Universidad Nacional del Litoral

MAESTRÍA EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

Tesis

LA CONSTRUCCIÓN DE LA DERIVADA DESDE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO ARTICULANDO DISTINTOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Presenta: Silvia Vrancken

Directora de tesis: Mg. Adriana Engler

2011

¿La búsqueda de la verdad te da tanto gusto como antes? Seguramente, no es el conocimiento sino el aprendizaje, no es la posesión sino la adquisición, no es el estar ahí sino el llegar hasta ahí, lo que aporta la mayor satisfacción. Si he aclarado y agotado algo, lo dejo para entrar otra vez en la oscuridad. Así es ese hombre insaciable tan extraño: cuando ha completado una estructura no es para quedarse ahí confortablemente sino para empezar otra.

Carl Friedrich Gauss

A mi esposo por todo su amor y paciencia.
A mis hijos, Melina y Roberto.

Agradecimientos

En primer lugar a Adriana, por su confianza, por el tiempo que me ha dedicado, por su entusiasmo en la dirección de este trabajo y por todos sus comentarios que ayudaron a mejorarlo.

A todos mis colegas y compañeros que facilitaron la implementación de la secuencia y que colaboraron con su tiempo personal aportando ideas o simplemente escuchando y alentando.

A todos los alumnos que hicieron posible este trabajo.

CONTENIDO

En los últimos años, el papel de la matemática ha variado sustancialmente como resultado del ritmo acelerado del desarrollo científico-tecnológico, siendo hoy una herramienta indispensable en el intento de explorar los fenómenos que aparecen tanto en el mundo de las ciencias de la naturaleza como en el de las sociales y humanas. El desarrollo actual de las investigaciones prácticas en cualquier rama de la ciencia y la tecnología está marcado por la introducción sistemática e ininterrumpida de los métodos matemáticos en las actividades de investigación, dirección, explotación, diseño y reparación, que despliegan los profesionales en las diferentes ramas de la producción, la investigación y los servicios. La formación del profesional a la altura de su tiempo debe ser reestructurada, de forma tal que la matemática se convierta en el lenguaje a través del cual se expresan las representaciones científicas y en la herramienta que ofrezca los métodos idóneos para hallar la solución de los problemas científicos y productivos.

El perfil de egresado actual exige desarrollar en los estudiantes destrezas y habilidades que les permitan ser protagonistas del aprendizaje y del conocimiento. Sin negar el lugar de los conceptos y procedimientos en el currículo de matemática, es preciso que comprendan con claridad cómo las herramientas matemáticas les permiten analizar un fenómeno o un modelo que refleje la realidad de su entorno. Para esto es absolutamente necesario que el alumno construya matemática, ocupándose de actividades que emerjan de situaciones que requieran pensamiento y razonamiento creativo, recolección y ampliación de información, descubrimiento, invención, comunicación de ideas, comprobación de las mismas a través de la reflexión crítica y argumentada.

Estos objetivos deberían ser los fundamentos de los currículos y los planes de estudios universitarios. La realidad nos indica que esto no siempre es así. Numerosos trabajos de investigación y nuestra experiencia como alumnos y docentes nos muestran que, en muchos casos, la enseñanza de la matemática se sigue centrando en ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y en métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en la algoritmia donde frecuentemente el estudiante se ve imposibilitado de percibir las relaciones que tienen los procedimientos con las aplicaciones más cercanas a la vida cotidiana y se priva de experimentar sus propios aprendizajes. Esto parece ocasionar consecuencias negativas cuando los que aprenden son estudiantes que, para el ejercicio de su profesión, necesitan conocimientos y habilidades que les permitan resolver problemas reales. Es el caso de los alumnos de carreras de ingeniería y, en particular, de ingeniería agronómica, contexto en el que se realiza esta investigación.

Estas problemáticas se ven potenciadas cuando se trata de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. Al respecto, Artigue (1995b) manifiesta que la enseñanza universitaria del cálculo, aunque tenga otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica, basándose en una formalidad excesiva, principalmente, en la aplicación de los tradicionales métodos rigurosos de demostración matemática. De esta manera, si bien se logra que los estudiantes deriven, integren o calculen límites elementales, no son capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas.

El rol indispensable que tiene el cálculo como un conjunto de conocimientos que permite analizar los cambios que ocurren en los fenómenos y en consecuencia formular modelos, plantea la necesidad de preguntarnos qué enseñamos y cómo enseñamos de manera de modificar esta situación y lograr que el alumno pueda comprender y dar sentido a los objetos y procedimientos matemáticos, contribuyendo a que desarrolle sus potencialidades y logre la formación de un pensamiento productivo, creador y científico.

Ante esta realidad decidimos tomar una de las nociones del cálculo diferencial, la derivada, para abordar en esta investigación.

Con el objetivo de incorporar las variables de tipo social y cultural que necesariamente participan en la construcción de conocimiento, ubicamos nuestro trabajo en la perspectiva socioepistemológica. Bajo este marco teórico, la línea de investigación del pensamiento y lenguaje variacional, permitió encuadrar nuestro trabajo, ya que se interesa específicamente por los procesos del pensamiento que inciden en el estudio del cálculo.

El pensamiento y lenguaje variacional explora "los procesos y mecanismos funcionales del pensamiento de los que aprenden en una especie de cognición situada, para enriquecer, *a posteriori*, las situaciones de enseñanza" (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2003, p. 185). Su objeto principal de estudio son los fenómenos de cambio y su entendimiento.

En este contexto, un concepto primordial es el cambio, modelado matemáticamente mediante la diferencia. Las diferencias dan cuenta de cuánto cambia la variable en un proceso de variación. En este sentido son el elemento central de todo el cálculo, por eso a esta parte de la matemática se la conoce como matemática de la variación y el cambio.

La derivada refleja con gran precisión una de las propiedades esenciales de los fenómenos de la realidad: la rapidez de la variación. Está relacionada con tres nociones fundamentales: el cambio, la razón promedio de cambio y la razón instantánea de cambio.

La incorporación de elementos variacionales y el otorgamiento de significado a los distintos elementos relacionados a la variación en estudio favorecerán la construcción de la derivada. En un sentido más amplio influirán positivamente en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos, y también de su lenguaje variacional, en tanto sean capaces de comunicar sus ideas.

Otro aspecto que resulta esencial en el desarrollo del pensamiento y en la producción de conocimiento matemático es el empleo de nociones asociadas a los registros numérico, gráfico, algebraico y verbal. Duval (1998) señala que la comprensión integral de un objeto está basada en la coordinación de al menos dos sistemas de representación pertenecientes a registros diferentes. Distintos autores apoyan esta idea y manifiestan que llegar a adquirir conceptualmente un objeto matemático implica realizar procesos de conversión entre diferentes registros de representación, manifestados por la posibilidad de movilización y de articulación entre los mismos (D´Amore, 2002; González, 2006).

Teniendo en cuenta lo planteado nos propusimos indagar las nociones, relacionadas a la derivada, que construyen nuestros alumnos cuando se formulan actividades articuladas en torno a la idea de variación y cambio, que promueven el manejo y la utilización de diversos sistemas de representación.

Para tal fin, recurrimos a la metodología de la ingeniería didáctica, lo que nos llevó a la elaboración de una secuencia didáctica. La misma se implementó con alumnos cursantes de la asignatura Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral durante el año 2008. En su diseño y puesta en práctica se tuvieron en cuenta las fases correspondientes a la metodología utilizada: análisis preliminares, concepción de la ingeniería, experimentación y análisis a posteriori.

En cada uno de los capítulos que conforman esta tesis se reporta la investigación realizada, tratando de que el orden de los mismos coincida con el de los distintos pasos seguidos en el trabajo.

En el Capítulo 1 se presenta la concepción global de la investigación en donde se plantea la justificación de nuestro estudio, la formulación del problema y los objetivos, analizando además los resultados relevantes de otros estudios sobre aspectos relacionados con el aprendizaje y enseñanza de la derivada.

En el Capítulo 2 se desarrollan los fundamentos teóricos bajo los cuales se realiza el estudio. En el contexto de la educación matemática hacemos especial referencia a la aproximación socioepistemológica y a la línea del pensamiento y lenguaje variacional, como marcos que permiten caracterizar y encuadrar la investigación. Posteriormente se exponen, ya como marco teórico específico, los fundamentos de la teoría de las situaciones didácticas, necesaria como sustento para el desarrollo de la ingeniería didáctica, y las bases de la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica, como marco teórico de comprensión de los objetos matemáticos.

En el Capítulo 3 se presentan los análisis preliminares, primera fase de la ingeniería didáctica. En primer lugar se desarrolla un análisis histórico-epistemológico para mostrar la evolución de la matemática de la variación y el cambio y particularmente de la derivada, teniendo en cuenta los registros en que se ha producido así como los distintos obstáculos que surgieron en esa evolución. A continuación se realiza el análisis didáctico en el que, con el objetivo de estudiar distintos aspectos relacionados con la enseñanza de la derivada, se describe la situación en nuestra carrera y los diseños curriculares para la escuela secundaria de nuestra provincia, para luego estudiar algunos libros de texto de uso común en nuestro entorno. Con respecto a la dimensión cognitiva, se profundiza acerca de algunos elementos teóricos importantes al momento de explorar los procesos mentales de organización del pensamiento que sirvieron de base para el diseño e implementación de un cuestionario relativo a las concepciones de nuestros alumnos acerca de nociones variacionales básicas para el inicio en el estudio de la derivada. Se presentan las preguntas y se analizan los resultados obtenidos. Finalmente se desarrollan algunos aspectos correspondientes a la dimensión sociocultural, que integra las tres anteriores.

El análisis de estas dimensiones y las conclusiones obtenidas justifican el diseño de nuestra ingeniería, que se muestra en el Capítulo 4. En la primera parte de este capítulo se desarrollan los fundamentos teóricos de la metodología de la ingeniería didáctica. En la segunda parte se plantean las líneas generales que se han seguido para el diseño de nuestra ingeniería, describiendo el contexto, características y restricciones de su implementación así como las elecciones de carácter global que se tomaron. En la última parte se desarrolla el análisis a priori de las sesiones diseñadas. Éste incluye el enunciado de las distintas situaciones, los saberes y registros que involucra cada una, las dificultades que se prevén y los diferentes momentos que se planearon para organizar el trabajo de los alumnos.

En el Capítulo 5 se reporta el análisis de los resultados de la experimentación. Se detalla el contexto de la implementación, los instrumentos utilizados para recoger la información, se describen las sesiones desarrolladas y se efectúa el análisis a posteriori, contrastando las actuaciones de los estudiantes con lo previamente establecido. La confrontación de todos estos datos con el análisis a priori permite validar la ingeniería.

Se desarrolla luego en este capítulo el análisis e interpretación de los demás instrumentos de análisis: tramos de entrevistas realizadas a algunos alumnos y el análisis de las respuestas de una evaluación de contenidos. Los resultados de todos estos análisis nos facilitan la elaboración de conclusiones.

Finalmente, en el Capítulo 6 se detallan las conclusiones obtenidas a partir del análisis de los datos aportados por los distintos instrumentos, teniendo en cuenta los objetivos planteados y la hipótesis de trabajo. Se exponen también algunas implicancias de nuestra investigación.

La tesis se cierra con las referencias bibliográficas de los textos utilizados y los anexos con el material empleado durante las sesiones de ingeniería y el referido a otros elementos del estudio.

CAPÍTULO 1
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se brinda un panorama general de las cuestiones que nos permitieron delimitar nuestro problema y formular los objetivos de esta investigación. Se enuncian además los resultados relevantes de otras investigaciones sobre aspectos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de la derivada. Los mismos abren la posibilidad de nuevas propuestas didácticas fundamentadas en el análisis de los procesos involucrados en el aprendizaje de estos temas.

Todo esto conforma la justificación de esta tesis, que se presenta en el último apartado.

1.1 Planteamiento del problema

Año a año observamos en nuestros alumnos ingresantes a la carrera Ingeniería Agronómica, dificultades en el aprendizaje, conocimientos insuficientes y escasa transferencia a situaciones nuevas. Cuando comenzamos a desarrollar un tema o contenido nuevo nos encontramos muchas veces con que los alumnos olvidaron lo que "aprendieron" anteriormente, no recuerdan una definición, no relacionan propiedades, no pueden aplicar un concepto en la resolución de un problema. Por otro lado, presentan deficiencias en explicar conceptos, expresarse en forma oral y escrita, argumentar y hacer inferencias. Los resultados no satisfactorios que obtienen se constituyen en un aspecto negativo que, no en pocos casos, los conduce a adoptar una actitud de mínimo esfuerzo o de rechazo hacia la matemática.

Esta realidad es una problemática generalizada y motiva que numerosas investigaciones educativas centren su atención en los procesos de aprendizaje y en la construcción de conocimiento matemático. En particular, la enseñanza y el aprendizaje del cálculo constituyen uno de los mayores desafíos de la educación actual.

A pesar de que la determinación de razones de cambio, idea fundamental del cálculo, está presente de una u otra manera en la vida diaria, todo lo relacionado con él resulta muy abstracto para el alumno en el aprendizaje formal y provoca problemas para su enseñanza. En general se observa que, si bien el estudiante logra resolver ejercicios y problemas sencillos, surgen grandes dificultades al momento de ingresar en el campo disciplinar y alcanzar a comprender satisfactoriamente los conceptos y métodos de pensamiento que rigen este campo de la matemática; las dificultades también se manifiestan cuando los alumnos se enfrentan al problema de lograr la correspondencia entre el formalismo y las experiencias específicas de su campo profesional. Aunque el cálculo es un dominio donde la actividad matemática se apoya en gran medida en las competencias algebraicas, es necesaria la ruptura con una gran cantidad de prácticas netamente algebraicas para poder acceder a él. Todo esto resulta difícil para el educando, pues los modos de razonamiento son nuevos y las técnicas matemáticas de trabajo son delicadas.

Como resultado de una investigación sobre la didáctica de la derivada, Dolores (2000) expresa que muchos estudiantes sólo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas a partir de fórmulas, pero difícilmente comprenden el para qué de esos algoritmos que realizan y el significado de los conceptos. Para este autor, el estudio del cálculo diferencial no tiene en cuenta el desarrollo de ideas y significados de sus conceptos básicos, imponiendo el predominio del trabajo algorítmico. Sostiene que el tratamiento dado a la derivada ha desplazado el sentido de variación, eje principal de la derivada. Discute también sobre el papel que le es conferido a la interpretación geométrica de la derivada, la cual es abordada como complemento, y muchas veces como una aplicación del tema. Esto no ayuda a revelar su naturaleza ligada a la cuantificación de la rapidez de la variación, aspecto pocas veces tomado en consideración por el currículo de cálculo en las instituciones.

Al privilegiar el contexto algebraico se deja de lado la posibilidad de construir conocimiento a partir de la movilidad entre las diferentes representaciones del concepto. Generalmente se hace énfasis en que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas pero pocos estudios se centran en la necesidad de coordinar distintos sistemas de representación para superar las dificultades del aprendizaje y lograr la comprensión de los objetos matemáticos (Duval, 1998). En general, las tareas de conversión entre diferentes sistemas de representación son minimizadas y eso produce limitaciones en la comprensión y en el desarrollo de uno de los estilos de pensamiento, el visual.

Diversas investigaciones en educación matemática proporcionan ejemplos sobre problemas de aprendizaje y el papel de la visualización en la comprensión del cálculo (Artigue, 1995b; Hitt, 2003; Cantoral, 2003b). Si bien se reconoce su importancia a fin de favorecer la comprensión matemática, existe una gran resistencia de los alumnos a visualizar. Eisenberg y Dreyfus (1991) opinan que las causas por las que los estudiantes evitan la visualización están relacionadas con distintos aspectos. Por un lado la visualización demanda actividades cognitivas superiores a las que exige pensar algorítmicamente. Por otro, los aspectos visuales no son utilizados para comunicar las ideas matemáticas ya que éstos suelen ser considerados por matemáticos, maestros y alumnos como secundarios al concepto mismo. Muchas de las dificultades del cálculo se superarían si se enseñara a los estudiantes a interiorizar las connotaciones visuales de los distintos objetos.

En el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento no se pueden dejar de lado aspectos sociales y culturales. Es en el seno de la organización social donde se reconstruyen significados de la matemática como recurso para aceptar determinado conocimiento matemático. La reconstrucción de significados abarca categorías del conocimiento matemático que no son sólo el resultado de la actividad matemática sino también de la actividad humana. En ella el conocimiento tiene significado propio, contexto, historia e intención. De esta forma, el conjunto de actividades que realiza el alumno en una situación concreta permite otorgar significado a los conceptos y construir conocimiento matemático. Es posible hablar de distintas maneras de pensar matemática al considerar que el escenario puede modificar dichos pensamientos.

A partir de todo lo planteado, surge la necesidad de estudiar las nociones que construyen los alumnos cuando interactúan con actividades orientadas a lograr el manejo y la articulación de diferentes sistemas de representación, poniendo la atención tanto en los contenidos como en las prácticas sociales, como generadoras de conocimiento.

1.2 Preguntas de investigación

Teniendo en cuenta el problema planteado y centrando el interés de esta investigación en cómo los alumnos comprenden y construyen conocimiento matemático, nos preguntamos:

¿Qué procesos de pensamiento son necesarios desarrollar en el alumno a fin de favorecer el aprendizaje de nociones del cálculo diferencial relacionadas con el comportamiento variacional de las funciones?

¿De qué manera intervienen los registros de representación semiótica en la construcción de los objetos matemáticos?

¿Qué sistemas de representación pueden ponerse en juego en la construcción de la derivada?

¿Qué tipo de situaciones problemáticas permiten a los alumnos comprender las ideas básicas relacionadas con el comportamiento variacional de las funciones y, en particular, la noción de derivada de una función en un punto?

¿Qué tipo de construcciones realizan los alumnos cuando interactúan en el aula?

1.3 Objetivos

Para dar respuesta a las preguntas de investigación planteamos los siguientes objetivos:

1.3.1 Objetivo general

Explorar la construcción de la derivada cuando los alumnos interactúan con actividades relacionadas con el comportamiento variacional, que favorecen el tratamiento y la articulación de diferentes sistemas de representación.

1.3.2 Objetivos específicos

- Investigar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral.
- Diseñar y poner en práctica una secuencia didáctica que propicie la comprensión de la derivada, articulada en torno a la idea de variación y cambio y que promueva el manejo y la articulación de diversos sistemas de representación.

- Describir y analizar las producciones de los alumnos cuando se enfrentan a las diversas tareas propuestas por los profesores.
- Validar la secuencia didáctica implementada con los alumnos utilizando una metodología investigativa de ingeniería didáctica.

1.4 Antecedentes de la investigación

Si bien en otros capítulos que conforman esta tesis se desarrollan los antecedentes que los sustentan, en este apartado presentamos los resultados de las principales investigaciones relacionadas con diversos aspectos del tema que nos han servido de referencia para nuestro estudio.

1.4.1 Enseñanza y aprendizaje del cálculo

Los vínculos del cálculo tanto con la matemática elemental como con la matemática avanzada y su papel en las ciencias lo transforman en un conjunto de conocimientos con valor teórico y empírico indispensable en la educación superior. Los currículums de matemática y los métodos de enseñanza durante mucho tiempo fueron inspirados sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en la algoritmia donde frecuentemente el estudiante se ve imposibilitado de percibir las relaciones que tienen los procedimientos con las aplicaciones más cercanas a la vida cotidiana y se priva de experimentar sus propios aprendizajes en escenarios diferentes a los que se les proveen en el aula.

En el marco de la educación matemática se han realizado en las últimas décadas un número considerable de investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el cálculo. García (2006, p. 16) manifiesta:

> El estudio de las problemáticas asociadas a la enseñanza y aprendizaje del cálculo se han discutido y afrontado desde distintas perspectivas que van desde los análisis de los problemas que giran en torno a un concepto particular (Demana, Dolores, Sánchez, Alanís, Azcárate, Dubinsky, Cantoral, 2000; Aparicio, Bloch, 2003; Przenioslo, 2004) a fin de lograr cierto grado de entendimiento, hasta las reflexiones sobre las reformas al currículo matemático (Dubinsky, 1992; Hitt, 1998; Artigue, 2000).

Debido a lo complejo de los procesos que se investigan, tales como la abstracción, la demostración, la generalización, la visualización, entre otros y, por otro lado, a que dichos procesos tienen que ver con tópicos avanzados que van más allá del álgebra elemental, estas investigaciones se han ubicado dentro del campo denominado “Pensamiento Matemático Avanzado”. Las mismas intentan explicar las dificultades que tienen los alumnos cuando pretenden aprender las nociones del cálculo y generan propuestas de innovaciones en la enseñanza para superarlas. Tratan diversos aspectos, como la dimensión epistemológica y los obstáculos, la dimensión cognitiva, concepciones y teorías de aprendizaje, así como la dimensión didáctica.

Según manifestaciones de Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas (1996) las primeras y principales investigaciones se deben a Tall (trabajos en psicología del pensamiento matemático avanzado y la utilización de los ordenadores para el desarrollo de este pensamiento), Dreyfus (procesos del pensamiento matemático avanzado), Vinner (aspectos cognitivos del pensamiento matemático avanzado), Cornu (límite) y Artigue (análisis). Los mismos autores expresan que otro antecedente importante resulta el trabajo de Orton, quien investigó algunos aspectos del análisis elemental entre estudiantes de matemática. Su trabajo se fundamentó en la estadística y sus muestras incluyeron gran cantidad de alumnos de los niveles medio y superior. Las tareas abarcaron el concepto de límite, la idea de integración como medida del área bajo una curva usando rectángulos, la idea de tasa de cambio usando gráficas y tablas de diferencias que conducen a diferenciación, así como aplicaciones tanto de la diferenciación como de la integración. Orton mostró el razonable dominio algebraico que los estudiantes ingleses tenían de lo que podemos llamar un *cálculo meramente algebraico*, es decir, del cálculo de derivadas y primitivas, pero la significativa dificultad que poseían para conceptualizar los procesos de límite que sustentan las nociones de derivada e integral.

Desde principios de la década de los noventa, comenzaron a aparecer en la literatura una serie de estudios con otra orientación común: la necesidad de analizar la relación de los conceptos con prácticas socialmente compartidas y con sentidos y significados extra matemáticos (Cantoral, 2003b). Desde distintas líneas de investigación (socioconstructivistas, socioculturales, interaccionistas, entre otros) se desarrollaron importantes trabajos abordando la problemática de la construcción del conocimiento desde una perspectiva social (Ferrari y Farfán, 2008).

Este cambio de visión llevó a reconocer la necesidad de modificaciones en el tratamiento del conocimiento matemático escolar. En lugar de aceptar las producciones matemáticas como estructuradas e inmutables en el tiempo, se conciben como elaboraciones sujetas a transformaciones y reconstrucciones mediante los sujetos y sus prácticas e interacciones, en un contexto social y cultural.

En este sentido, y con la prioridad de dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento (su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y el didáctico), surgió una línea de investigación que se ha denominado "acercamiento socioepistemológico"[1]. La actividad humana dentro de esta aproximación juega un papel muy importante ya que es considerada como la fuente principal de la reorganización de la obra matemática que implicará el rediseño del discurso matemático escolar en todos los niveles escolares.

De acuerdo con Cantoral (2000), una de las hipótesis que asume la socioepistemología es que el aprendizaje de la matemática ocurre en un proceso que atiende a las funciones

[1] Presentada por R. Cantoral en 1977 durante el Seminario de Investigación en Matemática Educativa del Área de Educación superior del CINVESTAV –conferencia inaugural- y en una conferencia plenaria, el mismo año, en la Conference on Research in Mathematics Education en EUA.

mentales involucradas en la adquisición y desarrollo del pensamiento matemático (refiriéndose a las interpretaciones que tiene la gente, de cualquier época, en relación con el contenido matemático), así como a la caracterización o modelación de los procesos de compresión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos.

En la búsqueda por explicar cómo se construye el conocimiento, además de los aspectos cognitivos involucrados en la construcción del objeto matemático, se consideran las prácticas sociales que conducen a la constitución de ese saber. Al seno de la socioepistemología se han hecho caracterizaciones propias de lo que significa “práctica social”:

> … un constructo teórico que hace referencia a aquello que nos hace comportar tal y como lo hacemos y no de una manera diferente; en términos de comunidades, es aquello que nace como respuesta a una necesidad, donde la respuesta viene a ser una especie de acuerdo, explícito o no, de la comunidad para trabajar en una cierta dirección (construcción de cierto conocimiento específico) (López, 2005).

Desde esta perspectiva, se resalta el papel que adquieren el pensamiento y el lenguaje variacional, de ahí que se centre en las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación como una cuantificación del cambio. Se desarrolló el programa de pensamiento y lenguaje variacional como línea de investigación que permite tratar la articulación entre la investigación y el aula (Cantoral y Farfán, 2000).

En este contexto se han realizado estudios que abarcan desde el análisis de problemas que giran en torno a un concepto particular a fin de lograr cierto grado de entendimiento, hasta las reflexiones sobre la educación o el sistema escolar (Cantoral y Farfán, 2000; Sánchez y Molina, 2006; Ordóñez y Buendía, 2007; Ferrari y Farfán, 2008).

Cabañas y Cantoral (2007) expresan que los trabajos en este área se han orientado al desarrollo de acercamientos didácticos que favorezcan la construcción de significados, tanto al nivel de los procesos como de los conceptos propios del cálculo, principalmente de los conceptos de función, límite, continuidad, derivada, convergencia y analiticidad, basados siempre en lo que llaman ideas variacionales.

1.4.2 El pensamiento y lenguaje variacional

El cálculo es la matemática de la variación y el cambio. Esto lo convierte en la rama que permite modelar, explicar, predecir y cuantificar la variación y en una herramienta fundamental para numerosas ciencias.

Sin embargo, en los sistemas educativos el cálculo ha perdido este enfoque y se han priorizado procesos de construcción y validación formales así como sus aspectos algorítmicos. Las competencias esperadas se reducen a resolver límites, obtener algunas derivadas de funciones, resolver problemas de optimización y, en un nivel más avanzado, demostrar una gran cantidad de teoremas. Esto provoca que el estudio del cálculo diferencial sea percibido como un tedioso y engorroso conjunto de reglas y fórmulas sin aparente uso y aplicación en situaciones de la vida cotidiana. Se lo aprecia como un conjunto de teoremas, definiciones, demostraciones y problemas abstractos, que solamente adquieren sentido dentro de las aulas.

Distintas investigaciones sostienen que las clases de cálculo deben estar dirigidas principalmente a que los estudiantes trabajen con ideas variacionales, estudien y modelen fenómenos de cambio, para lo cual es necesario desarrollar su pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 2000; Cantoral y Reséndiz, 2003; Testa, 2004; Sánchez y Molina, 2006; Serna, 2007).

Como parte del pensamiento matemático, el término pensamiento variacional, se utiliza con la intención de profundizar un poco más en lo que se refiere al aprendizaje y manejo de funciones como modelo de situaciones de cambio. Se trata de desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos. Está relacionado con la capacidad para dar sentido a las funciones numéricas, manejándolas de manera flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas.

Que el alumno desarrolle un pensamiento y lenguaje variacional no está garantizado por la sola inclusión de la matemática de la variación en los currículos. Compartimos con Cantoral y otros (2003, p. 189) que "... el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales". Supone del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico. Esto requiere el dominio e integración de diferentes conceptos, algunos elementales, otros más avanzados, debiendo articularlos bajo diferentes contextos de representación (coloquial, gráfico, numérico y analítico) e incluyendo procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación, razonamiento. Implica, por un lado, el manejo de los números (naturales, enteros, racionales, reales y complejos) y las magnitudes; y por otro lado, las representaciones gráficas para magnitudes continuas. Implica además la comprensión de procesos complejos como las nociones de variación, de variable y el paso al límite.

Esto no se produce de manera instantánea. Las situaciones problemáticas que necesitan de un tratamiento variacional ayudarán a que el alumno, al enfrentarse a ellas, desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, pero es necesario ir incorporando a lo largo de distintas etapas actividades que lleven a su desarrollo.

Los conceptos básicos sobre los cuales se construye la matemática de la variación y el cambio son el de variable y el de función. Valero (2003) asegura:

> Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se precisa entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende pues el conocimiento superficial no resulta suficiente para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis (p. 4).

Dolores (2004) sostiene que poder analizar el comportamiento de las funciones es uno de los rasgos esenciales que caracteriza al pensamiento variacional. Propiciar y desarrollar esta forma de pensamiento en los alumnos les permitirá encontrarse en mejores condiciones para acceder a la matemática superior.

Diversos investigadores coinciden en que, por lo general, la enseñanza no promueve el estudio de las funciones desde el pensamiento y lenguaje variacional. En particular, coincidimos con la opinión de Testa (2004), quien sostiene que si el alumno concibe a la función solamente como una correspondencia, no pone en juego su pensamiento y lenguaje variacional. Ve en su gráfico a un conjunto de puntos, donde cada uno de ellos indica la correspondencia establecida entre dos reales, pero no puede concebir a este gráfico como un todo, como un objeto, como el producto final de un proceso. Para trabajar en cálculo, el alumno debe ser capaz de reconocer los infinitos valores que puede tomar la variable en un intervalo real para investigar cómo varía la función en dicho intervalo. De esta manera estará poniendo en juego el tipo de pensamiento antes mencionado.

El desarrollo de aspectos variacionales implícitos en temas previos al trabajo con derivada, le facilitará al estudiante desarrollar su lenguaje y pensamiento variacional al tomar contacto con dicho tema.

1.4.3 La visualización y los sistemas de representación

Entre los procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, se encuentra el de visualización. Podemos definir visualización, o expresar todo lo que este proceso encierra, como "la habilidad para transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual" (Cantoral y otros, 2003, p. 146). Se relaciona con el uso de medios de representación correspondientes a los distintos registros: gráfico, numérico, simbólico y algebraico. Hitt (2003, p. 215) expresa:

> La visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema.

Argumenta además que los estudiantes de primer año universitario no logran crear articulaciones entre varios sistemas de representación relacionados con los conceptos de ese nivel.

En el contexto de la educación matemática se reconoce cada vez más la importancia de los sistemas de representación de los objetos matemáticos. Los estudios analizan, desde diferentes perspectivas teóricas, el papel que juegan las representaciones y su coordinación en la comprensión, como medios o herramientas que ayudan a dotar de significado a los objetos.

Su importancia radica en que se asume que los significados de los objetos son construidos a través del uso de los signos (D´Amore, 2006). Todo objeto matemático necesita de representaciones ya que no se dispone de objetos físicos para mostrar en su lugar y sólo por medio de éstas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos.

Duval (1996, 2006) afirma que no hay conocimiento sin representación. El investigador es pionero indiscutible en esta temática y sus aportes, realizados desde un marco cognitivo, constituyen una importante contribución a la educación matemática.

Los resultados de distintas investigaciones relativas al uso de los registros de representación semiótica, han fortalecido la postura de que el aprendizaje de la matemática se ve favorecido cuando se incorporan en su enseñanza actividades didácticas que promuevan la utilización y articulación de los registros de representación semiótica (Rico, 2001; D´Amore, 2006).

Sánchez, García y Llinares (2008) analizaron varios trabajos que han investigado el papel de las representaciones en la construcción de la derivada (Ferrini, 1994; Aspinwall, Shaw y Presmeg, 1997; Habre y Abboud, 2006). Los resultados indican que los significados que elaboran los alumnos están vinculados a determinados modos de representación y estos significados no están conectados. Los estudiantes suelen considerar a los contextos gráficos y algebraicos de manera separada aplicando algoritmos sin relación para resolver problemas. Construyen sus conexiones influidos por su experiencia previa, presentando grandes inconsistencias entre representaciones, especialmente en cuestiones referidas a procedimientos y comprensión de conceptos. Estas reflexiones han llevado a que adquiera relevancia el estudio del rol que desempeñan las representaciones en "la construcción de los significados de la idea de derivada y en la introducción de tal concepto mediante el estudio de la variación con el uso inicial de contextos numéricos" (p. 276).

Otros investigadores estudiaron cómo los modos de representación gráficos influyen en la construcción de los significados por parte de los estudiantes. Suárez (2008) plantea que la graficación, en el contexto de la modelación, permite el desarrollo del razonamiento y la argumentación, por lo que las representaciones gráficas constituyen un medio que permite resignificar las situaciones relacionadas con la variación y el cambio. Esta idea se integra a la de que, previo al estudio del cálculo, se necesita de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico (Cantoral y Farfán, 2000).

1.4.4 Dificultades y errores

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de matemática se generan dificultades de distinta naturaleza y se pueden abordar desde distintas perspectivas.

En cuanto a las dificultades de acceso al cálculo, Artigue (1995b) manifiesta que son de diversa índole y se imbrican y refuerzan en redes complejas. Las organiza en tres grupos diferentes asociadas con:

- la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo,
- la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y a su tratamiento en la enseñanza, y

- la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.

Martínez, López, Gras y Torregrosa (2002) expresan que investigaciones realizadas por Artigue y Viennot (1987), Ferrini-Mundy y Gaudard (1992), Ferrini-Mundy y Geuther (1991), López (1991), Nagy et al. (1991), Orton (1983), Schneider (1991), Thompson (1994), Thompson y Thompson (1994) concluyen que las deficiencias y dificultades encontradas en el uso del cálculo diferencial tienen su origen, principalmente, en una enseñanza inadecuada, caracterizada por un enfoque meramente algorítmico.

Castañeda (2004) reporta los trabajos de Cantoral (2000), Valero (2000) y Muñoz (2000) en los que se muestra que se ha asumido el estudio de la derivada como el dominio de técnicas sobre expresiones algebraicas. Se fomenta el desarrollo de reglas que si bien son necesarias, no son suficientes para lograr una verdadera comprensión. Los estudiantes en general tienen un buen dominio algebraico pero no poseen habilidades como las aproximaciones numéricas, interpretación de estados o graficación de funciones. Esto provoca que no puedan usar el conocimiento en otras situaciones.

En su tesis doctoral, Dolores (1996) realizó un extenso análisis de la problemática relacionada con la enseñanza del cálculo diferencial e integral, con alumnos que cursan sus estudios secundarios y que comienzan sus estudios superiores. Concluye que, en condiciones ordinarias de enseñanza, los estudiantes escasamente desarrollan su pensamiento y lenguaje variacional. Las causas se relacionan tanto con los procesos de asimilación de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas como con la planificación y ejecución del proceso de enseñanza. Esta situación no es exclusiva de México, sino que se extiende a otros países latinoamericanos. El investigador señala que una de las dificultades en la formación del concepto de derivada puede estar dada por su introducción por la vía geométrica basada en la concepción de tangente formada en los alumnos ya que puede obstaculizar el paso de una concepción global (propia de la Geometría Euclidiana), a una concepción local (propiedad fundamental del cálculo), puede dificultar la aceptación de que la recta, además de tocar, pueda cortar a la curva y ser tangente en la zona del corte. El carácter estático de su determinación en la Geometría Euclideana, pues es estudiada como un lugar geométrico, puede dificultar el arribo a una concepción dinámica, como sucesión de secantes.

Serna (2007), en su tesis sobre el estudio de la tangente, se refiere también a esta problemática. Basándose en otros estudios (Artigue, 1998; García, 1998; González, 1999; Dolores y Guerrero, 2002) manifiesta que los estudiantes no están familiarizados con la derivada como pendiente de la recta tangente. Las causas parecen relacionarse no sólo con las dificultades propias de esta noción, sino también con la enseñanza. Siguiendo los planes de estudio, la idea de recta tangente se presenta en el desarrollo de la geometría euclideana. Posteriormente surge en el estudio de la geometría analítica, aunque es tratada más bien como la pendiente de una recta, asociando la pendiente con la tangente del ángulo de inclinación, por lo que en muy pocas ocasiones se considera la recta tangente sino lo que se toma frecuentemente es el número asociado, es decir la pendiente. Posteriormente, este tema se retoma en cálculo. Recién en esta instancia el alumno tiene necesidad de realizar una reconstrucción de la noción de tangente.

En el mismo trabajo expresa que, aunque se defina a la pendiente como un proceso de aproximación de una secante a la tangente, este significado se pierde después de un tiempo y no es bien aprendido por los estudiantes. Esto se manifiesta por ejemplo cuando se les pregunta por el signo que tiene la derivada en determinado punto, presentando dificultad para relacionarlo con el signo de la pendiente de la recta tangente en dicho punto. Cuando los alumnos se enfrentan a problemas en donde se encuentra involucrada la derivada no reconocen que en ella está presente el concepto de pendiente de recta tangente. En la enseñanza tradicional generalmente se termina dando a los estudiantes una serie de reglas a seguir con el objetivo de aprender a derivar, sin que esto necesariamente implique que entiendan la derivada. No se presentan los aspectos variacionales que caracterizan esta noción. Esto lleva a que se comprenda lo que es el cociente pero no se reconoce la idea de razón de cambio instantánea, ni tampoco queda clara la idea de dirección de una curva. El concepto de derivada no es construido íntegramente al no saber relacionar la recta tangente a un punto de una curva con la derivada evaluada en ese punto.

Más difíciles de franquear son aún las barreras que se desprenden de las consideraciones de la derivada como un límite. Dolores (2000) analizó distintos trabajos relativos a las dificultades significativas en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite en la noción de derivada (Sierpinska, 1985; Wenzelburger, 1993; Artigue, 1991; Vinner, 1992) como también en la resolución de problemas de aplicación de dicho concepto (Selden, Mason y Selden, 1992).

Cantoral (1988) estudió los aspectos conceptuales de la evolución de la noción de tangente y sus relaciones con la de derivada, centrándose en los obstáculos didácticos de origen epistemológico, que provocan dificultades inherentes al concepto mismo. Los alumnos no se percatan de que la manera usual de calcular la derivada en un punto, requiere que la variable independiente tome el valor prohibido, no admiten que la recta tangente a una curva diferenciable sea única y no aceptan que mediante un proceso infinito se logre obtener la pendiente de la recta tangente.

Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) investigaron las concepciones relativas a la lectura de gráficas cartesianas que representan movimiento físico. Trabajaron con 80 estudiantes de secundaria, 100 de preparatoria y 15 de la universidad, así como también con 13 profesores de física de secundaria y 40 de preparatoria. En especial centraron la atención en las nociones de velocidad media, velocidad instantánea y la trayectoria de cuerpos en movimiento que se desprenden de la lectura de gráficas cartesianas que incluyen coordenadas tiempo, distancia y posición. A partir de esto, discuten el significado de la derivada en el contexto del movimiento a través de gráficas cartesianas. Reportan que, a pesar de que el alumno haya estudiado el movimiento en la física escolar, las lecturas e interpretaciones de las gráficas que hace no son las mismas que las de los libros de texto y las de expertos. Los resultados no son mejores para los profesores.

Los investigadores expresan que tanto la matemática como la física se ocupan del estudio del movimiento. Además, la variación directamente proporcional tratada desde la escuela primaria en matemática es, hipotéticamente, el marco general para las modelaciones del movimiento rectilíneo uniforme tratadas en la física. Esto supone el establecimiento de correlaciones entre estas asignaturas por parte de los estudiantes y profesores. Por lo que indican los programas, se espera que los estudiantes puedan interpretar aceptablemente las representaciones cartesianas del movimiento, ya sea en el contexto matemático como en el físico. Pero los resultados mostraron que esto no tiene lugar realmente en la mente de los alumnos.

Algunas de las concepciones que detectaron en los estudiantes fueron asociar mayor velocidad (más precisamente mayor velocidad media) a la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o con el intervalo al que le corresponden las ordenadas de mayor altura. En cuanto a la velocidad negativa, los estudiantes y profesores la asociaron mayoritariamente con la gráfica cuyas ordenadas son negativas. Para el caso de la caída libre, la mayoría de docentes y alumnos, asociaron la gráfica cartesiana con la trayectoria del movimiento físico.

Dolores y Catalán (2000) llevaron adelante una investigación con el objetivo de propiciar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, especialmente el requerido para deducir la ecuación de la recta a partir de su comportamiento variacional y viceversa, a partir del comportamiento variacional deducir la ecuación correspondiente. Los 24 alumnos del bachillerato tecnológico con los que trabajaron se dedicaron más a realizar operaciones y mostraron escasa capacidad para visualizar y analizar gráficas. Cuando se utilizaron las gráficas para determinar los cambios, el 50% de los alumnos logró determinarlos, particularmente cuando se trataba de rectas decrecientes y los cambios de la variable dependiente eran negativos. Mostraron escasa comprensión de la ecuación $y = mx + h$. Sólo el 25% de los alumnos pudo interpretarla verbal y gráficamente, aunque los investigadores no se mostraron seguros de que hubieran utilizado la relación de variación directamente proporcional que encierra el coeficiente m.

En una investigación relativa al estudio de la derivada, Testa (2004) señala, a partir del estudio de bibliografía, de la observación de clases y de cuestionarios aplicados a alumnos y docentes, que el aspecto variacional de este concepto no juega un papel fundamental en los cursos, ya que sólo se tiene en cuenta su definición, su interpretación geométrica y su cálculo mediante reglas de derivación. La investigadora trabajó con 18 jóvenes, algunos cursantes de sexto año de secundaria y otros del segundo semestre de un estudio terciario. Indagó también a docentes de los alumnos entrevistados.

La autora expresa que la definición de derivada de una función en un real se refiere al cálculo de un límite, por lo que aparecen las limitaciones mencionadas anteriormente para este concepto. Además, con la definición no se pone en primer plano cómo cambia la función y la relación entre estos cambios y la función. Al introducir la derivada de una función en un número real, ya sea en los libros de texto como en los desarrollos de los cursos, generalmente se trabaja observando la variación de la recta secante para determinar que el límite de ésta es la recta tangente al gráfico. Pero luego este tipo de razonamiento es dejado de lado y se pasan a calcular analíticamente límites y no se realizan suficientes interpretaciones gráficas que permitan reforzar la idea de variación.

Al comenzar a aplicar reglas de derivación, los aspectos variacionales son olvidados. Para calcular la derivada de funciones muy sencillas, como por ejemplo del tipo $f(x)= ax$, los alumnos recurren frecuentemente a aplicar reglas, en este caso del producto. La derivada de esta función podría determinarse mentalmente si se tuviera en claro cuál es la función en juego y que la derivada está relacionada con su variación. Compartimos la opinión de Testa (2004) quien sostiene que si se promueve el trabajo excesivo con reglas, el estudiante tiende a establecer un fuerte vínculo entre el concepto de derivada y las técnicas de derivación, en detrimento de la relación establecida entre ésta y la variación de la función. Esto no significa que estas reglas deban ser abandonadas, ya que no es posible dejar de reconocer las ventajas de su uso, pero su utilización indiscriminada produce un alejamiento de los significados de los conceptos en juego.

En Argentina, Carabús (2002), luego de investigar sobre el aprendizaje del concepto de derivada en el nivel universitario, advierte la dificultad para adquirir el pensamiento funcional o variacional y el fuerte apego al pensamiento numérico y algebraico. Al aplicar un cuestionario a 100 alumnos de primer año de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca, detectó la dificultad que tienen para relacionar eficazmente los diferentes registros semióticos que permiten trabajar funciones y sus derivadas y relacionar puntos de vistas puntual, local y global en el tratamiento de las representaciones que han usado.

1.4.5 Enseñanza y aprendizaje de la derivada

En el marco de la educación matemática se han realizado un número considerable de investigaciones acerca de la derivada. Algunas de ellas proponen innovaciones didácticas para su tratamiento en el aula. En este apartado presentamos una síntesis de las más significativas para este trabajo, ya que sus propuestas sirvieron de base para las actividades de nuestra secuencia didáctica.

Azcárate (1990, en Azcárate y otros, 1996) analizó los perfiles cognitivos de los alumnos y su evolución a lo largo del proceso de aprendizaje, en el cual los conceptos de velocidad media e instantánea desempeñaban un papel importante. Sus estudios revelan la importancia de ofrecer itinerarios didácticos que faciliten los procesos de construcción comprensiva y paulatina de las concepciones de los individuos.

A partir de sus trabajos de investigación la autora manifiesta que en la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada es necesario partir de las concepciones previas que tienen los alumnos acerca de la velocidad, utilizar las representaciones gráficas de las funciones para visualizar las ideas, en especial la de razón de cambio media como pendiente de una recta y tener en cuenta las dificultades cognoscitivas que entraña el proceso de paso al límite. Señala que no se puede definir derivada efectuando el paso al límite sin haber consolidado conceptos básicos como velocidad, pendiente de una recta y tasa de variación.

Ante la constatación de la tendencia en la enseñanza de dedicar una gran parte de las actividades al aprendizaje de reglas de cálculo, sin basarse en la comprensión de los conceptos, resalta la importancia del uso de representaciones diversas, como pueden ser la gráfica, la numérica y la algebraica, que permita llegar a la máxima flexibilidad para relacionarlas y pasar de una a otra de manera de alcanzar representaciones mentales ricas, que reflejen muchos aspectos relacionados con el concepto.

Siendo el cálculo la matemática de la variación y el cambio, distintos investigadores coinciden en que el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional puede favorecer la comprensión de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas de este área de la matemática (Cantoral y Farfán, 2000; Dolores, 2000). Esta perspectiva es sugerida como camino a seguir en la enseñanza por investigadores como Cantoral, Wenzelburger, Dolores y sus grupos de trabajo.

“Estudiar qué es lo que varía -y cómo- en fenómenos cambiantes permite dotar a la derivada de significados que se alejan del manejo de fórmulas de derivación, hecho al cual se suele limitar su enseñanza” (Buendía y Ordóñez, 2009, p. 8).

Montiel (2005b) plantea que no se trata de trabajar con la derivada y sus estructuraciones conceptuales, sino modelar, medir, aproximar o calcular en situaciones de variación de manera de generar la necesidad de una herramienta que explique y resuelva dichas situaciones. En este sentido resulta significativo considerar la actividad que rodeó, acompañó y dio significado a la derivada en su contexto de origen.

Cantoral (1991) propone rediseñar el discurso matemático escolar desde el fondo, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de límite y poniendo en su lugar a la variación física, y expresa además:

> …en el terreno de la enseñanza, tendemos hacia la reconstrucción de una Didáctica del Cálculo basada en las intuiciones y vivencias cotidianas de los sujetos, mediante acercamientos fenomenológicos, por lo que se atiende más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto per se (p. 224).

Wenzelburger (1993) sugiere presentar las ideas fundamentales con un empleo mínimo de formalismo matemático y desarrollar métodos para cuantificar, describir y pronosticar cambios asumiendo a la razón de cambio como su concepto fundamental.

Señala que la enseñanza tradicional del cálculo, centrada en el estudio del límite, que define la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado, no contribuye a la comprensión de los conceptos de variación y cambio, negando a los estudiantes la aprehensión de la derivada y su aplicación en otros contextos. Esto no significa dejar este aspecto de lado, ya que sus aportes son fundamentales para la comprensión de la derivada. La autora plantea explorar “la manera en la cual la medida de una pendiente de una curva está relacionada con el concepto de razón de cambio” (p. 5).

En su propuesta parte de las razones de cambio promedio obtenidas a partir del estudio de fenómenos cotidianos y arriba a la derivada como razón de cambio instantánea mediante un manejo intuitivo de límite. Los problemas planteados requieren del concepto de pendiente ya que la razón de cambio de una magnitud respecto a otra es medida a través del cálculo de pendientes.

A partir de la problemática detectada de falta de comprensión de la derivada, Dolores (1999) elaboró una propuesta didáctica para su enseñanza a través de la formación de ideas variacionales, particularmente a través de la noción de rapidez de la variación. Las secuencias desarrollan las nociones de variación, comportamiento y graficación de una función, cambios de una función, rapidez, velocidad instantánea, cambios relativos e infinitos, y finalmente la noción de derivada.

Camargo y Guzmán (2005) presentan, como resultado de una investigación previa, una propuesta didáctica que pretende acercar a los estudiantes a la comprensión de las relaciones entre la pendiente de una recta y la razón de cambio. A partir de la identificación de un vacío curricular respecto de acercamientos variacionales al estudio de la pendiente, intentan contribuir a su conceptualización, aportando elementos cognitivos a los alumnos, de manera de construir vías de acceso al estudio del cálculo diferencial. Asumen que para que el concepto de pendiente contribuya a la formación del pensamiento variacional, debe procurarse la comprensión de su estrecha relación con la razón de cambio desde que se comienza con el estudio de funciones los primeros años de educación secundaria. La conceptualización de la pendiente a partir de la razón de cambio entre los incrementos de magnitudes posibilitará, posteriormente, la comprensión del proceso aproximativo que subyace a la construcción de la derivada.

Revisando los trabajos analizados hasta acá, observamos que los investigadores proponen que el primer contacto que los alumnos tengan con las nociones y conceptos del cálculo sea enfrentarlos con aquellas situaciones problemáticas que favorezcan de una manera natural su construcción. Ávila (2005) asegura: “Con este acercamiento didáctico, se propicia la comprensión de la derivada como herramienta para resolver problemas específicos de variación, a la vez que se le dota de significado físico y geométrico, previo a su formulación analítica” (pp. 27-28).

