UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral, para la obtención del Grado Académico de **Doctora en Matemática**.
En el campo de: **Análisis Armónico**

Título de la Tesis:

Continuidad de operadores del Análisis Armónico en espacios de Zygmund generalizados

Unidad de Investigación donde se realizó:
Departamento de Matemática – FIQ – UNL

Autora:
Luciana Melchiori

Directora de Tesis:
Dra. Gladis Guadalupe Pradolini

Codirector de Tesis:
Dr. Wilfredo Ariel Ramos

Defendida ante el jurado compuesto por:
Dr. Enrique Adrián Cabral
Dr. Julián Fernández Bonder
Dra. Marisa Toschi

Santa Fe, Argentina - 2019

Índice general

Resumen

Este trabajo está centrado en estudiar propiedades de continuidad de distintos operadores del Análisis Armónico en el contexto de los espacios de Zygmund de tipo $L\log L$ generalizados cuando interviene un par de pesos. Abordaremos este objetivo de dos maneras distintas. Por un lado, asumiendo *condiciones de tipo bump* en el par de pesos y, por otro, considerando *estimaciones de tipo Bloom*.

Las condiciones de tipo bump en el par de pesos aparecen como las análogas adecuadas a las condiciones de Muckenhoupt que intervienen en estimaciones con un peso. De hecho, las primeras resultan ser un "fortalecimiento" de las segundas. En esta tesis obtenemos condiciones de tipo bump, asociadas a promedios en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable, que implican la continuidad de operadores potenciales y de Calderón-Zygmund, y sus respectivos conmutadores, en espacios de Zygmund de tipo $L\log L$ generalizados. Los símbolos involucrados pertenecen a una amplia gama de clases de funciones, incluyendo las Lipschitz y las funciones de variación media acotada, BMO, entre otras. Para una clase particular de símbolos pertenecientes a una versión variable de espacios Lipschitz, se obtuvieron condiciones bump más débiles que involucran promedios en espacios de Musielak-Orlicz.

Por otro lado hemos obtenido estimaciones de tipo Bloom en el contexto de los espacios con exponente variable. Estas proveen las clases de pesos y el conjunto de los símbolos correspondientes para que el conmutador de distintos operadores resulte acotado. En tal sentido, definimos la clase de pesos $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$, que extiende al contexto variable la clase de Muckenhoupt y Wheeden $A_{p,q}$, e introducimos los espacios con pesos $BMO_{\eta}^{\delta(\cdot)}$, que generalizan al espacio BMO y al conjunto de las funciones Lipschitz.

Para concluir estos resultados hemos definido el operador maximal, $M_{s(\cdot)}$, y su versión fraccionaria, $M_{\beta(\cdot),s(\cdot)}$, donde $s(\cdot)$ y $\beta(\cdot)$ son exponentes que pertenecen a ciertas clases. Estos extienden, por ejemplo, al operador maximal de Hardy-Littlewood al contexto variable. Hemos estudiado las propiedades de acotación de estos operadores maximales en los espacios de Zygmund de tipo $L\log L$ generalizados ya que, como estas maximales controlan, en cierto sentido, a los operadores potenciales y a los de Calderón-Zygmund, las propiedades de continuidad de las primeras permiten derivar propiedades de continuidad de los segundos.

Una de las principales herramientas que utilizamos en este trabajo se encuadra en la teoría

de dominación sparse, que consiste en controlar operadores clásicos del Análisis Armónico por operadores diádicos más sencillos de manejar a la hora de obtener desigualdades con pesos. En este marco, estudiamos las propiedades de continuidad de ciertos operadores sparse en el contexto variable y probamos una versión de la descomposición de Calderón-Zygmund del espacio asociada a promedios definidos en el contexto variable.

Introducción

Los temas abordados en esta tesis contribuyen al avance del conocimiento sobre el comportamiento de distintos operadores del Análisis Armónico en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable y, más aún, en espacios de Zygmund generalizados. Expondremos dos maneras de estudiar propiedades de continuidad de operadores en estos espacios: por un lado, asumiendo *condiciones de tipo bump* en el par de pesos y, por otro, considerando *estimaciones de tipo Bloom*. A continuación daremos una breve descripción del estado del arte respecto de este tema.

Consideremos el operador maximal de Hardy-Littlewood definido para funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x : Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\mathcal{Q}$ denota la familia de los cubos en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados. Como es bien sabido, este operador es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. En [81] Muckenhoupt, motivado por la idea de obtener resultados para cierto tipo de problemas de convergencia de series ortogonales, caracterizó la clase de funciones positivas y localmente integrables w, usualmente llamada clase de pesos, tales que el mismo operador es acotado en $L^p_w(\mathbb{R}^n)$; esto es, demostró que una condición necesaria y suficiente para obtener la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)^p\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)^p\, dx,$$

es la condición $w^p \in A_p$, es decir,

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^p\, dy \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-p'}\, dy \right)^{1/p'} < \infty. \tag{1}$$

Poco después, Hunt, Muckenhoupt y Wheeden ([49]) consideraron el estudio de otro operador más singular, la transformada de Hilbert, ligada íntimamente a la convergencia en $L^p(\mathbb{R})$ de las series de Fourier, y establecieron que la misma clase de pesos también caracteriza la acotación de este operador en $L^p_w(\mathbb{R})$. Más tarde, Coifman y Fefferman ([14]) dieron un argumento más flexible que también se aplicaba a los operadores más generales de Calderón-Zygmund.

Posteriormente surgió la idea de considerar este tipo de problemas para un par de pesos, esto es, encontrar condiciones necesarias y suficientes en (v, w) tales que se verifiquen desigualdades

del tipo
$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)^p\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x)^p\,dx. \tag{2}$$
Muckenhoupt y Wheeden ([84]) observaron que la condición análoga a (1) para un par de pesos dada por
$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^p\,dy\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(y)^{-p'}\,dy\right)^{1/p'}<\infty, \tag{3}$$
es necesaria pero no suficiente para que el operador M este acotado de $L^p_v(\mathbb{R})$ en $L^p_w(\mathbb{R})$. Por ejemplo, si
$$w(x)=\sqrt{-x\log(x)}\mathcal{X}_{(0,1/2)}(x) \qquad \text{y} \qquad v(x)=\sqrt{x\log^2(x)}/\mathcal{X}_{(0,1/2)}(x),$$
entonces el par (v,w) satisface la condición (3) para $p=2$ pero M no es acotado de $L^2_v(\mathbb{R})$ en $L^2_w(\mathbb{R})$ (ver también [23] y [39]). Lo mismo ocurre, por ejemplo, con la transformada de Hilbert (para un contraejemplo ver [84]). En [105] Sawyer y Wheeden dieron una condición necesaria y suficiente para la validez de (2) pero que involucra al mismo operador M y no presenta ninguna de las propiedades estructurales asociadas con la condición A_p. Esto motivó la búsqueda de condiciones suficientes que sean más simples y que, en algún sentido, estén más relacionadas con la condición (1). Algunos resultados parciales se obtuvieron en [84], pero la primera condición de este tipo fue dada por Neugebauer en [90] donde se probó que si (v,w) es un par de pesos tal que para alguna constante $R>1$,
$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{Rp}\,dy\right)^{1/(Rp)}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(y)^{-Rp'}\,dy\right)^{1/(Rp')}<\infty, \tag{4}$$
entonces se verifica (2). Nos referiremos a este tipo de condiciones como *condiciones de tipo bump*.

Recordemos que los pesos en la clase A_p satisfacen una desigualdad de Hölder al revés. Esto es, si $u\in A_p$ entonces existe $\varepsilon>0$ tal que
$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(y)^{1+\varepsilon}\,dy\right)^{1/(1+\varepsilon)}\leq C\frac{1}{|Q|}\int_Q u(y)\,dy.$$
Por lo tanto, en el caso de un peso, la condición (4) es equivalente a la condición $w^p\in A_p$. En el caso de dos pesos, la condición (4) es un fortalecimiento de (3).

El resultado de Neugebauer fue generalizado y mejorado por Pérez ([95]) quien probó que la constante R podía ser eliminada en el primer factor de (4), y el segundo factor podía ser reemplazado por un promedio de tipo Luxemburg $\|\cdot\|_{\varphi,Q}$ asociado a una función de Young φ y un cubo $Q\in\mathcal{Q}$, en la escala de los espacios de Orlicz.

Respecto a los operadores de Calderón-Zygmund, en [29] Cruz-Uribe y Pérez estudiaron condiciones análogas a (4) que implican la propiedad de acotación de estos operadores de $L^p_v(\mathbb{R}^n)$

en $L^p_w(\mathbb{R}^n)$. Concretamente probaron que, si T es un operador de Calderón-Zygmund y (v, w) es un par de pesos tal que

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{Rp}\,dy\right)^{1/(Rp)} \left\|v^{-1}\right\|_{\varphi,Q} < \infty, \tag{5}$$

donde $R > 1$ y φ es una función de Young que satisface cierta condición de integrabilidad, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)^p\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x)^p\,dx. \tag{6}$$

También consideraron este tipo de resultado para el conmutador de orden m asociado a T con símbolo b en BMO, la clase de las funciones con oscilación media acotada. Si b es una función localmente integrable, el conmutador de primer orden de un operador lineal T se define como

$$T^{b,1}f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

y, para $m \in \mathbb{N}$, el conmutador de orden m, se define recursivamente por

$$T^{b,m}f(x) = (T^{b,m-1})^{b,1}f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

siendo $T^{b,0} = T$. La función b se llama *símbolo* del conmutador. En el mismo trabajo los autores conjeturaron que la condición (5) podía debilitarse aún más reemplazando también el promedio sobre el peso w por un promedio de tipo Luxemburg asociado a una función de Young con ciertas propiedades, de modo que (6) siga siendo valiendo. Esta conjetura fue estudiada ampliamente; para una historia completa remitimos al lector a [24, 25, 26, 30] y a [68] por la extensa lista de referencias que contienen.

Por otra parte, en [82] Muckenhoupt y Wheeden consideraron el operador maximal fraccionario M_α, $0 < \alpha < n$, definido por la expresión

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}:Q\ni x} |Q|^{\alpha/n-1}\int_Q |f(y)|\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

y estudiaron propiedades de continuidad del mismo en espacios de Lebesgue con un par de pesos. Los autores probaron que si $1 < p < n/\alpha$ y $1/r = 1/p - \alpha/n$, la siguiente condición

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^r\,dy\right)^{1/r} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-p'}\,dy\right)^{1/p'} < \infty, \tag{7}$$

es necesaria y suficiente para la acotación de M_α de $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ en $L^r_w(\mathbb{R}^n)$. Además, como en el caso de la maximal de Hardy-Littlewood, la condición análoga a (7) para un par de pesos (v, w) no es suficiente para que se verifique

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_\alpha f(x)^r w(x)^r\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x)^p\,dx, \tag{8}$$

(para un ejemplo ver [28]). La condición de tipo bump correspondiente fue obtenida por Pérez (ver [92, 95]) quien probó que si $0 \leq \alpha < n$, $1 < p \leq r < \infty$ y se verifica

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} |Q|^{\alpha/n+1/r-1/p} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^r\,dy\right)^{1/r} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-Rp'}\,dy\right)^{1/(Rp')} < \infty,$$

para alguna constante $R > 1$, entonces se satisface (8).

Posterior al trabajo de Neugebauer, en [104] Sawyer y Wheeden consideraron el problema análogo para el operador integral fraccionaria I_α, $0 < \alpha < n$, o también llamado potencial de Riesz, definido por la expresión

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

En dicho trabajo se prueba que si $1 < p \leq r < \infty$ y el par de pesos (v, w) satisface

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} |Q|^{\alpha/n+1/r-1/p} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{Rr}\right)^{1/(Rr)} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(y)^{-Rp'}\right)^{1/(Rp')} < \infty \tag{10}$$

para alguna constante $R > 1$, entonces el operador I_α está acotado de $L^p_v(\mathbb{R}^n)$ en $L^r_w(\mathbb{R}^n)$. Más aún, si $R = 1$, entonces la condición (10) resulta necesaria. La expresión (10) también se conoce como *condición de Fefferman-Phong generalizada*, ya que la condición Fefferman-Phong es un caso particular de (10) cuando $v \equiv 1$, $\alpha = 1$ y $p = r = 2$ (ver [38]).

Motivado por el trabajo de Sawyer y Wheeden y los resultados en [11] y [12], Pérez ([92]) extendió el resultado de [104] para operadores más generales, los operadores potenciales P_Γ, definidos para cierta función de crecimiento Γ, por

$$P_\Gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

siempre que esta integral sea finita. Ejemplos de operadores potenciales son el potencial de Riesz y los potenciales de Bessel. En particular, el autor probó que si $1 < p \leq r < \infty$ y (v, w) es un par de pesos tal que para alguna constante $R > 1$,

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \widetilde{\Gamma}(\ell(Q))|Q|^{1/r-1/p} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{Rr}\right)^{1/(Rr)} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{-Rp'}\right)^{1/(Rp')} < \infty, \tag{11}$$

entonces P_Γ está acotado de $L^p_v(\mathbb{R}^n)$ en $L^r_w(\mathbb{R}^n)$. Aquí, la función $\widetilde{\Gamma}$ está definida por

$$\widetilde{\Gamma}(t) = \int_{|z|\leq t} \Gamma(z)\,dz, \qquad t \geq 0,$$

y $\ell(Q)$ indica el lado del cubo Q. Cabe destacar que en este trabajo el autor también debilitó la condición (11) introduciendo promedios de tipo Luxemburg asociados a funciones de Young, en la escala de los espacios de Orlicz. Más adelante, Li ([73]) consideró este problema para el conmutador de orden m asociado a P_Γ con símbolo en BMO. Versiones en el contexto multilineal de estos resultados pueden encontrarse en [7].

En relación a resultados de acotación en el contexto de espacios de Lebesgue de exponente variable (ver Sección 2.1), se conocen diferentes artículos donde se obtuvieron estimaciones para una amplia gama de operadores en el caso de un peso. Por ejemplo, en [6, 31, 63, 64] se estudian los operadores de Calderón-Zygmund, en [6] también se consideraron los conmutadores de estos operadores con símbolos en la clase BMO, en [6, 40, 63, 64, 101, 102] se trabaja con los potenciales de Riesz y en [4] con los potenciales de Bessel.

Sin embargo, poco se sabe del problema asociado a un par de pesos en este contexto más general. Estimaciones con pares de pesos para los operadores de Calderón-Zygmund considerando al exponente involucrado constante fuera de una bola en dominios no acotados se obtuvieron en [61], asumiendo condiciones no locales en el par de pesos, y en [59] considerando condiciones modulares en el par de pesos. Estimaciones para los potenciales de Riesz en espacios de Lebesgue de exponente variable para el caso particular del par de pesos $(1, v)$, donde v es un peso potencia, se estudian en [37] cuando el exponente involucrado es una función Lipschitz en el intervalo $(0, 1)$, y en [62] considerando exponentes en una clase más general. En [58] se caracteriza la clase de pesos v para la acotación del potencial de Riesz de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L_v^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, y en [60] considerando al exponente involucrado constante fuera de una bola en dominios no acotados y asumiendo condiciones de tipo modular.

Uno de los objetivos de esta tesis es, entonces, estudiar condiciones de tipo bump sobre un par de pesos que permitan derivar propiedades de continuidad de los conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund y de operadores potenciales en espacios de Zygmund generalizados. Tales espacios extienden la definición de los espacios de tipo $L \log L$ y de los espacios de Lebesgue al contexto variable. Las condiciones deberán ser generalizaciones de las obtenidas en los resultados descriptos anteriormente. Los símbolos que involucran dichos conmutadores se considerarán en una amplia gama de espacios. En tal sentido, en la Sección 3.3 presentamos los resultados obtenidos, los cuales forman parte de nuestros trabajos [77] y [78].

Daremos a continuación una breve descripción de los antecedentes relacionados con el segundo objetivo de esta tesis.

Con el propósito de extender a espacios de Hardy en $\mathbb{R}^n$ ciertos teoremas de factorización de funciones holomorfas en el disco unidad, en el trabajo fundacional de Coifman, Rochberg y Weiss ([15]), los autores demuestran una caracterización del espacio BMO en términos de la acotación de los conmutadores de las transformadas de Riesz en los espacios de Lebesgue. Posteriormente, Bloom ([9]) prueba una extensión con dos pesos de este resultado para el conmutador de la transformada de Hilbert, H. Más precisamente, dados $1 < p < \infty$, $\mu^p, \lambda^p \in A_p$ y $b \in L^1(\mathbb{R})$, el conmutador $H^{b,1}$ es acotado de $L^p_\mu(\mathbb{R})$ en $L^p_\lambda(\mathbb{R})$ si y solo si la función b satisface que

$$\|b\|_{BMO_\nu} = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{1}{\int_Q \nu\, dx} \int_Q |b - b_Q|\, dx < \infty,$$

donde $\nu = \mu/\lambda$. Notar que si $\mu = \lambda$, el conjunto de las funciones con norma $\|\cdot\|_{BMO_\nu}$ finita es el clásico espacio de las funciones de oscilación media acotada, y el resultado obtenido es el de [15]. Recientemente, Holmes, Lacey y Wick ([47]) probaron esta caracterización para todas las transformadas de Riesz. En el caso de operadores de Calderón-Zygmund, utilizando la representación de tales operadores en término de operadores Haar shift (ver [50, 51, 52], entre otros), obtuvieron que si $b \in BMO_\nu$, entonces los operadores de Calderón-Zygmund son acotados de $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ en $L^p_\lambda(\mathbb{R}^n)$. Más tarde, Lerner, Ombrosi y Rivera-Ríos ([71]) consideran este problema para operadores de Calderón-Zygmund con un módulo de continuidad que satisface la condición de Dini (ver Sección 3.3.2) y, a través de la técnica de dominación sparse, extienden la implicación anterior. Más adelante, en [70], demuestran el resultado para los conmutadores de orden superior.

Por otro lado, en [48] y [1], se obtuvieron versiones del resultado de Bloom para el operador integral fraccionaria y sus conmutadores, respectivamente.

En el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable hasta donde sabemos, no hay resultados de esta naturaleza. En tal sentido, otro gran objetivo de esta tesis es estudiar este tipo de estimaciones, a las que llamaremos *estimaciones de tipo Bloom*, en este marco más general. Es decir, nos propondremos obtener una clase de pesos asociada a exponentes variables tal que si el símbolo b pertenece a BMO_ν, con ν en dicha clase, se deriven propiedades de continuidad en espacios de Lebesgue de exponente variable con pesos para los conmutadores de los operadores de Calderón-Zygmund, como así también, para los conmutadores del operador integral fraccionario. Los resultados obtenidos respecto a este objetivo se expondrán en la Sección 3.4 y forman parte de nuestro trabajo [79].

Esquema de contenidos. Esta tesis se compone de cuatro capítulos. El contenido de cada uno de ellos es brevemente el siguiente.

En el Capítulo 1 introducimos los espacios funcionales relacionados con las propiedades de continuidad de los operadores que estudiaremos en esta tesis, los espacios de Musielak-Orlicz, que generalizan a diferentes espacios de funciones, incluidos los espacios de Lebesgue de exponente variable y los espacios de Zygmund generalizados.

El Capítulo 2 está dedicado a presentar el contexto de los espacios de exponente variable. Daremos su definición y presentaremos los resultados y propiedades preliminares necesarios para el desarrollo y comprensión de la tesis. En este capítulo, en particular, definimos la clase de pesos que estará involucrada en los resultados correspondientes a estimaciones de tipo Bloom.

El propósito del Capítulo 3 es exponer los resultados de continuidad de los conmutadores de los operadores de Calderón-Zygmund y los operadores potenciales en los espacios de Zygmund generalizados. En tal sentido, previamente en la Sección 3.1 introducimos y estudiamos las propiedades, en este contexto, de operadores maximales generalizados que aparecerán en las demostraciones de dichos resultados; en la Sección 3.2 definimos las clases funcionales de los símbolos involucrados con los conmutadores en cuestión y presentamos algunas de sus propiedades. La Secciones 3.3 y 3.4 explicitan los resultados de continuidad en los espacios de Zygmund generalizados obtenidos considerando condiciones de tipo bump en el par de pesos, y estimaciones de tipo Bloom, respectivamente. Por último, en la Sección 3.5 introducimos algunos aspectos de la teoría de dominación sparse que serán de gran utilidad para probar los resultados de las secciones anteriores.

Finalmente, en el Capítulo 4 expondremos las pruebas de los resultados del Capítulo 3.

Luego de los capítulos descritos, para dar mayor claridad a algunas estimaciones, adicionamos un Apéndice que contiene lemas relacionados con propiedades de funciones, cualidades de los cubos en $\mathbb{R}^n$, entre otros temas auxiliares.

Contribuciones originales. Los trabajos a los que dieron lugar las contribuciones originales de esta tesis y los publicados en esta instancia de formación son los siguientes:

- L. Melchiori y G. Pradolini. *Potential operators and their commutators acting between variable Lebesgue spaces with different weights*, Integral Transforms Spec. Funct. 29 (11) 909-926, 2018.

- L. Melchiori, G. Pradolini y W. Ramos. *Commutators of potential type operators with Lipschitz symbols on variable Lebesgue spaces with different weights*, Math. Inequal. Appl. 22 (3) 855-883, 2019.

- L. Melchiori y G. Pradolini. *Commutators of singular integrals with kernels satisfying generalized Hörmander conditions and extrapolation results to the variable exponent spaces.* Potential Anal. 51 (4) 579–601, 2019.

- L. Melchiori, G. Pradolini y W. Ramos. *Musielak Orlicz bumps and Bloom type estimates for commutators of Calderón-Zygmund and fractional integral operators on variable Lebesgue spaces via sparse operators.*. En prensa. Analysis Mathematica, 2020.

CAPÍTULO 1

Espacios de Musielak-Orlicz

En este capítulo introduciremos los espacios funcionales relacionados con las propiedades de continuidad de los operadores que estudiaremos en esta tesis, los espacios de Musielak-Orlicz, que generalizan a diferentes espacios de funciones, incluidos los espacios clásicos de Lebesgue y Orlicz, los espacios de Lebesgue de exponente variable y los espacios de Zygmund generalizados.

En la primer sección describiremos la clase de funciones involucradas en la definición de los espacios de Musielak-Orlicz. Luego, en la segunda sección, enunciaremos las propiedades esenciales de estos espacios para el desarrollo de los resultados de esta tesis.

Muchos de los resultados de este capítulo se pueden encontrar en [98], [35] o [44], entre otros.

1.1. El conjunto de las $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas

Definición. Sea $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ una función. Decimos que φ es una **$\mathbf{\Phi}$-función** si es continua por izquierda y verifica que

- $\varphi(0) = 0$,
- $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$,
- $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ y
- es convexa, es decir,

$$\varphi(\sigma s + (1-\sigma)t) \leq \sigma\varphi(s) + (1-\sigma)\varphi(t), \qquad \forall\, \sigma \in [0,1], \forall\, s,t \in [0,\infty).$$

Observación 1.1. Es inmediato de la convexidad que, si φ es una $\mathbf{\Phi}$-función entonces, φ es continua en $[0,\infty)$ si y solo si φ es finita en $[0,\infty)$.

Ejemplos de $\mathbf{\Phi}$-funciones son las funciones de tipo potencia, $\varphi_p(t) = t^p$ con $p \in [1,\infty)$, las funciones de tipo $L \log L$, $\varphi_{p,q}(t) = t^p(\log(e+t))^q$ con $p \in [1,\infty)$ y $q \in [0,\infty)$ y las funciones de la forma $\varphi(t) = e^{t^p} - 1$ con $p \in [1,\infty)$. Otro ejemplo es el de la función $\varphi_\infty(t) = \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t)$ (con la convención $\infty \cdot 0 = 0$).

Aunque es posible definir espacios de funciones usando las $\mathbf{\Phi}$-funciones, estos no son lo suficientemente generales para nuestros requerimientos entre los cuales está, por ejemplo, generalizar a los espacios de Lebesgue clásicos. Como veremos en el Capítulo 2, los espacios de Lebesgue de exponente variable se definen a través de una función que depende no sólo de la variable temporal, sino también de la variable espacial. Por lo tanto, es preciso generalizar las $\mathbf{\Phi}$-funciones a este nuevo contexto de funciones definidas en el espacio-tiempo.

Definición. Sea $\Psi : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to [0, \infty]$ una función. Decimos que Ψ es una **$\mathbf{\Phi}$-función generalizada** en $\mathbb{R}^n$, y lo denotamos $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, si verifica que

- para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\Psi(x, \cdot)$ es una $\mathbf{\Phi}$-función y
- $\Psi(\cdot, t)$ es medible para todo $t \geq 0$.

Si ϕ es una $\mathbf{\Phi}$-función y $\psi(x, t) = \phi(t)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces ψ es una $\mathbf{\Phi}$-función generalizada.

Las $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas verifican las propiedades contenidas en el siguiente lema.

Lema 1.2. *Sean $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces*

(i) $\Psi(x, \alpha s) \leq \alpha \Psi(x, s)$, $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ *y* $\forall\, s \geq 0$.

(ii) $\Psi(x, \cdot)$ *es creciente.*

(iii) *La función* $h(t) = \Psi(x, t)/t$, $t > 0$, *es creciente.*

Demostración. La desigualdad en (i) se deduce de la propiedad de convexidad de $\Psi(x, \cdot)$ y de que $\Psi(x, 0) = 0$. Para demostrar (ii), tomemos $0 \leq s \leq t$, entonces por (i) tenemos que

$$\Psi(x, s) = \Psi\left(x, \frac{s}{t} t\right) \leq \frac{s}{t} \Psi(x, t) \leq \Psi(x, t).$$

Además, si $s > 0$, dividiendo la desigualdad anterior por s, obtenemos (iii). $\square$

La función inversa generalizada

A continuación definiremos la función inversa generalizada de una función definida en $\mathbb{R}^n \times [0, \infty]$.

Definición. Dada $\Psi : \mathbb{R}^n \times [0, \infty] \to [0, \infty]$, se define su **función inversa generalizada** por

$$\Psi^{-1}(x, t) = \inf \{u \geq 0 : \Psi(x, u) \geq t\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0, \infty],$$

donde $\inf \emptyset = \infty$.

Notemos que $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ no implica necesariamente que $\Psi^{-1} \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$. De hecho se puede ver que $\Psi^{-1}(x, \cdot)$ es, en particular, una función cóncava para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo.

Observación 1.3. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, si $\Psi(x,\cdot)$ es invertible y creciente (decreciente), la inversa generalizada coincide con la inversa usual. En efecto, notemos que si $\Psi(x,\cdot)$ es invertible y creciente, debe ser continua y estrictamente creciente. Sea $\Phi(x,\cdot)$ su inversa usual. Entonces $\Phi(x,\cdot)$ es creciente y no negativa pues $\Phi(x,0)=0$. Luego

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(x,t) &= \text{ínf}\,\{u \geq 0 : \Psi(x,u) \geq t\} = \text{ínf}\,\{u \geq 0 : \Phi(x,\Psi(x,u)) \geq \Phi(x,t)\}\\ &= \text{ínf}\,\{u \geq 0 : u \geq \Phi(x,t)\} = \Phi(x,t),\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,\infty]$.

El siguiente resultado enuncia algunas propiedades de la inversa generalizada.

Proposición 1.4. *Sean* $\Psi : \mathbb{R}^n \times [0,\infty] \to [0,\infty]$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

(i) $\Psi^{-1}(x,\cdot)$ *es creciente en* $[0,\infty]$ *y*

(ii) $\Psi^{-1}(x,\Psi(x,t)) \leq t$ *para todo* $t \in [0,\infty]$.

(iii) *Si* $\Psi(x,\cdot)$ *es continua por izquierda, entonces* $\Psi(x,\Psi^{-1}(x,t)) \leq t$ *para todo* $t \in [0,\infty]$.

(iv) *Si* $\Psi(x,\cdot)$ *es creciente en* $[0,\infty)$, *entonces* $\Psi^{-1}(x,\cdot)$ *es continua por izquierda en* $(0,\infty)$ *y las desigualdades*

$$t \leq \Psi^{-1}(x,\Psi(x,t)+\varepsilon) \quad \text{y} \quad t \leq \Psi(x,\Psi^{-1}(x,t)+\varepsilon) \tag{1.1}$$

valen para todo $\varepsilon > 0$ *y* $t \in [0,\infty)$.

(v) *Si* $\Psi(x,\cdot)$ *es creciente y continua en* $[0,\infty)$,

$$\Psi^{-1}(x,\Psi(x,t)) = t \quad \text{y} \quad \Psi(x,\Psi^{-1}(x,t)) = t \quad \forall\, t \in [0,\infty).$$

(vi) *Si además* $\Psi(x,0)=0$, *se tiene que* $\Psi(x,\cdot)$ *es creciente y continua por izquierda en* $(0,\infty)$ *si y solo si* $(\Psi^{-1})^{-1}(x,\cdot) = \Psi(x,\cdot)$ *en* $[0,\infty)$.

Demostración. (i) Si consideramos $0 \leq s \leq t \leq \infty$,

$$\{u \geq 0 : \Psi(x,u) \geq t\} \subseteq \{u \geq 0 : \Psi(x,u) \geq s\}$$

y tomando el ínfimo de tales conjuntos, resulta que $\Psi^{-1}(x,s) \leq \Psi^{-1}(x,t)$. Luego, $\Psi^{-1}(x,\cdot)$ es creciente.

(ii) Sea $t \in [0,\infty]$, como

$$\Psi^{-1}(x,\Psi(x,t)) = \text{ínf}\{u \geq 0 : \Psi(x,u) \geq \Psi(x,t)\}$$

y t pertenece al conjunto $\{u \geq 0 : \Psi(x,u) \geq \Psi(x,t)\}$, tenemos que $\Psi^{-1}(x,\Psi(x,t)) \leq t$.

(iii) Notemos que las desigualdades para $t = 0$ y $t = \infty$ son claras. Supongamos que existe

$t \in (0, \infty)$ tal que $\Psi(x, \Psi^{-1}(x,t)) > t$. Como $\Psi(x, \cdot)$ es continua por izquierda, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Psi(x, \Psi^{-1}(x,t) - \varepsilon) > t$. Luego

$$\Psi^{-1}(x,t) - \varepsilon \in \{u \geq 0 : \Psi(x,u) \geq t\},$$

lo que contradice la definición de $\Psi^{-1}(x,t)$. Así, $\Psi(x, \Psi^{-1}(x,t)) \leq t$ para todo $t \in [0, \infty)$.
(iv) Notemos que las desigualdades en (1.1) valen si $t = 0$. Supongamos $t > 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\Psi(x, \cdot)$ es creciente, $\Psi(x,u) \geq \Psi(x,t) + \varepsilon$ implica $u \geq t$. Luego

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(x, \Psi(x,t) + \varepsilon) &= \inf\{u \geq 0 : \Psi(x,u) \geq \Psi(x,t) + \varepsilon\} \\ &= \inf\{u \geq t : \Psi(x,u) \geq \Psi(x,t) + \varepsilon\} \geq t.\end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos $\Psi(x, \Psi^{-1}(x,t) + \varepsilon) < t$ para algún $t > 0$. Entonces, como $\Psi(x, \cdot)$ es creciente,

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(x,t) &= \inf\{u \geq 0 : \Psi(x,u) \geq t\} \\ &= \inf\{u \geq \Psi^{-1}(x,t) + \varepsilon : \Psi(x,u) \geq t\} \geq \Psi^{-1}(x,t) + \varepsilon,\end{aligned}$$

lo que es absurdo. Luego $\Psi(x, \Psi^{-1}(x,t) + \varepsilon) \geq t$ para todo $t > 0$.
Para ver la propiedad de continuidad por izquierda de $\Psi^{-1}(x, \cdot)$, tomemos $s > 0$ y $\{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión que crece a s. Entonces, por (i), $\Psi^{-1}(x, s_j) \leq \Psi^{-1}(x,s)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Luego el $\lim_{j \to \infty} \Psi^{-1}(x, s_j)$ existe y se verifica que

$$\lim_{j \to \infty} \Psi^{-1}(x, s_j) \leq \Psi^{-1}(x,s). \tag{1.2}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la desigualdad (1.1), $\Psi(x, \Psi^{-1}(x, s_j) + \varepsilon) \geq s_j$ y entonces

$$\lim_{j \to \infty} \Psi(x, \Psi^{-1}(x, s_j) + \varepsilon) \geq \lim_{j \to \infty} s_j = s. \tag{1.3}$$

Además, como $\Psi^{-1}(x, \cdot)$ es creciente, $\Psi^{-1}(x, s_j) \leq \lim_{j \to \infty} \Psi^{-1}(x, s_j)$ y, por el crecimiento de $\Psi(x, \cdot)$ se tiene,

$$\Psi(x, \lim_{j \to \infty} \Psi^{-1}(x, s_j) + \varepsilon) \geq \lim_{j \to \infty} \Psi(x, \Psi^{-1}(x, s_j) + \varepsilon). \tag{1.4}$$

Luego, de (1.3) y (1.4), se deduce que $s \leq \Psi(x, \lim_{j \to \infty} \Psi^{-1}(x, s_j) + \varepsilon)$. Por lo tanto, aplicando $\Psi^{-1}(x, \cdot)$ y por el item (ii),

$$\lim_{j \to \infty} \Psi^{-1}(x, s_j) + \varepsilon \geq \Psi^{-1}(x,s), \qquad \forall \varepsilon > 0$$

y entonces $\lim_{j \to \infty} \Psi^{-1}(x, s_j) \geq \Psi^{-1}(x,s)$. Combinando esta desigualdad con (1.2), obtenemos la igualdad y consecuentemente $\Psi^{-1}(x, \cdot)$ es continua por izquierda.
El item (v) se obtiene de combinar (ii), (iii) y (iv).

(vi) Notemos que $(\Psi^{-1})^{-1}(x,0) = 0 = \Psi(x,0)$. Supongamos que $\Psi(x,\cdot)$ es creciente y continua por izquierda y tomemos $t > 0$. Sea $\varepsilon \in (0,t)$ entonces, por los items (i) y (ii),

$$\Psi^{-1}(x,u) \leq \Psi^{-1}(x,\Psi(x,t-\varepsilon)) \leq t-\varepsilon < t, \qquad \forall\, 0 \leq u \leq \Psi(x,t-\varepsilon).$$

Luego

$$\begin{aligned}(\Psi^{-1})^{-1}(x,t) &= \inf\{u \geq 0 : \Psi^{-1}(x,u) \geq t\} \\ &= \inf\{u > \Psi(x,t-\varepsilon) : \Psi^{-1}(x,u) \geq t\} \geq \Psi(x,t-\varepsilon).\end{aligned}$$

Como $\Psi(x,\cdot)$ es continua por izquierda, haciendo tender $\varepsilon \to 0^+$, resulta $(\Psi^{-1})^{-1}(x,t) \geq \Psi(x,t)$. Por otro lado, tomamos nuevamente $\varepsilon \in (0,t)$. Por (1.1), $\Psi^{-1}(x,\Psi(x,t)+\varepsilon) \geq t$, entonces

$$(\Psi^{-1})^{-1}(x,t) = \inf\{u \geq 0 : \Psi^{-1}(x,u) \geq t\} \leq \Psi(x,t)+\varepsilon.$$

Si hacemos tender $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos $(\Psi^{-1})^{-1}(x,t) \leq \Psi(x,t)$. Luego $(\Psi^{-1})^{-1}(x,t) = \Psi(x,t)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$.
Reciprocamente, supongamos $(\Psi^{-1})^{-1} = \Psi$. Por el item (i), $\Psi^{-1}(x,\cdot)$ es creciente en $[0,\infty)$. Entonces, en virtud del item (iv), $(\Psi^{-1})^{-1}(x,\cdot)$ es continua por izquierda en $(0,\infty)$. Además, por el item (i), $(\Psi^{-1})^{-1}(x,\cdot)$ es creciente en $[0,\infty)$. Así resulta que $\Psi(x,\cdot)$ es creciente y continua por izquierda en $(0,\infty)$. □

Notemos que las desigualdades de los items (ii) y (iii) del lema anterior pueden ser estrictas, incluso si $\Psi(x,0) = 0$ y $\Psi(x,\cdot)$ es creciente y continua por izquierda en $[0,\infty)$. Por ejemplo, consideremos $\varphi_\infty(t) = \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t)$. Entonces $(\varphi_\infty)^{-1}(t) = \mathcal{X}_{(0,\infty]}(t)$ y, por lo tanto,

$$(\varphi_\infty)^{-1}(\varphi_\infty(1/2)) = (\varphi_\infty)^{-1}(0) = 0 < 1/2$$

y

$$\varphi_\infty((\varphi_\infty)^{-1}(1)) = \varphi_\infty(1) = 0 < 1.$$

Presentaremos a continuación una versión generalizada de la *Desigualdad de Young* en este nuevo contexto que será una herramienta útil para la obtención de una generalización de la desigualdad de Hölder.

Lema 1.5. *Sean $\Psi,\Lambda,\Theta : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to [0,\infty]$ tales que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, las funciones $\Psi(x,\cdot)$ y $\Lambda(x,\cdot)$ son crecientes y continuas y $\Theta(x,\cdot)$ es creciente y continua por izquierda. Si además existe una constante C positiva tal que se verifica la desigualdad*

$$\Psi^{-1}(x,t)\Lambda^{-1}(x,t) \leq C\Theta^{-1}(x,t), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t \in [0,\infty),$$

entonces

$$\Theta(x,vu/C) \leq \Psi(x,v) + \Lambda(x,u), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, v,u \in [0,\infty). \tag{1.5}$$

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $v, u \in [0, \infty)$. Supongamos primero que $\Psi(x, v) \leq \Lambda(x, u)$, entonces

$$\begin{aligned} vu &= \Psi^{-1}(x, \Psi(x, v))\Lambda^{-1}(x, \Lambda(x, u)) && \text{(Prop. 1.4 (v))} \\ &\leq \Psi^{-1}(x, \Lambda(x, u))\Lambda^{-1}(x, \Lambda(x, u)) && \text{(Prop. 1.4 (i))} \\ &\leq C\Theta^{-1}(x, \Lambda(x, u)). \end{aligned}$$

Luego, como $\Theta(x, \cdot)$ es creciente y por la Proposición 1.4 (iii), obtenemos que

$$\Theta(x, vu/C) \leq \Theta(x, \Theta^{-1}(x, \Lambda(x, u))) \leq \Lambda(x, u).$$

Si $\Psi(x, v) > \Lambda(x, u)$, por el mismo argumento obtenemos que $\Theta(x, vu/C) \leq \Psi(x, v)$. Luego

$$\Theta(x, vu/C) \leq \text{máx}\{\Psi(x, v), \Lambda(x, u)\} \leq \Psi(x, v) + \Lambda(x, u). \qquad \square$$

La función conjugada

Definición. Sea $\Psi \in G\boldsymbol{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, definimos la **función conjugada** de Ψ, y la denotaremos por Ψ^*, como

$$\Psi^*(x, t) = \sup_{u \geq 0} \{ut - \Psi(x, u)\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0, \infty).$$

La función conjugada de $\Psi \in G\boldsymbol{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ es una $\boldsymbol{\Phi}$-función generalizada. En efecto, probemos que dado $t \geq 0$, la función $\Psi^*(\cdot, t)$ es medible. Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$ y $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números racionales tal que $u_j \nearrow u$. Como $\Psi(x, \cdot)$ es continua por izquierda,

$$ut - \Psi(x, u) = \lim_{j \to \infty} (u_j t - \Psi(x, u_j)).$$

Luego,

$$\Psi^*(x, t) = \sup_{u \geq 0} (ut - \Psi(x, u)) = \sup_{u \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)} (ut - \Psi(x, u)).$$

Sea $a \geq 0$. Entonces tenemos que se verifica $\Psi^*(x, t) \leq a$ si y solo si $ut - \Psi(x, u) \leq a$ para todo $u \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$. Por lo tanto, como el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \Psi^*(x, t) \leq a\} = \bigcap_{u \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)} \{x \in \mathbb{R}^n : ut - \Psi(x, u) \leq a\}$$

es una intersección de conjuntos medibles, es medible y podemos concluir que $\Psi^*(\cdot, t)$ es medible. Asimismo debemos ver que dado $x \in \mathbb{R}^n$, $\Psi^*(x, \cdot)$ es una $\boldsymbol{\Phi}$-función. Claramente, $\Psi^*(x, 0) = 0$. Como $\text{lím}_{u \to 0^+} \Psi(x, u) = 0$, existe $u_1 > 0$ tal que $\Psi(x, u_1) < \infty$. Entonces

$$\lim_{t \to \infty} \Psi^*(x, t) \geq \lim_{t \to \infty} (tu_1 - \Psi(x, u_1)) = \infty.$$

Por otro lado, también existe $u_2 > 0$ tal que $\Psi(x, u_2) > 0$. Por Lema 1.2 (iii), tenemos que $\Psi(x, u) \geq \Psi(x, u_2)u/u_2$ siempre que $u \geq u_2$. Luego,

$$\begin{aligned}\Psi^*(x,t) &= \text{máx}\left\{\sup_{u\leq u_2}(ut-\Psi(x,u)), \sup_{u>u_2}(ut-\Psi(x,u))\right\}\\ &\leq \text{máx}\left\{u_2t, \sup_{u>u_2} u\left(t-\frac{\Psi(x,u_2)}{u_2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Como el segundo argumento del máximo es negativo cuando $t < \Psi(x, u_2)/u_2$, podemos concluir $\text{lím}_{t\to 0^+} \Psi^*(x,t) = 0$.
Para ver que $\Psi^*(x,\cdot)$ es convexa tomemos $\sigma \in [0,1]$ y $s,t \in [0,\infty)$, entonces

$$\begin{aligned}\Psi^*(x,\sigma s+(1-\sigma)t) &= \sup_{u\geq 0}\{u[\sigma s+(1-\sigma)t]-\Psi(x,u)\}\\ &\leq \sup_{u\geq 0}\{u\sigma s-\sigma\Psi(x,u)\}+\sup_{u\geq 0}\{u(1-\sigma)t-(1-\sigma)\Psi(x,u)\}\\ &= \sigma\Psi^*(x,s)+(1-\sigma)\Psi^*(x,t).\end{aligned}$$

Por último veamos que $\Psi^*(x,\cdot)$ es continua por izquierda. Sea $b = \text{ínf}\{t > 0 : \Psi^*(x,t) = \infty\}$. La convexidad de $\Psi^*(x,\cdot)$ implica continuidad en $[0, b)$. Como la continuidad en el intervalo (b,∞) es clara, nos queda ver que $\Psi^*(x,\cdot)$ es continua por izquierda en b. Sea $\lambda \in (0,1)$, como $\Psi^*(x,\lambda b) \leq \lambda\Psi^*(x,b) \leq \Psi^*(x,b)$, $\text{lím sup}_{\lambda\to 1^-} \Psi^*(x,\lambda b) \leq \Psi^*(x,b)$. Por otro lado, sean $k < \Psi^*(x,b)$ y u_1 tales que $k \leq u_1 b - \Psi(x,u_1)$. Tenemos entonces que

$$\liminf_{\lambda\to 1^-}\Psi^*(x,\lambda b) \geq \liminf_{\lambda\to 1^-}(u_1\lambda b-\Psi(x,u_1)) = u_1 b-\Psi(x,u_1)\geq k.$$

Luego, haciendo k tender a $\Psi^*(x,b)$ por izquierda, resulta $\text{lím inf}_{\lambda\to 1^-} \Psi^*(x,\lambda b) \geq \Psi^*(x,b)$. Así $\Psi^*(x,\cdot)$ es continua por izquierda y concluimos que $\Psi^* \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$. Además se verifica que $(\Psi^*)^* = \Psi$ (ver [[35], Corolario 2.6.3]).

