UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS
MAESTRÍA EN DIDÁCTICA ESPECÍFICA

Tesis

Las concepciones de los futuros docentes sobre la noción de fracción

por María Laura Imvinkelried

Para optar por el grado académico de:

Magister en Didáctica Específica

Directora: Mg. Graciela Chemello (UNAHUR)
Codirectora: Mg. Silvia Bernardis (UNL)
Santa Fe, 2020

Dedico esta investigación a mis padres, *Raquel y Rubén. Desde pequeña, sin saberlo tal vez, me hicieron gustar de la Matemática. Mamá, muy hábil con los cálculos y papá con la geometría.*

A mi esposo, *Sebastián.*
Desde que decidí estudiar para ser maestra, su apoyo fue incondicional.

A mis hijos, *Dardo, Gastón y Emanuel* que en muchos momentos de su vida tuvieron una mamá ausente pero creo que les enseñé a luchar por sus sueños, a ser perseverantes y a elegir en su vida la profesión que ellos deseen, pero que la vivan con responsabilidad y pasión...

Índice general

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a:

Graciela Chemello, por aceptar desde el primer momento ser la directora de esta Tesis y por el tiempo destinado a dirigirla, tiempo en el que me demostró su generosidad y grandeza. Una gran Maestra, una Maestra que agradezco haber encontrado en mi profesión, la cual no hubiese sido igual sin su presencia.

Silvia Bernardis, por aceptar acompañarme como codirectora en este desafío con responsabilidad y generosidad, siempre atenta a los avances y en los momentos de quietud, alentándome a seguir.

Beatriz Vega, por sus lecturas y escucha atenta y desinteresada. Por acompañarme en este desafío desde el comienzo, convencida que podía lograrlo.

Mónica Agrasar, por el tiempo destinado a compartir junto a Graciela y a mí, nuestras inquietudes, primeros análisis y posibles conclusiones, de manera generosa y comprometida.

A los *estudiantes de 1ero y 4to año* del Instituto, y en especial a *Andrea*, compañera de cátedra y vicerrectora, que me facilitó los tiempos para el trabajo de campo, confiando siempre en mi tarea.

A *Carina y Malvina*, que desde hace años nos une más que el lazo de hermanas, nos une una misma pasión, la educación de niños y jóvenes. Gracias por estar siempre a mi lado.

A *Marita, Alejandra y Cecilia*, por compartir la pasión por la Matemática y una amistad verdadera que nos anima a seguir creciendo en esta profesión.

A mi querida maestra *Sara*, a las profesoras *Marina, Mónica, Graciela* y *Gladys*; y a los colegas *Bibiana y Diego*, que durante más de 30 años me enseñaron a gustar de la Matemática y apasionarme por su enseñanza.

CAPÍTULO 1
Sobre el problema de la investigación y el marco teórico

Un jefe árabe dejó en herencia 17 camellos para sus tres hijos, de modo que tenían que repartírselos del siguiente modo:

La mitad para el mayor de los tres hijos.
La tercera parte para el mediano.
La novena parte para el más pequeño de los tres.
Ante la imposibilidad de hacer el reparto de los camellos, acudieron al Cadí. Se trataba de un hombre justo, generoso y un buen matemático. Regaló a los tres hermanos un camello de su propiedad, de modo que eran 18 el total de camellos a repartir. Así al mayor de los tres hermanos le correspondió 9 camellos, al mediano, 6 y al pequeño 2. Pero con esto sobró 1 camello, que naturalmente devolvieron al Cadí llenos de agradecimiento y admiración por su sabiduría.
TAHAN, 2008

1.1. Problema de investigación

La noción de fracción y la forma en que los futuros docentes conceptualizan la misma, es el tema elegido para esta investigación por ser uno de los contenidos del programa de Matemática de la escuela primaria más complejos para los niños y para los maestros, con consecuencias importantes para el aprendizaje de la Matemática en los niveles escolares siguientes. No sólo es complejo sino también "no deseado" por los estudiantes de todos los niveles; tal es, que ante el comienzo de una unidad didáctica en la que estos números son los protagonistas, las expresiones del tipo "¡no, fracciones no!, ¿para qué estudiamos a las fracciones?, ¡no las entiendo! resultan comunes en las aulas de nivel primario hasta las del nivel superior.

Debido a la relevancia del tema, son numerosos los trabajos de tesis de maestría, doctorado, publicaciones en revistas de educación y otras, que lo han investigado desde distintos aspectos y en distintos niveles del sistema educativo. Por ejemplo, en un artículo de investigación, Block (2001) recupera conclusiones de investigadores en relación con la diversidad de significados que acepta el concepto de fracción como así también de su complejidad:

> Hace ya más de dos décadas se empezó a prestar atención a la diversidad de significados que la noción de fracción asume cuando se la considera en el contexto de los problemas específicos que permite resolver (Kieren, 1976; Kieren, 1988; Ohlsson, 1988; Behr, et.al, 1992) […] tiende a haber consenso en cuanto a la pertinencia de distinguir cinco significados a saber: parte-todo; cociente, razón, operador y medida. También hay cierto nivel de consenso en cuanto a la necesidad de favorecer progresivamente la apropiación por los alumnos de estos significados específicos, en aras de lograr una comprensión cabal de la noción de número racional (p.6).

En este sentido, si bien en el capítulo 2 analizaremos la relación que existe entre número racional y fracción, podemos plantear a priori una diferenciación: todo número que puede expresarse como el cociente entre dos números enteros con el divisor distinto de cero, es un número racional; éste se puede expresar en forma fraccionaria o decimal y en este trabajo de investigación haremos foco en la forma fraccionaria.

Pero cabe preguntarnos aquí, ¿por qué nos referimos a los significados de la fracción y no del número racional?

En primer lugar, dado que nos interesa centrarnos en las concepciones que han logrado construir los futuros maestros de la escuela primaria a lo largo de su formación inicial, nos focalizamos en analizar cómo aparece el número racional en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP). Al analizar este documento curricular nacional que está actualmente en vigencia, notamos que en ese nivel se propone trabajar con fracciones y números decimales y no con los números racionales. En cuanto a las fracciones, queda explícito en el desarrollo de tal documento, la prioridad que se le da a los significados de las fracciones, con un tratamiento que pone el acento en las mismas como instrumento de resolución de diferentes situaciones, es decir, en la escuela primaria los objetos de enseñanza no son los números racionales, sino las fracciones y los números decimales. Si bien en el último año de la escuela primaria se comienza con el tratamiento del número racional como objeto de estudio, es en la escuela secundaria, donde se avanza en dicho tratamiento a partir de lo aprendido en la escuela primaria.

Otro argumento sobre la elección en cuanto al estudio de los significados de las fracciones, es que la mayor parte de la historia de la Matemática nos muestra una presencia muy fuerte de las fracciones con relación a sus contextos de uso —situaciones de medida y de reparto—, es decir asociada a la medida de una cantidad y a la necesidad de continuar una división entre dos números naturales cuando ésta no es exacta. Y sólo en los últimos años, a partir de la necesidad de una sistematización de los conjuntos numéricos, aparece en la escena, el número racional. De alguna manera, la historia nos marca una fuerte y constante presencia de las fracciones desde los comienzos, como bien lo expresa González Urbaneja: “La historia de la Matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, [...]” (2004, p.18).

Resulta oportuno señalar que, además de investigar cómo los futuros docentes conceptualizan a las fracciones, nos interesamos en los errores y obstáculos que pueden llegar a encontrarse en sus producciones, pues éstos nos proveen de información sobre las formas de interpretar los problemas que resuelven y los procedimientos que utilizan, lo cual está en íntima relación con la conceptualización alcanzada.

Por lo anterior y por nuestra experiencia con estudiantes de los distintos niveles, nos interesamos por el tema de investigación que detallamos a continuación y expresamos algunos interrogantes que lo delimitan:

El tema que abordamos en esta Tesis es “Las concepciones de los futuros docentes sobre el concepto de fracción”. Para poder enmarcar aún más la investigación pensamos específicamente en “Las concepciones de los estudiantes de 1° año y 4° año del Profesorado de Nivel Primario en relación con la noción de fracción”.

Por último, para delimitar el tema planteamos una serie de interrogantes:

¿Cuáles son los conocimientos de los estudiantes de 1° año y 4°año del Profesorado de Nivel Primario —en el cual me desempeño como docente— en relación con los significados que la noción de fracción asume cuando se la considera en el contexto de los problemas? ¿Cuáles son los conocimientos de los estudiantes acerca de las representaciones de las fracciones? ¿Qué operaciones, relaciones, propiedades utilizan al resolver problemas donde las fracciones asumen diferentes significados? ¿Cuáles son los errores frecuentes?

¿Qué diferencias encontramos entre las concepciones con las que ingresan nuestros estudiantes y las concepciones con las que egresan con relación a las fracciones?

¿Qué aprendizajes han logrado con relación a la noción de fracción los estudiantes —futuros docentes— del Profesorado de Nivel Primario a lo largo de su trayectoria en el Nivel Superior?

Luego de explicitar algunas de las preguntas que nos planteamos al comenzar con esta investigación, resulta pertinente expresar cuáles son los objetivos que nos propusimos con la misma.

1.2. Objetivos y aportes al conocimiento didáctico

1.2.1. Objetivo general

* Estudiar las concepciones de los estudiantes de 1° año y 4° año del Profesorado de Nivel Primario en relación con el concepto de fracción.

1.2.2. Objetivos específicos

* Analizar los significados del concepto de fracción que construyeron los estudiantes —futuros maestros— en su trayectoria de formación en el Nivel Superior.
* Analizar las distintas representaciones así como las operaciones y relaciones que utilizan los estudiantes, al resolver problemas donde las fracciones asumen diferentes significados.
* Identificar y categorizar los errores y/u obstáculos que se encuentran en las producciones de los estudiantes con relación al concepto de fracción.

El aporte que creemos poder realizar a partir de esta investigación —que es un inicio y puede ser el disparador de sucesivas investigaciones en el Nivel Superior en el que trabajo— es poner en evidencia la diferencia entre el contenido matemático que llevamos a las aulas de dicho nivel como objeto a ser enseñado y lo que realmente aprenden los futuros docentes en relación con los significados de las fracciones. Como así también, cuál es la diferencia entre las concepciones "de entrada" en relación con el concepto de fracción y entre las concepciones "de salida", es decir, qué recorrido matemático han realizado los estudiantes a lo largo de sus cuatro años de formación inicial y qué han aprendido. En este estudio podremos detectar también —y asociado a la idea de concepto— las representaciones, propiedades, relaciones y operaciones que utilizan los estudiantes en sus producciones, como así también los errores frecuentes que cometen y analizarlos en relación con las interpretaciones que realizan.

A partir del análisis anterior, realizaremos algunas conclusiones en relación con este grupo de estudiantes, que se constituirán en insumos para los profesores formadores de formadores. Estos insumos permitirán repensar las propuestas de enseñanza en el Nivel Superior y potenciar las mismas a corto y mediano plazo. También pensamos que estas conclusiones pueden ser tenidas en cuenta para las capacitaciones que se realizan con los docentes en ejercicio y de este modo, repensar su formación inicial y continua en torno a esta temática.

Por último, esta investigación puede ayudar a los docentes que se desempeñan en el nivel primario, a identificar sus propios conocimientos y dificultades en relación con la temática. A partir de aquí, estudiar más y mejorar los aspectos que así lo requieran para potenciar la enseñanza y el aprendizaje.

1.3. Metodología

En esta investigación educativa optamos por la modalidad cualitativa interactiva pues pretendemos realizar un estudio en profundidad mediante el empleo de distintas técnicas para obtener los datos cara a cara de los diferentes actores en sus contextos naturales. Además, seleccionamos entre las cinco modalidades[1] de investigación interactiva al estudio de casos,[2] tanto descriptivo como interpretativo.[3]

* Descriptivo: porque nos permite presentar las situaciones-problema propuestas a los estudiantes ingresantes al Profesorado de Nivel Primario y a los cursantes de cuarto año de la misma carrera, y las distintas resoluciones de los estudiantes a las cuestiones planteadas.

* Interpretativo: porque las resoluciones dadas por los estudiantes nos permitirán recoger información, procesarla, analizarla, compararla, encontrar recurrencias en los procedimientos, avances y/o dificultades e interpretar esta información a la luz de los constructos teóricos. En definitiva, poder estudiar las concepciones de los estudiantes del Profesorado de Nivel Primario en torno al concepto de fracción.

Según la temporalización, utilizamos métodos transversales, es decir se trata de una investigación sincrónica (McMillan y Schumacher, 2005), debido a que la información es recogida por única vez en un período de tiempo limitado (comienzo del curso académico 2017) y de una población definida (estudiantes de 1° y 4° año del Profesorado de Nivel Primario).

---

[1] Entre las cinco modalidades de investigación cualitativa interactiva encontramos a: etnográfica, fenomenológica, estudio de casos, teoría fundamentada y estudios críticos (McMillan y Schumacher, 2005).

[2] "El caso puede ser un programa, un acontecimiento, una actividad o un conjunto de individuos definidos en tiempo y lugar" (McMillan y Schumacher, 2005, p.45).

[3] Esta clasificación se toma de Cifuentes Gil (2011).

En este sentido, desarrollamos brevemente, algunas ideas en relación con la modalidad de estudio de casos y sobre todo algunas limitaciones que encuentran ciertos autores —cercanos al método experimental o al paradigma positivista— en la misma y que han dado lugar a numerosas críticas.

En primer lugar, estos autores cercanos al paradigma positivista, plantean que al investigar algunos casos, el informe de tal investigación no permite la generalización, pues sólo representa una ínfima parte de la totalidad y no podemos saber si esas conclusiones son generalizables. Pero esta limitación se explica desde las investigaciones cualitativas, planteando que el investigador cualitativo lo que espera es desarrollar hipótesis con relación al contexto como así también encontrar diferencias y similitudes en su campo de investigación.

En el mismo sentido que lo hacen las investigaciones cualitativas, Munarriz (1992) justifica la utilización del estudio de casos y expresa a favor del mismo y su uso, algunas ideas para tener en cuenta:

> Por ello hablaremos de "validez ecológica," término utilizado por Elliott, para definir la generalización en los estudios cualitativos o "generalización naturalista" en palabras de Stake (1984), como la generalización producida a medida que el lector del estudio de casos lo aplica a su propio caso, bastante diferente a la validez externa de los estudios positivistas basada en el estudio de muestra y relacionada con estudio de casos singulares […] Como señala Elliot (1990) "en la investigación mediante el estudio de casos sobre problemas prácticos, la responsabilidad de la validación externa del estudio radica en el usuario no en el investigador (p.106).

Otro problema que plantea Munarriz (1992) en el estudio de casos, es el relacionado con la objetividad, "o el intento de dar respuesta a ¿cómo sabemos que los resultados de un trabajo de investigación representan un hecho real? que implica una respuesta relacionada con la validez interna. El hecho de que el investigador se vea con la posibilidad de hallarse influenciado por el grupo en el cual centre la investigación puede llevar a ciertas dudas relacionadas con la confiabilidad de los datos" (p.107).

Para resolver este problema, la autora propone para la investigación cualitativa, algunas técnicas como forma de comprobación de la representatividad de los datos, tales como la triangulación de métodos y la triangulación de personas. Las técnicas referidas nos permitirán comprobar la objetividad y confiabilidad de los datos obtenidos en la investigación cualitativa, aspecto considerado de suma importancia en una investigación. A continuación detallamos en qué consiste cada una de esas técnicas:

* Triangulación de métodos: recoger datos mediante entrevistas, grabaciones y cuestionarios relacionados con los resultados que se van obteniendo en la investigación, nos permite contrastar nuestras intuiciones obtenidas de los análisis realizados a partir de las notas de campo y las obtenidas en los diferentes análisis sobre otro tipo de datos.
* Triangulación de personas: los datos obtenidos de las producciones de los estudiantes, entrevistas y demás técnicas utilizadas, son analizados por distintas personas —otros docentes que trabajan junto con el investigador en distintos ámbitos educativos, expertos en el tema de investigación— las cuales nos irán cuestionando nuestra mirada y/o análisis sesgado o algunos indicios de subjetividad en el estudio de los datos obtenidos.

1.3.1. Recorte empírico

Al trabajo de campo lo realizamos con un grupo de estudiantes de 1° año del Profesorado de Nivel Primario como así también con un grupo de estudiantes de 4°año, con el objetivo de indagar las concepciones de los mismos en dos momentos de la formación, o también como lo definimos en un principio, las concepciones de "entrada" y las de "salida".

La clase de muestra es no probabilística de tipo accidental pues la investigación es exploratoria y pretende documentar las concepciones de los estudiantes de un profesorado particular sin pretender generalizar ningún resultado sino comprender lo singular del contexto estudiado. La cantidad de estudiantes con los que trabajamos es, 21 de 1° año que están cursando la materia "Resolución de problemas y creatividad" y por otro lado, 11 cursantes de 4to año que han aprobado las materias Resolución de problemas y creatividad —de 1° año—, Matemática y su didáctica I y II, correspondientes a 2° y 3° año de la carrera respectivamente, en las cuales se desarrolla el contenido[4] que es objeto de esta investigación. Algunos de los estudiantes de 4° año están realizando —al momento de la investigación— sus Prácticas de Residencia y por lo tanto planificando la propuesta de Matemática con el asesoramiento de su profesor de Ateneo.[5]

[4] En el Anexo, se pueden leer los contenidos de cada una de las materias y talleres que cursaron y aprobaron los estudiantes de la muestra, que forman parte del Plan de estudio 528/2009 vigente en la Provincia de Santa Fe.

[5] En la provincia de Santa Fe, el Profesorado de Nivel Primario cuenta con un espacio llamado "Ateneo" en el 4° año de formación. En el Profesorado que se realiza la investigación, los estudiantes planifican con los Profesores de este espacio, la propuesta para llevar a la Práctica de Residencia, es decir, piensan,

También tuvimos en cuenta para la selección de la muestra, que la misma contenga la mayor diversidad en cuanto a la procedencia de los estudiantes. Por ejemplo: estudiantes provenientes de distintas escuelas secundarias y primarias de la zona, como así también estudiantes que hayan cursado previamente otras carreras de Nivel Superior. Es decir, en la muestra seleccionada intentamos tener la mayor diversidad posible en cuanto a trayectorias escolares previas, para lo cual fue necesario realizar con anterioridad una encuesta.

Consideramos pertinente aclarar en esta contextualización de la investigación, que el docente que está a cargo del dictado de estas cátedras es el mismo desde 1° año hasta 4° año. Además, por tratarse de una Institución pequeña cada cátedra cuenta con una sola división, con aproximadamente 30 estudiantes, con excepción de 1° año que tiene 2 divisiones de 28 estudiantes aproximadamente. Finalmente, cabe señalar que el criterio fundamental de selección de la Institución y posteriormente de la muestra ha sido la facilidad de acceso a la misma pues trabajo semanalmente en ella y concurro a dictar clases dos veces a la semana.

1.3.2. Descripción del instrumento de recolección de datos

Para la recolección de datos se utiliza un guion tentativo con una serie de situaciones-problemas extraídos de diferente bibliografía disponible, que involucran los diversos significados de las fracciones desarrollados en el marco teórico de esta investigación. Además, estos problemas son estudiados y analizados en profundidad —previa implementación— con el fin de que puedan cumplir con el objetivo de la investigación. En este estudio previo de los problemas, pensamos en la posibilidad de implementar una prueba piloto con un grupo de estudiantes perteneciente a otro Instituto de Formación Docente, lo cual nos permitió realizar algunas modificaciones antes del trabajo de campo. En el capítulo 4, se comentan dichas modificaciones y los motivos de las mismas.

El guion incluye un primer problema en el cual se pone en juego el significado de la fracción como reparto, una segunda situación en la cual la fracción se entiende como medida de una longitud y también como medida de área y el último problema se refiere al significado de la fracción como operador multiplicativo, en el cual funciona la fracción como constante de proporcionalidad.

---

analizan y discuten la secuencia didáctica correspondiente a los temas asignados por el docente de la Institución que recibe al residente.

Se realiza un análisis de las producciones de los estudiantes como respuesta al trabajo con este guion tentativo de problemas como así también se relevan los errores recurrentes y/u obstáculos que aparecen en esas producciones.

1.4. Estructura de la Tesis

La tesis está compuesta por cinco capítulos cuyas características centrales desarrollamos a continuación:

En el primer capítulo, "Sobre el problema de la investigación y el marco teórico" planteamos el problema considerado y los objetivos de la investigación, fundamentando la elección. También establecemos la metodología a utilizar y el marco teórico que desarrolla los conceptos más relevantes de la Didáctica de la Matemática que utilizaremos en el desarrollo de este trabajo, fundamentalmente en el análisis de las producciones.

En el segundo capítulo, "Las fracciones como objeto de saber y objeto de enseñanza", abordamos el estudio matemático de las fracciones. También se realiza una síntesis de la evolución de las fracciones en la historia de la Matemática y en su enseñanza, especialmente en la educación primaria y superior.

En el tercer capítulo, "Antecedentes de estudios didácticos sobre el tema de investigación", en primer lugar exponemos investigaciones sobre las concepciones de los estudiantes de escuela primaria sobre la noción de fracción en diversas situaciones y en segundo lugar presentamos las investigaciones sobre las concepciones de los docentes sobre la noción de fracción, también en diversas situaciones.

El cuarto capítulo: "Concepciones de los futuros docentes sobre la noción de fracción y sus significados" consta de dos partes, en la primera presentamos el instrumento de indagación, junto a un análisis didáctico realizado a priori, como así también categorías de análisis. En la segunda, presentamos los resultados del trabajo exploratorio y analizamos los procedimientos realizados, los errores cometidos y en general los significados de la fracción que se evidencian en las producciones de los estudiantes.

En el quinto capítulo, "Conclusiones finales" a modo de cierre de la investigación, recuperamos las conclusiones del estudio e intentamos responder a los interrogantes y objetivos planteados en el mismo.

1.5. Marco teórico

Dado que nuestro trabajo de investigación se interesa por explorar cuáles son las concepciones de los futuros docentes con relación al concepto de fracción, nos resulta fundamental estudiar la noción de concepción en Didáctica de la Matemática como así también otros conceptos teóricos asociados, como el de significado y el de concepto. De igual modo estudiaremos el concepto de obstáculo y error los cuales también son parte importante en este trabajo.

1.5.1. Teoría de las Situaciones Didácticas

Entre los actuales enfoques de la Didáctica de la Matemática, se ha elegido como marco teórico para el análisis didáctico de esta investigación educativa a la Escuela Francesa y en primer lugar comenzamos con la Teoría de las Situaciones Didácticas, en adelante TSD. Esta teoría nace en los años 70 en Francia de la mano de Guy Brousseau[6] con el objetivo de construir un modelo de las situaciones que permita tanto ser utilizado para pensar en propuestas de enseñanza como para cuestionar las nociones matemáticas escolares a fin de analizarlas y eventualmente construir otras más adecuadas (Sierra & Gascón, 2011). Esta teoría se formula en su primera fase a principios de los setenta, desarrollada en una segunda fase hasta la publicación de la tesis de Brousseau y seguida por los aportes que recuperaremos más adelante como Douady (1983), Balacheff (2000) y Chevallard (1990).

La misma trabaja con conceptos como transposición didáctica, fenómenos didácticos, situaciones (fundamental, didáctica y a-didáctica), contrato didáctico, variable didáctica, salto informacional, obstáculos y errores, entre otros. En este apartado además de desarrollar algunos conceptos de la TSD, también se trabaja con otros conceptos ligados a los mismos, como ser los tipos de validación y la dialéctica herramienta/objeto.

En palabras del mismo Brousseau (1999) citado por Saiz y Acuña (s/f), expresa que:

> [...] la teoría de situaciones estudia: la búsqueda y la invención de situaciones características de los diversos conocimientos matemáticos enseñados en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación

[6] Nació en 1933 en Taza, Marruecos. Comenzó su carrera profesional como maestro de escuela primaria y posteriormente se formó como matemático y obtuvo el título de Doctor en Ciencias de la Universidad de Burdeos. Luego de una amplia trayectoria fue nombrado Profesor Emérito del Instituto Universitario de Formación de Maestros. En reconocimiento a su contribución científica recibió el título de Doctor Honoris Causa de las universidades de Montreal (1997), Ginebra (2004) y Córdoba (2006). En 2003 recibió la primera medalla Félix Klein otorgada por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática.

> de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, constituyen la materia de la didáctica de las matemáticas y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio. Para los profesores como para los alumnos, la presentación de los resultados de estos trabajos renueva su conocimiento así como la idea que tienen de las matemáticas, y esto incluso si es necesario desarrollar todo un vocabulario nuevo para vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas, con la expresión de dichas nociones en la cultura matemática clásica (Portal Educar, Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación, párr.10).

En nuestro trabajo, tomaremos algunos conceptos de esta teoría que nos permiten pensar y analizar las concepciones y los obstáculos que manifiestan los estudiantes —del Profesorado de Nivel Primario— sobre el concepto de fracción. Para ello, realizaremos un análisis de la noción de situación, situación de validación, de obstáculo y de variable didáctica. Este análisis nos permitirá clarificar estos conceptos teóricos para luego utilizarlos en el análisis de las producciones de los estudiantes, producto del trabajo de campo.

La noción de Situación

En relación con el concepto de situación, podemos decir que nuestro interés está dado pues utilizaremos una serie de problemas al momento del trabajo de campo, cuyas condiciones (características) propician que aparezca, se utilice y se construya el conocimiento que —según Brousseau— la situación caracteriza.

Por un lado, recuperamos la conceptualización que realiza Brousseau (2007) sobre la noción: "Una "situación" es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. El recurso de que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable es una gama de decisiones que dependen del uso de un conocimiento preciso" (p.17). Y en este mismo sentido, un aporte de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) al estudio de los procesos de aprendizaje de la Matemática en el contexto escolar es la inclusión, en el clásico triángulo didáctico "maestro, alumno, saber", de un cuarto elemento: el medio. En palabras de Brousseau, citado por Saiz y Acuña (s/f), expresa que:

> El medio (*milieu*) se define como el objeto de la interacción de los alumnos: es la tarea específica que deben llevar a cabo, y las condiciones en que deben realizarla, es decir, el ejercicio, el problema, el juego, incluyendo los materiales, lápiz y papel u otros. En una acepción un poco más amplia, el medio al que el alumno se enfrenta incluye también las acciones del maestro, la

> consigna que da, las restricciones que pone, las informaciones y las ayudas que proporciona, y podríamos agregar, las expectativas que tiene sobre la acción de los alumnos y que mediante mecanismos diversos, transmite. Es decir, es el subsistema sobre el cual actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.) (Portal Educar, Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación, párr.13).

También Sierra & Gascón (2011) expresan la relevancia del concepto de situación y lo diferencian de otras propuestas metodológicas:

> El principio metodológico fundamental de la TSD es que el conocimiento matemático está representado por una situación que involucra problemas que pueden resolverse de manera óptima usando este conocimiento. El objeto fundamental de estudio de la TSD no es el sujeto que aprende, sino la situación en que el sujeto interactúa con otro y con la matemática (Artigue, 2004). Desde la perspectiva de la teoría de las situaciones, los alumnos se convierten en los reveladores de las características de las situaciones a las que reaccionan (es importante señalar esta inversión de posición con respecto a las aproximaciones de la psicología, donde las situaciones suelen estudiarse como dispositivo para revelar los conocimientos del alumno) (Brousseau, 2007, p.24). Esta es la diferencia clave con respecto a los demás enfoques teóricos, de carácter psicológico o cognitivo. En la TSD, se parte de la hipótesis de que para cada conocimiento matemático existe al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás (Brousseau, 2000) (p.142).

Las situaciones de validación y su relación con los distintos tipos de prueba

Otro concepto de la Teoría de las Situaciones Didácticas —que nos permite explorar y analizar las producciones de los estudiantes— es el de situación de validación. Esta situación se caracteriza por ser un momento de la clase en el que los estudiantes deben elaborar pruebas para convencer a sus pares de que lo que dicen es así y no de otra manera. “Cada uno puede tomar posición con respecto a un enunciado y, si hay desacuerdo, pedir una demostración o exigir que el otro aplique sus declaraciones en la acción con el medio” (Brousseau, 2007, p.27).

Para ampliar la mirada en torno a la validación, recuperamos el trabajo de Balacheff (2000) en el cual profundiza sobre los tipos de validación, pues en la investigación que llevamos a cabo, como bien lo expresa Chemello y Crippa (2011) “[...] los estudiantes son enfrentados a un trabajo con problemas y deben “hacerse cargo” de la resolución, tendrán que controlar su producción para asegurarse de que su respuesta a la pregunta planteada y el procedimiento utilizado para obtenerla son válidos, es decir, deben responsabilizarse matemáticamente de sus producciones. Esto implica que los alumnos deben involucrarse en la elaboración de pruebas" (p.63).

Por lo anterior, y con relación a los tipos de pruebas que los estudiantes pueden utilizar a la hora de validar sus producciones matemáticas, Balacheff (2000) define dos tipos:

> Denominaremos pruebas pragmáticas a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión y llamaremos pruebas intelectuales a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en la formulación de propiedades en juego y de sus relaciones.
> La transición de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales, especialmente la demostración, se apoya también en tres polos que interactúan fuertemente:
> * el polo de los conocimientos,
> * el polo de lo lingüístico o de la formulación,
> * el polo de la validación o de los tipos de racionalidad que sustentan las pruebas producidas (pp.22-24).

Lo expuesto anteriormente, se resume en el siguiente cuadro:[7]

Naturaleza del conocimiento	Formulación	Validación
Práctica (saber hacer, teorema en acto)	De la familiaridad	Pruebas pragmáticas
Teórica (saber científico reconocido)	Funcional	Pruebas intelectuales

Otras nociones que nos permiten analizar las consignas del trabajo de campo: la noción de variable didáctica, los tipos de contexto y la dialéctica instrumento/objeto

En este apartado, nos interesa en primer lugar profundizar en la noción de variable didáctica pues al analizar las consignas del guion tentativo que se presentó a los estudiantes, observamos que éstas se elaboraron en primera instancia por los autores de las mismas y se modificaron —luego de la prueba piloto— por nosotras, con el fin de que las consignas tengan en cuenta el tratamiento que se quería dar al contenido y los

[7] Extraído de Chemello y Cripa (2011). Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? En A. Díaz (coord.) Enseñar Matemáticas en la Escuela Media. (pp.55-77). Editorial Biblos, Buenos Aires: Argentina.

procedimientos de resolución que podían desplegar los estudiantes. Estas condiciones en las consignas que permiten un tratamiento del contenido y no otro, son denominadas variables didácticas.

Este concepto fue utilizado por primera vez en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y podríamos sintetizarlo diciendo que:

> [...] las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de estas condiciones pueden variar a voluntad del docente y constituyen una variable didáctica cuando, según los valores que toman, modifican las estrategias de resolución y, en consecuencia, el conocimiento necesario para resolver la situación (Bartolomé y Fregona, 2003, p.156).

Por ejemplo, para el caso del segundo problema de nuestro guion, la variable didáctica es la magnitud con la que trabajamos, pues no es lo mismo reconstruir el entero tomando como dato una longitud o un área. Otra variable didáctica lo constituye el tipo de fracción que se presenta como dato, y en los ítems de este problema nos encontramos con una fracción menor que uno y otra mayor que uno. A partir de estos datos iniciales, los estudiantes despliegan distintos procedimientos de resolución y podríamos también aproximarnos a plantear que los errores que cometen dependen de estas variables que se seleccionaron para cada problema.

En el capítulo 4, analizaremos los distintos procedimientos que desplegaron los estudiantes y cómo la variable didáctica seleccionada posibilitó o no, algunas formulaciones y argumentos como así también generó algunos errores.

En segundo lugar, resulta necesario recuperar algunas cuestiones referidas al tipo de contexto en el que se presentaron los problemas del guion que se utilizó en el trabajo de campo. En este sentido, dos de los problemas —el de reparto y el de proporcionalidad— se relacionan con contextos extramatemáticos o también llamados no matemáticos, es decir, contextos relacionados con la vida cotidiana, con otras disciplinas o ligados a la información que aparece en los medios de comunicación. En estos casos puntuales podemos decir que el problema de reparto se vincula con una situación cotidiana de los niños y el problema de proporcionalidad trabaja con mezclas de pintura que podría darse en un oficio, por ejemplo.

A propósito de contextos extramatemáticos, retomamos consideraciones de Sadovsky (2005) que aportan al análisis a posteriori que realizamos de las producciones de los estudiantes.

> […] la contextualización en una situación que los alumnos pueden comprender independientemente del conocimiento del modelo matemático que puede describirla, y acerca de la cual pueden establecer algunas relaciones, contribuye a la construcción de ese modelo. […] ciertos contextos aportan una "intuición" que ayuda a avanzar sobre algunas ideas, dejando en la sombra asuntos de los que en realidad en algún momento habría que ocuparse (pp.101-102).

El problema que se presenta en el contexto de la medida, es un problema matemático o también llamado intramatemático. En este mismo sentido, Sadovsky (2005) nos expresa "[…] el contexto interno a la matemática muestra relaciones que lo contextualizado en lo cotidiano no puede mostrar. En otros términos, no estamos diciendo: "en este caso el contexto externo no aporta"; sino que estamos diciendo: "en este caso el contexto externo oculta aquello que queremos que sea tratado" (p.110). También recuperamos una idea de la misma autora, sobre la necesidad de continuar trabajando la noción de número racional, desde otros lugares y contextos para lograr una conceptualización más completa, lo cual es complejo. "[…] para dar lugar a otras ideas que también hacen a su sentido, es necesario abandonar el contexto de medición. Como vemos, el aporte de los contextos de referencia a la construcción del sentido es complejo […]" (p.104).
Por último, queríamos señalar que para cada concepto matemático es posible distinguir su carácter "instrumento" y su carácter "objeto". Este aspecto, nos permite caracterizar las formas en que aparecen las nociones al pensar en la gestión de la clase y las consignas que se plantean.

> Por instrumento, entendemos el funcionamiento del concepto, por necesidad, en los diversos problemas que permite resolver. Un concepto toma su sentido por su carácter útil o instrumento. […] un concepto es instrumento cuando es utilizado con la idea de resolver un problema, siempre se presenta contextualizado. Un mismo instrumento puede ser adaptado a varios problemas, varios instrumentos pueden ser adaptados a un mismo problema. Un instrumento puede ser: implícito o explícito. Por objeto, entendemos el concepto matemático, considerado como objeto cultural que tiene su lugar en un edificio más amplio que es el saber de las matemáticas, en un momento dado, socialmente reconocido (Douady, 1983, p.3).

La noción de obstáculo: un recorrido desde Bachelard a Brousseau

La noción de obstáculo fue introducido por el filósofo Bachelard[8] en el contexto de las ciencias experimentales. Recuperamos de su libro "La formación del espíritu científico" definiciones y caracterizaciones del término:

> Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos […] es en el acto mismo de conocer íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos (Bachelard, 2000, p.16).

Cabe señalar que, Bachelard estudió estos obstáculos específicamente en la Física y los encontró en: las experiencias primeras, el conocimiento general, la utilización abusiva de imágenes familiares, lo verbal, el conocimiento unitario y pragmático, el pensamiento cuantitativo, como también habló de obstáculo sustancialista, animista y realista.

También advirtió que estos obstáculos epistemológicos podían reconocerse tanto en la historia de la ciencia como en la educación. Cuestión no menor para aquellos educadores que nos interesa el mejoramiento de la enseñanza y de los aprendizajes de nuestros estudiantes.

A pesar de que Bachelard explicitó que estos obstáculos no se producían en Matemática y que la utilización de este concepto en el campo de la Didáctica de la Matemática presenta aún diversas discusiones, consideramos interesante en este momento de nuestra propuesta, desarrollar aspectos que demuestren el aporte que significa este concepto en la Didáctica de la Matemática y su importancia en nuestra investigación.

El concepto de obstáculo fue retomado[9] por Guy Brousseau a partir de 1975 para la Didáctica de la Matemática. El mismo Brousseau expresa que, el profundizar sobre las

---

[8] Podríamos ubicar históricamente a Bachelard entre los años 1884-1962, perteneciente a la línea de tradición francesa que tiene su despliegue a partir del siglo XX. Su mayor producción se da entre 1926 y 1953 según señalan algunos autores. Es caracterizado como un epistemólogo francés interesado por los problemas de cada disciplina acerca de la naturaleza de la ciencia como así también por la verdadera actitud del pensamiento científico en la formación de los conceptos y por una razón mudable caracterizada por su dialéctica y pluralismo. (Trabajo final del Seminario de epistemología de la Ciencias Sociales, Maestría en Didáctica Específica, 2014, p.2).

[9] Brousseau (2007) se refiere explícitamente al concepto de obstáculo de Bachelard y aclara que fue este autor, el primero en plantear esta noción y pensar el problema del avance del conocimiento científico en términos de obstáculos y rupturas.

situaciones y modelizarlas, lo llevó a pensar lo contrario a Bachelard y a proponer una definición apropiada. Según Artigue (1990), el primer texto de Didáctica de la Matemática en el cual apareció la noción de obstáculo epistemológico es aquel presentado en 1976 por G. Brousseau en la conferencia de la CIEAEM en Louvain la Neuve.

En este texto, Brousseau (1976) (citado en Artigue, 1990) nos permite comenzar a mirar los errores de los estudiantes desde otra perspectiva, pues plantea que:

> El error y fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar. El error no es simplemente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como lo creemos de acuerdo a las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos son establecidos como obstáculos. Adicionalmente dentro del funcionamiento del maestro y del estudiante, el error se constituye como el sentido del conocimiento adquirido (p.7).

Además, al profundizar a través de los años sobre el concepto, Brousseau (1983), citado por Saiz y Acuña (s/f), da las siguientes características de los obstáculos:

> * un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;
> * el alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia;
> * cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente;
> * el alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber; particularmente bajo la forma de contraejemplos. En este sentido es constitutivo del saber.
> * después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándose, de forma esporádica (Portal Educar, Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación, párr. 33).

Además, considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

* De origen ontogénico o psicogénico, debido a las características del desarrollo del niño, es decir, están ligados a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los alumnos en su proceso de aprendizaje.

* De origen didáctico, resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.
* De origen epistemológico, intrínsecamente relacionados con el propio concepto. Se los puede encontrar en la propia historia de los conceptos pero esto no significa que se deba reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se las ha vencido.
Para Brousseau, los obstáculos se manifiestan en el aula en forma de errores que no son consecuencia del azar y que persisten en el tiempo si no se los trabaja adecuadamente y que se ha comprobado que muchos obstáculos son "difíciles de remover" y esto ha dado lugar a controversias, como es el caso del obstáculo lineal.
Otra cuestión a señalar es que, los errores en un mismo sujeto están ligados entre sí y tienen una fuente común, una manera de conocer y han tenido éxito en una serie de acciones a lo largo de su escolaridad. También es importante destacar en este momento, la íntima relación que existe entre el concepto de obstáculo y de concepciones —término que será desarrollado en el próximo apartado— pues ambos forman parte de la definición del problema de investigación. En este sentido, Brousseau (1983) nos plantea que algunas de las concepciones adquiridas sobre una noción matemática u objeto matemático a lo largo de nuestra experiencia no desaparecen inmediatamente en función de darle lugar a una concepción mejor, sino que se resisten, provocan errores y se constituyen así en verdaderos obstáculos.

1.5.2. Teoría de los Campos Conceptuales

Antes de caracterizar la teoría y algunos conceptos que la misma nos ofrece para un futuro análisis, estimamos pertinente recuperar en palabras de Vergnaud la importancia que tiene para los futuros y actuales docentes, la investigación en Didáctica de la Matemática, como así también el camino arduo que significa la apropiación de los conocimientos, dos cuestiones que se relacionan con nuestro trabajo:

> [...] los que están más directamente interesados son los maestros. Son ellos los que en última instancia toman decisiones al interior de sus clases. El problema consiste en aclarar esta toma de posición dándoles los medios para comprender los procesos cognitivos y poder interpretar correctamente las conductas, los errores, las preguntas de los alumnos. Reconocer la lentitud de los procesos de apropiación de conocimientos, admitir que el "tiempo didáctico" se mide en años y no en semanas, es un paso importante. Conocer la complejidad de los caminos que el niño debe recorrer, (jerarquía de los problemas, de los procedimientos, de las representaciones simbólicas)

constituye una ayuda directa para las decisiones que hay que tomar (Vergnaud y Riccó, 1985, p.70).

La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud se caracteriza por ser una teoría cognitivista,[10] "[…] Su principal finalidad es la de proporcionar un marco que permita comprender las filiaciones y las rupturas entre conocimientos, en los niños y los adolescentes, entendiendo por "conocimientos" tanto los saber-hacer como los saberes expresados" (Vergnaud, 1990, p.1).

Nos resulta necesario y pertinente, desarrollar en parte, la teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud[11] pues la misma nos aporta conceptos importantes para tener en cuenta en nuestra investigación y utilizarlos al momento del análisis de producciones. El desarrollo del término concepto y su íntima relación con la noción de concepción resultan fundamentales en nuestro análisis como así también el desarrollo que propone el autor sobre el concepto de significado. Además, incluimos en este apartado, el concepto de error —a pesar de no formar parte de la teoría de los campos conceptuales— por estar íntimamente relacionado a la noción de concepto y de concepción.

Sobre las nociones de concepto y significado

Para Vergnaud (1990), un concepto es mucho más que la definición del mismo, lo cual ya nos marca una diferencia abismal con nuestras ideas y prácticas. Ideas y prácticas que se apoyan fundamentalmente en la utilización de preguntas en las clases de Matemática, que exigen, casi de forma exclusiva, definiciones precisas para evaluar la apropiación de los conceptos que enseñamos.

En cambio, el autor nos va a plantear que:

---

[10] Lo cognitivo es aquello que pertenece o que está relacionado al conocimiento. Éste, a su vez, es el cúmulo de información que se dispone gracias a un proceso de aprendizaje o a la experiencia. La corriente de la psicología encargada de la cognición es la psicología cognitiva, que analiza los procedimientos de la mente que tienen que ver con el conocimiento.

[11]Es uno de los psicólogos cognitivos y del desarrollo, más renombrados del mundo, tanto por sus contribuciones a la Psicología Cognitiva como a la Didáctica de las Ciencias y de la Matemática y a la Didáctica Profesional. [….] Como Director de Investigación en el Centre Nationale de la Recherche Scientifique (CNRS) – actualmente emérito – entre 1987 y 1995 dirigió el grupo de investigación: "Didáctica y adquisición de conocimiento científico", siendo conjuntamente con Guy Brousseau uno de los Fundadores de la Didáctica de las Matemáticas en Francia. Recuperado el 10 de septiembre de 2020 de: https://www.unicen.edu.ar/content/charla-de-vergnaud-reconocido-experto-en-ense%C3%B1anza-de-las-ciencias-y-la-matem%C3%A1tica

> Un concepto es una tripleta de tres conjuntos:
> C: (S, I, G)
> S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia).
> I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado).
> G: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).
> Estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto, en el curso del aprendizaje o durante su utilización, es necesariamente considerar estos tres planos a la vez (Vergnaud, 1990, p.7).

Por el objetivo de nuestra investigación, nos resulta necesario considerar estos tres planos de un concepto y describirlos a continuación.

En primer lugar, cuando se refiere al conjunto de situaciones que dan sentido al concepto no podemos dejar de citar al concepto de campo conceptual. Vergnaud expresa que "[...] un campo conceptual es un conjunto de situaciones. Por ejemplo, […] para el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones" (1990, p.8).

Continuando con la idea de situación y parafraseando a Vergnaud, una situación se asocia a la idea de combinación de tareas, de las cuales es importante conocer la naturaleza y la dificultad propia. También, dos características son necesarias considerar cuando pensamos en este plano de las situaciones: "la de variedad: existe una gran variedad de situaciones en un campo conceptual dado, y las variables de situación son un medio de generar de manera sistemática el conjunto de las clases posibles; la de la historia: los conocimientos de los alumnos son modelados por las situaciones que han encontrado y dominado progresivamente, especialmente por las primeras situaciones susceptibles de dar sentido a los conceptos y a los procedimientos que se les quiere enseñar" (Vergnaud, 1990, p.10).

Cabe aclarar que, entre las situaciones que dan sentido al concepto de fracción, se eligen en este estudio tres tipos de situaciones donde las fracciones asumen diferentes significados, lo cual abordaremos con una descripción completa en el apartado siguiente.

En segundo lugar, cuando se refiere al conjunto de invariantes que forman parte de un concepto debemos nombrar y desarrollar mínimamente tres tipos lógicos de invariantes:

> -*invariantes del tipo "proposiciones"*: son susceptibles de ser verdaderos o falsos; las teorías-en-acto son invariantes de este tipo.
> -*invariantes del tipo "función proposicional"*: no son susceptibles de ser verdaderos o falsos, pero constituyen las piezas indispensables para la construcción de proposiciones. Estos conceptos son raramente explicitados por los alumnos incluso aunque son construidos por ellos mismos en la acción: son los conceptos-en-acto, o las categorías-en-acto. Entre las funciones proposicionales, es necesario considerar que existen funciones con un argumento (las propiedades), funciones con dos argumentos (las relaciones binarias), funciones con tres argumentos (las relaciones ternarias, entre las cuales se encuentran las leyes de composición binarias), funciones con cuatro argumentos, como la proporcionalidad, funciones con más de cuatro argumentos.
> -invariantes del tipo "argumentos": [...] los argumentos pueden ser objetos materiales (el barco está a la derecha del faro), personajes (Pablo es más alto que Céline), números (4+3=7), relaciones ("más grande que" es una relación antisimétrica), e incluso proposiciones ("8 es un divisor de 24" es la recíproca de "24 es un múltiplo de 8") (Vergnaud, 1990, pp.5-6).

En este estudio, se analizarán cuáles son los invariantes (conceptos en acto, propiedades, relaciones, argumentos) que se utilizan en los procedimientos de resolución para cada problema.

Por último, un tercer aspecto a considerar cuando queremos analizar un concepto es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente al mismo y sus propiedades. En este sentido, Vergnaud le asigna algunas funciones primordiales al lenguaje en el proceso de conceptualización. En primer lugar, una función de comunicación, pero esta función de comunicación no se puede ejercer de manera útil sino se apoya sobre otra función del lenguaje que es, su función de representación. También el autor va a plantear que el lenguaje ayuda al pensamiento y a la organización de la acción. Esta función se apoya ella misma sobre la función de representación, pero lo que se representa entonces son a la vez los elementos de la situación considerada, la acción, y sus relaciones. El lenguaje y los símbolos matemáticos juegan por tanto un papel en la conceptualización y en la acción. En este mismo sentido, recuperamos una cita de Vergnaud, para focalizar la función de los significantes en general:

> -ayuda a la designación y por tanto a la identificación de los invariantes: objetos, propiedades, relaciones, teoremas;
> -ayuda en el razonamiento y la inferencia;
> -ayuda a la anticipación de los efectos y de los fines, a la planificación, y al control de la acción.

> [...] el simbolismo matemático no es rigurosamente hablando ni una condición necesaria ni una condición suficiente para la conceptualización; pero contribuye útilmente a esta conceptualización, especialmente para la transformación de las categorías de pensamiento matemático en objetos matemáticos (1990, p.20).

Con relación a este tercer aspecto, consideramos que es necesario profundizar y enfocar aún más nuestra mirada en el aspecto semiótico, pues nos aporta otras líneas de análisis para las producciones de los estudiantes. Para esta profundización decidimos recuperar el aporte que realiza Duval (2016), el cual inicia su desarrollo teórico con algunos interrogantes que nos resultan pertinentes, tales como: ¿Cómo podemos entender las dificultades, frecuentemente insuperables, que muchos estudiantes tienen con la comprensión de las matemáticas? ¿Cuál es la naturaleza de estas dificultades? ¿Dónde están localizadas? Si bien el autor aclara que estas preguntas pueden responderse desde distintos enfoques —como por ejemplo el epistemológico y el educativo—, también advierte que ambos enfoques utilizan la noción de representación para analizarlas, noción sobre la cual él va a profundizar en sus estudios y conferirle un rol fundamental en la construcción de conocimientos. ¿Por qué le otorga este rol primordial? Pues, porque las representaciones constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos; lo cual plantea el problema cognitivo del paso de la representación de un objeto a otra representación de ese mismo objeto.

En este capítulo, nos interesamos sólo por un tipo de transformación de representación, las llamadas conversiones, reconociendo que Duval (2016) también estudió los tratamientos. Pero, ¿qué características tienen las conversiones? "[...] son transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; [...] es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado" (p.74).

A su vez, Duval (2016) se pregunta también sobre la complejidad que implica enfrentarse a dos representaciones de un mismo objeto desde dos registros distintos, ¿cómo puede uno reconocer al mismo objeto representado dentro de su respectivo contenido? "Esta paradoja cognitiva permite plantear la siguiente hipótesis [...] la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica. Y desde ya se puede plantear una primera pregunta: ¿esa coordinación de registros llega naturalmente a los estudiantes en el contexto de la enseñanza matemática?" (pp.76-77).

Este último aspecto, fue considerado al analizar las producciones de los estudiantes de 1° año y de 4° año, de tal manera de focalizar dicho análisis en por ejemplo, si la producción del estudiante se realiza en la misma representación que la dada en la consigna, sin cambio de registro; si la producción realiza un cambio de registro —solicitado en el enunciado—, y el estudiante opera en ese registro sin errores o si la producción presenta un cambio de registro por cuenta de quien resuelve, sin un pedido explícito en la consigna, lo cual nos estaría dando otros indicios para el análisis posterior.

Para concluir, recuperamos una cita del Duval (2016) que sintetiza el eje de todo su estudio: la importancia del cambio de registro en pos de una comprensión de los conceptos con los que trabajamos en matemática.

> Cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Ello depende de la coordinación de varios registros de representación y es solo en las Matemáticas donde se requiere fuertemente la coordinación de registros. ¿Realmente se tiene en cuenta este requerimiento básico? Muy a menudo, las investigaciones se enfocan en cuáles son las representaciones correctas o cuál sería el registro más accesible para lograr que los estudiantes comprendan verdaderamente y usen algún conocimiento matemático particular. Con esa clase de preocupación, la enseñanza no va más allá de un nivel superficial. ¿Qué harán los estudiantes cuando estén enfrentados a otras representaciones bien diferentes o a situaciones diferentes? Incluso las representaciones auxiliares e individuales, las más icónicas o concretas, tienen que ser articuladas con las representaciones semióticas producidas dentro de sistemas semióticos. El verdadero reto de la educación matemática consiste en desarrollar primero la capacidad de cambiar el registro de representación (pp.91-92).

Sobre situaciones en las que las fracciones son instrumento de resolución y que contribuyen a la construcción de su sentido

Kieren 1976; Dienes, 1972 (como se citó en Llinares y Sánchez, 1997) expresan:

> Los resultados de numerosas investigaciones (BEHR, 1983; KERSLASKE, 1986; LESH, 1983) relativas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las ideas de fracción han empezado a indicar que para que el niño pueda conseguir una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción se deben plantear las secuencias de enseñanza de tal forma que proporcionen a los niños la adecuada experiencia con la mayoría de las interpretaciones (p.53).

En este sentido, consideramos fundamental investigar qué concepciones tienen los futuros docentes —de estos niños de los que hablan las investigaciones— en relación con el concepto de fracción, es decir, si ellos conocen la mayoría de los significados de la noción de fracción o de las interpretaciones en diferentes contextos, para poder enseñarlas.

Por lo anterior, será necesario precisar los significados de las fracciones que asumimos investigar en este estudio experimental —con futuros docentes de nivel primario— y para ello recuperamos el trabajo[12] de David Block en relación con esta problemática. También realizaremos una argumentación del por qué seleccionamos tres contextos en los cuales la fracción toma distintos significados puesto que en la introducción de este trabajo hablamos de cinco significados.

A continuación detallamos las características de las situaciones que seleccionamos para llevar al trabajo de campo con los estudiantes del profesorado de Nivel Primario. Luego, en el capítulo 4, realizaremos un análisis más exhaustivo de cada una de las situaciones propuestas.

La fracción en situaciones de reparto

En primer lugar, el interés por trabajar con situaciones de reparto está dado pues propicia la utilización de fracciones entendidas como parte-todo que presenta interesantes cuestiones didácticas, como bien lo expresa Block (2001):

> [...] los problemas ponen en juego varias unidades y no una sola, permiten que el resultado fraccionario sea mayor o menor que la unidad, permiten expresar el resultado con escrituras aditivas diferentes […].
>
> Por otra parte, […], es posible ir un poco más lejos y plantear como objetivo que los alumnos, además de constatar que la división *a* unidades entre *b* arroja como cociente al quebrado a/b de unidad, comprendan y anticipen la necesidad de dicho resultado. El lograr esta anticipación, si bien no significaría que en ese mismo momento los alumnos se apropien del significado de las fracciones como cociente, sí permitiría tender un puente hacia dicha concepción (p.10).

En este sentido, completaríamos, siempre que el docente proponga una discusión en torno a esta relación y al por qué puede pensarse la fracción como cociente entre dos

[12] Entendemos como el trabajo del autor a las distintas investigaciones realizadas en este campo de conocimiento, tales como: Block (1987); Block (1991), Block (2001) entre otras.

naturales, estas situaciones de reparto resultarán muy potentes para establecer ciertas relaciones que durante mucho tiempo la escuela no reconoció y/o no potenció.

Block (2001) plantea que a esta familia de problemas pertenecen los clásicos reparto de pasteles (o de chocolate, tortas, o cualquier otra colección de objetos fraccionables). En estos repartos, aquello que es objeto de partición es una colección de objetos y por lo tanto una magnitud discreta, aunque los objetos, considerados individualmente puedan ser fraccionados, y por lo tanto constituyan en sí mismos una magnitud continua (superficie, longitud, peso). Esto es lo que permite realizar el reparto repartiendo cada objeto por separado y con ello concluir que a objetos entre b es igual a a veces un objeto entre b (procedimiento "partición unidad por unidad").

Parra (2005) expresa que "estas situaciones permiten promover relaciones entre la división entre naturales y las fracciones. De hecho, las fracciones son una herramienta que fue inventada para resolver el problema de la división entre números naturales cuando el dividendo no es múltiplo del divisor y el problema involucra magnitudes continuas" (p.17).

La fracción en situaciones de medición

La actividad de medir es una de las más antiguas y constituye el origen de muchos conceptos matemáticos, entre ellos, el de los números racionales. Al medir, lo que realizamos es determinar el número de veces que está contenida la unidad de medida en el objeto a medir. Por ejemplo: si medimos una longitud, lo que hacemos es contar la cantidad de veces que "entra" una unidad de medida —que no es otra cosa que otra longitud—, en la longitud a medir. Pero, cuando la unidad de medida no cabe un número entero de veces en lo que medimos, los números naturales no nos permiten expresar con exactitud la medida y la solución es fraccionar la unidad de medida.

De lo anterior, podemos concluir que: si m y n son números naturales y m es distinto de cero, la fracción $\frac{1}{n}$ es una medida tal que n veces $\frac{1}{n}$ es igual a la unidad de medida. Una cantidad que contiene m veces la medida $\frac{1}{n}$ se designa con el número $\frac{m}{n}$.

En este mismo sentido, Chamorro y Belmonte (1991) expresa cómo es el proceso de medición de una longitud: "[…] para medir la longitud de un objeto se cuenta cuántas veces es necesario aplicar una unidad de longitud prefijada de antemano a ese objeto. El "transporte" o "aplicación" de esa unidad al objeto es claramente una operación geométrica, mientras que "contar cuántas veces…" es un cálculo aritmético" (p.126).

De esta manera, podemos notar cómo se liga la evolución conjunta de la noción de medida con la noción de número, no sólo para la medición de una longitud sino también para las demás magnitudes.

La fracción en situaciones de proporcionalidad

En las situaciones de proporcionalidad es posible y deseable trabajar la expresión "$\frac{m}{n}$ de" en tanto razón y en tanto operador multiplicativo.

En este sentido, recuperamos dos citas que otorgan fuerza y sustento teórico a la idea anterior. A la primera de ellas, la encontramos en Block y Balbuena (1991), y nos habla de la fracción como operador multiplicativo: "Hay un campo de problemas en el que interviene la multiplicación por una fracción: lo constituyen los problemas de proporcionalidad en los que la fracción juega el papel de un operador multiplicativo" (Brousseau, G.1981; Kieren, T.1976; Freudenthal, 1983) (p.1). Es decir, en estos problemas la constante de proporcionalidad es fraccionaria y transforma una cantidad de una magnitud en su correspondiente de otra magnitud mediante la multiplicación. La segunda cita se refiere a la fracción como razón: "Esto permite tratar un nuevo "costado" de la noción de equivalencia de números racionales: en el contexto de medida, dos fracciones son equivalentes porque "representan la misma cantidad"; en cambio en estas situaciones, representan la misma "relación" (por ejemplo, el mismo porcentaje o la misma velocidad)" (Sadovsky, 2005, p.35).

También queremos profundizar en otros términos relacionados con la proporcionalidad, que son recuperados en los Antecedentes y luego, en el análisis de los resultados de las producciones. En los Antecedentes, precisamente en las investigaciones realizadas por Block, encontramos los términos "razón interna" y "razón externa" que son tomados de Freudenthal (1983) y refieren, la primera, a una razón al interior de cantidades de un mismo conjunto y, la segunda, a una razón entre cantidades de dos conjuntos. También, Vergnaud (1988), al analizar la relación de "isomorfismo de medidas", nombra a las razones internas y externas respectivamente como "relaciones escalares" y "relación funcional".

En cuanto a la relación funcional Vergnaud (1988) expresa:

> Este análisis horizontal se sitúa a un nivel conceptual muy elaborado y es, por otra parte, la razón de las dificultades encontradas para hacer comprender al niño la noción de función. Si la noción de correspondencia no presenta ninguna dificultad, ni su representación en forma de tabla, el análisis

de esta correspondencia en términos de función es por su parte mucho más delicado, pues ésta implica no sólo la noción de relación numérica sino igualmente la de cociente de dimensiones (p.13).

Por último, Block y Ramírez (2004) plantean que:

> En el ámbito de la función lineal, la propiedad de la conservación de las razones internas se conoce como isomorfismo multiplicativo: f (n x) = n f (x), mientras que la propiedad de la constancia de la razón externa corresponde a la definición explícita de la función lineal: f (x) = kx. En los estudios en educación matemática sobre el objeto proporcionalidad, se hace referencia a estos dos tipos de relación; la nomenclatura varía en función del ámbito del que se toma [...]. En el presente trabajo, en una relación entre dos conjuntos de cantidades, llamamos razones internas a las relaciones que se establecen en el interior de cada conjunto; estas relaciones son entre cantidades de una misma magnitud, escalares; consideramos como razones externas a relaciones entre una cantidad de un conjunto y la que le corresponde en el otro conjunto, por ejemplo, entre distancia y tiempo. Estas últimas dan cuenta de una nueva magnitud, una magnitud cociente, la cual puede tener un nombre propio (por ejemplo, la velocidad) o no tenerlo (p.59).

Sobre las nociones de concepción y error

Antes de comenzar a delinear las distintas perspectivas sobre la noción de concepción, recuperamos dos necesidades que plantea Artigue (1990), a las que responde este término y que para nuestra investigación resultan pertinentes y suscitan interés:

* Poner en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que están asociados a ellas, poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de esta u otra clase de problemas.

* Ayudar al didáctico a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica presente en los modelos tomados del aprendizaje, permitiendo diferenciar el saber que la enseñanza desea transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por los estudiantes.

Para comenzar a caracterizar las distintas miradas en relación con la noción de concepción, una primera aproximación al término la encontramos en el diccionario digital de la "Real Academia Española" el cual nos define la palabra como "acción o efecto de concebir" y, concebir, como "formar idea, hacer concepto de algo".

Otra aproximación al término, ya al interior de la Didáctica de la Matemática, la encontramos en Ruiz Higueras (1994):

> Vergnaud (1982) considera a la concepción como un estado cognitivo global del sujeto y llega a la determinación de una concepción partiendo de la definición de un concepto matemático: "La noción de concepción nos da cuenta del estado de los conocimientos de un alumno con relación a un concepto" Según Vergnaud, todo concepto[13] estaría determinado por una terna (S, I, s), siendo:
> S: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto;
> I: el conjunto de invariantes que constituyen el concepto;
> s: el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.
> análogamente, una concepción estaría formada por esa misma terna, pero considerándola en un momento dado de la evolución del concepto (p.50).

Artigue (citado en Ruiz Higueras, 1994) continúa con el planteo realizado por Vergnaud y se expresa:

> Así como distinguimos en un concepto matemático:
> -la noción matemática tal como está definida en el contexto del saber científico en una época dada;
> -el conjunto de significantes asociados al concepto: representaciones simbólicas e icónicas;
> -los instrumentos, útiles, teoremas, técnicas algebraicas específicas del tratamiento de un concepto;
> Distinguiremos en las concepciones del sujeto estas diversas componentes y en particular:
> -la clase de situaciones-problema que dan sentido al concepto para el alumno;
> -el conjunto de significantes que él es capaz de asociarle, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas;
> -las herramientas, útiles, teoremas, algoritmos de los cuales dispone para manipular el concepto (pp.50-51).

Ambos autores entienden a las concepciones de los sujetos de manera sistémica, por esto, Ruiz Higueras (1994) nos advierte sobre:

> Este carácter sistémico y la relación de las concepciones con la clase de problemas-situaciones que dan sentido al concepto, ocasionan un problema metodológico en la evaluación de las concepciones de los alumnos. Las situaciones de evaluación tienen, necesariamente un carácter restringido, por lo que las tareas presentadas son sólo una muestra de las posibles situaciones que dan sentido al concepto.[…] Para diferenciar entre la concepción global del sujeto, que es un constructo teórico inobservable y los aspectos parciales de las concepciones globales, que son inferidos a partir de las respuestas de los alumnos en situaciones de evaluación, Artigue llamará

[13] Si bien ya se caracterizó el término concepto en el apartado "Sobre conceptos y significados", creemos conveniente volver a retomarlo para realizar las relaciones pertinentes.

concepción local, la que se manifiesta en una situación, ligada al saber puesto en juego, en un intento de operativizar la noción teórica de concepción (pp.51-52).

En este sentido, Artigue (1984) (citado en Ruiz Higueras 1994) reafirma y desarrolla la idea anterior al plantear que:

> […] es fundamental la importancia de concebir "estados sucesivos" en los conocimientos ligados a las concepciones que van construyendo los alumnos y alumnas a partir de nuevas situaciones que resuelven. Estos estados de conocimiento se manifiestan en las producciones que realizan y, desde esta perspectiva, es posible interpretar los errores no como una falta de conocimientos, sino como la presencia de otros conocimientos, incompletos, diferentes y poco articulados.

