psi'$. Entonces, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(F(x))\, d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{2G(x)}{c}\right) d\mu(x).$$

Demostración. En virtud de la Proposición 1.22 y de la hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(F(x))\, d\mu(x) &= \int_0^\infty \Psi'(\lambda)\mu(\{x : F(x) > \lambda\})\, d\lambda \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{c^{-1}G(x)} \Psi'(\lambda)\Phi\left(\frac{G(x)}{\lambda}\right) d\lambda\right) d\mu(x).\end{aligned}$$

Como $\Phi \prec \Psi'$, podemos escribir

$$\int_0^{c^{-1}G(x)} \Psi'(\lambda)\Phi\left(\frac{G(x)}{\lambda}\right) d\lambda \leq \rho\Phi(c)c^{-1}G(x)\Psi'(c^{-1}G(x)).$$

Además, observemos que

$$\Psi(x) = \int_0^x \Psi'(t)\, dt \geq \int_{x/2}^x \Psi'(t)\, dt \geq \frac{x}{2}\Psi'\left(\frac{x}{2}\right),$$

ya que Ψ' es no decreciente. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(F(x))\, d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{2G(x)}{c}\right) d\mu(x). \qquad \square$$

Observar que en la hipótesis del teorema anterior, la estimación de tipo débil modular involucra una integral sobre un conjunto más chico que $\mathbb{R}^n$. Esta hipótesis puede asegurarse utilizando el siguiente lema.

Lema 1.62. *Sean μ una medida, T un operador sublineal y Φ una función de Young. Supongamos que*

$$\mu(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x),$$

para algún par de constantes positivas C y c, y para todo $\lambda > 0$. Supongamos también que $\|Tf\|_{L^\infty(\mu)} \leq C_0 \|f\|_{L^\infty(\mu)}$. Entonces

$$\mu\left(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}\right) \leq C \int_{\{x: |f(x)| > \lambda/(2C_0)\}} \Phi\left(\frac{2c|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x).$$

Demostración. Fijemos $\lambda > 0$ y definamos $f_1 = f\mathcal{X}_{\{|f|>\lambda/(2C_0)\}}$ y $f_2 = f - f_1$. Así,

$$\mu\left(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}\right) \le \mu\left(\left\{x : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x : |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right),$$

y observemos que el segundo término es cero. En efecto, si x satisface $|Tf_2(x)| > \lambda/2$ tenemos que

$$\frac{\lambda}{2} < \|Tf_2\|_{L^\infty(\mu)} \le C_0 \|f_2\|_{L^\infty(\mu)},$$

que es una contradicción. De esta manera, aplicando la hipótesis a f_1 obtenemos que

$$\begin{aligned}\mu\left(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}\right) &= \mu\left(\left\{x : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{2c|f_1(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x)\\ &\le C\int_{\{x:|f(x)|>\lambda/(2C_0)\}} \Phi\left(\frac{2c|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x).\end{aligned}$$

□

1.4.2. Operadores diádicos

En esta sección introduciremos la versión diádica de los operadores maximales definidos anteriormente, las cuales serán útiles en algunos de los resultados principales de esta tesis. Para ello, necesitamos introducir el concepto de *grilla diádica*.

Una **grilla diádica** $\mathcal{D}$ es una colección de cubos de $\mathbb{R}^n$ que satisface las siguientes propiedades:

1. cada cubo Q en $\mathcal{D}$ tiene lado de longitud 2^k, para algún $k \in \mathbb{Z}$;

2. si $P, Q \in \mathcal{D}$ y $P \cap Q \neq \emptyset$ entonces $P \subseteq Q$ o $Q \subseteq P$;

3. $\mathcal{D}_k = \{Q \in \mathcal{D} : \ell(Q) = 2^k\}$ es una partición de $\mathbb{R}^n$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, donde $\ell(Q)$ denota la longitud de los lados de Q.

Dada una función de Young Φ y una grilla diádica $\mathcal{D}$, se define el **operador maximal** $\boldsymbol{M_{\Phi,\mathcal{D}}}$, para f en L^Φ_{loc}, como

$$M_{\Phi,\mathcal{D}}f(x) = \sup_{Q\ni x, Q\in\mathcal{D}} \|f\|_{\Phi,Q}.$$

Cuando $\Phi(t) = t$, escribiremos directamente $M_{\Phi,\mathcal{D}} = M_{\mathcal{D}}$.

Una propiedad importante de los operadores maximales diádicos es que sus conjuntos de nivel pueden ser escritos como unión numerable de cubos diádicos de la grilla. Este hecho se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 1.63. *Dados $\lambda > 0$, una función de Young Φ, una función f acotada de soporte compacto y una grilla diádica $\mathcal{D}$, existe una familia de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}$ de $\mathcal{D}$ que satisface*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}} f(x) > \lambda\} = \bigcup_j Q_j,$$

y $\|f\|_{\Phi,Q_j} > \lambda$ para cada j.

Demostración. Fijemos $\lambda > 0$. Para $k \in \mathbb{Z}$ definimos $E_k f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} \|f\|_{\Phi,Q} \mathcal{X}_Q(x)$. Con esta definición, podemos escribir $M_{\Phi,\mathcal{D}} f(x) = \sup_k E_k f(x)$. Consideremos ahora los conjuntos

$$\Lambda_k = \{x \in \mathbb{R}^n : E_k f(x) > \lambda \text{ y } E_j f(x) \leq \lambda \text{ si } j > k\}.$$

Entonces, tenemos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}} f(x) > \lambda\} = \bigcup_k \Lambda_k.$$

En efecto, si $x \in \{M_{\Phi,\mathcal{D}} f(x) > \lambda\}$ existen $k \in \mathbb{Z}$ y $Q \in \mathcal{D}_k$ tales que $\|f\|_{\Phi,Q} > \lambda$, y esto significa que $E_k f(x) > \lambda$. Veamos que $\|f\|_{\Phi,Q}$ tiende a cero cuando $|Q| \to \infty$. Para ello, fijado $\varepsilon > 0$ arbitrario, observamos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi\left(\frac{|f|}{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{|Q|} \int_K \Phi\left(\frac{\|f\|_{L^\infty}}{\varepsilon}\right) = \Phi\left(\frac{\|f\|_{L^\infty}}{\varepsilon}\right) \frac{|K|}{|Q|},$$

donde K es el soporte de la función f. Esta última cantidad es menor o igual que 1 siempre que $|Q| > \Phi\left(\frac{\|f\|_{L^\infty}}{\varepsilon}\right) |K| =: M$. Entonces, si $|Q| > M$ tenemos que $\|f\|_{\Phi,Q} \leq \varepsilon$, como queríamos ver. En consecuencia, $E_k f(x) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Esto implica que existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que si $j > k_0$, $E_j f(x) \leq \lambda$. Ahora, si para cada i que verifica $k < i \leq k_0$ tenemos que $E_i f(x) \leq \lambda$, entonces $x \in \Lambda_k$. Si no, sea i_0 el mayor entero menor o igual que k_0 para el cual $E_{i_0} f(x) > \lambda$. En este caso, $x \in \Lambda_{i_0}$. Esto prueba que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}} f(x) > \lambda\} \subseteq \bigcup_k \Lambda_k.$$

Para probar la inclusión opuesta, si $x \in \bigcup_k \Lambda_k$, existe k_0 tal que $x \in \Lambda_{k_0}$. Esto significa que $E_{k_0} f(x) > \lambda$, lo que nos da $M_{\Phi,\mathcal{D}} f(x) > \lambda$.

Finalmente, observemos que cada conjunto Λ_k puede escribirse como una unión de cubos de $\mathcal{D}_k$ con la propiedad deseada, pues para $x \in \Lambda_k$ fijo, tenemos que $y \in \Lambda_k$ para todo $y \in Q(k)$, donde $Q(k)$ es el cubo $\mathcal{D}_k$ que contiene a x. $\square$

Como consecuencia inmediata de esta proposición, tenemos la versión diádica del Teorema 1.60, que demostraremos a continuación.

Teorema 1.64. *Dados una grilla diádica $\mathcal{D}$, una función de Young Φ y un peso w, existe una constante positiva C de modo que la desigualdad*

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}} f(x) > t\}\right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) M_{\mathcal{D}} w(x)\, dx$$

vale para todo $t > 0$.

Demostración. Sea $t > 0$. Por la Proposición 1.63, existe una sucesión de cubos diádicos $\{Q_j\}$ en $\mathcal{D}$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}f(x) > t\} = \bigcup_j Q_j,$$

y además $\|f\|_{\Phi,Q_j} > t$ para todo j, lo que equivale a

$$1 < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}f(x) > t\}\right) &= w\left(\bigcup_j Q_j\right) \\ &= \sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|}|Q_j| \\ &< \sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|}\int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) dx \\ &\leq \sum_j \int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) M_{\mathcal{D}}w(x)\, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) M_{\mathcal{D}}w(x)\, dx. \end{aligned}$$ □

El siguiente teorema es bien conocido y brinda una herramienta clásica muy útil al momento de probar la acotación de algunos operadores del Análisis Armónico (ver, por ejemplo, [18]).

Teorema 1.65 (Descomposición de Calderón-Zygmund)**.** *Sea μ una medida duplicante, $f \in L^1(\mu)$ definida en $\mathbb{R}^n$ y $t > 0$. Entonces existen una sucesión de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_j$ y funciones g, b definidas en $\mathbb{R}^n$ de modo que*

(a) $f = g + b$;

(b) $t < (\mu(Q_j))^{-1}\int_{Q_j} |f(x)|\, d\mu(x) \leq C_n t$, *para cada cubo* Q_j;

(c) $\|g\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^1(\mu)}$ *y también* $\|g\|_{L^\infty(\mu)} \leq C_n t$;

(d) $b = \sum_j b_j$, *donde cada función b_j está soportada en un cubo diádico Q_j. Más aún, cuando $j \neq k$, Q_j y Q_k tienen interiores disjuntos;*

(e) $\int_{Q_j} b_j(x)\, d\mu = 0$ *para todo* j.

En general resulta más sencillo trabajar con versiones diádicas de operadores maximales. Esto se debe a las propiedades de los cubos involucrados en su definición. Luego, un argumento de control permite obtener estimaciones para las maximales originales. El siguiente teorema es útil para lograr este objetivo. La demostración puede encontrarse en [35].

Teorema 1.66. *Existen grillas diádicas* $\mathcal{D}^{(i)}$, $1 \le i \le 3^n$ *tales que, para cada* $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ *existe* Q_0 *perteneciente a una de tales grillas, satisfaciendo* $Q \subseteq Q_0$ *y* $\ell(Q_0) \le 3\ell(Q)$.

Como consecuencia inmediata de este teorema tenemos el siguiente resultado de control del operador M_Φ por suma de operadores maximales diádicos.

Corolario 1.67. *Sea* Φ *una función de Young. Entonces*

$$M_\Phi f(x) \le C \sum_{i=1}^{3^n} M_{\Phi,\mathcal{D}^{(i)}} f(x).$$

Demostración. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y Q un cubo que contiene a x. Por el Teorema 1.66 existen una grilla diádica $\mathcal{D}^{(i)}$ y $Q_0 \in \mathcal{D}^{(i)}$, $1 \le i \le 3^n$, que verifican $Q \subseteq Q_0$ y $\ell(Q_0) \le 3\ell(Q)$. Entonces,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \Phi\left(\frac{|f(y)|}{\|f\|_{\Phi,Q_0}}\right) dy \le \frac{|Q_0|}{|Q|}\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} \Phi\left(\frac{|f(y)|}{\|f\|_{\Phi,Q_0}}\right) dy \le 3^n.$$

Luego, por la Proposición 1.49,

$$\|f\|_{\Phi,Q} \le 3^n \|f\|_{\Phi,Q_0} \le 3^n M_{\Phi,\mathcal{D}^{(i)}} f(x) \le 3^n \sum_{i=1}^{3^n} M_{\Phi,\mathcal{D}^{(i)}} f(x).$$

De esta manera, tomando supremo sobre todos los cubos Q que contienen a x tenemos la estimación deseada. $\square$

1.4.3. Operadores de tipo fraccionario

En esta sección introduciremos los operadores de tipo fraccionario con los que trabajaremos. Sea $0 < \gamma < n$. Para $f \in L^1_{loc}$, el **operador maximal fraccionario M_γ** se define como

$$M_\gamma f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\gamma/n}} \int_Q |f(y)|\, dy.$$

Notemos que este operador puede verse como una generalización del operador maximal de Hardy-Littlewood ya que, si tomamos $\gamma = 0$, entonces $M_\gamma = M$. Así como los pesos A_p caracterizan la acotación de M en $L^p(\mathbb{R}^n)$, los pesos que caracterizan la acotación de M_γ para $0 < \gamma < n$, son los de la clase $A_{p,q}$, donde p y q son dos exponentes que se relacionan mediante la igualdad $1/q = 1/p - \gamma/n$. El siguiente resultado reúne las propiedades de acotación para M_γ, probadas en [33].

Teorema 1.68. *Sean* $0 < \gamma < n$, $1 \le p \le n/\gamma$ *y* $1/q = 1/p - \gamma/n$. *Entonces, la desigualdad de tipo débil*

$$w^q\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\gamma f(x) > t\}\right)^{1/q} \le C \left(\frac{1}{t^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w^p(x)\, dx\right)^{1/p}$$

vale si y solo si $w \in A_{p,q}$. *Además, si* $1 < p \le n/\gamma$, *la desigualdad de tipo fuerte*

$$\|M_\gamma(f)w\|_{L^q} \le C\, \|fw\|_{L^p}$$

vale si y solo si $w \in A_{p,q}$.

Observación 1.69. En el caso en que $p = n/\gamma$, entenderemos que $q = \infty$.

La siguiente desigualdad es muy útil y permite acotar puntualmente a M_γ por expresiones que involucran al operador maximal de Hardy-Littlewood. La misma fue demostrada en [17] en el contexto más general de los espacios de Lebesgue de exponente variable. Incluimos aquí una adaptación de esta prueba al caso más simple de exponentes constantes. Esta desigualdad es una generalización de la probada en [21] por Hedberg.

Proposición 1.70. *Sean $0 < \gamma < n$, $1 \le p < n/\gamma$, $1/q = 1/p - \gamma/n$ y $s = 1 + q/p'$. Entonces*

$$M_\gamma(f/w)(x) \le M(f^{p/s}w^{-q/s})^{s/q}(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p\,dy\right)^{\gamma/n},$$

para toda función no negativa w y $f \in L^p$.

Demostración. Definimos $g = |f|^{p/s}w^{-q/s}$, con lo cual $|f|/w = g^{s/p}w^{-1+q/p}$. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y Q un cubo que contiene a x. Entonces, aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes $n/(n-\gamma)$ y n/γ, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|^{1-\gamma/n}}\int_Q \frac{|f|}{w} &= \frac{1}{|Q|^{1-\gamma/n}}\int_Q g^{s/p}w^{-1+q/p}\\
&= \frac{1}{|Q|^{1-\gamma/n}}\int_Q g^{1-\gamma/n}g^{s/p+\gamma/n-1}w^{q\gamma/n}\\
&\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q g\right)^{1-\gamma/n}\left(\int_Q g^{(s/p+\gamma/n-1)n/\gamma}w^q\right)^{\gamma/n}\\
&\le Mg(x)^{s/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p\right)^{\gamma/n},
\end{aligned}$$

ya que $1-\gamma/n = s/q$ y $(s/p+\gamma/n-1)n/\gamma = s$, por la definición de s. Tomando supremo sobre todos los cubos Q que contienen a x, tenemos la desigualdad deseada. □

Observación 1.71. Si en la prueba de arriba aplicamos la desigualdad de Jensen con exponente $s > 1$ en el promedio de g, podemos concluir que

$$M_\gamma(f/w)(x) \le M(f^p w^{-q})^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(y)\,dy\right)^{\gamma/n}, \tag{1.25}$$

desigualdad que utilizaremos luego.

El siguiente lema técnico es esencial en la obtención de acotaciones mixtas correspondientes al operador maximal fraccionario M_γ.

Lema 1.72. *Sean $0 < \gamma < n$, $1 < p < n/\gamma$ y $\gamma_0 = p\gamma$. Si $v \in A_1$, entonces para toda f acotada y con soporte compacto tenemos que*

$$\frac{M_\gamma(fv)(x)}{v(x)} \le [v]_{A_1}^{1/p'}\left(\frac{M_{\gamma_0}(f^p v)(x)}{v(x)}\right)^{1/p}.$$

Demostración. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y un cubo Q que contiene a x. Entonces, aplicando Hölder,

$$\begin{aligned}\frac{1}{v(x)}\frac{1}{|Q|^{1-\gamma/n}}\int_Q f v^{1/p} v^{1/p'} &\leq \frac{1}{v(x)}\frac{1}{|Q|^{1-\gamma/n}}\left(\int_Q f^p v\right)^{1/p}\left(\int_Q v\right)^{1/p'} \\ &= \frac{1}{v(x)}\left(\frac{1}{|Q|^{1-\gamma_0/n}}\int_Q f^p v\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v\right)^{1/p'} \\ &\leq \frac{[v]_{A_1}^{1/p'}}{v(x)}\left(M_{\gamma_0}(f^p v)(x)\right)^{1/p}[v(x)]^{1/p'} \\ &= [v]_{A_1}^{1/p'}\left(\frac{M_{\gamma_0}(f^p v)(x)}{v(x)}\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Finalmente, tomando supremo sobre todos los cubos Q que contienen a x obtenemos la desigualdad buscada. □

Finalizaremos este capítulo introduciendo un operador de tipo fraccionario que generaliza a M_Φ. Dados $0 < \gamma < n$ y Φ una función de Young se define el **operador maximal fraccionario generalizado** $M_{\gamma,\Phi}$, para $f \in L^\Phi_{loc}$ como

$$M_{\gamma,\Phi}f(x) = \sup_{Q \ni x} |Q|^{\gamma/n}\, \|f\|_{\Phi,Q}\,.$$

Observación 1.73. Notar que cuando $\gamma = 0$, $M_{\gamma,\Phi} = M_\Phi$. Por otro lado, si consideramos la función $\Phi(t) = t$ entonces $\|f\|_{\Phi,Q} = |Q|^{-1}\int_Q |f(y)|\,dy$, con lo cual en este caso $M_{\gamma,\Phi} = M_\gamma$.

En [7] se prueba un resultado de equivalencia que permite concluir que $M_{\gamma,\varphi}(M_\Phi) \approx M_{\gamma,\Psi}$, donde $p \geq 1$, $\varphi(t) = t^p$, $\Phi(t) = t^p(1+\log^+ t)^\beta$ y $\Psi(t) = t^p(1+\log^+ t)^{\beta+1}$. Este mismo resultado permite probar una versión fraccionaria de la estimación dada por (1.23), a saber:

$$M_\gamma(M^m) \approx M_{\gamma,\Phi_m},$$

donde $\Phi_m(t) = t(1+\log^+ t)^m$.

El siguiente resultado, probado en [5], nos da acotaciones de tipo fuerte para el operador $M_{\gamma,\Phi}$.

Teorema 1.74. *Sean $r \geq 1$, $\delta \geq 0$, $\Phi(t) = t^r(1+\log^+ t)^\delta$, $0 < \gamma < n/r$, $r < p < n/\gamma$ y $1/q = 1/p - \gamma/n$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

(a) $\|M_{\gamma,\Phi}f\|_{L^q(w^q)} \leq C\,\|f\|_{L^p(w^p)}$;

(b) $w^r \in A_{p/r,q/r}$.

Recordar que en las estimaciones de continuidad de los operadores M o M_γ el valor límite inferior para p es 1. En estos casos las acotaciones de tipo fuerte fallan, pero en su lugar se obtienen estimaciones de tipo débil. Esto sucede también para el operador $M_{\gamma,\Phi}$, solo que en este caso el límite inferior para p es r, es decir, el exponente de t en la definición de Φ.

Una estimación de tipo débil, para el caso en que $p = r$, fue probada en [16] en el contexto de espacios de tipo homogéneo. A continuación enunciamos una versión de este resultado adaptada al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.75. *Sean* $0 < \gamma < n/r$, $r \geq 1$, $\delta \geq 0$, $\Phi(t) = t^r(1 + \log^+ t)^\delta$, $\Psi(t) = t^{n-r\gamma}(1 + \log^+ t^{-r\gamma/n})^\delta$ *y* $\varphi(t) = (t(1 + \log^+ t^{r\gamma/n})^\delta)^{n/(n-r\gamma)}$. *Entonces, para cada peso* w *existe una constante positiva* C *de modo que la desigualdad*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\gamma,\Phi} f(x) > t\}) \leq C\varphi\left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) \Psi(Mw(x))\, dx\right)$$

vale para todo t *positivo.*

Para la obtención de desigualdades mixtas para el operador $M_{\gamma,\Phi}$ utilizaremos, de manera similar a lo que se hará para M_γ, una desigualdad puntual que la relaciona con otro operador maximal más sencillo. La siguiente estimación es similar a la Proposición 1.70 e involucra a los operadores M_Φ y $M_{\Phi,\gamma}$.

Proposición 1.76. *Sean* $0 < \gamma < n$, $1 \leq p < n/\gamma$, $1/q = 1/p - \gamma/n$ *y* $s = 1 + q/p'$. *Sean* Φ, ξ *funciones de Young que verifican* $t^{\gamma/n}\xi^{-1}(t) \leq C\Phi^{-1}(t)$, *para todo* $t \geq t_0$. *Entonces para todo* w *no negativo y* $f \in L^p$ *tenemos que*

$$M_{\gamma,\Phi}\left(\frac{f}{w}\right)(x) \leq C\left[M_\xi\left(\frac{f^{p/s}}{w^{q/s}}\right)(x)\right]^{s/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, dy\right)^{\gamma/n}.$$

Demostración. Sea $g = |f|^{p/s} w^{-q/s}$. Entonces se tiene que

$$\frac{|f|}{w} = g^{s/p} w^{q/p-1}.$$

De esta manera, utilizando el Teorema 1.53, podemos estimar

$$\begin{aligned}
|Q|^{\gamma/n}\left\|\frac{f}{w}\right\|_{\Phi,Q} &= |Q|^{\gamma/n}\left\|g^{s/p}w^{q/p-1}\right\|_{\Phi,Q} \\
&= |Q|^{\gamma/n}\left\|g^{1-\gamma/n}g^{s/p+\gamma/n-1}w^{q\gamma/n}\right\|_{\Phi,Q} \\
&\leq C|Q|^{\gamma/n}\left\|g^{1-\gamma/n}\right\|_{\xi,Q}\left\|g^{s/p+\gamma/n-1}w^{q\gamma/n}\right\|_{L^{n/\gamma},Q} \\
&\leq C\,\|g\|_{\xi,Q}^{s/q}\left(\int_Q |f(y)|^p\, dy\right)^{\gamma/n} \\
&\leq C\,(M_\xi g(x))^{s/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, dy\right)^{\gamma/n},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la Proposición 1.56. □

Notemos que de la prueba del resultado anterior también podemos concluir que

$$M_{\gamma,\Phi}\left(\frac{f}{w}\right)(x) \leq C\left[M_\xi\left(\frac{f^p}{w^q}\right)(x)\right]^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, dy\right)^{\gamma/n}.$$

Capítulo 2

Desigualdades mixtas para conmutadores de OCZ

Este capítulo estará dedicado al estudio de desigualdades mixtas para operadores de tipo integral singular. Antes de introducir estas estimaciones, mostraremos la motivación que dio origen a su estudio y cómo fueron obteniéndose avances en esta dirección.

En particular, exhibiremos los resultados obtenidos en esta tesis para conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund. También mostraremos las correspondientes estimaciones mixtas obtenidas para operadores de tipo convolución cuyo núcleo satisface una condición de regularidad de tipo Hörmander.

Introducción

Las desigualdades mixtas fueron introducidas por E. Sawyer en [41], en el año 1985, aunque otro tipo de desigualdades similares fueron estudiadas en 1976 por B. Muckenhoupt y R. Wheeden en [34]. En este último trabajo los autores prueban que, dado $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$, existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R} : Tf(x)w^{1/p}(x) > t\right\}\right| \leq \frac{C}{t^p}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)\,dx \tag{2.1}$$

vale para todo t positivo, donde T es el operador maximal de Hardy-Littlewood o la transformada de Hilbert. Esta desigualdad supone una alteración no trivial de los conjuntos de nivel de Tf por medio del peso w, lo que sugiere que las técnicas de descomposición o lemas de cubrimiento clásicos no apliquen directamente.

En el trabajo original de Sawyer se probó el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sean u y v dos pesos en la clase A_1, y sea M el operador maximal de Hardy-Littlewood. Entonces existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|u(x)v(x)\,dx \tag{2.2}$$

vale para todo t positivo.

Esta desigualdad es un poco más general que (2.1) ya que la medida de Lebesgue se reemplaza por el producto uv. Una de las motivaciones para estudiar este tipo de estimaciones es que las mismas constituyen una herramienta que permite probar, de manera alternativa, la acotación de M en $L^p(w)$ cuando $w \in A_p$. Para ilustrar esto, fijemos $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$. Utilizando el teorema de factorización de Jones (Teorema 1.28) existen pesos $u, v \in A_1$ de modo que $w = uv^{1-p}$. Entonces, definiendo el operador $Sf(x) = M(fv)(x)/v(x)$, y denotando con $g = f/v$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} Mf(x)^p w(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{M(gv)(x)}{v(x)}\right)^p u(x)v(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} (Sg(x))^p u(x)v(x)\,dx.\end{aligned}$$

Si el operador S es de tipo fuerte (p,p) con respecto a la medida $d\mu(x) = u(x)v(x)\,dx$, entonces podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (Mf(x))^p w(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} (Sg(x))^p u(x)v(x)\,dx.\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p u(x)v(x)\,dx\\ &= C\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)\,dx,\end{aligned}$$

lo que implica la desigualdad deseada para M.

Para ver que efectivamente S es de tipo fuerte (p,p) con respecto a μ, observar primero que es de tipo fuerte (o débil) (∞,∞) con respecto a esta medida. En efecto, μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, por lo tanto, $L^\infty(\mu) = L^\infty$. Fijados x y un cubo Q lo contiene, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{v(x)|Q|}\int_Q |f(y)|v(y)\,dy &\leq \|f\|_{L^\infty}[v]_{A_1}[v(x)]^{-1}v(x)\\ &= [v]_{A_1}\|f\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

y tomando supremo sobre todos los cubos Q que contienen a x,

$$\frac{M(fv)(x)}{v(x)} \leq [v]_{A_1}\|f\|_{L^\infty}.$$

Finalmente, tomando supremo en x obtenemos que $\|Sf\|_{L^\infty} \leq [v]_{A_1}\|f\|_{L^\infty}$. Por otro lado, el Teorema 2.1 nos dice que el operador S es de tipo $(1,1)$ débil con respecto a la medida μ. El teorema de interpolación de Marcinkiewicz implica entonces que S es de tipo fuerte (p,p) con respecto a μ, que era lo que queríamos probar.

En el mismo trabajo, Sawyer conjeturó que estas estimaciones deberían ser ciertas para la transformada de Hilbert. Así, surgió una serie de interrogantes sobre la posibilidad de que otros operadores del Análisis Armónico satisfagan desigualdades de este tipo.

En el año 2005, D. Cruz Uribe, J. M. Martell y C. Pérez dieron una respuesta positiva a la conjetura planteada por Sawyer 20 años atrás. En su trabajo extendieron este tipo de estimaciones mixtas al espacio euclídeo n-dimensional, tanto para el operador M como para los operadores de Calderón-Zygmund (OCZ). Además de considerar dos pesos u, v en la clase A_1 de Muckenhoupt, los resultados fueron probados para una condición diferente en el par de pesos: $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$. Esta condición es más sencilla de manipular que la anterior, en el sentido de que el producto uv es un peso de la clase A_∞ (ver Proposición 1.42) y esto permite utilizar herramientas clásicas, como por ejemplo la descomposición de Calderón-Zygmund, y la prueba de la desigualdad mixta correspondiente es menos dificultosa. En contrapartida, el caso $u, v \in A_1$ es más delicado. Por ejemplo, se sabe que los pesos de tipo potencia en $\mathbb{R}^n$ $w(x) = |x|^\alpha$ pertenecen a la clase A_p si y solo si $-n < \alpha < n(p-1)$. Así, si $u = v = |x|^{-n/2}$ el producto uv es $|x|^{-n}$, que no es siquiera localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. La idea central en este trabajo es probar primero la desigualdad mixta para el operador maximal diádico $M_\mathcal{D}$, y luego utilizar el resultado de extrapolación que enunciamos a continuación.

Teorema 2.2 ([11], Thm. 1.7)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de pares de funciones no negativas. Supongamos que para algún $0 < p_0 < \infty$ y todo $w \in A_\infty$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{p_0}(x) w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g^{p_0}(x) w(x)\, dx, \tag{2.3}$$

para todo par $(f, g) \in \mathcal{F}$ tal que el lado izquierdo sea finito, donde C depende solo de $[w]_{A_\infty}$. Entonces, si $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$, tenemos que

$$\left\| \frac{f}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C \left\| \frac{g}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \qquad \textit{para todo par } (f, g) \in \mathcal{F}.$$

Este teorema de extrapolación establece que si (f, g) es un par de funciones no negativas que satisface una desigualdad como (2.3), para algún $0 < p < \infty$ y para todo $w \in A_\infty$ entonces, si $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$ se verifica que

$$\sup_{t>0} t\, uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{f(x)}{v(x)} > t \right\} \right) \leq C \sup_{t>0} t\, uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{g(x)}{v(x)} > t \right\} \right).$$

Cuando T es un OCZ, es bien conocido de la literatura que los pares $(Mf, M_\mathcal{D} f)$ y $(|Tf|, Mf)$, satisfacen (2.3) (ver, por ejemplo, [13] y [10], respectivamente). Luego, a partir de lo obtenido para $M_\mathcal{D}$, se deduce la correspondiente estimación para M y T. Concretamente, el resultado probado en [11] es el siguiente.

Teorema 2.3. *Sean u, v dos pesos que satisfacen una de las siguientes condiciones:*

(i) $u, v \in A_1$;

(ii) $u \in A_1$ *y* $v \in A_\infty(u)$.

Entonces, existe una constante positiva C tal que para todo t positivo

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|u(x)v(x)\,dx, \tag{2.4}$$

donde $\mathcal{T}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood o un OCZ.

En este mismo trabajo, los autores conjeturan que (2.4) debería valer también en el caso más general $u \in A_1$, $v \in A_\infty$: observar que estas condiciones son más débiles que cualquiera de las dos hipótesis consideradas en el Teorema 2.3. Recientemente, esta conjetura fue probada en [25], donde se combinan ideas de la descomposición en cubos principales utilizada por Sawyer en [41] y la técnica de dominación sparse para probar el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sean u, v dos pesos que satisfacen $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Entonces, existe una constante positiva C tal que para todo $t > 0$ se tiene que*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|u(x)v(x)\,dx, \tag{2.5}$$

donde $\mathcal{T}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood o un OCZ.

Por otra parte, pueden encontrarse en la literatura desigualdades mixtas que involucran otras condiciones en los pesos u y v. En [36] se consideran desigualdades mixtas para funciones singulares $v(x) = |x|^{-nr}$ con $r > 1$ y $u \geq 0$ arbitrario en el contexto euclídeo. En este contexto, el resultado que obtienen es el siguiente.

Teorema 2.5 ([36], Thm. 1.3)**.** *Sean $u \geq 0$ y $v(x) = |x|^{-nr}$, para algún $r > 1$. Entonces existe una constante positiva C tal que para todo $t > 0$*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|Mu(x)v(x)\,dx. \tag{2.6}$$

En relación a los conmutadores de OCZ, T_b^m, es conocido que los mismos satisfacen una desigualdad de tipo débil modular, que involucra una función de Young estrechamente relacionada con estos operadores. En este sentido, buscamos desigualdades mixtas para T_b^m que generalicen este resultado. Esto está contenido en la siguiente sección.

2.1. Estimaciones mixtas para conmutadores de OCZ

Diremos que T es un **operador de Calderón-Zygmund** (OCZ) si es un operador acotado en L^2 y tal que para toda $f \in L^2$ con soporte compacto se tiene la representación

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy \quad \text{para } x \notin \text{sop}(f), \tag{2.7}$$

donde K es una función medible de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta \to \mathbb{C}$ que satisface la condición de *tamaño*

$$|K(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|^n}, \tag{2.8}$$

y las condiciones de *suavidad*, también llamadas condiciones de tipo Lipschitz

$$|K(x,y) - K(x,z)| \lesssim \frac{|x-z|}{|x-y|^{n+1}}, \quad \text{si } |x-y| > 2|y-z|, \tag{2.9}$$

$$|K(x,y) - K(w,y)| \lesssim \frac{|x-w|}{|x-y|^{n+1}}, \quad \text{si } |x-y| > 2|x-w|. \tag{2.10}$$

Diremos que $K \in H_\infty^*$ para indicar que verifica las condiciones dadas por (2.9) y (2.10). Más adelante, introduciremos variantes de estos espacios.

Si T es un OCZ, para $\varepsilon > 0$ definimos el operador truncado T_ε como

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y-x|>\varepsilon} K(x,y)f(y)\,dy,$$

y decimos que T es un **operador integral singular de Calderón-Zygmund** (OISCZ) si se cumple que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x) = Tf(x),$$

para casi todo x.

Uno de los ejemplos más emblemáticos de OCZ es la **transformada de Hilbert**, definida como

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\ \text{v.p.} \int \frac{f(y)}{x-y}\,dy.$$

En principio esta definición tiene sentido para funciones f en la clase de Schwartz $\mathcal{S}$. Sin embargo, H puede extenderse a funciones f en $L^p(\mathbb{R})$, con $1 \le p < \infty$ (ver, por ejemplo, [13]).

El **principio de Calderón-Zygmund** establece que todo operador de tipo integral singular está controlado, en algún sentido, por un operador maximal apropiado. En [10] los autores prueban la siguiente estimación.

Teorema 2.6. *Sean $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty$, y T un OCZ. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\,dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p\, w(x)\,dx,$$

donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Observar que, para el caso en el que $w \in A_p$ y $1 < p < \infty$, esta desigualdad combinada con el Teorema 1.45 nos da

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\,dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx. \tag{2.11}$$

En el caso extremo $p = 1$ se sabe que la desigualdad (2.11) no se satisface, al igual que lo que ocurre con el operador maximal de Hardy-Littlewood. Sin embargo, sí se verifica que T es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w, esto es, si $w \in A_1$ entonces

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \le C\, \|f\|_{L^1(w)}\,.$$

Por otro lado, los OCZ no son en general de tipo fuerte (∞,∞). Por ejemplo, se puede probar que si $f(x)=\mathcal{X}_{[0,1]}(x)$ en $\mathbb{R}$, entonces $Hf(x)=\pi^{-1}\log|x/(x-1)|$, que no es acotada.

Dados T un OCZ, $b\in L^1_{loc}$ y un entero no negativo m, se define inductivamente el **conmutador de orden m** de T, T^m_b, de la siguiente manera:

$$T^0_b=T,\quad T^1_bf=[b,T]f=bTf-T(bf),$$

y $T^m_b=[b,T^{m-1}_b]$. A la función b con la que se conmuta se la conoce como **símbolo** del conmutador.

La siguiente proposición nos da una manera de escribir al conmutador T^m_b en términos del operador T. La prueba es sencilla y la omitiremos.

Proposición 2.7. *Sean $b\in L^1_{loc}$, m un entero positivo y T^m_b el conmutador de orden m de un operador T. Entonces*

$$T^m_bf(x)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^jC(m,j)b^{m-j}(x)T(b^jf)(x),$$

donde $C(n,k)=n!/((n-k)!k!)$.

Se puede demostrar por inducción, utilizando (2.7) que, si T es un OCZ, la siguiente igualdad

$$T^m_bf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(b(x)-b(y))^mK(x,y)f(y)\,dy \tag{2.12}$$

vale para $x\notin \operatorname{sop}(f)$.

La función símbolo que aparece en los conmutadores T^m_b generalmente tiene algunas características adicionales. Estas propiedades del símbolo juegan un papel importante a la hora de acotar los conmutadores. En la presente tesis trabajaremos con símbolos en la clase BMO y Lipschitz.

2.1.1. La clase de símbolos BMO

Sea $b\in L^1_{loc}$. Diremos que b pertenece a la clase de funciones de oscilación media acotada o **clase BMO** (sigla proveniente de su nombre en inglés, Bounded Mean Oscillation) si

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}}:=\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|b(x)-b_Q|\,dx<\infty. \tag{2.13}$$

De hecho, $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ no es una norma, dado que si b es constante, entonces $\|b\|_{\mathrm{BMO}}=0$. Sin embargo, sí se trata de una norma en el espacio cociente BMO módulo el espacio de funciones constantes. Un ejemplo típico de función en BMO es $f(x)=\log|x|$ (ver [18]). Notemos que esta función es exponencialmente localmente integrable, es decir, que

$$\int_K e^{f(x)}\,dx<\infty,$$

para cualquier compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Esta no es una propiedad exclusiva de dicha f, sino de toda función de BMO. Este hecho es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 2.8 (Desigualdad de John-Niremberg)**.** *Sea $b \in \mathrm{BMO}$. Entonces existen constantes positivas C_1, C_2 tal que para todo cubo Q,*

$$|\{x \in Q : |b(x) - b_Q| > t\}| \leq C_1 |Q| e^{-C_2 t/\|b\|_{\mathrm{BMO}}}, \tag{2.14}$$

para todo $t > 0$.