Dada $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, una propiedad muy importante que se deriva de la definición de Ψ^*, es la siguiente generalización de la desigualdad de Young en este contexto,

$$vu \leq \Psi(x,v)+\Psi^*(x,u), \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n, \forall\, v,u\in[0,\infty). \tag{1.6}$$

Dado $t \in [0,\infty)$, evaluando la desigualdad anterior con $v = \Psi^{-1}(x,t)$ y $u = (\Psi^*)^{-1}(x,t)$ tenemos que, en virtud de Proposición 1.4 (iii),

$$\Psi^{-1}(x,t)(\Psi^*)^{-1}(x,t) \leq \Psi(x,\Psi^{-1}(x,t))+\Psi^*(x,(\Psi^*)^{-1}(x,t)) \leq 2t. \tag{1.7}$$

Más aún, se verifica la siguiente relación que es útil a la hora de calcular funciones conjugadas de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas,

$$\Psi^{-1}(x,t)(\Psi^*)^{-1}(x,t) \simeq t, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n, \forall\, v,u\in[0,\infty) \tag{1.8}$$

(para su demostración ver, por ejemplo, [[44], Teorema 2.4.10]), donde hemos considerado la siguiente notación que será recurrente a lo largo de este trabajo. Dadas dos funciones F y G, denotaremos $F(\sigma) \simeq G(\sigma)$ si existen dos constante $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 G(\sigma) \leq F(\sigma) \leq C_2 G(\sigma), \qquad \forall \sigma.$$

Si solo vale la desigualdad de la derecha, escribiremos $F(\sigma) \lesssim G(\sigma)$.

1.1.1. $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas de tipo $L \log L$

En esta tesis consideraremos, en particular, una familia de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas asociada a espacios de Zygmund generalizados del tipo $L \log L$. Introduciremos a continuación la notación correspondiente.

Dada una función $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, escribiremos

$$p^- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) \qquad \text{y} \qquad p^+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} p(x).$$

Definición. Sean $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ y $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $q^+ < \infty$. Definimos la **función de tipo $\boldsymbol{L \log L}$ generalizada**, $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}$, para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$, por

$$\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) = \begin{cases} t^{p(x)}(\log(e+t))^{q(x)}, & p(x) < \infty \\ \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t), & p(x) = \infty, \end{cases} \tag{1.9}$$

con la convención $\infty \cdot 0 = 0$. En el caso en que $q(\cdot) \equiv 0$, denotamos $\varphi_{p(\cdot)} = \varphi_{p(\cdot),0}$.

Notar que, si en la definición anterior agregamos las condiciones $p(\cdot) \geq 1$ y

$$2(p(x) - 1) + q(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.10}$$

entonces, en virtud del Lema A.2 del Apéndice, $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, \cdot)$ es convexa. Por lo tanto, en este caso, $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)} \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ y, asimismo, $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, \cdot)$ es estrictamente creciente y continua para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Notar que, en particular, cuando $p^- \geq 1$ y $q^- \geq 0$, la relación (1.10) se verifica.

Por la forma que tienen estas funciones es fácil obtener expresiones equivalentes a sus funciones inversa y conjugada asumiendo ciertas restricciones en los exponentes involucrados, como se verá en el siguiente lema. Antes de continuar, recordemos que dado $1 < p < \infty$, el número $p' = p/(p-1)$, el cual satisface $1/p + 1/p' = 1$, es llamado *exponente conjugado de Hölder de p*. Si $p = 1$ su exponente conjugado p' se define como $p' = \infty$, y viceversa.

Lema 1.6. *Sean $\kappa > 0$ una constante y $p(\cdot), q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ tales que $p^- > 0$ y $q^+ < \infty$. Si*

$$\Psi(x,t) = \kappa\, \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty),$$

entonces

(i) *su inversa generalizada* Ψ^{-1} *satisface*

$$\Psi^{-1}(x,t) \simeq \begin{cases} t^{1/p(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/p(x)}, & si\ p(x) < \infty \\ \mathcal{X}_{(0,\infty]}(t), & si\ p(x) = \infty. \end{cases}$$

(ii) *Si además* $p^- > 1$*, la conjugada* Ψ^* *verifica*

$$\Psi^*(x,t) \simeq \begin{cases} t^{p'(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/(p(x)-1)}, & si\ p(x) < \infty \\ t, & si\ p(x) = \infty \end{cases}$$

donde $p'(x) = (p(x)-1)/p(x)$.

En el caso en que $p(\cdot) \equiv 1$*, la conjugada* Ψ^* *verifica*

$$\Psi^*(x,t) \simeq \begin{cases} \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t), & si\ q(x) = 0 \\ \Gamma(x,t), & si\ q(x) > 0 \end{cases}$$

donde la función Γ *está dada por*

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} 0, & si\ t \leq 1 \\ e^{t^{1/q(x)}} - e, & si\ t > 1 \end{cases}.$$

Las constantes involucradas dependen de κ, p^- *y* q^+.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Si $p(x) = \infty$, simples cálculos muestran que

$$\Psi^{-1}(x,t) = \Big(\kappa\, \varphi_{\infty,q(\cdot)}(x,t)\Big)^{-1} = \big(\kappa\, \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t)\big)^{-1} = \mathcal{X}_{(0,\infty]}(t).$$

Supongamos $0 < p^- \leq p(x) < \infty$. Denotemos $\Phi(x,t) = t^{1/p(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/p(x)}$. Para demostrar (i) basta ver que existen constantes $L, R > 0$ tales que

$$L\,\Phi(x,t) \leq \Psi^{-1}(x,t) \leq R\,\Phi(x,t), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, t \geq 0,$$

o, equivalentemente, en virtud de la Proposición 1.4 (v) (notar que $\Psi(x,\cdot)$ es creciente y continua),

$$\Psi(x, L\,\Phi(x,t)) \leq t \leq \Psi(x, R\,\Phi(x,t)), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, t \geq 0. \tag{1.11}$$

Si $q(x) = 0$ y $C > 0$ es una constante, se tiene que $\Psi(x, C\Phi(x,t)) = \kappa\, C^{p(x)} t$. Luego, (1.11) vale con

$$L = L_1 := \begin{cases} (1/\kappa)^{1/p^-}, & \text{si}\, \kappa \geq 1 \\ 1, & \text{si}\, \kappa < 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad R = R_1 := \begin{cases} 1, & \text{si}\, \kappa \geq 1 \\ (1/\kappa)^{1/p^-}, & \text{si}\, \kappa < 1. \end{cases}$$

Supongamos ahora que $0 < q(x) \leq q^+$. Como $\log\big(e + t^{1/p(x)}\big) \leq C \log(e+t)$, donde $C \geq 1$ es una constante (ver Apéndice, Lema A.5),

$$\left(\frac{\log\big(e + t^{1/p(x)}\big)}{\log(e+t)}\right)^{q(x)} \leq C^{q^+}.$$

Luego, si $L_2^{p^-} := \text{mín}\{1/(\kappa\, C^{q^+}), 1\} \le 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\Psi(x, L_2\Phi(x,t)) &= L_2^{p^-}\,\kappa\, t\,(\log(e+t))^{-q(x)}\left(\log\left(e + t^{1/p(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/p(x)}\right)\right)^{q(x)}\\ &\le L_2^{p^-}\,\kappa\, t\,(\log(e+t))^{-q(x)}\left(\log\left(e + t^{1/p(x)}\right)\right)^{q(x)} \le t.\end{aligned}$$

Así concluimos la desigualdad de la izquierda de (1.11) con $L = L_2$. Para probar la desigualdad de la derecha debemos ver que existe una constante $R_2 > 0$ tal que

$$t \le \kappa\, R_2^{p(x)} t(\log(e+t))^{-q(x)}\left(\log\left(e + R_2\, t^{1/p(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/p(x)}\right)\right)^{q(x)}, \tag{1.12}$$

para todo $t \ge 0$. Si $R_2 \ge 1$, entonces

$$\log\left(e + R_2^{p^-}\, t(\log(e+t))^{-q(x)}\right) \le A\log\left(e + R_2 t^{1/p(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/p(x)}\right),$$

donde $A \ge 1$ es una constante (ver Apéndice, Lema A.5). Por lo tanto, para obtener (1.12), basta probar que existen constantes $R_2 \ge 1$ y $C \ge 1$ tales que $C \le R_2^{p^-}/A^{q^+}$ y

$$t \le \frac{\kappa\, C\, t}{(\log(e+t))^{q(x)}}\left(\log\left(e + R_2^{p^-}\, t(\log(e+t))^{-q(x)}\right)\right)^{q(x)}, \qquad \forall\, t \ge 0. \tag{1.13}$$

En efecto, tendremos que

$$\begin{aligned} t &\le \frac{\kappa\, C\, t}{(\log(e+t))^{q(x)}}\left(\log\left(e + R_2^{p^-}\, t(\log(e+t))^{-q(x)}\right)\right)^{q(x)}\\ &\le \frac{\kappa\, C\, t}{(\log(e+t))^{q(x)}} A^{q^+}\log\left(e + R_2 t^{1/p(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/p(x)}\right)^{q(x)}\\ &\le \frac{\kappa\, R_2^{p(x)}\, t}{(\log(e+t))^{q(x)}}\log\left(e + R_2 t^{1/p(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/p(x)}\right)^{q(x)},\end{aligned}$$

y concluimos (1.12).

Para demostrar (1.13) tomemos $0 < \varepsilon < \text{mín}\,\{q^+, 1\}$. Por el Lema A.7 del Apéndice, existe $\sigma_q \ge 1$ tal que

$$\log(e+t) \le \frac{t^{\varepsilon/q^+}}{\varepsilon/q^+} \le \frac{q^+}{\varepsilon} t^{\varepsilon/q(x)} \qquad \forall\, t \ge \sigma_q. \tag{1.14}$$

Tomemos R_2 y C tales que

$$R_2^{p^-/q^+} > \text{máx}\left\{A, \frac{A}{\kappa^{1/q^+}(1-\varepsilon)}, \frac{q^+}{\varepsilon}, \log(e+\sigma_q)\right\} \text{ y } \text{máx}\left\{1, \frac{1}{\kappa(1-\varepsilon)^{q^+}}\right\} \le C \le \frac{R_2^{p^-}}{A^{q^+}}.$$

Notar que entonces se verifica

$$\textbf{(a)}\; R_2^{p^-} > \left(\frac{q^+}{\varepsilon}\right)^{q^+}, \;\textbf{(b)}\; \kappa C \ge \text{máx}\left\{\kappa, \frac{1}{(1-\varepsilon)^{q^+}}\right\} \ge 1 \text{ y } \textbf{(c)}\; R_2^{p^-} > (\log(e+\sigma_q))^{q^+}.$$

Supongamos $t \ge \sigma_q$, entonces por (1.14), **(a)** y **(b)** se tiene que

$$\frac{\kappa\, C\, t}{(\log(e+t))^{q(x)}}\left(\log\left(e + R_2^{p^-}\, t(\log(e+t))^{-q(x)}\right)\right)^{q(x)}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{\kappa\, C\, t}{(\log(e+t))^{q(x)}} \left(\log\left(e+R_2^{p^-}(\varepsilon/q^+)^{q^+}t^{1-\varepsilon}\right)\right)^{q(x)} \\
&\geq \frac{\kappa\, C\, t}{(\log(e+t))^{q(x)}} \left(\log\left(e+t^{1-\varepsilon}\right)\right)^{q(x)} \\
&\geq \kappa\, C\, t\, (1-\varepsilon)^{q(x)} \\
&\geq t,
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado la desigualdad (A.V) con $a = 1-\varepsilon$ (ver Apéndice). Por otro lado, si $0 \leq t \leq \sigma_q$, tenemos que $(\log(e+t))^{q(x)} \leq (\log(e+\sigma_q))^{q^+}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\kappa C\, t}{(\log(e+t))^{q(x)}} \left(\log\left(e+R_2^{p^-}t(\log(e+t))^{-q(x)}\right)\right)^{q(x)} \\
&\qquad \geq \frac{\kappa C\, t}{(\log(e+t))^{q(x)}} \left(\log\left(e+R_2^{p^-}t(\log(e+\sigma_q))^{-q^+}\right)\right)^{q(x)} \\
&\qquad > \kappa\, C\, t \geq t,
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado **(c)** y **(b)**.

Finalmente, eligiendo

$$
L = \mathrm{mín}\{L_1, L_2\} \qquad \text{y} \qquad R = \mathrm{máx}\{R_1, R_2\},
$$

valen las desigualdades

$$
L\,\Phi(x,t) \leq \Psi^{-1}(x,t) \leq R\,\Phi(x,t), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, t \geq 0.
$$

Demostremos (ii). Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Notemos que, si $1 \leq p(x) < \infty$, por la equivalencia (1.8) y el item anterior,

$$
(\Psi^*)^{-1}(x,t) \simeq \frac{t}{\Psi^{-1}(x,t)} \simeq t^{1/p'(x)}(\log(e+t))^{q(x)/p(x)}, \qquad \forall\, t > 0. \tag{1.15}
$$

Además, por la Proposición 1.4 (vi) (notar que $\Psi^*(x,\cdot)$ es creciente y continua por izquierda), $\Psi^* = [(\Psi^*)^{-1}]^{-1}$.

Supongamos $p^- > 1$. Si $p(x) = \infty$, simples cálculos muestran que

$$
\Psi^*(x,t) = \left(\kappa\, \varphi_{\infty, q(\cdot)}(x,t)\right)^* = \left(\kappa\, \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)(t)}\right)^* = t.
$$

Veamos el caso en que $1 < p^- \leq p(x) < \infty$. Como $p^- > 1$, tenemos que $(1/p')^- > 0$. Luego, podemos aplicar el item (i) con $(1/p')(\cdot)$ y $(q/p)(\cdot)$, en lugar de $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ respectivamente. Asimismo, teniendo en cuenta que, si $\Lambda, \Theta \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ verifican $\Lambda(x,\cdot) \leq \Theta(x,\cdot)$, entonces $\Theta^{-1}(x,\cdot) \leq \Lambda^{-1}(x,\cdot)$, de (1.15) obtenemos que

$$
\Psi^*(x,t) \simeq t^{p'(x)}(\log(e+t))^{-q(x)p'(x)/p(x)} = t^{p'(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/(p(x)-1)}
$$

como queríamos probar.

Finalmente, veamos el caso en que $p(\cdot) \equiv 1$. Si $q(x) > 0$, de (1.15) deducimos

$$(\Psi^*)^{-1}(x,t) \simeq (\log(e+t))^{q(x)}, \qquad \forall\, t > 0.$$

Calculemos entonces la inversa generalizada de $(\log(e+t))^{q(x)}$. Notemos que, si $0 < t \leq 1$, entonces $t \leq (\log(e+u))^{q(x)}$ para todo $u \geq 0$. Por otro lado, si $t > 1$, entonces $t \leq (\log(e+u))^{q(x)}$ solo si $u \geq e^{t^{1/q(x)}} - e$. Luego

$$\text{ínf}\,\{u \geq 0 : (\log(e+u))^{q(x)} \geq t\} = \Gamma(x,t).$$

Finalmente, si $p(\cdot) \equiv 1$ y $q(x) = 0$, de (1.15) deducimos $(\Psi^*)^{-1}(x,t) \simeq \mathcal{X}_{(0,\infty]}$. Luego, por el item anterior, $\Psi^*(x,t) \simeq \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t)$. $\square$

1.2. Espacios de Musielak-Orlicz

Definición. Sea $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$. El **espacio de Musielak-Orlicz** $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ se define como el conjunto de todas las funciones f medibles sobre $\mathbb{R}^n$ para las cuales existe un número positivo λ tal que

$$\varrho_\Psi(f/\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x, |f(x)|/\lambda)\, dx$$

es finita.

El primer precedente de estos espacios se da en el trabajo de Orlicz [91] en 1931 quien consideró los espacios secuenciales $\ell^{p(\cdot)}$ y los espacios de funciones de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$, y demostró versiones de la desigualdad clásica de Hölder en estos contextos. Orlicz abandonó el estudio de tales espacios, dedicándose a espacios de funciones que hoy llevan su nombre, introducidos por él en un trabajo junto a Birnbaum [8] (los mismos se definen a partir de $\mathbf{\Phi}$-funciones). Más adelante Nakano define una versión más general de los espacios de Orlicz [87, 88], los espacios de Musielak-Orlicz, también llamados espacios de Nakano o espacios de Orlicz generalizados, y Musielak y Orlicz desarrollan la teoría de los mismos [86, 85].

Notar que si $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ y f es una función medible, la aplicación $x \mapsto \Psi(x, |f(x)|)$ es medible (ver [[44],Teorema 2.5.13]), por lo tanto el funcional ϱ_Ψ está bien definido. Además, por la convexidad de $\Psi(x,\cdot)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, ϱ_Ψ resulta convexo.

Es fácil ver que $L^\Psi(\mathbb{R}^n) = \{f \text{ medible en } \mathbb{R}^n : \varrho_\Psi(f) < \infty\}$.

El funcional ϱ_Ψ no es una norma para el espacio $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$. En tal sentido, la siguiente definición introduce una norma en estos espacios.

Definición. Sea $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$. Dada una función medible sobre $\mathbb{R}^n$ definimos el funcional

$$\|f\|_\Psi = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \varrho_\Psi(f/\lambda) \leq 1\}.$$

Podemos también probar que $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n) = \{f \text{ medible en } \mathbb{R}^n : \|f\|_{\Psi} < \infty\}$. De esta manera tenemos el siguiente resultado de completitud.

Teorema 1.7 ([35]). *Si $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\|\cdot\|_{\Psi}$ es una norma para el espacio de Musielak-Orlicz $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, $(L^{\Psi}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\Psi})$ es un espacio de Banach.*

El siguiente resultado muestra algunas relaciones fundamentales entre la norma y el funcional. La demostración es estándar (ver, por ejemplo, [[35], Lemas 2.1.14 y 2.3.9]).

Proposición 1.8 (Propiedad de la bola unitaria). *Sean $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ y f una función medible. Entonces*

(i) $\varrho_{\Psi}(f/\|f\|_{\Psi}) \leq 1$ *siempre que* $0 < \|f\|_{\Psi} < \infty$; *y*

(ii) $\|f\|_{\Psi} \leq 1$ *y* $\varrho_{\Psi}(f) \leq 1$ *son equivalentes.*

A continuación enunciamos una generalización de la desigualdad de Hölder en el contexto de espacios de Musielak-Orlicz.

Lema 1.9 ([35]). *Sea $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, vale la siguiente desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx \leq 2\,\|f\|_{\Psi}\,\|g\|_{\Psi^*} \tag{1.16}$$

para todo par de funciones $f \in L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{\Psi^*}(\mathbb{R}^n)$.

La demostración sigue los lineamientos clásicos conocidos con las modificaciones obvias como, por ejemplo, la desigualdad de Young que, en este contexto, está dada por (1.6). Si, en cambio, utilizamos la versión (1.5), obtenemos el siguiente resultado que impone ciertas condiciones a la $\mathbf{\Phi}$-función generalizada pero que extiende la desigualdad de Hölder clásica. Incluimos su demostración para más claridad.

Lema 1.10. *Sean $\Psi, \Lambda, \Theta \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ tales que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, las funciones $\Psi(x,\cdot)$ y $\Lambda(x,\cdot)$ son continuas. Si además para alguna constante C positiva se verifica la siguiente desigualdad*

$$\Psi^{-1}(x,t)\Lambda^{-1}(x,t) \leq C\Theta^{-1}(x,t), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, t \in [0,\infty),$$

entonces

$$\|fg\|_{\Theta} \leq 2C\,\|f\|_{\Psi}\,\|g\|_{\Lambda} \tag{1.17}$$

para todo par de funciones $f \in L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{\Lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Basta suponer $\|f\|_{\Psi} > 0$ y $\|g\|_{\Lambda} > 0$ ya que, en otro caso, $f = 0$ o $g = 0$ en casi todo punto y la desigualdad es trivial.

Si, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, aplicamos la desigualdad (1.5) a $v = |f(x)|/\|f\|_{\Psi}$ y $u = |g(x)|/\|g\|_{\Lambda}$, se tiene que

$$\Theta\left(x, \frac{|f(x)||g(x)|}{C\,\|f\|_{\Psi}\,\|g\|_{\Lambda}}\right) \leq \Psi\left(x, \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Psi}}\right) + \Lambda\left(x, \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Lambda}}\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego por convexidad (ver Lema 1.2 (i))

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Theta\left(x, \frac{|f(x)g(x)|}{2C\,\|f\|_\Psi\,\|g\|_\Lambda}\right) dx &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Theta\left(x, \frac{|f(x)g(x)|}{C\,\|f\|_\Psi\,\|g\|_\Lambda}\right) dx\\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(x, \frac{|f(x)|}{\|f\|_\Psi}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Lambda\left(x, \frac{|g(x)|}{\|g\|_\Lambda}\right) dx\\ &\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la Proposición 1.8 (i). En virtud de la Proposición 1.8 (ii), deducimos la desigualdad (1.17). □

El siguiente es un resultado básico de dualidad en el espacio $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ probado en [[35], Corolario 2.7.5]. En tal sentido, recordemos que una función f es *simple* si es una combinación lineal de funciones características de conjuntos medibles con medida finita, es decir,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} s_i \mathcal{X}_{A_i}(x)$$

donde A_1,..., A_k son conjuntos medibles con medida finita, $\mathcal{X}_A$ denota la función característica del conjunto A y s_1,...,$s_k \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.11 **(Fórmula de la norma conjugada en $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$).** *Si $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ y el conjunto de las funciones simples está contenido en $L^{\Psi^*}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\|f\|_\Psi \simeq \sup_{g\in L^{\Psi^*}(\mathbb{R}^n):\, \|g\|_{\Psi^*}\leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx,$$

para toda función medible f.

1.2.1. La clase $\mathcal{F}$

Introducimos a continuación una clase de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas que utilizaremos más adelante. Recordemos que $\mathcal{Q}$ denota la familia de los cubos en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados.

Definición. Decimos que una 3-upla de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas (Ψ, Λ, Θ) pertenece a **la clase $\boldsymbol{\mathcal{F}}$** si verifica las siguientes propiedades

F1. $\|\mathcal{X}_Q\|_\Psi \|\mathcal{X}_Q\|_\Lambda \lesssim \|\mathcal{X}_Q\|_\Theta$ para todo $Q \in \mathcal{Q}$.

F2. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, las funciones $\Psi(x,\cdot)$ y $\Lambda(x,\cdot)$ son continuas y se verifica

$$\Psi^{-1}(x,t)\Lambda^{-1}(x,t) \lesssim \Theta^{-1}(x,t) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t \geq 0.$$

F3. $\|\mathcal{X}_Q\|_\Theta \|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta^*} \lesssim |Q|$ para todo $Q \in \mathcal{Q}$.

Ejemplos de 3-uplas de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas que pertenecen a esta clase se expondrán más adelante (ver Ejemplos 3.20, 3.21 y 3.22).

La importancia de la clase $\mathcal{F}$ en esta tesis se debe a que es de gran utilidad para lograr desigualdades con pesos cuando las normas involucradas se asocian a $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas. En particular trabajaremos con el siguiente resultado. Para enunciarlo introducimos la siguiente notación que utilizaremos con frecuencia. Dados $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $Q \in \mathcal{Q}$, el promedio de f en Q, f_Q, está dado por

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx = \fint_Q f(x)\,dx. \tag{1.18}$$

Lema 1.12. *Sea* $(\Psi, \Lambda, \Theta) \in \mathcal{F}$, *entonces*

$$f_Q \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q f w\|_\Lambda}{\|\mathcal{X}_Q\|_\Lambda} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\right\|_\Psi}{\|\mathcal{X}_Q\|_\Psi} \tag{1.19}$$

para toda función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *todo peso* w *y todo* $Q \in \mathcal{Q}$.

Demostración. Sean $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, w un peso y $Q \in \mathcal{Q}$. En virtud de la desigualdad de Hölder (1.16) y la condición **F3** tenemos que

$$f_Q \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q f\|_\Theta}{\|\mathcal{X}_Q\|_\Theta} \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta^*}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta^*}} = \frac{\|\mathcal{X}_Q f\|_\Theta}{\|\mathcal{X}_Q\|_\Theta}. \tag{1.20}$$

Notemos que por **F2**, podemos aplicar la desigualdad de Hölder (1.17) y obtener

$$\|\mathcal{X}_Q f\|_\Theta \lesssim \|\mathcal{X}_Q f w\|_\Lambda \left\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\right\|_\Psi.$$

Combinando esta desigualdad y la condición **F1**, a partir de (1.20) concluimos que

$$f_Q \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q f w\|_\Lambda}{\|\mathcal{X}_Q\|_\Lambda} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\right\|_\Psi}{\|\mathcal{X}_Q\|_\Psi}. \qquad \square$$

Observación 1.13. De la demostración del lema anterior deducimos que si (Ψ, Λ, Θ) es una 3-upla de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas que satisface las condiciones **F1** y **F2**, entonces

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_\Theta}{\|\mathcal{X}_Q\|_\Theta} \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_\Psi}{\|\mathcal{X}_Q\|_\Psi}$$

para todo peso w y todo $Q \in \mathcal{Q}$.

CAPÍTULO 2

Espacios de exponente variable

En este capítulo presentaremos dos casos especiales de espacios de Musielak-Orlicz que tendrán particular importancia para esta tesis: los espacios de Lebesgue de exponente variable y los espacios de Zygmund generalizados (y su versión pesada). Comenzaremos con las definiciones y enunciaremos algunos resultados importantes en estos contextos, unos extraídos de la bibliografía y otros propios, que serán necesarios para nuestro trabajo.

2.1. Espacios de Lebesgue de exponente variable

En las últimas décadas, los espacios de Lebesgue de exponente variable se han estudiado en forma intensiva, si bien el trabajo de investigación en dichos espacios se remonta como ya dijimos a 1931 ([91]). Este resurgimiento se debe, en parte, a que resultan ser el ámbito apropiado para analizar una gran variedad de problemas relacionados con ciertas clases de fluidos, llamados electroreológicos, que se caracterizan por la capacidad de modificar significativamente sus propiedades mecánicas cuando se les aplica un campo eléctrico ([100, 2, 3]). Además son el marco adecuado para desarrollar ciertos procesos de restauración de imágenes ([13, 45]) y estudiar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales ([5, 42]), entre otras aplicaciones.

Las propiedades de los espacios $L^{p(\cdot)}$ han sido estudiadas por diversos autores entre los cuáles podemos destacar el trabajo fundacional de Kováčik y Rákosník [65] y los libros [35] y [21].

Presentamos a continuación la definición de estos espacios y ciertos resultados conocidos en este contexto que serán de gran utilidad para el desarrollo de los resultados principales de esta tesis. En algunos casos incluiremos las demostraciones para familiarizar al lector con las técnicas usuales que se utilizan en este contexto.

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de las funciones $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$ medibles. Como ya hemos definido en la Sección 1.1, dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, denotamos con $\varphi_{p(\cdot)}$ a la función

$$\varphi_{p(\cdot)}(x,t) = \begin{cases} t^{p(x)}, & 1 \leq p(x) < \infty \\ \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t), & p(x) = \infty, \end{cases}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$, con la convención $\infty \cdot 0 = 0$.

El **espacio de Lebesgue de exponente variable**, que denotamos por $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, es el espacio de Musielak-Orlicz $L^{\varphi_{p(\cdot)}}(\mathbb{R}^n)$. Así, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las funciones medibles f definidas en $\mathbb{R}^n$ tales que, para alguna constante positiva λ,

$$\varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot)}(x, |f(x)|/\lambda)\, dx < \infty.$$

Según el Teorema 1.7, una norma en este espacio está dada por

$$\|f\|_{\varphi_{p(\cdot)}} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1\right\}.$$

Con $L^{p(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ denotaremos el espacio de funciones f tales que $f\mathcal{X}_U \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para todo conjunto compacto $U \subset \mathbb{R}^n$. Por simplicidad, en algunos casos denotaremos $L^{p(\cdot)} = L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $L^{p(\cdot)}_{\text{loc}} = L^{p(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\|\cdot\|_{p(\cdot)} = \|\cdot\|_{\varphi_{p(\cdot)}}$ o $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}} = \|\cdot\|_{\varphi_{p(\cdot)}}$.

En el caso en que $p \in [1, \infty]$ es constante, los espacios $L^{p(\cdot)}$ coinciden con los clásicos espacios de Lebesgue L^p. En efecto, sea $\lambda > 0$. Como

$$\varrho_p(f/\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p dx = \frac{1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx,$$

tenemos que

$$\varrho_p(f/\lambda) \leq 1 \iff \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \lambda.$$

Luego

$$\|f\|_p = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \varrho_p(f/\lambda) \leq 1\} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Por otro lado, notar que

$$\varrho_\infty(f/\lambda) \leq 1 \iff f(x) \leq \lambda \qquad \text{c.t.}\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \varrho_\infty(f/\lambda) \leq 1\} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : |\{x : f(x) > \lambda\}| = 0\} = \sup\text{ess}_{x\in\mathbb{R}^n} f(x).$$

Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, sea $\bar{\varphi}_{p(\cdot)}$ la función definida por

$$\bar{\varphi}_{p(\cdot)}(x,t) = \begin{cases} t^{p(x)}/p(x), & 1 \leq p(x) < \infty \\ \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t), & p(x) = \infty, \end{cases}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$. En [35] se demostró que el espacio $L^{\bar{\varphi}_{p(\cdot)}}$ es isomorfo a $L^{p(\cdot)}$. Es por ello que tomaremos indistintamente a $\bar{\varphi}_{p(\cdot)}$ y a $\varphi_{p(\cdot)}$ como las $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas asociadas al espacio $L^{p(\cdot)}$. Observar también que, para todo $t \geq 0$ el mapeo $p \mapsto \bar{\varphi}_p(t)$ es continuo con respecto a $p \in [1, \infty]$ y

$$\lim_{p\to\infty} \bar{\varphi}_p(t) = \varphi_\infty(t), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Esto sugiere que la expresión t^p/p para $p = \infty$ tiene una interpretación natural, que es precisamente $\infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t)$.

A partir de los resultados del capítulo anterior se tiene que si $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $(L^{p(\cdot)}, \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ es un espacio de Banach. Por otro lado, podemos deducir la propiedad de la bola unitaria en $L^{p(\cdot)}$ por la cual, si $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y f es una función medible tal que $0 < \|f\|_{p(\cdot)} < \infty$, entonces $\varrho_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot)}) \leq 1$. Además $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ y $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$ son equivalentes. Esta propiedad será usada recurrentemente a lo largo de toda la tesis.

De los Lemas 1.6, 1.9 y 1.10 se deducen generalizaciones de la desigualdad de Hölder en los espacios $L^{p(\cdot)}$ pero solo para el caso en que los exponentes involucrados tengan supremo finito pues, para $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, la función $\varphi_{p(\cdot)}(x, \cdot)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ no necesariamente es continua en $[0, \infty)$. Sin embargo, se puede probar un resultado que no considere esta restricción. En tal sentido veremos otra generalización de la desigualdad de Young.

Lema 2.1 ([35])**.** *Sean $p, r, s \in [1, \infty]$ tales que $1/s = 1/p + 1/r$. Entonces, para cualesquiera $a, b \geq 0$ vale la siguiente desigualdad*

$$\varphi_s(ab) \leq \varphi_p(a) + \varphi_r(b).$$

Enunciamos a continuación la desigualdad de Hölder para los espacios de Lebesgue de exponente variable que se obtiene a partir del lema anterior.

Lema 2.2 ([35])**.** *Sean $p(\cdot), r(\cdot), s(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1/s(\cdot) = 1/p(\cdot) + 1/r(\cdot)$ en c.t.p. de $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\|fg\|_{s(\cdot)} \leq 2\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{r(\cdot)} \tag{2.1}$$

para todo par de funciones $f \in L^{p(\cdot)}$ y $g \in L^{r(\cdot)}$.

Demostración. Sean $f \in L^{p(\cdot)}$ y $g \in L^{r(\cdot)}$. En virtud del Lema 2.1 tenemos que

$$\varphi_{s(\cdot)}(x, f(x)g(x)) \leq \varphi_{p(\cdot)}(x, f(x)) + \varphi_{r(\cdot)}(x, g(x)), \tag{2.2}$$

para c.t.$x \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $\|f\|_{p(\cdot)}, \|g\|_{r(\cdot)} \leq 1$ y, en consecuencia, $\varrho_{p(\cdot)}(f), \varrho_{r(\cdot)}(g) \leq 1$. Luego, por la convexidad de $\varphi_{s(\cdot)}$ y (2.2),

$$\varrho_{s(\cdot)}\left(\frac{1}{2}fg\right) \leq \frac{1}{2}\varrho_{s(\cdot)}(fg) \leq \frac{1}{2}\left[\varrho_{p(\cdot)}(f) + \varrho_{r(\cdot)}(g)\right] \leq 1.$$

Por lo tanto, $\|fg\|_{s(\cdot)} \leq 2$. Para f y g en general el resultado se sigue por el **argumento de escala**: si $\|f\|_{p(\cdot)}, \|g\|_{r(\cdot)} > 0$, sean $\tilde{f} = f/\|f\|_{p(\cdot)}$ y $\tilde{g} = g/\|g\|_{r(\cdot)}$. Entonces $||\tilde{f}||_{p(\cdot)} = \|\tilde{g}\|_{r(\cdot)} = 1$ y, por el caso anterior, tenemos $||\tilde{f}\tilde{g}||_{s(\cdot)} \leq 2$. Luego, por las propiedades de la norma podemos concluir que$\|fg\|_{s(\cdot)} \leq 2\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{r(\cdot)}$. □

Notemos que, si $s(\cdot) \equiv 1$ y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, del lema anterior deducimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx \leq 2\,\|f\|_{p(\cdot)}\,\|g\|_{p'(\cdot)} \tag{2.3}$$

para todo par de funciones $f \in L^{p(\cdot)}$ y $g \in L^{p'(\cdot)}$.

En virtud del Teorema 1.11 y el Lema 1.6, tenemos el siguiente resultado de dualidad.

Teorema 2.3 ([35], **Fórmula de la norma conjugada en** $L^{p(\cdot)}$)**.** *Sea* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *con* $p^- > 1$*, entonces para toda función medible* f *se verifica*

$$\|f\|_{p(\cdot)} \simeq \sup_{g \in L^{p'(\cdot)}\,:\,\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx.$$

Otras propiedades que verifica la norma $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ y que serán útiles para el desarrollo de esta tesis se enuncian en los siguientes lemas.

Lema 2.4 ([35])**.** *Dados* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *y una constante* $S > 0$ *tal que* $Sp^- \geq 1$ *se verifica* $\|f^S\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{Sp(\cdot)}^S$.

Lema 2.5 ([35])**.** *Dado* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$*. Entonces, para todo cubo* $Q \in \mathcal{Q}$*,*

$$\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)} \geq \min\{1, |Q|\}.$$

Presentamos a continuación un resultado de inmersión de los espacios suma de espacios de Lebesgue de exponente variable. El mismo será útil en la prueba del Lema 4.2 necesario para obtener estimaciones asociadas a ciertos operadores maximales estudiados en esta tesis.

Lema 2.6 ([35])**.** *Dados* $p(\cdot), s(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *tales que* $s(\cdot) \leq p(\cdot)$ *en c.t.p. de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces*

$$L^{p(\cdot)} \hookrightarrow L^{s(\cdot)} + L^\infty.$$

Más aún, para toda función $f \in L^{p(\cdot)}$, $\|f\|_{L^{s(\cdot)}+L^\infty} \leq 2\,\|f\|_{p(\cdot)}$.

El espacio $L^{s(\cdot)} + L^\infty$, como es usual, denota el conjunto $\{f : f = g + h, g \in L^{s(\cdot)}, h \in L^\infty\}$ dotado con la norma $\|\cdot\|_{L^{s(\cdot)}+L^\infty}$ definida por

$$\|f\|_{L^{s(\cdot)}+L^\infty} = \inf_{g \in L^{s(\cdot)},\, h \in L^\infty : f = g+h} \left(\|g\|_{s(\cdot)} + \|h\|_\infty\right).$$

Demostración Lema 2.6. Sea $f \in L^{p(\cdot)}$ con $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, entonces $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$. Definamos las funciones $f_0 = \operatorname{sgn}(f)\max\{|f| - 1; 0\}$ y $f_1 = \operatorname{sgn}(f)\min\{|f|; 1\}$. Así $f = f_0 + f_1$. Si vemos que se verifican las siguientes desigualdades

$$\varphi_{s(\cdot)}(x, |f_0(x)|) \leq \varphi_{p(\cdot)}(x, |f(x)|), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

y

$$\varphi_\infty(x, |f_1(x)|) \leq \varphi_{p(\cdot)}(x, |f(x)|), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

obtendremos que

$$\varrho_{s(\cdot)}(f_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{s(\cdot)}(x, |f_0(x)|)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot)}(x, |f(x)|)\, dx = \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$$

y

$$\varrho_{\infty}(f_1) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\infty}(x, |f_1(x)|)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot)}(x, |f(x)|)\, dx = \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1.$$

En consecuencia concluimos $\|f_0\|_{s(\cdot)} \leq 1$ y $\|f_1\|_{\infty} \leq 1$. En particular, $\|f\|_{L^{s(\cdot)}+L^{\infty}} \leq 2$. Luego, por el argumento de escala, concluimos $\|f\|_{L^{s(\cdot)}+L^{\infty}} \leq 2\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}}$.

Probemos entonces (2.4) y (2.5). Si $|f(x)| \leq 1$, entonces $\varphi_{s(\cdot)}(x, |f_0(x)|) = 0$ y (2.4) vale trivialmente. Asumamos entonces $|f(x)| > 1$. Si $p(x) = \infty$, $\varphi_{p(\cdot)}(x, |f(x)|) = \infty$ y (2.4) se cumple. Supongamos $p(x) < \infty$ y, en consecuencia, $s(x) < \infty$. Entonces

$$\varphi_{p(\cdot)}(x, |f(x)|) \geq \varphi_{s(\cdot)}(x, |f(x)|) \geq \varphi_{s(\cdot)}(x, |f(x)| - 1),$$

y concluimos la prueba de (2.4). Por otro lado, notemos que si $|f(x)| \geq 1$, entonces se verifica $\varphi_{\infty}(x, |f_1(x)|) = \varphi_{\infty}(x, 1) = 0$ y, si $|f(x)| \leq 1$, tenemos que $\varphi_{\infty}(x, |f_1(x)|) = \varphi_{\infty}(x, |f(x)|)$. En ambos casos resulta $\varphi_{\infty}(x, |f_1(x)|) \leq \varphi_{p(\cdot)}(x, |f(x)|)$, lo que demuestra (2.5). □

2.1.1. Condiciones de tipo logarítmicas

Para el estudio de propiedades de continuidad de operadores en los espacios $L^{p(\cdot)}$ es necesario asumir cierta regularidad en el exponente $p(\cdot)$, la llamada *continuidad de tipo logarítmica* o *continuidad* log-*Hölder*.

Definición. Una función $\alpha(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **log-Hölder continua localmente** en $\mathbb{R}^n$ si existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq \frac{C_1}{\log(e + 1/|x-y|)}, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Por otro lado, decimos que $\alpha(\cdot)$ satisface la **condición de decaimiento log-Hölder** en $\mathbb{R}^n$ si existen constantes $\alpha_{\infty} \in \mathbb{R}$ y $C_2 > 0$ tales que

$$|\alpha(x) - \alpha_{\infty}| \leq \frac{C_2}{\log(e + |x|)}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

Decimos que una función $\alpha(\cdot)$ es **log-Hölder continua (globalmente)** en $\mathbb{R}^n$, y lo denotamos $\alpha(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n)$, si es localmente log-Hölder continua y satisface la condición de decaimiento log-Hölder en $\mathbb{R}^n$, esto es, si verifica (2.6) y (2.7), respectivamente.

Cuando $\alpha(\cdot)$ es continua y acotada, es decir, $-\infty < \alpha^- \leq \alpha^+ < \infty$, una condición equivalente a (2.6) es: existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq \frac{C}{-\log(|x-y|)}, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ 0 < |x-y| < 1/2, \tag{2.8}$$

(ver [[33], Lemma 3.2.] y [[35], Lemma 4.1.6]).

La condición de continuidad log-Hölder local fue introducida en este contexto por Sharapudinov [106] en la forma (2.8) y luego en [33, 56, 57, 93, 99, 110, 111, 112] y [103]. En [33] Diening prueba que si $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es un exponente continuo con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ que verifica la condición (2.8) y, además, es constante fuera de una bola fija en $\mathbb{R}^n$ centrada en el origen, entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Posteriormente, en [22] e independientemente en [89], los autores obtienen la misma acotación pero reemplazando la condición de constancia de $p(\cdot)$ fuera de una bola por la condición: existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ |x| \leq |y|. \tag{2.9}$$

Notar que la condición (2.7) implica la condición (2.9).

En esta tesis trabajaremos con la condición de continuidad log-Hölder global en el exponente pues ésta es la mejor condición puntual posible que implica la acotación de M en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ (ver [22, 93]). Sin embargo, es posible obtener resultados bajo condiciones más débiles pero de tipo integral ([89]), según la oscilación media de $p(\cdot)$ ([67]) o el comportamiento de $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ en promedios para la maximal M ([34]), entre otras.

Notemos que toda función que verifica (2.7) es acotada, en efecto,

$$|\alpha(x)| \leq |\alpha(x) - \alpha_\infty| + |\alpha_\infty| \leq \frac{C_2}{\log(e + |x|)} + |\alpha_\infty| \leq C_2 + |\alpha_\infty|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Damos a continuación un ejemplo de una función en $LH(\mathbb{R}^n)$. Consideremos

$$\alpha(x) = \frac{C}{\log(e + |x|)}, \tag{2.10}$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Por ser una función continua y acotada en $\mathbb{R}^n$, para ver (2.6) basta probar (2.8). Como $\alpha(\cdot)$ es una función Lipschitz resulta

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \lesssim |x - y| \leq \frac{C}{-\log(|x - y|)}, \tag{2.11}$$

para $x, y \in \mathbb{R}^n$. La condición (2.7) se verifica con $\alpha_\infty = 0$.

En el siguiente lema se dan algunas propiedades relativas a las funciones log-Hölder continuas. Su demostración es sencilla así que la omitiremos.

Lema 2.7. *Dadas $\alpha(\cdot), \eta(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n)$ y $S \in \mathbb{R}$, valen las siguientes propiedades:*

(i) $\alpha(\cdot) \pm \eta(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $S\alpha(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n)$.