La idea anterior nos permite integrar al análisis, el concepto de error y de obstáculos que también nos interesan en esta investigación. El interés está dado pues, el análisis de los "errores" o "generalizaciones abusivas" como por ejemplo: las fracciones son siempre unitarias, permiten también caracterizar a la concepción. Del análisis de estos errores pueden surgir "ideas asociadas", expresión que utilizamos en el capítulo 4, apartado 4.3, al analizar las producciones de los estudiantes.

Por un lado, al pensar en el concepto de error y todo lo que ello implica, podemos asegurar que ha tenido en los últimos años un creciente interés por parte de maestros y profesores. En este sentido, Panizza (1997) opina que este creciente interés:

> […] se debe a que han empezado a difundirse investigaciones cognitivas y didácticas muy interesantes, basadas en concepciones constructivistas […] éstas muestran que algunas producciones que son inconsistentes a primera vista, cuando son analizadas desde el punto de vista del contenido matemático y desde el punto de vista del conocimiento construido por los alumnos, resultan consistentes. Más aún, ofrecen recursos para formular hipótesis acerca de las concepciones que podrían explicar las producciones erróneas y para hacer avanzar dichas concepciones hacia conceptos correctos (p.151).

Por otro lado, podríamos comenzar a pensar en caracterizar a los errores y luego categorizarlos. Socas (1997) opina que los errores de aprendizaje pueden ser caracterizados en tres grupos —no disjuntos— según sus causas:

* Errores que tienen su origen en un obstáculo: se considera al obstáculo como un conocimiento adquirido, no como una falta de conocimiento, que fue efectivo en algún

contexto específico, pero que cuando el alumno utiliza dicho conocimiento en otro contexto, da lugar a respuestas inadaptadas.

* Errores que tienen su origen en una ausencia de significado:

–errores que tienen su origen en la aritmética, resultado de no haber asimilado relaciones y procesos en un contexto aritmético.

–errores de procedimiento, es decir se producen cuando los estudiantes usan de manera inapropiada fórmulas, definiciones o reglas.

–errores debidos a la mala interpretación del lenguaje matemático.

* Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales: estos errores provienen de la falta de concentración, bloqueos, olvidos, etcétera.

La caracterización anterior, es una de las tantas que existen en numerosos trabajos de investigación que presentan y desarrollan este tema. Cabe señalar aquí nuevamente lo que entendemos por error, que en palabras de Roland Charnay (1990) se sintetiza de esta manera: "Considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos" (p.21).

1.5.3. Teoría antropológica de lo didáctico

Como bien lo expresamos en el apartado 1.5.1., la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, tuvo su continuación y profundización en términos de instituciones y de las relaciones con el saber con los aportes de Chevallard[14] (1990), bajo la Teoría antropológica de lo didáctico.

La TAD plantea que el objeto principal de estudio de la Didáctica de la Matemática está formado por los diversos tipos de sistemas didácticos —conformados por los subsistemas: docentes, estudiantes y saber enseñado— que existan actualmente o que puedan ser creados. Desde una mirada antropológica, la Didáctica de la Matemática es el estudio del hombre —las sociedades humanas— aprendiendo y enseñando matemática.

Sintetizando algunas características de esta perspectiva, Bosch, Fonseca, Gascón (2004), citado por Saiz y Acuña (s/f), expresan:

[14] Es escritor, licenciado en matemáticas, investigador de la transposición didáctica en el campo de la Didáctica y profesor en la Universidad IUFM d´Aix-Marseille, en Marsella, Francia.

> El modelo que propone actualmente la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), describe el conocimiento matemático en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas cuyos componentes principales son tipos de tareas, técnicas, tecnologías, y teorías. Recordemos que las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o 'saber-hacer' formado por los tipos de tareas y las técnicas, y por un bloque teórico o 'saber' formado por el discurso tecnológico-teórico que describe, explica y justifica la práctica docente (Portal Educar, Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación, párr. 51).

Sobre la transposición didáctica y los saberes a enseñar

Estimamos necesario considerar los procesos por los cuales el saber científico tiene que atravesar para llegar a tener la categoría de "saber a enseñar". Estos procesos van a formar parte de lo que Chevallard denominó la "transposición didáctica".

En este mismo sentido, muchos autores han manifestado que no era posible interpretar correctamente lo que ocurría en la escuela en torno a la actividad matemática sin tener en cuenta estos procesos relacionados con la reconstrucción escolar de conceptos matemáticos que tienen su origen en la comunidad de matemáticos. Los saberes señalados como objetos de enseñanza en una institución[15] particular, presentan características propias, que los distinguen de los mismos saberes en otras instituciones. Aparecieron así los fenómenos de *"transposición didáctica"* para dar cuenta de los procesos de transposición del saber, de la institución de los matemáticos a las instituciones de la enseñanza, planes de estudio, programas, manuales y clases.

Retomando un texto de Chevallard (1998), citado en Saiz y Acuña (s/f), él mismo nos describe este concepto que consideramos esencial para la didáctica:

> [...] ¿por qué hay transposición de los saberes? La respuesta es a priori muy simple y se puede explicitar en algunos puntos. Primer punto: los saberes nacen y crecen en ciertos "lugares" determinados de la sociedad. (La producción de los saberes es algo complejo, que supone una "ecología" particular.) Segundo punto: las necesidades sociales hacen que los saberes producidos deban vivir también en otros lugares de la sociedad. (La cosa es todavía más compleja y oscura: así, casi cada objeto de uso cotidiano "contiene" hoy día, de manera invisible para el usuario, matemáticas "cristalizadas", y un montón de otros saberes más.) Tercer punto: para poder vivir "lejos" de sus lugares de producción, los saberes sufren transformaciones que los adaptan a las ecologías "locales" correspondientes. (De este modo, los objetos matemáticos que manipulan ingenieros, economistas o geógrafos deben empezar a vivir "en asociación" con otros objetos, que el matemático ignora y que, por lo menos culturalmente, parecen propios de estos ámbitos específicos de la práctica social.)

[15] Para Chevallard, el término institución es un concepto primitivo y puede ser una escuela, una clase o un libro de texto.

> El esquema anterior define de manera muy amplia los procesos sociales de transposición. [...] Cuando un saber se transpone en una institución para ser estudiado, hablaremos de transposición didáctica. (El adjetivo didáctico corresponde aquí al sustantivo estudio.) El ejemplo de la Escuela es, en este caso, fundamental, aunque no sea único (Portal Educar, Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación, párr.55).

Nos interesa dejar plasmado este concepto de transposición didáctica en el marco teórico, pues al analizar en general las concepciones de los estudiantes del Instituto Superior en el que se llevó a cabo la investigación y particularmente cómo sus conocimientos "de entrada" fueron cambiando a lo largo de los cuatro o más años de formación, podemos preguntarnos: ¿qué decisiones tomó la Provincia de Santa Fe al definir los contenidos matemáticos en su Diseño Curricular Jurisdiccional? y a nivel docente, ¿qué decidió el profesor al pensar su proyecto de cátedra? En estas decisiones, ¿se realizó alguna selección de contenidos? Si es así, ¿esta selección de contenido estuvo guiada por algún criterio y/o intención más o menos explícita? Al analizar el proyecto de cátedra del docente que trabajó con este grupo de estudiantes que constituyen la muestra de la investigación, ¿se explicita en su planificación esta selección?

Todos los interrogantes anteriores permiten visualizar que un plan de estudio, inclusive un Diseño Curricular Jurisdiccional, presenta características propias que lo distinguen de otras instituciones, como bien lo expresa Chevallard.

CAPÍTULO 2

Las fracciones como objeto de saber y objeto de enseñanza

2.1. Un estudio matemático, histórico-fenomenológico y epistemológico

En este capítulo nos interesamos en profundizar el conocimiento de las fracciones desde el punto de vista de "objeto de saber"[16] es decir, desde lo que los matemáticos a lo largo de la historia han construido en torno a este concepto y hoy forma parte de la comunidad matemática.

Para lo cual, el estudio histórico-fenomenológico y epistemológico nos permitirá indagar en la historia la evolución del concepto de fracción y sus distintos significados. De esta manera, identificar en esa evolución las variables y contextos que hicieron que las fracciones se utilicen, acepten o no y adquieran distintos estadios hacia su aceptación por la comunidad matemática e incorporación como objeto de saber.

Luego de este recorrido —que comenzará con la Civilización Egipcia—, vamos a focalizar nuestra mirada en presentaciones habituales que se realizan de estos números en libros de textos de nivel universitario. Dichos textos, consideramos representativos del pensamiento de la matemática de la institución sabia.

2.1.1. Contexto histórico-epistemológico del concepto de fracción

Al comenzar a escribir este apartado nos preguntamos si, la historia de la matemática en general, y la historia de las fracciones en particular, ¿pueden aportarnos algunas ideas a la hora de comprender por qué surgen las dificultades en la conceptualización de las fracciones? y ¿qué aportes, nos ofrece la historia, para comprender la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones?

El recorrer la historia de la matemática y buscar los aportes que la misma realiza en relación con los números fraccionarios, nos permitirá responder en parte a los interrogantes planteados anteriormente. Los caminos transitados por distintos matemáticos y distintas culturas en épocas totalmente diferentes son fuente de reflexión para nosotros, nos muestran una construcción del conocimiento compleja y difícil, con innumerables resistencias, idas y venidas. Luego, al tomar distancia y analizar las

[16] En el capítulo 1 se desarrolló y profundizó la expresión "objeto de saber" o "Saber sabio" en el apartado que desarrolla el concepto de Transposición didáctica, término estudiado por Yves Chevallard.

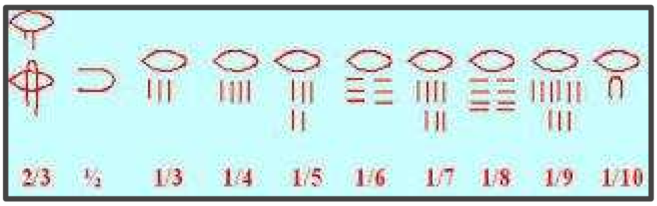
producciones de nuestros estudiantes a la luz de estos acontecimientos históricos, y con los aportes de las investigaciones realizadas de este tópico, posiblemente encontraremos algunas respuestas a nuestras inquietudes y preocupaciones diarias. En este sentido, "La Historia de la Matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, […] " (González Urbaneja, 2004, p.18).

Además, el conocer las dificultades que debieron enfrentar y superar los distintos matemáticos en la historia de la humanidad en relación con estos números, posiblemente, nos permita pensar de una manera más abierta y reflexiva las dificultades que encontramos a diario en los estudiantes. En este sentido, "No se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también obstáculos en los que tropiezan los estudiantes y no puede tener éxito ningún intento de acabar con estas dificultades a base de palabrería lógica" (Kline, 1978, pp.48-49).

Por lo expuesto anteriormente, comenzaremos un recorrido de más de 3000 años que intentaremos resumir en algunas páginas.

Los egipcios

Podemos comenzar con la civilización egipcia y encontrar en algunos escritos de alrededor de 1700 a.C, la aparición de inscripciones jeroglíficas de fracciones con numerador uno, llamadas fracciones unitarias. En estos escritos, se observan fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ en las cuales se colocaba un signo oval alargado sobre la expresión que designaba a *n.* Puede observarse en la imagen[17], que no existían las fracciones formadas por dos enteros, el numerador y el denominador —tal como las conocemos hoy— sino por un solo número entero y un símbolo que significaba parte.



[17] Extraída de Hurtado Orduz, 2012, p.6.

Estas fracciones unitarias eran utilizadas en esta época con naturalidad y virtuosismo pero parecen haber sido —las fracciones en general— un concepto difícil de comprender para esta civilización. En este sentido, Boyer (1996) expresa que los egipcios consideraban a las fracciones generales propias de la forma $\frac{m}{n}$ con *m* menor que *n*, no como una <cosa> elemental y simple, sino como parte de un proceso incompleto. Donde nosotros consideramos hoy $\frac{3}{5}$ como una fracción propia irreducible, los escribas egipcios la trataban como irreducible a la suma de las tres fracciones unitarias $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{15}$ (p.34). También encontramos en la historia de esta civilización que existían dos fracciones que marcaban una diferencia en sus representaciones: la mitad tenía un símbolo propio, una especie de U inclinada y el $\frac{2}{3}$, que mostraba o bien un símbolo de *ro* con dos palos desiguales debajo o el mismo símbolo atravesado por una U invertida con dos brazos desiguales.

Las consideraciones anteriores se pueden encontrar en un documento que sintetiza el trabajo de esta civilización. Este documento es el Papiro de Rhind[18] —escrito egipcio que ha logrado sobrevivir con el tiempo— el cual comienza con una tabla en la que se expresa $\frac{2}{n}$ como suma de fracciones unitarias para todos los valores impares de *n* desde 5 a 101. A continuación de esta tabla, Boyer expresa que aparece una tabla de $\frac{n}{10}$ para *n* de 1 a 9, en la que también estas fracciones se expresan con fracciones unitarias y con $\frac{2}{3}$. Cabe destacar que el Papiro contiene también un listado de 84 problemas de los cuales, en los seis primeros se solicita efectuar el reparto de una, dos, seis, siete, ocho o nueve hogazas de pan entre diez hombres. Para estos repartos el escriba utilizaba la tabla de fracciones $\frac{n}{10}$ que acababa de presentar en el escrito.

Nos gustaría recuperar —en función de esta investigación que se interesa por el significado de la fracción en el contexto del reparto— el problema de repartir 7 panes entre 10 hombres y el análisis que realiza Boyer (1996) al respecto: "En la división de 7 hogazas entre diez hombres, el escriba podría haber tomado $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ de hogaza para cada uno, pero la predilección por $\frac{2}{3}$ le lleva a elegir en cambio la expresión $\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$ de hogaza

[18] Con el nombre de Papiro de Rhind se conoce a un rollo de papiro de casi 6 m de largo que fue comprado en 1858 en una ciudad comercial del Nilo por el escocés Henry Rhind. También se lo conoce como Papiro de Ahmes, en honor al escriba que lo copió hacia 1650 a.C. Este documento contiene problemas matemáticos de la época y se conserva en muy buen estado.

para cada uno" (p.36). El autor expresa en este sentido, que Ahmes parece haber tenido a su disposición algo equivalente a lo que hoy nosotros llamamos mínimo común múltiplo.

Por último, es interesante señalar, que los egipcios utilizaron estos conocimientos con carácter práctico, es decir, con el fin de solucionar problemas de repartos en la distribución del pan, en mediciones, como por ejemplo: para las construcciones de las pirámides y para estudiar el planeta tierra. Lejos del interés de este pueblo, estaba el objetivo de comprender las técnicas utilizadas y lograr un conocimiento teórico del porqué de las mismas.

La matemática Babilónica o de la Mesopotamia[19] y las fracciones sexagesimales

Podríamos comenzar diciendo que esta civilización adoptó un sistema de notación cuya base fue 60. Varios motivos se han dado sobre esta adopción pero lo más probable, es que se haya considerado que el número 60 admite muchos divisores (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30) lo cual favorecía a la metrología por las múltiples subdivisiones exactas.

Por otro lado, parafraseando a Boyer (1996), la superioridad de esta civilización por sobre la egipcia en la Aritmética y el Álgebra se basa en la extensión del principio posicional que usaban para los enteros a las fracciones. Para los babilónicos era relativamente fácil conseguir aproximaciones muy precisas en sus cálculos utilizando su sistema de notación fraccionaria, la mejor de que dispuso civilización alguna hasta la época del Renacimiento.

Para las dos civilizaciones anteriores, como lo expresa Obando (2003):

> […] la agricultura era la base de su desarrollo y, por consiguiente, lo relacionado con la agrimensura y la astronomía era de vital importancia. Así, la medición y los cálculos aritméticos relativos a los problemas que debían enfrentar constantemente (medida de la superficie cultivable en un determinado terreno, cobro de impuestos en función de la tierra cultivada, etc.) hicieron que aritmética y geometría estuvieran estrechamente unidas y que, por tanto, se asumiera la divisibilidad de la unidad aritmética con la misma naturalidad con que se asumía la divisibilidad de

---

[19] Las civilizaciones mesopotámicas de la antigüedad suelen llamarse de manera ambigua y genérica babilónicas, a pesar de que tal designación no es estrictamente correcta. La ciudad de Babilonia ni fue al principio ni tampoco fue siempre, en períodos posteriores, el centro de la cultura asociada con los dos ríos […] el uso ha sancionado el adjetivo convencional e informal de "babilónica" para la región durante el intervalo que va desde 2000 a.C. hasta el 600 a.C. (Boyer, 1996, p.47).

> la unidad geométrica. De esta manera las fracciones de unidad también eran números, en tanto que expresaban el resultado de una medida. Por supuesto que la conceptualización de las fracciones como números se encontró con limitaciones propias impuestas por el sistema de numeración utilizado por una u otra cultura (p.161).

Los griegos

Durante el siglo VI a.C aparecen dos hombres, Pitágoras y Tales, que formaron parte de una nueva civilización que habitó a lo largo de las costas del Mediterráneo. Esta civilización tomó "[…] en sus manos la antorcha de la hegemonía cultural, no sólo en torno al Mediterráneo sino también en los valles de los ríos Tigris, Éufrates y Nilo […]" (Boyer, 1996, p.71).

No podemos asegurar muchas de las contribuciones de los pitagóricos debido a la pérdida de documentos de la época. Pero, posiblemente los pitagóricos identificaban número con magnitud y sólo eran considerados números, los enteros positivos. En este sentido, Obando (2003) expresa:

> […] sólo eran números los naturales mayores que uno. No existían las fracciones de la unidad, como números. Se aceptaba la fracción $\frac{1}{2}$ en tanto que ella expresaba el resultado de la cuantificación de dos magnitudes homogéneas, en las cuales sus medidas estuvieran en una razón de 1 a 2. Las demás mediciones inexactas, es decir aquellas que dieran como resultado otro tipo de fracciones, eran expresadas como razones homogéneas entre números naturales. Por ejemplo era pensado como una razón de 3 a 4, y representaba la conmensurabilidad de dos magnitudes homogéneas. De esta manera, al expresar las medidas como razones entre números, se establecía un contacto entre la aritmética y la geometría (p.160).

Como bien se expresa en la cita, para esta civilización las fracciones no poseían la categoría de número y eran pensadas como una relación o razón entre dos números enteros. Boyer (1996) recupera del Libro Los Elementos una expresión de Euclides para otorgarle fuerza a su desarrollo histórico y plantea que "Una razón es una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo" (p.83). Recuperamos esta cita de Boyer pues para nuestra investigación resulta pertinente encontrar los orígenes del uso de la fracción como razón. Notemos en este sentido, que los griegos centraron su atención en la relación entre pares de números y de esta manera el énfasis no estaba dado en el cálculo sino en aspectos racionales y teóricos del concepto de número.

También sabemos que en un momento se vieron tentados a utilizar a las fracciones unitarias, al igual que los egipcios, pero tenían una manera singular de representarlas. "[...] escribían simplemente el denominador y le colocaban a su derecha un acento o señal diacrítica para distinguirla del entero correspondiente. Así, por ejemplo $\frac{1}{34}$ aparecería λδ΄ [...]" (Boyer, 1996, p.91).

Los chinos y las fracciones decimales

En el caso de esta civilización podemos decir que conocían a las fracciones y que operaban con ellas muy bien, hasta tal punto que calculaban el mínimo común denominador de varias fracciones para realizar sus cálculos. También algunos autores plantean como lo más relevante, la tendencia a la decimalización de las fracciones. "[...] en China la adopción de una idea directriz decimal en los pesos y medidas dio como resultado el que se impusiera el hábito decimal en el manejo de las fracciones, que puede rastrearse, según se dice, tan lejos en el tiempo como el siglo XIV a.C" (Boyer, 1996, p.264).

La hegemonía árabe: Al-Kashi y las fracciones

Uno de los referentes de la matemática árabe fue Al-Kashi que vivió aproximadamente en el siglo XV de nuestra era. Podríamos plantear que adoptó de los chinos la práctica de utilizar fracciones decimales para el cálculo y tal fue el uso que le dio, que se otorgó a sí mismo el título de inventor de las fracciones decimales. "[...] Al-Kashi es quizá el primero en utilizar las fracciones sexagesimales para sugerir al mismo tiempo que las fracciones decimales se prestan igualmente bien a la resolución de problemas cuyos cálculos exigen muchas cifras exactas" (Boyer, 1996, p.315).

La Europa medieval: El liber abaci[20]

La caída de Roma en el año 476 marca el comienzo de la Edad Media y la caída de Constantinopla en manos de los turcos en 1453, su final. Durante este período la cultura europea estuvo dominada por la Iglesia Católica.

[20] El Liber abaci fue la obra más conocida de Fibonacci, publicándose una segunda edición en 1228, pero parece que no fue muy preciada en las escuelas, y no apareció impresa hasta el siglo XIX. Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, fue sin duda el matemático más original e importante del mundo medieval cristiano, pero la mayor parte de su obra era de avanzada para ser entendida por sus contemporáneos.

> El Dios cristiano gobernaba el universo y la finalidad del hombre era servirle y agradecerle, y con ello alcanzar la salvación […] Las condiciones de vida sobre la tierra no eran importantes y los trabajos y sufrimientos no sólo debían ser tolerados, sino sobrellevados con alegría […] Se comprende así que el interés por las matemáticas y la ciencia, alcanzara su nadir […]. Los intelectuales de la Europa medieval eran devotos buscadores de verdades, pero las buscaban en la revelación y en el estudio de las Escrituras (Kline, 1980, p.36).

Por lo anterior, en Europa se vivió un período de adormecimiento para la matemática y la ciencia en general. Además durante esta época, la mayoría de los matemáticos destacados escribieron en árabe y vivieron en Asia y África. Al respecto Boyer nos comenta: "[…] no puede uno asimilar la sabiduría de sus vecinos si no es capaz de entender su lengua " (1986, p.323).

En relación con las fracciones, encontramos algunas ideas en el texto de Leonardo de Pisa llamado "Liber abaci". En este texto, el autor pone énfasis en problemas de transacciones comerciales utilizando fracciones para el cambio de moneda. Al analizar la utilización de distintos tipos de fracciones y en especial el uso de las fracciones decimales Boyer (1996) plantea que:

> No deja de ser una de las ironías más notables de la historia el que la principal ventaja del sistema de notación posicional, es decir, su aplicación a las fracciones, pasase casi completamente desapercibida a los que utilizaron los numerales indú-arábigos durante los primeros mil años de su existencia. A este respecto, Fibonacci tuvo tanta culpa al menos como cualquier otro, puesto que utilizó tres tipos de fracciones, las comunes, las sexagesimales y las unitarias, pero nunca las decimales. De hecho, en el Liber abaci lo que más se usan son los dos peores de esos tres sistemas, es decir, las fracciones comunes y las unitarias (p.328).

También, este matemático acostumbraba a escribir la parte fraccionaria delante de la parte entera cuando trabajaba con un número mixto, justamente al revés de lo que hoy acostumbramos. Por ejemplo: en lugar de escribir $11\,\frac{5}{6}$, escribía $\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$ 11, entendiendo que existía una suma entre ambas fracciones unitarias. Evidentemente, se inclinaba por el uso de fracciones unitarias y su obra contenía tablas de conversiones de fracciones comunes a unitarias. También se puede agregar que hace uso de la raya de fracción tal como se utiliza hoy y habla de quebrado cuando se refiere a las fracciones.

El renacimiento. Algunos autores de este período

Al finalizar un período oscuro en Europa, caracterizado por las guerras entre Francia e Inglaterra y una gran conmoción física y espiritual que había causado la peste negra, comienza un renacer para este continente que se conoce con el nombre de Renacimiento.

El término Renacimiento simboliza la reactivación del conocimiento y el progreso tras siglos de predominio de un tipo de mentalidad dogmática establecida en la Europa de la Edad Media. Esta nueva etapa planteó una nueva forma de ver el mundo y al ser humano, el interés por las artes, la política y las ciencias, revisando el teocentrismo medieval y sustituyéndolo por cierto antropocentrismo.

En este contexto, la actividad matemática comenzó a reaparecer a mediados del siglo XV y las ramas más elementales de la matemática atrajeron la atención general y fueron las primeras en ser publicadas.

Uno de los aportes importantes en este período fue la invención de la imprenta con tipos móviles que favoreció la difusión de muchas obras cultas y autores, que hasta entonces la Iglesia se había encargado de controlar. Las primeras obras matemáticas que se imprimieron fueron las árabes relacionadas con el álgebra y la aritmética, principalmente las escritas por Al-Kwarizmi. No sucedió lo mismo con los textos clásicos geométricos griegos pues muy pocos hombres durante el siglo XV podían leer griego o tener un conocimiento avanzado de matemática para comprenderlos. A partir de aquí, los europeos superaron la barrera lingüística que los separaba de los árabes y se produce una oleada de traducciones.

Edad Moderna. Siglo XVI

Viete (1540-1603)

Este matemático consideró necesario trabajar con las fracciones decimales por sobre las sexagesimales y en una de sus primeras obras escribe: “Los sexagesimales y los sesentas han de ser usados raramente o nunca en la matemática, mientras que los milésimos y los miles, los centésimos y los cientos, los décimos y los dieces, [...] deben usarse frecuentemente y aun exclusivamente” (Boyer, 1996, p.386). En numerosos cálculos y en tablas, Viete va a utilizar las fracciones decimales para dar cuenta de su postura. Y en este sentido, Boyer recupera algunos ejemplos de estos cálculos para ejemplificar el uso de este tipo de fracciones.

Stevin (1548-1620)

Si bien Viete se había expresado a favor del uso de las fracciones decimales unos años antes, en el año 1585 un matemático llamado Simón Stevin de Brujas, también se expresó a favor del uso de la escala de base 10 para las fracciones, incluso de manera más enérgica que Viete.

> [...] el creciente comercio de la Europa de finales de la Edad Media y la gran diversidad de sistemas de medida existentes en aquella época, se constituían en una gran barrera para efectuar los negocios de manera eficiente y precisa. Sobre la base de tal necesidad, Stevin se lanza a la tarea de diseñar un sistema de medida que permitiera la estandarización de los sistemas de medida en todas las regiones, y que además facilitara el cálculo necesario en las mediciones y, por ende, en las transacciones comerciales. Con este fin se apoya en la utilización cada vez más generalizada del sistema de numeración decimal, y propone el diseño de conjuntos de sistemas de medida (uno para las longitudes, uno para los pesos, etc.) en cada uno de los cuales se tomara una unidad como fundamental (o unidad patrón) y otras unidades construidas guardando una relación de 1 a 10 entre unidades consecutivas (Obando, 2003, p.160).

De esta manera, Stevin establece el carácter de número de la unidad, así como su divisibilidad, sin que por ello deje de ser unidad. Así borra las fronteras entre lo continuo y lo discreto, esto es, entre las magnitudes y los números, lo cual se había instalado desde los griegos, como bien expresamos en párrafos anteriores. Además extiende la notación decimal para la escritura de las fracciones de unidad, que desde entonces son consideradas como números.

Vemos así, cómo las prácticas sociales de medición son una fuente importante en esta época para el uso de las fracciones como así también para su conceptualización, al igual que lo fueron para las civilizaciones egipcias y babilónicas.

Siglo XVIII y XIX

Por último, podríamos establecer que recién al final del siglo XVIII e inicio del XIX aparecieron distintas teorías que perseguían el objetivo de fundamentar los sistemas numéricos, entre ellos los racionales. A continuación exponemos algunos ejemplos de estas teorías:

Weierstrass presentaba a los números racionales a partir de los números naturales e introducía los racionales positivos como pares de números naturales, los enteros negativos como otro tipo de pares de números naturales y por último a los racionales negativos como pares de enteros negativos. Al respecto en Kline (1972) se expresa que: "Weierstrass no sintió la necesidad de clarificar la lógica de los números naturales [...] afirmó correctamente que una vez admitidos los números naturales, ya no había necesidad de más axiomas para construir los reales" (p.1304).

Otro ejemplo lo constituye Dedekind, pero su teoría era tan compleja que no se le prestó demasiada atención, según lo expresa Kline (1972).

Después de diversos intentos por definir a los enteros, "La aproximación a los enteros que mejor se adaptaba a las proclividades axiomatizadoras de finales del siglo XIX consistía en introducirlos mediante un conjunto de axiomas" (Kline, 1972, p.1303).

Veamos a continuación el enfoque de Peano (1858-1932) por ser uno de los más utilizados. En Kline (1972) encontramos el siguiente desarrollo:

> Peano partía de los conceptos no definidos (vid.cap 42, sec.2) de "conjunto", "número natural", "sucesor" y "pertenece a". Los cinco axiomas para los números naturales son:
>
> 1)1 es un número natural.
>
> 2)1 no es el sucesor de ningún otro número natural.
>
> 3) Cada número natural a tiene un sucesor.
>
> 4) Si los sucesores de a y b son iguales lo mismo pasa con a y b.
>
> 5) Si un conjunto S de números naturales contiene a 1, y cuando contiene a algún número natural a también contiene al sucesor de a, entonces S contiene todos los números naturales.
>
> Este último axioma es el de la inducción matemática.
>
> Peano también adoptó los axiomas de reflexividad, simetría y transitividad para la igualdad. Esto es $a = a$; si $a = b$, entonces $b = a$; y si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. Definió la adición estableciendo que para cada par de números naturales a y b hay una suma única tal que
>
> $a + 1 = a'$
>
> $a + b' = (a + b)'$ (pp.1304-1305).

De igual modo, la multiplicación quedaba definida estableciendo que para cada par de números naturales a y b hay un producto único tal que

$$a \,.\, 1 = a$$
$$a \,.\, b' = (a \,.\, b) + a$$

> A continuación exponía todas las propiedades acostumbradas de los números naturales. A partir de los números naturales y sus propiedades es ya muy simple definir y establecer las propiedades de los números enteros negativos y de los números racionales. Se pueden definir primero los enteros positivos y negativos como una nueva clase de números, cada uno de ellos como un par ordenado de números naturales. Así *(a, b)*, donde a y b son números naturales, es un entero. El significado

intuitivo de *(a, b) es a-b*. Cuando $a \succ b$, el par representa un enteros positivo ordinario, y cuando $a \preccurlyeq$b, un entero negativo. Las definiciones adecuadas de las operaciones de adición y multiplicación conducen a las propiedades habituales de enteros positivos y negativos.

Dados los enteros, se introducen los números racionales como pares ordenados de enteros. Así, si A y B son enteros, el par ordenado *(A, B)* es un número racional. Intuitivamente *(A, B)* es $\frac{A}{B}$. Una vez más, las definiciones adecuadas de adición y multiplicación de esos pares conducen a las propiedades usuales de los números racionales (pp.1304-1305).

Al método anterior de Peano, y a otros de la época, Hilbert los llamó "Métodos genéticos" y en relación con los mismos sostenía que, si bien podían ser interesantes desde lo pedagógico, no lo eran desde la lógica. En este sentido, consideraba más seguros a los métodos axiomáticos y va a introducir el término no definido de "número" designado con $a, b,\ c$…. y los siguientes axiomas, tomados nuevamente de Kline (1972):

1. Axiomas de conexión:

1_1. A partir del número a y del número b se obtiene por adición un número c; simbólicamente

$a + b = c\ o\ c = a + b$

1_2. Si $a\ y\ b$ son números dados, existe uno y sólo un número x y existe un y sólo un número y tales que

$a + x = b\ y\ y + a = b$

1_3. Hay un número determinado, denotado por 0, tal que para cualquier a

$a + 0 = a\ y\ 0 + a = a$

1_4. A partir del número a y el número b se obtiene por otro método, la multiplicación, un número determinado c; simbólicamente

$$ab = c\ o\ c = ab$$

1_5. Dados dos números arbitrarios, $a\ y\ b$, si a no es 0, existe uno y sólo un número x, y también uno y sólo un número y, tales que

$$ax = b\ o\ ya = b$$

1_6. Existe un número determinado, denotado por 1, tal que para cada a tenemos

$$a\,.\,1 = a\ y\ 1.a = a$$

II. Axiomas de cálculo

II_1. $a + (\,b + c) = (\,a + b) + c$

II_2. $a + b = b + a$

II_3. $a\,(bc) = \ (ab)c$

II_4. $a\,(b + c) = ab + ac$

II_5. $(a + b)c = ac + bc$

II_6. $ab = ba$

III. Axiomas de orden

III_1. Si $a\ y\ b$ son dos números diferentes, entonces uno de ellos es siempre mayor que el otro; este último se dice que es más pequeño que el primero; simbólicamente

$$a > b\ y\ b < a$$

III_2. Si $a \succ b$ y $b \succ c$, entonces $a \succ c$

III_3. Si $a \succ b$, entonces siempre es cierto que

$a + c \succ b + c$ y $c + a \succ c + b$

III_4. Si $a \succ b\ y\ c \succ 0$, entonces $ac \succ bc\ y\ ca \succ cb$

IV. Axiomas de continuidad

IV_1. (Axiomas de Arquímedes) Si $a \succ 0\ y\ b \succ 0$, son dos números arbitrarios, entonces es posible siempre sumar a consigo mismo un número suficiente de veces para tener

$$a + a + \ldots + a \succ b$$

IV_2. Axioma de completitud. No es posible añadir al sistema de los números ninguna colección de cosas de manera que la colección resultante siga satisfaciendo los axiomas precedentes; dicho en pocas palabras, los números forman una colección de objetos que no pueden ampliarse sin que deje de cumplirse alguno de los axiomas precedentes (pp.1306-1308).

De esta manera, finalizamos el recorrido histórico, un recorrido que tuvo como protagonista a las fracciones desde sus inicios y que desembocó en la elaboración de algunas teorías matemáticas en manos de los matemáticos del siglo XVIII y XIX fundamentalmente, para dar a los números racionales el lugar de objeto matemático.

En el apartado 2.1.3 bajo el subtítulo “Los números racionales y las fracciones”, vamos a detallar las diferencias que encontramos entre números racionales y fracciones, con el objetivo de no confundir al lector y tomarlas como sinónimos, pues no lo son.

2.1.2. Un estudio fenomenológico de las fracciones

En este apartado nos interesamos por los aportes que realiza Hans Freudenthal (1983), investigador de origen holandés. Tales aportes, se originan en Europa a mediados de los años ´70 como crítica a una enseñanza que se focalizaba en el conocimiento de conceptos mediante la manipulación de ciertos materiales con los que se intentaba “hacer concreto” dichos conceptos.

Algunas ideas centrales que plantea Freudenthal (1983), y que Dávila (2002) las recupera en su investigación son:

[...] cada individuo forma sus conocimientos matemáticos conforme comprende su significado en cada uno de los fenómenos en los que ése conocimiento está involucrado y afirma que para llegar a explicitar un concepto y manejarlo a un nivel algorítmico, se deben construir esos significados personales.

Por lo tanto, constituir un objeto mental significa para Freudenthal lograr que el campo semántico personal sobre un concepto determinado sea lo suficientemente amplio que permita interpretar adecuadamente todos los fenómenos que implican el uso de un mismo concepto.

La obra Didactical Phenomenology of Mathematical Structures de Freudenthal (1983), se basa en el análisis de *fenómenos* que implican el uso de cierto concepto o de algunas de sus propiedades. Se estudia la manera en la que ese concepto organiza a esos fenómenos, se analizan las posibilidades de aprendizaje que ofrecen así como las características de las acciones que se realizan al tratar de resolverlos (p.48).

En nuestra investigación nos interesamos por el capítulo V de su obra, pues en el mismo Freudenthal (1985) desarrolla la fenomenología de las fracciones, eje de nuestra investigación. En este sentido expresa: “[…] el objeto matemático que importa es el número racional más que la fracción. No obstante, puse la palabra “fracciones” en el título, y lo hice intencionadamente. Las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional – una fuente que nunca se seca” (p.2). Este argumento, se suma a los expuestos en el apartado 2.1, que intentan justificar nuestra elección de las fracciones como objeto de estudio por sobre los números racionales.

A continuación, presentamos dos cuadros que resumen los papeles que juegan las fracciones (cuadro 2.1) y las relaciones entre un todo y sus partes, presentando la variedad fenomenológica de todos posibles (cuadro 2.2).

<table>
<tr><th>Referente (tipo de objeto)</th><th colspan="2">Las fracciones aparecen como:</th></tr>
<tr><td rowspan="2">OBJETOS</td><td>Parte-todo</td><td>Operador fracturador
(Obtener la tercera parte de B)
Relación entre la parte y el todo
(A es $\frac{1}{3}$ de B)</td></tr>
<tr><td>Separados</td><td>Comparador
Relación de razón (A es $\frac{1}{3}$ de B)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Caso Intermedio:
OBJETOS, en situaciones de escala (agrandar, achicar)</td><td>Transformador
(transforma al objeto)</td></tr>
</table>

VALORES DE MAGNITUD Y NÚMEROS	Operador razón (transforma un número, una longitud, un peso, en otro).

Cuadro 2.1: Papeles que juega la fracción (tomado de Dávila, 2002, p.50).

En el cuadro anterior, se distinguen tres categorías: la fracción como fracturador, la fracción como comparador y la fracción como operador o relación. En la primera categoría se agrupan aquellos significados que requieren de algo que es dividido, partido, rajado, cortado, rebanado, roto o coloreado en partes iguales o si se imagina, experimenta o piensa como si lo fuera. En la segunda, se consideran las fracciones que sirven para comparar objetos que se separan uno de otro o que se experimenta, imagina o piensa que son separados y la comparación que se realiza entre ellos puede ser directa o indirectamente a través de un tercer objeto. En la tercera categoría, la fracción aparece en un operador o en una relación; ambos pueden respectivamente actuar sobre los objetos y relacionar entre sí los mismos.

Para el caso de la fracción como fracturador, Freudenthal aclara que se refiere a la fracción que se aplica a un objeto (el todo) para obtener una parte de él. En su texto analiza primero la existencia de una diversidad de maneras de partir, dividir, quebrar magnitudes —dependiendo del tipo de magnitud— y posteriormente presenta la variedad de todos posibles.

El todo	
Discreto	Susceptible de contarse uno a uno como: (canicas, personas, etc.).
Continuo	Longitud, Superficie, Volúmenes. Líquidos.
Definido	Un cuadrado, un cubo, 5 metros de listón. Si es discreto se conoce su cardinal (30 canicas, 3 pasteles, etcétera).
Indefinido	Puede ser discreto o continuo pero se desconoce su cardinal o sus dimensiones. Por ejemplo: la humanidad, las mujeres de un país, el ganado de una región, un segmento de recta, una superficie.

Estructurado	Si es discreto pueden estar ordenados u organizados espacialmente de forma determinada; sus elementos pueden ser diferentes. Por ejemplo, la humanidad formada por hombres y mujeres o ancianos, adultos, jóvenes y niños, canicas rojas, verdes y azules. Si es continuo y definido, puede tener divisiones internas o dibujadas sobre una retícula.
Sin estructura	Si es discreto no hay organización particular. Si es continuo no tiene divisiones previas.

Cuadro 2.2.: La fracción como fracturador (tomado de Dávila, 2002, p.51).

A continuación, recuperamos algunos análisis que realiza el autor en relación con la enseñanza de la noción parte-todo, pues para nuestra investigación es fundamental y nos aporta herramientas para el análisis de las producciones de los estudiantes, que realizaremos en el capítulo 4.

> A pesar de una clasificación con tantas caras y de la abundancia de ejemplos posibles, enfocar las fracciones desde el punto de vista de "parte–todo" es algo bastante limitado no sólo fenomenológicamente sino también matemáticamente —este enfoque produce sólo fracciones propias. La didáctica tradicional de la aritmética se limita a este enfoque, mayoritariamente incluso en el sentido restringido de la división del pastel. Tras estas divisiones concretas del pastel —en fracciones propias sólo— se introduce inmediatamente al estudiante en la división abstracta de cantidades y valores de magnitudes presentados abstractamente; con decretos arbitrarios como " $\frac{1}{2}$ vez significa lo mismo que $\frac{1}{2}$ de", y con reglas aritméticas se aplana un camino recto hacia el número racional. [...] Después de uno o dos años de fracciones, algunos alumnos dominan los algoritmos, aunque no tienen ni idea de lo que significan las fracciones, ni de lo que se puede hacer con ellas; otros no conocen siquiera el nombre de fracciones particulares. La pobreza fenomenológica del enfoque me parece, en gran parte, responsable de este fallo didáctico (p.14).

También, podemos leer en el capítulo V de su obra, otro señalamiento que hace sobre el tratamiento exclusivo de la relación "parte-todo". En este sentido, al trabajar solamente desde esta relación, se dejan de lado numerosos fenómenos que pueden aprovecharse para llegar a la fracción con otras connotaciones, como la relación entre dos cantidades (razón) o la relación parte de parte.

2.1.3. Estudio matemático del número racional

Cabe aclarar antes de avanzar, que bajo este subtítulo vamos a realizar un desarrollo matemático sobre el número racional. Luego, plantearemos algunas distinciones de significado entre el objeto matemático número racional y sus formas de escritura, como ser las fracciones y las expresiones decimales pues —estas últimas— constituyen formas habituales de representación simbólica de los números racionales y es necesario distinguir esta cuestión.

Para comenzar el estudio matemático podríamos decir, parafraseando a Brousseau (1981) cuando se refiere a la construcción de los decimales, que existen muchas maneras de definir o construir matemáticamente los conjuntos numéricos. Estas maneras difieren en la elección de lo que se considere conocido como objeto matemático y como método de demostración, pero el resultado es el mismo. Esta observación que realiza Brousseau nos permite seleccionar un método de los tantos que se utilizaron para construir este conjunto numérico y no otro, sabiendo que el resultado no varía.

También podemos recuperar el planteo que realiza Centeno (1998) sobre el número racional y expresar que el mismo tiene una definición en la ciencia matemática la cual responde a cuestiones de índole teórica. También esta autora señala que, los conceptos matemáticos tienen una exigencia intrínseca hacia la generalización que permita ampliar las teorías existentes y suprimir restricciones, y hacerlo sin referencia alguna a la situación concreta que dio pie a tal ampliación. Esta tendencia hacia la generalización en el proceso matemático permite explicar la construcción de los sistemas numéricos en la Matemática a partir de sucesivas ampliaciones que tienen su eslabón inicial en los números naturales. Así, los números racionales emergen en la Matemática para poder eliminar restricciones que plantea la división en el conjunto de los números enteros.

A partir de estas dos ideas, las de Brousseau y la de Centeno, a continuación presentamos una posible construcción del conjunto de los racionales, a partir de la elección de la construcción genética[21] (ya desarrollada en el apartado sobre el “Estudio histórico”).

[21] El método genético es un método de la ciencia matemática a través del cual se realizan sucesivas ampliaciones de las teorías que conforman la disciplina y ello se realiza siguiendo un orden creciente de complejidad, esto es, una nueva construcción teórica aparece como resultado de otra más simple.

Si bien a lo largo de la historia de la humanidad y específicamente a lo largo de la historia de la matemática, las necesidades que surgieron de índole práctico generaron el uso de los números racionales, en particular de las fracciones; en este apartado nos interesamos por profundizar en las necesidades intrínsecas de la matemática que generaron la sistematización de este conjunto numérico.

Sabemos que es posible realizar siempre la adición y la multiplicación en el conjunto de los naturales, y obtener como resultado un número natural, no sucede lo mismo con las operaciones de sustracción y de división.

De la misma manera que los números negativos y la aceptación del cero, despejaron los problemas en torno a la sustracción, los racionales fueron la herramienta fundamental para solucionar los problemas de la división. En este mismo sentido, Courant y Robbins (1979) destaca la importancia de este conjunto numérico y plantea una doble necesidad del mismo:

> Extender un dominio por la introducción de nuevos símbolos, de tal modo que las leyes que valen en el primero continúen rigiendo en el segundo, es uno de los aspectos del proceso de generalización característico de la matemática. La generalización del concepto de número natural al de número racional satisface, por una parte, la necesidad teórica de suprimir las restricciones a la sustracción y a la división, y cumple, por otro, la necesidad práctica de tener números para representar los resultados de mediciones. Del hecho de que los números racionales satisfagan esa doble necesidad resulta verdaderamente su gran importancia (p.64).

Desde la posición asumida para el trabajo de investigación, y teniendo en cuenta el marco teórico desde el cual se realiza, es importante clarificar qué se entiende por el concepto de racional y bajo qué posición epistemológica se asume su enseñanza. La definición de estos aspectos permitirá sustentar epistemológicamente la realización del trabajo de investigación y dará coherencia al desarrollo de todas las etapas que lo componen.

Entonces, adoptamos para este trabajo la definición que propone Fava (1978), quién considera el símbolo (a, b) para designar el par ordenado formado por los números enteros a y b. Con el símbolo P designa el conjunto de todos los pares (a, b) con la condición de que b sea distinto de cero, es decir,

$$P = \{(a, b): a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

Para luego establecer la siguiente relación: el par (a, b) es equivalente al par (c, d) si se verifica $ad = bc$.

$$(a,b)E(c,d)\ si\ se\ verifica\ ad = bc$$

Como de la definición de la relación se deduce inmediatamente que $(a,b)E(a,b)$ y que $(a,b)E(c,d)$ entonces $(c,d)E(a,b)$ y además es sencillo probar que si $(a,b)E(c,d)$ y $(c,d)E(d,f)$ entonces $(a,b)E(e,f)$ concluye que E es una relación de equivalencia.

La clase de equivalencia del par ordenado (a,b) se llama número racional a sobre b y se denota por $\frac{a}{b}$. Es decir $\frac{a}{b} = \{(x,y):(x,y) \in P, (x,y)E(a,b)\}$.

Cualquier par de números enteros que se usen para representar cierto número racional se llama una fracción y el símbolo Q se usa para designar el conjunto de todos los números racionales.

Según Courant y Robbins (1979) el uso de la palabra número (inicialmente reservada para los números naturales) para estos nuevos símbolos está justificado por el hecho de que la adición y la multiplicación de estos entes obedecen a las mismas leyes que rigen dichas operaciones con los números naturales.

Definimos la adición, la multiplicación y la igualdad de números racionales como sigue, para enteros cualesquiera p,q,r,s, siendo $q \neq 0, s \neq 0$:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs};\ \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s};\ \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \text{ si } p \cdot s = q \cdot r$$

Proposición 1: Sean $a\ y\ b$ números racionales. Entonces

$$a + b, a.b, a - b\ y\ \frac{a}{b}$$

(en el último caso si $b \neq 0$)) son también números racionales.

D**]** Como $a\ y\ b$ son racionales, entonces existen enteros p,q,s,t *($q\ y\ t$ distintos de cero)* tales que:

$$a = \frac{p}{q}, b = \frac{s}{t}$$

Entonces

1) $a + b = \frac{p}{q} + \frac{s}{t} = p.\frac{1}{q} + s.\frac{1}{t} = p.t.\frac{1}{t}.\frac{1}{q} + s.q.\frac{1}{q}.\frac{1}{t} = p.t.\frac{1}{q}.\frac{1}{t} + s.q.\frac{1}{q}.\frac{1}{t} =$
$p.t.(\frac{1}{q.t}) + s.q.(\frac{1}{q.t})$

$$= (p.t + s.q).(\frac{1}{q.t}) = \frac{p.t + s.q}{q.t}$$

y como tanto numerador como denominador son enteros (ley de cierre de la adición y de la multiplicación en Z) entonces $a + b$ es cociente de enteros, o sea $a + b$ es racional.

2)
$a.b = \frac{p}{q}.\frac{s}{t} = p.\frac{1}{q}.s.\frac{1}{t} = p.s.\frac{1}{q}.\frac{1}{t} = p.s.\frac{1}{q.t} = \frac{p.s}{q.t}$ luego $a.b \in$ Q

3) $-b = \frac{-s}{t} = -(s.\frac{1}{t}) = (-s).\frac{1}{t} = \frac{-s}{t}$; $-b \in Q$ y entonces

$a - b = a + (-b) \in Q$ de 2)

4) $\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b} = p.\frac{1}{q}.\frac{1}{s.\frac{1}{t}} = p.\frac{1}{q}.\frac{1}{s}.t = p.t.\frac{1}{q.s} = \frac{p.t}{q.s} \in Q$

En definitiva, dentro del dominio de los números racionales todas las operaciones racionales: adición, sustracción, multiplicación y división (excepto la división por cero), pueden efectuarse y producir nuevamente números racionales. Además, las operaciones con números racionales obedecen las mismas leyes que las operaciones con números naturales, por ello los números racionales extienden el sistema de enteros positivos en una forma completamente natural.

$a + b = b + a$ (ley conmutativa de la adición),
$a + (b + c) = (a + b) + c$ (ley asociativa de la adición)
$ab = ba$ (ley conmutativa de la multiplicación)
$a\,(bc) = (ab)c$ (ley asociativa de la multiplicación)
$a\,(b + c) = ab + ac$ (ley distributiva de la multiplicación con respecto a la suma)

Proposición 2: Si a *y* b son números racionales tales que $a < b$ entonces $\frac{a+b}{2}$ también es racional y además:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

D] Que $\frac{a+b}{2}$ es racional es inmediato de la Proposición 1.

Por otra parte, como $a \preccurlyeq b$ es:

$$2a = a + a \preccurlyeq a + b$$

luego

$2a \leqslant a+b$ o sea $a \leqslant \frac{a+b}{2}$

Análogamente

$$a+b \leqslant b+b=2b$$

luego

$a+b \leqslant 2b$ o sea $\frac{a+b}{2} \leqslant b$

Es fácil convencerse a partir de esta proposición que entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

Pues entre a y b hay uno que es $\frac{a+b}{2}$, entre a y $\frac{a+b}{2}$ hay otro que es $\frac{1}{2}$ $(a+\frac{a+b}{2})$, etc. Reiterando este procedimiento nos damos cuenta de la verdad de la afirmación hecha. Lo cual implica que dado un racional cualquiera no es posible hablar del número racional "inmediato superior".

Los números racionales, la ampliación del campo de los números naturales y las situaciones que no resuelve (irracionales)

Si nos detenemos a mirar la historia de la matemática, podríamos asegurar que el surgimiento de los números irracionales se relaciona con la geometría. Este surgimiento se da en una época en la que se consideraba un mundo armónico cuya armonía podía expresarse sólo como cociente de números enteros. En este contexto, se manifiestan los números irracionales a partir de la relación entre la diagonal de un cuadrado y el lado del mismo y, en manos de la escuela Pitagórica.

Para desarrollar la idea expuesta en el párrafo anterior, recuperamos el planteo que realiza Courant y Robbins (1979). Cuando se comparan las longitudes de dos segmentos rectilíneos *a* y *b* puede ocurrir que *a* esté contenido un número exacto de veces en *b*. En este caso podemos expresar la medida del segmento *b* tomando como unidad de medida *a*. También puede suceder que ningún múltiplo entero de *a* sea igual a *b,* pero que *a* se pueda dividir en un número entero de partes iguales tal que:

$$b=\frac{m}{n}a \qquad 1)$$

Cuando se tiene la igualdad de 1) podemos decir que los segmentos a y b son conmensurables, dado que tienen una medida en común: el segmento $\frac{a}{n}$ está contenido n veces en $a,$ y m veces en b.

Pero, no todos los segmentos son conmensurables y le debemos a los griegos —a la escuela Pitagórica, tal como lo planteamos en el primer párrafo— el hallazgo de otro tipo de segmentos, los inconmensurables. En este sentido, Pitágoras suponía que dados dos segmentos cualesquiera, siempre serían conmensurables. Sin embargo, descubrió que si se traza un cuadrado de lado 1, su diagonal que por la aplicación del teorema de Pitágoras es tal que el cuadrado de su longitud vale 2, no es conmensurable con el lado del cuadrado, o dicho de otra manera, ninguna fracción corresponde a un número cuyo cuadrado es 2.

De esta manera, el descubrimiento de un segmento que no se puede escribir como cociente de dos segmentos dados, produjo una crisis en la sociedad matemática de aquella época pero permitió el surgimiento de los números irracionales.

Los números racionales y las fracciones

Con todo lo expuesto en el desarrollo anterior, podemos decir que los números racionales, emergen como cocientes de números enteros $p\ y\ q$, con $q \neq 0$, utilizando el símbolo $\frac{p}{q}$, para notarlos, sujeto a la regla que $q\ .\ (\frac{p}{q}) = p$. Es decir, $\frac{p}{q}$ es por definición solución de la ecuación $q\ .\ x = p$. De esta manera, los números racionales son por definición cocientes.

¿Pero qué relación existe entre los números racionales y las fracciones?

Todas las fracciones iguales representan un mismo número racional, y las desiguales números racionales distintos. En efecto, asociamos a cada fracción $\frac{p}{q}$ una familia de fracciones $[\frac{p}{q}]$, integrada por fracciones que representan al mismo número. Si $\frac{m}{n}$ es una fracción de la familia $[\frac{p}{q}]$ se verifica la igualdad $p\ .\ n = q\ .\ m$. Las fracciones y las respectivas familias que representan verifican las siguientes propiedades:

–Cada fracción $\frac{p}{q}$ pertenece a su propia familia $[\frac{p}{q}]$.

–Si una fracción pertenece a la familia de otra, entonces ambas son de la misma familia.

–Cada fracción pertenece a un número racional y solo a uno.

–Cada familia de fracciones define un número racional y una fracción es un representante de dicha familia.

Como ya lo expresamos en párrafos anteriores, las fracciones son un tipo de representación del número racional, pero no la única. También representamos los racionales con expresiones decimales periódicas.

Como mencionamos en la sección 1.1 del capítulo 1 nos focalizaremos en esta investigación en las fracciones como objeto de estudio, dado que estamos centrados en la formación de maestros de enseñanza primaria donde se aborda específicamente el trabajo con las fracciones. Por lo tanto a partir de ahora nos referiremos siempre a las fracciones, siguiendo el orden histórico y la evolución de estos contenidos en la escuela.

Fracción y razón

En este apartado nos proponemos diferenciar a las fracciones de las razones, sabiendo de antemano que una razón es una noción más general que la fracción. Ya hemos visto la noción de razón que manejaron los griegos hace años y recuperamos una definición del libro de "Los Elementos" en párrafos anteriores. También hemos expresado la diferencia y la relación que existe entre los números racionales y las fracciones.

A continuación presentamos otros aspectos[22] que caracterizan a la razones y las diferencian de las fracciones. Por ejemplo,

FRACCIÓN	**RAZÓN**
Cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero.	Un par ordenado de cantidades de magnitudes.
Las fracciones se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes".	Las razones comparan objetos heterogéneos o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo: 3 jamones por 145 euros.
En las fracciones el segundo número no puede ser cero.	En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:5, pero también se puede decir que puede ser 10:0, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).
Las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.	Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro $\frac{c}{d}$ es el número π, que sabemos no es racional.

[22] El siguiente cuadro fue tomado textualmente en el marco del "Plan de Matemática para Todos". Los aspectos fueron sistematizados en el mismo por la Prof. Pierina Lanza, y adaptados de Hoffer, A. R. (1988). Ratios and proportional thiking. En Th. R.Post (Ed.), *Teaching mathematics ingrades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

Las operaciones con fracciones. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones. $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\neq\frac{5}{12}$	Las operaciones con razones Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una "suma" de razones del siguiente modo. 2:5 + 3:7 = 5:12.
	Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como 4:7, o 4 → 7. Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado.

Distintas representaciones de la fracción

Los objetos matemáticos en general admiten diferentes representaciones. En este sentido Anzonegui Zabala (2006) sostiene que "[...] los conceptos requieren necesariamente algún modo de representación que ha de ser pertinente, es decir, que permita mostrar adecuadamente y con cierta simplicidad el concepto y sus propiedades, así como las posibles operaciones y transformaciones a las que puede someterse posteriormente"(p.8). Si bien en este apartado no se trabajará la importancia que requiere el manejo de las distintas representaciones para la enseñanza del concepto y su aprendizaje —cuestión que se plantea en el capítulo 1— creemos fundamental presentar la variedad de representaciones en torno al concepto de fracción para luego —en el capítulo 4— analizar y profundizar las producciones de los estudiantes.

Vamos a presentar los distintos tipos de representación según una categorización que realiza Anzonegui Zabala (2006) en la cual utiliza un todo fraccionado en 5 partes congruentes y considera 2 partes:

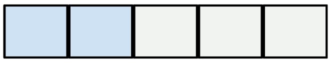
1. Verbal[23]: esta forma de representación permite expresar verbalmente. Como por ejemplo: "los dos quintos de…"

2. Numérico: habitualmente necesita explicitar los dos números enteros que reflejen la magnitud de la relación entre la parte y el todo (sistema numérico). En este ejemplo: $\frac{2}{5}$

3. Gráfico continuo: puede referirse a magnitudes continuas tales como la longitud de un segmento, el área de una superficie o el volumen de un sólido. (sistema gráfico continuo).

[23] También llamada por otros autores representación literal.

En este ejemplo: número de cuadrículas celestes con respecto al número total de cuadrículas congruentes.



4. Gráfico discreto: hace referencia a magnitudes discretas, como el número de objetos de un conjunto, la cantidad de dinero, etc. (sistema gráfico discreto).

Continuando con el ejemplo dado: número de • con respecto al número total de objetos

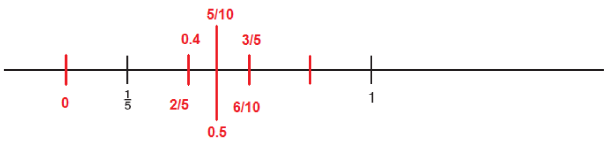
• ✺

✺

✺ •

5. Decimal: 0,40 (40 de las 100 centésimas que posee la unidad)

6. Punto sobre la recta numérica:



7. Porcentual: 40% (40 de cada 100 partes)

Cabe aclarar en este momento, que en nuestra investigación no se trabaja con las representaciones *porcentual* y *punto sobre la recta numérica* pues no incluimos en los problemas seleccionados preguntas que focalicen las relaciones entre este tipo de representaciones.

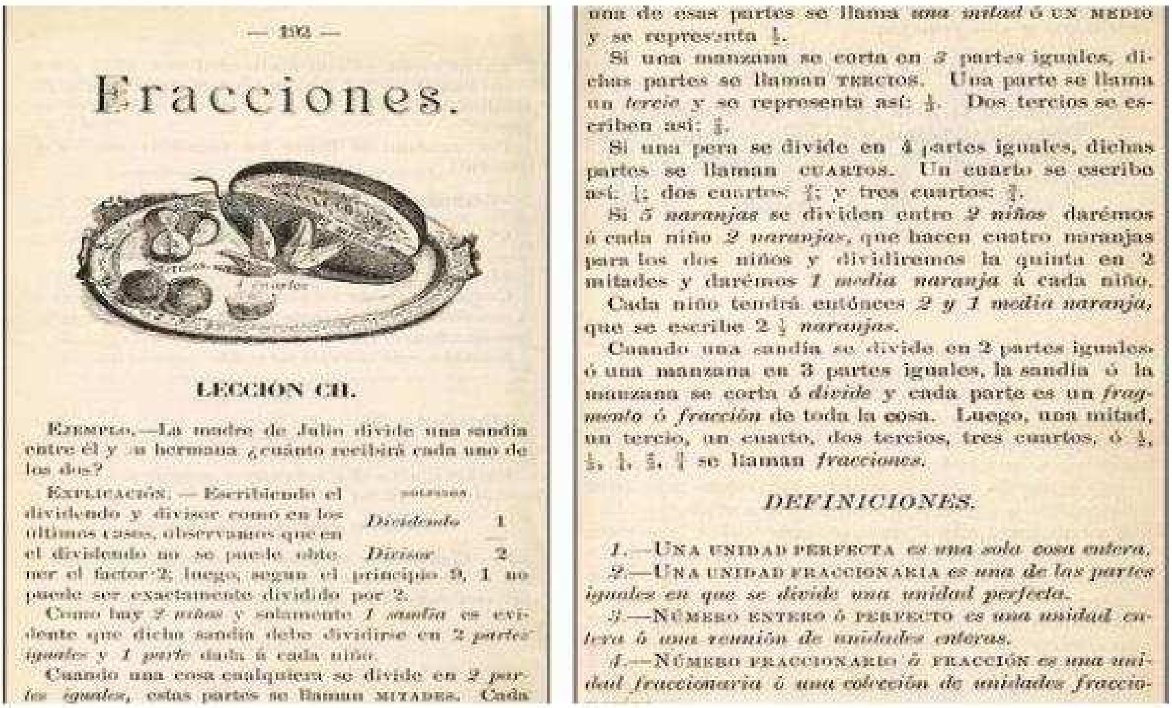
2.2. Evolución histórica de la enseñanza de las fracciones

El siguiente análisis, toma como lectura de base, un texto presentado en el marco de la capacitación para acompañantes didácticos del Plan de Matemática para Todos. Este texto está escrito por Chemello, Agrasar, Chara y Crippa (2012), y recorre algunos libros de texto y documentos curriculares para ejemplificar el tratamiento de las fracciones en cierto momento de la historia de la educación argentina. En el análisis se van entrelazando la lectura de textos dedicados a niños de escuela primaria, como así también textos para docentes de nivel primario y documentos curriculares para el nivel primario y terciario.

2.2.1. Un libro de 1880 para niños

Buscando los antecedentes de nuestras actuales prácticas de enseñanza, encontramos en un texto de 1880 la idea de fracción presentada mediante la división en partes iguales de un objeto, tal como puede verse en la página siguiente. Esta presentación retoma la idea de "quebrado" presente en muchos libros españoles que desarrollaban contenidos de enseñanza de aritmética para niños en el siglo XIX (Chemello, Agrasar, Chara y Crippa, 2012, p.7).

Como bien se expresó en el *apartado 2.1.1*, el significado de la fracción como relación parte—todo es el que se puede identificar en los primeros registros históricos de egipcios y babilonios. Sin embargo, en los documentos de estas culturas, las particiones del entero no son arbitrarias, sino que, por ejemplo los egipcios utilizaron estos conocimientos con carácter práctico, es decir, con el fin de solucionar problemas de repartos en la distribución del pan, mediciones como por ejemplo, para la construcciones de las pirámides y para estudiar el planeta tierra. Lejos del interés de este pueblo, estaba el objetivo de comprender las técnicas utilizadas y lograr un conocimiento teórico del porqué de las mismas.



— 192 —

Fracciones.

LECCION CII.

EJEMPLO.—La madre de Julio divide una sandía entre él y su hermana ¿cuánto recibirá cada uno de los dos?

EXPLICACIÓN. — Escribiendo el dividendo y divisor como en los últimos casos, observamos que en el dividendo no se puede obtener el factor 2; luego, según el principio 9, 1 no puede ser exactamente dividido por 2.

Dividendo 1
Divisor 2

Como hay *2 niños* y solamente *1 sandía* es evidente que dicha sandía debe dividirse en *2 partes iguales* y *1 parte* dada á cada niño.