Como consecuencia de este resultado, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.9. *Sean $1 < p < \infty$ y $f \in L^p_{loc}$. Entonces*

$$\|f\|_{\mathrm{BMO},p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{1/p}$$

es una norma en BMO equivalente a $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$.

Para funciones de BMO, se sabe que la norma de tipo Luxemburgo exponencial de la oscilación de b en un cubo Q se controla por la norma BMO de b. Esto se expresa en el siguiente lema, cuya prueba puede encontrarse en [15], y que es una consecuencia de la Proposición 2.8.

Lema 2.10. *Sea $b \in \mathrm{BMO}$ y $\varphi(t) = e^t - 1$. Entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\|b - b_Q\|_{\exp L, Q} \leq C \|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Otro resultado importante que utilizaremos es el siguiente.

Lema 2.11. *Dada $f \in \mathrm{BMO}$ existe una constante positiva C tal que*

$$|f_Q - f_{2^k Q}| \leq Ck \|f\|_{\mathrm{BMO}},$$

para todo entero no negativo k y todo cubo Q.

Demostración. Fijemos un cubo Q y un entero no negativo k. Entonces

$$\begin{aligned} |f_Q - f_{2^k Q}| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |f_{2^{j+1}Q} - f_{2^j Q}| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|2^j Q|} \int_{2^j Q} |f(x) - f_{2^{j+1}Q}| \, dx \\ &\leq C \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|2^{j+1} Q|} \int_{2^{j+1} Q} |f(x) - f_{2^{j+1}Q}| \, dx \\ &\leq Ck \|f\|_{\mathrm{BMO}}. \end{aligned}$$

□

En ciertas ocasiones usaremos la siguiente versión pesada del espacio BMO.

Sea w un peso. Definimos la **clase $\mathbf{BMO}_w^*$** como el conjunto de funciones f que verifican que

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_w^*} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q| w(x)\, dx < \infty,$$

donde f_Q denota el promedio usual de f en Q con respecto a la medida de Lebesgue.

El siguiente lema nos da una caracterización de esta clase BMO_w^* cuando w es un peso de la clase A_1.

Lema 2.12. *Sea $w \in A_1$. Entonces las normas $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ y $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}_w^*}$ son equivalentes.*

Demostración. Puesto que w pertenece a A_1, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx &= \frac{1}{w(Q)} \frac{w(Q)}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx \\ &\leq \frac{[w]_{A_1}}{w(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q| w(x)\, dx \\ &\leq [w]_{A_1} \|f\|_{\mathrm{BMO}_w^*}.\end{aligned}$$

Por otra parte, $w \in A_1$ implica que existe un número $s > 1$ tal que $w \in \mathrm{RH}_s$. Entonces, por la desigualdad de Hölder y el Corolario 2.9, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q| w(x)\, dx &\leq \frac{|Q|}{w(Q)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|^{s'}\right)^{1/s'} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^s\right)^{1/s} \\ &\leq C[w]_{\mathrm{RH}_s} \|f\|_{\mathrm{BMO}} \frac{|Q|}{w(Q)} \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)\, dx \\ &= C[w]_{\mathrm{RH}_s} \|f\|_{\mathrm{BMO}}.\end{aligned}$$

□

La correspondiente versión del Teorema 2.6 para T_b^m fue probada por Pérez en [39]. El resultado se exhibe a continuación.

Teorema 2.13. *Sean $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty$, T un OCZ, $m \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathrm{BMO}$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m f(x)|^p w(x)\, dx \leq C \|b\|_{\mathrm{BMO}}^{mp} [w]_{A_\infty}^{(m+1)p} \int_{\mathbb{R}^n} \left(M^{m+1} f(x)\right)^p w(x)\, dx,$$

donde M^{m+1} es el operador M compuesto con sí mismo $m+1$ veces.

Como consecuencia de este resultado, podemos inferir el tipo fuerte (p, p) de los conmutadores de orden superior de un OCZ para pesos en la clase A_p. Más precisamente, si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, entonces tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m f(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\, dx. \tag{2.15}$$

2.1.2. Resultado de acotación mixta para T_b^m cuando $b \in \mathrm{BMO}$

El resultado que presentaremos a continuación da una acotación mixta para T_b^m, donde T es un OCZ, para el caso en que los pesos u y v están relacionados. Cabe aclarar que la demostración de este resultado no involucra el estudio previo de algún operador maximal asociado que controle en cierto sentido a T_b^m. Más aún, esta misma demostración puede adaptarse para el caso $m = 0$, obteniendo una prueba alternativa a la dada en [11].

La idea central de la prueba para este caso se basa en un argumento de descomposición de Calderón-Zygmund asociado a una medida duplicante. Con el objetivo de hacer las cuentas lo más claras posibles, presentaremos primero el caso correspondiente a $m = 1$. El caso general se obtendrá como consecuencia de aplicar inducción en m.

Teorema 2.14. *Sean u y v dos pesos tales que $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$. Sean T un OCZ y $b \in \mathrm{BMO}$. Entonces, para todo $t > 0$, tenemos que*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{[b,T](fv)(x)}{v(x)}\right| > t\right\}\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}}\frac{|f(x)|}{t}\right) u(x)v(x)\,dx,$$

donde $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$.

El correspondiente resultado para conmutadores de orden mayor es el siguiente.

Teorema 2.15. *Sean u, v dos pesos tales que $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$. Sean T un OCZ, $b \in \mathrm{BMO}$ y m un entero no negativo. Entonces, para todo $t > 0$, se tiene que*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{T_b^m(fv)(x)}{v(x)}\right| > t\right\}\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}}^m\frac{|f(x)|}{t}\right) u(x)v(x)\,dx, \tag{2.16}$$

donde $\Phi_m(t) = t(1 + \log^+ t)^m$.

Cuando $v = 1$, ambos teoremas, 2.14 y 2.15 fueron probados en [37]. Cabe destacar que el mismo resultado se obtiene con dos herramientas del Análisis Armónico bien distinguidas: en nuestro caso, y como ya dijimos anteriormente, utilizamos la clásica descomposición de Calderón-Zygmund. En cambio, en [37] se prueba primero una estimación de tipo débil para el operador M^{m+1}, y luego se combina un argumento de tipo “good-λ” con la siguiente estimación puntual

$$M_\delta^\#(T_b^m f)(x) \leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\sum_{j=0}^{m-1} M_\varepsilon(T_b^j f)(x) + \|b\|_{\mathrm{BMO}}^m M^{m+1}f(x), \tag{2.17}$$

donde $0 < \delta < \varepsilon < 1$. El operador $M_\delta^\#$ se define como $M_\delta^\# f(x) = (M^\#(|f|^\delta)(x))^{1/\delta}$, donde

$$M^\# f(x) = \sup_{Q \ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|\,dy.$$

La desigualdad (2.17) permite concluir que

$$\sup_{t>0}\psi_m(t)|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^m f(x)| > t\}| \leq C\sup_{t>0}\psi_m(t)|\{x \in \mathbb{R}^n : M^{m+1}f(x) > t\}|, \tag{2.18}$$

con $\psi_m(t) = 1/\Phi_m(t)$.

Vale la pena observar que la desigualdad (2.18) es válida también si reemplazamos la medida de Lebesgue por un peso $w \in A_\infty$.

De esta manera, los Teoremas 2.14 y 2.15 extienden las desigualdades de tipo débil en el extremo de T_b^m, que, a diferencia del operador T, no verifican ser de tipo débil (1,1) sino que satisfacen una desigualdad que involucra expresiones modulares relacionadas con la función de Young Φ_m.

2.2. Desigualdades mixtas para operadores con núcleo de tipo Hörmander

En esta sección estudiaremos desigualdades mixtas para operadores que generalizan a los ya considerados. Sea T un operador integral singular, acotado en L^2 y que verifica

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy,$$

donde K es una función medible definida fuera del origen que cumple con la condición de tamaño (2.8). En vistas de considerar una clase más amplia de operadores, se introducirán condiciones más débiles que la condición H_∞^* definida por (2.9) y (2.10). Decimos que K verifica la **condición de tipo Hörmander** si existen constantes positivas C y c de modo que

$$\int_{|x|>c|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq C, \tag{2.19}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Denotaremos a esta clase de núcleos con H_1. Se puede ver que $H_\infty^* \subseteq H_1$ y que esta contención es estricta.

Observación 2.16. Cuando el núcleo K de un operador de este tipo satisface la condición H_1, T resulta acotado en L^p para todo $1 < p < \infty$ (ver, por ejemplo, [13]).

Para la prueba del Teorema 2.6 ([10]) se utiliza fuertemente la condición H_∞^* del núcleo del operador T. En [29] se muestra que este resultado ya no es cierto si se reemplaza la condición H_∞^* por H_1. Entonces surgió el interrogante: ¿hay alguna condición intermedia entre H_∞^* y H_1, que conduzca a la acotación dada en el Teorema 2.6? La propuesta fue entonces introducir nuevas clases para los núcleos K, que definiremos a continuación. Para $1 \leq r \leq \infty$, decimos que K verifica la condición $\boldsymbol{L^r}$**-Hörmander**, y lo denotamos por $K \in H_r$ si existen constantes $c \geq 1$ y $C_r > 0$ de modo que la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{\infty} (2^j R)^{n/r'} \left(\int_{|x|\sim 2^m R} |K(x-y) - K(x)|^r\,dx \right)^{1/r} \leq C_r \tag{2.20}$$

vale para todo $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $c|y| < R$. Con la notación $|x| \sim s$ indicaremos al conjunto $\{x : s < |x| \leq 2s\}$. Cuando $r = \infty$ entenderemos la clase H_∞ como el conjunto de núcleos K

que satisfacen

$$\sum_{j=1}^{\infty}(2^j R)^n \sup_{|x|\sim 2^m R} |K(x-y)-K(x)| \le C_\infty.$$

Se tiene entonces que $H_\infty^* \subseteq H_\infty \subseteq H_s \subseteq H_r \subseteq H_1$, $1 \le r < s < \infty$.

Estas clases pueden extenderse a un contexto más general si reemplazamos los espacios L^r por espacios de Orlicz. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Dada Φ una función de Young, decimos que K satisface la condición $\boldsymbol{L^\Phi}$**−Hörmander**, y lo escribimos $K \in H_\Phi$ si existen constantes $c \ge 1$ y $C_\Phi > 0$ tales que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ que verifique $R > c|y|$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty}(2^j R)^n \left\|K(\cdot - y)-K(\cdot)\right\|_{\Phi,|x|\sim 2^j R} \le C_\Phi. \tag{2.21}$$

En general, dado $m \in \mathbb{N}$, decimos que $K \in H_{\Phi,m}$ si existen constantes $c \ge 1$ y $C_{\Phi,m} > 0$ tales que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ con $R > c|y|$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{\infty}(2^j R)^n j^m \left\|K(\cdot - y)-K(\cdot)\right\|_{\Phi,|x|\sim 2^j R} \le C_{\Phi,m}. \tag{2.22}$$

Es de esperar que, como estamos considerando una clase más amplia de núcleos, estos operadores se tornen más singulares y las estimaciones para los mismos, menos suaves. En efecto, en [28] se prueba la siguiente versión del Teorema 2.6. Recordemos que, si φ es una función de Young, $\tilde{\varphi}$ denota su función complementaria.

Teorema 2.17. *Sean Φ una función de Young y T un operador integral singular, acotado en L^p, para algún $1 < p < \infty$ con núcleo $K \in H_\Phi$. Entonces, para todo $0 < p < \infty$ y todo $w \in A_\infty$, se verifica que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\,dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} \left(M_{\tilde{\Phi}} f(x)\right)^p w(x)\,dx,$$

para toda f acotada con soporte compacto.

Por otra parte, la correspondiente estimación para los conmutadores de orden superior de T fue probada en [26].

Teorema 2.18. *Sean m un entero no negativo, $b \in \mathrm{BMO}$ y T un operador de tipo integral singular con núcleo K que verifica $K \in H_{\mathcal{B}} \cap H_{\mathcal{A},m}$, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son funciones de Young que satisfacen $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)(\log t)^m \le t$, para todo $t \ge t_0 > 0$. Entonces para cualquier $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$, se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m f(x)|^p w(x)\,dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} \left(M_{\tilde{\mathcal{A}}} f(x)\right)^p w(x)\,dx,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

En [5] se prueban acotaciones de tipo fuerte para estos operadores T con núcleos en H_Φ, y para sus conmutadores, en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable. A continuación resumimos estos resultados adaptados al caso en que $p(\cdot) = p$ es un exponente constante.

Teorema 2.19. *Sean $p > 1$ y φ una función de Young. Supongamos que existe $1 \leq \beta < p$ de modo que $\tilde{\varphi} \in B_\rho$ para todo $\rho > \beta$. Sea T un operador integral singular con núcleo $K \in H_\Phi$. Si $w^p \in A_{p/\beta}$, entonces*

$$\|wTf\|_{L^p} \leq C\|wf\|_{L^p}$$

para toda función f acotada con soporte compacto, siempre que el lado izquierdo sea finito.

Teorema 2.20. *Sean $p > 1$ y $1 \leq \beta < p$. Sean η y φ dos funciones de Young tales que $\tilde{\eta}^{-1}(t)\varphi^{-1}(t)(\log t)^m \leq t$ para $t \geq t_0 > 1$, $m \in \mathbb{N}$, y $\tilde{\eta} \in B_\rho$ para todo $\rho \geq \beta$. Sea $b \in \mathrm{BMO}$ y T_b^m el conmutador de orden m del operador integral singular T con núcleo $K \in H_\varphi \cap H_{\eta,m}$. Si $w^p \in A_{p/\beta}$, entonces*

$$\|wT_b^m f\|_{L^p} \leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}}^m \|wf\|_{L^p},$$

para toda función f acotada y con soporte compacto, siempre que el lado izquierdo sea finito.

Con respecto a estimaciones de tipo débil en el extremo, en [27] se prueba el siguiente resultado para T_b^m.

Teorema 2.21. *Sean m un entero no negativo, $b \in \mathrm{BMO}$ y T un operador de tipo integral singular con núcleo K que verifica $K \in H_{\mathcal{B}} \cap H_{\mathcal{A},m}$, donde $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son funciones de Young que satisfacen $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)(\log t)^m \leq t$, para todo $t \geq t_0 > 0$. Si $\tilde{\mathcal{A}}$ es submultiplicativa y $w \in A_\infty$ entonces*

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^m(f)(x)| > t\}\right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\mathcal{A}}\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}}^m \frac{|f(x)|}{t}\right) Mw(x)\, dx,$$

para todo $t > 0$.

A diferencia de los OCZ, no disponemos de una estimación previa para un operador de este tipo que nos permita derivar resultados para sus correspondientes conmutadores. Presentaremos a continuación condiciones suficientes en los pesos u y v para lograr acotaciones mixtas en ambos casos.

Teorema 2.22. *Sean $1 < q < \infty$ y $q^2/(2q-1) < \beta < q$. Supongamos que $u \in A_1 \cap RH_s$ para algún $s > 1$ y $v^r \in A_{(q/\beta)'}(u)$, donde $r = \beta(q-1)/(q-\beta)$. Sea T un operador de tipo convolución con núcleo $K \in H_\varphi$, donde φ es una función de Young que satisface $\tilde{\varphi} \in B_\rho$, para cada $\rho \geq \mathrm{mín}\{\beta, s\}$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{T(fv)(x)}{v(x)}\right| > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|u(x)v(x)\, dx,$$

para todo t positivo y toda función f acotada con soporte compacto.

Observación 2.23. Por la Proposición 1.27, si $u \in A_1$ existe $s > 1$ tal que $u \in \mathrm{RH}_s$, con lo cual se podría pedir solamente que $u \in A_1$. Sin embargo, explicitamos el espacio reverse Hölder en la hipótesis porque las propiedades que debe cumplir la función φ guardan relación con este exponente.

El correspondiente resultado de acotación mixta para los conmutadores T_b^m con núcleos generales, cuando el símbolo b está en BMO, es el siguiente. Recordemos que $\Phi_m(t) = t(1 + \log^+ t)^m$.

Teorema 2.24. *Sean $1 < q < \infty$ y $q^2/(2q-1) < \beta < q$. Supongamos que $u \in A_1 \cap RH_s$ para algún $s > 1$, $v^r \in A_{(q/\beta)'}(u)$, donde $r = \beta(q-1)/(q-\beta)$ y $b \in \mathrm{BMO}$. Sean m un entero positivo y T un operador integral singular con núcleo $K \in H_\varphi \cap H_{\eta,m}$, donde η, φ son funciones de Young tales que $\tilde{\eta}^{-1}(t)\varphi^{-1}(t)(\log t)^m \lesssim t$, para $t \geq e$ y $\tilde{\eta} \in B_\rho$ para cada $\rho \geq \min\{\beta, s\}$. Entonces existe una constante positiva C tal que*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{T_b^m(fv)}{v}\right| > t\right\}\right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}}^m \frac{|f(x)|}{t}\right) u(x)v(x)\, dx,$$

para cada $t > 0$ y toda función f acotada con soporte compacto.

Observación 2.25. Notemos que, para el caso $m = 1$, la condición $K \in H_{\varphi,1}$ implica que $K \in H_{\eta,1} \cap H_\varphi$. En efecto, es claro que $K \in H_\varphi$. Por otro lado, es fácil ver que

$$\varphi^{-1}(t)\psi^{-1}(t) \lesssim \eta^{-1}(t),$$

donde $\psi(t) = e^t - 1$. Entonces, por la desigualdad de Hölder generalizada, tenemos que

$$\|K(\cdot - y) - K(\cdot)\|_{\eta,|x|\sim 2^k R} \leq \|K(\cdot - y) - K(\cdot)\|_{\varphi,|x|\sim 2^k R} \|1\|_{\psi, B(0,2^{k+1}R)}.$$

Pero la última norma es una constante ya que, para toda bola B,

$$\frac{1}{|B|}\int_B \psi(1/\lambda)\, dy = \psi(1/\lambda),$$

que es menor o igual que 1 siempre que $\lambda \geq 1/\log 2$.

Las hipótesis en el Teorema 2.24 pueden parecer demasiado restrictivas. Para enriquecer más el teorema, exhibiremos un ejemplo de funciones que cumplan con estas condiciones, para el caso $m = 1$.

Fijemos un número real $0 < \gamma < \min\{p-1, p/2\}$, donde $p = \min\{\beta, s\} > 1$. Sea α elegido de modo que $\max\{p/2, 1\} < \alpha < p - \gamma$ y $\delta = (1 - \gamma/\alpha)\alpha' > 0$. Si $\tilde{\eta}(t) = t^\alpha(1 + \log^+ t)^\gamma$ y $\varphi(t) = t^{\alpha'}(1 + \log^+ t)^\delta$, entonces por la Proposición 1.18 tenemos que, para $t \geq e$,

$$\tilde{\eta}^{-1}(t)\varphi^{-1}(t)\log t \lesssim \frac{t^{1/\alpha}}{(\log t)^{\gamma/\alpha}} \frac{t^{1/\alpha'}}{(\log t)^{\delta/\alpha'}} \log t = t,$$

ya que $\gamma/\alpha + \delta/\alpha' = 1$. Por otro lado, $\tilde{\eta}(t) \in B_\rho$ para todo $\rho \geq p$. En efecto, fijemos $\rho \geq p$. Como $\alpha < p$, existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que $\alpha < \rho - \varepsilon$. Tomando $c = e$ y utilizando la parte (e) de la Proposición 1.18 podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_e^\infty \frac{t^\alpha(1+\log^+ t)^\gamma}{t^{\rho+1}}\,dt &= \int_e^\infty \frac{t^\alpha(1+\log t)^\gamma}{t^{\rho+1}}\,dt\\ &\leq C_{\varepsilon,\gamma}\int_e^\infty t^{\alpha-\rho-1+\varepsilon}\,dt\\ &= C_{\varepsilon,\gamma}\frac{e^{\alpha-\rho+\varepsilon}}{\rho-\alpha-\varepsilon} < \infty,\end{aligned}$$

dado que $\alpha - \rho + \varepsilon < 0$.

Capítulo 3

Desigualdades mixtas para operadores fraccionarios

Introducción

En este capítulo exhibiremos desigualdades mixtas para operadores de tipo fraccionario. Comenzaremos presentando resultados de acotación para el operador M_γ que extienden las estimaciones mixtas para el operador M dadas en [11]. Utilizando estos resultados y un teorema de extrapolación podremos obtener estimaciones análogas para el operador I_γ, aprovechando su relación con M_γ (ver Teorema 3.4). Como aplicación de estos resultados podremos deducir desigualdades mixtas para OISCZ y conmutadores de I_γ de orden superior, ambos con símbolo en la clase Lipschitz-δ.

Cabe aclarar que no existen antecedentes en la literatura sobre desigualdades mixtas para operadores de tipo fraccionario. Al intentar extender las estimaciones a este contexto surgieron los siguientes interrogantes: ¿qué significa una desigualdad mixta para operadores fraccionarios?, ¿cuáles son las condiciones a pedir en el par de pesos u y v? En virtud de lo establecido en los Teoremas 1.68 y 3.4, parece razonable pensar en la posibilidad de probar una desigualdad de tipo débil (p, q) para cierto par de pesos y algún operador auxiliar adecuado. El enfoque que adoptamos entonces es similar a la motivación dada por Sawyer en [41]: encontrar una desigualdad que permita dar una demostración alternativa de la acotación fuerte del operador M_γ con peso w, cuando $w \in A_{p,q}$, donde $1 < p < n/\gamma$ y $1/q = 1/p - \gamma/n$ y que permita derivar, cuando $v = 1$, la desigualdad $(1, n/(n-\gamma))$ débil de M_γ.

Comenzaremos definiendo un operador auxiliar S_γ, para $0 < \gamma < n$. Fijado $w \in A_{p,q}$, por la Proposición 1.40 tenemos que $w^q \in A_{1+q/p'} =: A_r$ y, por el teorema de factorización de Jones, existen pesos u y v en A_1 tales que $w^q = uv^{1-r}$. Un primer intento es definir, para algunos valores α y β a determinar, el operador

$$S_\gamma f(x) := \frac{M_\gamma(fv^\alpha)(x)}{v^\beta(x)}.$$

Veremos que si $S_\gamma : L^p(z^p) \to L^q(z^q)$, para algún z a determinar, entonces se verifica que $M_\gamma : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$. Para ello, tomando $z = u^{1/q}v^{(1-r)/q+\beta}$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_\gamma f)^q w^q\right)^{1/q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{M_\gamma(fv^{-\alpha}v^\alpha)^q}{v^{\beta q}} uv^{1-r}v^{\beta q}\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} S_\gamma(fv^{-\alpha})^q z^q\right)^{1/q} \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p v^{-\alpha p} z^p\right)^{1/p} \\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

siempre que $v^{-\alpha p}z^p = w^p$ o bien $v^{-\alpha}z = w$. Entonces debe cumplirse que

$$u^{1/q}v^{(1-r)/q}v^\beta v^{-\alpha} = u^{1/q}v^{(1-r)/q},$$

lo cual es cierto si $\beta - \alpha = 0$, es decir $\alpha = \beta$. El operador S_γ queda entonces determinado por

$$S_\gamma f(x) = \frac{M_\gamma(fv^\alpha)(x)}{v^\alpha(x)},$$

para cualquier α, y la medida con la cual debemos trabajar es $d\mu(x) = u(x)^{\frac{1}{q}}v(x)^{\frac{1-r}{q}+\alpha}\,dx$. Si tomamos $\alpha = 1$, de la definición de r resulta $d\mu(x) = u(x)^{1/q}v(x)^{1/p}\,dx$. La acotación que se necesita obtener, entonces, es

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (S_\gamma f(x))^q z(x)^q\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p z(x)^p\,dx\right)^{1/p}, \tag{3.1}$$

donde $z(x) = u(x)^{1/q}v(x)^{1/p}$ y u, v son tales que $w = uv^{1-r}$.

3.1. Resultados de acotación mixta para M_γ

El resultado de acotación mixta para el operador M_γ es el siguiente.

Teorema 3.1. *Sean $0 < \gamma < n$, $1 \leq p < n/\gamma$ y sea q definido por $1/q = 1/p - \gamma/n$. Si u y v son pesos tales que vale alguna de las siguientes condiciones:*

(i) *$u, v^{q/p} \in A_1$;*

(ii) *$uv^{-q/p'} \in A_1$ y $v^q \in A_\infty(uv^{-q/p'})$;*

entonces existe una constante positiva C tal que para cada $t > 0$ y toda función f acotada con soporte compacto tenemos que

$$uv^{q/p}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\gamma(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right)^{1/q} \leq \frac{C}{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u^{p/q}(x)v(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Observemos que, en contraste a lo que se mostró para el operador M en la página 60, la medida que surge en estas acotaciones depende de los exponentes p y q y, por lo tanto, también de los espacios de medida que mapea el operador S_γ. Para poder obtener el tipo fuerte de este operador será preciso utilizar un resultado de interpolación pero, a diferencia de lo que se hace para M, aquí será necesario obtener todos los tipos débiles (p,q) de S_γ respecto a μ.

Notemos que si en el Teorema 3.1 consideramos el caso límite $\gamma = 0$, obtenemos $p = q$. En particular, cuando $p = 1$ la acotación mixta resultante coincide con la dada en el Teorema 2.3 para el operador M, al igual que las hipótesis en u y v. Por esta razón, el Teorema 3.1 puede verse como una extensión del resultado de Cruz Uribe, Martell y Pérez al contexto fraccionario, no solo para $p = 1$ sino también para todos los valores (p,q) tales que $1 < p < n/\gamma$ y $1/q = 1/p - \gamma/n$.

Si en el Teorema 3.1 tomamos $p = 1$, $v = 1$ y reemplazamos la condición $u \in A_1$ por $u^q \in A_1$ obtenemos el tipo débil $(1, n/(n-\gamma))$ de M_γ. En efecto, si $u \in A_{1,q}$ entonces la Proposición 1.40 implica que $u^q \in A_1$ y, del Teorema 3.1 con $v = 1$ tenemos que

$$u^q\left(\{x : M_\gamma f(x) > t\}\right)^{1/q} \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f|u,$$

con $q = n/(n-\gamma)$.

Observación 3.2. En vista de la extensión probada para el operador M en [25], surge el interrogante sobre si la estimación dada en el Teorema 3.1 es cierta bajo la condición $u \in A_1$ y $v^{q/p} \in A_\infty$. La respuesta es afirmativa para el caso $p = 1$, donde podemos utilizar la misma prueba que la del Teorema 3.1. Sin embargo, para $1 < p < n/\gamma$ la demostración depende del Lema 1.72, donde se utiliza fuertemente el hecho de que $v^{q/p} \in A_1$.

Veamos a continuación cómo el teorema anterior permite obtener (3.1) en un caso concreto. Para ello, fijemos $0 < \gamma < n$ y $1 < p < n/\gamma$. Sea q el exponente que verifica $1/q = 1/p - \gamma/n$ y supongamos que u y v son dos pesos que satisfacen $u, v^{q/p} \in A_1$. Esto implica que existe $s > 1$ tal que $v^{q/p} \in \mathrm{RH}_s$ y, en virtud del Lema 1.33, tenemos que $v^{qs/p} \in A_1$. Supongamos además que existe un número α_0 suficientemente chico tal que

$$uv^\alpha \in A_1 \qquad \text{para} \qquad |\alpha| < \alpha_0. \tag{3.2}$$

Entonces el Teorema 3.1 nos permite concluir (3.1). En efecto, sea $0 < \varepsilon < p - 1$ a elegir. Seleccionamos

$$p_1 = p - \varepsilon \quad \text{ y } \quad q_1 = \frac{p_1}{1 - \frac{p_1\gamma}{n}},$$

y entonces es inmediato que $p_1 < p$ y $q_1 < q$. Además, $1/q_1 = 1/p_1 - \gamma/n$. De la misma forma, seleccionamos

$$p_2 = p + \varepsilon \qquad \text{y} \qquad q_2 = \frac{p_2}{1 - \frac{p_2\gamma}{n}},$$

y con esto $p_2 > p$, $q_2 > q$ y $1/q_2 = 1/p_2 - \gamma/n$. Observar que $q_2 > 0$ siempre que $\varepsilon < np/(q\gamma)$.

Puesto que α_0 es suficientemente pequeño podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_0 < q/p$. Elijamos entonces

$$0 < \varepsilon < \text{mín}\left\{ \frac{np\alpha_0}{q\gamma\left(\frac{q}{p} + \alpha_0\right)}, \frac{pn}{q\gamma s'}, p - 1 \right\}.$$

Con esta elección de ε, tenemos que $|q/p - q_i/p_i| < \alpha_0$ para $i = 1, 2$ y, además, que $v^{q_2/p_2} \in A_1$. En efecto, es sencillo ver que $q_1/p_1 < q/p < q_2/p_2$. Luego, la condición $q/p - q_1/p_1 < \alpha_0$ equivale a

$$\varepsilon < \frac{np\alpha_0}{q\gamma\left(\frac{q}{p} - \alpha_0\right)}$$

Además, la condición $q_2/p_2 - q/p < \alpha_0$ equivale a

$$\varepsilon < \frac{np\alpha_0}{q\gamma\left(\frac{q}{p} + \alpha_0\right)},$$

con lo cual basta pedir solamente la segunda restricción para ε. Por otra parte, la desigualdad $\varepsilon < pn/(q\gamma s')$ equivale a $q_2/p_2 < sq/p$ e implica, a su vez, que $\varepsilon < pn/(q\gamma)$. Esto permite concluir, en virtud del Lema 1.33, que $v^{q_2/p_2} \in A_1$.

Luego, la condición (3.2) nos dice que los pesos $u_1 = uv^{q/p - q_1/p_1}$ y $u_2 = uv^{q/p - q_2/p_2}$ pertenecen a la clase A_1. De esta manera, aplicando el Teorema 3.1 con exponentes (p_i, q_i) y pesos u_i y v, para $i = 1, 2$, obtenemos que

$$u_i v^{q_i/p_i}(\{x : S_\gamma f(x) > t\})^{1/q_i} \leq \frac{C}{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_i} u_i^{p_i/q_i}(x) v(x)\, dx\right)^{1/p_i}.$$

Observando además que

$$u_i v^{q_i/p_i} = uv^{q/p} \qquad \text{y} \qquad u_i^{p_i/q_i} v = (uv^{q/p})^{p_i/q_i},$$

podemos escribir las desigualdades de arriba como

$$uv^{q/p}(\{x : S_\gamma f(x) > t\})^{1/q_i} \leq \frac{C}{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p_i}(uv^{q/p})^{p_i/q_i}\right)^{1/p_i},$$

para $i = 1, 2$. Procediendo como en la prueba del Teorema 3 en [33], consideramos el peso $W(x) = uv^{q/p}$ y el operador auxiliar $\tilde{S}_\gamma g = S_\gamma(gW^{\gamma/n})$. Aplicando la última desigualdad a $f = gW^{\gamma/n}$, para $i = 1, 2$, obtenemos:

$$W(\{x : \tilde{S}_\gamma g(x) > t\})^{1/q_i} \leq \frac{C}{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_i} W(x)\, dx\right)^{1/p_i}.$$

Esto nos dice que $\tilde{S}_\gamma$ es un operador de tipo débil (p_1, q_1) y (p_2, q_2) respecto de la medida $d\nu(x) = W(x)\,dx$. Utilizando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, $\tilde{S}_\gamma$ es de tipo fuerte (p, q) respecto de ν. Esto equivale, finalmente, a (3.1), puesto que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{S}_\gamma g(x))^q W(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p W(x)\,dx\right)^{1/p},$$

puede reescribirse como

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (S_\gamma f(x))^q W(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p W^{q/p}(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Observación 3.3. Ejemplos típicos de pesos que satisfacen la condición (3.2) son las funciones radiales de tipo potencia. Si consideramos $u = |x|^{r_1}$ y $v = |x|^{r_2}$, entonces u y $v^{q/p}$ son pesos de la clase A_1 si y solo si $-n < r_1 < 0$ y $-np/q < r_2 < 0$. En este caso, $uv^\alpha = |x|^{r_1 + r_2\alpha}$. Esta función resulta ser un peso de A_1 siempre que $-n < r_1 + \alpha r_2 < 0$, lo que equivale a la condición

$$-\frac{r_1}{r_2} < \alpha < -\frac{n + r_1}{r_2}.$$

De esta manera, podemos elegir $\alpha_0 \leq \text{mín}\{r_1/r_2, (-n - r_1)/r_2, \varepsilon_0/2\}$, donde ε_0 es el número dado por la Proposición 1.39.

3.2. Resultados de acotación mixta para I_γ

Sea $0 < \gamma < n$. El **operador integral fraccionaria** I_γ se define como

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\,dy,$$

para toda función f tal que la integral sea finita en casi todo punto x. Notar que $I_\gamma f(x)$ se puede pensar como la convolución de f con el núcleo dado por $K(x) = |x|^{\gamma - n}$.

Existe una relación estrecha entre este operador y M_γ, que permite deducir que estos operadores tienen propiedades de continuidad similares. Esta relación se establece en el próximo teorema, probado en [33].

Teorema 3.4. *Sea $0 < \gamma < n$. Entonces para todo $0 < q < \infty$ y todo $w \in A_\infty$ tenemos que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\gamma f(x)|^q w(x)\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_\gamma f(x))^q w(x)\,dx.$$

Notemos que $w \in A_{p,q}$ equivale a $w^q \in A_{1+q/p'}$, en virtud del inciso (a) de la Proposición 1.40, de donde se tiene que $w^q \in A_\infty$. El próximo resultado, también probado en [33], utiliza este hecho para dar estimaciones con pesos para I_γ, combinando los Teoremas 1.68 y 3.4.

Teorema 3.5. *Sean $0 < \gamma < n$, $1 \le p < n/\gamma$ y $1/q = 1/p - \gamma/n$. Entonces, la desigualdad de tipo débil*

$$w^q\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\gamma f(x)| > t\}\right)^{1/q} \le C\left(\frac{1}{t^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)^p\, dx\right)^{1/p}$$

vale si y solo si $w \in A_{p,q}$. Además, si $1 < p < n/\gamma$, la desigualdad de tipo fuerte

$$\|I_\gamma(f)w\|_{L^q} \le C\,\|fw\|_{L^p}$$

vale si y solo si $w \in A_{p,q}$.

Si $p = n/\gamma$, entonces $q = \infty$, y si bien el Teorema 1.68 nos dice que M_γ es de tipo fuerte $(n/\gamma, \infty)$, esto no ocurre para I_γ. En realidad, se puede ver que I_γ mapea el espacio de Lebesgue $L^{n/\gamma}(w^{n/\gamma})$ en una versión pesada de BMO. Concretamente, la desigualdad

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_\infty}{|Q|}\int_Q |I_\gamma f(x) - (I_\gamma f)_Q|\, dx \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)^p\, dx\right)^{1/p}$$

vale para todo cubo Q y C independiente de Q si y solo si $w \in A_{p,\infty}$. Este resultado puede encontrarse también en [33].

En [11], los autores utilizan la estimación dada por el Teorema 2.6 para probar desigualdades mixtas para un OCZ conociendo la correspondiente estimación para M vía el resultado de extrapolación dado por el Teorema 2.2. Puesto que el operador M_γ controla a I_γ en el sentido expuesto en el Teorema 3.4, una aplicación del Teorema 2.2 a este contexto permite conocer desigualdades mixtas para I_γ. Este resultado se enuncia a continuación.

Teorema 3.6. *Sean $0 < \gamma < n$, $1 \le p < n/\gamma$ y $1/q = 1/p - \gamma/n$. Si $u, v^{q/p} \in A_1$, entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\left\|\frac{I_\gamma(fv)}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})} \le C\left\|\frac{M_\gamma(fv)}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})},$$

para cada función f acotada y con soporte compacto.

Demostración. Fijada una función f podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es no negativa. Definimos $F = (I_\gamma(fv))^q v^{-q/p'}$ y $G = (M_\gamma(fv))^q v^{-q/p'}$. Probaremos que, para todo número real positivo p_0 y todo $w \in A_\infty$, vale la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^{p_0}(x)w(x)\, dx \le C\int_{\mathbb{R}^n} G^{p_0}(x)w(x)\, dx. \tag{3.3}$$

En efecto, sea $w \in A_\infty$. Como $v^{q/p} \in A_1$, entonces $v^{-q/p} \in \mathrm{RH}_\infty$ por la Proposición 1.35. Esto implica, en virtud de la Proposición 1.34, que $v^{-qp_0/p'} \in \mathrm{RH}_\infty$. Dado que $w \in A_\infty$, resulta que $w_0 := v^{-qp_0/p'}w$ es un peso de la clase A_∞, en virtud de la Proposición 1.38. Entonces, por el Teorema 3.4 podemos estimar

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^{p_0}(x)w(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (I_\gamma(fv)(x))^{qp_0}\, w_0(x)\, dx$$

$$\begin{aligned}&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}(M_\gamma(fv)(x))^{qp_0}\,w_0(x)\,dx\\&=C\int_{\mathbb{R}^n}G^{p_0}(x)w(x)\,dx.\end{aligned}$$

Aplicando ahora el Teorema 2.2 al par (F,G), tenemos que existe $C>0$ tal que

$$\left\|Fv^{-q/p}\right\|_{L^{1,\infty}(uv^{q/p})}\leq C\left\|Gv^{-q/p}\right\|_{L^{1,\infty}(uv^{q/p})}.$$

Entonces, utilizando la Proposición 1.24, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{I_\gamma(fv)}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})}&=\left\|I_\gamma(fv)^q v^{-q}\right\|_{L^{1,\infty}(uv^{q/p})}^{1/q}\\&=\left\|Fv^{-q/p}\right\|_{L^{1,\infty}(uv^{q/p})}^{1/q}\\&\leq C\left\|Gv^{-q/p}\right\|_{L^{1,\infty}(uv^{q/p})}^{1/q}\\&=C\left\|M_\gamma(fv)^q v^{-q}\right\|_{L^{1,\infty}(uv^{q/p})}^{1/q}\\&=C\left\|\frac{M_\gamma(fv)}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})}.\end{aligned}$$

□

Ahora estamos en condiciones de enunciar las acotaciones mixtas del operador integral fraccionaria, I_γ.