Definición. Denotamos por $\boldsymbol{\mathcal{P}^{log}}(\mathbb{R}^n)$ al siguiente conjunto de exponentes

$$\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n) = \{p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) : 1/p(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n)\}.$$

A veces, por simplicidad, escribiremos $\mathcal{P}^{log} = \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y $LH = LH(\mathbb{R}^n)$.

Observación 2.8. Notemos que, aunque el exponente $1/p(\cdot)$ es siempre acotado cuando $p(\cdot)$ pertenece a la clase $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, el exponente $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ puede no serlo (por ejemplo si tomamos $p(\cdot) = 1/\alpha(\cdot)$ con $\alpha(\cdot)$ como en (2.10)). Pero, si $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ con $p^+ < \infty$, entonces

$$p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n) \text{ si y solo si } p(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n),$$

lo cual puede deducirse de la desigualdad

$$|p(x) - p(y)| = |p(x)p(y)| \left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)} \right|, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

En el siguiente lema se dan algunas propiedades relativas a los exponentes de la clase $\mathcal{P}^{log}$. Las mismas serán de utilidad en las demostraciones de los resultados principales de esta tesis.

Lema 2.9. *Dados $s(\cdot), p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y $S \in \mathbb{R}$ tal que $Sp^- \geq 1$, valen las siguientes propiedades:*

(i) *$Sp(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *$p'(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$.*

(iii) *Si además, $p'(\cdot) \leq s(\cdot)$ y $\omega(\cdot)$ es el exponente definido por $1/\omega(\cdot) = 1/s(\cdot) + 1/p(\cdot)$, entonces $\omega(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$.*

(iv) *Por otro lado, si $s(\cdot) \leq p(\cdot)$ y $\beta(\cdot)$ es el exponente definido por $1/\beta(\cdot) = 1/s(\cdot) - 1/p(\cdot)$, entonces $\beta(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$.*

(v) *Si $s(\cdot)$ y $p(\cdot)$ verifican $s^+, p^+ < \infty$, entonces $(sp)(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. (i) Ya que $Sp^- \geq 1$, se tiene que $Sp(\cdot) \in \mathcal{P}$. Además, como $1/p(\cdot) \in LH$, por Lema 2.7 (ii), $1/(Sp(\cdot)) \in LH$. Luego $Sp(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$.

(ii) Como $1/p'(\cdot) = 1 - 1/p(\cdot)$, $p'(\cdot) \in \mathcal{P}$. Además, por el Lema 2.7 (i), obtenemos que $1/p'(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n)$ y, por tanto, $p'(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$.

(iii) y (iv): Dado que $s(\cdot), p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$, tenemos $1/s(\cdot), 1/p(\cdot) \in LH$. Entonces, por Lema 2.7 (i), $1/s(\cdot) \pm 1/p(\cdot) \in LH$. Por otro lado, si $p'(\cdot) \leq s(\cdot)$ entonces

$$0 \leq \frac{1}{\omega(\cdot)} = \frac{1}{s(\cdot)} + \frac{1}{p(\cdot)} \leq \frac{1}{p'(\cdot)} + \frac{1}{p(\cdot)} = 1$$

y resulta $\omega(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$. En cambio, si $s(\cdot) \leq p(\cdot)$,

$$0 \leq \frac{1}{s(\cdot)} - \frac{1}{p(\cdot)} = \frac{1}{\beta(\cdot)} \leq \frac{1}{s(\cdot)} \leq 1.$$

Luego $\beta(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$.

(v) Ya que $s^+, p^+ < \infty$ entonces, por la Observación 2.8, basta ver que $(sp)(\cdot) \in \mathcal{P} \cap LH$. Claramente $(sp)(\cdot) \in \mathcal{P}$ y como

$$|(sp)(x) - (sp)(y)| \leq s^+|p(x) - p(y)| + p^+|s(x) - s(y)|$$

y $s(\cdot), p(\cdot) \in LH$, concluimos $(sp)(\cdot) \in LH$. □

A continuación daremos algunas desigualdades entre normas en $L^{p(\cdot)}$ de ciertas funciones cuando $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$. Las mismas serán de gran utilidad al momento estudiar propiedades de continuidad de operadores en este contexto.

La función que a cada cubo $Q \in \mathcal{Q}$ le asigna el valor $\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}$ tiene la propiedad de duplicación cuando $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.10 ([94]). *Si $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante positiva C_p tal que la desigualdad*

$$\|\mathcal{X}_{2Q}\|_{p(\cdot)} \leq C_p \|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)} \tag{2.12}$$

vale para todo cubo $Q \in \mathcal{Q}$.

El siguiente resultado estima la norma de la funciones características de cubos en $\mathcal{Q}$ cuando el exponente involucrado pertenece a la clase $\mathcal{P}^{log}$.

Teorema 2.11 ([35]). *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y $Q \in \mathcal{Q}$. Entonces*

$$\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)} \simeq |Q|^{(1/p)_Q},$$

donde $(1/p)_Q$ denota el promedio de $1/p(\cdot)$ en el cubo Q (ver (1.18)). Más aún,

$$\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)} \simeq \begin{cases} |Q|^{1/p(x)}, & \text{si } |Q| \leq 2^n \text{ y } x \in Q \\ |Q|^{1/p_\infty}, & \text{si } |Q| \geq 1. \end{cases}$$

donde $1/p_\infty$ es la constante de decaimiento de $1/p(\cdot)$ definida en (2.7).

Notemos que, dado un exponente $p(\cdot)$,

$$\left(\frac{1}{p}\right)_Q + \left(\frac{1}{p'}\right)_Q = \fint_Q \frac{1}{p(y)}\,dy + \fint_Q \frac{1}{p'(y)}\,dy = 1.$$

Por lo tanto, si $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, por el Lema 2.9 (ii) y el teorema anterior concluimos que

$$\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)} \|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)} \simeq |Q|, \qquad \forall\, Q \in \mathcal{Q}. \tag{2.13}$$

Más aún, tenemos el siguiente resultado más general.

Corolario 2.12. *Dados $s(\cdot), p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $s(\cdot) \leq p(\cdot)$. Supongamos que $\beta(\cdot)$ es el exponente definido por $1/\beta(\cdot) = 1/s(\cdot) - 1/p(\cdot)$. Entonces,*

$$\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)} \simeq \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} \|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}, \qquad \forall\, Q \in \mathcal{Q}.$$

Cuando p es un exponentes constante y $\mathcal{G}$ es una colección de conjuntos en $\mathbb{R}^n$ disjuntos dos a dos, la desigualdad de Hölder "discreta" permite obtener

$$\sum_{Q\in\mathcal{G}} \left(\int_Q f(x)^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_Q g(x)^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \lesssim \left(\sum_{Q\in\mathcal{G}} \int_Q f(x)^p\,dx\right)^{1/p} \left(\sum_{Q\in\mathcal{G}} \int_Q g(x)^{p'}\,dx\right)^{1/p'}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p'} \, dx \right)^{1/p'}.$$

El siguiente resultado da una generalización de la desigualdad anterior en el caso de exponentes variables.

Teorema 2.13 ([35]). *Si $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{Q}$ es una colección de cubos disjuntos dos a dos, entonces existe una constante $G > 0$ tal que la siguiente desigualdad*

$$\sum_{Q \in \mathcal{G}} \|f\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)} \|g\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)} \leq G \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}$$

vale para todo par de funciones $f \in L^{p(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Este tipo de desigualdades resulta muy útil para extender resultados locales a globales. Cuando la familia de cubos $\mathcal{G}$ que se considera no es disjunta pero tiene una propiedad de solapamiento acotado, en [77] hemos probado un resultado análogo al anterior. Para enunciarlo recordemos la definición de la familia de cubos diádicos. Sea $\mathcal{D}_0$ la colección de los cubos en $\mathbb{R}^n$ congruentes con el cubo unitario $[0,1)^n$ con vértices en $\mathbb{Z}^n$. Para $k \in \mathbb{Z}$, sea $\mathcal{D}_k$ la familia que reúne los cubos de $\mathcal{D}_0$ dilatados por un factor 2^{-k} con vértices en $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$. Entonces la **familia de cubos diádicos** se define y denota por

$$\mathcal{D} = \bigcup_k \mathcal{D}_k. \tag{2.14}$$

Lema 2.14. *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, $d \in \mathbb{Z}$ y Q_0 un cubo diádico. Si para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $\mathcal{O}_i$ como*

$$\mathcal{O}_i = \{iQ \, : \, Q \in \mathcal{D}, \, Q \subset Q_0 \;\; y \;\; \ell(Q) = 2^{-d}\}$$

donde $\ell(Q)$ indica el lado de Q, entonces existe una constante $G > 0$ tal que la siguiente desigualdad

$$\sum_{Q \in \mathcal{O}_1} \|f\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)} \|g\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)} \leq G \|f\mathcal{X}_{3Q_0}\|_{p(\cdot)} \|g\mathcal{X}_{3Q_0}\|_{p'(\cdot)} \tag{2.15}$$

vale para todo par de funciones $f \in L^{p(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Para demostrar este resultado necesitaremos el siguiente lema que involucra familias localmente N-finitas. Dada una constante $N \in \mathbb{N}$, decimos que una familia $\mathcal{G}$ de conjuntos medibles es **localmente N-finita**, si

$$\sum_{\mathrm{U} \in \mathcal{G}} \mathcal{X}_{\mathrm{U}}(x) \leq N, \qquad \text{c.t.} x \in \mathbb{R}^n.$$

Por ejemplo, toda familia de conjuntos disjuntos es localmente 1-finita.

Lema 2.15 ([35]). *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{Q}$ una familia de cubos localmente N-finita para cierta constante $N \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\left\| \sum_{Q\in\mathcal{G}} \mathcal{X}_Q \frac{\|f\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} \simeq \left\| \sum_{Q\in\mathcal{G}} f\mathcal{X}_Q \right\|_{p(\cdot)} \tag{2.16}$$

para toda función $f \in L^{p(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración Lema 2.14. Sean $f \in L^{p(\cdot)}_{\text{loc}}$ y $g \in L^{p'(\cdot)}_{\text{loc}}$. Como $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$, por la equivalencia (2.13) tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{Q\in\mathcal{O}_1} \|f\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)} \|g\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)} &\simeq \sum_{Q\in\mathcal{O}_1} |3Q| \frac{\|f\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)}} \frac{\|g\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{Q\in\mathcal{O}_1} \mathcal{X}_{3Q}(x) \frac{\|f\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)}} \frac{\|g\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}}\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{Q\in\mathcal{O}_1} \mathcal{X}_{3Q}(x) \frac{\|f\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)}} \right) \left(\sum_{Q\in\mathcal{O}_1} \mathcal{X}_{3Q}(x) \frac{\|g\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}} \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{F\in\mathcal{O}_3} \mathcal{X}_{F}(x) \frac{\|f\mathcal{X}_{F}\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{F}\|_{p(\cdot)}} \right) \left(\sum_{F\in\mathcal{O}_3} \mathcal{X}_{F}(x) \frac{\|g\mathcal{X}_{F}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{F}\|_{p'(\cdot)}} \right) dx.
\end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Hölder (2.3) y la definición del conjunto $\mathcal{O}_3$,

$$\sum_{Q\in\mathcal{O}_1} \|f\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)} \|g\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)} \lesssim \left\| \sum_{F\in\mathcal{O}_3} \mathcal{X}_F \frac{\|f\mathcal{X}_{3Q_0}\mathcal{X}_F\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_F\|_{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} \left\| \sum_{F\in\mathcal{O}_3} \mathcal{X}_F \frac{\|g\mathcal{X}_{3Q_0}\mathcal{X}_F\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_F\|_{p'(\cdot)}} \right\|_{p'(\cdot)}.$$

Dado que la familia $\mathcal{O}_3$ es localmente N-finita con $N = C(n)$, por el Lema 2.15 concluimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{Q\in\mathcal{O}_1} \|f\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)} \|g\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)} &\lesssim \left\| f\mathcal{X}_{3Q_0} \sum_{F\in\mathcal{O}_3} \mathcal{X}_F \right\|_{p(\cdot)} \left\| g\mathcal{X}_{3Q_0} \sum_{F\in\mathcal{O}_3} \mathcal{X}_F \right\|_{p'(\cdot)} \\
&\lesssim \|f\mathcal{X}_{3Q_0}\|_{p(\cdot)} \|g\mathcal{X}_{3Q_0}\|_{p'(\cdot)}.
\end{aligned}$$

□

2.2. Espacios de Zygmund generalizados y la clase $\mathcal{P}^{loglog}$

Una familia particular de los espacios de Musielak-Orlicz es la clase de los espacios de Zygmund $L^p(\log L)^q$ generalizados. A continuación daremos su definición y propiedades. Varios autores han estudiado problemas de acotación en estos espacios entre los que podemos citar: Cruz-Uribe y Fiorenza ([20]), y Bernardis, Dalmasso y Pradolini ([6]) que obtienen generalizaciones de la desigualdad de Wiener (ver [109] y [39]) en este contexto, Mizuta, Ohno y Shimomura ([80]) que abordan el problema de la continuidad de los potenciales de Riesz en estos espacios, y Maeda, Mizuta y Ohno ([75]) que estudian la convergencia de aproximaciones a la identidad en este marco.

Definición. Dados $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $q^+ < \infty$ que verifican la siguiente relación

$$2(p(x) - 1) + q(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.17}$$

sea $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}$ la $\mathbf{\Phi}$-función generalizada definida como en (1.9) para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$, por

$$\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) = \begin{cases} t^{p(x)}(\log(e+t))^{q(x)}, & 1 \leq p(x) < \infty \\ \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(t), & p(x) = \infty. \end{cases}$$

El **espacio de Zygmund generalizado** $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, es el espacio de Musielak-Orlicz asociado a $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}$, esto es $L^{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} = \|\cdot\|_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}$.

Recordemos que la condición (2.17) en los exponentes $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ es suficiente para que $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)} \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ (ver Subsección 1.1.1). Por lo tanto, en todos los conceptos y resultados que expondremos en este contexto supondremos, sin aclararlo expresamente, que ésta relación se satisface.

En $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$ podemos introducir, entre otros, dos tipos de convergencia de sucesiones que serán útiles para probar propiedades de densidad en estos espacios.

Definición. Sean $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$. Decimos que

- f_j **converge en modular** $\varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}$ a f si para alguna constante $\beta > 0$,

$$\lim_{j\to\infty} \varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(\beta(f - f_j)) = 0. \tag{2.18}$$

- f_j **converge en norma** $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}$ a f si

$$\lim_{j\to\infty} \|f - f_j\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} = 0. \tag{2.19}$$

Con ciertas condiciones en los exponentes involucrados ambas convergencias son equivalentes. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.16. *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ con $p^+, q^+ < \infty$. Sean $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ y f una función medible. Entonces las condiciones* (2.18) *y* (2.19) *son equivalentes.*

Demostración. Supongamos que existe una constante $\beta > 0$ tal que se verifica (2.18). Tomemos $0 < \lambda < 1/\beta$. Entonces, por la desigualdad (A.VII) del Apéndice,

$$\begin{aligned} \varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}\left(\frac{f - f_j}{\lambda}\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\beta|f - f_j|}{\lambda\beta}\right)^{p(x)} \left(\log\left(e + \frac{\beta|f - f_j|}{\lambda\beta}\right)\right)^{q(x)} dx \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda\beta}\right)^{p^+} \left[\log\left(\frac{1}{\lambda\beta}\right) + 1\right]^{q^+} \varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(\beta(f - f_j)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para j suficientemente grande $\varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}((f-f_j)/\lambda) \leq 1$ y entonces, por la propiedad de la bola unitaria, $\|f-f_j\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq \lambda$. Luego, por la arbitrariedad de λ, concluimos (2.19). Recíprocamente, supongamos que se verifica (2.19). Entonces, dado $\beta > 0$,

$$\lim_{j\to\infty} \|\beta(f-f_j)\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} = \beta \lim_{j\to\infty} \|f-f_j\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} = 0. \tag{2.20}$$

Consecuentemente, para j suficientemente grade, $\|\beta(f-f_j)\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$. Luego, por la convexidad de $\varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(\beta(f-f_j)) &= \varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}\left(\|\beta(f-f_j)\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \frac{\beta(f-f_j)}{\|\beta(f-f_j)\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}}\right) \\
&\leq \|\beta(f-f_j)\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}\, \varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}\left(\frac{\beta(f-f_j)}{\|\beta(f-f_j)\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}}\right) \\
&\leq \|\beta(f-f_j)\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

Combinando esta desigualdad con (2.20) concluimos (2.18). □

Relacionado con la acotación de operadores en estos espacios surge una clase de exponentes que describiremos a continuación.

Definición. Sea $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible. Diremos que $q(\cdot)$ es **loglog-Hölder continua** en $\mathbb{R}^n$, y lo denotaremos por $q(\cdot) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)}$, si $-\infty < q^- \leq q^+ < \infty$ y existe una constante $C > 0$ tal que

$$|q(x) - q(y)| \leq \frac{C}{\log(e + \log(e + 1/|x-y|))}, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.21}$$

Notar que la condición de continuidad log-Hölder local (2.6) implica la condición (2.21) (ver Apéndice, Lema A.8), pero a diferencia de la clase $\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, a los exponentes en $\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ no les impondremos una condición de decaimiento sino solo que sean acotados. Se verifica entonces que

$$p^+ < \infty \ \text{ y } \ p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n), \ \text{ entonces } \ p(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n). \tag{2.22}$$

En [75], los autores probaron el siguiente resultado de continuidad del operador maximal de Hardy-Littlewood en los espacios de Zygmund generalizados.

Teorema 2.17 ([75])**.** *Dados $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ y $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$, entonces el operador maximal M es continuo en $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Observación 2.18. Sea R una constante positiva y consideremos el operador maximal M_R definido por $(Mf^R)^{1/R}$. Si $p(\cdot), q(\cdot)$ verifican las hipótesis del teorema anterior y $R < p^-$, de este resultado se deduce que M_R es acotado en $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

En los siguientes resultados se presentan algunas propiedades relativas a los exponentes loglog-Hölder continuos.

Lema 2.19. *Dados $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$, entonces $(pq)(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$. Si además $p^- > 0$, entonces $(q/p)(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Como

$$\begin{aligned}|p(x)q(x) - p(y)q(y)| &\leq |p(x)||q(x) - q(y)| + |q(y)||p(x) - p(y)| \\ &\lesssim \frac{p^+ + q^+}{\log(e + \log(e + 1/|x-y|))}.\end{aligned}$$

concluimos que $(pq)(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}$. Por otro lado, como $(q/p)(\cdot) = q(\cdot)(1/p)(\cdot)$ y $(1/p)^+ < \infty$, entonces $(q/p)(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}$ se sigue de lo anterior. □

Proposición 2.20. *Sean $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ y $Q \in \mathcal{Q}$. Entonces,*

$$(\log(e + 1/|Q|))^{q(x)} \simeq (\log(e + 1/|Q|))^{q(y)}, \qquad \forall\, x, y \in Q. \tag{2.23}$$

Más aún,

$$(\log(e + 1/|Q|))^{q_Q} \lesssim (\log(e + 1/|Q|))^{q(x)} \qquad \forall\, x \in Q, \tag{2.24}$$

donde $q_Q = \fint_Q q(x)\, dx$.

Demostración. Sean $x, y \in Q$. En virtud del Lema A.12 del Apéndice, para demostrar (2.23) es suficiente ver que existe una constante $C > 0$ tal que

$$(\log(e + 1/|Q|))^{|q(x) - q(y)|} \leq C$$

o, equivalentemente,

$$\exp[|q(x) - q(y)| \log(\log(e + 1/|Q|))] \leq C. \tag{2.25}$$

Dado que $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}$,

$$\exp(|q(x) - q(y)| \log(\log(e + 1/|Q|))) \leq \exp\left(C_{loglog}(q) \frac{\log(e + \log(e + 1/|Q|))}{\log(e + \log(e + 1/|x-y|))}\right). \tag{2.26}$$

Como $x, y \in Q$, entonces $|x - y| \leq \sqrt{n}|Q|^{1/n}$. Luego

$$\log\left(e + \log\left(e + \frac{1}{\sqrt{n}|Q|^{1/n}}\right)\right) \leq \log\left(e + \log\left(e + \frac{1}{|x-y|}\right)\right).$$

Por lo tanto, si probamos que

$$\log\left(e + \log\left(e + \frac{1}{|Q|}\right)\right) \leq \kappa \log\left(e + \log\left(e + \frac{1}{\sqrt{n}|Q|^{1/n}}\right)\right) \tag{2.27}$$

para cierta constante $\kappa > 0$ entonces, por (2.26), podremos concluir (2.25).

Verifiquemos entonces (2.27). Notar que, por la desigualdad (A.V) con $a = 1/n$ y (A.VII) con $C_2 = \sqrt{n}$ (ver Apéndice), existe una constante $\kappa_1 \geq 1$ tal que

$$\log\left(e + \frac{1}{|Q|}\right) \leq n \log\left(e + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}|Q|^{1/n}}\right) \leq \kappa_1 \log\left(e + \frac{1}{\sqrt{n}|Q|^{1/n}}\right),$$

y por lo tanto,

$$\log\left(e + \log\left(e + \frac{1}{|Q|}\right)\right) \leq \log\left(e + \kappa_1 \log\left(e + \frac{1}{\sqrt{n}|Q|^{1/n}}\right)\right).$$

Utilizando nuevamente (A.VII) con $C_2 = \kappa_1$ (ver Apéndice) obtenemos

$$\log\left(e + \log\left(e + \frac{1}{|Q|}\right)\right) \leq \kappa \log\left(e + \log\left(e + \frac{1}{\sqrt{n}|Q|^{1/n}}\right)\right),$$

para cierta constante $\kappa \geq 1$, lo que concluye la prueba de (2.27).

Para demostrar la desigualdad (2.24) consideramos la función convexa $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(u) = (\log(e + 1/|Q|))^u$. Dado $x \in Q$, por la desigualdad de Jensen y la desigualdad (2.23), tenemos que

$$\begin{aligned}(\log(e+1/|Q|))^{q_Q} = h(q_Q) &\leq ⨍_Q h\left(q(y)\right)\, dy = ⨍_Q (\log(e+1/|Q|))^{q(y)}\, dy \\ &\simeq ⨍_Q (\log(e+1/|Q|))^{q(x)}\, dy \simeq (\log(e+1/|Q|))^{q(x)}.\end{aligned}$$

□

Estimaciones de $\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot),q(\cdot)}$

Como vimos en la Subsección 2.1.1, en [35] los autores probaron que, si $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)} \simeq |Q|^{(1/p)_Q}$ para todo cubo $Q \in \mathcal{Q}$. Con el propósito de encontrar ejemplos de 3-tuplas de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas de tipo $L \log L$ en la clase $\mathcal{F}$ (ver Subsección 1.2.1), en esta sección generalizamos dicho resultado para el caso de la norma en $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, esto es, estimamos $\|\mathcal{X}_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}$ con ciertos exponentes $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$. Concretamente, en [78] obtuvimos la siguiente proposición.

Proposición 2.21. *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ y $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ una función no negativa. Entonces*

$$\|\mathcal{X}_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \simeq |Q|^{(1/p)_Q} (\log(e + 1/|Q|))^{(q/p)_Q}$$

para todo cubo $Q \in \mathcal{Q}$.

Para demostrar la proposición anterior presentaremos algunos resultados obtenidos en [78] respecto a la $\mathbf{\Phi}$-función generalizada involucrada, $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}$. Recordemos que, si $p(\cdot), q(\cdot)$ son funciones no negativas definidas en $\mathbb{R}^n$ tales que $p^- > 0$ y $q^+ < \infty$, en virtud del Lema 1.6,

$$\varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) \simeq \begin{cases} t^{1/p(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/p(x)}, & \text{si } p(x) < \infty \\ \mathcal{X}_{(0,\infty]}(t), & \text{si } p(x) = \infty; \end{cases} \tag{2.28}$$

y, si además $p^- > 1$,

$$\varphi^{*}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) \simeq \begin{cases} t^{p'(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/(p(x)-1)}, & \text{si } p(x) < \infty \\ t, & \text{si } p(x) = \infty. \end{cases} \tag{2.29}$$

Lema 2.22. *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ con $q^+ < \infty$ y $Q \in \mathcal{Q}$. Entonces, para todo $t \geq 0$, se tiene la siguiente desigualdad*

$$t \lesssim \fint_Q \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t)\,dx \fint_Q (\log(e+t))^{q(x)} \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x,t)\,dx.$$

Demostración. Es suficiente considerar $t > 0$ ya que el caso $t = 0$ es trivial. Sea $x \in Q$. Si $1 < p(x) < \infty$, por (2.28),

$$\varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t)\ \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x,t) \simeq \frac{t^{1/p(x)}}{(\log(e+t))^{q(x)/p(x)}} \frac{t^{1/p'(x)}}{(\log(e+t))^{q(x)/p'(x)}} = \frac{t}{(\log(e+t))^{q(x)}}.$$

Si en cambio, $p(x) = 1$ o $p(x) = \infty$, por (2.28),

$$\varphi^{-1}_{1,q(\cdot)}(x,t)\ \varphi^{-1}_{\infty,q(\cdot)}(x,t) \simeq \frac{t}{(\log(e+t))^{q(x)}} \mathcal{X}_{(0,\infty]}(t) = \frac{t}{(\log(e+t))^{q(x)}}.$$

En todos los casos obtenemos

$$\varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t)\ \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x,t) \simeq \frac{t}{(\log(e+t))^{q(x)}}.$$

Luego, considerando el mapeo convexo $z \mapsto 1/z$, en virtud de la *desigualdad de Jensen* tenemos que

$$\fint_Q \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t)dx \simeq t \fint_Q \frac{1}{(\log(e+t))^{q(x)} \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x,t)} dx \geq t \frac{1}{\fint_Q (\log(e+t))^{q(x)} \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x,t)dx}.$$

□

Para enunciar el siguiente lema notemos que, si $\alpha \geq 1$ y $\theta \geq 0$ son dos constantes y

$$\varphi_{\alpha,\theta}(t) = t^{\alpha}(\log(e+t))^{\theta},$$

entonces, de (2.28) tenemos que

$$\varphi^{-1}_{\alpha,\theta}(t) \simeq t^{1/\alpha}(\log(e+t))^{-\theta/\alpha}. \tag{2.30}$$

Lema 2.23. *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $p^+ < \infty$ y $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ una función no negativa. Entonces, para todo $Q \in \mathcal{Q}$, vale la siguiente desigualdad*

$$\varphi^{-1}_{\frac{1}{(1/p)_Q},\frac{(q/p)_Q}{(1/p)_Q}}(1/|Q|) \lesssim \fint_Q \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, 1/|Q|)\,dx.$$

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{Q}$. Notemos que

$$1 \leq \frac{1}{(1/p)_Q} \leq p^+ < \infty \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \frac{(q/p)_Q}{(1/p)_Q} \leq p^+q^+ < \infty.$$

Luego, por (2.30) con $\alpha = 1/(1/p)_Q$ y $\theta = (q/p)_Q/(1/p)_Q$, tenemos que

$$\varphi^{-1}_{\frac{1}{(1/p)_Q},\frac{(q/p)_Q}{(1/p)_Q}}(1/|Q|) \simeq (1/|Q|)^{(1/p)_Q}\,(\log(e + (1/|Q|)))^{-(q/p)_Q}. \tag{2.31}$$

Dado $x \in Q$, consideremos las funciones h y g_x definidas por

$$h(z) = (1/|Q|)^z\,(\log(e + (1/|Q|)))^{-(q/p)_Q}$$

y

$$g_x(z) = (1/|Q|)^{1/p(x)}\,(\log(e + (1/|Q|)))^{-z}$$

para $z \geq 0$. Notar que h y g_x son funciones convexas y que $h(1/p(x)) = g_x((q/p)_Q)$. Entonces, en virtud de (2.31) y aplicando la desigualdad de Jensen dos veces obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}_{\frac{1}{(1/p)_Q},\frac{(q/p)_Q}{(1/p)_Q}}(1/|Q|) &\simeq h\left(\left(\frac{1}{p}\right)_Q\right) \leq \fint_Q h\left(\frac{1}{p(x)}\right)dx = \fint_Q g_x\left(\left(\frac{q}{p}\right)_Q\right)dx\\ &\leq \fint_Q \fint_Q g_x\left(\frac{q(y)}{p(y)}\right)dy\,dx = \fint_Q \fint_Q \frac{(1/|Q|)^{1/p(x)}}{(\log(e+1/|Q|))^{q(y)/p(y)}}\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Luego, en virtud del Lema 2.19 y la equivalencia (2.23) con $q(\cdot) = (q/p)(\cdot)$, tenemos que

$$\varphi^{-1}_{\frac{1}{(1/p)_Q},\frac{(q/p)_Q}{(1/p)_Q}}(1/|Q|) \lesssim \fint_Q \frac{(1/|Q|)^{1/p(x)}}{(\log(e+1/|Q|))^{q(x)/p(x)}}\,dx = \fint_Q \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, 1/|Q|)\,dx.$$

□

Demostración Proposición 2.21. Dado $Q \in \mathcal{Q}$ consideremos las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \mathcal{X}_Q(x)\varphi^{-1}_{p(x),q(x)}(1/|Q|), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

y

$$g(x) = \mathcal{X}_Q(x)(\log(e + 1/|Q|))^{q(x)}\varphi^{-1}_{p'(x),q(x)}(1/|Q|), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos que $\|f\|_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}} \leq 1$ y $\|g\|_{\varphi^*_{p(\cdot),q(\cdot)}} \leq C_1$ donde C_1 es una constante positiva independiente del cubo Q. En efecto, por el Lema 1.4 (v),

$$\varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, f(x))\,dx = \int_Q \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, 1/|Q|))\,dx$$

$$= \int_Q 1/|Q|\, dx = 1.$$

Para la estimación de la norma de g notemos que, dado $x \in Q$, por (2.28) y las desigualdades (A.VI) y (A.V) con $a = 1/p'(x)$ (ver Apéndice), si $C_1 \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\log(e+g(x)) &= \log\left(e + (\log(e+1/|Q|))^{q(x)}\, \varphi^{-1}_{p'(x),q(x)}(1/|Q|)\right)\\
&\gtrsim \log\left(e + C_1(\log(e+1/|Q|))^{q(x)/p(x)}(1/|Q|)^{1/p'(x)}\right)\\
&\geq \log\left(e + C_1(1/|Q|)^{1/p'(x)}\right) \gtrsim \frac{1}{(p')^+}\log(e+1/|Q|)\\
&\gtrsim \log(e+1/|Q|),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

pues $(p')^+ < \infty$. Luego, por (2.29), (2.32) y la definición de g, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varrho_{\varphi^*_{p(\cdot),q(\cdot)}}(g) &\simeq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p'(\cdot),-q(\cdot)/(p(\cdot)-1)}(x, g(x))\, dx\\
&\simeq \int_Q \frac{g(x)^{p'(x)}}{(\log(e+g(x)))^{q(x)/(p(x)-1)}}\, dx\\
&\lesssim \int_Q \frac{g(x)^{p'(x)}}{(\log(e+1/|Q|))^{q(x)/(p(x)-1)}}\, dx\\
&\simeq \int_Q \frac{\left[(\log(e+1/|Q|))^{q(x)}(1/|Q|)^{1/p'(x)}(\log(e+1/|Q|))^{-q(x)/p'(x)}\right]^{p'(x)}}{(\log(e+1/|Q|))^{q(x)/(p(x)-1)}}\, dx\\
&\simeq \fint_Q (\log(e+1/|Q|))^{q(x)\left(p'(x)-\frac{1}{p(x)-1}-1\right)}\, dx \simeq 1,
\end{aligned}$$

pues

$$q(x)\left(p'(x) - \frac{1}{p(x)-1} - 1\right) = q(x)\left(\frac{p(x)}{p(x)-1} - \frac{1}{p(x)-1} - 1\right) = 0.$$

Así obtenemos que $\|g\|_{\varphi^*_{p(\cdot),q(\cdot)}} \lesssim 1$.

Si aplicamos el Lema 2.22 con $t = 1/|Q|$ obtenemos la siguiente estimación

$$1 \lesssim |Q| \fint_Q \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, 1/|Q|)\, dx \fint_Q (\log(e+1/|Q|))^{q(x)} \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x, 1/|Q|)\, dx = f_Q \int_Q g(x)\, dx.$$

Luego, por la desigualdad de Hölder (1.16) y el Teorema 2.17, llegamos a que

$$\begin{aligned}
&|Q| \fint_Q \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, 1/|Q|)\, dx \fint_Q (\log(e+1/|Q|))^{q(x)}\, \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x, 1/|Q|)\, dx\\
&\leq 2\, f_Q\, \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}\, \|g\|_{\varphi^*_{p(\cdot),q(\cdot)}} \leq 2\, C_1\, \|\mathcal{X}_Q f_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}\\
&\leq 2\, C_1\, \|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \lesssim 1.
\end{aligned}$$

En particular, de esta cadena de desigualdades deducimos que

$$|Q| f_Q \fint_Q (\log(e+1/|Q|))^{q(x)}\, \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x, 1/|Q|)\, dx \lesssim f_Q\, \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \lesssim 1. \tag{2.33}$$

Como $f_Q = \fint_Q \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,1/|Q|)\,dx > 0$, podemos dividir lo anterior por f_Q y obtener

$$
\begin{aligned}
|Q| \fint_Q (\log(e+1/|Q|))^{q(x)}\, \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x,1/|Q|)\,dx &\lesssim \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \\
&\lesssim \left(\fint_Q \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,1/|Q|)\,dx\right)^{-1}. \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Usando el Lema 2.23 podemos estimar el lado derecho de (2.34) de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\left(\fint_Q \varphi^{-1}_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,1/|Q|)\,dx\right)^{-1} &\lesssim \left(\varphi^{-1}_{\frac{1}{(1/p)_Q},\frac{(q/p)_Q}{(1/p)_Q}}(1/|Q|)\right)^{-1} \\
&\simeq |Q|^{(1/p)_Q}(\log(e+1/|Q|))^{(q/p)_Q},
\end{aligned}
$$

que es una de las desigualdades buscadas.
Acotemos el lado izquierdo de (2.34). Por la desigualdad (2.24) y el Lema 2.23 tenemos que

$$
\begin{aligned}
&|Q| \fint_Q (\log(e+1/|Q|))^{q(x)}\, \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x,1/|Q|)\,dx \\
&\quad\gtrsim |Q|(\log(e+1/|Q|))^{q_Q} \fint_Q \varphi^{-1}_{p'(\cdot),q(\cdot)}(x,1/|Q|)\,dx \\
&\quad\gtrsim |Q|(\log(e+1/|Q|))^{q_Q}\, \varphi^{-1}_{\frac{1}{(1/p')_Q},\frac{(q/p')_Q}{(1/p')_Q}}(1/|Q|) \\
&\quad\simeq |Q|(\log(e+1/|Q|))^{q_Q}\, |Q|^{-(1/p')_Q}\,(\log(e+1/|Q|))^{-(q/p')_Q}.
\end{aligned}
$$

Ya que

$$
1-\left(\frac{1}{p'}\right)_Q = 1-\fint_Q \frac{1}{p'(y)}\,dy = \fint_Q \left(1-\frac{1}{p'(y)}\right)dy = \fint_Q \frac{1}{p(y)}\,dy = \left(\frac{1}{p}\right)_Q
$$

y

$$
q_Q-\left(\frac{q}{p'}\right)_Q = \fint_Q q(y)\,dy - \fint_Q \frac{q(y)}{p'(y)}\,dy = \fint_Q \left(q(y)-\frac{q(y)}{p'(y)}\right)dy = \fint_Q \frac{q(y)}{p(y)}\,dy = \left(\frac{q}{p}\right)_Q,
$$

obtenemos la otra desigualdad. □

Como consecuencia del resultado anterior deducimos la siguiente estimación que será de utilidad más adelante.

Corolario 2.24. *Dados $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \le p^+ < \infty$ y $Q \in \mathcal{Q}$. Entonces*

$$
\fint_Q |Q|^{1/p(x)}\,dx \lesssim \|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}.
$$

Demostración. De la segunda desigualdad de (2.33) reemplazando $p(\cdot)$ por $p'(\cdot)$ y $q(\cdot)$ por 0 deducimos que

$$
\fint_Q (1/|Q|)^{1/p'(x)}\,dx\,\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)} \lesssim 1. \qquad (2.35)
$$

Ahora bien,

$$\int_Q (1/|Q|)^{1/p'(x)}\,dx = \int_Q |Q|^{1/p(x)-1}\,dx = \fint_Q |Q|^{1/p(x)}\,dx,$$

entonces, como consecuencia de (2.35), obtenemos que

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}}{|Q|}\fint_Q |Q|^{1/p(x)}\,dx \lesssim 1.$$

Así, por la equivalencia (2.13), podemos concluir

$$\fint_Q |Q|^{1/p(x)}\,dx \lesssim \|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}\,. \qquad \square$$

2.3. Espacios de Zygmund generalizados con pesos

Introducimos a continuación una versión con pesos de los espacios de Zygmund generalizados, estos serán el ambiente donde estudiaremos propiedades de continuidad de distintos operadores.

Definición. Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $q^+ < \infty$ que verifican la relación

$$2(p(x)-1) + q(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.36}$$

y w un peso, es decir, una función medible positiva y localmente integrable. Definimos la función $\boldsymbol{\varphi^{w}_{p(\cdot),q(\cdot)}}$ como

$$\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) = \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,tw(x)) = \begin{cases} t^{p(x)}w(x)^{p(x)}\log(e+tw(x))^{q(x)}, & 1 \leq p(x) < \infty \\ \infty \cdot \mathcal{X}_{(1,\infty)}(tw(x)), & p(x) = \infty, \end{cases}$$

donde $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}$ está dada por (1.9).

Recordemos que la condición (2.36) es suficiente para que la función $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,\cdot)$ sea convexa (ver Apéndice, Lema A.2). Por lo tanto, bajo esta condición, $\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}$ resulta ser una **Φ-función** generalizada. Al espacio de Musielak-Orlicz asociado a $\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}$ lo denotamos $\boldsymbol{\left[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_w}$. Cuando $q(\cdot) \equiv 0$, el espacio $\boldsymbol{L^{p(\cdot)}_w}$ coincide con la versión pesada de los espacios de Lebesgue de exponente variable dada en [[35], Sección 5.8].

Denotaremos $\|\cdot\|_{[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w} = \|\cdot\|_{\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}}$ a la norma en $[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w(\mathbb{R}^n)$. Notar que esta verifica que

$$\|f\|_{[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w} = \|fw\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}\,,$$

pues

$$\varrho_{\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,f(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,f(x)w(x))\,dx = \varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(fw).$$

Por esta razón es que nos referimos a w como un "peso multiplicador". Este tratamiento de los pesos se ve en el contexto clásico, por ejemplo, en [82, 108] y, es el usual en el estudio de acotaciones con pesos en el contexto variable (ver, por ejemplo, [4, 19, 58, 76, 96]).

Notemos que la función conjugada de $\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}$ verifica, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$,

$$\left(\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}\right)^*(x,t) = (\varphi^*_{p(\cdot),q(\cdot)})^{1/w}(x,t).$$

En efecto,

$$\left(\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}\right)^*(x,t) = (\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,w(x)t))^* = \sup_{u\geq 0}\left\{ut - \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,w(x)u)\right\}.$$

Por lo tanto, considerando el cambio de variables $w(x)u = k$, concluimos que

$$\left(\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}\right)^*(x,t) = \sup_{k\geq 0}\left\{k\frac{t}{w(x)} - \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,k)\right\} = \varphi^*_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t/w(x)) = (\varphi^*_{p(\cdot),q(\cdot)})^{1/w}(x,t).$$

Por otro lado, según el Lema 1.6, $\varphi^*_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) \simeq t^{p'(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/(p(x)-1)}$. Luego, del Teorema 1.11 deducimos el siguiente resultado.

Teorema 2.25 (Fórmula de la norma conjugada en $[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w$). *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ con $p^- > 1$, $q : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ con $q^+ < \infty$ y w un peso, entonces*

$$\|f\|_{[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w} \simeq \sup_g \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx, \tag{2.37}$$

se verifica para toda función medible f, donde el supremo se toma sobre todas las funciones g tales que $\left\|gw^{-1}\right\|_{L^{p'(\cdot)}(\log L)^{-q(\cdot)/(p(\cdot)-1)}} \leq 1$.

A continuación presentamos una versión del *Teorema de la convergencia dominada* en este contexto que nos permitirá obtener un resultado de densidad en estos espacios que será de gran utilidad para demostrar los resultados principales de este trabajo.

Teorema 2.26. *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ con $p^+, q^+ < \infty$ y w un peso. Sean $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset [L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w$ y f una función medible tales que $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ en c.t.p. de $\mathbb{R}^n$ y existe una función $g \in [L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w$ que verifica que $|f_j(x)| \leq g(x)$ c.t.$x \in \mathbb{R}^n$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces $f \in [L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\lim_{j\to\infty} \|f - f_j\|_{[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w} = 0.$$

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f_j(x)|^{p(x)} w(x)^{p(x)} (\log(e + |f(x) - f_j(x)|w(x)))^{q(x)} \\
&\quad\leq (|f(x)| + |f_j(x)|)^{p(x)}\, w(x)^{p(x)} (\log(e + [|f(x)| + |f_j(x)|]w(x)))^{q(x)} \\
&\quad\leq 2^{p^+} g(x)^{p(x)} w(x)^{p(x)} (\log(e + 2g(x)w(x)))^{q(x)}
\end{aligned}$$

$$\lesssim g(x)^{p(x)} w(x)^{p(x)} (\log(e + g(x)w(x)))^{q(x)},$$

donde hemos utilizado la desigualdad (A.VII) del Apéndice. La función $(gw)^{p(\cdot)}(\log(e+gw))^{q(\cdot)}$ es integrable entonces, por el Teorema de la convergencia dominada en el contexto clásico,

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}((f-f_j)w) &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-f_j(x)|^{p(x)} w(x)^{p(x)} \log(e+|f(x)-f_j(x)|w(x))^{q(x)} dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Consecuentemente, en virtud del Lema 2.16,

$$\lim_{j\to\infty} \|f-f_j\|_{[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w} = \lim_{j\to\infty} \|(f-f_j)w\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} = 0.$$

□

Con $(L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ denotaremos el espacio de funciones f tales que, para todo conjunto compacto $U \subset \mathbb{R}^n$, se verifica $f\mathcal{X}_U \in L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Notemos que, si w es un peso en $(L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, las funciones características de conjuntos compactos pertenecen al espacio $[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w(\mathbb{R}^n)$. En general, sea g una función acotada con soporte compacto, si $w \in (L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ con $p^+, q^+ < \infty$, entonces $g \in [L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w(\mathbb{R}^n)$, en efecto,

$$\begin{aligned}\varrho_{\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(gw) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p(x)} w(x)^{p(x)} (\log(e+g(x)w(x)))^{q(x)}\, dx \\ &\le (1+\|g\|_\infty)^{p^+} \int_{\operatorname{sop} g} w(x)^{p(x)} (\log(e+\|g\|_\infty w(x)))^{q(x)}\, dx < \infty \\ &\lesssim \int_{\operatorname{sop} g} w(x)^{p(x)} (\log(e+w(x)))^{q(x)}\, dx < \infty,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la desigualdad (A.VII) del Apéndice. Más aún, este conjunto es denso en el espacio $[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w(\mathbb{R}^n)$ como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.27. *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ con $p^+, q^+ < \infty$ y w en el conjunto $(L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces el conjunto de las funciones acotadas con soporte compacto es denso en $[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $f \in [L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que $\mathbb{R}^n = \bigcup_i K_i$ donde $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia anidada de conjuntos compactos, es decir, $K_i \subset K_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Dado $i \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$f_i(x) = \begin{cases} i, & f(x) > i \\ f(x), & -i \le f(x) \le i \\ -i, & f(x) < -i. \end{cases} \qquad y \qquad g_i(x) = f_i(x)\mathcal{X}_{K_i}(x),$$

para $x \in \mathbb{R}^n$. Notar que, para cada $i \in \mathbb{N}$, g_i es acotada, tiene soporte compacto y $|g_i| \leq |f|$. Además, $\lim_{i\to\infty} g_i = f$. Entonces, por el Teorema de la convergencia dominada 2.26,

$$\lim_{i\to\infty} \|f - g_i\|_{\varphi^w_{p(\cdot),q(\cdot)}} = 0.$$

□

2.3.1. Clases de pesos

Definimos a continuación una clase de pesos que introducimos en [79] y que extiende la conocida clase $A_{p,q}$ a exponentes variables. Esta será la clase de pesos involucrada en las estimaciones de tipo Bloom de la Sección 3.4.