Cuando una cosa cualquiera se divide en *2 partes iguales*, estas partes se llaman MITADES. Cada una de esas partes se llama *una mitad* ó UN MEDIO y se representa $\frac{1}{2}$.

Si una manzana se corta en *3* partes iguales, dichas partes se llaman TERCIOS. Una parte se llama un *tercio* y se representa así: $\frac{1}{3}$. Dos tercios se escriben así: $\frac{2}{3}$.

Si una pera se divide en 4 partes iguales, dichas partes se llaman CUARTOS. Un cuarto se escribe así: $\frac{1}{4}$, dos cuartos: $\frac{2}{4}$; y tres cuartos: $\frac{3}{4}$.

Si *5 naranjas* se dividen entre *2 niños* darémos á cada niño *2 naranjas*, que hacen cuatro naranjas para los dos niños y dividiremos la quinta en 2 mitades y darémos *1 media naranja* á cada niño.

Cada niño tendrá entónces *2 y 1 media naranja*, que se escribe $2\frac{1}{2}$ *naranjas*.

Cuando una sandía se divide en 2 partes iguales ó una manzana en 3 partes iguales, la sandía ó la manzana se corta ó *divide* y cada parte es un *fragmento* ó *fracción* de toda la cosa. Luego, una mitad, un tercio, un cuarto, dos tercios, tres cuartos, ó $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ se llaman *fracciones*.

DEFINICIONES.

1.—UNA UNIDAD PERFECTA *es una sola cosa entera.*

2.—UNA UNIDAD FRACCIONARIA *es una de las partes iguales en que se divide una unidad perfecta.*

3.—NÚMERO ENTERO Ó PERFECTO *es una unidad entera ó una reunión de unidades enteras.*

4.—NÚMERO FRACCIONARIO Ó FRACCIÓN *es una unidad fraccionaria ó una colección de unidades fraccio-*

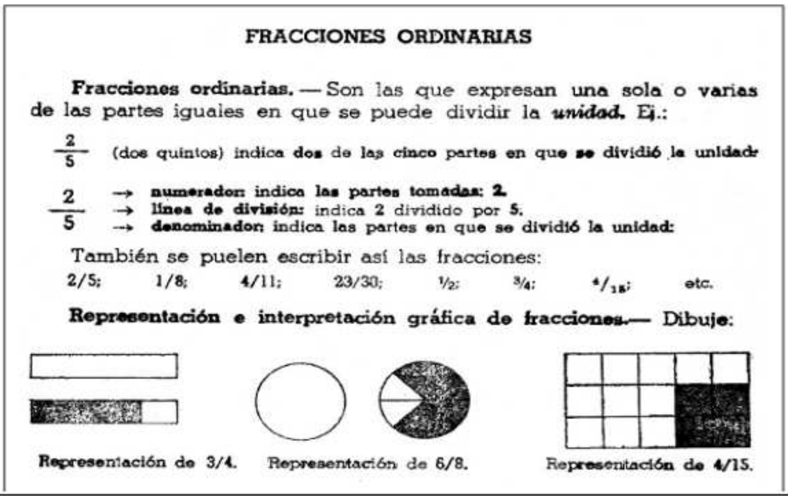
Marcos Sastre, Lecciones de Arismética para las escuelas primarias de niños y niñas (Imprenta de Pablo Coni, Buenos Aires, 1880, pp. 192-193).

2.2.2. A mediados de siglo XX, entre la década del ´50 y ´60…

Recuperamos otro fragmento del texto de Chemello et al., (2012) en el que se presenta un tratamiento de las fracciones alrededor de la década del ´60. En el mismo se realizan sugerencias a los docentes y podemos leer:

> PROCEDIMIENTOS DIDÁCTICOS
> El concepto de fracción debe ser brindado en forma intuitiva. El maestro evitará el aprendizaje mecánico de las operaciones aunque el niño 'no alcance a percibir la función del denominador como divisor o la reducción a común denominador'.
> Con objeto de facilitar dichas percepciones, se brindan los siguientes procedimientos didácticos:
> a) Para enseñar la función del denominador como divisor. Sea por ejemplo, la enseñanza de la noción 'cuartos':
> 1° Se presenta un objeto concreto.
> 2° Se lo corta, divide, parte, fracciona en cuatro partes.
> 3° Se señala la acción con una raya (esta significa 'fracción' porque 'el objeto fue fraccionado').
> 4° Las partes iguales en que está fraccionado el objeto se anotan debajo de la raya.
> 5° Las partes que se toman se señalan en la parte superior de la raya.
> 6° En posesión del símbolo fraccionario, el maestro hace realizar objetivaciones gráficas a fin de que el alumno compare, asocie, asimile, reflexione, diagrame, piense, deduzca.
> 7° Aparecen los símbolos $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, y $\frac{4}{4}$.
> 8° Se realizan ejercicios en conjunto y experimentaciones personales.
> 9° Se sugieren actividades:
> • colorear $\frac{1}{4}$ de un círculo;
> • colorear $\frac{3}{4}$ de un rombo;
> • calcular $\frac{1}{4}$ de los alumnos presentes;
> • calcular $\frac{3}{4}$de los libros de lectura.
> 10° Se verifica el aprendizaje con el auxilio de tarjetas seriadas. (Combetta, 1969: 206.)

Al igual que el texto de 1880, en la presentación anterior se continúa trabajando la idea de fracción como quebrado, y como bien lo señala el texto, se presenta un objeto concreto, se lo corta, divide, fracciona en partes y se interpreta el símbolo de la fracción en función de esas acciones. "Esta misma perspectiva es la que se evidencia en el Manual de Ingreso en Primer año de Berruti (1957). Aunque se desliza una mención de la idea de cociente (la línea de división indica 2 dividido por 5), esta no resulta coherente con el resto de las "definiciones" (Chemello et al., 2012, p.10).



FRACCIONES ORDINARIAS

Fracciones ordinarias. — Son las que expresan una sola o varias de las partes iguales en que se puede dividir la *unidad.* Ej.:

$\frac{2}{5}$ (dos quintos) indica **dos** de las **cinco** partes en que **se dividió la unidad**

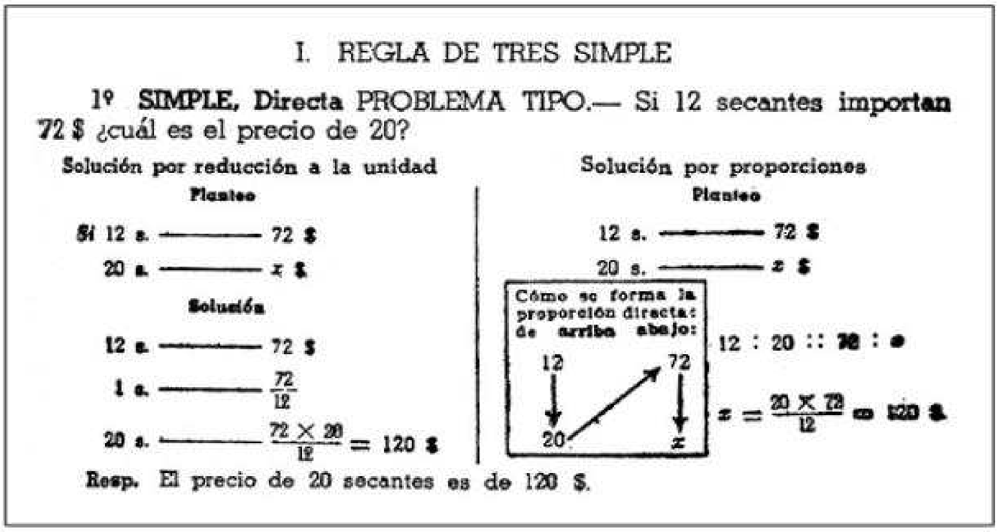
$\frac{2}{5}$ → **numerador:** indica **las partes tomadas: 2.**
→ **línea de división:** indica 2 dividido por 5.
→ **denominador:** indica las partes **en que se dividió la unidad:**

También se puelen escribir así las fracciones:
2/5; 1/8; 4/11; 23/30; ½; ¾; $^4/_{15}$; etc.

Representación e interpretación gráfica de fracciones.— Dibuje:

Pedro Berrutti, *Manual de Ingreso en Primer año* (Buenos Aires, Escolar, 1957, p. 27).

Para el caso de la proporcionalidad, nos resulta pertinente recuperar en qué se focaliza su tratamiento en estos años, lo cual se mantiene a lo largo de los años posteriores e incluso encontramos algunos rastros en los análisis de las producciones de los estudiantes de la investigación.



I. REGLA DE TRES SIMPLE

1º **SIMPLE, Directa** PROBLEMA TIPO.— Si 12 secantes **importan 72 $** ¿cuál es el precio de 20?

Solución por reducción a la unidad

Planteo

Si 12 s. ——— 72 $
20 s. ——— x $

Solución

12 s. ——— 72 $
1 s. ——— $\frac{72}{12}$
20 s. ——— $\frac{72 \times 20}{12} = 120$ $

Resp. El precio de 20 secantes es de 120 $.

Solución por proporciones

Planteo

12 s. ——— 72 $
20 s. ——— x $

12 : 20 :: 72 : x

$x = \frac{20 \times 72}{12} = 120$ $

Pedro Berrutti, *Manual de Ingreso en Primer año* (Buenos Aires, Escolar, 1957, p. 71).

Notamos en el Manual anterior, una exposición de técnicas y métodos de resolución que no explicitan ninguna de las relaciones multiplicativas que se dan entre cantidades, utilizando por ejemplo fracciones.

2.2.3. La época de la Matemática Moderna, entre los ´70 y ´80

A diferencia de los textos anteriores, en el siguiente escrito perteneciente a 1969, se pueden leer algunos vínculos entre la medida y la proporcionalidad, como así también las fracciones aparecen vinculadas con razones.

> En la razón se toma una de las cantidades que se comparan como unidad de la otra. Esto significa también buscar las veces que la unidad está contenida en el todo, o lo que es igual, a dividir por la unidad elegida. En otros términos, esto quiere decir, también, medir. Veamos: si decimos 1 pato representa 5 patos, esto significa que el gráfico expresará $\frac{1}{5}$ del total. Si obedecemos a la misma razón 1: 5 y queremos representar 10 patos, habrá que ver cuántas veces la unidad que nos sirve de referencia está contenida en 10. Ya tenemos dos razones equivalentes.
> 1 pato: 5 patos = 2 patos: 10 patos.
> De un modo general 1: 5 = 2: 10 = 3: 15 = 4: 20 = 5: 25, etc., nos permite deducir: a) todas son fracciones equivalentes; b) las representaciones que se hagan tomando como punto de referencia cada fracción serán siempre la quinta parte del todo, es decir, obedecerán a la razón $\frac{1}{5}$ (Ziperovich, 1969, pp.172-173).

Avanzando un poco en la historia, podemos notar cómo los aportes de la Matemática Moderna, "llegaron" para quedarse un tiempo en la formación docente inicial:

> En los ochenta, a partir de los aportes derivados de los avances en la psicología del desarrollo y de la matemática moderna, observamos otros cambios. [...] La preocupación de los "modernos" por definir con claridad los objetos matemáticos hace que la definición conjuntista de fracción aparezca en los textos destinados a docentes, junto con la representación en la recta numérica que le da status de número, cuestión que no se había planteado antes, al menos no de forma explícita (Chemello, et al., 2012, p.17).

También se ve reflejado el aporte de la Matemática Moderna en los libros de textos para estudiantes de escuela primaria. La imagen que se presenta a continuación nos muestra la preocupación por la definición y el uso de las ideas de pares ordenados y clases de equivalencia:

Todas las fracciones equivalentes entre sí se representan en la recta numérica por el mismo punto. Esto significa que todo el conjunto de fracciones equivalentes corresponde a un mismo número, al que se llama *número racional*. El número racional, que corresponde al conjunto de fracciones equivalentes se expresa por la fracción irreducible del conjunto.

Clasificar conjuntos de fracciones y de expresiones decimales, aplicando la relación R = "es equivalente a"

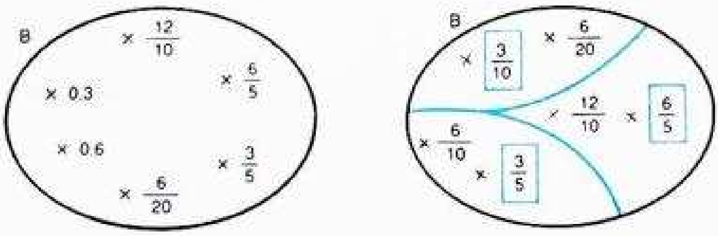
Sea $B = \left\{0.3;\ \frac{12}{10};\ \frac{6}{5};\ 0.6;\ \frac{6}{20};\ \frac{3}{5}\right\}$

Escribimos todos los elementos de B en forma fraccionaria

$B = \left\{\frac{3}{10};\ \frac{12}{10};\ \frac{6}{5};\ \frac{6}{10};\ \frac{6}{20};\ \frac{3}{5}\right\}$

Señalamos las fracciones equivalentes: $\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$; $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$; $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Aplicando la relación "es equivalente a" clasificamos el conjunto B en tres clases de equivalencia: $\frac{3}{10}$, $\frac{6}{5}$ y $\frac{3}{5}$



• Aplica la relación "es equivalente a" en los siguientes conjuntos

$C = \left\{2;\ 3;\ \frac{8}{4};\ \frac{27}{9};\ \frac{3}{9};\ \frac{12}{4};\ \frac{2}{5}\right\}$

$D = \left\{0.1;\ 0.5;\ 1.5;\ \frac{1}{2};\ \frac{6}{4}\right\}$

Manual Estrada para sexto grado (Buenos Aires, Estrada, 1985).

Finalizando la década de los ´80, se comienza a prestar atención a los diversos significados que la fracción puede tomar en el marco de distintos contextos y la complejidad que esto implica para la enseñanza y el aprendizaje. Según Valdemoros Álvarez (2004), citado por Chemello et al. (2012):

> Algunos investigadores (entre otros, Kieren, 1976, 1980, 1983, 1984, 1985, 1988, 1992, 1993; Freudenthal, 1983; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Behr y Post, 1988; Ohlsson, 1988) han promovido un gran avance, a nivel de los estudios semánticos centrados en las fracciones. Con ello, han sentado las bases para delimitar ciertos significados factibles de construcción, reconociendo simultáneamente determinados espacios de aplicación en los que ellos emergen (lo cual conlleva implicaciones didácticas directas o indirectas) (pp.21-22).

2.2.4. Algunas propuestas en los últimos 20 años

Podríamos notar algunos avances sobre el tratamiento de la complejidad de las fracciones, y los diversos significados que admiten, en algunos documentos curriculares, nacionales y provinciales para la educación primaria y la formación docente. Por ejemplo: desde la aprobación de los Contenidos Básicos comunes (CBC) en el año 1994 se plantea la necesidad de revisar el sentido de las fracciones:

> Una amplia variedad de temas de muy distinta índole se relacionan con la noción de fracción, pero, en general, no son relacionados por nosotros al planificar nuestras clases.
> No solemos relacionarlo o no explicitamos las relaciones que existen con proporcionalidad, razones, probabilidad, porcentaje, etc. La mayor parte de las veces solo se concibe la fracción como expresión de una parte en relación con un todo continuo unitario (chocolate, torta, etc.) o discreto (fracción de un número: 275 de 2000 alumnos). Para superar estas dificultades se propone en la "Síntesis explicativa" del Bloque 1: 'El trabajo con fracciones y decimales en el Primer Ciclo estará vinculado con los usos sociales de los mismos, en situaciones simples de medición, uso de dinero o lectura de precios, relacionándose este contenido con los del bloque de mediciones. En el Segundo Ciclo también se pretende un trabajo con racionales cuyo cometido sea comprender su significado matemático, dándole sentido a través de situaciones que impliquen su uso en la vida diaria y que, por lo tanto, no incorporarán expresiones complejas de las mismas (Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, 1997).

Al consultar el Diseño Curricular Jurisdiccional de la Provincia de Santa Fe (1997) para la educación primaria, notamos que no hay ningún párrafo —en los apartados dedicados a los aportes y enfoques— que exprese el posicionamiento con relación a la enseñanza de las fracciones. Sólo encontramos, al leer los contenidos conceptuales y procedimentales, que se relaciona a las fracciones usuales con la medición al explicitar que se trabaje con "medición de distintos recipientes que contengan $\frac{1}{2}$ l, $\frac{1}{4}$l y $\frac{3}{4}$l", pero no hay referencia al trabajo con magnitudes como la longitud y el tiempo en relación con las fracciones. Tampoco hay ninguna mención de las relaciones entre las razones y las fracciones cuando desarrollan los contenidos sobre proporcionalidad y funciones. En síntesis, sólo observamos un acercamiento entre las fracciones y la medición muy sencillo y escueto.

Avanzando unos pocos años, nos detenemos a leer los Núcleos de aprendizaje prioritarios (NAP) —aprobados por el Consejo Federal de Cultura y Educación en el año 2004— y notamos un avance interesante en el tratamiento de los distintos significados de la fracción en la escuela primaria. Por ejemplo, el primero de ellos que se puede leer en la imagen[24] siguiente, expresa la necesidad de interpretar, registrar y comparar el resultado de una medición, de un reparto o de una partición. Este NAP deja explícita la complejidad del significado de fracción y la pertinencia de trabajar en el segundo ciclo de la escuela primaria en este sentido, teniendo en cuenta los distintos contextos en el que se puede presentar una fracción.

EN RELACIÓN CON EL NÚMERO Y LAS OPERACIONES

4º

Matemática / 4º año

El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales de uso social habitual, en situaciones problemáticas que requieran:

- interpretar, registrar o comparar el resultado de una medición, de un reparto o una partición a través de distintas escrituras con fracciones[2]
- interpretar, registrar o comparar cantidades utilizando expresiones con una o dos cifras decimales
- interpretar la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales de uso frecuente para una misma cantidad
- comparar, entre sí y con números naturales, fracciones y expresiones con una o dos cifras decimales de uso frecuente a través de distintos procedimientos.

5º

Matemática / 5º año

El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales, en situaciones problemáticas que requieran:

- interpretar, registrar, comunicar y comparar cantidades (precios, longitudes, pesos, capacidades, áreas) usando fracciones y/o expresiones decimales usuales ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones
- interpretar la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales[10] para una misma cantidad
- comparar fracciones y/o expresiones decimales entre sí y con números naturales a través de distintos procedimientos (relaciones numéricas, expresiones equivalentes, representaciones gráficas) ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones.

Al avanzar unos años, nos encontramos con el Diseño Curricular de la Provincia de Santa Fe, aprobado en el año 2009 para la Formación docente, y al leer los ejes de contenidos, la siguiente enunciación: "Números racionales: Funciones y distintos contextos de uso. Distintos significados y diferentes formas de representación." Al buscar en la fundamentación del área, no encontramos ninguna referencia a la complejidad del trabajo con el conjunto de los números racionales, sino cuestiones generales sobre la resolución de problemas. Pero sí queda explícito en los contenidos a

---

[24] Extraída de Chemello, Agrasar, Chara y Crippa, 2012, p.25.

trabajar, que es necesario un tratamiento de los distintos significados y formas de representación, lo cual es un avance en relación con el diseño anterior.

Por último, nos resulta pertinente aclarar que en la actualidad —año 2019— no se cuenta en la Provincia de Santa Fe con un Diseño Curricular para la Educación Primaria, y que sólo tenemos como referencia para planificar las propuestas de enseñanza en el nivel primario a los NAP aprobados a Nivel Nacional.

En síntesis, en este capítulo hemos realizado un estudio matemático, histórico-fenomenológico y epistemológico que nos permitió explorar en la historia, la evolución del concepto de fracción y sus distintos significados. Además, recuperamos algunos libros de textos que nos permitieron indagar en la evolución histórica de la enseñanza de las fracciones en la Argentina desde un libro de 1880 hasta los últimos veinte años.

CAPÍTULO 3

Antecedentes de estudios didácticos sobre el tema de investigación

Cuando comenzamos una tesis, debemos hacer una búsqueda y análisis de trabajos de investigación relacionados con la temática a abordar, teniendo en cuenta las principales aportaciones producidas y realizar un registro de las conclusiones más importantes obtenidas. A continuación, exponemos aquellas que resultan relevantes y forman parte de los antecedentes significativos para esta investigación.

Como bien lo expresamos en el capítulo 1, recuperamos primeramente el trabajo de David Block en relación con la temática de la tesis. Entendemos como el trabajo del autor, a las distintas investigaciones realizadas en torno a los significados de las fracciones, tales como: Block (1987), (1991), (2001), (2006), (2007) y (2009). Luego, vamos a tener en cuenta investigaciones que, en su marco teórico, consideran algunos autores que nosotros también incluimos en la tesis, como por ejemplo: la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud como así también trabajos que en sus antecedentes recuperan cuestiones que nos interesan y aportan al análisis.

Vale aclarar, que no sólo consideramos en la búsqueda y análisis de antecedentes, los trabajos que investigan las concepciones de los futuros docentes y docentes en ejercicio, sino que también seleccionamos algunas investigaciones sobre las concepciones de los niños, pues nos aportan herramientas para el análisis. En este sentido, el trabajo de Gairín (2001), le otorga fuerza a nuestra decisión: "Resultados de investigaciones recientes han puesto de manifiesto que muchos de los problemas de comprensión sobre los números racionales no se superan en el período de la educación obligatoria; de hecho, se localizan igualmente en los maestros durante el período de su formación como docente" (p.140). De esta manera, podríamos hipotetizar que muchas de las ideas, procedimientos y errores que encontramos en los niños, luego los detectamos también en los futuros maestros. Por lo anterior, los Antecedentes se organizaron en dos bloques, el primero sobre las investigaciones realizadas de concepciones de los estudiantes de escuela primaria sobre la noción de fracción y el segundo sobre investigaciones sobre concepciones en los docentes.

3.1. Investigaciones sobre las concepciones de los estudiantes de escuela primaria acerca de la noción de fracción en diversas situaciones

Block, D. (1987)

Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria

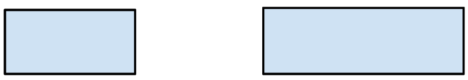
En esta investigación el autor se propone diseñar e implementar una secuencia didáctica para introducir el concepto de fracción en un grupo de niños de 3° y 4° grado. A partir de la experimentación de la secuencia se proponen averiguar, fundamentalmente, en qué grado los problemas planteados propician la implementación por parte de los niños de los procedimientos que han previsto. La situación fundamental es una situación de medición, precedida por una serie de problemas sobre reparto cuyo objeto es crear condiciones para que los niños destaquen y manejen progresivamente la relación de conmensuración entre dos valores de una magnitud, en un contexto que les es conocido. Se espera que el conocimiento de esta relación sea movilizada posteriormente como estrategia privilegiada para abordar el problema fundamental (de medición).

Los procedimientos que han previsto para la situación fundamental son dos:

a) El fraccionamiento de L o de U:

Se divide, por ejemplo, la tira U en partes iguales y se ve cuántas de estas partes yuxtapuestas coinciden con L. Ejemplo:

L mide 3 veces la mitad de U o m (L) = $\frac{3}{2}$



(Siendo U la unidad)

U L

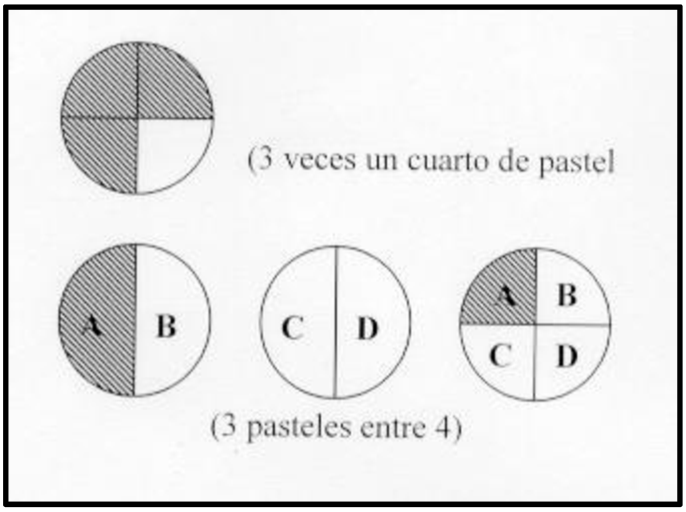
b) La conmensuración de L y de U:

Se busca el número de tiras L y el número de tiras U que yuxtapuestas, coinciden en longitud.

La medida de L se deduce de la ecuación: p veces m (L) = q veces m (U). Ejemplo:

2L mide 3U o L mide 3 U entre 2, o m (L) = $\frac{3}{2}$ (siendo U la unidad)

Cada uno de estos dos recursos genera una interpretación distinta de la fracción. El autor ilustra estas interpretaciones a partir del siguiente ejemplo[25]:



Para la primera imagen asociamos el fraccionamiento y para la segunda imagen la conmensuración. Esta diferencia es la que finalmente existe, entre la fracción como cociente de enteros y como fracción de la unidad.

El autor se propone propiciar el recurso de la conmensuración pues considera que la interpretación del número racional, como cociente de enteros, que se desprende del recurso a la conmensuración, es más general que el fraccionamiento. Una de las consecuencias de esto, es que la construcción de la interpretación de fraccionamiento de la unidad a partir de la interpretación de cociente, es muy probablemente más factible de propiciar que la construcción del racional como cociente, a partir del racional como fraccionamiento de la unidad.

Conclusiones a las que llegan:

* Las situaciones de reparto favorecieron que los niños de 3° y 4° grado movilizaran la relación de igualdad entre enteros y pedazos como estrategia para resolver los problemas propuestos. Excepto 2 grupos de 3° grado, los demás pudieron tomar como dato el tamaño de un pedazo —resultado de un reparto hipotético— y buscaron la

[25] Extraído de Block, 1987, p. 42.

coincidencia de dichos pedazos con los enteros, ya sea para determinar los datos del reparto como para seleccionar el entero.

* Únicamente los equipos de 4° grado y algunos de 3° grado, lograron movilizar la relación en cuestión sin la presencia física de alguno de los dos valores que intervienen en ella, para inferir de ésta la transformación que permite obtener el otro valor. Tres equipos de 3° manifestaron la necesidad de disponer del material concreto para realizar las reflexiones.

* Por lo menos la mitad de los niños en ambos grupos, no pudieron anticipar qué repartos arrojarían pedazos del mismo tamaño (equivalencias), excepto en el caso de repartos que arrojan mitades. Frente a esta pregunta, dejaron de considerar la relación entre los datos del reparto reduciéndolos a un simple conjunto de niños aislados o bien simplemente no contestaron. Hemos visto ya, que esta pregunta tenía una probabilidad muy baja de poder ser abordada. Al no disponer aún de una regla sobre la relación entre los datos de los repartos que permita identificar aquéllos que son equivalentes, los niños necesitan partir de una representación de los pedazos correspondientes a cada reparto, o bien, de la forma en que se realizan los repartos. Esta tarea es sumamente difícil de realizar cuando se trata de discriminar equivalencias entre varios repartos ya dados (además, nuevamente implica al problema de la conservación de la superficie).

Block, D. y Solares, D. (2001)

Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo

En este artículo, el autor presenta los resultados de un estudio experimental realizado a estudiantes de 5° grado de escuela primaria, en el que se exploran las posibilidades didácticas de la división de números naturales como fuente de problemas que vuelven funcional a la noción de fracción. Se propone mostrar como en problemas del "clásico reparto de pasteles" el cambio de variable da lugar a diversos procedimientos. Se preguntan en este sentido, ¿qué pasaría si en lugar de repartir alfajores tendrían que repartir una longitud? Luego, intentan mostrar que, mientras el reparto de pasteles propicia la obtención progresiva del cociente mediante la partición de cada unidad, el problema de dividir una longitud podría propiciar la búsqueda de una medida que satisfaga la condición que, repetida cierto número de veces, sea igual a otra medida.

Se propone a los niños el siguiente problema: Un grupo de 4 robots, dan un número determinado de pasos (todos el mismo), y avanzan cierta distancia (medida en unidades arbitrarias). Se pregunta por el tamaño de un paso de cada robot, como se muestra en la tabla[26]:

Robot	Distancia recorrida en 5 pasos	Distancia recorrida en 1 paso
A	1 unidad	
B	2 unidades	
C	3 unidades	
D	4 unidades	

Además del problema y la tabla anterior, reciben una “tira numerada del 0 al 5” de cartón y también una “tira unidad” de la misma longitud que las unidades de la tira numerada.

Luego de analizar los diversos procedimientos utilizados por los estudiantes de 5° grado, el autor llega a las siguientes conclusiones:

* La variable “tipo de magnitud” influyó notablemente en la manera de abordar el problema. Se generó una diversidad de procedimientos que no se despliegan en los clásicos problemas de reparto de pasteles.

* El procedimiento que se quiso propiciar con el cambio de variable —el uso de razones internas— fue muy poco utilizado por los niños. Por ejemplo: si un robot avanza una unidad en 5 pasos, el tamaño de su paso es fácil de determinar: $\frac{1}{5}$ de unidad. Un robot que recorre, en ese mismo número de pasos, 3 unidades, debe tener un paso tres veces mayor. Su paso mide entonces 3 veces $\frac{1}{5}$ de unidad. Este procedimiento se observa en la siguiente imagen[27]:

[26] Extraída de Block y Solares, 2001, p.17.
[27] Ibídem, p.18.

	Robot	Distancia recorrida en 5 pasos	Distancia recorrida en 1 paso	
X 3	A	1 unidad	$\frac{1}{5}$ de unidad	X 3
	C	3 unidades	$\frac{3}{5}$ de unidad	

* Desde el punto de vista de la comprensión del vínculo entre la división a: b y la fracción que resulta, $\frac{a}{b}$ necesitamos distinguir dos niveles: la mayoría de los niños, quienes utilizaron el procedimiento de partición de las unidades en el número de pasos, pudo constatar, en un contexto distinto al reparto de pasteles, que el resultado de una división a: b es la fracción $\frac{a}{b}$, pero muy pocos pudieron comprender el porqué de la relación en cuestión.

Escolano, R. y Gairín, J.M. (2005)

Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria

En la primera parte de este artículo, los autores presentan los obstáculos que se generan al priorizar una enseñanza de las fracciones sólo en el significado parte-todo, en España, específicamente. En la segunda parte, desarrollan una propuesta alternativa para estudiantes de 4°, 5° y 6° grado, que permita trabajar los significados de razón, medida, cociente y eluda el significado parte-todo.

Para ampliar el planteo que realizan en la primera parte, a continuación desarrollamos algunas ideas que nos pueden aportar al análisis posterior de las producciones de los estudiantes. Los autores analizan cómo es la presentación del significado parte-todo en los libros de textos españoles, qué características tiene esta presentación y qué errores provoca en los estudiantes. También establecen diferencias entre el significado parte-todo y los demás significados, y concluyen que el significado parte-todo no surge de las necesidades humanas y aclaran cuál es el origen histórico de las fracciones. Por último, en esta parte se exponen los obstáculos didácticos que se producen en las prácticas docentes, a partir de enfocar la enseñanza de las fracciones sólo en el trabajo del significado parte-todo:

1) Se obstaculiza la formación de concepciones adecuadas.

* No existen las fracciones impropias. El alumno se crea la idea de que el número de partes que se toman debe ser menor o igual que las partes del “todo” (Bonotto, 1993).
* Las fracciones son números, no medida. Las fracciones se presentan al margen de las magnitudes […] (Gairín, 2004 a).
* El “todo” o unidad no es un número. En el proceso instructivo no se explicita el sentido y funciones de la unidad, lo que provoca la identificación de las fracciones del tipo $\frac{a}{a}$ con la unidad, pues los estudiantes tienden a señalar que este tipo de fracciones representa el todo, o que han tomado a elementos (Gairín, 2001).
2) Se obstaculiza la separación conceptual del número racional del número natural. La instrucción desde el significado de parte-todo no justifica la introducción de una nueva estructura numérica puesto que para la resolución de las tareas basta el recuento de números naturales, lo que provoca ideas erróneas en los estudiantes:
* La fracción está formada por dos números naturales. La fracción describe una situación estática en la que hay involucrado dos números naturales; por tanto, ni la fracción, ni la expresión decimal, se entienden como un solo ente numérico de naturaleza diferente a la de los naturales.
* Las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mismo sentido que en los números naturales.
3) Se obstaculiza la formación de ideas abstractas.
No se sitúa a los estudiantes en disposición de buscar estrategias de resolución de situaciones problemáticas que le faciliten el paso del mundo de los objetos al mundo de las ideas; así ellos se forjan creencias como las siguientes:
* Los conceptos son técnicas asociadas a los mismos. Para los estudiantes las ideas sobre relaciones y operaciones se limitan al uso de sus técnicas asociadas: por ejemplo, el significado de la suma de fracciones es el algoritmo que proporciona el resultado de dicha suma.
* Los contenidos útiles son los procedimentales. Se memorizan las técnicas de cálculo sin preocuparse de sus fundamentos teóricos, lo que provoca resultados de esta índole: solo el 33% de los estudiantes de 6° curso de Educación Primaria (12 años) responde correctamente a la pregunta ¿qué tanto por ciento representa $\frac{2}{5}$? (INCE, 2002, p.2).

En la segunda parte, sólo se presentan los resultados del estudio realizado a estudiantes de 4° grado de escuela primaria, en el que se explora la fracción con modelos de medida

directa. Pero cabe aclarar, que también se llevó a cabo la investigación con estudiantes de 5° grado y 6° grado, con modelos de cociente y razón respectivamente.
Se propone a los niños el siguiente problema en una primera instancia: "Deseáis encargar, por carta, una barra para colgar la cortina que tenéis en la pared. ¿Qué le escribiríais al vendedor para que os venda una barra que tenga la misma longitud que la de la cortina? El vendedor nos ha mandado lo que llama una unidad de medida que tiene la misma longitud que las tiras de papel que os entrego. También os entrego una carta que solo tengáis que rellenar os espacios en blanco". A posteriori se proponen otros problemas, en total 30 tareas en múltiples sesiones de 50 minutos.
Luego de analizar los diversos procedimientos utilizados por los estudiantes de 4° grado, los autores llegan a conclusiones en relación con la comprensión de los mismos. A continuación exponemos algunas:
* Los estudiantes no intuyen la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida cuando intentan resolver la primera situación problemática, lo que obliga al profesor a sugerir esta idea central para dar significado a la fracción.
* En las tareas de medida, encuentran con facilidad la fracción que expresa la cantidad de longitud, superficie o cardinalidad. Sin embargo, tienen serias dificultades en el trabajo con la magnitud masa.
* No se detectan diferencias significativas en la comprensión de los escolares cuando trabajan con las magnitudes longitud o superficie.
* Los estudiantes aceptan de forma natural la existencia de fracciones mayores, menores o iguales que la unidad.
Por último, destacamos que, de esta investigación nos resulta interesante más que nada la 1° parte, por el desarrollo que realiza del tratamiento del significado parte-todo y los obstáculos que genera, lo cual será utilizado en el análisis de las producciones de nuestros estudiantes.

Block, D. (2007)

El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria

Este estudio se propone indagar sobre cómo la enseñanza de los números racionales puede verse enriquecida a partir de los conocimientos que los estudiantes tienen y podrían desarrollar sobre las razones entre números naturales. Para esta investigación se utilizan entrevistas individuales realizadas a 13 estudiantes de 4°, 5° y 6° grado de distintas escuelas de México, como así también la implementación de secuencias didácticas y el análisis de las producciones.

En una primera parte se analizan los procedimientos utilizados por los niños para resolver una serie de problemas y el autor intenta mostrar que a pesar de haber recibido una enseñanza sistemática del tema fracciones, los niños utilizan de manera espontánea a las razones.

Se toman los siguientes problemas para el análisis:

* Una rana avanza 5 varas en 3 saltos, ¿cuántas varas avanza en 12 saltos?

* En la mesa A se reparte 1 pastel entre 3 niños; y en la mesa B se reparten 2 pasteles entre 7 niños. ¿En cuál mesa le toca más pastel a cada niño?

* Varios niños deciden trabajar durante las vacaciones en las huertas cercanas a su casa. El trabajo que les ofrecen es recoger naranjas que ya se cayeron y están sobre el piso. Cada agricultor les ofrece un trato distinto. Los niños tienen que averiguar que trato les conviene más.

En la huerta “Sonora” les ofrecen: Por cada 3 naranjas que recojan, se quedan con 2.

En la huerta “Vista Hermosa” les ofrecen: Por cada 10 naranjas que recojan se quedan con 9.

¿Cuál de los dos tratos les conviene más?

Algunas conclusiones

Con relación al problema de los pasteles:

* 7 niños de 13, compararon las fracciones de pastel sin hacer explícitas las fracciones, a partir de las siguientes relaciones entre razones;" 1 pastel para 3 niños" es equivalente a "2 pasteles para 6 niños" y esto es más que "2 pasteles para 7 niños".

* 6 niños de 13 intentaron determinar la cantidad de pastel por niño, por lo general a partir de representaciones gráficas, pero solamente dos (de sexto grado) lo lograron.

Con relación al problema de la rana:

* 4 de 13 estudiantes intentaron determinar el tamaño de un salto, pero no tuvieron éxito.

* También 4 de 13 estudiantes, consideraron la relación multiplicativa entre 12 saltos y 3 saltos, en cuyo caso siempre tuvieron éxito.

* 2 niños utilizaron una constante aditiva.

En relación con el problema de las naranjas:

* 1 solo niño comparó las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{9}{10}$.

* La mayoría buscó parejas de cantidades a partir de los datos para igualar algún término y comparar. En algunos casos presentaron dificultades pues no encontraron múltiplos comunes.

El análisis de las resoluciones de este tipo de problemas, permitió destacar, en primer lugar, la utilización de razones y de algunas de sus propiedades, cuando los estudiantes aún no disponen de los números que cuantifican a estas razones, o no pueden usarlos con ese sentido. En segundo lugar nos deja ver algunas formas en que las fracciones simples, como $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ emergen en estos procedimientos, con el sentido pleno de expresiones de conjuntos de razones equivalentes, es decir, como expresiones de una razón constante. Al mismo tiempo, sugiere que los estudiantes de sexto grado han avanzado poco en el proceso de utilizar fracciones con el sentido de razones o de operadores multiplicativos.

En la segunda parte se analiza específicamente el problema del rompecabezas[28] y los procedimientos abordados por los niños. Algunas conclusiones a las que se llegan después del análisis:

* Han avanzado muy poco en el proceso de utilizar fracciones con el sentido de operadores multiplicativos o razones. Los estudiantes de 4° a 6° grado de primaria que entrevistamos, muestran poder resolver problemas de tipo “valor faltante” y “comparación de razones”, que implican fracciones, tanto con el papel de expresar medidas como en el de expresar operadores multiplicativos sin hacer explícitas las fracciones, manipulando razones de números naturales: “a de cada b”, “a por cada b”, “a entre b”, en vez de “ $\frac{a}{b}$ de”. En contraparte, muestran un bajo dominio de las fracciones.

Ramírez, M. y Block, D. (2009)

La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares

En la primera parte del texto los autores presentan aspectos importantes de la génesis de la noción de fracción y de razón. En la segunda parte, destacan algunas de las numerosas dificultades que se suscitan en torno al vínculo razón-fracción en las clases impartidas por un maestro de sexto grado de primaria en una escuela pública urbana del Distrito Federal, México.

---

[28] Este renombrado problema se presenta en Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en Didactique des Mathématiques 2(1), pp.37-127.

Nos interesamos más que nada en la segunda parte, pues presenta algunas características de la enseñanza y de los conocimientos del maestro. En total se observaron 12 clases de 90 a 120 minutos, y se notó que la introducción de las fracciones en el proceso de aprender a resolver problemas de proporcionalidad resultó problemática: en ciertos momentos. También resultó superficial, quedando como una manera más de nombrar las cosas, creándose con ello, en el nivel de representación simbólica, una identidad entre ambas —fracción y razón— pero con un significado poco claro para los estudiantes. Las fracciones prestaron la técnica de la simplificación para comprobar que todas las razones en juego eran equivalentes, pero los estudiantes no lograron articularlas con sus procedimientos, más bien, las fracciones tendieron a restar visibilidad a estos últimos. A esta situación hay que agregar la presencia de una interpretación particular (errónea) de razón como fracción que excluye a los números naturales.

Así, la introducción de la fracciones como definición de las razones parece aportar al trabajo de la proporcionalidad una tecnología, la de las fracciones, cuya pertinencia pocas veces es clara, a la vez que suele despojar de sentido a los procedimientos desarrollados en la clase. El conflicto entre lo implícito funcional y lo explícito se presenta cuando este último no se construye a partir del primero, más bien lo niega, y no logra mostrar su funcionalidad.

Debemos aclarar que, desde nuestro punto de vista, las fracciones y los decimales sí pueden constituir una expresión muy útil de las razones. Con esa expresión es como cobran su mayor operatividad en el sentido de facilidad para el cálculo. También con esa expresión permiten poner de manifiesto, con la mayor claridad, la idea de razón constante entre cantidades variables. Hemos argumentado este punto de vista en varios trabajos (Block, 2006 a y c). Lo que hemos intentado mostrar en este artículo es que dicha función de las fracciones y los decimales como expresiones de las razones no está resuelta desde el punto de vista didáctico.

Schlieman, A.; Carraher, D. y Brizuela, B. (2011)

De cantidades a proporciones, funciones y notación algebraica

En este estudio, el objetivo de los autores es ayudar a 18 niños de 3° grado de una escuela primaria pública de la zona de Boston, a construir una comprensión de la multiplicación desde un punto de vista algebraico y como una relación funcional. Para lo cual, diseñaron actividades dirigidas a que el enfoque escalar pudiera ser cambiado a un enfoque funcional. Para explicar el *enfoque escalar,* recuperan algunas investigaciones anteriores con vendedores ambulantes. Éstos, calculan el precio de una cierta cantidad de artículos que venden, y para ello comienzan a partir del precio de una cierta cantidad de artículos, y por lo general realizan sumas sucesivas de ese precio, tantas veces como el número de artículos vendidos. Vergnaud (1983, 1988) describe esta estrategia como enfoque escalar. La idea principal es que tienden a realizar sumas repetidas a lo largo de cada variable, sumando dinero con dinero, artículos con artículos. Si tratamos de entender su procedimiento en términos de desplazamientos en una tabla de funciones, vemos que trabajan bajando por la columna del número y por la columna del precio, realizando operaciones con medidas de la misma naturaleza.

Por el contrario, el *enfoque funcional* presumiblemente se base en relaciones entre variables, a menudo variables de diferente naturaleza. Este enfoque se basa en cómo una variable varía en función de la otra variable (Vergnaud, 1983).

En primer lugar, los autores comenzaron su intervención didáctica mediante el uso de tablas de funciones que relacionaban dos cantidades: número de artículos y precios. Encontraron que los niños podían completar las tablas pero lo hacían con un mínimo de reflexión sobre la relación invariante entre los valores de la primera y segunda columna. Luego introdujeron una variable solicitando que “adivinen la regla” y de esta manera lograron romper con la estrategia de trabajar con cada columna. A pesar de los inconvenientes que encontraron —los niños no se enfocaban espontáneamente en la relación funcional y necesitaban ayuda externa—, los estudiantes podían concentrarse en las relaciones funcionales si las tareas que se les pedía que resolvieran eran conducentes a examinar relaciones funcionales.

En síntesis, los autores quieren destacar en esta investigación que las funciones lineales pueden comenzar a ser exploradas como extensiones del trabajo de los estudiantes con las tablas de multiplicar y con la operación de multiplicación. Además, los niños no necesitaron de objetos concretos para apoyar su razonamiento sobre relaciones numéricas, e incluso pudieron trabajar con notaciones de carácter algebraico. De hecho, la introducción de la notación algebraica los ayudó a pasar de resultados de cálculos específicos a generalizaciones acerca de cómo dos series de números están relacionados.

3.2. Investigaciones sobre las concepciones de los docentes acerca de la noción de fracción en diversas situaciones

Block, D. y Balbuena, H. (1991)

¿Qué significa multiplicar por $\frac{7}{4}$? Reflexiones sobre lo que sucedió en una clase de matemáticas para maestros

Los autores en este artículo se refieren a una experiencia con maestros estudiantes de la Licenciatura en Educación Indígena, sobre la multiplicación por una fracción. Ellos plantean que hay un campo de problemas mucho más amplio, que los problemas de cálculos de áreas, en el que interviene la multiplicación por una fracción: lo constituyen los problemas de proporcionalidad en los que la fracción juega el papel de un operador multiplicativo.

En la investigación, proponen a los docentes el problema del rompecabezas[29] y tienen la expectativa de que los estudiantes utilicen, entre otros recursos, a la fracción como operador multiplicativo al encontrar que multiplicando por $\frac{7}{4}$ cada una de las medidas originales, se obtienen las nuevas medidas del rompecabezas.

Luego de la experiencia llegan a las siguientes conclusiones:

* El operador (x $\frac{7}{4}$) no aparece en las producciones de los docentes. Si bien los procedimientos muestran una riqueza de formas para abordar un problema de crecimiento proporcional, ningún equipo logró construir o identificar al operador (x $\frac{7}{4}$) que asocia a cada medida de la figura original, su imagen en la figura ampliada. Es decir, para los maestros no existe un número que multiplicado por 4 dé como resultado 7 y por esta razón, no sienten necesidad de buscarlo. Esto se hizo más evidente aún al final de la sesión, cuando el profesor expone las distintas medidas, las originales y las transformadas, y plantea que encuentren un número que multiplicado por las medidas originales, dé las otras medidas. Los alumnos muestran no tener ninguna seguridad, incluso uno de ellos pregunta ¿tiene que ser el mismo número?

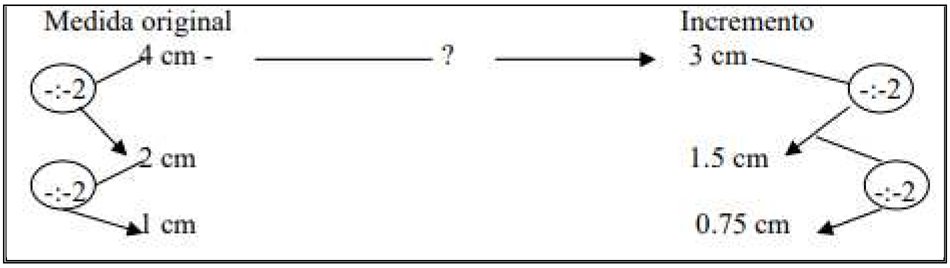
* El punto anterior pone en evidencia la ausencia de significado de la multiplicación por una fracción, ausencia parcial en algunos docentes y total en otros. Parece que la

[29] El mismo problema se planteó a los niños en Block (2007), investigación desarrollada anteriormente en este mismo capítulo. La actividad fue diseñada para el aprendizaje de los números racionales por Nadine y Guy Brousseau (1987).

multiplicación, sigue estrechamente vinculada a la idea de número entero de veces más grande, y detrás de este sentido, al de suma iterada.

* Los procedimientos que produjeron —creativos y acertados— pueden verse como la producción de alternativas que evitan justamente esta ausencia antes planteada. Los 3 equipos de trabajo terminan resolviendo el problema centrándose en lo que hay que aumentar a las medidas originales para obtener las ampliadas. Todos logran considerar que ese aumento es proporcional: en un equipo proponen aumentar 1,5 cm cada 2 cm, en otro el 75% de cada medida original y en otro 75 mm por cada centímetro.

Por ejemplo: para encontrar los incrementos correspondientes a cada medida, el equipo 1 y el equipo 3, en su primer acercamiento al problema, se las arreglan para manejar operadores enteros y no el operador fraccionario. Dicho procedimiento se observa en la siguiente imagen[30]:



Es decir, manejan las relaciones verticales (internas) de la situación proporcional: de 4 a 2 es la mitad, y entonces la imagen de 2 es la mitad de 3, y no la relación en sentido horizontal (externas).

El artículo finaliza con una serie de interrogantes para seguir pensando esta temática, tales como: ¿qué interpretaciones o significados propiciar y en qué orden?, ¿qué situaciones o problemas implican a esas interpretaciones?, ¿cómo son los procesos a través de los cuales los alumnos construyen una interpretación?

Gairín, J.M. (2003)

Estudiantes para maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos

En este trabajo, en una primera parte, los autores expresan su preocupación por ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades de comprensión de los números racionales y desde allí se proponen analizar las concepciones que tienen los futuros maestros sobre

[30] Extraída de Block y Balbuena, 1991, p.6.

los significados de las fracciones y las expresiones decimales, entre otros aspectos. Para lo cual, realizan una encuesta a estudiantes de 2° curso de la Diplomatura de maestro en la Universidad de Zaragoza. La misma se toma antes de comenzar el desarrollo de la asignatura, por lo tanto las respuestas indican las concepciones previas sobre los números racionales.

A partir del análisis de la encuesta se encuentran algunas características, de las cuales aquí recuperamos sólo algunas que nos aportan al trabajo de investigación:

* *Característica 1*: los estudiantes para maestro tienen un significado casi exclusivo de la fracción como relación parte-todo; además, este significado se asocia a un modelo físico.

Ante la consigna: "Escribe todo lo que entiendes cuando ves el símbolo $\frac{5}{7}$" Encuentran que el 59% hace una lectura de los símbolos, por ejemplo: cinco séptimos y el 32% responde desde la relación parte-todo diciendo que es una parte de la tarta o de helado.

* *Característica 3*: la relación entre las notaciones fraccionarias y decimales se establece de forma exclusiva mediante procesos algorítmicos.

Ante la consigna: "Escribe distintas formas de justificar que los números 0,375 y $\frac{3}{8}$ son iguales" Obtienen que un 74% utiliza como justificación el algoritmo de la división del numerador entre el denominador.

* *Característica 4*: las relaciones de orden entre fracciones no se justifican en modelos, simplemente se utilizan técnicas de cálculo, como la búsqueda de fracciones equivalentes con igual denominador o la expresión decimal.

Frente a la consigna: "Escribe diferentes formas de justificar que $\frac{3}{5}$ es mayor que $\frac{4}{7}$" encuentran que el 47% de los estudiantes ordenan utilizando la expresión decimal y el 34% buscando fracciones equivalentes con igual denominador.

Luego, los autores se proponen analizar una serie de fenómenos detectados en las producciones de los maestros en formación; estos fenómenos son consecuencia de un proceso instructivo en el que prima el significado de la fracción como relación parte-todo. Además, se completa esta primera parte del trabajo con el análisis de los siguientes interrogantes: ¿cuáles son las características de los conocimientos matemáticos que utilizan? y ¿qué dificultades de comprensión se detectan en las producciones de los maestros en formación?

A continuación, recuperamos algunos de los ocho fenómenos detectados pues nos permitirán tomarlos como referencia para nuestro análisis posterior:

* *Fenómeno 1*: el significado de la fracción es un conocimiento inestable.

Ejemplo a)

¿Qué fracción representa la parte sombreada de la figura[31]?

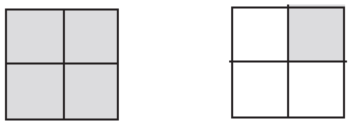


Figura 1

La respuesta de los estudiantes no es unánime: para unos es $\frac{5}{4}$ y para otros es $\frac{5}{8}$. Es más, ninguno de los estudiantes es capaz de rebatir la otra respuesta.

Ejemplo b)

Se propone a los estudiantes justificar cuál de las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{5}$ es la mayor.

Uno de los estudiantes representa las dos fracciones sobre una misma unidad y justifica que lo hace así porque de lo contrario no puedo compararlas (muestra el siguiente dibujo[32]):

Figura 2

Los autores plantean que ante la necesidad de controlar un aspecto de la tarea, el alumno ha convertido la fracción $\frac{6}{5}$ en la fracción $\frac{5}{6}$, lo que implica un cambio sustancial en el significado de la fracción. Ejemplos como estos sustentan la idea de que el significado de la fracción como relación parte-todo es menos estable de lo que se presuponía, pues puede modificarse en función de la exigencia de la tarea.

* *Fenómeno 3*: se tiende a sustituir los conceptos por alguna de las técnicas asociadas.

Ejemplo:

¿Son equivalentes las fracciones $\frac{5}{12}$ y $\frac{10}{24}$? ¿Por qué?

---

[31] Extraída de Gairín, 2003, p.240.

[32] Ibídem.

Uno de los estudiantes propone: Sí, son equivalentes porque al multiplicar (o dividir) el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número se obtiene la otra fracción equivalente.
Ahora bien, ¿qué ocurre cuando se les plantea la siguiente situación?

Pedro retira 5 bombones de una caja de 12, retira $\frac{5}{12}$ de la caja. Ana retira 10 bombones de una cada de 24, retira $\frac{10}{24}$ de la caja. ¿Son equivalentes $\frac{5}{12}$ y $\frac{10}{24}$?

Ocurre que se encuentra en un dilema que no sabe resolver: por un lado acaba de reconocer que las fracciones $\frac{5}{12}$ y $\frac{10}{24}$ son equivalentes pero por otra parte, observa que Pedro retira 5 bombones mientras que Ana retira 10 bombones. Este ejemplo nos permite afirmar que este alumno comprende que conocer el concepto de equivalencia de fracciones significa conocer la técnica de comprobación del concepto y no las formas distintas de expresar una misma cantidad de magnitud.
* *Fenómeno 4*: los conocimientos de los estudiantes sobre los números racionales suelen estar limitados al uso de reglas.
Ejemplo: Justifica el algoritmo de la suma con las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$.
Las respuestas que encontraron ponen de manifiesto que se utilizan procedimientos de cálculo que no están conceptualmente justificados, simplemente son hechos aprendidos; el conocimiento sobre los algoritmos no incluye su fundamentación, simplemente preocupa su funcionamiento y el buen uso que se haga del mismo.

En la segunda parte, los autores ofrecen una propuesta para incrementar la comprensión de los números racionales y de esta manera mejorar la formación de los futuros maestros. Recuperamos algunos aspectos de la misma, los cuales podrán ser tenidos en cuenta al momento de las conclusiones finales como parte de las sugerencias que se pueden proponer para avanzar en el trabajo escolar sobre el concepto de fracción.
** Caracterizar un modelo para el aprendizaje de los números racionales positivos*
En el caso de los números racionales los modelos para el aprendizaje vienen definidos por cuatro variables (Gairín, 2001): una magnitud medible, unos objetos en los que se puedan medir cantidades de las magnitudes consideradas, unas acciones sobre los

objetos que provocan modificaciones en la cantidad de magnitud y una técnica para realizar las acciones.

* *Significar la fracción como medida*

Los autores sugieren abandonar la idea de parte-todo y situar la instrucción sobre la medida de cantidades de magnitud que no contienen un número entero de veces la unidad de medida. De esta manera el número racional surge del fraccionamiento de la unidad de medida.

* *Reelaborar el mapa conceptual de los estudiantes sobre los números racionales*

La propuesta de los autores tiene las siguientes peculiaridades:

1) [...] proponer un modelo definido por las siguientes variables (Gairín, 2001):

–las magnitudes son longitud y superficie.

–Los objetos son tiras de papel y polígonos de cartón.

–La acción que se propone es medir.

–La técnica de medida consiste en una sola partición de la unidad, en la creación de una única subunidad de medida.

2) La fracción $\frac{m}{n}$ se presenta como el resultado de una medida, como la expresión del número *m* de subunidades —de tamaño $\frac{1}{n}$ de unidad—, que corresponde a la cantidad de magnitud medida. De este modo, la fracción queda asociada a la medida de cantidades de magnitud, lo que va a permitir:

–Presentar una ruptura entre los números naturales y los racionales a partir de sus diferentes usos.

–Potenciar un aprendizaje activo puesto que es el propio estudiante quien tiene que decidir la elección de la subunidad de medida necesaria para efectuar la medida.

–Introducir, de forma natural, las fracciones con numeradores mayores, menores o iguales que el denominador, sin más que proponer la medida de cantidades mayores, menores o iguales a la unidad.

* *Dar significado a la fracción como cociente partitivo*

Para dar significado a la fracción como cociente partitivo sugieren un modelo definido por las siguientes variables:

–Los objetos que se consideran son objetos habituales en la vida de los estudiantes y sobre los que se realizan fraccionamientos en sectores circulares.

–La magnitud elegida es la superficie porque la igualdad de cantidades de superficie se controla por la igualdad de los ángulos de los sectores circulares.

–La acción que se realiza sobre los objetos es la de hacer repartos igualitarios.

–La técnica para efectuar la acción es la de hacerlo en una sola fase: la subunidades se fraccionan en tantas partes iguales como participantes, a cada uno de los cuales se les entrega una parte de cada una de las unidades a repartir.

Para cuantificar el resultado del reparto, hay que utilizar la expresión $\frac{m}{n}$ que indica la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los *n* participantes entre los que se reparten *m* unidades de magnitud.

Luelmo Livas, M. (2004)

Concepciones Matemáticas de los Docentes de Primaria en relación con la Fracción como Razón y como Operador Multiplicativo

Este autor afirma que, en su estudio realiza un análisis de la enseñanza de las fracciones a partir de una de las teorías más actuales que rigen a la enseñanza de las matemáticas: la teoría de los campos conceptuales.

Además, la investigación considera los siguientes significados para la fracción: como medida, como cociente, como razón y como operador multiplicativo, y considera que estos dos últimos son los más difíciles de adquirir, por lo cual se centra en ellos. La investigación se pregunta específicamente, ¿cuáles son las concepciones matemáticas de los docentes de primaria acerca de la fracción como operador multiplicativo y como razón?

Para la muestra, la autora toma a ocho maestros titulares de una escuela primaria pública del Distrito Federal (México) y es de tipo no probabilística, ya que la elección de los docentes dependió de su disponibilidad al momento de la aplicación.

Para la interpretación de cada uno de los problemas, la investigación considera a los niveles definidos por Hart (1983) y Kieren (1983). El nivel 0, implica no dar una solución a los problemas planteados, el 1 incluye una respuesta al problema pero no correcta, el nivel 2 y 3 implica una respuesta adecuada pero sin la conciencia del uso de razones para obtenerla y el nivel 4 es considerado cuando las respuestas son adecuadas y utilizan un procedimiento canónico convencional y se toma conciencia del uso de razones.

Algunos resultados de dicha investigación que aportan a nuestro trabajo son:

* Para los problemas que consideran a la fracción como razón, sólo el 10,9% de ellos tienen una respuesta en el nivel 4. El 53,1% de los problemas fueron resueltos pero sin conciencia del uso de razones (nivel 3), el 15,6% de los problemas se resolvieron pero de manera inadecuada y el 20,3% no fueron resueltos.
* En los problemas que implican la fracción como razón, dos de los maestros logran resolver el 25% del total de los problemas dando una respuesta adecuada y manifestando el uso de la razón para obtener dichos resultados. Otros dos maestros, logran resolver el 12,5% de los problemas con conciencia del uso de la razón y los cuatro maestros restantes no logran resolver ningún problema con conciencia del uso de la razón.
* Sólo encontramos un maestro con todas las respuestas correctas pero sólo el 25% de estas respuestas fueron realizadas con conciencia del uso de las razones. Otros tres docentes logran reunir el 75% de las respuestas en los niveles 3 y 4, lo que implica respuestas adecuadas pero no todos con conciencia del uso de razones. Por último, la investigación plantea que es preocupante que el 50% de los docentes no logra dar ni una sola respuesta con conciencia del uso de razones para obtener los resultados y que dos de ellos obtengan sólo el 25% y 35,7% de los problemas propuestos respectivamente, con la respuesta adecuada.
* En cuanto a los posibles niveles de respuesta de la fracción como operador multiplicativo, podemos observar que a medida que las consignas se complejizan, las frecuencias en el nivel 0, más bajo, aumentan. La autora plantea que, teóricamente, el uso de fracciones como operadores multiplicativos es mucho más complejo que el uso de razones, sin embargo, podemos observar que en los docentes estudiados no es así, ya que se encuentran mucho mejor a nivel general en las respuestas que implican fracción como operador multiplicativo.
* El 25% de los docentes no han entrado a la relación proporcional más sencilla (doble), y al enfrentarse a problemas que implican esta relación asimilan el problema con otro tipo de estructuras como la aditiva.

Block, D. (2006)

Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad

En esta investigación, el autor indagó por una parte, los conocimientos explícitos —que poseen 65 docentes de primaria— sobre algunas características de una relación de proporcionalidad. Por otra parte, se exploró el grado en que prevén el efecto de algunas variables didácticas[33] de problemas típicos de proporcionalidad, en la dificultad que éstos tienen para estudiantes de primaria y en los procedimientos de resolución.

En la primera parte de esta encuesta se preguntó: ¿Qué caracteriza a una relación de proporcionalidad? Se presentaron a los maestros varias propiedades para que indicaran, en cada caso, si la propiedad les parecía suficiente para que la relación fuera de proporcionalidad, no suficiente, o falsa. También podían anotar "no sé" o "no estoy seguro".

Algunos resultados para destacar de esta investigación:

* El 63% de los maestros identificó la propiedad de la conservación de las razones internas como una condición suficiente para que hubiera proporcionalidad y sólo el 15% identificó como tal a la condición de cocientes constantes o, con otra formulación, a la existencia de una constante de proporcionalidad (20%). Este hecho contrasta con la escasa mención del procedimiento de conservación de las razones internas en las otras partes del cuestionario, como se verá más adelante. Al parecer, aunque reconocen esta propiedad como una condición para que haya proporcionalidad, tienden a no esperar que sus estudiantes recurran a ella al resolver problemas.

* Únicamente tres maestros distinguieron la función afín de la relación proporcional.

* El 32% del grupo, sabe que la conservación de las diferencias no corresponde a una relación de proporcionalidad. El 25% consideran que sí corresponde y el 43% duda.

* Para el 71% del grupo, el hecho de que "cuando una cantidad aumenta la otra también aumenta", fue una condición suficiente para considerar que la relación es de proporcionalidad.

En la segunda parte de la encuesta se preguntó: ¿cómo lo resolverían los niños?

Se entregaron a los maestros doce problemas con la siguiente consigna:

1) "Anote el ciclo[34] escolar para el que lo considera adecuado".
2) "Explique cómo lo podría resolver un alumno de ese ciclo (…)."

Los maestros tendieron a contestar la segunda pregunta en términos normativos, es decir, explicaron cómo deberían resolver los estudiantes los problemas y no cómo los

---

[33] En este caso la variable didáctica está dada por el carácter entero o no entero de las razones interna y externa. Los términos de "razón interna" y "razón externa" son tomados de Freudenthal (1983) y refieren, la primera, a una razón al interior de cantidades de un mismo conjunto y, la segunda, a una razón entre cantidades de dos conjuntos.