Teorema 3.7. *Sean $0<\gamma<n$, $1\leq p<n/\gamma$ y q que satisfacen $1/q=1/p-\gamma/n$. Si u y v son pesos que verifican alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $u, v^{q/p}\in A_1$;

(ii) $uv^{-q/p'}\in A_1$ *y* $v^q\in A_\infty(uv^{-q/p'})$;

entonces existe una constante positiva C tal que para cada $t>0$ y cada función f acotada con soporte compacto tenemos que

$$uv^{q/p}\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\frac{|I_\gamma(fv)(x)|}{v(x)}>t\right\}\right)^{1/q}\leq\frac{C}{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p u^{p/q}(x)v(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Observación 3.8. Formalmente, si consideramos $\gamma=0$ obtendríamos un resultado análogo a la estimación dada en el Teorema 2.3 para OCZ. Notar también que, al igual que lo expuesto para M_γ, si suponemos que $p=1$, $v=1$ y $u^q\in A_1$ obtenemos el tipo débil $(1,n/(n-\gamma))$ de I_γ, dado en el Teorema 3.5.

3.3. Aplicaciones

Como aplicación de los resultados presentados en este capítulo daremos acotaciones mixtas para conmutadores de OISCZ y de I_γ, ambos con símbolo en la clase Lipschitz, la cual introduciremos a continuación.

3.3.1. Estimaciones mixtas para $I^m_{\gamma,b}$

Sea $0 < \delta < 1$. Diremos que una función f pertenece a la **clase Lipschitz-δ**, y lo denotamos $b \in \Lambda(\delta)$, si existe una constante positiva C tal que para casi todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\delta. \tag{3.4}$$

A la menor constante para la que se satisface (3.4) se la denota $\|f\|_{\Lambda(\delta)}$.

Los conmutadores de orden m del operador I_γ, denotados con $I^m_{\gamma,b}$, se definen para $b \in L^1_{loc}$ por

$$I^1_{\gamma,b}f(x) = [b, I_\gamma]f(x) = b(x)I_\gamma f(x) - I_\gamma(bf)(x),$$

y para $m > 1$, como

$$I^m_{\gamma,b}f = [b, I^{m-1}_{\gamma,b}]f.$$

Cuando el símbolo b está acotado, podemos tener una representación integral de $I^m_{\gamma,b}f$ en todo punto x, la cual se enuncia en el siguiente resultado.

Lema 3.9. *Si $b \in L^\infty$ y $m \ge 1$, entonces para toda f acotada y de soporte compacto se tiene que*

$$I^m_{\gamma,b}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\, dy,$$

para todo x.

Demostración. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$. Procederemos por inducción en m. Para el caso $m = 1$, las hipótesis para b y f nos aseguran que las integrales

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\, dy \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n} b(y)\frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\, dy$$

son finitas, y por lo tanto

$$\begin{aligned} I_{\gamma,b}f(x) &= b(x)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} b(y)\frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))\frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\, dy. \end{aligned}$$

Ahora supondremos que vale para $m = k$ y lo probaremos para $m = k + 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} I^{k+1}_{\gamma,b}f(x) &= b(x)I^k_{\gamma,b}f(x) - I^k_{\gamma,b}(bf)(x) \\ &= b(x)\int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^k \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^k b(y)\frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^{k+1} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}}\, dy, \end{aligned}$$

y en consecuencia el resultado vale para todo m. □

Mediante esta representación de $I^m_{\gamma,b}f$ podemos establecer un control puntual de este operador por una integral fraccionaria de f, para cierta fracción adecuada, cuando el símbolo b está en la clase Lipschitz-δ.

Lema 3.10. *Sean $0<\gamma<n$, $m\in\mathbb{N}$, $0<\delta<\min\{(n-\gamma)/m,1\}$ y $b\in\Lambda(\delta)$. Entonces, para todo $x\in\mathbb{R}^n$, tenemos que*

$$|I^m_{\gamma,b}(f)(x)|\leq \|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\, I_{\gamma+m\delta}|f|(x),$$

para toda función f acotada y con soporte compacto.

Demostración. La idea de la prueba es utilizar la estimación dada por el Lema 3.9. Por lo tanto, supongamos primero que $b\in L^\infty$. Entonces,

$$\begin{aligned}|I^m_{\gamma,b}f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}(b(x)-b(y))^m\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy\right|\\ &\leq \|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-(\gamma+m\delta)}}\,dy\\ &\leq \|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\, I_{\gamma+m\delta}|f|(x).\end{aligned}$$

Así, conseguimos la estimación deseada para $b\in\Lambda(\delta)\cap L^\infty$. Si ahora $b\notin L^\infty$, fijamos $N\in\mathbb{N}$ y definimos la sucesión de funciones $\{b_N\}_N$ dadas por

$$b_N(x)=\begin{cases}-N, & \text{si} \quad b(x)\leq -N;\\ b(x), & \text{si} \quad -N<b(x)<N;\\ N, & \text{si} \quad b(x)\geq N.\end{cases}$$

Entonces se tiene que $|b_N(x)-b_N(y)|\leq|b(x)-b(y)|$, (ver Sección A.3 del Apéndice) lo cual implica que $\|b_N\|_{\Lambda(\delta)}\leq\|b\|_{\Lambda(\delta)}$. Así, obtenemos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}(b_N(x)-b_N(y))^m\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy\right|\leq\|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\, I_{\gamma+m\delta}|f|(x),$$

para todo $N\in\mathbb{N}$. Por otro lado, si $K(x,y)=|x-y|^{\gamma-n}$, tenemos que $(b_N(x)-b_N(y))^mK(x,y)f(y)$ converge puntualmente a $(b(x)-b(y))^mK(x,y)f(y)$, y la sucesión está uniformemente acotada por una función de L^1, con lo cual el teorema de la convergencia dominada nos da la estimación deseada. □

Con el control puntual provisto por el lema anterior, y conociendo una estimación mixta para I_γ, podemos obtener acotaciones análogas para $I^m_{\gamma,b}$. Más precisamente, combinando el Teorema 3.7 con el Lema 3.10 podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 3.11. *Sean $0<\gamma<n$, $m\in\mathbb{N}$, $0<\delta<\min\{(n-\gamma)/m,1\}$ y $b\in\Lambda(\delta)$. Sean $1\leq p<n/(\gamma+m\delta)$ y q tales que $1/q=1/p-(\gamma+m\delta)/n$. Si u y v son pesos que satisfacen algunas de las siguientes condiciones*

(i) *$u, v^{q/p} \in A_1$;*

(ii) *$uv^{-q/p'} \in A_1$ y $v^q \in A_\infty(uv^{-q/p'})$;*

entonces la estimación

$$uv^{q/p}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|I^m_{\gamma,b}(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right)^{1/q} \leq \frac{C}{t}\,\|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u^{p/q}(x)v(x)\,dx\right)^{1/p}$$

vale para alguna constante positiva C, todo $t > 0$ y para toda función f acotada y con soporte compacto.

3.3.2. Estimaciones mixtas para conmutadores de OISCZ con símbolo Lipschitz

La herramienta fundamental para lograr esta acotación es una desigualdad puntual entre T^m_b y el operador I_γ, para un valor particular de γ, la cual está contenida en el siguiente lema.

Lema 3.12. *Sean $m \in \mathbb{N}$, $0 < \delta < \text{mín}\{n/m, 1\}$, $b \in \Lambda(\delta)$ y T un OISCZ. Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que*

$$|T^m_b f(x)| \leq C\,\|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\,I_{m\delta}|f|(x),$$

para cada función f acotada y con soporte compacto.

Demostración. Supongamos primero que $b \in L^\infty$. Podemos escribir

$$b(x)Tf(x) - T(bf)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y-x|>\varepsilon} b(x)K(x,y)f(y)\,dy - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y-x|>\varepsilon} b(y)f(y)K(x,y)\,dy.$$

Como $b \in L^\infty$, ambos límites anteriores existen, y tenemos que

$$T_b f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y-x|>\varepsilon}(b(x) - b(y))K(x,y)f(y)\,dy.$$

Procediendo por inducción en m se puede probar que

$$T^m_b f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y-x|>\varepsilon}(b(x) - b(y))^m K(x,y)f(y)\,dy,$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. De esta manera, será suficiente demostrar que

$$\left|\int_{|y-x|>\varepsilon}(b(x) - b(y))^m K(x,y)f(y)\,dy\right| \leq C\,\|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\,I_{m\delta}|f|(x),$$

uniformemente en ε. Para ello, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{|y-x|>\varepsilon}(b(x) - b(y))^m K(x,y)f(y)\,dy\right| &\leq \int_{|y-x|>\varepsilon}|b(x) - b(y)|^m|K(x,y)||f(y)|\,dy\\ &\leq C\,\|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\int_{|y-x|>\varepsilon}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-m\delta}}\,dy\end{aligned}$$

$$\leq C\,\|b\|^m_{\Lambda(\delta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-m\delta}}\,dy$$
$$= C\,\|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\, I_{m\delta}|f|(x),$$

donde hemos utilizado la condición Lipschitz de b y la condición de tamaño de K.

Si $b \notin L^\infty$, procedemos como en la prueba del Lema 3.10, considerando la misma sucesión de funciones $\{b_N\}$ y utilizando la estimación

$$\left| \int_{|y-x|>\varepsilon} (b_N(x) - b_N(y))^m K(x,y) f(y)\,dy \right| \leq C\,\|b\|^m_{\Lambda(\delta)}\, I_{m\delta}|f|(x),$$

válida para todo N y con C independiente de N. Esto completa la prueba. $\square$

Combinando este resultado con el Teorema 3.7 podemos obtener la siguiente estimación.

Teorema 3.13. *Sean m un entero positivo, $0 < \delta < \text{mín}\{n/m, 1\}$, $1 \leq p < n/(m\delta)$ y q tales que $1/q = 1/p - m\delta/n$. Sean u y v son dos pesos que satisfacen alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $u, v^{q/p} \in A_1$;

(ii) $uv^{-q/p'} \in A_1$ *y* $v^q \in A_\infty(uv^{-q/p'})$.

Si $b \in \Lambda(\delta)$ y T es un OISCZ, entonces existe una constante positiva C tal que la estimación

$$uv^{q/p}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T_b^m(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right)^{1/q} \leq \frac{C}{t}\,\|b\|^m_{\Lambda(\delta)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u^{p/q}(x) v(x)\,dx\right)^{1/p}$$

vale para todo $t > 0$ y toda función f acotada y con soporte compacto.

Capítulo 4

Desigualdades mixtas para operadores maximales generalizados

Introducción

En este capítulo se estudiarán desigualdades mixtas para los operadores maximales M_φ, donde φ es una función de Young perteneciente a una clase adecuada. Las funciones que se estudian están dadas por $\varphi(t) = t^r(1+\log^+ t)^\delta$, con $r \geq 1$ y $\delta \geq 0$. En particular, para $m \in \mathbb{N}$, la función $\Phi_m(t) = t(1+\log^+ t)^m$ guarda estrecha relación con el conmutador de orden m de un OCZ, T_b^m. Esto puede verse en el Teorema 2.13, donde se muestra que M_{Φ_m} controla a T_b^m en la norma $L^p(w)$, cuando $w \in A_\infty$. Además, las desigualdades mixtas que se probaron para T_b^m resultan una extensión del tipo débil conocido para estos operadores, probado en [37]. Allí se muestra que este operador satisface un tipo débil modular que involucra a Φ_m. Un interrogante natural que surge en este sentido es si existe alguna acotación mixta análoga a la probada en [41] para estos operadores maximales generalizados. La principal diferencia con el operador maximal de Hardy-Littlewood clásico es que, en lugar de trabajar con promedios usuales, la definición de M_φ implica tratar con promedios de tipo Luxemburgo, lo que hace que las técnicas a utilizar varíen sustancialmente. Por otra parte, la condición a pedir en los pesos debería modificarse adecuadamente según las características de la función φ que intervenga.

Como aplicación de los resultados obtenidos, se exhibirán y demostrarán resultados de acotación mixta para el operador maximal generalizado fraccionario $M_{\gamma,\varphi}$, donde φ es una función de Young como las descriptas arriba.

4.1. Caso $u \geq 0$ y v una función potencia

En el Capítulo 2 hablamos sobre los orígenes de las desigualdades mixtas, a través de los resultados de Muckenhoupt y Wheeden en [34] y de Sawyer en [41]. Desigualdades similares a estas fueron estudiadas también por diferentes autores. Por ejemplo, Andersen y Muckenhoupt probaron en [4] que, si $u \in A_1$ y $d \neq 1$ entonces

$$\int_{\{x:|x|^d|\mathcal{T}f(x)|>t\}} |x|^{-d}u(x)\,dx \leq \frac{C_d}{t}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|u(x)\,dx,$$

donde $\mathcal{T}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood o la transformada de Hilbert. Este resultado establece una desigualdad mixta en $\mathbb{R}$ para los operadores mencionados, en el caso en que $v(x) = |x|^{-d}$. Más aún, los autores muestran que el resultado es falso en el caso $d = 1$. Una extensión a mayores dimensiones de este tipo de estimaciones fue probada luego en [30] para OCZ.

Por otra parte, en [36] los autores prueban una desigualdad mixta de este estilo para M, pero sin la suposición adicional de que u sea un peso de la clase A_1. El resultado se resume a continuación.

Teorema 4.1. *Sean $u \geq 0$ y $v(x) = |x|^{-nr}$, con $r > 1$. Entonces existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|Mu(x)v(x)\,dx$$

vale para todo $t > 0$.

El primer resultado sobre acotaciones mixtas que obtuvimos para operadores maximales generalizados es el siguiente.

Teorema 4.2. *Sean $u \geq 0$ y $v(x) = |x|^{\beta}$, con $\beta < -n$. Definimos $w(x) = 1/\Phi\left([v(x)]^{-1}\right)$, donde $\Phi(t) = t^r(1 + \log^+ t)^{\delta}$, con $r \geq 1$ y $\delta \geq 0$. Entonces, la estimación*

$$uw\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\Phi(fv)}{v} > t\right\}\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|v(x)}{t}\right) Mu(x)\,dx.$$

vale para todo $t > 0$.

Observación 4.3. El teorema anterior extiende al Teorema 4.1, ya que si consideramos $r = 1$ y $\delta = 0$, entonces $\Phi(t) = t$, $M_\Phi = M$ y $w = v$, como en dicho teorema.

4.2. Caso u y v independientes

Como ya establecimos previamente en el Capítulo 2, en el Teorema 2.3 los autores suponen dos condiciones diferentes en el par de pesos u y v involucrados en la acotación mixta para M:

(i) $u, v \in A_1$;

(ii) $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$.

En el caso (ii) decimos que los pesos están relacionados, dado que puede verse que el producto uv es un peso de la clase A_∞. En contrapartida, la condición (i) es más singular, en el sentido de que puede ocurrir que el producto uv no sea siquiera localmente integrable. En este caso, decimos que los pesos u y v son independientes entre sí.

El próximo resultado es una extensión de la estimación mixta para el operador maximal de Hardy-Littlewood dada por el Teorema 2.3 en el caso en que los pesos son independientes. Por esta razón, es necesario utilizar argumentos de descomposición similares a los de la prueba del Teorema 2.1, la cual se basa en la construcción de "cubos principales". Hay, obviamente, cambios sustanciales debido a la naturaleza de los promedios que están involucrados en la definición de M_φ. El resultado obtenido se expone a continuación.

Teorema 4.4. *Sean $r \geq 1$, $\delta \geq 0$ y $\Phi(t) = t^r(1+\log^+ t)^\delta$. Si u, v^r son pesos de la clase A_1 y $w(x) = 1/\Phi\left([v(x)]^{-1}\right)$, entonces existe una constante positiva C de modo que la desigualdad*

$$uw\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\Phi(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|v(x)}{t}\right) u(x)\,dx \tag{4.1}$$

vale para cada t positivo y toda función f acotada y con soporte compacto.

El resultado presentado en este teorema resulta ser, entonces, una extensión de las acotaciones mixtas conocidas para el operador M. Todo esto sugiere que cuando se estudian operadores maximales más generales el peso v que aparece en el lado izquierdo se transforma en su correspondiente versión general w. Por otra parte, si consideramos $r = 1$ y $\delta = m$, donde m es un entero positivo cualquiera, estamos en el caso del operador M_{Φ_m}. El Teorema 2.13 nos da la pauta de que si T es un OCZ, el par de operadores (T_b^m, M_{Φ_m}) está íntimamente relacionado, y los tipos débiles en el extremo de estos operadores coinciden. Por lo tanto es heurísticamente adecuado suponer que las acotaciones mixtas de ambos también. Sin embargo, comparando la desigualdad que acabamos de probar con la dada en el Teorema 2.15 encontramos diferencias sustanciales: en el segundo podemos ver que la medida subyacente en ambas expresiones de la desigualdad es el producto uv, mientras que en el primero obtenemos uw a la izquierda y $u\Phi(v)$ a la derecha, si usamos la submultiplicatividad de Φ. Este desequilibrio entre las medidas de ambos lados hace que la desigualdad encontrada no sea homogénea en el peso v. Más precisamente, dado $\lambda > 0$ tomemos $v_\lambda = \lambda v$. Es fácil ver que si $v \in A_1$, $v_\lambda \in A_1$ y además $[v_\lambda]_{A_1} = [v]_{A_1}$. Escribiendo la desigualdad del Teorema 4.4 para v_λ obtenemos

$$\frac{u}{\Phi\left(1/(v\lambda)\right)}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\Phi(fv\lambda)(x)}{v(x)\lambda} > t\right\}\right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{\lambda|f(x)|v(x)}{t}\right) u(x)\,dx,$$

y esta expresión no resulta independiente de λ.

Por otra parte, recordemos que una motivación importante para estudiar las desigualdades mixtas es que éstas permiten dar una prueba alternativa de la acotación de ciertos operadores del Análisis Armónico. En vistas de esto último, y a partir de la desigualdad mixta probada, quisiéramos poder obtener una demostración alternativa de la acotación de M_Φ. Sin embargo, no es claro que esta disparidad en la medida y el hecho de que la desigualdad no sea homogénea en v permitan utilizarla para obtener tal acotación.

En resumen, de todo lo expuesto anteriormente surge el interrogante de si la desigualdad obtenida puede mejorarse, en algún sentido. La respuesta es afirmativa, y a continuación exhibiremos un resultado que mejora el Teorema 4.4 y permite dar la acotación de M_Φ utilizando técnicas de interpolación que involucran desigualdades de tipo débil modular.

En lo que sigue consideraremos una familia de funciones de Young un poco más general que contiene a la clase de funciones ya estudiadas. Dado un número $r \geq 1$, definimos la clase $\mathcal{F}_r$ como el conjunto de todas las funciones Φ de Young que son de tipo inferior r, submultiplicativas y que verifican que existen constantes $C_0, \delta \geq 0$ y $t_0 \geq 1$ de modo que

$$\frac{\Phi(t)}{t^r} \leq C_0(\log t)^\delta, \qquad \text{para } t \geq t_0. \tag{4.2}$$

Observar que si $\Phi(t) = t^r(1+\log^+ t)^\delta$ con $r \geq 1$ y $\delta \geq 0$, entonces $\Phi \in \mathcal{F}_r$. Además, podemos considerar las funciones del estilo

$$\Phi(t) = t^r \log(e + \log(e+t))^\delta$$

donde $r \geq 1$ y $\delta \geq 0$. Estas funciones también están en $\mathcal{F}_r$.

El resultado de acotación mixta obtenido para funciones de la clase $\mathcal{F}_r$ se detalla a continuación.

Teorema 4.5. *Sean $r \geq 1$ y $\Phi \in \mathcal{F}_r$. Si u, v^r son pesos que pertenecen a la clase A_1 de Muckenhoupt, entonces existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$uv^r\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\Phi(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f|}{t}\right) uv^r$$

vale para todo $t > 0$ y toda función f acotada con soporte compacto.

Recordemos que si dos funciones de Young Φ, Ψ son equivalentes para todo $t \geq t_0$, entonces sus promedios Luxemburgo resultan equivalentes. Esto implica que $M_\Phi f \approx M_\Psi f$, hecho que permite extender la estimación del teorema anterior a una clase más amplia de funciones de Young.

Corolario 4.6. *Sean $r \geq 1$, $\Phi \in \mathcal{F}_r$ y u, v^r pesos de la clase A_1 de Muckenhoupt. Sea Ψ una función de Young que verifica $\Psi(t) \approx \Phi(t)$, para todo $t \geq t^* \geq 0$. Entonces existen constantes positivas C_1 y C_2 de modo que la desigualdad*

$$uv^r\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\Psi(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq C_1\int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{C_2|f|}{t}\right) uv^r$$

vale para todo $t > 0$.

El Teorema 4.5 parece más adecuado para obtener una prueba alternativa de la acotación del operador M_Φ en $L^p(w)$. Si comparamos esta estimación con la del Teorema 4.4 vemos que resulta ser homogénea en el peso v y que la medida subyacente es uv^r en ambos lados de la desigualdad. Para el caso particular en que $\Phi = \Phi_m$, la acotación mixta obtenida es similar a la del Teorema 2.15 para el caso del conmutador T_b^m de un OCZ cuando el símbolo b está en la clase BMO, como se había conjeturado.

A continuación utilizaremos este resultado para dar una prueba diferente de la acotación del operador M_Φ cuando $\Phi \in \mathcal{F}_r$, como nos habíamos propuesto al comienzo. Concretamente, fijado $r < p < \infty$, probaremos que si $w \in A_{p/r}$ entonces $M_\varphi : L^{p/r}(w) \to L^{p/r}(w)$. Para ello, definimos el operador S_Φ como

$$S_\Phi f(x) = \frac{M_\Phi(fv)(x)}{v(x)} \tag{4.3}$$

entonces la estimación del Teorema 4.5 puede reescribirse como

$$uv^r\left(\{x \in \mathbb{R}^n : S_\Phi f(x) > t\}\right) \le C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f|}{t}\right) uv^r\, dx,$$

con lo que el operador S_Φ satisface una desigualdad de tipo débil modular con respecto a la medida $d\mu = uv^r\, dx$. Para lograr la acotación de M_Φ utilizaremos el Teorema 1.61, para lo cual probaremos algunos lemas previos.

Lema 4.7. *Sean $\Phi \in \mathcal{F}_r$, S_Φ el operador dado por (4.3) y $u, v^r \in A_1$. Entonces, existe una constante positiva C tal que*

$$\|S_\Phi f\|_{L^\infty(uv^r)} \le C\, \|f\|_{L^\infty(uv^r)}\,.$$

Demostración. Observemos primero que $L^\infty(uv^r) = L^\infty$ ya que los conjuntos que tienen medida de Lebesgue nula coinciden con aquellos que miden cero con la medida μ, con $d\mu(x) = u(x)v^r(x)\, dx$. Entonces, será suficiente con probar el lema para la medida de Lebesgue. Supondremos además que $\|f\|_{L^\infty} = 1$ y el caso general se seguirá luego por homogeneidad.

Como $v^r \in A_1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $v^{r+\varepsilon} \in A_1$. Como $\Phi \in \mathcal{F}_r$, si $t \ge t_0$ tenemos que $\Phi(t) \le C_0 t^r (\log t)^\delta \le C t^{r+\varepsilon}$, en virtud del inciso (e) de la Proposición 1.18. Queremos estimar $M_\Phi(fv)(x)[v(x)]^{-1}$. Fijemos un punto x y un cubo Q que lo contiene. Eligiendo $\lambda = \left(|Q|^{-1}\int_Q v^{r+\varepsilon}\right)^{1/(r+\varepsilon)}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \Phi\left(\frac{fv}{\lambda}\right) &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q \Phi\left(\frac{v}{\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{|Q|}\left[\int_{Q\cap\{v\le t_0\lambda\}} \Phi\left(\frac{v}{\lambda}\right) + \int_{Q\cap\{v>t_0\lambda\}} \Phi\left(\frac{v}{\lambda}\right)\right] \\
&\le \Phi(t_0) + \frac{C}{|Q|}\int_Q \left(\frac{v}{\lambda}\right)^{r+\varepsilon} \\
&\le C.
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\|fv\|_{\Phi,Q} \leq C\lambda \leq C[v^{r+\varepsilon}]_{A_1}^{1/(r+\varepsilon)} v(x), \qquad \text{c.t.p. } x \in Q,$$

y tomando supremo sobre todos los cubos Q que contienen a x, $M_\Phi(fv)(x)[v(x)]^{-1} \leq C_0$. Finalmente, tomando supremo sobre x podemos concluir la estimación deseada. □

El siguiente lema trata con la relación $\prec$ definida previamente en el Capítulo 1. Recordemos que si $\Phi \prec \Psi$ entonces existe una constante positiva ρ tal que la desigualdad

$$\frac{1}{x}\int_0^x \Psi(t)\Phi(\alpha/t)\, dt \leq \rho\Psi(x)\Phi(\alpha/x)$$

vale para todo $x > 0$ y todo $\alpha > 0$.

Lema 4.8. *Si $\Phi \in \mathcal{F}_r$, $p > r$ y $\psi(t) = pt^{p-1}$, entonces $\Phi \prec \psi$.*

Demostración. Observemos primero que si $\Phi_0(t) = t^r(1 + \log^+ t)^\delta$ entonces $\Phi(t) \lesssim \Phi_0(t)$, para cada $t > 0$. En efecto, si $t \leq t_0$ podemos usar el hecho de que $\Phi \in \mathcal{F}_r$ para obtener

$$\Phi(t) = \Phi\left(\frac{t}{t_0}t_0\right) \leq C_r\left(\frac{t}{t_0}\right)^r \Phi(t_0) \leq C\Phi_0\left(t\right).$$

Por otro lado, si $t > t_0$ tenemos que

$$\Phi(t) \leq C_0 t^r(\log t)^\delta \leq C\Phi_0(t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_0^x \psi(t)\Phi\left(\frac{\alpha}{t}\right) dt &= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^\infty \int_{x/2^{k+1}}^{x/2^k} \psi(t)\Phi\left(\frac{\alpha}{t}\right) dt \\
&\leq \frac{1}{x}\sum_{k=0}^\infty \int_{x/2^{k+1}}^{x/2^k} \psi(t)\Phi\left(\frac{2^{k+1}}{x}\alpha\right) dt \\
&\lesssim \frac{1}{x}\Phi\left(\frac{\alpha}{x}\right)\sum_{k=0}^\infty \int_{x/2^{k+1}}^{x/2^k} \psi(t)\Phi(2^{k+1})\, dt
\end{aligned}$$

Como $p > r$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $p - r > \varepsilon$. Recordando que $\psi(t) = pt^{p-1}$ y $\Phi_0(t) \leq C\nu^{-1}t^{r+\nu}$, para cada $\nu > 0$ y $t \geq 1$ podemos estimar

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_0^x \psi(t)\Phi\left(\frac{\alpha}{t}\right) dt &\lesssim \frac{1}{x}\Phi\left(\frac{\alpha}{x}\right)\sum_{k=0}^\infty 2^{(k+1)(r+\varepsilon)} \int_{x/2^{k+1}}^{x/2^k} pt^{p-1}\, dt \\
&\lesssim \frac{1}{x}\Phi\left(\frac{\alpha}{x}\right)\sum_{k=0}^\infty 2^{(k+1)(r+\varepsilon)}\left(\frac{x^p}{2^{kp}} - \frac{x^p}{2^{(k+1)p}}\right) \\
&\lesssim \frac{1}{x}\Phi\left(\frac{\alpha}{x}\right)\sum_{k=0}^\infty 2^{(k+1)(r+\varepsilon-p)}x^p \\
&\lesssim \psi(x)\Phi\left(\frac{\alpha}{x}\right).
\end{aligned}$$

□

Procedamos finalmente a mostrar la acotación de M_Φ. Por el Teorema de Factorización de Jones, podemos escribir $w = uv^{r(1-p/r)} = uv^{r-p}$, donde u, v^r son pesos de la clase A_1. Combinando los dos lemas anteriores con el Teorema 4.5, podemos aplicar el Teorema 1.61 con $d\mu(x) = u(x)v^r(x)\,dx$, $\varphi = \Phi$, $F = S_\Phi f$, $G = f$ y $\psi(t) = t^p$ para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} (S_\Phi f(x))^p u(x)v^r(x)\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u(x)v^r(x)\,dx.$$

Con esto, si $g = f/v$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (M_\Phi f(x))^p w(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{M(gv)(x)}{v(x)}\right)^p u(x)v^r(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (S_\Phi g(x))^p u(x)v^r(x)\,dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p u(x)v^r(x)\,dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx.\end{aligned}$$

4.3. Aplicación: desigualdades mixtas para el operador $M_{\gamma,\Phi}$

En el Teorema 1.74 se caracteriza la acotación que verifica el operador $M_{\gamma,\Phi}$ cuando $\Phi(t) = t^r(1+\log^+ t)^\delta$, con $r \geq 1$ y $\delta \geq 0$. Continuando con la motivación de encontrar desigualdades mixtas que sirvan como herramienta auxiliar para dar una prueba alternativa de esta acotación, buscamos las condiciones que deben cumplir los pesos u y v para lograr este propósito. Consideremos entonces $\Phi(t) = t^r(1+\log^+ t)^\delta$, $0 < \gamma < n/r$, $r < p < n/\gamma$, $1/q = 1/p - \gamma/n$ y w un peso que verifica $w^r \in A_{p/r,q/r}$. Esto implica, en virtud de la Proposición 1.40 que $w^q \in A_{1+(q/r)/(p/r)'} = A_t$. Entonces, por el Teorema 1.28 existen pesos u y v en A_1 tales que $w^q = uv^{1-t}$. Sea $z = u^{1/q}v^{1-(p-r)/(rp)}$. Definimos el operador

$$S_{\gamma,\Phi} f(x) = \frac{M_{\gamma,\Phi}(fv)(x)}{v(x)}.$$

Si se cumple que

$$\|S_{\gamma,\Phi} f\|_{L^q(z^q)} \leq C\,\|f\|_{L^p(z^p)} \tag{4.4}$$

entonces tenemos una prueba alternativa de la acotación fuerte (p,q) de $M_{\gamma,\Phi}$. En efecto, si $g = |f|/v$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_{\gamma,\Phi} f(x))^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{M_{\gamma,\Phi}(gv)(x)}{v(x)}\right)^q u(x)(v(x))^{1-t+q}\,dx\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (S_{\gamma,\Phi} g(x))^q z^q(x)\,dx\right)^{1/q} \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} (g(x)z(x))^p\,dx\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$= C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w^p(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

La demostración de (4.4) puede obtenerse, para un caso concreto de pesos u y v, de la misma forma que se hizo para el operador M_γ en la Página 75. Para ello, y debido a que la medida es diferente en ambos miembros, es necesario conocer todas las estimaciones de tipo débil de $S_{\gamma,\Phi}$ respecto a estas medidas. Más precisamente, si sabemos que se verifica

$$\|S_{\gamma,\Phi} f\|_{L^{q,\infty}(z^q)} \leq C\,\|f\|_{L^p(z^p)},$$

para todo $r < p < n/\gamma$, q que cumple $1/q = 1/p - \gamma/n$ y $z = u^{1/q} v^{1-(p-r)/(rp)}$. El siguiente teorema establece precisamente esta estimación para $S_{\gamma,\Phi}$.

Teorema 4.9. *Sea $\Phi(t) = t^r(1+\log^+ t)^\delta$, con $r \geq 1$ y $\delta \geq 0$. Sean $0 < \gamma < n/r$, $r < p < n/\gamma$ y $1/q = 1/p - \gamma/n$. Si u y $v^{q(1/p+1/r')}$ son pesos de la clase A_1, entonces tenemos que*

$$uv^{q(1/p+1/r')}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_{\gamma,\Phi}(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right)^{1/q} \leq C\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)^p u^{p/q}(x)(v(x))^{1+p/r'}\,dx\right]^{1/p}.$$

Observación 4.10. Cuando $r = 1$ y $\delta = 0$ tenemos que $M_{\gamma,\Phi} = M_\gamma$ y en este caso obtenemos la desigualdad mixta dada en el Teorema 3.1 para el caso en que los pesos no están relacionados.

Para el caso extremo $p = r$, la estimación obtenida está contenida en el siguiente teorema.

Teorema 4.11. *Sea $\Phi(t) = t^r(1+\log^+ t)^\delta$, con $r \geq 1$ y $\delta \geq 0$. Sean $0 < \gamma < n/r$ y $1/q = 1/r - \gamma/n$. Si u y v^q son pesos de la clase A_1, entonces existe una constante positiva C de modo que*

$$uv^q\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_{\gamma,\Phi}(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \varphi\left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\gamma\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)\Psi\left(u^{1/q}(x)v(x)\right)dx\right),$$

donde $\varphi(t) = [t(1+\log^+ t)^\delta]^{q/r}$, $\Psi(t) = t^r(1+\log^+(t^{1-q/r}))^{n\delta/(n-r\gamma)}$ y $\Phi_\gamma(t) = \Phi(t)(1+\log^+ t)^{\delta r\gamma/(n-r\gamma)}$.

Observación 4.12. La estimación obtenida en este teorema cuando $v = 1$ es similar a la del Teorema 1.75, aunque la función que interviene en el miembro derecho es más grande que la función Φ que aparece en dicha estimación. En este sentido, este resultado parece no ser óptimo. Sin embargo, cuando $\Phi(t) = t$, tenemos $r = 1$ y $\delta = 0$. En este caso, obtenemos la desigualdad mixta correspondiente a $p = 1$ del Teorema 3.1, cuando los pesos u y v son independientes.

Capítulo 5

Demostraciones de los teoremas

Esta sección está dedicada a las demostraciones de los resultados principales, los cuales fueron enunciados en los Capítulos 2, 3 y 4.

5.1. Teoremas del Capítulo 2

Demostración del Teorema 2.14. Dado que $[b,T](f/\|b\|_{\mathrm{BMO}}) = [b/\|b\|_{\mathrm{BMO}}, T]f$, podemos suponer que $\|b\|_{\mathrm{BMO}} = 1$. Podemos suponer además, sin pérdida de generalidad, que f es una función no negativa, acotada y con soporte compacto.