Definición. Dados $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y un peso w, decimos que $w \in \boldsymbol{A_{p(\cdot),q(\cdot)}}$ si existe una constante $C > 0$ tal que la desigualdad

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \leq C, \tag{2.38}$$

vale para todo $Q \in \mathcal{Q}$. A la menor de las constantes que verifica (2.38) la denotaremos $\boldsymbol{[w]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}}}$.

Notar que $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ es equivalente a $w^{-1} \in A_{q'(\cdot),p'(\cdot)}$. Más aún, cuando p y q son constantes, $A_{p,q}$ es la clase de pesos introducida por Muckenhoupt y Wheeden en [82].

Cuando $p(\cdot) \equiv q(\cdot)$, denotamos $A_{p(\cdot),p(\cdot)} = A_{p(\cdot)}$. Esta clase fue definida por Cruz-Uribe, Diening y Hästö ([19]) y caracteriza la acotación del operador maximal de Hardy–Littlewood en $L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$.

En el siguiente resultado damos algunas propiedades útiles de la clase $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$.

Lema 2.28. *Sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $p(\cdot) \leq q(\cdot)$ y $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$. Entonces*

(i) *Para todo $Q \in \mathcal{Q}$,*

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \simeq 1.$$

(ii) $w \in A_{p(\cdot)} \cap A_{q(\cdot)}$.

(iii) $w \in A_{q(\cdot),p(\cdot)}$. *Más aún, para todo $Q \in \mathcal{Q}$,*

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{q'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q'(\cdot)}} \simeq 1.$$

Para demostrar este resultado notemos que, si $s(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ verifican $s(\cdot) \leq r(\cdot)$ y $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q f\|_{s(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}} \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q f\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}. \tag{2.39}$$

En efecto, definamos $\beta(\cdot)$ tal que $1/\beta(\cdot) = 1/s(\cdot) - 1/r(\cdot)$. Entonces, en virtud del Lema 2.9 (iv), $\beta(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$. Luego usando la desigualdad de Hölder (2.1) y el Corolario 2.12 se deduce (2.39).

Demostración Lema 2.28. Sea $\beta(\cdot)$ el exponente definido por $1/\beta(\cdot) = 1/p(\cdot) - 1/q(\cdot)$ entonces, por el Lema 2.9 (iv), $\beta(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$. Además $1/\beta'(\cdot) = 1/q(\cdot) + 1/p'(\cdot)$. Sea $Q \in \mathcal{Q}$ luego, por la desigualdad de Hölder (2.1) y el Corolario 2.12, tenemos que

$$1 = \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta'(\cdot)}} \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \leq [w]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}}$$

Lo que demuestra (i).

Para probar (ii) tomemos $Q \in \mathcal{Q}$. Notemos que, como $p(\cdot) \leq q(\cdot)$, por la desigualdad (2.39) tenemos la siguiente estimación

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \leq [w]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}}.$$

Analogamente, como $q'(\cdot) \leq p'(\cdot)$, obtenemos

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{q'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q'(\cdot)}} \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \leq [w]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}}.$$

Luego $w \in A_{p(\cdot)} \cap A_{q(\cdot)}$.

Por otro lado, dado $Q \in \mathcal{Q}$, aplicando la desigualdad de Hölder (2.1) y el Corolario 2.12 tenemos la siguiente estimación

$$1 = \left(\fint_Q w(x) w^{-1}(x)\, dx \right)^2 \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{q'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q'(\cdot)}}.$$

Entonces, por la propiedad (2.39) y el item (ii) obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 &\lesssim [w]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{q'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q'(\cdot)}} \lesssim [w]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{q'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q'(\cdot)}} \\ &\lesssim [w]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}} [w]_{A_{q(\cdot)}}, \end{aligned}$$

lo que prueba (iii). □

Consideremos $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$. Si $s(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ son exponentes que verifican $s(\cdot) \geq p(\cdot)$ y $r(\cdot) \leq q(\cdot)$ respectivamente, en virtud de la desigualdad (2.39), es sencillo ver que

$$A_{p(\cdot),q(\cdot)} \subset A_{s(\cdot),r(\cdot)}.$$

La otra contención no es cierta en general pero, en [79], hemos probado el siguiente resultado de "apertura".

Proposición 2.29. *Sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq q(\cdot) \leq q^+ < \infty$ y $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$. Entonces existen exponentes $u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $(p/u)^- > 1$, $u^+ < \infty$, $(q'/v')^- > 1$ y $w \in A_{u(\cdot),v(\cdot)}$.*

Notemos que las condiciones $(p/u)^- > 1$ y $(q'/v')^- > 1$ implican $u(\cdot) < p(\cdot)$ y $v(\cdot) > q(\cdot)$ respectivamente. Para la demostración de esta proposición utilizaremos el siguiente lema.

Lema 2.30 ([19]). *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $p^- > 1$ y $w \in A_{p(\cdot)}$. Entonces existe una constante $s \in (1/p^-, 1)$ tal que $w^{1/s} \in A_{sp(\cdot)}$.*

Demostración Proposición 2.29. En virtud del Lema 2.28 (ii), como $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$, entonces $w \in A_{p(\cdot)}$. De la misma manera, dado que $w^{-1} \in A_{q'(\cdot),p'(\cdot)}$, tenemos que $w^{-1} \in A_{q'(\cdot)}$. Luego, por el Lema 2.30, ya que $p^- > 1$ y $(q')^- > 1$, existen dos constantes $s \in (1/p^-, 1)$ y $r \in (1/(q')^-, 1)$ tales que

$$w^{1/s} \in A_{sp(\cdot)} \quad \text{y} \quad w^{-1/r} \in A_{rq'(\cdot)}. \tag{2.40}$$

Definimos $u'(\cdot) = \frac{1}{s}(sp(\cdot))'$ y $v(\cdot) = \frac{1}{r}(rq'(\cdot))'$. Notemos que así $u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ (ver Lema 2.9). Además $u^+ < \infty$ pues, como $sp^+ < \infty$ y $s < 1$,

$$(u^+)' = (u')^- = \frac{1}{s}[(sp)']^- = \frac{1}{s}[sp^+]' > 1.$$

Asimismo, los exponentes $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ verifican que

$$\frac{p(\cdot)}{u(\cdot)} = p(\cdot)(1-s) + 1 \quad \text{y} \quad \frac{q'(\cdot)}{v'(\cdot)} = q'(\cdot)(1-r) + 1. \tag{2.41}$$

En efecto, notemos que

$$u'(\cdot) = \frac{1}{s}(sp(\cdot))' = \frac{1}{s}\frac{sp(\cdot)}{sp(\cdot)-1} = \frac{p(\cdot)}{sp(\cdot)-1}$$

y, en consecuencia,

$$u'(\cdot)s - \frac{u'(\cdot)}{p(\cdot)} - s = \frac{sp(\cdot)}{sp(\cdot)-1} - \frac{1}{sp(\cdot)-1} - s = 1 - s.$$

Luego, por las estimaciones anteriores resulta

$$\begin{aligned}\frac{p(\cdot)}{u(\cdot)} &= p(\cdot)\frac{u'(\cdot)-1}{u'(\cdot)} = (sp(\cdot)-1)(u'(\cdot)-1) = p(\cdot)\left(u'(\cdot)s - \frac{u'(\cdot)}{p(\cdot)} - s\right) + 1 \\ &= p(\cdot)(1-s) + 1\end{aligned}$$

como queríamos probar. La cuenta para demostrar la otra igualdad de (2.41) es análoga y se omite. De (2.41) se deduce que

$$\frac{p(\cdot)}{u(\cdot)} \geq p^-(1-s) + 1 \quad \text{y} \quad \frac{q'(\cdot)}{v'(\cdot)} \geq (q')^-(1-r) + 1,$$

de donde concluimos que $(p/u)^- > 1$ y $(q'/v')^- > 1$.
Para comprobar que $w \in A_{u(\cdot),v(\cdot)}$, tomemos $Q \in \mathcal{Q}$. Por (2.40), el Lema 2.4 y el Lema 2.28 (i) con $u(\cdot) \le p(\cdot)$ y $q(\cdot) \le v(\cdot)$ respectivamente, tenemos que

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w^{1/s}\|_{sp(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{sp(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1/s}\|_{(sp(\cdot))'}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{(sp(\cdot))'}} = \left(\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{u'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{u'(\cdot)}} \right)^{1/s} \simeq 1$$

y

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w^{1/r}\|_{(rq(\cdot))'}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{(rq(\cdot))'}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1/r}\|_{rq'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{rq'(\cdot)}} = \left(\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{v(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{v(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{q'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q'(\cdot)}} \right)^{1/r} \simeq 1.$$

Entonces, en virtud del Lema 2.28 (iii), concluimos que

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{v(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{v(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\|_{u'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{u'(\cdot)}} \simeq 1,$$

esto es, $w \in A_{u(\cdot),v(\cdot)}$. $\square$

Otra propiedad de esta clase de pesos que utilizaremos se da en el siguiente lema.

Lema 2.31. *Sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mu, \lambda \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ y $\nu = \mu\lambda^{-1}$. Entonces $\lambda\nu^{\frac{m-h}{m}} \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y cada $h = 0, 1, ..., m$.*

Demostración. Sean $m \in \mathbb{N}$. Si $h = 0$, tenemos que $\lambda\nu^{\frac{m-h}{m}} = \lambda\nu = \mu \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$. Sean $h \in \{1, ..., m\}$ y $Q \in \mathcal{Q}$. Por la desigualdad de Hölder (2.1) y el Lema 2.4, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\left\|\mathcal{X}_Q \lambda\nu^{\frac{m-h}{m}}\right\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q \lambda^{-1}\nu^{-\frac{m-h}{m}}\right\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} &= \frac{\left\|\mathcal{X}_Q \lambda^{\frac{h}{m}}\mu^{\frac{m-h}{m}}\right\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q \lambda^{-\frac{h}{m}}\mu^{-\frac{m-h}{m}}\right\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \\
&\lesssim \frac{\left\|\mathcal{X}_Q \lambda^{\frac{h}{m}}\right\|_{\frac{mq(\cdot)}{h}}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}^{\frac{h}{m}}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q \mu^{\frac{m-h}{m}}\right\|_{\frac{mq(\cdot)}{m-h}}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}^{\frac{m-h}{m}}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q \lambda^{-\frac{h}{m}}\right\|_{\frac{mp'(\cdot)}{h}}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}^{\frac{h}{m}}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q \mu^{-\frac{m-h}{m}}\right\|_{\frac{mp'(\cdot)}{m-h}}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}^{\frac{m-h}{m}}} \\
&= \left(\frac{\|\mathcal{X}_Q \lambda\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \right)^{\frac{h}{m}} \left(\frac{\|\mathcal{X}_Q \mu\|_{q(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)}} \right)^{\frac{m-h}{m}} \left(\frac{\|\mathcal{X}_Q \lambda^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \right)^{\frac{h}{m}} \left(\frac{\|\mathcal{X}_Q \mu^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \right)^{\frac{m-h}{m}} \\
&\le [\lambda]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}}^{\frac{h}{m}} [\mu]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}}^{\frac{m-h}{m}}.
\end{aligned}$$

Deducimos entonces que $\lambda\nu^{\frac{m-h}{m}} \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$. $\square$

CAPÍTULO 3

Continuidad de operadores en espacios de Zygmund generalizados

Este capítulo está dedicado al estudio de las propiedades de continuidad de los operadores potenciales, los operadores de Calderón-Zygmund y sus respectivos conmutadores, en los espacios de Zygmund generalizados (EZG) con pares de pesos.

En tal sentido, en la primera sección, introduciremos y analizaremos el comportamiento en los EZG de ciertas maximales generalizadas que controlan, en algún sentido, dichos operadores.

En la segunda sección especificaremos las clases funcionales de los símbolos con los que trabajaremos y expondremos algunas propiedades estructurales de las mismas.

El propósito de las secciones tercera y cuarta es presentar los resultados obtenidos respecto a la continuidad de los operadores principales en los EZG con un par de pesos, asumiendo primero condiciones de tipo bump, y luego, condiciones asociadas a estimaciones de tipo Bloom. Para esto, previamente daremos la definición detallada de los operadores en cuestión. Una de las técnicas principales que utilizaremos para probar dichos resultados se encuandra en la teoría de dominación sparse, es por eso que, en la última sección introduciremos y expondremos algunos aspectos de esta teoría necesarios para el desarrollo de la tesis.

Las demostraciones de los resultados presentados en este capítulo se expondrán en el capítulo 4.

3.1. Operadores maximales generalizados en espacios de Zygmund generalizados

En esta sección introduciremos generalizaciones del operador maximal de Hardy-Littlewood y de la maximal fraccionaria asociadas a $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas. Presentaremos resultados de continuidad de los mismos en espacios de Zygmund generalizados. Estos serán esenciales para obtener las estimaciones principales de esta tesis respecto a los operadores Calderón-Zygmund, los operadores potenciales y sus conmutadores.

Definición. Sean $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^{\Psi}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $Q \in \mathcal{Q}$. El **$\mathbf{\Psi}$-promedio** de f en Q está dado por

$$A_{\Psi,Q}f = \frac{\|\mathcal{X}_Q f\|_\Psi}{\|\mathcal{X}_Q\|_\Psi}$$

y el **operador Ψ-maximal generalizado** asociado se denota por

$$M_\Psi f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}:Q\ni x} A_{\Psi,Q}f,$$

para $x \in \mathbb{R}^n$.

Cuando $\Psi = \varphi_{s(\cdot)}$ con $s(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, el Ψ-promedio lo denotaremos

$$A_{s(\cdot),Q}f = \frac{\|\mathcal{X}_Q f\|_{s(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}}$$

y al operador maximal generalizado asociado con $M_{s(\cdot)}f(x)$. Observar que, cuando $s(\cdot) \equiv 1$, entonces $M_{s(\cdot)} = M$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood; y cuando s es constante, $M_s f = [M(|f|^s)]^{1/s}$.

El operador $M_{s(\cdot)}$ fue introducido en [35] como herramienta para obtener resultados de continuidad del operador maximal de Hardy-Littlewood en espacios de Lebesgue de exponente variable con pesos. Como en el caso de M, si los exponentes involucrados verifican la condición de continuidad log-Hölder global, entonces $M_{s(\cdot)}$ es continuo en los espacios de Lebesgue de exponente variable. Concretamente se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1 ([35])**.** *Sean $p(\cdot), s(\cdot), l(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $p(\cdot) = s(\cdot)l(\cdot)$ y $l^- > 1$. Entonces la maximal $M_{s(\cdot)}$ es acotada en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, la siguiente desigualdad*

$$\left\|M_{s(\cdot)}f\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f\|_{p(\cdot)}$$

vale para toda función $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Por otro lado, como nombramos anteriormente (ver Teorema 2.17), si $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ verifica que $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ y $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$, entonces la maximal M es acotada en $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

En esta tesis será conveniente obtener resultados que generalicen los Teorema 3.1 y 2.17 en relación al operador $M_{s(\cdot)}$ en espacios de Zygmund generalizados. En esta dirección, en [77], obtuvimos el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sean $p(\cdot), s(\cdot), l(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $p(\cdot) = s(\cdot)l(\cdot)$, $p^+ < \infty$ y $l^- > 1$. Sea $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ tal que $q(\cdot) \geq 0$. Entonces*

$$M_{s(\cdot)} : L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Notar que cuando $q(\cdot) \equiv 0$ ó $s(\cdot) \equiv 1$, el resultado anterior coincide con los Teoremas 3.1 y 2.17 respectivamente.

Introducimos a continuación una versión fraccionaria del operador maximal M_Ψ.

Definición. Sean $\Psi \in G\mathbf{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, $\beta(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^{\Psi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $Q \in \mathcal{Q}$. El **operador Ψ-maximal fraccionario generalizado** $M_{\beta(\cdot),\Psi}$ se define como

$$M_{\beta(\cdot),\Psi} f(x) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}: Q \ni x} \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} A_{\Psi,Q} f,$$

para $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, si $\Psi = \varphi_{s(\cdot)}$, denotamos $M_{\beta(\cdot),\Psi} = M_{\beta(\cdot),s(\cdot)}$

Notar que cuando $\beta(\cdot) \equiv \infty$, el operador $M_{\infty,s(\cdot)} = M_{s(\cdot)}$. Cuando $\beta(\cdot) = n/\alpha$ con $0 < \alpha < n$ y $s(\cdot) \equiv 1$, $M_{\beta(\cdot),s(\cdot)} f = M_\alpha$ es el operador maximal fraccionaria clásico.

A continuación enunciamos un resultado que obtuvimos en [77]. El mismo presenta la acotación de este operador fraccionario en el contexto de los espacios de Zygmund generalizados.

Teorema 3.3. *Sean $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $p(\cdot) \le r(\cdot) \le r^+ < \infty$ y $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ una función no negativa. Supongamos que $\beta(\cdot)$ es el exponente dado por $1/\beta(\cdot) = 1/p(\cdot) - 1/r(\cdot)$ y $s(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ es tal que $(p/s)^- > 1$. Entonces*

$$M_{\beta(\cdot),s(\cdot)} : L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

En particular, si $q(\cdot) \equiv 0$ obtenemos que $M_{\beta(\cdot),s(\cdot)} : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Cabe destacar que en [77] el resultado anterior se presenta con una condición un poco más fuerte. Concretamente, en dicho trabajo imponemos la condición $p^-/s^+ > 1$, la cual resulta ser más fuerte que $(p/s)^- > 1$ (ver Lema A.13 del Apéndice.)

Notar que cuando $p(\cdot) \equiv r(\cdot)$, entonces $\beta(\cdot) \equiv \infty$ y, del Teorema 3.3, se deduce el Teorema 3.2. Cuando $\beta(\cdot) \equiv n/\alpha$ con $0 < \alpha < n$, $s(\cdot) \equiv 1$ y $q(\cdot) \equiv 0$, el resultado previo fue probado en [82] en el contexto de los espacios de Lebesgue clásicos y en [10] en el contexto variable. En ambos trabajos las propiedades de continuidad del operador maximal fraccionario correspondiente fueron utilizadas para derivar propiedades del operador integral fraccionario en los respectivos contextos. Por otro lado, otros ejemplos de acotaciones en espacios de Zygmund generalizados pueden verse en [32].

En la demostración del teorema anterior utilizaremos el siguiente resultado que presenta una *desigualdad puntual de tipo Hedberg* ([46]), esta permite controlar al operador maximal $M_{\beta(\cdot),s(\cdot)}$ por medio de una versión no fraccionaria del mismo bajo cierta relación entre los exponentes involucrados.

Proposición 3.4. *Sean $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $p(\cdot) \le r(\cdot)$. Supongamos que $\beta(\cdot)$ es el exponente dado por $1/\beta(\cdot) = 1/p(\cdot) - 1/r(\cdot)$ y sea $s(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tal que $s(\cdot) \le \beta(\cdot)$. Entonces la siguiente desigualdad puntual*

$$M_{\beta(\cdot),s(\cdot)}(g)(x) \lesssim M_{(\beta(\cdot)/s(\cdot))' s(\cdot)}\left(g^{p(\cdot)/r(\cdot)}\right)(x) \left\| g^{p(\cdot)/\beta(\cdot)} \right\|_{\beta(\cdot)}$$

es válida para toda función $g \in L^{s(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

3.2. La clase de los símbolos

Introduciremos a continuación las clases funcionales de los símbolos involucrados con los conmutadores que estudiaremos en esta tesis. En tal sentido definiremos los espacios Lipschitz generalizados.

Definición. Sea $a : \mathcal{Q} \to [0,\infty)$ un funcional y ρ una constante positiva. Decimos que una función $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ pertenece al **espacio Lipschitz generalizado $\boldsymbol{\mathcal{L}^\rho_a}$** si

$$\|b\|_{\mathcal{L}^\rho_a} = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{1}{a(Q)} \left(\fint_Q |b - b_Q|^\rho \, dx \right)^{1/\rho} < \infty.$$

Describimos a continuación algunos ejemplos de los espacios $\mathcal{L}^\rho_a$. Los primeros se relacionan en esta tesis con estimaciones de los conmutadores asociadas a condiciones de tipo bump en los pesos (ver Sección 3.3).

Ejemplo 3.5. Si $a(Q) \equiv 1$ resulta $\mathcal{L}^1_a = \boldsymbol{BMO}$, el espacio de las funciones con oscilación media acotada introducido en [55].

Ejemplo 3.6. Sea $0 \le \delta \le 1$. Si $a(Q) = |Q|^{\delta/n}$, entonces $\mathcal{L}^1_a = \mathbb{L}\boldsymbol{(\delta)}$. En particular, si $\delta > 0$, estos espacios coinciden con los espacios de Lipschitz clásicos Λ_δ definidos como el conjunto de todas las funciones b tales que la desigualdad

$$|b(x) - b(y)| \lesssim |x - y|^\delta \tag{3.1}$$

vale para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.7. Sean $r(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$ y $a(Q) = |Q|^{\alpha/n-1} \|\mathcal{X}_Q\|_{r'(\cdot)}$. En este caso, $\mathcal{L}^1_a = \boldsymbol{\mathfrak{L}_{\alpha,r(\cdot)}}$ es el espacio introducido en [97]. Si además $r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, $n/\alpha \le r^-$ y $\delta(\cdot)$ es el exponente definido por

$$\frac{\delta(\cdot)}{n} = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{r(\cdot)},$$

en virtud del Corolario 2.12, se verifica que $|Q|^{\alpha/n-1} \|\mathcal{X}_Q\|_{r'(\cdot)} \simeq \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)}$. Así, el espacio $\mathcal{L}^1_a = \mathbb{L}\boldsymbol{(\delta(\cdot))}$ resulta ser una versión variable del espacio $\mathbb{L}(\delta)$ definido arriba.

Los siguientes ejemplos que involucran pesos se usarán para obtener estimaciones de tipo Bloom (ver Sección 3.4).

Ejemplo 3.8. Sean ν un peso y $0 \le \delta(\cdot) < n$. Si $a(Q) = \nu(Q) \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)} / |Q|$, denotamos el espacio $\mathcal{L}^1_a := \boldsymbol{BMO^{\delta(\cdot)}_\nu}$. Cuando $\delta < 1$ es constante, $\mathcal{L}^1_a = \mathcal{L}_\nu(\delta)$ el espacio de tipo Lipschitz definido en [43]. Cuando $\delta = 0$, este espacio es el espacio BMO_ν introducido en [83] que resulta ser una versión pesada del espacio BMO.

Presentaremos ahora una condición en el funcional a que permite obtener propiedades de los espacios $\mathcal{L}^\rho_a$.

Definición. Decimos que a satisface la **condición T_∞**, y lo denotamos $a \in T_\infty$, si existe una constante positiva $\mathbf{t}_\infty$ tal que para todo $Q \in \mathcal{Q}$ y todo cubo $Q' \subset Q$,

$$a(Q') \leq \mathbf{t}_\infty\, a(Q). \tag{3.2}$$

Llamaremos $\|a\|_{\mathbf{t}_\infty}$ a la menor de las contantes $\mathbf{t}_\infty$ que verifican (3.2). Claramente, $\|a\|_{\mathbf{t}_\infty} \geq 1$.

La condición T_∞ fue introducida en [74] en el contexto de automejoras de desigualdades de Trudinger y utilizada más adelante en [72] para definir una versión más general de los espacios $\mathcal{L}_a^\rho$ y probar relaciones entre ellos.

Claramente los funcionales de los Ejemplos 3.5 y 3.6 verifican T_∞. Si $r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y $n/\alpha \leq r^-$, el funcional a del Ejemplo 3.7 satisface T_∞. Si $0 \leq \alpha < 1$, $\beta > -\alpha$ y, por ejemplo, $w(x) = |x|^\beta$ y $a(Q) = w(Q)|Q|^{\alpha/n-1}$, entonces $a \in T_\infty$.

El siguiente resultado establece que, en el caso en que $a \in T_\infty$, los espacios $\mathcal{L}_a^\rho$ con $0 < \rho < \infty$, coinciden.

Teorema 3.9 ([72])**.** *Sean $0 < \rho < \infty$ y $a \in T_\infty$, entonces $\mathcal{L}_a^\rho \simeq \mathcal{L}_a^1$ y, para toda función $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\|b\|_{\mathcal{L}_a^\rho} \simeq \|b\|_{\mathcal{L}_a^1}$.*

En virtud del teorema anterior, de ahora en más cuando $a \in T_\infty$ denotaremos con $\mathcal{L}_a$ al espacio $\mathcal{L}_a^\rho$ con $0 < \rho < \infty$.

Notar que si $p \geq 1$ es constante, del Teorema 3.9 se deduce que

$$\left(\fint_Q |b(x) - b_Q|^p \, dx \right)^{1/p} \lesssim a(Q)\, \|b\|_{\mathcal{L}_a}, \qquad \forall\, Q \in \mathcal{Q}$$

donde $a \in T_\infty$ y $b \in \mathcal{L}_a$. Una versión de esta desigualdad con exponentes variables, que obtuvimos en [78], se presenta en el siguiente lema.

Lema 3.10. *Sean k un entero positivo y $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Sean $a \in T_\infty$ y $b \in \mathcal{L}_a$ con $\|b\|_{\mathcal{L}_a} \neq 0$. Entonces, para todo $Q \in \mathcal{Q}$,*

$$\frac{\left\| \mathcal{X}_Q |b - b_Q|^k \right\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \lesssim \left(a(Q)\, \|b\|_{\mathcal{L}_a} \right)^k.$$

El siguiente resultado muestra una estimación para la diferencia de los promedios sobre cubos de funciones en $\mathcal{L}_a$ cuando $a \in T_\infty$.

Lema 3.11. *Sean $a \in T_\infty$ y $b \in \mathcal{L}_a$. La siguiente desigualdad*

$$|b_{3Q} - b_Q| \lesssim \|a\|_{\mathbf{t}_\infty}\, a(3Q)\, \|b\|_{\mathcal{L}_a}$$

vale para todo $Q \in \mathcal{Q}$.

Combinando los dos lemas anteriores obtenemos el siguiente resultado que será de gran utilidad en las demostraciones de los teoremas principales de esta tesis que involucran símbolos b en la clase $\mathcal{L}_a$, pues permite estimar promedios donde interviene b por múltiplos de $\|b\|_{\mathcal{L}_a}$.

Lema 3.12. *Sean k un entero positivo y $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Sean $a \in T_\infty$ y $b \in \mathcal{L}_a$ con $\|b\|_{\mathcal{L}_a} \neq 0$. Si $H \in L^1_{\text{loc}}$, entonces*

$$\fint_{dQ} |b(y) - b_Q|^k H(y)\, dy \lesssim a(dQ)^k \, \|b\|^k_{\mathcal{L}_a} \frac{\|\mathcal{X}_{dQ} H\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{dQ}\|_{p(\cdot)}},$$

para todo $Q \in \mathcal{Q}$, donde $d = 1$ o $d = 3$.

En particular, cuando nos restringimos al espacio $\mathbb{L}(\delta(\cdot))$, también podemos controlar la diferencia de la función y su promedio en un cubo de la siguiente manera. Esta estimación está contenida en [78].

Lema 3.13. *Sean $0 < \alpha < n$ y $r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ que verifica $n/\alpha < r^-$ y $r_\infty \leq r(\cdot)$. Sean $\delta(\cdot)$ el exponente definido por*

$$\frac{\delta(\cdot)}{n} = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{r(\cdot)}$$

y k un entero positivo. Supongamos que $b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot))$. Entonces la siguiente estimación puntual

$$|b(z) - b_Q| \lesssim \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)}$$

vale para todo $Q \in \mathcal{Q}$ y todo punto $z \in kQ$, donde la constante involucrada depende de k.

3.3. Resultados de continuidad asumiendo condiciones de tipo bump

En esta sección mostraremos resultados de continuidad sobre espacios de Zygmund generalizados con dos pesos involucrados donde los mismos cumplen una condición de tipo bump en el contexto variable. A las condiciones de este tipo las denominaremos **condiciones BV**. Primero presentaremos los teoremas obtenidos respecto de los operadores potenciales y luego, los correspondientes a los operadores de Calderón-Zygmund, ambos con sus respectivos conmutadores. Las pruebas de estos resultados se expondrán en la Sección 4.3 y se obtendrán utilizando la técnica de dominación sparse que introduciremos más adelante y como consecuencia de las estimaciones probadas para los operadores maximales generalizados (Teoremas 3.2 y 3.3).

A lo largo de esta sección, y en lo que sigue de este trabajo, la constante m denota un entero no negativo.

3.3.1. Operadores potenciales

Definición. Sea Γ una función no negativa, localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. El **operador potencial** P_Γ se define como

$$P_\Gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

siempre que esta integral sea finita.

Consideraremos, en particular, operadores potenciales con núcleos en la clase $\mathfrak{R}$ definida en [92], la cual reúne a todas las funciones que verifican la siguiente condición de crecimiento: existen constantes positivas δ, C y $0 \le \varepsilon < 1$ tales que

$$\sup_{2^k < |x| \le 2^{k+1}} \Gamma(x) \le \frac{C}{2^{kn}} \int_{\delta(1-\varepsilon)2^k < |y| \le 2\delta(1+\varepsilon)2^k} \Gamma(y)\, dy, \tag{3.3}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Notar que un ejemplo de operadores potenciales es el operador integral fraccionaria I_α (ver (9)), donde $\Gamma(t) = |t|^{\alpha-n}$ con $0 < \alpha < n$. Otro ejemplo importante son los potenciales de Bessel $J_{\beta,\lambda}$ para $\beta, \lambda > 0$ cuyo núcleo $\Gamma = K_{\beta,\lambda}$ se define a partir de su transformada de Fourier por

$$\widehat{K_{\beta,\lambda}}(\xi) = (\lambda^2 + |\xi|^2)^{-\beta/2},$$

(ver [107]). En general las funciones radiales y no crecientes pertenecen a la clase $\mathfrak{R}$, como así también las funciones radiales y no decrecientes. Más aún, si Γ es esencialmente constante sobre anillos, es decir, $\Gamma(y) \lesssim \Gamma(x)$ para $|y|/2 \le |x| \le 2|y|$, entonces $\Gamma \in \mathfrak{R}$. Una condición similar a (3.3) pero más fuerte fue considerada en [54] donde se estudia la relación entre P_Γ y el operador maximal asociado M_Γ dado por

$$M_\Gamma f(x) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}: Q \ni x} \frac{\Gamma(\ell(Q))}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy, \qquad f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

donde $\ell(Q)$ indica el lado del cubo Q.

Recordemos que, si b es una función localmente integrable, el conmutador de primer orden de P_Γ se define formalmente como

$$P_\Gamma^{b,1} f(x) = b(x) P_\Gamma f(x) - P_\Gamma(bf)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

y, para $m \in \mathbb{N}$, el conmutador de orden m, se define recursivamente por

$$P_\Gamma^{b,m} f(x) = (P_\Gamma^{b,m-1})^{b,1} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.4}$$

donde $P_\Gamma^{b,0} = P_\Gamma$. Notemos que, en el caso particular de los operadores potenciales, (3.4) coincide con

$$P_\Gamma^{b,m} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m\, \Gamma(x-y) f(y) dy.$$

El siguiente teorema muestra la acotación de $P_\Gamma^{b,m}$ en espacios de Zygmund generalizados con pesos que satisfacen una condición BV. En este caso el símbolo b se considera en la clase $\mathcal{L}_a$ introducida en la Sección 3.2. Para enunciarlo consideremos la función $\widetilde{\Gamma}$ definida para $t \geq 0$ por

$$\widetilde{\Gamma}(t) = \int_{|z|\leq t} \Gamma(z)\, dz.$$

Teorema 3.14. *Sean $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq r(\cdot) \leq r^+ < \infty$, $q(\cdot)$ una función no negativa en $\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ y $\Gamma \in \mathfrak{R}$. Supongamos que $a \in T_\infty$ y $b \in \mathcal{L}_a$. Sea (v, w) un par de pesos que verifica $v \in (L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ y existen dos contantes $R > 1$ y $S > 1$ tales que*

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} a(Q)^m\, \widetilde{\Gamma}(\ell(Q)) \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rr^+}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Rr^+}} \frac{\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\|_{S(p^-)'}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{S(p^-)'}} < \infty. \tag{3.5}$$

Entonces

$$P_\Gamma^{b,m} : \left[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_v(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \left[L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_w(\mathbb{R}^n).$$

Cuando $q(\cdot) \equiv 0$, el resultado anterior nos provee la estimación $P_\Gamma^{b,m} : L_v^{p(\cdot)} \hookrightarrow L_w^{r(\cdot)}$, generalizando al contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable el resultado de Pérez ([92]) cuando $m = 0$ y la estimación de Li en [73] (ver Apéndice, Lema A.9), en el caso de los conmutadores de orden superior. Notar que, a su vez, en el Teorema 3.14 la clase de símbolos es más amplia que la que se considera en [73], la clase BMO.

Observación 3.15. El par (v, w) donde

$$v(x) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}:Q\ni x} a(Q)^m\, \widetilde{\Gamma}(\ell(Q)) \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{\eta_1(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\eta_1(\cdot)}},$$

con $\eta_1(\cdot) \geq Rp^+$ para $R > 1$, satisface la condición (3.5) cuando $p(\cdot) = r(\cdot)$ y $S > 1$. En efecto, por la definición de v y la desigualdad (2.39), tenemos que

$$a(Q)^m\, \widetilde{\Gamma}(\ell(Q)) \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rp^+}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Rp^+}} \frac{\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\|_{S(p^-)'}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{S(p^-)'}} \leq \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rp^+}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Rp^+}} \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{\eta_1(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q w\|_{\eta_1(\cdot)}} \lesssim 1.$$

De igual manera se ve que el par (v, w) con

$$v(x) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}:Q\ni x} \widetilde{\Gamma}(\ell(Q)) \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{\eta_2(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\eta_2(\cdot)}},$$

para $\eta_2(\cdot) \geq Rr^+$ satisface la condición (3.5) cuando $p(\cdot) \neq r(\cdot)$, $a(Q) = \left(\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)} / \|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}\right)^{1/m}$ y $S > 1$.

En el teorema anterior la condición BV en el par de pesos involucra promedios asociados a exponentes constantes. Sin embargo, podemos obtener una versión de la misma con promedios relacionados a exponentes variables asumiendo ciertas condiciones adicionales en las constantes R y S.

Teorema 3.16. *Sean $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq r(\cdot) \leq r^+ < \infty$, $q(\cdot)$ una función no negativa en $\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ y $\Gamma \in \mathfrak{R}$. Supongamos que $a \in T_\infty$ y $b \in \mathcal{L}_a$. Sea (v, w) un par de pesos que verifica $v \in (L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y existen dos contantes $R > r^+/r^-$ y $S > (p')^+/(p')^-$ tales que*

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} a(Q)^m \, \widetilde{\Gamma}(\ell(Q)) \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rr(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Rr(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{Sp'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Sp'(\cdot)}} < \infty. \tag{3.6}$$

Entonces

$$P_\Gamma^{b,m} : \left[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_v (\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \left[L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_w (\mathbb{R}^n).$$

Observación 3.17. Si (v, w) es un par que verifica la condición (3.6) entonces $w \in L^{Rr(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. En efecto, razonando por el absurdo, supongamos que existe un conjunto compacto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\|\mathcal{X}_U w\|_{Rr(\cdot)} = \infty$. Consideremos $Q \in \mathcal{Q}$ tal que $U \subset Q$, entonces $\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rr(\cdot)} = \infty$ y, en consecuencia, $\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rr(\cdot)} / \|\mathcal{X}_Q\|_{Rr(\cdot)} = \infty$. Por lo tanto, de la condición (3.6), deducimos que

$$\frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{Sp'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Sp'(\cdot)}} = 0.$$

Pero, entonces

$$1 = \frac{|Q|}{|Q|} \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q v\|_{(Sp')'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{(Sp')'(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{Sp'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Sp'(\cdot)}} = 0.$$

Absurdo. Luego $w \in L^{Rr(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplos de pares (v, w) que satisfagan la condición (3.6) se obtienen como en la Observación 3.15 considerando $\eta_1(\cdot) \geq Rp(\cdot)$ y $\eta_2(\cdot) \geq Rr(\cdot)$.

Cuando P_Γ es el operador integral fraccionario la condición (3.6) para $m = 0$ se puede reescribir como

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} |Q|^{\alpha/n} \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rr(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Rr(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{Sp'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Sp'(\cdot)}} < \infty. \tag{3.7}$$

Esta resulta ser la versión variable de la condición obtenida por Sawyer y Wheeden en [104] (ver (10)). Si $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, entonces (3.7) es más fuerte que la condición

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} |Q|^{\alpha/n} \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} < \infty. \tag{3.8}$$

En efecto, en virtud de la desigualdad (2.39) tenemos que

$$|Q|^{\alpha/n} \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)}} \lesssim |Q|^{\alpha/n} \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rr(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Rr(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{Sp'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Sp'(\cdot)}}.$$

Es decir que, una condición suficiente para la propiedad de continuidad de I_α en los espacios de Zygmund generalizados, es un fortalecimiento de la condición (3.8) la cual, cuando $p(\cdot)$ es un exponente en la clase $\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y $1/r(\cdot) = 1/p(\cdot) - \alpha/n$, es la generalización a dos pesos de la condición $A_{p(\cdot),r(\cdot)}$ definida la Sección 2.3.1 (ver (2.38)). En particular, si $q(\cdot) \equiv 0$, la condición (3.7) es suficiente para la acotación de I_α de $L^{p(\cdot)}_v$ en $L^{r(\cdot)}_w$. Sin embargo, el siguiente resultado muestra que, como en el contexto clásico (ver [104]), la condición (3.8) es necesaria para tal estimación.

Teorema 3.18. *Sean $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq r(\cdot) \leq r^+ < \infty$ y $0 < \alpha < n$. Sea (v, w) un par de pesos tal que $w \in L^{r(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $v^{-1} \in L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$I_\alpha : L^{p(\cdot)}_v(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n). \tag{3.9}$$

Entonces se satisface (3.8).

En el caso particular en que $b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot))$ (o sea, $a(Q) = \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)}$), el Teorema 3.16 se puede mejorar considerando hipótesis menos restrictivas en los exponentes y una condición sobre el par de pesos más débil que (3.6). Dicha condición involucra normas que se definen a partir de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas (ver Sección 1.1). Para enunciar el resultado correspondiente recordemos que una 3-upla de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas (Ψ, Λ, Θ) pertenece a la clase $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ si verifica las siguientes propiedades

F1. $\|\mathcal{X}_Q\|_\Psi \|\mathcal{X}_Q\|_\Lambda \lesssim \|\mathcal{X}_Q\|_\Theta$ para todo $Q \in \mathcal{Q}$.

F2. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, las funciones $\Psi(x, \cdot)$ y $\Lambda(x, \cdot)$ son continuas y se verifica

$$\Psi^{-1}(x,t)\Lambda^{-1}(x,t) \lesssim \Theta^{-1}(x,t) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t \geq 0.$$

F3. $\|\mathcal{X}_Q\|_\Theta \|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta^*} \lesssim |Q|$ para todo $Q \in \mathcal{Q}$.

Teorema 3.19. *Sean $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq r(\cdot) \leq r^+ < \infty$ y $\Gamma \in \mathfrak{R}$. Sea $\beta(\cdot)$ el exponente definido por $1/\beta(\cdot) = 1/p(\cdot) - 1/r(\cdot)$. Sea $q(\cdot)$ una función no negativa en $\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$. Supongamos $0 < \alpha < n$ y $d(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ que verifican $n/\alpha < d^-$ y $d_\infty \leq d(\cdot)$, y sean $\delta(\cdot)$ el exponente definido por*

$$\frac{\delta(\cdot)}{n} = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{d(\cdot)}$$

y $b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot))$. Supongamos que $(\Psi_1, \Lambda_1, \Theta_1)$,$(\Psi_2, \Lambda_2, \Theta_2) \in \mathcal{F}$ son dos 3-uplas de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas tales que

$$M_{\Lambda_1} : L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-\frac{q(\cdot)}{r(\cdot)-1}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-\frac{q(\cdot)}{r(\cdot)-1}}(\mathbb{R}^n)$$

y

$$M_{\beta(\cdot),\Lambda_2} : L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Sea (v, w) un par de pesos tal que $v \in (L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)}\, \widetilde{\Gamma}(\ell(Q)) \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{\Psi_1}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_1}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{\Psi_2}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_2}} < \infty. \tag{3.10}$$

Entonces

$$P_{\Gamma}^{b,m} : [L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_v(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow [L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w(\mathbb{R}^n).$$

Notar que, para ciertas **Φ**-funciones, el teorema anterior extiende al contexto de los espacios de exponente variable el resultado de Li ([73]).

A continuación presentaremos ejemplos de 3-uplas de **Φ**-funciones generalizadas que pertenecen a la clase $\mathcal{F}$ y, que además, satisfacen las hipótesis del teorema previo para el caso en que $q(\cdot) \equiv 0$.