[34] El primer ciclo corresponde a primero y segundo grado, el segundo ciclo a tercero y cuarto grado, el tercer ciclo a quinto y sexto, y el cuarto ciclo a la escuela secundaria (grados 7, 8 y 9).

podrían resolver a partir de los saberes disponibles. También fue notorio que las resoluciones propuestas tendieron a ser las que ellos usan como docentes.
A continuación retomamos 2 problemas[35] —en los que se plantea una ampliación a escala de un triángulo rectángulo— que nos resultan significativos para nuestra investigación:

PROBLEMA 1	
A	A´
5	30
7	?

PROBLEMA 2	
B	B´
5	7
10	?

La mayoría de los maestros tendieron a asignar el problema 1 al segundo ciclo y el problema 2 al tercero, por lo que puede suponerse que consideraron al problema 2 como más difícil que el problema 1. Al analizar los procedimientos propuestos se explica esa diferencia: en el problema 1 el 56% de los maestros utilizó el operador entero "por 6", coincidiendo con uno de los procedimientos probables en los niños. En cambio, en el problema 2:
* Fueron relativamente pocos (17%) quienes utilizaron la conservación de las razones internas, alejándose en este caso de un procedimiento probable por parte de los niños.
* El 14% presentó el mismo procedimiento que para el problema anterior, la determinación del operador (x $\frac{7}{4}$ o x 1,4). Puede decirse que, para estos maestros, el carácter entero o no entero de las razones externa e interna no es percibido en este problema como una variable que afecte al tipo de procedimiento.
* El 14% propuso la utilización de la regla de tres. Dado que en el problema 1 únicamente el 3% lo hizo, puede inferirse que para algunos maestros el cambio de procedimiento a favor de la regla de tres constituye un efecto de la variable "razón externa entera o no entera". Finalmente, un 17% de los maestros mostró un procedimiento aditivo. Por la forma en que redactaron la respuesta (no expresaron que se tratara de un error de los estudiantes), y por la respuesta que dieron a una pregunta

[35] Extraído de Block, 2006, p.677.

explícita al respecto en la primera parte del cuestionario, consideramos que se trata de un error de los maestros.

En la tercera parte se solicitó que ordenen 3 problemas desde el punto de vista de su grado de dificultad para estudiantes de primaria y que justifiquen su decisión, incluso en el caso en que consideren que dos de ellos o los tres presentan el mismo grado de dificultad.
En el problema A, la razón externa es entera pero la interna no. En el problema B, ninguna razón es entera y en el problema C, la razón externa no es entera pero la interna sí lo es.
Algunas conclusiones que los autores elaboran a partir de las producciones de los docentes:
* Solamente el 6% consideró que el nivel de dificultad de los tres problemas era el mismo, por lo que puede decirse que la gran mayoría atribuyó a la variable en juego algún efecto sobre el grado dificultad.
* Un poco más de la mitad de los maestros consideraron el siguiente orden de dificultad: el más difícil es el problema C, el intermedio el problema B y el más fácil, el problema A. Diez maestros explicaron que el criterio utilizado fue la dificultad de la división que permite calcular el valor unitario: cociente entero en A (12:4 = 3), cociente con una sola cifra después del punto en B (6:4 = 1,5) y cociente decimal periódico en C (5:3 = 1,66).
Es probable que otros maestros hayan aplicado también ese criterio pues el procedimiento de reducción a la unidad fue el más utilizado en los tres problemas, sobre todo en A y B. una operación implicada, dentro de un procedimiento determinado.

Por último, el autor plantea como conclusión general, que los datos obtenidos sugieren que los conocimientos de los maestros de primaria acerca de las características de una relación de proporcionalidad son precarios. El hecho de que solamente el 32% de los docentes supiera que una constante aditiva no caracteriza a este tipo de relación sugiere la importancia del problema. Se vislumbra también una dificultad por parte de los maestros para anticipar el efecto que puede tener la manipulación de las variables didácticas de los problemas sobre la dificultad que éstos pueden tener para los estudiantes, así como sobre los procedimientos de resolución.

Hincapié Morales, C. (2011)

Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota

Este proyecto busca fortalecer las prácticas de enseñanza de los docentes de primaria del Instituto San Andrés favoreciendo la comprensión conceptual de las fracciones a partir de desarrollo de guías de trabajo con situaciones problemáticas que involucran sus diferentes significados y representaciones. Se trabaja con 23 docentes en total y los problemas incluyen los significados de la fracción como: parte-todo, división, operador, razón y medida.

Algunas observaciones que realiza la autora en relación con el trabajo llevado a cabo:

* En cuanto a la interpretación del concepto de fracción, se amplía la mirada —a lo largo de las jornadas—, de la concepción de fracción como expresión de una parte de un todo hacia una concepción en la que la fracción expresa: comparación de una medida, comparación entre dos cantidades, situación de reparto, modificadora de la unidad. En este mismo sentido, en el último encuentro se le presenta una fracción para que le dieran significado y la representaran de diferentes maneras, pero ningún docente pudo hacerlo completamente, hubo que hacerlo en forma grupal.

* Explorando la idea de fracciones impropias se presentan dificultades, pues las partes superan el todo.

* Otra dificultad es comprender los significados de la fracción como razón y como medida por desconocimiento de conceptos relacionados al pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y sistema de datos.

* En el diagnóstico realizado sobre los tipos de representaciones utilizadas, predomina la representación gráfica (rectángulo, círculo). Al subdividir la unidad por lo general se hace de la misma forma y esta representación es utilizada sin distinción en contextos continuos y discretos. La representación numérica $\frac{a}{b}$, también es muy utilizada pero se le atribuye, únicamente un significado, "la unidad fue dividida en b, partes y se toman a partes de ella". Las dificultades encontradas al finalizar el proyecto son que, algunos pocos docentes dan respuestas utilizando diferentes representaciones (gráfica, decimal, fracción, porcentaje) a pesar de haber trabajado la idea que las fracciones pueden expresarse de distintas maneras.

CAPÍTULO 4

Concepciones de los futuros docentes sobre la noción de fracción y sus significados

4.1. Instrumentos de indagación

Tal como señalamos en el capítulo 1 —en el apartado dedicado a Metodología— para indagar acerca de las concepciones que tienen los estudiantes de 1° y 4° año sobre las fracciones y sus significados, se elaboró un instrumento para recoger datos sobre el tema. El mismo se llevó a la práctica a través de un guion con tres problemas, que fueron aplicados a los estudiantes mencionados anteriormente en el año 2017.

Consideramos en este capítulo, el análisis a priori de los problemas seleccionados para el diagnóstico, las producciones de los estudiantes, la categorización y el análisis realizado sobre dichas producciones, como así también, las conclusiones obtenidas para cada problema.

Sobre las características del trabajo de campo y la prueba piloto

El conjunto de problemas se presentó en un documento que contiene un problema por página, redactado bajo la forma de un texto con preguntas, sin dibujos ni esquemas. Los problemas se aplicaron en sesiones en las que el grupo de estudiantes estaba dividido en dos, es decir, estudiantes ingresantes y estudiantes que cursan 4° año. Se les explicó el propósito del trabajo y se insistió en que, para resolver los problemas, estaban permitidos todos los recursos. Por ejemplo: hacer cuentas escritas o hacer dibujos en los espacios en blanco o en las hojas adicionales previstas para ello. Se leyó en voz alta y pausada cada problema.

Cabe aclarar, que luego de realizar la prueba piloto, decidimos desdoblar la consigna a) I del Problema 1, que primeramente solicitaba que expresen los resultados de los repartos y que argumenten. Notamos que los estudiantes de la prueba piloto, sólo expresaban el reparto pero muy pocos se detenían a argumentar la equivalencia de las expresiones obtenidas. Lo cual nos hizo pensar en la posibilidad de separar la consigna para especificar los procedimientos que queremos estudiar.

4.1.1. Guion

Los problemas propuestos a los estudiantes para elaborar el diagnóstico fueron los siguientes:

PROBLEMA 1

a) Para repartir 23 chocolates entre 5 chicos, Vanesa pensó lo siguiente: “23 chocolates entre 5 me da 4 chocolates para cada uno, pues 4 x 5 = 20 y me sobran 3 chocolates, que los corto cada uno en cinco partes, y entrego una parte de cada chocolate a cada uno”. En cambio, Joaquín pensó así: “Le doy 4 chocolates a cada uno igual que Vanesa pero corto cada uno de los 3 chocolates restantes por la mitad y le doy una mitad a cada chico; luego divido el último medio en 5 y entrego una parte a cada uno.”

I- Anota las expresiones fraccionarias que surgen de cada reparto y decide si son repartos adecuados.

II- Argumenta si son o no equivalentes.

b) Para repartir 8 chocolates entre 3 chicos se han partido por la mitad 6 chocolates y se entregaron 4 mitades a cada uno. Luego, los 2 chocolates restantes se cortaron en 3 partes cada uno y se entregaron 2 de esas partes a cada chico.

I- Anota la expresión fraccionaria que surge de este reparto.

II- Agrega 2 repartos que sean equivalentes a éste y anota las expresiones fraccionarias que surgen.

c)

I- Explica cuando dos expresiones fraccionarias son equivalentes.

II- ¿Cómo se relaciona la fracción con la división? Encuentra un ejemplo para desarrollar la pregunta.

PROBLEMA 2[36]

a) Si el segmento representa $1\frac{3}{4}$ de la unidad:

I- Dibuja la unidad.

II- Explica cómo lo pensaste.

[36] Extraído de: Parra, C. (2005). Matemática, fracciones y números decimales. 5to grado: apuntes para la enseñanza. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

b) Se borró parte del segmento que estaba dibujado. Se sabe que la parte que quedó corresponde a los $\frac{2}{3}$ del segmento completo.

I- ¿Cómo era el segmento entero?

II- Explica cómo lo pensaste.

c) El dibujo representa $\frac{6}{5}$ de la unidad. Tu tarea consiste en:

I- Dibujar la unidad.

II- Justificar tu procedimiento.

d) Este rectángulo representa $\frac{3}{5}$ de la unidad. Tu tarea consiste en:

I- Dibujar la unidad.

II- Justificar tu procedimiento

PROBLEMA 3[37]

Para preparar una pintura de determinado color se mezclan 10 litros de pintura blanca con 4 litros de pintura verde. Por otro lado, se quiere hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad pero usando 5 litros de pintura verde.

a) ¿Cuántos litros de pintura blanca se deberán usar en este caso?

b) Si a una mezcla de 2 litros de pintura verde y 7 litros de pintura blanca se le agrega un litro de cada color, ¿se obtiene un color más claro o más oscuro que el original? Justificar.

c) Juan dice que es posible calcular la cantidad de pintura blanca en el ítem a) multiplicando la cantidad de pintura verde por un número? ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

[37] Extraído de: Dirección de Currícula de la Ciudad de Bs.As (2006). Cabe aclarar que, se ha realizado una modificación en uno de los valores de la cantidad de pintura y se agregó el último ítem.

4.1.2. Elaboración y análisis de los problemas del guion

Al momento de seleccionar los problemas, tuvimos en cuenta los distintos significados de la fracción. Como bien se señaló en el marco teórico, seleccionamos tres contextos en los cuales la fracción toma distintos significados: la fracción en situaciones de reparto, en situaciones de medición y en situaciones de proporcionalidad. También, en el marco teórico argumentamos el porqué de esta selección de tres contextos, puesto que en la introducción de este trabajo hablamos de cinco significados de las fracciones.

Esta selección es un punto importante de nuestra investigación, así como los tipos de tareas —interpretar, registrar, comparar, argumentar, entre otras— que los estudiantes van a realizar a partir de la resolución de los problemas.

También creemos que es importante realizar un análisis a priori de cada problema y pensar en el tipo de información que se da y en la forma que se presenta cada enunciado, las variables que se consideran, los procedimientos y errores probables que pueden cometer los estudiantes, es decir, nuestra intención es pensar en las interacciones de los estudiantes con cada problema.

Análisis didáctico del problema 1: en general, en este problema, el foco está puesto en la producción de expresiones equivalentes para una misma cantidad. Recuperamos a continuación, el análisis que realiza un documento curricular del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires sobre este tipo de problemas:

> Señalemos finalmente dos cuestiones que surgen de este problema de reparto:
> -los alumnos son invitados a reflexionar sobre repartos que han hecho “otros” (otros hipotético, claro), y esta tarea resulta más compleja que hacer un reparto porque supone tomar como “objeto” un procedimiento ya realizado e intentar captar las relaciones que se han puesto en juego en dicho procedimiento; además,
> -la propuesta de analizar y argumentar apunta a producir relaciones que no se establecen si el trabajo queda solo en el terreno de la acción (producir un reparto). De manera transversal los alumnos van entendiendo qué quiere decir producir un argumento (2005, p.20).

También resulta pertinente retomar de Cuadernos para el Aula (2007) la siguiente cita que nos permite hacer visible la complejidad de la tarea y los múltiples contenidos matemáticos que se trabajan en un solo problema, de manera integrada, evitando la atomización realizada durante años:

> Queremos hacer notar, finalmente, que en este conjunto de actividades se abordaron varias nociones juntas (fracción de fracción, equivalencia de fracciones, composición de cantidades como suma de ciertas fracciones, etc.), poniendo en evidencia que están relacionadas. Muchas veces, al presentarlas separadamente para que los alumnos "no se confundan" y puedan "fijar" los conocimientos, perdemos en significatividad (p.57).

Analicemos, ahora sí, que en el inciso a) de este problema, presentamos en lenguaje coloquial lo que pensaron Joaquín y Vanesa para realizar un reparto de $\boldsymbol{a}$ chocolates entre $\boldsymbol{b}$ niños. La característica del enunciado es que, expresa dos procedimientos diferentes de realizar el mismo reparto en el que se obtienen partes y escrituras distintas para una misma cantidad. Cabe aclarar que la cantidad a repartir de chocolates es mayor que la cantidad de niños, lo cual genera como resultado fracciones mayores que 1.

En el ítem a) I. solicitamos que expresen como fracción el reparto presentado en la consigna inicial en lenguaje coloquial, es decir, que interpreten y registren con fracciones dicho reparto cambiando el registro de representación. De esta manera, se obtienen los siguientes resultados: 4 y $\frac{3}{5}$ para Vanesa y 4, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$ para el caso de Joaquín. Aquí podríamos señalar que la mayor dificultad se presenta al tratar de registrar el procedimiento planteado por Joaquín, donde hay que encontrar la fracción que exprese la quinta parte de $\frac{1}{2}$, es decir $\frac{1}{10}$. En este caso, se presenta el problema de encontrar "una parte de otra parte", lo cual no sucede en el reparto realizado por Vanesa.

En el ítem a) II. requerimos que los estudiantes argumenten si las expresiones obtenidas en a) I. son equivalentes o no, es decir, exigimos una comparación de los resultados y el establecimiento de relaciones que permitan asegurar que las expresiones obtenidas representan la misma parte. De esta manera, solicitamos dos tareas fundamentales: comparar y argumentar, tal como se mencionó anteriormente.

En el inciso b), presentamos nuevamente otro reparto de $\boldsymbol{a}$ chocolates entre $\boldsymbol{b}$ niños en lenguaje coloquial y solicitamos en b) I, al igual que en a) I., que interpreten y registren con fracciones dicho reparto cambiando una vez más el registro de representación. Pero en este caso, el inciso b) II. pedimos al lector del problema que proponga dos repartos equivalentes al dado en la consigna b), es decir, hacemos énfasis en la producción de expresiones equivalentes para una misma cantidad.

Hasta aquí, presentamos a las consignas en un contexto extramatemático o también llamado no matemático, es decir, en un contexto de reparto de chocolates relacionado

con la vida cotidiana. En este sentido, esperamos que el contexto extramatemático sirva de apoyo para argumentar las expresiones fraccionarias equivalentes.
En el inciso c) I. solicitamos a los estudiantes que expliquen cuando dos expresiones fraccionarias son equivalentes y de esta manera, puedan hacer explícito el criterio que consideraron para "definir en la acción" dicha equivalencia.
En el inciso c) II. presentamos el interrogante ¿cómo se relaciona la fracción con la división?, y a partir del mismo intentamos que los estudiantes establezcan el vínculo entre la fracción y la división, cuestión muy interesante que generalmente se excluye de las propuestas de enseñanza o pasa inadvertida. Lo fundamental es llegar a conclusiones del tipo: "Se puede interpretar la fracción como el resultado de un reparto en el que el dividendo es el numerador y el divisor el denominador" o "la fracción indica una división" en que el numerador es el dividendo y el denominador el divisor; y de esta manera focalizar la mirada e intentar arribar al significado de la fracción como cociente de naturales en un problema presentado en contexto de reparto.

ANTICIPACIONES DE PROCEDIMIENTOS CORRECTOS DE RESOLUCIÓN

** Sobre el inciso a) I, los repartos de Vanesa y Joaquín*

En primer lugar, algunos estudiantes pueden leer el enunciado y directamente escribir una representación numérica[38] como resultado del reparto sin necesidad de realizar otro tipo de representación. Por ejemplo: para el caso de Vanesa, expresar que el resultado es $4\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}$; $4\ \frac{3}{5}$ o $\frac{23}{5}$. La diferencia entre la primera expresión y la segunda es mínima y pueden aparecer ambas, es decir, primero escriben $4\ \frac{1}{5}\frac{1}{5}\frac{1}{5}$; luego sintetizan con $4\ \frac{3}{5}$.Para el caso de la expresión $\frac{23}{5}$ seguramente algunos apliquen alguna regla del tipo "¿Cómo pasar de número mixto a fracción impropia? y de esta manera encontrar en las producciones: "multiplico 4 x 5= 20 y luego 20+3=23, así obtengo el $\frac{23}{5}$". Argumentos de este tipo podemos observar en prácticas de enseñanza muy apoyadas en el uso de reglas y técnicas. También pueden partir de buscar una fracción equivalente al número 4 y luego sumar. Es decir, $4= \frac{20}{5}$ entonces $\frac{20}{5} + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$ y a esta última expresión podemos

[38] Esta clasificación de los tipos de representación corresponde a Andonegui Zabala (2006) Fracciones 1. Concepto y representación. Serie Desarrollo de pensamiento matemático, N°9. Federación Internacional Fe y Alegría, UNESCO, Caracas. La clasificación se desarrolla en el capítulo 2 de esta investigación.

encontrarla escrita en las producciones o puede ser que se haya trabajado mentalmente y que sólo expresen el resultado final.

También, otra representación numérica que puede surgir del reparto de Vanesa es directamente el $\frac{23}{5}$ y paralelamente el algoritmo de la división en el que el 23 es el dividendo, 5 el divisor, 4 el cociente y 3 el resto. Luego, a partir del análisis de esos resultados expresar 4 $\frac{3}{5}$ como resultado final. También, a partir del algoritmo de la división puede surgir la expresión 4,6 en el caso de obtener resto 3 y seguir dividiendo. Esta última expresión decimal puede quedar expresada así o puede transformarse el 0,6 $= \frac{6}{10}$ y de esta manera obtenerse la expresión $4\ \frac{6}{10} = 4\ \frac{3}{5}$

Para el caso de Joaquín la representación numérica que puede aparecer en las producciones es $4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, la cual puede expresarse también como: $4\ \frac{6}{10}$ o $\frac{46}{10}$. Aquí, la diferencia entre la primera expresión y la segunda no es mínima como en el caso de Vanesa y requiere la suma de fracciones con distinto denominador para obtener $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$. Para el caso de la expresión $\frac{46}{10}$ vale el mismo análisis que el realizado para Vanesa.

En segundo lugar, podemos encontrar un grupo de estudiantes que para determinar las expresiones fraccionarias necesiten representar gráficamente a los chocolates utilizando rectángulos u otras figuras tales como círculos. Convengamos que el uso del rectángulo es el más habitual y permite dividir fácilmente en 5 partes iguales al chocolate representado para proceder al reparto además de ser la figura geométrica más cercana a la forma de las tabletas.

Para señalar a los chicos que participan del reparto, la representación puede estar dada a través de números (1, 2, 3, 4, 5), letras (a,b,c,d,e) que se colocan dentro de cada quinto o incluso se puede pintar cada quinto del rectángulo con un color diferente para diferenciar a cada chico. El dibujo del típico “hombrecito”  —que lo ubican fuera de los rectángulos— y la utilización de flechas para representar el reparto, puede ser también una manera de representar esta acción. Conviene aclarar que las representaciones gráficas van a aparecer, en general, para trabajar con los 3 chocolates que sobran del reparto, pues la primera cantidad que surge es entera y se expresa con el símbolo “4”. Lo anterior, no excluye la posibilidad de que algunos estudiantes representen los 23 chocolates con 23 figuras y los 5 chicos de diferentes formas, realizando la acción que hace que a c/u le toque 4 chocolates en un primer momento.

Analicemos ahora más específicamente, algunas representaciones gráficas que pueden surgir de este segundo grupo de estudiantes, al analizar los dos repartos realizados por Vanesa y Joaquín. La siguiente representación muestra la idea del reparto de los 3 chocolates que sobran para *el caso de Vanesa*:

Tenemos para cada chico 4 chocolates enteros y para repartir los 3 chocolates que quedan hacemos:

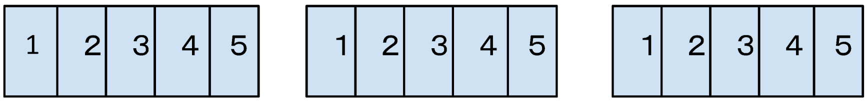


Gráfico 1
(Siendo 1, 2, 3, 4 y 5, la representación de los 5 chicos y los rectángulos celestes corresponden a los chocolates)

Luego, la expresión fraccionaria a la que se llega, puede ser: $4\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}$; $4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 4\ \frac{3}{5}$ o directamente $\frac{23}{5}$ utilizando la suma $\frac{20}{5} + \frac{3}{5}$, señalada anteriormente. También, otra forma de repartir los 3 chocolates que sobraron entre 5 chicos, puede ser pensar que existen $\frac{15}{5}$ en total —lo cual se visualiza en el gráfico 1— y que si se reparten entre 3 chicos esas 15 partes, cada uno obtiene $\frac{3}{5}$.

El gráfico 2 muestra la idea del reparto de los 3 chocolates que sobran para *el caso de Joaquín*:

Tenemos 4 chocolates enteros y para repartir los 3 chocolates que quedan, hacemos:

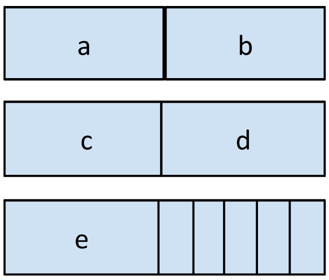


Gráfico 2

(Siendo a, b, c, d y e, la representación de los 5 chicos y los rectángulos celestes corresponden a los chocolates)

Lo cual nos muestra que entregamos $\frac{1}{2}$ de un chocolate a cada niño y luego el $\frac{1}{2}$ sobrante se divide nuevamente en 5 partes con el objetivo de ser repartido nuevamente entre 5 chicos.

Luego de realizar el registro gráfico pueden aparecer los siguientes procedimientos y argumentos para encontrar la fracción que representa “un quinto de un medio”.

–dividir el $\frac{1}{2}$ representado con la letra “*e*” en el *Gráfico 2,* en 5 partes iguales para visualizar que el entero queda dividido en 10 partes y luego argumentar que se le da $\frac{1}{10}$ a cada niño.

–Argumentar en forma coloquial que si a un medio se lo divide en 5 partes, el entero queda dividido en 10 partes. Puede ser que se apoye en lo que se observa en el gráfico 2 sin necesidad de dividir efectivamente el entero en 10 partes o que no tenga apoyo gráfico.

–utilizar la noción de división y el algoritmo de la división entre fracciones, es decir plantear $\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{2} . \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

** Sobre el inciso a) II y la equivalencia de las expresiones obtenidas*

Puede ocurrir que las argumentaciones sobre la equivalencia de las expresiones obtenidas se apoyen en:

–la equivalencia entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$. Es decir, si los estudiantes logran llegar a que Vanesa obtuvo $4\,\frac{3}{5}$ y Joaquín $4\,\frac{6}{10}$, sólo tendrán que validar que $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

–la equivalencia entre $\frac{23}{5}$ y $\frac{46}{10}$

En ambos casos pueden aparecer los siguientes procedimientos y/o argumentos:

–simplificar la segunda fracción para obtener la primera, justificando o no el procedimiento.

–representar gráficamente $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$.

–expresar coloquialmente que “son fracciones equivalentes porque si multiplicamos por 2 el numerador y el denominador de la 1° fracción obtenemos la 2°”

–utilizar la técnica del producto cruzado y argumentar que son fracciones equivalentes porque el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

–obtener la expresión decimal para cada fracción —utilizando la calculadora, con un cálculo escrito o mental— y argumentar que son equivalentes las fracciones porque se obtiene la misma expresión decimal.

–Ejemplo: $\frac{23}{5}$= 4,6 y $\frac{46}{10}$= 4,6

–expresar que son fracciones equivalentes porque representan el mismo número racional.

** Sobre el inciso b) y la producción de expresiones equivalentes*

A partir de la consigna que se presenta en lenguaje coloquial, se obtiene que a cada chico le corresponde 4 veces $\frac{1}{2}$ de chocolate más 2 veces $\frac{1}{3}$ de chocolate. Luego, al solicitar que se escriba la expresión, pensamos que pueden:

–dejar la expresión tal cual se obtuvo, utilizando los 4 medios y 2 tercios. Ejemplo: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$ o $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.\frac{1}{3}$

–reagrupar los medios formando enteros, es decir $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$ 2 y dejar $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ sin reagrupar, obteniendo 2 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

–reagrupar los medios y los tercios, logrando la expresión 2 $\frac{2}{3}$

–expresar el reparto con una única fracción y para lograrlo utilizar el siguiente razonamiento: 2 $\frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, lo cual evidenciaría que reconocen que $2 = \frac{6}{3}$

Cuando solicitamos que busquen dos repartos equivalentes al dado, creemos que pueden surgir los siguientes procedimientos:

–repartir 2 chocolates a cada uno y a los 2 chocolates que quedan dividirlos en tres partes a cada uno, dándole 2 partes a cada chico. Se obtiene así la expresión 2 $\frac{2}{3}$.

–partir cada chocolate en tres partes iguales y entregar un pedacito de cada chocolate a cada chico, de esta manera aparecerá la expresión $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ que puede expresarse como $\frac{8}{3}$ también.

–cortar en mitades hasta el octavo chocolate y lograr 16 partes, es decir $\frac{16}{2}$, lo cual permite tener 5 partes de $\frac{1}{2}$ para cada uno. Luego, al medio sobrante repartirlo entre 3, lo cual hace que se obtenga $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$, que representa $\frac{1}{6}$ del chocolate. De este reparto se obtiene la expresión $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{2}+\frac{1}{6}$

–repartir 1 chocolate a cada uno de los chicos y de esta manera sobrarían 5 chocolates aún. A estos últimos, dividirlos en 3 partes iguales y repartir a cada chico una parte de cada chocolate, obteniendo $\frac{5}{3}$ para cada uno. Luego el resultado de este reparto es $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1\ \frac{5}{3}$ que puede expresarse como $1+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=1+1+\frac{2}{3}=2$ y $\frac{2}{3}$

–dar 2 chocolates enteros para cada uno y a los 2 chocolates restantes dividirlos en 6 partes, 8 partes, 12 partes, etc...Este procedimiento de dividir los chocolates restantes cada vez en más partes, puede estar apoyado por la idea de buscar fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$(fracción obtenida en un principio) Ejemplo: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$

–otro procedimiento asociado al anterior, es buscar fracciones equivalentes a 2 enteros y proponer que el resultado del reparto es $\frac{8}{4}+\frac{2}{3}$, en este caso se estarían partiendo en cuartos los seis primeros chocolates y en tercios los 2 restantes.

–partir cada chocolate en 6 partes iguales y así obtener en total 48 partes. Luego, dar a cada uno 16 sextos. Este reparto también puede estar apoyado en la idea de fracciones equivalentes y a partir de la expresión $\frac{8}{3}=\frac{16}{6}$, pensar luego el reparto. Con esta idea, pueden aparecer las fracciones $\frac{24}{9}$ o $\frac{32}{12}$ entre otras, como propuestas. Aquí se podría analizar a posteriori la pertinencia o no de la respuesta.

* *Sobre el inciso c)*

Al analizar las posibles respuestas para el inciso c) I., creemos que los estudiantes pueden expresar que dos expresiones fraccionarias son equivalentes cuando:

–representan la misma cantidad.

–al simplificarlas se obtiene el mismo número racional.

–son diferentes representaciones del mismo número racional.

Para el interrogante c) II. es posible que los estudiantes contesten que se puede interpretar la fracción como el resultado de un reparto en el que el dividendo es el numerador y el divisor el denominador. También pueden aparecer expresiones no tan generales, como por ejemplo: el numerador expresa lo que se reparte y el denominador expresa la cantidad entre la que se reparte o aún expresiones más particulares, que utilizan el ejemplo del problema para explicar que el numerador representa la cantidad de chocolates a repartir y el denominador la cantidad de chicos.

Estas explicaciones, nos permitirían analizar el grado de conceptualización en torno a la equivalencia de expresiones fraccionarias y en especial, nos daría un indicio de avance hacia lo algebraico.

POSIBLES ERRORES

Si analizamos *los posibles errores en el 1° reparto que realiza Vanesa*, seguramente para expresar los 4 chocolates enteros no vamos a encontrar dificultades. Pero sí podríamos enumerar algunos procedimientos erróneos para el reparto de "lo que sobra". Por ejemplo:

–considerar que el entero está formado por 15 partes, es decir, tomar a los 3 chocolates sobrantes —que están divididos en 5 partes c/u— como si fueran el entero. Luego el resultado se escribe como $4+\frac{3}{15}=\frac{60}{15}+\frac{3}{15}=\frac{63}{15}$

–expresar $4+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ como resultado final. En este caso podríamos pensar que al leer en la consigna "me sobran 3 chocolates que los corto a c/u en 5 partes y entrego una parte de cada chocolate a c/u" el alumno toma el dato de 3 chocolates y el "entrego una parte" para definir la fracción $\frac{1}{3}$, no teniendo en cuenta la expresión "los corto a c/u en 5 partes".

Si analizamos *los posibles errores en el 2° reparto que realiza Joaquín*, creemos que éstos pueden surgir al querer determinar el $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$. En este sentido, justamente el error se encuentra en la noción parte/parte que está en juego en este reparto y que es el centro de análisis. Podemos encontrarnos con los siguientes procedimientos:

–expresar el reparto como igual a $4+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$, luego sumar $\frac{1}{2}$ más $\frac{1}{5}$ y obtener 4 y $\frac{7}{10}$.

Es decir, para este grupo de estudiantes consideramos que el $\frac{1}{5}$ es considerado como fracción del entero y no como fracción del $\frac{1}{2}$

Al pensar en los errores que podrían aparecer al querer argumentar sobre la equivalencia de las expresiones obtenidas en el ítem anterior, creemos que pueden suceder dos casos:

–obtener expresiones correctas en el ítem anterior pero al tener que justificar su equivalencia no poder encontrar argumentos.

–obtener expresiones erróneas en el ítem anterior por lo cual justificar que no son expresiones equivalentes y argumentar utilizando alguna estrategia de comparación de fracciones.

También es posible que comparen las fracciones obtenidas en un reparto y no en ambos. A su vez, este error se relaciona con un error anterior —analizado ya en el reparto de Joaquín— en el que $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ no se interpreta y por consiguiente se expresa el reparto como: $4+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$. Luego podrían expresar que $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$ no son fracciones equivalentes.

En relación con los posibles errores que podrían surgir en el ítem b) I. cuando tienen que anotar la expresión fraccionaria que surge del reparto de 8 chocolates entre 3 chicos creemos que pueden:

–expresar que a cada chico le corresponde 2 chocolates y $\frac{2}{6}$. En este caso el $\frac{2}{6}$ surgiría de pensar que, los 2 chocolates que están divididos en tercios constituyen el entero y considerar sextos en lugar de tercios.

–expresar que a cada chico le corresponde 2 chocolates y $\frac{4}{6}$. En este caso el $\frac{4}{6}$ puede surgir de sumar con error $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$.

Luego, al solicitarles que agreguen 2 repartos equivalentes —ítem b) II— y que registren las expresiones que surgen creemos que podemos encontrarnos con los siguientes errores:

–los repartos propuestos se obtienen a partir de expresiones equivalentes a las obtenidas en el ítem b) I las cuales eran erróneas. Por ejemplo: a partir de 2 y $\frac{2}{6}$ proponer 2 y $\frac{4}{12}$

Por último, en el ítem c) al querer explicar cuándo dos expresiones fraccionarias son equivalentes, podríamos encontrarnos con que no se explicitan argumentos para esta afirmación o simplemente se justifica desde el uso de técnicas o reglas. Esto último, puede llegar a analizarse también frente a las respuestas a la pregunta, ¿Cómo se relaciona la fracción con la división?

Análisis didáctico del problema 2: Aquí es necesario recuperar una idea en relación con el significado de la fracción como medida pues, es la base de lo que queremos indagar en los futuros docentes. En este sentido, sabemos que, si un segmento tiene como medida un número racional, siempre existe una subdivisión de la unidad que entra un número entero de veces en el segmento. Por ejemplo, en los casos que se presentan en el guion, uno de los segmentos mide $1\ \frac{3}{4}$, lo cual significa que $\frac{1}{4}$ de la unidad de medida "entra" 7 veces en el segmento; y el otro segmento mide $\frac{2}{3}$ lo cual nos indica que $\frac{1}{3}$ de la unidad de medida "entra" 2 veces en ese segmento.

Este problema consta de cuatro ítems, en los dos primeros la propuesta es trabajar con longitudes y en los dos últimos, con área. Pero lo que caracteriza a la consigna en general, es que solicitamos reconstruir la unidad de medida a partir de una fracción. Las fracciones que damos como dato en todos los ítems se caracterizan por no tener numerador 1. En este sentido, Parra (2005) plantea que cuando el numerador es uno, la complejidad de la situación es menor.

En las consignas que se trabaja con longitudes se presentan dos casos: uno en que el segmento representa un valor mayor a la unidad de medida y otro en el cual el segmento es menor que la unidad de medida. Lo mismo ocurre con los ítems siguientes, en c) primeramente solicitamos reconstruir la unidad de medida, teniendo como referencia un gráfico rectangular que representa una fracción mayor que 1. Luego, d) pedimos dibujar la unidad de medida, pero en este caso el gráfico rectangular que presentamos representa una fracción menor que 1.

Por último, cabe aclarar aquí, que en este problema se trabaja en un contexto intramatemático a diferencia del problema 1. También, es válida la aclaración de que podríamos haber seleccionado un problema de medida en contexto extramatemático, pero consideramos que los mismos son habituales en las prácticas de enseñanza a diferencia del tipo de problema que aquí presentamos que se observa en menor medida.

ANTICIPACIONES DE PROCEDIMIENTOS CORRECTOS DE RESOLUCIÓN

La reconstrucción de la unidad de medida para el caso de la magnitud longitud

** Sobre el ítem a)*

La consigna plantea que el segmento dado representa $1\ \frac{3}{4}$ de la unidad de medida y solicita que se dibuje la unidad de medida, además hay que explicar cómo se pensó. Creemos que los procedimientos y explicaciones posibles pueden ser los siguientes:

–dividir el segmento dado en 7 partes iguales. Por un lado, pensamos que podemos encontrarnos con estudiantes que, para dividir el segmento utilizan la regla graduada, en este caso cada parte medirá 1 cm pues el segmento original mide 7 cm. Algunos estudiantes podrían expresar que este procedimiento, a pesar de utilizar la regla graduada, siempre tendrá un margen de error. Por otro lado, también podrían marcar las 7 partes iguales en forma aproximada, y sería un procedimiento válido, incluso eventualmente podrían declarar esta división aproximada cuando se solicita que expliquen cómo lo pensaron. Consideramos válido este último procedimiento pues en una situación de producción de resoluciones, la representación es una forma de expresar lo que se piensa. En el apartado sobre los errores probables, aclaramos cuándo no lo consideraremos válido al mismo.

Los procedimientos anteriores, se apoyan en el conocimiento de que $1=\frac{4}{4}$ entonces $1\ \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$. Luego para dibujar la unidad de medida, sólo es necesario considerar 4 de esas partes. Para esto, puede ser que dibujen el segmento aparte, con una longitud de 4 cm o que señalen la unidad de medida sobre el mismo segmento dado colocando el n°1 donde finaliza la unidad.

–expresar el $1\ \frac{3}{4}$ como 1,75; luego medir en centímetros la longitud del segmento dado y posteriormente plantear una regla de tres para calcular la medida de la unidad de medida.

Ejemplo: 1,75…………….. 7 cm

1……………..… x cm

–dividir en dos partes el segmento dado en forma aproximada —pensando que $1\ \frac{3}{4}$ es más que 1 pero menos que 2— de tal manera que una de las partes quede un poco más grande para mostrar la unidad de medida y otra para $\frac{3}{4}$ que es menos que la unidad de medida.

** Sobre el ítem b)*

En este caso el segmento dado representa $\frac{2}{3}$ de la unidad de medida y se pregunta sobre cómo era el segmento entero. Los posibles procedimientos que pueden surgir:

–podría observarse en este caso sólo las dos particiones del segmento y el trazado a la derecha o izquierda de la parte faltante sin ninguna explicación del procedimiento.

–expresar oralmente que el segmento que falta es $\frac{1}{3}$. Entonces si $\frac{2}{3}$ equivalen a "x" cm, $\frac{1}{3}$ sería la mitad de esos $\frac{2}{3}$, es decir "x" cm. Luego sumar los cm que corresponden a los $\frac{2}{3}$ más los cm que corresponden al $\frac{1}{3}$ y trazar un nuevo segmento con la medida obtenida en la suma, justificando su procedimiento desde la idea que $1=\frac{3}{3}$ entonces $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$.

La reconstrucción de la unidad de medida para el caso de la magnitud área

** Sobre el ítem c)*

Este rectángulo representa $\frac{6}{5}$ de la unidad. En este caso se solicita dibujar la unidad y explicar el procedimiento.

Antes de analizar los posibles procedimientos y argumentaciones de los estudiantes, queremos plantear que nuestro interés está dado en las justificaciones de por qué realizaron tal o cual procedimiento al momento de la reconstrucción de la unidad de medida. Pero vale aclarar que, podemos encontrarnos con explicaciones que sólo desarrollen el cómo lo hicieron y no el por qué lo hicieron de esa manera, es decir que las pruebas sólo sean del tipo pragmático.

Ahora sí, consideramos que los procedimientos y argumentaciones posibles que pueden proponer los estudiantes cuando se presente el problema son:

–dividir el rectángulo en 6 partes iguales y luego considerar sólo 5 de esas partes para dibujar la unidad de medida. Los argumentos que pueden surgir tienen que ver con que la unidad de medida se representa con $\frac{5}{5}$ y en este rectángulo hay $\frac{1}{5}$ de más. Por lo anterior, se divide en 6 partes pero sólo se consideran 5 de ellas. Nuevamente en este caso —al igual que en el problema con longitudes— pueden señalar la unidad de medida sobre el mismo rectángulo pintándola o destacándola del quinto sobrante o dibujarla debajo nuevamente.

** Sobre el ítem d)*

Este rectángulo representa $\frac{3}{5}$ de la unidad. Dibuja la unidad y explica tu procedimiento.

–dividir el rectángulo en 3 partes iguales y luego considerar sólo 2 de esas partes para agregárselas al rectángulo dado. Los argumentos que pueden surgir tienen que ver con que la unidad de medida se representa con $\frac{5}{5}$ y en este rectángulo solo hay $\frac{3}{5}$. Por lo anterior, hay que agregar $\frac{2}{5}$ más al rectángulo original.

POSIBLES ERRORES

Los posibles errores en el ítem a) pueden ser:

–agregar un segmento de aproximadamente 1 cm al segmento original y expresar que le falta $\frac{1}{4}$ para completar la unidad de medida. En este sentido, al agregar $\frac{1}{4}$ se obtiene $\frac{8}{4}$, es decir 2 unidades y no una. Podríamos pensar en este procedimiento erróneo que no se distingue que la unidad de medida es $\frac{4}{4}$ en lugar de $\frac{8}{4}$.

–realizar una subdivisión en 7 partes de medidas muy distintas cuando la subdivisión se realizó de manera aproximada. Por ejemplo: dividiendo el segmento en 4 y luego 3 de esas partes en dos.

Los posibles errores en el ítem b) pueden ser:

–agregar 2 partes más al segmento dado en la consigna. Estos segmentos que se agregan tienen una longitud igual al segmento dado. En este caso, se considera al segmento dado como $\frac{1}{3}$ y no como $\frac{2}{3}$.

–dividir el segmento en 3 partes iguales, lo cual daría cuenta que están interpretando el problema como si se debiera representar la fracción $\frac{2}{3}$, dada la unidad de medida.

Los posibles errores en el ítem c) pueden ser:

–considerar que el rectángulo dado en la consigna es la unidad de medida. Luego, agregar otro rectángulo del mismo tamaño, dividirlo en 5 partes iguales y “pintar”

$\frac{1}{5}$ más en ese 2° rectángulo y expresar "la fracción se pasa de la unidad de medida".

–agregar al rectángulo original una parte más y señalar que esa parte representa $\frac{1}{5}$ y que el rectángulo dado es $\frac{5}{5}$.

Sobre el ítem d):

–dividir el rectángulo en 5 partes iguales, lo cual da cuenta que están interpretando el problema como si se tratara de representar $\frac{3}{5}$, dada la unidad de medida, y luego considerar 3 de esas 5 partes.

Análisis didáctico del problema 3: En este problema "[...] se pone en juego un aspecto del funcionamiento de las fracciones: la constante de proporcionalidad. Es decir, un "operador" que transforma una cantidad de una magnitud en su correspondiente de otra magnitud, mediante la multiplicación. Es un sentido de las fracciones diferente del que los estudiantes podrían haber construido a partir de los problemas de reparto y medida [...]" (Dirección de Currícula de la Ciudad de Bs.As, 2006, p.14). Además, notemos que las cantidades que se corresponden forman razones equivalentes y esa equivalencia expresa una misma relación, en este caso esa misma relación nos habla de que estamos trabajando con la misma tonalidad de la pintura.

Al analizar los datos de la consigna, queremos hacer notar que la elección de los números 4 y 5 para la pintura verde, en el inciso a), es intencional. Luego, realizaremos un análisis de los posibles procedimientos correctos como así también de los errores que pueden cometer los estudiantes al trabajar con estos valores.

En el inciso b) se trata de comparar dos mezclas pues, planteamos una mezcla como dato y luego expresamos que se agrega un litro de pintura más a cada cantidad de pintura verde y pintura blanca dada obteniendo así la segunda mezcla a comparar.

Cabe aclarar —antes de comenzar a analizar los posibles procedimientos correctos y los errores— que agregamos una consigna más al problema original, la cual es: Juan dice que es posible calcular la cantidad de pintura blanca en el ítem a) multiplicando la cantidad de pintura verde por un número. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué? Este ajuste se realizó, luego del análisis que realizamos de la prueba piloto, en la cual notamos que el único procedimiento utilizado por los estudiantes fue "la regla de tres". Lo anterior, nos hizo reflexionar sobre los motivos de este único procedimiento pero también nos

permitió pensar en otro ítem para el guion, que favorezca o habilite otros procedimientos de resolución en los estudiantes. Especialmente pensamos en la posibilidad de considerar la constante de proporcionalidad racional, en este caso un número por el que hay que multiplicar las cantidades de pintura de un color para obtener las cantidades de pintura del otro color, dando lugar a la aparición de una mirada funcional, es decir nuestra intención es analizar el avance en los procedimientos de los estudiantes hacia el carácter algebraico de la aritmética, viendo a la proporcionalidad como una relación entre cantidades y no solo como una proporción aritmética.
Por último, al igual que lo hicimos con los problemas anteriores, queremos señalar que todas las consignas de este problema se presentan en un contexto extramatemático, lo cual consideramos que habilita un apoyo para pensar las relaciones entre los elementos que intervienen en el problema.

ANTICIPACIONES DE PROCEDIMIENTOS CORRECTOS DE RESOLUCIÓN

** Sobre el inciso a)*

Creemos que los procedimientos y argumentaciones posibles que pueden proponer los estudiantes son:

–encontrar la constante de proporcionalidad, u otros pueden expresar que van a "pasar por la unidad" es decir, encontrar la cantidad de litros de pintura blanca para un litro de pintura verde y luego multiplicar por 5 para obtener el valor buscado. En este procedimiento, se puede dejar indicada la división 10:4 y luego multiplicar $\frac{10}{4}$ por 5 para obtener $\frac{50}{4}$. Pero también, puede ocurrir que se realice la división y obtener el valor 2,5 para luego multiplicar por 5 y obtener 12,5.

–*utilizar la* "*regla* de tres" para obtener el valor faltante. Se llama "regla de tres" al procedimiento de cálculo mediante el cual se resuelven problemas del siguiente tipo: "sabiendo que una magnitud es directa o inversamente proporcional a otra, y conociendo una cantidad de la primera, correspondiente a una cantidad, también conocida de la segunda, hallar la cantidad de la segunda que corresponde a otra cantidad dada de la primera." (Cabrera y Medici, 1949). Al realizar este procedimiento es probable que se llegue directamente a la división 50: 4, y que la respuesta sea "para 5 litros de pintura verde se necesitan 12,5 litros de blanca".

–elaborar una tabla de valores y utilizar alguna de las propiedades de la proporcionalidad directa para obtener distintos valores para cada color de pintura. En el siguiente ejemplo, se utiliza la propiedad que plantea: “Al multiplicar (o dividir) una de las cantidades por un número, la cantidad correspondiente se multiplica (o divide) por el mismo número y la proporción se mantiene”.

Cantidad de pintura verde (litros)	Cantidad de pintura blanca (litros)
4	10
20	50
5	12,5

Nuevamente se llega a la división 50: 4, y posiblemente se obtenga la respuesta —ya considerada en procedimientos anteriores— que “para 5 litros de pintura verde se necesitan 12,5 litros de blanca”.
Pero también se podría utilizar la propiedad que plantea “Al sumar (o restar) dos valores de una de las cantidades se obtiene un número correspondiente con la suma (o resta) de los valores correspondientes de la otra cantidad”. De esta manera la tabla expresaría:

Cantidad de pintura verde (litros)	Cantidad de pintura blanca (litros)
4	10
1	2,5
5	12,5

–plantear una proporción, es decir, una igualdad entre las razones $\frac{40}{10} = \frac{5}{x}$ y luego utilizar la propiedad fundamental de las proporciones para encontrar el valor de x.

** Sobre el inciso b)*

Al analizar esta consigna, consideramos que los estudiantes podrían:

–estudiar qué pasa con ambas mezclas para un valor igual de pintura verde o blanca utilizando una tabla de valores. Por ejemplo:

Cantidad de pintura verde (l)	Cantidad de pintura blanca (l)
2	7
6	21

Cantidad de pintura verde (l)	Cantidad de pintura blanca (l)
3	8
6	16

Al leer las dos tablas, los estudiantes pueden llegar a la conclusión de que la mezcla de la tabla de la derecha es más oscura pues, para la misma cantidad de pintura verde (6 litros) se utiliza menos cantidad de pintura blanca. Entonces al agregar un litro más de cada pintura a las cantidades dadas en la consigna, se obtiene un color más oscuro.

Para el caso de igual cantidad de blanca tenemos:

Cantidad de pintura blanca (l)	Cantidad de pintura verde (l)
7	2
56	16

Cantidad de pintura blanca (l)	Cantidad de pintura verde (l)
8	3
56	21

Nuevamente, al leer las dos tablas, los estudiantes pueden llegar también a la conclusión de que la mezcla de la tabla de la derecha es más oscura pues para la misma cantidad de pintura blanca (56 litros) se utiliza más cantidad de pintura verde.

–encontrar la constante de proporcionalidad, es decir, encontrar la cantidad de litros de pintura blanca para un litro de pintura verde en ambas mezclas (o viceversa) y luego comparar. Pueden presentarlo a través de tablas o simplemente como razón:

Ejemplo:

Cantidad de pintura verde (l)	Cantidad de pintura blanca (l)
2	7
1	$\frac{7}{2}$ = 3,5

Cantidad de pintura verde (l)	Cantidad de pintura blanca (l)
3	8
1	$\frac{8}{3}$ = 2,66...

Cantidad de pintura blanca (l)	Cantidad de pintura verde (l)
7	2
1	$\frac{2}{7}$ = 0,285714...

Cantidad de pintura blanca (l)	Cantidad de pintura verde (l)
8	3
1	$\frac{3}{8}$ = 0,375

En las dos primeras tablas los estudiantes pueden observar que para un litro de pintura verde, la cantidad de pintura blanca es mayor en la relación entre 2 litros de verde con 7 litros de blanca, lo cual les permitiría asegurar que la mezcla obtenida con 3 litros de verde y 8 litros de pintura blanca es más oscura.

** Sobre el inciso c)*

En este punto, la consigna intenta habilitar y potenciar el uso de la fracción como constante de proporcionalidad en los futuros docentes, es decir que los estudiantes puedan utilizar a la fracción en el papel de operador multiplicativo. Además, nuestro objetivo es provocar la aparición la mirada funcional en este inciso, pues en los otros ítems podrían pensarse los procedimientos utilizando la proporcionalidad y la igualdad de razones.

Creemos que los posibles procedimientos podrían ser:

–realizar un cálculo mental para averiguar el valor para 1 litro de pintura verde, es decir, averiguar la constante de proporcionalidad pero sin dejarlo explícito y luego expresar que el número por el cual hay que multiplicar a 5 litros de pintura verde es 2,5.

–realizar una tabla de valores y calcular la cantidad de pintura blanca para 1 litro de pintura verde, es decir, nuevamente calcular la constante de proporcionalidad, pero en este caso queda explícito en la tabla de valores. Luego utilizar este valor para la multiplicación por 5 l de pintura verde.

POSIBLES ERRORES

Sobre el inciso a): La elección de los números 4 y 5 para la pintura verde —tal como se mencionó anteriormente—, es intencional ya que puede hacer pensar a los estudiantes que se debe sumar 1 litro a cada cantidad de pintura, es decir, que harán falta 11 litros de pintura blanca. Este tipo de respuesta resulta un error frecuente en las producciones de los estudiantes.

Otros estudiantes pueden interpretar que lo que se mantiene constante es la cantidad de pintura en total y no la tonalidad. Entonces, este error les haría pensar que si antes teníamos 13 litros de pintura-mezcla, ahora para seguir teniendo 13 litros de mezcla, a 4 litros tenemos que agregarle 9 de pintura blanca.

Otro error frecuente, puede ser que al utilizar la "regla de tres" se ubiquen de manera equivocada los valores en el "famoso planteo", es decir, las cantidades de pintura blanca y verde se mezclan y las relaciones que se establecen son erróneas. Este error frecuentemente se debe a que esta regla se aplica sin comprender las relaciones que se están estableciendo entre las magnitudes consideradas y sólo se repite un mecanismo, sin previa comprensión del problema.

También podríamos encontrar errores en las tablas de proporcionalidad directa en relación con la ubicación de las variables y los valores de dichas variables. Por ejemplo en la columna de la pintura blanca colocar datos que corresponden a la pintura verde, y viceversa.

Por último, también podríamos notar que al plantear la proporción y la propiedad fundamental, los estudiantes ubican los datos de manera errónea, obteniendo así un resultado incorrecto. Por ejemplo: $\frac{3}{x} = \frac{4}{10}$

Sobre el inciso c): Por un lado, aquí podría suceder que los estudiantes del profesorado, no respondan a la pregunta. Si bien no lo podemos considerar un error, si creemos que es necesario tener en cuenta esta posibilidad a la hora de analizar las causas de la omisión.

Por otra parte, también podrían aparecer respuestas y/o procedimientos aproximados, que si bien no pueden considerarse como errores, tampoco constituyen lo correcto ejemplo:

> –multiplico por un número mayor que 2 y menor que 3 pues si a 4 litros de verde lo multiplico por 2 obtengo 8 litros de pintura blanca, y si lo multiplico por 3 obtengo 12 litros de pintura blanca, pero el valor que se utilizó es 10 litros de blanca. Así que para el caso de 5 litros de pintura verde va a suceder lo mismo y el número va a estar entre 2 y 3.

4.2. Categorización y análisis de los resultados de las producciones de los estudiantes de 1° año y de 4° año

Dado que el objetivo de este trabajo es indagar en la noción de fracción y la forma en que los futuros docentes conceptualizan la misma, para la categorización de las respuestas recuperamos los análisis de los posibles procedimientos correctos y erróneos realizados en el apartado 4.1.2. También tomamos como eje, la tripleta que propone Vergnaud (1990) para caracterizar a un concepto y de esta manera la conceptualización en un momento dado de este proceso de construcción del mismo, tal como lo desarrollamos en el capítulo 1 de esta investigación, dentro del apartado Marco Teórico y los tipos de argumentos que utilizan. Por lo dicho anteriormente, los procedimientos de los estudiantes fueron categorizados según: las *representaciones* que utilizan, las *nociones* que intervienen en los procedimientos utilizados y los *tipos de argumentos* que utilizan en sus justificaciones.

Luego, analizaremos las *ideas asociadas* a los procedimientos, que se constituyen en obstáculos y producen errores.

En función de esta categorización, pretendemos analizar, interpretar y relacionar toda la información con los aportes teóricos considerados, con el objetivo de presentar algunas conclusiones finales.

4.2.1. Categorización de las resoluciones obtenidas en 1° año

A continuación presentamos una serie de cuadros que sintetizan las formas de representación, las nociones y los argumentos utilizados en las consignas del PROBLEMA 1. Las mismas fueron resueltas por 21 estudiantes de 1° año. Cabe aclarar que, para cada categoría, se considera el 100% de las producciones de los estudiantes.

Formas de representación		**Frecuencias en a.I**	**Frecuencias en b.I**	**Frecuencias en b.II**
Usa sólo una escritura fraccionaria	Las fracciones indican el resultado sintético del reparto.	$\frac{0}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{0}{21}$
	Las fracciones indican otros cocientes adecuados.	$\frac{0}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$
	La notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{1}{21}$
Usa sólo un gráfico	Dibuja los chocolates y divide según los datos.	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{0}{21}$
	Dibuja los chocolates y los divide con error.	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	
Usa sólo lenguaje coloquial	Describe el reparto adecuado	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{1}{21}$
Usa más de una forma de representación	-coloquial y gráfica (correcto)	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{2}{21}$
	-coloquial y gráfica (incorrecto)	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{2}{21}$
	coloquial y fraccionaria (correcto)	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{4}{21}$
	-fraccionaria, gráfica y coloquial. (correcta)	$\frac{2}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{1}{21}$
	-fraccionaria, gráfica y coloquial. (incorrecta)	$\frac{1}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{1}{21}$

	-gráfico y fraccionaria (correcta) -gráfico y fraccionaria (incorrecta)	$\frac{4}{21}$ $\frac{7}{21}$	$\frac{6}{21}$ $\frac{5}{21}$	$\frac{2}{21}$ $\frac{1}{21}$
No resuelve		$\frac{0}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{21}$

Cuadro 4.1. Formas de representación de 1° año para el problema 1.

Al analizar el cuadro 4.1., podemos notar que un poco más de la mitad de los estudiantes *usa más de una representación* para resolver los tres ítems analizados. A su vez, encontramos algunas diferencias pues para los ítems a.I y b.I la *representación gráfica y fraccionaria* es la más utilizada en cambio para el ítem b.II la distribución de frecuencias es más homogénea en todas las representaciones incorporando el lenguaje coloquial.

En cuanto a la *representación gráfica y fraccionaria* —que es la más utilizada en a.I y b.I— notamos que la mayor frecuencia de errores se da en el ítem a.I, con $\frac{7}{21}$ y la mayor frecuencia de representaciones correctas en el ítem b.II con $\frac{6}{21}$. Tendríamos que avanzar aquí con el análisis y preguntarnos a qué se debe esta diferencia de frecuencias. Vale recordar en este mismo sentido, que el reparto que se presenta en a.I involucra la noción de parte-parte y el reparto del ítem b.I no, lo cual podría darnos una respuesta posible a la diferencia de frecuencias.

En cuanto a la relación entre las dos formas de representación —gráfica y fraccionaria—, para a.I y b.I notamos que todos los estudiantes que utilizan representaciones fraccionarias correctas se apoyan en la representación gráfica, que también está correctamente realizada según el reparto propuesto. En cambio, para el ítem a.I en los estudiantes que sus expresiones fraccionarias fueron incorrectas, observamos que la mitad realizó representaciones gráficas con error y la otra mitad construyó gráficos correctos pero al expresar la fracción cometieron errores. En el caso de b.I, todos los estudiantes que expresaron el reparto de manera incorrecta utilizando fracciones, sus gráficos estaban bien realizados. Aquí nuevamente podríamos preguntarnos qué sucede entre los dos tipos de representación y el apoyo que podría darse en lo gráfico para plasmar lo numérico o también sobre lo que implica el cambio de registro. En general, podríamos afirmar que existe una supremacía de la representación gráfica que resulta en todos los casos mejor que la representación numérica y que en ocasiones sirve de apoyo a lo numérico pero en otras ocasiones no es suficiente.

Por otro lado, es notorio que todos los estudiantes resolvieron de alguna manera el ítem a.I, lo cual no sucedió en el b.I y b.II, que evidencia una frecuencia de $\frac{1}{21}$ y $\frac{5}{21}$ de "no resuelve" respectivamente. Lo anterior, podría estar dado por el tipo de tarea que se solicita en cada caso. Por ejemplo: el ítem b.II solicita que se proponga un reparto, lo cual es diferente a presentar el reparto en la consigna e interpretarlo y registrarlo. Es decir, tal como se plantea en el análisis a priori del problema, en el ítem b.II se hace énfasis en la producción por parte de los estudiantes de expresiones equivalentes para una misma cantidad.

Otro análisis que queremos realizar, es en relación con la forma de representación *"usa sólo una escritura fraccionaria"* y dentro de esta categoría: *las fracciones indican el resultado sintético del reparto.* Al leer el cuadro que sintetiza los resultados de sus producciones, nos encontramos con una baja frecuencia $\frac{1}{21}$ en el ítem b.II y $\frac{0}{21}$ para los demás ítems. Lo expuesto anteriormente se puede relacionar cuando se analice el ítem c.II y los resultados obtenidos en el mismo pues esta baja posibilidad de lograr una escritura numérica incide en las relaciones que se establecen entre la idea de fracción y la de división, cuestión que se solicita en el ítem c.II.

Por último, queríamos mencionar algunos resultados en relación con el cambio de registro, cuestión analizada por Duval (2016) y expuesta en el marco teórico de esta investigación. Encontramos en a.I una frecuencia de $\frac{8}{21}$, en b.I $\frac{10}{21}$ y en b.II $\frac{10}{21}$ de las producciones de los estudiantes, que presentan un cambio de registro —de una expresión coloquial a una expresión fraccionaria— en sus representaciones, cambio que es solicitado en el enunciado explícitamente. Además, esta modificación en el registro se da sin errores y se puede evidenciar en las frecuencias del cuadro 4.1. También es necesario destacar que $\frac{3}{21}$ y $\frac{4}{21}$ de las producciones de los estudiantes, en los ítems a.I y b.I respectivamente, muestran un cambio de registro pero lo hacen utilizando sólo el gráfico, lo cual no se solicitaba.

Nociones que intervienen		Frecuencias en a.I	Frecuencias en a.II	Frecuencias en b.I	Frecuencias en b.II
Fracción de otra fracción	La indica y la resuelve correctamente.	$\frac{4}{21}$	-	-	$\frac{0}{21}$
	La indica y la resuelve con error.	$\frac{1}{21}$	-	-	$\frac{0}{21}$
	Sólo la indica.	$\frac{8}{21}$	-	-	$\frac{5}{21}$
	No la utiliza	$\frac{8}{21}$	-	-	$\frac{16}{21}$
Suma de fracciones	Suma correctamente teniendo en cuenta los datos.	$\frac{3}{21}$	-	$\frac{2}{21}$	-
	Suma incorrectamente y con datos erróneos.	$\frac{1}{21}$	-	-	-
	Suma con errores en el algoritmo y datos correctos.	$\frac{1}{21}$	-	-	-
	No la utilizan	$\frac{16}{21}$	-	$\frac{19}{21}$	-
Reparto equitativo		-	$\frac{8}{21}$	-	-
División		-	$\frac{1}{21}$	-	-
Equivalencia de expresiones fraccionarias	-	-	-	-	$\frac{3}{21}$

Cuadro 4.2. Nociones de 1° año para el problema 1

En cuanto a las nociones que se ponen en juego en el problema 1, podemos notar al analizar el cuadro 4.2 que una parte notoria de los estudiantes de 1° año no reconocen la noción *fracción de otra fracción* ($\frac{8}{21}$) o si la reconocen, sólo la indican pero no la resuelven ($\frac{8}{21}$). En el caso de resolver el cálculo, sólo $\frac{4}{21}$ lo realiza correctamente y $\frac{1}{21}$ comete error. Incluso, más notoria es esta situación, en el ítem b.II ya que el $\frac{16}{21}$ no la utiliza en la propuesta del reparto.

En cuanto a la *suma de fracciones* prácticamente la mayoría de los estudiantes no la utiliza para resolver el problema 1; $\frac{16}{21}$ en el ítem a.I y $\frac{19}{21}$ en el ítem b.I a pesar de ser necesaria para lograr una expresión fraccionaria que sintetice el reparto.

Por último, la noción de *reparto equitativo* es reconocida por $\frac{8}{21}$ de los estudiantes y la utilizan para argumentar sobre el porqué son equivalentes los repartos realizados. En cuanto al *reconocimiento de la equivalencia de fracciones*, $\frac{3}{21}$ en b.II expresan que representan lo mismo de dos formas diferentes. En este mismo sentido, es oportuno señalar cómo las nociones de reparto y equivalencia de fracciones utilizada para responder el ítem a.II luego, se relacionan con el ítem c.I que indaga sobre la equivalencia de expresiones fraccionarias en general. Encontramos que la noción de reparto equitativo utilizada en a.II se traslada y mantiene en los argumentos. Además, se hace explícita en las pruebas intermedias dadas en c.I desde la idea de “misma cantidad” e incrementa su frecuencia, pues hay $\frac{9}{21}$ que expresan la equivalencia de expresiones fraccionarias desde la idea del mismo reparto/misma cantidad.