A partir de su investigación acerca de las estrategias de aprendizaje de los alumnos para poder apropiarse del objeto matemático derivada de una función, Carabús (2002) sostiene que la construcción del concepto de derivada, por parte del alumno universitario, se puede facilitar a la luz de la didáctica del cálculo, con el uso de los distintos marcos en que este concepto puede ser presentado (geométrico, algebraico, numérico, coloquial, gráfico, icónico e informático). Considera que esta estrategia didáctica funciona como movilizadora y facilitadora de la construcción del concepto de derivada porque en el contraste de marcos y lenguajes y las traducciones correspondientes, el alumno podrá ir construyendo las distintas *imágenes conceptuales*, que le permitirán acercarse al concepto matemático propio. Expresa que es necesario reforzar la enseñanza con diversos tipos de actividades que promuevan el uso inteligente de las representaciones gráficas de función y su derivada, y dar un verdadero estatus al razonamiento gráfico dentro del tratamiento del cálculo. La incorporación de las graficadoras y de los soportes informáticos del cálculo permite automatizar y, por lo tanto, facilitar y simplificar algunas de las posibles traducciones entre las representaciones funcionales.

A partir de estas suposiciones, diseñó y aplicó ingenierías didácticas que facilitan la apropiación del concepto derivada de una función en una variable real, de manera de favorecer la comprensión de este concepto, lo que lleva al mejoramiento del desempeño académico de los alumnos (Carabús, 2007). A partir de la valoración de los resultados obtenidos, la investigadora recomienda asociar la noción de derivada de una función a la noción de razón de cambio o tasa de variación instantánea, es decir, con situaciones que impliquen dependencia y variabilidad, de manera que los alumnos pueden contextualizar el concepto de derivada, con aspectos vinculados a su génesis histórica-epistemológica. Expresa además la necesidad de crear situaciones de enseñanza a través de ingenierías didácticas que se propongan al alumno que le permitan alcanzar la solución por motivaciones de origen matemático y no sólo por los acuerdos implícitos del contrato didáctico. Reconoce el uso de diferentes marcos y registros como una herramienta muy útil para la visualización de los conceptos matemáticos, en particular el de derivada, aportando significado y sentido a lo estudiado y facilitando la comprensión, por lo que considera que debe ser un presupuesto básico en el diseño de las ingenierías didácticas. Si bien en primera instancia supone que los niveles de comprensión están relacionados con las situaciones didácticas puestas en juego, de la investigación surge la necesidad de hacer intervenir la variable sistema didáctico (profesor, alumno, saber), que a su vez están afectados por el contrato de enseñanza, en el que influyen las concepciones de matemáticos, profesionales y la sociedad en general. Esto significa tener en cuenta un modelo matemático de carácter sociocultural.

1.5 Justificación de la investigación

El cálculo es la rama de la matemática a la que se dedica mayor tiempo en los currículos iniciales de distintas carreras universitarias, ya sea en las ciencias exactas y tecnológicas, como biológicas o sociales.

El cálculo infinitesimal fue desarrollado gracias a la introducción de la matemática del cambio. Durante los siglos XVI y XVII, dada la necesidad de resolver problemas de movimiento de los astros, el flujo de los líquidos, el movimiento de un cuerpo, entre otros, aparecieron nuevos métodos matemáticos para su resolución. Desde esa época surge la necesidad de medir los cambios.

Los cambios que ocurren en la sociedad, economía, naturaleza, en nuestra vida cotidiana, tienen distintos comportamientos. Algunos cambios ocurren de manera uniforme, otros lo hacen abruptamente, algunos cambian a cada instante. La medición de estos cambios y la variación están estrechamente ligadas. La matemática juega su rol principal cuando es necesario cuantificar o medir cualquier fenómeno y las variaciones que se producen. En matemática se crean modelos abstractos para describir dichos fenómenos y la medición del cambio de esos fenómenos es un aspecto esencial de la variación y el elemento eje en la formación del concepto de derivada. El cálculo tiene reconocida su importancia porque permite encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos, predecirlos. La derivada es el objeto matemático que permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.

Son múltiples sus aplicaciones, ya sea en el ámbito de la matemática como en situaciones correspondientes a otras ciencias. Relacionadas con la Ingeniería Agronómica, podemos citar, a modo de ejemplo, el estudio del movimiento de los cuerpos, el estudio del comportamiento fisiológico de plantas y animales, aplicaciones en la generación, transformación y uso de distintas formas de energía, la optimización de sistemas físicos y modelos económicos, entre otras.

Además, como fue planteado anteriormente, en los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo, el número de dificultades que se presentan es importante. Con el objetivo de entender el proceso de construcción de los conceptos y procesos matemáticos es necesario analizar las ejecuciones de los alumnos ante las tareas propuestas y las razones por las que su pensamiento matemático opera como lo hace, aún en el caso de que sus respuestas o producciones no correspondan con nuestro conocimiento. Con frecuencia, los alumnos construyen explicaciones inadecuadas e incluso erróneas desde el punto de vista matemático y descubren relaciones entre diferentes estructuras del saber matemático sin que ello haya sido parte explícita de la enseñanza. En este sentido, resultan aportes valiosos los avances logrados en el marco de los proyectos de investigación "El error como organizador didáctico en el aprendizaje de matemática" y “Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del cálculo en carreras no matemáticas”, en los que trabajamos entre los años 2000 y 2008 los docentes de Matemática de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral.

En los dos proyectos realizamos una clasificación, categorización y análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje que nos permiten ayudar a nuestros alumnos en sus problemas, sus carencias de sentido de los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática. Además generamos y pusimos a prueba secuencias didácticas articuladas en torno a diferentes organizadores priorizando el tratamiento de los errores para detectar dificultades en la formación de conceptos y realimentar el proceso de aprendizaje. Abordamos especialmente el tema funciones y algunos contenidos básicos del cálculo (la recta real, límite, continuidad, derivada).

Actualmente trabajamos en el proyecto “Pensamiento y lenguaje variacional: bases para la construcción de conceptos del cálculo diferencial”, en el que seguimos indagando acerca de los obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de conceptos del cálculo diferencial y avanzamos en el diseño, puesta en práctica y evaluación de secuencias didácticas que susciten el aprendizaje significativo de conceptos básicos (función, derivada, función derivada, comportamiento de funciones) articuladas en torno a la idea de variación y cambio.

La revisión de los antecedentes nos permite asegurar que la problemática planteada en este trabajo está vigente y que varios investigadores en el ámbito de la educación matemática intentan darle solución. Hasta el momento se realizaron aportes y estudios muy serios en relación a la enseñanza y aprendizaje del cálculo desde un enfoque centrado en el pensamiento y lenguaje variacional pero faltan acciones concretas que permitan superar ampliamente los niveles meramente descriptivos y teóricos especialmente en el nivel universitario.

El gran trabajo desarrollado en didáctica del cálculo así como en relación a los proyectos de innovación en su enseñanza aún no han logrado los resultados esperados en el interior de las prácticas institucionales y en las aulas. Se nota una gran brecha entre la realidad del aula (innovación) y las investigaciones científicas (Moreno, 2005).

Lo desarrollado describe de una manera breve las motivaciones y preocupaciones que fundamentan y dan sentido a la investigación propuesta. Ésta pretende contribuir al desarrollo de las investigaciones en educación matemática. Con sus aportes se espera:

- Profundizar y compartir conocimiento sobre pensamiento matemático y procesos de aprendizaje matemático relacionados con el tema propuesto.
- Estimular la acción práctica y reflexiva sobre procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Desarrollar secuencias didácticas sustentadas en las aproximaciones teóricas con el fin de ser usadas por los alumnos, favoreciendo el desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional así como el aprendizaje significativo de la derivada.
- Reflexionar sobre nuestras prácticas de enseñanza.

La investigación aspira a lograr una mejora en la enseñanza y el aprendizaje de la derivada propiciando el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de nuestros alumnos.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN

Se desarrollan brevemente los fundamentos teóricos bajo los cuales se realizó el estudio.

En primer lugar se describen algunos marcos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, haciendo especial referencia a la educación matemática y, dentro de ella, a la aproximación socioepistemológica y a la línea del pensamiento y lenguaje variacional, que permiten caracterizar y encuadrar la presente investigación.

Posteriormente se exponen, ya como marco teórico específico, los fundamentos de la teoría de las situaciones didácticas y las bases de la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica. Para cada una de ellas, los obstáculos, dificultades y errores cumplen un rol importante. En el apartado final analizamos cómo se interpretan estos elementos desde ambas teorías.

2.1 Marco teórico general

La investigación propuesta se plantea desde la perspectiva de la educación matemática. La preocupación por la educación matemática surge hace muchos años como actividad de enseñanza y aprendizaje. Hacia fines del siglo XIX, y buscando una mayor y mejor formación de profesores en el nivel superior, surge como un campo profesional y comienza a construir su propia identidad. Sin embargo, durante la segunda mitad del siglo veinte, logra su mayor difusión. A partir de ese momento, comienza a afianzarse y se desarrolla notablemente en diferentes lugares del mundo.

La educación matemática o matemática educativa se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático. Su propósito consiste en explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático y cómo desarrollan una manera matemática de pensar. Cantoral (2003b, p. 208) expresa:

> El nombre de Matemática Educativa da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de Mathematics Education, mientras que en Europa continental le han llamado Didáctica de las Matemáticas, Didactique des Mathématiques, Didaktik der Mathematik, por citar algunas de las escuelas más dinámicas.

Sin importar la denominación adoptada, hacemos nuestras las palabras de Cantoral (1995, pp. 2-3):

> La matemática educativa no es la enseñanza de la matemática, ni la matemática escolar una simplificación de la matemática. Su objeto de estudio son “los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar."...

> No nos reducimos a la búsqueda de una «buena manera de enseñar» una cierta noción previamente fijada, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber.

Dado que los procesos mentales humanos poseen una relación esencial con los escenarios culturales, históricos e institucionales, se presenta un marco según el cual es posible hablar de distintas formas de pensar matemática al considerar que el escenario modifica dichos pensamientos. En este contexto, enseñar es crear las condiciones que permitan la apropiación del conocimiento por parte del alumno y, aprender, es hacer suya una situación cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento en su doble estatus de herramienta y de objeto.

Esto lleva a considerar los fenómenos didácticos insertos en un medio que influye y es influido por los tres polos: el del saber, el de quien aprende y el de quien enseña.

Teniendo en cuenta esta necesidad encuadramos este trabajo en la aproximación *socioepistemológica*.

Desde este acercamiento toda investigación requiere de una aproximación sistémica que permite incorporar la componente social a la construcción del conocimiento matemático.

> La *socioepistemología,* o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple, pues articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2004, p. 1).

De esta manera, en una investigación socioepistemológica aparecen involucradas cuatro componentes:

- Epistemológica: relativa a las prácticas que dan origen a la construcción de los conocimientos,
- Cognitiva: relacionada a los procesos de construcción de los conocimientos por los alumnos,
- Didáctica: propias de la conformación de los distintos sistemas didácticos y
- Social: que trata cómo se desarrollan y viven en nuestro entorno las prácticas que dan lugar a los conocimientos.

La perspectiva socioepistemológica hace énfasis, no sólo en el cómo enseñar, sino también en el estudio de qué enseñar, incluyendo las intuiciones primarias del alumno con el objetivo de rediseñar el discurso matemático escolar. Este acercamiento permite que el estudiante encuentre las razones que determinan que estudiar cierto tema sea importante, lo que llevará a que pueda ver el tema considerado, y paulatinamente a la matemática, como algo que debe ser estudiado no sólo porque es impuesta, sino por las razones que le dan significado.

Coincidimos con Montiel (2005a) quien expresa que, de esta manera, se desvía el centro de atención de la componente epistemológica, de los conceptos y objetos matemáticos a la identificación de prácticas de referencia y actividades, ubicadas en escenarios particulares.

Cantoral (2003b, p. 209) expresa:

> Este doble proceso de desarrollo que se nutre de la reflexión matemática al seno de lo didáctico por una parte y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción social e individual del conocimiento, ha sido en nuestra opinión, una de las principales y más recientes contribuciones de nuestra disciplina: la Matemática Educativa.

Bajo esta aproximación se encuentra la línea del *pensamiento y lenguaje variacional*, la que trata sobre las relaciones entre la matemática de la variación y del cambio, así como de los procesos y los mecanismos funcionales del pensamiento matemático (Cantoral y otros, 2003). Los trabajos enmarcados en este programa buscan tender puentes entre la investigación y la realidad del aula.

Es una línea de investigación que tiene una triple orientación. Se ocupa por un lado de estructuras variacionales desde un punto de vista matemático y epistemológico. Por otro lado, analiza las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades. En tercer lugar tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela, el laboratorio y la vida cotidiana.

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral y otros, 2003, p. 185).

Es en este sentido que nuestro trabajo se encuadra en esta línea de investigación.

2.2 Marco teórico específico

Lo hasta aquí descrito conforma el marco teórico general de la investigación. Enmarcar la investigación en la aproximación socioepistemológica y, en particular, en el pensamiento y lenguaje variacional nos permitirá construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos de producción y difusión de conocimientos desde una perspectiva múltiple. El marco teórico específico, que tiene por propósito dotar a la investigación de un sistema coordinado de nociones y proposiciones que permitan explicar, describir, justificar, analizar, fundamentar y argumentar, tanto las indagaciones como las interpretaciones, en el abordaje del problema planteado, está constituido por la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, necesaria como sustento para el desarrollo de la ingeniería didáctica y la teoría de los registros semióticos de Duval, como marco teórico de comprensión de los objetos matemáticos. Como elemento común a ambas teorías, se analizan en el último apartado el papel de los obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje.

2.2.1 La teoría de las situaciones didácticas

La teoría de las situaciones didácticas forma parte de la educación matemática y surge de la necesidad de disponer de un modelo de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el que se encuentren representadas todas las relaciones y operaciones que intervienen en este proceso. En ella quedan comprendidos los contenidos matemáticos, las problemáticas del profesor y del alumno y todo lo relacionado con el estudio de la matemática. Su principal propósito es comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje y las formas en que interactúan, pero también pretende desarrollar medios racionales para controlar y optimizar tales situaciones didácticas.

Tuvo su origen en Francia y, a lo largo de los años, se ha desarrollado e implementado en diversos sitios del mundo. Fue iniciada por Brousseau y los resultados alcanzados son tan importantes que su maduración ha determinado también la evolución de la didáctica de la matemática. Actualmente se trata de extender a otros dominios del conocimiento y a diferentes niveles de escolaridad.

Con esta teoría se estudian y modelan fenómenos didácticos que ocurren cuando un profesor se propone enseñar. En este contexto, las palabras enseñar, aprender, pensar, saber, adquieren diversos significados (Cantoral, 2003b).

Brousseau (2004, en González, 2006, pp. 63-64) explica las motivaciones que lo llevaron a crear la teoría de las situaciones didácticas:

> El deseo de ofrecerles [a las personas que querían dar a los estudiantes el placer de maravillarse al enfrentar una cuestión matemática, de impresionarse por una idea, de ser cautivados por un conocimiento que quieren aprender, de comprender, poseer y, recíprocamente, excitarse con la idea de compartir este placer] este placer me llevó a imaginar situaciones específicas, provocaciones didácticas que pudieran ser implementadas hábilmente si las disfrutaban. Y siempre tuve curiosidad por saber qué iban a decir sobre ello o hacer con ellas sus estudiantes.
>
> Estas tres claves me llevaron a:
>
> - considerar el aprendizaje matemático y las condiciones de enseñanza – incluso las aparentemente modestas – como sistemas, que yo denomino situaciones, e intentar anticipar su evolución,
> - determinar las condiciones de observación científica de las actividades didácticas, ya sean espontáneas o sugeridas, mientras se respeta no sólo a las personas sino también a sus funciones,
> - ser cauto con los efectos que un uso directo y casi mágico del conocimiento generado a partir de otros dominios científicos puede tener en la enseñanza.

Para Brousseau, el entrenamiento en el comportamiento puede no estar mal, pero suele ser inexorable. Mientras el profesor más indique el comportamiento perseguido en los estudiantes, más fácil será para ellos mostrar ese comportamiento sin generarlo realmente. Si se espera que los alumnos aprecien la matemática, piensen matemáticamente y sean capaces de resolver problemas diferentes, entonces hay que educarlos en ese sentido. Si se dedican al trabajo matemático y no a la mera resolución de ejercicios rutinarios, pronto los estudiantes comenzarán a disfrutar y apreciar el trabajo con ideas matemáticas, en lugar de simplemente trabajar a través de ellas.

La teoría de las situaciones didácticas no se trata de una teoría cognitiva. Su objeto central no es el sujeto cognoscente, sino la situación didáctica. Fue inspirada inicialmente por el constructivismo y la epistemología de Piaget. Propone un modelo desde el cual la enseñanza es un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos en el ámbito escolar. El aprendizaje resulta en una adaptación (en algún sentido biológico) a "situaciones problemáticas".

Concibe además la matemática como un conjunto organizado de saberes producidos por la cultura. La enseñanza se convierte de esta manera en una actividad que concilia dos procesos, uno de enculturación y otro de adaptación relativamente independiente (Brousseau, 1997).

Su característica más importante es la consideración de los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje desde un enfoque sistémico centrado en tres componentes fundamentales: el saber, el o los alumnos y el profesor. El funcionamiento didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes, su ambición es abarcar el conjunto de hechos de enseñanza de la matemática y el conjunto de actividades y de relaciones mutuas de los actores presentes. En este planteamiento es fundamental el medio, que abarca el conjunto de límites dentro de los cuales el alumno puede actuar libremente y ejercer su racionalidad. Estos límites deben, a su vez, garantizar el funcionamiento de la actividad.

Además está el mundo exterior a la escuela, los padres, los matemáticos, la sociedad en general y una zona intermedia que recibe el nombre de noosfera, donde se realiza la articulación entre el sistema didáctico y su entorno y que está compuesta por todas las personas que elaboran los contenidos y métodos de enseñanza.

A continuación se analizan las cuestiones fundamentales sobre cada uno de los polos que componen el sistema didáctico.

El saber matemático

El saber constituye el objeto principal de la enseñanza, tiene una historia particular, mantiene relaciones culturales y sociales con el exterior de la clase, las que determinan en gran parte el contenido a enseñar y la forma de hacerlo. El saber constituido se presenta bajo distintas formas, por ejemplo de preguntas y respuestas.

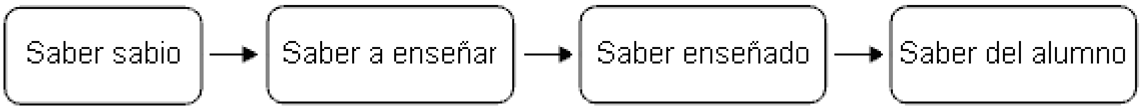
Es posible distinguir entre el "saber sabio" (saber científico) y el "saber a enseñar". El primero es aquel conocimiento producido por matemáticos, universitarios o investigadores. De todo el saber acumulado a lo largo de la historia, no todo se enseñará en la escuela. Una parte de ese saber es seleccionado (por la noosfera), según diferentes criterios, por ejemplo por ser de gran utilidad social, para ser enseñado, pero es necesario transformar este saber para hacer posible su enseñanza a cierto nivel. Surge así el “saber a enseñar” que resulta de una serie de ajustes didácticos que lo hacen diferente cualitativamente de los saberes de referencia.

En matemática es clásica la presentación axiomática, que, además de sus virtudes científicas, parece perfectamente adaptada a la enseñanza. Permite definir los objetos que se estudian con ayuda de las nociones previamente introducidas, favoreciendo la adquisición de nuevos saberes sirviéndose de adquisiciones previas, acumulando ciertos “saberes” bastante próximos al “saber erudito”.

Pero durante la enseñanza se deja de lado completamente la historia de los saberes, cuáles fueron las preguntas que han provocado la aparición de nuevos conceptos, el rechazo de puntos de vista inadecuados, etc.

Hay una completa despersonalización del “saber sabio” al transformarlo en “saber a enseñar”. La transformación está determinada por las características del contenido que se desea enseñar, las restricciones sociales y culturales que actúan en la selección del contenido de la enseñanza, las características de enseñanza fijadas por los programas y los modos de desarrollo cognitivo de los alumnos que condicionan el acceso al nuevo saber.

El “saber a enseñar” cambia nuevamente cuando es llevado al aula constituyéndose en un “saber enseñado”, ya que el profesor toma los objetos del saber escolar y los organiza de acuerdo a su conocimiento, a su propia relación al saber y a sus propias hipótesis de aprendizaje.



Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El “trabajo” que transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado transposición didáctica (Chevallard, 2005).

Dado un objeto conceptual, “saber” o “conocer” dicho objeto no es un concepto absoluto, sino que depende de la institución en que se encuentra el sujeto. Se trata de entender y modelizar la situación social de clase en la que el alumno encuentra objetos y trabaja con ellos.

El alumno

Saber matemática no es solamente saber definiciones y teoremas y reconocer la ocasión para utilizarlos y aplicarlos, es resolver problemas y lo que es más importante aún es plantear nuevos problemas.

El trabajo del alumno debería, al menos en parte, reproducir las características del trabajo científico propiamente dicho, como garantía de construcción efectiva de conocimientos pertinentes. Una buena reproducción para el alumno de una actividad científica exigiría que actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que las cambie por otras, que reconozca las que se adaptan a su cultura, que recurra a las que le son útiles, etc. (Brousseau, 1986).

Sin embargo, no se trata simplemente de imitar el ambiente científico en que el conocimiento fue establecido originalmente. La esencia del trabajo didáctico es construir situaciones artificiales adecuadas a las condiciones pedagógicas. Las situaciones son específicas del conocimiento.

Con respecto al aprendizaje matemático se adopta una perspectiva piagetiana, ya que se postula que todo conocimiento se construye por interacción constante entre el sujeto y el objeto, distinguiéndose de otras teorías constructivistas por su modo de afrontar las relaciones entre el alumno y el saber. La jerarquización de estructuras mentales se desarrolla a partir de los contenidos.

El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Estos saberes, fruto de la adaptación del alumno, se manifiestan por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986).

El profesor debe proponer al alumno “problemas” que provoquen en este último las adaptaciones deseadas. Estos problemas deben ser tales que lleven al alumno a pensar, reflexionar, hablar, actuar y evolucionar por sí mismo. El alumno debe saber que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, como también que ese conocimiento está justificado por la lógica interna de la situación y que es capaz de construirlo.

En esta teoría las situaciones del aula se modelizan en distintos niveles, distinguiéndose fundamentalmente los niveles didáctico y a-didáctico.

Según la definición de Brousseau (1986), una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidos entre un alumno o grupo de alumnos, en un cierto medio, comprendiendo eventualmente, instrumentos u objetos y, un sistema educativo (el profesor) con el fin de posibilitar a los alumnos un saber constituido o en vías de constitución.

La situación didáctica da forma y precisa los procesos adaptativos que los estudiantes pueden desarrollar y, de esta manera, el conocimiento matemático que puede ser construido. Resulta fundamental la suposición de que, sin entender la situación, no se puede interpretar el comportamiento de los estudiantes en términos cognitivos.

El proceso de resolución de un problema se compara a un juego o a un proceso de toma de decisiones y le da importancia crucial al resolutor. Para que el alumno construya el conocimiento es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En tal caso se dice que se ha logrado la devolución de la situación al alumno. Si el alumno se convence de la necesidad de resolver el problema, aceptándolo como problema suyo y no del profesor, y consigue éxito en su empresa, se inicia el proceso de aprendizaje. Hay varias etapas entre la devolución del problema y un aprendizaje efectivo.

Cuando el alumno se vuelve capaz de poner en funcionamiento y utilizar por sí mismo el saber que está construyendo, en cualquier contexto de enseñanza, incluso en ausencia del profesor, ocurre lo que se ha llamado situación a-didáctica. Este tipo de situaciones son las más importantes del aprendizaje porque el alumno por sí mismo logró un conocimiento.

Teniendo en cuenta las interacciones de los alumnos con su medio, pueden distinguirse distintos tipos de situaciones:

- *Situaciones de acción,* en las que se produce una interacción entre los alumnos y el medio. Los alumnos deben tomar las decisiones necesarias para organizar la resolución del problema planteado.
- *Situaciones de formulación,* en las que el alumno comunica las formulaciones, resultado de las acciones. Para intercambiar con otros alumnos, deben adecuar su lenguaje y utilizar símbolos y reglas propias del lenguaje matemático.
- *Situaciones de validación,* que requieren de los alumnos la explicitación de pruebas. Se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen.

Hasta acá puede decirse que el alumno juega el papel de descubridor de un nuevo conocimiento, a través de intervenciones, formulaciones, pruebas, su interacción con otros, construcción de modelos, conceptos, teorías, lenguajes, es decir, a través de una actividad matemática en el sentido amplio de la palabra. Sin embargo, a este nivel, el alumno no es capaz de reconocer el conocimiento que ha adquirido, debe identificar el nuevo conocimiento como un objeto matemático independiente del contexto que le dio origen. En este punto la actividad del profesor es fundamental, pues debe intervenir con el fin de dar lugar a las llamadas:

- *Situaciones de institucionalización,* cuyo objetivo es establecer convenciones sociales. Se intenta que los alumnos asuman el significado socialmente establecido de un saber que ha sido construido por ellos durante la actividad de la clase, en situaciones de acción, formulación y validación.

El profesor

Para Brousseau (1986), el profesor debe provocar en el estudiante la adquisición de un saber cuyo sentido y funcionamiento sean satisfactorios. Para esto es fundamental una elección adecuada de los problemas que propone, de manera de suscitar las adaptaciones deseadas.

En este sentido, el trabajo del profesor debe ser, en cierta medida, inverso al del investigador, proporcionando a los alumnos los medios que les permitan una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos (Brousseau, 1986).

El alumno aprende matemática “haciendo”. El profesor debe proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivenciar y construir los conocimientos matemáticos como una solución a las mismas. Para un profesor, enseñar se refiere a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes (Douady, 1995).

El objetivo es, entonces, hacer matemática, resolviendo problemas y planteando nuevas cuestiones. En las situaciones didácticas, el profesor intenta hacer saber al alumno lo que quiere que haga. Esto debería provocar en el alumno la puesta en acción del conocimiento buscado. El profesor, por lo tanto, no busca tanto la comunicación de un conocimiento, sino la devolución de un problema. Si la devolución se produce, el alumno entra en el juego y si gana, el aprendizaje se ha realizado. Pero puede ocurrir que el alumno no quiera o no pueda resolver el problema. El profesor tiene entonces la obligación social de ayudarlo.

Se establece una relación que determina lo que el profesor y el alumno tienen la responsabilidad de administrar en una situación. Brousseau (1986) define el “contrato didáctico” como este sistema de obligaciones recíprocas que se establece entre cada uno de los actores de una situación didáctica con respecto al conocimiento en cuestión. Es el resultado de una negociación, sobre todo implícita, de las modalidades de establecimiento de las relaciones entre un alumno o un grupo de alumnos, un determinado medio y un sistema educativo.

Lo que enseña el profesor en el aula es el fruto de las interpretaciones que hace de los programas y de los contenidos de los textos. Las representaciones que tiene el profesor de su disciplina, de la enseñanza y del aprendizaje influyen en la elección de estrategias de aprendizaje. Las transformaciones que sufre el saber al entrar en el aula, están determinadas por las relaciones, generalmente implícitas, entre el profesor y el alumno (el contrato didáctico). El desarrollo de las situaciones didácticas modifica el contrato y da lugar a nuevas situaciones didácticas.

El medio

Brousseau plantea que en el proceso de producción de conocimientos son básicas las interacciones del alumno con cierta situación problemática y la interacción del docente con el alumno. A partir de esto plantea la necesidad de un medio.

Una “situación” es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. El recurso de que dispone el sujeto para alcanzar o conservar un estado favorable con este medio es un conjunto de decisiones que dependen del uso de un conocimiento dado.

Son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. Lo que se necesita modelizar, entonces, es el medio. Un problema o un ejercicio no pueden considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, un medio que responde al sujeto siguiendo determinadas reglas.

En primer lugar, el medio debe ser factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios y, por lo tanto, adaptación para el estudiante. Para que esto ocurra y las interacciones con el medio sean, de esta manera, productoras de nuevos conocimientos, es necesario que el estudiante pueda utilizar los conocimientos de los que dispone para intentar controlar este medio, y, a su vez, recibir retroacciones del mismo que le muestren la insuficiencia de sus medios de control.

En segundo lugar, el medio debe permitir el funcionamiento autónomo del estudiante. Para esto debe posibilitar el funcionamiento del conocimiento como producción libre del estudiante y debe permitir al estudiante experimentar con el saber anteriormente adquirido, movilizándolo como conocimientos operativos en la situación.

Además, debe conducir al dominio de saber matemático identificado como tal, y no solamente de conocimientos. Las interacciones entre sujeto y medio son productoras de conocimiento, mientras que los saberes a enseñar son designados por la institución enseñante. El profesor debe determinar la o las situaciones y los medios correspondientes que permitan al estudiante hacer funcionar el saber bajo la forma de conocimientos y hacer posible su institucionalización. Debe tratar de asociar al saber los conocimientos correspondientes.

Esto implica un trabajo de reflexión sobre las situaciones y sobre las acciones realizadas a partir de las mismas. Un medio sin intenciones didácticas es insuficiente para inducir en el estudiante todos los conocimientos que se desea que él adquiera. En este sentido se rescata la posición del profesor como representante del saber matemático y su responsabilidad de dar al medio las características que permitan el logro de una intención de aprendizaje concebida previamente.

2.2.2 La teoría de los registros semióticos

Diversos enfoques teóricos describen el papel de los sistemas de representación en el aprendizaje de la matemática, considerando como hipótesis que las transformaciones entre los sistemas de representación de los objetos matemáticos pueden facilitar la emergencia de dichos objetos en los estudiantes (Contreras y Font, 2002).

Para Dreyfus (1991), la comprensión es un proceso que se produce en la mente del estudiante, siendo la generalización y la síntesis los procesos involucrados en la abstracción. Expresa que un hecho que distingue un proceso de pensamiento elemental de uno avanzado es su complejidad y la manera en que se tratan ambos. Las formas más importantes de enfrentarse a esa complejidad son la representación y la abstracción. Es importante que las concepciones de los alumnos abarquen diferentes representaciones y que éstas se complementen entre sí, integrando una sola representación del objeto, lo que permite llegar a la abstracción.

En esta tesis se consideran las representaciones desde el punto de vista de Duval (1998), quien expresa que las representaciones semióticas de un objeto son absolutamente necesarias para poder representar una idea o un objeto matemático. Juegan un papel esencial en el desarrollo de representaciones mentales, en el cumplimiento de diferentes funciones cognitivas y en la producción de conocimiento, aumentando la capacidad de pensamiento del sujeto sobre ese objeto y por lo tanto su conocimiento del mismo. Son ejemplos de representaciones semióticas distintas, un enunciado verbal, una fórmula algebraica, una gráfica, una figura geométrica.

Duval (1996, 1998) formula algunas hipótesis que permiten fundamentar su teoría:

- La comprensión no está ligada estrictamente a los contenidos matemáticos, sino a la naturaleza de las actividades y de los desempeños que se exigen. Es fundamental el estudio del funcionamiento cognitivo implicado por el aprendizaje requerido.
- No hay conocimiento que pueda ser movilizado por un sujeto sin una actividad de representación.
- El pensamiento humano se caracteriza por la movilización de muchos sistemas de representación. En matemática, son los sistemas semióticos los principales componentes de la arquitectura cognitiva que permiten al individuo entender esta disciplina.

Duval se interesó por los problemas de manipulación dentro de un sistema matemático de signos y por los problemas de conversión de representaciones entre dos o más sistemas de un mismo objeto matemático, generando una nueva noción, la de registro de representación.

El investigador entiende por registro de representación un conjunto de signos utilizados para representar una idea o un objeto matemático (Duval, 1998). Para que un sistema semiótico pueda ser considerado un registro de representación, debe presentar tres características fundamentales: ser identificable, permitir el tratamiento, y por último, posibilitar la conversión.

Estas características están relacionadas con diferentes actividades cognitivas. La primera implica la formación de una representación identificable como una representación de un registro dado. Puede ser la enunciación de una frase, el dibujo de una figura geométrica, la escritura de una fórmula, etc. Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar, que se hacen en función del registro semiótico en el que se está trabajando.

El tratamiento de una representación consiste en la transformación de esta representación en el mismo registro donde ha sido formada. Es una transformación interna a un registro. Por ejemplo, el cálculo es una forma de tratamiento propio de las escrituras simbólicas (cálculo numérico, cálculo algebraico, cálculo proposicional, etc.).

La conversión es la transformación de una representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o parte del contenido de la representación inicial. Se trata de una transformación externa al registro de partida. Por ejemplo, la *ilustración* es la conversión de una representación lingüística en una representación figural.

La actividad matemática se basa siempre en alguna secuencia de cambios sucesivos de una representación a otra. El uso de distintas representaciones para un mismo objeto aumenta la capacidad de pensamiento del sujeto sobre ese objeto y por lo tanto su conocimiento del mismo. Por eso es importante tener en cuenta que siempre hay muchas representaciones posibles de un mismo objeto. Cada representación proporciona un contenido diferente según el sistema utilizado para su producción, pero siempre el objeto representado se mantiene invariante (Duval, 2008).

Jamás se debe confundir a los objetos matemáticos con sus representaciones. Esto llevaría a una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos pronto serían inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje. Resulta fundamental la distinción entre un objeto y su representación: *"Es el objeto representado lo que importa y no sus diferentes representaciones semióticas posibles"* (Deledicq&Lassave, 1979, en Duval, 1998, p. 174). Se produce lo que el investigador llama *paradoja cognitiva del pensamiento matemático.* El aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser sino un aprendizaje conceptual y, por otro lado, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede volverse un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. No hay manera de que, quienes están en proceso de aprendizaje no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas, siendo que la única relación que tienen con ellos es a través de esas representaciones. Y, a la inversa, no es posible que adquieran dominio de los tratamientos matemáticos ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados. Esta situación se acentúa más si se identifica actividad matemática con actividad conceptual, considerando las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas.

Duval (2000, citado por Contreras y Font, 2002, p. 2) afirma: "Aprender Matemáticas consiste en el desarrollo de coordinaciones progresivas entre variados sistemas semióticos de representación" y también: "Aprender Matemáticas es aprender a discriminar y coordinar los sistemas semióticos de representación para llegar a ser capaces de transformar cualquier representación".

Por lo general en la enseñanza se tiene en cuenta la formación y el tratamiento pero no la conversión, pues se supone que esta actividad cognitiva se da por sí misma. Sin actividades que permitan la coordinación de al menos dos registros de representación no hay aprendizaje (Duval, 1998).

De esta manera, si la conceptualización y el aprendizaje implican una coordinación de registros de representación, los aprendizajes básicos en matemática no pueden apostar sólo a la automatización de ciertos tratamientos o la comprensión de nociones, sino que también deben apostar por la coordinación de los diferentes registros de representación movilizados para estos tratamientos o para esta comprensión (González, 2006).

"Ver los conceptos en múltiples registros y desde múltiples perspectivas permite a los estudiantes organizar mejor su conocimiento. Esto se considera una condición cognitiva necesaria para el aprendizaje" (Robert y Speer, 2001, en González, 2006, p. 50).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores más observaciones de experiencias propias, se adopta la premisa teórica de los sistemas semióticos de representación en el sentido que no sólo son necesarios para fines de comunicación sino que resultan imprescindibles para la actividad cognoscitiva del pensamiento. En este marco, el aprendizaje se caracteriza como la habilidad para moverse por distintos sistemas de representación.

2.2.3 Obstáculos, dificultades y errores

La construcción del conocimiento no es un proceso continuo, surge de desequilibrios, rupturas con conocimientos anteriores, reconstrucciones. El aprendizaje por adaptación al medio implica rupturas cognitivas, acomodaciones. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio de las situaciones y del comportamiento de los alumnos (Brousseau, 1983).

Socas (1999) organiza las dificultades en el aprendizaje de la matemática en cinco categorías:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de la matemática.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática.

Cada grupo se relaciona con distintos aspectos. Las dos primeras se asocian a la propia disciplina (objetos matemáticos y procesos de pensamiento), la tercera se relaciona a los procesos de enseñanza, la cuarta está ligada al desarrollo cognitivo de los alumnos y la última a la falta de una actitud racional hacia la matemática. Todas estas dificultades se conectan y se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas.

Bachelard (1985) planteó la noción de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de errores. El concepto no se refiere a las dificultades desorganizadas o derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos.

Esta noción fue retomada por Brousseau para la didáctica de la matemática. Para él, el conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo. Estos son en sí un conocimiento que funciona mal dentro de un campo determinado y dan lugar a errores. El alumno utiliza este conocimiento para dar respuestas en determinado contexto que encuentra con frecuencia. Usando este conocimiento en otro contexto produce respuestas incorrectas. Se resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce.

Los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico se pueden clasificar según su origen en obstáculos de origen ontogénico (provocados por las limitaciones del sujeto), obstáculos de origen didáctico (originados por el sistema de enseñanza) y obstáculos de origen epistemológico (aquellos derivados del rol constitutivo del saber mismo).

Un obstáculo se manifiesta por los errores que no son debidos al azar. Esos errores están ligados entre ellos por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente y hasta correcta que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones (Brousseau, 1983).

El reconocer que los errores pueden deberse a causas epistemológicas y didácticas y no sólo de tipo cognitivo es un primer paso para encontrar posibles soluciones. González (2006) menciona que los errores más frecuentes son justamente los dos primeros. A partir de sus trabajos de investigación, manifiesta que los errores se manifiestan con frecuencia en la manipulación de una representación dentro de un mismo sistema de representación, que generalmente es el algebraico. Otro error que suele presentarse es la elección inadecuada de un sistema semiótico para resolver determinado problema.

Duval (2006, 2008) expresa que muchas de las dificultades de los estudiantes pueden ser descriptas y explicadas como una falta de coordinación de distintos registros de representación. El investigador se refiere a las dificultades cognitivas para la conversión, determinadas por dos factores principales. El primero es la no congruencia entre dos contenidos de representación del mismo objeto. El segundo es la no reversibilidad de la conversión. Con sólo invertir la dirección del cambio de registro, los que aprenden dejan de reconocer los objetos representados.

En relación a las dificultades relacionadas a las estructuras cognitivas de los alumnos, las deficiencias que presentan los alumnos no les permiten realizar las conexiones necesarias para la resolución de un problema o para aplicar lo aprendido en la resolución de un problema diferente.

González (2006, p. 63) opina que un obstáculo cognitivo se produce generalmente "cuando un sujeto, al enfrentarse a un problema, evoca representaciones contradictorias del concepto en cuestión, posiblemente a causa de ideas intuitivas erróneas, en muchos casos incluso necesarias, construidas en el proceso de formación del concepto".

Él mismo señala que, desde la enseñanza, deben promoverse mejores articulaciones entre distintas representaciones, de manera que el alumno pueda formarse una red interna que le permita contrastar e intentar disminuir la fuerza de ese conocimiento que se presenta como obstáculo.

Una de las características principales de los errores es su persistencia y lo difícil de superarlos. Para superar los obstáculos que los provocan hará falta presentar a los alumnos nuevas situaciones que los desestabilicen, que hagan necesaria la reconsideración o el olvido. Exige un trabajo de la misma naturaleza que el establecimiento de un conocimiento, interacciones del alumno con el objeto de su conocimiento.

CAPÍTULO 3
DIMENSIONES DEL ESTUDIO

En este capítulo se presentan los análisis preliminares. Este estudio, correspondiente a la primera fase de toda ingeniería didáctica, se centró en las dimensiones histórico-epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural de la derivada, dimensiones que a su vez dan cuenta de nuestro acercamiento teórico.

El análisis histórico-epistemológico abarca una revisión histórica de la evolución de la matemática de la variación y el cambio teniendo en cuenta los registros en que se ha producido así como los distintos obstáculos que surgieron en esa evolución.

La dimensión didáctica tiene como objetivo analizar distintos aspectos relacionados con la enseñanza de la derivada. Comprende un estudio de los diseños curriculares para la educación secundaria en nuestra provincia, un análisis de la situación en nuestra carrera y un estudio de algunos libros de texto de uso común en nuestro entorno.

Luego, teniendo en cuenta que la componente cognitiva se refiere a los procesos mentales de organización del pensamiento, se desarrollan algunos elementos teóricos que se consideran en el análisis y los resultados de un cuestionario aplicado a nuestros alumnos, relativo a sus concepciones acerca de nociones variacionales básicas para el inicio en el estudio de la derivada.

Por último, se analizan algunas cuestiones referidas a la componente sociocultural, intentando mostrar la importancia del contexto y las prácticas sociales en la construcción del conocimiento.

3.1 Análisis histórico-epistemológico

Ruiz (1998, p. 105) expresa que el objetivo de un análisis histórico-epistemológico, debe ser “aportar información acerca de la evolución del concepto en los distintos momentos históricos, tratando de identificar las variables y factores condicionantes que han determinado distintos estadios del desarrollo de esta noción”.

Un estudio de este tipo debe responder a la pregunta sobre cómo se constituye el objeto de conocimiento. Por lo tanto interesa identificar las situaciones problemáticas a las que las personas han dedicado sus esfuerzos, las características, propiedades y grado de emergencia del concepto, así como las representaciones simbólicas asociadas.

El análisis epistemológico juega un papel importante en la enseñanza. Al respecto, Farfán (1997) expresa que provee de historicidad a los conceptos matemáticos que normalmente la enseñanza presenta como objetos universales tanto en tiempo como en espacio. Posibilita además la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado, contribuyendo a desterrar otra de las ficciones de la escuela, la concepción de que los objetos de enseñanza son copias simplificadas, fieles de los objetos de la ciencia.

La idea de buscar en el desarrollo histórico y epistemológico de conceptos pautas para la enseñanza de los mismos nos provee de un acercamiento metodológico. Cada persona reproduce durante la adquisición de un conocimiento, en síntesis, las etapas por las que atravesó el ser social, en la historia, para la aprehensión de dicho concepto.

En el aprendizaje individual del concepto no sólo se reproducen las etapas esenciales, históricamente hablando, sino también los tropezones que se dieron en su desarrollo. Resulta importante reconocer las nociones que a lo largo de la historia se han mostrado resistentes a su evolución y que se constituyen en obstáculos para el aprendizaje.

El origen del cálculo está relacionado con los incrementos y las cantidades de cambio. El estudio de la variación en los fenómenos dinámicos es lo que condujo en sus comienzos al estudio de la derivada y al desarrollo del análisis. Los procesos de medir, cuantificar y establecer leyes para el cambio y la variación están en el origen de la noción actual de derivada y su evolución histórica.

Entre los siglos XIV y XVII el interés científico se centró en el estudio de las cualidades en situaciones como el movimiento, la intensidad luminosa o la intensidad de calor. Durante el siglo XVII se trataron grandes problemas para la ciencia que influyeron en su desarrollo y posteriormente en su formalización. Estos problemas surgieron por un lado de la mecánica (estudio del movimiento), y por otro lado de la geometría (determinación de tangentes a una curva dada). Newton y Leibniz relacionaron estos dos problemas y proporcionaron un método general para resolverlos. Esta conexión fue gracias a la poderosa herramienta que resultó el método de las coordenadas, que les permitió representar gráficamente la dependencia entre dos variables. Contaban con elementos que les permitieron representar funciones y, gracias al poder de estas representaciones gráficas, fue más sencillo relacionar los problemas mencionados (Badillo, 2003).

En este sentido, las diversas representaciones de la función y la derivada aparecen desde un principio íntimamente relacionadas, teniendo cada una de ellas un origen histórico y epistemológico diferente.

En base a lo expuesto hemos decidido encarar esta fase de la investigación estudiando la evolución de estos conceptos en relación a los problemas de variación tratados en los distintos períodos históricos, analizando su desarrollo con respecto al papel otorgado a la visualización y a las distintas representaciones utilizadas. Se tienen en cuenta también los obstáculos que en las distintas épocas impidieron el desarrollo de los conceptos, por la importancia que pueden llegar a tener en el aprendizaje de los mismos.

Atendiendo a estos factores hemos dividido el análisis en varias secciones (Castiblanco, Urquina, Acosta y Rodríguez, 2004).

Debido a la dificultad de acceder a las fuentes originales así como el tiempo que insumiría el análisis de distintos libros de corte histórico, nos apoyamos en diversas fuentes (documentos, tesis, artículos en libros y revistas) cuyos autores han realizado estudios profundos de este tipo.

3.1.1 El mundo antiguo. Los esbozos del estudio de las nociones de variable y dependencia. La representación verbal

Desde la época prehistórica el hombre observó fenómenos naturales relacionados con magnitudes físicas variables: el cambio de posición de las ramas de los árboles por la acción del viento, el desplazamiento de un lugar a otro para las tareas de recolección, el cambio en la posición del sol, la luna y las estrellas y su relación con la sucesión del día a la noche. Esta observación lo llevó a desarrollar las primeras tecnologías materiales y simbólicas, como herramientas, lenguaje gestual y lenguaje verbal icónico, que sentaron las bases para el surgimiento de sistemas de representación escritos más complejos.

La consolidación de la escritura, hacia el 3000 a.C., promovió la aparición de diversos instrumentos de registro a través de los cuales ha sido posible conocer el saber social y cultural construido a partir de la antigüedad.

Analizamos, por su relevancia, los aportes de la matemática babilónica y de la griega.

La matemática babilónica

Los aportes de las civilizaciones mesopotámicas de la antigüedad, en particular la babilónica (2000 a.C. a 600 a.C., ubicada en el actual territorio de Irak), constituyen las referencias conocidas más antiguas sobre el estudio de fenómenos de cambio.

Su interés estuvo centrado principalmente en la astronomía. Realizaron observaciones sistemáticas de fenómenos que se repetían periódicamente, relacionados con el sol, la luna y los planetas. Efectuaron una compilación de los hechos en tablillas de arcilla que han llegado hasta nuestros días. Sus estudios comprendieron problemas de variaciones continuas, como los períodos de visibilidad de un planeta o la luminosidad de la luna.

Atraídos por la astrología, su tarea fundamental fue intentar predecir sucesos. Más allá de anotaciones empíricas, en las tablillas se encuentran los intentos por aritmetizar observaciones difícilmente medibles, así como interpolaciones, lineales y geométricas.

Avanzaron en lo que se denomina *álgebra retórica*, en la que los problemas se enunciaban y solucionaban sin utilizar de manera organizada notaciones algebraicas.

No usaban letras para representar cantidades variables. Los mismos términos, longitud, área y volumen, cumplían con esa finalidad. A pesar de que no figuraban generalizaciones, sino sólo casos concretos, esto no significa que no existiera en su pensamiento conciencia de la generalidad de las reglas o principios. De ser así, no se podría explicar la analogía entre problemas del mismo tipo (Boyer, 1986, en Ruiz, 1998).

Si bien es difícil encontrar aspectos que permitan intuir la existencia de conceptos como variable y función, no es posible desconocer sus aportes en cuanto a los intentos de cuantificar y establecer regularidades en sus tablas.

La matemática griega

La civilización griega (aproximadamente de 2800 a.C. a 600 d.C., ubicada en el Asia Menor, en el territorio continental europeo que constituye la actual Grecia, sur de Italia, Sicilia, Creta, Rodas, Delos y el norte de África) dejó un inmenso legado relacionado con la matemática. A partir del siglo VI a.C. se preocuparon, especialmente los pitagóricos, por explicar no solamente el cómo sino el por qué de las cosas, lo que impulsó la transformación de la matemática en una ciencia deductiva.

La visualización constituyó una herramienta común de su actividad matemática. Los pitagóricos concibieron y trataron los números y sus relaciones utilizando piedrecillas que llamaban cálculos. Los Elementos de Euclides contienen muchas referencias a imágenes que no se pueden separar del texto para su comprensión.

Desde la época de Heráclito y Zenón fueron tratados problemas vinculados con el movimiento, la continuidad y el infinito, a los cuales Aristóteles dedicó gran parte de su física. En el pensamiento griego existía una idea primitiva de función en las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables. Sin embargo estas ideas fueron externas a la matemática. Aristóteles, en el capítulo VII, libro XI de Metafísica, opone la Física, que se refiere a los objetos en movimiento, a la Matemática, ciencia estrictamente teórica.

Al estudiar el movimiento de los cuerpos, Aristóteles se preguntaba sobre sus causas. Este marco originó descripciones cualitativas del fenómeno de variación. Por ejemplo, para el caso de la piedra que cae libremente o por un plano inclinado, no generó procedimientos para cuantificar el movimiento, simplemente indagó acerca de la naturaleza del cuerpo y la forma en que se modifican sus atributos durante la caída.

También en los Elementos de Euclides los objetos y relaciones matemáticas son estáticas (Ruiz, 1998).

Esta filosofía fue la razón de que, por mucho tiempo, los matemáticos se expresaran en términos de incógnitas y no de variables. Esto los condujo a las proporciones y las ecuaciones y no a las funciones. Los griegos consideraron las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades numéricas.