Ejemplo 3.20. Sea $r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < r^- \leq r^+ < \infty$ y

$$\sigma > \frac{r^+}{r^-}. \tag{3.11}$$

Si $\Psi_1(x,t) = t^{\sigma r(x)}(\log(e+t))^{\sigma r(x)}$, $\Lambda_1(x,t) = t^{(\sigma r)'(x)}$ y $\Theta_1(t) = t\log(e+t)$, entonces $(\Psi_1, \Lambda_1, \Theta_1)$ pertenece a la clase $\mathcal{F}$. En efecto, sea $Q \in \mathcal{Q}$. En virtud del Lema 2.9, los exponentes $\sigma r(\cdot)$ y $(\sigma r)'(\cdot)$ pertenecen a la clase $\mathcal{P}^{log}$ y, como $(\sigma r)^+ < \infty$, se verifica $\sigma r(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}$ (ver (2.22)). Luego, por la Proposición 2.21,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_1} \|\mathcal{X}_Q\|_{\Lambda_1} &= \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{\sigma r(\cdot)}(\log L)^{\sigma r(\cdot)}} \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{(\sigma r)'(\cdot)}} \simeq |Q|^{(1/\sigma r)_Q} \log(e+1/|Q|)\, |Q|^{(1/(\sigma r)')_Q} \\ &= |Q| \log(e+1/|Q|) = \|\mathcal{X}_Q\|_{L\log L} = \|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta_1},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Lema A.1 del Apéndice. Concluimos entonces que se verifica la condición **F1**. La condición **F2** se sigue del Lema 1.6 pues

$$\Psi_1^{-1}(x,t)\Lambda_1^{-1}(x,t) \simeq \frac{t^{1/(\sigma r)(x)}}{\log(e+t)} t^{1/(\sigma r)'(x)} = \frac{t}{\log(e+t)} \simeq \Theta_1^{-1}(t).$$

Por el Lema A.1 del Apéndice y la equivalencia (1.8) tenemos que

$$\|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta_1} \|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta_1^*} = \frac{1}{\Theta_1^{-1}(1/|Q|)} \frac{1}{(\Theta_1^*)^{-1}(1/|Q|)} \simeq |Q|.$$

Luego se satisface la condición **F3**. Más aún, se verifica que

$$M_{\Lambda_1} : L^{r'(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \to L^{r'(\cdot)}(\mathbb{R}^n). \tag{3.12}$$

En efecto, si definimos $s(\cdot) = (\sigma r)'(\cdot)$ y $l(\cdot) = r'(\cdot)/s(\cdot)$, por el Lema 2.9, los exponentes $s(\cdot)$ y $l(\cdot)$ pertenecen a la clase $\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$. Además, $l^- > 1$ pues, por (3.11) tenemos que

$$(r')^- = (r^+)' > (\sigma r^-)' = [(\sigma r)']^+$$

y entonces

$$1 < \frac{(r')^-}{[(\sigma r)']^+} \leq l^-.$$

Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 3.1 para obtener (3.12).

Ejemplo 3.21. Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ y

$$\eta > \frac{(p')^+}{(p')^-}. \tag{3.13}$$

Si $\Psi_2(x,t) = t^{\eta p'(x)}(\log(e+t))^{\eta p'(x)}$, $\Lambda_2(x,t) = t^{(\eta p')'(x)}$ y $\Theta_2(t) = t\log(e+t)$, como en el ejemplo anterior podemos ver que $(\Psi_2, \Lambda_2, \Theta_2) \in \mathcal{F}$. Además, si $r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ es tal que $p(\cdot) \leq r(\cdot) \leq r^+ < \infty$ y $\beta(\cdot)$ es el exponente definido por $1/\beta(\cdot) = 1/p(\cdot) - 1/r(\cdot)$, se verifica que

$$M_{\beta(\cdot),\Lambda_2} : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \to L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n). \tag{3.14}$$

En efecto, si definimos $s(\cdot) = (\eta p')'(\cdot)$ y $l(\cdot) = p(\cdot)/s(\cdot)$, por el Lema 2.9 los exponentes $s(\cdot)$ y $l(\cdot)$ pertenecen a la clase $\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, $l^- > 1$ pues, por (3.13),

$$(p^-)' = (p')^+ < \eta(p')^- = (\eta p')^-.$$

Consecuentemente

$$p^- > [(\eta p')^-]' = [(\eta p')']^+$$

y entonces

$$1 < \frac{p^-}{[(\eta p')']^+} \leq l^-.$$

Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 3.3 para obtener (3.14).

Ejemplo 3.22. Si consideramos $p(\cdot)$, η y Λ_2 como en el Ejemplo 3.21 y además $\mu(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < \mu^- \leq \mu^+ < \infty$ tal que

$$1/\eta p'(\cdot) - 1/\mu(\cdot) > \epsilon \tag{3.15}$$

para alguna constante $\epsilon \in (0,1)$ y $\nu(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ entonces $(\Psi_2, \Lambda_2, \Theta_2) \in \mathcal{F}$ donde

$$\Psi_2(x,t) = t^{\mu(x)}(\log(e+t))^{\nu(x)\mu(x)} \text{ y } \Theta_2(x,t) = t^{\alpha(x)}(\log(e+t))^{\alpha(x)\nu(x)}$$

para $\alpha(\cdot)$ definido por $1/\alpha(\cdot) = 1/\mu(\cdot) + 1/(\eta p')'(\cdot)$. En efecto, por Lema 2.19, el exponente $(\mu\nu)(\cdot)$ pertenece a la clase $\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$. Además, por el Lema 2.9 (iii), $\alpha(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, en virtud de la Proposición 2.21,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_2} \|\mathcal{X}_Q\|_{\Lambda_2} &= \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{\mu(\cdot)}(\log L)^{(\mu\nu)(\cdot)}} \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{(\eta p')'(\cdot)}} \\
&\simeq |Q|^{(1/\mu)_Q}(\log(e+1/|Q|))^{\nu_Q}|Q|^{(1/(\eta p')')_Q} \\
&\simeq |Q|^{(1/\alpha)_Q}(\log(e+1/|Q|))^{\nu_Q} \\
&\simeq \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{\alpha(\cdot)}(\log L)^{(\alpha\nu)(\cdot)}} \simeq \|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta_2}.
\end{aligned}$$

Luego vale **F1**. Por otro lado, por la Proposición 1.6,

$$\Psi_2^{-1}(x,t)\Lambda_2^{-1}(x,t) \simeq \frac{t^{1/\mu(x)}}{(\log(e+t))^{\nu(x)}} t^{1/(\eta p')'(x)} \simeq \frac{t^{1/\alpha(x)}}{(\log(e+t))^{\nu(x)}} \simeq \Theta_2^{-1}(x,t).$$

Consecuentemente la condición **F2** se verifica. Notemos que además, $1 < \alpha^- \leq \alpha^+ < \infty$. En efecto, por la condición (3.15),

$$\frac{1}{\alpha(\cdot)} = \frac{1}{\mu(\cdot)} + \frac{1}{(\eta p')'(\cdot)} < \frac{1}{\eta p'(\cdot)} + \frac{1}{(\eta p')'(\cdot)} - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

Entonces $\alpha^- \geq 1/(1-\varepsilon) > 1$. Además,

$$\alpha(\cdot) = \frac{\mu(\cdot)(\eta p')'(\cdot)}{\mu(\cdot) + (\eta p')'(\cdot)} \leq \mu^+ < \infty.$$

Por lo tanto, aplicando la Proposición 2.17 con $p(\cdot) = \alpha(\cdot)$ y $q(\cdot) = (\alpha\nu)(\cdot)$, tenemos que $M : L^{\Theta_2}(\mathbb{R}^n) \to L^{\Theta_2}(\mathbb{R}^n)$. Luego, por dualidad (ver Teorema 1.11), se verifica

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta_2} \|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta_2^*} &\simeq \|\mathcal{X}_Q\|_{\Theta_2} \sup_{\|g\|_{\Theta_2}\leq 1} \int_Q |g(x)|\, dx \\
&= \sup_{\|g\|_{\Theta_2}\leq 1} \left\| \mathcal{X}_Q \int_Q |g(x)|\, dx \right\|_{\Theta_2} \\
&= |Q| \sup_{\|g\|_{\Theta_2}\leq 1} \left\| \mathcal{X}_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |g(x)|\, dx \right\|_{\Theta_2} \\
&\leq |Q| \sup_{\|g\|_{\Theta_2}\leq 1} \|Mg\|_{\Theta_2} \leq |Q|.
\end{aligned}$$

Así, la condición **F3** se verifica.

Observación 3.23. Notemos que la condición (3.10) con Ψ_1 y Ψ_2 como en los ejemplos previos es más débil que la condición (3.6) pues, si $\sigma < R$ y $\eta < S$, entonces

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{\Psi_1}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_1}} \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rr(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Rr(\cdot)}} \quad \text{y} \quad \frac{\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\|_{\Psi_2}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_2}} \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\|_{Sp'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Sp'(\cdot)}}. \tag{3.16}$$

En efecto, en virtud de la Observación 1.13, para probar la desigualdad asociada a Ψ_1 basta ver que (Φ, Λ, Ψ_1) con $\Phi(x,t) = t^{Rr(x)}$ y cierta función Λ es una 3-upla de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas que satisface las condiciones **F1** y **F2**. Consideremos $\Lambda(x,t) = t^{s(\cdot)}(\log(e+t))^{s(\cdot)}$ con $s(\cdot)$ definida por $1/s(\cdot) = 1/(\sigma r(\cdot)) - 1/(Rr(\cdot))$. Entonces, por la Proposición 2.21, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_Q\|_{\Phi} \|\mathcal{X}_Q\|_{\Lambda} &= \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{Rr(\cdot)}} \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{s(\cdot)}(\log L)^{s(\cdot)}} \simeq |Q|^{(1/(Rr))_Q} |Q|^{(1/s)_Q} \log(e + 1/|Q|) \\
&= |Q|^{(1/(\sigma r))_Q} \log(e + 1/|Q|) = \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{\sigma r(\cdot)}(\log L)^{\sigma r(\cdot)}} = \|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_1}
\end{aligned}$$

y, por el Lema 1.6, se verifica que

$$\Phi^{-1}(x,t)\Lambda^{-1}(x,t) \simeq t^{1/(Rr)(x)} \frac{t^{1/s(x)}}{\log(e+t)} = \frac{t^{1/(\sigma r)(x)}}{\log(e+t)} \simeq \Psi_1^{-1}(t),$$

como queríamos probar. La desigualdad asociada a Ψ_2 se demuestra de la misma manera.

3.3.2. Operadores de Calderón-Zygmund

Otra clase de operadores que consideraremos en esta tesis es la de los operadores de Calderón-Zygmund la cual definiremos a continuación.

Definición. Sea $\omega : [0,1] \to [0,\infty)$ una función continua, creciente y subaditiva tal que $\omega(0) = 0$. Una función ω con estas características se denomina *módulo de continuidad*. Decimos que un operador lineal $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ es un **operador de Calderón-Zygmund** en $\mathbb{R}^n$ si se extiende a un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y existe un núcleo $K(x,y)$ localmente integrable definido fuera de la diagonal en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tal que Tf puede representarse como

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy,$$

para toda función $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $x \notin \operatorname{sop} f$. Adicionalmente, el núcleo K debe satisfacer las siguientes propiedades.

CZ1. *Condición de tamaño*:

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_K}{|x-y|^n}, \qquad x \neq y,$$

para alguna constante positiva C_K.

CZ2. *Condición de suavidad*:

$$|K(x,y) - K(z,y)| + |K(y,x) - K(y,z)| \leq \omega\left(\frac{|x-z|}{|x-y|}\right) \frac{1}{|x-y|^n}, \qquad |x-y| > 2|x-z|.$$

En esta tesis trabajaremos con módulos de continuidad que verifican la *condición de Dini* dada por

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Notar que las funciones de la forma $\omega(t) = Ct^\eta$, donde C es una constante positiva y $0 < \eta \leq 1$, satisfacen esta condición (con éste módulo de continuidad la condición **CZ2** se conoce como *condición estándar*).

Ejemplos de estos operadores son H, la *Transformada de Hilbert* en $\mathbb{R}$, donde

$$K(x,y) = \frac{1}{x-y},$$

y las *Transformadas de Riesz* en $\mathbb{R}^n$, cuando

$$K_j(x,y) = \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \qquad x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n),\ j = 1, ..., n.$$

A continuación enunciaremos los resultados obtenidos para operadores de Calderón-Zygmund con módulos de continuidad que satisfacen la condición de Dini. Si T es un operador con estas características, denotamos $T \in \omega$-CZ. El primer resultado muestra la acotación del operador $T^{b,m}$ en espacios de Zygmund generalizados con pesos que satisfacen una condición BV.

Teorema 3.24. *Sean $T \in \omega$-CZ, $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq r(\cdot) \leq r^+ < \infty$ y $q(\cdot)$ una función no negativa en $\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que $a \in T_\infty$ y $b \in \mathcal{L}_a$. Sea (v, w) un par de pesos que verifica $v \in (L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y existen dos contantes $R > 1$ y $S > 1$ tales que*

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} a(Q)^m \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rr^+}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Rr^+}} \frac{\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\|_{S(p^-)'}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{S(p^-)'}} < \infty. \tag{3.17}$$

Entonces

$$T^{b,m} : \left[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_v (\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \left[L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_w (\mathbb{R}^n).$$

Cuando $p(\cdot) = r(\cdot)$ y $q(\cdot) \equiv 0$, este teorema nos provee la estimación $T^{b,m} : L_v^{p(\cdot)} \hookrightarrow L_w^{p(\cdot)}$, extendiendo al contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable resultados de Cruz-Uribe y Pérez ([29]). Notar que, a su vez, en el resultado anterior la clase de símbolos es más amplia que la que se considera en [29], la clase BMO, y la condición en el módulo de continuidad ω es menos restrictiva.

Ejemplos de pares (v, w) que satisfacen la condición (3.17) están dados en la Observación 3.15 considerando $\widetilde{\Gamma} \equiv 1$.

Como en el caso de los resultados asociados a operadores potenciales (ver Teoremas 3.14 y 3.16), podemos obtener otra versión de la condición BV (3.17) con promedios relacionados a exponentes variables asumiendo ciertas condiciones adicionales en las constantes R y S como se enuncia en el siguiente resultado.

Teorema 3.25. *Sean $T \in \omega$-CZ, $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq r(\cdot) \leq r^+ < \infty$ y $q(\cdot)$ una función no negativa en $\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que $a \in T_\infty$ y $b \in \mathcal{L}_a$. Sea (v, w) un par de pesos que verifica $v \in (L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y existen dos contantes $R > r^+/r^-$ y $S > (p')^+/(p')^-$ tales que*

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} a(Q)^m \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{Rr(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Rr(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\|_{Sp'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{Sp'(\cdot)}} < \infty. \tag{3.18}$$

Entonces

$$T^{b,m} : \left[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_v (\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \left[L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_w (\mathbb{R}^n).$$

Ejemplos de pares (v, w) que satisfacen la condición (3.18) están dados en la Observación 3.15 considerando $\widetilde{\Gamma} \equiv 1$, $\eta_1(\cdot) \geq Rp(\cdot)$ y $\eta_2(\cdot) \geq Rr(\cdot)$.

Como antes, en el caso particular en que $b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot))$ (o sea, $a(Q) = \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)}$), el resultado anterior se puede mejorar considerando hipótesis menos restrictivas en los exponentes y una condición sobre el par de pesos asociada a $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas que resulta ser, en algunos casos, más débil que la condición (3.18).

Teorema 3.26. *Sean $T \in \omega$-CZ, $p(\cdot), r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq r(\cdot) \leq r^+ < \infty$ y $\beta(\cdot)$ el exponente definido por $1/\beta(\cdot) = 1/p(\cdot) - 1/r(\cdot)$. Sea $q(\cdot)$ una función no negativa en*

$\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$. *Sean* $0 < \alpha < n$ *y* $d(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ *que verifica* $n/\alpha < d^-$ *y* $d_\infty \leq d(\cdot)$. *Supongamos que* $\delta(\cdot)$ *es el exponente definido por*

$$\frac{\delta(\cdot)}{n} = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{d(\cdot)}$$

y $b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot))$.

Supongamos que $(\Psi_1, \Lambda_1, \Theta_1), (\Psi_2, \Lambda_2, \Theta_2) \in \mathcal{F}$ *son dos 3-uplas de* $\mathbf{\Phi}$*-funciones generalizadas tales que*

$$M_{\Lambda_1} : L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-\frac{q(\cdot)}{r(\cdot)-1}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-\frac{q(\cdot)}{r(\cdot)-1}}(\mathbb{R}^n)$$

y

$$M_{\beta(\cdot),\Lambda_2} : L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Si además (v, w) *es un par de pesos tal que* $v \in (L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)})_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)}^m \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{r(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{\Psi_1}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_1}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{\Psi_2}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_2}} < \infty. \tag{3.19}$$

Entonces

$$T^{b,m} : [L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_v(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow [L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w(\mathbb{R}^n).$$

Notar que las condiciones impuestas sobre los operadores maximales M_{Λ_1} y $M_{\beta(\cdot),\Lambda_2}$ en el resultado anterior coinciden con las del Teorema 3.19. Ejemplos de 3-uplas de $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas que satisfacen dichas condiciones para el caso en que $q(\cdot) \equiv 0$ fueron presentadas en los Ejemplos 3.20, 3.21 y 3.22. En tales casos la condición (3.19) resulta más débil que la condición (3.18) (ver Observación 3.23).

3.4. Resultados de continuidad utilizando estimaciones de tipo Bloom

En esta sección mostraremos estimaciones de tipo Bloom para los operadores de Calderón-Zygmund y el operador integral fraccionaria. Las pruebas de estos resultados se expondrán en la Sección 4.4 y se obtendrán utilizando la técnica de dominación sparse que introduciremos más adelante y las propiedades de la clase de pesos $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ (Proposición 3.31).

El siguiente teorema muestra la acotación del operador $T^{b,m}$ en espacios de Lebesgue de exponentes variables con pesos que pertenecen a la clase $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ introducida en la Subsección 2.3.1. El símbolo b se considera en el espacio Lipschitz generalizado $BMO_{\nu^{1/m}}^{\delta(\cdot)}$ (ver Ejemplo 3.8).

Teorema 3.27. *Sean* $T \in \omega$*-CZ y* $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ *tales que*

$$1 < p^- \leq p(\cdot) \leq q(\cdot) \leq q^+ < \infty.$$

Sea $\delta(\cdot)$ *el exponente definido por*

$$\frac{m\delta(\cdot)}{n} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{q(\cdot)}.$$

Si $\mu, \lambda \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$, $\nu = \mu/\lambda$ *y* $b \in BMO^{\delta(\cdot)}_{\nu^{1/m}}$, *entonces*

$$T^{b,m} : L^{p(\cdot)}_{\mu}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}_{\lambda}(\mathbb{R}^n).$$

Cuando $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ son constantes e iguales, el resultado previo fue obtenido en [71] para el caso del conmutador de primer orden y en [70] para órdenes superiores.

Por otro lado, para el operador fraccionario $(I_\alpha)^{b,m}$ el resultado obtenido es el siguiente.

Teorema 3.28. *Sean* $0 < \alpha < n$ *y* $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ *tales que*

$$1 < p^- \leq p(\cdot) < q(\cdot) \leq q^+ < \infty.$$

Sea $\delta(\cdot)$ *el exponente definido por*

$$\frac{m\delta(\cdot) + \alpha}{n} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{q(\cdot)}.$$

Si $\mu, \lambda \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$, $\nu = \mu/\lambda$ *y* $b \in BMO^{\delta(\cdot)}_{\nu^{1/m}}$, *entonces*

$$(I_\alpha)^{b,m} : L^{p(\cdot)}_{\mu}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}_{\lambda}(\mathbb{R}^n).$$

Cuando $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ son constantes y $\delta(\cdot) \equiv 0$, el resultado anterior fue probado en [48] en el caso del conmutador de primer orden y en [1] en el caso de órdenes superiores.

3.5. Técnicas de dominación sparse

Una de las técnicas utilizadas para probar los resultados principales de esta tesis se encuadra en la *teoría de dominación sparse*, que consiste en controlar operadores clásicos del Análisis Armónico por operadores diádicos más sencillos de manejar a la hora de obtener desigualdades con pesos. Para presentar el marco en el que se desarrolla dicha teoría empezaremos con algunas definiciones fundamentales que pueden encontrarse en [17, 27], entre otros.

Definición. Decimos que una familia $\mathscr{D}$ de cubos de $\mathbb{R}^n$ es una **grilla diádica** si verifica las siguientes propiedades.

1. Si $Q \in \mathscr{D}$, entonces $\ell(Q) = 2^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
2. Si $P, Q \in \mathscr{D}$, entonces $P \cap Q \in \{P, Q, \emptyset\}$.
3. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, los cubos $\mathscr{D}_k = \{Q \in \mathscr{D} : \ell(Q) = 2^k\}$ forman una partición de $\mathbb{R}^n$.

El ejemplo clásico de grilla diádica es $\mathcal{D}$, el conjunto de cubos diádicos en $\mathbb{R}^n$.

Definición. Sea $\mathscr{D}$ un grilla diádica. Decimos que una familia $\mathcal{S} \subset \mathscr{D}$ es **sparse** si existe $\eta \in (0,1)$ tal que

(S1) Para cada $Q \in \mathcal{S}$ existe un subconjunto medible $E(Q) \subset Q$ tal que

$$\eta|Q| \leq |E(Q)|.$$

(S2) Los conjuntos $E(Q)$ son disjuntos dos a dos.

La colección de cubos de Calderón-Zygmund asociada a una función integrable en $\mathbb{R}^n$ se obtiene a partir del siguiente resultado que puede encontrarse en [39, 36] o [41].

Proposición 3.29. *Sea f una función medible que verifica que*

$$\lim_{|Q|\to\infty} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx = 0$$

donde el límite se toma sobre cubos $Q \in \mathcal{D}$. Entonces valen las siguientes afirmaciones.

(i) *Para cada $\lambda > 0$, existe una colección $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ de cubos disjuntos dos a dos y maximales con respecto a la inclusión de conjuntos, tal que*

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\,dx,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Más aún, se verifica que

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\,dx \le 2^n\,\lambda,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ y

$$E_\lambda^d = \left\{x \in \mathbb{R}^n : M^d f(x) > \lambda\right\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j.$$

(ii) *Para cada $\Gamma > 0$, existe una constante C_n tal que si $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es la colección de cubos del item (i) correspondiente al nivel $\lambda = C_n\Gamma$, entonces*

$$E_\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \Gamma\} \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} 3Q_j.$$

Este resultado nos provee un ejemplo de familia sparse. En efecto, si tomamos $\alpha > 2^n$ una constante y para cada $k \in \mathbb{Z}$ consideramos $\{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, la colección de cubos maximales del item (i) correspondiente al nivel α^k, entonces la familia $\mathcal{S} = \{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ es una familia sparse. Una prueba de esto puede encontrarse en [25].

A continuación obtenemos una familia sparse asociada a una función f cuyo promedio en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ verifica cierta propiedad, extendiendo así al caso de exponentes variables el resultado anterior. En tal sentido recordemos que dados $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$,

$$A_{p(\cdot),Q}f = \frac{\|\mathcal{X}_Q f\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}}.$$

Si, además $\mathscr{D}$ es una grilla diádica y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$M_{p(\cdot)}^{\mathscr{D}} f(x) = \sup_{Q\in\mathscr{D}\,:\,Q\ni x} A_{p(\cdot),Q}f \quad \text{y} \quad M_{p(\cdot)}f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}:Q\ni x} A_{p(\cdot),Q}f.$$

Proposición 3.30. *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y f una función medible que verifica que*

$$\lim_{|Q|\to\infty} A_{p(\cdot),Q} f = 0 \tag{3.20}$$

donde el límite se toma sobre cubos Q de una grilla diádica $\mathscr{D}$. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

(i) *Para cada $\lambda > 0$, existe una colección $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ de cubos disjuntos dos a dos y maximales, tal que para todo $j \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\lambda < \frac{\|\mathcal{X}_{Q_j} f\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{Q_j}\|_{p(\cdot)}}. \tag{3.21}$$

Más aún, si C_p es la constante provista por el Lema 2.10 se tiene que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\|\mathcal{X}_{Q_j} f\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{Q_j}\|_{p(\cdot)}} \leq C_p^2 \lambda$$

y

$$E_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\mathscr{D}}_{p(\cdot)} f(x) > \lambda\right\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j. \tag{3.22}$$

(ii) *Para cada $\Gamma > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, si $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es la colección de cubos del item (i) correspondiente al nivel λ_0, entonces*

$$E_\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : M_{p(\cdot)} f(x) > \Gamma\} \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} 3Q_j. \tag{3.23}$$

(iii) *Existe una constante $\sigma > 0$ tal que, si $\alpha > \sigma$ y, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N}}$ denota la colección de cubos maximales del item (i) correspondiente al nivel α^k, entonces la familia $\mathcal{S} = \{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ es sparse.*

La demostración de esta proposición se expondrá en la Sección 4.5. En particular, cuando $p(\cdot) \equiv 1$, del resultado anterior se deduce la Proposición 3.29.

En los últimos años los resultados de dominación sparse han tenido un rol fundamental en la teoría de pesos, ya que han permitido obtener nuevos resultados y simplificar las pruebas de resultados ya conocidos. Particularmente en [16], y [69] de manera independiente, se probó que los operadores Calderón-Zygmund con módulo de continuidad satisfaciendo una condición algo menos general que la condición de Dini se pueden dominar puntualmente por una suma finita de operadores sparse de la forma

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}} f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} f_Q \cdot \mathcal{X}_Q(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.24}$$

donde $\mathcal{S}$ denota una familia sparse. Más tarde, en [66] se extendió el resultado a operadores satisfaciendo la condición de Dini. Posteriormente, en [18] se probó que el operador integral fraccionario I_α está controlado por una suma finita de operadores sparse fraccionarios definidos por la expresión

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S},n/\alpha}f(x)=\sum_{Q\in\mathcal{S}}|Q|^{\alpha/n}f_Q\cdot\mathcal{X}_Q(x). \tag{3.25}$$

donde $0<\alpha<n$ y $\mathcal{S}$ es una familia sparse de cubos en $\mathbb{R}^n$. Cuando $\alpha=0$, $\mathcal{A}_{\mathcal{S},n/\alpha}=\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es el operador dado por (3.24).

En esta tesis trabajaremos con una versión variable del operador $\mathcal{A}_{\mathcal{S},n/\alpha}$ el cual definimos a continuación.

Definición. Sea $\beta(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{S}$ una familia de cubos sparse, el **operador sparse de tipo fraccionario generalizado** $\mathcal{A}_{\mathcal{S},\beta(\cdot)}$ se define por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S},\beta(\cdot)}f(x)=\sum_{Q\in\mathcal{S}}\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)}f_Q\cdot\mathcal{X}_Q(x),\qquad f\in L^1_{\text{loc}}. \tag{3.26}$$

Si $\beta(\cdot)\equiv n/\alpha$, $\mathcal{A}_{\mathcal{S},\beta(\cdot)}=\mathcal{A}_{\mathcal{S},n/\alpha}$ es el operador dado por (3.25).

En relación al operador anterior hemos probado el siguiente resultado de continuidad entre espacios de Lebesgue de exponentes variables con pesos.

Proposición 3.31. *Sean $p(\cdot),q(\cdot)\in\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $1<p^-\le p(\cdot)\le q(\cdot)\le q^+<\infty$, sea $\beta(\cdot)$ el exponente definido por $1/\beta(\cdot)=1/p(\cdot)-1/q(\cdot)$ y $\mathcal{S}$ una familia sparse. Supongamos que $w\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$, entonces*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S},\beta(\cdot)}:L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^{q(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n).$$

Notemos que si en la proposición anterior se considera $p(\cdot)\equiv q(\cdot)$, entonces resulta

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}:L^{p(\cdot)}_w\to L^{p(\cdot)}_w, \tag{3.27}$$

para $w\in A_{p(\cdot)}$. Esto generaliza el resultado probado en el contexto clásico en [26, 69] para el operador sparse $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Introducimos a continuación un operador que se utilizará en los resultados que involucran conmutadores.

Definición. Sean $m,h\in\mathbb{Z}^+$, $0\le\alpha<n$ y $\mathcal{S}$ una familia sparse. Denotamos $\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S},n/\alpha}$ al operador sparse de tipo fraccionario dado por

$$\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S},n/\alpha}(b,f)(x)=\sum_{Q\in\mathcal{S}}|b(x)-b_Q|^{m-h}|Q|^{\alpha/n}(|b-b_Q|^hf)_Q\cdot\mathcal{X}_Q(x),\qquad b,f\in L^1_{\text{loc}}.$$

En el caso en que $\alpha=0$ este operador fue definido [71, 70] y, con $\alpha>0$, se introdujo en [1].

Notar que si $m=h=0$, entonces $\mathcal{A}^{0,0}_{\mathcal{S},n/\alpha}(b,f)=\mathcal{A}_{\mathcal{S},n/\alpha}(f)$. Por simplicidad, cuando $\alpha=0$, denotaremos $\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S},\infty}=\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}$.

Los operadores anteriores controlan puntualmente a los conmutadores del operador integral fraccionario como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3.32 ([1]). *Sea $0 < \alpha < n$. Para toda función acotada con soporte compacto f y $b \in L^m_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, existe una familia $\{\mathscr{D}_j\}_{j=1}^{3^n}$ de grillas diádicas y una colección $\{\mathcal{S}_j\}_{j=1}^{3^n}$ de familias sparse tales que, para cada j, $\mathcal{S}_j \subset \mathscr{D}_j$, y para c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$|(I_\alpha)^{b,m} f(x)| \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{h=0}^{m} \mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}_j, n/\alpha}(b, |f|)(x).$$

En relación a los operadores Calderón-Zygmund con módulo de continuidad que satisface la condición de Dini se tiene un resultado similar.

Teorema 3.33 ([53]). *Sea $T \in \omega$-CZ. Para toda función acotada con soporte compacto f y $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, existen 3^n familias sparse $\mathcal{S}_j$ tales que, para c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$|T^{b,m} f(x)| \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{h=0}^{m} \mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}_j}(b, |f|)(x).$$

Puede parecer un problema el hecho de que las familias sparse elegidas dependan de f, sin embargo, a efectos prácticos, dicha circunstancia no restringe la aplicabilidad del resultado, dado que, como veremos más adelante, este tipo de dominación se utilizará para obtener estimaciones independientes de la familia sparse.

CAPÍTULO 4

Demostraciones de los resultados del Capítulo 3

4.1. Resultados de la Sección 3.1

Para demostrar el Teorema 3.2 fue esencial la siguiente proposición que provee una estimación puntual para $A_{s(\cdot),Q}$ en función de M en el contexto de los espacios de Zygmund generalizados (la prueba de la misma se expondrá una vez concluida la demostración del Teorema 3.2).

Proposición 4.1. *Sean $p(\cdot), s(\cdot), l(\cdot)$ $q(\cdot)$ bajo las mismas hipótesis del Teorema 3.2. Sea f una función medible con $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$ tal que $f(x) \geq 1$ o $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $Q \in \mathcal{Q}$ es un cubo con $|Q| \leq 1$ tal que $A_{s(\cdot),Q}f \geq C$ para alguna constante $C > 0$. Si $1 < a < l^-$, entonces*

$$\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, A_{s(\cdot),Q}f) \lesssim \left[M\left(\varphi_{p(\cdot)/a,q(\cdot)/a}(\cdot, f(\cdot))\right)(x)\right]^a, \qquad \forall\, x \in Q, \tag{4.1}$$

donde $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}$ se define como en (1.9).

Una desigualdad similar a (4.1) en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable (o sea, $q(\cdot) \equiv 0$) está contenida en el siguiente lema probado en [35].

Lema 4.2 ([35])**.** *Sean $p(\cdot), s(\cdot), l(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $p(\cdot) = s(\cdot)l(\cdot)$ y $l^- > 1$. Sea $m > n$ un entero, entonces existen dos constantes $\theta \in (0,1)$ y $C > 0$ tales que la desigualdad*

$$\left(\theta A_{s(\cdot),Q}f\right)^{p(x)} \leq \left[M\left(f^{p(\cdot)/l^-}\right)(x)\right]^{l^-} + C\left[M\left((e + |\cdot|)^{-m}\right)(x)\right]^{l^-}$$

se verifica para todo cubo $Q \in \mathcal{Q}$, $x \in Q$ y toda función f tal que $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1/2$.

Demostración Teorema 3.2. Consideremos $f \in L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $f \geq 0$ y, por el argumento de escala, $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$. Luego, basta probar que existe una constante $C > 0$, independiente de f, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, M_{s(\cdot)}f(x))\, dx \leq C.$$

Dividamos a $f = f_1 + f_2$ donde $f_1(x) = f(x)\mathcal{X}_{\{f\leq 1\}}(x)$ y $f_2(x) = f(x)\mathcal{X}_{\{f>1\}}(x)$. Dado que, para cada x fijo, la función $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,\cdot)$ es creciente y convexa, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, M_{s(\cdot)}f(x)\right)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, M_{s(\cdot)}f_1(x) + M_{s(\cdot)}f_2(x)\right)\, dx$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, 2M_{s(\cdot)}f_1(x)\right)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, 2M_{s(\cdot)}f_2(x)\right)\, dx. \tag{4.2}$$

Estimemos cada sumando separadamente. Para el caso de f_1, fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y tomemos un cubo $Q \in \mathcal{Q}$ tal que $x \in Q$. Como $A_{s(\cdot),Q}f_1 \le 1$, tenemos que $\log(e + A_{s(\cdot),Q}f_1) \le \log(e+1)$. Luego, por la desigualdad (A.VII) del Apéndice y, si $\theta \in (0,1)$ es la constante provista por el Lema 4.2, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, 2A_{s(\cdot),Q}f_1(x)\right) &\le 2^{p^+}(\log(2)+1)^{q^+}\left(A_{s(\cdot),Q}f_1\right)^{p(x)}\left(\log(e + A_{s(\cdot),Q}f_1)\right)^{q(x)}\\ &\lesssim (\log(e+1))^{q^+}\,\theta^{-p^+}\left(\theta A_{s(\cdot),Q}f_1\right)^{p(x)}\\ &\lesssim \left[M\left(f^{p(\cdot)/l^-}\right)(x)\right]^{l^-} + \left[M\left(H_m\right)(x)\right]^{l^-}\end{aligned}$$

donde $m > n$ es un entero y $H_m(x) = (e+|x|)^{-m}$. Así, tomando supremo sobre todos los cubos en $\mathcal{Q}$ que contienen a x y, usando la continuidad de M en L^{l^-}, concluimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, 2M_{s(\cdot)}f_1(x)\right)\, dx &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\left[M\left(f^{p(\cdot)/l^-}\right)(x)\right]^{l^-} dx + \int_{\mathbb{R}^n}\left[M\left(H_m\right)(x)\right]^{l^-} dx\\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p(x)}\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} H_m(x)^{l^-}\, dx\\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, f(x))\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} H_m(x)^{l^-}\, dx \lesssim 1\end{aligned}$$

ya que $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \le 1$.

Por otra parte, para estimar el segundo sumando de (4.2) fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y consideremos los conjuntos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ definidos por

$$\mathcal{A} = \{Q \in \mathcal{Q} : x \in Q \;\text{ y }\; A_{s(\cdot),Q}f_2 < 1\},$$

$$\mathcal{B} = \{Q \in \mathcal{Q} : x \in Q,\; A_{s(\cdot),Q}f_2 \ge 1 \;\text{ y }\; |Q| \ge 1\},$$

$$\mathcal{C} = \{Q \in \mathcal{Q} : x \in Q,\; A_{s(\cdot),Q}f_2 \ge 1 \;\text{ y }\; |Q| < 1\},$$

y las maximales $M^{\mathcal{A}}, M^{\mathcal{B}}$ y $M^{\mathcal{C}}$ dadas por

$$M^{\mathcal{A}}f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{A}} A_{s(\cdot),Q}f,\; M^{\mathcal{B}}f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{B}} A_{s(\cdot),Q}f \text{ y } M^{\mathcal{C}}f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{C}} A_{s(\cdot),Q}f.$$

Entonces tenemos que

$$M_{s(\cdot)}f_2(x) \le M^{\mathcal{A}}f_2(x) + M^{\mathcal{B}}f_2(x) + M^{\mathcal{C}}f_2(x)$$

y, nuevamente por el crecimiento y la convexidad de la función $\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,\cdot)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, 2M_{s(\cdot)}f_2(x)\right)\, dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, 4M^{\mathcal{A}}f_2(x)\right)\, dx\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, 8M^{\mathcal{B}}f_2(x)\right)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}\left(x, 8M^{\mathcal{C}}f_2(x)\right)\, dx.\end{aligned}$$

Como $A_{s(\cdot),Q}f_2 < 1$ si $Q \in \mathcal{A}$, la estimación del término correspondiente a $M^{\mathcal{A}}f_2(x)$ se sigue utilizando el mismo argumento que el correspondiente a f_1.

Si $Q \in \mathcal{B}$, por el Lema 2.5, tenemos que $A_{s(\cdot),Q}f_2 \leq 1$. En efecto, como $\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)} \geq 1$, $A_{s(\cdot),Q}f_2 \leq \|\mathcal{X}_Q f_2\|_{s(\cdot)}$. Pero, dado que $f_2 > 1$ o $f_2 = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_2(y)^{s(y)}\,dy &= \int_{\mathbb{R}^n\cap\{y\,:\,f_2(y)>1\}} f_2(y)^{s(y)}\,dy \leq \int_{\mathbb{R}^n\cap\{y\,:\,f_2(y)>1\}} f_2(y)^{p(y)}\,dy\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(y, f_2(y))\,dy \leq 1,\end{aligned}$$

en virtud de que $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$. Luego $\|\mathcal{X}_Q f_2\|_{s(\cdot)} \leq 1$ y, consecuentemente, $A_{s(\cdot),Q}f_2 \leq 1$. Entonces podemos proceder como con la estimación correspondiente a f_1.

Tomemos $Q \in \mathcal{C}$ y sea a un número real tal que $1 < a < l^-$. Luego, por la Proposición 4.1 obtenemos

$$\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, 8A_{s(\cdot),Q}f_2) \lesssim \left[M\left(\varphi_{p(\cdot)/a,q(\cdot)/a}(\cdot, f_2(\cdot))\right)(x)\right]^a.$$

Tomando supremos sobre todos los cubos $Q \in \mathcal{C}$ y en virtud de que $a > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, 8M^{\mathcal{C}}f_2(x))\,dx &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \left[M\left(\varphi_{p(\cdot)/a,q(\cdot)/a}(\cdot, f_2(\cdot))\right)(x)\right]^a dx\\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, f_2(x))\,dx \lesssim 1,\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Para probar la Proposición 4.1 enunciaremos dos lemas que demostraremos una vez concluida la prueba de dicha proposición. El primero establece una relación entre $A_{s(\cdot),Q}f$ y

$$\left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)^{p(x)}(\log(e + f(x)))^{q(x)}\,dx, \tag{4.3}$$

cuando $s(\cdot) \leq p(\cdot)$.

Lema 4.3. *Sean $p(\cdot), s(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $s(\cdot) \leq p(\cdot) \leq p^+ < \infty$ y $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$. Sea f una función medible con $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$ tal que $f(x) \geq 1$ o $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q \in \mathcal{Q}$ un cubo con $|Q| \leq 1$. Entonces, existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que*

(i) *Si $A_{s(\cdot),Q}f \geq C$ para alguna constante $C > 0$, entonces $\left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q \geq C_1$.*
(ii) *Si $\left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q \geq C_1$, entonces $A_{s(\cdot),Q}f \leq C_2\left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q$.*

El segundo resultado auxiliar es el siguiente.

Lema 4.4. *Dados $p(\cdot), s(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $s(\cdot) \leq p(\cdot) \leq p^+ < \infty$ y $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ tal que $q(\cdot) \geq 0$. Sea f una función medible con $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$ tal que $f(x) \geq 1$ o $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $Q \in \mathcal{Q}$ es un cubo con $|Q| \leq 1$ tal que $A_{s(\cdot),Q}f \geq C$ para alguna constante $C > 0$ y $x \in Q$, entonces*

$$A_{s(\cdot),Q}f \lesssim \left(\left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q\right)^{1/p(x)}\left(\log\left(e + \left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q\right)\right)^{-q(x)/p(x)}.$$

Demostración Proposición 4.1. Sea $1 < a < l^-$. Notar que, como $a < l^- \leq l(\cdot) = p(\cdot)/s(\cdot)$, tenemos que $s(\cdot) \leq p(\cdot)/a$. Podemos entonces aplicar el Lema 4.4 con $s(\cdot)$, $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ reemplazados por $s(\cdot)$, $p(\cdot)/a$ y $q(\cdot)/a$ respectivamente y obtener que

$$A_{s(\cdot),Q}f \leq C \left(\left[\varphi_{p(\cdot)/a,q(\cdot)/a}(\cdot, f)\right]_Q \right)^{a/p(x)} \left(\log \left(e + \left[\varphi_{p(\cdot)/a,q(\cdot)/a}(\cdot, f)\right]_Q \right) \right)^{-q(x)/p(x)},$$

para alguna constante $C > 0$. Luego

$$(A_{s(\cdot),Q}f)^{p(x)} \left(\log \left(e + \left[\varphi_{p(\cdot)/a,q(\cdot)/a}(\cdot, f)\right]_Q \right) \right)^{q(x)} \leq C^{p^+} \left[M \left(\varphi_{p(\cdot)/a,q(\cdot)/a}(\cdot, f) \right) (x) \right]^a. \tag{4.4}$$

Pero, como por el Lema 4.3 con $s(\cdot)$, $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ reemplazados por $s(\cdot)$, $p(\cdot)/a$ y $q(\cdot)/a$ respectivamente, se verifica

$$A_{s(\cdot),Q}f \lesssim \left[\varphi_{p(\cdot)/a,q(\cdot)/a}(\cdot, f)\right]_Q,$$

a partir de (4.4) y la desigualdad (A.VI) del Apéndice, deducimos que

$$\begin{aligned} \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, A_{s(\cdot),Q}f) &= (A_{s(\cdot),Q}f)^{p(x)} \left(\log \left(e + A_{s(\cdot),Q}f \right) \right)^{q(x)} \\ &\lesssim \left[M \left(\varphi_{p(\cdot)/a,q(\cdot)/a}(\cdot, f) \right) (x) \right]^a, \end{aligned}$$

que es la desigualdad (4.1). □

A continuación presentamos las demostraciones de los dos resultados auxiliares.