Fijemos $t > 0$. Utilizando el Teorema 1.65 hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel t, con respecto a la medida duplicante μ dada por $d\mu(x) = v(x)\,dx$ (notar que μ es duplicante pues, por la Proposición 1.42, $v \in A_\infty(u)$ implica $v \in A_\infty$). Esto nos da una colección de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$, tales que $t < f_{Q_j}^v \leq Ct$ para algún $C > 1$, donde $f_{Q_j}^v$ está definido por

$$f_{Q_j}^v = \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(y)v(y)\,dy.$$

De esta descomposición tenemos que, si $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, entonces $f(x) \leq t$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

También descomponemos $f = g + h$, donde

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega; \\ f_{Q_j}^v, & \text{si} \quad x \in Q_j, \end{cases}$$

y $h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x)$, con

$$h_j(x) = \left(f(x) - f_{Q_j}^v\right) \mathcal{X}_{Q_j}(x).$$

Se sigue entonces que $g(x) \leq Ct$ en casi todo x. Además, cada h_j está soportada en Q_j y

$$\int_{Q_j} h_j(y)v(y)\,dy = 0. \tag{5.1}$$

Sea $Q_j^* = 3Q_j$ y $\Omega^* = \bigcup_j Q_j^*$. Entonces

$$\begin{aligned}
uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{[b,T](fv)(x)}{v(x)}\right| > t\right\}\right) &\leq uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{[b,T](gv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{2}\right\}\right) \\
&\quad + uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{[b,T](hv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{2}\right\}\right) \\
&\leq uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{[b,T](gv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{2}\right\}\right) \\
&\quad + (uv)(\Omega^*) \\
&\quad + uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|\frac{[b,T](hv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{2}\right\}\right) \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

Estimaremos cada término por separado. Como $v \in A_\infty(u)$, existe $q' > 1$ tal que $v \in A_{q'}(u)$, y entonces se tiene que $v^{1-q} \in A_q(u)$. Luego, aplicando la Proposición 1.42, concluimos que $uv^{1-q} \in A_q$. Utilizando la desigualdad de Tchebychev con $q > 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{[b,T](gv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{2}\right\}\right) \\
&\leq \frac{C}{t^q}\int_{\mathbb{R}^n} |[b,T](gv)(x)|^q u(x)(v(x))^{1-q}\,dx \\
&\leq \frac{C}{t^q}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^q u(x)v(x)\,dx \\
&\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)u(x)v(x)\,dx,
\end{aligned}$$

ya que $uv^{1-q} \in A_q$ implica que el conmutador $[b,T]$ está acotado en $L^q(uv^{1-q})$ en virtud de (2.15), y $g(x) \leq Ct$. De la definición de g y la parte (d) de la Proposición 1.42 tenemos que

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} f(x)u(x)v(x)\,dx + \frac{C}{t}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(uv)(Q_j)}{v(Q_j)}\int_{Q_j} f(y)v(y)\,dy \\
&\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega} f(x)u(x)v(x)\,dx + \frac{C}{t}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{Q_j} f(x)u(x)v(x)\,dx \\
&\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)v(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como uv es duplicante, y de la parte (d) de la Proposición 1.42 obtenemos que

$$\begin{aligned}
II = uv(\Omega^*) &= \sum_j uv(Q_j^*) \\
&\leq C\sum_j v(Q_j)\frac{uv(Q_j)}{v(Q_j)} \\
&\leq C\sum_j (\inf_{Q_j} u)\frac{1}{t}\int_{Q_j} f(x)v(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Observando que

$$\frac{[b,T](hv)}{v} = \sum_j \frac{[b,T](h_jv)}{v} = \sum_j \frac{(b-b_{Q_j})T(h_jv)}{v} - \sum_j \frac{T\left((b-b_{Q_j})h_jv\right)}{v},$$

la estimación de III puede hacerse como sigue

$$\begin{aligned} III &\leq uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|\sum_j \frac{(b-b_{Q_j})T(h_jv)}{v}\right| > \frac{t}{4}\right\}\right) \\ &\quad + uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|\sum_j \frac{T((b-b_{Q_j})h_jv)}{v}\right| > \frac{t}{4}\right\}\right) \\ &= A+B. \end{aligned}$$

Estimemos primero A. Utilizando la desigualdad de Tchebychev, el teorema de Tonelli y (5.1) tenemos que

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega^*}\sum_j |b(x)-b_{Q_j}||T(h_jv)(x)|u(x)\,dx \\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_j^*}|b(x)-b_{Q_j}|\left|\int_{Q_j} h_j(y)v(y)K(x,y)\,dy\right|u(x)\,dx \\ &= \frac{C}{t}\sum_j\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_j^*}|b(x)-b_{Q_j}|\left|\int_{Q_j} h_j(y)v(y)\left[K(x,y)-K(x,x_{Q_j})\right]\,dy\right|u(x)\,dx \\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j\int_{Q_j}|h_j(y)|v(y)\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_j^*}\left|b(x)-b_{Q_j}\right|\left|K(x,y)-K(x,x_{Q_j})\right|u(x)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Dado un cubo Q_j, denotemos con x_{Q_j} a su centro, $\ell(Q_j)$ la longitud de sus lados, $r_j = 2^{-1}\ell(Q_j)$ y $A_{j,k} = \{x : 2^k r_j \leq |x-x_{Q_j}| < 2^{k+1}r_j\}$. Entonces, para cada $y\in Q_j$, de (2.9) tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_j^*}|b(x)-b_{Q_j}||K(x,y)-K(x,x_{Q_j})|u(x)\,dx \\ &\qquad\leq \sum_{k=1}^\infty\int_{A_{j,k}}|b(x)-b_{Q_j}|\frac{|y-x_{Q_j}|}{|x-x_{Q_j}|^{n+1}}u(x)\,dx \\ &\qquad\leq \sum_{k=1}^\infty\frac{r_j}{(2^kr_j)^{n+1}}\int_{2^{k+1}Q_j}|b(x)-b_{Q_j}|u(x)\,dx. \end{aligned}$$

Utilizando que $u\in A_1$, junto con los Lemas 2.11 y 2.12, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty\frac{r_j}{(2^kr_j)^{n+1}}\int_{2^{k+1}Q_j}|b-b_{Q_j}|u &\leq C\sum_{k=1}^\infty\frac{2^{-k}}{|2^{k+1}Q_j|}\int_{2^{k+1}Q_j}|b-b_{Q_j}|u \\ &\leq C\sum_{k=1}^\infty\frac{2^{-k}}{|2^{k+1}Q_j|}\int_{2^{k+1}Q_j}|b-b_{2^{k+1}Q_j}|u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{|2^{k+1}Q_j|}\int_{2^{k+1}Q_j}|b_{2^{k+1}Q_j}-b_{Q_j}|u\\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{u(2^{k+1}Q_j)}{|2^{k+1}Q_j|}\frac{1}{u(2^{k+1}Q_j)}\int_{2^{k+1}Q_j}|b-b_{2^{k+1}Q_j}|u\\
&+C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}C(k+1)u(y)\leq Cu(y).
\end{aligned}$$

Luego, por la Proposición 1.42 parte (d), tenemos que

$$\begin{aligned}
A&\leq\frac{C}{t}\sum_j\int_{Q_j}|h_j(y)|u(y)v(y)\,dy\\
&\leq\frac{C}{t}\sum_j\left(\int_{Q_j}f(y)u(y)v(y)\,dy+\int_{Q_j}f^v_{Q_j}u(y)v(y)\,dy\right)\\
&\leq\frac{C}{t}\sum_j\left(\int_{Q_j}f(y)u(y)v(y)\,dy+\frac{(uv)(Q_j)}{v(Q_j)}\int_{Q_j}f(y)v(y)\,dy\right)\\
&\leq\frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)u(y)v(y)\,dy,
\end{aligned}$$

Para terminar, estimaremos la parte B. Observemos que, si $x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^*$ entonces

$$T\left(\sum_j(b-b_{Q_j})h_jv\right)(x)=\sum_j T((b-b_{Q_j})h_jv)(x).$$

La prueba de esta igualdad puede encontrarse en la Sección A.2 del Apéndice. Aplicando el Teorema 2.3 para T obtenemos

$$\begin{aligned}
B&\leq\frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_j(b(x)-b_{Q_j})h_j(x)\right|u(x)v(x)\,dx\\
&\leq\frac{C}{t}\sum_j\int_{Q_j}|b(x)-b_{Q_j}|f(x)u(x)v(x)\,dx+\frac{C}{t}\sum_j\int_{Q_j}|b(x)-b_{Q_j}|f^v_{Q_j}u(x)v(x)\,dx\\
&=B_1+B_2.
\end{aligned}$$

Para estimar B_1, aplicamos la desigualdad de Hölder generalizada (Teorema 1.53) con respecto a $w=uv$, con las funciones de Young $\Phi_1(t)=t(1+\log^+t)$ y su complementaria. Luego, utilizamos los Lemas 1.55 y 2.10 que permiten estimar la norma exponencial de las oscilaciones $b-b_{Q_j}$ por $\|b\|_{\text{BMO}}$, y finalmente la Proposición 1.42, parte (d). Así, obtenemos

$$\begin{aligned}
B_1&\leq\frac{C}{t}\sum_j uv(Q_j)\|b-b_{Q_j}\|_{\exp L,Q_j,uv}\ \|f\|_{L\log L,Q_j,uv}\\
&\leq\frac{C}{t}\sum_j(uv)(Q_j)\|b-b_{Q_j}\|_{\exp L,Q_j,uv}\inf_{\tau>0}\left\{\tau+\frac{\tau}{(uv)(Q_j)}\int_{Q_j}\Phi\left(\frac{f}{\tau}\right)uv\right\}
\end{aligned}$$

$$\leq C\sum_j\left((uv)(Q_j)+\int_{Q_j}\Phi\left(\frac{f}{t}\right)uv\right)$$
$$\leq C\sum_j\left(v(Q_j)\inf_{Q_j}u+\int_{Q_j}\Phi\left(\frac{f}{t}\right)uv\right)$$
$$\leq C\sum_j\left(\inf_{Q_j}u\frac{1}{t}\int_{Q_j}fv\,dx+\int_{Q_j}\Phi\left(\frac{f}{t}\right)uv\right)$$
$$\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{f}{t}\right)uv.$$

Para estimar B_2, sea s el exponente reverse Hölder del peso uv. Entonces, aplicando la desigualdad de Hölder con s y s', obtenemos

$$\begin{aligned}B_2&\leq\frac{C}{t}\sum_j\frac{|Q_j|}{v(Q_j)}\left(\int_{Q_j}f(y)v(y)\,dy\right)\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b-b_{Q_j}|^{s'}\right)^{1/s'}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}(uv)^s\right)^{1/s}\\&\leq\frac{C}{t}\sum_j\frac{(uv)(Q_j)}{v(Q_j)}\int_{Q_j}f(y)v(y)\,dy\\&\leq C\frac{1}{t}\sum_j\inf_{Q_j}u\int_{Q_j}f(y)v(y)\,dy\\&\leq C\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)u(y)v(y)\,dy,\end{aligned}$$

y el resultado queda probado. □

Demostración del Teorema 2.15. Procederemos por inducción en m. El paso base, correspondiente a $m=1$, se encuentra en el Teorema 2.14. Supongamos que el resultado vale para todo $1\leq i\leq m-1$, y probémoslo para $i=m$. Notemos nuevamente que $T_b^m(f/\|b\|_{\mathrm{BMO}})=T^m_{b/\|b\|_{\mathrm{BMO}}}(f)$, con lo cual podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|b\|_{\mathrm{BMO}}=1$. También suponemos que f es una función no negativa, acotada y con soporte compacto.

Fijemos $t>0$. En virtud del Teorema 1.65, consideramos la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel t con respecto a la medida duplicante μ dada por $d\mu(x)=v(x)\,dx$. Utilizando la misma notación que en la prueba del Teorema 2.14 tenemos que

$$\begin{aligned}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|\frac{T_b^m(fv)(x)}{v(x)}\right|>t\right\}\right)&\leq uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|\frac{T_b^m(gv)(x)}{v(x)}\right|>\frac{t}{2}\right\}\right)\\&\quad+uv(\Omega^*)+uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^*:\left|\frac{T_b^m(hv)(x)}{v(x)}\right|>\frac{t}{2}\right\}\right)\\&=I+II+III.\end{aligned}$$

La estimación de I es análoga a la del Teorema 2.14, utilizando el tipo fuerte con pesos para T_b^m (2.15). La estimación de II es exactamente igual a la del mencionado teorema.

Centremos ahora la atención en III. Observar que $h_j v$ está soportada en Q_j, con lo cual si $x \notin Q_j$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
T_b^m(h_j v)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m \, K(x,y) h_j(y) v(y)\, dy \\
&= \sum_{\ell=0}^{m} C_{\ell,m}(b(x) - b_{Q_j})^{m-\ell} \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b_{Q_j})^{\ell} K(x,y) h_j(y) v(y)\, dy \\
&= C_{0,m}(b(x) - b_{Q_j})^m T(h_j v)(x) + C_{m,m} T\left((b - b_{Q_j})^m h_j v\right)(x) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{m-1} C_{\ell,m}(b(x) - b_{Q_j})^{m-\ell} \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b_{Q_j})^{\ell} K(x,y) h_j(y) v(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Luego, expandiendo nuevamente la expresión binomial $(b - b_{Q_j})^{m-\ell}$, obtenemos (ver Figura 5.1) que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{m-1} C_{\ell,m}(b(x) - b_{Q_j})^{m-\ell} \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b_{Q_j})^{\ell} K(x,y) h_j(y) v(y)\, dy \\
&\quad = \sum_{\ell=1}^{m-1} C_{\ell,m} \sum_{i=0}^{m-\ell} C_{i,\ell,m} \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^i (b(y) - b_{Q_j})^{m-i} K(x,y) h_j(y) v(y)\, dy \\
&\quad = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{m-i} C_{\ell,m} C_{i,m,\ell} \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^i (b(y) - b_{Q_j})^{m-i} K(x,y) h_j(y) v(y)\, dy \\
&\quad + \sum_{\ell=1, i=0}^{m-1} C_{\ell,m} C_{0,m,\ell} \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b_{Q_j})^{m} K(x,y) h_j(y) v(y)\, dy.
\end{aligned}$$

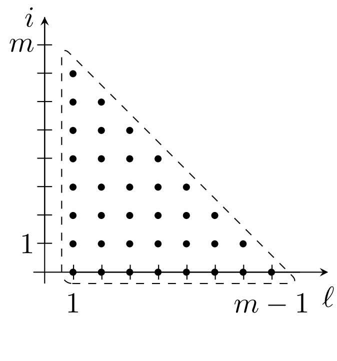


Figura 5.1: $1 \leq \ell \leq m-1$; $0 \leq i \leq m - \ell$.

Así,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,m} \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^i (b(y) - b_{Q_j})^{m-i} K(x,y) h_j(y) v(y)\, dy \\
&\qquad = \tilde{C}_{0,m} T((b - b_{Q_j})^m h_j v)(x) + \sum_{i=1}^{m-1} C_{i,m} T_b^i\left((b - b_{Q_j})^{m-i} h_j v\right)(x),
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\left|\sum_j T_b^m(h_jv)(x)\right| \leq &\left|C_{0,m}\sum_j (b(x)-b_{Q_j})^m T(h_jv)(x)\right| \\ &+\left|C_{m,m}\sum_j T\left((b-b_{Q_j})^m h_jv\right)(x)\right| \\ &+\left|\sum_j \sum_{i=1}^{m-1} C_{i,m}T_b^i((b-b_{Q_j})^{m-i}h_jv)(x)\right|.\end{aligned}$$

Entonces podemos estimar III como sigue:

$$\begin{aligned}III \leq\, & uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|C_{0,m}\sum_j \frac{(b-b_{Q_j})^m T(h_jv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{6}\right\}\right) \\ &+ uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|C_{m,m}\sum_j \frac{T((b-b_{Q_j})^m h_jv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{6}\right\}\right) \\ &+ uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|\sum_{i=1}^{m-1} C_{i,m}\frac{T_b^i(\sum_j (b-b_{Q_j})^{m-i}h_jv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{6}\right\}\right) \\ &= I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

Para estimar I_1 utilizamos la desigualdad de Tchebychev para obtener:

$$\begin{aligned}I_1 &\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega^*}\left|\sum_j (b(x)-b_{Q_j})^m T(h_jv)(x)\right| u(x)\,dx \\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_j^*}|b(x)-b_{Q_j}|^m\left|\int_{Q_j}\left(K(x,y)-K(x,x_{Q_j})\right)h_j(y)v(y)\,dy\right| u(x)\,dx \\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|v(y)\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_j^*}|b(x)-b_{Q_j}|^m|K(x,y)-K(x,x_{Q_j})|u(x)\,dx\,dy \\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|v(y)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_{j,k}}|b(x)-b_{Q_j}|^m\frac{|y-x_{Q_j}|}{|x-x_{Q_j}|^{n+1}}u(x)\,dx\,dy \\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|v(y)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{|2^{k+1}Q_j|}\int_{2^{k+1}Q_j}|b(x)-b_{Q_j}|^m u(x)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

donde $A_{j,k}$ es el conjunto definido en la prueba del Teorema 2.14, y x_{Q_j} es el centro de Q_j. Para $y\in Q_j$ podemos acotar la suma sobre k por la expresión

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{|2^{k+1}Q_j|}\int_{2^{k+1}Q_j}|b(x)-b_{Q_j}|^m u(x)\,dx \\ &\qquad\leq 2^m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{|2^{k+1}Q_j|}\int_{2^{k+1}Q_j}|b(x)-b_{2^{k+1}Q_j}|^m u(x)\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{|2^{k+1}Q_j|} \int_{2^{k+1}Q_j} |b_{Q_j} - b_{2^{k+1}Q_j}|^m u(x)\, dx \\
&= K_1 + K_2.
\end{aligned}
$$

Con un cambio de variable, tenemos que

$$
\|g^m\|_{\exp L^{1/m},Q} = \|g\|^m_{\exp L,Q} \tag{5.2}
$$

para cada cubo Q. Combinando esta estimación y la desigualdad de Hölder generalizada, para $y \in Q_j$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
K_1 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|(b - b_{2^{k+1}Q_j})^m\|_{\exp L^{1/m},2^{k+1}Q_j} \|u\|_{L(\log L)^m,2^{k+1}Q_j} \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|b - b_{2^{k+1}Q_j}\|^m_{\exp L,2^{k+1}Q_j} M_{L(\log L)^m} u(y) \\
&\leq C M^{m+1} u(y) \\
&\leq C u(y),
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado (1.23) y que $u \in A_1$.

Por otra parte, por el Lema 2.11 tenemos que K_2 se acota por

$$
\begin{aligned}
K_2 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{|2^{k+1}Q_j|} \int_{2^{k+1}Q_j} (k+1)^m u(x)\, dx \\
&\leq C u(y) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (k+1)^m \\
&= C u(y).
\end{aligned}
$$

De esta manera,

$$
I_1 \leq \frac{C}{t} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| u(y) v(y)\, dy,
$$

y desde este punto podemos proceder como en la estimación correspondiente a I_1 en la prueba del Teorema 2.14. Para estimar I_2 aplicamos el Teorema 2.3 a T para obtener

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_j (b(x) - b_{Q_j})^m h_j(x) \right| u(x) v(x)\, dx \\
&\leq \frac{C}{t} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m |h_j(x)| u(x) v(x)\, dx \\
&\leq \frac{C}{t} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m f(x) u(x) v(x)\, dx \\
&+ \frac{C}{t} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m f^v_{Q_j} u(x) v(x)\, dx
\end{aligned}
$$

$$= I_{2,1} + I_{2,2}.$$

Utilizando la desigualdad de Hölder generalizada con respecto a la medida μ definida por $d\mu(x) = u(x)v(x)\,dx$, y en virtud de (5.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
I_{2,1} &\le \frac{C}{t}\sum_j uv(Q_j)\|(b-b_{Q_j})^m\|_{\exp L^{1/m},Q_j,uv}\|f\|_{L(\log L)^m,Q_j,uv} \\
&\le \frac{C}{t}\sum_j uv(Q_j)\|b-b_{Q_j}\|^m_{\exp L,Q_j,uv}\left\{t+\frac{t}{uv(Q_j)}\int_{Q_j}\Phi_m\left(\frac{f(x)}{t}\right)u(x)v(x)\,dx\right\} \\
&\le C\sum_j\left(\frac{uv(Q_j)}{v(Q_j)}v(Q_j)+\int_{Q_j}\Phi_m\left(\frac{f(x)}{t}\right)u(x)v(x)\,dx\right) \\
&\le C\sum_j\left(\frac{1}{t}\int_{Q_j}f(x)u(x)v(x)\,dx+\int_{Q_j}\Phi_m\left(\frac{f(x)}{t}\right)u(x)v(x)\,dx\right) \\
&\le C\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_m\left(\frac{f(x)}{t}\right)u(x)v(x)\,dx,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la Proposición 1.42, parte (d).

Para $I_{2,2}$ aplicamos la desigualdad de Hölder con exponentes s y s', donde $s>1$ es tal que $uv \in \mathrm{RH}_s$. Entonces,

$$\begin{aligned}
I_{2,2} &\le \sum_j \frac{C}{t}\frac{|Q_j|}{v(Q_j)}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b-b_{Q_j}|^{ms'}\right)^{1/s'}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}(uv)^s\right)^{1/s}\int_{Q_j}fv \\
&\le \frac{C}{t}\sum_j\frac{(uv)(Q_j)}{v(Q_j)}\int_{Q_j}f(x)v(x)\,dx \\
&\le \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)u(x)v(x)\,dx,
\end{aligned}$$

aplicando nuevamente la Propoisición 1.42, parte (d). Solo resta estimar I_3.

$$\begin{aligned}
I_3 &\le \sum_{i=1}^{m-1} uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|\frac{T_b^i(\sum_j(b-b_{Q_j})^{m-i}h_jv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{C}\right\}\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{m-1} uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|\frac{T_b^i(\sum_j(b-b_{Q_j})^{m-i}f\mathcal{X}_{Q_j}v)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{C}\right\}\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{m-1} uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|\frac{T_b^i(\sum_j(b-b_{Q_j})^{m-i}f^v_{Q_j}\mathcal{X}_{Q_j}v)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{C}\right\}\right) \\
&= I_{3,1}+I_{3,2}.
\end{aligned}$$

Estimemos entonces $I_{3,1}$ e $I_{3,2}$ por separado. Usaremos la hipótesis inductiva y la Proosición 1.17.

Tomemos α tal que $\alpha s' < C_2$, donde C_2 es la constante que aparece en la Proposición 2.8 para b, y s' es el exponente conjugado de s que verifica $uv \in \mathrm{RH}_s$.

Sea $\Psi_i(t) = e^{\alpha t^{1/i}} - 1$. En virtud de lo obtenido en la prueba de la parte (d) de la Proposición 1.18 tenemos que $\Psi_i^{-1}(t) \approx (\log(e+t))^i$. Además, por el inciso (c) de la misma proposición, $\Phi_m^{-1}(t) \approx t/(\log(e+t))^m$. De esta manera,

$$\Phi_m^{-1}(t)\Psi_{m-i}^{-1}(t) \approx \frac{t}{(\log(e+t))^m}(\log(e+t))^{m-i} = \frac{t}{(\log(e+t))^i} \approx \Phi_i^{-1}(t).$$

Por la Proposición 1.17 concluímos que

$$\Phi_i(st) \leq \Phi_m(s) + \Psi_{m-i}(t),$$

para todo $0 < s, t < \infty$. Combinando la hipótesis inductiva junto a este resultado, obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_{3,1} &\leq C \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_i \left(\frac{\sum_j (b(x) - b_{Q_j})^{m-i} f(x) \mathcal{X}_{Q_j}(x)}{t} \right) u(x)v(x)\, dx \\
&\leq C \sum_{i=1}^{m-1} \sum_j \int_{Q_j} \Phi_i \left(\frac{(b(x) - b_{Q_j})^{m-i} f(x)}{t} \right) u(x)v(x)\, dx \\
&\leq C \sum_{h=1}^{m-1} \sum_j \int_{Q_j} \left(\Phi_m \left(\frac{f(x)}{t} \right) + \Psi_{m-i} \left((b(x) - b_{Q_j})^{m-i} \right) \right) u(x)v(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Hölder, la Proposición 2.8 y la parte (d) de la Proposición 1.42 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_j} \Psi_{m-i} \left((b(x) - b_{Q_j})^{m-i} \right) u(x)v(x)\, dx \\
&\qquad \leq \int_{Q_j} e^{\alpha |b(x) - b_{Q_j}|} u(x)v(x)\, dx \\
&\qquad \leq \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} e^{|b(x) - b_{Q_j}|\alpha s'}\, dx \right)^{1/s'} \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} (u(x)v(x))^s\, dx \right)^{1/s} |Q_j| \\
&\qquad \leq \left(\int_0^\infty \alpha s' e^{\alpha s' \lambda} C_1 e^{-\lambda C_2}\, d\lambda \right)^{1/s'} (uv)(Q_j) \\
&\qquad = C\, uv(Q_j) \\
&\qquad \leq C\, \frac{uv(Q_j)}{v(Q_j)} v(Q_j) \\
&\qquad \leq \frac{C}{t} \int_{Q_j} f(x)u(x)v(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Así,

$$I_{3,1} \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{f(x)}{t} \right) u(x)v(x)\, dx,$$

tal como se quería ver. En el caso de $I_{3,2}$ notemos primero que

$$\frac{f_{Q_j}^v}{t} = \frac{1}{t} \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(y)v(y)\, dy \leq \frac{1}{t} Ct = C,$$

con lo cual $\Phi_m\left(\frac{f^v_{Q_j}}{t}\right) \leq \Phi_m(C)$. Esto nos conduce a

$$\begin{aligned}
I_{3,2} &\leq C\sum_{i=1}^{m-1}\sum_j \int_{Q_j} \Phi_i\left(\frac{(b(x)-b_{Q_j})^{m-i} f^v_{Q_j}}{t}\right) u(x)v(x)\,dx \\
&\leq C\sum_{i=1}^{m-1}\sum_j \left(\int_{Q_j} \Phi_m\left(\frac{f^v_{Q_j}}{t}\right) u(x)v(x)\,dx + \int_{Q_j} \Psi_{m-i}\left((b(x)-b_{Q_j})^{m-i}\right) u(x)v(x)\,dx\right) \\
&\leq C\sum_{i=1}^{m-1}\sum_j \frac{uv(Q_j)}{v(Q_j)} v(Q_j) \\
&\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)v(x)\,dx,
\end{aligned}$$

que es la estimación deseada para $i = m$, y el teorema queda probado. □

Demostración del Teorema 2.22. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que f es no negativa. Fijemos $t > 0$. Utilizando el Teorema 1.65 hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel t, con respecto a la medida duplicante dada por $d\mu(x) = v(x)\,dx$: en efecto, por hipótesis tenemos que $v \in A_{(q/\beta)'}(u) \subseteq A_\infty(u)$, y esto último implica que $v \in A_\infty$ (ver Proposición 1.42, parte (e)). Obtenemos así una colección de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$, que verifican $t < f^v_{Q_j} \leq Ct$ para $C > 1$, donde $f^v_{Q_j}$ está definido como en la prueba del Teorema 2.14. De la descomposición realizada, resulta que si $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ entonces $f(x) \leq t$ en c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

También descomponemos f como $f = g+h$, donde g y h se definen como en el Teorema 2.14. Sean $Q_j^* = 2c\sqrt{n}Q_j$ y $\Omega^* = \bigcup_j Q_j^*$, donde $c \geq 1$ es la constante que aparece en la condición H_φ de K. Entonces

$$\begin{aligned}
uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{T(fv)}{v}\right| > t\right\}\right) &\leq uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{T(gv)}{v}\right| > \frac{t}{2}\right\}\right) + uv(\Omega^*) \\
&\quad + uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|\frac{T(hv)}{v}\right| > \frac{t}{2}\right\}\right) \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

Estimaremos cada término por separado. Aplicando la desigualdad de Tchebychev con $q > 1$ obtenemos

$$I \leq \frac{C}{t^q}\int_{\mathbb{R}^n} |T(gv)(x)|^q u(x)v^{1-q}(x)\,dx = \frac{C}{t^q}\int_{\mathbb{R}^n} |T(gv)(x)|^q w^q(x)\,dx,$$

donde $w^q = uv^{1-q} \in A_{q/\beta}$. En efecto, como $v^r \in A_{(q/\beta)'}(u)$, la Observación 1.41 nos dice que $v^{r(1-q/\beta)} \in A_{q/\beta}(u)$ o, equivalentemente, $v^{1-q} \in A_{q/\beta}(u)$. De esta forma, la Proposición 1.42 nos da $uv^{1-q} = w^q \in A_{q/\beta}$. Si $\|T(gv)w\|_q < \infty$ entonces el Teorema 2.19 nos permite obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(gv)(x)|^q w^q(x)\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} (g(x)v(x))^q w^q(x)\,dx = C\int_{\mathbb{R}^n} g^q(x)u(x)v(x)\,dx. \tag{5.3}$$

Veamos entonces que el lado izquierdo de la desigualdad anterior es finito. En efecto, podemos suponer como primer paso que $w^q \in L^\infty$. Como $\beta > q^2/(2q-1)$, esta condición asegura que v^q es localmente integrable. Por la Observación 2.16, T está acotado en L^q, con lo cual

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(gv)(x)|^q w^q(x)\, dx \leq C \left\|w^q\right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g^q(x) v^q(x)\, dx \leq C \left\|w^q\right\|_{L^\infty} \|g\|_{L^\infty}^q \int_{\operatorname{sop}(g)} v^q(x)\, dx < \infty.$$

Entonces, el lado izquierdo de la desigualdad de arriba es finito y la estimación vale para estos pesos. A continuación definimos, para $N \in \mathbb{N}$, $w_N^q = \min\{w^q, N\}$. No es difícil ver que $w_N^q \in A_{q/\beta}$ y que $[w_N^q]_{A_{q/\beta}} \leq C[w^q]_{A_{q/\beta}}$, con C independiente de N. Entonces (5.3) puede obtenerse para todo N, con constante independiente de N. La desigualdad entonces se consigue al hacer $N \to \infty$. Así,

$$I \leq \frac{C}{t^q} \int_{\mathbb{R}^n} g^q(x) u(x) v(x)\, dx \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) u(x) v(x)\, dx.$$

Luego, la estimación de I se sigue como en la prueba del Teorema 2.14. La estimación de II es la misma que en la página 94.

Finalmente, estimaremos III. Sea $A_{j,k} = \{x : 2^{k-1} r_j < |x - x_{Q_j}| \leq 2^k r_j\}$, donde x_{Q_j} es el centro del cubo Q_j y $r_j = c\sqrt{n}\ell(Q_j)$. Notar que para cada j, $B(x_{Q_j}, r_j) = B(x_{Q_j}, \ell(Q_j^*)/2) \subseteq Q_j^*$, y entonces $\mathbb{R}^n \backslash Q_j^* \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_{j,k}$ (ver Figura 5.2). Además, si $y \in Q_j$ entonces

$$c\,|y - x_{Q_j}| \leq c\sqrt{n}\, \frac{\ell(Q_j)}{2} < \frac{\ell(Q_j^*)}{2} = r_j, \tag{5.4}$$

lo cual usaremos para poder aplicar la condición de Hörmander.

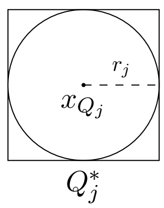


Figura 5.2: $B(x_{Q_j}, r_j) \subseteq Q_j^*$.

Usando que $\int_{Q_j} h_j v = 0$ junto a la desigualdad de Hölder generalizada con $B_j^k := B(x_{Q_j}, 2^{k+1} r_j) \subseteq 2^{k+1} Q_j^*$, tenemos que

$$\begin{aligned} III &\leq uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^* : \sum_j \frac{|T(h_j v)|}{v} > \frac{t}{2}\right\}\right) \\ &\leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega^*} \sum_j |T(h_j v)(x)| u(x)\, dx \\ &\leq \frac{C}{t} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q_j^*} \left| \int_{Q_j} h_j(y) v(y) (K(x-y) - K(x - x_{Q_j}))\, dy \right| u(x)\, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|v(y) \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*} |K(x-y)-K(x-x_{Q_j})|u(x)\,dx\,dy\\
&\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|v(y) \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_{j,k}} |K(x-y)-K(x-x_{Q_j})|u(x)\,dx\,dy\\
&= \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|v(y) \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_j^k} |K(x-y)-K(x-x_{Q_j})|\mathcal{X}_{A_{j,k}}(x)u(x)\,dx\,dy\\
&\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|v(y) \sum_{k=1}^{\infty}(2^k r_j)^n \left\| |K(\cdot-y)-K(\cdot-x_{Q_j})|\mathcal{X}_{A_{j,k}}(\cdot)\right\|_{\varphi,B_j^k} \|u\|_{\tilde{\varphi},B_j^k}\\
&\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|v(y) \sum_{k=1}^{\infty}(2^k r_j)^n \left\| K(\cdot-(y-x_{Q_j}))-K(\cdot)\right\|_{\varphi,|x|\sim 2^k r_j} \|u\|_{\tilde{\varphi},2^{k+1}Q_j^*}\\
&\leq \frac{C_\varphi}{t}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|v(y)M_{\tilde{\varphi}}u(y)\,dy\\
&\leq \frac{C_\varphi}{t}\sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)|v(y)u(y)\,dy,
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado la Proposición 1.50, el hecho de que $K \in H_\varphi$ (ver (5.4)) y el Lema 1.58. Así, con la misma estimación que en la página 96 obtenemos que

$$III \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)u(y)v(y)\,dy,$$

y el teorema queda probado. $\square$

Para la demostración del Teorema 2.24 utilizaremos el siguiente resultado auxiliar, en el cual asumimos para q y para los pesos u y v, las mismas hipótesis que en dicho teorema.

Lema 5.1. *Si f es una función acotada con soporte compacto y m es un entero no negativo, entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m(fv)|^q uv^{1-q} \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q uv.$$

Demostración. Supongamos primero que tanto b como $w^q = uv^{1-q}$ pertenecen a L^∞. A fines de aplicar el Teorema 2.20 debemos ver que $\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m(fv)|^q uv^{1-q}$ es finita. En efecto, en virtud de la Proposición 2.7 y la Observación 2.16 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|T_b^m(fv)w\|_{L^q} &= \left\| \sum_{j=0}^{m} C_{m,j} b^{m-j} T(b^j fv)w \right\|_{L^q}\\
&\leq C\sum_{j=0}^{m} \left\| b^{m-j}T(b^j fv)w\right\|_{L^q}\\
&\leq C\sum_{j=0}^{m} \|b\|_{L^\infty}^{m-j}\|w\|_{L^\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T(b^j fv)(x)|^q\,dx\right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

$$\leq C\,\|b\|_{L^\infty}^m\,\|w\|_{L^\infty}\,\|f\|_{L^\infty}\left(\int_{\mathrm{sop}(f)} v^q(x)\,dx\right)^{1/q}$$
$$< \infty.$$

Entonces podemos aplicar el Teorema 2.20. De esta manera, si $w^q \in A_{q/\beta} \cap L^\infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m(fv)(x)|^q u(x) v^{1-q}(x)\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q u(x) v(x)\,dx, \tag{5.5}$$

para todo $b \in \mathrm{BMO} \cap L^\infty$, y con $C = C(\|b\|_{\mathrm{BMO}}, [w]_{A_{q/\beta}})$. A continuación, para cada $N \in \mathbb{N}$ definimos la sucesión de funciones $\{b_N\}_N$ de la misma forma que se hizo en la Página 81. y entonces $\|b_N\|_{\mathrm{BMO}} \leq 2\|b\|_{\mathrm{BMO}}$. Luego, se tiene (5.5) con b reemplazado por b_N, para todo $N \in \mathbb{N}$. Observar que $b_N^j f \to b^j f$ en L^q, para $0 \leq j \leq m$, dado que f es acotada y de soporte compacto. Por la Proposición 2.7, $T_{b_N}^m f \to T_b^m f$ en L^q, y por lo tanto existe una subsucesión $\{N_k\}_k$ tal que $T_{b_{N_k}}^m f \to T_b^m f$ en casi todo punto x. De esta manera, por el lema de Fatou,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m(fv)|^q uv^{1-q} &= \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} |T_{b_{N_k}}^m(fv)|^q uv^{1-q} \\
&\leq C \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |T_{b_{N_k}}^m(fv)|^q uv^{1-q} \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f|^q uv.
\end{aligned}$$

Así, vale (5.5) para todo $b \in \mathrm{BMO}$ y $w \in A_{q/\beta} \cap L^\infty$.

Finalmente, teniendo en cuenta que $w \in A_{q/\beta}$, definimos para $J \in \mathbb{N}$, $w_J(x) = \min\{w(x), J\}$. Entonces $w_J \in A_{q/\beta}$ y $[w_J]_{A_{q/\beta}} \leq [w]_{A_{q/\beta}}$. Aplicando el caso ya probado con w_J y utilizando que $w_J(x) \nearrow w(x)$ para $J \to \infty$, el teorema de la convergencia monóntona nos asegura que (5.5) vale para w. $\square$

Demostración del Teorema 2.24. Procederemos por inducción. Comenzaremos probando el caso correspondiente a $m = 1$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que f es no negativa y que $\|b\|_{\mathrm{BMO}} = 1$. Como en la prueba del Teorema 2.22, fijamos $t > 0$ y hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel t, con respecto a la medida $d\mu(x) = v(x)\,dx$. Obtenemos así Ω^*, $\{Q_j^*\}$, $f_{Q_j}^v$, g y h como allí, de modo que

$$\begin{aligned}
uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{[b,T](fv)(x)}{v(x)}\right| > t\right\}\right) &\leq uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{[b,T](gv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{2}\right\}\right) + uv(\Omega^*) \\
&\quad + uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^* : \left|\frac{[b,T](hv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{2}\right\}\right) \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

Así, aplicando la desigualdad de Tchebychev con $q > 1$ y el Lema 5.1 a la función g, obtenemos que

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{C}{t^q} \int_{\mathbb{R}^n} |[b,T](gv)(x)|^q u(x) v^{1-q}(x)\,dx \\ &\leq \frac{C}{t^q} \int_{\mathbb{R}^n} g^q(x) u(x) v(x)\,dx. \end{aligned}$$

Desde este punto, podemos proceder exactamente igual que en la página 94. La estimación de II es idéntica a la del Teorema 2.22. Para estimar III, escribimos

$$\frac{[b,T](hv)}{v} = \sum_j \frac{[b,T](h_j v)}{v} = \sum_j \frac{(b - b_{Q_j})T(h_j v)}{v} - \sum_j \frac{T((b - b_{Q_j})h_j v)}{v},$$

y entonces

$$\begin{aligned} III &\leq uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^* : \left|\sum_j \frac{(b - b_{Q_j})T(h_j v)}{v}\right| > \frac{t}{4}\right\}\right) \\ &\quad + uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^* : \left|\sum_j \frac{T((b - b_{Q_j})h_j v)}{v}\right| > \frac{t}{4}\right\}\right) \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Para la estimación de A, notar que

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega^*} \left|\sum_j (b(x) - b_{Q_j}) \left(\int_{Q_j} (K(x-y) - K(x - x_{Q_j})) h_j(y) v(y)\,dy\right)\right| u(x)\,dx \\ &\leq \frac{C}{t} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q_j^*} |K(x-y) - K(x - x_{Q_j})||b(x) - b_{Q_j}| u(x)\,dx\,dy \\ &\leq \frac{C}{t} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{j,k}} |K(x-y) - K(x - x_{Q_j})||b(x) - b_{2^{k+1}Q_j}| u(x)\,dx\ dy}_{(*)} \\ &\quad + \frac{C}{t} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{j,k}} |K(x-y) - K(x - x_{Q_j})||b_{2^{k+1}Q_j} - b_{Q_j}| u(x)\,dx\ dy}_{(**)}, \end{aligned}$$

donde $A_{j,k}$ es el conjunto definido en la prueba del Teorema 2.22. Para $y \in Q_j$ fijo, utilizando la desigualdad de Hölder generalizada con $\tilde{\eta}, \varphi$, y $\tilde{\Psi}(t) = e^t - 1$ y la Proposición 1.50, tenemos que

$$(*) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} (2^k r_j)^n \left\||K(\cdot - (y - x_{Q_j})) - K(\cdot)|\mathcal{X}_{A_{j,k}}(\cdot)\right\|_{\varphi, B_j^k} \left\|b - b_{2^{k+1}Q_j}\right\|_{\tilde{\Psi}, B_j^k} \|u\|_{\tilde{\eta}, B_j^k}$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}(2^k r_j)^n \left\|K(\cdot-(y-x_{Q_j}))-K(\cdot)\right\|_{\varphi,|x|\sim 2^k r_j}\left\|b-b_{2^{k+1}Q_j}\right\|_{\tilde{\Psi},2^{k+1}Q_j^*}\|u\|_{\tilde{\eta},2^{k+1}Q_j^*},$$

donde $B_j^k = B(x_{Q_j}, 2^{k+1}r_j)$ como en el teorema anterior. Por otro lado, utilizando la desigualdad de Hölder generalizada con $\eta, \tilde{\eta}$ y el Lema 2.11 obtenemos que

$$\begin{aligned}(**) &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}(2^k r_j)^n k \left\||K(\cdot-(y-x_{Q_j}))-K(\cdot)|\mathcal{X}_{A_{j,k}}(\cdot)\right\|_{\eta,B_j^k}\|u\|_{\tilde{\eta},B_j^k}\\ &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}(2^k r_j)^n k \left\|K(\cdot-(y-x_{Q_j}))-K(\cdot)\right\|_{\eta,|x|\sim 2^k r_j}\|u\|_{\tilde{\eta},2^{k+1}Q_j^*},\end{aligned}$$

nuevamente por la Proposición 1.50.