Sin embargo los pitagóricos no se plantearon problemas para unificar número y magnitud. Para ellos todo era número. La relación entre dos magnitudes, como por ejemplo la longitud de dos segmentos, se expresaba como la razón entre dos enteros positivos. Vincular los números y las magnitudes por medio de las proporciones, les permitió resolver algebraicamente los problemas geométricos. Son atribuibles a los pitagóricos la determinación de algunas leyes simples de la acústica, como ser las longitudes de las cuerdas y los tonos de las notas emitidas al pulsarlas. No obstante, este aspecto cuantitativo de las leyes de la naturaleza no fue tratado ampliamente.

El carácter geométrico de la matemática griega, el papel preponderante de las proporciones y la disociación entre número y magnitud son los principales obstáculos que hicieron que en la época antigua el estudio de fenómenos de cambio sea aún muy reducido y que no sea posible hablar de la formulación explícita de nociones como variable, dependencia o función. Otro factor importante es el escaso desarrollo del simbolismo, las expresiones algebraicas no existían, a excepción de los interesantes intentos de Diofanto, aunque en forma retórica, conceptualmente relacionados con la dependencia funcional (Azcárate y Deulofeu, 1996).

3.1.2 La Edad Media. Avances en las nociones de variable y dependencia. Representación cinemática y geométrica. Primeras notaciones simbólicas.

Este período, que abarca desde la caída del Imperio Romano occidental en el siglo V a.C. hasta el siglo XV, se caracteriza por una larga etapa de oscuridad en Europa. Fueron los árabes, quienes tomaron el relevo de los griegos en cuanto al estudio de las ciencias y permitieron que su legado llegara a occidente. No hubo en esta época un cambio sustancial en el tratamiento de las funciones pero sí algunos resultados concretos. Se incrementó el número de funciones consideradas, que abarcó casi todas las funciones trigonométricas. Se ampliaron también los métodos de estudio, perfeccionando los sistemas de interpolación necesarios para la tabulación.

A partir del siglo XIII, ya en el mundo occidental, la matemática tiende a ocupar un lugar cada vez más importante en las ciencias de la naturaleza. Se pone en duda la estricta demarcación entre ella y las ciencias físicas.

En el estudio del mundo real, una de las principales cuestiones que se analizaron fueron los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento. “Se preguntaban por qué los planetas brillan, por qué el viento sopla, por qué se forma el arco iris, por qué la lluvia cae, mientras que el fuego sube. Trataban de encontrar un modelo de universo que respondiese a estas cuestiones” (René de Cotret, 1985, en Ruiz, 1998, p. 111).

Las escuelas de filosofía natural de Oxford y París, dos de los principales núcleos científicos de la época, hicieron grandes aportes para el desarrollo de la noción de función. Partiendo de las doctrinas aristotélicas, realizaron estudios cuantitativos de distintos fenómenos, entre los cuales se destaca el estudio del movimiento local no uniforme, empezando a desplazar el interés del por qué suceden los cambios al cómo suceden. Analizaron fenómenos sujetos al cambio, como el calor, la luz, la densidad, la velocidad, llamados cualidades o formas, que pueden tener diversos *grados* de *intensidad* que cambian entre dos límites establecidos. Una *forma* era cualquier cantidad o cantidad variable de la naturaleza. La *intensidad* o *latitud* de una forma era el valor numérico que había que asignarle, en relación a otra forma invariable que llamaban *extensión* o *longitud*, como el tiempo, la distancia o la cantidad de materia. En Inglaterra los estudios tuvieron una orientación preponderantemente cinemática-aritmética, mientras que en Francia se desarrollaron en dirección a la geometría.

Los métodos de la física matemática se fueron desarrollando en conexión con la idea de relación funcional. Tenían una concepción sistemática de las variaciones entre causa y efecto. Crombie (1979, en Ruiz, 1998) señala que podían explicar cómo están relacionados los cambios, expresando el fenómeno que debía ser explicado (variable dependiente) como función de las condiciones de su producción (variable independiente).

Azcárate y Deulofeu (1996, p. 44) expresan que, en el transcurso de estos estudios, “comienzan a aparecer conceptos fundamentales como cantidad variable, entendida como un grado de cualidad, velocidad instantánea o puntual, aceleración, todos ellos íntimamente ligados a la idea de función”.

Oxford: El Colegio de Merton

Durante el segundo cuarto del siglo XIV, un grupo de lógicos y filósofos naturales del Colegio de Merton, entre ellos Heytesbury, Bradwardine y Swineshead, abordaron el problema de la cuantificación del cambio. Estudiaron las variaciones de la intensidad de una cualidad, desde un punto a otro de un cuerpo o desde un punto a otro del tiempo.

Referidos al caso del movimiento y la velocidad, sus aportes más importantes son las definiciones de velocidad uniforme y de movimiento uniformemente acelerado, así como sus intentos por definir velocidad instantánea. A partir de estos conceptos lograron deducir la regla del movimiento uniformemente acelerado que hoy conocemos como: *Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la velocidad media es igual a la semisuma de la velocidad inicial y la velocidad final*.

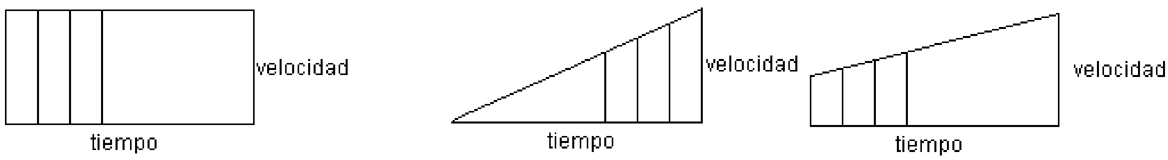
En la Mecánica de Bradwardine, se desarrolla un método importante para expresar las relaciones funcionales. Consiste en un *álgebra de palabras*, en el que se consigue la generalización empleando letras del alfabeto, en lugar de números, para las cantidades variables, mientras que las operaciones entre esas variables (adición, multiplicación, división) se representaban con palabras en lugar de símbolos como en el álgebra actual.

París: Nicolás Oresme

El trabajo más completo y original sobre la intensificación y disminución de formas y cualidades fue el llevado a cabo por Oresme (1323-1382) en su tratado *De configurationibus qualitatum et motuum,* en el que describe su teoría de las latitudes de las formas, proponiendo una aproximación geométrica.
Oresme se preguntaba por qué no hacer un dibujo de la manera en que las cosas varían. Su estudio fue independiente de cualquier contexto físico. Las representaciones eran imaginarias y cualitativas y nunca las verificó mediante mediciones.

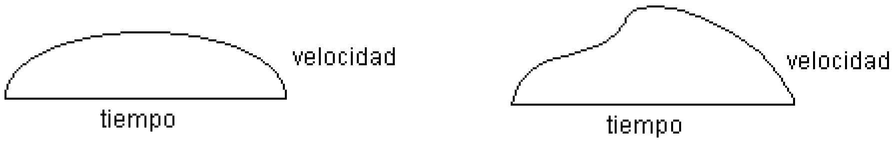
A modo de ejemplo se presenta el caso en el que se representa la velocidad de un móvil en función del tiempo. La longitud es un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo. Para cada instante se traza un segmento perpendicular (latitud) que representa la intensidad de la velocidad en ese instante. Los extremos superiores de las latitudes determinan una curva.

Según D´hombres (1987, en Ruiz, 1998), Oresme al principio trabajó con los movimientos en forma general pero luego distinguió tres configuraciones distintas (Figura 3.1): las uniformemente uniformes, las uniformemente diformes y las diformemente diformes.
El primer caso se corresponde con el movimiento uniforme. Al representar la velocidad en función del tiempo se obtiene un rectángulo, ya que las latitudes son constantes y por la tanto la línea superior o de intensidades es una recta paralela a la de las longitudes. El segundo caso corresponde a un movimiento uniformemente acelerado, es decir aquel en el que la velocidad del móvil varía, pero de manera constante. Se obtiene un triángulo o un trapecio dependiendo de la velocidad inicial. Las configuraciones diformemente diformes corresponden a movimientos donde la aceleración del móvil no es constante. La línea superior no es una recta.



Representación de una variación uniformemente uniforme

Representación de variaciones uniformente diformes



Representación de variaciones diformemente diformes

Figura 3.1

Con este tipo de representaciones, Oresme pretendía que resulte más sencillo comprender la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos. Sus dibujos recuerdan a la representación gráfica de una función en un sistema de ejes cartesianos, pero en su trabajo, la línea superior, de intensidades, no aparece aislada sino que el fenómeno se representa a través de toda la figura, por su forma (rectángulo, triángulo, etc.) y por la superficie que queda debajo de la curva, es decir por la integral de la curva. Por eso no pueden ser considerados como una expresión de la dependencia en el sentido actual.

A pesar de esto, su obra no deja de ser un adelanto hacia la invención de la geometría analítica y la introducción en la geometría de la idea de movimiento. Captó la idea fundamental de que una función de una variable se puede representar por una curva.

3.1.3 Siglos XV y XVI. La transición a la representación simbólica (algebraica). El desarrollo de la noción de variable y función

En este período sobresale el amplio desarrollo del simbolismo algebraico y la formación definitiva de la trigonometría como una rama particular. Ambos aspectos favorecieron el desarrollo del concepto de función. Se destaca la obra durante el siglo XVI de algebristas italianos, especialmente de Viète cuya contribución a la creación del álgebra simbólica fue un importante paso para la representación de funciones por medio de fórmulas.

El intento por dar solución a problemas surgidos de la navegación marítima, el desarrollo del capital comercial y de la industria, propició el descubrimiento de varias de las leyes generales de la naturaleza y su modelación mediante fórmulas matemáticas. Sobresale la obra de Kepler quien, en la primera mitad del siglo XVI, descubrió y formuló matemáticamente sus leyes sobre el movimiento de los planetas.

Los avances gráficos en la representación de formas variables no fueron adoptados de manera inmediata. Ya en la transición hacia el siglo XVII, fue Galileo (1564-1642) quien, en su libro *Dos nuevas Ciencias* de 1638, recupera los aportes de Oresme.

Galileo estudió el movimiento local y la rapidez, enfrentándose al problema de la caída de los cuerpos. Realizó un estudio cuantitativo buscando relacionar los conceptos de velocidad, aceleración y distancia con la ayuda de leyes inspiradas en la observación y experimentación. Usando instrumentos para tomar medidas, estableció leyes entre magnitudes que son auténticas relaciones funcionales. Si bien los métodos matemáticos que utilizó no contemplan los avances del álgebra y se basan en la teoría griega de las proporciones, resulta fundamental para el establecimiento del concepto de función.

Considerando un cuerpo que cae libremente hacia la Tierra, no intentó hallar por qué cae, sino cómo cae, es decir en qué forma matemática la distancia recorrida y la velocidad alcanzada dependen del tiempo y el espacio transcurrido. En la descripción y análisis de cuerpos en caída libre aplicó el resultado del colegio de Merton sobre el valor medio de una cualidad uniformemente acelerada.

En todos sus desarrollos matemáticos, Galileo utilizó un método expositivo de estilo euclidiano, sin ningún simbolismo. Su único recurso fue la representación gráfica de las magnitudes espacio, tiempo y velocidad. Simbolizó el tiempo como una línea continua sobre la línea de desplazamiento del objeto que cae. Para la visualización del desplazamiento y el tiempo usó recursos equivalentes, líneas que se pueden recorrer.

Enunciamos el teorema I, proposición 105 de su libro *Dos nuevas Ciencias*:

> El tiempo en que cualquier espacio es atravesado por un cuerpo que empieza en reposo y es uniformemente acelerado, es igual al tiempo en que ese mismo espacio se cruzaría por el mismo cuerpo que se mueve a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta y la velocidad justo antes de que la aceleración empezara (en Carrasco, 2005, p. 35).

Para su demostración, Galileo utilizó una gráfica (Figura 3.2) coherente en el aspecto visual con la situación de caída que se está modelando.

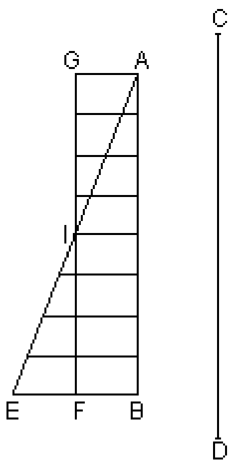


Figura 3.2

Utilizando una representación bidimensional velocidad-tiempo, representó el tiempo sobre la línea vertical AB y las velocidades instantáneas mediante segmentos perpendiculares a AB. Representó también el espacio en una línea vertical auxiliar CD.

En esta gráfica, A es el instante en que se inicia el movimiento, BE es la velocidad en el tiempo B o velocidad final del móvil y BF es la mitad de la velocidad anterior. Construyó el rectángulo ABFG de base BF y prolongó los segmentos velocidad hasta FG.

El triángulo ABE describe el movimiento uniformemente acelerado del móvil.

El rectángulo ABFG describe un movimiento uniforme de velocidad constante BF y que sucede en el mismo tiempo que el anterior.

El área de ABE coincide con el área de ABFG. La suma de las líneas paralelas contenidas en ABE es igual a la de las líneas paralelas contenidas en ABFG. Luego, los espacios recorridos por los dos móviles son iguales.

A partir de estos trabajos, entre otros, se fueron desarrollando las ideas de variación y cambio como abstracciones obtenidas de la realidad.

Según expresan Azcárate y Deulofeu (1996), otro avance importante de la segunda mitad del siglo XVI, que permitió llegar a considerar las funciones como relaciones entre conjuntos de números más que como entre cantidades, fueron los progresos realizados en la extensión del concepto de número, con la configuración de los números reales y la aparición de los números imaginarios.

3.1.4 Siglo XVII. El surgimiento de la matemática de las variables

Hasta el siglo XVII una función se definía a través de expresiones verbales, tablas, gráficas y, en ciertos casos, por comparaciones de carácter cinemático. El poderoso instrumento algebraico desarrollado en los años precedentes permitió a Descartes (1596 -1650) y a Fermat (1601-1665) introducirse en el mundo de la representación analítica. Desarrollaron el método de las coordenadas expresando las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos a través de relaciones numéricas, generando la geometría analítica. Sus trabajos constituyen el paso final en la preparación de las nuevas matemáticas infinitesimales.

Las ideas de variación y cambio que venían desarrollándose como abstracciones obtenidas de la realidad son introducidas por Descartes en su *Geometría* como *magnitudes variables* definiéndolas en forma dual: como coordenada variable de un punto que se mueve a lo largo de una curva y en la forma de un elemento variable del conjunto de números. De esta manera trasciende la idea de incógnita propia del álgebra y pone en su lugar la idea de variable propia del análisis matemático.

Boyer (1986, en Ruiz, 1998, p. 118) destaca la siguiente proposición de Descartes como uno de los enunciados más significativos de la historia de la matemática: “Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva”.

La importancia de sus métodos consiste en el hecho de poder traducir cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente. Por primera vez se utiliza el hecho de que una ecuación en x e y es una manera de expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de modo que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable correspondientes a determinados valores de la otra.

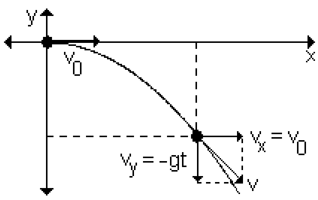
Diudonné (1989, en Ruiz, 1998, p. 119) expresa que “el método de las coordenadas constituye también el fundamento de los otros dos grandes progresos realizados en el siglo XVII: la introducción de la noción de función y el cálculo infinitesimal”.

La introducción de funciones como una ecuación tuvo el efecto de una revolución para el desarrollo de la matemática. La utilización de expresiones analíticas junto con las reglas que las permiten operar, confiere al estudio de las funciones un status de verdadero cálculo (Youschkevitch, 1976, en Ruiz, 1998).

Al surgir nuevas curvas se presentaron nuevos problemas relacionados con tangentes, áreas, máximos y mínimos. Los griegos de la antigüedad clásica concebían la recta tangente a una cónica en un punto, como la recta que toca a la curva en ese punto pero no la corta al prolongarla. La introducción de la geometría analítica, el auge de las ciencias naturales y las exigencias de la mecánica, propiciaron nuevas soluciones que relacionaron el problema de la tangente con los fenómenos de variación. En particular tres problemas se presentaban como acuciantes: determinar la velocidad de los cuerpos en movimiento, dada la velocidad del movimiento determinar la trayectoria en un tiempo determinado, y el problema de los máximos y mínimos.

Intentando dar solución a los mismos, se destaca el trabajo de Roverbal de 1640 quien, siguiendo la línea sugerida por Galileo y Torricelli, consideró una curva como la trayectoria de un punto en movimiento y la tangente como la recta de movimiento instantáneo del punto en movimiento. Si el movimiento del punto que genera a la curva es la resultante de dos movimientos suficientemente simples (Figura 3.3), entonces la línea instantánea de movimiento puede ser determinada por la composición de los movimientos constituyentes por medio de la ley del paralelogramo para la suma de los vectores (ya conocida en esa época).

Bajo estas condiciones el vector de la velocidad instantánea es la resultante del paralelogramo de vectores de las velocidades instantáneas de los dos movimientos componentes. La dirección del vector resultante coincide con la tangente y por tanto determina la pendiente de la tangente a la curva en el punto en cuestión.



Trayectoria de una partícula arrojada con cierta velocidad horizontal (lanzamiento parabólico).

Figura 3.3

Este método se limitaba a las curvas cuya trayectoria podía ser determinada por medio de componentes, trasladando el problema a cómo calcular la velocidad instantánea de los movimientos componentes, cuando esto no era posible por medios de la física.

Por su parte, Descartes desarrolló el método de las raíces iguales o raíz doble para determinar la tangente a cierto tipo de curvas que pueden ser expresadas por una ecuación de segundo grado. Este método resultó más general que el anterior ya que se podía aplicar a una cantidad de curvas considerable.

Fermat contribuyó también a la resolución de estos problemas. Sus aportes al desarrollo del cálculo fueron tales que Lagrange, Laplace y Tannery, entre otros, lo denominaron el inventor del cálculo. Tratando de determinar los máximos y los mínimos de ciertas funciones, observó que una curva tiene en cada uno de sus puntos una dirección, definida por la recta tangente a la curva en dichos puntos, tal que donde la función tiene un máximo o un mínimo, la tangente es horizontal.

En su obra *Methodus ad disquerendam maximan et miniman* publicada en 1637 expuso su método para encontrar el valor extremo de algunas variables y propuso una manera de resolver el problema de las tangentes utilizando ideas cercanas a los infinitesimales. Utilizó elementos de tipo gráfico visual, así como ideas intuitivas de cambio y lo que pasa con estos cambios cuando se hacen muy pequeños. Su proceso se basó en la idea que si una secante s rota sobre uno de los puntos de intersección de manera que el punto más próximo se acerca indefinidamente al primero, entonces la secante s se aproxima a la posición definida t. La recta que tiene esa posición se llama tangente a la curva, y el punto fijo, punto de contacto (o punto de tangencia). De todas las rectas que pasan a través de ese punto, la tangente es la que proporciona la mejor aproximación al curso de la curva en ese punto.

Fermat (en Ribnikov, 1987, citado por Dolores, 1996), consideró un pequeño arco MN (Figura 3.4) de una curva algebraica polinomial f(x). Por medio del trazado de la secante SMN se construye el triángulo MNP de manera que MNP ≈ SMR, de donde la longitud de la subtangente[2] SR está dada por $SR = \frac{MR\,.\,MP}{NP}$, expresión que en términos modernos se escribiría: $SR = \frac{f(x).h}{f(x+h)-f(x)}$.

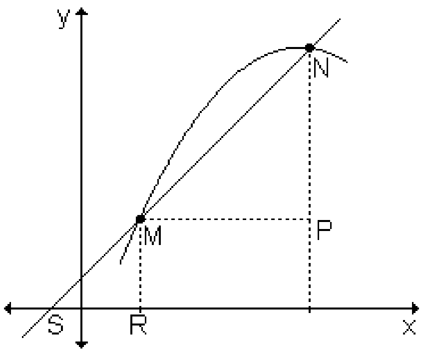


Figura 3.4

Pasa de la secante a la tangente, poniendo *h* = 0 (aunque no menciona que *h* debe *aproximarse* a cero o que se *haga* cero, sino sólo que el término que contiene a h debe ser eliminado), de manera que, si s = SR, en términos modernos la expresión quedaría escrita como $s = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Esto significa que la longitud de la subtangente, con la que la tangente queda determinada, se obtiene del cociente de la función entre su derivada.

Cantoral y Farfán (2004, p. 72) expresan que "este método de Fermat, independientemente de los problemas de existencia de límites, dependía de la existencia de una relación explícita entre la variable *y* y la variable *x* de la forma $y = f(x)$".

De manera similar pero utilizando explícitamente los infinitesimales en la resolución del problema de la tangente, Isaac Barrow publica en 1670 su obra Lecciones de Geometría.

En la misma considera, de una curva definida implícitamente por f(x, y) = 0, un arco infinitamente pequeño MN (Figura 3.5) de coordenadas M(*x, y*) y N(*x*+*e, y*+*a*) en donde *e* y *a* son incrementos infinitesimales de *x* y de *y,* respectivamente, de modo que se cumpliera *f(x+e, y+a) = f(x, y)*, y en la que al resolverla desprecia todos los términos que contienen potencias de *e*, de *a* o productos de éstos.

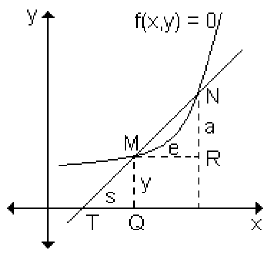


Figura 3.5

Finalmente, considerando como iguales el arco infinitamente pequeño y el segmento de recta MN, aplica la semejanza entre los triángulos TQM y MRN, obteniendo la pendiente *m* de la tangente en M a partir de la expresión $\frac{y}{s} = \frac{a}{e}$ de donde $m = \frac{a}{e}$. Como *a* y *e* son en realidad los diferenciales de *y* y de *x* respectivamente, su cociente es igual a lo que

[2] La subtangente es la distancia del punto S que se encuentra en la intersección de la tangente con el eje de las abscisas y el punto R que es la abscisa del pie de la perpendicular trazada desde el punto M.

actualmente se escribe como $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ y expresa precisamente a la derivada como cociente de diferenciales.

Observamos cómo en esta etapa la visualización jugó un papel importante. En su obra, Descartes explica y da importancia al papel de las imágenes y figuras en lo que respecta al pensamiento matemático. Afonso (2002, p. 59) se refiere al respecto, citando un pensamiento extraído de *Reglas para la dirección del espíritu*:

> ... es preciso servirse de todos los recursos del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria: ya para intuir distintamente las proposiciones simples; ya para comparar debidamente lo que se busca con lo que se conoce, a fin de reconocerlo.... Es útil también en muchas ocasiones describir estas figuras y mostrarlas a los sentidos externos para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente.

Nacimiento del cálculo

El período que comienza en el siglo XVII, caracterizado por la síntesis entre los métodos geométricos de Cavalieri y Barrow, por los métodos analíticos de Descartes, Fermat y Wallis y por la asimilación del hecho de que el trazado de tangentes y cuadraturas eran procesos inversos e interrelacionados permitió la elaboración de un aparato algorítmico que brindaba métodos generales para el tratamiento de curvas estudiadas en la época.

Estos avances fueron un elemento importante en la formación del Análisis Infinitesimal. Su nacimiento fue la culminación de un largo proceso, que consistió en la acumulación de elementos del cálculo diferencial e integral así como de la teoría de series.

Ribnikov (1974, c.p Ruiz, 1998, p. 122) manifiesta:

> Las causas que motivaron este proceso fueron los problemas de la mecánica, la astronomía y la física. Estas ciencias no sólo planteaban a las matemáticas problemas, sino que la enriquecían con sus representaciones de magnitudes continuas y movimientos continuos y, sobre todo, con la esencia y forma de las dependencias funcionales. En una estrecha interacción de las matemáticas y las ciencias contiguas se elaboraron los métodos infinitesimales que son la base de las matemáticas variables.

En el último cuarto del siglo XVII, el inglés Isaac Newton y el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, de manera diferente e independiente sistematizaron y generalizaron las ideas y procedimientos que habían sido abordados hasta el momento. Tanto el cálculo de Newton como el de Leibniz tratan de cantidades variables. En Newton cantidades que varían con el tiempo. En Leibniz una sucesión de valores infinitamente próximos. El primero tuvo una idea intuitiva de movimiento continuo próxima al concepto de límite. El segundo concibió el continuo geométrico formado por segmentos infinitesimales.

El primero en descubrir el cálculo fue Newton, pero su miedo a publicar le hizo guardar su descubrimiento en secreto. Uno de sus aportes fundamentales es la interpretación geométrico-cinemática de los conceptos fundamentales del análisis matemático.

Siguiendo a su maestro Barrow, tomó el tiempo como argumento y analizó las variables dependientes como cantidades continuas que tienen cierta velocidad de cambio.

En su obra *Método de las Fluxiones* (1665-1666) estudió las magnitudes variables que representaban diversas formas de movimiento mecánico continuo. A las magnitudes que varían continuamente las llamó *fluentes* (nuestras funciones actuales) y las consideró como variables dependientes del tiempo, después introdujo las velocidades de las fluentes, a las que denominó *fluxiones*. Para calcular las fluxiones les impuso a las fluentes la condición de una variación infinitesimal y las representó por *x* e *y*. En términos actuales éstas son las derivadas de *x* e *y* con respecto a *t* $\left(x = \frac{dx}{dt}; y = \frac{dy}{dt} \right)$ y la razón entre ellas es la derivada de *y* con respecto a *x* $\left(\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx} \right)$.

Las fluxiones o velocidades de las fluentes son *razones de cambio instantáneas*, y expresan la rapidez con que cambia una variable respecto a otra en un instante. Esta es la idea física fundamental que subyace en el concepto actual de derivada.

Asoció también el concepto de fluxión con el problema de las tangentes. De manera muy similar a las ideas desarrolladas por Roverbal y sus predecesores, consideró una curva *f(x, y)* = 0 como el lugar geométrico determinado por la intersección de dos rectas en movimiento, una vertical y la otra horizontal, las coordenadas *x* e *y* del punto en movimiento son funciones del tiempo *t* y están representadas por las rectas horizontal y vertical, respectivamente (Figura 3.6). El movimiento resulta de la composición del movimiento horizontal cuya velocidad está representada por el módulo del vector *x* y la del movimiento vertical por el módulo del vector *y*.

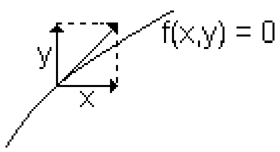


Figura 3.6

Por medio de la ley del paralelogramo se obtiene el vector resultante cuya dirección determina la tangente a la curva y que tiene como pendiente $\frac{y}{x}$.

En 1671 escribió el artículo *"Un tratado del método de series y fluxiones"*, en el cual estableció la manera de expresar y trabajar relaciones algebraicas complicadas escribiéndolas como series infinitas de términos más sencillos. El desarrollo en serie de potencias tuvo gran importancia debido a que se superaban las restricciones del trabajo de Descartes, que consideraba solamente las funciones algebraicas, haciendo posible la representación analítica de la mayoría de las funciones estudiadas en esa época. Durante mucho tiempo fue el principal método para el estudio de las funciones.

Asoció el manejo de las series infinitas con las velocidades de cambio, las que a su vez utilizaba para determinar la fluente, lo que fluye. Presentó así los dos problemas principales del cálculo infinitesimal, la diferenciación y la integración, en términos de movimiento. Es decir, dada la ley para la distancia determina la velocidad y, dada la velocidad, determina la distancia. Relacionó los dos problemas, haciendo una herramienta utilizable lo que hoy conocemos como teorema fundamental del cálculo.

Muchos de sus resultados aparecen en su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural*, editada por primera vez en 1687 y con dos nuevas ediciones en 1713 y 1726. Presentamos uno de los lemas expuestos en dicho libro para analizar el tratamiento que Newton le daba a la tangente.

Sección I, Lema VI

Si cualquier arco ACB, en una posición dada, es subtendido por su cuerda AB, y en cualquier punto A situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta AD prolongada en ambos sentidos, si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el ángulo BAD contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito, desapareciendo en última instancia...

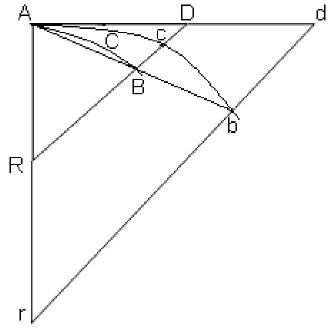


Figura 3.7

Isaac Newton, 1713. Traducción de Antonio Escohotado (en Serna, 2007, p. 93)

Newton tuvo en cuenta la idea de lo infinitamente pequeño y cómo, al realizarse el proceso, la cuerda subtendida tiende a ser la tangente a la curva en el punto A. Trabajó la idea del paso al límite ya que dicha tangente es el límite al que llega la cuerda AB. Utilizó ideas variacionales al mencionar que los puntos A y B se acercan y se encuentran. Construyó las figuras como un argumento necesario para dar las explicaciones.

Leibniz, más conocido como filósofo, presentó su cálculo entre 1673 y 1676. Basándose en una concepción geométrica llegó a resultados similares, obteniendo un método para la resolución del problema de las tangentes y la determinación de áreas y volúmenes.

Inspirándose en sus primeros trabajos sobre sucesiones de sumas y diferencias de números, trasladó sus ideas al contexto continuo, como ser el caso de las variables asociadas a las curvas geométricas. Comenzó a desarrollar toda una teoría de sumas y diferencias infinitesimales, a partir de la cual obtuvo sus nociones de *diferencia* e *integrales*. Introdujo la notación que actualmente usamos para ambas nociones.

Decía que en una sucesión infinita de valores de una variable, que nombramos x, la diferencia entre dos valores sucesivos es el diferencial de x (dx), que es infinitesimal o despreciable comparado con los valores de x. Además, la suma de todas las diferencias (que el anotaba $\int dx$) da como resultado la variable completa x. Es decir: $\int dx = x$.

Definió diferencial de una ordenada de una curva cualquiera, dy, como un segmento cuya relación a dx, es igual a la relación entre la ordenada y la subtangente $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{y}{S_t}\right)$. Se dio cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas cuando las mismas tienden a cero y que el cálculo de un área depende de la suma de las ordenadas o de los rectángulos cuya abscisa tiende a cero, convenciéndose que eran problemas equivalentes.

En un artículo publicado en 1673, usó por primera vez el término “función”. Inicialmente, no para designar la relación formal entre la ordenada de un punto y su abscisa, sino en el sentido corriente que describe la función de un órgano en un organismo, o en una máquina. Significaba por ejemplo, tener un punto de contacto con la curva, ser perpendicular a la curva, considerar su subtangente, etc.

Posteriormente utilizó la palabra en un sentido más general, aunque todavía poco preciso y referido siempre a cuestiones geométricas, identificando la noción de función con ciertas longitudes tales como abscisas, ordenadas, tangentes, normales, etc., asociadas con la posición de un punto en una curva.

Se observa en este período una tendencia de los matemáticos en general a rechazar explicaciones que implicasen suposiciones arbitrarias. Newton veía como desfavorable el hecho de no poder traducir con una fórmula cualquier expresión, mientras que se mostraba satisfecho con cualquier concepción que, mediante una fórmula, permitiera abordar algo real de manera eficaz. Sierpinska (1989, en Ruiz, 1998) expresa que se promovió una actitud hacia las matemáticas, según la cual lo principal es proveerse de un conjunto de algoritmos que capaciten a los científicos para resolver problemas. La eficacia de los cálculos formales se convirtió en un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de función.

La concepción mecánica de curva presente en matemáticos como Galileo, Torricelli, Roberval o Newton, que hacía que las curvas no fueran consideradas como gráficas de la relación funcional, sino más bien como trayectorias de puntos en movimiento resultó otro obstáculo al desarrollo de la concepción de función.

3.1.5 Siglos XVIII y XIX. La consolidación del sistema de representación simbólico

Durante el siglo XVII los objetos de estudio del análisis infinitesimal eran las curvas geométricas, tarea realizada esencialmente en el marco de la geometría cartesiana y relacionada con la mecánica y la física. Durante el siglo XVIII comienza a perder este carácter a favor de la aritmetización y del uso casi exclusivo del álgebra.

Con los trabajos de Jean Bernoulli, Leonard Euler y Lagrange se consolida la noción de función como representación de procesos de variación y cambio así como el sistema de representación simbólico. La ampliación del concepto de función se desarrolló ampliamente en el siglo XIX con los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros.

El impacto del cálculo infinitesimal fue tan grande que durante casi todo el siglo XVIII los matemáticos se dedicaron a explorar sus aplicaciones obteniendo resultados importantes en el cálculo variacional, la astronomía, la hidrodinámica y otros campos de la mecánica. A partir de mediados del siglo XIX se comienza a desconfiar de la intuición y de lo visual. y los matemáticos empiezan a trabajar en una fundamentación rigurosa del cálculo.

En 1820, Cauchy hizo un aporte importante en la reconstrucción de los fundamentos del análisis cuando, sobre la base de la teoría de los límites, introdujo el lenguaje algebraico de las desigualdades. Esto llevó a la aparición de definiciones sólidas sobre convergencia de series, límite, continuidad y diferenciabilidad. En 1823 definió la derivada de f(x) como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, siempre que este límite exista.

Con el perfeccionamiento del concepto de límite, la construcción de la teoría de los números reales, la teoría de conjuntos y el desarrollo de la teoría de las funciones, se le dio al análisis matemático una estructura lógica coherente, con la que los conceptos básicos fueron definidos rigurosamente a partir de los números reales y las funciones. La derivada fue definida como un límite existente para funciones continuas. Se definieron continuidad y límite, continuidad en términos del límite y éste por medio de los ε y δ.

Con la introducción de la teoría de conjuntos el concepto de función alcanzó un nuevo grado de generalidad. Al considerar una definición en términos conjuntistas, todas las definiciones anteriores corresponden a casos particulares. Con esta definición se pone de manifiesto una caracterización estática, como colección de pares de elementos, quedando oculto el carácter dinámico de asignación entre variables. Azcárate y Deulofeu (1996) manifiestan que con esta definición, la noción de función "pierde muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, característicos de la mayoría de problemas que generaron la necesidad del concepto de función" (p. 53).

3.1.6 La última etapa. La interacción entre sistemas de representación en el estudio de la variación y el cambio

El rigor conferido al estudio del análisis a finales del siglo XIX y durante el siglo XX, transformó las concepciones sobre la matemática en los distintos campos y específicamente, sobre la manera de concebir los sistemas de representación de procesos o fenómenos de variación y cambio. Afonso (2002) manifiesta que la Teoría de Conjuntos de Cantor y las paradojas en torno a los fundamentos de la matemática condujeron a hacer que los matemáticos de la época hicieran hincapié en los aspectos formales y desecharan argumentos visuales. La influencia del formalismo fue fundamental en la investigación, extendiéndose además a la estructura de los libros de texto en todos los niveles de la enseñanza.

En conexión con la teoría de conjuntos, los conceptos de variable y de función adquirieron mayor precisión, hecho esencial para el desarrollo posterior del análisis. Nace a comienzos del siglo XX, con matemáticos como Borel, Lebesgue, Luzón y su escuela, una nueva rama del análisis: la teoría de funciones en una variable.

La base proporcionada por el desarrollo del análisis y la física matemática, junto a las nuevas ideas de la geometría y el álgebra, lleva al desarrollo de una nueva rama de la matemática, el análisis funcional, que juega un papel preponderante en la matemática moderna, con los importantes trabajos de matemáticos como Hilbert, Riesz y Banach.

El desarrollo desde la primera mitad del siglo XX de las tecnologías informáticas y su evolución hasta llegar al uso de sistemas gráficos y algebraicos ejecutables, ha abierto un extenso campo de experimentación y desarrollo, con importantes repercusiones en el campo de la educación.

Desde las últimas dos décadas del siglo XX la enseñanza de la matemática ha experimentado una enorme evolución. La mediación de herramientas computacionales permite la interacción entre sistemas de representación, constituyéndose en una poderosa herramienta para observar, representar, modelar y simular situaciones de variación y cambio. En numerosas investigaciones de educación matemática, se resalta la tendencia hacia la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático (Guzmán, 1996; Hitt, 2003; Afonso, 2002).

3.1.7 Conclusiones

Revisando algunos aspectos del estudio realizado, resalta en primer lugar el hecho de que el origen y la evolución del cálculo diferencial trata sobre incrementos y cantidades de cambio. Las ideas que llevaron a Newton y a Leibniz a la invención del cálculo se fueron gestando desde muchos siglos antes. En esas etapas anteriores los problemas se abordaron de manera general y desde diferentes perspectivas, especialmente numéricas y geométricas, pero el mayor logro se alcanzó al estudiar el cambio más sencillo, el cambio de posición. Se produjo un gran progreso al intentar describir cómo se realiza el movimiento sin preocuparse por qué se realiza de esa manera.

El paso más importante fue relacionar los problemas de la mecánica, conectados con el estudio del movimiento, y los antiguos problemas de la geometría, consistentes en la determinación de tangentes a una curva dada. El problema de la tangente era estudiado desde la época de los griegos de la antigüedad clásica. Sin embargo, con la transición de la matemática de las constantes a la matemática de las variables, la tangente a una curva comienza a adquirir un carácter variacional. El método de determinar la tangente a partir de la pendiente de una secante y hallar el límite de esa pendiente cuando uno de los puntos de corte se aproxima tanto como se quiera al otro, fue el método utilizado por Newton para el cálculo de velocidades instantáneas y fue la base gráfica del cálculo de derivadas en los libros clásicos.

Para llegar a lo que actualmente se conoce como derivada, formalizando una definición rigurosa en términos del límite, tuvieron que transcurrir varios siglos de desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, con la variación y con los infinitesimales. Esta etapa se caracterizó por tener un componente fundamentalmente visual e intuitivo, en interacción constante con problemas geométricos y físicos.

En el siglo XX la actividad matemática sufrió la influencia de una corriente formalista, que rechazó la visualización como herramienta de demostración y análisis. Se considera la derivada como un concepto abstracto definido en términos del límite e inserto en una estructura determinada por el rigor matemático. Así ha llegado a la actualidad y de esa manera es introducida generalmente en la enseñanza.

Sin embargo, en las últimas décadas, se observa una renovación del papel de la visualización e interés por el estudio del rol que juega el uso de distintas representaciones de un concepto en el desarrollo de esta forma de pensamiento.

Estos aspectos relacionados al desarrollo histórico de la derivada sugieren un camino que puede ser explorado en la enseñanza. No se trata de reproducir en el aula cada uno de los episodios que tuvieron lugar en la historia de su desarrollo, sino de recuperar las ideas, estrategias y procedimientos claves que contribuyeron a su formación. En este sentido Wenzelburger (1993, p.2) manifiesta:

> ...de esta manera podría obtener del proceso histórico de desarrollo del análisis matemático indicaciones importantes acerca del fin y propósito de esta rama de las matemáticas.
>
> La enseñanza del Cálculo se debería orientar en esta génesis que tuvo lugar en la historia de la ciencia matemática: una formación lenta de conceptos matemáticos a través de la liberación de las percepciones sensoriales y la intuición primaria.

Es razonable entonces intentar la formación de este concepto explotando el potencial que las nociones de variable y función tuvieron en la modelación de los problemas del movimiento, de manera que esto prepare el terreno para estudiar los problemas de la rapidez de la variación por medios infinitesimales. La idea es considerar el estudio de la variación como una especie de eje rector del que se desprende el contenido temático, otorgando un lugar central a la visualización y al manejo de distintas formas de representación de las funciones.

3.2 Análisis didáctico

El objetivo de este apartado es caracterizar la enseñanza de la derivada en nuestro entorno y analizar el rol que en ella juega el estudio de la variación y el cambio. Para esto hicimos en primer lugar una revisión de los diseños curriculares de la provincia de Santa Fe para la educación secundaria, de manera de analizar qué se pretende para este nivel. En segundo lugar estudiamos la situación en el contexto de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias, que es donde se desarrolla esta investigación. Finalmente analizamos algunos de los libros de texto que se proponen como bibliografía básica en la actualidad a nivel universitario.

3.2.1 Análisis de la situación en la escuela secundaria

Revisamos los documentos:

- *Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe (1999). Diseño Curricular Jurisdiccional para Tercer Ciclo EGB de la provincia de Santa Fe. Argentina.*
- *Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe (2003). Diseño Curricular para Educación Polimodal. Argentina.*

Los mismos fueron redactados sobre la base de los Contenidos Básicos Comunes del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Si bien con la sanción de la nueva Ley de

Educación 2006, se produjeron cambios, estos diseños son los que se encuentran en vigencia actualmente. En los mismos se presentan algunas consideraciones generales, aspectos y enfoques que se deben tener en cuenta en la enseñanza, ciertos recursos metodológicos y, principalmente, los objetivos para cada nivel y los contenidos, clasificados en actitudinales, conceptuales y procedimentales. En principio analizamos lo referente al área Matemática, pero luego de una experiencia preliminar y dado que las actividades preparadas para que resuelvan los alumnos abarcan conceptos de Física, el análisis nos llevó a la necesidad de investigar que es lo que se espera que nuestros alumnos conozcan de esta disciplina al terminar la educación secundaria.

Matemática

De las expectativas de logro planteadas para los alumnos de la Educación Secundaria, tanto en el ciclo básico como superior, destacamos, por su importancia general para la formación del alumno o por su relación con el tema de investigación, las siguientes:

- Conocer y saber usar símbolos y representaciones gráficas para expresar relaciones, en especial las funcionales, reconociendo el valor y los límites que encierra la modelización matemática en relación con fenómenos de la vida real.
- Establecer conexiones entre los contenidos de la matemática y de ésta con otras disciplinas.
- Comprender la naturaleza del pensamiento matemático, usando el razonamiento para hacer conjeturas, buscar evidencias, desarrollar argumentos y tomar decisiones, comunicando ideas y manejando procedimientos básicos de esta ciencia en todas sus formas: oral, escrita, gráfica y simbólica.
- Apreciar la belleza y utilidad de la disciplina, mostrando seguridad y confianza para pensar y comunicarse.
- Trabajar cooperativamente aceptando responsabilidades y respetando las normas acordadas, valorando la disciplina, el esfuerzo, la perseverancia como necesarios en el quehacer matemático y para el desarrollo personal y social de quien la estudie.

En el Anexo 1 (p. 235) se muestra la secuenciación de contenidos conceptuales y procedimentales correspondientes al eje "Funciones" propuesto en el diseño para el área Matemática en primer y segundo año y los enunciados para el eje "Funciones y pre-cálculo" para tercer y cuarto año.

En ambos diseños se presenta a las funciones como uno de los ejes básicos. Se especifica que, dado que su enseñanza es uno de los aspectos que unifica el saber matemático, desde los primeros ciclos se va insertando en los distintos contenidos, hasta llegar al tratamiento de las funciones reales de variable real, que servirán de sustento en los dos últimos años de la secundaria, para el estudio del cálculo infinitesimal.

Los contenidos que se proponen para tratamiento común en todas las modalidades son funciones, análisis de funciones desde su expresión analítica, funciones polinómicas y trascendentes.

Con respecto a las nociones que merecen un tratamiento diferenciado según la modalidad, se incluye límite, continuidad, derivada, aplicaciones de la derivada y análisis de funciones usando derivadas.

En relación a la metodología, el diseño correspondiente al ciclo básico especifica que la enseñanza de la matemática deberá estar orientada al desarrollo de habilidades y destrezas propias del pensamiento matemático. En esta etapa se debe lograr un pasaje gradual de una enseñanza intuitiva, empírica, propia de los ciclos anteriores, a una etapa en que los alumnos comienzan a configurar formas de razonamiento que permitan lograr el formalismo propio del pensamiento matemático requerido en etapas más avanzadas. En cuanto al ciclo superior, si bien se sugiere profundizar en el tratamiento de los contenidos, se apunta a trabajarlos sin una excesiva formalización, con aplicaciones en situaciones relacionadas a problemas de la modalidad.

Desde el punto de vista de esta investigación, destacamos como relevante la recomendación de introducir geométricamente y relacionados a razones de cambio los temas vinculados con funciones y derivadas.

Los tratamientos especiales, vistos desde cada una de las modalidades, son:

* Ciencias Naturales: Utilización de la derivada en diferentes contextos. Manejo adecuado en el cálculo y análisis de funciones, de manera de facilitar el tratamiento de integrales.

* Economía y Gestión de las Organizaciones: Énfasis en el tratamiento de sucesiones utilizadas en el cálculo financiero, asociadas con límite. En el estudio de las funciones, trabajo especial con funciones de costos, ganancias e ingresos, aprovechando los problemas de interés compuesto e interés continuo en las aplicaciones de la función exponencial y logarítmica. En el tema de derivada, énfasis a las funciones de ingresos y beneficios, costo y beneficio marginal.

* Producción de Bienes y Servicios: Estudio de funciones y modelos que conecten la física, la mecánica y la geometría, relacionando distintas variables de procesos productivos o de situaciones de producción.

* Comunicación, Arte y Diseño: Estudio de funciones. Proporcionalidad y geometría.

Del análisis del diseño curricular se puede constatar que en la organización de los contenidos, si bien se plantea la importancia de relacionar el estudio de las funciones con la modelación de fenómenos, no se menciona de manera concreta su correspondencia con fenómenos de la variación física. No encontramos un reconocimiento explícito del estudio de situaciones de cambio. Con respecto al empleo de diversos sistemas de representación, se trabajan en mayor o menor grado, mencionándose especialmente en los contenidos de primer y segundo año para la introducción de las funciones.

Se observa que el currículo está estructurado de manera tal que presenta fundamentalmente una abundante cantidad de contenidos, aportando escasas orientaciones metodológicas así como muy pocos elementos para la evaluación del rendimiento de los alumnos. La mayor carga de trabajo se cede al tratamiento de una gran cantidad de contenidos para luego buscarle algunas aplicaciones.

Por otro lado, teniendo en cuenta nuestra experiencia como docentes en la educación secundaria, los sondeos realizados a otros docentes con los cuales tomamos contacto a través de cursos de formación a distancia sobre funciones y cálculo diferencial, así como lo que nos manifiestan nuestros propios alumnos ingresantes a la universidad, consideramos que el currículum planeado difiere en gran medida del realmente logrado, siendo muy pocas las instituciones que desarrollan algunos contenidos del cálculo.

Física

En el diseño curricular para la Educación General Básica de nuestro país, y en particular de nuestra provincia, los contenidos correspondientes al campo de la física están incluidos, junto con los de química, geología y biología en el área Ciencias Naturales.

Con respecto al bloque correspondiente a física, los contenidos básicos destacan la importancia de mostrar los patrones dinámicos comunes presentes en procesos muy diferentes apuntando a la construcción de esquemas conceptuales básicos que articulen la estructura científica respecto del mundo físico. Para ello se presenta una organización basada en cinco subtítulos que responden a las grandes temáticas abordadas desde el campo de la física. El que nos interesa para nuestro estudio es el correspondiente a “Fuerzas y movimiento”.

El abordaje de los contenidos referidos a este bloque aparece desde la escuela primaria. En los primeros años se estudia el movimiento desde un punto de vista cualitativo y fenomenológico, explorando distintos tipos de trayectorias (rectilíneas, curvas, etc.) y las maneras de describir el movimiento de los cuerpos (la velocidad, el tiempo empleado, el cambio de posición). Con respecto a las fuerzas se analizan sus efectos sobre los cuerpos (desplazamientos, cambios de forma, etc.). En todos los casos se utilizan registros que introducen la necesidad de graficar.

En cuarto, quinto y sexto año de primaria se analizan la noción de velocidad en diferentes situaciones, y las fuerzas y sus efectos, siempre desde un abordaje cualitativo. Se inicia el estudio de la fuerza gravitatoria, la caída libre de los cuerpos y se trabaja, relacionado con estos temas, el concepto de peso de los cuerpos. Se abordan la flotación de los cuerpos y el empuje, el equilibrio desde un trabajo exploratorio y básicamente cualitativo y las máquinas simples (palancas, balanzas, etc.).

Para séptimo año de primaria, primero y segundo año de la secundaria, se propone el estudio experimental de oscilaciones en péndulos y resortes. Esto permite introducir la noción de movimiento ondulatorio, que ha de vincularse con la de intercambio, conversión y transporte de energía. También de modo introductorio se abordan los conceptos de aceleración y de inercia, así como las nociones de energía cinética y potencial. El concepto de fricción permite integrar la descripción idealizada de fuerzas y movimientos con experiencias cotidianas (en deportes, en el manejo de vehículos).

Las expectativas de logro al finalizar segundo año de la educación secundaria, relacionadas con nuestro tema de estudio, son que los alumnos sean capaces de:

- Aplicar sus conocimientos sobre fuerzas en situaciones sencillas de la vida diaria.

- Comprender los principios físicos básicos que operan en las primeras máquinas simples y sus relaciones con la tecnología.
- Estimar y medir velocidades.

En el mismo diseño se hace referencia a la necesidad de vinculación, no sólo con otros contenidos de la física, sino con los de la matemática y otras ciencias.