Sobre los argumentos	**Frecuencias en a.II**	**Frecuencias en c.I**	**Frecuencias en c.II**
Usa una prueba pragmática	$\frac{8}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{13}{21}$
Usa una prueba intermedia	$\frac{2}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{4}{21}$
Usa una prueba intelectual	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$
No argumenta o es confuso	$\frac{11}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$

Cuadro 4.3. Tipos de argumentos de 1° año para el problema 1

Al analizar los argumentos dados en determinados ítems, encontramos algunos que se apoyan en el contexto o que están ligados al resultado de un cálculo, como así también apoyados en ejemplos que resultan para los estudiantes representativos. En este caso, decidimos llamarlas “pruebas pragmáticas” (Balacheff, 2000). También nos encontrarnos con algunos argumentos más generales y descontextualizados, que llamaremos “pruebas intelectuales” (Balacheff, 2000). Por último, existen algunas explicaciones intermedias que si bien se “despegan” del contexto, siguen apoyándose en ejemplos numéricos y con un grado de generalización menor a las pruebas intelectuales. A estas pruebas convenimos en llamarlas “pruebas intermedias”. Cabe aclarar, que también analizaremos las frecuencias que se corresponden con un grupo de estudiantes que no argumentan sus respuestas o que presentan argumentos confusos o erróneos.

A continuación, presentamos un ejemplo de cada tipo de argumento, para que el lector pueda compartir con nosotros algunos hallazgos:

Para el ítem a.II: “Argumenta si son o no equivalentes los repartos”:

–Usa una prueba pragmática: “Son equivalentes porque le da lo mismo a todos” o “Se reparte a los dos chicos por igual”.

–Usa una prueba intermedia: “Porque se obtienen los mismos resultados,$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$”

Como no encontramos una prueba intelectual en las producciones de los estudiantes, nos resulta interesante aclarar que este tipo de prueba, por ejemplo: para el caso a.II estaría relacionada con la posibilidad de formular que “se obtienen dos expresiones fraccionarias equivalentes que representan el mismo número racional”.

Para el ítem c.I: Explicá cuándo dos expresiones fraccionarias son equivalentes

–Usa una prueba pragmática: “Cuando multiplico numerador y denominador por el mismo número” o “Cuando al dividirlas por sí mismas dan los mismos resultados”.

–Usa una prueba intermedia: “Cuando representan la misma cantidad”.

Aquí tampoco encontramos una prueba intelectual, la cual consideramos que podría haber sido representada por la idea: “Dos expresiones fraccionarias son equivalentes cuando representan el mismo número racional”.

Para el ítem c.II: ¿Cómo se relaciona la fracción con la división?

–Usa una prueba pragmática: “Al numerador se lo divide por el denominador para obtener un número decimal”

–Usa una prueba intermedia: “La fracción es una división” y proponen ejemplos tales como $\frac{6}{3}$= 2 acompañados por el algoritmo de la división.

La prueba intelectual estaría dada por la posibilidad de asociar a la fracción con la noción de cociente indicado, es decir de número racional, o también como el resultado de una división en el que el dividendo es el numerador, el divisor el denominador y la fracción el cociente de dicha división. Pero en estas producciones, no encontramos argumentos de este tipo.

En cuanto a los argumentos, al leer el cuadro 4.3 notamos que las mayores frecuencias se dan en las pruebas pragmáticas en todos los ítems ($\frac{8}{21}$, $\frac{10}{21}$ y $\frac{13}{21}$ respectivamente). En relación con las pruebas intermedias, vemos una alta frecuencia también en el ítem c.I con $\frac{9}{21}$ asociadas a la idea de la misma cantidad, lo cual creemos que lo habilita el contexto del reparto. Por último, no podemos dejar de señalar la frecuencia $\frac{0}{21}$ en todos los ítems para las pruebas intelectuales, y especialmente en el ítem c.II. Este ítem implica relacionar la división con la fracción en contextos de reparto, lo cual se vincula con los resultados de las representaciones analizadas en el cuadro 4.1 y la baja frecuencia obtenida ($\frac{1}{21}$) para la subcategoría: l*as fracciones indican el resultado sintético del reparto.*

Por otro lado, es muy notorio la cantidad de estudiantes ($\frac{11}{21}$) que no argumenta o lo hace de manera confusa en el ítem a.II. Lo cual nuevamente podríamos pensar que, este tipo de reparto involucra la noción de parte/parte, la cual generó errores en las expresiones fraccionarias y gráficas (ver cuadro 4.1), y no permitió llegar a expresiones correctas para luego analizar las equivalencias y argumentar sobre las mismas.

A continuación presentamos una serie de cuadros que comparan las formas de representación, las nociones y los argumentos utilizados en las consignas del PROBLEMA 2.

Formas de representación		**Frecuencias en a.I**	**Frecuencias en b.I**	**Frecuencias en c.I**	**Frecuencias en d.I**
Usa un gráfico	Reconstruye la unidad de medida	$\frac{7}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{8}{21}$
	No reconstruye la unidad de medida	$\frac{13}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{11}{21}$
No responde	-	$\frac{1}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$

Cuadro 4.4. Formas de representación de 1° año para el problema 2

Al analizar el cuadro 4.4 notamos que en casi todos los ítems, a.I, c.I y d.I más de la mitad de los estudiantes no reconstruyen la unidad de medida, las frecuencias son $\frac{13}{21}$, $\frac{13}{21}$ y $\frac{11}{21}$ respectivamente. En el ítem b.I, donde se solicita reconstruir la unidad de medida a partir del $\frac{2}{3}$ observamos una distribución distinta de las frecuencias, más homogénea: $\frac{8}{21}$ para los que reconstruyen, $\frac{7}{21}$ los que no reconstruyen y $\frac{6}{21}$ los que no responden.

Por último, hay una mayor frecuencia de reconstrucción de la unidad de medida en los casos donde la fracción dada como dato, es menor que 1. Por ejemplo: para $\frac{2}{3}$ la frecuencia es $\frac{8}{21}$ y para la fracción $\frac{3}{5}$ la frecuencia es $\frac{8}{21}$ también.

Por otro lado, todos los estudiantes que logran reconstruir la unidad de medida, realizan su producción en la misma representación gráfica dada —rectángulos y segmento—, sin producir ningún cambio de registro. Lo que podríamos analizar aquí es, que más de la mitad de los estudiantes no logra reconstruir la unidad de medida, es decir trabaja con errores en este registro gráfico lo cual se puede relacionar con las ideas asociadas que se exponen en el siguiente apartado.

Nociones	**Frecuencia en a.II**	**Frecuencia en b.II**	**Frecuencia en c.II**	**Frecuencia en d.II**
Medida de una cantidad continua	$\frac{4}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{10}{21}$[39]	$\frac{8}{21}$

Cuadro 4.5. Nociones de 1° año para el problema 2

En el cuadro anterior notamos que la mayor frecuencia se da en el ítem c.II ($\frac{10}{21}$), cuando tienen que reconstruir la unidad de medida a partir de una fracción mayor que 1, expresado a partir de un rectángulo. En este caso, recuperan la noción de medida de una cantidad continua, donde una cantidad se toma como unidad para expresar otra cantidad en función de ella. Por ejemplo, encontramos expresiones tales como: “Sé que la unidad

[39] La diferencia de frecuencias con las expuestas en el cuadro anterior sobre: “Reconstruye la unidad”, está dada porque 5 estudiantes justifican desde el significado de medida su procedimiento pero no respetaron las medidas originales y propusieron ellas sus propias medidas para la unidad, es decir ignoraron el dato inicial.

es $\frac{5}{5}$ y como el numerador es mayor necesito de otro entero que sea igual pero del cual sólo pinte lo que falta, es decir $\frac{1}{5}$" o también "$\frac{6}{5}$ es un entero más $\frac{1}{5}$".

Por otro lado, la menor frecuencia la obtenemos en el ítem a.II ($\frac{4}{21}$) cuando tienen que trabajar con una fracción mayor que 1, a partir de una longitud.

Sobre los argumentos	**Frecuencias en a.II**	**Frecuencias en b.II**	**Frecuencias en c.II**	**Frecuencias en d. II**
Usa una prueba pragmática	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{3}{21}$
Usa una prueba intermedia	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{21}$
Usa una prueba intelectual	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$
No argumenta/confuso	$\frac{17}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{16}{21}$

Cuadro 4.6. Tipos de argumentos de 1° año para el problema 2

Antes de analizar los argumentos, aclaramos que consideramos pragmáticos a los que se apoyan sólo en la medida de los segmentos, lo cual queda plasmado en las producciones de los estudiantes. Intermedios a aquellos que reconocen por ejemplo: el $\frac{3}{3}$ como unidad de medida de manera explícita y la necesidad de encontrar la medida de $\frac{1}{3}$ para completar la unidad o en el caso c.II, reconocen el $\frac{5}{5}$ como la unidad de medida y $\frac{1}{5}$ como fracción sobrante. Por último, tomaremos como intelectuales a aquellos que se apoyan en el significado de la fracción como medida, indicando que $\frac{m}{n} = m\, x\, \frac{1}{n}$ con la expresión algebraica o de manera coloquial y pueden generalizar.

En el cuadro 4.6 notamos que las mayores frecuencias están dadas en "no argumenta/confuso" y que estas frecuencias alcanzan más de la tercera parte de las producciones en todos los ítems menos el b.II, el cual es de más de la mitad. También es notorio que en ningún ítem se utiliza para argumentar la expresión $\frac{m}{n} = m\, x\, \frac{1}{n}$ lo cual nos estaría dando una idea del estado de conceptualización sobre la fracción como medida. De todas maneras, las frecuencias en las pruebas intermedias (entre $\frac{2}{21}$ y $\frac{5}{21}$) nos "dicen algo" sobre la conceptualización de la fracción como medida, y es que, estos pocos estudiantes reconocen la unidad de medida y la fracción que falta o sobra para reconstruirlo.

Al comparar los cuadros 4.4, 4.5 y 4.6 para encontrar algunos hallazgos entre la reconstrucción gráfica de la unidad de medida y los argumentos que utilizaron o no los estudiantes y a su vez analizar cómo la noción de medida de una cantidad continua aparece en ambas situaciones. Para el caso de b) y c) hay coincidencias entre la frecuencia de reconstrucción de la unidad de medida y la posibilidad de argumentar con pruebas pragmáticas o intermedias. En cambio, en los ítems a) y d) hay una frecuencia mayor de reconstrucción de la unidad de medida pero al momento de argumentar cómo lo pensaron, las frecuencias disminuyen significativamente. Parecería haber aquí un dato más, que es la diferencia que implica el "hacer" o usar los conocimientos en la acción y el "explicar lo que se hace" o explicitar los conocimientos al momento de argumentar, dos tipos de tareas diferentes que implican distintos conocimientos sobre la fracción como medida. Es decir, podemos notar que la noción *medida de una cantidad continua* es utilizada en la reconstrucción de la unidad de medida en los ítems b) y c) y nuevamente aparece al tener que argumentar su procedimiento con frecuencias similares. En cambio en los ítems a) y d) la frecuencia de uso de la noción en las pruebas disminuye notablemente.

Por último, presentamos los cuadros que sintetizan las formas de representación, las nociones y los argumentos utilizados en las consignas del PROBLEMA 3, resuelto por 21 estudiantes.

Formas de representación	**Frecuencias en ítem a)**	**Frecuencias en ítem b)**
Usa sólo lenguaje coloquial de manera correcta Usa sólo lenguaje coloquial de manera incorrecta	$\frac{0}{21}$ $\frac{8}{21}$	$\frac{2}{21}$ $\frac{12}{21}$
Usa una expresión decimal correcta	$\frac{11}{21}$	$\frac{1}{21}$
Usa una expresión fraccionaria y la recta numérica correctamente	-	$\frac{2}{21}$

No resuelve	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$

Cuadro 4.7. Formas de representación de 1° año para el problema 3

Al analizar el cuadro 4.7, notamos que para el ítem a) aproximadamente la mitad de los estudiantes ($\frac{11}{21}$), responde correctamente utilizando una expresión decimal y una gran parte de estudiantes se expresa a través del lenguaje coloquial pero de manera incorrecta ($\frac{8}{21}$), que si los sumamos a los "no resuelve" llegan aproximadamente a la otra mitad restante. En el ítem b) la mayor frecuencia de respuestas son incorrectas ($\frac{12}{21}$) utilizando el lenguaje coloquial, y si se suma la frecuencia de estudiantes que no resuelven la consigna, se obtiene una alta frecuencia ($\frac{16}{21}$).

Queremos destacar aquí, que en ambos ítems, aproximadamente la mitad de los estudiantes mantienen el registro dado en la consigna, es decir, la consigna se presenta de manera coloquial y para responder también utilizan el lenguaje coloquial de manera incorrecta. La otra mitad de los estudiantes, para el ítem a) cambian de registro y utilizan sólo expresiones decimales y para el ítem b) los registros son más variados pero todos correctos.

Nociones/Técnicas	**Frecuencias en ítem a)**	**Frecuencias en ítem b)**	**Frecuencias en ítem c)**
Proporción/Propiedad fundamental	-	-	-
Propiedades de la proporcionalidad	$\frac{3}{21}$	-	-
Usa Regla de tres	$\frac{8}{21}$	-	-
Pasaje por la unidad	$\frac{3}{21}$	-	-
Constante de proporcionalidad[40]	-	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{21}$

Cuadro 4.8. Nociones/Técnicas de 1° año para el problema 3

[40] Si bien la constante de proporcionalidad es una propiedad de la proporcionalidad, nos pareció pertinente destacarla de las demás propiedades.

Al analizar el cuadro 4.8 es notorio el uso de la regla de tres para obtener el resultado de la primera pregunta, $\frac{8}{21}$ de los estudiantes la utilizan de manera correcta. Con menor frecuencia ($\frac{3}{21}$), utilizan como método para encontrar el valor 12,5 litros, el pasaje por la unidad. Es decir, de los estudiantes que contestaron con una expresión decimal correcta el ítem a), la mayoría utilizó regla de tres simple y algunos el pasaje por la unidad.

Por otra parte, la noción de constante de proporcionalidad es utilizada por pocos estudiantes en los ítems b) y c), $\frac{1}{21}$ y $\frac{3}{21}$ respectivamente, como así también las propiedades de la proporción en el ítem a) con $\frac{3}{21}$. Cabe aclarar aquí, que no hay una mención explícita de las propiedades en las respuestas de los estudiantes sino un uso implícito.

Sobre los argumentos	Frecuencias en el ítem b)	Frecuencias en el ítem c)
Usa una prueba pragmática	$\frac{0}{21}$	$\frac{1}{21}$
Usa una prueba intermedia	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$
Usa una prueba intelectual	$\frac{0}{21}$	$\frac{0}{21}$
No argumenta/confuso/erróneos	$\frac{20}{21}$	$\frac{18}{21}$

Cuadro 4.9. Tipos de argumentos de 1° año para el problema 3

Cuando leemos el cuadro 4.9 es llamativa la frecuencia de estudiantes que no argumentan o presentan argumentos confusos/erróneos en ambos ítems. Para el primer ítem, prácticamente todos y para el segundo ítem más de las tres cuartas partes, lo cual amerita un análisis a posteriori de los errores o ideas asociadas.

También, para el ítem b), explicitamos el argumento que presenta la única estudiante lo cual lo encuadramos dentro de la prueba intermedia: “se obtiene un color más oscuro que el de 2 l V y 7 l B porque tiene más cantidad de porcentaje de pintura verde por litro de pintura blanca”. En este caso, hay un acercamiento a comparar las dos mezclas utilizando la noción de razón.

Para el ítem c), compartimos las pocas pruebas que encontramos. Por un lado, una prueba pragmática: “Es posible multiplicar los 5 l de pintura verde por 2,5 para llegar al resultado 12,5 l”. En este caso sólo explica el cálculo que realizó. Por otro lado, identificamos dos estudiantes con pruebas intermedias: “el 2,5 equivale a la cantidad de pintura blanca que se debe colocar por cada litro de pintura de color”. En estos casos usan la idea de valor unitario, ligada a la constante de proporcionalidad.

4.2.2. Categorización de las resoluciones obtenidas en 4° año

A continuación presentamos una serie de cuadros que sintetizan las formas de representación, las nociones y los argumentos utilizados en las consignas del PROBLEMA 1, resueltas por 11 estudiantes de 4° año.

Formas de representación		**Frecuencias en a.I**	**Frecuencias en b.I**	**Frecuencias en b.II**
Usa solo una escritura fraccionaria	Las fracciones indican el resultado sintético del reparto.	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$
	Las fracciones indican otros cocientes adecuados.	$\frac{0}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
	La notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$
Usa solo un gráfico	Dibuja los chocolates y divide según los datos.	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$
Usa más de una forma de representación	-coloquial y fraccionaria (correcta)	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$
	-Coloquial y fraccionaria (incorrecta)	$\frac{1}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$
	-fraccionaria, gráfica y coloquial (correcta)	$\frac{1}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{2}{11}$
	-fraccionaria, gráfica y coloquial(incorrecta)	$\frac{0}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$
	-gráfico y fraccionaria (correcta)	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$
	-gráfico y fraccionaria			

	(incorrecto)	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{0}{11}$
No resuelve		$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$

Cuadro 4.10. Formas de representación de 4° año para el problema 1

En el cuadro 4.10, podemos notar que la mayor frecuencia se da en *usa más de una forma de representación*, para resolver los tres ítems analizados. A su vez, encontramos algunas diferencias: para los ítems a.I y b.I la representación gráfica y fraccionaria es la más utilizada en cambio para el ítem b.II se incorpora también el lenguaje coloquial.

En cuanto a la *representación gráfica y fraccionaria* —que es la más utilizada en a.I y b.I— notamos que la mayor frecuencia de errores se da en el ítem a.I, con $\frac{4}{11}$ y la mayor frecuencia de representaciones correctas en el ítem b.II con $\frac{4}{11}$. Como bien lo expresamos en el análisis de las producciones de 1° año, tendríamos que avanzar aquí con el análisis y preguntarnos a qué se debe esta diferencia de frecuencias. Vale recordar en este mismo sentido, que el reparto que se presenta en a.I involucra la noción de parte-parte y el reparto del ítem b.I no, lo cual podría darnos una respuesta posible a dicha diferencia, como bien ya lo hicimos notar.

En cuanto a la relación entre las dos formas de representación —gráfica y fraccionaria—, para a.I y b.I notamos que todos los estudiantes que utilizan representaciones fraccionarias correctas se apoyan en la representación gráfica, que también está correctamente realizada según el reparto propuesto. En cambio, para el ítem a.I en los estudiantes que sus expresiones fraccionarias fueron incorrectas, observamos que la mitad realizó representaciones gráficas con error y la otra mitad construyó gráficos correctos pero al expresar la fracción cometieron errores y en b.I los gráficos estaban bien pero las expresiones fraccionarias no. Lo cual, sucedió también en las producciones de 1° año y se continuará analizando en la sección 4.3 al desarrollar las ideas asociadas.

Por otro lado, es notorio que todos los estudiantes resolvieron de alguna manera los tres ítems del problema, sin dejar ninguna pregunta por contestar.

Además, en relación con la forma de representación *"usa sólo una escritura fraccionaria"* y dentro de esta categoría: *las fracciones indican el resultado sintético del reparto,* al leer el cuadro que sintetiza los resultados de las producciones, nos encontramos con bajas frecuencias (entre $\frac{1}{11}$ y $\frac{3}{11}$). Lo dicho anteriormente se puede relacionar al analizar el ítem c.II y los resultados obtenidos en el mismo. En relación con la forma de representación, notamos que algunos estudiantes expresaron los resultados del reparto con fracciones unitarias, al estilo de los Egipcios, es decir del mismo modo lo hacía esta civilización hace cientos de años. También podríamos decir que al expresar el $\frac{3}{5}$ como suma de $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ lo que están haciendo es expresar una cantidad como suma de partes de la unidad.

Por último, queríamos mencionar algunas frecuencias en relación con el cambio de registro, cuestión analizada por Duval (2016) y expuesta en el marco teórico de esta investigación. Encontramos en a.I un $\frac{6}{11}$, en b.I un $\frac{9}{11}$ y en b.II $\frac{9}{11}$ de las producciones de los estudiantes, que presentan un cambio de registro —de una expresión coloquial a una expresión fraccionaria— en sus representaciones, cambio que es solicitado en el enunciado explícitamente. Además, esta modificación en el registro se da sin errores y se puede evidenciar en las frecuencias del cuadro 4.10. También es necesario destacar que todos los estudiantes cambian de registro tal como se solicitó aunque encontramos algunos errores en algunas representaciones fraccionarias.

Nociones que intervienen		**Frecuencias en a.I**	**Frecuencias en a.II**	**Frecuencias en b.I**	**Frecuencias en b.II**
Fracción de otra fracción	La indica y la resuelve correctamente.	$\frac{7}{11}$	-	-	$\frac{2}{11}$
	La indica y la resuelve con error.	$\frac{0}{11}$	-	-	$\frac{0}{11}$
	Sólo la indica.	$\frac{2}{11}$	-	-	$\frac{0}{11}$
	No la identifica.	$\frac{2}{11}$	-	-	$\frac{1}{11}$
	No la utiliza	$\frac{0}{11}$	-	-	$\frac{8}{11}$
Suma de fracciones	Suma correctamente teniendo en cuenta los datos.	$\frac{6}{11}$	-	$\frac{2}{11}$	-
	Suma correctamente y con datos	$\frac{2}{11}$	-	$\frac{1}{11}$	-

	erróneos.				
	Suma con errores en el algoritmo y datos correctos.	$\frac{0}{11}$	-	$\frac{0}{11}$	-
	No la utilizan	$\frac{3}{11}$	-	$\frac{8}{11}$	-
Reparto equitativo		-	$\frac{1}{11}$	-	-
División		-	$\frac{1}{11}$	-	-
Equivalencia de fracciones		-	$\frac{5}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{6}{11}$

Cuadro 4.11. Nociones de 4° año para el problema 1

En cuanto a las nociones que se ponen en juego en el problema 1, podemos notar al analizar el cuadro 4.11 que la mayoría de los estudiantes de 4° año reconocen la noción *fracción de otra fracción*, pues $\frac{2}{11}$ la indican y $\frac{7}{11}$ la resuelven correctamente. Pero es notoria la situación en el ítem b.II, pues $\frac{8}{11}$ no la utilizan en la propuesta del reparto contra un $\frac{2}{11}$ que sí.

En cuanto a la *suma de fracciones* más de la mitad ($\frac{6}{11}$) la utiliza para resolver el ítem a.I y lo hace correctamente pero $\frac{8}{11}$ no la utilizan para el ítem b.I, a pesar de que la situación lo habilitaba.

Por último, la noción de *reparto equitativo* es reconocida sólo por $\frac{1}{11}$ y más de la mitad de los estudiantes reconocen *la equivalencia de expresiones fraccionarias* en los tres ítems del problema 1. En este mismo sentido, señalamos cómo la noción de equivalencia de fracciones utilizada para responder el ítem a.II, luego se relaciona con el ítem c.I que indaga sobre la equivalencia de expresiones fraccionarias en general. Encontramos que la noción de equivalencia de fracciones utilizada en a.II se traslada y mantiene en los argumentos, es decir que una noción utilizada en "la acción" es recuperada para luego argumentar sobre esa acción realizada en un procedimiento. Además, se hace explícita en las pruebas intermedias dadas en c.I desde la idea de "misma cantidad" o "el mismo número" pero escrito de otra manera, incluso incrementa su frecuencia, pues hay $\frac{8}{11}$ de estudiantes que expresan la equivalencia de expresiones fraccionarias.

Sobre los argumentos	**Frecuencias en a.II**	**Frecuencias en c.I**	**Frecuencias en c.II**
Usa una prueba pragmática	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$
Usa una pruebas intermedia	$\frac{6}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{3}{11}$
Usa una prueba intelectual	$\frac{0}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$
No argumenta/confuso	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{1}{11}$

Cuadro 4.12. Tipos de argumentos de 4° año para el problema 1

Antes de avanzar con el análisis de los argumentos del cuadro 4.12, queremos señalar que para estos resultados, vale el mismo desarrollo sobre los tipos de pruebas y los ejemplos dados debajo del cuadro 4.3, lo cual se omite para evitar repeticiones.

En cuanto a los argumentos, al leer el cuadro 4.12 notamos que en el ítem a) aproximadamente la mitad de los estudiantes argumenta con pruebas pragmáticas y la otra mitad con pruebas intermedias, $\frac{5}{11}$ y $\frac{6}{11}$ respectivamente. No ocurre lo mismo con el ítem c.I), en el cual casi las tres cuartas partes de los estudiantes utilizan pruebas intermedias ($\frac{8}{11}$) y menos de la cuarta parte una prueba intelectual. En el último ítem, las frecuencias mayores se concentran en las pruebas pragmáticas con $\frac{5}{11}$ y las menores frecuencias en las dos restantes pruebas. Cabe aclarar que, prácticamente no encontramos argumentos confusos o que no argumentan, sólo $\frac{1}{11}$ para el último ítem.

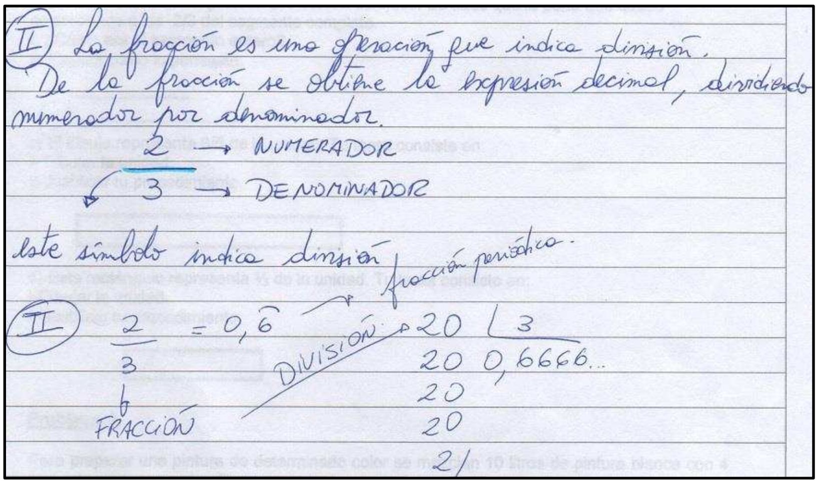
A continuación, presentamos un ejemplo de cada tipo de argumento intelectual, para que el lector pueda compartir con nosotros algunos hallazgos de los mismos, los cuales no se evidenciaron en las producciones de 1° año:

Para el ítem c.I: Explicá cuándo dos expresiones fraccionarias son equivalentes

–Usa una prueba intelectual: "Cuando representan el mismo número pero de distinta manera escrito" y "Cuando ocupan el mismo lugar en la recta numérica".

Para el ítem c.II: ¿Cómo se relaciona la fracción con la división?

–Usa una prueba intelectual:


II La fracción es una operación que indica división.
De la fracción se obtiene la expresión decimal, dividiendo numerador por denominador.

2 → NUMERADOR
3 → DENOMINADOR

este símbolo indica división

fracción periódica.

II $\frac{2}{3} = 0,\hat{6}$

FRACCIÓN

DIVISIÓN: 20 | 3
20 0,6666...
20
20
20
2

Recuperado del Anexo analítico

Para continuar con la exposición de los resultados, presentamos una serie de cuadros que sintetizan las formas de representación, las nociones y los argumentos utilizados en las consignas del PROBLEMA 2. El mismo también fue resuelto por 11 estudiantes de 4° año del Profesorado de Nivel Primario.

Formas de representación		**Frecuencias en a.I**	**Frecuencias en b.I**	**Frecuencias en c.I**	**Frecuencias en d.I**
Usa un gráfico	Reconstruye la unidad de medida	$\frac{8}{11}$	$\frac{11}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{11}{11}$
	No reconstruye la unidad de medida	$\frac{3}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{0}{11}$
No responde	-	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$

Cuadro 4.13. Formas de representación de 4° año para el problema 2

Al analizar el cuadro 4.13 notamos claramente dos situaciones diferenciadas: en los ítems b.I y d.I se observa que la totalidad de los estudiantes lograron reconstruir la unidad y que en los ítems a.I y c.I encontramos $\frac{8}{11}$ respuestas correctas. Por otro lado, todos los estudiantes responden a las consignas del problema 2, por lo cual nos encontramos con un $\frac{0}{11}$ de "no responde".

Por otro lado, todos los estudiantes realizan su producción en la misma representación dada —rectángulos y segmento—, sin producir ningún cambio de registro, logrando la totalidad de producciones correctas para b) y d) y $\frac{8}{11}$ en a) y c).

Nociones	Frecuencia en a.II	Frecuencia en b.II	Frecuencia en c.II	Frecuencia en d.II
Medida de una cantidad continua	$\frac{7}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{10}{11}$

Cuadro 4.14. Nociones de 4° año para el problema 2

En el cuadro anterior notamos que las mayores frecuencias ($\frac{10}{11}$) se encuentran en los ítems b.II y d.II cuando tienen que reconstruir la unidad de medida a partir de una fracción menor que 1, expresada a partir de una longitud y de un rectángulo. Igualmente, en los demás ítems —reconstrucción de la unidad de medida a partir de una fracción mayor que 1— también se observan frecuencias altas como $\frac{7}{11}$ y $\frac{8}{11}$.

Sobre los argumentos	Frecuencias en a.II	Frecuencias en b.II	Frecuencias en c.II	Frecuencias en d.II
Usa una prueba pragmática	$\frac{6}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$
Usa una prueba intermedia	$\frac{3}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{11}$
Usa una prueba intelectual	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$
No argumenta/confuso	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$

Cuadro 4.15. Tipos de argumentos de 4° año para el problema 2

Podemos notar que la mayor frecuencia ($\frac{10}{11}$) se encuentra en el ítem b.II al usar una prueba intermedia para argumentar sobre la reconstrucción de la unidad de medida a partir del $\frac{2}{3}$. De todos modos, más de la mitad de los estudiantes utilizan este tipo de pruebas en los ítems c.II y d.II también, y sólo se nota una diferencia y disminución de frecuencias en el ítem a.II con sólo $\frac{3}{11}$ para las pruebas intermedias y un aumento en la frecuencia para las pruebas pragmáticas.

Por otro lado, para la categoría "no argumenta/confuso" las frecuencias resultan bajas con un leve aumento en c.II. Y también es notorio, que en ningún ítem se utiliza para argumentar una prueba intelectual, de la forma: la expresión $\frac{m}{n} = m \, x \, \frac{1}{n}$ lo cual nos está indicando alguna cuestión a considerar en las conclusiones finales.

Por último, vamos a comparar los cuadros 4.13, 4.14 y 4.15 —al igual que lo hicimos con las producciones de 1° año— para encontrar algunos hallazgos entre la reconstrucción gráfica de la unidad de medida y los argumentos que utilizaron o no los estudiantes. Para el caso de c) hay coincidencias entre las frecuencias que indican la reconstrucción de la unidad de medida y la posibilidad de argumentar con pruebas pragmáticas o intermedias. Pero en los ítems b) y d) hay una frecuencia mayor de reconstrucción de la unidad de medida pero al momento de argumentar cómo lo pensaron, las frecuencias disminuyen levemente. Y para el caso de a), aumenta la frecuencia al momento de argumentar, pues reconocen que $1\,\frac{3}{4}$ como mayor a la unidad y argumentan en ese sentido, pero al reconstruir gráficamente no respetan las medidas dadas en la consigna. Parecería haber aquí un dato más, que resulta de la diferencia que implica el "hacer" o usar los conocimientos en la acción y el "explicar lo que se hace" o explicitar los conocimientos a la hora de argumentar, dos tipos de tareas diferentes que implican distintos conocimientos sobre la fracción como medida. Es decir, podemos notar que la noción *medida de una cantidad continua,* es utilizada en la reconstrucción de la unidad de medida en c) y nuevamente aparece en el argumento relacionado a este ítem con frecuencias similares. En cambio, para b) y d) la frecuencia de uso de la noción en las pruebas disminuye notablemente y en a) aumenta.

A continuación, presentamos los cuadros que comparan las formas de representación, las nociones/métodos y los argumentos utilizados en las consignas del PROBLEMA 3, resuelto por 11 estudiantes.

Formas de representación	Frecuencias en ítem a)	Frecuencias en ítem b)
Usa sólo lenguaje coloquial correctamente	$\frac{0}{11}$	$\frac{4}{11}$
Usa sólo lenguaje coloquial incorrectamente	$\frac{0}{11}$	$\frac{3}{11}$
Usa expresión decimal y/o fraccionaria correctamente	$\frac{10}{11}$	$\frac{4}{11}$
Usa una expresión algebraica incorrecta	$\frac{1}{11}$	$\frac{0}{11}$
No resuelve	$\frac{0}{11}$	$\frac{0}{11}$

Cuadro 4.16. Formas de representación de 4° año para el problema 3

Al observar el cuadro 4.16 notamos que para el ítem a) la mayoría de los estudiantes ($\frac{10}{11}$), responde correctamente utilizando una expresión decimal y/o fraccionaria y sólo $\frac{1}{11}$ usó una representación incorrecta. Pero por el contrario, en el ítem b) las frecuencias de representaciones se distribuyen más equitativamente entre el lenguaje coloquial correcto e incorrecto y la expresión decimal-fraccionaria correcta. En síntesis, podríamos decir que $\frac{10}{11}$ y $\frac{8}{11}$ responde correctamente a los ítems a) y b) respectivamente.

Queremos destacar aquí, que en el ítem a) prácticamente la totalidad de los estudiantes cambian de registro y lo hacen de manera correcta, es decir, la consigna se presenta de manera coloquial y para responder utilizan otro registro, en este caso las expresiones fraccionarias y decimales. En cambio, en el ítem b) más de la mitad de los estudiantes se mantiene en el mismo registro —el lenguaje coloquial— observándose algunos registros correctos y otros incorrectos; y los demás cambian de registro utilizando expresiones fraccionarias y decimales correctas.

Nociones/Técnicas	Frecuencias en ítem a)	Frecuencias en ítem b)	Frecuencias en ítem c)
Usa Regla de tres	$\frac{7}{11}$	-	-
Pasaje por la unidad	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	-
Constante de proporcionalidad	-	-	$\frac{6}{11}$
Proporción/propiedad fundamental	$\frac{1}{11}$	-	-
Comparación de razones	-	$\frac{4}{11}$	-

Cuadro 4.17. Nociones/Técnicas de 4° año para el problema 3

El cuadro 4.17 nos muestra para el ítem a), una frecuencia alta ($\frac{7}{11}$) en el uso de la regla de tres simple, y frecuencias bajas e iguales para las demás nociones/métodos. Para el ítem b), encontramos frecuencias idénticas ($\frac{4}{11}$) al usar el método de pasaje por la unidad y la comparación de razones. Por último, en el ítem c), la mitad de los estudiantes aproximadamente ($\frac{6}{11}$) utilizan la noción de constante de proporcionalidad para contestar a la consigna.

Sobre los argumentos	Frecuencias en el ítem b)	Frecuencias en el ítem c)
Usa una prueba pragmática	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$
Usa una prueba intermedia	$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{11}$
Usa una prueba intelectual	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
No contesta/confuso/erróneos	$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$

Cuadro 4.18. Tipos de argumentos de 4° año para el problema 3

Al leer el cuadro 4.18 notamos que aproximadamente la mitad ($\frac{6}{11}$) de los estudiantes lograron argumentar con una prueba intermedia sobre la tonalidad de la pintura solicitada en b). Pero al analizar el ítem c), que indaga sobre la existencia de la constante de proporcionalidad, las frecuencias están distribuidas más uniformemente con una frecuencia alta en los argumentos erróneos ($\frac{5}{11}$).

A continuación, presentamos un ejemplo de *prueba intermedia* para el ítem b), que fue la más utilizada:

Ejemplo: Para 1 litro de pintura verde se necesitan 3,5 l de pintura blanca, para 2 l de verde ocupo 7 litros de pintura blanca entonces para 3 litros se necesitan 10,5 litros de pintura blanca. Entonces si se mezclan 3 l de verde con 8 l de blanca quedará un color más oscuro" Aquí notamos cómo los 4 estudiantes arman nuevas razones utilizando propiedades de la proporcionalidad de manera implícita que le sirven para argumentar su respuesta.

En este argumento, notamos claramente cómo el estudiante utiliza un procedimiento ya investigado por Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) con vendedores ambulantes. Éstos, calculan el precio de una cierta cantidad de artículos que venden, comienzan a partir del precio del artículo y por lo general realizan sumas sucesivas de ese precio, tantas veces como el número de artículos a ser vendido. En el capítulo 1, expresamos que Vergnaud llamó a esta estrategia enfoque escalar o también en los Antecedentes Block (2006) analiza estos tipos de procedimientos y utiliza el término de razón interna utilizado por Freudenthal (1983). Por otro lado, nos resulta pertinente relacionar este tipo de procedimientos con lo que Vergnaud (1994) llama "teorema en acto" y que también lo exponemos en el capítulo 1, pues este procedimiento es apreciado de manera intuitiva y no expresado de manera formal o general por los estudiantes.

También queremos ejemplificar con un argumento de cada una de las categorías consideradas en el cuadro 4.18, para el ítem c). Ante la consigna que planteaba: "Juan dice que es posible calcular la cantidad de pintura blanca en el ítem a) multiplicando la cantidad de pintura verde por un número. ¿Estás de acuerdo?, ¿por qué? Encontramos:

> –*Prueba pragmática:* "No estoy de acuerdo porque si realizo otro procedimiento, es decir regla de tres, donde puedo multiplicar 5 l pintura verde por 10 l pintura blanca = 50l, dividido 4l de pintura verde me da 12, 5 litros de pintura blanca. Pero sí o sí debo primero multiplicar y luego dividir, sino no obtengo esa cantidad de pintura blanca".

–Prueba intermedia: Para calcular la cantidad de pintura blanca se multiplica la cantidad de pintura verde por 2,5 litros; es decir a cada litro de pintura verde le corresponde 2,5 l de pintura blanca". En este caso reconoce la relación que se da entre las dos magnitudes.

–Prueba intelectual: Una alumna además de expresar en lenguaje coloquial las relaciones que se dan entre las dos cantidades, utiliza la fórmula $y = k \,.\, x$ y aclara el significado de cada letra de la fórmula. Expresa que la k es la constante de proporcionalidad la cual permite averiguar cuántos litros de pintura blanca se utilizan por cada litro de pintura verde y realiza el cálculo de la misma.

Podríamos plantear aquí, que en los dos últimos ejemplos, los estudiantes utilizan en sus argumentos un enfoque funcional, pues establecen relaciones entre las dos variables. En el argumento que llamamos intermedio, esta relación aparece pero no se explicita formalmente, por el contrario en la prueba intelectual notamos una expresión general para la relación entre las variables.

4.2.3. Análisis comparativo de las producciones de 1° año y de 4° año.

PROBLEMA 1

Como adherimos al posicionamiento que expresa que un concepto, es más que la definición del mismo, expresión realizada por Vergnaud (1990) y recuperada en el capítulo 1, queremos señalar diversas aristas del análisis para establecer las primeras conclusiones sobre cómo los estudiantes de 1° y 4° año avanzaron en la conceptualización del significado de fracción en el contexto de reparto. Es decir, lograr una primera aproximación de la diferencia en el estado de los conocimientos de los estudiantes que forman parte de esta investigación, y así responder —en parte— a una de las preguntas del trabajo: ¿Cuáles son las similitudes y diferencias de los conocimientos de los estudiantes en torno a los significados de las fracciones?

En primer lugar, comenzamos con algunas coincidencias entre las producciones de 1°año y 4°año en cuanto a las representaciones utilizadas. Hay un predominio de uso conjunto de representaciones gráficas y fraccionarias por sobre el uso sólo de gráficos, o del lenguaje coloquial o de expresiones fraccionarias en ambos grupos de estudiantes. Con relación a esta última representación, notamos que muy pocos estudiantes logran expresar el reparto con *"sólo una escritura fraccionaria"* y dentro de esta categoría, lograr que *las fracciones indiquen el resultado sintético del reparto.* En este sentido, consideramos que si los estudiantes logran registrar el reparto utilizando sólo una fracción, su conceptualización de la fracción como resultado de un reparto y a su vez como cociente indicado estaría en un estado avanzado. Pero al leer los cuadros que sintetizan los resultados de las producciones, nos encontramos con bajas frecuencias. Entre $\frac{1}{11}$ y $\frac{3}{11}$ para 4° año y $\frac{1}{21}$ en el ítem b.II y $\frac{0}{21}$ para los demás ítems para 1° año.

Otra coincidencia entre ambos grupos, en relación con la *representación gráfica y fraccionaria* —que es la más utilizada en a.I y b.II— es que la mayor frecuencia de errores se da en el ítem a.I y la mayor frecuencia de representaciones correctas en el ítem b.II. Podríamos preguntarnos a qué se debe esta coincidencia, dado que en ambos ítems la tarea es la misma y en ambos repartos se trata de más chocolates que niños. Una primera respuesta podría estar dada porque en el ítem a.I está implicada la noción fracción de otra fracción, lo cual es de mayor complejidad y se ve obstaculizada por la confusión con cuál es la unidad o el entero.

Una última coincidencia se da en la relación con los dos tipos de representaciones que usan, —gráfica y fraccionaria—. En ambos grupos observamos que para a.I y b.I todos los estudiantes que utilizan representaciones fraccionarias correctas se apoyan en la representación gráfica, que también está correctamente realizada según el reparto propuesto. En cambio, para el ítem a.I en los estudiantes que sus expresiones fraccionarias fueron incorrectas, observamos que la mitad realizó representaciones gráficas con error y la otra mitad construyó gráficos correctos pero al expresar la fracción cometieron errores. En el caso de b.I, todos los estudiantes que expresaron el reparto de manera incorrecta utilizando fracciones, sus gráficos estaban bien realizados. Aquí nuevamente podríamos preguntarnos, dada la coincidencia, ¿qué sucede entre los dos tipos de representación y el apoyo que podría darse en lo gráfico para plasmar lo numérico?, ¿la representación gráfica ayudó al razonamiento, al control de la acción, a identificar la noción parte-parte en el gráfico para luego representarla numéricamente? Parecería en un primer análisis que no. Estas cuestiones, las plantea Vergnaud (1990) cuando define las funciones del lenguaje y de los demás significantes, y se encuentra desarrollado en el marco teórico. También Duval (2016) nos orienta en este sentido, […] cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado" (p.74). A su vez, también se pregunta sobre la complejidad que implica enfrentarse a dos representaciones de un mismo objeto desde dos registros distintos, ¿cómo puede uno reconocer al mismo objeto representado dentro de su respectivo contenido? “[...] la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica. Y desde ya se puede plantear una primera pregunta: ¿esa coordinación de registros llega naturalmente a los estudiantes en el contexto de la enseñanza matemática?” (Duval, 2016, pp.76-77).

En cuanto a las diferencias halladas al analizar las representaciones, podemos encontrar frecuencias altas en 4° año que al cambiar de registro lo hacen sin errores, entre la mitad y las tres cuartas partes para un ítem, y más de las tres cuartas partes para los dos ítems restantes. Lo anterior no se ve reflejado en 1° año, pues menos de la mitad de los estudiantes logran cambiar de registro sin errores.

En segundo lugar, en relación con los *invariantes operatorios*, segundo componente de la tripleta que propone Vergnaud (1990) para analizar un concepto —recuperamos los análisis realizados sobre las *nociones*—. Podemos señalar notables diferencias entre 1°año y 4°año. Más de la mitad de los estudiantes de 4° año reconocen la noción *fracción de otra fracción* y la resuelven correctamente. En cambio, en 1° año la frecuencia es muy baja, sólo $\frac{4}{21}$. La coincidencia está dada en el no uso de la noción *fracción de otra fracción* para el ítem b.II, lo cual estaba habilitado como procedimiento pero no se utilizó.

En cuanto a la *suma de fracciones* también encontramos diferencias notorias. En el caso de los estudiantes de 4° año más de la mitad ($\frac{6}{11}$) la utiliza para resolver el ítem a.I y lo hace correctamente pero en 1° año sólo $\frac{4}{21}$. Sí hay coincidencias al no usar la suma de fracciones para el ítem b.I, pues ambos grupos alcanzan frecuencias altas ($\frac{8}{11}$ y $\frac{19}{21}$).

Por último, hay diferencias en relación con la noción de *reparto equitativo, pues en 4° año* es reconocida y expresada sólo por $\frac{1}{11}$ y en 1° por $\frac{8}{21}$. También las diferencias se dan al reconocer la equivalencia de fracciones, para 4° año más de la mitad de los estudiantes y para 1° año entre $\frac{2}{21}$ y $\frac{3}{21}$. Queríamos señalar que con relación a *la equivalencia de expresiones* los pocos argumentos que encontramos en 1° año se basan en técnicas o en la idea de reparto equitativo expresada coloquialmente, en cambio en 4° año, hay una tendencia a pruebas intermedias que reconocen la noción de equivalencia con relación a la misma cantidad.

En tercer lugar, al analizar los tipos de argumentos en el ítem que indaga sobre la equivalencia de fracciones, notamos nuevamente diferencias y avances en los argumentos de 4° año. En 1° año, se dividen las frecuencias entre los argumentos pragmáticos asociados al uso de técnicas y los intermedios relacionados con la idea de "misma cantidad", $\frac{10}{21}$ y $\frac{9}{21}$ respectivamente. En cambio, en 4° año, la mayoría de los estudiantes optan por pruebas intermedias ($\frac{8}{11}$) y una baja frecuencia encontramos en las pruebas más intelectuales ($\frac{2}{11}$) pero de todas maneras las utilizan, cuestión que en 1° año no aparece.

Para el ítem c.II: ¿Cómo se relaciona la fracción con la división?, en ambos grupos la mayor frecuencia se asigna a argumentos pragmáticos asociados a la posibilidad de encontrar la expresión decimal que le corresponde a tal expresión fraccionaria. Luego, en 4° año un poco más de la cuarta parte avanza y descontextualiza los ejemplos pero siguen indicando la búsqueda de la expresión decimal y sólo un estudiante ($\frac{1}{11}$) plantea la relación, indicando cómo se vincula el dividendo con el numerador y el divisor con el denominador pero busca el decimal correspondiente, trabajando con el cociente calculado. Dicha relación sólo se advierte en el uso, es decir de manera implícita y con fines prácticos, aunque luego se evidencia en los argumentos de tipo pragmáticos.

Como bien lo expresa Block (2001) "La división funge únicamente como el medio que permite pasar de una expresión a otra del mismo número, medio que queda por el momento sin justificación, y esto porque la justificación (el hecho que las fracciones también significan cocientes) es demasiado compleja para introducirse en ese momento" (p.7), refiriéndose a la educación primaria en el caso citado. También recuperamos la prueba intelectual considerada para 4° año y señalar que si bien este estudiante relaciona la fracción con la división, al plantear el ejemplo trabaja con el cociente calculado y no con el cociente indicado. En este sentido, también queremos recuperar una idea de Block (2001):

> Así, el vínculo conceptual entre las nociones de fracción y de división de números naturales puede enfocarse de dos maneras: por un lado, la fracción puede definirse de entrada como un cociente de dos naturales, [...] muy distinta a la que prevalece en la enseñanza básica, la llamaremos "cociente por definición". Por otro lado, si la fracción no se define de entrada como un cociente, si es un "quebrado" en el sentido que aquí le hemos dado, puede de todas formas resultar ser el cociente de una división de naturales, al igual que puede serlo cualquier número, lo llamaremos "cociente calculado". En este caso, la división no aparece como una característica esencial, definitoria de las fracciones, sino como una fuente de situaciones que implican la utilización de quebrados (p.9).

PROBLEMA 2

Al comparar las frecuencias obtenidas en los cuadros 4.4 y 4.13 —1° y 4° año respectivamente— en relación con la reconstrucción de la unidad de medida a partir de una fracción, notamos claramente una diferencia marcada en las frecuencias. Todos los estudiantes de 4° año logran reconstruir la unidad de medida para los casos en que la fracción dada es menor que 1 y un grupo importante ($\frac{8}{11}$) lo realiza para el caso en que la fracción es mayor que 1. No ocurre lo mismo con los estudiantes de 1° año, en los que se observan bajas frecuencias en la reconstrucción de la unidad de medida, entre $\frac{5}{21}$ y $\frac{8}{21}$, las menores frecuencias responden a los casos que se da como dato inicial fracciones mayores que 1. Cabe aclarar, que en todos los casos que logran reconstruir la unidad de medida mantienen el registro gráfico dado en la consigna inicial.

También encontramos muy bajas frecuencias en el cuadro 4.5 —correspondiente a 1° año— que expresa la noción de medida de una cantidad continua, en relación con las frecuencias obtenidas para 4° año, cuadro 4.14. Una coincidencia que observamos en ambos cuadros es que, la más baja frecuencia está dada para el ítem a), es decir que para ambos grupos resulta más complejo expresar el 1 $\frac{3}{4}$ como $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$. En general, en ambos grupos no encontramos coincidencias entre las frecuencias donde utilizan la noción de una cantidad continua como parte de un procedimiento —la reconstrucción— y las frecuencias que responden a los argumentos dados. Podemos decir que, en casi todos los casos, las frecuencias disminuyen al tener que hacer explícita la noción a través de pruebas.

Por último, al comparar los cuadros 4.6 con 4.15 que resumen los argumentos dados, encontramos como coincidencia que ninguno de los estudiantes, ni de 1° ni de 4°, utilizan pruebas intelectuales, específicamente el argumento que permite definir la fracción como medida: $\frac{m}{n} = m\ x\ \frac{1}{n}$, con n distinto de 0. Como diferencia, se observan altas frecuencias ($\frac{17}{21}$) en la categoría "no argumenta/confuso para 1°año y muy bajas ($\frac{1}{11}$) para 4° año. Otra diferencia es en cuanto al uso de pruebas pragmáticas e intermedias. En 1° año las pruebas intermedias aumentan sus frecuencias en relación con las pruebas pragmáticas para los ítems a) y c) en cambio en 4° año esto sucede para los ítems b), c) y d).

PROBLEMA 3

Comenzamos analizando los tipos de representación utilizadas por ambos grupos. En este sentido encontramos diferencias: para el ítem a) la mayoría de los estudiantes de 4° año ($\frac{10}{11}$), responde correctamente utilizando una expresión decimal y/o fraccionaria y un pequeño grupo usa una representación incorrecta. En cambio, la frecuencia disminuye en 1° año y aproximadamente la mitad de los estudiantes ($\frac{11}{21}$), responde correctamente utilizando una expresión decimal y se observa una alta frecuencia en las producciones que utilizan el lenguaje coloquial pero de manera incorrecta ($\frac{8}{21}$). Cabe destacar que las representaciones numéricas no se usan de manera indistinta en los contextos extramatemáticos sino que incide el uso social ligado al contexto del problema. En este caso, se trata de una cantidad continua expresada con la unidad de medida "litros", lo que induce al uso de expresiones decimales.

También hay diferencias en el ítem b), pues para 4° año las frecuencias de representaciones correctas alcanzan al $\frac{8}{11}$ entre el lenguaje coloquial y la expresión decimal-fraccionaria pero en 1° año el mayor porcentaje de respuestas son incorrectas ($\frac{12}{21}$) utilizando el lenguaje coloquial, y al sumar los "no resuelve" obtenemos un alto porcentaje ($\frac{16}{21}$). Por lo tanto, la diferencia está dada notablemente en la obtención correcta de la respuesta de este ítem.

Continuamos con la comparación de los cuadros 4.8 y 4.17 para analizar las nociones y los métodos utilizados. Podríamos decir que hay una coincidencia entre 1°año y 4°año, en relación con el uso casi exclusivo de la *regla de tres simple* para encontrar el valor 12,5 litros. Si bien las frecuencias son diferentes, 4°año ($\frac{7}{11}$) y 1° año ($\frac{8}{21}$), lo notable es —como bien expresamos anteriormente— el uso casi exclusivo, pues las demás frecuencias son muy bajas, como por ejemplo: el *pasaje por la unidad* con un $\frac{1}{11}$ y $\frac{3}{21}$ para 4° y 1° año respectivamente. Además, del uso casi exclusivo de la regla de tres, al analizar las producciones no hay justificación alguna sobre la misma, sino sólo un planteo de los datos y la famosa expresión "multiplico cruzado y divido por el tercer dato que queda".

Para el ítem b), nuevamente hay diferencias marcadas, pues encontramos en 4° año la utilización del método de *pasaje por la unidad* y la *comparación de razones con altas frecuencias de uso (*$\frac{4}{11}$ para cada método*) y en* 1° año una baja frecuencia ($\frac{1}{21}$) del uso de la noción de *constante de proporcionalidad*. Cabe aclarar aquí, que en 1° año también se notó una alta frecuencia de errores y "no resuelve" al analizar las representaciones para este ítem lo cual no sucedió en 4° año.

Retomando la *comparación de razones* utilizada por algunos estudiantes de 4° año notamos cómo el $\frac{4}{11}$ arman nuevas razones utilizando propiedades de la proporcionalidad de manera implícita que le sirven para argumentar su respuesta, es decir, las propiedades están utilizadas de manera intuitiva y no se expresan de manera formal o logrando generalizar. Lo anterior, condice con los resultados expuestos en uno de los trabajos de los antecedentes y aporta al análisis desde la noción de concepto, desarrollada por Vergnaud (1990) y expuesta en el capítulo 1.

> Es un hecho ineludible en la enseñanza de la matemática y en la investigación que los conceptos y las ideas matemáticas pueden ser modelados, anticipados, utilizados intuitivamente, aludidos y utilizados como teoremas en acción (Vergnaud, 1994). Al mismo tiempo, este hecho representa una divergencia grande de opinión con quienes creen que es mejor introducir de antemano los conceptos matemáticos mediante su definición precisa (Schlieman, Carraher, Brizuela, 2011, p.133).

Por último, en el ítem c), nuevamente encontramos una diferencia marcada en ambos grupos pues, aproximadamente la mitad de los estudiantes de 4° año ($\frac{6}{11}$) utilizan la noción de *constante de proporcionalidad* para contestar a la consigna, en cambio, sólo $\frac{3}{21}$ de 1° año lo hace.

Para finalizar, analizamos los argumentos dados en el problema 3 para los ítems b) y c) comparando los cuadros 4.9 y 4.18. Al igual que en los cuadros analizados anteriormente, surgen diferencias notables pues aproximadamente las tres cuartas partes de los estudiantes de 4° año logran argumentar correctamente sobre la tonalidad de la pintura en el ítem b) y por el contrario, casi la totalidad de los estudiantes de 1° año no argumentan o presentan argumentos confusos/erróneo. En cuanto al ítem c) también hay diferencias pues en 4° año la frecuencia de producciones que argumentan correctamente es de $\frac{6}{11}$ y en 1° año se observa una frecuencia de $\frac{18}{21}$ de argumentos erróneos o de "no contesta". De todas maneras, como bien se señaló en el apartado de análisis individual de cada grupo, hay mayores errores en el ítem c) que en el b) para 4° año, lo cual se invierte en 1° año.

4.3. Análisis de las ideas asociadas a los procedimientos utilizados

A partir del conjunto de análisis realizado a las producciones de 1° año y de 4° año, surgen algunas ideas asociadas, que podríamos considerar que se constituyen en obstáculos para avanzar en la conceptualización de la noción de fracción y de sus significados y se manifiestan a través de errores. A continuación, presentamos una serie de cuadros que sintetizan estas ideas, para que el lector pueda tener una mirada global sobre cada uno de los problemas.

El siguiente cuadro resume las *Ideas asociadas* con relación al PROBLEMA 1:

Ideas asociadas/grupos de estudiantes		Frecuencias de *1° año*				Frecuencias de *4° año*			
		a.I	b.I	c.I	c.II	a.I	b.I	c.I	c.II
Las fracciones sólo pueden ser 1 o menor que 1/Confusión con el entero	-El entero es 23, 3, 6 o 2 chocolates.[41]	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{21}$	-	$\frac{15}{21}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	-	-
	-El entero es medio chocolate.	-	-	-	-	$\frac{2}{11}$	-	-	-
Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto		$\frac{1}{21}$	-	$\frac{8}{21}$	-	$\frac{1}{11}$	-	$\frac{2}{11}$	-
La fracción como cociente calculado		-	-	-	$\frac{13}{21}$	-	-	-	$\frac{4}{11}$

Cuadro 4.19. Ideas asociadas al PROBLEMA 1

[41] Aquí encontramos una variedad de procedimientos en los ítems que se realizan repartos. Por ejemplo: en a.I consideran 23 chocolates como el entero, pero también 3 chocolates. Por otro lado, en los procedimientos de b.I toman como entero 6 chocolates o 2 chocolates, dependiendo de cómo realizan el reparto. Decidimos encuadrarlos dentro de la misma categoría de análisis pues todos tienen la misma característica: confunden el entero.

En primer lugar, al analizar los ítems a.I y b.I notamos en sus respuestas, errores que nos permiten pensar en la idea *“Las fracciones sólo pueden ser menor que uno o uno, pero no mayor que 1 /confusión con el entero”.* Al leer algunas producciones en el Anexo Analítico, encontramos lo que Gairín y Escolano (2005), como así también Hincapié Morales (2011) y Gairín (2003), expuesto en los Antecedentes, plantean sobre estos errores y la relación que existe entre éstos y las propuestas de enseñanza:

> Se obstaculiza la formación de concepciones adecuadas:
> Un seguimiento de las actividades que proponen los textos escolares, sustentadas por el significado parte–todo, nos ha permitido identificar en los alumnos las siguientes ideas erróneas:
> * *No existen las fracciones impropias.* El alumno se crea la idea que el número de partes que se toman debe ser menor o igual que las partes del “todo” (Bonotto, 1993)
> * *El “todo” o unidad no es un número.* En el proceso instructivo no se explicita el sentido y las funciones de la unidad, lo que provoca la identificación de las fracciones del tipo **a/a** con la unidad, pues los estudiantes tienden a señalar que este tipo de fracciones representa el todo, o que han tomado **a** elementos (Gairín, 2001) (pp.23-24).

Estos autores también plantean, que el tratamiento exclusivo del significado parte-todo en la escuela primaria, obstaculiza la separación conceptual del número racional y del natural pues este tratamiento no justifica la introducción de una nueva estructura numérica para resolver las tareas pues sólo basta con el recuento de números naturales.
También queremos recuperar los aportes de Freudenthal (1983), expuestos en el capítulo 2 en su análisis fenomenológico sobre las fracciones, pues le otorga fuerza a la cita anterior y a nuestro análisis: “A pesar de una clasificación con tantas caras y de la abundancia de ejemplos posibles, enfocar las fracciones desde el punto de vista de “parte-todo” es algo bastante limitado —no sólo fenomenológicamente sino también matemáticamente pues este enfoque produce sólo fracciones propias” (p.14).
De esta manera, podemos pensar que la idea *“Las fracciones sólo pueden ser menor que uno o uno, pero no mayor que 1 /confusión con el entero”* que encontramos en algunas producciones de los estudiantes, está dada en parte por una fuerte presencia en las propuestas de enseñanza del significado parte-todo por sobre otros significados, decisión didáctica tomada por el profesor o por la propuesta editorial que consulta el docente al realizar sus planificaciones. Por lo anterior, podemos avanzar en el análisis y expresar que estos errores son la manifestación de un obstáculo de origen didáctico, es

decir, resultado de una opción personal del docente o de un proyecto institucional y/o del sistema educativo, tal como lo expresamos en el capítulo 1.

En segundo lugar, en relación con la idea "Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto", notamos una alta frecuencia en el ítem c.I para 1° año ($\frac{8}{21}$) y una frecuencia de $\frac{2}{11}$ en 4° año, que definen la equivalencia de fracciones solamente asociada al cumplimiento de una técnica que permite obtener fracciones equivalentes. Aquí, nuestros hallazgos coinciden con lo expuesto en Gairín (2003) el cual plantea que los estudiantes comprenden que conocer el concepto de equivalencia de fracciones significa conocer la técnica de comprobación del concepto y no las formas distintas de expresar una misma cantidad de magnitud, es decir tienden a sustituir los conceptos por alguna técnica asociada.

También, analizamos que en los ítems a.I y b.I, los estudiantes grafican muy bien la parte de otra parte pero, al llevar la situación al cálculo algorítmico cometen errores y no logran comparar esa producción errónea con su gráfico que representa la parte-parte de manera correcta. En este sentido, continuamos con el análisis que realiza Gairín y Escolano (2005) y creemos que estos procedimientos erróneos podrían estar dados por la manifestación de un obstáculo de origen didáctico. Obstáculo que posiblemente se haya generado por decisiones didácticas que priorizan el tratamiento del significado parte-todo y el manejo de técnicas exclusivamente, por sobre la comprensión del concepto:

> [...] así, los alumnos se forjan creencias como las siguientes:
> * Los conceptos son las técnicas asociadas a los mismos. Para los alumnos, las ideas sobre relaciones y operaciones se limitan al uso de sus técnicas asociadas; por ejemplo, el significado de la suma de fracciones es el algoritmo que proporciona el resultado de dicha suma.
> * Los contenidos útiles son los procedimentales. Los alumnos memorizan las técnicas de cálculo sin preocuparse por sus fundamentos teóricos [...] (24).

En estos ítems, a.I y b.I, nos resulta también llamativo cómo lo algorítmico prevaleció por sobre lo intuitivo y el contexto extramatemático, pues al momento de analizar las consignas, pensamos que el contexto de reparto de chocolates podía facilitar procedimientos correctos y avanzar sobre algunas ideas matemáticas, como la noción parte-parte. Esta última afirmación se sustentó en las lecturas que realizamos de Sadovsky (2005) y que expresamos en el capítulo 1 "[…] ciertos contextos aportan una "intuición" que ayuda a avanzar sobre algunas ideas, dejando en la sombra asuntos de los que en realidad en algún momento habría que ocuparse" (pp.101-102). En este sentido, nos interesa continuar investigando cómo influyen en los aprendizajes de los estudiantes, las decisiones didácticas que se toman o no, frente a un contenido específico a enseñar.

Para continuar con el análisis de estos ítems, y de cómo lo algorítmico prevaleció por sobre el contexto y el concepto, incorporamos al análisis, los errores que se observaron en el trabajo algorítmico. Según Socas (1997) expuesto en el capítulo 1, estos errores tienen su origen en una ausencia de significado y bajo esta categorización divide a los errores en los que tienen su origen en la aritmética, resultado de no haber asimilado relaciones y procesos en un contexto aritmético y errores de procedimiento, es decir errores que se producen cuando los estudiantes usan de manera inapropiada fórmulas, definiciones o reglas. En nuestra investigación, observamos ambos errores, algunos vinculados a la operatoria con fracciones y otros al uso de una técnica, como lo es la obtención de fracciones equivalentes. En este último caso, si bien los estudiantes explican la técnica correctamente, esto no les permite argumentar desde el significado la equivalencia de fracciones. Ambas descripciones se pueden encontrar en detalle en el Anexo Analítico.

Por último, encontramos en las producciones y más precisamente en los argumentos que producen los estudiantes, la idea que la fracción es una división que te permite obtener la expresión decimal. Una frecuencia alta en 1° año ($\frac{13}{21}$) y una frecuencia significativa en 4° año ($\frac{4}{11}$). Esta idea ya la había señalado Block (2001) en sus investigaciones y nosotros la tomamos como referencia para distinguir dos maneras distintas de pensar en la fracción como cociente: indicado o definido por un lado y calculado por otro.