Demostración Lema 4.3. Dado que $A_{s(\cdot),Q}f \geq C$, existe una constante $C_3 > 0$ tal que

$$\int_Q \left(\frac{f(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}} \right)^{s(x)} dx \geq C_3. \tag{4.5}$$

Además, como $|Q| \leq 1$, por el Lema 2.11, existe una constante $C > 0$ tal que $|Q| \leq C \|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}^{s(x)}$ para todo $x \in Q$. Luego, por la hipótesis en f, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\frac{f(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}} \right)^{s(x)} dx &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q f(x)^{s(x)}\, dx \leq \frac{C}{|Q|} \int_{Q \cap \{x | f(x) \geq 1\}} f(x)^{p(x)}\, dx \\ &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, f(x))\, dx = C \left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Combinando (4.5) y (4.6) obtenemos que (i) vale con $C_1 = C_3/C$. Para demostrar (ii) notemos que, por la convexidad de $\varphi_{s(\cdot)}(x, \cdot)$ y como $C_1 / \left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q \leq 1$,

$$\int_Q \left(\frac{C_1 f(x)}{\left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q \|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}} \right)^{s(x)} dx \leq \frac{C_1}{\left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q} \int_Q \left(\frac{f(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}} \right)^{s(x)} dx \leq C_1 C,$$

donde hemos utilizado (4.6). Consecuentemente, por la propiedad de la bola unitaria,

$$A_{s(\cdot),Q}f \leq C_2 \left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q.$$

□

El Lema 4.4 es consecuencia del siguiente resultado contenido en [80], cuya demostración detallada será dada en el apéndice (ver Sección A). Con el objeto de simplificar la notación denotaremos $J = \left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot, f)\right]_Q$ y

$$E(x) = J^{1/p(x)}(\log(e+J))^{-q(x)/p(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Lema 4.5 ([80]). *Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $p^+ < \infty$ y $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ tal que $q(\cdot) \geq 0$. Sea f una función medible definida en $\mathbb{R}^n$, no negativa con $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$ y $Q \in \mathcal{Q}$ un cubo. Si $J \geq C_0$ para alguna constante $C_0 > 0$, entonces, dados $x, y \in Q$ se verifica*

$$E(x)^{-p(y)} \lesssim J^{-1}(\log(e+J))^{q(x)} \tag{4.7}$$

y

$$(\log(e+E(x)))^{-q(y)} \lesssim (\log(e+J))^{-q(x)}. \tag{4.8}$$

Demostración Lema 4.4. Sean $Q \in \mathcal{Q}$ con $|Q| \leq 1$ tal que $A_{s(\cdot),Q}f \geq C$ para alguna constante $C > 0$ y $x \in Q$. Debemos probar que

$$A_{s(\cdot),Q}f \lesssim J^{1/p(x)} \left(\log\left(e+J\right)\right)^{-q(x)/p(x)} = E(x).$$

Notemos que, como $A_{s(\cdot),Q}f \geq C$, por el Lema 4.3 (i), existe una constante positiva C_1 tal que $J \geq C_1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{A_{s(\cdot),Q}f}{E(x)} &= \frac{\|\mathcal{X}_Q f/E(x)\|_{s(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}} \\
&\leq \left(\left\|\mathcal{X}_{Q\cap\{y:f(y)\leq E(x)\}} f/E(x)\right\|_{s(\cdot)} + \left\|\mathcal{X}_{Q\cap\{y:f(y)\geq E(x)\}} f/E(x)\right\|_{s(\cdot)}\right) \|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}^{-1} \\
&\leq 1 + \left\|\mathcal{X}_{Q\cap\{y:f(y)\geq E(x)\}} \frac{f}{E(x)} \|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}^{-1}\right\|_{s(\cdot)}
\end{aligned}$$

Estimemos el segundo término de esta suma. Como $|Q| \leq 1$, por el Teorema 2.11 y el Lema 4.5, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q\cap\{y:f(y)\geq E(x)\}} \left[\frac{f(y)}{E(x)} \|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}^{-1}\right]^{s(y)} dy \\
&\leq \int_{Q\cap\{y:f(y)\geq E(x)\}} \left[\left(\frac{f(y)}{E(x)}\right)^{p(y)/s(y)} \left(\frac{\log(e+f(y))}{\log(e+E(x))}\right)^{q(y)/s(y)} \|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}^{-1}\right]^{s(y)} dy \\
&\lesssim \frac{1}{|Q|} \int_{Q\cap\{y:f(y)\geq E(x)\}} \left(\frac{f(y)}{E(x)}\right)^{p(y)} \left(\frac{\log(e+f(y))}{\log(e+E(x))}\right)^{q(y)} dy \\
&\lesssim \frac{J^{-1}}{|Q|} \int_{Q\cap\{y:f(y)\geq E(x)\}} f(y)^{p(y)}(\log(e+f(y)))^{q(y)}\, dy \leq J^{-1}J = 1.
\end{aligned}$$

Luego, por la propiedad de la bola unitaria, obtenemos que

$$\left\|\mathcal{X}_{Q\cap\{y:f(y)\geq E(x)\}} \frac{f}{E(x)} \|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}^{-1}\right\|_{s(\cdot)} \lesssim 1.$$

Concluimos entonces que $A_{s(\cdot),Q}f \lesssim E(x)$ como queríamos demostrar. $\square$

La siguiente observación es útil para la demostración del Teorema 3.3.

Observación 4.6. Sean $p(\cdot), r(\cdot), \beta(\cdot)$ y $s(\cdot)$ como en las hipótesis del Teorema 3.3. Supongamos que $l(\cdot) = r(\cdot)/[(\beta(\cdot)/s(\cdot))' s(\cdot)]$. Entonces $l^- > 1$. En efecto, como $(p/s)^- > 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(1+\varepsilon) < (p/s)^-$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $s(x) < s(x)(1+\varepsilon) < p(x)$ y

$$\frac{s(x)}{r(x) - s(x)(1+\varepsilon)} < \frac{p(x)}{r(x) - p(x)}. \tag{4.9}$$

Multiplicando (4.9) por $r(x)$ tenemos que

$$\frac{s(x)r(x)}{r(x) - s(x)(1+\varepsilon)} < \frac{p(x)r(x)}{r(x) - p(x)} = \beta(x),$$

lo cual implica que

$$\left(\frac{\beta(x)}{s(x)}\right)' < \left(\frac{r(x)}{r(x) - s(x)(1+\varepsilon)}\right)' = \frac{r(x)}{s(x)(1+\varepsilon)}.$$

Consecuentemente

$$(1+\varepsilon) < \frac{r(x)}{s(x)\left(\beta(x)/s(x)\right)'} = l(x)$$

y entonces $l^- \geq 1 + \varepsilon > 1$.

Demostración Teorema 3.3. Sea $g \in L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$ tal que $\|g\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$. Dado que la condición $(p/s)^- > 1$ implica que $s(\cdot) \leq \beta(\cdot)$, por la Proposición 3.4 tenemos que

$$\left\|M_{\beta(\cdot),s(\cdot)} g\right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \lesssim \left\|M_{(\beta(\cdot)/s(\cdot))' s(\cdot)}(g^{p(\cdot)/r(\cdot)})\right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \left\|g^{p(\cdot)/\beta(\cdot)}\right\|_{\beta(\cdot)}. \tag{4.10}$$

Como

$$\varrho_{\beta(\cdot)}\left(g^{p(\cdot)/\beta(\cdot)}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p(x)}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p(x)} \left(\log(e + |g(x)|)\right)^{q(x)} dx \leq 1,$$

$\left\|g^{p(\cdot)/\beta(\cdot)}\right\|_{\beta(\cdot)} \leq 1$. Por otro lado, reemplazando p, s y l por r, $(\beta/s)' s$ y $r/[(\beta/s)' s]$ respectivamente en el Teorema 3.2, y en virtud de la Observación 4.6, obtenemos que $M_{(\beta(\cdot)/s(\cdot))' s(\cdot)}$ es acotada en $L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$. Luego de (4.10) deducimos que

$$\left\|M_{\beta(\cdot),s(\cdot)} g\right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \lesssim \left\|g^{p(\cdot)/r(\cdot)}\right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}. \tag{4.11}$$

Pero, por la desigualdad (A.V) (ver Apéndice), existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\varrho_{\varphi_{r(\cdot),q(\cdot)}}(g^{p(\cdot)/r(\cdot)}) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p(x)} \left(\log\left(e + g(x)^{p(x)/r(x)}\right)\right)^{q(x)} dx \\
&\leq C^{q^+} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p(x)} (\log(e + g(x)))^{q(x)}\, dx \lesssim 1,
\end{aligned}$$

de donde deducimos que, $\left\|g^{p(\cdot)/r(\cdot)}\right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \lesssim 1$. Luego, a partir de (4.11) obtenemos que $\left\|M_{\beta(\cdot),s(\cdot)} g\right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \lesssim 1$, lo cual concluye la demostración. $\square$

Demostración Proposición 3.4. Sean $g \in L^{s(\cdot)}_{\mathrm{loc}}$, $Q \in \mathcal{Q}$ y $x \in Q$. En virtud de que

$$\frac{1}{s(\cdot)} - \frac{1}{\beta(\cdot)} = \frac{\beta(\cdot) - s(\cdot)}{s(\cdot)\beta(\cdot)} = \frac{1}{s(\cdot)(\beta(\cdot)/s(\cdot))'},$$

por el Corolario 2.12, se verifica que

$$\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)} \simeq \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} \|\mathcal{X}_Q\|_{(\beta(\cdot)/s(\cdot))'s(\cdot)} .$$

Como $p(\cdot)/r(\cdot) + p(\cdot)/\beta(\cdot) = 1$, por la desigualdad de Hölder (2.1), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} \frac{\|\mathcal{X}_Q g\|_{s(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}} &= \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}} \left\|\mathcal{X}_Q g^{p(\cdot)/r(\cdot)+p(\cdot)/\beta(\cdot)}\right\|_{s(\cdot)} \\
&\lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q g^{p(\cdot)/r(\cdot)}\|_{(\beta/s(\cdot))'s(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{(\beta(\cdot)/s(\cdot))'s(\cdot)}} \left\|\mathcal{X}_Q g^{p(\cdot)/\beta(\cdot)}\right\|_{\beta(\cdot)} \\
&\lesssim M_{(\beta(\cdot)/s(\cdot))'s(\cdot)}(g^{p(\cdot)/r(\cdot)})(x) \left\|g^{p(\cdot)/\beta(\cdot)}\right\|_{\beta(\cdot)} .
\end{aligned}$$

Luego, tomando supremo sobre todos los cubos $Q \in \mathcal{Q}$, se demuestra la desigualdad deseada. □

4.2. Resultados de la Sección 3.2

Para demostrar el Lema 3.10 presentamos a continuación una estimación obtenida en [34].

Lema 4.7 ([34])**.** *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Entonces existe una constante $0 < \nu < 1$ tal que para todo $Q \in \mathcal{Q}$ y toda función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con $|f|_Q \neq 0$,*

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q |f|^\nu\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \lesssim |f|_Q^\nu.$$

Demostración Lema 3.10. En virtud del Lema 4.7 existe una constante $0 < \nu < 1$ tal que para todo cubo $Q \in \mathcal{Q}$ y toda función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ con $|f|_Q \neq 0$,

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q |f|^\nu\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \lesssim |f|_Q^\nu. \tag{4.12}$$

Fijemos un cubo $Q \in \mathcal{Q}$ y consideremos la función $f(x) = (b(x) - b_Q)^{k/\nu}$. Notar que, como $\|b\|_{\mathcal{L}_a} \neq 0$, $|f|_Q \neq 0$. Entonces, por la desigualdad (4.12),

$$\frac{\left\|\mathcal{X}_Q |b - b_Q|^k\right\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \lesssim \left(\fint_Q |b(x) - b_Q|^{k/\nu}\, dx \right)^\nu$$

Pero como $k/\nu > 1$, en virtud del Teorema 3.9, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\fint_Q |b(x) - b_Q|^{k/\nu}\, dx \right)^\nu &= \left[\frac{a(Q)}{a(Q)} \left(\fint_Q |b(x) - b_Q|^{k/\nu}\, dx \right)^{\nu/k} \right]^k \\
&\leq \left[a(Q)\, \|b\|_{\mathcal{L}_a} \right]^k .
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. □

Demostración 3.11. Fijemos $Q \in \mathcal{Q}$. Notemos que

$$\begin{aligned} |b_{3Q} - b_Q| &\leq |b_{3Q} - b_{2Q}| + |b_{2Q} - b_Q| \\ &\leq \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} |b(x) - b_{3Q}|\, dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_{2Q}|\, dx \\ &\lesssim \frac{1}{|3Q|} \int_{3Q} |b(x) - b_{3Q}|\, dx + \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} |b(x) - b_{2Q}|\, dx \\ &\lesssim a(3Q) \|b\|_{\mathcal{L}_a} + a(2Q) \|b\|_{\mathcal{L}_a}. \end{aligned}$$

Luego por la condición T_∞ concluimos que

$$|b_{3Q} - b_Q| \lesssim \|a\|_{\mathfrak{t}_\infty} a(3Q) \|b\|_{\mathcal{L}_a}.$$

□

Demostración Lema 3.12. Supongamos $d = 3$, el argumento para probar el caso $d = 1$ es similar. Dado un cubo $Q \in \mathcal{Q}$, debemos probar la siguiente desigualdad

$$⨍_{3Q} |b(y) - b_Q|^k H(y)\, dy \lesssim a(3Q)^k \|b\|_{\mathcal{L}_a}^k \frac{\|\mathcal{X}_{3Q} H\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)}}. \tag{4.13}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder (2.3) y la equivalencia (2.13) tenemos que

$$⨍_{3Q} |b(y) - b_Q|^k H(y)\, dy \lesssim \frac{\left\|\mathcal{X}_{3Q}|b - b_Q|^k\right\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_{3Q} H\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p(\cdot)}}. \tag{4.14}$$

En virtud de los Lemas 3.10 y 3.11, el primer factor de este producto queda acotado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\left\|\mathcal{X}_{3Q}|b - b_Q|^k\right\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}} &\lesssim \frac{\left\|\mathcal{X}_{3Q}|b - b_{3Q}|^k\right\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}} + \frac{\left\|\mathcal{X}_{3Q}|b_{3Q} - b_Q|^k\right\|_{p'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{p'(\cdot)}} \\ &\lesssim \left(\|a\|_{\mathfrak{t}_\infty} a(3Q) \|b\|_{\mathcal{L}_a}\right)^k. \end{aligned}$$

Finalmente, combinando (4.14) con la desigualdad anterior deducimos (4.13). □

Para probar el Lema 3.13 utilizaremos el siguiente resultado que provee una versión variable de la desigualdad (3.1).

Lema 4.8 ([94])**.** *Sean $0 < \alpha < n$ y $r(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ que verifica $n/\alpha < r^-$ y $r_\infty \leq r(\cdot)$. Sean $\delta(\cdot)$ el exponente definido por*

$$\frac{\delta(\cdot)}{n} = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{r(\cdot)}$$

y $b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot))$. Entonces

$$|b(x) - b(z)| \lesssim |x - z|^{\delta(x)},$$

para todos $x, z \in \mathbb{R}^n$.

Demostración Lema 3.13. Sea $z \in kQ$, por el Lema 4.8 tenemos que

$$\begin{aligned}|b(z) - b_Q| &\leq \fint_Q |b(z) - b(x)|\, dx \\ &\lesssim \fint_Q |z - x|^{\delta(x)}\, dx.\end{aligned}$$

Notemos si $x \in Q$, entonces $|z - x| \lesssim |Q|^{1/n}$. Luego, en virtud del Corolario 2.24,

$$\begin{aligned}|b(z) - b_Q| &\lesssim \fint_Q |Q|^{\delta(x)/n}\, dx \\ &\lesssim \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)}\,.\end{aligned}$$

□

4.3. Resultados de la Sección 3.3

Para presentar la demostración de los teoremas relacionados con los operadores potenciales enunciaremos primero dos lemas auxiliares. En tal sentido denotemos con $\overline{\Gamma}$ y $\widetilde{\Gamma}$ a las funciones definidas para $t \geq 0$ por

$$\overline{\Gamma}(t) = \sup_{t<|y|\leq 2t} \Gamma(y) \quad \text{y} \quad \widetilde{\Gamma}(t) = \int_{|z|\leq t} \Gamma(z)\, dz,$$

y recordemos que $\mathcal{D}$ es la familia de cubos diádicos (ver (2.14)). El primer lema da una discretización del operador $P_\Gamma^{b,m}$ obtenido en [92] para el caso de $m = 0$ y en [73] para los conmutadores. Se incluye su demostración para mejor comprensión.

Lema 4.9 ([92, 73])**.** *Sean $\Gamma \in \mathfrak{R}$ y $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que*

$$\left|P_\Gamma^{b,m} f(x)\right| \leq \sum_{Q\in\mathcal{D}} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} |b(x) - b_Q|^{m-j} \mathcal{X}_Q(x) \int_{3Q} |b(y) - b_Q|^j |f(y)|\, dy. \tag{4.15}$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}\left|P_\Gamma^{b,m} f(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m \Gamma(x - y) f(y)\, dy\right| \\ &= \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_{2^{-\nu-1}<|x-y|\leq 2^{-\nu}} (b(x) - b(y))^m \Gamma(x - y) f(y)\, dy\right| \\ &\leq \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\Gamma}\left(2^{-\nu-1}\right) \int_{|x-y|\leq 2^{-\nu}} |b(x) - b(y)|^m |f(y)|\, dy \\ &\leq \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sum_{Q\in\mathcal{D}\,:\,\ell(Q)=2^{-\nu}} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) \mathcal{X}_Q(x) \int_{|x-y|\leq 2^{-\nu}} |b(x) - b(y)|^m |f(y)|\, dy.\end{aligned}$$

Como la bola centrada en x de radio $2^{-\nu}$, está contenida en $3Q$ si $x \in Q$ y $\ell(Q) = 2^{-\nu}$ (ver Apéndice, Lema A.3), concluimos que

$$\left|P_{\Gamma}^{b,m} f(x)\right| \leq \sum_{Q\in\mathcal{D}} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) \mathcal{X}_Q(x) \int_{3Q} |b(x) - b(y)|^m |f(y)|\, dy.$$

Luego, en virtud del *Teorema del binomio*, deducimos (4.15). □

El segundo lema, que probamos en [77], contiene una estimación útil para extender resultados locales a globales.

Lema 4.10. *Sean $\omega(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, $\Gamma \in \mathfrak{R}$ y $Q_0 \in \mathcal{D}$. Entonces, para toda función $f \in L^{\omega(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, se verifica*

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}\,:\,Q\subset Q_0} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) |3Q||Q| \frac{\|\mathcal{X}_{3Q} f\|_{\omega(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{\omega(\cdot)}} \lesssim \widetilde{\Gamma}[\delta(1+\varepsilon)\ell(Q_0)]|3Q_0| \frac{\|\mathcal{X}_{3Q_0} f\|_{\omega(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q_0}\|_{\omega(\cdot)}}, \tag{4.16}$$

donde ε, δ son las constantes provistas por la condición $\mathfrak{R}$.

En el caso particular en que $\omega(\cdot) \equiv 1$, la desigualdad (4.16) fue obtenida en [92].

Demostración Lema 4.10. Sea $f \in L^{\omega(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que $\ell(Q_0) = 2^{-d_0}$ con $d_0 \in \mathbb{Z}$. Por la equivalencia (2.13) y el Lema 2.14 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathcal{D}\,:\,Q\subset Q_0} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) |3Q||Q| \frac{\|\mathcal{X}_{3Q} f\|_{\omega(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{\omega(\cdot)}} \\
&\simeq \sum_{d\geq d_0} 2^{-dn}\overline{\Gamma}(2^{-d-1}) \sum_{Q\subset Q_0\,:\,\ell(Q)=2^{-d}} \|f\mathcal{X}_{3Q}\|_{\omega(\cdot)} \|\mathcal{X}_{3Q}\|_{\omega'(\cdot)} \\
&\lesssim \|f\mathcal{X}_{3Q_0}\|_{\omega(\cdot)} \|\mathcal{X}_{3Q_0}\|_{\omega'(\cdot)} \sum_{d\geq d_0} 2^{-dn}\overline{\Gamma}(2^{-d-1}).
\end{aligned}$$

Notemos que, por la condición $\mathfrak{R}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{d\geq d_0} 2^{-dn}\overline{\Gamma}(2^{-d-1}) &\lesssim \sum_{d\geq d_0} \int_{\delta(1-\varepsilon)2^{-d-1}<|y|\leq\delta(1+\varepsilon)2^{-d}} \Gamma(y)\, dy \\
&\leq \int_{|y|\leq\delta(1+\varepsilon)2^{-d_0}} \Gamma(y) \left(\sum_{d\geq d_0} \mathcal{X}_{\delta(1-\varepsilon)2^{-d-1}<|y|\leq\delta(1+\varepsilon)2^{-d}}(y)\right) dy.
\end{aligned}$$

Por el solapamiento acotado de los intervalos $\{(\delta(1-\varepsilon)2^{-d-1}, \delta(1+\varepsilon)2^{-d}) : d \in \mathbb{Z}\}$, concluimos que

$$\sum_{d\geq d_0} 2^{-dn}\overline{\Gamma}(2^{-d-1}) \lesssim \int_{|y|\leq\delta(1+\varepsilon)\ell(Q_0)} \Gamma(y)\, dy = \widetilde{\Gamma}[\delta(1+\varepsilon)\ell(Q_0)].$$

Combinando estas estimaciones deducimos (4.16). □

Se da a continuación la demostración del Teorema 3.16 ya que el Teorema 3.14 se obtiene de un argumento similar con pequeños cambios.

Demostración Teorema 3.16. En virtud del Teorema 2.27, es suficiente probar que

$$\left\| P_\Gamma^{b,m} f \right\|_{[L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w} \lesssim \|f\|_{[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_v}$$

para toda función f no negativa, acotada y con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que $\left\| P_\Gamma^{b,m} f \right\|_{[L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_w} = \left\| w\, P_\Gamma^{b,m} f \right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}$. Notemos que si $\Psi(x,t) = t^{r(x)}(\log(e+t))^{q(x)}$, entonces por el Lema 1.6, $\Psi^*(x,t) \simeq t^{r'(x)}(\log(e+t))^{-q(x)/(r(x)-1)}$. Consecuentemente, por dualidad (ver Teorema 2.25), lo anterior es equivalente a probar que la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx \lesssim \|f\|_{[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}]_v}$$

vale para todo par de funciones f y g no negativas, acotadas y con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ con $\|g\|_{L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-q(\cdot)/(r(\cdot)-1)}} \leq 1$. Consideremos un par de funciones f y g con estas características. Discretizando el operador (ver (4.15)) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} &|P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx \\ &\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{D}} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) \sum_{j=0}^{m} \int_{3Q} |b(y)-b_Q|^j f(y)\, dy \int_Q |b(x)-b_Q|^{m-j} g(x) w(x)\, dx. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Llamemos $s(\cdot) = Sp'(\cdot)$ y $l(\cdot) = Rr(\cdot)$. Notemos que

$$(p^-)' = (p')^+ < S(p')^- = s^- \qquad \text{y} \qquad r^+ < Rr^- = l^-,$$

lo cual implica que

$$(s')^+ = (s^-)' < p^- \qquad \text{y} \qquad (l')^+ = (l^-)' < (r^+)' = (r')^-.$$

En consecuencia, existen dos constantes A y F tales que

$$(s')^+ < A < p^- \qquad \text{y} \qquad (l')^+ < F < (r')^-.$$

Si definimos $\omega(\cdot), \mu(\cdot)$ como los exponentes que verifican

$$\frac{1}{\omega(\cdot)} = \frac{1}{s(\cdot)} + \frac{1}{A} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\mu(\cdot)} = \frac{1}{l(\cdot)} + \frac{1}{F},$$

en virtud de que $s(\cdot), l(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$, resulta $\omega(\cdot), \mu(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$ (ver Lema 2.9). Luego, utilizando el Lema 3.12 con $d=3$, $k=j$, $p(\cdot)=\omega(\cdot)$ y $H=f$, y luego con $d=1$, $k=m-j$, $p(\cdot)=\mu(\cdot)$ y $H=gw$, podemos estimar el lado derecho de (4.17) por un múltiplo de

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) \sum_{j=0}^{m} |3Q|\, a(3Q)^j \,\|b\|_{\mathcal{L}_a}^j \frac{\|\mathcal{X}_{3Q} f\|_{\omega(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{\omega(\cdot)}} |Q|\, a(Q)^{m-j} \,\|b\|_{\mathcal{L}_a}^{m-j} \frac{\|\mathcal{X}_Q g w\|_{\mu(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\mu(\cdot)}}.$$

Consecuentemente, como $a \in T_\infty$, deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x) dx$$
$$\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{Q\in\mathcal{D}} a(3Q)^m \,\overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) |3Q| \frac{\|\mathcal{X}_{3Q} f\|_{\omega(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{\omega(\cdot)}} |Q| \frac{\|\mathcal{X}_Q g w\|_{\mu(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\mu(\cdot)}}. \quad (4.18)$$

El siguiente paso es cambiar la suma sobre todos los cubos diádicos, por la suma sobre todos los cubos de una familia sparse. Dado que g tiene soporte compacto y $w \in L_{\mathrm{loc}}^{Rr(\cdot)}$ (ver Observación 3.17), por la desigualdad de Hölder (2.1), el Corolario 2.12 y el Teorema 2.11 tenemos que

$$\lim_{|Q|\to\infty} \frac{\|\mathcal{X}_Q g w\|_{\mu(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\mu(\cdot)}} \lesssim \lim_{|Q|\to\infty} \frac{\|g\|_\infty \|\mathcal{X}_Q \mathcal{X}_{\mathrm{sop}\, g} w\|_{l(\cdot)} \|\mathcal{X}_Q\|_F}{\|\mathcal{X}_Q\|_{l(\cdot)} \|\mathcal{X}_Q\|_F} \lesssim \lim_{|Q|\to\infty} \frac{\|g\|_\infty \|\mathcal{X}_{\mathrm{sop}\, g} w\|_{l(\cdot)}}{|Q|^{(1/l)_Q}}$$
$$\lesssim \lim_{|Q|\to\infty} \frac{\|g\|_\infty \|\mathcal{X}_{\mathrm{sop}\, g} w\|_{l(\cdot)}}{|Q|^{1/l^+}} = 0.$$

Consideremos la constante $\sigma > 0$ provista por la Proposición 3.30 para $\mu(\cdot)$, gw y la familia de cubos diádicos $\mathcal{D}$. Si $\alpha > \max\{\sigma, C_\mu^2\}$, donde C_μ es la constante del Lema 2.10, en virtud de la Proposición 3.30 existe una familia sparse $\{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{D}$ que verifica

$$\alpha^k < \frac{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k} g w\right\|_{\mu(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{\mu(\cdot)}} \le C_\mu^2\, \alpha^k < \alpha^{k+1}.$$

Para $k \in \mathbb{Z}$ definimos los conjuntos

$$\mathcal{G}_k = \left\{ Q \in \mathcal{D} \,:\, \alpha^k < \frac{\|\mathcal{X}_Q g w\|_{\mu(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\mu(\cdot)}} \le \alpha^{k+1} \right\}.$$

Entonces todo cubo diádico Q con $\|\mathcal{X}_Q g w\|_{\mu(\cdot)} / \|\mathcal{X}_Q\|_{\mu(\cdot)} \neq 0$ pertenece exactamente a un conjunto $\mathcal{G}_k$. Más aún, si $Q \in \mathcal{G}_k$, por maximalidad (ver item (i) de la Proposición 3.30) se sigue que $Q \subset Q_j^k$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Luego, por (4.18) y como $a \in T_\infty$, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx$$
$$\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_k \sum_{Q\in\mathcal{G}_k} a(3Q)^m \,\overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) |3Q| \frac{\|\mathcal{X}_{3Q} f\|_{\omega(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{\omega(\cdot)}} |Q| \frac{\|\mathcal{X}_Q g w\|_{\mu(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\mu(\cdot)}}$$
$$\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha^{k+1} \sum_{Q\in\mathcal{G}_k\,:\,Q\subset Q_j^k} a(3Q)^m \,\overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) |3Q||Q| \frac{\|\mathcal{X}_{3Q} f\|_{\omega(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{\omega(\cdot)}}$$
$$\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m\, \alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k} g w\right\|_{\mu(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{\mu(\cdot)}} a(3Q_j^k)^m \sum_{Q\in\mathcal{G}_k:Q\subset Q_j^k} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) |3Q||Q| \frac{\|\mathcal{X}_{3Q} f\|_{\omega(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{3Q}\|_{\omega(\cdot)}}.$$

Si ε, δ son las constantes provistas por la condición $\mathfrak{R}$ y $\widetilde{\Gamma}(t) = \int_{|z|\leq t} \Gamma(z)\, dz$, en virtud del Lema 4.10, a partir de la desigualdad anterior concluimos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx \\
&\quad\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a(3Q_j^k)^m\, \widetilde{\Gamma}[\delta(1+\varepsilon)\ell(Q_j^k)]\, |3Q_j^k| \frac{\left\|\mathcal{X}_{3Q_j^k} f\right\|_{\omega(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{3Q_j^k}\right\|_{\omega(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k} g w\right\|_{\mu(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{\mu(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

Así, si tomamos $\gamma = \text{máx}\{3, \delta(1+\varepsilon)\}$, por la condición $a \in T_\infty$, la propiedad de duplicación de $\|\cdot\|_{\tau(\cdot)}$ si $\tau(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}$ (ver Lema 2.10), la desigualdad de Hölder (2.1), el Corolario 2.12 y la hipótesis en los pesos tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx \\
&\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a(\gamma Q_j^k)^m\, \widetilde{\Gamma}(\gamma\ell(Q_j^k))\, |\gamma Q_j^k| \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} f\right\|_{\omega(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\omega(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} g w\right\|_{\mu(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\mu(\cdot)}} \qquad (4.19)\\
&\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a(\gamma Q_j^k)^m \widetilde{\Gamma}(\gamma\ell(Q_j^k))\, |\gamma Q_j^k| \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} f v\right\|_{A}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{A}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} v^{-1}\right\|_{s(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{s(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} g\right\|_{F}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{F}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} w\right\|_{l(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{l(\cdot)}}\\
&\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j^k| \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} f v\right\|_{A}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{A}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} g\right\|_{F}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{F}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{p(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{r(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

Sea $\beta(\cdot)$ definido por $1/\beta(\cdot) = 1/p(\cdot) - 1/r(\cdot)$. Entonces por el Corolario 2.12, la última suma es equivalente a

$$\|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j^k| \left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\beta(\cdot)} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} f v\right\|_{A}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{A}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} g\right\|_{F}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{F}}.$$

Como la familia $\{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ es sparse, existe una familia de conjuntos disjuntos $\{E(Q_j^k)\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ tal que $|Q_j^k| \simeq |E(Q_j^k)|$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx &\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |E(Q_j^k)| \left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\beta(\cdot)} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} f v\right\|_{A}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{A}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} g\right\|_{F}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{F}} \qquad (4.20)\\
&\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \int_{\mathbb{R}^n} M_{\beta(\cdot),A}(fv)(y) M_F(g)(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, por la desigualdad de Hölder (1.16), de lo anterior concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \left\|M_{\beta(\cdot),A}(fv)\right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \|M_F(g)\|_{L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-q(\cdot)/(r(\cdot)-1)}}.$$

Como $p^- > A$, en virtud del Teorema 3.3 se verifica

$$M_{\beta(\cdot),A} : L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)} \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)},$$

además, por la Observación 2.18, como $(r')^- > F$, la maximal M_F es acotada en el espacio $L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-q(\cdot)/(r(\cdot)-1)}$. Por lo tanto concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \|fv\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}},$$

como queríamos demostrar. □

Demostración Teorema 3.14. La prueba de este resultado sigue los lineamientos de la demostración del Teorema 3.16 reemplazando los exponentes $s(\cdot)$ y $l(\cdot)$ por las constantes $s = S(p^-)'$ y $l = Rr^+$ respectivamente. En efecto, en este caso tenemos $s' < p^-$ y $l' < (r^+)'$ y podemos tomar las constantes ω, μ, A y F tales que $s' < A < p^-$, $l' < F < (r^+)'$,

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{s} + \frac{1}{A} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{l} + \frac{1}{F}.$$

□

Demostración Teorema 3.18. Fijemos $Q \subset \mathbb{R}^n$ con centro c_Q y sea

$$s_Q(y) = (|Q|^{1/n} + |c_Q - y|)^{\alpha-n}.$$

Entonces, para $x \in Q$ se verifica que

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} |Q|^{\frac{\alpha-n}{n}} \leq s_Q(x) \leq |Q|^{\frac{\alpha-n}{n}}. \tag{4.21}$$

Notemos que podemos definir $\tilde{f}$ como

$$\tilde{f}(y) = \theta\, \mathcal{X}_Q(y) s_Q(y)^{p'(y)/p(y)} v(y)^{-p'(y)}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

donde θ es la constante tal que $\|\tilde{f}v\|_{p(\cdot)} = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned}\int_Q (s_Q(x)^{p'(x)/p(x)} v(x)^{-p'(x)})^{p(x)} v(x)^{p(x)}\, dx &= \int_Q s_Q(x)^{p'(x)} v(x)^{-p'(x)}\, dx \\ &\leq \max\{(|Q|^{\frac{\alpha-n}{n}})^{(p')^+}, (|Q|^{\frac{\alpha-n}{n}})^{(p')^-}\} \int_Q v(x)^{-p'(x)}\, dx\end{aligned} \tag{4.22}$$

y, en virtud de que $v^{-1} \in L^{p'(\cdot)}_{\text{loc}}$, esta última integral es finita. Observemos además que, por la igualdad (4.22),

$$\left\|\mathcal{X}_Q s_Q v^{-1}\right\|_{p'(\cdot)} \simeq \|\tilde{f}v\|_{p(\cdot)} = 1. \tag{4.23}$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, como

$$|Q|^{1/n}|x-y| \leq |Q|^{1/n}|c_Q - x| + |Q|^{1/n}|c_Q - y|$$

$$\leq (|Q|^{1/n} + |c_Q - x|)(|Q|^{1/n} + |c_Q - y|) = [s_Q(x)s_Q(y)]^{1/(\alpha-n)},$$

tenemos que

$$|x-y|^{\alpha-n} \geq |Q|^{1-\alpha/n} s_Q(x)s_Q(y).$$

Luego, por esta desigualdad y (4.23) obtenemos que

$$I_\alpha \tilde{f}(x) \gtrsim |Q|^{1-\alpha/n} s_Q(x) \int_Q s_Q(y)^{p'(y)} v(y)^{-p'(y)}\, dy \gtrsim |Q|^{1-\alpha/n} s_Q(x).$$

Así, por (4.23), la hipótesis de continuidad de I_α (3.9), la última desigualdad y (4.21) concluimos que

$$\begin{aligned} 1 = \|\tilde{f}v\|_{p(\cdot)} &\gtrsim \left\| I_\alpha \tilde{f} w \right\|_{r(\cdot)} \gtrsim |Q|^{1-\alpha/n} \|s_Q w\|_{r(\cdot)} \\ &\gtrsim |Q|^{1-\alpha/n} \left\|\mathcal{X}_Q s_Q v^{-1}\right\|_{p'(\cdot)} \|\mathcal{X}_Q s_Q w\|_{r(\cdot)} \\ &\gtrsim |Q|^{\alpha/n-1} \left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{p'(\cdot)} \|\mathcal{X}_Q w\|_{r(\cdot)}. \end{aligned}$$

Y esta última expresión, en virtud del Lema 2.13, es equivalente a la condición (3.8). □

Demostración Teorema 3.19. Como en la demostración del Teorema 3.16 (ver (4.17)) basta estimar el lado derecho de

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx$$
$$\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{D}} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) \sum_{j=0}^{m} \int_{3Q} |b(z) - b_Q|^j f(z)\, dz \int_Q |b(x) - b_Q|^{m-j} g(x) w(x)\, dx \quad (4.24)$$

para un par de funciones f, g no negativas, acotadas y con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ con $\|g\|_{L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-q(\cdot)/(r(\cdot)-1)}} \leq 1$. Consideremos un par de funciones f y g con estas características. Por el Lema 3.13, podemos mayorar (4.24) por un múltiplo de

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}} \overline{\Gamma}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right) \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)}^m \int_{3Q} f(z)\, dz \int_Q g(x) w(x)\, dx \quad (4.25)$$

El siguiente paso es cambiar la suma sobre todos los cubos diádicos, por la suma sobre todos los cubos de una familia sparse. Sea $\alpha > 2^n$ y sea $\{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ la familia sparse provista por la Proposición 3.29 asociada a la función gw. Entonces, en particular, se verifica

$$\alpha^k < \frac{1}{|Q_j^k|} \int_{Q_j^k} g(x) w(x)\, dx \leq \alpha^{k+1}.$$

Procediendo como en la demostración del Teorema 3.16 (ver (4.19)), deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\Gamma}(\ell(\gamma Q_j^k)) \left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{n/\delta(\cdot)}^m |Q_j^k| \fint_{\gamma Q_j^k} f(z) dz \fint_{\gamma Q_j^k} g(z) w(z) dz,$$

donde $\gamma = \max\{3, \delta(1+\varepsilon)\}$ con ε, δ las constantes provistas por la condición $\mathfrak{R}$. Luego, por la condición $\mathcal{F}$, en virtud del Lema 1.12, podemos estimar esta última desigualdad por un múltiplo de

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\Gamma}(\ell(\gamma Q_j^k)) \left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{n/\delta(\cdot)}^m |Q_j^k| \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} fv\right\|_{\Lambda_2}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\Lambda_2}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} v^{-1}\right\|_{\Psi_2}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\Psi_2}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} g\right\|_{\Lambda_1}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\Lambda_1}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} w\right\|_{\Psi_1}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\Psi_1}}.$$

Así, por la condición en los pesos y el Corolario 2.12, llegamos a que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j^k| \, \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} fv\right\|_{\Lambda_2}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\Lambda_2}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} g\right\|_{\Lambda_1}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\Lambda_1}}.$$

Como $\{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ es sparse, existe una familia $\{E(Q_j^k)\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ de conjuntos disjuntos tales que $|E(Q_j^k)| \simeq |Q_j^k|$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |P_\Gamma^{b,m} f(x)| w(x) g(x)\, dx &\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |E(Q_j^k)| \, \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} fv\right\|_{\Lambda_2}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\Lambda_2}} \frac{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k} g\right\|_{\Lambda_1}}{\left\|\mathcal{X}_{\gamma Q_j^k}\right\|_{\Lambda_1}} \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} M_{\beta(\cdot),\Lambda_2}(fv)(y) M_{\Lambda_1}(g)(y) dy \\
&\lesssim \left\|M_{\beta(\cdot),\Lambda_2}(fv)\right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \|M_{\Lambda_1}(g)\|_{L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-q(\cdot)/(r(\cdot)-1)}} \\
&\lesssim \|fv\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

□

Se da a continuación la demostración del Teorema 3.25 ya que el Teorema 3.24 se obtiene de un argumento similar con pequeños cambios.

Demostración Teorema 3.25. En virtud de los Teoremas 2.27 y 3.33, es suficiente probar que si $\mathcal{S}$ es una familia sparse y

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x) - b_Q|^{m-h} (|b - b_Q|^h f)_Q \cdot \mathcal{X}_Q(x),$$

entonces se verifica

$$\left\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)\right\|_{\left[L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_w} \lesssim \|f\|_{\left[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_v}, \qquad h \in \{0,1,...,m\}$$

para toda función f no negativa, acotada y con soporte compacto. Sea $h \in \{0,1,...,m\}$, por dualidad (ver Teorema 2.25) basta ver que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x)\, dx \lesssim \|f\|_{\left[L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}\right]_v}$$

vale para todo par de funciones f y g no negativas, acotadas y con soporte compacto con $\|gw^{-1}\|_{L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-q(\cdot)/(r(\cdot)-1)}} \leq 1$. Consideremos un par de funciones f y g con estas características. Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x)\,dx = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| \fint_Q |b(x)-b_Q|^h f(x)\,dx \fint_Q |b(x)-b_Q|^{m-h} g(x)\,dx. \quad (4.26)$$

Sean $s(\cdot) = Sp'(\cdot)$ y $l(\cdot) = Rr(\cdot)$. Siguiendo las cuentas de la demostración del Teorema 3.16 podemos definir exponentes $\omega(\cdot)$ y $\mu(\cdot)$ en la clase $\mathcal{P}^{log}$ como

$$\frac{1}{\omega(\cdot)} = \frac{1}{s(\cdot)} + \frac{1}{A} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\mu(\cdot)} = \frac{1}{l(\cdot)} + \frac{1}{F},$$

donde $A < p^-$ y $F < (r')^-$. Usando el Lema 3.12 con $d = 1$, $k = h$, $p(\cdot) = \omega(\cdot)$ y $H = f$, y luego con $d = 1$, $k = m-h$, $p(\cdot) = \mu(\cdot)$ y $H = g$, a partir de (4.26) obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x)\,dx \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| a(Q)^m \frac{\|\mathcal{X}_Q f\|_{\omega(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\omega(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q g\|_{\mu(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\mu(\cdot)}}.$$

Como $\mathcal{S}$ es sparse, existe una familia de conjuntos disjuntos $\{E(Q)\}_{Q\in\mathcal{S}}$ tales que $|E(Q)| \simeq |Q|$. Luego, por la desigualdad de Hölder (2.1), la equivalencia (2.13) y las hipótesis en los pesos tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x)\,dx &\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{Q\in\mathcal{S}} |E(Q)| a(Q)^m \frac{\|\mathcal{X}_Q fv\|_A}{\|\mathcal{X}_Q\|_A} \frac{\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\|_{s(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{s(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q gw^{-1}\|_F}{\|\mathcal{X}_Q\|_F} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{l(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{l(\cdot)}} \\ &\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_a}^m \sum_{Q\in\mathcal{S}} |E(Q)| a(Q)^m \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} \frac{\|\mathcal{X}_Q fv\|_A}{\|\mathcal{X}_Q\|_A} \frac{\|\mathcal{X}_Q gw^{-1}\|_F}{\|\mathcal{X}_Q\|_F}\end{aligned}$$

donde $\beta(\cdot)$ es el exponente definido por $1/\beta(\cdot) = 1/p(\cdot) - 1/r(\cdot)$ y hemos utilizado el Corolario 2.12. Luego la prueba se concluye como en la demostración del Teorema 3.16 (ver desigualdad (4.20)). $\square$

Demostración Teorema 3.24. La prueba de este resultado sigue los lineamientos de la demostración del Teorema 3.25 reemplazando los exponentes $s(\cdot)$ y $l(\cdot)$ por las constantes $s = S(p^-)'$ y $l = Rr^+$ respectivamente. En efecto, en este caso tenemos $s' < p^-$ y $l' < (r^+)'$ y podemos tomar las constantes ω, μ, A y F tales que $s' < A < p^-$, $l' < F < (r^+)'$,

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{s} + \frac{1}{A} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{l} + \frac{1}{F}.$$

$\square$

Demostración Teorema 3.26. Como en la demostración del Teorema 3.25 (ver (4.26)), basta estimar

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| \fint_Q |b(x)-b_Q|^h f(x)\,dx \fint_Q |b(x)-b_Q|^{m-h} g(x)\,dx, \qquad h \in \{0,1,...,m\} \quad (4.27)$$

para todo par de funciones f y g no negativas, acotadas y con soporte compacto con

$$\left\|gw^{-1}\right\|_{L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-q(\cdot)/(r(\cdot)-1)}} \leq 1,$$

donde $\mathcal{S}$ es una familia sparse. En este caso, si k es un entero no negativo y $H \in L^1_{\text{loc}}$, por el Lema 3.13 tenemos que

$$\fint_Q |b(x) - b_Q|^k H(x)\, dx \lesssim \|\mathcal{X}_Q\|^k_{n/\delta(\cdot)} H_Q.$$

Luego podemos estimar (4.27) como sigue

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| \fint_Q |b(x) - b_Q|^h f(x)\, dx \fint_Q |b(x) - b_Q|^{m-h} g(x)\, dx \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q|\, \|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)} f_Q\, g_Q. \tag{4.28}$$

Notar que por la condición $\mathcal{F}$, en virtud del Lema 1.12, los promedios de f y g verifican

$$f_Q \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q f v\|_{\Lambda_2}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Lambda_2}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{\Psi_2}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_2}} \quad \text{y} \quad g_Q \lesssim \frac{\left\|\mathcal{X}_Q g w^{-1}\right\|_{\Lambda_1}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Lambda_1}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{\Psi_1}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_1}}. \tag{4.29}$$

Además, como $\mathcal{S}$ es sparse, existe una familia $\{E(Q) : Q \in \mathcal{S}\}$ de conjuntos disjuntos tales que $|E(Q)| \simeq |Q|$. Luego, por la condición en las maximales y la condición en los pesos, a partir de las estimaciones (4.28) y (4.29), tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| \fint_Q |b(x) - b_Q|^h f(x)\, dx \fint_Q |b(x) - b_Q|^{m-h} g(x)\, dx \\
&\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} |E(Q)|\, \|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)} \frac{\|\mathcal{X}_Q f v\|_{\Lambda_2}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Lambda_2}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q v^{-1}\right\|_{\Psi_2}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_2}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q g w^{-1}\right\|_{\Lambda_1}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Lambda_1}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{\Psi_1}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{\Psi_1}} \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} M_{\beta(\cdot),\Lambda_2}(fv)(x) M_{\Lambda_1}(gw^{-1})(x)\, dx \\
&\lesssim \left\|M_{\beta(\cdot),\Lambda_2}(fv)\right\|_{L^{r(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \left\|M_{\Lambda_1}(gw^{-1})\right\|_{L^{r'(\cdot)}(\log L)^{-q(\cdot)/(p(\cdot)-1)}} \\
&\lesssim \|fv\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

□

4.4. Resultados de la Sección 3.4

Para las demostraciones de esta sección daremos primero algunos resultados auxiliares. Recordemos que si η es un peso y $0 \leq \delta(\cdot) < n$,

$$\|b\|_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{1}{\eta(Q)\, \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)}} \int_Q |b(x) - b_Q|\, dx.$$

Por otro laso, si $\mathcal{S}$ es una familia sparse de cubos en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ denota el operador dado por

$$\mathcal{A}_\mathcal{S} f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} f_Q \cdot \mathcal{X}_Q(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos el operador $(\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta$ como $(\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta f(x) = \eta(x)\mathcal{A}_\mathcal{S} f(x)$ y, si $k \in \mathbb{N}$, con $(\mathcal{A}_\mathcal{S})^k_\eta$ denotamos al operador $(\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta$ iterado k veces.