Los contenidos básicos comunes de Ciencias Naturales para tercero, cuarto y quinto año, tienden a la consolidación de las competencias básicas logradas en los niveles anteriores, ampliando la alfabetización científica. No aparecen contenidos específicos relacionados con el tema que nos interesa.

3.2.2 Análisis de la situación en nuestra carrera

Por medio de la resolución 334 del año 2003, el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, de acuerdo con el Consejo de Universidades, aprobó los contenidos curriculares básicos y la carga horaria mínima para la carrera de Ingeniería Agronómica.

Los contenidos curriculares básicos están organizados en áreas según los núcleos temáticos, correspondiendo Matemática al área de las Ciencias Básicas. Dichos contenidos son:

- Lógica matemática y conjuntos.
- Análisis combinatorio. Álgebra. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.
- Geometría analítica.
- Funciones.
- Cálculo infinitesimal (derivadas e integrales).
- Nociones de ecuaciones diferenciales.

Determina que la carga horaria mínima es de 130 horas.

En nuestra carrera, Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, los contenidos se distribuyen en dos asignaturas, Matemática I y Matemática II. Para cada una de ellas se establecen 7 horas semanales de clase durante 14 semanas, lo que implica 98 horas para cada una, es decir 196 horas en total. La distribución de los contenidos se adapta además a la disposición de la Universidad Nacional del Litoral de desarrollar contenidos básicos comunes a varias facultades de manera de favorecer la movilidad de los alumnos a otras carreras.

Teniendo en cuenta las disposiciones mencionadas, los programas analíticos se organizan desarrollando los contenidos correspondientes a funciones en Matemática I y los de cálculo en Matemática II. Los mismos se presentan en el Anexo 1 (p. 242).

Como se observa en el programa de Matemática II, se estudia previamente el límite de una función en un punto y posteriormente la derivada.

Como bibliografía básica se utilizan libros redactados especialmente por personal de la cátedra. Para el desarrollo de los contenidos sobre funciones y cálculo diferencial se manejan, respectivamente:

- Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S. y Hecklein, M. (2008). *Funciones* (2ª ed.), Santa Fe: Ediciones UNL, Universidad Nacional del Litoral.

Con respecto al desarrollo de las funciones, realizamos un tratamiento profundo desde las diferentes representaciones, haciendo hincapié en la interpretación del comportamiento de las funciones a través de sus gráficas.

El manejo de un universo de formas gráficas rico y profundo en significados por parte del estudiante favorece el acceso al lenguaje y pensamiento variacional (Farfán, 2003).

- Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S. y Hecklein, M. (2007). *El Cálculo Diferencial* (2ª ed.), Santa Fe: Ediciones UNL, Universidad Nacional del Litoral.

En este libro, el estudio de la derivada se introduce a partir de la razón de cambio y su relación con la pendiente, a través de problemas variados, tanto físicos como de las ciencias naturales.

Con respecto al desarrollo de los contenidos en los libros, los mismos constituyeron un paso previo a comenzar a trabajar plenamente en la línea del pensamiento y lenguaje variacional y ubicar como centro o punto de partida la variación para el estudio de las funciones y el cálculo. Sin embargo aparecen ya algunos aspectos. Los contenidos de ambos libros se detallan en el Anexo 1 (p. 244).

Hacemos notar que desde hace algunos años comenzamos a diseñar y poner en práctica secuencias didácticas de diferentes contenidos articuladas en torno a la idea de variación y cambio. Las secuencias desarrollan contenidos de Matemática I, para el estudio de las funciones, y de Matemática II, para el desarrollo del cálculo y complementan el material básico de trabajo presentado en los libros.

3.2.3 Análisis de libros de texto

Hicimos una selección de libros de texto con el objetivo de indagar si se encuentran presentes especificaciones sobre el estudio de la variación en la introducción del cálculo diferencial, en particular de la derivada, así como también la utilización de diversos registros de representación. En cada uno de los libros, se analizó cuáles son los objetos estudiados, revisando la naturaleza de las definiciones, la secuencia en que están ordenadas y su relación con el estudio de la variación. Se indagó sobre los teoremas, propiedades y reglas más importantes que los autores proponen, precedentes al tema de derivada como también concernientes al mismo concepto. Se examinó qué habilidades se pretenden desarrollar con los ejercicios y problemas planteados y si existen relaciones con los problemas de variación.

Para la elección de los libros se revisaron programas de distintas facultades y universidades detectando cuáles aparecen más frecuentemente, teniendo en cuenta además su disponibilidad en las bibliotecas. Se seleccionaron los siguientes textos:

- Larson, R; Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *Cálculo 1* (8ª ed.). México: Mc. Graw Hill.
- Leithold, L. (1999). *El Cálculo* (7ª ed.). México: Oxford.
- Salas, S.; Hille, E. y Etjen, G. (2003). *Calculus. Una y varias variables* (4ª ed.). Barcelona: Editorial Reverté.
- Stewart, J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos*. México: International Thomson Publishing.

En primer lugar investigamos cómo introducen el estudio del cálculo y el tratamiento de contenidos precedentes a la derivada.

Motivación al estudio del cálculo

Salas, Hille y Etjen comienzan con una introducción al cálculo, desarrollando algunas de sus ideas básicas y presentando una relación entre problemas de la matemática elemental y problemas que se resuelven utilizando herramientas del cálculo (pendiente de una recta-pendiente de una curva, recta tangente a una circunferencia-recta tangente a una curva más general, velocidad y aceleración media-velocidad y aceleración instantánea, área de una región limitada por segmentos rectilíneos-área de una región limitada por curvas, etc.), agregando un breve relato sobre sus orígenes.

Larson, Hostetler y Edwards hacen una motivación similar previa al estudio del concepto de límite. Stewart comienza con una presentación de los problemas fundamentales que dieron origen al cálculo, como el problema del área, el problema de la tangente, velocidad, la paradoja de Zenón (para dar lugar al tratamiento del límite de una sucesión y suma de una serie).

Leithold comienza directamente con el tratamiento de los contenidos.

Tratamiento de contenidos previos a la derivada

Todos los autores seleccionados desarrollan función, límite y continuidad, antes de introducir la derivada. Con respecto a las variables, el desarrollo es muy breve. Todos definen variable luego de dar la definición de función. Salas y otros realizan un repaso previo de los números y sus propiedades, trabajando en forma breve las desigualdades. Stewart deja para un apéndice el trabajo con intervalos, desigualdades y valor absoluto.

Funciones

Stewart y Leithold introducen el tema señalando que las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra.

Si bien los cuatro autores realizan el tratamiento en distintos registros, Larson y otros y Stewart hacen referencia explícita de que existen cuatro maneras de representar una función: verbal, numérica, visual y algebraica.

En los cuatro libros se define función como una regla que asigna a cada elemento *x* de un conjunto un único elemento *y* de otro conjunto. Excepto Stewart, todos definen directamente función real de variable real.

Larson y otros introducen función como un conjunto de pares ordenados de números en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. Leithold utiliza también esta forma como definición formal de función.

La noción de variable está presentada muy brevemente de diferentes formas. Stewart define variable independiente como *un símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f* y variable dependiente como *un símbolo que representa un número en el rango de f*. Salas y otros y Leithold señalan que los elementos *x* que pertenecen al primer conjunto y los elementos *y* del segundo conjunto se llaman variables, siendo *x* la variable independiente e *y* la variable dependiente.

Los cuatro autores presentan, en mayor o menor medida, ejemplos donde la misma función se define a través de su ley, una tabla, su gráfica y utilizando inclusive los diagramas de Venn como una manera de visualizarla.

Definen gráfica de una función y presentan las correspondientes a algunas funciones definidas algebraicamente, anexando las tablas de valores.

Excepto Leithold, los autores trabajan las transformaciones básicas de las funciones y estudian algunas de sus características, como paridad y simetrías. Todos repasan las funciones elementales, operaciones entre funciones, en especial la composición.

En los cuatro libros se destaca la importancia del tema y su utilización en una amplia variedad de disciplinas como modelos que describen la relación entre variables, mostrando diversos ejemplos. En Salas y otros los ejemplos son de aplicaciones a la geometría. En los otros libros las aplicaciones son variadas. Larson y otros desarrollan en un apartado especial lo que los autores llaman el modelo lineal, repasando la definición y la notación simbólica de la pendiente de una recta y de la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente. Ya que la pendiente de una recta puede interpretarse como una razón la relaciona con una tasa, ritmo o velocidad de cambio.

Los ejercicios y problemas propuestos requieren determinación del dominio, la evaluación de la función en distintos valores del mismo, clasificación y graficación. La mayor cantidad de actividades planteadas requieren el trabajo de funciones definidas en forma algebraica, presentando algunas desde el registro gráfico. El texto de Larson y otros es en el que más se trabaja desde diferentes registros (lenguaje verbal, tablas, leyes y gráficos). Resulta además el más atractivo desde lo visual ya que utiliza varios colores.

Si bien todos los autores, en menor o mayor medida, plantean y resuelven problemas asociados a la variación (áreas, volúmenes, crecimiento) ninguno explota de manera explícita la relación que existe entre este tipo de fenómenos y la noción de función.

Límite y continuidad de una función

En tres de los textos seleccionados (Larson y otros, Salas y otros, Stewart) se introduce el estudio de límite de una función citando aplicaciones de este concepto. Los autores explican cómo al resolver numerosos problemas, por ejemplo, al calcular la pendiente de una curva en un punto o una velocidad instantánea es necesario calcular un límite. En cambio Leithold comienza directamente con el estudio.

Todos los autores utilizan distintas representaciones, correspondientes a los registros gráfico, numérico y algebraico, para el desarrollo de la noción, aprovechándolas en diferente medida para explicar el tema.

Introducen la idea de límite como el valor al que se acerca la función a medida que la variable independiente se acerca a cierto número. Muestran ejemplos de funciones definidas algebraicamente, realizando el análisis numérico y gráfico.

Todos presentan la definición rigurosa épsilon-delta de límite. Stewart la deja para el apéndice, para aquellos alumnos que quieran profundizar sobre el tema. En todos los libros la definición surge del análisis de cuestiones intramatemáticas, especialmente del análisis del comportamiento de tablas de valores o de gráficas de funciones.

Estudian luego los límites laterales, estableciendo la condición de que sean iguales para que el límite exista. Trabajan los límites infinitos y en el infinito, presentando la manera de determinar asíntotas verticales y horizontales a la gráfica de una función. Desarrollan algunas propiedades de los límites, especialmente las correspondientes al álgebra de límites, demostrando algunas. Trabajan también algunos límites especiales.

Con respecto a la noción de continuidad, analizan en primer lugar la continuidad de una función en un punto, introduciendo la noción de manera gráfica, señalando de manera intuitiva que una gráfica es continua en un punto si no tiene saltos o huecos en ese punto. A partir de esto deducen las condiciones que se deben cumplir y desarrollan la continuidad de una función en un intervalo. Presentan propiedades básicas de la continuidad y algunos teoremas (del emparedado, del valor intermedio, de los valores extremos), demostrándolos en algunos casos o mostrando gráficamente la situación.

Los ejercicios resueltos y propuestos requieren la evaluación de límites de funciones definidas algebraicamente y, en mucho menor medida, gráficamente; la aplicación de la definición formal, ya sea determinar el valor de límite o encontrar los valores que pueden tomar ε o δ; la aplicación de propiedades y teoremas y algunas demostraciones.

En relación a la continuidad se solicita la determinación de la continuidad de una función, especialmente definidas algebraicamente y, en menor medida, gráficamente.

Algunas actividades propuestas exigen la graficación de funciones que cumplen determinadas condiciones relacionadas con dominio de la función, límites en determinados valores de las abscisas, condiciones de continuidad. Otras demandan el desarrollo teórico de contenidos.

En el texto de Salas y otros no se presentan problemas de aplicación mientras que sí aparecen en los libros de Larson y otros y Stewart. En el primero involucran situaciones generales y en el segundo aplicadas al cálculo de tangentes y velocidades instantáneas.

En general observamos que en los problemas la ley está enunciada, no se requiere encontrar el modelo. En este sentido, Leithold propone varios problemas de aplicación donde se debe obtener primero la función que modela matemáticamente la situación y definir la variable dependiente, para luego trabajar cuestiones relacionadas con límite.

Tratamiento de la derivada

Al revisar los textos seleccionados encontramos que todos los autores presentan la derivada de la misma manera, pero con variaciones en el orden de dar las definiciones y las aplicaciones.

Larson y otros, Leithold y Salas y otros siguen un desarrollo muy parecido. Introducen la derivada considerando primero su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una curva.

Dado que el límite que aparece en el cálculo de la pendiente es muy frecuente en diversas aplicaciones, recibe un nombre y notación especial. Hacen referencia al cociente incremental, mostrando la notación abreviada (usando Δ) del límite de este cociente.

Definen y trabajan casi simultáneamente derivada en un punto y función derivada. Por ejemplo, la presentada por Larson y otros es: La derivada de f en x es $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ si este límite existe. Para todos los x para los cuales existe este límite, f' es una función de x.

Los tres autores presentan distintas notaciones de la derivada y del límite desarrollando ejemplos de cálculo de derivadas usando la definición, relacionados al cálculo de rectas tangentes. Salas y otros trabajan también con la recta normal.

Analizan la diferenciabilidad de una función para lo cual estudian la relación entre derivabilidad y continuidad y el concepto de derivadas laterales.

Desarrollan las reglas de derivación, demostrando algunas de ellas y las derivadas de orden superior.

En estos momentos inician el estudio de la derivada como una tasa de variación (o razón de cambio) con aplicaciones al movimiento y a otros contextos, como geometría, biología, economía.

Stewart hace un tratamiento similar de los contenidos pero introduciendo desde el principio las aplicaciones al cálculo de la pendiente de la tangente a una curva, la velocidad en un instante o cualquier razón de cambio.

Define en primer lugar derivada de una función en un punto, desarrollando ejemplos similares a los otros libros, introduciendo también el trabajo numérico a través de tablas.

Luego, en sección aparte, introduce función derivada, señalando que si, en la definición de derivada en un punto *a*, hacemos que a varíe, reemplazando *a* por la variable *x*, se obtiene la definición de función derivada.

Desarrolla además diferenciabilidad de una función, derivadas sucesivas, aproximaciones lineales y antiderivada. En el capítulo siguiente comienza con las reglas de derivación.

Los ejercicios propuestos en los cuatro libros requieren el cálculo de derivadas utilizando definición, relacionando con la interpretación geométrica, determinación de pendientes de curvas y tangentes, la obtención de las ecuaciones de rectas tangentes, análisis de la diferenciabilidad de funciones definidas algebraica y gráficamente, ejercicios de razonamiento gráfico sobre el significado de f y f ', graficación de funciones que cumplen determinadas condiciones. Los problemas tratan aplicaciones a distintas áreas.

Los registros utilizados son esencialmente el algebraico y el gráfico.

3.2.4 Conclusiones

El análisis realizado de los programas y libros de texto muestra que en la enseñanza del cálculo siguen prevaleciendo las formas, contenidos y enfoques tradicionales. Si bien se tratan aspectos relacionados con el tratamiento tanto cualitativo como cuantitativo de la variación y el cambio, estos conceptos no se consideran como el eje central de la propuesta, a partir de los cuales se da sentido al desarrollo y estudio de la derivada y de los que se desprenden las ideas, conceptos, propiedades y procedimientos esenciales de esta parte de la matemática. En general se desarrollan los contenidos matemáticos para presentar luego algunas aplicaciones.

Actualmente, los diferentes grupos dedicados a la investigación en educación matemática, coinciden en que la enseñanza del cálculo diferencial debería propiciar la comprensión de los conceptos básicos, disminuyendo la cantidad de tiempo dedicada a la transmisión de contenidos y al aprendizaje de algoritmos.

Consideramos que una manera de contribuir a esto es orientar la enseñanza a la resolución de problemas surgidos de la práctica, relacionados esencialmente con el movimiento y la variación, generando la necesidad de presentar los contenidos mínimos indispensables. La propuesta es seguir el camino histórico del surgimiento de la matemática de las variables, en el que la búsqueda de soluciones a problemas como el de movimiento de los astros, el flujo de los líquidos, el movimiento de los cuerpos dio lugar al nacimiento de las nociones de variable y función así como la necesidad de la cuantificación de rapidez de la variación y al concepto de razón de cambio instantánea.

3.3 Análisis cognitivo

La cognición trata sobre el pensamiento humano en su acción por conocer, por lo que la investigación cognitiva busca comprender la mente humana. Este tipo de estudios se refiere a las características cognitivas de la población a la que está dirigida la enseñanza y está ligada a los procesos mentales de organización del pensamiento. Esto implica el análisis de los diferentes puntos de vista, las concepciones, representaciones y modos en que los involucrados abordan e interpretan el objeto, concepto, noción, etc., que profesores, estudiantes y en general, la comunidad académica tienen o se forman al respecto (Zaldívar, 2006). Se relaciona con las dificultades y obstáculos que debe enfrentar el que aprende para apropiarse de las nociones puestas en juego.

Todos los seres humanos a lo largo de su vida, desarrollan ideas acerca de su mundo, elaboran significados para términos científicos y construyen explicaciones acerca de por qué y cómo las cosas se comportan de determinada manera. Todas estas creencias, teorías, significados y explicaciones son considerados como concepciones. Profundizar en el conocimiento de las concepciones de nuestros alumnos nos permite crear las condiciones propicias para diseñar y ejecutar acciones tendientes a cambiarlas.

Para nuestro trabajo se analizaron en primer lugar distintas investigaciones en didáctica del cálculo, lo que nos permitió detectar elementos teóricos que han sido propuestos y aplicados cuando se pretende interpretar las características cognitivas de los estudiantes. En el Capítulo 2 de esta memoria se exposieron los fundamentos teóricos de nuestra investigación y, en particular, los utilizados en el estudio de la dimensión cognitiva. En este capítulo precisamos algunos aspectos sobre el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y el proceso de visualización, importantes al momento de interpretar las producciones de nuestros alumnos.

Dado que el análisis didáctico nos muestra que no aparece en forma explícita el desarrollo de contenidos relacionados con el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en instancias previas al desarrollo de temas específicos del cálculo y, conociendo además, que las interpretaciones y concepciones que se han formado los alumnos sobre las funciones a partir de la enseñanza no coinciden siempre con los significados esperados, lo que genera dificultades y conflictos para la comprensión que se manifiestan a través de errores, decidimos implementar un cuestionario a fin de efectuar un diagnóstico de sus concepciones acerca de nociones variacionales básicas.

Para ello se diseñaron actividades de tipo no algorítmico para estimar el nivel de comprensión de los alumnos, entendiendo la comprensión de un objeto matemático desde la perspectiva de los sistemas de representación semiótica.

Se presenta el cuestionario y la metodología aplicada, así como los resultados que se obtuvieron. Pretendemos explicar cómo son representadas las nociones por el alumno, cómo se dan las relaciones entre los diferentes registros de representación y cuáles son los procedimientos que derivan de éstos.

3.3.1 Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional

Como ya lo manifestamos, el pensamiento variacional pone especial atención en la identificación y el entendimiento de los fenómenos de cambio. Su desarrollo implica todos los procesos propios del pensamiento matemático avanzado cuando el foco de estudio son los procesos de variación y cambio.

Distintos elementos dan cuenta del desarrollo del pensamiento variacional. Implica en primer lugar el tratamiento de situaciones variacionales. Las preguntas fundamentales de toda situación variacional son: qué varía, cómo varía lo que varía, cómo se relacionan los cambios. Es común dentro de la línea del pensamiento y lenguaje variacional referirse a magnitudes variables, teniendo en cuenta el desarrollo histórico y epistemológico de este concepto, concibiéndolas como abstracciones que representan alguna característica de objetos o fenómenos que cambian.

En relación a los procesos cognitivos implicados, las situaciones deben ser tales que los alumnos no necesiten sólo recurrir a la memoria para responderlas, sino que los lleven a que validen, modifiquen o construyan argumentos.

Específicamente, entendemos por una situación variacional al conjunto de problemas que requieren de un tratamiento variacional tanto desde el punto de vista de las funciones cognitivas de quienes las aborden como desde la perspectiva matemática y epistemológica.

Dentro del pensamiento y lenguaje variacional, el concepto de variación tiene una importancia fundamental, ya que el estudio de la variación de diferentes situaciones (en particular aquellas ligadas a cuerpos en movimiento) generó las ideas fundamentales que dieron origen al cálculo diferencial.

El término "variacional" se encuentra estrechamente ligado al concepto de variación, el cual es entendido como una cuantificación del cambio (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005). Uno de los elementos básicos que favorecen el pensamiento variacional es la idea de diferencia, en tanto es instrumento que mide la variación.

Para poder explicar el sentido del término "variacional" es importante dejar en claro la diferencia entre cambio y variación. La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación se entiende como una cuantificación del cambio, esto significa utilizar nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. En este sentido nos referiremos a argumentos de tipo variacional.

Una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de técnicas, ideas, procedimientos o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio que se está estudiando (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005).

En nuestro trabajo nos interesa entender y explicar la forma en el que la representación de la variación interviene en la construcción del concepto de derivada. Ante esto cabe preguntar, ¿cuáles son los elementos variacionales relacionados a la derivada?

Testa (2004) expresa que para dar significado variacional a la derivada, es necesario significar previamente cada elemento que varía. Si existe la derivada de una función f en un real "*a*", será $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Este límite nos brinda información de cómo y cuánto varía la función *f* en un entorno del real "*a*". Pero, ¿a qué tipo de variación de la función *f* nos estamos refiriendo? A una variación relacionada con la diferencia $f(x) - f(a)$, pero, ¿podemos significar esta variación si no significamos previamente a $f(x)$ y $f(a)$?

Estos elementos son los que caracterizan básicamente al pensamiento variacional y que en este trabajo pretendemos analizar.

3.3.2 Visualización

Al indagar sobre el significado del término visualización encontramos numerosas definiciones, las cuales contemplan distintos puntos de vista de este vocablo. En cualquier diccionario podemos leer que se refiere a la formación en la mente de una imagen visual de un concepto abstracto. Intentando profundizar un poco más, tomamos la definición de Zazkis, Dubinsky y Dauterman (1996), quienes entienden por visualización:

> Un acto en el que un individuo establece una fuerte conexión entre un constructo interno y algo a lo que se accede a través de los sentidos. Esta conexión puede hacerse en cualquiera de estas dos direcciones. Un acto de visualización puede consistir en cualquier construcción mental de objetos y procesos que un individuo asocia con objetos o eventos percibidos por él o ella como externos. Alternativamente, un acto de visualización puede consistir en la construcción, en algún medio externo, como papel, pizarrón o computadora, de objetos o eventos que el individuo identifica con objeto/s proceso/s en su mente[3] (p. 441).

En el ámbito de la matemática, la visualización es considerada como uno de los procesos cognitivos implicados en el pensamiento avanzado. Zimmermann y Cunningham (1991) afirman que la visualización matemática es el proceso de formar imágenes que pueden ser mentales, con lápiz y papel, o con la ayuda de la tecnología, y usar dichas imágenes para el descubrimiento y entendimiento matemático.

La definición de visualización como “la habilidad para transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual” (Cantoral y otros, 2003, p.146), ya presentada en el primer capítulo, sintetiza de alguna manera todo lo anterior.

La visualización trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático y obtener un resultado y, sobre todo, de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados.

La visualización es una actividad cognitiva mucho más compleja que el simple acto de ver u observar una representación de algún concepto matemático. Peralta (2004, en Zaldívar, 2006, p. 27) cita las siguientes palabras de Hitt (1995):

> La visualización de los conceptos matemáticos no es una actividad cognitiva trivial: visualizar no es lo mismo que ver. Visualizar es la habilidad para crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión.

Por ejemplo, visualizar una función no significa solamente verla, mirar o contemplar su gráfica. Como menciona Montiel (2003) es posible visualizar la función sin siquiera verla con el sentido de la vista. Lo que realmente importa, es la transformación que podemos hacer de esa representación a otra, lo cual implica llevar a cabo un acto de visualización.

Guzmán (1996, apartado 0.1) expresa:

> Nuestra percepción es muy prioritariamente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización, no solo en aquellas que, como la geometría, se refieren más directamente a la exploración específica de aspectos del espacio, sino también en otras, como el

[3] La traducción es de la autora de este trabajo del original en inglés.

> análisis, que nacieron para explorar los cambios de los objetos materiales en sí mismos y en sus aspectos espaciales.

En muchos casos, para comprender una situación, necesitamos recurrir en primera instancia al aspecto visual, para luego trabajar en forma analítica. Testa (2004) considera, por ejemplo, que es muy probable que cualquier docente al pensar en una función que no sea derivable en un punto visualice inmediatamente un gráfico y luego piense en su expresión analítica. La autora expresa que no es probable que ocurra lo contrario, es decir que sean muchos los casos en los cuales nuestra primera idea sea la expresión analítica de una función que cumpla la condición. Otras veces es casi imposible evitar la representación. Por ejemplo, es difícil pensar en comprender el concepto de concavidad sin haberlo visto nunca representado.

A pesar de esto, en la enseñanza de los contenidos del cálculo se resaltan por lo general los aspectos algebraicos y algorítmicos. Refiriéndose a esta problemática, Farfán (2003, p. 90) expresa:

> Su enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, entre otras causas por no considerarlos como matemáticos, o bien por la concepción que de la matemática y de su enseñanza se posea, sin considerar, por ejemplo, la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige.

Esta sobrevaloración de los procedimientos analíticos, y el correspondiente rechazo de la visualización por parte de docentes y del sistema en su conjunto, en algún sentido cercenan las estrategias propias del pensamiento visual de los estudiantes. No visualizar un problema puede ir en detrimento de su resolución, pues restringe la construcción de conceptos, y por tanto repercute en el desarrollo de los procesos de pensamiento.

Al trabajar de esta manera se termina evaluando en base a las habilidades algorítmicas y algebraicas que se han logrado desarrollar en los alumnos. Ante esta forma de evaluar, los alumnos terminan considerando que estas habilidades son lo esencial en el cálculo y la situación se convierte en un círculo vicioso.

Las dificultades para la visualización

El surgimiento y desarrollo histórico de los conceptos estuvo relacionado generalmente con algún problema real. Y en el intento de resolución se involucraron habitualmente elementos físicos, por lo que aparecieron necesariamente las figuras y los diagramas.

Guzmán (1996, apartado 0.3) manifiesta:

> La visualización ha sido la tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos. Uno u otro tipo de imagen acompaña constantemente sus especulaciones, probablemente aún las más abstractas, aunque la naturaleza de esta imagen presenta una variedad de individuo a individuo mucho mayor de lo que sospechamos. La visualización, como vemos por estas muestras, ha jugado un importante papel en el desarrollo del pensamiento matemático. Como tenía que ser, dada la naturaleza cognoscitiva

> del hombre, tan condicionada por los elementos visuales, intuitivos, simbólicos, representativos, y como corresponde a la naturaleza de la matemática y a sus propósitos.

Sin embargo en nuestra experiencia observamos que, si bien en los primeros años de su educación formal, los estudiantes recurren en forma natural a distintas representaciones, al pasar a cursos superiores, van abandonando esta práctica, dando lugar al razonamiento analítico y numérico.

Esto parece confirmar lo que manifiestan distintos investigadores (Eisenberg y Dreyfus, 1991; Hitt, 2003) acerca de la resistencia de los alumnos para utilizar distintas representaciones que podrían ayudarlos en la construcción de conocimiento matemático y en la resolución de problemas. Muestran la oposición que existe tanto de los estudiantes como de los profesores a visualizar en matemática, señalando el predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual.

Por lo general la comunidad matemática rechaza o no acepta como válidas las pruebas matemáticas fundamentadas en elementos visuales. Esto lleva a que el docente, aunque en su razonamiento utilice aspectos visuales, no los muestre al momento de presentar a sus alumnos una demostración, desarrollándola de una manera puramente formal y analítica. Las razones de estas formas de proceder, entre otras, pueden ser las planteadas por Guzmán (1996) quien dice que las tendencias formalistas imperantes durante una buena parte del siglo veinte han relegado a segundo término la visualización, tratándola en algunos casos con desconfianza y sospecha.

Por otro lado la visualización demanda actividades cognitivas superiores a las que exige pensar algorítmicamente. Eisenberg y Dreyfus (1991) manifiestan que parecería que los procesos de pensamiento visual son de mayor nivel cognitivo que los procesos analíticos. Esto nos daría razones para darle en el currículum mayor importancia a los procesos visuales que a los analíticos. Uno de los motivos más importantes sería que obtener la destreza de pensar visualmente nos llevaría a desarrollar automáticamente la destreza de pensar analíticamente; pero aparentemente no se daría el caso opuesto.

En otros casos, los docentes sí utilizan contenidos visuales e intuitivos como una forma de trasmisión de los conceptos, teoremas, métodos, formas de resolución de problemas, sin tener en cuenta que los alumnos pueden no estar preparados para comprender la información brindada, generando de esta manera obstáculos para el aprendizaje.

Eisenberg y Dreyfus (1991) enuncian diferentes razones de por qué los estudiantes tienen dificultades al extraer información de figuras o diagramas. Los alumnos están acostumbrados a recibir la información en forma secuenciada (lo que les brinda un orden para razonar y trabajar) y por medio de sentencias en lenguaje natural o simbólico. Se les ha enseñado a interpretar textos escritos ya sea en lenguaje coloquial o formal y no a leer diagramas. Es natural entonces que prefieran un texto lineal a un diagrama.

Por otro lado, aparecen razones cognitivas, que se basan en la dificultad de extraer información. En un diagrama, la información está dada en forma implícita y agrupada, además de no ser secuencial. Luego, si el alumno no ha aprendido a leer diagramas y a relacionar sus partes, de nada le servirán. Es nuestra responsabilidad formarlos en este sentido. Zimmermann (1991, en Olave, 2005) señala que algunas habilidades y destrezas vinculadas a la visualización que podemos desarrollar en nuestros alumnos son: conocer qué nos muestra y qué nos oculta cada sistema de representación, cuál es el más conveniente en cada situación, entender las reglas y convenciones asociadas con las representaciones gráficas, entender la estimación y la aproximación en contextos geométricos, disponer de un repertorio importante de imágenes visuales.

3.3.3 El cuestionario. Aplicación y resultados

Con el objetivo de explorar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los alumnos, relativo a sus concepciones sobre nociones variacionales básicas al momento de enfrentarse al estudio de la derivada, diseñamos y aplicamos un cuestionario.

El enunciado completo del mismo se presenta en el Anexo 2 (p. 247).

Las actividades se presentan en distintas representaciones (verbal, numérica, gráfica y analítica) y se refieren a las nociones de variable, función y variación de las variables involucradas, incluyendo primordialmente contenidos físicos y matemáticos. El objetivo general es analizar si los alumnos son capaces de identificar la variación en distintos fenómenos de cambio, respondiendo preguntas como qué es lo que varía, con respecto a qué varía, cuánto varía, analizando además si son capaces de justificar sus respuestas.

Para su elaboración se tuvieron en cuenta las sugerencias presentadas en el documento de trabajo “Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*”* (Castiblanco, Urquina, Acosta y Rodríguez, 2004) y las actividades presentadas por Dolores (1999, 2007b). Los modelos corresponden a funciones sencillas que se relacionan con situaciones cotidianas del alumno, relacionadas especialmente con velocidad.

Una versión muy similar del cuestionario ya había sido implementado el año anterior, lo que nos permitió analizar la validez de las actividades, especialmente si cumplían con nuestros objetivos: explorar sus concepciones sobre nociones variacionales, tanto físicas como matemáticas, necesarias para el desarrollo de la secuencia.

En el cursado 2008 se aplicó a 155 alumnos agrupados en 73 equipos de dos alumnos y tres equipos de tres alumnos. Los mismos ya habían regularizado y/o aprobado Matemática I, asignatura en la cual se desarrollan los contenidos correspondientes a funciones.

Se les solicitó que trabajen solos, sin ayuda del docente. Se decidió dar instrucciones sobre los enunciados si no los entendían para que puedan avanzar en las resoluciones.

A continuación se presenta cada una de las actividades y se desarrolla un análisis esencialmente cualitativo de las respuestas, examinando los principales errores y dificultades que presentaron en sus resoluciones como una manera de explorar sus concepciones sobre las nociones involucradas y la conversión entre distintos registros.

La corrección de las actividades se hizo de manera de poder obtener la información más completa posible para nuestro estudio y en este sentido es que las explicaciones y/o justificaciones fueron consideradas incompletas en algunos casos. Tratamos de tener en cuenta todas las respuestas en las que aparecían desarrolladas cuestiones variacionales, aunque no fueran completas o correctas. Sólo las respuestas a las que nos referimos como variadas o restantes, son las que no eran correctas o, a nuestro entender, no implicaban el uso de ninguna estrategia variacional.

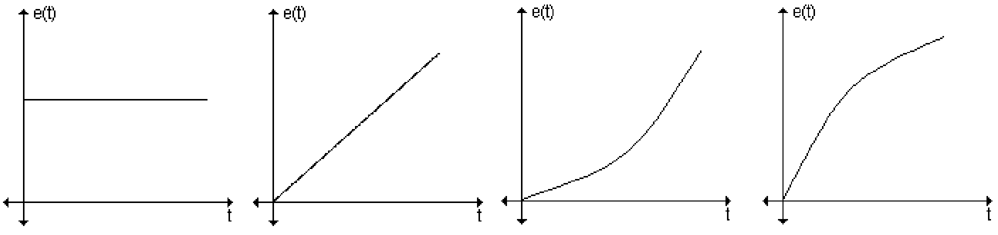
Actividad 1. Supongamos que se está llenando un balde con agua.
En esta situación de variación están involucradas diversas magnitudes, como por ejemplo el volumen del balde, es decir su capacidad total. Mencione otras magnitudes que intervienen (por lo menos tres). ¿Cuáles de esas magnitudes aumentan? ¿Cuáles disminuyen? ¿Alguna permanece constante? ....
....

En esta actividad se presenta una situación específica de variación y cambio que se analiza desde un punto de vista cualitativo. Se solicita la identificación de las magnitudes que cambian[4] y una descripción verbal escrita de su comportamiento. Se espera que los alumnos utilicen expresiones como determinada magnitud aumenta, determinada magnitud disminuye, determinada magnitud ni aumenta ni disminuye, etc. El registro involucrado es el verbal y el sistema de representación es el lenguaje escrito.

Si bien todos los alumnos, excepto uno, respondieron, se observaron dificultades para identificar magnitudes intervinientes en el problema. Hicieron referencia a propiedades físicas de los elementos involucrados, como el agua o el recipiente y hasta el medio ambiente. Aparecieron reiteradamente mencionadas, por ejemplo, presión del agua, temperatura (del agua o del ambiente), peso específico.

Notamos que la mayoría de los elementos enumerados son estáticos, se mantienen constantes, ya que son características o propiedades de la materia. Consideramos que estas respuestas aparecieron forzadas por el requerimiento de enumerar tres magnitudes diferentes y que la dificultad se debió a no pensar en lo que cambia en la situación.
Surgieron también dudas para responder si las magnitudes involucradas aumentan, disminuyen o se mantienen constantes, relacionando en muchos casos comportamiento de las magnitudes. Por ejemplo, varios grupos escribieron: *"si la velocidad aumenta, disminuye el tiempo, o viceversa".*

Actividad 2. Cada una de las siguientes gráficas muestra la posición e(t) de un auto en función del tiempo desde cierto punto de referencia. Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explique.
i) **ii)** **iii)** **iv)**



....

[4] Si bien lo que cambia en las situaciones planteadas es la cantidad de las magnitudes, siguiendo la postura de algunas investigaciones de la línea del pensamiento y lenguaje variacional, nos referiremos directamente al cambio de las magnitudes.

Con esta actividad y la siguiente se pretende analizar cualitativamente situaciones de cambio a partir de la representación gráfica de las funciones. Su resolución exige que los alumnos pongan en juego sus concepciones sobre las trayectorias de cuerpos en movimiento y su velocidad a partir de la lectura de gráficas cartesianas.

Se espera que discutan el significado de cada gráfica en términos del movimiento del auto y a partir de la interpretación conjeturen cuál corresponde al caso pedido.

Al analizar las respuestas se observó que de los 76 equipos, la mayoría (95%) seleccionó la opción correcta. Tres equipos seleccionaron la primera opción y uno la primera y la segunda.

Sí se presentaron dificultades para explicar la elección. Cuarenta equipos (53% del total) justificaron aceptablemente. Se consideraron correctas expresiones como: *avanza la misma distancia en el mismo intervalo de tiempo, la posición del auto es proporcional al tiempo, tiempo y espacio son directamente proporcionales.*

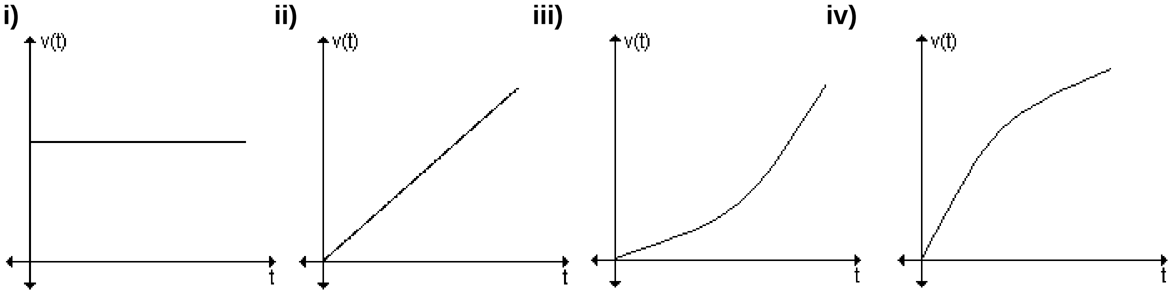
Se consideraron explicaciones incompletas a expresiones como: "*a medida que aumenta el tiempo transcurrido, el espacio recorrido aumenta"* o *"la posición cambia a medida que transcurre el tiempo".* Se obtuvieron 12 respuestas (16%) de esta forma. En todas falta explicar cómo aumenta o cómo cambia el espacio recorrido.

Hubo 16 justificaciones (21%) no correctas. Algunas fueron: *"Al ser velocidad cero la trayectoria del auto va a ser constante", "Al transcurrir el tiempo, la posición del auto no varía".* También se consideraron incorrectas aquellas explicaciones que repitieron lo solicitado en la consigna, como *"se mantiene constante la velocidad".*

Finalmente, cuatro equipos (5%) no explicaron de ninguna manera la elección.

Actividad 3. Determine cuál de las siguientes gráficas muestra la velocidad con que se mueve el auto del problema anterior. Explique.

i) **ii)** **iii)** **iv)**



....

Esta actividad es continuación de la anterior. Los alumnos deben elegir la gráfica velocidad-tiempo correspondiente a un auto que se mueve con velocidad constante.

Al analizar las respuestas se observó que, si bien sólo dos equipos eligieron una opción incorrecta (ambos la ii), a varios equipos les costó justificar la elección usando argumentos diferentes a lo que se enuncia en la consigna. Quince (20%) respondieron directamente *"porque la velocidad es constante".*

Las respuestas más completas fueron las de los equipos que explicaron que la primera gráfica es la única que corresponde a una función constante, y esto indica que la velocidad se mantiene, o bien desarrollaron correctamente por qué descartar las otras opciones. Ocho equipos (10,5%) justificaron de esta forma.

Otros 42 (55%) escribieron, por ejemplo: *"la velocidad no varía en ningún momento en toda la trayectoria del viaje",* o *"a medida que el tiempo aumenta la velocidad se mantiene"*, expresiones que hacen pensar en todo el dominio de la función.

Por último, siete equipos (9%) no explicaron de ninguna manera la opción realizada mientras que dos equipos (3%) dieron respuestas incorrectas.

Actividad 4. Los valores de la tabla dan la posición e (en metros) de un automóvil desde cierto punto de referencia, en el instante en que han transcurrido t segundos.

t(segundos)	0	1	2	3	4	5
e(metros)	17	34	51	68	85	102

a) ¿Qué valores puede tomar la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?

....

b) Teniendo en cuenta los valores de la tabla, ¿cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan? ....

....

c) Complete las siguientes tablas con el cambio entre dos valores consecutivos de la variable considerada. Escriba en cada casillero la operación que realiza.

t	0	1	2	3	4	5
	cambio	cambio	cambio	cambio	cambio	

e	17	34	51	68	85	102
	cambio	cambio	cambio	cambio	cambio	

¿Qué significado tienen las operaciones hechas en cada tabla? ....

....

¿Por medio de qué operación calculó los cambios? ....

¿Cómo fueron los cambios para cada una de las variables? ....

En esta actividad se presenta una función definida numéricamente, a través de una tabla de valores. Se espera que los alumnos reconozcan la diferencia como la operación que permite medir los cambios. Con respecto a las preguntas, su objetivo es que interpreten los cálculos realizados y describan cualitativamente la variación, logrando identificar y distinguir cambios positivos y negativos.

En particular, la pregunta del inciso a), sobre qué valores pueden tomar las variables independiente y dependiente, pretende indagar qué interpretan los alumnos de una función, de la cual sólo se presentan algunos pares de valores. Dado que la primera representa tiempo transcurrido y la segunda posición desde cierto punto de referencia, ambas podían tomar valores reales. Por el enunciado de la actividad asumimos como respuesta correcta cualquier valor real positivo incluido el cero para la variable tiempo y cualquier valor real para la variable que representa posición.

Las respuestas fueron variadas. Se notó que tuvieron dificultades para realizar este análisis a partir de la información de la tabla.

Aproximadamente el 14,5% (11 equipos) respondió que la variable independiente es “t” y la dependiente es “e” o que la variable independiente son los segundos y la dependiente los metros.

Otros cinco equipos (6,5%) hicieron alusión a la relación de dependencia entre las dos variables y no a los valores que toma cada una.

Los demás equipos analizaron lo pedido, pero no todos correctamente. Ocho equipos (10,5%) no consideraron la continuidad de las variables. Cuatro se refirieron a valores enteros positivos o enteros para ambas variables, mientras que los otros cuatro tomaron sólo los valores de la tabla, dando como respuesta: *“La variable independiente toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 y la variable dependiente 17, 34, 51, 68, 85, 102”*.

En 48 respuestas (aproximadamente el 63%) se notó una consideración de la continuidad de las variables, si bien no todos aclararon a qué conjunto numérico se referían. Las distintas respuestas se muestran en la siguiente tabla.

Respuesta	Cantidad de equipos
La variable independiente puede tomar valores de cero a cinco mientras que la dependiente valores de diecisiete a ciento dos.	5
Cualquier valor para ambas variables.	5
Las dos variables pueden tomar cualquier valor positivo.	6
Las dos variables toman valores reales positivos, incluido el cero.	7
La variable independiente toma cualquier valor real positivo y la dependiente cualquier valor real.	6
La variable independiente toma valores reales positivos incluido el cero y la dependiente valores mayores o iguales a diecisiete.	15
La variable independiente toma valores reales positivos y la dependiente valores mayores a diecisiete.	4

Los cuatro equipos restantes (5%) dieron respuestas diversas, todas erróneas, ya que consideraron al revés las variables, tomando “e” como la independiente y “t” como la dependiente.

Las dificultades encontradas coinciden con las reportadas por diversos investigadores. En su investigación sobre dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto de función, llevada a cabo con alumnos de educación media que cursan la materia Precálculo, López (2007) describe varios problemas con respecto a la identificación de las variables presentes en un fenómeno. Explícitamente los alumnos responden, sin importar su naturaleza u origen, que las variables involucradas son x e y. El investigador alude a que la simplificación de las variables hecha por los matemáticos con la finalidad de simplificar cálculos, suele ser una dificultad para el aprendizaje de los alumnos. Otro error encontrado fue que los alumnos consideraron que el dominio de una función es siempre el conjunto de todos los reales. También manifiesta la dificultad de los alumnos para distinguir la variable independiente y la dependiente.

Ursini y Trigueros (1998) investigaron la comprensión de la noción de variable que tienen los estudiantes al inicio de sus estudios universitarios. Las autoras reportan las grandes dificultades de los alumnos para determinar adecuadamente los intervalos de variación. Ante preguntas de esta naturaleza, la mayor cantidad de alumnos da una lista de los enteros que forman parte del intervalo mientras que en menor cantidad encuentran el intervalo de variación. El primer tipo de respuesta revela debilidad en la noción del continuo numérico y una concepción discreta de la relación.

En el inciso b) se solicita a los alumnos que, observando la tabla, respondan cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan. Se pretende simplemente que manifiesten que los valores de la variable dependiente también aumentan. Veinte equipos (26%) dieron esta respuesta.

Otros 30 (aproximadamente el 39%) intentaron explicar cómo aumenta o cuánto aumenta. Algunos describieron cualitativamente, aclarando que la variable dependiente aumenta en forma constante, mientras que el resto hizo una descripción cuantitativa, expresando que cada un segundo que la variable independiente aumenta, la variable dependiente aumenta diecisiete metros.

Solamente un equipo no respondió a este inciso y los 25 restantes (aproximadamente el 33%) dieron respuestas incorrectas. Entre las dificultades observadas destacamos que 16 equipos consideraron que la relación existente entre las dos variables es de proporcionalidad directa.

En el inciso c) los alumnos deben en primer lugar completar las tablas con los cambios para cada una de las variables, escribiendo en cada casillero la operación realizada. Como se esperaba, según lo visto en una experiencia anterior, los alumnos no entendieron a qué se refiere la palabra cambio. Ante esto, las profesoras presentes en la clase ayudaron a los distintos equipos de manera que puedan avanzar y contestar las preguntas. Expresaron por ejemplo: *del 0 al 1, la variable t, ¿cuánto cambia?, ¿qué operación hicieron?; del 17 al 34, la variable e, ¿cuánto cambia?, ¿qué operación hicieron?* De esta manera 71 equipos respondieron correctamente.

En relación a la pregunta ¿qué significado tienen las operaciones hechas en cada tabla?, los alumnos presentaron dificultades para determinar qué se esperaba como respuesta.

Pretendíamos que interpreten y relacionen los cambios calculados en las tablas con el significado en el problema, respondiendo que en la primera tabla cada diferencia representa el cambio de la variable tiempo, y en la segunda, el cambio de posición. Respondieron de esta manera 21 equipos (28%).

Otros seis equipos (8%) expresaron cuánto cambió cada variable, escribiendo que en la primera el cambio es de uno en uno mientras que en la segunda de diecisiete en diecisiete.

Trece equipos (17%) relacionaron los cambios de ambas variables, escribiendo por ejemplo: *"Por cada unidad de tiempo que transcurrió, la distancia del auto al punto de referencia aumenta en diecisiete unidades"*.

Incluso cinco grupos (7%), llegaron a usar el término razón de cambio, dando lugar a respuestas incorrectas ya que escribieron, por ejemplo, que el significado es *“la razón de cambio del espacio respecto del tiempo”*.

Se detectaron 10 grupos (13%) que hicieron alusión a cómo fueron los cambios, escribiendo por ejemplo *“el significado de las operaciones son las variaciones, que son constantes para cada variable”* o *“significa que el resultado del cambio es constante”*.

Las 17 respuestas restantes (aproximadamente el 22%) fueron variadas y no analizan lo pedido.

Finalmente, cuatro equipos (5%) no respondieron.

Con respecto a la pregunta sobre qué operación les permitió calcular los cambios, la respuesta parecía evidente, especialmente si habían podido completar las tablas. Respondieron correctamente 66 equipos (casi el 87%). Cuatro no respondieron y el resto (seis) lo hizo de manera incorrecta.

La última pregunta, ¿cómo fueron los cambios?, fue incluida para resaltar el hecho de cambios iguales, de manera de determinar las características de funciones que presentan esta particularidad y diferenciarlas de otras donde no ocurre lo mismo.

La respuesta de 45 grupos (59%) fue que los cambios son iguales o constantes.

Un grupo contestó que los cambios son positivos. La respuesta no es incorrecta pero no es lo que se pretendía que descubran.

Doce grupos (aproximadamente el 16%) hicieron alusión a cuánto cambian las variables. Escribieron por ejemplo *“para la variable t el cambio es de una unidad y para la variable e el cambio es de diecisiete unidades”*. Otros dos grupos relacionaron además las dos variables: *“por cada minuto la otra variable aumenta diecisiete metros”*.

Otros 12 equipos respondieron incorrectamente. Algunos se refirieron al aumento del valor de la variable de una celda a otra y varios volvieron a resaltar la relación de proporcionalidad entre las variables. Por último, cuatro equipos (5%) no respondieron.

Actividad 5. En la tabla se muestran las ganancias de una pequeña empresa en cada uno de los primeros cinco años de trabajo.

a) Complete la tabla con el cambio de ganancia año a año.

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Ganancia (en miles de pesos)	7	18	45	34	30	30
Cambio de ganancia						

b) ¿En qué períodos la ganancia aumentó? ....

c) ¿En qué períodos la ganancia disminuyó? ....

d) ¿En qué períodos la ganancia no cambió? ....

e) ¿Qué puede observar en la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones anteriores?...