Notar que ambas sumas están acotadas por $C_\varphi M_{\tilde{\eta}}(u)(y)$. Entonces

$$A \leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|v(y)M_{\tilde{\eta}}u(y)\,dy \leq \frac{C}{t}\sum_j\int_{Q_j}|h_j(y)|v(y)u(y)\,dy,$$

en virtud del Lema 1.58. Desde aquí podemos proceder como en la página 96.

Para finalizar la prueba de este caso usaremos el Teorema 2.22 para estimar B. En efecto,

$$\begin{aligned}B &\leq uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{T\left(\sum_j(b-b_{Q_j})h_j v\right)}{v}\right| > \frac{t}{4}\right\}\right)\\ &\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_j(b-b_{Q_j})h_j\right|u(x)v(x)\,dx\\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j\int_{Q_j}|b(x)-b_{Q_j}||h_j(x)|u(x)v(x)\,dx.\end{aligned}$$

Utilizando la definición de h reescribimos la última integral como suma de dos integrales, a las cuales denotamos con B_1 y B_2, respectivamente, como en las páginas 96 y 97. La acotación de las mismas es análoga y esto completa la prueba para el caso $m=1$.

Supongamos ahora que el resultado vale para cada $1\leq \ell\leq m-1$. Probaremos que es cierto para $\ell = m$. Para $t>0$ fijo, consideramos nuevamente la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel t con respecto a la medida duplicante μ dada por $d\mu(x) = v(x)\,dx$. Procediendo de manera análoga al caso correspondiente a $m=1$ escribimos

$$\begin{aligned}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{T_b^m(fv)(x)}{v(x)}\right|>t\right\}\right) &\leq uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{T_b^m(gv)(x)}{v(x)}\right|>\frac{t}{2}\right\}\right)+uv(\Omega^*)\\ &\quad + uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|\frac{T_b^m(hv)(x)}{v(x)}\right|>\frac{t}{2}\right\}\right)\\ &= I + II + III.\end{aligned}$$

Para estimar I utilizamos la desigualdad de Tchebychev con exponente $q > 1$ y el Lema 5.1 aplicado a g para obtener

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{t^q}\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m(gv)|^q uv^{1-q} \\ &\leq \frac{C}{t^q}\int_{\mathbb{R}^n} g^q uv, \end{aligned}$$

y desde este punto podemos proceder como en la página 94 .

La estimación de II es la misma que en el Teorema 2.22. Para estimar III, utilizamos la descomposición hecha en la página 99 para obtener

$$\begin{aligned} III &\leq uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|C\frac{\sum_j (b(x)-b_{Q_j})^m T(h_jv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{6}\right\}\right) \\ &+ uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|C\frac{\sum_j T((b-b_{Q_j})^m h_jv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{6}\right\}\right) \\ &+ uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega^* : \left|C\sum_{\ell=1}^{m-1}\frac{T_b^\ell(\sum_j (b-b_{Q_j})^{m-\ell} h_jv)(x)}{v(x)}\right| > \frac{t}{6}\right\}\right) \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Acotemos primero la expresión correspondiente a I_1.

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega^*}\left|\sum_j (b(x)-b_{Q_j})^m T(h_jv)(x)\right| u(x)\,dx \\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_j^*} |b(x)-b_{Q_j}|^m \left|\int_{Q_j}(K(x-y)-K(x-x_{Q_j}))h_j(y)v(y)\,dy\right| u(x)\,dx \\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|v(y)\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q_j^*}|b(x)-b_{Q_j}|^m|K(x-y)-K(x-x_{Q_j})|u(x)\,dx\,dy \\ &\leq \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|v(y)\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_{j,k}} 2^m|b(x)-b_{2^{k+1}Q_j}|^m|K(x-y)-K(x-x_{Q_j})|u(x)\,dx\,dy}_{(*)} \\ &+ \frac{C}{t}\sum_j \int_{Q_j}|h_j(y)|v(y)\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_{j,k}} 2^m|b_{2^{k+1}Q_j}-b_{Q_j}|^m|K(x-y)-K(x-x_{Q_j})|u(x)\,dx\,dy}_{(**)}. \end{aligned}$$

Sea $\tilde{\Psi}_k(t) = e^{\alpha t^{1/k}} - 1$, donde α es el parámetro que seleccionamos en la demostración del Teorema 2.15. Primero aplicamos la desigualdad de Hölder generalizada con las funciones $\tilde{\eta}, \varphi$ y $\tilde{\Psi}_k$ para obtener

$$(*) \leq C\sum_{k=1}^{\infty}(2^k r_j)^n \left\|K(\cdot-(y-x_{Q_j}))-K(\cdot)\right\|_{\varphi,|x|\sim 2^k r_j}\left\|b-b_{2^{k+1}Q_j}\right\|_{\tilde{\Psi}_k,2^{k+1}Q_j^*}\|u\|_{\tilde{\eta},2^{k+1}Q_j^*}.$$

Luego, aplicamos la misma desigualdad con las funciones η y $\tilde{\eta}$ junto al Lema 2.11. Así,

$$(**) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} (2^k r_j)^n k^m \left\| K(\cdot - (y - x_{Q_j})) - K(\cdot) \right\|_{\eta, |x| \sim 2^k r_j} \|u\|_{\tilde{\eta}, 2^{k+1} Q_j^*},$$

para cada $y \in Q_j$. Ambos términos están acotados por $C_\varphi M_{\tilde{\eta}} u(y)$ que a su vez se acota por $Cu(y)$, en virtud de la hipótesis y del Lema 1.58. Entonces, obtenemos que

$$I_1 \leq \sum_j \frac{C}{t} \int_{Q_j} |h_j(y)| u(y) v(y)\, dy,$$

y desde aquí podemos proceder como en la página 96. Para estimar I_2 utilizaremos el Teorema 2.22. Para ello, escribimos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_j |b(x) - b_{Q_j}|^m |h_j(x)| u(x) v(x)\, dx \\ &\leq \frac{C}{t} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m f(x) u(x) v(x)\, dx + \frac{C}{t} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m f_{Q_j}^v u(x) v(x)\, dx \\ &= I_{2,1} + I_{2,2}. \end{aligned}$$

Las correspondientes estimaciones para $I_{2,1}$ e $I_{2,2}$ son análogas a las hechas en la página 101 y 101. Finalmente, acotaremos I_3.

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \sum_{\ell=1}^{m-1} uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^* : \left| \frac{T_b^\ell (\sum_j (b - b_{Q_j})^{m-\ell} f \mathcal{X}_{Q_j} v)(x)}{v(x)} \right| > \frac{t}{C} \right\} \right) \\ &+ \sum_{\ell=1}^{m-1} uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^* : \left| \frac{T_b^\ell (\sum_j (b - b_{Q_j})^{m-\ell} f_{Q_j}^v \mathcal{X}_{Q_j} v)(x)}{v(x)} \right| > \frac{t}{C} \right\} \right) \\ &= I_{3,1} + I_{3,2}. \end{aligned}$$

Para $I_{3,1}$ usamos la hipótesis inductiva, ya que $K \in H_\eta \cap H_{\varphi,m}$ implica que $K \in H_{\varphi,\ell}$ para cada $1 \leq \ell \leq m$. Entonces

$$\begin{aligned} I_{3,1} &\leq C \sum_{\ell=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\ell \left(\frac{\sum_j (b - b_{Q_j})^{m-\ell} f \mathcal{X}_{Q_j}}{t} \right) uv\, dx \\ &\leq C \sum_{\ell=1}^{m-1} \sum_j \int_{Q_j} \Phi_\ell \left(\frac{\sum_j (b - b_{Q_j})^{m-i} f}{t} \right) uv\, dx, \end{aligned}$$

y desde aquí podemos tener las cotas deseadas para $I_{3,1}$ e $I_{3,2}$ procediendo como en las páginas 102 y 103. □

5.2. Teoremas del Capítulo 3

Demostración del Teorema 3.1. Como $M_\gamma(fv) = M_\gamma(|f|v)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f es no negativa. Fijemos $1 \leq p < n/\gamma$ y supongamos que $\int_{\mathbb{R}^n} f^p u^{p/q} v$ es finita.

Consideremos primero la condición (i). Poniendo $q_0 = q/p > 1$, la desigualdad deseada puede reescribirse como sigue

$$uv^{q_0}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\gamma(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right)^{1/q_0} \le \frac{C}{t^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u^{1/q_0}(x)v(x)\,dx.$$

Denotemos entonces $\gamma_0 = p\gamma$. De esta manera,

$$1/q_0 = p/q = 1 - p\gamma/n = 1 - \gamma_0/n,$$

y $0 < \gamma_0 < n$ ya que $p < n/\gamma$. Podemos así aplicar la Proposición 1.70 para obtener

$$M_{\gamma_0}(f_0/w)(x) \le M(f_0 w^{-q_0})^{1/q_0}(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0(y)\,dy\right)^{\gamma_0/n}, \tag{5.6}$$

para todo w no negativo y $f_0 \in L^1$. Consideremos entonces $w = u^{1/q_0}$ y $f_0 = f^p u^{1/q_0} v$. Entonces $f_0 \in L^1$ por la suposición anterior. Utilizando el Lema 1.72 y (5.6) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{M_\gamma(fv)(x)}{v(x)} &\le [v]_{A_1}^{1/p'}\left(\frac{M_{\gamma_0}(f^p v)(x)}{v(x)}\right)^{1/p}\\ &= [v]_{A_1}^{1/p'}\left(\frac{M_{\gamma_0}\left(\frac{f_0}{w}\right)(x)}{v(x)}\right)^{1/p}\\ &\le [v]_{A_1}^{1/p'}\left[\left(\frac{M(f_0 w^{-q_0})(x)}{v^{q_0}(x)}\right)^{1/q_0}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0\right)^{\gamma_0/n}\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

Entonces, aplicando el Teorema 2.3 con $g = f_0 w^{-q_0} v^{-q_0}$, $u_0 = u$ y $v_0 = v^{q_0}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}uv^{q_0}\left(\left\{x : \frac{M_\gamma(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right)^{1/q_0} &\le uv^{q_0}\left(\left\{x : \frac{M(f_0 w^{-q_0} v^{-q_0} v^{q_0})(x)}{v^{q_0}(x)} > \left(\frac{[v]_{A_1}^{1-p} t^p}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0\right)^{\gamma_0/n}}\right)^{q_0}\right\}\right)^{1/q_0}\\ &\le C\frac{[v]_{A_1}^{p-1}}{t^p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0\right)^{\gamma_0/n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0 w^{-q_0} v^{-q_0} uv^{q_0}\right)^{1/q_0}\\ &= \frac{C}{t^p}\int_{\mathbb{R}^n} f^p u^{1/q_0} v,\end{aligned}$$

tal como se quería.

Finalmente, supongamos que u y v satisfacen (ii). Definimos ahora $f_0 = fvw$, donde $w = u^{1/q}v^{-1/p'}$. Entonces $f_0/w = fv$ y $f_0^p = f^p u^{p/q} v$. Aplicando la desigualdad (1.25) que aparece en la Observación 1.71, podemos estimar

$$\begin{aligned}uv^{q/p}\left(\left\{x : \frac{M_\gamma(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right)^{p/q} &\le uv^{q/p}\left(\left\{x : \frac{M(f_0^p w^{-q})(x)}{v^q(x)} > \left(\frac{t}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0^p\,dy\right)^{\gamma/n}}\right)^q\right\}\right)^{p/q}\\ &\le uv^{-q/p'}v^q\left(\left\{x : \frac{M(f_0^p w^{-q} v^{-q} v^q)(x)}{v^q(x)} > \frac{t^q}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0^p\,dy\right)^{q\gamma/n}}\right\}\right)^{p/q}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{t^p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0^p\right)^{p\gamma/n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0^p w^{-q}v^{-q}uv^{q/p}\right)^{p/q},$$

en virtud del Teorema 2.3 aplicado a $g = f_0^p w^{-q}v^{-q}$, $u_0 = uv^{-q/p'}$ y $v_0 = v^q$. Notemos ahora que

$$w^{-q}v^{-q}uv^{q/p} = 1,$$

y entonces la última expresión de la desigualdad precedente puede escribirse como

$$\frac{C}{t^p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0^p(y)\,dy\right)^{p(1/q+\gamma/n)} = \frac{C}{t^p}\int_{\mathbb{R}^n} f_0^p(y)\,dy,$$

y el resultado queda probado. □

Demostración del Teorema 3.7. Consideremos primero el caso en que u y v cumplen con (i) . Fijemos $t > 0$. Utilizando los Teoremas 3.1 y 3.6 obtenemos que

$$\begin{aligned}
t^p uv^{q/p}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|I_\gamma(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right)^{p/q} &\leq \sup_{t>0}\left[t^p uv^{q/p}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|I_\gamma(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right)^{p/q}\right] \\
&= \left\|\frac{I_\gamma(fv)}{v}\right\|^p_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})} \\
&\leq C\left\|\frac{M_\gamma(fv)}{v}\right\|^p_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})} \\
&= C\sup_{t>0}\left[t^p uv^{q/p}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\gamma(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right)^{p/q}\right] \\
&\leq C\sup_{t>0}\left[t^p\frac{C}{t^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u(x)^{p/q}v(x)\,dx\right] \\
&= C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u(x)^{p/q}v(x)\,dx,
\end{aligned}$$

y de aquí se sigue la estimación buscada.

A continuación, probaremos el resultado para el caso en que u y v verifican (ii). Observemos primero que la hipótesis y la Proposición 1.38 implican que $uv^{q/p} = uv^{-q/p'}v^q \in A_\infty$, y esto nos permite concluir que

$$v^q = \frac{uv^{q/p}}{uv^{-q/p'}}$$

es un peso de la clase A_∞ en virtud de la Proposición 1.42. Así, aplicando el Teorema 2.2,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{I_\gamma(fv)}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})} &= \left\|(I_\gamma(fv))^q v^{-q}\right\|^{1/q}_{L^{1,\infty}(uv^{q/p})} \\
&= \left\|(I_\gamma(fv))^q v^{-q}\right\|^{1/q}_{L^{1,\infty}(uv^{-q/p'}v^q)} \\
&\leq C\left\|(M_\gamma(fv))^q v^{-q}\right\|^{1/q}_{L^{1,\infty}(uv^{-q/p'}v^q)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C \left\| \frac{M_\gamma(fv)}{v} \right\|_{L^{q,\infty}(uv^{-q/p'}v^q)} \\
&= C \left\| \frac{M_\gamma(fv)}{v} \right\|_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})}.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
t^p uv^{q/p}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|I_\gamma(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right)^{p/q} &\leq \sup_{t>0}\left[t^p uv^{q/p}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|I_\gamma(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right)^{p/q}\right] \\
&= \left\| \frac{I_\gamma(fv)}{v} \right\|^p_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})} \\
&\leq C \left\| \frac{M_\gamma(fv)}{v} \right\|^p_{L^{q,\infty}(uv^{q/p})} \\
&= C \sup_{t>0}\left[t^p uv^{q/p}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\gamma(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right)^{p/q}\right] \\
&\leq C \sup_{t>0}\left[t^p \frac{C}{t^p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u^{p/q}(x) v(x)\, dx\right)\right] \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u^{p/q}(x) v(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

de donde se sigue el resultado deseado. □

5.3. Teoremas del Capítulo 4

Comenzaremos esta sección con la prueba del Teorema 4.2. Para esto, necesitaremos enunciar y probar dos resultados técnicos. El primero de ellos es una adaptación del Lema 5.1 que aparece en [36].

Lema 5.2. *Sea $f \in L^\varphi_{loc}$ una función positiva. Entonces, para cada $\gamma, \lambda > 0$ existe un número $a > 0$ que depende de f y que satisface*

$$
\left(\int_{|y|\leq a^\gamma} \varphi(f(y))\, dy\right) a^n = \lambda.
$$

Demostración. Consideremos la función g definida por

$$
g(z) = \left(\int_{|y|\leq z^\gamma} \varphi(f(y))\, dy\right) z^n.
$$

Entonces se tiene que g es una función continua. Además, $g(0) = 0$ y $\lim_{z\to\infty} g(z) = \infty$, con lo cual el teorema del valor intermedio nos asegura que existe a de modo que se verifica la tesis. □

Proposición 5.3. *Sea w un peso, $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de conjuntos que particionan $\mathbb{R}^n$ y $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión estrictamente decreciente de números no negativos que satisface*

$$
\lim_{k\to-\infty} b_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0 \quad y \quad C_1 \leq \frac{b_{k+1}}{b_k} \leq C_2,
$$

donde C_1 y C_2 son menores que 1 e independientes de k. Entonces existe una constante positiva C_0 tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k w(\{x \in A_k : |f(x)| > b_{k+1}\}) \le C_0 \int_0^\infty w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})\, dt.$$

Demostración. En virtud de la condición sobre $\{b_k\}$ y $\{A_k\}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})\, dt &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{b_{k+1}}^{b_k} w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})\, dt \\
&\ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{b_{k+1}}^{b_k} w(\{x \in A_k : |f(x)| > t\})\, dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_1 \int_{b_{k+1}/C_1}^{b_k/C_1} w(\{x \in A_k : \frac{|f(x)|}{C_1} > t\})\, dt \\
&\ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_1 \int_{b_{k+1}/C_1}^{b_k/C_1} w(\{x \in A_k : |f(x)| > b_{k+1}\})\, dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} w(\{x \in A_k : |f(x)| > b_{k+1}\})(b_k - b_{k+1}).
\end{aligned}$$

Notar que la condición sobre $\{b_k\}$ implica que

$$b_k - b_{k+1} = b_k \left(1 - \frac{b_{k+1}}{b_k}\right) \ge b_k (1 - C_2),$$

lo cual implica finalmente que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k w(\{x \in A_k : |f(x)| > b_{k+1}\}) \le \frac{1}{1 - C_2} \int_0^\infty w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})\, dt. \qquad \square$$

Demostración del Teorema 4.2. Siguiendo la notación de la prueba del Teorema 4.1, definimos los conjuntos $G_k = \{x : 2^k < |x| \le 2^{k+1}\}$, $I_k = \{x : 2^{k-1} < |x| \le 2^{k+2}\}$, $L_k = \{x : 2^{k+2} < |x|\}$ y $C_k = \{x : |x| \le 2^{k-1}\}$. Sin pérdida de generalidad podemos escribir $g = fv$ y suponer que $t = 1$ por homogeneidad. Entonces

$$\begin{aligned}
uw(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\Phi(g)(x) > v(x)\}) \le & \sum_{k\in\mathbb{Z}} uw(\{x \in G_k : M_\Phi(g\mathcal{X}_{I_k})(x) > v(x)\}) \\
& + \sum_{k\in\mathbb{Z}} uw(\{x \in G_k : M_\Phi(g\mathcal{X}_{L_k})(x) > v(x)\}) \\
& + uw(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\Phi(g\mathcal{X}_{C_k})(x) > v(x)\}) \\
=& I + II + III.
\end{aligned}$$

Comenzaremos estimando I. Recordando que $w = 1/\Phi(1/v)$ y que $v(x) = |x|^\beta$, si $x \in G_k$ tenemos que

$$2^{(k+1)\beta} \le v(x) < 2^{k\beta},$$

y también

$$\frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{2^{(k+1)\beta}}\right)} \leq w(x) < \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{2^{k\beta}}\right)}.$$

Usando estas estimaciones y el tipo débil modular de M_Φ (ver Teorema 1.60) con peso u obtenemos que

$$\begin{aligned} I \leq & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{2^{k\beta}}\right)} u\left(\left\{x \in G_k : M_\Phi(g\mathcal{X}_{I_k})(x) > 2^{(k+1)\beta}\right\}\right) \\ \leq & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{2^{k\beta}}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{g\mathcal{X}_{I_k}(x)}{2^{(k+1)\beta}}\right) Mu(x)\,dx \\ \leq & C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{2^{k\beta}}\right)} \Phi\left(\frac{1}{2^{k\beta}}\right) \int_{I_k} \Phi(g(x)) Mu(x)\,dx \\ \leq & C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{I_k} \Phi(g(x)) Mu(x)\,dx \\ = & C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(g(x)) Mu(x)\,dx, \end{aligned}$$

donde hemos usado la submultiplicatividad de Φ. Esto nos da la estimación deseada para I.

Para estimar II definimos

$$F(x) = 4^n c_n \int_{|y|>|x|} \frac{\Phi(g(y))}{|y|^n}\,dy,$$

para $x \in G_k$ y donde c_n es el área de la superficie de la esfera unitaria S^{n-1}. Fijemos $x \in G_k$ y sea $B = B(x_0, r)$ una bola que contiene a x. Queremos obtener una cota superior para $\|g\mathcal{X}_{L_k}\|_{\Phi,B}$. Notar que, si $y \in L_k \cap B$, como además $x \in G_k$ tenemos que $\frac{|y|}{2} > |x|$, y entonces

$$2r \geq |y - x| \geq |y| - |x| > \frac{|y|}{2}.$$

Como Φ es submultiplicativa, esto nos conduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|} \int_B \Phi\left(\frac{g\mathcal{X}_{L_k}(y)}{(1/\Phi^{-1}(1/F(x)))}\right) dy \leq & \frac{1}{|B|} \int_B \Phi(\Phi^{-1}(1/F(x)))\Phi(g\mathcal{X}_{L_k}(y))\,dy \\ \leq & \frac{1}{F(x)} \frac{1}{|B|} \int_{B\cap L_k} \Phi(g(y))\,dy \\ \leq & \frac{c_n 4^n}{F(x)} \int_{|y|>|x|} \frac{\Phi(g(y))}{|y|^n}\,dy \\ = & \frac{1}{F(x)} F(x) = 1. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\|g\mathcal{X}_{L_k}\|_{\Phi,B} \leq \frac{1}{\Phi^{-1}(1/F(x))}$$

y podemos proceder como sigue

$$II \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} uw\left(\left\{x \in G_k : \frac{1}{\Phi^{-1}(1/F(x))} > v(x)\right\}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} uw \left(\left\{ x \in G_k : \Phi^{-1}(1/F(x)) \right\} < \frac{1}{v(x)} \right\} \right)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} uw \left(\{ x \in G_k : F(x) > w(x) \} \right)$$
$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{2^{k\beta}}\right)} u \left(\left\{ x \in G_k : F(x) > \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{2^{(k+1)\beta}}\right)} \right\} \right).$$

A continuación aplicaremos la Proposición 5.3 con las sucesiones $b_k = 1/\Phi(2^{-k\beta})$, $A_k = G_k$ y con peso u. Es claro que $\{b_k\}$ es estrictamente decreciente, $\lim_{k\to-\infty} b_k = \infty$ y que $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. Veamos la otra condición que debe cumplir la sucesión $\{b_k\}$. Usando la submultiplicatividad de Φ podemos escribir

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\Phi\left(\frac{1}{2^{k\beta}}\right)}{\Phi\left(\frac{1}{2^{(k+1)\beta}}\right)} \geq \frac{1}{\Phi(2^{-\beta})},$$

y, por ser $\beta < 0$,

$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{2^{k\beta}}\right)}{\Phi\left(\frac{1}{2^{(k+1)\beta}}\right)} \leq 2^{\beta}$$

en virtud del Lema 1.2. Entonces podemos elegir $C_1 = 1/\Phi(2^{-\beta})$ y $C_2 = 2^{\beta}$. Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{2^{k\beta}}\right)} u \left(\left\{ x \in G_k : F(x) > \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{2^{(k+1)\beta}}\right)} \right\} \right) &\leq C \int_0^{\infty} u\left(\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > t\}\right) dt \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} F(x) u(x)\, dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(g(y)) \frac{1}{|y|^n} \int_{|y|>|x|} u(x)\, dx\, dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(g(y)) Mu(y)\, dy,
\end{aligned}$$

lo que nos da la estimación del segundo término.

Finalmente, estimemos III. Para ello definimos, para $x \in G_k$,

$$H(x) = \frac{4^n c_n}{|x|^n} \int_{|y|\leq \frac{|x|}{2}} \Phi(g(y))\, dy.$$

Para $x \in G_k$ fijo, tomemos $B = B(x_0, r)$ una bola que contiene a x. Si $y \in C_k$, obtenemos que $|y| \leq \frac{|x|}{2}$. Siguiendo las mismas ideas que en la estimación de II tenemos que $\|g\mathcal{X}_{C_k}\|_{\Phi,B} \leq 1/(\Phi^{-1}(1/H(x)))$. En consecuencia,

$$III \leq uw\left(\{x \in \mathbb{R}^n : H(x) > w(x)\}\right).$$

Sea $\gamma = n/(-n - r\beta)$. Notemos que $\gamma > 0$ ya que, por hipótesis, $\beta < -n$. Aplicando ahora el Lema 5.2 con γ y $\lambda = 1$, existe $a > 0$ que verifica

$$\left(\int_{|y|\leq a^{\gamma}} \Phi(g(y))\, dy \right) a^n = 1. \tag{5.7}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
uw\left(\{x\in\mathbb{R}^n : H(x)>w(x)\}\right) &= uw\left(\left\{x : |x|\le a^\gamma, \frac{C_n}{|x|^n}\int_{|y|\le\frac{|x|}{2}}\Phi(g(y))\,dy > \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)}\right\}\right)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty} uw\left(\left\{x : 2^k a^\gamma<|x|\le 2^{k+1}a^\gamma, \frac{C_n}{|x|^n}\int_{|y|\le\frac{|x|}{2}}\Phi(g(y))\,dy > \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)}\right\}\right)\\
&= A+B.
\end{aligned}$$

Procederemos a estimar A y B por separado. Notemos que, si $C_n = 4^n c_n$, entonces

$$\left\{x : \frac{C_n}{|x|^n}\int_{|y|\le a^\gamma}\Phi(g(y))\,dy > \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)}\right\} = \left\{x : \frac{\Phi\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)}{|x|^n} > C_n^{-1}a^n\right\}. \tag{5.8}$$

Si denotamos $z=|x|^{-\beta}$ entonces

$$|x|^{-n}\Phi\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right) = z^{r+n/\beta}(1+\log^+ z)^\delta = z^\alpha(1+\log^+ z)^\delta =: \varphi(z),$$

donde $\alpha = r+n/\beta$, que es positivo por ser $\beta<-n$. Por la Proposición 1.18, parte (c), existe una constante $D\ge 1$ tal que

$$\frac{1}{D}z^{1/\alpha}(1+\log^+ z)^{-\delta/\alpha} \le \varphi^{-1}(z) \le Dz^{1/\alpha}(1+\log^+ z)^{-\delta/\alpha}.$$

Luego, podemos estimar (5.8) como sigue

$$\begin{aligned}
\left\{x : \varphi(|x|^{-\beta}) > C_n^{-1}a^n\right\} &= \left\{x : |x|^{-\beta} > \varphi^{-1}(C_n^{-1}a^n)\right\}\\
&\subseteq \left\{x : |x|^{-\beta} > \frac{(C_n^{-1}a^n)^{1/\alpha}}{D(1+\log^+(C_n^{-1}a^n))^{\delta/\alpha}}\right\}\\
&= \left\{x : D\left(\frac{(1+\log^+(C_n^{-1}a^n))^\delta}{C_n^{-1}a^n}\right)^{1/\alpha} > |x|^\beta\right\}\\
&= \left\{x : D^{1/\beta}\left(\frac{(1+\log^+(C_n^{-1}a^n))^\delta}{C_n^{-1}a^n}\right)^{1/(\alpha\beta)} < |x|\right\}\\
&= \left\{x : D^{1/\beta}\left(\frac{C_n^{-1}}{(1+\log^+(C_n^{-1}a^n))^\delta}\right)^{-1/(\alpha\beta)} a^\gamma < |x|\right\}.
\end{aligned}$$

Como $D\ge 1$, tenemos que $D^{1/\beta}\left(\frac{C_n^{-1}}{(1+\log^+(C_n^{-1}a^n))^\delta}\right)^{-1/(\alpha\beta)} =: C_0 < 1$. Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}
A &\le uw\left(\{x : C_0 a^\gamma < |x| \le a^\gamma\}\right)\\
&\le \int_{|x|>C_0a^\gamma} u(x)v^r(x)\,dx\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{C_0 2^{k-1}a^\gamma\le|x|<C_0 2^k a^\gamma} u(x)v^r(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(C_0 2^{k-1} a^{\gamma})^{-r\beta}} \int_{|x|<C_0 2^k a^{\gamma}} u(x)\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2^n C_0^{r\beta} 2^{(k-1)(n+r\beta)} \int_{|y|\leq a^{\gamma}} \Phi(g(y)) \left(\frac{1}{(2^k a^{\gamma})^n} \int_{|x|<2^k a^{\gamma}} u(x)\,dx \right) dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(g(y)) Mu(y)\,dy \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(k-1)(n+r\beta)} \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(g(y)) Mu(y)\,dy,
\end{aligned}
$$

dado que $n + r\beta < 0$. Para finalizar la prueba, solo resta estimar la parte B.

$$
\begin{aligned}
B &\leq \sum_{k=0}^{\infty} uv^r \left(\{x : 2^k a^{\gamma} < |x| \leq 2^{k+1} a^{\gamma}\} \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k a^{\gamma})^{-r\beta}} \int_{|x|\leq 2^{k+1} a^{\gamma}} u(x)\,dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2^{k+1} a^{\gamma})^n}{(2^k a^{\gamma})^{-r\beta}} \frac{1}{(2^{k+1} a^{\gamma})^n} \int_{|x|\leq 2^{k+1} a^{\gamma}} u(x)\,dx \\
&= C \sum_{k=0}^{\infty} 2^n 2^{k(n+r\beta)} \int_{|y|\leq a^{\gamma}} \Phi(g(y)) \left(\frac{1}{(2^{k+1} a^{\gamma})^n} \int_{|x|\leq 2^{k+1} a^{\gamma}} u(x)\,dx \right) dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(g(y)) Mu(y)\,dy \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(n+r\beta)} \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(g(y)) Mu(y)\,dy,
\end{aligned}
$$

lo que completa la prueba. □

Ahora procederemos a demostrar el Teorema 4.4. Debido a que la prueba de este resultado es bastante delicada, enunciaremos y demostraremos algunos lemas previos con el objeto de que resulte lo más clara posible. Asimismo, enunciaremos algunas afirmaciones dentro del cuerpo de la prueba principal que serán demostradas al final de la misma. Recordemos que $\Phi(t) = t^r(1 + \log^+ t)^{\delta}$, con $r \geq 1$ y $\delta \geq 0$.

Lema 5.4. *Dado un número $a > 1$ definimos, para $k \in \mathbb{Z}$, $b_k = 1/\Phi(a^{-k})$. Entonces,*

$$
a^r \leq \frac{b_{k+1}}{b_k} \leq \Phi(a),
$$

para cada k.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\frac{b_{k+1}}{b_k} &= \frac{a^{-rk}(1 + \log^+ a^{-k})^{\delta}}{a^{-r(k+1)}(1 + \log^+ a^{-(k+1)})^{\delta}} \\
&= a^r \left(\frac{1 + \log^+ a^{-k}}{1 + \log^+ a^{-(k+1)}} \right)^{\delta} =: a^r (\varphi_k(a))^{\delta}.
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$\varphi_k(a) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad k \geq 0; \\ 1 + \log a, & \text{si} \quad k = -1; \\ 1 + \frac{\log a}{1+\log a^{-(k+1)}}, & \text{si} \quad k < -1. \end{cases}$$

De aquí podemos deducir que

$$1 \leq \varphi_k(a) \leq 1 + \log^+ a.$$

Elevando cada miembro al exponente δ y multiplicando por a^r obtenemos la tesis. $\square$

Dado un número $a > 1$ fijo definimos, para cada $k \in \mathbb{Z}$, el conjunto

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^k\},$$

donde $v^r \in A_1$ y g es una función que se define luego en la prueba del Teorema 4.4. Para cada k, Ω_k puede escribirse como la unión disjunta de cubos diádicos $\{Q_j^k\}_j$ contenidos en la grilla diádica $\mathcal{D}$. En efecto, por la Proposición 1.63 cada conjunto en la definición de Ω_k puede escribirse de esta manera. Luego,

$$\Omega_k = \left(\bigcup_\ell R_\ell^k\right) \cap \left(\bigcup_i S_i^k\right) = \bigcup_{\ell,i} \left(R_\ell^k \cap S_i^k\right) = \bigcup_j Q_j^k, \tag{5.9}$$

donde $Q_j^k = S_i^k$ si $S_i^k \subseteq R_\ell^k$ y $Q_j^k = R_\ell^k$ en otro caso, para cada (ℓ, i) para los cuales la intersección es no vacía. Para estos cubos, tenemos que

$$\frac{a^k}{[v]_{A_1}} \leq \frac{1}{[v]_{A_1}} \inf_{Q_j^k} M_{\mathcal{D}}v \leq \inf_{Q_j^k} v. \tag{5.10}$$

Los próximos lemas se relacionan con los cubos diádicos maximales $\{Q_j^k\}_j$ que descomponen a Ω_k.

Lema 5.5. *Sean $k \in \mathbb{Z}$, $v_k(x) = \min\{v^r(x), b_{k+1}\}$ con $v \in A_1$ y b_k como en el Lema 5.4. Si Q_j^ℓ es un cubo como en (5.9) con $\ell \geq k$, entonces*

$$\frac{b_k}{[v]_{A_1}^r} \leq \frac{1}{|Q_j^\ell|} \int_{Q_j^\ell} v_k(x)\, dx \leq b_{k+1}.$$

Demostración. La segunda desigualdad vale trivialmente por la definición de v_k. Para ver que vale la primera, consideremos los subconjuntos de Q_j^ℓ definidos por $A = \{x \in Q_j^\ell : v_k(x) = v^r(x)\}$ y $B = Q_j^\ell \backslash A$. Notemos entonces que

$$\frac{1}{|Q_j^\ell|} \int_{Q_j^\ell} v_k = \frac{1}{|Q_j^\ell|} \left[\int_A v^r + \int_B b_{k+1}\right]$$

$$\geq \frac{1}{|Q_j^\ell|}\left[(\inf_A v^r)|A| + b_{k+1}|B|\right]$$
$$\geq \frac{1}{|Q_j^\ell|}\left[(\inf_{Q_j^\ell} v^r)|A| + b_k\frac{b_{k+1}}{b_k}|B|\right].$$

Usando (5.10) y el Lema 5.4 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_j^\ell|}\int_{Q_j^\ell} v_k &\geq \frac{1}{|Q_j^\ell|}\left[\left(\frac{a^\ell}{[v]_{A_1}}\right)^r|A| + b_k a^r|B|\right]\\ &\geq \frac{1}{|Q_j^\ell|}\left[\left(\frac{a^k}{[v]_{A_1}}\right)^r|A| + \frac{b_k}{[v]_{A_1}^r}a^r|B|\right]\\ &\geq \frac{b_k}{[v]_{A_1}^r}\left[\frac{|A|+|B|}{|Q_j^\ell|}\right] = \frac{b_k}{[v]_{A_1}^r},\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\ell \geq k$ y $a^{rk} \geq b_k$, por la definición de Φ. □

Definamos ahora $\Gamma = \{(k,j) : |Q_j^k \cap \{x : v(x) \leq a^{k+1}\}| > 0\}$. Así, si $(k,j) \in \Gamma$ obtenemos que

$$\frac{a^k}{[v]_{A_1}} \leq \frac{1}{[v]_{A_1}}\inf_{Q_j^k} M_{\mathcal{D}}v \leq \inf_{Q_j^k} v \leq \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} v \leq [v]_{A_1}\inf_{Q_j^k} v \leq [v]_{A_1}a^{k+1}. \tag{5.11}$$

Además, los cubos cuyos índices pertenecen a Γ poseen la siguiente propiedad que resultará fundamental en la prueba del Teorema 4.4.