> Esto lleva a distinguir dos sentidos del signo "=" en una igualdad como "3:4 = $\frac{3}{4}$ ": la igualdad puede expresar que la fracción $\frac{3}{4}$ es lo que resulta de dividir tres entre cuatro (cociente calculado), o bien, que la escritura 3:4 y la escritura $\frac{3}{4}$ representan al mismo número (cociente por definición). El carácter de cociente calculado se hace completamente explícito cuando el cociente de la división se calcula mediante el algoritmo de la división y se expresa con un decimal [...] (p.9).

Como bien lo desarrollamos en el *Anexo analítico*, hay una fuerte presencia en los argumentos dados, de la fracción como cociente que tiene que calcularse y obtener así la expresión decimal correspondiente y una ausencia de argumentos que den cuenta de una mirada de la fracción como cociente indicado. Esta idea de cociente calculado está muy influenciada por una enseñanza que priorizó a lo largo de la escuela primaria la búsqueda de la expresión decimal a partir de la expresión fraccionaria a través de un cálculo, como por ejemplo: pasar de fracción a número decimal. Block (2019), en una exposición del Seminario[42] “Los números racionales en la escuela primaria” expresa que en la escuela secundaria se da por supuesta la relación $a : b = \frac{a}{b}$ y en la escuela primaria no fue objeto de estudio. Podríamos plantear de esta manera que el no reconocimiento de la relación entre la fracción y la división, está dado en parte por un obstáculo didáctico, es decir por las decisiones didácticas que tomamos al momento de pensar la enseñanza de las fracciones y su relación con la división. Block (2019) propone en este Seminario, un trabajo de experiencias de reparto en las cuales se trabaje tempranamente en 1° y 2° grado con bipartición, es decir con fracciones del tipo $\frac{1}{2^n}$, en 3° y 4° grado con la cuantificación del reparto y en los últimos años de la escuela primaria con la relación $a : b = \frac{a}{b}$ con el fin de consolidar la identidad entre división y fracción.

A continuación exponemos el segundo cuadro que resume las *Ideas asociadas* a los procedimientos del PROBLEMA 2:

Ideas asociadas/ grupo de estudiantes	Frecuencias de *1° año*				Frecuencias de *4° año*			
	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)
La fracción puede ser menor que 1 o 1, pero no mayor a 1. Confusión con la unidad	$\frac{15}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{3}{11}$	-	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$
Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto	-	-	-	-	-	$\frac{2}{11}$	-	-

[42] Este seminario se dictó en el marco de la “Especialización en Enseñanza de las Matemáticas Nivel Inicial y Primario” coordinada por la Dra. Claudia Broitman, en la Universidad de La Plata, en el mes de febrero de 2019.

No se reconoce la fracción como medida de una cantidad continua	$\frac{17}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$

Cuadro 4.20. Ideas asociadas al PROBLEMA 2

Al analizar las ideas asociadas a los procedimientos[43] de ambos grupos y en íntima relación con el análisis comparativo realizado en el punto 4.2.3, notamos una frecuencia alta en 1° año que, en el contexto de la medida, presentan confusión con la unidad. La mayor frecuencia está dada en el ítem a) y luego le sigue el c), en los cuales se presentan fracciones mayores que 1 y se solicita encontrar la unidad de medida. Podríamos delinear una primera aproximación a este error, y asociarlo —al igual que lo hicimos en el problema 1— con un obstáculo didáctico generado por el énfasis puesto en el trabajo casi exclusivo del significado parte-todo, lo cual genera sólo fracciones menores que uno. De todas maneras, los otros dos ítems que trabajan con fracciones menores que 1, también presentan frecuencias altas de error para 1° año.

Por otra parte, encontramos en las producciones del ítem a) un uso reiterado de rectángulos para encontrar la respuesta, a pesar de que la consigna propone trabajar con longitudes; y también la consideración del segmento dado como si fuera una recta numérica. Consideramos que estos dos aspectos observados, podrían estar también relacionados con una práctica escolar, que prioriza un solo tipo de trabajo matemático. Por ejemplo: utilizar rectángulos al momento de representar gráficamente fracciones y usar segmentos sólo para trabajar con la representación de fracciones en la recta numérica pero no para la reconstrucción de la unidad de medida. De alguna manera, podríamos encontrar en estas prácticas escolares, nuevamente un obstáculo del tipo didáctico, según la categorización realizada en el capítulo 1.

También, en las ideas asociadas a los procedimientos desplegados por 4° año, sólo notamos las frecuencias más altas ($\frac{3}{11}$) en los ítems donde la fracción dada es mayor que 1 lo cual hace que confundan la unidad de medida. Y una baja frecuencia ($\frac{2}{11}$) en cuanto a que lo algorítmico prevalece por sobre procedimientos más intuitivos o basados en la noción de la fracción como medida.

[43] Para una lectura más detallada de los procedimientos de los estudiantes, se puede consultar el Anexo analítico.

Por último, presentamos el tercer cuadro que sintetiza las *Ideas asociadas* a los procedimientos del PROBLEMA 3:

Ideas asociadas/ grupo de estudiantes	Frecuencias de *1° año*			Frecuencias de *4° año*		
	a)	b)	c)	a)	b)	c)
Predominio del campo aditivo	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{21}$	-	$\frac{1}{11}$	-	$\frac{1}{11}$
Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto	-	-	$\frac{3}{21}$	-	-	$\frac{2}{11}$
La constante de proporción no puede ser una fracción	-	-	$\frac{4}{21}$	-	-	-
No se reconoce la constante de proporción	-	-	-	-	-	$\frac{2}{11}$

Cuadro 4.21. Ideas asociadas al PROBLEMA 3

En primer lugar, encontramos el "*predominio del campo aditivo*" en los procedimientos estudiados. Los estudiantes respondieron a la consigna a) por ejemplo: utilizando modelos aditivos, y pensaron que dada la transformación de 4 litros a 5 litros de un color de pintura era correcto agregar 1 litro más a la otra cantidad del otro color.

En este mismo sentido, si recuperamos la categorización de los procedimientos y el análisis comparativo (puntos 4.2 y 4.2.3) notamos que, además de la baja frecuencia de estudiantes de 1° año que respondieron al ítem a) y b), en estas pocas respuestas están incluidas las ideas asociadas al campo aditivo expuesto anteriormente. En menor medida, lo observamos también en 4° año pero, la diferencia está dada en las frecuencias de respuestas correctas de este último grupo.

En cuanto a la idea relacionada con *"Lo algorítmico prevalece por sobre el concepto"* observamos una presencia en 1° año y en 4° año, del uso de la regla de tres o la justificación desde la regla de tres, sin la posibilidad de relacionar esta regla con la definición de proporcionalidad o alguna de sus propiedades. Podríamos asociar esta idea al concepto de obstáculo didáctico —tal como se definió en el capítulo 1— vinculado a los métodos de resolución que han sido objeto de enseñanza a lo largo de la historia para resolver problemas de proporcionalidad. Estos métodos, y especialmente la regla de tres, se ha priorizado o tomado como único objeto de enseñanza en algunas prácticas escolares por sobre la enseñanza de conceptos, en este caso, por sobre las propiedades que caracterizan a la proporcionalidad directa. Este lugar prioritario que se le ha dado a la regla de tres, ya lo notamos en los años 1950 y 1960, al analizar algunas propuestas de libros de texto.[44] De esta manera, creemos que los estudiantes se han formado una idea sobre algunas técnicas, en este caso la regla de tres, que también las advierte Escolano y Gairín (2005) y que detallamos en los Antecedentes: “Los conceptos son técnicas asociadas a los mismos. Para los alumnos las ideas sobre relaciones y operaciones se limitan al uso de sus técnicas asociadas […] Los contenidos útiles son los procedimentales. Los alumnos memorizan las técnicas de cálculo sin preocuparse de sus fundamentos teóricos […]” (p.24).

También encontramos algunos aportes —extraídos del material del cual seleccionamos los problemas para el trabajo de campo— que le otorgan fuerza a nuestra postura:

> Existe una confusión en torno al concepto de proporcionalidad que hace que se lo identifique con la regla de tres simple. Sin embargo esta regla es un método que permite resolver problemas de proporcionalidad, no es la proporcionalidad en sí. No estamos postulando su desaparición de nuestras aulas; su utilidad está fuera de discusión. Queremos decir, una vez más, que el trabajo que proponemos se desplaza de los métodos para enfocarse en los conceptos (estudio de definiciones, propiedades, tipos de representación, tipos de problema que resuelve y límites). Se propone que la regla de tres simple, un método útil sólo en casos de proporcionalidad, sea estudiada, analizada y articulada con las propiedades y definiciones que caracterizan a este concepto, y no como contenido aislado. Desde nuestra perspectiva, conocer la regla de tres simple implica:
> • saber cuándo se puede y cuándo no se puede usar;
> • saber cómo usarla;
> • saber qué significa cada operación que se hace al usarla;
> • saber si los valores que se obtienen al aplicarla tienen o no sentido en el contexto del problema (DGCyE, 1999, pp.27-28).

Un último análisis sobre el uso de la regla de tres y las dificultades que observamos en su uso podría establecer que, los errores encontrados están dados por ausencia de significado y dentro de esta categoría por errores de procedimiento, es decir errores que se producen cuando los estudiantes usan de manera inapropiada fórmulas, definiciones o

[44] Véase el capítulo 2, apartado 2.2. “Evolución histórica de la enseñanza de las fracciones”

reglas. Nuevamente aquí tomamos la clasificación de errores que propone Socas (1997) y que está desarrollada en el marco teórico.

Para el análisis de la idea *"La constante de proporción no puede ser una fracción"* que se detectó en $\frac{4}{21}$ de las producciones de 1° año, incluida esta frecuencia en $\frac{18}{21}$ de argumentos confusos o de la falta de argumentos, recuperamos algunos aportes en relación con esta situación, que ya lo han trabajado distintos autores como Berté (1993) y Block (1991), entre otros:

> Lo que se expresó aquí, en nuestra opinión, es la ausencia de significado de la multiplicación por una fracción, ausencia parcial en algunos alumnos y total en otros. Parece que la multiplicación, como operación, sigue estrechamente vinculada a la idea de número entero de veces más grande, y detrás de este sentido, al de suma iterada. Es el sentido que la multiplicación tiene en los números naturales, por lo tanto, 7 no es cierto número de veces más grande que 4, sí en cambio 8, que es 2 veces más grande que 4, o incluso 2, que es 2 veces más chico que 4 (Block, 1991, p.5).

De esta manera, los conocimientos sobre los números naturales y el significado de la multiplicación adquirido en etapas anteriores, parecerían operar como un obstáculo para profundizar y avanzar en el trabajo de la proporcionalidad y específicamente para considerar una constante de proporcionalidad fraccionaria.

> H. Freudenthal (1983), acertadamente nos hace notar esta dificultad en las formas mismas con las que nos expresamos: decimos, por ejemplo, 3 veces, 4 veces, 8 veces, pero no decimos $\frac{3}{2}$ veces, $\frac{7}{4}$ veces. Las fracciones, en su papel de operador multiplicativo, casi siempre están seguidas del término de: "$\frac{3}{4}$ de pastel, $\frac{7}{4}$ de la longitud, $\frac{2}{3}$ de la población", y casi siempre con una connotación "extractiva" (Block, 1991, p.8).

Creemos entonces, que esta idea que tienen nuestros estudiantes sobre "la constante de proporción no puede ser una fracción" y los errores que produce la misma en las producciones analizadas, puede estar dada o tiene su origen en una ausencia de significado y dentro de esta categoría a los errores debidos a la mala interpretación del lenguaje matemático, recuperando a Socas (1997) del marco teórico.

También vamos a analizar lo encontrado en el ítem c) para las producciones de 4° año. Si bien reconocen en este problema la presencia de una constante de proporcionalidad, la expresan con una expresión decimal y no con una expresión fraccionaria, es decir encontramos en las producciones el número 2,5 y no el operador $\frac{10}{4}$ que asocia a cada cantidad de litros de pintura verde una cantidad de litros de pintura blanca. Y como bien lo expresa Block (1991) “El que los alumnos llegaran a utilizar este operador decimal sería ya un paso importante, pero hay que tener cautela: las destrezas adquiridas en la operatoria con decimales suelen ser tan grandes como la incomprensión de su significado” (p.10). En este mismo sentido, creemos que el uso de la expresión decimal esta “empujado” por la facilidad de extender las reglas operatorias de los números naturales a los decimales, lo cual es sin duda el gran logro de Stevin.

En cuanto al *“No reconoce la constante de proporcionalidad”,* idea que detectamos en pocas producciones de los estudiantes de 4° año, cuando al leer sus respuestas notamos que no reconocían la presencia de un número —constante de proporcionalidad— y decían que “ese número” no tiene en cuenta las dos cantidades. A partir de aquí, nos preguntamos si esta situación no se relaciona con una mirada estática de la proporcionalidad, o como también lo encontramos en los *Antecedentes*, como el manejo de razones internas y de un operador escalar —o enfoque escalar en palabras de Vergnaud— por sobre una mirada dinámica relacionada al manejo de razones externas y específicamente con la definición de función lineal. Y por qué no, nuevamente hipotetizar sobre el lugar central que ocupa esta mirada estática en las propuestas de enseñanza llevadas al aula.

En este mismo sentido, queríamos recordar al lector que al analizar las consignas del problema 3), realizamos una modificación con relación a la consigna original, para propiciar y poder investigar la existencia de una mirada dinámica sobre la proporcionalidad. Recuperamos aquí la consigna: Juan dice que es posible calcular la cantidad de pintura blanca en el ítem a) multiplicando la cantidad de pintura verde por un número? ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué? Al preguntarles si están de acuerdo y el por qué, intentamos hacer énfasis en el procedimiento que permite calcular cierta cantidad de pintura en función de otra cantidad, haciendo foco de esta manera, en otro de los significados de la fracción. Es decir, nuestra idea es que surja en las producciones una mirada dinámica de la proporcionalidad y que las preguntas sobre el por qué puedan constituirse en un punto de apoyo para la elaboración de una fórmula que describa la relación y la modelice.

De todas maneras, sabemos que este enfoque funcional es complejo, y que requiere de un trabajo sostenido a lo largo de la escolaridad. Al respecto, Vergnaud (1988) se expresa:

> Este análisis horizontal se sitúa a un nivel conceptual muy elaborado y es, por otra parte, la razón de las dificultades encontradas para hacer comprender al niño la noción de función. Si la noción de correspondencia no presenta ninguna dificultad, ni su representación en forma de tabla, el análisis de esta correspondencia en términos de función es por su parte mucho más delicado, pues ésta implica no sólo la noción de relación numérica sino igualmente la de cociente de dimensiones (p.13).

Por último, la frecuencia en las producciones de estudiantes que no reconocieron la constante de proporción en 4° año es baja ($\frac{2}{11}$), los demás lo lograron. Lo que sí resulta notorio, es la frecuencia ($\frac{18}{21}$) para las producciones de 1° año que no respondieron a esta pregunta y que se detalla en el cuadro 4.9, lo cual nos da indicios de la necesidad de un trabajo arduo en este sentido.

CAPÍTULO 5

Conclusiones finales

Nos resulta pertinente reiterar —tal como lo hicimos en el capítulo 1— que el análisis realizado en el capítulo 4 es una herramienta que nos aporta información sobre las concepciones que evidenciaron los estudiantes de 1° año y de 4° año de un Instituto de Formación Docente en particular, sobre la noción de fracción y sus significados. Además, como la muestra con la que se trabajó puede considerarse pequeña, las conclusiones a las que arribamos no pueden generalizarse, aunque en algunos aspectos coincidan con las investigaciones consideradas en los *Antecedentes* sobre el tema. Cabe aclarar que, si bien las conclusiones no son generalizables, aportan a la comprensión de los avances de los estudiantes en sus concepciones sobre las fracciones en relación con la variedad de significados que pueden asumir y su relación con otras nociones del campo multiplicativo; el dominio de sus diversas representaciones y relaciones; las formas de argumentación y la generalización de propiedades y relaciones.

En este sentido, creemos necesario recuperar los interrogantes que nos planteamos al comenzar esta investigación, de esta manera podemos vincularlos con los hallazgos y acercarnos a una mirada integrada de la temática. Los interrogantes son:

¿Cuáles son los conocimientos de los estudiantes de 1° año y 4°año del Profesorado de Nivel Primario —en el cual me desempeño como docente— en relación con los significados que la noción de fracción asume cuando se la considera en el contexto de los problemas? ¿Cuáles son los conocimientos de los estudiantes acerca de las representaciones de las fracciones? ¿Qué operaciones, relaciones, propiedades utilizan al resolver problemas donde las fracciones asumen diferentes significados? ¿Cuáles son los errores frecuentes?

¿Qué diferencias encontramos entre las concepciones con las que ingresan nuestros estudiantes y las concepciones con las que egresan en relación con la noción de fracción?

¿Qué aprendizajes han logrado en relación con la noción de fracción los estudiantes —futuros docentes— del Profesorado de Nivel Primario a lo largo de su trayectoria en el Nivel Superior?

Como una primera aproximación a los resultados obtenidos, nos resulta interesante encuadrar los hallazgos de la investigación identificando tres concepciones sobre la noción de fracción y, a la vez, tres grupos de estudiantes en los que esas concepciones predominan. Por un lado, un grupo de estudiantes que permiten reconocer en sus producciones una concepción ligada a una aritmética centrada en la realización de cálculos y el uso de reglas sin justificación; otro grupo con una concepción intermedia y por último, un tercer grupo con una concepción más cercana a una mirada algebraica, con búsqueda de relaciones y presencia de algunas primeras generalizaciones.

Cabe aclarar que, el estudio de las concepciones se realizó en un mismo año, el 2017, por lo tanto los estudiantes de 1° año y de 4° año del Profesorado de Nivel Primario no son los mismos sino distintos grupos en dos momentos distintos de su formación inicial. En este sentido, intentamos establecer la predominancia de cada concepción en dos momentos diferentes de la formación inicial, al comienzo y al finalizar el trayecto formativo.

Antes de avanzar en la descripción de estos tres grupos, recuperamos algunas ideas que desarrolla Sadovsky, en su prólogo a Shlieman, Carraher, y Brizuela (2011) —trabajo tomado como Antecedente— pues le otorga fuerza y sustento teórico a estos hallazgos. La autora expresa claramente cómo se estableció a lo largo de muchos años la relación entre aritmética y álgebra en nuestro sistema educativo: "[...] relaciones que durante mucho tiempo han permanecido intocadas y cuyos términos cristalizados —aritmética y álgebra— han trazado históricamente una divisoria de aguas entre la primaria y la secundaria, lo concreto y lo abstracto, lo particular y lo general, los cálculos y las relaciones […]" (p.11). Relación que, posiblemente, nos permita comprender un poco más los resultados obtenidos en esta investigación y nos anime a plantear de aquí en más nuevos desafíos a la investigación educativa, como así también a la Formación Docente.

Otra cuestión que queremos recuperar del capítulo 1 —antes de caracterizar a estos grupos de estudiantes— es la íntima relación entre concepción, errores y obstáculos, pues en la caracterización de los grupos nos encontramos con algunas frecuencias referidas a los errores encontrados. En palabras de Brousseau (1983), algunas de las concepciones que se van adquiriendo sobre una noción matemática u objeto matemático a lo largo de nuestra experiencia no desaparecen inmediatamente en función de darle lugar a una concepción más completa y avanzada, sino que se resisten, provocan errores y se constituyen así en verdaderos obstáculos.

También queremos recuperar del capítulo 1 la diferenciación entre las “concepciones locales”[45] para cada significado, inferidas de las producciones de los estudiantes al resolver los problemas que se les presentaron y las “concepciones globales”[46] para dos momentos de la formación inicial, 1° y 4° año, inferidas del conjunto de producciones para los tres problemas en cada momento.

A partir de aquí, desarrollamos una caracterización de las tres concepciones encontradas. Tenemos entonces, por un lado, una concepción inicial o de entrada a la Formación Docente ligada a la educación matemática clásica de la escuela primaria y secundaria, concepción que podríamos asociar a la enseñanza de una aritmética centrada en la realización de cálculos y el uso de reglas sin justificación.

A continuación, describimos un poco más esta aritmética escolar, centrada en cálculos y uso de reglas sin justificación, tomando algunos ejemplos que encontramos en algunas ocasiones en prácticas matemáticas tradicionales. En relación con los significados de las fracciones predomina un trabajo sobre el significado parte-todo asociado sólo a algunas representaciones gráficas como rectángulos y círculos con un escaso trabajo en torno al cambio de registro. Además, asociado al mismo significado parte-todo, un énfasis en los nombres —numerador y denominador— de dos números naturales que forman a la fracción no facilitando así la construcción de la fracción como un único número que expresa cantidades no expresables con números naturales. En cuanto a la fracción como medida de una cantidad continua, podemos plantear que existe un trabajo exclusivo con fracciones menores que 1 —poco diferenciable del significado como parte-todo— con escasa presencia de la reconstrucción de la unidad de medida o propuestas de medición efectiva. Si pensamos en la fracción en contextos de proporcionalidad, notamos que el trabajo en torno a una constante de proporcionalidad racional no entera prácticamente está ausente en este tipo de prácticas, por diversos motivos. Mientras que el énfasis, para este significado, está dado en una exposición de técnicas y métodos de resolución que no explicitan ninguna de las relaciones multiplicativas que se dan entre las cantidades, y aquí encontramos como figura central de la escena a la regla de tres, entre otras técnicas.

Luego de presentar algunas de las características que creemos describe a una enseñanza de la aritmética centrada en la realización de cálculos y el uso de reglas sin justificación,

[45] En el capítulo 1 este término ha sido desarrollado tomando como referencia el trabajo de Artigue (1984).

[46] También el término de concepción global ha sido desarrollado en el capítulo 1 tomando como referencia los aportes de Artigue (1984).

puntualizamos algunos resultados —expresados en frecuencias— que nos permiten encuadrar a la mayoría de los estudiantes de 1° año. Además, describimos esta concepción —recuperando los resultados del análisis— como una concepción de entrada o inicial que incluye: una baja frecuencia de estudiantes que domina sólo dos de los significados indagados (reparto y medida) y en cuanto a la fracción en contexto de proporcionalidad, prácticamente el total de ellos no la reconoce; frecuencias mínimas de estudiantes que realizan un cambio de registro al resolver los problemas pero que a su vez este cambio de registro lo solicita la consigna y no es propuesto espontáneamente por los estudiantes; argumentos ligados a pruebas pragmáticas —tal como las definimos en el capítulo 4— y altas frecuencias que expresan la falta de argumentación o argumentaciones con errores; y procedimientos que se apoyan en reglas sin justificación o algoritmos con errores que prevalecen por sobre las nociones y lo intuitivo.

Para el PROBLEMA 1, entre la mayoría de los estudiantes de 1° año, encontramos altas frecuencias de errores que los vinculamos con algunas ideas asociadas, como así también altas frecuencias en los argumentos pragmáticos que utilizan para validar algunas nociones:

– $\frac{8}{21}$ de las producciones presentan un trabajo algorítmico, sin argumentos, que prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto que se desea trabajar, es decir, donde lo numérico parece no ser revisado en relación con la representación gráfica utilizada.

– $\frac{15}{21}$ sólo conciben a la fracción como 1 o menor que 1 y, en la misma categoría de análisis $\frac{4}{21}$ confunden el entero o unidad.

– Casi la mitad de los estudiantes ($\frac{10}{21}$) utiliza argumentos pragmáticos asociados al uso de algunas técnicas para justificar la equivalencia de expresiones fraccionarias.

– $\frac{13}{21}$ de los estudiantes establecen la relación entre fracción y división sólo con el objetivo de hallar el decimal correspondiente, es decir sus argumentos son de tipo pragmáticos.

Por otro lado, encontramos bajas frecuencias en cuanto al cambio de registro y el uso correcto de representaciones, como así también con el trabajo de algunas nociones que el problema implica:

–Menos de la mitad de los estudiantes, logran cambiar de registro sin errores.

–Pocos estudiantes ($\frac{4}{21}$) trabajan correctamente con las nociones de fracción de otra fracción, suma de fracciones y equivalencia de expresiones fraccionarias. Para el caso de la equivalencia de expresiones fraccionarias las frecuencias son aún menores.

–Pocos estudiantes ($\frac{6}{21}$) expresan el resultado del reparto con una expresión gráfica y fraccionaria correcta.

Para el PROBLEMA 2 encontramos que:

–Más de la mitad de los estudiantes no reconstruye la unidad de medida, entre el $\frac{11}{21}$ y $\frac{13}{21}$ dependiendo de los datos iniciales. Las mayores frecuencias de errores se corresponden con la reconstrucción de la unidad de medida a partir de segmentos.

–Más de la mitad no puede argumentar correctamente la reconstrucción de la unidad de medida ($\frac{12}{21}$) o directamente en otros ítems no argumentan ($\frac{17}{21}$). La mayor frecuencia de error se le asigna al ítem que tiene las fracciones mayores que 1 dadas como dato.

Por último, para el PROBLEMA 3:

–Aproximadamente la mitad de los estudiantes de 1° año calcula correctamente la cantidad de pintura que se necesita de cierto color cuando se le presentan tres datos iniciales pero, de este grupo, un $\frac{8}{21}$ utilizan la regla de tres exclusivamente.

–Más de la tercera parte de los estudiantes no resuelve correctamente la pregunta que hace referencia sobre la tonalidad de la pintura al agregar 1 litro de ambos colores a las mezclas.

–Un grupo reducido (entre $\frac{1}{21}$ y $\frac{5}{21}$) argumenta correctamente cuando se lo solicita la consigna, utilizando sólo argumentos pragmáticos o intermedios.

Por otro lado, en el conjunto de los estudiantes que egresan de la Formación Docente, hemos caracterizado dos concepciones diferentes pero con predominancia de una sobre otra. La concepción que predomina está lograda por la mayoría de los estudiantes de 4° año y notamos que superan la concepción aritmética inicial, pues incorporan otros registros de representación y algunos argumentos no pragmáticos. Describimos a esta concepción —recuperando los resultados del análisis— como una concepción que incluye en parte el dominio de dos de los significados indagados: la fracción en contexto de reparto (estableciendo una relación con la idea de división) y la fracción en contexto de proporcionalidad (estableciendo una relación entre la fracción y la idea de constante de proporcionalidad), pero se visualiza una ausencia de relación entre la fracción y la noción de medida. Además, los estudiantes realizan un cambio de registro al resolver los problemas pero este cambio de registro lo solicita la consigna y no es propuesto espontáneamente por los estudiantes; sus argumentos están ligados a pruebas intermedias —tal como las definimos en el capítulo 4—, pero no llegan a expresar una prueba intelectual, asociada a la generalización y a la formulación de propiedades en juego y de sus relaciones; y utilizan algunas de las nociones implicadas en los procedimientos para argumentar los mismos, pero no en todos los casos.

A continuación, caracterizamos esta concepción con algunos resultados —dados en frecuencias:

Para el PROBLEMA 1:

– $\frac{7}{11}$ de los estudiantes trabajan correctamente con la noción parte-parte, $\frac{6}{11}$ utilizan suma de fracciones para encontrar la expresión fraccionaria del reparto, $\frac{6}{11}$ reconocen y trabajan correctamente con la equivalencia de expresiones para un mismo número racional. Es decir, más de la mitad de los estudiantes de 4° año utiliza correctamente las nociones que están implicadas en este problema.

–Entre el $\frac{3}{11}$ y $\frac{8}{11}$ argumentan sus procedimientos utilizando pruebas intermedias, dependiendo el ítem considerado.

–Más de la mitad de los estudiantes cambia de registro según lo solicitado en la consigna.

En el PROBLEMA 2 observamos:

–Una alta frecuencia de reconstrucción de la unidad de medida, entre $\frac{8}{11}$ y $\frac{11}{11}$. La frecuencia más baja se encuentra cuando la fracción dada en la consigna es mayor que 1.

– $\frac{10}{11}$ de los estudiantes utilizan pruebas intermedias para argumentar la reconstrucción de la unidad de medida a partir del $\frac{2}{3}$, dada una longitud. Luego, las frecuencias disminuyen en los demás ítems, y se obtiene la menor frecuencia en el ítem a.II con sólo $\frac{3}{11}$ para las pruebas intermedias y un aumento en las frecuencias de pruebas pragmáticas.

Para el PROBLEMA 3 encontramos que:

–Un poco más de la mitad de los estudiantes, utilizan la regla de tres para hallar los valores solicitados en una de las preguntas. Este uso de la regla de tres se limita a una técnica que manejan, pero no se observa en las producciones argumentos que muestren la relación con la proporcionalidad y sus propiedades.

–Menos de la mitad de los estudiantes utilizan el pasaje por la unidad y las razones para encontrar los valores solicitados.

–Aproximadamente la mitad de los estudiantes reconoce la constante de proporcionalidad y el uso de razones cuando se hace referencia a estas nociones.

–Menos de la mitad cambia de registro en una de las consignas pero en las demás se mantiene en el mismo registro dado (coloquial) y lo hace con error.

–Un poco más de la mitad, utiliza pruebas intermedias para la consigna que indaga sobre la tonalidad de las pinturas.

–La cuarta parte de los estudiantes de 4° año, utiliza pruebas intermedias para argumentar sobre la constante de proporcionalidad en el ítem c). En este caso, notamos que hay un reconocimiento de la constante de proporcionalidad pero al tener que hacer explícita esta noción, los argumentos se distribuyen entre los pragmáticos, los intermedios y los erróneos.

Por último, describiremos la otra concepción de salida, la cual está presente en los trabajos de muy pocos estudiantes de 4° año, aproximadamente entre $\frac{1}{11}$ y $\frac{2}{11}$. Arribar a una concepción de este tipo, es parte del desafío que nos plantean los diseños curriculares actuales de Matemática de nuestro país. Es decir, existe una mirada actual —entre colegas e investigadores— sobre la necesidad de trabajar con relaciones, generalizaciones y establecer las mismas en distintas propuestas matemáticas que se llevan al aula. Por ejemplo, para el caso de la fracción en contextos de proporcionalidad, lograr una mirada funcional/dinámica superando una mirada estática o escalar.[47] También, estaría dada en los problemas de reparto por la posibilidad de generalizar la fracción como cociente indicado y plantear claramente la relación entre fracción y división. Para el caso de medida de una cantidad continua, la posibilidad de llegar a la expresión general $\frac{m}{n} = m\,x\,\frac{1}{n}$, también sería un aspecto a considerar en cuanto a la necesidad de trabajar con relaciones y generalizaciones.

[47] Aspecto que se desarrolló en el capítulo 1 y 3.

Además, describimos esta concepción global —recuperando los resultados del análisis— como una concepción que incluye el dominio de los tres significados indagados; en la que se observa un cambio de registro al resolver los problemas y que los argumentos están ligados a pruebas intelectuales asociadas a la generalización y a la formulación de propiedades en juego y de sus relaciones; y que utilizan la mayoría de las nociones implicadas en los procedimientos para argumentar los mismos.
En la siguiente cita, Sadovsky resume el tipo de trabajo aritmético al que sería interesante arribar con nuestros estudiantes después de un trabajo constante y planificado, a lo largo de los distintos niveles de educación obligatoria (primario, secundario), como así también en el nivel terciario:

> [...] una aritmética escolar, en la que, por el tipo de actividad que se realiza, es posible reconocer la traza de los aspectos más formativos de la actividad algebraica. Efectivamente, concebir las operaciones como relaciones funcionales, pensar en la formulación de reglas generales a partir del análisis de regularidades que se establecen sobre un conjunto de datos, realizar comparaciones y recíprocamente proponer ejemplos que corresponden a cierta relación, anticipar los efectos que provoca operar sobre una relación (y no sólo sobre una cantidad), involucrarse en la elaboración de diversas formas de representación —muchas de ellas completamente originales— como modo de registrar pero también como recurso para elaborar nuevas ideas…son tareas que configuran una aritmética que tempranamente ofrece a los niños la posibilidad de inferir, de hipotetizar, de generalizar. [...] la aritmética escolar puede pensarse, también, como una oportunidad de incluir a los estudiantes en una experiencia formativa vital (Shlieman, Carraher, y Brizuela, 2011, p.11).

Podemos describir esta concepción a partir de los siguientes resultados para el PROBLEMA 1:

– $\frac{2}{11}$ utilizan una única expresión fraccionaria para resumir los resultados del reparto y en sus argumentos de tipo intelectual, establecen la relación entre numerador/dividendo, denominador/divisor y la fracción como resultado del reparto, aspectos que se diferencian de los ya señalados en la concepción intermedia. También, utilizan correctamente las nociones de parte-parte, equivalencia de fracciones, suma de fracciones y establecen la relación entre fracción y división.

Algunas apreciaciones sobre el PROBLEMA 2:

–Si bien todos los estudiantes de 4° año logran la reconstrucción de la unidad de medida en todos los ítems, lo significativo es que ninguno de ellos llega a la expresión general $\frac{m}{n} = m\ x\ \frac{1}{n}$, al momento de argumentar. Es decir, los argumentos que utilizaron quedaron en el plano de lo pragmático o algunos intermedios, según los definimos en el capítulo 1.

Para el PROBLEMA 3 observamos:

–Sólo $\frac{1}{11}$ utiliza pruebas intelectuales para argumentar los dos ítems que lo solicitan y presenta la expresión algebraica *y*= *k.x*, para representar la relación entre las dos cantidades de pintura.

Algunas líneas de acción para seguir profundizando en la temática

Si bien este estudio tiene como objetivo la indagación y el análisis de la noción de fracción y sus significados, e intenta profundizar en las aristas múltiples que hacen a la comprensión de cómo avanzan en sus concepciones los estudiantes del Profesorado de Nivel Primario en el Nivel Superior, somos conscientes de la necesidad de profundizar aún más en la temática con trabajos de investigación a posteriori. En este sentido, consideramos interesante realizar una comparación global de los tres problemas en conjunto, de los dos grupos de estudiantes, para cada uno de los aspectos mencionados: representaciones, nociones y argumentos.

En los párrafos anteriores hemos delineado los logros alcanzados por los estudiantes a lo largo de su formación inicial como así también algunas ideas asociadas que surgen de los errores analizados en sus producciones. Consideramos que existen algunos aspectos en los que aún hay que insistir en esa formación inicial, por lo cual nos preguntamos y creemos necesario continuar investigando sobre si ¿es posible otro trabajo matemático en torno a la noción de fracción y los significados de la misma que permita tender un puente entre una concepción ligada a prácticas aritméticas asociadas sólo a cálculos y técnicas hacia una concepción ligada a prácticas algebraicas?, ¿cómo propiciar en las aulas del Nivel Superior, un trabajo matemático que tome en cuenta el establecimiento de relaciones, la generalización, la importancia de las representaciones como así también de las argumentaciones?

A partir de los insumos obtenidos y de los interrogantes planteados anteriormente, en primer lugar, nuestro desafío es repensar las propuestas de enseñanza en el Nivel Superior y potenciar las mismas a corto y mediano plazo. Y en este repensar, concentrar nuestra mirada en cómo trabajamos la noción de fracción y los distintos significados de las fracciones asociados a la idea de división, de medida y de proporcionalidad, como así también en qué modificaciones realizar a las propuestas de enseñanza para acercarnos y lograr —al finalizar la formación inicial— una concepción global, dinámica y funcional, ligada a prácticas algebraicas.

En segundo lugar, pensamos que las conclusiones obtenidas pueden ser tenidas en cuenta para las capacitaciones que se realizan con los docentes en ejercicio. A partir de allí, que estos hallazgos les permitan identificar sus propios conocimientos y dificultades en relación con la temática y trabajar para superarlos a partir de la capacitación continua.

Proponemos entonces, que en los Institutos de Formación Docente, en la cátedra de Didáctica de la Matemática, se priorice un trabajo matemático que analice con los estudiantes experiencias posibles de llevar a la práctica en el Nivel Primario. Como por ejemplo:

–Experiencias de reparto en las cuales se trabaje tempranamente en 1° y 2° grado con bipartición, es decir con fracciones del tipo $\frac{1}{2^n}$, en 3° y 4° grado con la cuantificación del reparto y en los últimos años de la escuela primaria con la relación $a : b = \frac{a}{b}$ con el fin de consolidad la identidad entre división y fracción. Este aspecto, ya fue propuesto por Block (2019) y nosotras lo recuperamos para tener en cuenta en futuras propuestas.

–Experiencias de medición efectiva, que promuevan la selección de la unidad de medida y el uso de la misma en problemas que impliquen medir objetos. También este aspecto de la medición fue planteado en el capítulo 1 y 4, recuperando los aportes de Chamorro (1991) y (1995).

–Un trabajo articulado en torno a la proporcionalidad a lo largo de la escolaridad obligatoria, que permita reconocer y trabajar con la constante de proporcionalidad cuando es fraccionaria. Además, que dicho trabajo promueva una mirada funcional de la proporcionalidad por sobre una mirada estática.

En este mismo sentido, el trabajo de Shlieman, Carraher, y Brizuela (2011), —propuesto en los *Antecedentes*— con estudiantes de escuela primaria es esclarecedor y nos invita a pensar en las relaciones entre la aritmética y el álgebra desde edades tempranas.

También, consideramos pertinente revisar el tiempo de trabajo que se dedica a estos contenidos en la Formación Docente Inicial, y repensar ese tiempo como la posibilidad de construir junto a los estudiantes una perspectiva más propia de lo que tienen que enseñar en el Nivel Primario con relación a la noción de fracción y sus significados. Para lo cual, consideramos necesario también, experimentar un tipo de práctica matemática en los Institutos de Formación Docente, que posibilite un cambio en las representaciones, en la elaboración de argumentos intelectuales, en las relaciones que se establecen, en síntesis un avance en las concepciones a lo largo de la Formación Inicial.

Por último, reafirmamos la necesidad de continuar con esta línea de investigación y profundizar en la temática, a la luz de los análisis realizados y de los resultados obtenidos con este grupo de estudiantes. El desafío continua...

Referencias bibliográficas

Agrasar, M.; Crippa, A.; Chara, S. y Chemello, G. (2012). Clase N°5: Transformaciones de las prácticas de enseñanza: el caso de las expresiones decimales y las fracciones. Ciclo Formativo. Plan de Matemática para Todos. Ministerio de Educación de la Nación.

Anzonegui Zabala, M. (2006). Fracciones 1. Concepto y representación. Serie Desarrollo de pensamiento matemático, N°9. Federación Internacional Fe y Alegría, UNESCO, Caracas.

Artigue, M. (1990). Epistemologie et didactique. Reserches en didactique des mathématiques, 10. Traducido por María Fernanda Espitia Olaya.

Bachelard, G. (2000). La formación del espíritu científico. México: Siglo XXI editores.

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes. Traducción realizada por Pedro Gómez y Ángela Pinilla.

Bartolomé, O. y Fregona, D. (2003). "El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales", en Panizza, M. (Comp.), Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB: análisis y propuestas. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Block Sevilla, D. y Balbuena, H. (1991). ¿Qué significa multiplicar por 7/4? Reflexiones sobre lo que sucedió en una clase de matemáticas para maestros. En: Cero en conducta, 6(25), 21-32. Recuperado en: www.die.cinvestav.mx › Personal académico › Dr. David Block Sevilla.

Block Sevilla, D. y Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo. Educación Matemática, 13, pp.5 a 30.

Block Sevilla, D. y Ramírez, M. (2004). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. Educación Matemática, 21, pp. 63 a 90. Recuperado el 17 de enero de 2019 en: http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n1/v21n1a4.pdf

Boyer, C. (1996). Historia de la matemática. Madrid, España: Ed. Alianza.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en Didactique des Mathématiques 2 (1), 37-127. Traducción realizada con autorización del autor por Dilma Fregona con la colaboración de Rafael Soto.

Brousseau, G. (1999). "Educación y Didáctica de las matemáticas", trabajo presentado en el V Congreso Nacional de Investigación Educativa, Aguascalientes. Traducción realizada por David Block y Patricia Martínez Falcón.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Cabrera, E. y Medici, H. (1949). Matemática Técnica. Librería del Colegio. En Vega, B. (2006). "Lo relativo" en la Matemática. El caso de la proporcionalidad en el 3° ciclo de la EGB. (tesis de maestría). Universidad Nacional del Litoral: Santa Fe.

Centeno Pérez, J. (1998). Números decimales. Por qué Para qué. Madrid, España: Ed. Síntesis.

Cifuentes Gil, R. (2011). Diseño de proyectos de investigación cualitativa. Bs.As, Argentina: Noveduc.

Courant, R. y John, F. (1988). Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Volumen 1. México: 7ma Ed.Limusa.

Courant, R. y Robbins, H. (1979). Qué es la matemática. Una exposición elemental de sus ideas y métodos. España: Ed. Aguilar.

Chamorro, C. y Belmonte, J.M. (1991). El problema de la medida. Madrid, España: Síntesis.

Chamorro, C. (1995). Aproximación de la medida de magnitudes en la enseñanza primaria. Revista de Didáctica de la Matemática, n° J, 31 a 53.

Charnay, R. (1990). Del análisis de los errores en Matemáticas a los dispositivos de remediación. Algunas pistas. En Grand N, 48, pp. 37 a 64. Traducción Capdevielle, B; Varela, L. Willson, P. Para el programa de Formación Docente. Dirección Nacional de Programas y Proyectos. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

Chemello, G. y Crippa, A. (2011). Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? En A. Díaz (coord.) Enseñar Matemáticas en la Escuela Media. (pp. 55-77). Buenos Aires, Argentina: Biblos.

Chevallard, I. (1998). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique Grupo Editor. Recuperado el 12 de julio de 2019 en: https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf

Dávila, M. (2002). Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones. Aportes para la elaboración de un estado de conocimiento. (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Douady, R. (1983). Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento- objeto, juego de marcos. En: Cuaderno de didáctica de la matemática Nº 3. París: Université Paris Diderot-Paris 7. Traducido en Selección Bibliográfica I, Programa para la Transformación de la Formación Docente. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación. Buenos Aires, 1994. También disponible en: http://www.slideshare.net/favalenc/dialectica-douady.

Duval, R. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fava, N. (1978). El número. Buenos Aires, Argentina: Docencia S. A.

Freudenthal, H. (1985). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción realizada por Luis Puig (2001), publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (1999). La proporcionalidad. Programa Maestros y profesores enseñando y aprendiendo. Dirección General de Cultura y Educación. Buenos Aires, Argentina. Recuperado el 16/01/19 en: http://servicios2.abc.gov.ar/recursoseducativos/editorial/catalogodepublicaciones/descargas/docapoyo/proporcionalidad.pdf

González Urbaneja, P.M. (2004). La historia de las Matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Suma, 45, pp. 17 a 28.

Hoffer, A.R. (1988). Ratios and proportional thiking. En Th. R.Post (Ed.), Teaching mathematics ingrades K-8. Boston: Allyn and Bacon. Traducción realizada por Lanza, Pierina.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1997). Fracciones. La relación parte-todo. España: Ed. Síntesis.

Kline, M. (1972). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Ed. Alianza: Madrid. Recuperado el 26 de enero de 2017 en: https://es.scribd.com/doc/147071130/Morris-Kline-El-pensamiento-matematico-de-la-antiguedad-a-nuestros-dias

Kline, M. (1978). Matemáticas. La pérdida de la certidumbre. Madrid, España: Ed. Siglo XXI.

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). Investigación Educativa. 5° edición. Madrid, España: Pearson Addison Wesley.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007). Cuadernos para el aula, matemática 5. Buenos Aires, Argentina. Recuperado el 30 de enero de 2017 en: http://www.me.gov.ar/curriform/nap/mate5_final.pdf

Munarriz, B. (1992). "Técnicas y métodos en Investigación cualitativa" En: Metodología Educativa I. Muñoz Cantero, J; Abalde Paz, E (coord.). España: Universidade da Coruña.

Noriega, R. (1991). Cálculo diferencial e integral. Buenos Aires, Argentina: Ed. Docencia S.A.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Revista EMA, 8, pp. 157 a 182.

Panizza, M. (1997). Aproximación al análisis del error desde una concepción constructivista del aprendizaje. En: Los CBC y la enseñanza de la Matemática (1997). Buenos Aires, Argentina: aZ editora.

Parra, C. (2005). Matemática, fracciones y números decimales 4to grado: apuntes para la enseñanza. Buenos Aires, Argentina: Secretaría de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

Ruiz Higueras, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Sadovsky, P. (2005). Matemática. Fracciones y decimales. 7 grado. Apuntes para la enseñanza. Buenos Aires, Argentina: Secretaría de Educación-Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2005). Enseñar Matemática hoy. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P. (s.f.). La Teoría de las Situaciones Didácticas: Un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. Recuperado el 13 de marzo de 2017 en: https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Sierra, T.A y Gascón, J. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación infantil y primaria. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. UCM. Recuperado el 13 de marzo de 2017 en: http://eprints.ucm.es/25246/13/Investigaciones_en_DM_en_Infantil_Primaria_SEIEM_XV.pdf

Socas, M. (1997). "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria". En Rico, L (1997). La educación matemática en la Escuela Secundaria". Barcelona, España: Horsori.

Tahan, M. (2008). El hombre que calculaba. Buenos Aires, Argentina: Pluma y Papel.

Vergnaud, G. (1990). Teoría de los Campos Conceptuales. Recuperado el 22 de noviembre de 2016 en: http://fundesuperior.org/Articulos/Pedagogia/Teoria_campos_conceptuales.pdf

Vergnaud, G. y Ricco, G. (1985). "Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y métodos". Revista Argentina de Educación. Año IV, 6. Asociación de graduados en Ciencias de la Educación. Buenos Aires.

Vergnaud, G. (1988). El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria. Ed. Trillas. Recuperado el 22 de noviembre de 2016 en: http://www.ccgsm.gob.ar/areas/educacion/cepa/vergnaud.pdf

Páginas de internet consultadas

Saiz, I. y Acuña, N. La didáctica de la matemática como disciplina científica (sd). En Portal Educar, Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación. Recuperado el 23 de noviembre de 2011 de: http://aportes.educ.ar/matematica/nucleo-teorico/tradiciones-deensenanza/-sintesis-del-desarrollo-de-algunas-teorias-sobre-la-ensenanza-de-la-tematica/ la_didactica_de_la_matematica.php?page=1

ANEXO ANALÍTICO

En la Primera Parte de este Anexo analítico, presentamos un desarrollo exhaustivo de las respuestas de los estudiantes de 1° año y de 4° año del Profesorado de Nivel Primario, como así también, una primera aproximación a categorías de análisis que luego fueron expuestas en el capítulo 4 de esta Tesis en los cuadros respectivos y modificadas.

En la Segunda Parte, exponemos las ideas asociadas que encontramos a los procedimientos realizados, y también una primera categorización de las mismas las cuales son expuestas a modo de cuadro en el capítulo 4 con sus respectivos análisis.

Primera Parte

Producciones de 1° año

PROBLEMA 1

Inciso a.I

En el *inciso a.I*, observamos en las producciones las siguientes *formas de representación*:

* Usa escritura fraccionaria

–las fracciones indican el resultado correcto del reparto.

Encontramos 4 estudiantes de los 21 que participaron del trabajo de campo, que expresaron el resultado correcto del reparto utilizando fracciones. Dos de ellos representaron el resultado como $4\,\frac{3}{5}$ y $4\,\frac{6}{10}$ y los otros como $\frac{23}{5} = 4\,\frac{3}{5}$ y $\frac{46}{10} = 4\,\frac{6}{10}$.

–la notación fraccionaria expresa otros cocientes adecuados.

En dos casos del total, no llegan a una expresión única sino que dejan indicado los resultados parciales. Por ejemplo, un estudiante escribe “4 chocolates para Joaquín, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$ del $\frac{1}{2}$ sobrante”, el otro expresa “4 chocolates para cada uno y a cada chico le daría $\frac{1}{5}$ de los 3 chocolates que sobran”.

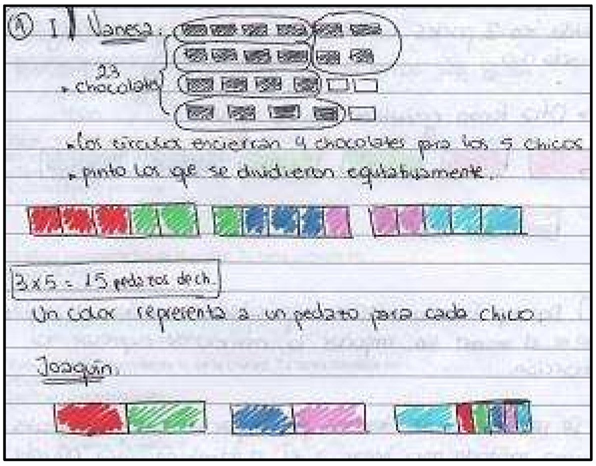
–la notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.

Aquí, nos encontramos con 13 estudiantes de los 21, que presentan casos diferentes, los cuales serán profundizados en la sección “Ideas”. Pero por ejemplo, leemos como resultado del reparto de Vanesa, las expresiones 4 y $\frac{3}{15}$ o también $\frac{4}{20}$ y $\frac{3}{5}$.

* Usa un gráfico

–dibuja todos los chocolates o parte de ellos y divide los chocolates según los datos.

De las 21 producciones, 14 utilizan un gráfico para representar el reparto de los chocolates que sobran en forma adecuada. Cabe aclarar, que no todos logran llegar al resultado esperado a pesar de haber graficado adecuadamente. A continuación presentamos una de estas producciones:



–dibuja todos los chocolates o parte de ellos y divide los chocolates sin tener en cuenta los datos.

Un estudiante dibuja un rectángulo dividido en 23 partes y pinta 20 de ellas. Luego, señala con una flecha una de esas partes y coloca $\frac{1}{5}$.

* Usa una expresión coloquial

Un estudiante expresa coloquialmente para el reparto de Joaquín: “Le toca un medio a c/u y $\frac{1}{5}$ del medio que sobra”.

* Escribe una división de fracciones

De los 21 estudiantes, 2 escriben una división de fracciones para resolver el problema. Uno de ellos expresa “$\frac{3}{23}$: 5 = $\frac{15}{23}$ para Vanesa” y para Joaquín “$\frac{3}{23}$: $\frac{1}{2}$= $\frac{3}{63}$= $\frac{1}{21}$y $\frac{3}{63}$: 5” y no coloca resultado para esta última división. El otro escribe $\frac{23}{1}$: $\frac{5}{1}$ pero lo deja así indicado y luego escribe “4 chocolates y $\frac{1}{4}$ parte de un entero para cada niño”.

* Escribe una expresión decimal

Un estudiante de los 21, primero plantea la suma de $\frac{20}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}:5=$ y después suma las 3 expresiones utilizando común denominador pero para el $\frac{1}{10}$ trabaja con 0,1. Obtiene entonces 9,2: 2= 4,6 para Joaquín.

OBSERVACIÓN: No encontramos en ninguna de las producciones obtenidas, el procedimiento que consiste en escribir directamente el algoritmo de la división, indicando que el 23 es el dividendo, 5 el divisor, 4 el cociente y 3 el resto.

Podemos avanzar con el análisis y encontrar las *nociones* que intervienen en los procedimientos utilizados:

* Fracción de otra fracción

–la indica y resuelve correctamente.

4 estudiantes de los 21, indican el $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ y lo resuelven correctamente de distintas maneras. Por ejemplo: dos de ellos consideran el $\frac{1}{10}$ y lo suman a la fracción $\frac{1}{2}$ obteniendo así $\frac{6}{10}$, la tercera considera el $\frac{1}{10}$ y lo suma a la parte entera también, logrando de esta manera $\frac{46}{10}$.

–la indica y resuelve con error en el algoritmo.

Un estudiante reconoce el $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ y lo identifica en el gráfico como $\frac{1}{10}$, pero al sumar $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ comete un error en el algoritmo de la suma con distinto denominador.

–solamente lo indica.

Aquí notamos que 8 estudiantes de los 21, indican la fracción de otra fracción pero no llegan a obtener el $\frac{1}{10}$. Veamos:

** 2 estudiantes indican el $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ gráficamente.

** 2 estudiantes sólo lo indica numéricamente y por ejemplo, se lee “se da $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$”.

** 2 estudiantes lo indican gráfica y numéricamente.

–no la utilizan:

** 2 estudiantes utilizan un gráfico para determinar el $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ pero separan una parte del entero original.

** 6 estudiantes directamente no expresan en su producción el $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$.

* Suma de fracciones

–suma correctamente teniendo en cuenta los datos del reparto.

De los 21 estudiantes, 3 de ellos tienen en cuenta los datos y suman correctamente. Dos de estas producciones consideran los 4 chocolates enteros en la suma y llegan a $\frac{46}{10}$ en un caso y a 4,6 en el otro. La tercera alumna sólo suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ y obtiene $\frac{6}{10}$.

–suma correctamente pero con datos del reparto erróneos.

Un estudiante en el reparto de Vanesa considera $\frac{1}{5}$ en lugar de $\frac{3}{5}$ y obtiene un resultado equivocado. De todas maneras, éste realiza una de las que suma correctamente en el reparto de Joaquín, en el ítem anterior.

–suma con errores en el algoritmo y datos correctos.

Dos estudiantes plantean la suma con datos correctos pero obtienen resultados incorrectos por error en el algoritmo de la suma de fracciones con distinto denominador.

Inciso a.II

En el *inciso a.II* encontramos las siguientes *formas de argumentación* para justificar la equivalencia de las expresiones obtenidas en a.I:

–contesta que son equivalentes y argumenta:

10 estudiantes contestan que las expresiones obtenidas en a.I son equivalentes y argumentan de distintas maneras. A continuación expresamos estas maneras:

** 2 estudiantes argumentan que obtienen los mismos resultados para ambos repartos. Uno de ellos expresa que se obtiene 4,6 al dividir ambas expresiones fraccionarias y el otro aclara que $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$.

** 3 estudiantes escriben que son equivalentes porque “representan la misma cantidad” o “porque en ambos repartos se le da lo mismo a todos”. Nos resulta interesante aclarar aquí, que dos de estos estudiantes llegan a las expresiones 4 y $\frac{3}{5}$ para Vanesa, 4 y $\frac{6}{10}$ para Joaquín, pero no argumentan desde la equivalencia entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$. El otro realiza los repartos adecuados y se consideró bajo el ítem *“la notación fraccionaria expresa otros cocientes adecuados”* pues no llegó a sintetizar el reparto de Joaquín en 4 y $\frac{6}{10}$.

** 4 estudiantes argumentan que son equivalentes porque se reparte a los dos chicos por igual o dan los mismos resultados de ambas maneras. Aquí también consideramos interesante aclarar, que dos de ellos sólo grafican la situación pero no expresan numéricamente el reparto en a.I y los otros dos no llegan a expresiones fraccionarias correctas.

**el último caso argumenta que se le reparte lo mismo a cada chico, es decir 4 y $\frac{1}{5}$ pues como se explicitó en el apartado sobre *ideas,* al modificar lo que considera como entero, obtiene en ambos repartos 4 y $\frac{1}{5}$.

–contesta que son equivalentes y no argumenta:

Un estudiante contesta que las expresiones obtenidas en a.I son equivalentes pero no argumenta sobre su afirmación. El mismo, en el ítem a.I no llega a obtener expresiones fraccionarias correctas para el reparto de Vanesa y para el de Joaquín.

–contesta que no son equivalentes y argumenta:

2 estudiantes expresan que las expresiones no son equivalentes y argumentan lo siguiente:

El primero dice: "porque Joaquín repartió más para cada chico". En este caso nos gustaría aclarar que el estudiante llega a la expresión 4 y $\frac{3}{5}$ para Vanesa y en el caso de Joaquín comete un error en el algoritmo de la suma de fracciones con distinto denominador.

El segundo expresa: "porque no hay un número divisor para el 23". En este caso, no obtiene expresiones correctas para el reparto de Vanesa y de Joaquín.

–contesta que no son equivalentes y no argumenta:

4 estudiantes contestan que las expresiones obtenidas no son equivalentes pero no expresan ningún argumento al respecto.

* No contesta

De los 21 estudiantes, 4 no contestan a esta pregunta.

Podríamos expresar que las *nociones* que intervienen en los argumentos dados son:

* Reparto equitativo

La idea de reparto equitativo está presente en 8 estudiantes. Esta noción se evidencia en los argumentos del tipo coloquial, pues expresan que todos los niños reciben la misma cantidad de chocolate a pesar que la forma de repartirlo sea distinta, y además, consideran que no sobra nada de chocolate en ambos casos, lo cual es otra característica del reparto equitativo.

* División

Una alumna trabaja con expresiones decimales para validar la equivalencia de las expresiones fraccionarias y afirma que para ambas se obtiene 4,6.

Inciso b.I

Para el *inciso b.I*, encontramos como *formas de representación* lo siguiente:

* Usa escritura fraccionaria

–las fracciones indican el resultado sintético del reparto.

7 de los 21 estudiantes llegan a expresar el resultado del reparto de manera correcta utilizando un número mixto o una fracción mayor que 1. De estos 7 estudiantes, 4 obtienen la expresión $2\frac{2}{3}$, uno expresa $\frac{4}{2}$ y $\frac{2}{3}$ y los dos últimos $\frac{16}{6}$.

–la notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.

Encontramos 6 estudiantes que no expresan en sus procedimientos y resultados, los cocientes de manera correcta, lo cual lo interpretaremos en la sección de análisis de resultados. Entre estas producciones encontramos:

** 3 estudiantes que expresan las fracciones y creemos encontrar algunos indicios de modificación de lo que consideran como entero y errores en lo algorítmico. Una de ellas escribe $\frac{2}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, la segunda "$6 : \frac{1}{2} = \frac{12}{1}$ y $\frac{2}{8}$: $3 = \frac{24}{2} = 12$" y por último la tercera "2 enteros o $\frac{4}{12} = \frac{2}{6}$" y al dividir los 2 chocolates restantes obtiene $\frac{2}{6}$.

** Por otro lado los 3 estudiantes restantes, presentan expresiones fraccionarias cuya interpretación se nos dificulta. A continuación las presentamos: uno de ellos expresa $\frac{8}{3}, \frac{8}{6}, \frac{4}{3}$ y $\frac{2}{3}$, el otro sólo $\frac{2}{3}$ y el tercero $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{6}$ y $\frac{1}{3}$.

* Usa un gráfico

–dibuja todos los chocolates o parte de ellos y divide los chocolates según los datos.

15 estudiantes de los 21, dibujan los chocolates del reparto y representan ese reparto de manera adecuada. Sólo dos de esos 15 estudiantes dibujan los 2 chocolates restantes, los demás dibujan los 8 chocolates, es decir, todos.

* Escribe una expresión decimal

Un estudiante de los 21 del total, escribe para resolver el problema del reparto de 8 chocolates entre 3 chicos: "$4 \text{ x } \frac{1}{2} + 2 \text{ x } \frac{1}{3} = 2 + 0{,}66 = 2{,}\widehat{6}$ para c/u".

* No resuelve

Uno de los estudiantes no responde a la consigna.

OBSERVACIÓN: nuevamente en este ítem, no encontramos en ninguna de las producciones obtenidas, el procedimiento que consiste en escribir directamente el algoritmo de la división en el que 8 es el dividendo, 3 el divisor, 2 el cociente y 3 el resto, como así tampoco una división entre fracciones.

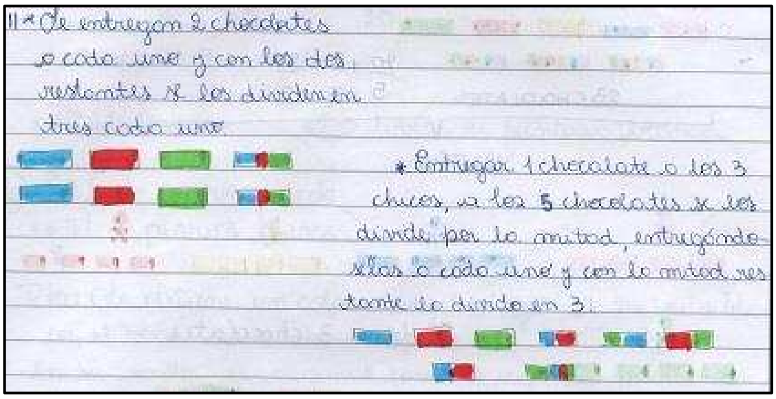
Inciso b.II

Sobre este inciso:

* Usa una expresión coloquial y gráfica

–expresa correctamente en lenguaje coloquial el reparto realizado y dibuja todos los chocolates y los divide según la propuesta de reparto.

Encontramos aquí que 2 estudiantes de los 21 utilizan estos dos tipos de representación. A continuación presentamos una de estas producciones:



* Usa una expresión coloquial y escritura fraccionaria

–expresa correctamente en lenguaje coloquial el reparto realizado y las fracciones indican la parte en el reparto.

Aquí encontramos 2 estudiantes que utilizan la representación fraccionaria y el lenguaje coloquial. Uno expresa: “Dividir en cuatro partes 6 chocolates de las cuales cada chico recibe 8 cuartos y los otros dos chocolates dividirlos en seis partes de las cuales cada uno recibe 4”. Luego escribe la expresión $2\,\frac{4}{6}$. El otro dice: “Se reparten 2 chocolates para cada chico y 2 que sobran se dividen en 3 partes, entregándole $\frac{2}{3}$ a cada uno, entonces $2\,\frac{2}{3}$”.

–expresa correctamente en lenguaje coloquial el reparto realizado pero la notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.

En esta parte encontramos 3 estudiantes cuyas expresiones coloquiales expresan claramente el reparto pero en las expresiones fraccionarias encontramos errores. Por ejemplo: "Se les podría dar 2 barras de chocolate enteras a cada chico. Las dos barras restantes podrían cortarse a la mitad y darle una mitad a cada uno. Finalmente la media barra que queda cortarla en 3 partes y darle una parte a cada chico. Fracciones: $\frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$".

–expresa fracciones correctas pero la expresión coloquial presenta errores.

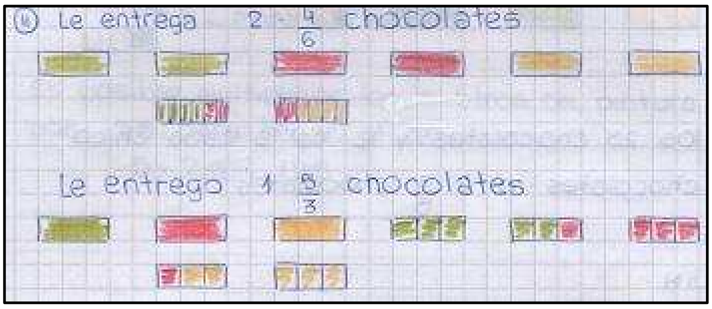
En este caso, un estudiante presenta como posible reparto equivalente al dado lo siguiente:

"$\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$ y $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$" Luego, al aclarar el reparto de manera verbal escribe: "Las fracciones para que me queden equivalentes las multipliqué por 3 que serían la cantidad de chicos a los que se le repartía chocolate, lo cual recibirán una porción más".