En esta actividad se presenta nuevamente un fenómeno de variación, solicitándose la cuantificación de los cambios y su interpretación en la situación planteada. Igual que en la actividad anterior, la función está dada en forma numérica a través de una tabla de valores pero, en este caso, los cambios de la variable dependiente no son constantes.

Con respecto al cálculo de los cambios que se solicita en el inciso a), solamente un equipo no completó la tabla mientras que tres no lo hicieron correctamente.

Los alumnos presentaron dificultades para responder a las preguntas. Las mismas estuvieron relacionadas con el tipo de situación, en la que se presenta la ganancia año a año. Consideramos que los problemas surgieron por el tipo de variables involucradas, esencialmente con la variable independiente. En general, en clase se trabajan mucho más situaciones en que el tiempo aparece como una variable continua. En esta situación aparece la variable temporal discreta, y la ganancia que se calcula anualmente. La variable independiente toma valores aislados (2000, 2001,..., 2005) y los alumnos no supieron cómo considerar los períodos.

	Cantidad de respuestas	
	Correctas	Incorrectas
Períodos en los que la ganancia aumentó	68 (89%)	8 (11%)
Períodos en los que la ganancia disminuyó	54 (71%)	22 (29%)
Períodos en que la ganancia no cambió	57 (75%)	19 (25%)

Se observa en la tabla que las mayores dificultades se presentaron para responder los períodos en los que la ganancia disminuyó. Entre las respuestas incorrectas, catorce equipos (18%) expresaron del 2003 al 2004. Creemos que la dificultad estuvo relacionada con la respuesta dada en el inciso anterior (en la que el año 2002 ya fue considerado).

Para la pregunta sobre los períodos en que la ganancia no cambió, 11 equipos (casi el 15%) respondieron en el 2005 y dos equipos contestaron en el 2004 y el 2005. Estas respuestas muestran nuevamente la dificultad para identificar la situación de ganancia que varía o no de un año a otro.

Con la pregunta sobre qué se puede observar en la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones, pretendemos que observen que se presentan cambios positivos y negativos y que relacionen esta particularidad con su significado en el problema, de manera de comenzar a pensar cuándo la función crece, decrece o se mantiene constante. Los alumnos tuvieron que ser orientados porque no entendieron qué se les pedía. Asimismo 10 grupos (13%) no respondieron.

Sólo cinco equipos (6,5%) expresaron que el cambio es positivo cuando la ganancia aumenta, el cambio es negativo cuando disminuye y es cero cuando la ganancia es la misma, que era la respuesta esperada.

Otros 22 grupos (29%) indicaron que el cambio de ganancia no es constante, siempre varía, o, como expresaron algunos, aumenta determinado período, disminuye en tal otro o no hay cambio.

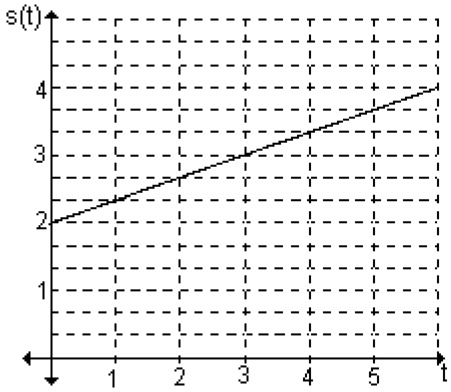
Tres equipos (4%) se refirieron al signo de los cambios, positivos, negativos o cero.

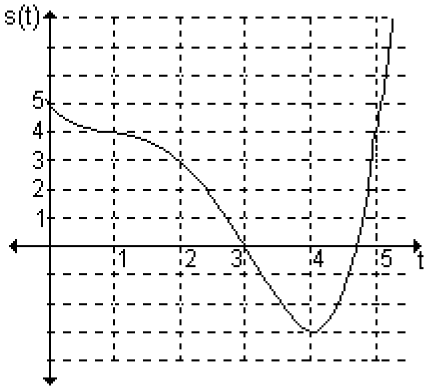
Catorce equipos (18%) indicaron lo que sucedió con las ganancias, sin relacionarlo con los signos de los cambios, no agregando nada a la respuesta del inciso anterior.

Como dificultad importante encontramos que 18 equipos (24%) relacionaron cambios negativos con pérdidas. Expresaron el período en que hubo ganancia (2000 al 2002), el período que corresponde a pérdidas (2002 al 2004) y el período en el que no hubo ni ganancias ni pérdidas (2004 al 2005), agregando algunos cuál fue el monto de las ganancias y de las pérdidas. En la observación de clase y la posterior puesta en común de las actividades, nos dimos cuenta que no fue un simple problema de leer mal el enunciado, sino que interpretaron mal la situación, considerando la disminución de ganancia de un año a otro como pérdida, o confundiendo ingresos con ganancias.

El resto de las respuestas (4) fueron variadas, todas incorrectas.

Actividad 6. Las gráficas muestran la posición s(t) de dos partículas desde cierto punto de referencia para determinado intervalo de tiempo.





a) Para cada una de las gráficas, explique qué sucede con una de las magnitudes a medida que varía la otra ....
....

b) Complete las tablas para cada función. Recuerde que la letra Δ indica cambio de una cantidad, por lo que Δs significa el cambio de la variable s en el intervalo de t correspondiente.

Intervalos	Δs
$0 \le t \le 1$	
$1 \le t \le 2$	
$2 \le t \le 3$	
$3 \le t \le 4$	
$4 \le t \le 5$	

Intervalos	Δs
$0 \le t \le 1$	
$1 \le t \le 2$	
$2 \le t \le 3$	
$3 \le t \le 4$	
$4 \le t \le 5$	

c) Describa el comportamiento de los cambios Δs para la primer gráfica ....
....
Describa el comportamiento de los cambios Δs para la segunda gráfica ....
....
Si corresponde, indique en qué intervalos los cambios de la variable dependiente fueron más rápidos ....

En esta actividad se presentan dos funciones definidas gráficamente. Abarca aspectos cualitativos y cuantitativos de la variación para ambas funciones.

Ambos modelos presentan la dificultad de que la posición inicial no coincide con el origen, de manera que la variable dependiente ya no describe espacio recorrido sino desplazamiento desde el punto de referencia. En el caso de la primera función el análisis es más sencillo ya que se trata de una función de primer grado y, por lo tanto, de crecimiento constante en cada intervalo. No se espera que los alumnos presenten demasiados problemas. La segunda gráfica tiene mayor grado de dificultad ya que presenta imágenes negativas e introduce, a su vez, variaciones de posición negativas.

Con respecto a los registros, la resolución exige la interpretación de las representaciones gráficas para obtener datos sobre el valor numérico de las funciones y así poder calcular los cambios, por lo que el alumno debe elaborar la traducción del registro gráfico al numérico e interpretar lo realizado en el registro verbal, lo que le exige relacionar las diferentes representaciones.

En el inciso a) se requiere una explicación sobre el comportamiento de una magnitud a medida que varía la otra para cada una de las gráficas. La respuesta esperada para la primera función es que a medida que el tiempo transcurre o aumenta, la posición aumenta siempre la misma cantidad. Se encontraron 39 respuestas (51%) de este tipo.

Ocho equipos (10,5%) se refirieron a cuánto varían las variables. Las respuestas fueron: *"a medida que t aumenta tres, s(t) aumenta uno"*, *"a medida que t varía en uno, s(t) lo hace en un tercio"*.

Destacamos que muchas respuestas hicieron alusión a una relación de proporcionalidad entre las variables. Nueve equipos respondieron directamente *"la posición de la partícula varía proporcionalmente con el tiempo"*. Otros casos (10) expresaron que a medida que el tiempo aumenta, aumenta proporcionalmente la posición. Nos dan lugar a dudas sobre lo que quisieron expresar en sus respuestas, pero por lo observado y escuchado durante el trabajo en clase consideramos que, a partir de que la gráfica es una recta, concluyen directamente que las variables involucradas son proporcionales.

Finalmente consideramos nueve respuestas incorrectas ("la partícula se mantiene constante", "a medida que transcurre el tiempo la partícula aumenta"). Un equipo no respondió la pregunta.

En relación a la segunda función se esperaba que los alumnos respondan que a medida que el tiempo aumenta, la posición cambia de manera distinta (disminuye o aumenta) y distinta cantidad. Utilizando diferentes expresiones, 50 equipos (66%) dieron una respuesta de este estilo. El resto de las respuestas se caracterizaron en general por ser muy imprecisas, por ejemplo: *"La partícula se mueve irregularmente a través del tiempo".* Tres equipos no respondieron.

En el inciso b) de la misma actividad deben completar las tablas con los valores Δs para intervalos de tiempo de una unidad de amplitud para cada una de las funciones. Completaron bien ambas tablas 51 equipos (67%).

El mayor problema fue la falta de reconocimiento de la importancia en el orden de su cálculo (valor final menos valor inicial). Al no distinguir las diferencias entre variaciones positivas y negativas, completaron de manera correcta la primer tabla y, en la segunda, todos los valores positivos, aunque bien en valor absoluto (ocho equipos).

Se observó que al no saber cómo expresar la diferencia entre cambios positivos y negativos, escribieron por ejemplo, en la segunda tabla *"disminuye uno"*, *"aumenta siete"*.

Los errores fueron variados. En algunos trabajos confundieron cambio de posición con la posición en el instante final del intervalo.

En la primera parte del inciso c) los alumnos deben describir el comportamiento de los cambios de la variable dependiente para cada función.

Para la primera función sólo cuatro equipos no respondieron y se obtuvieron 49 respuestas correctas (64%). La mayoría expresó que los cambios son iguales o se mantienen constantes, agregando, en algunos casos, el valor de los cambios.

Con respecto a las respuestas incorrectas, la mayoría estuvo relacionada con la confusión entre posición y cambios de posición. Escribieron: *"aumentan constantemente", "son constantes y aumentan un tercio por vez", "a medida que aumenta t, aumenta s en un tercio de unidad".*

Destacamos también que volvieron a aparecer expresiones haciendo referencia a la proporcionalidad entre las variables: *"son proporcionales", "el tiempo es proporcional a la posición de la partícula".*

Distintos investigadores han estudiado este problema relacionándolo especialmente con la enseñanza, que generalmente no tiene en cuenta el estudio de la recta a partir de su comportamiento variacional.

Catalán y Dolores (2000) analizan que a pesar de haber estudiado los procesos de cambio desde los últimos grados de educación primaria, los estudiantes mexicanos no los utilizan. Explican que si bien se desarrollan los procesos de cambio en la escuela, enfatizando la variación directamente proporcional, el estudio de la función de primer grado se sigue encarando mediante tablas y gráficas cartesianas. Este tratamiento es una forma estática de estudiar un proceso de variación, que pone la atención sólo en uno o dos puntos por donde pasa la recta y su pendiente, y no en el comportamiento que experimentan las variables en todo el dominio de la función.

García (2007) reporta los resultados de una investigación realizada en torno a la resignificación del concepto de función lineal en una experiencia con docentes que cursan una maestría relacionada a la educación matemática. En actividades propuestas para reconocer la proporcionalidad en diferentes contextos encontraron que por lo general se aplican estrategias de cálculo relacionadas con la proporcionalidad directa sin justificar su uso o utilizándolas aún en situaciones en la que no es posible. Si bien los alumnos-docentes conocen el concepto de proporcionalidad directa, poseen estrategias de cálculo relacionadas con él y reconocen las características de su representación gráfica (lineal como sinónimo de proporcional), lo sobre utilizan al reconocer como proporcionales magnitudes entre las que existe cualquier relación de crecimiento (o decrecimiento) simultáneo y lo sobrevaloran al decir que determinadas situaciones no tienen solución porque este concepto no es aplicable.

Para la segunda función se obtuvo menor número de respuestas correctas. Sólo 36 equipos (47%) respondieron que los cambios no son iguales o varían. Cuatro equipos contestaron que los cambios pueden ser positivos o negativos, lo cual no es incorrecto, pero sí incompleto. Las respuestas incorrectas vuelven a referirse al comportamiento de la variable dependiente y no de sus cambios. Escribieron por ejemplo: "e*n el intervalo de cero a cuatro disminuye y en el intervalo de cuatro a cinco aumenta", "para 0 $\leq t \leq$ 4 decreciente y para 4 $\leq t \leq$ 5 creciente"*.

En relación a la última pregunta, acerca de los intervalos en que los cambios fueron más rápidos, para pensar en rapidez de cambio es necesario encontrar primero la razón de cambio promedio, lo que implica calcular los cambios de la variable dependiente en relación con los de la variable independiente. Se pretende analizar si los alumnos son capaces de realizar una interpretación numérica o gráfica, comparando el espacio recorrido en intervalos de igual longitud.

La respuesta dada por 47 equipos (62%) fue que los cambios más rápidos se dan en la segunda gráfica y ocurren en el intervalo que va desde cuatro hasta cinco.

Algo más del 10% (ocho grupos) expresó que para $2 \leq t \leq 3$ y $3 \leq t \leq 4$ disminuye más rápido y para $4 \leq t \leq 5$ avanza mucho más rápido, mostrando una diferenciación del significado teniendo en cuenta el signo de los cambios.

Finalmente, 12 equipos (16%) dieron respuestas no correctas (presentando errores diversos) y los nueve restantes (12%) no respondieron esta pregunta.

Actividad 7. La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene, para cada instante t (en segundos), mediante la ley $s(t) = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0$, donde s_0 es la altura inicial del objeto, en metros, v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración de la gravedad, que en la superficie terrestre es de $-9{,}8 \frac{m}{seg^2}$.

Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio que tiene 30 m de altura.

a) Obtenga la ley que permite determinar su posición en cada instante t, teniendo en cuenta que su velocidad inicial es nula.

b) Calcule s(1,5) – s(1) y exprese su significado en términos del problema.

c) Determine $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ y explique su significado.

El objetivo general de esta actividad es observar si los alumnos pueden interpretar información sobre una función que está dada en forma analítica, realizar el tratamiento en el mismo registro y convertir la información presentada en forma numérica y verbal. Se siguen trabajando aspectos variacionales en aquellos incisos que requieren explicación de comportamiento. Cinco equipos (6,5%) dejaron la actividad sin resolver.

En el inciso a) los alumnos deben determinar la ley de la función a partir de los datos dados. El porcentaje de respuestas correctas fue alto. Dieciocho equipos (24%) escribieron, correctamente, $s(t) = -4{,}9t^2 + 30$ y siete más (9%) respondieron

$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+30$. Otros 35 equipos (46%) anotaron $s(t)=\frac{1}{2}(-9,8)\,t^2+30$, dejando indicado el producto del primer término.

Algunos equipos no reemplazaron todos los datos. Cuatro equipos escribieron $s(t)=\frac{1}{2}gt^2+s_0$ y uno $s(t)=\frac{1}{2}(-9,8)\,t^2+v_0t+s_0$. Esto incidió en la resolución del inciso siguiente ya que, de los cinco, ninguno pudo encontrar correctamente los valores numéricos requeridos.

Se presentaron sólo cinco respuestas (6,5%) incorrectas. Tres equipos anotaron $s(t) = 4,9t^2 + 30$, uno escribió $s(t)=\frac{1}{2}(9,8)t+30$ y el otro $s(t)=\frac{1}{2}(-9,8)+30$.

Es importante destacar que, en todos los casos, muchos grupos incluyeron en la ley las unidades, especialmente en el término cuadrático, escribiendo por ejemplo $s(t)=\frac{1}{2}\left(-9,8\,\frac{m}{seg^2}\right)t^2+30$. Esto también les produjo dificultades en los incisos siguientes.

Un equipo no respondió este inciso.

En el inciso b) los alumnos deben calcular el valor numérico de la función en dos valores del dominio, calcular la diferencia pedida e interpretarla como el cambio de la variable dependiente en un determinado intervalo. Siete equipos (9%) no respondieron.

Casi el 50 % (37 equipos) calculó correctamente las imágenes pedidas y resolvió la resta. La mayoría escribió el resultado sin unidad. Por lo observado en clase los alumnos no tenían en claro qué unidad correspondía. Algunos agregaron unidades incorrectas $\left(\frac{m}{seg} \text{ o } \frac{m}{seg^2}\right)$.

Otros 10 equipos (13%) evaluaron bien pero no resolvieron la resta.

Los 17 equipos restantes (22%) no respondieron correctamente. La mayoría de los errores estuvieron relacionados con el cálculo de los valores numéricos. Se debieron a arrastrar error del inciso anterior o a problemas de operatoria (en varios casos el signo negativo de la constante g los llevó a restar en lugar de multiplicar en el primer término).

En relación a la interpretación de la diferencia, 27 equipos no respondieron (36% aproximadamente), a pesar de haber trabajado este aspecto en actividades anteriores.

Respondieron correctamente 12 equipos (16%), expresando por ejemplo *"desde t = 1 hasta t = 1,5 la piedra descendió 6,125 metros".*

Cinco grupos (6,5%) respondieron que la diferencia da el cambio de posición o la diferencia de altura de la piedra en ese intervalo. Esta respuesta la consideramos incompleta en el problema ya que no aclara el sentido del desplazamiento.

Otros cinco mostraron el significado de la diferencia aunque no tuvieron en cuenta la importancia del intervalo en el que se produce. Escribieron *"en medio segundo el objeto cae 6,125 metros"*.

Otras respuestas incompletas expresaron simplemente que la piedra cae o que la posición de la piedra disminuye, acercándose a la superficie terrestre (cinco equipos).

Los 10 equipos restantes dieron respuestas variadas e incorrectas.

En el tercer inciso deben expresar simbólicamente el cambio, por lo que supusimos que resultaría más complicado ya que requiere abstracción al contexto algebraico mediante la obtención de una fórmula.

No respondieron este inciso 43 equipos (57%).

Doce equipos (16%) plantearon bien, llegando algunos a expresar la resta pero no trabajaron algebraicamente la expresión dejando incompleto el trabajo. Si bien dos equipos más plantearon y resolvieron, tuvieron errores al operar y/ o simplificar. Sólo tres equipos (4%) plantearon y resolvieron correctamente la diferencia $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. En el análisis, observamos que estos trabajos fueron presentados por alumnos recursantes de la asignatura.

Cinco equipos (6,5%) trabajaron numéricamente, dándole algún valor a t_0 y a Δt.

Los seis equipos restantes (8%) plantearon incorrectamente, cometiendo diversos errores al evaluar $s(t_0 + \Delta t)$ y $s(t_0)$.

En relación al significado de la diferencia, 16 equipos de los que respondieron la primera parte de este inciso, no contestaron nada.

Un equipo contestó correctamente *"representa el cambio de posición de la piedra en el intervalo* $t_0 \le t \le t_0 + \Delta t$*"*. Otro expresó *"es la variación de altura en cierto tiempo"* y uno más escribió *"es el cambio de la posición del objeto en función de la variación del tiempo"*. Sólo el primero estaba formado por alumnos recursantes.

Las otras respuestas (nueve) fueron incorrectas sin referirse para nada al cambio.

Consideramos que la mayor dificultad para esta actividad está relacionada con la articulación de los registros simbólicos de la noción de función.

Al respecto, Santibáñez (2001) investigó el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar con estudiantes de bachillerato mexicanos. Exploró las habilidades desarrolladas a través de la aplicación de varios exámenes, luego de haber puesto en situación escolar las actividades propuestas por Dolores (1999) en su libro *Una introducción a la derivada a través de la variación*. En sus conclusiones expresa que con respecto a las actividades que exigían la cuantificación de los cambios de una función, sólo el 24% de los alumnos logró cuantificar los cambios de la función, a partir de su expresión analítica, y al mismo tiempo pudieron describir su comportamiento. En lo que se refiere a la deducción de la fórmula que les permite cuantificar los cambios de una función, el 30% consiguió obtener la fórmula para cuantificar los cambios de una función, a partir de su expresión analítica. Por medio del análisis visual de la gráfica de una función, el 66% de estudiantes cuantificó como se esperaba los cambios de la función.

Conclusiones del cuestionario

Al iniciar el estudio de temas relacionados a la variación, tales como razón de cambio, derivada, análisis y graficación de funciones, entran en juego conocimientos variacionales que frecuentemente tendemos a naturalizar en nuestro discurso. Damos por interiorizadas nociones como, por ejemplo, intervalo, constante, variable, magnitud, variación, razón.

Los resultados obtenidos nos muestran que muchos alumnos presentan dificultades a pesar de haber desarrollado estos contenidos desde los primeros años de su educación formal. Todos los problemas detectados han sido también identificados por diversos autores que han investigado temas relacionados con las variables, las funciones y la variación.

Haciendo una revisión general de las actividades observamos que los mayores problemas se presentaron para:

- Identificar magnitudes y reconocer los cambios en una situación cotidiana, lo que incluye determinar qué es lo que cambia y cómo cambia (actividad 1).
- Manejar adecuadamente la noción de variable. Específicamente, en las actividades cuatro y cinco, los alumnos presentaron problemas para interpretar si las variables involucradas son discretas o continuas, trabajar con variables discretas, indicar los valores que pueden tomar las variables (un buen porcentaje de equipos confundieron lo pedido con la identificación de las variables involucradas).
- Determinar dominio y conjunto de imágenes de funciones. Esto lo observamos especialmente en la actividad 4 en la que la función está definida a través de una tabla de valores.
- Calcular cambios. Si bien los alumnos ya habían trabajado con el cálculo de diferencias y razones de cambio, por lo menos para la función de primer grado, nunca habían utilizado esta terminología específica y tuvieron que ser orientados al respecto.
- Interpretar cambios.
- Interpretar fenómenos de variación en situaciones presentadas gráficamente (actividades 2 y 3).
- Describir el comportamiento variacional de funciones elementales, a partir de la información proporcionada a través de tablas, gráficos o expresiones algebraicas.

Nos llamó especialmente la atención la asociación de cualquier recta a una función de proporcionalidad directa. A pesar de que el modelo correspondiente a la función de primer grado y el caso particular de la función de proporcionalidad directa son de los más elementales, observamos en varias situaciones que los alumnos no distinguen claramente las diferencias entre uno y otro. Esto puede estar relacionado con la enseñanza de estos temas. El análisis didáctico realizado y nuestra experiencia nos muestran que, si bien en nuestro país se estudia la proporcionalidad directa desde la escuela primaria, extendiéndose a la función de primer grado en los primeros años de secundaria, el análisis no se aborda desde un punto de vista variacional.

- Trabajar con distintas representaciones.

Los resultados fueron mejores al trabajar en el registro numérico, presentando mayores dificultades en el simbólico, especialmente en la determinación de los cambios. Con respecto al registro gráfico, los alumnos no presentaron prácticamente dificultades en las actividades que requerían seleccionar la gráfica que cumple determinadas condiciones pero sí con la obtención de información desde representaciones gráficas.

Dolores (2007c) expresa que ésta es una carencia importante, en el sentido de que las gráficas no deben ser utilizadas simplemente como auxiliares didácticos que posibilitan la visualización o para hacer preguntas interesantes, sino como el medio que permite el desarrollo del pensamiento matemático. La manera de generar conocimiento es logrando una posición activa de los alumnos, que involucre determinadas acciones, como poder responder qué cambia, cuánto cambia, cómo cambia, qué tan rápido cambia, cómo se comporta global y puntualmente la gráfica.

Además de todo lo expresado, se revelaron bastantes dificultades para explicar y encontrar argumentos para justificar. Las preguntas en las que se pedía una interpretación de los resultados no fueron abordadas satisfactoriamente en general.

Con respecto al aspecto actitudinal, destacamos la buena predisposición al trabajo de los alumnos. Esto se observó en el trabajo en clase y en el bajo porcentaje de preguntas sin responder. Consideramos que esto quizás fue propiciado por el trabajo en grupo.

3.4 Análisis de la componente sociocultural

La dimensión sociocultural se relaciona con la construcción del conocimiento dentro de las prácticas sociales y el contexto.

La aproximación socioepistemológica de la investigación se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento y de su difusión institucional. Considera la construcción social del conocimiento matemático avanzado como el conjunto de interacción que se dan entre tres polos: los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de la matemática avanzada y las prácticas humanas altamente especializadas (Cantoral, 2001).

Jarero (2006) señala que de esta manera se tiene en cuenta no sólo el conocimiento del profesor respecto a los contenidos a enseñar, sino también todas sus creencias y las relaciones que se establecen entre el profesor y los estudiantes.

Con respecto al profesor, sus conocimientos y creencias incluyen el enfoque con que presentará el contenido así como la forma de interactuar y proponer la dinámica de trabajo dentro del aula. Además, los conocimientos que se abordan son resultado de una transposición didáctica que se encuentra reflejada en los libros de texto y que de algún modo logran un consenso y una socialización del conocimiento.

Por otro lado, los estudiantes interactúan en la construcción del conocimiento, ya que sus argumentaciones y justificaciones ante otros lleva a un intercambio de ideas en la búsqueda de un consenso. Cantoral y Montiel (2001, p. v) expresan:

> Se ha puesto en evidencia que los alumnos construyen conocimiento con cierta independencia del discurso matemático de la enseñanza. Con frecuencia, construyen explicaciones inadecuadas e inclusive erróneas desde un punto de vista matemático, a la vez que descubren profundas relaciones entre piezas del saber matemático, sin que eso haya sido parte explícita de su enseñanza.
>
> Consideramos que estos conocimientos son el fruto de la interacción con su entorno: con sus compañeros, con sus historias de vida o con su ambiente académico y cultural, entre otros.

Es importante tener en cuenta que, si bien los tres polos a los que se refiere Cantoral (2001) en la construcción social del conocimiento matemático avanzado interactúan entre sí, es el correspondiente a las prácticas humanas el que genera relación entre los otros dos y de cierta manera el que los hace evolucionar.

Es a partir de estos argumentos que consideramos importante plantear una propuesta de práctica social en torno al aprendizaje de la noción de derivada, suponiendo que dicho proceso puede verse favorecido por la construcción social mediante la interacción alumno-alumno.

En particular para nuestro trabajo debemos considerar la dimensión sociocultural en el sentido de ser un estudio situado en la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, con alumnos con características particulares por ser estudiantes de la carrera Ingeniería Agronómica.

Esta dimensión será reflejada en la propuesta en las fases de formulación y validación.

3.5 Conclusiones

El análisis histórico nos ha permitido develar que el desarrollo de la derivada fue un proceso lento y complicado, surgido de necesidades prácticas de la vida y estrechamente relacionado al estudio de la variación. De esta manera, en las prácticas humanas, no puede limitarse la derivada al límite del cociente incremental, sino como una manera de estudiar los procesos de cambio.

El análisis de textos y programas nos ha mostrado que la enseñanza de las funciones y del cálculo diferencial no se corresponde generalmente con sus orígenes, privilegiando en cambio aspectos lógicos formales. Se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos dejando de lado la formación de ideas variacionales.

Si bien la introducción de ideas fundamentales del cálculo está planteada desde la escuela secundaria, esto no se alcanza en la práctica, por lo menos en la mayoría de las instituciones de nuestro entorno, por lo que los alumnos tienen su primer contacto con la matemática del cambio en la universidad.

El cuestionario aplicado a nuestros alumnos nos mostró las deficiencias que presentan con respecto a nociones variacionales básicas, necesarias para la comprensión y utilización de conceptos fundamentales como el de derivada.

Los problemas detectados para el tratamiento y conversión entre registros, especialmente para interpretar información presentada gráficamente, dificulta la posibilidad de que los alumnos visualicen los conceptos o determinados aspectos de los mismos.

Estas conclusiones nos llevan a plantear la necesidad de un primer acercamiento visual e intuitivo a los conceptos del cálculo diferencial partiendo del estudio de la variación, atendiendo a tres de sus aspectos básicos: el cambio, la rapidez promedio de cambio y la rapidez instantánea de cambio. En estas nociones se encuentra el origen de la derivada. Una verdadera comprensión de este concepto favorecerá en gran medida el entendimiento de temas sucesivos.

Para esto tendremos en cuenta además que la construcción del conocimiento se realiza dentro de las prácticas sociales y el contexto considerado en este estudio es particular (alumnos que cursan Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral). De esta manera hacemos referencia a un entorno particular que posee sus propias prácticas, reconociendo el aspecto sociocultural que lo describe.

Planeamos una modificación sustancial del ambiente de clase introduciendo una dinámica de interacción social, buscando que los estudiantes se enfrenten a una intensa actividad intelectual, resultado del planteamiento de situaciones novedosas y significativas. Esto implica la elaboración de una propuesta didáctica que incluya actividades motivadoras que estimulen y desafíen a los alumnos, dando lugar a la modificación de sus estructuras previas, que les permitan incluir explicaciones originales y hacer frente a nuevos casos en diferentes contextos de aplicación. El aprendizaje será efectivo si se logra que reconozcan un nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta nueva. Waldegg (1998, en Camargo y Guzmán, 2005, p. 32) expresa: “lo que da sentido a los conceptos o teorías, son los problemas que consiguen resolver”.

En este capítulo se fundamenta la elección de la ingeniería didáctica como metodología para nuestra investigación, analizando sus características principales.

Se desarrollan las líneas generales que se han seguido para el diseño de la ingeniería, describiendo el contexto, características y restricciones de su implementación, las elecciones de carácter global que se tomaron y el análisis a priori de las sesiones diseñadas.

4.1 Tipo y diseño de investigación. La ingeniería didáctica

Dado que el interés de esta investigación se centra en comprender cómo los alumnos construyen la derivada y, dada la complejidad de los elementos implicados en el proceso de aprendizaje, resulta necesario un marco de indagación que intente comprender los procesos en su totalidad, desde un punto de vista holístico, que dé profundidad a los datos, en el que los actores, su interacción, los contextos, la comprensión de los sentidos que dan a la acción dichos actores, ocupen un lugar central en la investigación.

Por todo esto, para afrontar el problema de investigación, se decidió adoptar una metodología de tipo cualitativo, sustentada en la ingeniería didáctica, entendida en su carácter investigativo.

Esta metodología de investigación, surgió en el seno de la escuela francesa a comienzos de la década de los ochenta como medio para tratar las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza y el papel que conviene hacerle tomar a las realizaciones didácticas dentro de las metodologías de la investigación en didáctica. Se constituye como una metodología de investigación que se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella.

Se basa en un esquema experimental, centrado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, fundamentado en la concepción, realización (implementación), observación y análisis de secuencias de enseñanza. Se caracteriza, y diferencia de otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por ubicarse en los registros de estudios de caso y por la forma de validación que es en esencia interna, cimentada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995a).

En la elaboración de una investigación de ingeniería didáctica se distinguen cuatro fases fundamentales: análisis preliminar, diseño de la situación didáctica y análisis a priori, experimentación y, por último, el análisis a posteriori y validación.

- *Análisis preliminar*

Artigue (1995a) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de una ingeniería didáctica: la dimensión epistemológica, asociada a las características del saber en juego, la dimensión cognitiva, relacionada con las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza, y la dimensión didáctica, que hace referencia al medio en el que se establecen las relaciones entre alumno, docente y saber.

Básicamente atiende a tres preguntas diferentes: *¿cómo se constituye el objeto de conocimiento?*, *¿cómo el estudiante aprende el objeto?*, *¿cómo se enseña el objeto?* (Arrieta, 2003).

Estas dimensiones concuerdan con la perspectiva sistémica que considera a la didáctica de la matemática como el "estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto" (Brousseau, 1998, en Ruiz, 2001, p. 133), según se muestra en la figura:

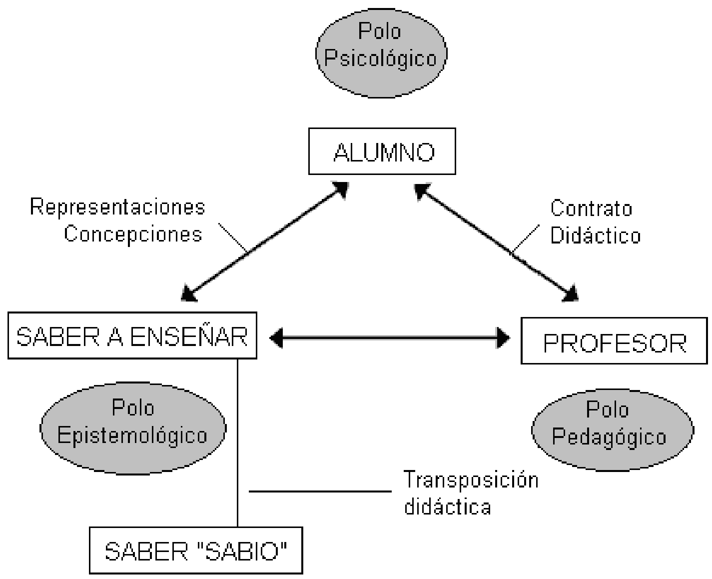


Figura 4.1 (Fuente: Ruiz, 2001, p. 133)

Reconociendo que en el aprendizaje escolar no están exentas las interacciones sociales, el esquema anterior puede ser considerado de la siguiente manera:

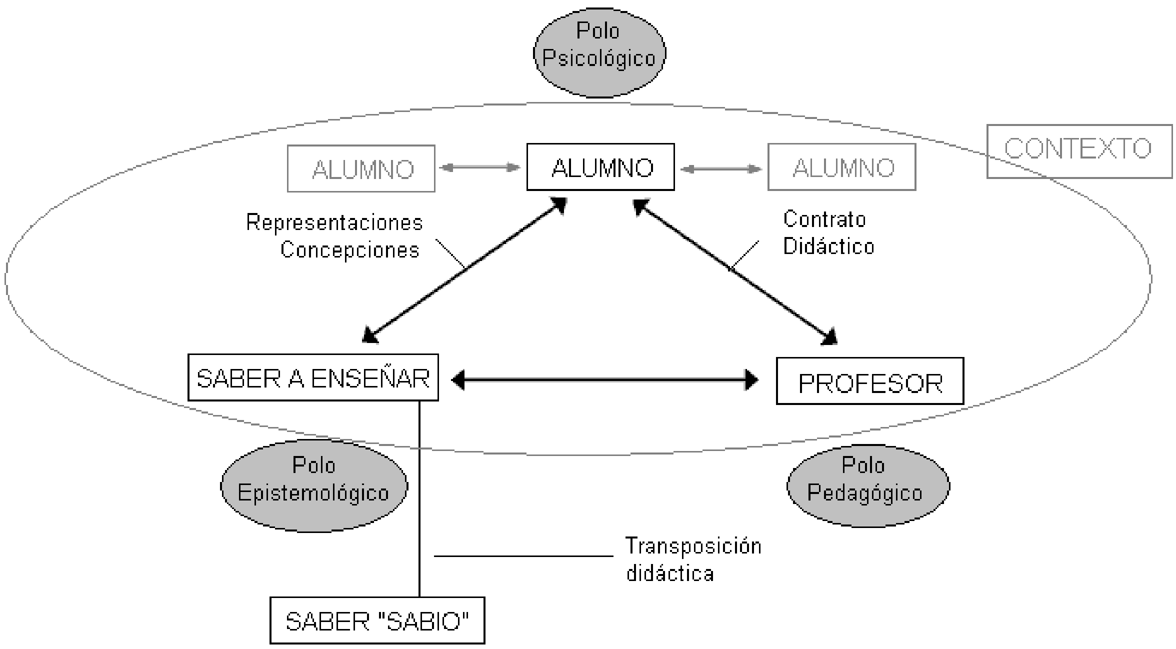


Figura 4.2 (Fuente: Jarero, 2006, p. 38)

Por esta razón se incorpora una cuarta componente, la sociocultural, como integradora de las otras tres, reforzando de esta manera el enfoque sistémico a los fenómenos abordados. Esta dimensión se asocia a la construcción del conocimiento dentro de las prácticas sociales y el contexto.

Para nuestra investigación, estos análisis han sido presentados en el Capítulo 3. Se complementan con el estudio del campo de restricciones en las que tendrá lugar la producción didáctica. Se trata de un trabajo preliminar que servirá de base para el diseño de la ingeniería. Posteriormente será mejorado y reforzado durante las distintas fases de la investigación.

- *Diseño y análisis a priori de las situaciones de la ingeniería didáctica*

En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables no fijadas por las restricciones y que se consideran pertinentes en relación al problema estudiado.

Tienen que ver con decisiones relativas a la organización y se distinguen dos tipos, globales y locales, que conciernen respectivamente, a la organización global de la ingeniería y a su organización local, es decir a una sesión o episodio.

Desde la fase de concepción se inicia el proceso de validación, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería. El objetivo principal de esta etapa es prever los comportamientos de los alumnos. Para ello, este análisis se basa en una o más hipótesis, que serán validadas indirectamente en la fase del análisis a posteriori.

Tradicionalmente el análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva, en las que se analiza básicamente las características de una situación que se desea constituir y que se va a tratar de llevar a los alumnos. Se centra en la descripción de las elecciones hechas en el nivel local y las características de la situación que resulta, el análisis de los elementos que pueden estar en juego en la situación para el estudiante (en función de las posibilidades de acción, elección, decisión, control), y en la predicción de los posibles comportamientos esperados, intentando mostrar "cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje" (Artigue, 1995a, p. 45).

- *Experimentación*

Esta fase corresponde al desarrollo de la ingeniería, es decir a la implementación de todas las actividades diseñadas. Se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de estudiantes objeto de la investigación. Supone la explicación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación, el establecimiento del contrato didáctico, la aplicación de los instrumentos de investigación y el registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

- *Análisis a posteriori y valoración de resultados*

En la última etapa, de análisis a posteriori, se realiza el estudio de todos los datos recogidos a lo largo de la experimentación es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza y de las producciones de los alumnos en clase. Estos datos se complementan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas (cuestionarios y entrevistas individuales o grupales). La confrontación entre el análisis a priori y a posteriori permite la valoración de la ingeniería, que es esencialmente cualitativa y consiste en la apreciación de los resultados en función del objetivo general planteado.

González (2006) señala algunas características que distinguen este proceso de valoración o validación:

- No se basa en análisis estadísticos entre grupos experimentales y de control.
- El análisis a priori suele ser muy extenso y normalmente no se muestra en su totalidad.
- La mayoría de los trabajos de ingenierías didácticas publicados, muestran desfases o distorsiones entre los análisis a priori y a posteriori. Estas diferencias enriquecen a las ingenierías.
- Las hipótesis implicadas en un trabajo de ingeniería son a menudo globales y conciernen el proceso de aprendizaje a largo plazo. La extensión de la ingeniería no les permite necesariamente estar realmente implicadas en el proceso de validación.

4.2 Diseño de la ingeniería didáctica

En este apartado mostramos el diseño de nuestra ingeniería didáctica para la introducción de la derivada.

En el Capítulo 1 de este documento presentamos las variables relacionadas con la organización global de la ingeniería (los antecedentes, justificación del estudio, el problema de investigación y los objetivos). En el punto que sigue describimos las restricciones referidas a la organización local de la ingeniería, concernientes al contexto donde se va a situar la realización didáctica efectiva. Luego enunciamos las hipótesis de trabajo de nuestro estudio y las variables consideradas para la elaboración de las actividades propuestas. Por último analizamos las características de la secuencia didáctica, las posibilidades de acción, decisión y control de los estudiantes en cada situación, así como sus posibles comportamientos.

4.2.1 Restricciones particulares

Enunciamos a continuación las principales restricciones que hemos encontrado en el diseño de nuestra ingeniería, relativas al contexto y a las características de los alumnos con los que se desarrollará la experimentación.

La realización didáctica se llevará a cabo con estudiantes de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. La justificación de esta elección fue presentada en el Capítulo 1 de este trabajo. Básicamente se debe a que es el ámbito donde se desempeña quien presenta esta tesis y sobre el cual se desea influir positivamente de manera de lograr mejoras en los resultados de los alumnos.

Se decidió incorporar la propuesta al currículo, por lo que la implementación de la ingeniería se realizará con todos los alumnos cursantes de Matemática II, asignatura en la que se desarrollan los principios fundamentales del cálculo.

La asignatura tiene una carga horaria semanal de siete horas reloj, distribuidas en una clase de una hora y tres clases de dos horas. Habitualmente el total de los alumnos se divide en cuatro comisiones que asisten a clases teórico-prácticas con carácter obligatorio, exigiéndose un 80% de asistencia.

La experimentación se realizará en los horarios normales en los que los alumnos tienen clase de matemática. La autora del presente trabajo implementará la secuencia en dos de las cuatro comisiones en que se divide el grupo total de alumnos que cursan la asignatura, con la colaboración de los otros docentes de la cátedra para la observación de la clase. En las otras comisiones desarrollarán la secuencia las docentes que habitualmente tienen a su cargo la clase. En el Capítulo 5 se describe cómo fueron seleccionados los alumnos cuyos trabajos se tomaron en cuenta para el análisis.

Como se mencionó anteriormente, los alumnos desarrollan los contenidos correspondientes a funciones en Matemática I, asignatura que deben tener regularizada o aprobada para poder cursar Matemática II. Previo al inicio del estudio de la derivada, se repasan los contenidos necesarios sobre conjuntos numéricos y la recta real y se desarrollan los temas límite y continuidad.

4.2.2 Hipótesis de trabajo y variables del estudio

Los análisis preliminares del Capítulo 3 nos muestran que la enseñanza del cálculo se caracteriza generalmente por un enfoque algebraico, que se basa en un manejo algorítmico y algebraico, alejado muchas veces de argumentos visuales y geométricos.

En el plano epistemológico hemos analizado que el surgimiento de la noción de derivada y el desarrollo del cálculo estuvo vinculado al estudio de la variación, con la resolución de problemas surgidos por un lado de la mecánica que implicaban el estudio del movimiento, y por otro lado de la geometría, que buscaban la determinación de la tangente a una curva dada. Desde sus orígenes, el cálculo se caracterizó por tener un componente fundamentalmente visual e intuitivo que se mantuvo durante los siglos siguientes, dando lugar a la construcción de las nociones desde diversas representaciones.

En el análisis cognitivo pudimos observar que los alumnos tienen dificultades para manejar y articular distintas representaciones de los conceptos, presentando especialmente problemas para obtener información variacional desde las representaciones gráficas. Esto parece estar relacionado, según estudiamos en el análisis didáctico, con la enseñanza.

En el apartado correspondiente a los antecedentes de la investigación (1.4) analizamos que la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la tangente a una curva en un punto constituye un aspecto fundamental en la construcción de la derivada. Sin embargo, su presentación como un proceso de aproximación de una secante a la tangente, resulta de gran dificultad didáctica. El estudio de los aspectos variacionales implicados permite relacionar de manera más significativa las pendientes con las razones de cambio.

El análisis sociocultural nos mostró el papel de la interacción social en la construcción del conocimiento. Dado que se reconoce el carácter social del conocimiento matemático escolar, se privilegian las prácticas compartidas, de manera de proporcionar a los alumnos un ámbito que les permita contrastar significados, ya sea en grupos pequeños como en discusiones amplias, que reguladas por el docente, les permitan construir significados compartidos.

Estos resultados nos llevaron a considerar que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión y apropiación de la derivada. Planteamos además, si se desea contribuir a la comprensión, la necesidad de modificar el ambiente de clase introduciendo una dinámica de interacción social que busque la coordinación de los registros de representación necesarios para lograr el aprendizaje. Tomamos esto como hipótesis básica para la elaboración de las actividades.

Hipótesis de trabajo:

- La comprensión de la derivada se favorece si se propone una secuencia didáctica que permite a los alumnos manejar y coordinar los diversos registros de representación asociados a situaciones de variación.
- La resolución de las situaciones propuestas a través del trabajo grupal propicia un aprendizaje constructivo y significativo de las nociones involucradas.

En torno a estas hipótesis principales se hicieron elecciones en relación a los contenidos a desarrollar y a su tratamiento didáctico. Estas elecciones constituyen las variables del estudio.

<u>Contenidos</u>

Teniendo en cuenta el estudio histórico-epistemológico, se decide retomar los dos problemas que dieron origen a la construcción del cálculo infinitesimal en la introducción del concepto de derivada: el cálculo de la velocidad instantánea, considerada como una razón de cambio, a la manera propuesta por Newton, y la determinación de la tangente a una curva en un punto.

Las situaciones que se propongan deben permitir a los alumnos analizar diferentes escenarios de variación (qué magnitudes cambian, cuánto cambian, cómo cambian), que lleven paulatinamente a la necesidad de caracterizar variaciones entre magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio y que permitan a su vez la exploración de cómo la pendiente de una curva está relacionada con la razón de cambio.

Se resuelve contemplar los siguientes tópicos:

- Estudio de la variación mediante la razón de cambio.

- Velocidad media. Razón de cambio media. Relación con la recta secante.
- Velocidad instantánea. Razón de cambio instantánea. Relación con la recta tangente.

El contenido se organizará teniendo en cuenta los siguientes ítems:

- Cuantificación de la variación de magnitudes a través de diferencias:
  - la diferencia entre estado inicial y estado final cuantifica el cambio de una magnitud,
  - los intervalos permiten medir la variación de una magnitud a partir de un estado inicial y uno final,
  - la variación de magnitudes se expresa a través de gráficas cartesianas,
  - la cuantificación de la variación de las variables dependientes se puede expresar a través de la diferencia $f(x_i + \Delta x) - f(x_i)$.
- Cuantificación de la velocidad media de la variación a través de razones de cambio promedio:
  - los cambios relativos se miden a través de la velocidad media de variación, expresada matemáticamente por medio del cociente $\dfrac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$,
  - los cambios cuya velocidad de variación es constante están asociados geométricamente a rectas caracterizadas por la razón constante (la velocidad coincide con la pendiente de la recta),
  - los cambios cuya velocidad de variación no es constante están asociados a curvas, y la velocidad de cambio coincide con la pendiente de la recta que une dos puntos cuyos valores corresponden a los estados inicial y final del intervalo.
- Cuantificación de la velocidad instantánea de la variación a través de razones de cambio instantáneas:
  - las sucesiones numéricas permiten aproximar razones de cambio instantáneas,
  - la razón de cambio instantánea puede obtenerse a través de un límite,
  - la velocidad instantánea de cambio se asocia geométricamente a la pendiente de la tangente a la curva en el punto cuya abscisa coincide con el instante considerado.

<u>Tratamiento Didáctico</u>

- Teniendo en cuenta la teoría de las situaciones didácticas, el medio debe ser diseñado de manera que produzca contradicciones, dificultades o desequilibrios. Esta condición debe producir una adaptación de los estudiantes para tratar de resolver la situación problemática planteada.

  Con el fin de que el estudiante pueda interactuar con el medio, las situaciones deben planearse de manera de potenciar sus conocimientos previos. Se busca que los alumnos recurran a los conocimientos de que disponen para construir nuevos conceptos. Por otro lado, los nuevos conceptos son utilizados para revisar los anteriores y aclarar algunos aspectos sobre ellos.

De manera general, se usará como medio el planteo de una situación problemática, que lleve a los alumnos a la reflexión, utilizando los conocimientos que tienen para su solución.

Con respecto al trabajo en clase, Poirier (2001, en González, 2006) señala que la confrontación con distintos modos de proceder ayuda al alumno a reestructurar progresivamente su pensamiento y a mejorar sus métodos de trabajo. Se recurrirá a distintas estrategias, enfatizando el uso de la intuición, el razonamiento, las relaciones con conceptos previos, el trabajo en grupo y el debate.

Con el trabajo en grupos se busca favorecer la interacción, de manera de potenciar los conocimientos y llevar a la discusión de las estrategias y soluciones. Artigue (1999) expresa que la discusión grupal es útil y permite encontrar soluciones en un tiempo razonable; el trabajo conjunto promueve regularidades que podrían no aparecer en el trabajo individual de los alumnos. El carácter social de los procesos de aprendizaje enriquece muchos escenarios.

Las actividades escolares que el docente propondrá a sus alumnos incluirán:

- Situaciones de acción y formulación, en la que los alumnos se enfrenten, individual o en grupos pequeños, a un problema propuesto, formulen una estrategia de trabajo, resuelvan la tarea y lleguen a una conclusión. La solución al problema constituye el conocimiento a enseñar.
- Situaciones de validación, en las que se socialicen los resultados obtenidos buscando un consenso. Se discuten las estrategias empleadas y los resultados obtenidos, intentando convencer a los demás de la coherencia de las afirmaciones y las justificaciones de lo realizado. Cada grupo defiende su punto de vista, critica, expone sus argumentaciones. El profesor debe introducir tensiones, contradicciones, exigir pruebas, plantear sus argumentos sin imponerlos. Todo esto va llevando a la construcción de una teoría matemática.
- Situaciones de institucionalización, en las que se estructura el conocimiento logrado, en vías a su formalización.

Se decide que en cada sesión de dos horas, los alumnos trabajen inicialmente resolviendo situaciones problema en grupos de a dos. Con respecto a la sesión de una hora, el profesor presentará algunas situaciones, que se resolverán en conjunto y por medio de interrogatorios (esta decisión se adoptó ya que, en la experiencia realizada el año anterior, observamos que cuando les propusimos a los alumnos resolver secuencias de actividades, se cansaron si eran muy largas o se repetían varias clases seguidas).

En todos los casos, luego de un tiempo establecido, se debatirán los resultados con la clase completa. A partir de los mismos, el profesor introducirá los conceptos, tratando de llegar a su construcción de la manera más colectiva posible.