Proposición 4.11. *Sean η un peso, $0 \le \delta(\cdot) < n$ y k un entero no negativo. Sea $\mathcal{S}$ una familia sparse de la grilla diádica $\mathscr{D}$. Si $b \in BMO_\eta^{\delta(\cdot)}$, entonces existe una familia $\tilde{\mathcal{S}} \subset \mathscr{D}$ sparse tal que $\mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{S}}$ y para todo cubo $Q \in \tilde{\mathcal{S}}$ se verifica la siguiente desigualdad,*

$$\int_Q |b(x) - b_Q|^k |f(x)|\, dx \lesssim \|b\|^k_{BMO_\eta^{\delta(\cdot)}} \|\mathcal{X}_Q\|^k_{n/\delta(\cdot)} \int_Q (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^k_\eta |f|(x)\, dx, \qquad f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Cuando $\delta(\cdot) \equiv 0$, este resultado fue probado en [71] para el caso $k = 1$, y en [70] para $k > 1$. Para probar la Proposición 4.11 enunciaremos un lema obtenido en [71].

Lema 4.12 ([71])**.** *Sean $\mathscr{D}$ una grilla diádica y $\mathcal{S} \subset \mathscr{D}$ una familia sparse. Si $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una familia $\tilde{\mathcal{S}} \subset \mathscr{D}$ sparse tal que $\mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{S}}$ y para todo cubo $Q \in \tilde{\mathcal{S}}$,*

$$|b(x) - b_Q| \lesssim \sum_{\substack{R \in \tilde{\mathcal{S}} \\ R \subseteq Q}} \frac{1}{|R|} \int_R |b(y) - b_R|\, dy \cdot \mathcal{X}_R(x), \qquad c.t.p.\ x \in Q. \tag{4.30}$$

Demostración Proposición 4.11. Sea $\tilde{\mathcal{S}}$ la familia sparse provista por el Lema 4.12 y $Q \in \tilde{\mathcal{S}}$. Entonces, por este lema y como $b \in BMO_\eta^{\delta(\cdot)}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|b(x) - b_Q| &\lesssim \sum_{\substack{R \in \tilde{\mathcal{S}} \\ R \subset Q}} \frac{1}{|R|} \int_R |b(y) - b_R|\, dy \cdot \mathcal{X}_R(x) \\
&\lesssim \|b\|_{BMO_\eta^{\delta(\cdot)}} \sum_{\substack{R \in \tilde{\mathcal{S}} \\ R \subset Q}} \frac{\|\mathcal{X}_R\|_{n/\delta(\cdot)}\, \eta(R)}{|R|} \cdot \mathcal{X}_R(x) \\
&\lesssim \|b\|_{BMO_\eta^{\delta(\cdot)}} \|\mathcal{X}_Q\|_{n/\delta(\cdot)} \sum_{\substack{R \in \tilde{\mathcal{S}} \\ R \subset Q}} \frac{\eta(R)}{|R|} \cdot \mathcal{X}_R(x).
\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\int_Q |b(x) - b_Q|^k |f(x)|\, dx \lesssim \|b\|^k_{BMO_\eta^{\delta(\cdot)}} \|\mathcal{X}_Q\|^k_{n/\delta(\cdot)} \int_Q \left(\sum_{\substack{R \in \tilde{\mathcal{S}} \\ R \subset Q}} \frac{\eta(R)}{|R|} \cdot \mathcal{X}_R(x) \right)^k |f(x)|\, dx. \tag{4.31}$$

Notemos que, como los cubos de $\tilde{\mathcal{S}}$ pertenecen a $\mathscr{D}$ (son diádicos), entonces

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\substack{R \in \tilde{\mathcal{S}} \\ R \subset Q}} \frac{\eta(R)}{|R|} \cdot \mathcal{X}_R(x) \right)^k &= \sum_{\substack{\{R_1, R_2, \ldots, R_k\} \subset \tilde{\mathcal{S}} \\ R_i \subset Q}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\eta(R_i)}{|R_i|} \mathcal{X}_{R_i}(x) \right) \\
&= \sum_{\substack{\{R_1, R_2, \ldots, R_k\} \subset \tilde{\mathcal{S}} \\ R_i \subset Q}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\eta(R_i)}{|R_i|} \right) \cdot \mathcal{X}_{\bigcap_{i=1}^k R_i}(x) \\
&\le k! \sum_{\mathcal{E}_Q^k} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\eta(R_i)}{|R_i|} \right) \cdot \mathcal{X}_{R_k}(x),
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{E}_Q^j = \{\{R_1, R_2, ..., R_j\} \subset \tilde{\mathcal{S}} : R_j \subset R_{j-1} \subset ... \subset R_1 \subset Q\}$ para $1 \le j \le k$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_Q \left(\sum_{\substack{R\in\tilde{\mathcal{S}}\\ R\subset Q}} \frac{\eta(R)}{|R|} \cdot \mathcal{X}_R(x) \right)^k |f(x)|\, dx &\lesssim \sum_{\mathcal{E}_Q^k} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\eta(R_i)}{|R_i|} \right) \int_{R_k} |f(x)|\, dx \\
&= \sum_{\mathcal{E}_Q^k} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\eta(R_i)}{|R_i|} \right) |f|_{R_k} |R_k| \\
&= \sum_{\mathcal{E}_Q^{k-1}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{\eta(R_i)}{|R_i|} \right) \sum_{\substack{R_k\in\tilde{\mathcal{S}}\\ R_k\subset R_{k-1}}} \int_{R_k} |f|_{R_k} \eta(x)\, dx \\
&= \sum_{\mathcal{E}_Q^{k-1}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{\eta(R_i)}{|R_i|} \right) \int_{R_{k-1}} \left(\sum_{\substack{R_k\in\tilde{\mathcal{S}}\\ R_k\subset R_{k-1}}} |f|_{R_k} \cdot \mathcal{X}_{R_k}(x) \right) \eta(x)\, dx \\
&\le \sum_{\mathcal{E}_Q^{k-1}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{\eta(R_i)}{|R_i|} \right) \int_{R_{k-1}} \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}}|f|(x)\eta(x)\, dx \\
&\le \sum_{\mathcal{E}_Q^{k-1}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{\eta(R_i)}{|R_i|} \right) \int_{R_{k-1}} (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})_\eta |f|(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Utilizando este argumento k veces concluimos que

$$\int_Q \left(\sum_{\substack{R\in\tilde{\mathcal{S}}\\ R\subset Q}} \frac{\eta(R)}{|R|} \cdot \mathcal{X}_R(x) \right)^k |f(x)|\, dx \lesssim \int_Q (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})_\eta^k |f|(x)\, dx. \tag{4.32}$$

De (4.31) y (4.32) se deduce (4.30). □

El siguiente resultado presenta algunas propiedades de continuidad del operador $(\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta^k$.

Lema 4.13. *Sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $p(\cdot) \le q(\cdot)$. Supongamos que $\mu, \lambda \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ y $\nu = \mu/\lambda$. Si $m \in \mathbb{N}$, $\eta = \nu^{1/m}$ y $k \in \{1, 2, ..., m\}$, entonces las desigualdades*

$$\left\| (\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta^k f \right\|_{L_\lambda^{q(\cdot)}} \lesssim \|f\|_{L_{\lambda\eta^k}^{q(\cdot)}} \tag{4.33}$$

y

$$\left\| (\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta^k f \right\|_{L_{\lambda\eta^{m-k}}^{p(\cdot)}} \lesssim \|f\|_{L_{\lambda\eta^m}^{p(\cdot)}}, \tag{4.34}$$

valen para toda función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Tomemos $f \in L^1_{\text{loc}}$,

$$\left\| (\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta^k f \right\|_{L_\lambda^{q(\cdot)}} = \left\| (\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta (\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta^{k-1} f \right\|_{L_\lambda^{q(\cdot)}} = \left\| \mathcal{A}_\mathcal{S} (\mathcal{A}_\mathcal{S})_\eta^{k-1} f \right\|_{L_{\lambda\eta}^{q(\cdot)}}.$$

Notemos que, en virtud del Lema 2.31, $\lambda\nu^{1/m} \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$. Luego, por el Lema 2.28 (ii), se verifica $\lambda\eta = \lambda\nu^{1/m} \in A_{p(\cdot)} \cap A_{q(\cdot)}$. Consecuentemente, por (3.27) y de lo anterior deducimos que

$$\left\|(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})^k_\eta f\right\|_{L^{q(\cdot)}_\lambda} \lesssim \left\|(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})^{k-1}_\eta f\right\|_{L^{q(\cdot)}_{\lambda\eta}}.$$

Siguiendo este razonamiento $k-1$ veces más concluimos (4.33). La demostración de (4.34) es análoga. □

Demostración Teorema 3.27. Por los Teoremas 2.27 y 3.33, basta probar que, si $\mathcal{S}$ es una familia sparse y

$$\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}(b,f)(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x)-b_Q|^{m-h}(|b-b_Q|^h f)_Q \cdot \mathcal{X}_Q(x),$$

entonces para todo $h \in \{0,1,...,m\}$ y toda función f no negativa, acotada y con soporte compacto se verifica

$$\left\|\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}(b,f)\right\|_{L^{q(\cdot)}_\lambda} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}_\mu}.$$

Por dualidad (ver Teorema 2.3) es suficiente ver que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x)g(x)\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}(b,f)(x)\,dx \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}_\mu}$$

para todo par de funciones f y g no negativas, acotadas y con soporte compacto con $\|g\|_{q'(\cdot)} \le 1$. Consideremos f, g un par de funciones con estas propiedades.

Sea $\tilde{\mathcal{S}}$ la familia sparse provista por la Proposición 4.11 y $Q \in \tilde{\mathcal{S}}$. Entonces, por esta proposición y denotando $\eta = \nu^{1/m}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x)g(x)\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}(b,f)(x)\,dx &= \sum_{Q\in\mathcal{S}} (|b-b_Q|^h f)_Q \int_Q |b(x)-b_Q|^{m-h}\lambda(x)g(x)\,dx \\ &\lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \sum_{Q\in\tilde{\mathcal{S}}} \frac{\|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)}}{|Q|} \int_Q (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^h_\eta f(x)\,dx \int_Q (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^{m-h}_\eta(\lambda g)(x)\,dx,\end{aligned}$$

donde entendemos $(\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^{m-h}_\eta(\lambda g)(x) = \lambda(x)g(x)$ en el caso en que $h = m$. Notemos que, si $\beta(\cdot) = n/(m\delta(\cdot))$, por el Lema 2.4, se verifica $\|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)} = \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)}$. Denotando $\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}} = \mathcal{A}$, tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x)g(x)\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}(b,f)(x)\,dx \\ &\quad\lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \sum_{Q\in\tilde{\mathcal{S}}} \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)}}{|Q|} \int_Q \mathcal{A}^h_\eta f(x)\,dx \int_Q \mathcal{A}^{m-h}_\eta(\lambda g)(x)\,dx \qquad (4.35)\\ &\quad= \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{Q\in\tilde{\mathcal{S}}} \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} (\mathcal{A}^h_\eta f)_Q \cdot \mathcal{X}_Q(x)\right) \mathcal{A}^{m-h}_\eta(\lambda g)(x)\,dx\end{aligned}$$

$$= \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}},\beta(\cdot)} \left(\mathcal{A}^h_\eta f\right)(x)\ \mathcal{A}^{m-h}_\eta(\lambda g)(x)\, dx. \tag{4.36}$$

donde $\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}},\beta(\cdot)}$ es el operador sparse fraccionario definido en (3.26). Supongamos $h \neq m$ (o sea, $h \in \{0, 1, ..., m-1\}$). Utilizando $m-h$ veces el hecho de que el operador $\mathcal{A}$ es autoadjunto, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}},\beta(\cdot)} \left(\mathcal{A}^h_\eta f\right)(x)\ \mathcal{A}^{m-h}_\eta(\lambda g)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{m-h-1}_\eta \left[\eta\, \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}},\beta(\cdot)} \left(\mathcal{A}^h_\eta f\right)\right]\right)(x)\lambda(x)g(x)\, dx.$$

Combinando estas estimaciones y por la desigualdad de Hölder (2.3), obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x)g(x)\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}(b,f)(x)\, dx &\lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \left\|\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{m-h-1}_\eta \left[\eta\, \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}},\beta(\cdot)} \left(\mathcal{A}^h_\eta f\right)\right]\right)\lambda\right\|_{q(\cdot)} \|g\|_{q'(\cdot)}\\ &\lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \left\|\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{m-h-1}_\eta \left[\eta\, \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}},\beta(\cdot)} \left(\mathcal{A}^h_\eta f\right)\right]\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}_\lambda}.\end{aligned}$$

En virtud del Lema 2.28 (ii), el peso λ pertenece a la clase $A_{q(\cdot)}$. Consecuentemente, de la desigualdad anterior, (3.27) y (4.33) (con $k = m-h-1$) deducimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x)g(x)\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}(b,f)(x)\, dx &\lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \left\|\mathcal{A}^{m-h-1}_\eta \left[\eta\, \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}},\beta(\cdot)} \left(\mathcal{A}^h_\eta f\right)\right]\right\|_{L^{q(\cdot)}_\lambda}\\ &\lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \left\|\eta\, \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}},\beta(\cdot)} \left(\mathcal{A}^h_\eta f\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}_{\lambda\eta^{m-h-1}}}\\ &= \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \left\|\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}},\beta(\cdot)} \left(\mathcal{A}^h_\eta f\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}_{\lambda\eta^{m-h}}}.\end{aligned}$$

Si $h = m$, la misma conclusión se obtiene aplicando la desigualdad de Hölder (2.3) directamente en (4.36).

Por el Lema 2.31, el peso $\lambda\eta^{m-h} = \lambda\nu^{\frac{m-h}{m}}$ pertenece a la clase $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$. Luego, utilizando la Proposición 3.31, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x)g(x)\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}(b,f)(x)\, dx \lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \left\|\mathcal{A}^h_\eta f\right\|_{L^{p(\cdot)}_{\lambda\eta^{m-h}}}.$$

Finalmente, aplicando (4.34) concluimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x)g(x)\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S}}(b,f)(x)\, dx &\lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \|f\|_{L^{p(\cdot)}_{\lambda\eta^m}}\\ &= \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \|f\|_{L^{p(\cdot)}_\mu}\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Para la demostración del Teorema 3.28 notemos que, bajo ciertas hipótesis en los exponentes, se verifica $BMO^{\delta(\cdot)}_{\nu^{1/m}} \subset L^m_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.14. *Sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ tales que $p(\cdot) \leq q(\cdot)$. Supongamos que $\mu, \lambda \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$, $\nu = \mu/\lambda$. Sean $0 \leq \delta(\cdot) < n$ y $m \in \mathbb{N}$. Si $b \in BMO^{\delta(\cdot)}_{\nu^{1/m}}$ entonces $b \in L^m_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y consideremos un cubo Q tal que $|Q| > 1$ y $K \subset Q$. Entonces

$$\int_K |b(x)|^m\,dx \leq \int_Q |b(x)|^m\,dx \lesssim \int_Q |b(x) - b_Q|^m\,dx + \left(\int_Q |b(x)|\,dx\right)^m. \tag{4.37}$$

Dado que $b \in L^1_{\text{loc}}$, el último término de (4.37) es finito. Para estimar el primer término denotemos $\eta = \nu^{1/m}$ y notemos que, en virtud de la Proposición 4.11 con $f = \mathcal{X}_Q$ y con $Q \in \tilde{\mathcal{S}}$, la familia sparse provista por dicha proposición, tenemos que

$$\int_Q |b(x) - b_Q|^m \mathcal{X}_Q(x)\,dx \lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)} \int_Q (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^m_\eta \mathcal{X}_Q(x)\,dx.$$

Luego, por la desigualdad de Hölder (2.3),

$$\int_Q |b(x) - b_Q|^m \mathcal{X}_Q(x)\,dx \lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)} \left\|\lambda(\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^m_\eta \mathcal{X}_Q\right\|_{q(\cdot)} \left\|\lambda^{-1}\mathcal{X}_Q\right\|_{q'(\cdot)}. \tag{4.38}$$

Como por (4.33),

$$\left\|\lambda(\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^m_\eta \mathcal{X}_Q\right\|_{q(\cdot)} = \left\|(\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^m_\eta \mathcal{X}_Q\right\|_{L^{q(\cdot)}_\lambda} \lesssim \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{q(\cdot)}_{\lambda\eta^m}} = \|\mathcal{X}_Q\|_{L^{q(\cdot)}_\mu},$$

de (4.38) concluimos que

$$\int_Q |b(x) - b_Q|^m \mathcal{X}_Q(x)\,dx \lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)} \|\mu\mathcal{X}_Q\|_{q(\cdot)} \left\|\lambda^{-1}\mathcal{X}_Q\right\|_{q'(\cdot)}.$$

El lado derecho de esta desigualdad es finito ya que, en virtud del Lema 2.28 (ii), tenemos que $\mu, \lambda \in A_{q(\cdot)}$. □

Demostración Teorema 3.28. En virtud del Lema 4.14 podemos suponer $b \in L^m_{\text{loc}}$. Además, por los Teoremas 2.27 y 3.32, basta probar que, si $\mathcal{S}$ es una familia sparse y

$$\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S},n/\alpha}(b,f)(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x) - b_Q|^{m-h} |Q|^{\alpha/n} (|b - b_Q|^h f)_Q \cdot \mathcal{X}_Q(x),$$

entonces se verifica

$$\left\|\mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S},n/\alpha}(b,f)\right\|_{L^{q(\cdot)}_\lambda} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}_\mu} \qquad h \in \{0, 1, ..., m\}$$

para toda función f no negativa, acotada y con soporte compacto. Por dualidad (ver Teorema 2.3) es suficiente ver que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x) g(x) \mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S},n/\alpha}(b,f)(x)\,dx \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}_\mu}$$

para todo par de funciones f y g no negativas, acotadas y con soporte compacto con $\|g\|_{q'(\cdot)} \leq 1$. Consideremos un par de funciones f y g con estas características. Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x) g(x) \mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S},n/\alpha}(b,f)(x)\,dx = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q|^{\alpha/n} (|b - b_Q|^h f)_Q \int_Q |b(x) - b_Q|^{m-h} \lambda(x) g(x)\,dx.$$

Sea $\tilde{\mathcal{S}}$ la familia sparse provista por la Proposición 4.11 y $Q \in \tilde{\mathcal{S}}$. Entonces, por esta proposición, si definimos $\eta = \nu^{1/m}$, de lo anterior tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x) g(x) \mathcal{A}^{m,h}_{\mathcal{S},n/\alpha}(b,f)(x)\,dx$$
$$\lesssim \|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \sum_{Q\in\tilde{\mathcal{S}}} \frac{|Q|^{\alpha/n}\,\|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)}}{|Q|} \int_Q (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^h_\eta f(x)\,dx \int_Q (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^{m-h}_\eta (\lambda g)(x)\,dx,$$

donde entendemos $(\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^{m-h}_\eta(\lambda g)(x) = \lambda(x)g(x)$ en el caso en que $h = m$. Si denotamos con $\beta(\cdot) = n/(m\delta(\cdot)+\alpha)$, por el Corolario 2.12, se verifica $|Q|^{\alpha/n}\,\|\mathcal{X}_Q\|^m_{n/\delta(\cdot)} \simeq \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)}$. Entonces podemos reescribir el lado derecho de la desigualdad anterior como

$$\|b\|^m_{BMO^{\delta(\cdot)}_\eta} \sum_{Q\in\tilde{\mathcal{S}}} \frac{\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)}}{|Q|} \int_Q (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^h_\eta f(x)\,dx \int_Q (\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{S}}})^{m-h}_\eta (\lambda g)(x)\,dx$$

y entonces la demostración se sigue como en la prueba del Teorema 3.27 a partir de la desigualdad (4.35) con los cambios obvios. □

4.5. Resultados de la Sección 3.5

Recordemos que si $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, en virtud de la equivalencia (2.13) y el Lema 2.10 (la propiedad de duplicación de $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$), existen A, B y C_p tres constantes positivas tales que, para todo cubo $Q \in \mathcal{Q}$ se verifican

$$|Q| \leq A\,\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}\,\|\mathcal{X}_Q\|_{p'(\cdot)} \leq B|Q| \tag{4.39}$$

y

$$\|\mathcal{X}_{2Q}\|_{p(\cdot)} \leq C_p\,\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}\,. \tag{4.40}$$

Demostración Proposición 3.30 . Para probar (i), tomemos $\lambda > 0$. Supongamos $E_\lambda \neq \emptyset$ dado que, de otra manera, no hay nada que probar. Sea Λ_λ la familia de cubos definida por

$$\Lambda_\lambda = \{Q \in \mathscr{D} : A_{p(\cdot),Q} f > \lambda\}.$$

Como $E_\lambda \neq \emptyset$, entonces Λ_λ es no vacía. Además, en virtud de (3.20), para cada $Q \in \Lambda_\lambda$, existe un cubo maximal $Q' \in \Lambda_\lambda$ tal que $Q \subset Q'$. Llamemos $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a la colección de tales cubos maximales contenida en Λ_λ. Claramente esta familia es disjunta dos a dos. Además, si $\widehat{Q_j} \in \mathscr{D}$ es tal que $Q_j \subset \widehat{Q_j}$ y $\ell(\widehat{Q_j}) = 2\ell(Q_j)$, entonces $\widehat{Q_j} \subset 4Q_j$ (ver Apéndice, Lema A.4). Luego, por ser Q_j maximal y por (4.40) tenemos que

$$\lambda < \frac{\|\mathcal{X}_{Q_j} f\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{Q_j}\|_{p(\cdot)}} \leq \frac{\left\|\mathcal{X}_{\widehat{Q_j}}\right\|_{p(\cdot)} \left\|\mathcal{X}_{\widehat{Q_j}} f\right\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{Q_j}\|_{p(\cdot)} \left\|\mathcal{X}_{\widehat{Q_j}}\right\|_{p(\cdot)}} \leq C_p^2 \frac{\left\|\mathcal{X}_{\widehat{Q_j}} f\right\|_{p(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{\widehat{Q_j}}\right\|_{p(\cdot)}} \leq C_p^2 \lambda.$$

Para demostrar (3.22) veamos la doble inclusión. Si $x \in E_\lambda$, existe un cubo $Q \in \mathscr{D}$ tal que $Q \ni x$ y $A_{p(\cdot),Q}f > \lambda$. Entonces $Q \subseteq Q_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, si $x \in Q_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$, por la propiedad (3.21), $A_{p(\cdot),Q_j}f > \lambda$. Luego $M^{\mathscr{D}}_{p(\cdot)}f(x) > \lambda$, y así $x \in E_\lambda$.

Probemos ahora (ii). Sea $\Gamma > 0$ y supongamos, como antes, $E_\Gamma \neq \emptyset$. Si $x \in E_\Gamma$, existe un cubo Q que contiene a x tal que $A_{p(\cdot),Q}f > \Gamma$. Sea k el único entero que verifica $2^{-(k+1)} \leq \ell(Q) < 2^{-k}$. Entonces existen $1 \leq N \leq 2^n$ y una familia de cubos $\{P_j\}_{j=1}^N \subset \mathscr{D}$ tales que, para todo $1 \leq j \leq N$,

$$\ell(P_j) = 2^{-k}, \qquad P_j \cap Q \neq \emptyset \quad \text{y} \quad Q \subset \bigcup_{j=1}^N P_j.$$

Además, uno de estos cubos, llámese P_1, verifica que $A_{p(\cdot),Q}(f\mathcal{X}_{P_1}) > \Gamma/2^n$. Pues, si no

$$\begin{aligned}\Gamma < A_{p(\cdot),Q}f &= \frac{\|\mathcal{X}_Q f\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} = \frac{\left\|\mathcal{X}_Q f \sum_{j=1}^N \mathcal{X}_{P_j}\right\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \leq \sum_{j=1}^N \frac{\|\mathcal{X}_Q f \mathcal{X}_{P_j}\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \\ &= \sum_{j=1}^N A_{p(\cdot),Q}(f\mathcal{X}_{P_j}) \leq \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma}{2^n} \leq N\frac{\Gamma}{2^n} \leq \Gamma\end{aligned}$$

y tendríamos una contradicción. Luego, como $\ell(P_1) \leq 2\ell(Q)$, por (4.40) tenemos que

$$\frac{\Gamma}{2^n} < A_{p(\cdot),Q}(f\mathcal{X}_{P_1}) = \frac{\|\mathcal{X}_{Q\cap P_1} f\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{p(\cdot)}} \leq D_p^2 \frac{\|f\mathcal{X}_{P_1}\|_{p(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_{P_1}\|_{p(\cdot)}} = D_p^2 A_{p(\cdot),P_1}(f),$$

de donde

$$A_{p(\cdot),P_1}(f) > \frac{\Gamma}{2^n D_p^2} = \lambda_0. \tag{4.41}$$

Sea $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la colección de cubos del item (i) correspondiente al nivel λ_0. Por (4.41), $P_1 \in \Lambda_{\lambda_0}$. Entonces, por maximalidad, $P_1 \subset Q_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $P_1 \cap Q \neq \emptyset$ y $\ell(Q) < \ell(P_1)$, $Q \subset 3P_1$ (ver Apéndice, Lema A.4). Consecuentemente, $x \in Q \subset 3P_1 \subset 3Q_j$, lo que demuestra (3.23).

Finalmente probemos (iii). Sea $\alpha > 1$ una constante que determinaremos más adelante. Para cada número entero k, consideremos los conjuntos

$$\Omega_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\mathscr{D}}_{p(\cdot)}f(x) > \alpha^k\right\} = \bigcup_j Q_j^k$$

donde $\{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N}}$ es la colección de cubos maximales y disjuntos dos a dos del item (i), que además verifican

$$\alpha^k < \frac{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k} f\right\|_{p(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p(\cdot)}} \leq C_p^2\, \alpha^k. \tag{4.42}$$

Definamos $F_j^k = Q_j^k \setminus \Omega_{k+1}$. Entonces $F_j^k \subset Q_j^k$. Asimismo, los conjuntos F_j^k son disjuntos dos a dos para todo $k \in \mathbb{Z}$ y para todo $j \in \mathbb{N}$. En efecto, sean $k, l \in \mathbb{Z}$ y $i, j \in \mathbb{N}$. Como

$$F_j^k \cap F_i^l = (Q_j^k \setminus \Omega_{k+1}) \cap (Q_i^l \setminus \Omega_{l+1}) = (Q_j^k \cap Q_i^l) \cap (\Omega_{k+1}^c \cap \Omega_{l+1}^c),$$

si $k = l$ e $i \neq j$, $F_j^k \cap F_i^l = \emptyset$, pues los cubos $\{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N}}$ son disjuntos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, $k > l$. Como $\Omega_{k+1} \subset \Omega_{l+1}$,

$$F_j^k \cap F_i^l = (Q_j^k \cap Q_i^l) \setminus \Omega_{l+1}.$$

Tomemos $x \in F_j^k \cap F_i^l$, entonces verifica

$$\alpha^k < M_{p(\cdot)}^{\mathscr{D}} f(x) \leq \alpha^{l+1}.$$

Lo que es una contradicción. Luego $F_j^k \cap F_i^l = \emptyset$ para cualesquiera $k, l \in \mathbb{Z}$ y $i, j \in \mathbb{N}$.

Para comparar las medidas de F_j^k y Q_j^k notemos que

$$\frac{|F_j^k|}{|Q_j^k|} = \frac{|Q_j^k \setminus (Q_j^k \cap \Omega_{k+1})|}{|Q_j^k|} = 1 - \frac{|Q_j^k \cap \Omega_{k+1}|}{|Q_j^k|}. \tag{4.43}$$

Vamos a estimar entonces $|Q_j^k \cap \Omega_{k+1}|$. Por definición de Ω_{k+1} tenemos que

$$\left|Q_j^k \cap \Omega_{k+1}\right| = \left|Q_j^k \cap \bigcup_i Q_i^{k+1}\right| = \left|\bigcup_i \left(Q_j^k \cap Q_i^{k+1}\right)\right| = \sum_i \left|Q_j^k \cap Q_i^{k+1}\right| = \sum_{i:Q_i^{k+1}\subseteq Q_j^k} \left|Q_i^{k+1}\right|$$

pues, si para ciertos k, i, j, $Q_j^k \cap Q_i^{k+1} \neq \emptyset$, debe ser $Q_i^{k+1} \subsetneq Q_j^k$. Por lo tanto, si A es la constante de la desigualdad (4.39),

$$\left|Q_j^k \cap \Omega_{k+1}\right| \leq A \sum_{i:Q_i^{k+1}\subseteq Q_j^k} \left\|\mathcal{X}_{Q_i^{k+1}}\right\|_{p(\cdot)} \left\|\mathcal{X}_{Q_i^{k+1}}\right\|_{p'(\cdot)}. \tag{4.44}$$

Notemos que, por la desigualdad (4.42), tenemos que

$$\alpha^{k+1} < \frac{\left\|\mathcal{X}_{Q_i^{k+1}} f\right\|_{p(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{Q_i^{k+1}}\right\|_{p(\cdot)}} \quad \text{y} \quad \frac{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k} f\right\|_{p(\cdot)}}{\left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p(\cdot)}} \leq C_p^2 \alpha^k. \tag{4.45}$$

Además, como la colección $\{Q_i^{k+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es disjunta, por la hipótesis en $p(\cdot)$ y el Teorema 2.13, existe una constante $G \geq 1$ tal que

$$\sum_{i:Q_i^{k+1}\subseteq Q_j^k} \left\|\mathcal{X}_{Q_i^{k+1}} f \mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p(\cdot)} \left\|\mathcal{X}_{Q_i^{k+1}} \mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p'(\cdot)} \leq G \left\|f \mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p(\cdot)} \left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p'(\cdot)}. \tag{4.46}$$

Luego, por (4.45) y (4.46), podemos estimar (4.44) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\left|Q_j^k \cap \Omega_{k+1}\right| &\leq A\alpha^{-(k+1)} \sum_{i:Q_i^{k+1}\subseteq Q_j^k} \left\|\mathcal{X}_{Q_i^{k+1}} f \mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p(\cdot)} \left\|\mathcal{X}_{Q_i^{k+1}} \mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq A\alpha^{-(k+1)} G \left\|f \mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p(\cdot)} \left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq A\alpha^{-(k+1)} G C_p^2 \alpha^k \left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p(\cdot)} \left\|\mathcal{X}_{Q_j^k}\right\|_{p'(\cdot)}
\end{aligned}$$

$$\lesssim A\alpha^{-1}GC_p^2B|Q_j^k| := \sigma\alpha^{-1}|Q_j^k|$$

donde B es la constante provista por (4.39). Consecuentemente, si $\alpha > \sigma$, por (4.43), podemos concluir que

$$\frac{|F_j^k|}{|Q_j^k|} > 1 - \frac{\sigma}{\alpha} > 0.$$

Luego $\mathcal{S} = \{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ es sparse. □

Recordemos que, dados $\beta(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{S}$ una familia de cubos sparse, $\mathcal{A}_{\mathcal{S},\beta(\cdot)}$ denota al operador dado por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S},\beta(\cdot)}f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} \|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)}\, f_Q \cdot \mathcal{X}_Q(x), \qquad f \in L^1_{\text{loc}}.$$

Demostración Proposición 3.31. Sea $f \in L^{p(\cdot)}_w$. Por dualidad (ver Teorema 2.25) basta probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,|\mathcal{A}_{\mathcal{S},\beta(\cdot)}f(x)|\,dx \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}_w}$$

se verifica para toda función g no negativa tal que $\left\|gw^{-1}\right\|_{q'(\cdot)} \leq 1$. Dado que $\mathcal{S}$ es una familia sparse tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,|\mathcal{A}_{\mathcal{S},\beta(\cdot)}f(x)|\,dx &\leq \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q|\,\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)}\,|f_Q|\,g_Q \\ &\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} |E(Q)|\,\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)}\,|f_Q|\,g_Q, \end{aligned} \tag{4.47}$$

donde $\{E(Q) : Q \in \mathcal{S}\}$ es la familia de conjuntos disjuntos que satisfacen $|E(Q)| \simeq |Q|$.

Sean $u(\cdot), v(\cdot)$ los exponentes provistos por la Proposición 2.29 para $w \in A_{p(\cdot),q(\cdot)}$, entonces $w \in A_{u(\cdot),v(\cdot)}$. Luego, por la desigualdad de Hölder (2.3) y la equivalencia (2.13) podemos mayorar (4.47) por un múltiplo de

$$\begin{aligned}&\sum_{Q\in\mathcal{S}} |E(Q)|\,\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} \frac{\|\mathcal{X}_Q fw\|_{u(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{u(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q w^{-1}\right\|_{u'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{u'(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q gw^{-1}\right\|_{v'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{v'(\cdot)}} \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{v(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{v(\cdot)}} \\ &\leq [w]_{A_{u(\cdot),v(\cdot)}} \sum_{Q\in\mathcal{S}} |E(Q)|\|\mathcal{X}_Q\|_{\beta(\cdot)} \frac{\|\mathcal{X}_Q fw\|_{u(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{u(\cdot)}} \frac{\left\|\mathcal{X}_Q gw^{-1}\right\|_{v'(\cdot)}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{v'(\cdot)}} \\ &\leq [w]_{A_{u(\cdot),v(\cdot)}} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\beta(\cdot),u(\cdot)}(fw)(x) M_{v'(\cdot)}(gw^{-1})(x)\,dx \\ &\lesssim [w]_{A_{u(\cdot),v(\cdot)}} \left\|M_{\beta(\cdot),u(\cdot)}(fw)\right\|_{q(\cdot)} \left\|M_{v'(\cdot)}(gw^{-1})\right\|_{q'(\cdot)} \\ &\leq [w]_{A_{u(\cdot),v(\cdot)}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}_w}\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $M_{v'(\cdot)} : L^{q'(\cdot)} \hookrightarrow L^{q'(\cdot)}$ y $M_{\beta(\cdot),u(\cdot)} : L^{p(\cdot)} \hookrightarrow L^{q(\cdot)}$ en virtud de los Teoremas 3.2 y 3.3, respectivamente. □

CAPÍTULO A

Apéndice

En este capítulo incluiremos algunos resultados auxiliares que otorgan mayor claridad a las estimaciones de esta tesis.

Normas asociadas a $\mathbf{\Phi}$-funciones de funciones características

Lema A.1. *Si ϕ es una $\mathbf{\Phi}$-función creciente y continua en $[0,\infty)$ entonces*

$$\|\mathcal{X}_Q\|_\phi = \frac{1}{\phi^{-1}(1/|Q|)} \qquad \forall\, Q \in \mathcal{Q} \text{ con } |Q| \neq 0. \tag{A.I}$$

Demostración. Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{\mathcal{X}_Q(x)}{\lambda}\right) dx = \int_Q \phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) dx = |Q|\phi\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Por lo tanto

$$\text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{\mathcal{X}_Q(x)}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : |Q|\phi\,(1/\lambda) \leq 1\}. \tag{A.II}$$

Como

$$\begin{aligned} |Q|\phi\,(1/\lambda) \leq 1 &\Leftrightarrow \phi\,(1/\lambda) \leq 1/|Q| \\ &\Rightarrow 1/\lambda = \phi^{-1}(\phi(1/\lambda)) \leq \phi^{-1}(1/|Q|) \qquad\qquad \text{Proposición 1.4 (v)} \\ &\Rightarrow 1/\phi^{-1}(1/|Q|) \leq \lambda, \end{aligned}$$

por (A.II) podemos concluir (A.I). □

Propiedad de convexidad de las funciones de tipo $L\log L$

El siguiente resultado estudia condiciones en los exponentes de una función de tipo $L\log L$ para que la misma posea la propiedad de convexidad.

Lema A.2 ([75])**.** *Sean $\alpha \geq 1$ y β constantes. Denotamos $f_{\alpha,\beta}$ a la función definida por $f_{\alpha,\beta}(t) = t^\alpha(\log(e+t))^\beta$, $t \geq 0$. Entonces,*

(i) *si*
$$2(\alpha-1)+\beta \geq 0, \tag{A.III}$$
se verifica que f es convexa.

(ii) *Existe $K = K(\alpha) > 0$ tal que si*
$$\beta < -K(\alpha-1), \tag{A.IV}$$
entonces f no es convexa.

Demostración. Como la derivada de segundo orden de $f_{\alpha,\beta}$ está dada por

$$f''_{\alpha,\beta}(t) = t^{\alpha-2}(e+t)^{-2}(\log(e+t))^{\beta-2} g_{\alpha,\beta}(t),$$

donde

$$g_{\alpha,\beta}(t) = \alpha(\alpha-1)(e+t)^2(\log(e+t))^2 + 2\alpha\beta t(e+t)\log(e+t) - \beta t^2 \log(e+t) + \beta(\beta-1)t^2$$

para todo $t \geq 0$ entonces, $f_{\alpha,\beta}$ es convexa en $[0,\infty)$ si y solo si $g_{\alpha,\beta}(t) \geq 0$ para todo $t \in (0,\infty)$.

Probemos (i). Supongamos primero $\beta \geq 0$. Entonces, como $\beta - 1 \geq -1$,

$$g_{\alpha,\beta}(t) \geq \beta t \log(e+t)[2(e+t)-t] - \beta t^2 \geq \beta t[2(e+t)-2t] = 2e\beta t \geq 0,$$

y $f_{\alpha,\beta}$ resulta convexa. Si ahora $\beta < 0$, de la condición (A.III), $\beta \geq -2(\alpha-1)$. Entonces, completando cuadrados,

$$\begin{aligned} g_{\alpha,\beta}(t) &= \alpha\left[\sqrt{\alpha-1}(e+t)\log(e+t) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha-1}}t\right]^2 - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha-1}t^2 - \beta t^2\log(e+t) + \beta(\beta-1)t^2 \\ &\geq (-\beta)t^2\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha-1} + \log(e) - (\beta-1)\right) \\ &= (-\beta)t^2\left(\frac{\beta}{\alpha-1} + 2\right) \geq 0 \end{aligned}$$

y, nuevamente, $f_{\alpha,\beta}$ resulta convexa. Por lo tanto, concluimos la prueba de (i).

Para demostrar (ii) consideremos nuevamente dos casos. Si $\alpha = 1$ y $\beta < 0$, o sea, la condición (A.IV) vale para cualquier constante $K > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} g_{\alpha,\beta}(t) &= \lim_{t\to\infty}[2\beta t(e+t)\log(e+t) - \beta t^2\log(e+t) + \beta(\beta-1)t^2] \\ &= \lim_{t\to\infty}[2\beta e\log(e+t)t + \beta t^2\log(e+t) + \beta(\beta-1)t^2] \\ &= \lim_{t\to\infty}[2\beta e\log(e+t)t + \{\log(e+t) + (\beta-1)\}\beta t^2] = -\infty \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $f_{\alpha,\beta}$ no es convexa en $[0,\infty)$. Supongamos ahora $\alpha > 1$. Debemos hallar $K > 0$ tal que si

$$\beta < -K(\alpha-1),$$

f no resulte convexa. Sea $\lambda = 1 - 1/(2\alpha)$. Para $s > 1/\lambda$, definimos $\beta_s = -s(\alpha - 1)$. Luego, existe un único $t_s \in \mathbb{R}$ tal que $\log(e + t_s) = \lambda s$. Como

$$\begin{aligned}\frac{g_{\alpha,\beta_s}(t)}{\alpha - 1} &= \alpha(e+t)^2(\log(e+t))^2 - 2\alpha st(e+t)\log(e+t) + st^2\log(e+t) - s(-s\alpha + s - 1)t^2 \\ &= \alpha\left[(e+t)\log(e+t) - st\right]^2 + st^2\left[\log(e+t) - s + 1\right],\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{g_{\alpha,\beta_s}(t_s)}{\alpha - 1} &\leq \alpha\left[(e+t_s)\lambda s - st_s\right]^2 + st_s^2\left[\lambda s - s + 1\right] \\ &= \alpha(e+t_s)^2\lambda^2 s^2 - \alpha 2(e+t_s)\lambda s^2 t_s + \alpha s^2 t_s^2 + \lambda s^2 t_s^2 - s^2 t_s^2 + st_s^2 \\ &= \alpha e^2\lambda^2 s^2 + \alpha 2et_s\lambda^2 s^2 + \alpha t_s^2\lambda^2 s^2 - \alpha 2e\lambda s^2 t_s - \alpha 2\lambda s^2 t_s^2 + \alpha s^2 t_s^2 + \lambda s^2 t_s^2 - s^2 t_s^2 + st_s^2 \\ &= st_s^2\left\{\alpha e^2\lambda^2\frac{s}{t_s^2} + \alpha 2e\lambda^2\frac{s}{t_s} + \alpha\lambda^2 s - \alpha 2e\lambda\frac{s}{t_s} - \alpha 2\lambda s + \alpha s + \lambda s - s + 1\right\} \\ &= st_s^2\left\{\alpha e^2\lambda^2\frac{s}{t_s^2} + \left(\alpha 2e\lambda^2 - \alpha 2e\lambda\right)\frac{s}{t_s} + \left(\alpha\left[\lambda^2 - 2\lambda + 1\right] + \lambda - 1\right)s + 1\right\} \\ &= st_s^2\left\{\alpha e^2\lambda^2\frac{s}{t_s^2} + \left(\alpha 2e\lambda^2 - \alpha 2e\lambda\right)\frac{s}{t_s} + [\alpha(1-\lambda) - 1](1-\lambda)s + 1\right\}.\end{aligned}$$

Notar que

$$\lim_{s\to\infty}\frac{s}{t_s} = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{e^{\lambda s} - e} = 0$$

y $\alpha(1-\lambda) - 1 = -1/2$. Entonces

$$\lim_{s\to\infty}\frac{g_{\alpha,\beta_s}(t_s)}{s} = -\infty.$$

Del límite anterior podemos deducir la existencia de $K > 1/\lambda$ tal que si $s < K$ y $\beta_s = -s(\alpha - 1) < -K(\alpha - 1)$, resulta $g_{\alpha,\beta_s}(t_s) < 0$. Luego f_{α,β_s} no es convexa para todo $\beta_s < -K(\alpha - 1)$, lo que demuestra (ii). □

Algunas propiedades de los cubos en $\mathbb{R}^n$

Dado $Q \in \mathcal{Q}$, vamos a denotar r_Q y c_Q al radio y al centro del cubo Q respectivamente.