* Usa una escritura fraccionaria y gráfico

–dibuja todos los chocolates y los divide según la propuesta de reparto y las fracciones indican la parte en el reparto.

Con estas características encontramos las producciones de 3 estudiantes. A continuación presentamos una de estas producciones:



–dibuja todos los chocolates y los divide según la propuesta de reparto pero la notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.

2 estudiantes de los 21 logran realizar un gráfico correcto pero al registrar las fracciones del reparto cometen errores.

–dibuja y divide todos los chocolates con error, además expresa una fracción que no representa un cociente adecuado.

Un estudiante presenta en su producción, las características expuestas anteriormente. La misma será analizada en la sección "Ideas" bajo el título "La fracción puede ser menor que 1 o 1. Entonces, en el contexto de reparto se modifica lo que se concibe como el entero".

* Usa una expresión coloquial únicamente

Uno solo de los estudiantes expresa "Se reparte 2 chocolates para cada chico y las 2 barras que quedan se dividen en 6 pedazos iguales, c/u recibe 4".

* No resuelve

6 estudiantes de los 21 no resuelven este ítem de ninguna manera, en algunos casos queda el espacio en blanco.

Nociones que intervienen en los procedimientos:

* Equivalencia de expresiones fraccionarias

–establece la equivalencia de distintas expresiones fraccionarias.

3 estudiantes del total, establecen distintas equivalencias entre las expresiones fraccionarias encontradas. El primero expresa que: $2\,\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; el segundo $\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$ y $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ y el último para comprobar que reparte todos los chocolates establece que: $\frac{24}{3} = 8$ y $6 + \frac{12}{6} = 8$.

* Fracción de otra fracción

–solamente la indica.

5 estudiantes de los 21, al realizar una propuesta de reparto utilizan la noción parte-parte pero sólo la indican; 4 de ellos en forma coloquial expresando "y la última mitad se la dividió en 3 partes" y el otro además de expresarlo coloquialmente le agrega un gráfico, pero ninguno llega a obtener el $\frac{1}{6}$ como resultado.

Inciso c.I

En este inciso, al leer las explicaciones sobre cuándo dos fracciones son equivalentes encontramos las siguientes *formas de argumentación*:

* Usa el lenguaje coloquial únicamente

De los 21 estudiantes, 10 de ellos expresan qué significa la equivalencia de fracciones sólo verbalmente. A continuación detallamos las diversas formas que utilizan:

** 4 de ellos explicitan que son equivalentes cuando representan la misma cantidad, y entre ellos una lo ejemplifica en el contexto del reparto diciendo: "Para que las fracciones sean equivalentes es necesario que todos reciban la misma cantidad de lo que se está repartiendo".

** 5 estudiantes expresan que son equivalentes cuando “Multiplico o divido el numerador y el denominador por el mismo número”.

** Un último estudiante aclara “Son equivalentes cuando tienen diferentes procedimientos e iguales resultados, por ejemplo a)”.

* Usa el lenguaje coloquial y la escritura fraccionaria

De los 21 estudiantes, 7 utilizan el lenguaje coloquial y complementan su explicación con un ejemplo numérico. Entre estas producciones encontramos distintas ideas:

** 3 de ellos explicitan que son equivalentes cuando representan la misma cantidad, y luego ejemplifican con un par de fracciones, por ejemplo: $\frac{1}{5} = \frac{5}{30}$

** 2 estudiantes detallan que son equivalentes cuando se pueden multiplicar o dividir por el mismo número y también ejemplifican. En un caso vamos a continuar indagando el ejemplo numérico pues escribe: “$\frac{2}{4}.\frac{1}{2}= \frac{4}{8}.\frac{2}{4}= \ldots$”

** El sexto estudiante combina las explicaciones anteriores, es decir, nos habla de la misma cantidad pero también explica “cuando al simplificar obtenemos la misma fracción”.

** El último estudiante expresa “Dos expresiones fraccionarias son equivalentes cuando al dividirlas por sí mismas dan los mismos resultados. Ej.: $\frac{20}{5} = 4$ y $\frac{8}{2} = 4$”.

* Usa un gráfico y una escritura fraccionaria

Un estudiante grafica las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ en rectángulos de igual tamaño y debajo escribe las expresiones fraccionarias correspondientes.

* Usa de lenguaje coloquial, gráfico y escritura fraccionaria

Un estudiante grafica $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ en rectángulos de igual tamaño, coloca las expresiones fraccionarias a un costado y luego expresa: “Dos fracciones son equivalentes cuando representan lo mismo”.

* No resuelve

2 estudiantes de los 21 no explican cuándo dos fracciones son equivalentes.

En cuanto a las *nociones* asociadas a los argumentos dados, podemos encontrar:

* La equivalencia de fracciones asociada a la misma cantidad

–expresan claramente que representan la misma cantidad.

8 estudiantes de los 21 que realizaron el trabajo, expresan que dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad.

–expresan de otra manera esta noción.

Un estudiante expresa que dos fracciones son equivalentes cuando representan lo mismo.

* La equivalencia de fracciones asociada al mismo número racional

Si bien en el caso expuesto a continuación no habla de número racional, podríamos afirmar que la noción está implícita en sus expresiones.

Un estudiante aclara que "dos expresiones fraccionarias son equivalentes cuando al dividirlas por sí mismas dan los mismos resultados. Ej.: $\frac{20}{5} = 4$ y $\frac{8}{2} = 4$".

Inciso c.II

Sobre este inciso:

Al indagar sobre la relación que existe entre la división y la fracción, nos encontramos con los siguientes *argumentos*:

* Usa solamente una expresión coloquial

Encontramos dos estudiantes que expresan la relación entre la división y la fracción de manera coloquial. Uno de ellos escribe "Se relaciona la fracción porque siempre es dividir en partes, iguales o diferentes" y el otro expresa "Se relacionan porque para que la repartición sea en partes iguales es necesario que divida en las personas que sean".

* Usa una expresión coloquial, una fraccionaria y escribe la cuenta de dividir entre naturales

9 estudiantes combinan una explicación coloquial junto a ejemplos numéricos en los que proponen distintas explicaciones.

** 3 de estos estudiantes expresan que "la fracción es una división" y sus ejemplos se caracterizan por ser fracciones iguales a un número natural. Por ejemplo: $\frac{6}{3} = 2$ y $\frac{8}{2} = 4$, además acompañan a estos ejemplos el algoritmo de la división.

** 2 de los 9 estudiantes expresan que se relacionan porque "el número de abajo de la fracción es por la cantidad de veces que se divide el entero". Luego proponen una fracción y la división la acompaña.

**Uno propone la siguiente relación: "Se relacionan ya que la fracción al simplificarla te queda el mismo resultado como si lo hubieras dividido" y paralelamente la fracción $\frac{10}{5} = 2$ y acompaña dicha expresión con el algoritmo de la división, en el cual obtiene también 2.

** 2 estudiantes describen la relación de la siguiente manera: “al numerador se lo divide por el denominador para obtener un número decimal”. Uno de ellos propone la fracción $\frac{1}{2}$ = 0,5 y la otra $\frac{5}{10}$ = 0,5.

** El último, expresa lo siguiente: “La fracción se relaciona con la división en que sirve para dividir en partes iguales. Si tengo que dividir una torta de 6 partes en 3 chicos sería, 6:3 = 2 para cada uno y $\frac{2}{6}$ para cada uno”.

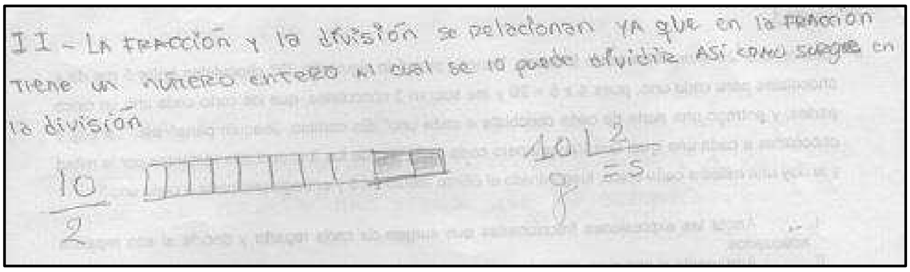
* Usa una expresión coloquial, una fraccionaria y un gráfico

6 estudiantes incorporan a su explicación coloquial, una fracción y también un gráfico. A continuación se presentan sus producciones:

** Uno de los estudiantes explica que la relación está dada porque “el número de abajo indica en cuántas partes se divide el número de arriba”. Luego propone la fracción $\frac{1}{4}$ y aclara que el 1 es una torta y el número 4 los pedazos. Acompaña a esta explicación un gráfico circular dividido en 4 partes iguales.

** 2 estudiantes plantean la relación explicando que es necesaria la división para dividir un objeto, en un caso habla de una pizza y en el otro de una torta. La fracción luego aparece como la manera de expresar una fracción de ese objeto (torta o pizza).

** 3 estudiantes de los 6 que incorporan un gráfico a su explicación, proponen una fracción pero el gráfico no se corresponde con la fracción propuesta.



* No resuelve

4 estudiantes de los 21, no contestan a esta pregunta.

En cuanto a las *nociones* notamos:

* La fracción como el resultado de un reparto

–Un estudiante expresa esta noción pero de manera muy intuitiva diciendo “para que el reparto sea en partes iguales es necesario que se divida en las personas que sean. Por ejemplo, tengo que repartir tres alfajores con dos niños, a cada uno se le debe dar la mitad de los tres alfajores".

–Ninguna de las producciones indica que la fracción es el resultado de un reparto, donde el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor de una división.

PROBLEMA 2

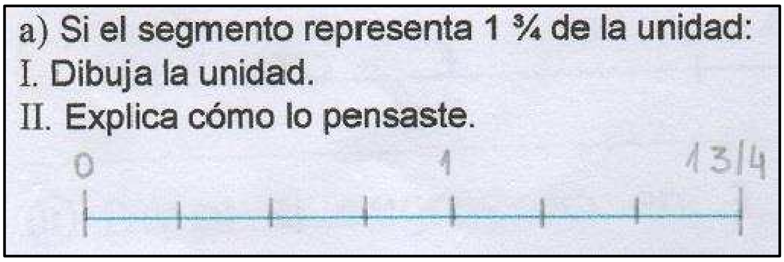
Incisos a.I y a.II

En las producciones observamos la siguiente *forma de representación*:

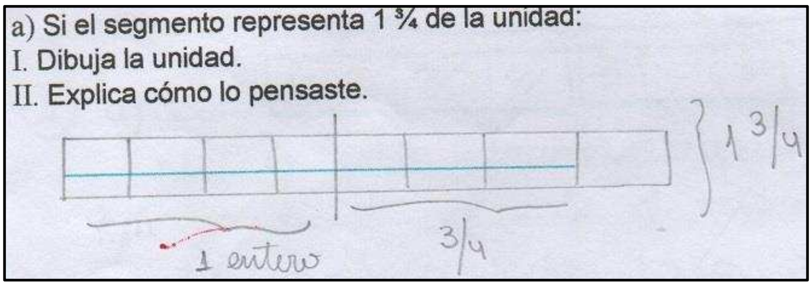
* Usa un gráfico

–reconstruye la unidad a partir de una fracción dada, mayor que uno.

7 de los 21 estudiantes logran dibujar la unidad y/o señalarla. Tal como lo planteamos en el análisis a priori, 3 estudiantes señalaron la unidad sobre el mismo segmento. Por ejemplo:



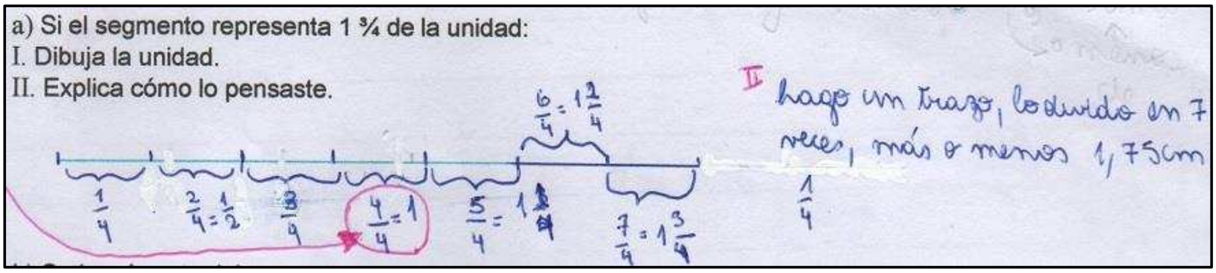
Los 4 restantes, logran identificar el entero correctamente pero los diferenciamos de los estudiantes anteriores porque utilizaron rectángulos "apoyados" sobre el segmento dado como dato. Si bien tomamos un ejemplo, cabe aclarar que las cinco producciones son iguales.



–no logra reconstruir la unidad a partir de una fracción dada, mayor que uno.

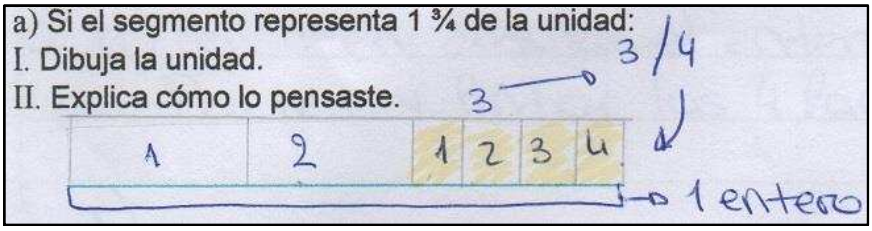
13 de los 21 estudiantes, no identificaron la unidad de manera correcta.

** 4 estudiantes sobre el segmento dado determinan cuartos de una medida dada por ellos. De todas maneras, reconocen que 1 $\frac{3}{4}$ es igual a 7 veces $\frac{1}{4}$ pues en sus producciones lo indican. Por ejemplo:



** 2 estudiantes consideran al segmento dado como 2 enteros y a partir de allí señalan en el mismo la fracción $1\frac{3}{4}$ y 2.

** 3 estudiantes consideran al segmento dado como 1 entero y allí, dos de ellos señalan la fracción $\frac{3}{4}$ sobre el mismo. El tercero, divide al segmento dado en tres partes iguales e indica que es 1 entero. Luego, a una de esas partes la divide en 4 partes iguales. A continuación presentamos su producción que será analizada a posteriori:



** 2 estudiantes representan el número 1 $\frac{3}{4}$ en gráficos rectangulares, con medidas definidas por ellos.

** Los últimos 2 estudiantes realizan sólo gráficos rectangulares sobre el segmento dado pero no podemos determinar cuál fue la idea original.

* No contesta

1 estudiante de los 21 en total, no resuelve esta actividad.

Las *nociones* que surgen del dibujo de la unidad y de la explicación del procedimiento:

* La fracción como medida de una cantidad continua

4 de los 21 estudiantes argumentan su procedimiento desde el significado de la fracción como medida. Pues, tal como lo planteamos en el marco teórico, expresan que $1\,\frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ y que es igual a 7 veces.

Incisos b.I y b.II

En las producciones observamos la siguiente *forma de representación*:

* Usa un gráfico y lenguaje coloquial

–reconstruye la unidad a partir de una fracción dada, menor que uno.

8 estudiantes del total, dibujan el segmento que representa al entero. Si bien en este ítem no se solicitaba que lo dibujen —como en el ítem anterior—, todos optaron por hacerlo en lugar de indicar su longitud en cm, por ejemplo. Además en lenguaje coloquial, explican cómo pensaron la reconstrucción.

–no reconstruye la unidad a partir de una fracción dada, menor que uno.

De los 21 estudiantes en total, encontramos 7 que utilizan un gráfico y una expresión coloquial para resolver estos ítems pero no logran reconstruir la unidad a partir de la fracción $\frac{2}{3}$. Algunas de estas producciones las recuperamos en el apartado sobre *ideas asociadas.*

* Usa sólo lenguaje coloquial

Un estudiante explica que "el segmento entero era $\frac{3}{3}$. Al decir que se borró parte de el y que quedó $\frac{2}{3}$, sería que lo que se borró es $\frac{1}{3}$, para completar un segmento entero".

* No responde

6 estudiantes de los 21 que realizaron el trabajo, no responden a los ítems b.I y b.II. Nos parece oportuno aclarar que 4 de ellos sí resolvieron los ítems a.I y a.II.

En cuanto a las *nociones* puestas en juego al reconstruir la unidad de medida, encontramos:

* La fracción como medida de una cantidad continua

Notamos que 9 estudiantes de los 21 pudieron identificar algunas características de la fracción como medida. A continuación, detallamos algunas diferencias en sus explicaciones:

** 5 expresan haber dividido el segmento dado en 2 partes iguales —utilizando regla graduada o en forma aproximada— para averiguar la medida de $\frac{1}{3}$. Luego, explican que agregan al segmento original la medida que se obtuvo de $\frac{1}{3}$ para completar el entero y así obtener $\frac{3}{3} = 1$.

** 4 estudiantes, coinciden que $\frac{1}{3}$ es lo que "le falta" o "se borró" para llegar al entero que es $\frac{3}{3}$ y grafican el entero correctamente, pero nada dicen sobre los $\frac{2}{3}$ que se dan como dato. Además, 3 de ellos obtienen el entero graficando un rectángulo sobre el segmento dado, cuestión que ya se señaló en el ítem a.I.

Incisos c.I y c.II

En las producciones observamos la siguiente *forma de representación*:

* Usa un gráfico y lenguaje coloquial

–reconstruye la unidad a partir de una fracción dada, mayor que uno.

6 estudiantes de los 21 logran dibujar la unidad a partir del rectángulo dado que representa los $\frac{6}{5}$ de la unidad. De estos 6 estudiantes, 3 señalan la unidad sobre el mismo rectángulo destacándola del quinto sobrante y los 3 restantes dibujan la unidad debajo. Además, en las 6 producciones se expresa de manera coloquial que "el rectángulo representa $\frac{6}{5}$, más que un entero, entonces hay que quitarle $\frac{1}{5}$".

–no reconstruye la unidad a partir de una fracción dada, mayor que uno.

12 estudiantes no logran dibujar la unidad solicitada. Dentro del total de estas producciones se presentan algunas diferencias que serán detalladas al considerar las "Ideas".

* No responde

3 estudiantes de los 21 que realizaron el trabajo, no responden a los ítems c.I y c.II. Nos parece oportuno aclarar que 2 de ellos no resolvieron tampoco los ítems b.I y b.II pero los 3 respondieron el ítem a.I y a.II.

Noción que surge del dibujo de la unidad y de la explicación del procedimiento.

* La fracción como medida de una cantidad continua.

10 de los 21 estudiantes —a diferencia del ítem sobre representación[48]— lograron justificar su procedimiento a partir del significado de la fracción como medida. Como bien lo expresamos en el capítulo 1, podemos pensar este significado de la siguiente manera: la fracción $\frac{1}{n}$ es una medida tal que n x $\frac{1}{n}$ es igual a la unidad. Una cantidad que contiene m veces la medida $\frac{1}{n}$ se designa con el número $\frac{m}{n}$. A continuación, recuperamos algunos argumentos de los alumnos que permiten visualizar este significado:

"Sé que la unidad es $\frac{5}{5}$ y como el numerador es mayor necesito de otro entero que sea igual pero del cual sólo pinte lo que falta, es decir $\frac{1}{5}$".

"Dibujé 2 enteros divididos en 5 partes cada uno, luego pinté un entero ($\frac{5}{5}$) y $\frac{1}{5}$ restante del otro entero".

"$\frac{6}{5}$ es un entero más $\frac{1}{5}$".

Incisos d.I y d.II

En las producciones observamos las siguientes *formas de representación*:

* Usa un gráfico y lenguaje coloquial

–reconstruye la unidad a partir de una fracción dada, menor que uno.

8 estudiantes de los 21 que realizaron la consigna, logran dibujar la unidad a partir del rectángulo dado que representa los $\frac{3}{5}$ de la unidad. De estos 8 estudiantes, 5 señalan la unidad sobre el mismo rectángulo agregando los $\frac{2}{5}$ faltantes y los 3 restantes dibujan la unidad debajo. Además, acompañan el gráfico con una explicación sobre su procedimiento que será analizada en el ítem sobre "Nociones".

–no reconstruye la unidad a partir de una fracción dada, menor que uno.

11 estudiantes de los 21 no logran dibujar la unidad solicitada. Dentro del total de estos estudiantes se presentan algunas diferencias que serán detalladas al considerar las "Ideas".

* No responde

[48] La diferencia está dada en que los estudiantes justifican desde el significado de medida su procedimiento pero no respetaron las medidas originales y propusieron ellas sus propias medidas para el entero, es decir ignoraron el dato inicial.

2 estudiantes de los 21 que realizaron el trabajo, no responden a los ítems d.I y d.II. Nos parece oportuno aclarar que los dos no resolvieron tampoco los ítems b.I, b.II, c.I y c.II pero sí, a.I y a.II.

Noción que surge del dibujo de la unidad y de la explicación del procedimiento.

* La fracción como medida de una cantidad continua.

8 de los 21 estudiantes —al igual que en el ítem sobre representación— logran justificar su procedimiento a partir del significado de la fracción como medida.

–expresa explícitamente el significado de la fracción como medida

De estos 8 estudiantes, 3 expresan claramente que el entero está formado por $\frac{5}{5}$ y argumentan entonces, por ejemplo: “Dividí el primer rectángulo en tres partes y el entero tiene 5, por lo tanto agregué dos partes más del tamaño de uno de los otros 3” o también “$\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ (es la parte que me falta para llegar a la unidad”.

–expresa implícitamente el significado de la fracción como medida

Los 5 estudiantes restantes utilizan la idea que el entero está formado por 5 partes iguales pero con argumentos no tan claros como los anteriores. Por ejemplo: “Dividí el rectángulo en 3 partes de la misma medida y dibujé 2 más que representan $\frac{2}{5}$ para poder completar el entero”.

PROBLEMA 3

Inciso a

En las producciones observamos las siguientes *formas de representación*:

* Usa expresión decimal

–8 de los 21 estudiantes utilizan la regla de tres para encontrar el valor de pintura blanca para 5 litros de pintura verde. De estas producciones podemos notar que:

** 4 de estos 8 estudiantes, realizan el planteo de la regla de tres y colocan el resultado x=12,5; no observamos ningún registro de cálculo por lo tanto suponemos que trabajaron con calculadora.

** 3 estudiantes, en el planteo que realizan de la regla de tres, despejan la incógnita “x” y expresan $\frac{5.10}{4}$= 12,5; en un caso realiza el cálculo 50:4 con el algoritmo de la división y deja registro.

** El último estudiante si bien plantea la regla de tres, comete errores al ubicar los datos y obtiene una respuesta equivocada expresada con un número decimal.

–3 estudiantes de los 21 del total, realizan el cálculo de 10: 4 = 2,5 sin especificar a qué magnitud hace referencia cada número. Luego interpretan ese 2,5 y contestan que se necesitan 12,5 litros de pintura blanca para 5 litros de pintura verde.

* Usa lenguaje coloquial

8 estudiantes de los 21, expresan con una representación verbal o lenguaje coloquial lo que se necesita de pintura blanca para 5 litros de pintura verde. A continuación presentamos los resultados y aclaramos que no encontramos ningún registro escrito de cálculos u otros procedimientos, que nos permita profundizar en estas respuestas, que por cierto tienen errores.

** 4 estudiantes contestan que se necesitan 11 litros de pintura blanca.

** Uno de ellos responde que se necesitan 9 litros de pintura blanca.

** Otro plantea la necesidad de utilizar 15 litros de pintura blanca para 5 l de verde.

** Otro responde que se utilizarán 12 litros y medio.

** El último presenta una respuesta que copiamos a continuación: "A 10 litros de pintura blanca lo divido por 2, lo cual obtengo 5 litros de pintura blanca para 4 litros de pintura verde y los otros 5 litros de blanca con los 5 litros de pintura verde".

* No responde

De los 21 estudiantes que realizaron el Problema 3, 2 de ellos no responden a este ítem.

Nociones/Técnicas que intervienen en los procedimientos utilizados:

* Usa la regla de tres

8 de los 21 estudiantes utilizan la regla de tres para encontrar el resultado, de los cuales 7 obtienen 12,5 litros de pintura blanca. En estas soluciones notamos una aplicación de la regla, por lo cual no podemos afirmar si los estudiantes identifican este problema como de proporcionalidad o si comprenden la relación que existe entre esta regla y la proporcionalidad.

* Pasaje por la unidad

3 de los 21 estudiantes, buscan el valor de pintura blanca que se necesita para 1 litro de pintura verde, dividiendo 10:4 pero no hacen explícita esta búsqueda sino que la inferimos a partir de sus respuestas.

Inciso b

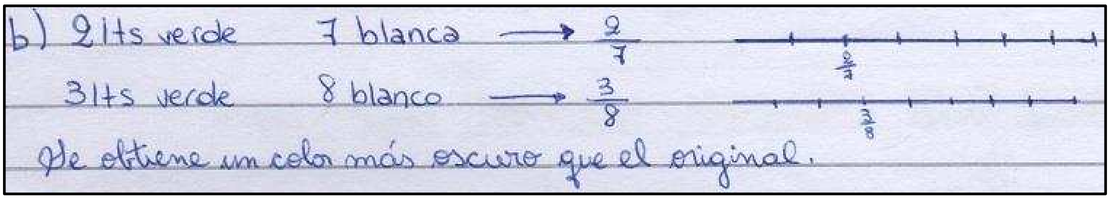
En las producciones observamos las siguientes *formas de representación*:

* Usa una expresión fraccionaria y la recta numérica

2 estudiantes del total utilizan fracciones para resolver este ítem. En un caso sólo fracciones, y el otro estudiante también agrega la representación en la recta numérica de las fracciones. A continuación presentamos sus formas de representar la situación:

–El primero determina las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{8}$. Luego expresa $\frac{16}{54} < \frac{21}{54}$. Sin más explicaciones contesta que se obtendrá un color más oscuro. En lo posible, nos parece interesante indagar sobre este procedimiento y el significado que le otorga a las fracciones encontradas.

–La segunda alumna presenta esta producción:



* Usa una expresión decimal

Un estudiante utiliza expresiones decimales para encontrar la respuesta a la consigna dada. Plantea lo siguiente:

"2 litros V: 7 litros B = 0,2857142857... (más claro)

3 l V: 8 l B = 0,375 (más oscuro), se obtiene un color más oscuro que el de 2 l V y 7 l B porque tiene más cantidad de porcentaje de pintura verde por litro de pintura blanca".

* Usa el lenguaje coloquial

–responde utilizando el lenguaje coloquial y argumenta su respuesta de manera incorrecta:

7 estudiantes de los 21, responden coloquialmente y argumentan su postura desde distintos lugares. A continuación presentamos sus argumentos:

** Queda igual porque se agrega la misma cantidad de pintura.

** Se obtiene un color más oscuro porque...

"tiene menos blanco y más verde".

"al preparar la primer pintura se usó 1 litro más de pintura blanca".

"ya que obtendrías un color más claro si le agregarías 1 litro de agua y no un litro del mismo color".

“aun agregándole un litro de cada color”.

**Se obtiene un color más claro porque…

“...ya que al haber más blanco el verde se aclara”.

“...porque el que predomina es el blanco”.

–responde utilizando el lenguaje coloquial pero no argumenta

7 estudiantes del total, responden al interrogante planteado pero no argumentan su postura. 5 de ellos elijen la opción “más claro” y 2 de los estudiantes la opción “más oscuro”.

* No responde

De los 21 estudiantes que realizaron el Problema 3, 4 de ellos no responden a este ítem.

Nociones/Técnicas que intervienen en los argumentos dados:

* Constante de proporcionalidad

Un estudiante utiliza de manera implícita la noción de constante para comparar ambas mezclas. Lo implícito está en que no habla de la “constante de proporción” pero sí de lo que le corresponde de pintura verde para 1 litro de pintura blanca.

Inciso c

En las producciones observamos las siguientes *formas de representación*:

* Usa una expresión coloquial

14 estudiantes utilizan una expresión coloquial para responder a la pregunta y en algunos casos mínimos la acompañan con un cálculo sencillo. A continuación distinguimos tres grupos:

–afirma que existe un n° y argumenta correctamente

3 estudiantes afirman que existe ese número solicitado por la consigna y argumentan correctamente. Por ejemplo:

“Sí estoy de acuerdo porque yo en el ítem a) lo saqué multiplicando la pintura verde por el porcentaje de pintura blanca por litro de pintura verde”. Cabe aclarar que esta alumna en el ítem a) realiza el cálculo 10:4= 2,5 y aclara que para 1 l de verde se necesitan 2,5 l de blanco.

“Es posible multiplicar los 5 l de pintura verde por 2,5 para llegar al resultado 12,5 l”.

"Sí, ya que se puede realizar $\frac{10}{4} = 2,5$ y multiplicar este valor por la cantidad de lts de pintura de color". Luego aclara que el 2,5 equivale a la cantidad de pintura blanca que se debe colocar por cada litro de pintura de color.

–afirma que existe un n° y argumenta incorrectamente

2 estudiantes sostienen que existe ese número pero al presentar sus argumentos se notan errores. Por ejemplo:

"Estoy de acuerdo con Juan porque multipliqué la cantidad de pintura verde (5) por 3 y me da 15". Este estudiante en el ítem a) respondió que se necesitan 15 litros de pintura blanca para 5 l de pintura verde.

"Sí, estoy de acuerdo, multiplicando la cantidad de litros de verde que se va a poner por la fórmula anterior (5x10) y el resultado dividirlo por los lts de verde de la fórmula original (50:4)". Este estudiante en el ítem a) realiza una regla de tres para obtener el 12,5 l de blanca.

–afirma que no existe un n° y argumenta

9 estudiantes sostienen que no existe ese número solicitado y presentan distintos argumentos con errores. A continuación intentamos agrupar algunos según sus características:

** 4 argumentan que no es posible encontrar el número solicitado pues no existe un n° que multiplicado por 5 de como resultado 12,5 litros u 11 litros en otro caso. Tomemos un ejemplo:

"No estoy de acuerdo porque por más que lo multiplique por cualquier número entero, no me daría la cantidad que me dice el ítem a)".

** Un estudiante asocia su argumento al procedimiento realizado en la regla de tres del ítem a): "No estoy de acuerdo porque para calcular la cantidad de pintura blanca se debe multiplicar la pintura verde con la blanca y el resultado dividirlo por la cantidad de pintura verde".

** Los últimos 4 argumentos son diversos. Los presentamos a modo de ejemplo y los relacionamos con lo realizado en el ítem a):

"Para obtener el resultado se deben dividir ambos colores". Este estudiante sólo coloca el resultado 12,5 litros en el ítem a) del problema.

"No estoy de acuerdo porque se necesita saber cuánta pintura se tiene del otro color". En este caso el estudiante en el ítem a) realizó una regla de tres y obtuvo el resultado correcto.

"Me guié por el ítem a) y no se calcula multiplicando sino dividiendo". Este estudiante es el que dividió en 2 partes iguales los 10 litros de pintura blanca que tenía como dato y le asignó 5 l a los 4 litros de verde que tenía como dato y los otros 5 l a los 5 l de pintura verde restante.

"No estoy de acuerdo porque si multiplicamos nos pasamos de la cantidad que se indica en un comienzo". En este caso, propuso como resultado del ítem a) la cantidad de 11 litros de pintura blanca.

* Usa una expresión coloquial y la regla de tres

Un estudiante para responder a la consigna primeramente utiliza el lenguaje coloquial y expresa: "Sí, estoy de acuerdo porque si averiguas cuántos l de pintura verde corresponde a 1l de pintura blanca luego multiplicas". Luego realiza el siguiente planteo:

10 l blanco---------------------4 l verde

1 l blanco --------------------- x l verde; (1x4):10 =0,4 $\longrightarrow$ x= l de blanco

Cabe aclarar aquí, que este estudiante es el mismo que en el ítem a) de este problema, utiliza la regla de tres pero comete errores al ubicar los datos.

* No responde

De los 21 estudiantes, 6 no responden a este último ítem de Problema 3.

Nociones que intervienen en los argumentos dados:

* Constante de proporcionalidad

Al leer las producciones, notamos que 3 estudiantes de los 21, sostienen que existe un número que al multiplicarlo por la cantidad de pintura verde en el ítem a) permite obtener la pintura blanca y además argumentan correctamente. Si bien no expresan explícitamente la presencia de una constante de proporcionalidad directa, utilizan esta noción de manera implícita y la pueden interpretar.

&&&&&&&&&&&&&&&&

Producciones de 4° año

PROBLEMA 1

Inciso a.I

En las producciones observamos las siguientes *formas de representación*:

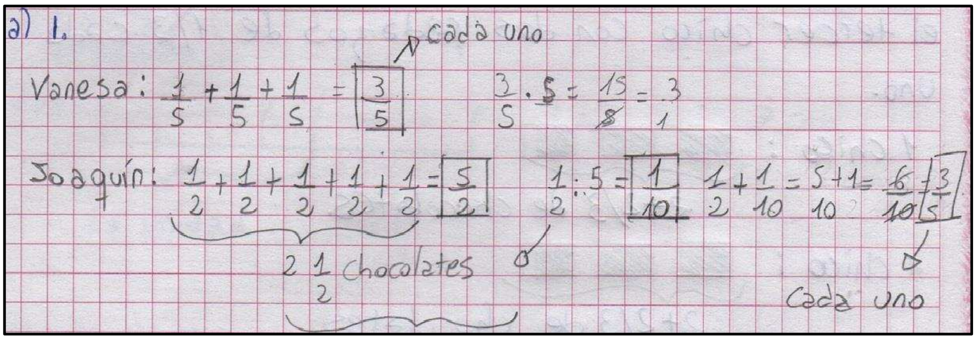
* Usa escritura fraccionaria

–las fracciones indican el resultado sintético del reparto

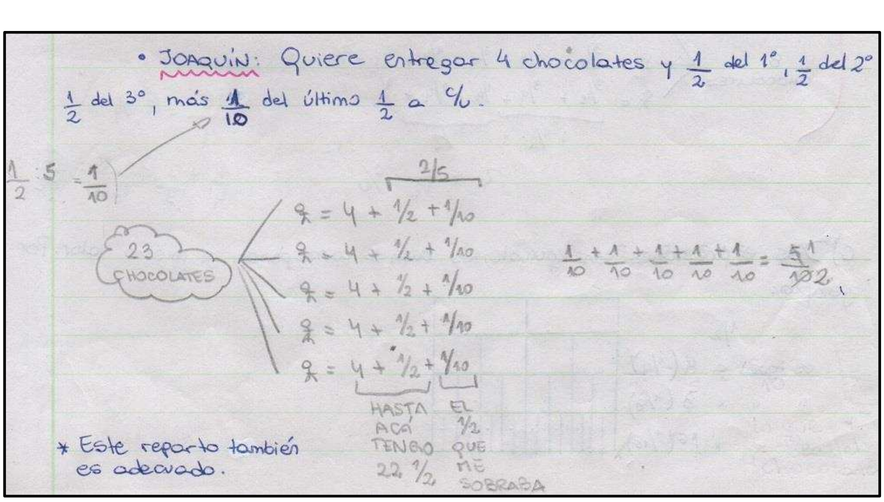
Encontramos 6 estudiantes de los 11 que participaron del trabajo de campo, que expresaron el resultado con fracciones. Primeramente exponemos las diferencias que encontramos para luego realizar un análisis más exhaustivo.

** En una de las producciones, las fracciones que aparecen muestran el resultado del reparto y se acompañan con un gráfico, pero nada dice sobre si el reparto es adecuado o no. Incluso queda implícito el procedimiento utilizado en ese reparto.

** Otra producción, nos resulta interesante pues justifica que el reparto es adecuado. La justificación se basa en la realización de cálculos para obtener —a partir de las partes repartidas— los 3 chocolates iniciales.



** Al igual que el trabajo anterior, otros dos estudiantes justifican que el reparto es adecuado, con la diferencia que sus cálculos le permiten obtener la cantidad de chocolates totales que se repartieron, es decir 23 y no 3 como en el caso anterior. A continuación mostramos el caso de Joaquín:



** También nos resulta necesario recuperar el siguiente procedimiento, pues fue uno de los considerados en el análisis a priori. Aquí el estudiante llega a indicar con una fracción el resultado del reparto en ambos casos —Vanesa y Joaquín— de manera correcta pero surge en sus procedimientos el error de considerar $\frac{3}{15}$ en lugar de $\frac{3}{5}$. De todas maneras, sortea este error con un procedimiento posterior.

Por último, dentro de este grupo de producciones que obtienen una expresión fraccionaria correcta como resultado final de ambos repartos, encontramos dos casos que nos resultan interesantes indagar pues presentan algunos aspectos para profundizar:

** uno de los trabajos propone expresiones fraccionarias que expresan el reparto de manera correcta como así también es correcta la argumentación referida a si el reparto es adecuado o no. En esa argumentación expresa que reciben la misma cantidad de chocolate pues $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ pero en su registro aparece la siguiente suma: $\frac{6}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$.

** el otro caso, también expresa los resultados de ambos repartos y la argumentación de manera correcta pero "se filtran" algunas expresiones como: "$\frac{4}{20} + \frac{3}{5} = \frac{4+15}{20} = \frac{19}{20}$(no es respuesta final)".

–la notación fraccionaria expresa otros cocientes adecuados

En estos tres casos, no llegan a una expresión única sino que dejan indicado los resultados parciales.

Por ejemplo, dos escriben que, según el planteo de Joaquín cada niño recibió 4 chocolates, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$. Otro alumno, también para el caso de Joaquín expresa: $\frac{4}{1}$ por un lado, $\frac{1}{2}$ por otro lado y por último habla que la última mitad se la dividió en 5 partes.

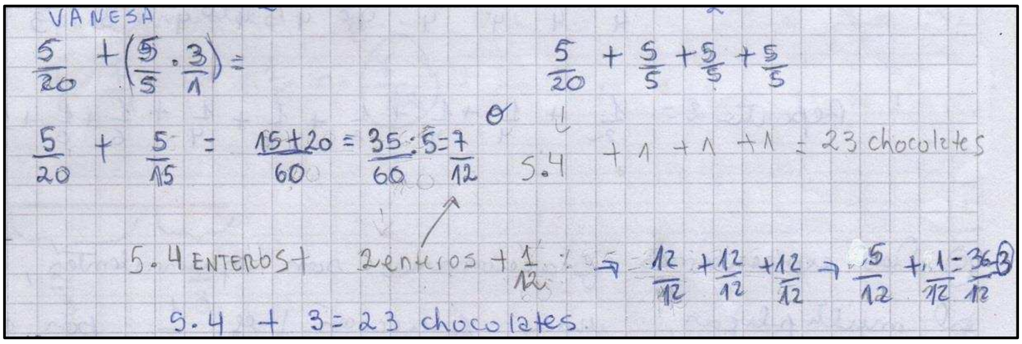
–la notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.

En este apartado nos encontramos con 2 estudiantes de los 11, que presentan casos diferentes:

** En el primero, se visualiza claramente un error en la expresión fraccionaria del reparto de Joaquín, pues obtiene $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$[49] .Luego, al querer justificar si el reparto es adecuado o no, obtiene 27 chocolates lo cual la hace afirmar que el reparto es erróneo.

[49] Esta expresión será expuesta en el apartado sobre ideas.

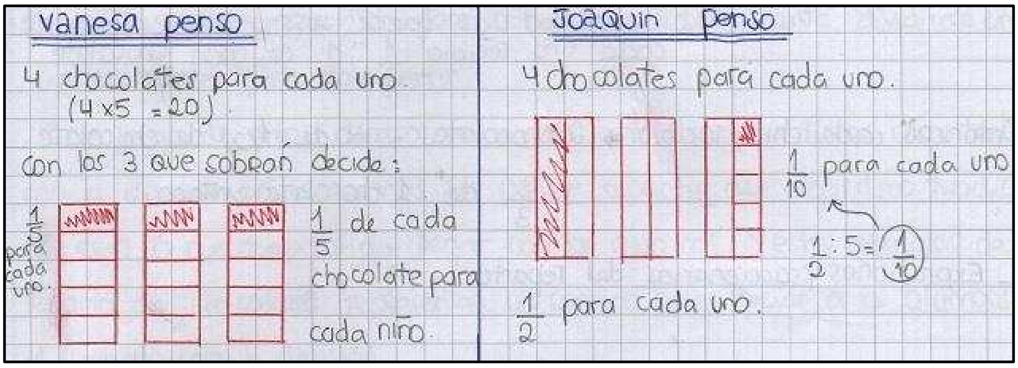
** En el segundo, creemos conveniente presentar el procedimiento por la complejidad de la escritura.



* Usa un gráfico

–dibuja los 3 chocolates y los divide según los datos

De las 11 producciones, 6 utilizan el gráfico para representar el reparto de los 3 chocolates que sobran en forma adecuada. A continuación presentamos una de estas producciones:



* Usa una expresión coloquial

En ninguna de las producciones se expresa en forma coloquial el reparto realizado. Cabe aclarar que el reparto se presentó de esta manera en la consigna del problema y además el ítem solicita una expresión fraccionaria como resultado.

* Escribe cuenta de dividir entre naturales

No encontramos en ninguna de las producciones obtenidas, el procedimiento que consiste en escribir directamente el algoritmo de la división en el que el 23 es el dividendo, 5 el divisor, 4 el cociente y 3 el resto.

* Escribe una división de fracciones

Tampoco aquí, encontramos este tipo de representación en las producciones de los 11 alumnos.

* Escribe una expresión decimal

Si bien habíamos considerado en el análisis a priori esta posibilidad, al analizar las producciones no encontramos el uso de una expresión decimal para expresar el resultado del reparto.

Podemos avanzar con el análisis y encontrar las *nociones* que intervienen en los procedimientos utilizados:

* Fracción de otra fracción

–la indica y resuelve correctamente.

De los 11 estudiantes, 7 de ellos indican la fracción de otra fracción ($\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$) y llegan a la fracción $\frac{1}{10}$ a través de distintos procedimientos:

** 3 estudiantes escriben $\frac{1}{2}$: 5 = $\frac{1}{10}$

** 1 estudiante, registra en su hoja $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ y expresa que el "de" indica multiplicación, luego resuelve $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

** 2 estudiantes escriben el $\frac{1}{10}$, pero no queda claro cómo lo obtienen.

** 1 estudiante expresa gráficamente y numéricamente $\frac{1}{2}$: 5 = $\frac{1}{10}$

–solamente la indica.

Dos estudiantes de los 11, sólo indican la parte de otra parte. Uno de ellos en forma coloquial expresando "y la última mitad se la dividió en 5 partes" y el otro a través de un gráfico, pero no llegan a obtener el $\frac{1}{10}$ como resultado.

–no la identifica:

Dos estudiantes utilizan un gráfico para determinar el $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ pero "separado del entero original".

* Suma de fracciones

–suma correctamente teniendo en cuenta los datos del reparto.

De los 11 estudiantes, 6 tienen en cuenta los datos y suman correctamente.

** Los dos primeros casos, consideran los 4 enteros y los incluyen en la suma. De esta manera, plantean $4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$. Uno de ellos obtiene de la suma anterior la expresión $\frac{46}{10}$ y explicita que busca fracciones equivalentes con denominador 10 para poder sumar con el algoritmo convencional en forma escrita. El otro obtiene de la suma de fracciones anterior, la expresión $\frac{23}{5}$ pero no queda registro escrito cómo fue su procedimiento. Se realiza a posteriori una entrevista para indagar el uso de la calculadora o del cálculo mental y se verifica que utilizó calculadora.

** Los demás cuatro casos, sólo consideran las fracciones del reparto para la suma y omiten el 4. De esta manera plantean $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ y utilizan el algoritmo convencional de la suma de fracciones con distinto denominador. En uno de estos casos escribe $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$ pero después coloca que "no va" y realiza la suma correctamente.

–suma correctamente pero con datos del reparto erróneos.

En estos dos casos, el algoritmo convencional de la suma de fracciones con distinto denominador no presenta errores, pero los estudiantes no llegan al resultado final por tener datos iniciales erróneos.

En uno de ellos, se plantea la suma de $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$ y busca fracciones equivalentes para obtener el $\frac{7}{10}$.

En el otro caso, se plantean distintas sumas pero con errores en la interpretación. Este caso es el presentado en el ítem *la notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.*

Inciso a.II

A continuación exponemos las distintas *formas de argumentar* la equivalencia de las expresiones obtenidas en a.I:

* Usa una expresión coloquial solamente

–contesta que son equivalentes y argumenta:

Un alumno nos dice: "Considero que son equivalentes ya que todos los niños comieron la misma cantidad de chocolates en ambos casos".

–contesta que no son equivalentes y argumenta:

Aquí nos encontramos con 4 estudiantes de los 11 que argumentan de distintas formas la no equivalencia.

** Uno de ellos expresa "Vanesa reparte 4 $\frac{3}{5}$ y Joaquín 4 $\frac{2}{5}$." Esta alumna cuando simplifica obtiene $\frac{6}{10}=\frac{2}{5}$ y de allí que argumenta que no son equivalentes.

** Otro escribe que para ser equivalente “los numeradores de una fracción y los denominadores de la misma deberían ser múltiplo de otra fracción”. Cabe aclarar que en a.I no llega a expresiones adecuadas del reparto.

** El tercero expresa que “no representan la misma proporción” y toma para comparar las fracciones “por separado” que van surgiendo en el reparto. Por ejemplo: $\frac{3}{5}$ con $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$. Cabe aclarar que en el inciso a.I no obtiene una única expresión para Vanesa y Joaquín que le permita compararlas.

** El último estudiante argumenta que “Joaquín está repartiendo más chocolate del que tiene por eso no es equivalente al reparto de Vanesa”. Este argumento surge de sumar $\frac{1}{2}$+ $\frac{1}{5}$ y obtener $\frac{7}{10}$)

* Usa una expresión fraccionaria

–contesta que son equivalentes y argumenta:

Encontramos 5 estudiantes que justifican la equivalencia de ambas fracciones simplificando $\frac{6}{10}$ para obtener $\frac{3}{5}$ y aclaran que la parte entera es igual en ambos casos.

* Usa una expresión decimal y un gráfico

–contesta que son equivalentes y argumenta:

Un solo estudiante obtiene la expresión decimal para cada fracción obtenida en el ítem a) —utilizando la calculadora— y argumenta que son equivalentes las fracciones porque se obtiene la misma expresión decimal. Ej.: 6:10= 0,6 y 3:5= 0,6. También grafica $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ con rectángulos para mostrar la equivalencia.

Nociones que intervienen en los argumentos dados:

* Reparto equitativo

Esta noción se evidencia en uno de los argumentos del tipo coloquial, pues expresa que todos los niños reciben la misma cantidad de chocolate a pesar que la forma de repartirlo sea distinta, y que no sobra nada de chocolate en ambos casos.

* División

Esta noción se expresa cuando uno de los estudiantes trabaja con expresiones decimales para validar la equivalencia de las expresiones fraccionarias, y podríamos suponer que reconoce que un número racional puede expresarse como fracción o como expresión decimal indistintamente.

** Equivalencia de expresiones fraccionarias

–establece la equivalencia de las expresiones.

** Dos estudiantes de los 11, utilizan la simplificación para argumentar la equivalencia de las expresiones.

** Otros 3 del total, expresan la equivalencia de esta manera: "$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$"

–Argumenta la equivalencia de las expresiones fraccionarias pero con error:

Un estudiante de los 11, al simplificar $\frac{6}{10}$ obtiene $\frac{2}{5}$ lo cual al argumentar sobre la adecuación del reparto genera una incoherencia, pues obtiene los 23 chocolates en ambos casos, pero luego dice que no se le reparte a los dos chicos lo mismo, pues uno recibe 4 y $\frac{3}{5}$ y el otro 4 y $\frac{2}{5}$.

Inciso b.I

En el segundo reparto que se presenta en el Problema 1, encontramos las siguientes *formas de representación*:

* Usa una escritura fraccionaria

–las fracciones indican el resultado del reparto

9 de los 11 estudiantes llegan a expresar el resultado con el número mixto 2 $\frac{2}{3}$. De estas producciones, cabe destacar una de ellas que, si bien logra este número en sus procedimientos, cuando se solicita que escriban las expresiones que surgen del reparto anota: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, lo cual también sucedió en el inciso a.I.

–la notación fraccionaria expresa otros cocientes adecuados.

El mismo estudiante, que en el inciso a.I no llega a una expresión única sino que deja indicado los resultados parciales, aquí también lo hace y expresa: "Se parten a la mitad 6 chocolates y quedan en total 12 partes las cuales se les entrega cuatro partes a c/u. Los 2 chocolates restantes se los divide en 3 partes iguales a c/u, $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ y se les entregan 2 partes a c/u".

–la notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.

Encontramos sólo una producción que no expresa los cocientes de manera correcta, lo cual lo interpretaremos en la sección de análisis. Este estudiante expresa que a c/niño se le entregó $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

* Usa un gráfico

–dibuja todos los chocolates o parte de ellos y divide los chocolates según los datos.

5 estudiantes de los 11, dibujan los 8 chocolates del reparto y representan ese reparto de manera adecuada. Uno de ellos —cuya producción se presentó en "la notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados"— dibuja por un lado 6 chocolates y luego los 2 restantes, los demás grafican los 8 chocolates juntos.

OBSERVACIÓN: al igual que en el inciso a), en este ítem no se observan en las producciones una cuenta de dividir entre naturales, ni una expresión decimal, ni tampoco una división de fracciones.

Nociones que intervienen en los procedimientos realizados:
* Suma de fracciones
–suma correctamente teniendo en cuenta los datos del reparto.
2 de los 11 estudiantes, utilizan el algoritmo convencional de la suma de fracciones con distinto denominador para llegar a un resultado. Los dos trabajan con la expresión $2 + \frac{2}{3}$, pero uno de ellos utiliza el denominador común 3 y el otro el 6.
–suma correctamente pero con datos erróneos.
Encontramos sólo un caso en el cual el algoritmo convencional de la suma de fracciones con distinto denominador no presenta errores, pero el estudiante no llega al resultado final por tener datos iniciales erróneos. Plantea la siguiente suma: $\frac{4}{12} + \frac{2}{6} = \frac{4+4}{12} = \frac{8}{12}$
* Equivalencia de expresiones fraccionarias
–establece la equivalencia de distintas expresiones fraccionarias.
7 estudiantes del total, establecen distintas equivalencias en las expresiones encontradas. Por ejemplo: $\frac{4}{2} = 2$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$; 4 de $\frac{1}{2} = 4.\ \frac{1}{2} = 2$ y también $\frac{6}{3} = 2$

Inciso b.II

Al proponer otros repartos equivalentes al dado, en el Problema 1, encontramos las siguientes *formas de representación*:[50]
* Usa una escritura fraccionaria únicamente
2 de los 11 estudiantes utilizan sólo una escritura fraccionaria para proponer 2 repartos equivalentes:

[50] Como en este ítem se solicita que propongan otros repartos, la expresión coloquial se encuentra en todas las producciones y se combina con algún otro registro. Por lo anterior, lo tuvimos en cuenta en casi todas las subcategorías.

Uno de ellos escribe: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ y el otro $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$.

* Usa una expresión coloquial y escritura fraccionaria

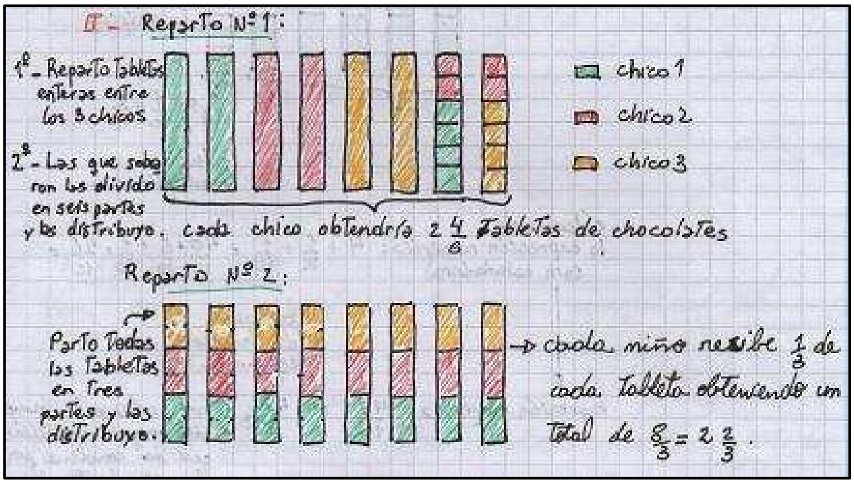
–expresa correctamente en lenguaje coloquial el reparto realizado y las fracciones indican la parte en el reparto.

3 estudiantes expresan un ejemplo de reparto de esta manera: "Divido todos los chocolates en tercios y doy $\frac{8}{3}$ a cada uno". Otro ejemplo utilizado por uno de ellos: "2 chocolates para cada chico y quedan 2 chocolates que divido en 3 partes, me quedan 6 partes y le doy 2 a cada chicos. Entonces $2.\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Le doy a c/u $2\,\frac{2}{3}$".

* Usa expresión coloquial, escritura fraccionaria y gráfico

–expresa correctamente en lenguaje coloquial el reparto realizado, dibuja todos los chocolates y los divide según la propuesta de reparto; y las fracciones indican la parte en el reparto.

4 de los 11 estudiantes, utilizan estos tres tipos de representación en la propuesta de nuevos repartos equivalentes al dado. Por ejemplo:



–expresa correctamente en lenguaje coloquial el reparto realizado, dibuja todos los chocolates y los divide según la propuesta de reparto pero la notación fraccionaria expresa otros cocientes no adecuados.

Un estudiante de los 11, expresa "Repartir los 8 chocolates en 3 partes iguales e ir repartiendo una parte a cada chico". Luego, grafica los 8 chocolates divididos c/u en 3 partes iguales y realiza distintas marcas para identificar cada parte con cada chico. Escribe lo siguiente: $\frac{8}{24}$ le corresponde a c/u $=\frac{4}{12} \longrightarrow \frac{2}{6} \longrightarrow \frac{1}{3}$

–expresa en lenguaje coloquial el reparto realizado pero con errores. Dibuja los 2 chocolates sobrantes y los divide según la propuesta de reparto, expresa las fracciones obtenidas.
Uno de los estudiantes propone entregar 2 chocolates a cada chico y los restantes dividirlos en cuartos. Luego expresa "repartís $\frac{2}{4}$ a c/chico y los $\frac{2}{4}$ que sobran lo dividís en tercios y entregás $\frac{2}{3}$ a cada uno".

Nociones que intervienen en los argumentos dados:
* Equivalencia de expresiones fraccionarias
–establece la equivalencia de distintas expresiones fraccionarias.
6 estudiantes del total, establecen distintas equivalencias en las expresiones encontradas y también con la expresión obtenida del primer reparto. Es decir, logran expresar $\frac{8}{3}$ como $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}= 2\,\frac{2}{3} = 2\,\frac{4}{6}= 8.\,\frac{1}{3}$
* Fracción de otra fracción
–la indica y resuelve correctamente.
Dos estudiantes indican la fracción de otra fracción y lo resuelven. En un caso propone como resultado del reparto: "$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$" y al sexto lo obtiene de dividir a $\frac{1}{2}$ en 3 partes iguales. En el otro caso, propone "$\frac{5}{2} + \frac{1}{6}$ c/u" y al sexto lo obtiene también de dividir a $\frac{1}{2}$ en tres partes iguales.
–no la identifica:
Un estudiante utiliza un gráfico para determinar $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{4}$ pero "separado del entero original".

Inciso c.I
Para explicar cuándo dos fracciones son equivalentes, utilizan las siguientes *formas de argumentación*:
* Usa el lenguaje coloquial únicamente
De los 11 estudiantes, 4 de ellos expresan la equivalencia de fracciones sólo verbalmente. Tres de ellos explicitan que son equivalentes cuando representan la misma cantidad, una de las producciones se refiere también a "cuando representan lo mismo" y la última "cuando ocupan el mismo lugar en la recta numérica".

* Usa el lenguaje coloquial y escritura fraccionaria

5 estudiantes del total, utilizan primeramente el lenguaje coloquial para expresar la equivalencia pero luego ejemplifican utilizando fracciones. Entre los argumentos encontramos diferencias. Por ejemplo "Dos expresiones fraccionarias son equivalentes cuando expresan el mismo número, pero de diversa manera. Ej: $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$". Este estudiante fue el único que utilizó los datos de uno de los problemas del reparto para ejemplificar. Tres estudiantes argumentan que son equivalentes cuando "al pasarlas a expresión decimal" o "al simplificarlas" se obtiene el mismo resultado. Y el último estudiante expresa que son equivalentes cuando se multiplica numerador y denominador por un mismo número y escribe un ejemplo.

* Usa el lenguaje coloquial, gráfico y escritura fraccionaria

Aquí encontramos dos casos que expresan de tres formas diferentes la equivalencia.

** El primero define la equivalencia como "representan la misma cantidad". Luego propone ejemplos de equivalentes a $\frac{1}{2}$ y por último grafica $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ en gráficos rectangulares distintos pero de igual tamaño para poder compararlos.

** El segundo, define la equivalencia como "corresponden al mismo valor" y presenta fracciones equivalentes al entero con distintos denominadores: Por ejemplo:$\frac{2}{2}, \frac{4}{4}, \frac{8}{8}$ y $\frac{16}{16}$. Paralelamente grafica 4 enteros —uno debajo del otro del mismo tamaño— y representa las fracciones anteriores.

Al leer los argumentos podríamos asociar las siguientes *nociones*:

* La equivalencia de fracciones asociada a la misma cantidad

–expresan claramente que representan la misma cantidad.

4 estudiantes expresan que dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad.

–expresan de otra manera esta noción.

2 estudiantes expresan que dos fracciones son equivalentes cuando representan el mismo valor.

* La equivalencia de fracciones asociada al mismo número racional

Si bien, en ninguno de los dos casos expuestos a continuación hablan de número racional, podríamos afirmar que la noción está implícita en sus expresiones.

–se obtiene la misma expresión decimal

Un estudiante aclara que “Dos expresiones fraccionarias son equivalentes cuando al pasarlas a expresión decimal se obtiene el mismo resultado”. Luego propone un ejemplo con las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ obteniendo la expresión decimal 0,5.

–expresan el mismo número pero de distinta manera.

Un estudiante plantea la equivalencia de fracciones a través de la idea que encabeza el subtítulo: “”Dos fracciones son equivalentes cuando expresan el mismo número de distinta manera”. Luego recupera un ejemplo de reparto trabajado en los ítems previos.

* La equivalencia de fracciones asociada a una técnica

–simplificación /amplificación

En dos casos plantean que dos fracciones son equivalentes cuando se aplica la técnica para buscar fracciones equivalentes. Uno de ellos expresa que “son equivalentes cuando se multiplica numerador y denominador por el mismo número” y el otro “cuando al simplificarse se obtiene la misma fracción irreducible” y proporciona un ejemplo.

* Las fracciones equivalentes asociadas a una representación

–las fracciones equivalentes están en un mismo punto de la recta numérica.

Uno de los estudiantes, cuando se le consulta sobre cuándo dos fracciones son equivalentes argumenta “Dos fracciones son equivalentes cuando ocupan el mismo lugar en una recta numérica”.

Inciso c.II

Formas de argumentación

* Usa una expresión coloquial

5 de los 11 estudiantes explican la relación entre la fracción y la división a través de una expresión coloquial. En cuatro producciones presentan ejemplos de problemas para argumentar la relación, al estilo de “se quiere repartir una torta entre 4 personas” y el restante realiza un comentario sobre esta relación que no está claro: “Se relacionan porque ambas expresiones dividen a un total”.

* Usa una expresión coloquial y una expresión fraccionaria

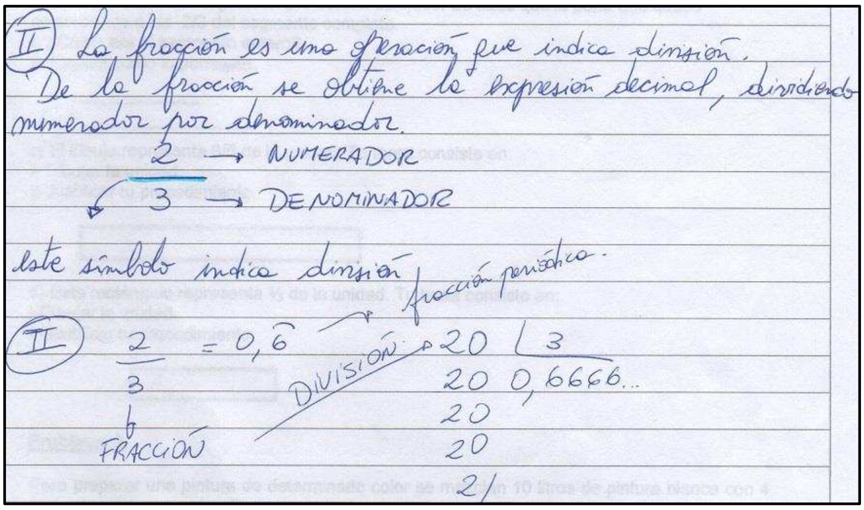
Un estudiante utiliza una expresión coloquial para explicar la relación pero acompaña esta explicación con un ejemplo numérico. Por ejemplo: “$\frac{1}{2}$ es la división de 1 entero sobre 2 partes y a su vez representa el resultado que es 0,5”.

* Usa una expresión fraccionaria y escribe la cuenta de dividir entre naturales

Dos estudiantes plantean que $\frac{1}{2} = 0{,}5$ y a un costado realiza el algoritmo convencional de la división entre los números 1 y 2, logrando como cociente la expresión decimal 0,5.

* Usa una expresión coloquial, una fraccionaria y escribe la cuenta de dividir entre naturales

3 estudiantes combinan una explicación coloquial junto a ejemplos numéricos. En dos de los argumentos se lee lo siguiente:



II La fracción es una operación que indica división.
De la fracción se obtiene la expresión decimal, dividiendo numerador por denominador.

$\frac{2}{3}$ → NUMERADOR / DENOMINADOR

este símbolo indica división

fracción periódica.

II $\frac{2}{3} = 0{,}\hat{6}$ DIVISIÓN → 20 ⌊3

20 0,6666...
20
20
2/

FRACCIÓN

El tercer argumento sólo lo relaciona con la búsqueda de equivalencias.

En cuanto a las *nociones* asociadas a la respuesta dada, encontramos:

* La fracción como el resultado de un reparto

–Un estudiante utiliza un ejemplo similar al problema presentado en los ítems anteriores, para explicar que el numerador representa la cantidad de chocolates a repartir y el denominador la cantidad de chicos.