Lema 5.6. *Sea Q_s^t un cubo tal que $(t,s) \in \Gamma$, $v^r \in A_1$ y $E = Q_s^t \cap \{x : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, existen constantes positivas $C > 0$ y $\eta > 1$ tales que*

$$v_t(E) \leq C v_t(Q_s^t)a^{(t-k)r\eta}.$$

Demostración. Notar que

$$E = Q_s^t \cap \{x : (M_{\mathcal{D}}v(x))^r > a^{kr}\} \subseteq Q_s^t \cap \{x : v^r(x) > a^{kr}/[v]_{A_1}^r\} =: F.$$

Usando la Proposición 1.29 para $v^r \in A_1 \subseteq A_\infty$, tenemos que existen constantes positivas C y $\varepsilon < 1$ tales que

$$|E| \leq |F| = \left|Q_s^t \cap \left\{x : v^r(x) > \frac{a^{kr}}{[v]_{A_1}^r}\right\}\right| \leq C|Q_s^t|\left[\frac{1}{a^{kr}|Q_s^t|}\int_{Q_s^t} v^r(x)\,dx\right]^{1/(1-\varepsilon)}. \tag{5.12}$$

Así, para dicho ε, elegimos $p > 1/\varepsilon$ y aplicamos la desigualdad de Hölder con exponentes p y p'. De la definición de v_t y de (5.12) obtenemos

$$\int_E v_t \leq \left(\int_E v_t^p\right)^{1/p}|E|^{1/p'}$$

$$\leq Cb_{t+1}|Q_s^t|^{1/p}|Q_s^t|^{1/p'}\left[\frac{1}{|Q_s^t|a^{kr}}\int_{Q_s^t} v^r\right]^{1/(p'(1-\varepsilon))}.$$

Usando (5.11), los Lemas 5.4 y 5.5 y eligiendo $\eta = 1/(p'(1-\varepsilon))$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_E v_t\,dx &\leq C\frac{b_{t+1}}{b_t}b_t|Q_s^t|a^{(t-k)r\eta}\\ &\leq C\Phi(a)v_t(Q_s^t)a^{(t-k)r\eta}\\ &= Cv_t(Q_s^t)a^{(t-k)r\eta}.\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 4.4. En virtud del Corolario 1.67, será suficiente probar la desigualdad para el operador $M_{\Phi,\mathcal{D}}$, para $\mathcal{D}$ una grilla diádica cualquiera. Fijemos entonces $t > 0$, una grilla diádica $\mathcal{D}$ y escribamos $g = fv/t$. Entonces, bastará probar que

$$uw\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}(g)(x) > v(x)\}\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(g(x))\,u(x)\,dx.$$

También podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que g es una función acotada con soporte compacto. Fijemos un número $a > \max\{2^n, L\}$, donde L es una cantidad que será elegida en forma conveniente más adelante. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ consideramos los números a^k, $b_k = 1/\Phi(a^{-k})$ y el conjunto

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^k\},$$

el cual se puede escribir como unión disjunta de cubos diádicos maximales $\{Q_j^k\}_j$ (ver (5.9)).

Notar que, si $A_k = \{x : a^k < v(x) \leq a^{k+1}\}$, entonces para cada k vale que

$$\begin{aligned}A_k \cap \{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > v(x)\} &\subseteq \{x : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^k\} \cap \{x : v(x) \leq a^{k+1}\} \cap \{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^k\}\\ &\subseteq \bigcup_{j:(k,j)\in\Gamma} Q_j^k,\end{aligned}$$

excepto por un conjunto de medida cero, siendo Γ como en la página 120. También, si $x \in A_k$ entonces $b_k < w(x) \leq b_{k+1}$. Combinando esto, podemos escribir

$$\begin{aligned}uw(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > v(x)\}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} uw(\{M_{\Phi,\mathcal{D}}g > v\} \cap A_k)\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{b_{k+1}}{b_k}b_k u(\{M_{\Phi,\mathcal{D}}g > v\} \cap A_k)\\ &\leq \Phi(a)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j:(k,j)\in\Gamma} b_k u(Q_j^k)\\ &\leq \Phi(a)[v]_{A_1}^r\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j:(k,j)\in\Gamma} u(Q_j^k)\frac{v_k(Q_j^k)}{|Q_j^k|},\end{aligned}$$

donde hemos usado los Lemas 5.4 y 5.5.

Fijamos a continuación un entero negativo N y definimos $\Gamma_N = \{(k,j) \in \Gamma : k \geq N\}$. El objetivo es probar que existe una constante positiva C, independiente de N, para la cual

$$\sum_{(k,j)\in\Gamma_N} u(Q_j^k)\frac{v_k(Q_j^k)}{|Q_j^k|} \leq C\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(g(x))u(x)\,dx.$$

Si podemos lograr esta estimación, el resultado se sigue haciendo $N \to -\infty$.

Para probar dicha desigualdad, sea $\Delta_N = \{Q_j^k : (k,j) \in \Gamma_N\}$. Dados dos cubos en Δ_N, o bien son disjuntos o uno está contenido en el otro. Observar también que, si $k > t$, $\Omega_k \subseteq \Omega_t$, con lo cual si existen cubos Q_j^k, Q_s^t para los cuales $Q_j^k \cap Q_s^t \neq \emptyset$ necesariamente debemos tener que $Q_j^k \subseteq Q_s^t$.

Si $\eta > 1$ es la constante que aparece en el Lema 5.6, elegimos $1 < \alpha < \eta$ y definimos una sucesión de conjuntos inductivamente de la siguente manera:

$$G_0 = \{(k,j) \in \Gamma_N : Q_j^k \text{ es maximal en } \Delta_N\},$$

donde la maximalidad se entiende en el sentido de la inclusión de conjuntos. Una vez definido G_n y de una forma coloquial, un par (k,j) en Γ_N pertenece a G_{n+1} si el cubo Q_j^k tiene un "ancestro" Q_s^t, con $(t,s) \in G_n$, y Q_j^k es el "primer descendiente" en Γ_N que satisface $\mu(Q_j^k) > \mu(Q_s^t)$, donde $\mu(Q_s^t)$ es el promedio pesado dado por

$$\mu(Q_s^t) := \frac{b_t}{a^{\alpha r t}}\frac{1}{|Q_s^t|}\int_{Q_s^t} u(x)\,dx,$$

en el sentido de que $\mu(Q_i^\ell) \leq \mu(Q_s^t)$ para cada $(\ell,i) \in \Gamma_N$ y $Q_j^k \subsetneq Q_i^\ell \subseteq Q_s^t$. En resumen, definimos para $n \geq 0$, G_{n+1} como el conjunto de pares $(k,j) \in \Gamma_N$ tales que existe $(t,s) \in G_n$ con $Q_j^k \subsetneq Q_s^t$ y de modo que valen las desigualdades

$$\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} u(x)\,dx > a^{(k-t)\alpha r}\frac{b_t}{b_k}\frac{1}{|Q_s^t|}\int_{Q_s^t} u(x)\,dx \tag{5.13}$$

y

$$\frac{1}{|Q_i^\ell|}\int_{Q_i^\ell} u(x)\,dx \leq a^{(\ell-t)\alpha r}\frac{b_t}{b_\ell}\frac{1}{|Q_s^t|}\int_{Q_s^t} u(x)\,dx, \tag{5.14}$$

con $(\ell,i) \in \Gamma_N$ y $Q_j^k \subsetneq Q_i^\ell \subseteq Q_s^t$.

Observemos que si $G_{n_0} = \emptyset$ para algún n_0, entonces $G_n = \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. Sea $P = \bigcup_{n\geq 0} G_n$. Si $(t,s) \in P$ diremos que el cubo Q_s^t es un *cubo principal*.

Afirmación 1. *Existe una constante positiva C tal que*

$$\sum_{(k,j)\in\Gamma_N}\frac{1}{|Q_j^k|}v_k(Q_j^k)u(Q_j^k) \leq C\sum_{(k,j)\in P}\frac{1}{|Q_j^k|}v_k(Q_j^k)u(Q_j^k).$$

Posponemos la demostración de esta afirmación hasta el final de la prueba de este teorema.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ fijo, consideremos la colección disjunta de cubos diádicos maximales $\{\tilde{Q}_i^k\}_i$ dados por la Proposición 1.63, cuya unión es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^k\}$. Entonces, para cada i se sigue que

$$a^k < \|g\|_{\Phi,\tilde{Q}_i^k}\,, \tag{5.15}$$

que equivale a

$$1 < \frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k} \Phi\left(\frac{g(y)}{a^k}\right) dy. \tag{5.16}$$

Como $Q_j^k \subseteq \{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^k\}$, para cada j existe un único $i = i(j,k)$ tal que $Q_j^k \subseteq \tilde{Q}_i^k$. Por la Afirmación 1, el Lema 5.5 y la condición (5.16) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{(k,j)\in\Gamma_N} \frac{1}{|Q_j^k|} v_k(Q_j^k)u(Q_j^k) &\leq C \sum_{(k,j)\in P} \frac{1}{|Q_j^k|} v_k(Q_j^k)u(Q_j^k)\\ &\leq C \sum_{(k,j)\in P} \frac{b_{k+1}}{b_k} b_k \frac{u(Q_j^k)}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k} \Phi\left(\frac{g(x)}{a^k}\right) dx.\end{aligned}$$

Dado que Φ es submultiplicativa y por la definición de b_k obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{(k,j)\in\Gamma_N} \frac{1}{|Q_j^k|} v_k(Q_j^k)u(Q_j^k) &\leq C \sum_{(k,j)\in P} \Phi(a)\frac{1}{\Phi(a^{-k})}\Phi(a^{-k})\frac{u(Q_j^k)}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k} \Phi(g(x))\,dx\\ &= C\int_{\mathbb{R}^n}\left[\sum_{(k,j)\in P}\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}u(Q_j^k)\mathcal{X}_{\tilde{Q}_i^k}(x)\right]\Phi(g(x))\,dx\\ &= C\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\Phi(g(x))\,dx,\end{aligned}$$

donde $h(x) = \sum_{(k,j)\in P} |\tilde{Q}_i^k|^{-1}u(Q_j^k)\mathcal{X}_{\tilde{Q}_i^k}(x)$.

Para finalizar, solo resta mostrar que existe una constante $C > 0$ tal que $h(x) \leq Cu(x)$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, podemos suponer que $u(x) < \infty$. Para cada k fijo existe a lo sumo un cubo $\tilde{Q}_i^k$ que verifica $x \in \tilde{Q}_i^k$. Si existe, lo denotamos con $\tilde{Q}^k$ y definimos entonces los conjuntos $P_k = \{(k,j) \in P : Q_j^k \subseteq \tilde{Q}^k\}$ y $G = \{k : P_k \neq \emptyset\}$. Recordemos que $k \geq N$, lo que implica que G está acotado inferiormente. Sea k_0 el mínimo de G. Construiremos una sucesión en G de la siguiente manera: elegido k_m, para $m \geq 0$, seleccionamos k_{m+1} el entero más chico en G y mayor que k_m que satisface

$$\frac{1}{|\tilde{Q}^{k_{m+1}}|}\int_{\tilde{Q}^{k_{m+1}}} u(y)\,dy > \frac{2}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\,dy. \tag{5.17}$$

Es claro que, si $k_m \leq \ell < k_{m+1}$, entonces

$$\frac{1}{|\tilde{Q}^{\ell}|}\int_{\tilde{Q}^{\ell}} u(y)\,dy \leq \frac{2}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\,dy. \tag{5.18}$$

La sucesión $\{k_m\}_{m\geq 0}$ así construida tiene solo una cantidad finita de términos. En efecto, si no fuera el caso, aplicando la condición (5.17) repetidamente, obtendríamos que

$$[u]_{A_1}u(x) \geq \frac{1}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\,dy > 2^m \frac{1}{|\tilde{Q}^{k_0}|}\int_{\tilde{Q}^{k_0}} u(y)\,dy$$

para cada $m > 0$, y tomando límite para $m \to \infty$ llegaríamos a una contradicción. Por lo tanto, $\{k_m\} = \{k_m\}_{m=0}^{m_0}$.

Utilizando este hecho y denotando $F_m = \{\ell \in G : k_m \leq \ell < k_{m+1}\}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
h(x) &= \sum_{(k,j)\in P} \frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|} u(Q_j^k)\mathcal{X}_{\tilde{Q}_i^k}(x) \\
&= \sum_{(k,j)\in P} \frac{u(Q_j^k)}{u(\tilde{Q}^k)}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}^k|}\int_{\tilde{Q}^k} u(y)\,dy\right) \\
&= \sum_{m=0}^{m_0}\sum_{\ell\in F_m}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\,dy\right)\sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell}\frac{u(Q_j^\ell)}{u(\tilde{Q}^\ell)} \\
&\leq 2\sum_{m=0}^{m_0}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\,dy\right)\sum_{\ell\in F_m}\sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell}\frac{u(Q_j^\ell)}{u(\tilde{Q}^\ell)},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado la condición (5.18).

Afirmación 2. *Existe una constante positiva C tal que*

$$\sum_{\ell\in F_m}\sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell}\frac{u(Q_j^\ell)}{u(\tilde{Q}^\ell)} \leq C.$$

Si esta afirmación vale, habremos terminado. En efecto, si denotamos $C_m = |\tilde{Q}^{k_m}|^{-1}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u$ y usamos la estimación de arriba obtenemos que

$$\begin{aligned}
h(x) &\leq C\sum_{m=0}^{m_0} C_m \leq C\sum_{m=0}^{m_0} C_{m_0}2^{m-m_0} \\
&= CC_{m_0}2^{-m_0}\sum_{m=0}^{m_0} 2^m = CC_{m_0}2^{-m_0}(2^{m_0+1}-1) \\
&\leq CC_{m_0} \leq C[u]_{A_1}u(x).
\end{aligned}$$
$\square$

Para completar la prueba, demostraremos a continuación las Afirmaciones 1 y 2.

Demostración de la Afirmación 1. Fijemos $(t,s)\in P$ y definamos

$$I(t,s) = \{(k,j)\in\Gamma_N : Q_j^k \subseteq Q_s^t \text{ y } Q_s^t \text{ es el cubo principal más chico que contiene a } Q_j^k\}.$$

En particular, cada Q_j^k con $(k,j)\in I(t,s)$ no es principal, a menos que $(k,j)=(t,s)$. Usando la condición (5.14) podemos escribir

$$\sum_{(k,j)\in I(t,s)}\frac{v_k(Q_j^k)}{|Q_j^k|}u(Q_j^k) \leq \sum_{(k,j)\in I(t,s)} a^{(k-t)\alpha r}\frac{b_t}{b_k}\frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|}\frac{v_k(Q_j^k)}{v_t(Q_j^k)}v_t(Q_j^k).$$

Además, en virtud del Lema 5.5 con $k > t$ tenemos que

$$\frac{v_k(Q_j^k)}{v_t(Q_j^k)} \leq [v]_{A_1}^r \frac{b_{k+1}}{b_t} \leq [v]_{A_1}^r \Phi(a) \frac{b_k}{b_t},$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\sum_{(k,j)\in I(t,s)} \frac{v_k(Q_j^k)}{|Q_j^k|} u(Q_j^k) &\leq \Phi(a)[v]_{A_1}^r \frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|} \sum_{(k,j)\in I(t,s)} a^{(k-t)\alpha r} \frac{b_t}{b_k} \frac{b_k}{b_t} v_t(Q_j^k) \\ &\leq \Phi(a)[v]_{A_1}^r \frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|} \sum_{(k,j)\in I(t,s)} a^{(k-t)\alpha r} v_t(Q_s^t \cap \{x : M_{\mathcal{D}} v(x) > a^k\}).\end{aligned}$$

Usando el Lema 5.6, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{(k,j)\in I(t,s)} \frac{v_k(Q_j^k)}{|Q_j^k|} u(Q_j^k) &\leq C\Phi(a)[v]_{A_1}^r \frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|} \sum_{(k,j)\in I(t,s)} a^{(k-t)\alpha r} v_t(Q_s^t) a^{(t-k)r\eta} \\ &\leq C\Phi(a)[v]_{A_1}^r \frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|} v_t(Q_s^t) \sum_{k\geq t} a^{(t-k)r(\eta-\alpha)} \\ &\leq C\Phi(a)[v]_{A_1}^r \frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|} v_t(Q_s^t),\end{aligned}$$

ya que $\eta - \alpha > 0$ y $a > 2^n > 1$. En definitiva, hemos concluido que

$$\sum_{(k,j)\in I(t,s)} \frac{v_k(Q_j^k)}{|Q_j^k|} u(Q_j^k) \leq C\Phi(a)[v]_{A_1}^r \frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|} v_t(Q_s^t),$$

y al sumar sobre todos los $(t, s) \in P$ tenemos que

$$\sum_{(k,j)\in \Gamma_N} \frac{v_k(Q_j^k)}{|Q_j^k|} u(Q_j^k) \leq \sum_{(t,s)\in P} \sum_{(k,j)\in I(t,s)} \frac{v_k(Q_j^k)}{|Q_j^k|} u(Q_j^k) \leq C \sum_{(t,s)\in P} \frac{v_k(Q_s^t)}{|Q_s^t|} u(Q_s^t),$$

ya que $\bigcup_{(t,s)\in P} I(t,s) = \Gamma_N$. □

Demostración de la Afirmación 2. Supongamos, por el momento, que existe un número positivo γ tal que, si $(\ell, j) \in P_\ell$ y $k_m \leq \ell < k_{m+1}$, entonces

$$\frac{1}{|Q_j^\ell|} \int_{Q_j^\ell} u(y)\, dy > \frac{a^{(\ell-k_m)\gamma}}{2[u]_{A_1}} \frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|} \int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\, dy. \tag{5.19}$$

Con esto, si $y \in Q_j^\ell$,

$$\begin{aligned}u(y)[u]_{A_1} &\geq \frac{1}{|Q_j^\ell|} \int_{Q_j^\ell} u(z)\, dz \\ &> \frac{a^{(\ell-k_m)\gamma}}{2[u]_{A_1}} \frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|} \int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\, dy\end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$u(y) > \frac{a^{(\ell-k_m)\gamma}}{2[u]_{A_1}^2}\frac{u(\tilde{Q}^\ell)}{|\tilde{Q}^\ell|} =: \lambda,$$

lo que implica que

$$\bigcup_{j:(\ell,j)\in P_\ell} Q_j^\ell \subseteq \{x \in \tilde{Q}^\ell : u(x) > \lambda\}.$$

Dado que $u \in A_1 \subseteq A_\infty$, existen constantes positivas C y ν que verifican $\frac{u(E)}{u(Q)} \leq C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\nu$, para todo $E \subseteq Q$ medible. Por la desigualdad de Tchebychev y la definición de λ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell} u(Q_j^\ell) &= u\left(\bigcup_{j:(\ell,j)\in P_\ell} Q_j^\ell\right)\\
&\leq u(\{x \in \tilde{Q}^\ell : u(x) > \lambda\})\\
&\leq Cu(\tilde{Q}^\ell)\left(\frac{|\{x \in \tilde{Q}^\ell : u(x) > \lambda\}|}{|\tilde{Q}^\ell|}\right)^\nu\\
&\leq Cu(\tilde{Q}^\ell)\left(\frac{1}{\lambda|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\,dy\right)^\nu\\
&= Cu(\tilde{Q}^\ell)a^{(k_m-\ell)\gamma\nu},
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell\in F_m}\sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell}\frac{u(Q_j^\ell)}{u(\tilde{Q}^\ell)} &\leq C\sum_{\ell\in F_m} a^{(k_m-\ell)\gamma\nu}\\
&\leq C\sum_{\ell\geq k_m} a^{(k_m-\ell)\gamma\nu} = C,
\end{aligned}$$

dado que $a > 1$. Esto da la prueba de la afirmación.

Probaremos ahora que vale (5.19). Seleccionamos $(\ell, j) \in P_\ell$ con $k_m \leq \ell < k_{m+1}$. Como $\Omega_\ell \subseteq \Omega_{k_m}$, por maximalidad existe un único s tal que $Q_j^\ell \subseteq Q_s^{k_m}$. Queremos ver que $(k_m, s) \in \Gamma_N$. Si $(k_m, s) \in P$ no hay nada que probar, ya que $P \subseteq \Gamma_N$. Entonces, supongamos que $(k_m, s) \notin P$. Por las definiciones de G y P_{k_m}, $\tilde{Q}^{k_m}$ contiene un cubo $Q_p^{k_m}$ con $(k_m, p) \in P$. Veremos, como primer paso, que $Q_s^{k_m} \subsetneq \tilde{Q}^{k_m}$. En efecto, existe un único $i(s)$ tal que $Q_j^\ell \subseteq Q_s^{k_m} \subseteq \tilde{Q}_{i(s)}^{k_m}$. Además,

$$\left\{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^\ell\right\} \subseteq \left\{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^{k_m}\right\} = \bigcup_i \tilde{Q}_i^{k_m},$$

con lo que existe un único i_0 que verifica $Q_j^\ell \subseteq \tilde{Q}^\ell \subseteq \tilde{Q}_{i_0}^{k_m}$. Por otro lado, tenemos que $x \in \tilde{Q}^{k_m}$ y $x \in \tilde{Q}_{i_0}^{k_m}$ con lo cual debe ocurrir que

$$\tilde{Q}_{i(s)}^{k_m} = \tilde{Q}_{i_0}^{k_m} = \tilde{Q}^{k_m},$$

que implica directamente que $Q_s^{k_m} \subseteq \tilde{Q}^{k_m}$. De hecho, esta contención es estricta debido a que tanto $Q_s^{k_m}$ como $Q_p^{k_m}$ están contenidos en $\tilde{Q}^{k_m}$, y $s \neq p$.

Recordemos que $\tilde{Q}^{k_m}$ es un cubo maximal del conjunto $\{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^{k_m}\}$ y que $Q_s^{k_m}$ es maximal en

$$\Omega_{k_m} = \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^{k_m}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^{k_m}\}.$$

Debido a que $Q_s^{k_m} \subsetneq \tilde{Q}^{k_m}$ concluimos que $Q_s^{k_m}$ es un cubo diádico maximal del conjunto $\{x : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^{k_m}\}$. Así,

$$\frac{1}{|Q_s^{k_m}|}\int_{Q_s^{k_m}} v(y)\,dy \leq 2^n a^{k_m} \leq a^{k_m+1}, \tag{5.20}$$

y esto nos dice que $|Q_s^{k_m} \cap \{x : v(x) \leq a^{k_m+1}\}| > 0$. En efecto, si no fuera el caso, denotando con $E = Q_s^{k_m} \cap \{x : v(x) > a^{k_m+1}\}$ tendríamos que

$$\frac{1}{|Q_s^{k_m}|}\int_{Q_s^{k_m}} v(y)\,dy = \frac{1}{|E|}\int_{Q_s^{k_m}} v(y)\,dy > \frac{1}{|E|}\int_E v(y)\,dy > a^{k_m+1},$$

lo que contradice a (5.20). Entonces $(k_m, s) \in \Gamma_N$ y por lo tanto $Q_s^{k_m}$ está contenido en, al menos, un cubo principal. Sea Q_σ^k el cubo principal más chico que contiene a $Q_s^{k_m}$. Usando las condiciones (5.13) y (5.14) podemos escribir

$$\frac{1}{|Q_j^\ell|}\int_{Q_j^\ell} u(y)\,dy > a^{(\ell-k)\alpha r}\frac{b_k}{b_\ell}\frac{1}{|Q_\sigma^k|}\int_{Q_\sigma^k} u(y)\,dy \geq a^{(\ell-k_m)\alpha r}\frac{b_{k_m}}{b_\ell}\frac{1}{|Q_s^{k_m}|}\int_{Q_s^{k_m}} u(y)\,dy.$$

Por otro lado, de (5.18) tenemos que

$$\frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\,dy \leq \frac{2}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\,dy \leq 2[u]_{A_1}\inf_{\tilde{Q}^{k_m}} u \leq 2[u]_{A_1}\frac{1}{|Q_s^{k_m}|}\int_{Q_s^{k_m}} u(y)\,dy.$$

Con estas dos desigualdades obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_j^\ell|}\int_{Q_j^\ell} u(y)\,dy &> a^{(\ell-k_m)\alpha r}\frac{b_{k_m}}{b_\ell}\frac{1}{|Q_s^{k_m}|}\int_{Q_s^{k_m}} u(y)\,dy \\ &> \frac{1}{2[u]_{A_1}}\frac{a^{(\ell-k_m)\alpha r}}{(\Phi(a))^{\ell-k_m}}\frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\,dy,\end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema 5.4. Supongamos primero que $\delta > 0$. En este caso aplicamos la Proposición 1.18, parte (e) con $0 < \varepsilon < r(\alpha-1)$. Entonces, para $t \geq 1$, tenemos que $\Phi(t) \leq C_0 t^{r+\varepsilon}$, con $C_0 = \max\{1, (\delta/\varepsilon)^\delta\}$. Así,

$$\frac{1}{|Q_j^\ell|}\int_{Q_j^\ell} u(y)\,dy > \frac{1}{2[u]_{A_1}}\frac{a^{(\ell-k_m)(\alpha r-r-\varepsilon)}}{C_0^{\ell-k_m}}\frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\,dy.$$

Recordemos que $a > \max\{2^n, L\}$. Elegiremos L de manera que

$$a^{\alpha r-r-\varepsilon} > C_0.$$

Si $C_0 = 1$ esta condición se cumple trivialmente dado que $\alpha r - r - \varepsilon > 0$. Si no, basta con tomar $L = (\delta/\varepsilon)^{\delta/(r(\alpha-1)-\varepsilon)}$. Entonces, eligiendo $\gamma = \log_a(C_0^{-1}a^{\alpha r-r-\varepsilon})$ obtenemos (5.19).

Si $\delta = 0$, entonces $\Phi(t) = t^r$ y $a^{(\ell-k_m)\alpha r}/a^{(\ell-k_m)r} = a^{(\ell-k_m)(\alpha-1)r}$. En este caso podemos tomar $\gamma = (\alpha-1)r$. $\square$

Antes de dar la prueba del Teorema 4.5, enunciaremos y demostraremos el siguiente lema técnico.

Lema 5.7. *Sea f la función definida en $[0,\infty)$ por*

$$f(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{1+x}}, & \text{si} \quad x>0; \\ 1, & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$$

Entonces $1 \leq f(x) \leq e^{1/e}$, para cada $x \geq 0$.

Demostración. Observemos que

$$f'(x) = f(x)\frac{1}{(1+x)^2}\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right) \qquad \text{si} \qquad x>0.$$

Es fácil ver que f tiene un máximo relativo en $x = 1/(e-1)$ cuyo valor es $f(1/(e-1)) = e^{1/e}$. Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1,$$

que directamente implica la tesis. □

Demostración del Teorema 4.5. La prueba de este resultado seguirá ideas similares a la del Teorema 4.4, con algunos cambios importantes. Utilizaremos, en general, la misma notación que en esta prueba. Fijemos $t>0$, una grilla diádica $\mathcal{D}$ y denotemos $g = fv/t$. Será suficiente demostrar que

$$uv^r\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}(g)(x) > v(x)\}\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{f}{t}\right)uv^r.$$

Fijemos un número $a > 2^n$ y, para cada entero k, definimos el conjunto

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^k\},$$

que puede ser escrito como unión disjunta de cubos diádicos $\{Q_j^k\}_j$, en virtud de la Proposición 1.63.

Como antes, consideramos el conjunto $\Gamma = \{(k,j) : |Q_j^k \cap \{x : v(x) \leq a^{k+1}\}| > 0\}$. Como $v \in A_1$, si $(k,j) \in \Gamma$ entonces tenemos que

$$\frac{a^k}{[v]_{A_1}} \leq \frac{1}{[v]_{A_1}}\inf_{Q_j^k} M_{\mathcal{D}}v \leq \inf_{Q_j^k} v \leq \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} v \leq [v]_{A_1}\inf_{Q_j^k} v \leq [v]_{A_1}a^{k+1}. \tag{5.21}$$

Como $v^r \in A_1$, también tenemos que

$$\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} v \leq \left(\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} v^r\right)^{1/r} \leq [v^r]_{A_1}^{1/r}\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} v.$$

Combinando esta estimación con (5.21) obtenemos que

$$\frac{a^{kr}}{[v]_{A_1}^r} \leq \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} v^r \leq [v^r]_{A_1}[v]_{A_1}^r a^r a^{kr}. \tag{5.22}$$

A continuación, observar que si $A_k = \left\{x : a^k < v(x) \leq a^{k+1}\right\}$, para cada entero k tendremos que

$$\begin{aligned} A_k \cap \{M_{\Phi,\mathcal{D}} g > v\} &\subseteq \left\{M_{\mathcal{D}} v > a^k\right\} \cap \left\{v \leq a^{k+1}\right\} \cap \left\{M_{\Phi,\mathcal{D}} g > a^k\right\} \\ &\subseteq \bigcup_{j:(k,j)\in\Gamma} Q_j^k, \end{aligned}$$

excepto por un conjunto de medida nula. De esta manera,

$$\begin{aligned} uv^r(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}} g > v\}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} uv^r(\{M_{\Phi,\mathcal{D}} g > v\} \cap A_k) \\ &\leq a^r \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^{kr} u(\{M_{\Phi,\mathcal{D}} g > v\} \cap A_k) \\ &\leq a^r \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j:(k,j)\in\Gamma} a^{kr} u(Q_j^k) \\ &\leq a^r [v]_{A_1}^r \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j:(k,j)\in\Gamma} u(Q_j^k)\frac{v^r(Q_j^k)}{|Q_j^k|}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (5.22).

Fijemos ahora un entero negativo N y definamos $\Gamma_N = \{(k,j) \in \Gamma : k \geq N\}$. Veremos que existe una constante positiva C, independiente de N, para la cual

$$\sum_{k\geq N} \sum_{j:(k,j)\in\Gamma_N} u(Q_j^k)\frac{v^r(Q_j^k)}{|Q_j^k|} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{f}{t}\right) uv^r.$$

Si logramos probar esta estimación, el resultado se sigue directamente al hacer $N \to -\infty$.

Sea $\Delta_N = \{Q_j^k : (k,j) \in \Gamma_N\}$. Dados dos cubos en Δ_N, o bien son disjuntos, o uno está contenido en el otro. Notar además que, si $k > t$, $\Omega_k \subseteq \Omega_t$. Así, si los cubos Q_j^k y Q_s^t verifican $Q_j^k \cap Q_s^t \neq \emptyset$, entonces necesariamente debemos tener $Q_j^k \subseteq Q_s^t$.

Como $v^r \in A_1 \subseteq A_\infty$, existen constantes positivas C y η tales que, para cada cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ y cada subconjunto medible E de Q,

$$\frac{v^r(E)}{v^r(Q)} \leq C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\eta.$$

Sea $0 < \beta < \eta$ y definamos la siguiente sucesión de conjuntos de manera inductiva:

$$G_0 = \{(k,j) \in \Gamma_N : Q_j^k \text{ es maximal en } \Delta_N\},$$

y a partir de G_n, definimos G_{n+1} como el conjunto de pares $(k,j) \in \Gamma_N$ que cumplen que existe un par $(t,s) \in G_n$ con $Q_j^k \subsetneq Q_s^t$ y de modo que las desigualdades

$$\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} u(x)\,dx > a^{(k-t)\beta}\frac{1}{|Q_s^t|}\int_{Q_s^t} u(x)\,dx, \tag{5.23}$$

y

$$\frac{1}{|Q_i^\ell|}\int_{Q_i^\ell} u(x)\,dx \leq a^{(\ell-t)\beta}\frac{1}{|Q_s^t|}\int_{Q_s^t} u(x)\,dx \tag{5.24}$$

se verifican con $(\ell,i) \in \Gamma_N$ y $Q_j^k \subsetneq Q_i^\ell \subseteq Q_s^t$.

Sea $P = \bigcup_{n\geq 0} G_n$, el conjunto de índices correspondiente a los cubos principales.

A continuación enunciaremos algunas afirmaciones claves para este resultado. La prueba de las mismas se pospondrá para el final de esta demostración.

Afirmación 3. *Existe una constante positiva C tal que*

$$\sum_{(k,j)\in\Gamma_N}\frac{v^r(Q_j^k)}{|Q_j^k|}u(Q_j^k) \leq C\sum_{(k,j)\in P}\frac{v^r(Q_j^k)}{|Q_j^k|}u(Q_j^k).$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ fijo consideraremos la familia $\{\tilde{Q}_i^k\}_i$ de cubos diádicos maximales dada por la Proposición 1.63, que descomponen al conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^k\}$. Entonces, para cada i, se sigue que

$$a^k < \|g\|_{\Phi,\tilde{Q}_i^k} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad 1 < \left\|\frac{g}{a^k}\right\|_{\Phi,\tilde{Q}_i^k}. \tag{5.25}$$

Afirmación 4. *Existe una constante positiva C que cumple que*

$$a^{kr} \leq C\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k}\Phi\left(\frac{f}{t}\right)v^r(x)\,dx, \tag{5.26}$$

para cada cubo $\tilde{Q}_i^k$.

Supongamos entonces que las afirmaciones son ciertas. Dado que $Q_j^k \subseteq \{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^k\}$, para cada j existe un único $i = i(j,k)$ para el cual $Q_j^k \subseteq \tilde{Q}_i^k$. Aplicando las Afirmaciones 3 y 4 tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,j)\in\Gamma_N}\frac{1}{|Q_j^k|}v^r(Q_j^k)u(Q_j^k) &\leq C\sum_{(k,j)\in P}\frac{1}{|Q_j^k|}v^r(Q_j^k)u(Q_j^k)\\
&\leq C\sum_{(k,j)\in P}a^{kr}u(Q_j^k)\\
&\leq C\sum_{(k,j)\in P}\frac{u(Q_j^k)}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k}\Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)v^r(x)\,dx\\
&= C\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)v^r(x)\left[\sum_{(k,j)\in P}\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}u(Q_j^k)\mathcal{X}_{\tilde{Q}_i^k}(x)\right]dx
\end{aligned}$$

$$= C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right) h(x) v^r(x)\, dx,$$

donde $h(x) = \sum_{(k,j)\in P} |\tilde{Q}_i^k|^{-1} u(Q_j^k)\mathcal{X}_{\tilde{Q}_i^k}(x)$.

Para finalizar, solo resta mostrar que existe una constante positiva C tal que $h(x) \leq Cu(x)$. La prueba de esta desigualdad es similar a la que aparece en [41]. La incluimos para mayor claridad.

En efecto, dado $x \in \mathbb{R}^n$, podemos suponer que $u(x) < \infty$. Para cada entero fijo k existe, a lo sumo, un $\tilde{Q}_i^k$ que satisface $x \in \tilde{Q}_i^k$. Si este cubo existe, lo denotamos por $\tilde{Q}^k$ y además definimos los conjuntos $P_k = \{(k,j) \in P : Q_j^k \subseteq \tilde{Q}^k\}$ y $G = \{k : P_k \neq \emptyset\}$. Recordemos que $k \geq N$, por lo que G está acotado inferiormente. Sea k_0 el mínimo de G. Construiremos una sucesión en G de la siguiente manera: elegido k_m, para $m \geq 0$, seleccionamos k_{m+1} como el entero más chico en G y mayor que k_m que verifique

$$\frac{1}{|\tilde{Q}^{k_{m+1}}|}\int_{\tilde{Q}^{k_{m+1}}} u(y)\, dy > \frac{2}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\, dy. \tag{5.27}$$

Es claro que, si $\ell \in G$ y $k_m \leq \ell < k_{m+1}$, entonces

$$\frac{1}{|\tilde{Q}^{\ell}|}\int_{\tilde{Q}^{\ell}} u(y)\, dy \leq \frac{2}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\, dy. \tag{5.28}$$

La sucesión $\{k_m\}_{m\geq 0}$ así construida tiene un número finito de términos, que denotaremos con m_0. En efecto, si este no fuera el caso, aplicando la condición (5.27) repetidamente, tendríamos que

$$[u]_{A_1} u(x) \geq \frac{1}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\, dy > 2^m \frac{1}{|\tilde{Q}^{k_0}|}\int_{\tilde{Q}^{k_0}} u(y)\, dy$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, y haciendo $m \to \infty$ llegaríamos a una contradicción.

Si denotamos con $F_m = \{\ell \in G : k_m \leq \ell < k_{m+1}\}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
h(x) &= \sum_{(k,j)\in P} \frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|} u(Q_j^k)\mathcal{X}_{\tilde{Q}_i^k}(x)\\
&= \sum_{(k,j)\in P} \frac{u(Q_j^k)}{u(\tilde{Q}^k)}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}^k|}\int_{\tilde{Q}^k} u(y)\, dy\right)\\
&= \sum_{m=0}^{m_0}\sum_{\ell\in F_m}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\, dy\right)\sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell}\frac{u(Q_j^\ell)}{u(\tilde{Q}^\ell)}\\
&\leq 2\sum_{m=0}^{m_0}\left(\frac{1}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\, dy\right)\sum_{\ell\in F_m}\sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell}\frac{u(Q_j^\ell)}{u(\tilde{Q}^\ell)},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado (5.28).

Afirmación 5. *Existe una constante positiva C que satisface*

$$\sum_{\ell\in F_m}\sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell}\frac{u(Q_j^\ell)}{u(\tilde{Q}^\ell)} \leq C.$$

Si esta afirmación vale, habremos terminado. En efecto, denotando con $C_m = |\tilde{Q}^{k_m}|^{-1}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u$, y utilizando la estimación de arriba junto con (5.27) tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) &\le C\sum_{m=0}^{m_0} C_m \le C\sum_{m=0}^{m_0} C_{m_0}2^{m-m_0}\\ &= CC_{m_0}2^{-m_0}\sum_{m=0}^{m_0} 2^m = CC_{m_0}2^{-m_0}(2^{m_0+1}-1)\\ &\le CC_{m_0} \le C[u]_{A_1}u(x). \qquad \square \end{aligned}$$

Para completar la prueba, probaremos entonces las tres afirmaciones.