- Las actividades tendrán en cuenta la necesidad de coordinación entre representaciones numéricas, gráficas, verbales y analíticas, de manera que exijan hacer transformaciones en un mismo sistema y transitar de uno a otro. Se confeccionarán de tal manera que permitan interpretar las concepciones de los alumnos sobre los contenidos detallados anteriormente y sus conexiones.

Todos estos elementos intervinieron en el diseño de la secuencia didáctica. Con la intención de observar y determinar las variables del estudio, la posibilidad de respuesta de las distintas situaciones y la definición de la fase de preparación, una primera versión de la misma fue explorada con los alumnos que cursaron Matemática II en el año 2007. Los resultados fueron alentadores y la información obtenida permitió proponer modificaciones para algunas actividades de la secuencia didáctica, así como la especificación de tiempos y formas de trabajo.

La evaluación de la ingeniería

La validación de nuestra hipótesis se realizará, como es habitual en el diseño de una ingeniería didáctica, de manera indirecta a través de la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori. Para nuestro trabajo, se basará en el análisis del conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones de clase y las producciones escritas de los alumnos.

Con el fin de profundizar en el pensamiento de los alumnos ante las respuestas dadas e indagar acerca de los efectos de la interacción en el aula, se realizarán entrevistas individuales. Se considerarán también aspectos cuantitativos-experimentales, a partir de la implementación de cuestionarios que permitan obtener datos que complementen la información obtenida.

4.2.3 La secuencia didáctica

La propuesta consiste en una introducción al estudio de la derivada de una función en un punto. La idea fue, siguiendo a Dolores (2007a, p. 198):

> ...ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Bajo estas premisas, no se construye la estructura matemática del Cálculo para después buscarle sus aplicaciones como la hacen los textos tradicionales y lo sugieren los programas, sino por el contrario, se genera el conocimiento en contextos prácticos o de aplicación, de modo que la derivada en particular se forma mediante su significado variacional.

Para el diseño de las situaciones se tuvieron en cuenta principalmente las ideas desarrolladas por Wenzelburger (1993), Dolores (1999, 2007b) y Azcárate y otros (1996), además de las dificultades observadas en trabajos nuestros de años anteriores.

Azcárate y otros (1996) manifiestan la necesidad de partir de las concepciones previas de los alumnos acerca de la velocidad, utilizar las gráficas de las funciones para visualizar ideas, en especial la de razón de cambio media como pendiente de una recta.

De esta manera consideramos la importancia de plantear situaciones a nuestros alumnos en el contexto real de la ingeniería, que les muestren la utilidad de los conocimientos matemáticos en su área de especialidad. El estudio de la física, en particular de la cinemática, ocupa un espacio curricular importante en la carrera por sus importantes aplicaciones directas en el estudio de suelos, agua, etc.

Siguiendo las sugerencias de Wenzelburger, se consideran tres nociones físicas: la variación, la velocidad promedio de la variación y la velocidad instantánea de la variación, y se explora la manera en que estas razones de cambio están relacionadas con la medida de una pendiente.

Las actividades se presentan en registros diferentes (verbal, gráfico, numérico y analítico) y requieren las traducciones entre los mismos. Azcárate y otros (1996) consideran que la pendiente puede ser tratada en un primer momento desde un punto de vista gráfico. La razón de cambio permite el cálculo numérico y su relación con la pendiente. En un nivel de representación más abstracto tiene en cuenta la generalización mediante las expresiones algebraicas.

Las tablas, gráficas, expresiones en lenguaje coloquial y representaciones algebraicas, que contienen la misma información ponen en juego diferentes procesos cognitivos, relacionados entre sí. Como expresa Carabús (2002), las tablas contemplan los aspectos numéricos y cuantitativos, las representaciones gráficas potencian las posibilidades de la visualización, las expresiones algebraicas se relacionan con la capacidad simbólica, el lenguaje coloquial se vincula con la capacidad lingüística y es importante para interpretar y relacionar todas las representaciones.

Para su implementación, la secuencia didáctica quedó integrada en los planes de clase de tres sesiones del curso. Presentamos un esquema de los contenidos y el tratamiento que se propone para cada sesión:

Primera sesión. Fase de orientación hacia la construcción de la derivada.	➢ Planteo de problemas físicos sobre velocidad. Nociones que se generalizan mediante la razón de cambio promedio. ➢ Análisis de situaciones de movimiento con velocidad constante y variable. ➢ Relación entre la razón de cambio promedio y la pendiente de la recta para el movimiento rectilíneo uniforme. ➢ Planteo del cálculo de la velocidad en un instante de un cuerpo que sigue una trayectoria curvilínea. ➢ Determinación de la imposibilidad de resolver el problema del cálculo de la velocidad en un instante de un cuerpo que sigue una trayectoria curvilínea mediante la razón de cambio promedio. ➢ Búsqueda de solución al problema. Reducción del intervalo.

Segunda sesión. Recta secante y recta tangente.	➢ Trazado y obtención de la ecuación de una recta secante a una curva. ➢ Trazado de una recta tangente a una curva en un punto cualquiera.
Tercera sesión. Elementos para la construcción de la derivada.	➢ Planteo de un problema físico donde se retoma la reducción de los intervalos para aproximar la velocidad instantánea. Relación de las velocidades promedios con la pendiente de la recta secante. ➢ Búsqueda de la relación entre la aproximación de la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente. ➢ Aproximaciones laterales mediante sucesiones numéricas. ➢ Predicción intuitiva del límite de sucesiones de cocientes. Obtención de la velocidad instantánea. ➢ Definición de la razón de cambio instantánea. Definición de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. ➢ Obtención de la razón de cambio instantánea y la pendiente de la recta tangente por medios algebraicos. ➢ Introducción de la definición de derivada.

La secuencia de actividades se encuentra completa en el Anexo 3 (p. 251).

La elaboración de los planes de clase, que se presentan en la siguiente sección, se realizó teniendo en cuenta los resultados de la implementación preliminar, mencionada anteriormente.

4.3 Análisis a priori de las sesiones

En esta sección se hace una descripción general de cada sesión que incluye los objetivos, las actividades a realizar, las dificultades que se prevén, las acciones esperadas para los estudiantes y para el profesor.

Sesión 1

Duración: dos horas

Objetivos:

- Presentar el tema y predisponer al alumno a la aceptación de la forma de trabajo.
- Realizar un acercamiento a la velocidad media e instantánea.
- Identificar y diferenciar situaciones de razón de cambio constante y variable.
- Definir razón de cambio media y rapidez de cambio media.
- Relacionar la razón de cambio entre la variable dependiente y la variable independiente con la pendiente de la recta que describe la situación de cambio para el caso de cambios constantes.

- Reconocer la necesidad de emplear intervalos cada vez más pequeños para obtener una mejor aproximación de la velocidad instantánea para el caso de cambios no constantes.

Secuencia Didáctica

Momento 1. A manera de introducción el profesor repasará, teniendo en cuenta las actividades resueltas en el cuestionario aplicado sobre el comportamiento variacional, la definición de función, recalcando su significado como relación entre magnitudes que varían y su importancia en la modelación de fenómenos de cambio. También dejará en claro cómo se calculan los cambios, la importancia de respetar el orden de los términos de la diferencia, resolviendo estado final menos estado inicial, el significado de los cambios y la interpretación de su signo.

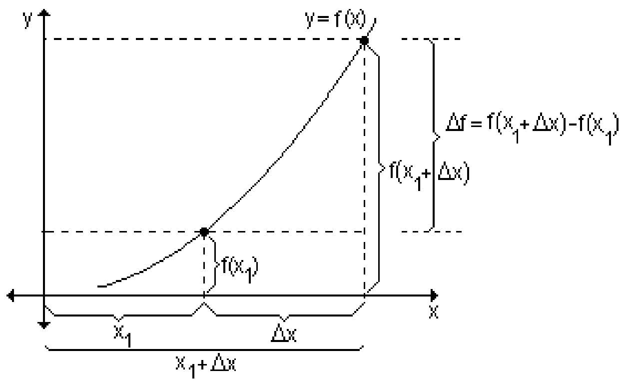
Diferenciará los incrementos de la variable dependiente y la independiente, aclarando sus respectivas notaciones (Δx, Δy).

Trabajará distintas representaciones algebraicas $\Delta t = t_2 - t_1$; $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$; $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, intentando dar significado a dichas notaciones como expresiones de la medida del cambio de la variable independiente y de la variable dependiente en términos de la independiente.

El siguiente cuadro resume los aspectos más importantes a resaltar antes de comenzar el desarrollo de las actividades propuestas para esta clase.

	Estado inicial	Estado final	Cambio (aumento o disminución)
Variable independiente	x_1	$x_1 + \Delta x$	$x_1 + \Delta x - x_1 = \Delta x$
Variable dependiente	$f(x_1)$	$f(x_1 + \Delta x)$	$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = \Delta f$

De la misma manera es importante repasar la interpretación gráfica mediante la representación en el plano de los elementos trabajados.



Finalizada esta recapitulación, a la cual se destinarán aproximadamente 10 minutos, el docente comentará a los alumnos que los problemas de variación son los que dieron origen al cálculo y explicará que se busca que ellos mismos reconstruyan las ideas resolviendo problemas relacionados con su origen.

Momento 2. El profesor explicará la manera en que se abordarán las actividades, expresando que se resolverán en grupos de dos personas. Les pedirá que en lo posible formen el mismo grupo que cuando respondieron el cuestionario.

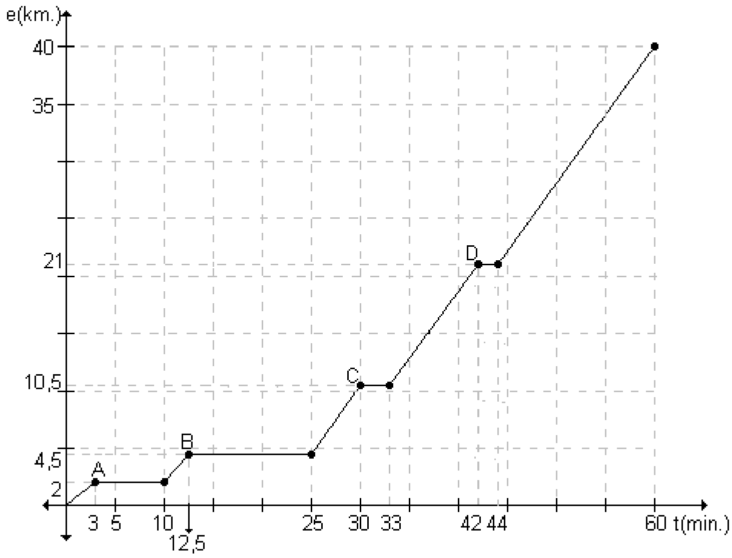
Repartirá copia de la guía (Anexo 3, Guía de actividades - Primera Parte, p. 251) a todos los alumnos, de manera que cada uno pueda escribir las resoluciones. Al finalizar el tiempo de trabajo, el profesor guardará una de las hojas y la otra quedará en mano de los alumnos para la discusión grupal y el control de las resoluciones. Dado que uno de los propósitos es que construyan los conceptos, se espera que los alumnos trabajen todo lo posible por lo que el docente los irá orientando para que realicen las actividades, especialmente para que puedan completar las tablas, dejando que las interpretaciones las piensen solos, sacando conclusiones entre todos al final.

Momento 3. Los alumnos resolverán las actividades. Esta instancia corresponde a las etapas de acción y formulación. En grupos de dos, se enfrentan a los problemas propuestos, formulan sus estrategias de trabajo y llegan a las conclusiones.

El tiempo de trabajo dependerá del profesor y de sus observaciones del trabajo de los grupos estimándose aproximadamente en 75 minutos.

Análisis de las actividades

Actividad 1. En el gráfico se observa la representación del espacio recorrido por un auto en función del tiempo en su trayecto desde Esperanza a Santa Fe.



Referencias:
A: Entrada a estación de servicio
B: Parada en el arco de la Colonización
C: Peaje
D: Cruce de rutas

a) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el coche? ¿Cuánto tiempo duró el viaje? ¿Cuál fue la velocidad media del auto a lo largo de todo su recorrido?

b) ¿Cuál fue la velocidad media en el trayecto que realizó desde que salió del peaje hasta que llegó al cruce de rutas?

c) ¿Cuál fue la velocidad media durante los primeros 15 minutos? ¿Y si no se tienen en cuenta los intervalos de tiempo en los que el auto estuvo parado?

d) ¿Cuál fue la velocidad media entre los instantes 25 y 30 minutos?

e) ¿Cuánto marca el velocímetro del auto cuando transcurrió un minuto de haber salido? Explique.

Esta actividad, que tiene como objetivo explorar la comprensión de los gráficos espacio-tiempo y calcular la velocidad media entre dos instantes determinados, se tomó de un problema propuesto en Azcárate y otros (1996), adaptando la gráfica y las preguntas a nuestro contexto. Coincidiendo con lo que proponen los autores, partimos de una situación que los alumnos pueden imaginar, considerando como variable dependiente el espacio recorrido por el auto con variaciones siempre positivas.

Los alumnos deben interpretar la gráfica para obtener datos sobre el movimiento del auto. A partir de los mismos deben calcular las velocidades medias para distintos intervalos de tiempo. Con la última pregunta se plantea por primera vez la necesidad de calcular la velocidad instantánea.

Su resolución requiere primordialmente el tratamiento en los registros gráfico y numérico y la conversión entre ambos.

Si bien los distintos incisos implican el cálculo de cambios relativos, es decir cómo cambia una variable, en nuestro caso espacio recorrido, con respecto al cambio de otra variable, tiempo, esperamos que dado que partimos de una situación que consideramos familiar para los alumnos, no van a tener mayores dificultades para su solución.

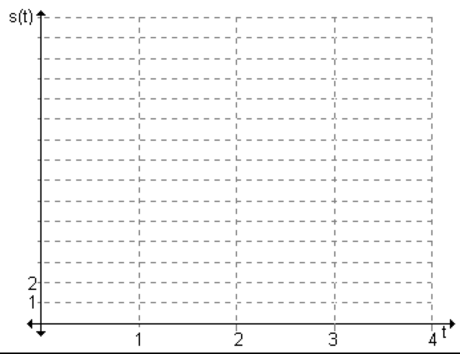
Según la experiencia del año anterior, los alumnos pueden presentar inconvenientes con el término velocidad media, suponiendo que se refiere a la media aritmética de las velocidades. En este caso se decide aclarar que esta expresión se refiere a la velocidad promedio, de manera que puedan avanzar con la resolución.

En relación a la velocidad al minuto de haber salido, se espera que respondan dándose cuenta que el instante está incluido en un tramo con movimiento uniforme por lo que la velocidad es constante. Se decide no dar ayuda para esta pregunta.

Actividad 2. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 3t + 1$ metros. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$ calculadas para uno de los intervalos.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$			
$1 \le t \le 2$			
$2 \le t \le 3$			
$3 \le t \le 4$			

¿Qué concepto físico representan los valores de la última columna de la tabla? Determine las unidades en los que se expresan.



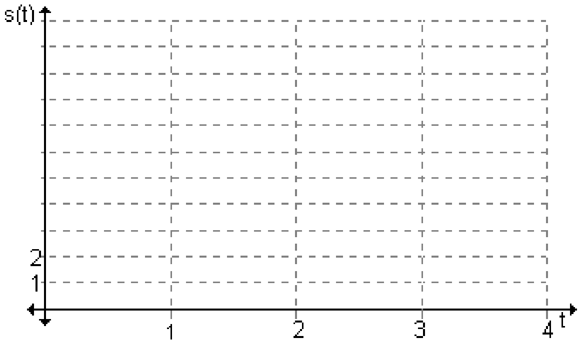
¿Cuál es la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto?

¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

Actividad 3. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla y realice la representación gráfica.

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$		
$1 \leq t \leq 2$		
$2 \leq t \leq 3$		
$3 \leq t \leq 4$		



¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto?
Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

En cada una de estas situaciones se presenta una función definida algebraicamente y se solicita la medición de los cambios, el análisis del comportamiento de estos cambios y la interpretación gráfica. Para su diseño se consideró las ideas propuestas por Dolores (1999) y Wenzelburger (1993), sin embargo las consignas son de elaboración propia.

Su resolución requiere la traducción del registro analítico al numérico y gráfico además de interpretar lo realizado en el registro verbal.

Tienen como objetivo principal que los alumnos trabajen con la velocidad media, a partir de la obtención de las diferencias (incrementos) y de los cocientes entre estas diferencias. Se pretende que interpreten de una manera geométrica las medidas a partir de las gráficas que se obtienen al relacionar la variable independiente con la variable dependiente.

Se espera que la resolución de las distintas actividades lleve al alumno al reconocimiento del tipo de funciones, o representaciones gráficas, que dan lugar a razones de cambio constantes y aquellas que llevan a razones de cambio variables.

En ninguna de las dos actividades la posición inicial coincide con el origen, por lo que agregan la dificultad con respecto a la primera de que la variable dependiente no describe espacio recorrido. En la actividad 2 la razón de cambio es constante, mientras que en la actividad 3, las razones de cambio varían según los intervalos que se manejen.

En esta última se introducen variaciones de posición negativas. Se espera que los alumnos descubran que el signo y el valor absoluto del cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tienen cada uno una interpretación determinada en el movimiento. Esto dará lugar a trabajar en las instancias de debate grupal e institucionalización con su significado relacionado a la dirección de la trayectoria y a la introducción de la rapidez media, distinguiéndola de la velocidad media. La comprensión de ambas nociones es muy importante para percibir mejor el comportamiento de la variación. Con la primera podemos determinar sólo cuánto cambia una variable cuando la otra cambia determinada magnitud, y con la segunda podemos agregar cómo cambia, siempre estudiando el fenómeno por intervalos.

Con respecto a las preguntas, las mismas aspiran a que los alumnos relacionen la columna de las razones de cambio con la velocidad media y que comiencen a pensar en la velocidad en determinado instante.

Además, con las respuestas el docente puede indagar las concepciones de los alumnos sobre el movimiento uniforme y el variado. La actividad 2 pretende que, a partir del reconocimiento de que la velocidad es constante en todo el movimiento, es posible determinar la velocidad instantánea en cualquier momento. Al presentarse un movimiento variado, como en la actividad 3, en el cual la velocidad se modifica a cada instante, se presenta la imposibilidad de calcular la velocidad de la manera hecha hasta el momento.

Esperamos que, excepto al enfrentarse a la pregunta sobre la velocidad de la piedra a los tres segundos de iniciado el movimiento en la actividad 3, los alumnos no presenten grandes dificultades al resolver estas actividades. En cambio, con respecto a esa cuestión, creemos que se presentarán principalmente dos situaciones. Responderán que no saben y no realizarán esfuerzos para responderla, o realizarán diversos intentos pero no darán una respuesta. Se resuelve no orientar a los alumnos con esta pregunta.

Actividad 4. Para estudiar el movimiento de una partícula, un investigador la ha iluminado mediante un flash que lanza destellos instantáneos a intervalos de 0,1 segundos. Tomando medidas sobre una fotografía, ha registrado los espacios recorridos por la partícula en los instantes que se muestran en la tabla.

Instante t (en segundos)	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4
Espacio e recorrido hasta el instante t	12	12,37	12,68	12,93	13,13	13,28	13,5	16

a) El investigador intentó determinar la velocidad exacta de la partícula en t = 2 segundos mediante la fórmula $\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_2) - e(t_1)}{t_2 - t_1}$ haciendo coincidir el instante inicial y el final del intervalo, es decir considerando $t_1 = 2$ y $t_2 = 2$. ¿Qué puede observar si realiza este procedimiento?

b) Complete la tabla con los espacios recorridos y las velocidades medias de la partícula en el intervalo [2, t] teniendo en cuenta que los valores de t son los que aparecen en la primera fila de la tabla anterior.

Intervalo [2,t]	[2;2,1]	[2;2,2]					
Espacio recorrido en el intervalo [2,t]							
Velocidad media en el intervalo [2,t]							

Según los cálculos realizados, ¿cuál de los valores para la velocidad media es una mejor aproximación de la velocidad en el instante t = 2 segundos? Explique.

La idea para el enunciado de esta actividad se obtuvo del libro de Guzmán, Colera y Salvador (1988). Se modificó su redacción y parte de la consigna.

Con la velocidad media es posible estudiar la variación por intervalos relativamente grandes pero en la realidad los cambios no suceden a saltos. En la mayoría de los fenómenos físicos los cambios suceden a cada instante. Se busca que los alumnos descubran la imposibilidad de calcular la velocidad en un instante con métodos conocidos y reflexionen sobre la amplitud de los intervalos. Los registros involucrados primordialmente son el numérico y el verbal.

En el primer inciso se hace coincidir el instante inicial con el final para que descubran que la fórmula estudiada para velocidad media no funciona ya que queda planteada una indeterminación (Dolores, 1999). Consideramos que los alumnos pueden tener dificultades para interpretar lo pedido, pensando que hay un error en el enunciado ya que los dos instantes son iguales. Los docentes intervendrán aclarando que está bien redactada la consigna. Plantearán preguntas a los alumnos: *¿Qué permite calcular la fórmula dada? ¿Qué estamos tratando de calcular desde la actividad anterior? Queremos analizar si lo podemos hacer con esta fórmula. Si reemplazan por los valores correspondientes, ¿qué obtienen?* Una vez que tienen el cociente planteado, podrán preguntar *¿tiene sentido lo que obtuvieron? ¿Qué significa?*

En el segundo inciso se busca que los alumnos reflexionen sobre la amplitud de los intervalos y que puedan conjeturar que la velocidad media se aproxima cada vez más a la instantánea a medida que se toman intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

Consideramos que también se generarán algunas dificultades en la comprensión del enunciado, pero orientados sobre la construcción de los intervalos, podrán completar sin dificultades la tabla. No se dará ayuda para la pregunta sobre la velocidad en $t = 2$, ya que nos interesa analizar los distintos argumentos y estrategias que realizan los estudiantes al intentar responderla. Se espera que conjeturen cosas como que el fenómeno se puede explicar de una manera más exacta cuando la amplitud de los intervalos que se toman es cada vez más pequeña.

Momento 4. Una vez concluido el período establecido para la resolución de las actividades, el profesor coordinará una puesta en común de las respuestas a los problemas. Dependiendo del tiempo que quede revisará más o menos profundamente cada actividad, pidiendo o no respuestas a los alumnos de cada una. Si por algún motivo las estrategias que se buscaban desarrollar para la resolución de las actividades no surgen por parte de los estudiantes, el profesor deberá proponerlas y explicarlas. Los aspectos variacionales estarán presentes en el discurso del profesor ya que es la base de las distintas actividades. Es la etapa de validación.

Posteriormente, en el momento de institucionalización, el profesor explicará y formalizará todo el trabajo realizado por los alumnos, relacionando los aspectos numéricos, gráficos y analíticos de los conceptos involucrados, haciendo hincapié en este último que es el menos trabajado en las actividades.

En la actividad 1 se calcularon las velocidades medias en determinado intervalo de tiempo. Para eso, primero se estableció un intervalo de variación, se calcularon las diferencias de la variable dependiente y las de la variable independiente, y por último, se dividieron las primeras por las segundas. Por ejemplo, para el inciso b), la velocidad media en el trayecto que realizó desde que salió del peaje hasta que llegó al cruce de rutas es: $v_m = \frac{21 - 10{,}5}{42 - 33} = \frac{10{,}5\ \text{km}}{9\ \text{min}} = 1{,}1\widehat{6}\ \frac{\text{km}}{\text{min}} = 70\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

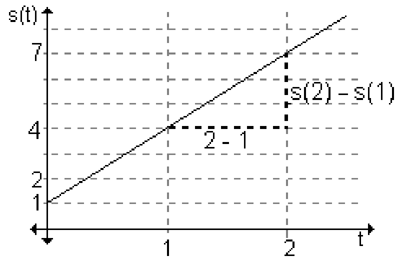
De esta manera la velocidad media es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado para hacerlo. A partir de las tablas construidas en las actividades 2 y 3, las preguntas planteadas y las notaciones presentadas para la representación de los cambios, el docente orientará a los alumnos a la escritura simbólica de la definición.

velocidad media: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$; velocidad media: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$

Hará especial hincapié en la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ planteada en la actividad 2, para el caso del movimiento uniforme. La idea es descubrir la relación entre la razón de cambio en situaciones de cambio constante y la pendiente de la recta.

Por ejemplo, para el segundo intervalo propuesto resulta:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{7-4}{2-1} = \frac{3}{1} = 3\frac{m}{s}$$



Generalizará la noción de velocidad media a la de razón de cambio media, presentando ejemplos de otras disciplinas donde la variable independiente no necesariamente sea el tiempo. Resaltará la importancia del empleo de las razones de cambio para explicar el comportamiento de cierta variable dependiente con respecto al cambio de la independiente. Buscamos que la idea que se formen los alumnos sea lo más cercana posible a la definición, dado que es una de las herramientas más importantes para comprender la derivada.

Abordará luego la actividad 3, en la que se trata un nuevo caso de variación. A partir del análisis de la tabla, tratará de responder a la pregunta sobre cómo varía la altura que alcanza la piedra con respecto del tiempo. Los cálculos indican que las razones de cambio son variables. Además, mientras la piedra está ascendiendo las razones de cambio son positivas, mientras que cuando desciende, las razones son negativas.

En el primer segundo la piedra recorre una mayor distancia, por lo que su velocidad (razón de cambio) en ese intervalo es la mayor, $6\frac{m}{s}$. En el segundo intervalo disminuye a $2\frac{m}{s}$. La piedra alcanza su altura máxima a los dos segundos de lanzada. ¿Cuál es la razón de cambio en ese instante? En el tercer intervalo comienza a descender y sus velocidades empiezan a ser negativas. En ese intervalo la velocidad (razón de cambio) es de $-2\frac{m}{s}$ mientras que en el cuarto es de $-6\frac{m}{s}$.

Trabajando con lo desarrollado, definirá rapidez de cambio media, distinguiendo este concepto de la velocidad o razón de cambio media. La velocidad es una magnitud que involucra signos pues tiene en cuenta el sentido de la trayectoria. Esta diferencia debe hacerse evidente durante la revisión de las actividades a fin de evitar confusiones de conceptualización. Tratará de dejar en claro el significado de los signos.

Indagará sobre qué funciones, o representaciones gráficas, dan lugar a razones de cambio constantes y cuáles llevan a razones de cambio variables. Si la velocidad de los cambios es constante, el mismo valor de la velocidad media, permite predecir la velocidad en cualquier intervalo o en un instante cualquiera. Pero, en la gran mayoría de fenómenos físicos o estudiados por otras disciplinas, la velocidad cambia a cada instante. Al calcular una velocidad media en un intervalo de tiempo se ocultan las variaciones que sufre la velocidad real durante ese intervalo.

Surge así la necesidad de calcular la velocidad instantánea, es decir la velocidad exacta en un momento determinado. El velocímetro de los autos mide en cada momento la velocidad del auto, es decir, la velocidad instantánea. El problema de su cálculo se plantea en las actividades 1, 2 y 3, siendo posible deducirla directamente en las dos primeras a partir de las velocidades medias calculadas, ya que corresponden a movimientos uniformes (con velocidad constante en todo el dominio o por tramos). Se indagará sobre sus procedimientos en la actividad 3. Debe surgir la imposibilidad de calcular la velocidad en un instante con el mismo procedimiento que para calcular la velocidad en un intervalo ya que la situación es diferente, no hay dos instantes, algebraicamente se plantea una división por cero.

$$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{12 - 12}{0 - 0} = \frac{0}{0} \quad ?$$

Mostrará que ante esta dificultad es posible considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños de manera de determinar aproximaciones de dicha velocidad.

Intervalo [2,t]	[2;2,1]	[2;2,2]	[2;2,3]	[2;2,4]	[2;2,5]	[2;3]	[2;4]
Espacio recorrido en el intervalo [2,t]	0,37	0,68	0,93	1,13	1,28	1,5	4
Velocidad media en el intervalo [2,t]	3,7	3,4	3,1	2,825	2,56	1,5	2

En todo momento hará referencia al significado variacional de los procedimientos, utilizando expresiones verbales, gráficas y simbólicas acordes. A partir de un valor de t fijo ($t = 2$), tomando cambios de tiempo cada vez más pequeños (primer fila de la tabla recorrida de derecha a izquierda), obtenemos cambios para los espacios recorridos cada vez más pequeños. De esta manera el cociente entre los cambios que da la velocidad media proporciona cada vez mejor información sobre lo que sucede cerca del instante considerado.

En esta clase se llega a la idea de que el valor numérico al cual se aproxima $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando $\Delta t \to 0$ es una aproximación de la velocidad instantánea. Aproximamos la velocidad instantánea a partir de las velocidades promedio, o en general, aproximamos razones de cambio instantáneas a partir de razones de cambio promedio. A medida que calculamos la velocidad promedio entre $t = 2$ y otro instante cada vez más próximo a dicho valor, la aproximación obtenida será más exacta.

Sesión 2

Duración: una hora

Objetivo:

- Afianzar lo trabajado en la sesión anterior.
- Explorar las concepciones de los alumnos sobre recta tangente y recta secante a una curva y a partir de ellas conducirlos a la comprensión de dichas nociones.

Secuencia Didáctica

Momento 1. En primer lugar, el profesor revisará lo estudiado la sesión anterior a través de preguntas a los alumnos. El discurso estará encaminado a reflexionar sobre las conclusiones de las distintas actividades desarrolladas.

Les propondrá la siguiente actividad que escribirá en el pizarrón.

> El área a, en cm^2, de una herida está dada por $a(r) = \pi r^2$, siendo r el radio de la herida, en cm.
>
> **a)** Calcule $\dfrac{a(3)-a(2)}{3-2}$ e interprete su resultado.
>
> **b)** Calcule $\dfrac{a(2+\Delta t)-a(2)}{\Delta t}$ e interprete su resultado.

En este caso se plantea el cálculo de la razón de cambio media en un contexto diferente. El problema corresponde a una situación que no involucra la variable tiempo. Es importante mostrar cómo este tipo de situaciones se pueden modelar también variacionalmente. El objetivo principal es fortalecer el reconocimiento de la razón de cambio como una herramienta que indica cuánto cambia una variable, cuando la otra cambia determinada cantidad. En uno de los incisos los alumnos deben trabajar numéricamente y en el otro simbólicamente. Se espera que no tengan dificultades para el primer cálculo pero sí quizás para el segundo. Nos interesa especialmente ver qué interpretan sobre los mismos. Luego de darles unos minutos para que la resuelvan, se discutirán los resultados en forma grupal.

Para el primer inciso los alumnos deben realizar $\dfrac{a(3)-a(2)}{3-2} = \dfrac{9\pi - 4\pi}{1} = 5\pi$. Este valor representa que el área de la herida crece a razón de $5\pi \dfrac{cm^2}{cm}$ cuando el radio de la herida pasa de medir 2 a 3 cm.

La docente preguntará específicamente cómo sabemos que el área crece y el significado de la unidad. Podrá agregar algunas preguntas como por ejemplo qué tendría que suceder en el caso de que el tamaño de la herida esté disminuyendo.

Para cualquier valor Δt se tendrá:

$$\frac{a(2+\Delta t)-a(2)}{\Delta t}=\frac{\pi(2+\Delta t)^2-4\pi}{\Delta t}=\frac{\pi\left(4+4\Delta t+(\Delta t)^2\right)-4\pi}{\Delta t}=\frac{4\pi+4\pi\Delta t+\pi(\Delta t)^2-4\pi}{\Delta t}=$$

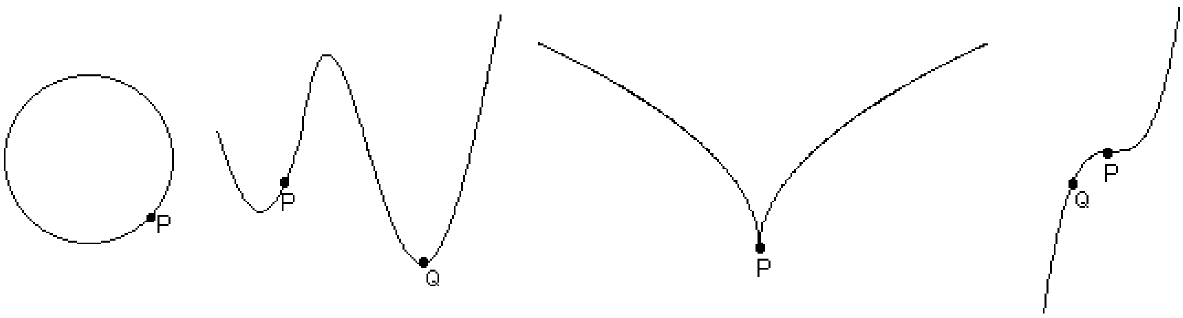
$$=\frac{\Delta t(4\pi+\pi\Delta t)}{\Delta t}=4\pi+\pi\Delta t$$, siempre que Δt sea distinto de cero.

La expresión obtenida representa la razón de cambio del área de la herida con respecto a la medida de su radio, cuando el mismo cambia de 2 a 2 + Δt centímetros. Indica cuánto cambia el área de la herida, medido en centímetros cuadrados, por cada centímetro que cambia el radio, en el intervalo [2, 2+Δt]. Por eso, la razón de cambio media se mide en centímetros cuadrados por centímetro $\left(\frac{cm^2}{cm}\right)$.

A partir del ejemplo, el docente alentará a los alumnos a deliberar sobre la medida de los intervalos. Retomará la idea de que, trabajando con intervalos de tiempo grandes se obtiene información muy general, mientras que al utilizar variaciones de tiempo más pequeñas se logra mayor precisión para la explicación del fenómeno.

Momento 2. Para el desarrollo de los contenidos específicos de esta sesión, recta secante y tangente a una curva, se prepararon algunas actividades que el docente presentará una a una a los alumnos, dejándoles unos minutos para que las resuelvan como deseen, individual o grupalmente. Luego, por medio de interrogatorios y con ayuda de los estudiantes se resolverán en el pizarrón. Para la presentación de las actividades y de las conclusiones se auxiliará de una presentación de diapositivas. De esta manera se alternarán de manera continua las situaciones de acción, formulación y validación.

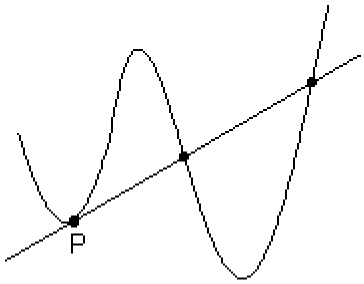
Momento 3. El docente presentará el problema de la recta tangente a una curva pidiendo a los alumnos que tracen la recta tangente a las siguientes representaciones gráficas, en los puntos P o Q indicados:



Luego de esperar unos minutos para que realicen lo solicitado, el docente pedirá a algún alumno que dibuje las gráficas y las rectas tangentes en el pizarrón.

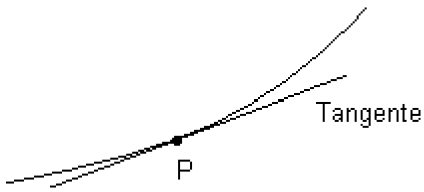
Dado que el trazado de la recta tangente a una cónica es un tema desarrollado en clase unas semanas antes, se prevé que no presenten dificultades en el trazado de la tangente a la circunferencia. La concepción de tangente como la recta (toda ella) que toca a una curva pero no la corta, es la que nuestros alumnos manejan desde la escuela primaria y, por lo tanto, muy arraigada en ellos. Se espera hacer surgir conflicto cognitivo ante la necesidad de determinar la recta en los otros casos.

Es necesario tratar localmente la idea de tangencia, es decir la recta tangente a la curva en un punto toca a la misma en un solo punto (localmente) y por lo tanto puede cortar a la misma en otros puntos.

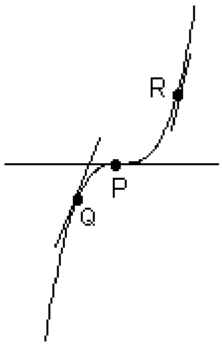


Luego de discutir las distintas gráficas presentará la noción intuitiva de la recta tangente a una curva en un punto:

De todas las rectas que pasan por un punto P de una gráfica definimos de manera intuitiva la recta tangente a esa curva en el punto P, como la que se aproxima a la curva más que cualquier otra, por lo menos en las cercanías del punto P.



El docente trazará rectas tangentes a las curvas en distintos puntos y mostrará cómo va cambiando su inclinación.



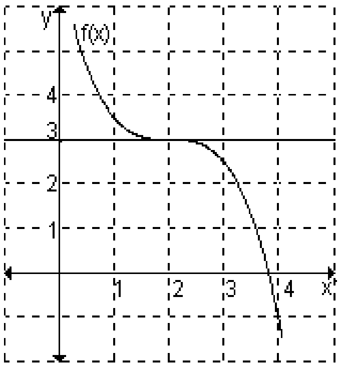
La idea de que la pendiente de la tangente toma distintos valores para cada valor de la variable independiente es muy importante, no sólo para reforzar el significado de la razón de cambio instantánea, sino también para desarrollar posteriormente ideas de tipo variacional como función creciente, decreciente, puntos donde la función no crece ni decrece (máximos y mínimos), qué tan rápido está cambiando lo que está cambiando, observando la inclinación de la tangente en cada punto.

Si no queda claro que la recta tangente a una curva va cambiando en cada punto, el alumno no podrá comprender por qué para encontrar los puntos críticos debe hacer la derivada igual a cero, ni tampoco por qué un poco antes de un máximo la pendiente es positiva y un poco después es negativa, y lo contrario para el mínimo.

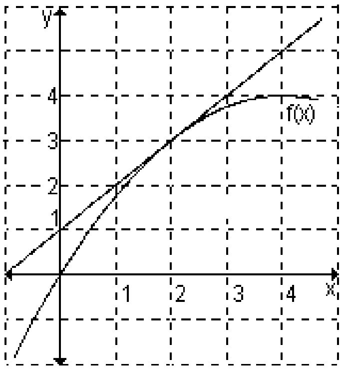
Momento 4. El docente presentará la siguiente actividad, cuyo objetivo es que los alumnos visualicen gráficas de rectas tangentes a una función en determinados puntos y obtengan la pendiente y la ecuación de la recta teniendo en cuenta que los datos se pueden obtener desde diferentes registros, como el gráfico en este caso. Deben convertir los datos a los registros numérico y analítico para dar las respuestas.

En cada caso, obtenga la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función.

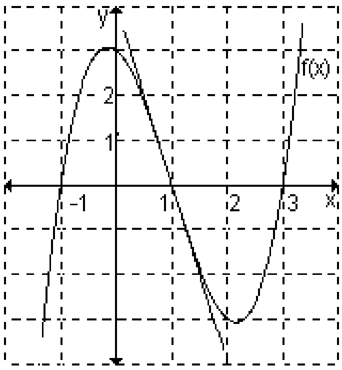
a)



b)

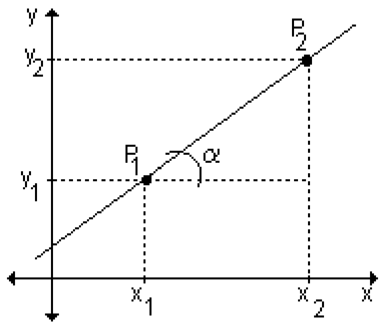


c)



Gráfica	a	b	c
Pendiente			
Ecuación de la recta			

Nuevamente les dará unos minutos y discutirá los resultados en el pizarrón. Les solicitará que describan los procedimientos seguidos para determinar la pendiente y la ecuación de la recta y los conducirá a repasar la notación simbólica de la pendiente de una recta conocidos dos puntos que le pertenecen.



Si consideramos dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ pertenecientes a la recta $y = mx + h$, podemos escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

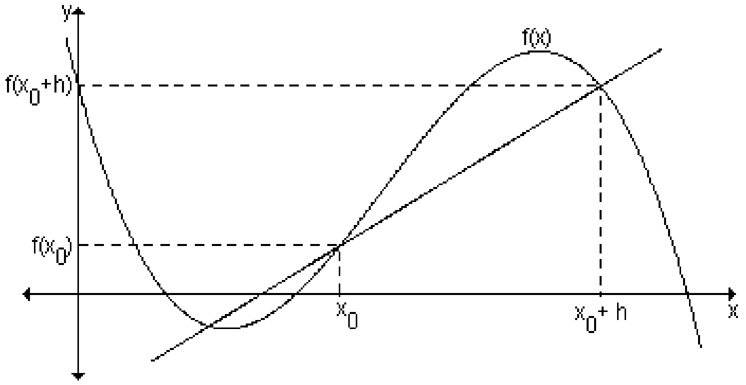
La pendiente m de la recta representa la tangente trigonométrica del ángulo α. Entonces, $m = \text{tg}\ \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, donde α se llama ángulo de inclinación.

Dado que $x_2 - x_1 = \Delta x$; $y_2 - y_1 = \Delta y$, resulta: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Esta notación es muy importante ya que expresa la pendiente como la razón entre el cambio vertical y el cambio horizontal. El docente interpretará esta razón gráficamente, pero no adelantará nada de la relación con lo trabajado la sesión anterior porque se espera que los alumnos la descubran. Este aspecto se retomará la clase siguiente.

A partir de estas dos actividades el docente hará reflexionar a través de preguntas a los alumnos sobre cómo determinar la recta tangente a la gráfica de una función cualquiera: *¿Cómo dibujamos la recta tangente? ¿Todos trazaron la misma recta? ¿Cómo encontramos la ecuación de la tangente en la segunda actividad? ¿Qué sucede si no tenemos los datos para determinarla?*

Momento 5. La siguiente actividad presenta una función definida gráficamente y una recta secante.

Obtenga la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función y = f(x) que une los puntos de abscisa x_0 y $x_0 + h$.



Se expondrán los resultados en el pizarrón. Esta actividad pone en juego el pasaje entre los registros gráfico y simbólico.

Momento 6. A manera de cierre, el profesor sintetizará lo discutido en toda la clase, haciendo hincapié en las notaciones (momento de institucionalización).

Sesión 3

Duración: dos horas

Objetivos:

- Identificar la razón de cambio media como la pendiente de la recta que une los dos puntos considerados.
- Comparar razones de cambio media entre varias parejas de instantes o puntos en un mismo gráfico.
- Relacionar la razón de cambio instantánea con la pendiente de la tangente a la gráfica en un punto.
- Descubrir la necesidad de realizar el paso al límite para calcular la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente.
- Mostrar que ambos límites son iguales. Definir derivada de una función en un punto.

Secuencia didáctica

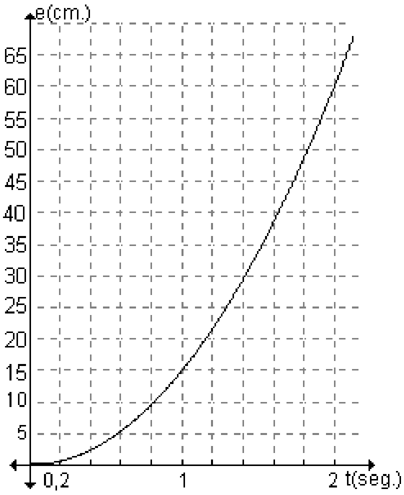
Momento 1. El profesor hará una breve introducción repasando lo desarrollado anteriormente. A través de preguntas a los alumnos, retomará el concepto de razón de cambio media y la necesidad de encontrar una manera de calcular la razón de cambio instantánea. Recordará que se tomaron intervalos cada vez más pequeños buscando una aproximación a la velocidad instantánea.

Momento 2. El profesor repartirá las hojas de trabajo (Anexo 3, Guía de actividades - Segunda Parte, p. 253) y explicará que las actividades se abordarán de la misma manera que la oportunidad anterior, solicitando que, en lo posible, se agrupen con el mismo compañero.

Momento 3. Los alumnos resolverán las actividades de la segunda parte de la guía (situaciones de acción y formulación). El tiempo de trabajo dependerá de las observaciones del profesor del trabajo de los alumnos estimándose aproximadamente en 75 minutos.

Análisis de las actividades

Actividad 1. En un experimento de laboratorio se estudió la caída libre de una bola de hierro pequeña. La gráfica muestra el espacio e recorrido por la bola, en centímetros, desde que se lanzó y durante t segundos.



a) Determine la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.

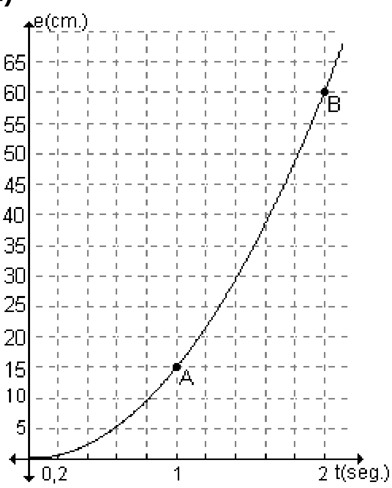
b) Observe el gráfico y complete la tabla considerando los intervalos [1, 1 + Δt], teniendo en cuenta los valores de Δt que aparecen en la primer fila de la tabla.

Δt	0,8 seg.	0,6 seg.	0,4 seg.	0,2 seg.
Intervalo [1, 1 + Δt]				
Espacio recorrido				
Velocidad promedio				

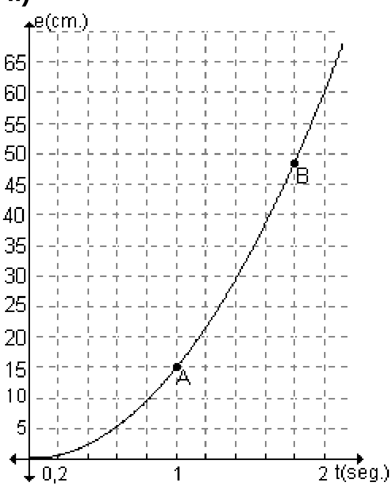
c) ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t = 1 segundo?

d) En cada uno de los siguientes gráficos, calcule la pendiente de la recta que une los puntos A y B. Relacione los valores de las pendientes con los cálculos realizados en los incisos anteriores. Dibuje la recta.

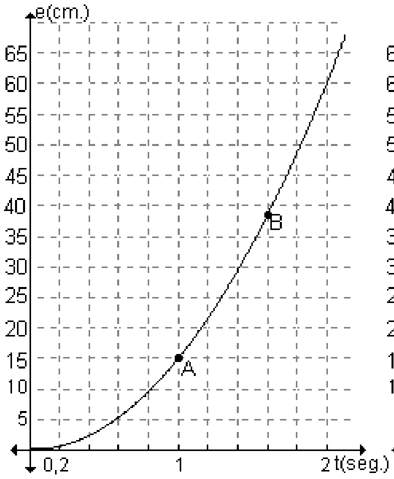
i)



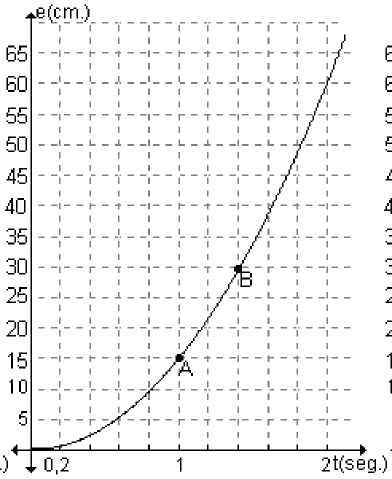
ii)



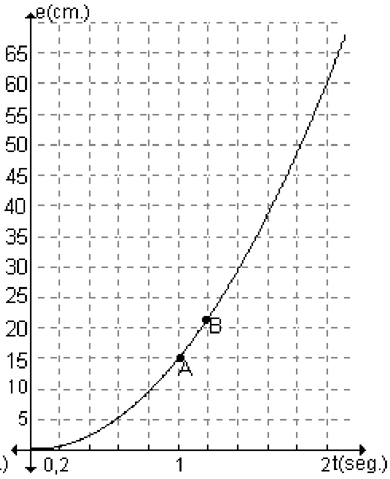
iii)



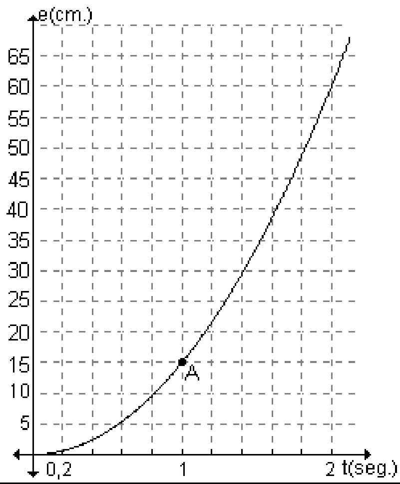
iv)



v)



e) Dibuje la recta tangente a la gráfica en el punto **A**. Estime su pendiente ¿Qué relación existe entre la pendiente de esta recta y la velocidad pedida en **c)?**



Esta actividad es una adaptación de una situación planteada por Wenzelburger (1993). Tiene como propósito que los alumnos refuercen la noción de razón de cambio media, así como que reconozcan a la pendiente de una recta como la razón de cambio entre la variable dependiente y la variable independiente de un fenómeno.

Para trabajar con las relaciones entre las pendientes de rectas con la razón de cambio, se hace un acercamiento numérico relacionando con el registro gráfico, sin descuidar los aspectos variacionales.