Lema A.3. *Sea $Q \in \mathcal{Q}$ tal que $\ell(Q) = 2^{-\nu}$ con $\nu > 0$. Si $x \in Q$, la bola centrada en x de radio $2^{-\nu}$ está contenida en $3Q$.*

Demostración. Sea z un punto en bola centrada en x de radio $2^{-\nu}$. Entonces

$$|z - c_Q| \leq |z - x| + |x - c_Q| < 2^{-\nu} + \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2} = 2^{-\nu}\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \leq \frac{3\sqrt{n}}{2}2^{-\nu} = \frac{\sqrt{n}}{2}\ell(3Q).$$

Por lo tanto, $z \in 3Q$. □

Lema A.4. *Sean Si Q y $\widehat{Q}$ un par de cubos en $\mathcal{Q}$.*

(i) *Si* $Q \subset \widehat{Q}$ *y* $\ell(\widehat{Q}) = 2\ell(Q)$, *entonces* $\widehat{Q} \subset 3Q$.

(ii) *Si* $Q \cap \widehat{Q} \neq \emptyset$ *y* $\ell(Q) < \ell(\widehat{Q})$, *entonces* $Q \subset 3\widehat{Q}$.

Demostración. Como $Q \subset \widehat{Q}$ y $\ell(\widehat{Q}) = 2\ell(Q)$, la distancia entre sus centros es, a lo sumo, r_Q. Sea $x \in \widehat{Q}$, entonces verifica $|x - c_{\widehat{Q}}| \leq r_{\widehat{Q}}$. Luego

$$\begin{aligned}|x - c_{3Q}| = |x - c_Q| &\leq |x - c_{\widehat{Q}}| + |c_{\widehat{Q}} - c_Q| \leq r_{\widehat{Q}} + r_Q = \sqrt{n}\ell(\widehat{Q}) + \sqrt{n}\ell(Q)\\ &= \sqrt{n}2\ell(Q) + \sqrt{n}\ell(Q) = \sqrt{n}3\ell(Q) = \sqrt{n}\ell(3Q) = r_{3Q}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widehat{Q} \subset 3Q$.
Para demostrar (ii) tomemos $x \in Q$ e $y \in Q \cap \widehat{Q}$. Entonces

$$\begin{aligned}|x - c_{3\widehat{Q}}| = |x - c_{\widehat{Q}}| &\leq |x - c_Q| + |c_Q - c_{\widehat{Q}}| \leq r_Q + |y - c_Q| + |y - c_{\widehat{Q}}| \leq 2r_Q + r_{\widehat{Q}}\\ &= 2\sqrt{n}\ell(Q) + \sqrt{n}\ell(\widehat{Q}) < 3\sqrt{n}\ell(\widehat{Q}) = \sqrt{n}\ell(3\widehat{Q}) = r_{3\widehat{Q}}.\end{aligned}$$

Consecuentemente, $Q \subset 3\widehat{Q}$, como queríamos demostrar. □

Algunas propiedades de la función logaritmo

Lema A.5. *Si* $0 \leq a \leq 1$,

$$a \log(e + z) \leq \log(e + z^a) \leq \log(e + 1) \log(e + z), \qquad \forall\, z \geq 0 \tag{A.V}$$

y si $a \geq 1$,

$$\frac{1}{\log(e + 1)} \log(e + z) \leq \log(e + z^a) \leq a \log(e + z), \qquad \forall\, z \geq 0$$

Demostración. Supongamos $0 \leq a \leq 1$. Por propiedades del logaritmo tenemos

$$a \log(e + z) = \log([e + z]^a) \leq \log(e^a + z^a) \leq \log(e + z^a), \qquad \forall\, z \geq 0.$$

Por otro lado, si $z \geq 1$, entonces $\log(e + z^a) \leq \log(e + z)$, y si $0 \leq z \leq 1$, tenemos que $\log(e + z^a) \leq \log(e + 1) \leq \log(e + 1) \log(e + z)$. Si, en cambio $a \geq 1$, por propiedades del logaritmo obtenemos

$$a \log(e + z) = \log([e + z]^a) \geq \log(e^a + z^a) \geq \log(e + z^a), \qquad \forall\, z \geq 0$$

Por otro lado, si $z \geq 1$, entonces $\log(e + z^a) \geq \log(e + z)$, y si $0 \leq z \leq 1$, tenemos que

$$\log(e + z^a) \geq \frac{1}{\log(e + 1)} \log(e + z).$$

□

Lema A.6. *Sean $z > 0$, $C_1 \leq 1$ y $C_2 \geq 1$. Entonces*

$$C_1 \log(e+z) \leq 2\log(e+C_1 z), \qquad \forall\, z \geq 0 \tag{A.VI}$$

y

$$\log(e+C_2 z) \leq (\log C_2 + 1)\log(e+z), \qquad \forall\, z \geq 0. \tag{A.VII}$$

Demostración. Para probar (A.VI) basta ver que la función

$$F(z) = \log\left(\frac{(e+C_1 z)^2}{(e+z)^{C_1}}\right), \qquad z \geq 0,$$

es positiva o, equivalentemente, que la función

$$G(z) = \frac{(e+C_1 z)^2}{(e+z)^{C_1}}, \qquad z \geq 0,$$

está acotada por debajo por 1. Como $C_1 \leq 1 < 2$, entonces $G(0) = e^{2-C_1} \geq 1$. Además G es creciente en $[0,\infty)$, entonces podemos concluir (A.VI).
Sea $z \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\log(e+C_2 z) &\leq \log(C_2 e + C_2 z) = \log(C_2(e+z)) = \log C_2 + \log(e+z)\\ &\leq \log C_2 \log(e+z) + \log(e+z) \leq (\log C_2 + 1)\log(e+z),\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba de (A.VII). □

Lema A.7. *Dado $\varepsilon > 0$ existe una constante $\sigma_\varepsilon \geq 1$ tal que vale la siguiente desigualdad*

$$\log(e+t) \leq \frac{t^\varepsilon}{\varepsilon}, \qquad \forall\, t \geq \sigma_\varepsilon.$$

Lema A.8. *Existe una constante $C > 0$ tal que vale la siguiente desigualdad*

$$\frac{1}{\log(e+1/|z|)} \leq C\frac{1}{\log(e+\log(e+1/|z|))}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Demostración. Basta ver que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\log(e+\log(e+|x|)) \leq C\log(e+|x|), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Es fácil ver que existe una constante $\sigma > 1$ tal que si $|x| > \sigma$, entonces

$$\log(e+\log(e+|x|)) \leq \log(e+|x|).$$

Por otro lado, si $|x| \leq \sigma$, $\log(e+\log(e+|x|)) \leq \log(e+\log(e+\sigma)) := C$. Luego,

$$\log(e+\log(e+|x|)) \leq C\log(e+|x|),$$

pues $\log(e+|x|) \geq 1$.

□

Comparando promedios

Sea η una $\mathbf{\Phi}$-función, $Q \in \mathcal{Q}$ y w una función. En esta tesis trabajamos con el siguiente promedio de w en Q respecto a η

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_\eta}{\|\mathcal{X}_Q\|_\eta},$$

pero, como se nombró anteriormente, en la literatura aparece otro tipo de promedio, el promedio de tipo Luxemburg $\|w\|_{\eta,Q}$, definido por

$$\|w\|_{\eta,Q} = \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q \eta\left(\frac{w(x)}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}.$$

Respecto a la relación entre estos promedios cuando η es una $\mathbf{\Phi}$-función de tipo $L\log L$ tenemos el siguiente resultado.

Lema A.9. *Sean $p \geq 1$ y $q \geq 0$ constantes. Para todo cubo $Q \in \mathcal{Q}$ y toda función w se verifica*

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{L^p(\log L)^q}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q}} \lesssim \|w\|_{L^p(\log L)^q,Q} \tag{A.0.1}$$

y, en particular, cuando $q = 0$,

$$\frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{L^p}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p}} \simeq \|w\|_{L^p,Q} \tag{A.0.2}$$

Demostración. Veamos que

$$\|\mathcal{X}_Q w\|_{L^p(\log L)^q} \lesssim \|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q} \|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}.$$

En virtud de la Proposición 2.21 tenemos que

$$\int_Q \left(\frac{w(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q}\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)^p \left(\log\left(e + \frac{w(x)\mathcal{X}_Q(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q}\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)\right)^q dx$$
$$\simeq \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{w(x)}{\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)^p \frac{1}{\log(e+1/|Q|)^q}\left(\log\left(e + \frac{w(x)\mathcal{X}_Q(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q}\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)\right)^q dx$$

Supongamos que $\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q} \geq 1$. Entonces,

$$\int_Q \left(\frac{w(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q}\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)^p \left(\log\left(e + \frac{w(x)\mathcal{X}_Q(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q}\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)\right)^q dx$$
$$\lesssim \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{w(x)}{\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)^p \left(\log\left(e + \frac{w(x)\mathcal{X}_Q(x)}{\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)\right)^q dx \leq 1$$

Si en cambio $\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q} \leq 1$. Por el Lema A.6 tenemos que

$$\int_Q \left(\frac{w(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q}\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)^p \left(\log\left(e + \frac{w(x)\mathcal{X}_Q(x)}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q}\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)\right)^q dx$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \left(\frac{\log(1/\left\|\mathcal{X}_Q\right\|_{L^p(\log L)^q})+1}{\log(e+1/|Q|)^q}\right)^q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{w(x)}{\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)^p \left(\log\left(e+\frac{w(x)\mathcal{X}_Q(x)}{\|w\|_{L^p(\log L)^q,Q}}\right)\right)^q dx\\
&\lesssim \left(\frac{\log(1/\left\|\mathcal{X}_Q\right\|_{L^p(\log L)^q})}{\log(e+1/|Q|)^q}+1\right)^q\\
&\lesssim (\log(e+1)+1)^q
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado que, por el Lema A.5, se verifica que

$$
\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p(\log L)^q}}\right) &= \log\left(\frac{1}{|Q|^{1/p}(\log(e+1/|Q|))^{q/p}}\right)\\
&\le \log\left(e+\frac{1}{|Q|^{1/p}}\right)\\
&\le \log(e+1)\log\left(e+\frac{1}{|Q|}\right)\\
&\le \log(e+1)\log\left(e+\frac{1}{|Q|}\right)^q
\end{aligned}
$$

Si $q=0$ además se verifica

$$
\|w\|_{L^p,Q} \lesssim \frac{\|\mathcal{X}_Q w\|_{L^p}}{\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p}}
$$

pues

$$
\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{w(x)}{\|\mathcal{X}_Q w\|_{L^p}}\|\mathcal{X}_Q\|_{L^p}\right)^p dx = \int_Q \left(\frac{w(x)}{\|\mathcal{X}_Q w\|_{L^p}}\right)^p dx \le 1 \qquad \square
$$

Demostración del Lema 4.5

Para demostrar el Lema 4.5 probaremos algunas desigualdades auxiliares que involucran a E y J. Recordemos que $J=\left[\varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\cdot,f)\right]_Q$ y

$$
E(x)=J^{1/p(x)}(\log(e+J))^{-q(x)/p(x)}, \qquad x\in\mathbb{R}^n.
$$

Notemos que si definimos las funciones $w(t)=A/\log(e+1/t)$ y $\eta(t)=B/\log(e+\log(e+1/t))$, donde A y B son las constantes positivas provistas por las condiciones (2.6) y (2.21) para $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ respectivamente, entonces estas condiciones se reescriben de la siguiente manera

$$
|p(x)-p(y)|\le w(|x-y|), \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n \tag{A.VIII}
$$

y

$$
|q(x)-q(y)|\le \eta(|x-y|), \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n. \tag{A.IX}
$$

Las funciones w y η además verifican las desigualdades enunciadas en el siguiente resultado.

Lema A.10. *Sean $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y $q(\cdot)\in\mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ tal que $q(\cdot)\ge 0$. Sea f una función medible definida en $\mathbb{R}^n$ y $Q\in\mathcal{Q}$. Si $J>0$ y $C\ge 1$ es una constante, entonces se verifican las siguientes desigualdades*

(i) $J^{w(CJ^{-1/n})} \lesssim 1$

(ii) $\log(e+J)^{w(CJ^{-1/n})} \lesssim 1$ *y*

(iii) $(\log(e+J))^{\eta(CJ^{-1/n})} \lesssim 1$.

Si además, $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$*,* ρ *denota el diámetro del cubo* Q *y* $C_n = \sqrt{n}$*, entonces*

$$\text{(a)}\, w(\rho) \leq w(C_n\, J^{-1/n}) \qquad y \qquad \text{(b)}\, \eta(\rho) \leq \eta(C_n\, J^{-1/n}) \tag{A.X}$$

Demostración. Por la definición de la función w, para ver (i) es suficiente ver que

$$\log J \lesssim \log(e + C^{-1}J^{1/n}).$$

Por las propiedades del logaritmo y (A.VII) tenemos que

$$\log J \leq n \log\left(e + C\frac{J^{1/n}}{C}\right) \leq n(\log C + 1)\log\left(e + \frac{J^{1/n}}{C}\right).$$

Analogamente, para probar (ii) veamos que

$$\log(\log(e+J)) \lesssim \log(e + J^{1/n}C^{-1}).$$

Por propiedades del logaritmo, la desigualdad (A.V) con $a = 1/n$ y (A.VII), tenemos que

$$\log(e+J) \leq n\log(e + J^{1/n}) = n\log\left(e + C\frac{J^{1/n}}{C}\right) \leq n(\log C + 1)\log\left(e + \frac{J^{1/n}}{C}\right). \tag{A.XI}$$

Luego, como $\log(\log(x)) \leq \log(x)$ para todo $x > 1$,

$$\log(\log(e+J)) \leq \log(e+J) \leq n(\log C + 1)\log\left(e + \frac{J^{1/n}}{C}\right).$$

Por otro lado, por la definición de η, para comprobar (iii) basta ver que

$$\log(\log(e+J)) \lesssim \log(e + (\log(e + J^{1/n}C^{-1})))$$

Por (A.XI), si $C_1 = n(\log C + 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\log(\log(e+J)) &\leq \log\left(e + C_1 \log\left(e + \frac{J^{1/n}}{C}\right)\right)\\ &\leq (\log C_1 + 1)\log\left(e + \log\left(e + \frac{J^{1/n}}{C}\right)\right)\end{aligned}$$

en virtud de (A.VII). Finalmente, notemos que, si $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$, por la propiedad de la bola unitaria,

$$J = \frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x, f(x))\, dx \leq \frac{1}{|Q|} = \frac{n^{n/2}}{\rho^n}.$$

Luego $\rho \leq C_n\, J^{-1/n}$ y las desigualdades en (A.X) se deducen de que w, η son funciones no decrecientes. □

Lema A.11. *Sean* $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ *con* $p^+ < \infty$ *y* $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{loglog}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $q(\cdot) \geq 0$. *Sea* f *una función medible definida en* $\mathbb{R}^n$, *no negativa con* $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}} \leq 1$ *y* $Q \in \mathcal{Q}$. *Si* $J \geq C_0$ *para alguna constante* $C_0 > 0$, *entonces existe una constante* $\kappa > 0$ *tal que*

$$E(x) = J^{1/p(x)}(\log(e+J))^{-q(x)/p(x)} \geq \kappa, \qquad x \in Q. \tag{A.XII}$$

Además, si ρ *denota el diámetro del cubo* Q *y* $C_n = \sqrt{n}$, *se verifican las siguientes desigualdades*

(i) $J^{1/(2p(x))} \lesssim E(x) \leq J^{1/p(x)}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\log(e + E(x)) \simeq \log(e+J)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $E(x)^{-p(y)} \lesssim E(x)^{-p(x)+w(\rho)}$ *para todo* $x, y \in Q$.

(iv) $(\log(e+E(x)))^{-q(y)} \leq C(\log(e+J))^{-q(x)+\eta(\rho)}$ *para todo* $x, y \in Q$.

Las constantes involucradas dependen de los exponentes y de C_0.

Demostración. Sea $x \in Q$, para probar (A.XII) basta ver que

$$(\log(e+J))^{q(x)} \leq CJ, \tag{A.XIII}$$

para alguna constante $C > 0$. Por el Lema A.7 con $\varepsilon = 1/q^+$ se deduce que, existe $\sigma_q \geq 1$ tal que

$$(\log(e+t))^{q^+} \leq (q^+)^{q^+} t \qquad \forall\, t \geq \sigma_q. \tag{A.XIV}$$

Si $C_0 \geq \sigma_q$, por la hipótesis en J, $J \geq \sigma_q$. Luego por (A.XIV)

$$\log(e+J)^{q(x)} \leq \log(e+J)^{q^+} \leq (q^+)^{q^+} J.$$

Por otro lado, si $C_0 < \sigma_q$, entonces $1 < \sigma_q/C_0$. Luego, como $1 \leq J/C_0$, $\sigma_q \leq J\sigma_q/C_0$. Por lo tanto, en virtud de la desigualdad (A.XIV) obtenemos que

$$\log(e+J)^{q(x)} < \log\left(e + \frac{\sigma_q J}{C_0}\right)^{q^+} \leq (q^+)^{q^+} \frac{\sigma_q}{C_0} J,$$

concluyendo la prueba de (A.XIII).

Veamos (i). Sea $x \in \mathbb{R}^n$, claramente

$$E(x) = J^{1/p(x)}(\log(e+J))^{-q(x)/p(x)} \leq J^{1/p(x)}.$$

Por otro lado, por el Lema A.7 con $\varepsilon = 1/(2q^+)$, existe $\tilde{\sigma}_q \geq 1$ tal que

$$\log(e+t) \leq 2q^+ t^{1/(2q^+)} \qquad \forall\, t > \tilde{\sigma}_q$$

y, con el mismo razonamiento que antes, obtenemos $\log(e+J) \lesssim J^{1/(2q^+)}$. Por lo tanto,

$$(\log(e+J))^{q(x)/p(x)} \lesssim J^{\frac{q(x)}{2q^+ p(x)}} \lesssim J^{1/(2p(x))}$$

y entonces
$$E(x) = J^{1/p(x)}(\log(e+J))^{-q(x)/p(x)} \gtrsim J^{1/p(x)-1/2p(x)} = J^{1/2p(x)}$$
como queríamos demostrar.

Por el item (i) y (A.V), tenemos que
$$\log(e+E(x)) \leq \log\left(e+J^{1/p(x)}\right) \lesssim \log(e+J)$$
y
$$\log(e+E(x)) \geq \log\left(e+J^{1/(2p(x))}\right) \geq \frac{1}{2p(x)}\log(e+J) \geq \frac{1}{2p^+}\log(e+J).$$
Consecuentemente $\log(e+J) \simeq \log(e+E(x))$.

Sean $x, y \in Q$, entonces $|x-y| \leq \rho$. En virtud de la condición (A.VIII) y de que la función w es no decreciente,
$$|p(x)-p(y)| \leq w(|x-y|) \leq w(\rho).$$
Supongamos $p(x) \geq p(y)$. Por (A.XII), si $\kappa \geq 1$,
$$E(x)^{p(x)-p(y)} \leq E(x)^{w(\rho)},$$
y si $\kappa < 1$,
$$E(x)^{p(x)-p(y)} < \left(\frac{E(x)}{\kappa}\right)^{p(x)-p(y)} \leq \left(\frac{E(x)}{\kappa}\right)^{w(\rho)} \leq \frac{1}{\kappa}E(x)^{w(\rho)},$$
pues $w(\rho) \leq 1$. Si por el contrario $p(x) \leq p(y)$ y suponemos $\kappa \geq 1$, $E(x)^{p(x)} \leq E(x)^{p(y)}$. Luego
$$E(x)^{-p(y)} \leq E(x)^{-p(x)} \leq E(x)^{-p(x)+w(\rho)}.$$
Si en cambio $\kappa < 1$,
$$E(x)^{p(x)} < \left(\frac{E(x)}{\kappa}\right)^{p(x)} \leq \left(\frac{E(x)}{\kappa}\right)^{p(y)+w(\rho)} < \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{p^++1} E(x)^{p(y)+w(\rho)}.$$
Así concluimos (iii).

Por otro lado, si $q(x) \leq q(y)$, entonces $(\log(e+E(x)))^{q(x)} \leq (\log(e+E(x)))^{q(y)}$. Luego, por el item (ii),
$$(\log(e+E(x)))^{-q(y)} \leq (\log(e+E(x)))^{-q(x)} \simeq (\log(e+J))^{-q(x)} \leq (\log(e+J))^{-q(x)+\eta(\rho)}.$$
Ahora, si $q(x) \geq q(y)$, en virtud de la condición (A.IX), tenemos que
$$q(x)-q(y) \leq \eta(|x-y|) \leq \eta(\rho).$$
Luego, por (ii),
$$\begin{aligned}(\log(e+J))^{q(x)}(\log(e+E(x)))^{-q(y)} &\lesssim (\log(e+J))^{q(x)-q(y)} \\ &\leq (\log(e+J))^{\eta(\rho)},\end{aligned}$$
lo cual concluye la demostración. □

Demostración Lema 4.5. Sean $x, y \in Q$. Para ver (4.7) notemos que por el Lema A.11 (iii)

$$E(x)^{-p(y)} \lesssim E(x)^{-p(x)+w(\rho)}$$

Supongamos $E(x) \geq 1$, por la desigualdad (A.X)(a)

$$E(x)^{-p(y)} \leq E(x)^{-p(x)+w(C_n J^{-1/n})}$$

y si $E(x)/\kappa \geq 1$,

$$\begin{aligned} E(x)^{-p(y)} &\lesssim \kappa^{-p(x)+w(\rho)} \left(\frac{E(x)}{\kappa}\right)^{-p(x)+w(\rho)} \leq \kappa^{-p(x)+w(\rho)} \left(\frac{E(x)}{\kappa}\right)^{-p(x)+w(C_n J^{-1/n})} \\ &\leq \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{w(C_n J^{-1/n})-w(\rho)} E(x)^{-p(x)+w(C_n J^{-1/n})} \leq \frac{1}{\kappa} E(x)^{-p(x)+w(C_n J^{-1/n})}. \end{aligned}$$

Luego, por definición de $E(x)$,

$$E(x)^{-p(y)} \lesssim J^{-1}(\log(e+J))^{q(x)}(J^{w(C_n J^{-1/n})})^{1/p(x)}((\log(e+J))^{w(C_n J^{-1/n})})^{-q(x)/p(x)}.$$

Como, en virtud del Lema A.10 (i) y (ii), $J^{w(C_n J^{-1/n})} \lesssim 1$ y $(\log(e+J))^{w(C_n J^{-1/n})} \lesssim 1$, respectivamente, concluimos (4.7).
Por otro lado, por el Lema A.11 (iv) y la desigualdad (A.X)(b)

$$(\log(e+E(x)))^{-q(y)} \lesssim (\log(e+J))^{-q(x)+\eta(\rho)} \lesssim (\log(e+J))^{-q(x)+\eta(C_n J^{-1/n})}.$$

Finalmente, por el Lema A.10 (iii) deducimos (4.8). □

Una propiedad de la función exponencial

Lema A.12. *Sea $A > 1$ una constante y $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Si existe una constante $C > 0$ tal que $A^{|q(x)-q(y)|} \leq C$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $A^{q(x)-q(y)} \simeq 1$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Notar que $q(x) - q(y) \leq |q(x) - q(y)|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Luego, como $A > 1$,

$$A^{q(x)-q(y)} \leq A^{|q(x)-q(y)|} \leq C.$$

Para ver la otra desigualdad, sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y distingamos dos casos. Si $q(x)-q(y) > 0$, entonces $(1/A)^{q(x)-q(y)} \leq 1$. Por lo tanto, $1 \leq A^{q(x)-q(y)}$. Si, en cambio, $q(x) - q(y) < 0$, tenemos que $(1/A)^{q(x)-q(y)} = A^{|q(x)-q(y)|} \leq C$. Consecuentemente, $1/C \leq A^{q(x)-q(y)}$. □

Una observación sobre el ínfimo del cociente

Lema A.13. *Sean f y g dos funciones positivas, entonces*

$$\frac{f^-}{g^+} \leq \left(\frac{f}{g}\right)^-, \tag{A.XV}$$

y la desigualdad puede ser estricta.

Demostración. Claramente f^-/g^+ es una cota inferior para la función f/g. Por lo tanto, por definición de ínfimo, obtenemos (A.XV). Por otro lado, si consideramos las funciones

$$f(x) = \ln(x) + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{7}{9} + \frac{2}{9}x,$$

ambas con dominio $(1; 19)$, tenemos que

$$\frac{1}{5} = \frac{f(1)}{g(19)} = \frac{f^-}{g^+} < \left(\frac{f}{g}\right)^- = \left(\frac{f}{g}\right)(19) \approx 0{,}79.$$

$\square$

Conclusiones

- Bajo condiciones de tipo bump variables, es posible obtener resultados de continuidad con dos pesos para los operadores potenciales, los operadores de Calderón-Zygmund y sus respectivos conmutadores en el contexto de ciertos espacios de Zygmund de tipo $L \log L$ generalizados. Continúa como problema abierto obtener estos resultados en espacios de Zygmund de tipo $L \log L$ generalizados donde interviene un exponente negativo.

- Para debilitar las condiciones bump en un par de pesos donde intervienen promedios asociados a funciones de tipo potencia, que permiten obtener ciertas propiedades de continuidad de operadores, resulta conveniente introducir promedios asociados $\mathbf{\Phi}$-funciones generalizadas, por ejemplo, las de tipo $L \log L$.

- Utilizando estimaciones de tipo Bloom, es posible obtener resultados de continuidad con dos pesos para los conmutadores del operador integral fraccionario y de los operadores de Calderón-Zygmund en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable. En este sentido, un problema abierto es la caracterización de las clases de pesos y símbolos que intervienen en este tipo de resultados cuando se trabaja en el contexto variable.

- Las técnicas contenidas en la teoría de dominación sparse pueden utilizarse también en el contexto de los espacios de exponente variable brindando una herramienta poderosa en este sentido ya que, como sucede en el contexto clásico, permiten obtener demostraciones más sencillas.

- Para probar los resultados principales de esta tesis se obtuvieron extensiones a los espacios de Zygmund de tipo $L \log L$ generalizados, de resultados conocidos en el contexto clásico, como así también, resultados obtenidos en el marco de los espacios de Lebesgue de exponente variable. Por ejemplo, el teorema de la convergencia dominada, resultados de densidad y dualidad, la estimación de la norma de las funciones características, la propiedad de continuidad de la maximal de Hardy-Littlewood, entre otros.

Bibliografía

[1] N. Accomazzo, J. C. Martínez-Perales, and I. P. Rivera-Ríos. On Bloom type estimates for iterated commutators of fractional integrals. *To appear in Indiana Univ. Math. J.. Eprint arXiv:1712.06923*, 2017.

[2] E. Acerbi and G. Mingione. Regularity results for a class of functionals with non-standard growth. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 156(2):121–140, 2001.

[3] E. Acerbi and G. Mingione. Regularity results for electrorheological fluids: the stationary case. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(9):817–822, 2002.

[4] A. Almeida and H. Rafeiro. Inversion of the Bessel potential operator in weighted variable Lebesgue spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 340(2):1336–1346, 2008.

[5] A. Almeida and S. Samko. Characterization of Riesz and Bessel potentials on variable Lebesgue spaces. *J. Funct. Spaces Appl.*, 4(2):113–144, 2006.

[6] A. Bernardis, E. Dalmasso, and G. Pradolini. Generalized maximal functions and related operators on weighted Musielak-Orlicz spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 39(1):23–50, 2014.

[7] A. Bernardis, O. Gorosito, and G. Pradolini. Weighted inequalities for multilinear potential operators and their commutators. *Potential Anal.*, 35(3):253–274, 2011.

[8] Z. W. Birnbaum and W. Orlicz. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen. *Stud. Math.*, 3:1–67, 1931.

[9] S. Bloom. A commutator theorem and weighted BMO. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 292(1):103–122, 1985.

[10] C. Capone, D. Cruz-Uribe, and A. Fiorenza. The fractional maximal operator and fractional integrals on variable L^p spaces. *Rev. Mat. Iberoam.*, 23(3):743–770, 2007.

[11] S.-Y. A. Chang, J. M. Wilson, and T. H. Wolff. Some weighted norm inequalities concerning the Schrödinger operators. *Comment. Math. Helv.*, 60(2):217–246, 1985.

[12] S. Chanillo and R. L. Wheeden. L^p-estimates for fractional integrals and Sobolev inequalities with applications to Schrödinger operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 10(9):1077–1116, 1985.

[13] Y. Chen, S. Levine, and M.i Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(4):1383–1406, 2006.

[14] R. R. Coifman and C. Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Math.*, 51:241–250, 1974.

[15] R. R. Coifman, R. Rochberg, and G. Weiss. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Ann. of Math. (2)*, 103(3):611–635, 1976.

[16] J. M. Conde-Alonso and G. Rey. A pointwise estimate for positive dyadic shifts and some applications. *Math. Ann.*, 365(3-4):1111–1135, 2016.

[17] D. Cruz-Uribe. Two weight norm inequalities for fractional integral operators and commutators. *eprint arXiv:1412.4157*, 2014.

[18] D. Cruz-Uribe. Elementary proofs of one weight norm inequalities for fractional integral operators and commutators. In *Harmonic analysis, partial differential equations, Banach spaces, and operator theory. Vol. 2*, volume 5 of *Assoc. Women Math. Ser.*, pages 183–198. Springer, Cham, 2017.

[19] D. Cruz-Uribe, L. Diening, and P. Hästö. The maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 14(3):361–374, 2011.

[20] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza. $L \log L$ results for the maximal operator in variable L^p spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(5):2631–2647, 2009.

[21] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza. *Variable Lebesgue spaces.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013. Foundations and harmonic analysis.

[22] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, and C. J. Neugebauer. The maximal function on variable L^p spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 28(1):223–238, 2003.

[23] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez. Extrapolation from A_∞ weights and applications. *J. Funct. Anal.*, 213(2):412–439, 2004.

[24] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez. Sharp two-weight inequalities for singular integrals, with applications to the Hilbert transform and the Sarason conjecture. *Adv. Math.*, 216(2):647–676, 2007.

[25] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez. *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, volume 215 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[26] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez. Sharp weighted estimates for classical operators. *Adv. Math.*, 229(1):408–441, 2012.

[27] D. Cruz-Uribe and K. Moen. Sharp norm inequalities for commutators of classical operators. *Publ. Mat.*, 56(1):147–190, 2012.

[28] D. Cruz-Uribe and K. Moen. A fractional Muckenhoupt-Wheeden theorem and its consequences. *Integral Equations Operator Theory*, 76(3):421–446, 2013.

[29] D. Cruz-Uribe and C. Pérez. On the two-weight problem for singular integral operators. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 1(4):821–849, 2002.

[30] D. Cruz-Uribe, A. Reznikov, and A. Volberg. Logarithmic bump conditions and the two-weight boundedness of Calderón-Zygmund operators. *Adv. Math.*, 255:706–729, 2014.

[31] D. Cruz-Uribe and L.-A. D. Wang. Extrapolation and weighted norm inequalities in the variable Lebesgue spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(2):1205–1235, 2017.

[32] E. Dalmasso and G. Pradolini. Characterizations of the boundedness of generalized fractional maximal functions and related operators in Orlicz spaces. *Math. Nachr.*, 290(1):19–36, 2017.

[33] L. Diening. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$. *Math. Inequal. Appl.*, 7(2):245–253, 2004.

[34] L. Diening. Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces. *Bull. Sci. Math.*, 129(8):657–700, 2005.

[35] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Ruzicka. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, volume 2017 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.

[36] J. Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[37] D. E. Edmunds and A. Meskhi. Potential-type operators in $L^{p(x)}$ spaces. *Z. Anal. Anwendungen*, 21(3):681–690, 2002.

[38] C. L. Fefferman. The uncertainty principle. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 9(2):129–206, 1983.

[39] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104.

[40] O. Gorosito, G. Pradolini, and O. Salinas. Boundedness of fractional operators in weighted variable exponent spaces with non doubling measures. *Czechoslovak Math. J.*, 60(135)(4):1007–1023, 2010.

[41] L. Grafakos. *Classical and modern Fourier analysis*. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[42] P. Gurka, P. Harjulehto, and A. Nekvinda. Bessel potential spaces with variable exponent. *Math. Inequal. Appl.*, 10(3):661–676, 2007.

[43] E. Harboure, O. Salinas, and B. Viviani. Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and Lipschitz spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(1):235–255, 1997.

[44] P. Harjulehto and P. Hästö. *Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces*.

[45] P. Harjulehto, P. Hästö, V. Latvala, and O. Toivanen. Critical variable exponent functionals in image restoration. *Appl. Math. Lett.*, 26(1):56–60, 2013.

[46] L. I. Hedberg. On certain convolution inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 36:505–510, 1972.

[47] I. Holmes, M. T. Lacey, and B. D. Wick. Commutators in the two-weight setting. *Math. Ann.*, 367(1-2):51–80, 2017.

[48] I. Holmes, R. Rahm, and S. Spencer. Two-weight inequalities for commutators with fractional integral operators. *Studia Math*, 233(3):279–291, 2016.

[49] R. Hunt, B. Muckenhoupt, and R. Wheeden. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 176:227–251, 1973.

[50] P. T. Hytönen, C. Pérez, S. Treil, and A. Volberg. Sharp weighted estimates for dyadic shifts and the A_2 conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 687:43–86, 2014.

[51] T. P. Hytönen. The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators. *Ann. of Math. (2)*, 175(3):1473–1506, 2012.

[52] T. P. Hytönen. Representation of singular integrals by dyadic operators, and the A_2 theorem. *Expo. Math.*, 35(2):166–205, 2017.

[53] G. H. Ibañez-Firnkorn and I. P. Rivera-Ríos. Sparse and weighted estimates for generalized Hörmander operators and commutators. *eprint arXiv:1704.01018*, 2017.

[54] B. Jawerth, C. Pérez, and G. Welland. The positive cone in Triebel-Lizorkin spaces and the relation among potential and maximal operators. In *Harmonic analysis and partial differential equations (Boca Raton, FL, 1988)*, volume 107 of *Contemp. Math.*, pages 71–91. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[55] F. John and L. Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:415–426, 1961.

[56] N. K. Karapetyants and A. I. Ginsburg. Fractional integrals and singular integrals in the Hölder classes of variable order. *Integral Transform. Spec. Funct.*, 2(2):91–106, 1994.

[57] N. K. Karapetyants and A. I. Ginzburg. Fractional integrodifferentiation in Hölder classes of arbitrary order. *Georgian Math. J.*, 2(2):141–150, 1995.

[58] V. Kokilashvili and A. Meskhi. Weighted criteria for generalized fractional maximal functions and potentials in Lebesgue spaces with variable exponent. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 18(9-10):609–628, 2007.

[59] V. Kokilashvili, A. Meskhi, and M. Sarwar. Operators of harmonic analysis in variable exponent Lebesgue spaces. two weight estimates. *arXiv:1007.1351v1*, 2010.

[60] V. Kokilashvili, A. Meskhi, and M. Sarwar. Potential operators in variable exponent Lebesgue spaces: two-weight estimates. *J. Inequal. Appl.*, pages Art. ID 329571, 27, 2010.

[61] V. Kokilashvili, A. Meskhi, and M. Sarwar. Two-weight norm estimates for maximal and Calderón-Zygmund operators in variable exponent Lebesgue spaces. *Georgian Math. J.*, 20(3):547–572, 2013.

[62] V. Kokilashvili and S. Samko. On Sobolev theorem for Riesz-type potentials in Lebesgue spaces with variable exponent. *Z. Anal. Anwendungen*, 22(4):899–910, 2003.

[63] V. Kokilashvili and S. Samko. A general approach to weighted boundedness of operators of harmonic analysis in variable exponent Lebesgue spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 145:109–116, 2007.

[64] V. M. Kokilashvili and S. G. Samko. Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growth. *J. Math. Anal. Appl.*, 352(1):15–34, 2009.

[65] O. Kovácik and J.i Rákosník. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Math. J.*, 41(116)(4):592–618, 1991.

[66] M. T. Lacey. An elementary proof of the A_2 bound. *Israel J. Math.*, 217(1):181–195, 2017.

[67] A. K. Lerner. Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L^p spaces. *Math. Z.*, 251(3):509–521, 2005.

[68] A. K. Lerner. On an estimate of Calderón-Zygmund operators by dyadic positive operators. *J. Anal. Math.*, 121:141–161, 2013.

[69] A. K. Lerner and F. Nazarov. *Intuitive dyadic calculus: the basics.* Preprint, 2014; arXiv:1508.05639.

[70] A. K. Lerner, S Ombrosi, and I. P. Rivera-Ríos. Commutators of singular integrals revisited. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 51(1):107–119, 2019.

[71] A. K. Lerner, S. Ombrosi, and I. P. Rivera-Ríos. On pointwise and weighted estimates for commutators of Calderón-Zygmund operators. *Adv. Math.*, 319:153–181, 2017.

[72] W.-M. Li. John-Nirenberg inequality and self-improving properties. *J. Math. Res. Exposition*, 25(1):42–46, 2005.

[73] W.-M. Li. Two-weight norm inequalities for commutators of potential type integral operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 322(2):1215–1223, 2006.

[74] P. MacManus and C. Pérez. Trudinger inequalities without derivatives. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(5):1997–2012, 2002.

[75] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, and T. Ohno. Approximate identities and Young type inequalities in variable Lebesgue-Orlicz spaces $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 35(2):405–420, 2010.

[76] R. A. Mashiyev, B. Çekiç, F. I. Mamedov, and S. Ogras. Hardy's inequality in power-type weighted $L^{p(\cdot)}(0,\infty)$ spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 334(1):289–298, 2007.

[77] L. Melchiori and G. Pradolini. Potential operators and their commutators acting between variable Lebesgue spaces with different weights. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 29(11):909–926, 2018.

[78] L. Melchiori, G. Pradolini, and W. Ramos. Commutators of potential type operators with Lipschitz symbols on variable Lebesgue spaces with different weights. *Math. Inequal. Appl.*, 22(3):855–883, 2019.

[79] L. Melchiori, G. Pradolini, and W. Ramos. Musielak Orlicz bumps and Bloom type estimates for commutators of Calderón-Zygmund and fractional integral operators on variable Lebesgue spaces via sparse operators. *arXiv:1910.11178*, 2019.

[80] Y. Mizuta, T. Ohno, and T. Shimomura. Sobolev's inequalities and vanishing integrability for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$. *J. Math. Anal. Appl.*, 345(1):70–85, 2008.

[81] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:207–226, 1972.

[82] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192:261–274, 1974.

[83] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. *Studia Math.*, 54(3):221–237, 1975/76.

[84] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden. Two weight function norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform. *Studia Math.*, 55(3):279–294, 1976.

[85] J. Musielak. *Orlicz spaces and modular spaces*, volume 1034 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[86] J. Musielak. On spaces with mixed modulars and some spaces of temperate distributions. *Control Cybernet.*, 36(3):833–839, 2007.

[87] H. Nakano. *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*. Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1950.

[88] H. Nakano. *Topology of linear topological spaces*. Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1951.

[89] A. Nekvinda. Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R})$. *Math. Inequal. Appl.*, 7(2):255–265, 2004.

[90] C. J. Neugebauer. Inserting A_p-weights. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87(4):644–648, 1983.

[91] W. Orlicz. Uüber konjugierte exponentenfolgen. *Stud. Math.*, 3:200–211, 1931.

[92] C. Pérez. Two weighted inequalities for potential and fractional type maximal operators. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(2):663–683, 1994.

[93] L. Pick and M. Ruzicka. An example of a space $L^{p(x)}$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded. *Expo. Math.*, 19(4):369–371, 2001.

[94] G. Pradolini and W. Ramos. Characterization of Lipschitz functions via the commutators of singular and fractional integral operators in variable Lebesgue spaces. *Potential Anal.*, 46(3):499–525, 2017.

[95] C. Pérez. On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 71(1):135–157, 1995.

[96] V. Rabinovich and S. Samko. Boundedness and Fredholmness of pseudodifferential operators in variable exponent spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 60(4):507–537, 2008.

[97] M. Ramseyer, O. Salinas, and B. Viviani. Lipschitz type smoothness of the fractional integral on variable exponent spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 403(1):95–106, 2013.

[98] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[99] B. Ross and S. Samko. Fractional integration operator of variable order in the Hölder spaces $H^{\lambda(x)}$. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 18(4):777–788, 1995.

[100] M. Ruzicka. *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, volume 1748 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[101] N. G. Samko, S. G. Samko, and B. G. Vakulov. Weighted Sobolev theorem in Lebesgue spaces with variable exponent. *J. Math. Anal. Appl.*, 335(1):560–583, 2007.

[102] S. Samko, E. Shargorodsky, and B. Vakulov. Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators. II. *J. Math. Anal. Appl.*, 325(1):745–751, 2007.

[103] S. G. Samko. Convolution type operators in $L^{p(x)}$. *Integral Transform. Spec. Funct.*, 7(1-2):123–144, 1998.

[104] E. Sawyer and R. L. Wheeden. Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 114(4):813–874, 1992.

[105] E. T. Sawyer. A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators. *Studia Math.*, 75(1):1–11, 1982.

[106] I. I. Sharapudinov. The basis property of the Haar system in the space Lp(t)([0,1] and the principle of localization in the mean. *Mat. Sb. (N.S.)*, 130(172)(2):275–283, 286, 1986.

[107] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[108] G. V. Welland. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 51:143–148, 1975.

[109] N. Wiener. The ergodic theorem. *Duke Math. J.*, 5(1):1–18, 1939.

[110] V. V. Zhikov. On the homogenization of nonlinear variational problems in perforated domains. *Russian J. Math. Phys.*, 2(3):393–408, 1994.

[111] V. V. Zhikov. On Lavrentiev's phenomenon. *Russian J. Math. Phys.*, 3(2):249–269, 1995.

[112] V. V. Zhikov. On some variational problems. *Russian J. Math. Phys.*, 5(1):105–116 (1998), 1997.