Demostración de la Afirmación 3. Fijemos $(t,s) \in P$ y definamos el conjunto de índices

$$I(t,s) = \left\{(k,j) \in \Gamma_N : Q_j^k \subseteq Q_s^t \text{ y } Q_s^t \text{ es el cubo principal más chico que contiene a } Q_j^k\right\}.$$

Particularmente, cada Q_j^k con $(k,j) \in I(t,s)$ no es principal, salvo que $(k,j) = (t,s)$. Utilizando la condición (5.24) podemos estimar

$$\begin{aligned} \sum_{(k,j)\in I(t,s)} \frac{v^r(Q_j^k)}{|Q_j^k|}u(Q_j^k) &\le \sum_{(k,j)\in I(t,s)} a^{(k-t)\beta}\frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|}v^r(Q_j^k)\\ &\le C\frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|}\sum_{(k,j)\in I(t,s)} a^{(k-t)\beta}v^r(Q_j^k)\\ &\le C\frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|}\sum_{(k,j)\in I(t,s)} a^{(k-t)\beta}v^r(Q_s^t\cap\{x : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^k\}). \end{aligned}$$

Por otra parte, usando la condición A_∞ de v^r, la desigualdad de Tchebychev y (5.21) obtenemos que

$$\begin{aligned} v^r(Q_s^t\cap\{x : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^k\}) &\le \frac{v^r(Q_s^t\cap\{x : [v]_{A_1}v(x) > a^k\})}{v^r(Q_s^t)}v^r(Q_s^t)\\ &\le [v^r]_{A_\infty}\left(\frac{|Q_s^t\cap\{x : [v]_{A_1}v(x) > a^k\}|}{|Q_s^t|}\right)^\eta v^r(Q_s^t)\\ &\le [v^r]_{A_\infty}\left(\frac{[v]_{A_1}}{|Q_s^t|a^k}\int_{Q_s^t} v(x)\,dx\right)^\eta v^r(Q_s^t)\\ &\le [v^r]_{A_\infty}(a[v]_{A_1}^2)^\eta a^{(t-k)\eta}v^r(Q_s^t). \end{aligned}$$

Combinar estas dos desigualdades nos conduce a

$$\begin{aligned} \sum_{(k,j)\in I(t,s)} \frac{v^r(Q_j^k)}{|Q_j^k|}u(Q_j^k) &\le C\frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|}\sum_{(k,j)\in I(t,s)} a^{(k-t)\beta}a^{(t-k)\eta}v^r(Q_s^t)\\ &= C\frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|}v^r(Q_s^t)\sum_{k\ge t} a^{(t-k)(\eta-\beta)} \end{aligned}$$

$$\leq C\frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|}v^r(Q_s^t),$$

ya que $\eta-\beta>0$ y $a>2^n>1$. Hemos obtenido entonces que

$$\sum_{(k,j)\in I(t,s)}\frac{v^r(Q_j^k)}{|Q_j^k|}u(Q_j^k)\leq C\frac{u(Q_s^t)}{|Q_s^t|}v^r(Q_s^t),$$

y si sumamos sobre todos los pares $(t,s)\in P$ se sigue que

$$\sum_{(k,j)\in\Gamma_N}\frac{v^r(Q_j^k)}{|Q_j^k|}u(Q_j^k)\leq\sum_{(t,s)\in P}\sum_{(k,j)\in I(t,s)}\frac{v^r(Q_j^k)}{|Q_j^k|}u(Q_j^k)\leq C\sum_{(t,s)\in P}\frac{v^r(Q_s^t)}{|Q_s^t|}u(Q_s^t),$$

dado que $\bigcup_{(t,s)\in P}I(t,s)=\Gamma_N$. □

Demostración de la Afirmación 4. Fijemos uno de los cubos $\tilde{Q}_i^k$, y consideremos los conjuntos definidos por $A=\{x\in\tilde{Q}_i^k: v(x)\leq t_0a^k\}$, donde t_0 está dado en (4.2) y $B=\tilde{Q}_i^k\backslash A$. Entonces,

$$1<\left\|\frac{g}{a^k}\right\|_{\Phi,\tilde{Q}_i^k}\leq\left\|\frac{g}{a^k}\mathcal{X}_A\right\|_{\Phi,\tilde{Q}_i^k}+\left\|\frac{g}{a^k}\mathcal{X}_B\right\|_{\Phi,\tilde{Q}_i^k}=I+II.$$

De aquí podemos deducir que, o bien $I>1/2$ o $II>1/2$. Si se da el primer caso, por la submultiplicatividad y el tipo inferior r de Φ, tenemos que

$$\begin{aligned}
1&<\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_A\Phi\left(\frac{2f(x)v(x)}{ta^k}\right)dx\\
&\leq\Phi(2t_0)\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_A\Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)\Phi\left(\frac{v(x)}{t_0a^k}\right)dx\\
&\leq C_r\Phi(2t_0)\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k}\Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)\frac{v^r(x)}{t_0^ra^{kr}}dx\\
&\leq\frac{C}{a^{kr}}\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k}\Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)v^r(x)\,dx,
\end{aligned}$$

lo que significa que

$$a^{kr}<C\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k}\Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)v^r(x)\,dx.$$

Para el segundo caso, si escribimos $J_{i,k}=\{\ell:Q_\ell^k\subseteq\tilde{Q}_i^k\}$, entonces $B\subseteq\bigcup_{\ell\in J_{i,k}}Q_\ell^k$. En efecto, $B=\tilde{Q}_i^k\cap\{v>t_0a^k\}\subseteq\tilde{Q}_i^k\cap\{M_{\mathcal{D}}v>a^k\}$, y esto implica que

$$B\subseteq\tilde{Q}_i^k\cap\{x:M_{\mathcal{D}}v(x)>a^k\}\cap\{x:M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x)>a^k\}=\tilde{Q}_i^k\cap\Omega_k.$$

En consecuencia,

$$B\subseteq\tilde{Q}_i^k\cap\left(\bigcup_{\ell\in J_{i,k}}Q_\ell^k\right)=\bigcup_{\ell\in J_{i,k}}\left(\tilde{Q}_i^k\cap Q_\ell^k\right)=\bigcup_{\ell\in J_{i,k}}Q_\ell^k. \tag{5.29}$$

Luego, como $\Phi \in \mathcal{F}_r$, entonces

$$\begin{aligned}
1 &< \frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|} \int_B \Phi\left(\frac{2f(x)v(x)}{ta^k}\right) dx \\
&\leq \Phi(2) \frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|} \int_B \Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right) \Phi\left(\frac{v(x)}{a^k}\right) \left(\frac{v(x)}{a^k}\right)^{-r} \frac{v^r(x)}{a^{kr}} \mathcal{X}_{\tilde{Q}_i^k \cap B}(x)\, dx \\
&\leq \frac{C}{|\tilde{Q}_i^k|} \int_B \Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right) \frac{v^r(x)}{a^{kr}} \left(\log\left(\frac{v(x)}{a^k}\right)\right)^{\delta} \mathcal{X}_{\tilde{Q}_i^k \cap B}(x)\, dx,
\end{aligned}$$

y usando (5.29) podemos escribir

$$\begin{aligned}
a^{kr} &< C \frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|} \int_B \Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right) v^r(x) \left(\log\left(\frac{v(x)}{a^k}\right)\right)^{\delta} \mathcal{X}_{\tilde{Q}_i^k \cap B}(x)\, dx \\
&\leq \frac{C}{|\tilde{Q}_i^k|} \sum_{\ell \in J_{i,k}} \int_{Q_\ell^k} \Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right) w_k(x) v^r(x)\, dx,
\end{aligned}$$

donde $w_k(x) = \left(\log\left(\frac{v(x)}{a^k}\right)\right)^{\delta} \mathcal{X}_{Q_\ell^k \cap B}(x)$.

Notemos que, como $v^r \in A_1$, existe un exponente $s > 1$ tal que $v^r \in \mathrm{RH}_s$. Sean

$$\delta_0 = \max\{\delta, 1\} \quad \text{y} \quad \varepsilon_0 = \min\{1/(s'[v]_{A_1}^{1/s'} a^{1/s'} [v^r]_{RH_s} \delta_0 - 1), 1\}.$$

Fijados $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ y $\gamma = 1 + \varepsilon$, tenemos que $\gamma' = 1 + 1/\varepsilon$. Así, aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes γ y γ', con respecto a la medida $d\mu(x) = v^r(x)\, dx$, obtenemos que

$$a^{kr} < \frac{C}{|\tilde{Q}_i^k|} \sum_{\ell \in J_{i,k}} v^r(Q_\ell^k) \left(\frac{1}{v^r(Q_\ell^k)} \int_{Q_\ell^k} \left[\Phi\left(\frac{f}{t}\right)\right]^{\gamma} v^r\right)^{1/\gamma} \left(\frac{1}{v^r(Q_\ell^k)} \int_{Q_\ell^k} w_k^{\gamma'} v^r\right)^{1/\gamma'}. \tag{5.30}$$

A continuación probaremos que el segundo promedio está acotado por una constante K, independiente de ε. En efecto, usando (5.21), que $\log(t) \leq \xi^{-1} t^{\xi}$, para cada $t, \xi > 0$ y la desigualdad de Hölder con exponentes s y s', podemos estimar

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{v^r(Q_\ell^k)} \int_{Q_\ell^k} w_k^{\gamma'}(x) v^r(x)\, dx\right)^{1/\gamma'} &= \left(\frac{1}{v^r(Q_\ell^k)} \int_{Q_\ell^k \cap B} \log\left(\frac{v(x)}{a^k}\right)^{\delta\gamma'} v^r(x)\, dx\right)^{1/\gamma'} \\
&\leq \left(\frac{1}{v^r(Q_\ell^k)} \int_{Q_\ell^k \cap B} \delta s' \gamma' \left(\frac{v(x)}{a^k}\right)^{1/s'} v^r(x)\, dx\right)^{1/\gamma'} \\
&\leq \left(\delta s' \gamma' \frac{|Q_\ell^k|}{v^r(Q_\ell^k)} \left(\frac{1}{|Q_\ell^k|} \int_{Q_\ell^k} \frac{v}{a^k}\right)^{1/s'} \left(\frac{1}{|Q_\ell^k|} \int_{Q_\ell^k} v^{rs}\right)^{1/s}\right)^{1/\gamma'} \\
&\leq \left([v]_{A_1}^{1/s'} a^{1/s'} [v^r]_{\mathrm{RH}_s} \delta_0 \gamma' s'\right)^{1/\gamma'} \\
&\leq (\gamma'\gamma')^{1/\gamma'} \\
&\leq e^{2/e},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la definición de ε y el Lema 5.7. Así, podemos elegir $K = e^{2/e}$. De esta manera, hemos probado que

$$a^{kr} < \frac{C}{|\tilde{Q}_i^k|} \sum_{\ell \in J_{i,k}} v^r(Q_\ell^k) \left(\frac{1}{v^r(Q_\ell^k)} \int_{Q_\ell^k} \left[\Phi\left(\frac{f}{t}\right)\right]^\gamma v^r \right)^{1/\gamma}, \tag{5.31}$$

y observemos que, si $\Psi(t) = t^\gamma$, la expresión entre paréntesis es $\|\Phi(f/t)\|_{\Psi, v^r, Q_\ell^k}$. Usando la Proposición 1.52 tenemos que

$$\|\Phi(f/t)\|_{\Psi, v^r, Q_\ell^k} \leq \tau + \frac{\tau^{1-\gamma}}{v^r(Q_\ell^k)} \int_{Q_\ell^k} \left[\Phi\left(\frac{f}{t}\right)\right]^\gamma v^r, \tag{5.32}$$

para cada $\tau > 0$. Combinando las estimaciones dadas por (5.31) y (5.32) tenemos

$$a^{kr} < C \sum_{\ell \in J_{i,k}} \left(\tau \frac{v^r(Q_\ell^k)}{|\tilde{Q}_i^k|} + \frac{\tau^{1-\gamma}}{|\tilde{Q}_i^k|} \int_{Q_\ell^k} \left[\Phi\left(\frac{f}{t}\right)\right]^\gamma v^r \right).$$

Como los cubos en $J_{i,k}$ son diádicos y además

$$\bigcup_{\ell \in J_{i,k}} Q_\ell^k \subseteq \tilde{Q}_i^k,$$

podemos concluir que

$$a^{kr} < C\tau \frac{v^r(\tilde{Q}_i^k)}{|\tilde{Q}_i^k|} + \frac{C\tau^{1-\gamma}}{|\tilde{Q}_i^k|} \int_{\tilde{Q}_i^k} \left[\Phi\left(\frac{f}{t}\right)\right]^\gamma v^r. \tag{5.33}$$

Observar que

$$\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|} \int_{\tilde{Q}_i^k} v^r(x)\, dx \leq (1 + a^r [v]_{A_1}^r [v^r]_{A_1}) a^{kr}. \tag{5.34}$$

En efecto, observar primero que

$$\{x \in \tilde{Q}_i^k : v(x) > a^k\} \subseteq \bigcup_{\ell \in J_{i,k}} Q_\ell^k,$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|} \int_{\tilde{Q}_i^k} v^r(x)\, dx &= \frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|} \left[\int_{\tilde{Q}_i^k \cap \{v \leq a^k\}} v^r(x)\, dx + \int_{\tilde{Q}_i^k \cap \{v > a^k\}} v^r(x)\, dx \right] \\
&\leq a^{kr} + \sum_{j \in J_{i,k}} \frac{|Q_\ell^k|}{|\tilde{Q}_i^k|} \frac{1}{|Q_\ell^k|} \int_{Q_\ell^k} v^r(x)\, dx \\
&\leq a^{kr} + [v]_{A_1}^r [v^r]_{A_1} a^r a^{kr} \\
&\leq (1 + [v]_{A_1}^r [v^r]_{A_1} a^r) a^{kr},
\end{aligned}$$

en virtud de (5.22).

Así, escogemos τ tal que $C\tau(1+[v]_{A_1}^r[v^r]_{A_1}a^r)=1/2$. Observar que $\tau<1$. Usando la definición de γ y (5.33) tenemos que

$$\begin{aligned} a^{kr} &< 2C\left(\frac{1}{2C(1+[v]_{A_1}^r[v^r]_{A_1}a^r)}\right)^{1-\gamma}\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k}\left[\Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)\right]^{\gamma}v^r(x)\,dx \\ &\leq C\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k}\left[\Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)\right]^{\gamma}v^r(x)\,dx, \end{aligned}$$

para cada $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$. Luego, haciendo $\varepsilon\to 0$ y usando el teorema de la convergencia dominada obtenemos que

$$a^{kr}<(4C)^2(1+[v]_{A_1}^r[v^r]_{A_1}a^r)\frac{1}{|\tilde{Q}_i^k|}\int_{\tilde{Q}_i^k}\Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)v^r(x)\,dx,$$

lo que completa la prueba de la afirmación. $\square$

Demostración de la Afirmación 5. Supongamos primero que, si $(\ell,j)\in P_\ell$ y $k_m\leq\ell<k_{m+1}$, entonces

$$\frac{1}{|Q_j^\ell|}\int_{Q_j^\ell}u(y)\,dy>\frac{a^{(\ell-k_m)\beta}}{2[u]_{A_1}}\frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell}u(y)\,dy. \tag{5.35}$$

Con esto, si $y\in Q_j^\ell$,

$$u(y)[u]_{A_1}\geq\frac{1}{|Q_j^\ell|}\int_{Q_j^\ell}u(z)\,dz>\frac{a^{(\ell-k_m)\beta}}{2[u]_{A_1}}\frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell}u(y)\,dy$$

y en consecuencia

$$u(y)>\frac{a^{(\ell-k_m)\beta}}{2[u]_{A_1}^2}\frac{u(\tilde{Q}^\ell)}{|\tilde{Q}^\ell|}=:\lambda.$$

Esto implica que

$$\bigcup_{j:(\ell,j)\in P_\ell}Q_j^\ell\subseteq\{x\in\tilde{Q}^\ell:u(x)>\lambda\}.$$

Como $u\in A_1\subseteq A_\infty$, existen constantes positivas C y ν para las cuales vale la desigualdad $\frac{u(E)}{u(Q)}\leq C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\nu}$, para cada conjunto medible $E\subseteq Q$. Entonces, utilizando la desigualdad de Tchebychev y la definición de λ, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell}u(Q_j^\ell) &= u\left(\bigcup_{j:(\ell,j)\in P_\ell}Q_j^\ell\right) \\ &\leq u(\{x\in\tilde{Q}^\ell:u(x)>\lambda\}) \\ &\leq Cu(\tilde{Q}^\ell)\left(\frac{|\{x\in\tilde{Q}^\ell:u(x)>\lambda\}|}{|\tilde{Q}^\ell|}\right)^{\nu} \\ &\leq Cu(\tilde{Q}^\ell)\left(\frac{1}{\lambda|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell}u(y)\,dy\right)^{\nu} \end{aligned}$$

$$= Cu(\tilde{Q}^\ell)a^{(k_m-\ell)\beta\nu}.$$

Finalmente,

$$\sum_{\ell \in F_m} \sum_{j:(\ell,j)\in P_\ell} \frac{u(Q_j^\ell)}{u(\tilde{Q}^\ell)} \leq C \sum_{\ell \in F_m} a^{(k_m-\ell)\beta\nu}$$
$$\leq C \sum_{\ell \geq k_m} a^{(k_m-\ell)\beta\nu} = C,$$

dado que $a > 1$.

Para terminar la prueba de la afirmación, veamos que vale la desigualdad (5.35). Tomemos $(\ell, j) \in P_\ell$ con $k_m \leq \ell < k_{m+1}$. Como $\Omega_\ell \subseteq \Omega_{k_m}$, por maximalidad, existe un único s que satisface $Q_j^\ell \subseteq Q_s^{k_m}$. Probaremos que $(k_m, s) \in \Gamma_N$. Si $(k_m, s) \in P$ no hay nada que probar, pues $P \subseteq \Gamma_N$. Supongamos entonces que $(k_m, s) \notin P$. De la definición de G y P_{k_m}, $\tilde{Q}^{k_m}$ contiene un cubo $Q_p^{k_m}$ con $(k_m, p) \in P$. Veremos primero que $Q_s^{k_m} \subsetneq \tilde{Q}^{k_m}$. En efecto, existe un único $i(s)$ para el cual $Q_j^\ell \subseteq Q_s^{k_m} \subseteq \tilde{Q}_{i(s)}^{k_m}$. Además,

$$\left\{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^\ell\right\} \subseteq \left\{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^{k_m}\right\} = \bigcup_i \tilde{Q}_i^{k_m},$$

y esto implica que existe también un único i_0 tal que $Q_j^\ell \subseteq \tilde{Q}^\ell \subseteq \tilde{Q}_{i_0}^{k_m}$. Por otro lado, de la definición de $\tilde{Q}^k$, $x \in \tilde{Q}^{k_m}$ y $x \in \tilde{Q}_{i_0}^{k_m}$. Esto nos lleva a concluir que

$$\tilde{Q}_{i(s)}^{k_m} = \tilde{Q}_{i_0}^{k_m} = \tilde{Q}^{k_m},$$

lo que directamente implica que $Q_s^{k_m} \subseteq \tilde{Q}^{k_m}$. De hecho, la contención es estricta porque tanto $Q_s^{k_m}$ como $Q_p^{k_m}$ están contenidos en $\tilde{Q}^{k_m}$, y $s \neq p$.

Observar que $\tilde{Q}^{k_m}$ es un cubo maximal del conjunto $\{x : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^{k_m}\}$ y $Q_s^{k_m}$ es un cubo maximal de la descomposición de

$$\Omega_{k_m} = \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^{k_m}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi,\mathcal{D}}g(x) > a^{k_m}\}.$$

Como $Q_s^{k_m} \subsetneq \tilde{Q}^{k_m}$ tenemos que $Q_s^{k_m}$ es un cubo diádico maximal del conjunto $\{x : M_{\mathcal{D}}v(x) > a^{k_m}\}$. Esto significa que

$$\frac{1}{|Q_s^{k_m}|} \int_{Q_s^{k_m}} v(y)\,dy \leq 2^n a^{k_m} \leq a^{k_m+1}, \tag{5.36}$$

ya que $a > 2^n$, lo que nos conduce a que $|Q_s^{k_m} \cap \{x : v(x) \leq a^{k_m+1}\}| > 0$. En efecto, si no fuera el caso, denotando $E = Q_s^{k_m} \cap \{x : v(x) > a^{k_m+1}\}$ obtendríamos que

$$\frac{1}{|Q_s^{k_m}|} \int_{Q_s^{k_m}} v(y)\,dy = \frac{1}{|E|} \int_{Q_s^{k_m}} v(y)\,dy > \frac{1}{|E|} \int_E v(y)\,dy > a^{k_m+1},$$

lo que contradice (5.36). Por lo tanto, $(k_m, s) \in \Gamma_N$ y $Q_s^{k_m}$ está contenido en, al menos, un cubo principal. Sea Q_σ^k el cubo principal más chico que contiene a $Q_s^{k_m}$. Usando las condiciones (5.23) y (5.24) podemos escribir

$$\frac{1}{|Q_j^\ell|}\int_{Q_j^\ell} u(y)\,dy > a^{(\ell-k)\beta}\frac{1}{|Q_\sigma^k|}\int_{Q_\sigma^k} u(y)\,dy \geq a^{(\ell-k_m)\beta}\frac{1}{|Q_s^{k_m}|}\int_{Q_s^{k_m}} u(y)\,dy.$$

También, por (5.28), tenemos

$$\frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\,dy \leq \frac{2}{|\tilde{Q}^{k_m}|}\int_{\tilde{Q}^{k_m}} u(y)\,dy \leq 2[u]_{A_1}\inf_{\tilde{Q}^{k_m}} u \leq 2[u]_{A_1}\frac{1}{|Q_s^{k_m}|}\int_{Q_s^{k_m}} u(y)\,dy.$$

Combinando estas dos estimaciones tenemos que

$$\frac{1}{|Q_j^\ell|}\int_{Q_j^\ell} u(y)\,dy > a^{(\ell-k_m)\beta}\frac{1}{|Q_s^{k_m}|}\int_{Q_s^{k_m}} u(y)\,dy > \frac{1}{2[u]_{A_1}}a^{(\ell-k_m)\beta}\frac{1}{|\tilde{Q}^\ell|}\int_{\tilde{Q}^\ell} u(y)\,dy,$$

y esto completa la demostración. $\square$

Demostración del Corolario 4.6. Por la equivalencia entre Φ y Ψ, existen constantes positivas A y B de modo que

$$A\Psi(t) \leq \Phi(t) \leq B\Psi(t),$$

siempre que $t \geq t^*$. La Proposición 1.51 establece entonces que existen dos constantes positivas D y E de modo que

$$DM_\Phi(fv)(x) \leq M_\Psi(fv)(x) \leq EM_\Phi(fv)(x),$$

para casi todo punto x. Luego, utilizando el Teorema 4.5 tenemos que

$$\begin{aligned} uv^r\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\Psi(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) &\leq uv^r\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\Phi(fv)(x)}{v(x)} > \frac{t}{E}\right\}\right) \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{E|f|}{t}\right) uv^r. \end{aligned}$$

De manera similar a lo que se hizo en el Lema 4.7, podemos probar que existe una constante positiva C_0 de modo que

$$\left\|\frac{M_\Psi(fv)}{v}\right\|_{L^\infty(uv^r)} = \|S_\Psi f\|_{L^\infty(uv^r)} \leq C_0\,\|f\|_{L^\infty(uv^r)}$$

y, en consecuencia, del Lema 1.62 obtenemos que

$$\begin{aligned} uv^r\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_\Psi(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) &\leq C\int_{\{x:|f(x)|>t/(2C_0)\}} \Phi\left(\frac{2E|f(x)|}{t}\right) u(x)v^r(x)\,dx \\ &\leq C\Phi\left(\frac{E}{C_0t^*}\right)\int_{\{x:|f(x)|>t/(2C_0)\}} \Phi\left(\frac{2C_0t^*|f(x)|}{t}\right) u(x)v^r(x)\,dx \\ &\leq BC\Phi\left(\frac{E}{C_0t^*}\right)\int_{\{x:|f(x)|>t/(2C_0)\}} \Psi\left(\frac{2C_0t^*|f(x)|}{t}\right) u(x)v^r(x)\,dx \\ &\leq C_1\int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{C_2|f(x)|}{t}\right) u(x)v^r(x)\,dx. \end{aligned}$$

$\square$

Demostración del Teorema 4.9. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que f es no negativa. Consideremos

$$\sigma = \frac{nr}{n - r\gamma}, \quad \nu = \frac{n\delta}{n - r\gamma} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{q}{\sigma}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r'}\right).$$

Sea ξ la función auxiliar definida por

$$\xi(t) = \begin{cases} t^{q/\beta}, & \text{si} \quad 0 \le t \le 1, \\ t^{\sigma}(1 + \log^+ t)^{\nu}, & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

Entonces, para todo $t \ge 1$ tenemos que

$$\xi^{-1}(t)t^{\gamma/n} \approx \frac{t^{1/\sigma + \gamma/n}}{(1 + \log^+ t)^{\nu/\sigma}} = \frac{t^{1/r}}{(1 + \log^+ t)^{\delta/r}} \approx \Phi^{-1}(t).$$

Observar además que $\sigma < q$, ya que $r < p$. Esto implica que $\beta > 1$. En efecto, es claro que $q/(\sigma r') > 1/r'$. Por otro lado,

$$\frac{p}{q} = 1 - p\frac{\gamma}{n} < 1 - r\frac{\gamma}{n},$$

lo cual implica que $q/p(1 - r\gamma/n) > 1$ o, equivalentemente, $q/p(1/r - \gamma/n) > 1/r$. De esta manera,

$$\frac{q}{\sigma}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r'}\right) > \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Combinando la Proposición 1.56 con la Proposición 1.76 podemos concluir que

$$M_{\gamma,\Phi}\left(\frac{f_0}{w}\right)(x) \le C\left[M_{\xi}\left(\frac{f_0^{p\beta/q}}{w^{\beta}}\right)(x)\right]^{1/\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0^p(y)\,dy\right)^{\gamma/n}.$$

Observar que ξ es equivalente a una función de $\mathcal{F}_{\sigma}$, para $t \ge 1$. Si $f_0 = fwv$, dado que $q(1/p + 1/r') = \beta\sigma$ podemos utilizar el Corolario 4.6 para estimar

$$\begin{aligned} uv^{q(1/p+1/r')}\left(\left\{x : \frac{M_{\gamma,\Phi}(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) &= uv^{\beta\sigma}\left(\left\{x : \frac{M_{\gamma,\Phi}(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \\ &\le uv^{\beta\sigma}\left(\left\{x : \frac{M_{\xi}\left(f_0^{p\beta/q}w^{-\beta}\right)(x)}{v^{\beta}(x)} > \frac{t^{\beta}}{\left(\int |f_0|^p\right)^{\beta\gamma/n}}\right\}\right) \\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n} \xi\left(\frac{f^{p\beta/q}(wv)^{\beta(p/q-1)}}{t^{\beta}}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f^p(wv)^p\right]^{\gamma/n\beta}\right) uv^{\sigma\beta} \\ &= C\int_{\mathbb{R}^n} \xi(\lambda)uv^{\sigma\beta} \\ &= C\left(\int_A \xi(\lambda)uv^{\sigma\beta} + \int_B \xi(\lambda)uv^{\sigma\beta}\right), \end{aligned}$$

donde

$$\lambda = \frac{f^{p\beta/q}(wv)^{\beta(p/q-1)}}{t^{\beta}}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f^p(wv)^p\right]^{\gamma/n\beta},$$

$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda(x) \le 1\}$ y $B = \mathbb{R}^n \backslash A$. Por definición de ξ tenemos que

$$\int_A \xi(\lambda(x)) u(x)[v(x)]^{\sigma\beta}\, dx = \int_A [\lambda(x)]^{q/\beta} u(x)[v(x)]^{\sigma\beta}\, dx.$$

Notar que si $w = u^{1/q} v^{1/p+1/r'-1}$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda^{q/\beta} u v^{\sigma\beta} &= \frac{f^p}{t^q}(wv)^{p-q}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f^p (wv)^p\right]^{q\gamma/n} uv^{\sigma\beta} \\ &= \frac{f^p}{t^q}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f^p (wv)^p\right]^{q\gamma/n} u^{p/q} v^{\sigma\beta+(p-q)(1/p+1/r')}.\end{aligned}$$

Observar que

$$\sigma\beta + (p-q)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r'}\right) = q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r'}\right) + (p-q)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r'}\right) = 1 + \frac{p}{r'}.$$

También notar que

$$(wv)^p = u^{p/q} v^{1+p/r'-p+p} = u^{p/q} v^{1+p/r'}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_A \xi(\lambda) uv^{\sigma\beta} &= t^{-q}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f^p u^{p/q} v^{1+p/r'}\right]^{q\gamma/n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f^p u^{p/q} v^{1+p/r'}\right] \\ &\le t^{-q}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f^p u^{p/q} v^{1+p/r'}\right]^{1+q\gamma/n} \\ &= t^{-q}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f^p u^{p/q} v^{1+p/r'}\right]^{q/p}.\end{aligned}$$

Por otra parte, $\lambda(x) > 1$ sobre B, y como ξ es de tipo superior q/β podemos estimar el integrando por $\lambda^{q/\beta} uv^{\sigma\beta}$. A partir de este punto, la estimación para B es similar a la de A. Por lo tanto, hemos obtenido que

$$uv^{q(1/p+1/r')}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M_{\gamma,\Phi}(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right)^{1/q} \le C\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{f(x)}{t}\right)^p u^{p/q}(x)(v(x))^{1+p/r'}\, dx\right]^{1/p}.$$

$\square$

Demostración del Teorema 4.11. Supongamos nuevamente que f es no negativa. Por la Proposición 1.76 tenemos que

$$M_{\gamma,\Phi}\left(\frac{f_0}{w}\right)(x) \le C\left[M_\xi\left(\frac{f_0^{r/q}}{w}\right)\right](x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0^r(y)\, dy\right)^{\gamma/n},$$

donde $\xi(t) = t^q(1+\log^+ t)^\nu$, con $\nu = \delta q/r$. Entonces, llamando $f_0 = fwv$ podemos escribir

$$\begin{aligned}uv^q\left(\left\{x : \frac{M_{\gamma,\Phi}(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) &= uv^q\left(\left\{x : \frac{M_{\gamma,\Phi}(f_0/w)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \\ &\le uv^q\left(\left\{x : \frac{M_\xi(f_0^{r/q}/w)(x)}{v(x)} > \frac{t}{(\int f_0^r)^{\gamma/n}}\right\}\right).\end{aligned}$$

Como $\xi \in \mathcal{F}_q$ podemos aplicar el resultado de acotación mixta para M_ξ, con lo cual

$$uv^q\left(\left\{x : \frac{M_{\gamma,\Phi}(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^n}\xi\left(\frac{f_0^{r/q}\left(\int f_0^r\right)^{\gamma/n}}{wvt}\right)uv^q. \tag{5.37}$$

El argumento de ξ en el integrando de arriba puede escribirse como

$$\begin{aligned}\frac{f_0^{r/q}\left(\int |f_0|^r\right)^{\gamma/n}}{wvt} &= \left(\frac{f}{t}\right)^{r/q}(wv)^{r/q-1}\left(\int\left(\frac{f}{t}\right)^r(wv)^r\right)^{\gamma/n}\\ &= \left[\left(\frac{f}{t}\right)(wv)^{1-q/r}\left(\int\left(\frac{f}{t}\right)^r(wv)^r\right)^{\gamma q/(nr)}\right]^{r/q}.\end{aligned}$$

Observemos a continuación que, para $0 \leq t \leq 1$, $\xi(t^{r/q}) = t^r$, y para $t > 1$,

$$\begin{aligned}\xi(t^{r/q}) &= t^r(1+\log t^{r/q})^\nu\\ &= t^r\left(1+\frac{r}{q}\log t\right)^\nu,\end{aligned}$$

con lo cual $\xi(t^{r/q}) \leq \Phi_\gamma(t) = t^r(1+\log^+ t)^\nu$. Con esto, podemos estimar

$$\begin{aligned}\xi\left(\frac{f_0^{r/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0^r\right)^{\gamma/n}}{wvt}\right) &\leq \Phi_\gamma\left(\left(\frac{f}{t}\right)(wv)^{1-q/r}\left(\int\left(\frac{f}{t}\right)^r(wv)^r\right)^{\gamma q/(nr)}\right)\\ &\leq \Phi_\gamma\left(\left[\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_\gamma\left(\frac{f}{t}\right)(wv)^r\right]^{\gamma q/(nr)}\right)\Phi_\gamma\left(\frac{f}{t}(wv)^{1-q/r}\right)\end{aligned}$$

Volviendo a (5.37) y tomando $w = u^{1/q}$ tenemos que el lado derecho se acota por

$$\Phi_\gamma\left(\left[\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_\gamma\left(\frac{f}{t}\right)(wv)^r\right]^{\gamma q/(nr)}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_\gamma\left(\frac{f}{t}(wv)^{1-q/r}\right)(wv)^q.$$

Observar ahora que $\Phi_\gamma(t^{1-q/r})t^q \leq \Psi(t)$. Entonces, lo anterior puede acotarse por

$$\Phi_\gamma\left(\left[\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_\gamma\left(\frac{f}{t}\right)\Psi(u^{1/q}v)\right]^{\gamma q/(nr)}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_\gamma\left(\frac{f}{t}\right)\Psi(u^{1/q}v).$$

Para terminar, observemos que

$$t\Phi_\gamma(t^{\gamma q/(nr)}) \lesssim t^{1+\gamma q/n}(1+\log^+ t)^\nu = t^{q/r}(1+\log^+ t)^{\delta q/r} = \varphi(t). \qquad \square$$

Apéndice

Esta parte de la tesis puede considerarse un complemento de lo realizado en los capítulos previos, puesto que contiene demostraciones y observaciones que pueden resultar conocidas para el lector familiarizado con los temas abordados. El objetivo de incluirlas aquí es el de lograr un trabajo lo más completo y autocontenido posible.

A.1. Acerca del conjunto de funciones consideradas

Todos los resultados obtenidos en esta tesis requieren que las funciones a considerar en el dominio de los distintos operadores estudiados sean acotadas y con soporte compacto. Veremos aquí que esta hipótesis no produce pérdida de generalidad puesto que, a partir de esto, pueden deducirse las mismas estimaciones para funciones medibles.

En efecto, consideremos la siguiente desigualdad, la cual engloba de una forma general a las desigualdades mixtas estudiadas para los distintos operadores considerados en este trabajo.

$$u\xi(v)\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)}>t\right\}\right)\leq C\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{|f(x)|v^{\alpha}(x)}{t}\right)\zeta(\eta(u(x))\theta(v(x)))\,dx\right), \tag{A.38}$$

donde u y v son pesos, $\mathcal{T}$ es un operador sublineal acotado de L^p en L^q, para algunos valores $p,q>1$, $\alpha\in\{0,1\}$ y $\xi,\Psi,\varphi,\zeta,\eta$ y θ son funciones. Además, φ es una función de Young submultiplicativa.

Por ejemplo, la desigualdad del Teorema 2.15 puede obtenerse tomando $u\in A_1$, $v\in A_\infty(u)$, $\mathcal{T}=T_b^m$, $p=q=2$, $\alpha=0$, $\xi(t)=\Psi(t)=\zeta(t)=\eta(t)=\theta(t)=t$ y $\varphi=\Phi_m$. Por otro lado, una de las estimaciones dadas en el Teorema 3.7 puede conseguirse considerando $u\in A_1$, $v^{q/p}\in A_1$, $\mathcal{T}=I_\gamma$, $1<p<n/\gamma$, q que satisface $1/q=1/p-\gamma/n$, $\alpha=0$, $\xi(t)=\Psi(t)=t^{q/p}$, $\varphi(t)=t^p$, $\eta(t)=t^{p/q}$ y $\theta(t)=\zeta(t)=t$.

Supongamos entonces que (A.38) vale para toda función f acotada y con soporte compacto. Queremos ver que esto implica que la misma estimación es cierta para f medible.

Fijemos $t>0$ y f medible no negativa. Podemos suponer que el lado derecho de (A.38) es finito pues en otro caso no hay nada que probar. Definimos, para $k\in\mathbb{N}$, la sucesión de funciones

$\{f_k\}_k$, donde

$$f_k(x) = f(x)\mathcal{X}_{B(0,k)}\mathcal{X}_{A_k}(x),$$

y $A_k = \{x : |f(x)| \leq k\}$. Es claro que cada función f_k es acotada y de soporte compacto. Además, $\{f_k\}$ es creciente y f_k converge a f en todo punto x. Aplicando (A.38) a cada función f_k obtenemos que

$$u\xi(v)\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(f_k v)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq C\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f_k(x)|v^\alpha(x)}{t}\right)\zeta(\eta(u(x))\theta(v(x)))\,dx\right),$$

con C independiente de f y k. Como $|f_k| \leq |f|$ para todo k, esta desigualdad implica que

$$u\xi(v)\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(f_k v)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq C\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f(x)|v^\alpha(x)}{t}\right)\zeta(\eta(u(x))\theta(v(x)))\,dx\right),$$

para todo k.