Requiere que los alumnos utilicen la idea de determinar la velocidad en un instante como la velocidad media entre instantes muy próximos al considerado.

En el contexto geométrico demanda el trazado de rectas secantes y la recta tangente a la curva en un punto. Esto tiene como finalidad la ayuda para la visualización del proceso de encontrar la recta tangente mediante aproximaciones sucesivas de rectas secantes.

Asimismo busca que los estudiantes recuerden cómo obtener las pendientes de rectas así como que evidencien que la inclinación de una recta no es otra cosa que la misma razón de cambio.

Los registros involucrados son primordialmente el gráfico y el numérico.

Para la resolución de esta situación, los alumnos pueden emplear algunos de los resultados de actividades anteriores. En el primer y segundo inciso deben calcular la velocidad promedio de la bola en determinados intervalos, obteniendo los datos desde la representación gráfica de la función que describe el espacio recorrido. Para responder la pregunta del tercer inciso deben reflexionar sobre la amplitud de los intervalos o la amplitud de los incrementos y observar que la velocidad media obtenida para el intervalo más corto es la mejor aproximación para la velocidad en $t = 1$.

En el inciso d) deben hallar las pendientes de las rectas secantes que unen los puntos cuyos valores coinciden con los extremos de los intervalos considerados en los incisos a) y b). Esperamos que los alumnos no presenten dificultades para la determinación de las pendientes y suponemos que pueden darse cuenta de que los datos que necesitan y los cálculos que deben realizar son los mismos que en los incisos anteriores. Esto los debería llevar a relacionar la pendiente de la secante a una curva con la razón de cambio media.

Para el inciso e), no deberían presentar problemas para el trazado de la tangente y la estimación de su pendiente. Pueden tener dificultades para relacionar la pendiente de la tangente en un punto con la velocidad en un instante, según el valor obtenido y su mayor o menor proximidad a la respuesta del inciso c).

Actividad 2. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley $s(t) = t^3$.

a) Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

$t_0 \leq t \leq t_1$	$1{,}9 \leq t \leq 2$	$1{,}99 \leq t \leq 2$	$1{,}999 \leq t \leq 2$	... →		← ...	$2 \leq t \leq 2{,}001$	$2 \leq t \leq 2{,}01$
Δt				... →		← ...		
Δs				... →		← ...		
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$				... →		← ...		

b) Según el acercamiento realizado en la tabla**,** ¿qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en $t = 2$? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura?

c) Obtenga la velocidad media $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ de la partícula en el intervalo $[2, 2 + \Delta t]$. Interprete geométricamente la expresión obtenida.

d) Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso **b)**, ¿cuál es el significado de $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$? Calcule el límite. ¿Qué observa?

e) Calcule $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ e interprete física y geométricamente el resultado.

Esta actividad tiene carácter integrador ya que intenta recuperar las intuiciones, conjeturas y hallazgos que las actividades anteriores pretendieron desarrollar en los alumnos, e incluyen los aspectos más relevantes de todo nuestro estudio sobre la derivada con un enfoque variacional.

Pretende que los estudiantes trabajen con la razón de cambio instantánea involucrada en un fenómeno de variación y que reconozcan la necesidad de realizar el paso al límite para determinar tanto dicha razón como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto. Exige además la algebrización de la situación.

En el inciso a) se plantea la idea de intervalos “infinitamente pequeños”, además de la notación de tiende a un número (→...). La actividad refiere de manera intuitiva a los procesos infinitos y esperamos que los alumnos se den cuenta de la relación con lo estudiado para el tema de límite. La estrategia central consiste en explorar qué sucede con la sucesión de velocidades medias muy cerca del punto en cuestión, acercándose al mismo tanto por derecha como por izquierda. Los alumnos deben conjeturar que la velocidad instantánea se obtiene cuando el cambio de tiempo es infinitamente pequeño. Si la sucesión de cocientes cada vez más pequeños tiende a un número, éste es su límite y coincide con la velocidad instantánea buscada.

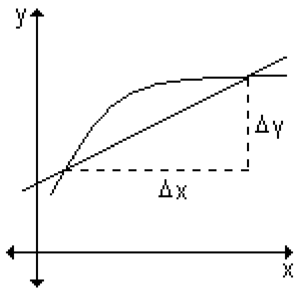
La resolución de la actividad requiere la utilización y coordinación de los registros analítico y numérico, así como también el verbal.

Suponemos que las mayores dificultades se presentarán en los últimos tres incisos, con el trabajo algebraico y la interpretación física y geométrica de los resultados, ya que, hasta el momento, sólo el profesor había trabajado de manera algebraica en los momentos de institucionalización o de repaso en el pizarrón.

Momento 4. Pasando a la instancia de validación, el profesor conducirá una puesta en común de los resultados, tratando que descubran, si es que no alcanzaron a darse cuenta con la actividad 1, que al calcular la velocidad promedio, o en general cualquier razón de cambio media, se realiza el mismo cálculo que para encontrar la pendiente de la recta secante.

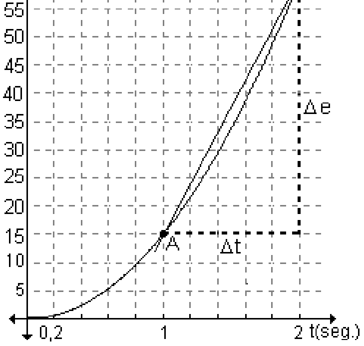
La razón de cambio media en un intervalo se puede interpretar gráficamente como la pendiente de una recta que pasa por los puntos que corresponden a los extremos del intervalo.

Si una magnitud y depende de una magnitud x y si y cambia en Δy cuando x cambia en Δx, entonces la razón de cambio media de y con respecto a x es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.



La razón de cambio media en un intervalo dado se puede representar gráficamente como la pendiente de una recta cuyo cambio en dirección vertical, considerando ese intervalo, es Δy y cuyo cambio en dirección horizontal en el mismo intervalo, es Δx.

Conviene trabajar también con el significado del signo de la pendiente relacionándolo con el signo de la razón de cambio.



Superponiendo las distintas representaciones gráficas, mostrará que a medida que el punto B se aproxima al punto A, cambia la pendiente de la recta secante que une esos puntos de manera que la posición de la recta secante se aproxima cada vez más a la posición de la recta tangente a la gráfica en el punto A.

Discutirá el inciso e) debiendo llegar a la conclusión de que geométricamente la velocidad instantánea en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Indagará sobre la respuesta al inciso c) de la primera actividad acerca de la velocidad en $t = 1$. Analizará si tuvieron en cuenta lo estudiado en la primera sesión, aproximando la velocidad instantánea a través de la velocidad media calculada para el intervalo más pequeño.

Se puede aproximar la velocidad instantánea (en general la razón de cambio instantánea o sea la variación de una función en un punto de abscisa t_0) mediante el número que expresa la velocidad promedio (o la razón de cambio promedio) entre el punto de abscisa t_0 y otro tan próximo al anterior como se desee.

Completará, solicitando los valores a los alumnos, la tabla de la segunda actividad.

$t_0 \le t \le t_1$	$1{,}9 \le t \le 2$	$1{,}99 \le t \le 2$	$1{,}999 \le t \le 2$	… $\rightarrow$		… $\leftarrow$	$2 \le t \le 2{,}001$	$2 \le t \le 2{,}01$
Δt	0,1	0,01	0,001	… $\rightarrow$		… $\leftarrow$	0,001	0,01
Δs	1,141	0,1194	0,011994	… $\rightarrow$		… $\leftarrow$	0,012006	0,1206
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	11,41	11,94	11,994	… $\rightarrow$		… $\leftarrow$	12,006	12,06

En ella se observa que a medida que los cambios son cada vez más pequeños, los cocientes $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ se comportan de una manera especial.

Si agregamos algunos valores a cada sucesión de números se observa mejor la tendencia.

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	11,41	11,94	11,994	11,9994	11,99994

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	12,06	12,006	12,0006	12,00006	12,000006

Ambas sucesiones se aproximan a 12, la primera en forma ascendente y la segunda de manera descendente.

¿Qué sucederá con cada sucesión si hacemos que la amplitud del intervalo siga disminuyendo infinitamente?

¿Qué sucede si el cambio del tiempo es infinitamente pequeño?

Cada sucesión de valores se acerca cada vez más a 12, de manera que la diferencia se hace insignificante.

Si Δt es infinitamente pequeño, en nuestro problema t es infinitamente cercano a $t = 2$, entonces el valor de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tiende a 12. Si la sucesión de cocientes con valores Δs y Δt cada vez más pequeños tiende a un número, este es su *límite*. Este valor es la velocidad exacta de la partícula en $t = 2$. Interpretando geométricamente la situación, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $s(t) = t^3$ en $t = 2$.

En forma conjunta con los alumnos, el docente desarrollará en el pizarrón la expresión $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ y utilizará la misma para obtener el límite pedido en el inciso siguiente: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$, volviendo a repasar sus interpretaciones física y geométrica.

Posteriormente trabajará el inciso e).

A partir de las conclusiones presentará la definición de razón de cambio instantánea y la relacionará con la pendiente de la recta tangente, escribiendo distintas formas de notación algebraica. Es el momento de la institucionalización.

Se dice que la razón de cambio instantánea en $t = t_0$ es el límite de la razón de cambio media o velocidad promedio entre t_0 y $t_0 + \Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$. Teniendo en cuenta la definición de límite se puede escribir: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$.

Recapitulará lo visto hasta este momento puntualizando cómo la resolución de los dos problemas: el cálculo de la velocidad instantánea (o, en general, la razón de cambio instantánea) y la determinación de la pendiente de la recta tangente lleva al mismo límite.

A partir de las conclusiones presentará la definición de derivada de una función en un punto.

En este capítulo se reporta el análisis de los datos obtenidos durante la experimentación. Se detalla el contexto de la implementación de la secuencia y *los instrumentos utilizados para recoger la información, se describen las sesiones desarrolladas y se efectúa el análisis a posteriori, presentando y analizando lo que realmente hicieron los estudiantes.*

Posteriormente se analizan los materiales recogidos con otros instrumentos, las entrevistas y la evaluación.

La confrontación de estos datos con el análisis a priori permite validar la ingeniería.

5.1 El contexto de la implementación

La secuencia didáctica se llevó al aula con todos los alumnos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral durante el segundo cuatrimestre del 2008. Los mismos ya habían aprobado o regularizado Matemática I, asignatura en la cual se desarrollaron los contenidos correspondientes a funciones.

Siguiendo el programa de la asignatura los alumnos ya habían repasado los contenidos referidos a números y la recta real, y estudiado los temas límite y continuidad.

En la clase previa al inicio de la implementación de la secuencia, los alumnos resolvieron el cuestionario sobre el comportamiento variacional de las funciones. En esa misma clase, posteriormente a la entrega del cuestionario, se trabajaron los conceptos de variable, función y cambio de las variables involucradas. De esta manera los alumnos recordaron los temas para el momento de resolución de las actividades de la secuencia.

Para el desarrollo específico de la secuencia se dedicaron cinco horas reloj distribuidas en tres clases, dos de dos horas cada una y una de una hora de duración.

Si bien se había planeado originalmente que la autora del presente trabajo implemente la secuencia didáctica en dos de las cuatro comisiones en que se divide el grupo total de alumnos que cursan la asignatura con la colaboración de otros docentes de la cátedra para la observación de la clase, debido a problemas de paros laborales planificados para esos días, decidió hacerse cargo ella de las cuatro comisiones. Las otras docentes aceptaron igualmente colaborar con la observación.

Debido a esta situación se debió modificar los horarios de clase. No hubo inconvenientes para esta reestructuración debido a que las demás cátedras no dictaban clases por el mismo motivo y los alumnos se mostraron dispuestos a colaborar, aceptando los cambios horarios.

Las sesiones de trabajo se realizaron entre el 25 de setiembre y el 1 de octubre.

Se detalla a continuación el cronograma del desarrollo de las tres sesiones en todos los grupos con los días y horarios y el número de estudiantes presentes en cada clase.

	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3
Comisión 1	Jueves 25/09 de 8 a 10 hs. 24 asistentes	Lunes 29/09 de 8 a 9 hs. 23 asistentes	Martes 30/09 de 8 a 10 hs. 24 asistentes
Comisión 2	Jueves 25/09 de 10 a 12 hs. 24 asistentes	Lunes 29/09 de 9 a 10 hs. 24 asistentes	Martes 30/09 de 10 a 12 hs. 28 asistentes
Comisión 3	Jueves 25/09 de 14 a 16 hs. 22 asistentes	Lunes 29/09 de 10 a 11 hs. 20 asistentes	Miércoles 01/10 de 14 a 16 hs. 23 asistentes
Comisión 4	Viernes 26/09 de 13 a 15 hs. 14 asistentes	Lunes 29/09 de 11 a 12 hs. 17 asistentes	Miércoles 01/10 de 16 a 18 hs. 20 asistentes

Las sesiones se desarrollaron en las aulas de la Facultad de Ciencias Agrarias. La capacidad de las mismas supera ampliamente la cantidad de alumnos de cada comisión y en ellas los estudiantes se distribuyen libremente.

5.2 Estrategia de observación y participación del profesor

Otro de los aspectos que fue necesario establecer es el referido a la participación del profesor y la estrategia de observación. Se decidió que tanto el docente a cargo de la clase como el colaborador actuaran como observadores de la actividad de los equipos, apoyándolos en los momentos críticos.

Se seleccionó una estrategia de observación participativa, permitiéndole al docente interactuar con los alumnos atendiendo a sus preguntas pero intentando que ellos mismos encuentren las respuestas. Sus intervenciones deben principalmente evitar la dispersión, en caso de que el equipo se desvíe notoriamente del trabajo y ayudar cuando el equipo quede estacionado en alguna actividad y que parezca infranqueable.

Se solicitó además al colaborador que tome nota de todo lo posible sobre intervenciones de los alumnos o del docente: las dudas que surgen, qué preguntan los alumnos, qué contesta el docente, qué discuten, si descubren algo, si el profesor hace una aclaración para todos. Durante la institucionalización las observaciones deberían reflejar principalmente la profundidad de la discusión grupal, la participación de los alumnos, la manera de justificar sus afirmaciones y las intervenciones del profesor. Se le pidió también registrar si todos trabajan durante la etapa de resolución de problemas, si durante la discusión grupal y la institucionalización murmuran, hacen expresiones (de no entender, ahora entiendo, etc.), hablan de otro tema.

5.3 Instrumentos para el análisis de la experimentación

Los instrumentos utilizados para recoger la información fueron:

- Las producciones escritas de 23 equipos correspondientes a las resoluciones de las guías de actividades propuestas en la primera y tercera sesión. La selección de estos equipos se hizo teniendo en cuenta que sus integrantes cursaran por primera vez Matemática II, hayan asistido a todas las clases y hayan mantenido la conformación del grupo de trabajo durante todas las sesiones.
- Las observaciones del docente y del colaborador presente en el aula durante el desarrollo de la secuencia sobre las actuaciones de los alumnos, tanto en el trabajo en equipo como en la puesta en común, así como de información sobre la interacción didáctica.

Las producciones escritas de los alumnos permiten observar básicamente formulaciones y justificaciones, pero no aportan datos sobre cómo llegaron a esos resultados, por lo que la observación de los docentes constituye un aporte valioso para describir los distintos momentos de interacción. Éstos pueden ser por ejemplo los episodios donde se propongan y discutan ideas o estrategias, se utilicen conocimientos previos, se recurra a representaciones gráficas, algebraicas o numéricas, así como las dificultades que surjan para la resolución de las actividades. Otra instancia importante de interacción es la de institucionalización, describiendo la participación de los alumnos.

Los datos recogidos a través de los instrumentos señalados, se completaron con otros obtenidos a través de metodologías externas: entrevistas individuales a algunos alumnos seleccionados según sus trabajos y un instrumento de evaluación con preguntas de contenidos sobre los temas impartidos:

- Transcripciones de entrevistas realizadas a los alumnos seleccionados.
- Análisis de las respuestas a la evaluación.

5.4 Descripción de las sesiones y análisis de resultados de las actividades

En este apartado se presentan los análisis a posteriori de las sesiones desarrolladas, describiendo brevemente en primer lugar el desarrollo de cada sesión. Los datos utilizados provienen del análisis de las hojas de trabajo entregadas por los alumnos y las anotaciones realizadas por el profesor–investigador y el profesor-observador de la clase.

Las hojas corregidas no fueron devueltas a los alumnos. Luego de resolver las actividades, se propuso un debate grupal. Se leyeron las resoluciones de algunos alumnos, se intentó remarcar todos los aspectos variacionales, se corrigieron y se completaron de la mejor manera posible las distintas respuestas.

En el análisis tratamos de incluir todas las respuestas. Teniendo en cuenta que para la resolución de las actividades los alumnos debían apelar a sus conocimientos previos de matemática y física y, en algunos casos, al sentido común, tratamos de mostrar los logros como así también las dificultades más significativas, resaltando los aspectos relacionados al comportamiento variacional. Los análisis a priori de cada sesión, a los que se hace referencia, se encuentran en el apartado 4.3 del capítulo anterior.

5.4.1 Análisis de la primera sesión de trabajo

Según el plan previsto, la docente inició la clase explicando que van a revisar las conclusiones de la clase anterior referidas a funciones, variables y cambios. Los alumnos demoraron en prestar atención.

Preguntó a los alumnos sobre el concepto de función y sobre las variables involucradas. También indagó sobre el significado de Δx y Δy, trabajando distintas notaciones. Los alumnos no presentaron problemas para interpretar $x_2 - x_1$ y $f(x_2) - f(x_1)$, pero sí para definir el cambio de la variable dependiente cuando la variable independiente cambia de x_1 a $x_1 + \Delta x$. La docente realizó la representación gráfica de una función y solicitó la interpretación en la misma de las distintas medidas. Cuando les consultó sobre la relación entre el signo de los cambios de la variable dependiente y el comportamiento de la función, los alumnos no respondieron. Retomó la actividad 6 del cuestionario en la que se trabajan dos funciones, una con cambios todos positivos y otra con cambios positivos y negativos y, en conjunto con los alumnos, estableció el significado del valor absoluto de los cambios y de los signos.

Finalizada esta revisión, la docente explicó la importancia del estudio de la variación dado que es la base de las nociones más importantes del cálculo. Les describió la forma de trabajo comentando que se espera que, de esta manera, ellos construyan los conceptos.

Comenzó a repartir las hojas de actividades. Los alumnos aprovecharon esto para dispersarse y charlar. Se agruparon sin inconvenientes. Ya están familiarizados con la forma de trabajo. Si bien la intención era organizar los mismos grupos que habían conformado para responder el cuestionario, esto no fue posible porque no todos los alumnos presentes en esta clase coincidían con la anterior.

Cuando todos tuvieron las fotocopias se hizo silencio. A los 12 minutos de iniciada la clase comenzaron a resolver las actividades. Se observó un gran interés de parte de los alumnos. Se los notó dispuestos al trabajo y en cada grupo se notó la participación activa de los dos integrantes. Luego de 70 minutos y ya que la mayoría había finalizado con todas las actividades, la docente solicitó que entreguen una de las resoluciones.

Resultados del primer bloque de actividades

Recordemos que en esta sesión se trabajan las razones de cambio. La resolución de las distintas actividades requiere calcular cambios relativos como la velocidad media. Se llega a analizar la noción de velocidad instantánea y se plantea la necesidad de encontrar cómo calcularla en el caso de un movimiento no uniforme. Se desarrolla la idea de que el cálculo de la velocidad promedio cuando la amplitud del intervalo tiende a cero es una aproximación de la velocidad instantánea.

Actividad 1 (p. 109)

En esta actividad, los alumnos deben interpretar la gráfica espacio–tiempo para obtener datos sobre el movimiento del auto. A partir de éstos tienen que calcular las velocidades medias para distintos intervalos de tiempo. Con la última pregunta se plantea por primera vez la necesidad de calcular la velocidad instantánea. Esperamos que puedan descubrir, ya que se trata de un movimiento con tramos de velocidad constante, que la velocidad en el instante coincide con la velocidad promedio en el intervalo que lo contiene.

Como pensábamos, muchos alumnos tuvieron dificultades con el significado del término velocidad media. Algunos expresaron que la velocidad media es la media aritmética de las velocidades, por eso preguntaron qué velocidades tomar para calcularla, sin saber tampoco cómo medir esas velocidades. Como la duda se planteó en la mayoría de los equipos, la profesora aclaró el término, haciendo preguntas a toda la clase. Los alumnos respondieron y lograron descubrir el significado. Sin embargo, al continuar resolviendo las actividades, varios equipos volvieron a tener inconvenientes en los ítems siguientes y quisieron calcular reiteradas veces el promedio de velocidades.

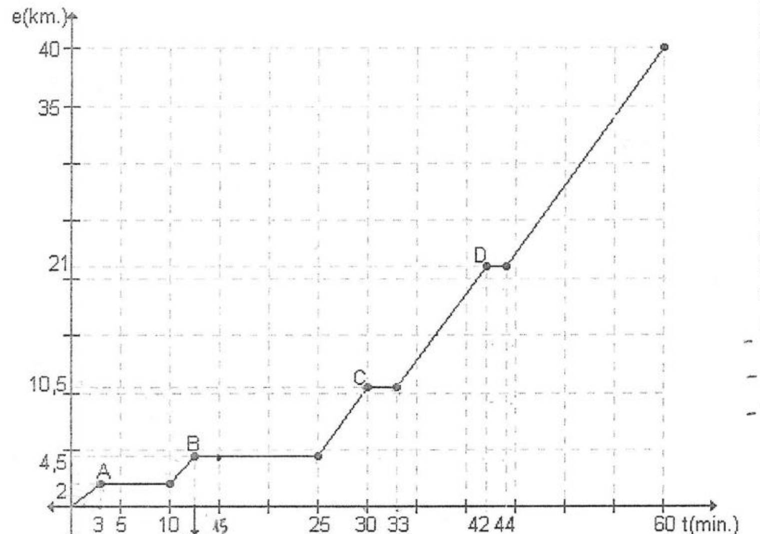
También presentaron problemas para interpretar la pregunta: ¿Y si no se tienen en cuenta los intervalos de tiempo en los que el auto estuvo parado? Se los guió intentando que comprendan la consigna y la resuelvan.

En relación a la determinación de la velocidad al minuto de haber salido, tuvieron inconvenientes para interpretar que lo que se pedía no es lo mismo que en los ítems anteriores. Esto nos permitió darnos cuenta de que tampoco entendían el significado de la velocidad instantánea. Los docentes los ayudaron para que logren comprender qué significa y cómo se diferencia de la velocidad media. No se les brindó ayuda sobre cómo calcularla sino que se esperó a que lo descubran por su cuenta.

Con respecto al análisis de las respuestas escritas, casi todos los equipos determinaron los valores solicitados en los distintos ítems con una unidad adecuada, kilómetros por minuto o kilómetros por hora. Tres equipos escribieron unidades incorrectas (kilómetros).

Todos los equipos respondieron correctamente el inciso a), enunciando directamente la respuesta, como observamos en el trabajo que sigue:

Actividad 1. En el gráfico se observa la representación del espacio recorrido por un auto en función del tiempo en su trayecto desde Esperanza a Santa Fe.



Referencias:
A: Entrada a estación de servicio
B: Parada en el arco de la Colonización
C: Peaje
D: Cruce de rutas

a) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el coche? ¿Cuánto tiempo duró el viaje? ¿Cuál fue la velocidad media del auto a lo largo de todo su recorrido?

- Dist. total: 40km
- tiep. total: 60m
- velocidad media: 40 km/hora

Para determinar las velocidades medias en los incisos b) a d) recurrieron a procedimientos distintos. Aproximadamente el 50% utilizó la fórmula de velocidad media igual a espacio sobre tiempo (algunos escribieron las restas que les permitieron calcular el espacio recorrido y el tiempo transcurrido). La otra mitad de los equipos determinó el espacio recorrido y el tiempo empleado y luego, utilizando regla de tres, calculó el espacio recorrido en una unidad de tiempo para hallar la velocidad media.

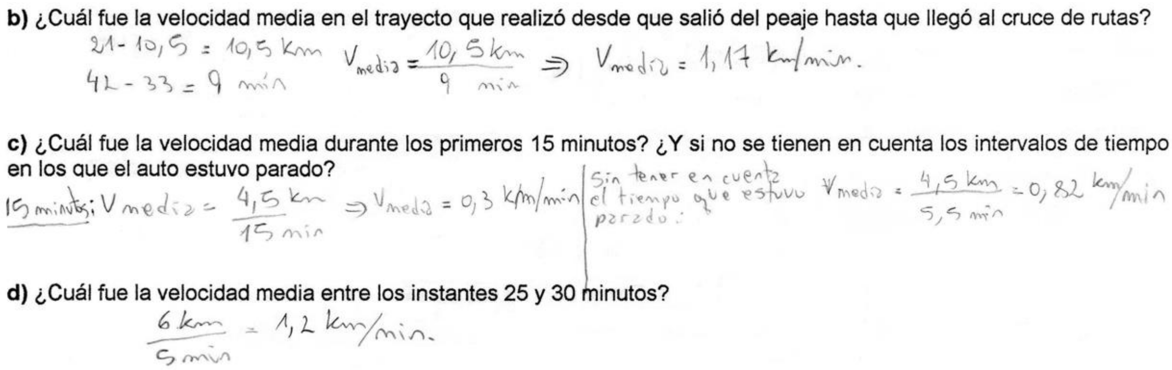
En el inciso b), la mayoría calculó los cambios de cada variable y realizó el cociente entre ellos. Diez equipos (43,5%) cometieron errores. De ellos, en ocho trabajos las dificultades estuvieron relacionadas con la determinación del valor inicial y final del intervalo de tiempo. Consideraron el instante que el auto entró al peaje como valor inicial y el instante que llegó al cruce de rutas como valor final, o bien el instante en que llegó al peaje y el otro en que salió del cruce de rutas, respectivamente.

En el inciso c) detectamos menos dificultades, pero debemos tener en cuenta que se les había explicado la consigna. Prácticamente el 70% (16 equipos) calculó correctamente ambas velocidades. Los demás cometieron errores diversos.

El inciso d) fue respondido bien por todos los equipos excepto uno.

En estos dos últimos incisos algunos equipos escribieron las diferencias que les permitieron calcular los cambios y luego calcularon el cociente. Otros directamente hicieron lo último.

A continuación mostramos el desarrollo de los incisos b), c) y d) de un equipo.


b) ¿Cuál fue la velocidad media en el trayecto que realizó desde que salió del peaje hasta que llegó al cruce de rutas?

$21 - 10{,}5 = 10{,}5$ km $\quad V_{media} = \dfrac{10{,}5 \text{ km}}{9 \text{ min}} \Rightarrow V_{media} = 1{,}17$ km/min.

$42 - 33 = 9$ min

c) ¿Cuál fue la velocidad media durante los primeros 15 minutos? ¿Y si no se tienen en cuenta los intervalos de tiempo en los que el auto estuvo parado?

15 minutos: $V_{media} = \dfrac{4{,}5 \text{ km}}{15 \text{ min}} \Rightarrow V_{media} = 0{,}3$ km/min

Sin tener en cuenta el tiempo que estuvo parado: $V_{media} = \dfrac{4{,}5 \text{ km}}{5{,}5 \text{ min}} = 0{,}82$ km/min

d) ¿Cuál fue la velocidad media entre los instantes 25 y 30 minutos?

$\dfrac{6 \text{ km}}{5 \text{ min}} = 1{,}2$ km/min.

Con respecto a la determinación de la velocidad instantánea pedida en el inciso e) solamente dos de los 23 equipos no respondieron y uno lo hizo incorrectamente.

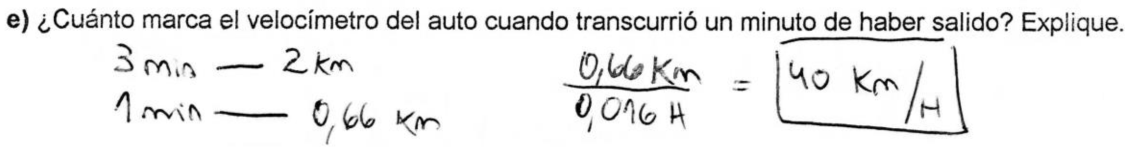
Los otros 20 equipos (prácticamente el 87%) respondieron correctamente que la velocidad al minuto de haber salido es $\frac{2}{3}\frac{\text{km}}{\text{min}}$ o $40\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

En las hojas de trabajo observamos que siete equipos escribieron directamente la respuesta (sin realizar ningún procedimiento). Uno de ellos explicó: *“Debido a que en el tramo desde que parte hasta el punto, la velocidad es constante, esto nos permitió calcular la velocidad”*. Otro escribió: *“Como la velocidad fue constante al minuto el velocímetro del auto marca 40”.* Los demás no justificaron su respuesta.

Los 13 equipos restantes plantearon regla de tres (si en tres minutos recorrió dos kilómetros, en un minuto recorrió x kilómetros). Al observar en clase el procedimiento que realizaban y que muchos no explicaban su respuesta, se les insistió que justificaran. Sólo algunos pudieron expresar por qué realizaron ese procedimiento y lo escribieron en la hoja. Otros no supieron por qué consideraban una relación de proporcionalidad, sino que más bien se observó una tendencia a aplicar un mecanismo sin sentido para ellos. Finalmente presentaron explicaciones en su hoja cinco equipos:

- *Los primeros tres minutos el auto tuvo una velocidad constante* (3 equipos).
- *En ese intervalo la gráfica es directamente proporcional.*
- *f(x) en el intervalo [0, 3] es constante proporcional directa.*

Se observa que los alumnos identificaron la representación gráfica con una situación de movimiento con tramos de velocidad constante. Sin embargo, un gran porcentaje de equipos no reconoció que la velocidad instantánea debe coincidir con el valor calculado en el inciso a), sino que apelaron a hacer un procedimiento para determinarla, relacionado con la proporcionalidad directa, determinando el espacio recorrido en la unidad de tiempo. Vemos como ejemplo el siguiente trabajo.



e) ¿Cuánto marca el velocímetro del auto cuando transcurrió un minuto de haber salido? Explique.

3 min — 2 km
1 min — 0,66 km

$\frac{0{,}66\ \text{Km}}{0{,}016\ \text{H}} = \boxed{40\ \text{Km/H}}$

Pensamos que las dificultades presentadas se debieron a no tener claro el significado de la velocidad media y, mucho menos, el de velocidad instantánea. Además se concluye que, para justificar, les resulta más sencillo mostrar utilizando alguna estrategia de cálculo. Se decidió hacer referencia a esta situación en la instancia de debate de las actividades e institucionalización.

Con respecto a los registros, esta actividad exige obtener los datos desde el registro gráfico y trabajarlos numéricamente. Los alumnos no presentaron dificultades, excepto en el inciso b). En este apartado es el único en el que no se dan explícitamente los valores de la variable independiente sino que los alumnos debían obtenerlos a partir de la interpretación de los puntos correspondientes a las distintas referencias.

En el inciso e) algunos alumnos recurrieron a la representación gráfica para tratar de explicar, pero no fueron más allá de lo que observaron directamente. No fueron capaces de relacionar con lo aprendido en matemática y física para sacar conclusiones.

Consideramos que la actividad resultó útil para explorar las concepciones de nuestros alumnos sobre el movimiento. La resolución de los distintos incisos, especialmente el b) y d) los llevó a comenzar a manejar la fórmula $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ para la velocidad media.

Nuestra conjetura sobre que iban a determinar el valor de la velocidad instantánea a partir del reconocimiento de que la velocidad se mantiene constante en todo el intervalo, se cumplió parcialmente. Si bien la mayoría determinó su valor, las dificultades que presentaron para justificar y los procedimientos que realizaron demuestran que no llegaron a las conclusiones que esperábamos.

Actividad 2 (p. 110)

Con esta actividad se persiguen objetivos similares a la anterior, calcular velocidades medias y descubrir que, dado que el movimiento es rectilíneo uniforme, la velocidad en determinado instante coincide con la velocidad media en cualquier intervalo.

En este caso se presenta la función definida algebraicamente y se pide tabular los cambios de la variable independiente y la dependiente, calculando luego los cocientes que permiten determinar las velocidades medias. Se indaga sobre el significado físico de estos cocientes para averiguar si relacionan con lo realizado en la actividad anterior.

Se les pregunta sobre la interpretación geométrica del cociente para que comiencen a relacionar la razón de cambio media con la pendiente, en este caso de la recta que representa el espacio recorrido en función del tiempo. Deben realizar la representación gráfica de la función e interpretar en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$ para uno de los intervalos. La pregunta sobre el movimiento, además de indagar sobre sus concepciones acerca de contenidos de física, apunta a orientarlos sobre la velocidad a los dos segundos de iniciado el movimiento.

En la observación del trabajo en clase se notó confusión al leer la tabla. Con respecto a los valores de las columnas correspondientes a Δt y Δs, los alumnos sabían que se refería a variación pero confundían las variables. Se los orientó para que puedan completar la actividad.

En las resoluciones escritas observamos que manejaron adecuadamente el cálculo de valores numéricos de una función definida algebraicamente. Un solo equipo completó mal la columna correspondiente a Δs, presentando problemas con la operatoria (errores de signo al suprimir los paréntesis).

Con respecto a la pregunta sobre qué concepto físico representan los valores $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, cinco equipos (casi el 22%) respondieron que representa la velocidad media (ninguno aclaró “en ese intervalo”). Once equipos (48% aproximadamente) respondieron simplemente velocidad. Esto muestra, como ya se analizó en la actividad anterior, que no consideraron o no distinguieron distintos tipos de velocidad.

Un equipo escribió: *“Que la velocidad es constante”,* por lo que relaciona la razón con una velocidad, además de enunciar su comportamiento.

Otras respuestas fueron: *“En cada cambio de un segundo el auto aumenta tres metros”, “Variación de posición a un determinado tiempo”, “El auto se mueve tres metros por cada segundo transcurrido.* Estas explicaciones nos muestran que manejan de alguna manera el significado variacional de Δs y Δt y la relación determinada por la razón entre ambos.

Finalmente un equipo escribió: *“Que son siempre iguales y por lo tanto son constantes y que a su vez representan segundos”.* Dos equipos no respondieron.

En relación a la unidad en que se expresa esta velocidad todos escribieron la correcta ($\frac{m}{seg}$). Uno dio una unidad incorrecta $\left(\frac{segundos}{metros}\right)$ y tres no la escribieron.

Presentamos el trabajo de un equipo en esta primera parte de la actividad.

Actividad 2. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $\boxed{s(t) = 3t + 1}$ metros. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$ calculadas para uno de los intervalos.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	1 - 0 = 1	4 - 1 = 3	3.
$1 \le t \le 2$	2 - 1 = 1	7 - 4 = 3	3
$2 \le t \le 3$	3 - 2 = 1	10 - 7 = 3	3
$3 \le t \le 4$	4 - 3 = 1	13 - 10 = 3	3

Representa el cambio de tiempo (seg)

Representa el cambio de posición del móvil (m)

¿Qué concepto físico representan los valores de la última columna de la tabla? Determine las unidades en los que se expresan.

Representa velocidad media de un móvil, en m/seg

A pesar de lo sencillo de la función, cinco equipos (aproximadamente el 22%) graficaron mal, dibujando la recta con la pendiente correcta pero con ordenada al origen cero.

Del total de los equipos, prácticamente el 83% no interpretó gráficamente las medidas Δt y Δs determinadas numéricamente. Nos llamó la atención ya que en la primera columna de la tabla estaban dados los extremos de los intervalos para la variable independiente y la mayoría escribió los extremos de los intervalos determinados para la variable dependiente. Se observa una desarticulación entre el registro numérico y el gráfico.

La siguiente pregunta, que requiere la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, generó bastantes dificultades. Los alumnos no entendían a qué se refería, a pesar de recomendarles que realicen antes la gráfica y marquen en ella los cambios Δt y Δs para un intervalo, de manera de orientarse. Las profesoras de la clase intentaron guiarlos, explicándoles que debían determinar cuál es el significado de esa cantidad en el gráfico. Incluso, ante la persistencia de la duda, se les mostró en la tabla y se les preguntó qué significa ese tres en la gráfica. Asimismo no entendían.

Al revisar los trabajos de los alumnos, encontramos que sólo cinco equipos relacionaron la razón entre los cambios con la pendiente de la recta. Uno de ellos escribió que dicha cantidad es *"la pendiente de la recta"* y otro que es *"la pendiente de la función"*. Dos equipos escribieron *"la pendiente"* y el último que *"la pendiente es igual a tres"*.

Dos equipos escribieron solamente *"es constante".* Cuatro equipos (algo más del 17%) expresaron que la interpretación geométrica es una recta. Dos equipos se refirieron a la relación entre Δt y Δs y escribieron que hay proporcionalidad directa. Otros dos dedujeron que la interpretación geométrica es una recta paralela al eje de abscisas, ya que *"$y = 3$, constante"*. Las otras respuestas fueron diversas. Dos equipos no respondieron.

Estas dificultades confirman lo estudiado en el análisis didáctico y cognitivo. El tratamiento que se le suele dar a la función de primer grado en los distintos niveles de enseñanza no es el adecuado para que los alumnos alcancen una verdadera comprensión. Los alumnos manejan algunas nociones relacionadas con la pendiente. La identifican como el coeficiente del término lineal de la expresión algebraica de la función y la asocian con la inclinación de la recta. Pero no son capaces de relacionar el tratamiento numérico realizado en la tabla con el registro gráfico.

A la pregunta: ¿qué puede decir sobre el movimiento en todo su trayecto?, cinco equipos (22%) respondieron correctamente, expresando que el movimiento es rectilíneo uniforme.

Catorce equipos, algo más del 60%, escribieron que el movimiento es constante. Esta respuesta muestra que relacionaron el tipo de movimiento según la velocidad pero no lo lograron expresar correctamente. A pesar de esto, el hecho de que observaran que los cambios son constantes, resulta muy importante desde nuestro enfoque variacional. Los movimientos están determinados por los cambios y el comportamiento de los cambios es el aspecto esencial de la variación.

Tres respuestas hicieron alusión a la proporcionalidad (*"aumentó en forma proporcional a una medida de tres metros por segundo", "fue proporcional"* y *"la posición es directamente proporcional al tiempo"*).

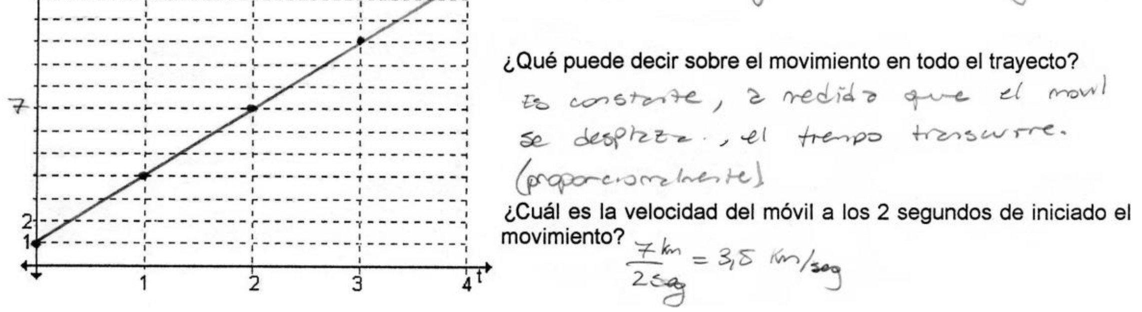
La última respuesta se refirió a la posición: *"aumenta a medida que aumenta el tiempo".*

Finalmente debían contestar cuál es la velocidad del móvil a los dos segundos de iniciado el movimiento. Casi el 61% (14 equipos) dio como respuesta el valor correspondiente (dos de ellos tuvieron problemas con las unidades).

En este caso no se les pedía procedimiento o explicación, ya que había sido solicitado en la actividad uno y de manera que no se extienda demasiado la resolución. Debido a esto la mayoría escribió únicamente la respuesta. Sin embargo, tres equipos escribieron $v(2) = \frac{6}{2} = 3\frac{m}{seg}$, un equipo anotó $v(2) = \frac{7-1}{2-0}$ y otro aplicó regla de tres directa.

Por estas respuestas y las dudas de los alumnos en el desarrollo de la clase, consideramos que razonaron de la misma manera que en la primera actividad.

En relación a las respuestas incorrectas, cinco equipos (casi el 22%) respondieron $v(2) = \frac{7}{2} = 3{,}5\frac{m}{seg}$ y uno más dio la misma respuesta pero con la unidad equivocada $\left(\frac{km}{seg}\right)$. En lugar de considerar el espacio recorrido tomaron la posición final del móvil.



Otros dos equipos escribieron que la velocidad en ese instante es 7, valor que coincide con la posición final del móvil. La última respuesta fue 0,33m/2seg.

Con respecto a nuestra conjetura sobre que no iban a presentar grandes dificultades en la resolución de los diversos ítems, consideramos que, salvo para el completado de la tabla, no se cumplió. Nociones como la de velocidad media y velocidad instantánea que creímos que manejarían de su vida cotidiana, no fue así, y dio mucho trabajo a los docentes poder explicarlas. Tampoco demostraron conocer en profundidad contenidos de física que supuestamente trabajaron en la escuela secundaria.

Actividad 3 (p. 111)

Esta actividad es similar a la anterior pero con una función posición-tiempo que corresponde a un movimiento variado. Se agrega la dificultad de cambios de posición negativos y de no poder calcular la velocidad en el instante de la misma manera que en los casos anteriores debido a que la velocidad no es constante.

Durante el trabajo en el aula apareció nuevamente la duda sobre la diferencia entre velocidad media y velocidad instantánea. Se guió a los alumnos a través de preguntas relacionadas con cosas cotidianas de manera de ayudarlos a comprender. Sin embargo, no se imaginaban cómo calcular el valor de la velocidad en $t = 3$.

De la revisión de los trabajos escritos observamos que las dificultades no se relacionaron en general con el trabajo en un registro u otro, sino con la interpretación de las distintas cuestiones planteadas.

Al completar la tabla, un solo equipo tuvo una pequeña dificultad escribiendo en el último renglón $\Delta s = -2 - 8 = -10$ y arrastrando el error para la velocidad media en ese intervalo. En cuanto a la gráfica, sólo un equipo no la realizó y otro la hizo incorrectamente (no marcó las ordenadas que correspondían y luego unió los puntos con trazos rectos).

En relación a los valores correspondientes a las velocidades medias, se pudo observar en clase que los alumnos se preguntaban “cómo podían dar velocidades negativas”. Algunos lo consultaron con los docentes, quienes les pidieron que revisen las tablas y traten de deducir por qué sucedía esto. Varios lograron descubrir que se relaciona con el hecho de que la piedra está cayendo.

La pregunta relativa al comportamiento de la velocidad en todo el trayecto dio lugar a que surjan cuestiones interesantes. La misma fue pensada para resaltar el hecho de que los cambios no son constantes y, por lo tanto, las razones entre los cambios tampoco. Ocho equipos (aproximadamente el 35%) dieron como respuesta que la velocidad no es constante o varía en todo el trayecto.

Cinco equipos (casi el 22%) mostraron comprensión del comportamiento variacional de la situación pero confundieron los conceptos de rapidez y velocidad. Tres de ellos expresaron que la velocidad disminuye hasta los dos segundos, momento en el que se anula y comienza a aumentar. Un equipo señaló que la velocidad para ascender es la misma que al descender y otro que la velocidad varía, en el primer y cuarto segundo es igual y en el segundo y tercero también. Se observa que no distinguieron entre velocidades positivas y negativas, no diferenciaron entre el valor absoluto y el signo.

Dos equipos escribieron que la velocidad disminuye. Esta conclusión es la que se extrae de la lectura de los valores de la última columna de la tabla. No hicieron ninguna interpretación del significado de esos números en la situación.

Varios equipos confundieron posición y velocidad. Cuatro (algo más del 17%) escribieron que desde que se lanza hasta los dos segundos la velocidad aumenta y luego comienza a disminuir. Otros dos expresaron que la piedra sube y luego empieza a caer.

Un equipo determinó que la velocidad es cuatro metros por segundos (parece haber obtenido el promedio de las velocidades medias). Finalmente, un equipo no respondió.

Como conclusión de esta pregunta, por las respuestas escritas y especialmente por lo observado en clase, podemos decir que en general los alumnos no interpretaron la situación planteada en la actividad y no utilizaron como recurso pensarla en un contexto real. Es decir, no imaginaron la piedra lanzada hacia arriba y cayendo.

Para el valor de la velocidad de la piedra a los tres segundos, notamos en primer lugar que ningún grupo dio como respuesta un valor negativo, a pesar de que muchos habían discutido anteriormente el significado del signo de la velocidad.

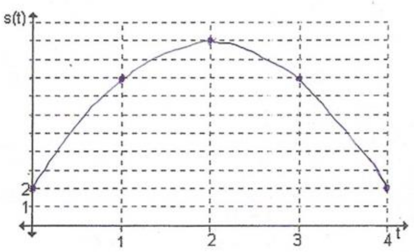
Un solo grupo demostró haber comprendido la situación, aunque siguió apareciendo la necesidad del cálculo de la velocidad promedio. Escribió: *"la velocidad a los tres segundos no la podemos calcular por regla de tres porque no es constante"*.

Tres grupos no respondieron y los demás dieron algún valor para la velocidad, recurriendo casi todos a la fórmula espacio sobre tiempo. Las respuestas fueron:

- "$v(3) = 2\,\dfrac{m}{seg}$". De los 12 equipos (más del 50%) que dieron este valor, cuatro escribieron directamente la respuesta. Un equipo escribió la fórmula $\dfrac{\Delta e}{\Delta t}$ y señaló en el gráfico las variaciones correspondientes, mostrando que consideró el intervalo [2, 3] para aproximar la velocidad. Los otros siete escribieron $v(3) = \dfrac{6}{3}$ o bien $v(3) = \dfrac{8-2}{3-0}$, dividiendo el espacio recorrido desde que se tiró la piedra hasta los tres segundos (aunque en realidad tomaron el desplazamiento) por los tres segundos transcurridos.

Actividad 3. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla y realice la representación gráfica.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	$\Delta s = 8 - 2 = 6$	$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{6}{1} = 6$
$1 \le t \le 2$	$\Delta s = 10 - 8 = 2$	$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{2}{1} = 2$
$2 \le t \le 3$	$\Delta s = 8 - 10 = -2$	$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{-2}{1} = -2$
$3 \le t \le 4$	$\Delta s = 2 - 8 = -6$	$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{-6}{1} = -6$



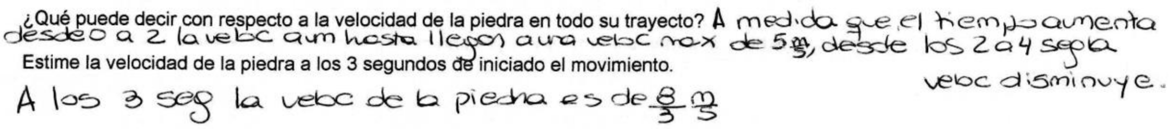
¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto?

La velocidad varia en todo su trayecto. La velocidad es igual durante el 1er segundo y el 4to segundo. Y es igual en el 2do y 3er segundo.

Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

$\dfrac{8-2}{3-0} = \dfrac{6}{3} = 2\,\dfrac{m}{seg}$

- *"$v(3) = \frac{8}{3} = 2,67 \frac{m}{seg}$".* En esta respuesta, dada por cinco equipos (casi el 22%), los alumnos dividieron el valor que corresponde a la posición en t = 3 por tres. De la observación en clase podemos decir que este tres corresponde al tiempo transcurrido.


¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto? A medida que el tiempo aumenta desde 0 a 2 la veloc aum hasta llegar a una veloc max de 5 $\frac{m}{s}$, desde los 2 a 4 seg la veloc disminuye.
Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.
A los 3 seg la veloc de la piedra es de $\frac{8}{3} \frac{m}{s}$

- *"$v(3) = \frac{10}{3} = 3,\widehat{3} \frac{m}{seg}$".* El equipo que dio esta respuesta dividió el espacio total recorrido por el tiempo transcurrido hasta el instante.

- *"$v(3) = 8 \frac{m}{seg}$".* En este caso, el equipo dividió el valor correspondiente a la posición en ese instante por uno, creemos que para considerar la velocidad en el instante.

Consideramos que esta actividad cumplió en gran medida con los objetivos planteados. En primer lugar los alumnos siguieron trabajando con velocidades medias, lo que les ayudó a afianzar esta noción. Permitió también insistir en la diferenciación entre velocidad media e instantánea.

Por lo observado posteriormente, en las instancias de debate grupal y de institucionalización, el trabajo con las actividades dos y tres, los llevó a distinguir en qué casos las velocidades medias se mantienen constantes en todos los intervalos y en cuáles varían.

En general, recién en el momento de la institucionalización pudieron reconocer que no es posible calcular la velocidad en un instante para algunas funciones con los métodos utilizados hasta el momento. En este sentido no se cumplieron nuestras conjeturas.