–2 estudiantes de los 11, expresan de una manera u otra que la fracción se asocia con la división, y ésta última a la idea de reparto. Uno de ellos incluso incorpora la idea que el reparto es una de las primeras acciones que realizan los niños en 1° ciclo cuando trabajan con la división.

–Ninguna de las producciones indica que la fracción es el resultado de un reparto, donde el numerador es el dividendo, el denominador es el divisor de una división y la fracción el cociente de esa división.

PROBLEMA 2

Incisos a.I y a.II

En las producciones observamos la siguiente *forma de representación*:

* Usa un gráfico

–Reconstruye la unidad a partir de una fracción dada.

8 de los 11 estudiantes logran dibujar la unidad y/o señalarla. Tal como lo planteamos en el análisis a priori, 3 de estos 9, dibujaron el segmento aparte, con una longitud de 4 cm —debajo del segmento dado— y los otros 6 señalaron la unidad sobre el mismo segmento.

–No logra reconstruir la unidad a partir de una fracción dada.

3 de los 11 no identificaron la unidad de manera correcta. Dos de ellos señalan en su producción dos unidades en lugar de una, y el tercero señala a una fracción unitaria como la unidad.

Cabe aclarar que no encontramos otro tipo de representación, pues el ítem solicitaba dibujar la unidad, lo cual generó sólo este tipo de representación.

Las *nociones* que surgen del dibujo de la unidad y de la explicación del procedimiento:

* Medida de una cantidad continua

3 de los 11 estudiantes argumentan su procedimiento desde el significado de la fracción como medida. Pues, tal como lo planteamos en el marco teórico, expresan que $1\ \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ y que es igual a 7 veces $\frac{1}{4}$.

Otros 4 estudiantes completan los 2 enteros para señalar la unidad como la mitad de esa longitud.

De estos 7 estudiantes, 4 de ellos trabajan con la regla graduada y expresan en cm la longitud de cada cuarto, de la unidad o de las dos unidades.

* La proporcionalidad asociada al cálculo de una longitud

2 estudiantes expresan el $1\ \frac{3}{4}$ como 1,75; luego miden en centímetros la longitud del segmento dado y posteriormente plantean una regla de tres para calcular la medida de la unidad.

Ej.: 1,75 ………………7 cm

1 ………………x cm

Incisos b.I y b.II

En las producciones observamos la siguiente *forma de representación*:

* Usa un gráfico y lenguaje coloquial

–Los 11 estudiantes dibujan el segmento entero. Si bien en este ítem no se solicitaba que lo dibujen —como en el ítem anterior—, todos optaron por hacerlo en lugar de indicar su longitud en cm y además expresan en lenguaje coloquial como pensaron la reconstrucción.

Noción que surge del dibujo de la unidad y de la explicación del procedimiento.

* Medida de una cantidad continua

Al argumentar su procedimiento, 10 estudiantes expresan haber dividido el segmento dado en 2 partes iguales —utilizando regla graduada o en forma aproximada— para averiguar la medida de $\frac{1}{3}$. Luego, explican que agregan al segmento original la medida que se obtuvo de $\frac{1}{3}$ para completar el entero y así obtener $\frac{3}{3} = 1$.

Incisos c.I y c.II

En las producciones observamos la siguiente *forma de representación*:

* Usa un gráfico

–reconstruye la unidad a partir de una fracción mayor que uno, dada.

8 estudiantes de los 11 logran dibujar la unidad a partir del rectángulo que representa los $\frac{6}{5}$ de la unidad. Cabe aclarar nuevamente, que fue la única representación utilizada pues la consigna lo habilitó. De estos 8 estudiantes, 4 señalan la unidad sobre el mismo rectángulo destacándola del quinto sobrante y los otros 4 dibujan la unidad nuevamente debajo. Uno de los estudiantes realiza ambos procedimientos.

–no reconstruye la unidad a partir de una fracción mayor que uno, dada.

Los 3 estudiantes restantes, también utilizan una representación gráfica, pero presentan algunos errores:

** uno de ellos agrega al rectángulo original una parte más y señala que esa parte representa $\frac{1}{5}$ y que la unidad mide 7 cm.

** otro considera que la unidad es $\frac{6}{6}$ entonces agrega una parte más.

** el último representa $\frac{5}{5}$ con un rectángulo y luego el quinto sobrante en otro gráfico rectangular, pero debajo realiza un nuevo rectángulo y representa $\frac{1}{10}$. Acompaña estos gráficos con su explicación que será recuperada en el apartado sobre ideas junto a las otras producciones que presentan errores.

Noción que surge del dibujo de la unidad y de la explicación del procedimiento.

* Medida de una cantidad continua

Aquí también, 8 de los 11 estudiantes, —al igual que en el ítem sobre representación— logran justificar su procedimiento a partir del significado de la fracción como medida. Como bien lo expresamos en el capítulo 1, podemos pensar este significado de la siguiente manera: la fracción $\frac{1}{n}$ es una medida tal que n veces $\frac{1}{n}$ es igual a la unidad. Una cantidad que contiene *m* veces la medida $\frac{1}{n}$ se designa con el número $\frac{m}{n}$. A continuación, recuperamos algunos argumentos de los alumnos que permiten visualizar este significado:

"La unidad está compuesta por la suma de quintos ($\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}=1$)"

"Debía sacar $\frac{1}{5}$ ya que $\frac{6}{5}$ representa más que la unidad. Para dibujar la unidad siempre miro el denominador y luego el numerador, que para formar el entero deben corresponderse".

"Una vez que obtuve las 6 partes, sólo pinté 5 de ellas y éstas representan la unidad".

"$\frac{6}{5}$ es un entero más $\frac{1}{5}$, por lo tanto me paso con $\frac{1}{5}$ del entero. Le saco ese $\frac{1}{5}$ y me queda $\frac{5}{5}$=1".

Incisos d.I y d.II

Al analizar las respuestas encontramos la siguiente *forma de representación*:

* Usa un gráfico y lenguaje coloquial

–reconstruye la unidad a partir de una fracción menor que uno.

El total de los estudiantes logra dibujar la unidad a partir del rectángulo que representa los $\frac{3}{5}$ de la unidad. De estos 11 estudiantes, 4 reconstruyen la unidad sobre el mismo rectángulo agregando los $\frac{2}{5}$ faltantes y los otros 7 dibujan la unidad nuevamente debajo. Luego argumentan su dibujo de distintas maneras. Cabe aclarar aquí, que una alumna en su argumentación manifiesta confusión sobre la noción de unidad, que será analizada en la sección "Ideas".

Noción que surge del dibujo de la unidad y de la explicación del procedimiento.

* Medida de una cantidad continua

–expresa explícitamente el significado de la fracción como medida

2 estudiantes de los 11, logran justificar su procedimiento a partir del significado de la fracción como medida, en el cual queda claro que el entero está formado por 5 veces $\frac{1}{5}$.

A continuación, recuperamos los argumentos que permiten visualizar este significado:

"Como contaba con $\frac{3}{5}$, agregué $\frac{2}{5}$ para completar y así llegar a la unidad que es $\frac{5}{5}$".

"Agregué $\frac{2}{5}$ para llegar al entero ($\frac{5}{5}$)".

–expresa implícitamente el significado de la fracción como medida

8 de los 11 estudiantes, justifican su procedimiento utilizando la idea de "n veces $\frac{1}{n}$ es igual al entero" pero no queda explícita sino que la tienen presente a la hora de expresar cuántos quintos faltan para obtener el entero. Por ejemplo:

"Pensé primero que a ese rectángulo le faltaban $\frac{2}{5}$ para completar la unidad, para ello a los $\frac{3}{5}$ que se encontraban le agregué lo que faltaba".

PROBLEMA 3

Inciso a

En las producciones observamos las siguientes *formas de representación*:

* Usa expresión decimal y fracción

–6 de los 11 estudiantes utilizan la regla de tres para encontrar el valor de pintura blanca para 5 litros de pintura verde. De estas producciones podemos notar que:

** 4 de esos 6 estudiantes, realizan el planteo de la regla de tres y colocan el resultado x=12,5, observándose un cálculo escrito para la división de 50:4.

** los 2 estudiantes restantes, en el planteo que realizan de la regla de tres, dejan expresado el resultado como $\frac{50}{4}$ y luego convierten esa fracción a expresión decimal, logrando obtener el 12,5.

–2 de los 11 estudiantes del estudio, escriben las fracciones $\frac{10}{4}$ y $\frac{x}{5}$. Uno de ellos plantea una proporción —si bien no lo explicita— y luego "despeja x"; el otro iguala las fracciones en ambos casos con la expresión decimal 2,5. Luego también "despeja de x".

–2 estudiantes expresan que para “1 litro de pintura verde se necesitan 2,5 l de pintura blanca”. Uno de ellos aclara que realizó la división de 10:4 pero el otro no, —suponemos que en ambos casos el cálculo lo realizaron mentalmente pues no hay registro— y a partir de allí va sumando un litro de pintura verde y 2,5 litros de pintura blanca por litro de verde, en dos columnas diferenciadas.

* Usa una expresión algebraica

Un estudiante expresa que la cantidad de litros de pintura blanca para 5 litros de verde, es una incógnita y para encontrarla hay que “plantear la mezcla de colores como una ecuación que de un mismo resultado…”. Por lo anterior escribe:

10 l + 4 l = a l + 5 l

14 l – 5 l = a l

9 l = a l (siendo a la incógnita que hay que averiguar).

OBSERVACIÓN: ningún estudiante utilizó tablas de valores ni gráficos cartesianos para resolver la pregunta.

Nociones/Técnicas que intervienen en los procedimientos utilizados:

* La fracción como razón/Búsqueda de la constante de proporcionalidad

Un estudiante expresó lo siguiente:

$\frac{10}{4} = 2{,}5$

$\frac{x}{5} = 2{,}5$

A partir de la segunda igualdad despejó “x” y obtuvo x= 2,5. En este caso “parecería” ser que buscó un valor a “x” para que se mantenga la constante de proporcionalidad pero no queda explícito.

* Pasaje por la unidad

Uno de los 11 estudiantes, expresó que para 1 litro de pintura verde necesita $2\frac{1}{2}$ litro de blanca y luego realizó sumas sucesivas hasta llegar a 5 litros. Por ejemplo:

1 l verde … 2,5 l de blanca

2 l verde…..5 l blanca

3 l verde ….7, 5 l blanca

4 l verde …10 l blanca

5 l verde….12, 5 l blanca

* Utiliza la constante de proporcionalidad

Un estudiante expresó que divide 10 litros de blanca por 4 litros de verde y entonces obtiene que para 1 litro de verde necesita 2,5 litros de pintura blanca. Luego aclaró que para 5 litros de verde necesita 12, 5 litros de blanca. Pero no queda escrito, de manera explícita, que halló la constante de proporcionalidad.

* Proporción/propiedad fundamental

Un estudiante plantea una igualdad entre 2 razones —que no lo expresa directamente— sino que escribe en su hoja:

$\frac{10}{4} = \frac{x}{5}$

Luego despeja "x" y obtiene 12,5=x

* Usa la regla de tres

7 de los 11 estudiantes utilizan la regla de tres para encontrar el resultado 12,5 litros de pintura blanca. En estas soluciones notamos una aplicación de la regla, por lo cual no podemos afirmar si los estudiantes identifican este problema como de proporcionalidad o si comprenden la relación que existe entre esta regla y la proporcionalidad.

Inciso b

En las producciones observamos las siguientes *formas de representación*:

* Usa una expresión fraccionaria y decimal

4 de los 11 estudiantes que realizaron este ítem utilizan una expresión fraccionaria y la expresión decimal correspondiente para argumentar. Entre ellos encontramos algunas diferencias que se detallan a continuación:

–Dos de ellos expresan las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{8}$. En un caso, trunca las expresiones decimales a los centésimos y obtiene 0,28 para la primera fracción y 0,37 para la segunda. Luego argumenta que va a quedar más oscura porque a la mezcla original no le corresponde un litro de blanco a un litro de verde. La otra alumna, redondea y obtiene 0,29 y 0,38 respectivamente y argumenta que al no ser equivalentes, las mezclas no van a tener la misma tonalidad.

–El tercer estudiante establece otras razones y expresa lo siguiente: $\frac{7}{2} = 3{,}5$ y $\frac{8}{3} = 2{,}6$ entonces la pintura es más oscura porque 2,6 es menor que 3,5.

–El último estudiante —como bien lo expresamos en el apartado sobre *nociones*— establece otras relaciones con las partes y el todo y plantea las siguientes razones: $\frac{2}{9}$ y $\frac{7}{9}$ para la primera muestra, $\frac{3}{11}$ y $\frac{8}{11}$ con sus respectivas expresiones decimales para la segunda muestra. Luego argumenta que va a obtener un color más oscuro porque la proporción utilizada de verde es mayor en la segunda mezcla: $\frac{2}{9} < \frac{3}{11}$.

* Usa el lenguaje coloquial

7 de los 11 estudiantes utilizan el lenguaje coloquial para argumentar sobre la tonalidad de cada mezcla, pero encontramos diferencias:

–4 estudiantes argumentan que la tonalidad es más oscura porque: “Para 1 litro de pintura verde se necesitan 3,5 l de pintura blanca, para 2 l de verde ocupo 7 litros de pintura blanca entonces para 3 litros se necesitan 10,5 litros de pintura blanca. Entonces si se mezclan 3 l de verde con 8 l de blanca quedará un color más oscuro”.

–2 estudiantes expresan que la pintura queda más clara porque:

** “Si pienso en el ejemplo a) si agregué un litro más de verde debía poner un litro menos de blanco para que me salga el mismo color”. (es el mismo estudiante que interpreta la tonalidad como la misma cantidad de pintura, 11 litros)

** “Hay mayor cantidad de pintura blanca”

–Y el último estudiante dice que quedará igual porque “se le agregó la misma cantidad de pintura de cada color, sólo que ahora en lugar de 9 litros va tener 11 litros”.

Nociones/Métodos que intervienen en los argumentos dados:

* Comparación de razones

4 de los 11 estudiantes establecen distintas razones con los datos del problema y las comparan buscando la expresión decimal correspondiente a cada razón.

Una de las estudiantes establece 2 comparaciones diferentes. Primero entre las partes de pintura verde y blanca con el todo de la primera mezcla, y luego entre las partes de pintura verde y blanca con el todo de la segunda mezcla y expresa lo siguiente:

“2 litros de pintura verde + 7 litros de pintura blanca = 9 litros

$$\frac{2}{9} \qquad + \qquad \frac{7}{9} \qquad = \qquad \frac{9}{9}$$

$$0,\hat{2} \qquad\qquad 0,\hat{7}$$

Si agrego 1 litro de cada color:

3 litros de pintura verde + 8 litros de pintura blanca = 11 litros

$$\frac{3}{11} \qquad + \qquad \frac{8}{11} \qquad = \qquad \frac{11}{11}$$

$$0,\widehat{27} \qquad\qquad 0,\widehat{72}$$

Voy a obtener un color más oscuro que el original porque la proporción utilizada de verde será mayor que la del primer caso, $\frac{2}{9} \angle \frac{3}{11}$".

Los otros dos estudiantes, establecen las razones $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{8}$ primeramente y luego buscan la expresión decimal correspondiente a cada una. Uno de ellos argumenta que al no ser equivalentes las mezclas, no va a dar la misma tonalidad —suponemos que la "equivalencia de las mezclas" lo afirma desde el análisis de las expresiones decimales. Pero luego, ambos se refieren al ítem a) y aclaran que va a quedar más oscuro porque a 1 litro de verde no le corresponde 1 litro de blanca.

El tercer estudiante expresa que:

$\frac{7}{2}$= 3,5

$\frac{8}{3}$= 2,6

Luego argumenta que la segunda mezcla es más oscura porque 2,6 es menor a 3,5.

* Pasaje por la unidad

4 de los 11 estudiantes, para comparar las dos mezclas buscan la cantidad de pintura blanca que se necesita para 1 litro de pintura verde según los datos de la primera mezcla, es decir para 2 l de verde con 7 l de blanca y encuentran que para 1 l de verde se necesitan 3, 5 l de blanca. Luego argumentan de distintas maneras:

"La segunda mezcla va a quedar más oscura, ya que si quiero obtener la misma mezcla en vez de 1 litro de pintura blanca debería agregar 3,5 litros".

"...Va a quedar más oscura pues a la mezcla le faltaron 2,5 litros de pintura blanca para igualar el color…".

"Para 1 litro se necesitan 3, 5 litros de blanca, para 2 litros de verde 7 litros de blanca y para 3 litros de verde 10,5 litros de blanca. Entonces, si se mezcla 3 litros de verde y 8 de blanco quedará más oscuro porque para los 3 litros se necesitan 10, 5 litros de blanca y sólo hay 8l".

Inciso c

En las producciones observamos las siguientes *formas de representación*:

* Usa sólo una expresión coloquial

8 de los 11 estudiantes argumentan desde la expresión coloquial únicamente, pero encontramos dos grupos diferenciados:

–Afirma que existe un n° y argumenta de manera correcta.

4 estudiantes argumentan sólo desde el lenguaje coloquial su postura ante la expresión de Juan. Por ejemplo:

"Estoy de acuerdo porque yo resolví la consigna multiplicando cada litro de pintura verde por 2,5 litros de pintura blanca".

"Para calcular la cantidad de pintura blanca se multiplica la cantidad de pintura verde por 2,5 litro".

"Para resolver el ítem a) utilicé el procedimiento que plantea el ítem c)".

–Afirma que no existe el n° y argumenta

4 estudiantes utilizan el lenguaje coloquial solamente y argumentan incorrectamente. Por ejemplo:

"No estoy de acuerdo porque hay que tener en cuenta las dos cantidades, no solamente la pintura verde".

"No estoy de acuerdo con este razonamiento porque, de por sí, si tenemos que mantener la igualdad de color (por lo tanto igual valor de litros resultantes) si agregamos más de uno del otro echamos meno".

"No estoy de acuerdo porque si realizo otro procedimiento, es decir regla de tres, donde puede multiplicar 5 l pintura verde por 10 l pintura blanca = 50l, dividido 4l de pintura verde me da 12, 5 litros de pintura blanca. Pero sí o sí debo primero multiplicar y luego dividir, sino no obtengo esa cantidad de pintura blanca".

"No estoy de acuerdo. Lo que se debe hacer es dividir la cantidad de pintura blanca original (10l) por la verde (4l) te da un total de 2,5 l eso es lo que se debe usar de pintura blanca por cada litro de pintura verde".

* Usa una tabla de valores

Un estudiante responde que está de acuerdo porque es un problema de proporcionalidad. Además realiza una tabla de valores con los datos propuestos en los ítems anteriores e incluso incorpora otro dato más para ejemplificar lo dicho por Juan en la consigna y asegurar que está de acuerdo. A un costado de la tabla, agrega el valor de 2,5 pero no especifica que es la constante de proporcionalidad. Además establece una relación entre la tabla de valores y la regla de tres diciendo que es lo mismo.

* Usa una expresión simbólica y coloquial.

–Usa una expresión simbólica para argumentar correctamente.

Un estudiante, además del lenguaje coloquial, utiliza la fórmula y= k. x, y aclara el significado de cada letra de la fórmula. Expresa que la K es la constante de proporcionalidad la cual permite averiguar cuántos litros de pintura blanca se utilizan por cada litro de pintura verde.

–Usa una expresión simbólica pero sus argumentos son incorrectos.

Un estudiante parecería ser —pues no lo aclara— que utiliza la fórmula para encontrar la constante de proporcionalidad pues escribe: k= $\frac{10}{4}$= 2,5 pero también expresa de manera coloquial sus argumentos, lo cual nos muestra dónde está posicionado con sus razonamientos: "No estoy de acuerdo porque si tenemos que mantener una igualdad de color (por lo tanto igual valor de litros resultantes) si agregamos más de uno del otro echamos menos…" y continúa realizando otros cálculos en los que obtiene 12,5 litros y no 11 litros, (este alumno en el ítem a) sumo los valores de pintura y obtuvo 11 litros).

Nociones que intervienen en los argumentos dados:

* Constante de proporcionalidad

De los 11 estudiantes, 7 de ellos contestan que están de acuerdo con lo expresado con Juan y argumentan de distintas maneras:

2 estudiantes de estos 7, expresan explícitamente que para obtener ese número hay que dividir $\frac{10}{4.}$ pero encontramos diferencias entre ambos. Uno de ellos, primero escribe: "$\frac{10\ (pintura\ blanca)}{4\ (pintura\ verde)}$= $\frac{5}{2}$ = 2,5 l de pintura blanca por cada litro de pintura verde. Estoy de acuerdo; este 2,5 es la constante de proporcionalidad que me permite averiguar cuántos litros de pintura blanca voy a utilizar por cada litro de pintura verde. Es decir, si tengo x cantidad de l de pintura verde, para obtener y que serían los litros de pintura blanca multiplico x. 2,5 = y". De este modo, no quedan dudas que entiende al 2,5 l como la constante de proporcionalidad directa. La otra, sólo plantea la necesidad de la división entre 10 litros de pintura blanca y 4 litros de verde, expresó también que el 2,5 l es la cantidad de pintura blanca que se necesita para 1 litro de pintura verde, pero no menciona a la constante.

2 de las 7 estudiantes, argumentan que en el ítem a) utilizan lo que plantea Juan, es decir multiplican por un número, en este caso 2,5.

El quinto estudiante expresa que se trata de un problema de proporcionalidad, elabora una tabla con los datos de pintura y agrega otros valores para ejemplificar. Luego, al costado derecho escribe el 2,5 y aclara que multiplicar por 2,5 es lo mismo que hacer la regla de tres.

El sexto expresa que está de acuerdo con Juan y que para calcular la cantidad de pintura blanca hay que multiplicar por 2,5 la cantidad de pintura verde, pero nada dice cómo obtuvo ese 2,5, ni tampoco lo que significa.

El último estudiante afirma que “No está de acuerdo con Juan y lo que hay que hacer es dividir la cantidad de pintura blanca (10 l) por la verde (4l), te da un total de 2,5 l eso es lo que se debe usar de pintura blanca por cada litro de pintura verde. Por ende, si se agrega 1 l más a la cantidad original se le debe agregar 2,5 l de pintura blanca más para formar el mismo color”. Si bien no hace explícita la noción de constante de proporcionalidad en su registro, podríamos considerarla presente en su procedimiento.

Segunda Parte

Ideas asociadas a los procedimientos utilizados

A partir del conjunto de análisis realizado a las producciones de 1° año y de 4° año, surgen algunas ideas asociadas, que podríamos considerarlas errores u ideas que se constituyen en obstáculos para avanzar en la conceptualización de la noción de fracción y de sus significados. A continuación presentamos en detalle estas ideas a modo de anexo analítico, al igual que lo hicimos con los procedimientos.

Ideas de 1° año

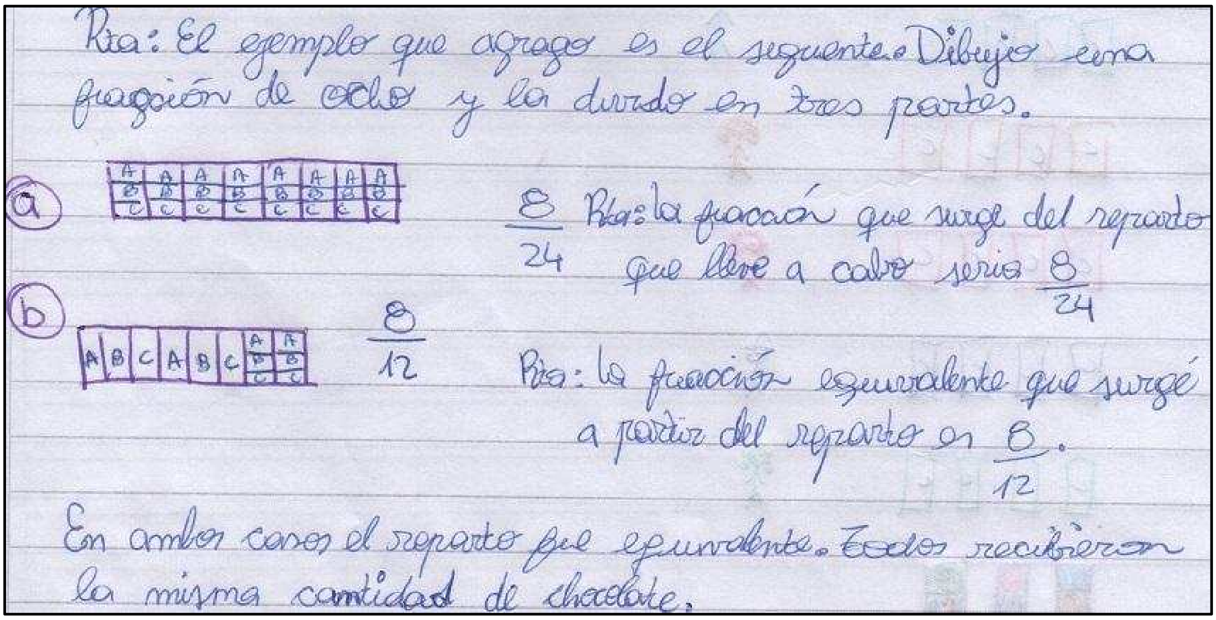
PROBLEMA 1

En el ***Ítem a.I*** encontramos:
* La fracción puede ser sólo menor que 1 o 1, pero no mayor que 1 /Confusión con el entero.
A partir de la idea anterior, en el contexto de reparto se modifica lo que se concibe como el entero, alterna entre 1 chocolate, 23 chocolates y los 3 chocolates sobrantes.
De las 21 producciones obtenidas, encontramos 4 estudiantes que alternan lo que conciben como entero o unidad. A su vez, entre los cuatro estudiantes hay dos grupos diferenciados:
–considera 23 chocolates como entero.
Al considerar que el entero está formado por los 23 chocolates, expresan en un primer momento que le entregan $\frac{4}{23}$ a c/u.
–considera 3 chocolates como entero.
Al considerar que el entero está formado por 3 chocolates y 15 partes en total, llegan al resultado 4 y $\frac{3}{15}$ o su equivalente 4 y $\frac{1}{5}$ para el reparto de Vanesa.
* Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto
Notamos en una producción, que el estudiante logra calcular $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ gráficamente y obtener $\frac{1}{10}$. Pero al realizar el cálculo algorítmico comete errores y no compara ese resultado numérico con lo obtenido en el gráfico.

En el ***ítem b.II*** encontramos:

* La fracción puede ser menor que 1 o 1, pero no mayor que 1 /Confusión con el entero.

2 estudiantes de los 21, consideran que el entero está formado por 8 chocolates en un caso y 5 chocolates en el otro. A continuación presentamos una de las producciones:


Rta: El ejemplo que agrego es el siguiente. Dibujo una fracción de ocho y la divido en tres partes.

a

8/24 Rta: la fracción que surge del reparto que lleve a cabo sería 8/24

b

8/12

Rta: la fracción equivalente que surge a partir del reparto es 8/12.

En ambos casos el reparto fue equivalente. Todos recibieron la misma cantidad de chocolate.

J

En el ***ítem c.I*** encontramos:

* Lo algorítmico prevalece sobre lo intuitivo y el concepto.

Podríamos incluir aquí, a los 8 estudiantes de los 21, que definen la equivalencia de fracciones asociada al cumplimiento de una técnica que permite obtener fracciones equivalentes. Por ejemplo expresan: “son equivalentes cuando se multiplica o divide numerador y denominador por el mismo número”.

En el ***ítem c.II*** encontramos:

* La fracción sólo es menor que 1 o 1, pero no mayor que 1 /Confusión con el entero.

En las 6 producciones que incorporan un gráfico para explicar la relación entre la fracción y la división, se utiliza un solo rectángulo o un solo círculo para representar al entero. No encontramos en estas producciones un entero formado por más de una figura u objeto. Por otro lado, de las 9 explicaciones que utilizan una expresión fraccionaria encontramos 5 de ellas que utilizan fracciones menores que uno. Cabe aclarar aquí, que las otras 4 propuestas, utilizan fracciones iguales a un número natural, como bien se señaló en el ítem sobre representaciones.

* La fracción se relaciona con una división pero el cociente es un cociente calculado.

–De las 17 producciones que responden al ítem c.II, 7 de ellas proponen como ejemplo una fracción pero no lo dejan indicado sino que buscan el resultado, que en todos los casos es igual a un número natural, lo que comúnmente se llama fracción aparente. Por ejemplo: $\frac{10}{2}$, $\frac{6}{3}$ o $\frac{4}{2}$.

–4 estudiantes relacionan a la división con la fracción expresando que se divide el numerador por el denominador. Por ejemplo: ante la presencia de la fracción $\frac{4}{2}$ una alumna expresa “cuatro dividido dos es dos”.

–2 estudiantes asocian la fracción con la operación de división, pues permite obtener la expresión decimal correspondiente. “La fracción es una división que te permite obtener el número decimal”.

* Otros argumentos

–Por último, encontramos cuatro argumentos que no logramos encuadrarlos en los anteriores. Ellos son:

“La fracción es una representación de la división”

“Se relacionan ya que la fracción al simplificarla te queda el mismo resultado como si lo habrías dividido”

“Se relaciona porque siempre es dividir en partes, iguales o diferentes”

“Se relacionan porque para que la repartición sea en partes iguales es necesario que se divida en las personas que sean”.

–4 estudiantes expresan que la división sirve para dividir al entero o a un objeto (torta, pizza) en partes iguales.

PROBLEMA 2

En el ***ítem a*** encontramos:

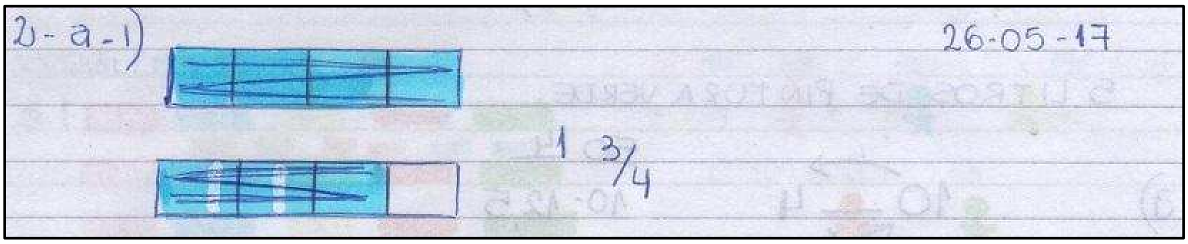
* Confusión con la unidad

–De los 21 estudiantes, 15 no lograron reconstruir por los siguientes motivos:

** 4 estudiantes toman el segmento dado en la consigna como una recta numérica y ubican en la misma algunas fracciones, al igual que lo hacen en otros tipos de tareas habituales en el ámbito escolar. Por ejemplo:

** 4 estudiantes determinan el $\frac{1}{4}$ de manera arbitraria sobre el segmento dado para luego señalar la unidad y el $1\ \frac{3}{4}$. De esta manera, parecería ser que no tienen en cuenta el dato que le proporciona el problema para determinar el entero. En uno de los casos, extiende el segmento para poder representar $1\ \frac{3}{4}$ y en el otro caso le alcanza y sobra una parte.

** 3 estudiantes representan $1\ \frac{3}{4}$ de manera arbitraria, definiendo ellas el tamaño de la unidad y además utilizan rectángulos.



** 2 estudiantes representan $\frac{3}{4}$ de manera arbitraria también.

** Un estudiante realiza un gráfico rectangular confuso.

** Otros 2 estudiantes determinan que el segmento dado es 2 enteros, y a partir de allí representan el $1\ \frac{3}{4}$ de manera aproximada.

** De igual manera, otras 3 estudiantes consideran al segmento dado como 1 entero y sólo representan la fracción $\frac{3}{4}$.

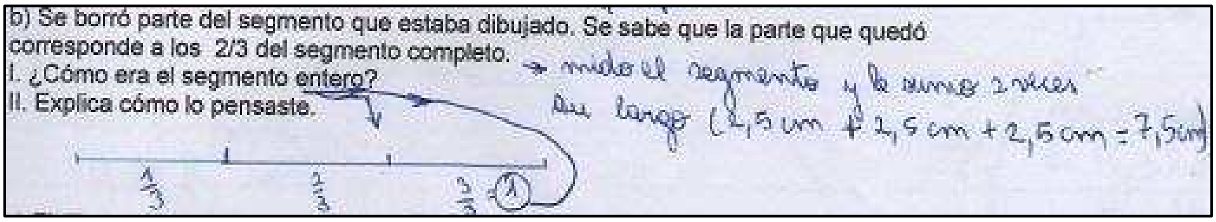
En el ***ítem b*** encontramos:

* Confusión con la unidad

Encontramos 7 estudiantes que no consideran el segmento dado como $\frac{2}{3}$y a partir de allí se dan tres situaciones:

–considera el segmento como $\frac{1}{3}$

2 estudiantes consideran que el segmento dado como dato es igual a la fracción $\frac{1}{3}$ y a partir de allí intentan reconstruir el entero. A continuación presentamos una producción:

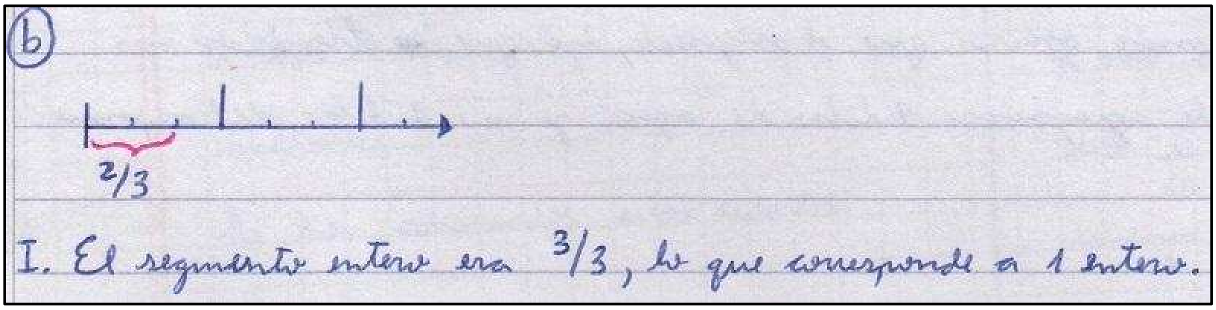


–considera el segmento como $\frac{3}{3}$

3 estudiantes dividen el segmento en 3 partes iguales, lo cual nos permite pensar que están interpretando el problema como que hay que representar la fracción $\frac{2}{3}$, dada la unidad.

–ignora el segmento dado

2 estudiantes de estos 7, no tienen en cuenta el dato aportado por la consigna. Uno de ellos representa $\frac{2}{3}$ y un posible entero con medidas arbitrarias, lo cual se presenta a continuación. El otro representa el $\frac{2}{3}$ con errores en la representación, al no considerar los enteros divididos en tercios entre otros aspectos.



En el ***ítem c*** encontramos:

* La fracción puede ser menor que 1 o 1, pero no mayor que 1. Entonces, en el contexto de medida se modifica lo que se concibe como “el entero”.

–considera al rectángulo dado como la unidad, igual a $\frac{5}{5}$.

3 estudiantes de los 21, consideran que el rectángulo dado en la consigna es el entero o la unidad. Luego, agregan otro rectángulo del mismo tamaño, dividido en 5 partes iguales y pintan $\frac{1}{5}$ más en ese segundo rectángulo. En dos casos aclaran que dividieron la primera figura en 5 partes y como les faltaba $\frac{1}{5}$ dibujaron otro rectángulo.

–considera el rectángulo dado como la unidad, igual a $\frac{6}{6}$.

4 estudiantes de los 21 del total, interpretan la fracción $\frac{6}{5}$ como si fuera $\frac{5}{6}$. Lo anterior lo vemos plasmado en las siguientes explicaciones:
“Divido el entero en 6 partes y sólo pinto 5”; “De una unidad de seis partes pinto cinco” y “Represento un entero, dividido en seis partes y de esas partes sólo utilizo cinco”.
–no considera el rectángulo dado con sus medidas.
5 estudiantes del total, no tienen en cuenta las medidas del rectángulo original y reconstruyen la unidad utilizando rectángulos con medidas asignadas por ellos.

En el ***ítem d*** encontramos:
* Confusión con la unidad
Encontramos 11 estudiantes del total, que no consideran el rectángulo dado como $\frac{3}{5}$ y a partir de allí se dan dos situaciones:
–considera el rectángulo dado como el entero formado por $\frac{5}{5}$
10 estudiantes de los 11, consideran el rectángulo presentado en la consigna como si fuera un entero y a partir de allí lo dividen en 5 partes iguales y pintan 3 de ellas. Coinciden también en sus explicaciones, por ejemplo: “Dividí la figura en 5 partes y pinté 3, tal como lo indica la fracción”.
–considera el rectángulo dado como el entero formado por $\frac{3}{3}$
Un estudiante expresa “De una unidad de 3 partes pinto 5 partes” y acompaña su explicación con 2 enteros divididos en 3 partes c/u, es decir grafica $\frac{5}{3}$.

PROBLEMA 3

En el ***ítem a*** encontramos:
* Predominio del campo aditivo
Si bien no es conveniente asegurar que algunas de las respuestas dadas en la representación de tipo coloquial se apoyan en procedimientos del campo aditivo, lo ponemos en cuestión y lo analizaremos a la luz de algunas investigaciones tomadas como antecedentes. Por ejemplo: 4 estudiantes responden que se necesitan 11 litros, lo cual estaría fundamentado desde la idea que expresa uno de ellos: “Si agrego un litro de pintura verde más tengo que agregar 1 litro de pintura blanca”. Otro estudiante responde

que se necesitan 9 litros de blanca y podríamos hipotetizar que el estudiante desea mantener constante la cantidad de litros de pintura de mezcla.

En el ***ítem b*** encontramos:

* Predominio del campo aditivo

3 estudiantes de los 21, utilizan estrategias aditivas para justificar. Recuperamos los argumentos para notar la presencia del campo aditivo: “Queda igual porque se agrega la misma cantidad de pintura” y “Queda más claro porque predomina el blanco”.

En el ***ítem c*** encontramos:

* Predominio de lo algorítmico por sobre lo intuitivo y el concepto

3 estudiantes utilizan como argumentos la regla de tres pero en sus producciones no se registra alguna de las propiedades de la proporcionalidad directa y/o las relaciones que se establecen entre los datos del planteo de la regla y la proporción. A la afirmación anterior la podemos ejemplificar con el siguiente argumento: “No estoy de acuerdo porque para calcular la cantidad de pintura blanca se debe multiplicar la pintura verde con la blanca y el resultado dividirlo por la cantidad de pintura verde”.

* La constante de proporción no puede ser una fracción

En estas respuestas notamos que no piensan en la posibilidad de que la constante de proporcionalidad sea una fracción y que permita —al multiplicarla por el dato— obtener el resultado buscado. 4 estudiantes argumentan que no es posible encontrar el número solicitado pues no existe un n° natural que multiplicado por 5 de como resultado 12,5 litros u 11 litros en otro caso. Tomemos dos ejemplos:

“No estoy de acuerdo porque por más que lo multiplique por cualquier número entero, no me daría la cantidad que me dice el ítem a)”.

“No, porque el resultado es un número fraccionario y sólo me da un número fraccionario si al de pintura verde lo multiplico por otro fraccionario”.

&&&&&&&&&&&&&&&&

Ideas de 4° año

PROBLEMA 1

En el ***ítem a.I*** encontramos:

* La fracción sólo puede ser 1 o menor que 1, no mayor que 1 /Confusión con el entero.

Encontramos dos casos en los que aparece esta idea:

–En el primero, un estudiante expresa la fracción $\frac{4}{20}$ que nos genera dudas al querer interpretarla.

–En el segundo caso, dos estudiantes al querer calcular $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ realizan un nuevo gráfico rectangular para graficar la situación y "separan el $\frac{1}{2}$ del entero" como si ese medio sería un nuevo entero. Lo cual nos hace suponer que generó la expresión final $4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ a partir de ese nuevo gráfico.

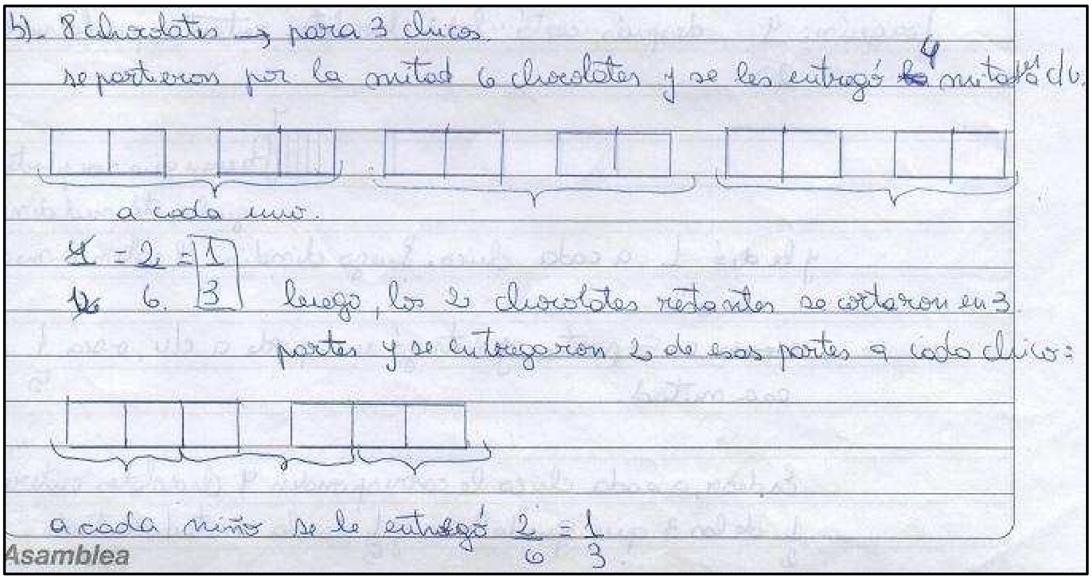
* Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo.

En relación con esta idea, encontramos en una de las producciones: sumas, restas, multiplicaciones y divisiones a lo largo del procedimiento utilizado para el reparto sin sentido en ese contexto. Lo cual nos hace suponer que prima la idea en este estudiante que ante un problema con fracciones hay que realizar operaciones con las mismas para encontrar las respuestas.

En el ***ítem b.I*** encontramos:

* La fracción puede ser sólo menor que 1 o 1, pero no mayor que 1/Confusión con el entero.

A continuación presentamos la única producción que ejemplifica esta idea:



En el ***ítem c.I*** encontramos:

* Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto.

2 estudiantes utilizan como argumento de este ítem, técnicas como la amplificación y la simplificación. Por ejemplo, uno de ellos expresa: “Dos fracciones son equivalentes cuando al simplificarlas, la fracción resultante es igual”.

En el ***ítem c.II*** encontramos:

* La fracción como cociente calculado.

4 de los 11 estudiantes, expresan que la fracción es una división y que la raya de la fracción indica división y te permite obtener el decimal. Luego, aclaran que si divide el numerador por el denominador se obtiene la expresión decimal correspondiente. En uno de los casos ejemplifica que sirve para verificar si las fracciones son equivalentes.

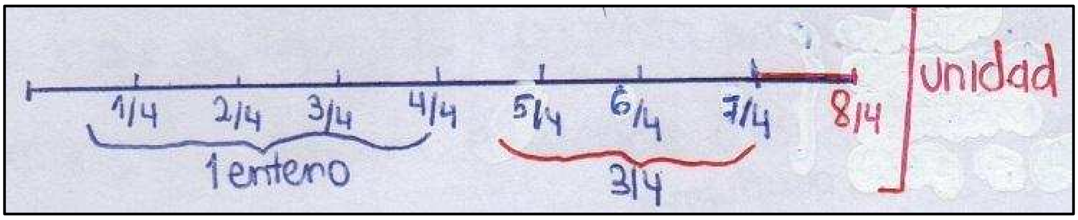
PROBLEMA 2

En cuanto a las *ideas* asociadas al dibujo y a la explicación, en el ***ítem a*** encontramos:

* La fracción puede ser menor que 1 o 1, pero no mayor que 1. El concepto de unidad no está claro.

De las 11 producciones encontramos en 3 de ellas que la idea de unidad no está clara.

–2 estudiantes definen y señalan que la unidad es igual a 2. Uno de ellos explica: “La unidad es $\frac{8}{4}$. Lo pensé así porque el segmento representa $1\ \frac{3}{4}$ y para llegar a la unidad le falta $\frac{1}{4}$. La otra realiza el siguiente gráfico:



–El último estudiante señala que la unidad es igual a $\frac{1}{8}$ y que el entero es igual a $\frac{8}{8}$.

En el ***ítem b*** encontramos:

* Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto.

Una estudiante continúa con el mismo procedimiento que en el ítem a), usa la regla de tres para obtener la longitud del segmento entero. Pero al trabajar con decimales periódicos —a diferencia del ítem a— comete error y no lo reconoce. Luego responde que el segmento entero es de 3,4 cm, lo cual es erróneo. Observamos en su producción lo siguiente:

$\frac{2}{3}$	2,5 cm	$0,\underline{3}\ .\ 2,5 = 0,8\underline{3}$
$\frac{1}{3}$	x = 1,4 cm	$0,8\underline{3} : 0,\underline{6} = 1,4$ cm

El otro estudiante, si bien logra dibujar el segmento entero y argumentar que agrega $\frac{1}{3}$ a la longitud dada, luego continúa su explicación de esta manera:

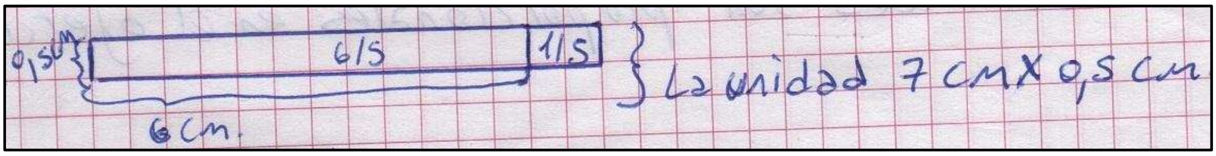
“El segmento entero puede ser $\frac{3}{3}$, que en este caso coincide con que $\frac{2}{3}$, sea $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{3}$. Pero puede suceder que el entero sea $\frac{9}{9}$, por lo tanto ese $\frac{2}{3}$ lo debo calcular $\frac{2}{3}\ .\ \frac{9}{9} = \frac{18}{27}$”. También podríamos analizar aquí, la presencia nuevamente —al igual que en el problema 1— de un contrato didáctico en el que “algún cálculo hay que hacer si aparecen fracciones”, en este caso, una fuerte presencia del algoritmo para encontrar la parte de otra parte.

En el ***ítem c*** encontramos:

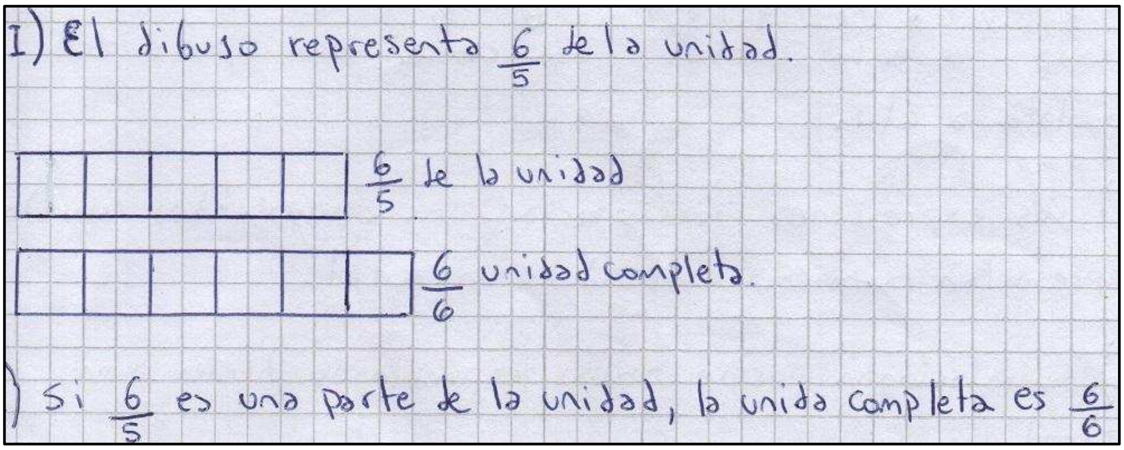
* La fracción puede ser menor que 1 o 1, pero no mayor que 1/Confusión con la unidad.

A partir de esta idea, en el contexto de la medida se modifica lo que se concibe como el entero. En estas producciones parecería ser que la interpretación que buscamos en los estudiantes sobre 5 veces $\frac{1}{5}$ representa la unidad, no está claro.

Ej.1:



Ej. 2:



El tercer caso es de un estudiante que conjuga en la producción una idea de unidad incorrecta —la cual vuelve a considerar una fracción unitaria como unidad— y el cálculo de una parte de otra parte, ya utilizado en procedimientos anteriores.

En el ítem d) encontramos:

* Confusión con la unidad.

Un estudiante del total, en sus argumentos justifica que el entero es $\frac{5}{5}$ y la unidad $\frac{1}{5}$. Cabe aclarar que esta idea la mantiene a lo largo de todos los ítems del problema 2.

PROBLEMA 3

En el ***ítem a*** encontramos:

* Predominio del campo aditivo

Un estudiante plantea que 10 l + 4 l = x l + 5 l

14 l - 5 l = x l

9 l = x l

De esta manera, entiende que la solución se encuentra al mantener constante la cantidad (en litros) de pintura y no la tonalidad. Paralelamente explica: “al plantear la mezcla de colores como una ecuación que da un mismo resultado, permite utilizar el método de igualación para encontrar el valor de la incógnita”.

En el ***ítem b*** encontramos:

* Predominio del campo aditivo

–3 de los 11 estudiantes utilizan estrategias aditivas para justificar:

** El mismo estudiante que en el ítem a) mantiene constante la cantidad de litros, lo hace en este ítem también y así lo explica: “Pensando en el ítem a), si agregué un litro más de verde debería poner un litro menos de blanco para que me salga el mismo color. Entonces me va a quedar un color más claro”. En este sentido, plantea que deberían quedarle 9 litros en total en ambas mezclas.

** El otro estudiante argumenta que “Desde su punto de vista, no cambia el color original porque yo estoy agregando la misma cantidad de pintura, es decir la misma proporción”.

** El último estudiante justifica que: “La pintura queda más clara ya que hay mayor cantidad de pintura blanca”.

En el ***ítem c*** encontramos:

* Predominio del campo aditivo

Un estudiante, —el mismo que plantea la necesidad de la igualdad en cantidad de litros en el ítem a) y b)— expresa que “No estoy de acuerdo con este razonamiento porque si tenemos que mantener una igualdad de color (por lo tanto igualdad de litros resultantes) si agregamos más de uno, del otro echamos menos. Debe haber una razón de proporción que si lo aplico para el otro caso me debería dar el mismo valor obtenido en el ítem a) pero no lo hace. 9 l bl < 12,5 l bl”. Luego, realiza el cálculo algorítmico de 4 l x 2, 5 = 10 l y 5 l x 2,5 =12, 5 y justifica que el 2, 5 lo obtiene de realizar K=10 : 4 l= 2,5.

El razonamiento apoyado en el campo aditivo no le permite notar la incoherencia entre la idea de constante de proporcionalidad que calcula y aplica sobre los resultados obtenidos anteriormente, lo cual podría también estar relacionado con el predominio de uso de técnicas o fórmulas por sobre el concepto de proporcionalidad.

* No reconocen la constante de proporción

2 estudiantes no están de acuerdo con Juan, y sus argumentos nos permitirían pensar en que no reconocen un operador multiplicativo en los casos de proporcionalidad. Uno de los estudiantes argumenta no estar de acuerdo con el planteo de Juan porque "hay que tener en cuenta las dos cantidades, no solamente la pintura verde".

* Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto

En este caso encontrado, el estudiante no manifiesta en su argumento una relación entre la proporcionalidad y la regla de tres utilizada y expresa: "No estoy de acuerdo con el procedimiento de Juan porque si realizo regla de tres, donde puedo multiplicar 5 l de pintura verde por 10 l de pintura blanca = 50l, dividido 4 l de pintura verde me da 12, 5 litros de pintura blanca. Pero sí o sí debo primero multiplicar y luego dividir, sino no obtengo esa cantidad de pintura blanca". El otro estudiante expresa: "hay que dividir 10 litros por 4 litros y no multiplicar".

Síntesis de contenidos de Resolución de Problemas y Creatividad. 1° año

–La matemática y sus valores: instrumental, social, formativo y cultural.

–Problemas: diferentes concepciones.

–El papel del problema en la enseñanza y en el aprendizaje de la matemática.

–Estrategias del pensamiento matemático: familiarizarse con el problema, "comenzar por lo fácil", búsqueda de estrategias diversas, hacer un esquema, una figura, un diagrama, escoger lenguaje adecuado y notación apropiada, buscar problemas semejantes, suponer el problema resuelto, revisar el proceso, extraer conclusiones.

Análisis de Problemas

–Problemas que involucren: números racionales, sistema de numeración, operaciones en el campo de los números racionales, espacio físico y geométrico, medida.

–Tipos de problemas: abiertos, no rutinarios, sin solución, con una cantidad finita de soluciones (solución única o con más de una solución), con infinitas soluciones.

* El papel de los contextos en que se presentan los problemas.
* Diversidad de estrategias y procedimientos.
* Los modelos espontáneos y matemáticos.
* Factores que intervienen en el proceso de resolución de problemas matemáticos.

* Errores y obstáculos que inciden en la resolución.
* La evaluación a través de los problemas.
–Las tecnologías de la información y la comunicación como mediadoras en la resolución de problemas.

Síntesis de contenidos de Matemática y su Didáctica I y II. 2° y 3° año

La Didáctica de la Matemática
–La didáctica de la matemática como disciplina científica: análisis teórico.
–El sentido de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria.
–El estudio de la enseñanza usual y la didáctica de la matemática.
Análisis y aplicación de Teorías que influencian en la educación matemática:
–Didáctica francesa: distintas fases en la organización de la clase. El contrato didáctico. Variables didácticas. Teoría de las situaciones didácticas. La transposición didáctica.
–Educación Matemática Realista: principios en que se sostiene: Matemática como actividad humana. Concepto de realidad. Niveles de matematización progresiva. Valor de los contextos y modelos en este proceso. La reinvención guiada. Las producciones propias de los alumnos y las alumnas. La fenomenología didáctica. La interacción en el aula. La interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática.
–El aprendizaje basado en la resolución de problemas. El valor epistemológico y didáctico de la resolución de problemas como núcleo central de la práctica matemática.

Recursos de análisis: observaciones de clases, registros de clases, producciones de alumnos y alumnas.
–Análisis de situaciones de enseñanza en diferentes contextos y modalidades.
–Análisis de propuestas didácticas de contenidos escolares con enfoques diferentes.
–Diseño de actividades atendiendo a la diversidad.
–Propuestas didácticas integrando contenidos intra y extramatemáticos.
–Análisis de los errores de los/as alumnos/as.
–Análisis de recursos didácticos (los libros de texto de Educación Primaria, revistas de difusión masiva, materiales didácticos utilizados en las escuelas de Educación Primaria,...)
–La evaluación en matemática. Finalidades de la evaluación. Instrumentos.

–Aportes de las TIC a la enseñanza del área: estrategias didácticas para la incorporación de las TIC a la enseñanza.

Sistema de Numeración y Números:

–Los sistemas de numeración: principales características de distintos sistemas de numeración.

–La evolución histórica de los sistemas de numeración como la búsqueda sostenida de economía en la representación.

–El sistema de numeración decimal. Como instrumento de uso social: distintos contextos. Como objeto matemático: naturaleza y funcionamiento.

–La enseñanza del sistema de numeración decimal.

–Necesidad de la creación de los distintos campos numéricos, reconocimiento y usos.

–Números naturales: funciones y distintos contextos de uso. Significados y diferentes formas de representación. Orden. Discretitud. Representación en la recta numérica.

–Números enteros: funciones y distintos contextos de uso. Significados y diferentes formas de representación. Orden. Discretitud. Representación en la recta numérica.

–Números racionales: Funciones y distintos contextos de uso. Distintos significados y diferentes formas de representación. Expresiones enteras, fraccionarias, decimales finitas y decimales periódicas. Orden. Densidad. Representación en la recta numérica.

–Aproximación a la idea de número irracional. Reconocimiento y uso de algunos números irracionales.

–Los números reales: noción de completitud de la recta numérica.

–Caracterización de distintos enfoques acerca de la enseñanza de los distintos tipos de números. Evolución histórica de su enseñanza.

–Los recursos didácticos en el aprendizaje.

Operaciones en diferentes campos numéricos:

–Las operaciones con números naturales: significados y sentidos de su enseñanza. Propiedades de cada operación (suma, resta, división, multiplicación, potenciación y radicación).

–Campos de problemas relativos a las distintas operaciones.

–Las operaciones con números racionales: significados y sentidos de su enseñanza. Propiedades de cada operación. Justificación de reglas de cálculo.

–Cálculo mental, escrito y con calculadora.

–Cálculo exacto y estimativo con números racionales no negativos. Estrategias de aproximación. Margen de error.
–Divisibilidad en el conjunto de los números naturales. División entera, múltiplo, divisor (factor), máximo común divisor, mínimo común múltiplo, números primos, criterios de divisibilidad, congruencia numérica. Criba de Eratóstenes; justificación. Factorización de un número.
–Regularidades en secuencias: patrones numéricos. Regularidades en la serie escrita, en la sucesión de Fibonacci, en los números triangulares y números cuadrados, en el triángulo de Pascal.
–Algoritmos de las operaciones en los distintos campos numéricos. Diferentes algoritmos de una misma operación: análisis.
Función y proporcionalidad:
–Sistemas de referencia para ubicar un punto en el plano: coordenadas cartesianas. Otros sistemas de referencia como el geográfico y polar.
–Distintos lenguajes para describir y comunicar situaciones o fenómenos. Relaciones entre variables numéricas. Variable dependiente e independiente. Relaciones funcionales en contextos numéricos y geométricos.
–Función. Situaciones que representen funciones, lenguaje coloquial, gráfico y simbólico para expresar funciones.
–Los modelos espontáneos y matemáticos.
–Proporcionalidad numérica. Razón y proporción. Definición y propiedades. Magnitudes proporcionales y no proporcionales. Situaciones usuales de la proporcionalidad. Funciones de proporcionalidad directa e inversa. Propiedades.
–Proporcionalidad geométrica: semejanza y homotecia. Número de oro y la proporción áurea. Aplicaciones al arte.
–La enseñanza de la proporcionalidad como contenido que atraviesa toda la Educación Primaria: estrategias didácticas.

Espacio y Geometría:
–La geometría en la historia y la historia de la geometría.
–La enseñanza de la geometría: origen y evolución, fundamentos teóricos.
–Interrelación espacio físico y geometría. Habilidades geométricas. Pensamiento geométrico.

–Relaciones espaciales de ubicación, orientación, delimitación y desplazamiento, el uso de sistemas de referencia y de relaciones de paralelismo y perpendicularidad.
–Resolución de problemas en distintos tipos de espacios. Las representaciones espontáneas espaciales y geométricas en los niños y las niñas.
–Figuras de una, dos y tres dimensiones. Elementos. Propiedades. Relaciones de inclusión. Clasificación, definición. Condiciones necesarias y suficientes, definiciones equivalentes. Construcciones. Distintas formas de prueba. La prueba deductiva.
–Habilidades de trabajo geométrico: percepción, visualización, representación gráfica, descripciones, reproducciones, construcciones, justificación, demostración.
–La enseñanza de la geometría como eje que atraviesa toda la Educación Primaria: estrategias didácticas.
–Los softwares de geometría: tipos, características, posibilidades de uso pedagógico y didáctico.

Medida:
–La medición de magnitudes: origen y evolución.
–Relación entre situaciones reales y modelos matemáticos.
–Magnitudes (longitud-distancia, capacidad, masa, tiempo). Atributos cualitativos y cuantitativos de un objeto o fenómeno. Unidades fundamentales, múltiplos y submúltiplos de ellas. Unidades derivadas.
–Uso de instrumentos. Error en la medición. Causas. Concepto de precisión. Estimación de cantidades. Operaciones con cantidades.
–Construcción de distintos instrumentos de medición no convencionales.
–Evolución de la idea de magnitud y medida en el niño y la niña. Aspectos matemáticos, psicológicos y didácticos.
–Perímetro de figuras del plano.
–Área de figuras del plano. Equivalencia de figuras. Teorema de Pitágoras. Distintas estrategias de cálculo. Fórmulas.
–Volumen. Equivalencia de cuerpos. Volúmenes de distintos cuerpos. Distintas estrategias de cálculo. Fórmulas.
–Relaciones entre perímetro-área-volumen.

Tratamiento de la información, Estadística y Probabilidades:

–Estadística. Población. Muestra. Formas de representación gráfica de datos estadísticos.
–Parámetros estadísticos: Media, moda, mediana, significados y utilidad. Idea de desviación.
–La información en distintos portadores.
–Parámetros de posición y de dispersión: uso y significado.
–Probabilidad. Fenómenos y experimentos aleatorios: imprevisibilidad y regularidad. Probabilidad experimental. Probabilidad teórica. Frecuencia y probabilidad de un suceso.
–Nociones básicas de combinatoria.
–El azar y la intuición. Dificultades que presenta la enseñanza de la probabilidad frente al pensamiento determinista de los niños y las niñas. - Aporte de las TIC a la enseñanza de la estadística: análisis de bancos de datos estadísticos disponibles en Internet, posibilidades de uso de la hoja de cálculos.

Ateneo Matemática. 4° año

Posibles líneas de acción:
–Propuesta de enseñanza: agrupaciones e interacción de los niños/niñas y/o jóvenes según los momentos de trabajo, con el docente y con el objeto de conocimiento.
–Observación y registro de casos puntuales emergentes en las escuelas asociadas, para ser analizados desde las áreas y tomados como objeto de la reflexión interárea.
–Análisis de las situaciones de enseñanza y de las construcciones didácticas atendiendo a: intencionalidades, conocimientos y contenidos, tipos de tareas, procedimientos posibles de resolución, intervenciones docentes, anticipaciones factibles, validaciones, evaluación.
–Análisis de las Áreas Curriculares en Documentos Curriculares Jurisdiccionales y Nacionales de Educación Primaria.
–Análisis de los materiales curriculares.
–Análisis de la propuesta editorial.

Con estas últimas ideas, finalizamos el Anexo Analítico, que nos permitió presentar en detalle las producciones que realizaron los estudiantes de 1° año y también de 4° año en la investigación, como así también una síntesis de los contenidos de Matemática que se trabajan en el Profesorado de Nivel Primario.