Observemos a continuación que $f_k v$ converge a fv en L^p, en virtud del teorema de la convergencia monótona. Luego,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(f_k v)\|_{L^q} &= \|\mathcal{T}((f_k - f)v + fv)\|_{L^q} \\
&\leq \|\mathcal{T}((f_k - f)v) + \mathcal{T}(fv)\|_{L^q} \\
&\leq \|\mathcal{T}((f_k - f)v)\|_{L^q} + \|\mathcal{T}(fv)\|_{L^q} \\
&\leq C\,\|(f_k - f)v\|_{L^p} + \|\mathcal{T}(fv)\|_{L^q},
\end{aligned}$$

puesto que $\mathcal{T}$ está acotado de L^p en L^q. De esta manera,

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{T}(f_k v)\|_{L^q} \leq \|\mathcal{T}(fv)\|_{L^q}.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(fv)\|_{L^q} &= \|\mathcal{T}((f - f_k)v + f_k v)\|_{L^q} \\
&\leq \|\mathcal{T}((f_k - f)v) + \mathcal{T}(f_k v)\|_{L^q} \\
&\leq \|\mathcal{T}((f_k - f)v)\|_{L^q} + \|\mathcal{T}(f_k v)\|_{L^q} \\
&\leq C\,\|(f_k - f)v\|_{L^p} + \|\mathcal{T}(f_k v)\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

Esto nos permite concluir que

$$\|\mathcal{T}(fv)\|_{L^q} \leq \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{T}(f_k v)\|_{L^q},$$

es decir, que $\mathcal{T}(f_k v)$ converge a $\mathcal{T}(fv)$ en L^q. Entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_j$ de $\{f_k\}$ de modo que

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{T}(f_{k_j} v)(x) = \mathcal{T}(fv)(x) \qquad \text{para c.t.p. } x. \tag{A.39}$$

A continuación, observamos que para cada N que verifique $N > t^{-1}$ existe $j_0 = j_0(N)$ que satisface $|\mathcal{T}(f_{k_j}v)(x) - \mathcal{T}(fv)(x)| \leq N^{-1}$, para todo $j \geq j_0$. Entonces

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}(fv)(x)| &\leq |\mathcal{T}(fv)(x) - \mathcal{T}(f_{k_j}v)(x)| + |\mathcal{T}(f_{k_j}v)(x)|\\ &\leq \frac{1}{N} + |\mathcal{T}(f_{k_j}v)(x)|.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}&u\xi(v)\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right)\\ &\qquad\leq u\xi(v)\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(f_{k_j}v)(x)|}{v(x)} > t - \frac{1}{N}\right\}\right)\\ &\qquad\leq C\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f_{k_j}(x)|v^\alpha(x)}{t - N^{-1}}\right)\zeta(\eta(u(x))\theta(v(x)))\,dx\right)\\ &\qquad\leq C\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f(x)|v^\alpha(x)}{t - N^{-1}}\right)\zeta(\eta(u(x))\theta(v(x)))\,dx\right),\\ &\qquad\leq C\varphi\left(\frac{t}{t - N^{-1}}\right)\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f(x)|v^\alpha(x)}{t}\right)\zeta(\eta(u(x))\theta(v(x)))\,dx\right),\end{aligned}$$

para todo $N > t^{-1}$. Haciendo $N \to \infty$ obtenemos finalmente que

$$u\xi(v)\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq C\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f(x)|v^\alpha(x)}{t}\right)\zeta(\eta(u(x))\theta(v(x)))\,dx\right).$$

Si f es medible arbitraria, descomponemos $f = f^+ - f^-$, y aplicando lo anterior a cada una de estas funciones, tenemos el resultado para f.

A.2. Consideraciones sobre OCZ

En la prueba de algunos de nuestros resultados, utilizamos la siguiente igualdad:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^* : \frac{T\left(\sum_j (b - b_{Q_j})h_j v\right)(x)}{v(x)} > t\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^* : \frac{\sum_j T((b - b_{Q_j})h_j v)(x)}{v(x)} > t\right\}$$

Para verla, observemos que

$$T\left(\sum_j (b - b_{Q_j})h_j v\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_j (b(y) - b_{Q_j})h_j(y)v(y)K(x - y)\,dy,$$

mientras que

$$\sum_j T((b - b_{Q_j})h_j v)(x) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b_{Q_j})h_j(y)v(y)K(x - y)\,dy.$$

Estas representaciones son válidas ya que $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^*$ y cada función h_j está soportada en el cubo Q_j. Denotemos con

$$g_m(y) = \sum_{j=1}^{m} (b(y) - b_{Q_j}) h_j(y) v(y) K(x-y)$$

y

$$g(y) = \sum_{j=1}^{\infty} (b(y) - b_{Q_j}) h_j(y) v(y) K(x-y).$$

Notar que $g_m(x) \to g(x)$ en casi todo punto x. Supongamos que existe $\varphi \in L^1$ tal que $|g_m(x)| \leq |\varphi(x)|$ para todo m. Luego, por el teorema de convergencia dominada podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m\to\infty} g_m(y)\, dy = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_m(y)\, dy,$$

y esto nos dice que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_j (b(y) - b_{Q_j}) h_j(y) v(y) K(x-y)\, dy = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b_{Q_j}) h_j(y) v(y) K(x-y)\, dy.$$

Esto nos daría la igualdad deseada. Veamos entonces que tal función φ existe. Fijemos un término de g_m. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $b \in L^\infty$, $v \in L^\infty$ y f es acotada con soporte compacto.

Afirmamos que existen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$ fijos tales que la bola $B(x_0, R)$ contiene a Ω. Notemos que si Q es un cubo en $\mathbb{R}^n$ tal que $Q \cap \operatorname{sop}(f) = \emptyset$, entonces $f_Q^v = 0$. Dado que cada Q_j de Ω verifica que $f_{Q_j}^v > t$, entonces $Q_j \cap \operatorname{sop}(f) \neq \emptyset$. Como $\operatorname{sop}(f)$ es compacto, existe un cubo Q_0 que lo contiene. Además, cada cubo Q_j de Ω verifica que

$$t < \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(y) v(y)\, dy.$$

Como $v \in A_\infty$, existe $s > 1$ tal que $v \in \mathrm{RH}_s$. Así

$$\begin{aligned}
v(Q_j) &< \frac{1}{t} \int_{Q_j} f(y) v(y)\, dy \\
&\leq \frac{1}{t} \left(\int_{Q_j} f^{s'} \right)^{1/s'} \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} v^s \right)^{1/s} |Q_j|^{1/s} \\
&\leq \frac{1}{t} \|f\|_\infty^{1/s} \left(\int_{Q_j} f \right)^{1/s'} [v]_{\mathrm{RH}_s} \frac{v(Q_j)}{|Q_j|} |Q_j|^{1/s}.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$|Q_j|^{1/s'} \leq \frac{1}{t} \|f\|_\infty^{1/s} \|f\|_{L^1}^{1/s'} [v]_{\mathrm{RH}_s},$$

o bien

$$|Q_j| < t^{-s'} \|f\|_\infty^{1/(s-1)} \|f\|_{L^1} [v]_{\mathrm{RH}_s}^{s'}.$$

Es decir, existe una cota superior $M > 0$ para la medida de todos los cubos Q_j.

Con esto, podemos afirmar que $\Omega \subseteq B$, si elegimos x_0 como el centro del cubo Q_0 y $R = 2^{-1}\text{diam}(Q_0) + \sqrt{n}M^{1/n}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|b(y) - b_{Q_j}||h_j(y)|v(y)|K(x-y)| &\leq 2\|b\|_{L^\infty} |f(y)K(x-y)|v(y)\mathcal{X}_{Q_j}(y) \\
&\quad + 2\|b\|_{L^\infty} |f^v_{Q_j} K(x-y)|v(y)\mathcal{X}_{Q_j}(y) \\
&\leq 2\|b\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty} |K(x-y)|\mathcal{X}_{Q_j \cap \text{sop}(f)}(y) + \\
&\quad + 2\|b\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty} |K(x-y)|\mathcal{X}_{Q_j \cap B}(y) \\
&\leq 4\|b\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty} |K(x-y)|\mathcal{X}_{Q_j \cap B}(y)
\end{aligned}$$

Con esto, llamando $C_0 = 4\|b\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty}$ podemos estimar g_m como sigue

$$\begin{aligned}
|g_m(y)| &\leq \sum_{j=1}^{m} |(b(y) - b_{Q_j})h_j(y)K(x-y)|v(y) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} C_0|K(x-y)|\mathcal{X}_{Q_j \cap B} \\
&= C_0|K(x-y)| \sum_{j=1}^{m} \mathcal{X}_{Q_j \cap B} \\
&\leq C_0|K(x-y)|\mathcal{X}_{\Omega \cap B} \\
&\leq C_0|K(x-y)|\mathcal{X}_B
\end{aligned}$$

Dado que $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega^*$ e $y \in \Omega$, $|x-y| \geq \delta > 0$. Luego, utilizando la condición de tamaño para K

$$\int_B |K(x-y)|\, dy \leq \int_B \frac{C}{|x-y|^n}\, dy \leq C\delta^{-n}|B| < \infty.$$

Entonces $|g_m(y)| \leq \varphi(y)$ para todo m, donde $\varphi(y) = C_0|K(x-y)|\mathcal{X}_B(y) \in L^1$.

A.3. Sobre símbolos BMO y Lipschitz-δ

En algunas demostraciones de resultados relacionados a símbolos en las clases BMO y Lipschitz-δ hemos definido, para $N \in \mathbb{N}$, la sucesión de funciones

$$b_N(x) = \begin{cases} -N, & \text{si} \quad b(x) \leq -N; \\ b(x), & \text{si} \quad -N < b(x) < N; \\ N, & \text{si} \quad b(x) \geq N. \end{cases}$$

Afirmamos que $|b_N(x) - b_N(y)| \leq |b(x) - b(y)|$ para todo x, y. En efecto, dados x e y arbitrarios notemos que, si $b(x)$ y $b(y)$ son ambos menores que $-N$ o mayores que N, entonces se tiene que $b_N(x) - b_N(y) = 0$. Consideremos, luego, los siguientes casos:

(*i*) $b(x) \le -N$, $b(y) \in (-N, N)$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} |b_N(x) - b_N(y)| &= b_N(y) - b_N(x) \\ &= b(y) + N \\ &\le b(y) - b(x) \\ &= |b(y) - b(x)|. \end{aligned}$$

(*ii*) $b(x) \le -N$, $b(y) \ge N$. Escribimos

$$\begin{aligned} |b_N(x) - b_N(y)| &= 2N \\ &\le b(y) - b(x) \\ &= |b(y) - b(x)|. \end{aligned}$$

(*iii*) $b(x) \in (-N, N)$, $b(y) \ge N$. Bajo estas condiciones

$$\begin{aligned} |b_N(x) - b_N(y)| &= b_N(y) - b_N(x) \\ &= N - b(x) \\ &\le b(y) - b(x) \\ &= |b(y) - b(x)|. \end{aligned}$$

De esta forma queda probada la desigualdad deseada. En el caso en que b sea un símbolo en la clase Lipschitz-δ, tenemos que

$$|b_N(x) - b_N(y)| \le |b(x) - b(y)| \le \|b\|_{\Lambda(\delta)} |x - y|^{\delta},$$

lo que nos dice que $\|b_N\|_{\Lambda(\delta)} \le \|b\|_{\Lambda(\delta)}$, para todo N.

Si $b \in \mathrm{BMO}$, para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q |b_N(x) - (b_N)_Q|\, dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q \left| b_N(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q b_N(y)\, dy \right| dx \\ &\le \frac{1}{|Q|^2}\int_Q\int_Q |b_N(x) - b_N(y)|\, dx\, dy \\ &\le \frac{1}{|Q|^2}\int_Q\int_Q |b(x) - b(y)|\, dx\, dy \\ &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(x) - b_Q|\, dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y) - b_Q|\, dx \right) dy \\ &\le \|b\|_{\mathrm{BMO}} + \frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y) - b_Q|\, dy \\ &\le 2\|b\|_{\mathrm{BMO}}, \end{aligned}$$

con lo cual $\|b_N\|_{\mathrm{BMO}} \le 2\|b\|_{\mathrm{BMO}}$.

Si $b \in \Lambda(\delta)$ existe una caracterización útil de estas funciones en término de oscilaciones medias. La misma se establece en el siguiente lema. Una prueba para el caso con peso puede encontrarse en [19].

Lema A.8. *Sea* $0 < \delta < 1$. *Entonces* $f \in \Lambda(\delta)$ *si y solo si*

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\delta/n}} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx < \infty. \tag{A.40}$$

Demostración. Supongamos primero que $f \in \Lambda(\delta)$. Fijemos un cubo Q. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|^{1+\delta/n}} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx &= \frac{1}{|Q|^{1+\delta/n}} \int_Q \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q (f(x) - f(x))\, dy \right| dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|^{2+\delta/n}} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)|\, dy\, dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|^{2+\delta/n}} \int_Q \int_Q \|f\|_{\Lambda(\delta)} |x-y|^{\delta}\, dy\, dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|^{2+\delta/n}} \int_Q \int_Q \|f\|_{\Lambda(\delta)}\, n^{\delta/2} |Q|^{\delta/n}\, dy\, dx \\
&\leq n^{\delta/2} \|f\|_{\Lambda(\delta)} .
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que vale (A.40). Fijados x e y en L_f, consideramos el cubo Q_1 centrado en x y con lado $\ell(Q_1) = |x-y|/2$. También consideramos el cubo Q_2 centrado en y con lado de igual longitud. Entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{Q_1}| + |f(y) - f_{Q_2}| + |f_{Q_2} - f_{Q_1}|.$$

Bastará con encontrar la cota deseada para el primer término, ya que los dos restantes son análogos. En efecto, si denotamos con Q_1^k, para $k \geq 1$, al cubo centrado en x y con lado $\ell(Q_1^k) = 2^{-(k+1)}|x-y|$ entonces

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_{Q_1}| &\leq \lim_{m\to\infty} \left(|f(x) - f_{Q_1^m}| + \sum_{k=0}^{m-1} |f_{Q_1^{k+1}} - f_{Q_1^k}| \right) \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|Q_1^k|} \int_{Q_1^k} |f(z) - f_{Q_1^k}|\, dz \\
&= C \sum_{k=0}^{\infty} |Q_1^k|^{\delta/n} \\
&= C|x-y|^{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)\delta} \\
&\leq C|x-y|^{\delta}.
\end{aligned}$$

□

A.4. Demostraciones de resultados del Capítulo 1

En esta sección recopilamos las demostraciones de algunos de los resultados técnicos que se utilizaron a lo largo del Capítulo 1, los cuales son conocidos en la literatura que aborda contenidos relacionados a esta tesis.

Demostración del Lema 1.1. Sea k el menor entero positivo que verifica $L < 2^k$. Por hipótesis, observemos que

$$\Psi(Lt) \leq \Psi(2^k t) \leq C^k \Psi(t).$$

Por otra parte,

$$\Psi(t/L) \geq \Psi(2^{-k} t) \geq C^{-k} \Psi(t).$$

Entonces podemos concluir que

$$C^{-k}\Psi(t) \leq \Phi(t) \leq C^k \Psi(t). \qquad \square$$

Demostración del Lema 1.2. Para probar el ítem (a) usamos la convexidad para escribir

$$\Phi(at) = \Phi(at + (1-a)0) \leq a\Phi(t) + (1-a)\Phi(0) = a\Phi(t),$$

ya que $\Phi(0) = 0$. Para el inciso (b), simplemente observamos que

$$\Phi(t) = \Phi(A^{-1}(At)) \leq A^{-1}\Phi(At),$$

en virtud de (a). Reordenando esta expresión obtenemos la estimación deseada. $\square$

Demostración del Lema 1.6. Para probar la parte (a), fijemos $0 \leq a \leq 1$. En virtud del Lema 1.2 tenemos que

$$\{s \geq 0 : \Phi(s) \geq at\} \subseteq \left\{s \geq 0 : \Phi\left(\frac{s}{a}\right) \geq t\right\},$$

con lo cual

$$\Phi^{-1}(at) = \inf\{s \geq 0 : \Phi(s) \geq at\} \geq \inf\left\{s \geq 0 : \Phi\left(\frac{s}{a}\right) \geq t\right\} = a\Phi^{-1}(t).$$

Para probar (b), consideramos $A \geq 1$ y aplicamos la parte (a) a A^{-1}, obteniendo así

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(A^{-1}At) \geq A^{-1}\Phi^{-1}(At),$$

lo cual implica la tesis. $\square$

Demostración de la Proposición 1.17. Será suficiente probar que si

$$\Phi(z) \geq \Psi(s) + \eta(t), \tag{A.41}$$

entonces $z \geq st$. De aquí, por la definición de inversa generalizada, podemos concluir directamente que

$$st \leq \Phi^{-1}(\Psi(s) + \eta(t)),$$

y aplicando Φ en ambos miembros implica la tesis, en virtud de la parte (a) del Lema 1.4. Veamos entonces que (A.41) implica que $z \geq st$. Por un lado, de (A.41) podemos deducir que $\Psi(s) \leq \Phi(z)$ y $\eta(t) \leq \Phi(z)$. Por ser Ψ y η funciones de Young podemos estimar

$$s = \Psi^{-1}(\Psi(s)) \leq \Psi^{-1}(\Phi(z)), \quad \text{y} \quad t = \eta^{-1}(\eta(t)) \leq \eta^{-1}(\Phi(z)).$$

Entonces, por hipótesis,

$$st \leq \Psi^{-1}(\Phi(z))\eta^{-1}(\Phi(z)) \leq \Phi^{-1}(\Phi(z)) = z,$$

ya que Φ es de Young. □

Demostración de la Proposición 1.18. Comencemos con el inciso (a). Supongamos primero que $st > 1$. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
\Phi(st) &= (st)^r(1 + \log(st))^\delta \\
&= (st)^r(1 + \log s + \log t)^\delta \\
&\leq (st)^r(1 + \log^+ s + \log^+ t)^\delta \\
&\leq s^r(1 + \log^+ s)^\delta t^r(1 + \log^+ t)^\delta \\
&= \Phi(s)\Phi(t).
\end{aligned}$$

Si $st \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(st) &= s^r t^r \\
&\leq s^r(1 + \log^+ s)^\delta t^r(1 + \log^+ t)^\delta \\
&= \Phi(s)\Phi(t).
\end{aligned}$$

Para probar el inciso (b) mostraremos que

$$\frac{1}{2^\delta}\Phi(t) \leq \Psi(t) \leq 2^\delta\Phi(t).$$

En efecto, notemos primero que si $0 \leq t < 1$, entonces $\Phi(t) = t^r \leq t^r \log(e + t)^\delta = \Psi(t)$. Si $t \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= t^r(1 + \log t)^\delta \\
&\leq t^r(\log(e + t) + \log(e + t))^\delta \\
&= 2^\delta t^r \left(\log(e + t)\right)^\delta \\
&= 2^\delta\Psi(t).
\end{aligned}$$

Luego, para todo t vale que $\Phi(t) \leq 2^\delta \Psi(t)$. Para la otra desigualdad, si $t \leq e$, entonces

$$\Psi(t) \leq t^r (\log(2e))^\delta \leq \log(2e)^\delta \Phi(t).$$

Además, si $t > e$, $e + t < t^2$ y entonces $\log(e+t) \leq 2\log t$. Con esto,

$$\begin{aligned}\Psi(t) &\leq 2^\delta t^r (\log t)^\delta \\ &\leq 2^\delta t^r (1 + \log^+ t)^\delta \\ &= 2^\delta \Phi(t).\end{aligned}$$

Entonces podemos concluir que $\Psi(t) \leq 2^\delta \Phi(t)$, para todo t. Combinando las dos estimaciones se tiene el resultado.

Veamos (c). Sea $\varphi(t) = t^{1/r}(1 + \log^+ t)^{-\delta/r}$. Supongamos primero que $r \geq 1$. Queremos encontrar dos constantes positivas C_1 y C_2 de modo que se verifique

$$C_1 \varphi(t) \leq \Phi^{-1}(t) \leq C_2 \varphi(t).$$

Como Φ es de Young, en virtud de la Observación 1.8, la desigualdad anterior equivale a mostrar que

$$\Phi(C_1 \varphi(t)) \leq t \leq \Phi(C_2 \varphi(t)).$$

Veamos la primera desigualdad. Observemos que

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi(t)) &= \frac{t}{(1 + \log^+ t)^\delta} \left(1 + \log^+ \left(\frac{t^{1/r}}{(1 + \log^+ t)^{\delta/r}}\right)\right)^\delta \\ &\leq \frac{t}{(1 + \log t)^\delta} \left(1 + \frac{1}{r} \log t\right)^\delta \leq \frac{t}{(1 + \log t)^\delta} (1 + \log t)^\delta.\end{aligned}$$

Luego, si $t \geq 1$

$$\Phi(\varphi(t)) \leq \frac{t}{(1 + \log t)^\delta} \left(1 + \frac{1}{r} \log t\right)^\delta \leq t,$$

y si $0 \leq t \leq 1$

$$\Phi(\varphi(t)) = t,$$

lo que nos da la primera desigualdad con $C_1 = 1$. Para ver la segunda, notemos primero que, para $0 < \varepsilon < 1$ a elegir y $t > 0$ cualesquiera, se tiene que

$$1 + \log t \leq \frac{1}{\varepsilon} t^\varepsilon. \tag{A.42}$$

En efecto, si $f(t) = \varepsilon^{-1} t^\varepsilon - \log t - 1$, entonces es fácil comprobar que

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to \infty} f(t) = +\infty.$$

Por otro lado, $f'(t) = t^{\varepsilon - 1} - t^{-1}$, para todo $t > 0$. Observando que $f'(t)$ es negativa para $0 < t < 1$ y positiva para $t > 1$, podemos ver que f tiene un mínimo absoluto en $t = 1$ cuyo valor es $f(1) = 1/\varepsilon - 1 > 0$, de donde se deduce (A.42).

Elegimos $C_2 > (\delta + r)^{\delta/r}$. Esta elección permite tomar ε tal que $C_2^{-r/\delta} < \varepsilon < 1/(\delta + r)$. También, esta restricción sobre ε equivale a

$$C_2^r \left(\frac{1 - \varepsilon\delta}{r}\right)^\delta > 1, \tag{A.43}$$

e implica que $\varepsilon < \delta^{-1}$. Entonces, si $t > 1$, utilizando (A.42) y estas condiciones sobre ε podemos estimar

$$\begin{aligned}
\Phi(C_2\varphi(t)) &= C_2^r \frac{t}{(1 + \log t)^\delta} \left(1 + \log^+ \left(C_2 \frac{t^{1/r}}{(1 + \log t)^{\delta/r}}\right)\right)^\delta \\
&\geq C_2^r \frac{t}{(1 + \log t)^\delta} \left(1 + \log \left(C_2 t^{1/r - \varepsilon\delta/r} \varepsilon^{\delta/r}\right)\right)^\delta \\
&= C_2^r \frac{t}{(1 + \log t)^\delta} \left(1 + \log \left(C_2 \varepsilon^{\delta/r}\right) + \log t^{1/r - \varepsilon\delta/r}\right)^\delta \\
&= C_2^r \frac{t}{(1 + \log t)^\delta} \left(1 + \log \left(C_2 \varepsilon^{\delta/r}\right) + \left(\frac{1 - \varepsilon\delta}{r}\right) \log t\right)^\delta
\end{aligned}$$

Por (A.43),

$$1 + \log \left(C_2 \varepsilon^{\delta/r}\right) + \left(\frac{1 - \varepsilon\delta}{r}\right) \log t \geq C_2^{-r/\delta} + C_2^{-r/\delta} \log t,$$

por lo que

$$\Phi(C_2\varphi(t)) \geq C_2^r \frac{t}{(1 + \log t)^\delta} C_2^{-r} (1 + \log t)^\delta = t.$$

Si $0 \leq t \leq 1$, dado que Φ es creciente y $C_2 > 1$, entonces

$$\Phi(C_2\varphi(t)) = \Phi(C_2 t^{1/r}) \geq \Phi(t^{1/r}) = t.$$

De esta manera, probamos la equivalencia cuando $r \geq 1$.

Si $0 < r < 1$, definimos $\eta(t) = (\Phi(t))^{1/r} = t(1 + \log^+ t)^{\delta/r}$ y por lo probado anteriormente tenemos que $\eta^{-1}(t) \approx t(1 + \log^+ t)^{-\delta/r}$. Observar además que $\eta^{-1}(t) \approx \Phi^{-1}(t^r)$. Así,

$$\Phi^{-1}(t) \approx \eta^{-1}\left(t^{1/r}\right) \approx t^{1/r}(1 + \log^+ t)^{-\delta/r}.$$

Pasemos a la prueba del ítem (d). Si $r > 1$, el Lema 1.14 nos asegura que $\tilde{\Phi}^{-1}(t) \approx g(t)$, donde $g(t) = t/\Phi^{-1}(t)$, para todo $0 < t < \infty$. Entonces, utilizando el inciso anterior, tenemos que

$$g(t) \approx t^{1-1/r}(1 + \log^+ t)^{\delta/r} = t^{1/r'}(1 + \log^+ t)^{\delta/r} = \beta(t).$$

Dado que $\beta^{-1} \in \triangle_2$ el Corolario 1.10 conduce a

$$g^{-1}(t) \approx \beta^{-1}(t) \approx t^{r'}(1 + \log^+ t)^{-\delta/(r-1)}$$

y, en consecuencia, g^{-1} es duplicante. Aplicando nuevamente el Corolario 1.10 podemos concluir que $(\tilde{\Phi}^{-1})^{-1} \approx g^{-1}$, y esto implica que $\tilde{\Phi} \approx g^{-1}$, en virtud del Lema 1.4, parte (d).

Consideremos, por último, el caso $r = 1$ y $\delta > 0$. Si $0 \leq t \leq 1$, entonces $ts - \Phi(s) < 0$ para todo $s > 1$. En consecuencia,

$$\tilde{\Phi}(t) = \sup_{s\geq 0}\{ts - \Phi(s)\} = \sup_{s\in[0,1]}\{s(t-1)\} = 0.$$

Así, $\tilde{\Phi}(t) = 0$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Si ahora $t > 1$, por el inciso (c) tenemos que $\Phi^{-1}(t) \approx t(1+\log^+ t)^{-\delta}$. Si $h(t) = e^{t^{1/\delta}} - e$ entonces $h^{-1}(t) = \log(e+t)^{\delta} \approx (1+\log t)^{\delta}$ en virtud de la parte (b). Utilizando el Lema 1.14 obtenemos

$$\Phi^{-1}(t)h^{-1}(t) \approx t \approx \Phi^{-1}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t),$$

de donde se sigue la estimación deseada combinando el Corolario 1.10 con el Lema 1.4, parte (d).

Para finalizar, probemos (e). Consideremos $C = \max\{(\delta/\varepsilon)^{\delta}, 1\}$. La desigualdad puede obtenerse mostrando que

$$1 \leq C^{1/\delta}t^{\varepsilon/\delta} - \log t, \tag{A.44}$$

para todo $t \geq 1$. Para ello, definamos $f(t) = C^{1/\delta}t^{\varepsilon/\delta} - \log t$. Entonces, para $t > 1$, tenemos que

$$f'(t) = \frac{\varepsilon}{\delta}C^{1/\delta}\frac{t^{\varepsilon/\delta}}{t} - \frac{1}{t}.$$

Luego, $f'(t) > 0$ si y solo si $t > (\delta/\varepsilon)^{\delta/\varepsilon}C^{-1/\varepsilon}$. Por la elección de la constante C, esta última desigualdad vale siempre. Además, notar que $f(1) = C^{1/\delta} \geq 1$. Como f es una función creciente, esto implica directamente (A.44). □

Demostración de la Proposición 1.40. Para el punto (a), notemos que si elevamos a la p los factores de la condición (1.18) obtenemos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^q\right)^{p/q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'}\right)^{p/p'} \leq C^p,$$

y llamando $r = 1 + q/p'$ tenemos que

$$p' = q/(r-1) = q(r'-1) \quad \text{y} \quad p/p' = (p/q)(r-1).$$

Así, obtenemos que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^q\right)^{p/q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'}\right)^{p/p'} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^q\right)^{p/q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{q(1-r')}\right)^{(p/q)(r-1)},$$

lo que prueba el inciso (a).

Para probar (b), notemos que si $s = 1 + p'/q$, entonces $q = p'/(s-1) = p'(s'-1)$. Elevando los factores de (1.18) a la p' resulta

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^q\right)^{p'/q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'}\right) = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'(1-s')}\right)^{s-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'}\right).$$

Para (c), notemos que $\sup_Q w = (\text{ínf}_Q 1/w)^{-1}$, con lo cual

$$\left(\sup_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'}\right)^{1/p'} \leq C$$

equivale a

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'}\right)^{1/p'} \leq C \operatorname*{ínf}_Q \frac{1}{w},$$

y elevando a la p' tenemos la equivalencia deseada.

Finalmente, para ver que vale (d), notemos que $w \in A_{1,q}$ nos indica que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{q}\right)^{1/q} \sup_Q \frac{1}{w} \leq C,$$

y esto puede reescribirse como

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{q} \leq C \operatorname*{ínf}_Q w^q,$$

que es precisamente la condición $w^q \in A_1$. $\square$

Conclusiones

En esta tesis se obtuvieron resultados de acotación mixta para diferentes operadores del Análisis Armónico. Como ya se expresó anteriormente, estos resultados extienden algunas estimaciones de tipo débil conocidas en la literatura cuando tomamos $v = 1$.

En el Capítulo 2 se obtuvieron resultados de acotación mixta para conmutadores de orden $m \in \mathbb{N}$ de OCZ. Estas desigualdades son de tipo modular y guardan relación con las funciones de Young $\Phi_m(t) = t(1 + \log^+ t)^m$. También se consiguieron estimaciones mixtas para operadores de convolución con núcleos que satisfacen una regularidad asociada a ciertas funciones de Young. Estos operadores son más singulares que los OCZ tradicionales y las estimaciones mixtas son válidas bajo hipótesis ligeramente más restrictivas en los pesos involucrados. Todas las estimaciones conseguidas refieren al caso en que los pesos están relacionados entre sí, lo que significa que el producto es un peso de la clase A_∞ y, por lo tanto, las pruebas permitieron la aplicación de técnicas clásicas del Análisis Armónico. Un problema abierto en esta dirección es determinar si las desigualdades antes mencionadas son ciertas para el caso más delicado en que los pesos son independientes entre sí.

En el Capítulo 3 se estudiaron desigualdades mixtas para el operador maximal fraccionario M_γ, con $0 < \gamma < n$. Estas desigualdades extienden las propiedades conocidas de continuidad de M_γ con pesos de $A_{p,q}$ cuando $1 \leq p < n/\gamma$, $1/q = 1/p - \gamma/n$ y $v = 1$. Es importante destacar que no solo se consideró el caso extremo correspondiente a $p = 1$, sino también todas las acotaciones intermedias para $1 < p < n/\gamma$. Estas estimaciones permitieron dar una prueba alternativa de la acotación fuerte con pesos en espacios de Lebesgue de M_γ via un argumento de interpolación, para un caso concreto de pesos u y v. La estimación mixta de M_γ permitió, a su vez, obtener la correspondiente desigualdad mixta para el operador integral fraccionaria I_γ mediante una adaptación de un resultado de extrapolación. Las estimaciones para I_γ permitieron concluir además desigualdades mixtas para otro tipo de operadores, como los conmutadores de integrales singulares de Calderón-Zygmund y del mismo operador I_γ, ambos con símbolo en la clase Lipschitz-δ. El correspondiente problema para los conmutadores de orden superior de I_γ con símbolo en la clase BMO permanece abierto.

En el Capítulo 4 se exhibieron resultados de acotación mixta para operadores maximales generalizados M_Φ, donde Φ es una función de Young. La clase de funciones consideradas es una familia que abarca a la función Φ_m mencionada anteriormente, la cual está íntimamente relacionada con las estimaciones de conmutadores de orden m de un OCZ. Uno de los resultados para estos operadores es un caso especial en el que u es una función no negativa y v una potencia que no es si quiera localmente integrable. Por otro lado, se consideró también el caso en que los pesos son independientes, y ambos en la clase A_1 de Muckenhoupt. La conjetura que establecemos en este contexto es que el mismo tipo de desigualdades probadas para este último caso debería ser cierto bajo una hipótesis menos restrictiva: $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Los fundamentos para justificar esta conjetura se basan en la estimación mejorada para el operador maximal de Hardy-Littlewood y para OCZ establecida en [25]. Por último, cabe aclarar que las estimaciones obtenidas en este capítulo sirvieron de herramienta para demostrar desigualdades mixtas para el operador maximal fraccionario $M_{\gamma,\Phi}$, para cierta clase de funciones Φ. Estos resultados extienden tanto las estimaciones conocidas en espacios de Lebesgue con pesos para este operador como las mixtas obtenidas para M_γ, cuando se considera $\Phi(t) = t$.

Bibliografía

[1] S. Acinas and S. Favier. Maximal inequalities in Orlicz spaces. *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, 6(41-44):2179–2198, 2012.

[2] D. R. Adams. A note on Riesz potentials. *Duke Math. J.*, 42(4):765–778, 1975.

[3] H. Aimar and R. A. Macías. Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator on spaces of homogeneous type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 91(2):213–216, 1984.

[4] K. F. Andersen and B. Muckenhoupt. Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions. *Studia Math.*, 72(1):9–26, 1982.

[5] A. Bernardis, E. Dalmasso, and G. Pradolini. Generalized maximal functions and related operators on weighted Musielak-Orlicz spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 39(1):23–50, 2014.

[6] A. Bernardis, S. Hartzstein, and G. Pradolini. Weighted inequalities for commutators of fractional integrals on spaces of homogeneous type. *J. Math. Anal. Appl.*, 322(2):825–846, 2006.

[7] A. Bernardis, G. Pradolini, M. Lorente, and M. S. Riveros. Composition of fractional Orlicz maximal operators and A_1-weights on spaces of homogeneous type. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 26(8):1509–1518, 2010.

[8] M. Christ and R. Fefferman. A note on weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87(3):447–448, 1983.

[9] R. R. Coifman. Distribution function inequalities for singular integrals. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 69:2838–2839, 1972.

[10] R. R. Coifman and C. Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Math.*, 51:241–250, 1974.

[11] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez. Weighted weak-type inequalities and a conjecture of Sawyer. *Int. Math. Res. Not.*, (30):1849–1871, 2005.

[12] D. Cruz-Uribe and C. J. Neugebauer. The structure of the reverse Hölder classes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(8):2941–2960, 1995.

[13] J. Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[14] G. B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[15] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104.

[16] O. Gorosito, G. Pradolini, and O. Salinas. Weighted weak-type estimates for multilinear commutators of fractional integrals on spaces of homogeneous type. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 23(10):1813–1826, 2007.

[17] O. Gorosito, G. Pradolini, and O. Salinas. Boundedness of the fractional maximal operator on variable exponent Lebesgue spaces: a short proof. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 53(1):25–27, 2012.

[18] L. Grafakos. *Classical and modern Fourier analysis*. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[19] E. Harboure, O. Salinas, and B. Viviani. Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and Lipschitz spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(1):235–255, 1997.

[20] P. Harjulehto and P. Hästö. *Orlicz spaces and generalized Orlicz spaces*, volume 2236 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2019.

[21] L. I. Hedberg. On certain convolution inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 36:505–510, 1972.

[22] P. W. Jones. Factorization of A_p weights. *Ann. of Math. (2)*, 111(3):511–530, 1980.

[23] A. M. Kanashiro, G. Pradolini, and O. Salinas. Weighted modular estimates for a generalized maximal operator on spaces of homogeneous type. *Collect. Math.*, 63(2):147–164, 2012.

[24] M. A. Krasnoselskiĭ and J. B. Rutickiĭ. *Convex functions and Orlicz spaces*. Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[25] K. Li, S. Ombrosi, and C. Pérez. Proof of an extension of E. Sawyer's conjecture about weighted mixed weak-type estimates. *Math. Ann.*, 374(1-2):907–929, 2019.

[26] M. Lorente, J. M. Martell, C. Pérez, and M. S. Riveros. Generalized Hörmander conditions and weighted endpoint estimates. *Studia Math.*, 195(2):157–192, 2009.

[27] M. Lorente, J. M. Martell, M. S. Riveros, and A. de la Torre. Generalized Hörmander's conditions, commutators and weights. *J. Math. Anal. Appl.*, 342(2):1399–1425, 2008.

[28] M. Lorente, M. S. Riveros, and A. de la Torre. Weighted estimates for singular integral operators satisfying Hörmander's conditions of Young type. *J. Fourier Anal. Appl.*, 11(5):497–509, 2005.

[29] J. M. Martell, C. Pérez, and R. Trujillo-González. Lack of natural weighted estimates for some singular integral operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(1):385–396, 2005.

[30] F. J. Martín-Reyes, P. Ortega Salvador, and M. D. Sarrión Gavilán. Boundedness of operators of Hardy type in $\Lambda^{p,q}$ spaces and weighted mixed inequalities for singular integral operators. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 127(1):157–170, 1997.

[31] Y. Meng and D. Yang. Boundedness of commutators with Lipschitz functions in non-homogeneous spaces. *Taiwanese J. Math.*, 10(6):1443–1464, 2006.

[32] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:207–226, 1972.

[33] B. Muckenhoupt and R. Wheeden. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192:261–274, 1974.

[34] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden. Two weight function norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform. *Studia Math.*, 55(3):279–294, 1976.

[35] K. Okikiolu. Characterization of subsets of rectifiable curves in $\mathbf{R}^n$. *J. London Math. Soc. (2)*, 46(2):336–348, 1992.

[36] S. Ombrosi and C. Pérez. Mixed weak type estimates: examples and counterexamples related to a problem of E. Sawyer. *Colloq. Math.*, 145(2):259–272, 2016.

[37] C. Pérez. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. *J. Funct. Anal.*, 128(1):163–185, 1995.

[38] C. Pérez. On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 71(1):135–157, 1995.

[39] C. Pérez. Sharp estimates for commutators of singular integrals via iterations of the Hardy-Littlewood maximal function. *J. Fourier Anal. Appl.*, 3(6):743–756, 1997.

[40] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[41] E. Sawyer. A weighted weak type inequality for the maximal function. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 93(4):610–614, 1985.

[42] E. Sawyer and R. L. Wheeden. Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 114(4):813–874, 1992.

Índice alfabético