Actividad 4 (p. 112)

En esta actividad se presenta una función espacio-tiempo definida numéricamente. Las nociones involucradas son nuevamente la de velocidad media y velocidad instantánea. Teniendo en cuenta la imposibilidad de conocer la velocidad en un instante a partir de la media dado que el movimiento no es uniforme, en el primer inciso se plantea su cálculo utilizando la fórmula de velocidad media. Dado que se llega a una indeterminación, se muestra que no es posible seguir este camino. Sin embargo se pueden calcular las razones de cambio medias en intervalos cada vez más pequeños de manera de caracterizar más exactamente la razón de cambio en fenómenos donde no es constante.

Diez equipos no respondieron esta actividad (43,5%). Por lo observado en clase, consideramos que su resolución planteó más problemas que las anteriores. Pero además los alumnos ya estaban cansados y, ante la dificultad, desistieron en tratar de comprenderla y resolverla. Muy pocos no tuvieron tiempo para desarrollarla.

Con respecto al inciso a), en el trabajo en el aula se observó que los alumnos pensaban que la consigna estaba mal escrita al considerar $t_1 = 2$ y $t_2 = 2$.

Cuatro equipos reemplazaron los valores en el desarrollo de la fórmula $\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{12-12}{2-2} = \frac{0}{0}$ y escribieron alguna conclusión que consideramos correcta aunque no sea exacta (*no se puede calcular*, *no existe*, *es error*). Un equipo más realizó el mismo desarrollo pero no escribió su significado. Otros tres concluyeron también que no se puede hacer, explicando que se presenta una división por cero (no prestaron atención al numerador). Dos equipos más llegaron a las mismas conclusiones (cero sobre cero o división por cero y por lo tanto no se puede calcular) pero cometieron errores en el planteo.

Uno respondió que no se puede calcular la velocidad de la partícula en ese instante pero no hizo nada. Otro grupo escribió que el resultado es cero explicando que ese resultado se da ya que hace coincidir el instante inicial y final del intervalo. Finalmente, un equipo no respondió este inciso.

Con respecto al inciso b), se presentaron algunas dificultades en la comprensión del enunciado, especialmente para la construcción de los intervalos, pero menores. Dos equipos no respondieron este inciso.

Pudieron completar correctamente la tabla seis equipos (26%). Otro equipo calculó todos los valores correctamente excepto la última velocidad media. Tres equipos completaron bien la fila con los espacios recorridos, pero no calcularon o calcularon sólo algunas velocidades medias. Un equipo tuvo errores en el cálculo de los espacios y no determinó las velocidades medias.

En relación a la pregunta sobre cuál es la mejor aproximación de la velocidad a los dos segundos, algunos mostraron seguir sin comprender la diferencia sobre velocidad media e instantánea. Las profesoras guiaron a distintos equipos para que logren diferenciarlas y a la vez relacionarlas. No se dio ayuda sobre la pregunta en sí. Varios alumnos dijeron luego de completar las tablas *"esto tiene una idea de límite"*.

Siete equipos (30% del total aproximadamente) respondieron que la mejor aproximación es 3,7 explicando todos, excepto uno que no justificó, que es esa porque es la calculada en el intervalo más corto de tiempo. Los otros cuatro equipos (17%) no respondieron.

a) El investigador intentó determinar la velocidad exacta de la partícula en t = 2 segundos mediante la fórmula $\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_2)-e(t_1)}{t_2-t_1}$ haciendo coincidir el instante inicial y el final del intervalo, es decir considerando $t_1 = 2$ y $t_2 = 2$. ¿Qué puede observar si realiza este procedimiento?

$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{0}{0}$ ⇒ No Existe.

b) Complete la tabla con los espacios recorridos y las velocidades medias de la partícula en el intervalo [2, t] teniendo en cuenta que los valores de t son los que aparecen en la primera fila de la tabla anterior.

Intervalo [2,t]	[2;2,1]	[2;2,2]	[2,2,3]	[2,2,4]	[2;2,5]	[2;3]	[2;4]
Espacio recorrido en el intervalo [2,t]	0,37	0,68	0,93	1,13	1,28	1,5	4
Velocidad media en el intervalo [2,t]	3,7	3,4	3,1	2,825	2,56	1,5	2

Según los cálculos realizados, ¿cuál de los valores para la velocidad media es una mejor aproximación de la velocidad en el instante t = 2 segundos? Explique.

El valor de velocidad media que es una mejor Aproximación a la velocidad en el instante t=2 es 3,7 ([2;2,1]) YA QUE ES MENOS VARIACIÓN DE TIEMPO TIENE.

En general, consideramos que la actividad cumplió con su objetivo. Se presentaron muchas dificultades pero las ideas que se buscaban generar surgieron en varios equipos: en los fenómenos que cambian a cada instante, dada la ley del movimiento, sólo podemos calcular la velocidad en determinado intervalo, pero ese resultado no alcanza para determinar el comportamiento preciso de los cambios. Los alumnos reflexionaron sobre el hecho de que la velocidad instantánea no es lo misma que la media y por lo tanto no se puede calcular de la misma manera. El planteo en el registro numérico facilitó el cálculo de los espacios recorridos y las velocidades medias. Se sorprendieron ante la forma de cálculo planteada, haciendo coincidir instante inicial con final. A ellos no se les hubiese ocurrido. Con respecto a la interpretación de la tabla, dada la imposibilidad de usar la estrategia anterior, les pareció natural asignar variaciones de tiempo de manera de acercarse a $t = 2$. También los orientó la misma redacción de la pregunta final que indaga sobre la mejor aproximación.

Si bien muchos alumnos no respondieron esta actividad, las ideas formadas en el resto de los equipos dieron lugar al debate grupal posterior.

Análisis de las instancias de debate grupal e institucionalización

La docente pidió atención a los alumnos para comenzar con la puesta en común de los resultados. El ambiente de la clase era disperso. Los alumnos charlaban y se notaban cansados. Luego de unos minutos hicieron silencio.

Considerando el tiempo que restaba para la finalización de la clase, la docente decidió en ese momento, no desarrollar completas todas las actividades sino tomar algunos ítems. Comenzó a revisar las actividades, haciendo preguntas a los alumnos. Al mismo tiempo, repasó las distintas nociones involucradas y formalizó los nuevos conceptos, de acuerdo al plan previsto (ver análisis a priori, momento 4, sesión 1, p. 113). Pocos alumnos respondían a los distintos interrogantes a pesar de estar atentos. Demostraban darse cuenta de sus errores y de los procedimientos explicados por sus gestos. Esto llevó a que la docente trabaje bastante sola en el pizarrón.

Para comenzar, preguntó sobre la primera parte del inciso c) de la actividad 1). Los alumnos dieron el valor correcto. Les consultó entonces qué significa esa velocidad media. Como se quedaban callados, preguntó si ese valor refleja la velocidad real del auto durante todo ese trayecto y qué sucede al no tener en cuenta los intervalos de tiempo. Los alumnos dudaban y casi no respondían. La docente aclaró mucho.

Indagó luego sobre la velocidad pedida en el inciso e). Al interrogarlos sobre cómo la calcularon, contestaron que, dado que hay proporcionalidad, usaron regla de tres. La docente mostró que una vez que tuvieron determinada la velocidad media en el intervalo correspondiente a los tres primeros minutos no era necesario hacer otro cálculo. Dado que la velocidad es constante, la velocidad en el instante coincide con la media.

Retomando las actividades 2 y 3, hizo especial hincapié en que es necesario aclarar en qué intervalo de tiempo se está calculando la velocidad media. Con respecto a la interpretación gráfica de las distintas medidas, los alumnos no respondieron por lo que la docente lo explicó todo en el pizarrón.

En relación a la interpretación geométrica del cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ solicitada en la actividad 2, pocos contestaron que corresponde a la pendiente de la recta que es la representación gráfica de la función s(t). Si bien relacionó el valor de la velocidad media con la pendiente de la recta, la docente no mostró cómo la expresión simbólica de la tercera columna es la misma que permite calcular la pendiente, ya que ese aspecto se retomaría en la tercera sesión. Sí explicó que esa notación es una de las maneras de escribir simbólicamente el concepto de velocidad media y proporcionó otras notaciones. En este momento generalizó y presentó la definición de razón de cambio media.

Luego preguntó sobre el significado de las velocidades negativas. Algunos respondieron que disminuye la velocidad, otros que la velocidad crece y decrece, otros que el móvil desacelera, mostrando dificultades para la interpretación. Sólo después de repasar el significado de cada columna e ir relacionando con la gráfica del pizarrón, contestaron que significa que la piedra está bajando.

Presentó entonces la definición de rapidez media, explicando el significado y diferenciando con el de velocidad media.

Retomó las preguntas sobre la diferenciación entre velocidad media e instantánea y consultó si en la actividad 3 es posible calcular la velocidad instantánea de la misma forma que en las anteriores. Los alumnos respondieron que no. Indagó sobre los cálculos que habían hecho. Recurrió a escribir las distintas respuestas que había observado en el trabajo en las hojas. De esta manera algunos alumnos contaron sus procedimientos y parecieron darse cuenta por qué estaban equivocados (algunos lo manifestaron verbalmente). Preguntó también sobre el signo que debe tener esa velocidad y los alumnos respondieron correctamente.

Antes de pasar a la actividad siguiente, indagó en qué casos las velocidades medias se mantienen constantes en todos los intervalos y en cuáles varían, a lo que algunos alumnos respondieron correctamente.

Consultó sobre la intención de la actividad cuatro. Los alumnos razonaron bien y expresaron que se busca una aproximación de la velocidad a los dos segundos. Se revisaron los valores de la tabla y se respondió la última pregunta.

La docente explicó que a partir de ahí seguirían trabajando las clases siguientes. Les recomendó que traigan la hoja con las actividades y finalizó la clase.

Comentarios

En los resultados de esta primera parte de la secuencia se observó en general falta de dominio tanto de nociones matemáticas estudiadas en períodos anteriores como del contexto físico en el que están planteadas las actividades.

Encontramos en el desarrollo de las actividades muchas coincidencias con otras investigaciones en relación a las dificultades de nuestros alumnos. Consideramos que además de los problemas que surgieron en la interpretación de gráficas que provocaron errores directos, como por ejemplo en la actividad 1 para el cálculo de las velocidades medias, especialmente en el inciso b), las mismas dificultades para interpretar son las que los llevaron a no poder relacionar el valor obtenido en la tercera columna de la tabla con la pendiente de la recta representada gráficamente. Cantoral (2003a) reporta que se ha encontrado que los estudiantes de ingeniería, al igual que los de educación básica, siguen sin asumir la idea de pendiente de una recta como una entidad, como una totalidad que describe una propiedad de las rectas. Esta es una dificultad a tener en cuenta si se pretende que el objeto derivada se construya en relación al de pendiente.

Las concepciones de nuestros alumnos sobre aspectos de cinemática se revelaron bastante pobres. Coincidiendo con lo reportado en otros trabajos (presentados en la sección Antecedentes del Capítulo 1, apartado 1.4.4, p. 21) se detectaron demasiados problemas relativos a la lectura de gráficas cartesianas y a la interpretación de nociones como la de velocidad media y velocidad instantánea.

Apareció nuevamente la relación de cualquier recta a una situación de proporcionalidad directa. Esta concepción ya había surgido al momento de responder el cuestionario aplicado previamente a la aplicación de la secuencia y había sido trabajada posteriormente con los alumnos en el debate grupal. Esto nos muestra, como lo hemos analizado antes, la gran resistencia al cambio de las concepciones que los alumnos tienen formadas.

Consideramos que todas estas dificultades están íntimamente relacionadas a la enseñanza. Tal como era de esperar, según expresamos en el análisis didáctico, al margen de que tanto la matemática como la física se ocupan del estudio del movimiento, obviamente la enseñanza recibida no ha hecho hincapié en aspectos variacionales ni ha permitido que los alumnos puedan realizar una integración de lo estudiado en ambas áreas de manera que logren una mejor comprensión de las nociones involucradas.

Hemos podido comprobar también cómo nuestros alumnos prefieren el trabajo algorítmico ante el pensamiento visual. Se observó un alto grado de respuesta de todos aquellos incisos que requerían algún tipo de cálculo contrastando con las dificultades para interpretar y responder preguntas sobre representaciones gráficas. Usaron las gráficas para extraer información directa sobre valores de la variable independiente y dependiente. Pero en los casos que iban más allá de lectura de datos, recurrieron a otros procedimientos. Esto queda claro, por ejemplo, al no poder desprenderse de algún tipo de algoritmo para justificar el valor de la velocidad en un instante para el caso del movimiento con velocidad constante, sin ocurrírseles relacionarlo con la representación gráfica, o sea con el hecho de que por ser una recta su inclinación se mantiene constante. Obviamente, este tipo de interpretación de las gráficas requiere de su visualización y, como hemos planteado en el análisis cognitivo, numerosas investigaciones (como la de Eisenberg y Dreyfus, 1991) manifiestan dificultades en este sentido.

A pesar de todo esto, nos mostramos conformes y consideramos que las actividades cumplieron en general su objetivo de, a partir de nociones que ellos manejan o tareas que pueden realizar, comenzar a construir otras nuevas. Al terminar de resolver las distintas situaciones planteadas, los alumnos en general manifestaron conocer cómo calcular una velocidad media y lograron identificar cuándo y para qué tipo de funciones se mantiene constante o varía. Además, con la última actividad, todos llegaron por lo menos a descubrir que necesitan encontrar una manera de resolver un problema que, con las herramientas que disponen hasta el momento, no tiene solución.

Las actividades promovieron el estudio de diversos aspectos variacionales. No presentaron demasiadas dificultades para calcular los cambios y las razones entre cambios. Si bien les costó interpretar, las distintas situaciones los fueron llevando a comparar el comportamiento de funciones de acuerdo al comportamiento de los cambios de la variable dependiente, descubriendo que los cambios se comportan de manera diferente según la función que los describe. Analizaron situaciones donde los cambios se mantienen constantes, pudiendo relacionarlos con las funciones de primer grado. Se estudiaron otros casos donde los cambios de la variable dependiente cambian, siempre considerando cambios iguales para la variable independiente. Pensaron también en el signo de los cambios, pudiendo relacionarlos con la dirección de la trayectoria del cuerpo. Comenzaron a razonar cómo obtener una mejor aproximación para la velocidad instantánea, observando qué ocurre cuando se consideran cambios cada vez más pequeños para la variable independiente.

Los alumnos intervinieron poco en el debate grupal. Esto puede deberse a que no están acostumbrados a esta forma de trabajo. Además, como dijimos anteriormente, ya se los notaba cansados. Conversando luego con ellos, algunos comentaron que prefieren que el docente desarrolle la clase y explique todo en el pizarrón.

5.4.2 Análisis de la segunda sesión de trabajo

Según lo planificado, la docente retomó lo trabajado en la clase anterior. Ante sus preguntas, sólo algunos alumnos respondieron. A medida que repasó los conceptos, consultó si tenían dudas y muy pocos contestaron que no. El resto sólo observaba.

Presentó la actividad preparada con el objetivo de revisar la noción de razón de cambio media y trabajar el aspecto algebraico, que fue el menos desarrollado la clase anterior (ver p. 116). Los alumnos la copiaron y comenzaron a resolverla. Mientras tanto la docente a cargo de la clase y la observadora caminaron entre los bancos para observar el trabajo de los alumnos.

Como se esperaba, resolvieron sin dificultades el primer inciso y tuvieron problemas para el segundo. Plantearon correctamente pero manifestaron dificultades algebraicas. Con respecto a las interpretaciones de cada cociente, algunos alumnos respondieron que es la razón de cambio media, lo cual nos muestra que con el desarrollo de la sesión anterior habían logrado identificar el cociente entre cambios con este concepto. Se observó que no colocaban las unidades y no daban su significado en la situación planteada, lo cual era esperable, al tratarse de una situación diferente a las planteadas en la clase anterior.

Cuando la gran mayoría terminó, la docente comenzó con la puesta en común de la solución. A través de preguntas orientadoras, los alumnos determinaron las unidades de las razones calculadas e interpretaron sus significados.

Luego de veinte minutos de comenzada la clase la docente inició el desarrollo específico de esta sesión, explicando cuál sería la forma de trabajo.

Presentó la actividad donde se solicita el trazado de la recta tangente a varias curvas en determinados puntos (ver p. 117). Los alumnos comentaban entre sí mirando las gráficas expuestas. Dibujaron las curvas en su carpeta e intentaron trazar las rectas solicitadas.

En el primer gráfico (la circunferencia) todos trazaron la recta correctamente. Para el segundo gráfico, se escucharon respuestas como *"sólo se puede trazar en Q"*, *"si la recta es cortita se puede en P"*. Para el tercer caso tendieron a dibujar la recta horizontal que pasa por P. Para el último, se refirieron a la posibilidad de trazar la recta en el punto Q pero no en P.

Con estas observaciones, confirmamos los resultados de otras investigaciones como por ejemplo las de Testa (2004) y Serna (2007). Los alumnos manejan solamente la noción de tangente como la recta que toca a la curva en un punto y no vuelve a tocarla nuevamente (Ver Capítulo 1, apartado 1.4.4, p. 21).

Luego de unos minutos, habiendo observado que la mayoría había discutido todos los casos, la docente les solicitó atención y les pidió que dibujen las distintas curvas con sus respectivas rectas en el pizarrón. Algunos alumnos accedieron. A medida que realizaban los dibujos, otros comentaban desde sus bancos qué opinaban o cómo los hicieron ellos. Algunos se referían a la inclinación de la recta y otros nuevamente a que la harían más corta o más larga. Estas observaciones nos muestran concepciones erróneas con respecto a la recta. En ese momento, y dado que las dificultades eran conceptuales, la docente decidió en primer lugar recordar que la recta es un conjunto infinito de puntos sin origen ni extremo. En el dibujo, representamos tramos de rectas, que en realidad se continúan desde ambos extremos indefinidamente.

Presentó luego la definición intuitiva de recta tangente (ver plan de clase p. 118) y les mostró gráficamente cómo una recta que es tangente en un punto puede tocar la curva en otros puntos. Mientras tanto, algunos alumnos tomaban nota de la definición.

Retomó los gráficos presentados, dibujando las rectas en cada caso. Para el segundo y cuarto gráfico trazó algunas rectas más, haciendo notar cómo va variando su inclinación. Preguntó a los alumnos qué características presentan las funciones que hacen que las rectas cambien en cada punto su pendiente. Algunas respuestas fueron: *"porque es una curva"*, *"cambian en cada punto"*, *"crecen y decrecen"*, *"cambian la dirección"*. Todas son importantes ya que consideran aspectos variacionales de las funciones.

A continuación, la docente presentó la siguiente actividad (ver p. 119) en la que se presentan funciones definidas gráficamente en sistemas de ejes cartesianos con la recta tangente en un determinado punto. Los alumnos no tuvieron problemas para determinar en forma gráfica las pendientes de las rectas tangentes. También recordaban la manera de escribir la ley de la función de primer grado correspondiente a la recta dibujada.

Cuando terminaron, la docente pidió las respuestas. Una alumna respondió y todos estuvieron de acuerdo.

Finalmente presentó la actividad donde se da una función definida gráficamente y una recta secante. El objetivo es que visualicen la situación, distinguiéndola claramente de la recta tangente y trabajen algebraicamente (ver p. 120).

Al solicitarle la pendiente de la recta, varios alumnos la dijeron en voz alta. La docente escribió la fórmula en el pizarrón, explicando el significado de cada término e interpretando las medidas en el gráfico.

La docente sintetizó lo desarrollado sobre recta tangente y secante a una curva, apoyándose de una representación gráfica. Les planteó a los alumnos que nuevamente se presenta un problema que no sabemos resolver: cómo determinar la pendiente de la recta tangente para cualquier función.

Luego de una hora, la clase finalizó.

Comentarios

En esta sesión, si bien costó comenzar con el repaso de resultados, nos sentimos conformes con las reacciones de los alumnos. Se mostraron dispuestos al trabajo y participaron bastante.

El carácter de la clase, en su primer parte de repaso y luego de presentación de nociones más teóricas, no les requirió tanto trabajo de elaboración propia y eso se notó en el ánimo de los alumnos. Reaccionaron de buena manera a la metodología propuesta y se produjeron devoluciones. No tuvieron problema para trabajar en el pizarrón.

El manejo de las diferentes nociones matemáticas desarrolladas en esta sesión fue satisfactorio. Surgieron las dificultades previstas para el trazado de las rectas, dado que era la primera vez que se planteaba para ellos la necesidad de una concepción local de tangente. Si bien la noción fue introducida de manera expositiva por la docente, la actividad planteada logró crear conflicto cognitivo en los alumnos y la necesidad de dar respuesta al problema. Fue importante también para hacer surgir concepciones relacionadas con el comportamiento variacional de las funciones, que son necesarias para comprender posteriormente aspectos como cuándo una función es creciente o decreciente o por qué en determinados puntos alcanza un valor máximo o mínimo.

Los alumnos no presentaron dificultades para recordar la noción de recta secante, tampoco para determinar la ecuación de una recta, ya sea numérica o simbólicamente, a partir de datos presentados en forma gráfica.

Observamos en todo el desarrollo de la clase que los alumnos se manejaron cómodamente en el plano de lo algorítmico y algebraico (aunque cometieron algunos errores), presentando problemas al momento de interpretar los resultados.

5.4.3 Análisis de la tercera sesión de trabajo

Tal como estaba previsto, la docente comenzó la clase con un breve repaso de lo trabajado en las sesiones anteriores. Mediante preguntas a los alumnos, retomó la noción de razón de cambio media y la necesidad de encontrar una manera de calcular la razón de cambio instantánea. Recordó que en una clase anterior se llegó a determinar la imposibilidad del cálculo de la velocidad instantánea en los casos que el movimiento no es rectilíneo uniforme pero la posibilidad de determinar una aproximación cada vez mejor considerando intervalos cada vez más pequeños.

Al finalizar la revisión, luego de 10 minutos de comenzada la clase, repartió las hojas de actividades, solicitando a los alumnos que se agrupen con el mismo compañero de equipo. Cuando todos tuvieron las hojas espontáneamente se hizo silencio y comenzaron a trabajar. Como en la primera clase, se observó interés de parte de los alumnos y se notó participación de los dos integrantes de cada grupo.

Cuando la mayoría de los grupos había finalizado las dos actividades planteadas, transcurridos aproximadamente 75 minutos, la docente les solicitó que entreguen una de las resoluciones.

Resultados del tercer bloque de actividades

Como se mencionó anteriormente, en esta parte se retoma el problema de la velocidad instantánea por medio de aproximaciones numéricas, agregando una interpretación geométrica a este proceso. Con la resolución de las actividades se pretende básicamente que el alumno interprete la velocidad promedio en un intervalo como la pendiente de la recta secante que une los puntos sobre la gráfica que corresponden a los extremos del intervalo y la velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto que corresponde al instante considerado. El paso final es llegar a descubrir que la velocidad instantánea se obtiene cuando el cambio de la variable independiente es infinitamente pequeño.

Actividad 1 (p. 121)

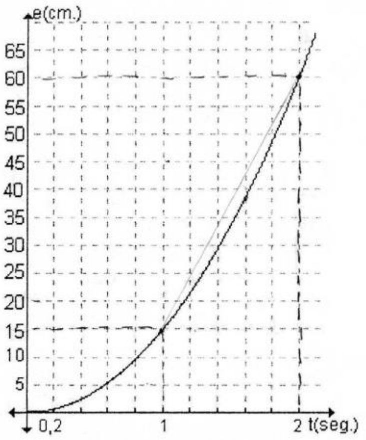
El objetivo de esta actividad es que los alumnos refuercen la noción de razón de cambio media, así como que reconozcan a la pendiente de una recta como la razón de cambio entre la variable dependiente y la variable independiente de un fenómeno, a través de un acercamiento numérico relacionando con el registro gráfico.

Se busca también que utilicen la idea de determinar la velocidad en un instante como la velocidad media entre instantes muy próximos al considerado.

En el contexto geométrico, demanda el trazado de rectas secantes y la recta tangente en un punto. Asimismo requiere la obtención de las pendientes de las rectas trazadas y la determinación de su relación con las razones de cambio. Con esto se pretende dar lugar a la observación de que a medida que los puntos se acercan, las rectas secantes están en posiciones que cada vez se aproximan más a la de la tangente.

En el inciso a), 20 equipos (87% del total) dieron como respuesta la velocidad promedio correcta. De ellos, 15 plantearon y escribieron los cálculos, mientras que los otros cinco anotaron directamente la respuesta. Las respuestas de los tres equipos restantes fueron incorrectas. En el trabajo que sigue se observa que los alumnos marcaron en el gráfico los puntos que corresponden a los extremos del intervalo y calcularon los cambios de cada una de las variables para determinar la velocidad promedio.

Actividad 1. En un experimento de laboratorio se estudió la caída libre de una bola de hierro pequeña. La gráfica muestra el espacio e recorrido por la bola, en centímetros, desde que se lanzó y durante t segundos.



a) Determine la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.

$\frac{60-15}{2-1} = 45$ cm/s

Con respecto al inciso b), en el trabajo en clase se observaron algunas dificultades para determinar los intervalos. Los docentes los orientaron para que puedan completar los otros incisos. La tabla fue completada correctamente (con distintas aproximaciones según la lectura que hicieron de la gráfica) por 20 equipos. Los tres equipos que tuvieron errores consideraron mal los espacios recorridos en el intervalo.

En relación al cálculo de la velocidad de la bola en el instante t = 1 (inciso c), esperábamos comprobar si los alumnos lograban asociar con lo realizado en la última actividad de la secuencia anterior y lo tratado en el momento de institucionalización en el que se estableció que si bien, no se sabe calcular la velocidad en un instante de manera exacta (en el caso de que la velocidad no es constante), sí se puede encontrar una aproximación cada vez mejor si el intervalo es cada vez más pequeño.

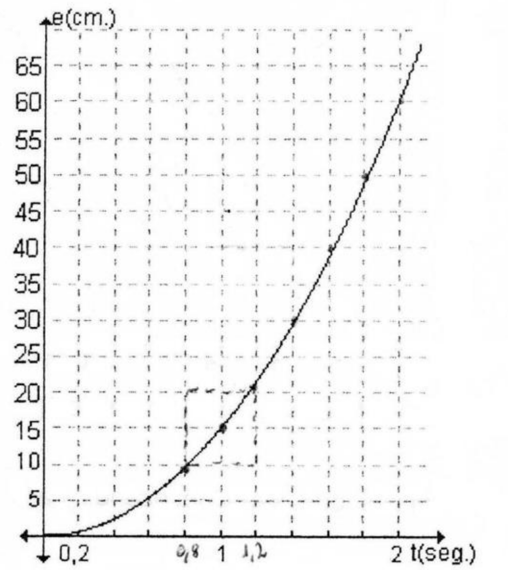
Ante las consultas de diferentes equipos, de los cuales varios habían calculado la velocidad media en el intervalo determinado por t = 0 y t = 1, las profesoras los orientaron a través de preguntas: *¿qué tipo de velocidad calcularon?*, *¿qué es lo que pide ahora?*, *¿es lo mismo? La clase pasada trabajamos con esto. Lo hecho, ¿les sirve para algo?*

Varios se dieron cuenta y, al revisar los trabajos escritos, contamos 11 equipos (casi el 48%) que parecieron haber logrado hacer esta asociación. En nueve de esos trabajos la respuesta fue el último valor de la tabla, es decir la velocidad promedio en el intervalo de tiempo de menor amplitud. En este inciso no se requería explicación, sin embargo uno de ellos justificó que ese intervalo es el más aproximado a t = 1.

c) ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t = 1 segundo?

Aproximadamente es 30, ya que el intervalo (1; 1,2) es el mas aproximado a t=1

Otros dos equipos determinaron las velocidades promedios en intervalos alrededor de t = 1. Uno de ellos para el intervalo desde t = 0,8 a t = 1 y el otro en el intervalo determinado por los instantes t = 0,8 y t = 1,2. Es interesante cómo el último de ellos señaló en el gráfico los intervalos de cambio de ambas variables.



c) ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t = 1 segundo?

$V \cong \frac{20-10}{1,2-0,8} = 25 \frac{cm}{seg}$

Por otro lado, la misma cantidad de equipos (11) dio como respuesta $15\frac{\text{cm}}{\text{seg}}$. La mayoría escribió sólo el valor pero algunos mostraron que lo obtuvieron haciendo $\frac{15\,\text{cm}}{1\text{seg}}$, por lo que creemos que hicieron el cociente entre el valor correspondiente al espacio recorrido hasta t = 1 y el tiempo transcurrido hasta dicho instante.

El equipo restante no respondió.

Para el cálculo de las pendientes de las rectas secantes en el inciso d) prácticamente no se presentaron dificultades sobre cómo hacerlo. Sin embargo, de la observación en clase y la revisión de los trabajos concluimos que un solo equipo se dio cuenta antes de escribirlas, que las operaciones coincidían con lo realizado en el inciso anterior para el cálculo de las velocidades promedio. Este equipo redactó que los valores de las pendientes coinciden con las velocidades promedio en cada intervalo.

Siete equipos (algo más del 30%), escribieron los cálculos para encontrar la pendiente con exactamente los mismos valores que en el inciso anterior. De estos, por más que tenían la misma respuesta, sólo tres relacionaron adecuadamente. Los otros no respondieron nada sobre este aspecto.

En cinco trabajos (casi el 22%), los alumnos hicieron los cálculos con valores distintos a los utilizados para las velocidades promedio para los primeros intervalos y luego escribieron los mismos resultados del inciso anterior. A pesar de que esto parece indicar que se dieron cuenta de la relación, sólo uno la expresó.

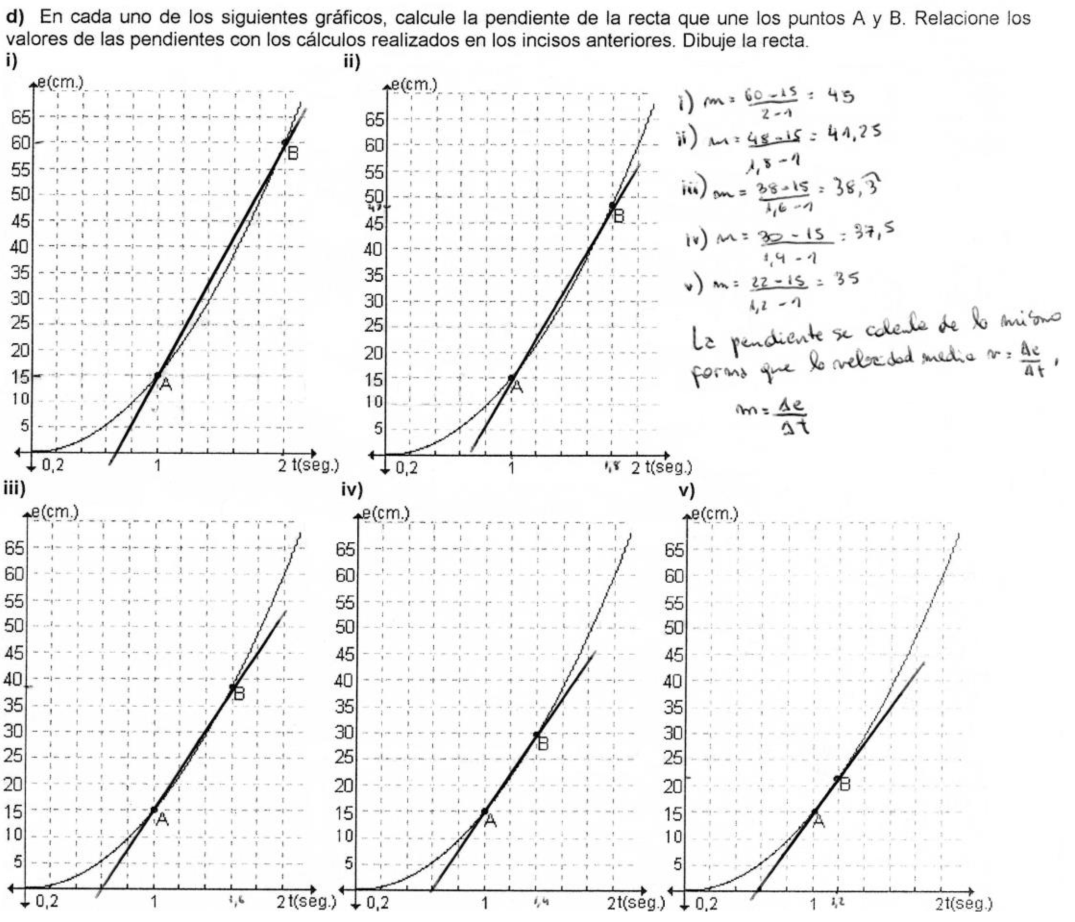
Seis equipos (26%) determinaron la pendiente considerando todos los valores correspondientes a la posición final diferentes a los usados para el cálculo de las velocidades promedio. Sin embargo solamente dos no encontraron la relación. Los otros cuatro explicaron de maneras distintas: *"la pendiente es la velocidad"*, *"los valores de la velocidad promedio son similares con la pendiente"* (2 equipos), *"la pendiente se calcula de la misma forma que la velocidad media".*

Tres equipos que habían completado mal la tabla, calcularon bien las pendientes, pero uno de ellos, en lugar de su valor, escribió directamente la ecuación de la recta secante. Ninguno expresó nada en cuanto a la relación. Un equipo no contestó ninguna de las dos cuestiones (cálculo de las pendientes y relación).

Como sucede generalmente, a los alumnos les cuesta responder a los planteos que exigen interpretación. Revisando los trabajos de los veintitrés equipos, contabilizamos catorce (más del 60%) que no establecieron ninguna relación.

Con respecto al dibujo de las rectas secantes, 11 equipos (48%) las trazaron correctamente. Otros seis (26%) trazaron los segmentos que unen los puntos que corresponden a los extremos de los intervalos (nos preguntamos si no prestan atención, si les da lo mismo, si piensan que se entiende que es una recta al dibujarla de esa manera, o si aparecen concepciones erróneas sobre recta). De los restantes (seis equipos), dos trazaron las dos primeras rectas y los otros cuatro no dibujaron ninguna.

En el trabajo que sigue, el equipo consideró valores distintos que los del inciso b).



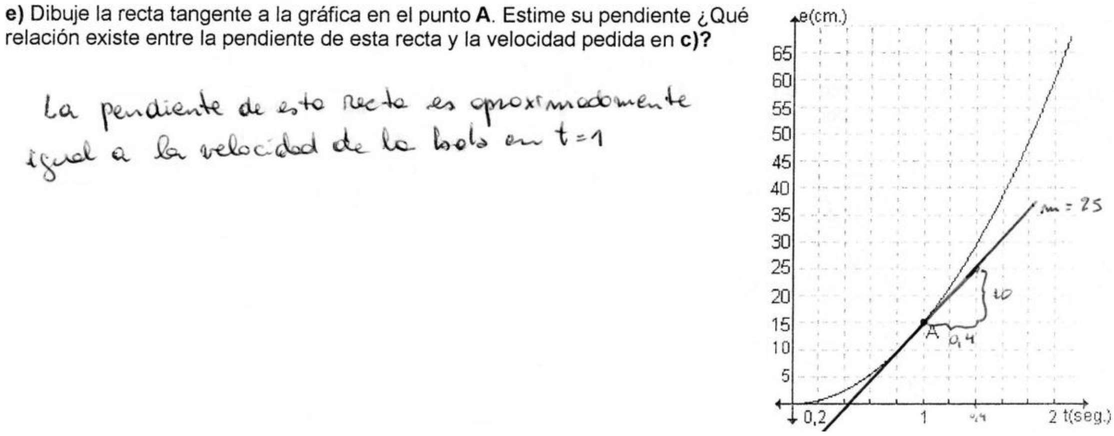
La recta tangente a la gráfica en el punto A, solicitada en el inciso e) fue trazada correctamente por todos los equipos. Sin embargo, nueve equipos (algo más del 39%) no lograron establecer ninguna relación con la velocidad instantánea.

En 11 trabajos (48%) encontramos respuestas que consideramos correctas. Cuatro escribieron que la pendiente de la recta tangente coincide con la velocidad calculada en el instante $t = 1$. Los restantes expresaron de alguna manera que la pendiente de la recta tangente es aproximadamente igual a la velocidad de la bola en ese momento.

Un equipo redactó *"en ambos casos utilizamos la misma fórmula"* (utilizaron en ambos casos la fórmula de velocidad media). Finalmente dos equipos escribieron que no hay relación (los valores que obtuvieron eran muy distintos).

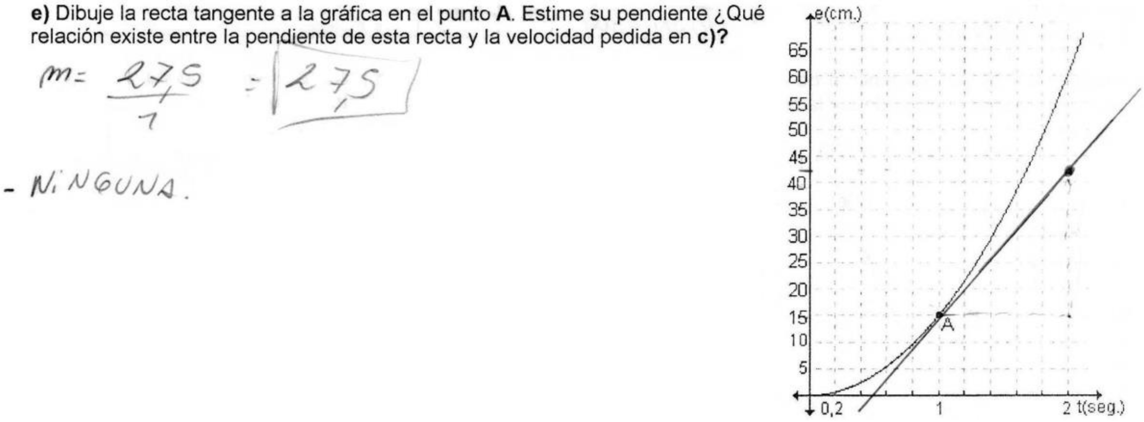
Para la determinación de la pendiente de la recta tangente, observamos que la mayoría planteó la fórmula de pendiente, sacando los datos directamente desde la gráfica y obteniendo valores aproximados al valor exacto de la pendiente, que es 30. En algunos casos marcaron sobre la gráfica los cambios de las variables (con llaves, con líneas de puntos, marcando el triángulo rectángulo).

Diecisiete equipos trabajaron de esta forma. Otros cuatro escribieron directamente la respuesta pero suponemos que razonaron de la misma manera.


e) Dibuje la recta tangente a la gráfica en el punto **A**. Estime su pendiente ¿Qué relación existe entre la pendiente de esta recta y la velocidad pedida en **c)**?

La pendiente de esta recta es aproximadamente igual a la velocidad de la bola en t=1

Según el intervalo que consideraron para aproximar o el razonamiento utilizado en el inciso c), no pudieron observar ninguna relación. Observamos esta situación en el siguiente trabajo. En el inciso c) el equipo había respondido que la velocidad de la bola en $t = 1$ es aproximadamente $15\,\frac{\text{cm}}{\text{seg}}$.


e) Dibuje la recta tangente a la gráfica en el punto **A**. Estime su pendiente ¿Qué relación existe entre la pendiente de esta recta y la velocidad pedida en **c)**?

$m = \frac{27,5}{1} = \boxed{27,5}$

- NINGUNA.

Una respuesta fue *"5,5"* que no se aproxima para nada al valor real (no hizo cálculos) y la restante fue *"pendiente y = 45x"* (este equipo había presentado el mismo problema con la recta secante).

Actividad 2 (p. 123)

Esta actividad integra todos los contenidos desarrollados. En los primeros incisos se trabaja numéricamente la idea de que, con intervalos infinitamente pequeños, la aproximación es cada vez más exacta, pretendiendo además que los alumnos descubran la necesidad del paso al límite para hallar la velocidad instantánea o la pendiente de la recta tangente a una gráfica en un punto. Luego se determina algebraicamente la velocidad media, la velocidad instantánea en un valor particular y la velocidad instantánea en un punto cualquiera del dominio de la función.

En el inciso a) los alumnos deben completar la tabla, donde se presenta un acercamiento por la izquierda, otro por la derecha y la columna con una conclusión. En ésta aparece la notación de tiende a un número (→...), que supuestamente no debía representar problema para los alumnos ya que se había trabajado anteriormente.

Nos llamó mucho la atención que, cuando intentaban completar las tablas, varios equipos tuvieron problemas con el cálculo de Δs, haciendo $(\Delta t)^3 = (t_1 - t_0)^3$ en lugar de $s(t_1) - s(t_0) = t_1^3 - t_0^3$. Dado que, en esta actividad, nuestro interés se centraba en la respuesta a los incisos siguientes, las profesoras cuestionaron a los integrantes de los equipos, tratando de que detecten el error y lo corrijan.

Del total de los equipos, 16 (casi el 70%) completaron correctamente las columnas en las que se presenta el intervalo de variación de la variable independiente.

Sin embargo, sólo la mitad (8 equipos, 35%) fueron capaces de inducir el valor al cual tiende cada secuencia de números. Del resto, dos equipos razonaron mal dicho valor mientras que los otros seis dejaron esa columna sin completar.

Los restantes cometieron diversos errores, de los cuales cuatro equipos hicieron $\Delta s = (\Delta t)^3$ (más del 17% a pesar de que se había trabajado en la clase).

En el inciso b) los alumnos deben, a partir de la tabla, conjeturar sobre la velocidad de la partícula en $t = 2$ y el comportamiento en caso de que los intervalos sean infinitamente pequeños. Seis equipos respondieron que la velocidad de la partícula en $t = 2$ segundos *"es"* $12 \ \frac{cm}{seg}$ y seis más expresaron que la velocidad *"tiende"* a dicho valor. Todos ellos (52%) indicaron que la conjetura se seguirá cumpliendo si Δt es infinitamente pequeño.

Dos equipos respondieron de la misma manera sobre la velocidad en el instante pero manifestaron que no se seguirá cumpliendo esa afirmación en el caso de que la amplitud de los intervalos tienda a cero. Otros dos no respondieron nada a esta pregunta.

Cuatro equipos expresaron que la velocidad se acerca a otro número. Ese valor surge a partir de los errores cometidos al completar la tabla. Tres de ellos indicaron que la conjetura se seguirá cumpliendo y uno que no.

Dos equipos calcularon s(2) = 8 para responder sobre la velocidad en t = 2. No expresaron nada sobre la otra pregunta. Un equipo no respondió nada al inciso.

Presentamos las respuestas de un equipo a estos dos incisos.

Actividad 2. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley $s(t) = t^3$.

a) Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

$t_0 \le t \le t_1$	$1{,}9 \le t \le 2$	$1{,}99 \le t \le 2$	$1{,}999 \le t \le 2$	... →	2	← ...	$2 \le t \le 2{,}001$	$2 \le t \le 2{,}01$
Δt	0,1	0,01	0,0001	... →	0	← ...	0,001	0,01
Δs	1,141	0,119401	0,011994	... →	0	← ...	0,012	0,120
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	11,41	11,94	11,994	... →	12	← ...	12,'	12

b) Según el acercamiento realizado en la tabla, ¿qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en t = 2? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura? (La velocidad en t=2 es Aprox 12cm/seg

Si, se sigue cumpliendo lo conjetura

En el inciso c) los alumnos debían, en primer lugar, calcular la velocidad media en el intervalo [2, 2 + Δt]. En el trabajo en clase se observó la dificultad para evaluar la función en el extremo derecho del intervalo ya que muchos no recordaban la fórmula para resolver el cubo de un binomio. La profesora a cargo de la clase la repasó frente a todo el grupo y la escribió en el pizarrón.

Al revisar los trabajos escritos encontramos que tres equipos dejaron el inciso completo sin contestar.

Dieciséis equipos (casi el 70%) determinaron correctamente la velocidad media. Otros dos plantearon correctamente pero dejaron su trabajo incompleto. Dos más cometieron errores en el planteo y resolución.

Con respecto a la interpretación geométrica, uno solo respondió de manera aceptable, *"representa la pendiente de la recta que une los puntos 2 y 2 + Δt".* Parece que el hecho de haber obtenido una expresión algebraica los confundió. Cuatro equipos (17%) manifestaron que *"es una parábola"* y quince (65%) no respondieron, como vemos en el trabajo que sigue:

c) Obtenga la velocidad media $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ de la partícula en el intervalo [2, 2 +Δt]. Interprete geométricamente la expresión obtenida.

$$\frac{(2+\Delta t)^3-2^3}{\Delta t} = \frac{(8+3.2^2.\Delta t+3.2.\Delta t^2+\Delta t^3)-2^3}{\Delta t} = \frac{\cancel{8}+12\Delta t+6\Delta t^2+\Delta t^3 \cancel{-8}}{\Delta t}$$

$$= \frac{12\Delta t+6\Delta t^2+\Delta t^3}{\Delta t}$$

Los últimos dos incisos son los que más dificultades plantearon a los alumnos. Nueve equipos no respondieron al inciso d), lo cual representa un 39% del total de trabajos revisados, mientras que 14 equipos (61%) no hicieron nada en el e).

En el cálculo del límite cuando Δt tiende a cero de la expresión correspondiente a la velocidad media, 12 equipos (52%) lo hicieron correctamente pero seis de ellos no respondieron nada sobre el significado y qué pueden observar en el resultado.

Sólo tres equipos lograron interpretar lo calculado. Expresaron: *"coincide con la velocidad aproximada en el instante t = 2, calculada en b)".* Dos más respondieron de manera aproximada escribiendo: *"Se observa que cuando $\Delta t \to 0$, la velocidad media es doce"*, agregando también que es el mismo valor que el obtenido en b).

Dos equipos calcularon mal el límite (el límite es infinito, el límite es cero), uno de ellos respondió las preguntas según sus cálculos y el otro no respondió.

El límite del inciso e) requiere más abstracción. Sólo cuatro equipos (algo más del 17%) lo calcularon correctamente. Cuatro más lo plantearon, resolvieron algunas operaciones pero lo dejaron incompleto. Un equipo planteó y resolvió pero al obtener una indeterminación concluyó que el límite es infinito.

Ningún equipo expresó nada sobre la interpretación geométrica y física solicitadas.

El trabajo que sigue corresponde a un equipo que tomó la expresión obtenida en c) para el cálculo del límite del inciso d):

d) Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso **b)**, ¿cuál es el significado de $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$? Calcule el límite. ¿Qué observa?

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t^2+6\Delta t+12=\boxed{12}$$

→ Coinside con la velocidad en el instante t = 2

e) Calcule $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ e interprete física y geométricamente el resultado.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t_0+\Delta t)^3-(t_0)^3}{\Delta t}\Rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{(t_0)^3}+3(t_0)^2(\Delta t)+3(t_0)(\Delta t)^2+(\Delta t)^3-\cancel{(t_0)^3}}{\Delta t}\Rightarrow\frac{\cancel{\Delta t}(3t_0^2+3t_0\Delta t+\Delta t^2)}{\cancel{\Delta t}}\Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}=3t_0^2+3t_0\Delta t+\Delta t^2$$

Análisis de las instancias de debate grupal e institucionalización

Luego de haber recogido una hoja de trabajo de cada equipo, la docente pidió silencio a la clase para comenzar con la discusión grupal de las actividades. Nuevamente decidió hacer hincapié en los aspectos en que se habían notado más dificultades, además de las cuestiones necesarias para llegar a presentar el concepto de derivada.

En primer lugar leyó el enunciado de la actividad 1) y analizó en la tabla las causas de los distintos resultados.

Preguntó si se puede calcular la velocidad exacta en t = 1. Algunos alumnos respondieron: *"No, porque no es constante"*, *"No se puede calcular pero sí aproximar"*.

A partir de esta intervención, la docente preguntó: *"Según los valores que se observan, ¿cuál es la mejor aproximación?* Sólo un alumno respondió, dando el valor de la última celda de la tabla, es decir el correspondiente al intervalo más pequeño.

Consultó luego sobre la relación entre los valores de las pendientes calculadas con las velocidades promedio. Muchos habían logrado darse cuenta que eran los mismos cálculos, pero habiendo escrito nuevamente las operaciones. La docente les explicó que calcular la razón de cambio media en un intervalo, geométricamente es lo mismo que determinar la pendiente de la recta que une los puntos sobre la gráfica que corresponden los extremos del intervalo.

Analizó la pendiente de la recta tangente en el punto A señalado en la gráfica del inciso e) y la comparó con el resultado estimado de la velocidad en el instante $t = 1$.

Presentó una diapositiva que muestra en la misma representación gráfica las distintas rectas secantes que unen puntos cada vez más cercanos. Intentando que visualicen la situación, les explicó que tomando intervalos cada vez más pequeños, la posición de la recta secante se aproxima a la de la tangente.

La participación de los alumnos era escasa. Algunos charlaban en el fondo del aula.

La docente redondeó las conclusiones en el pizarrón. Por un lado, a través de aproximaciones numéricas, las velocidades promedio calculadas en intervalos cada vez más pequeños son cada vez más cercanas a la velocidad real en $t = 1$. Geométricamente, los valores de las pendientes de las rectas secantes, se aproximan al valor de la pendiente de la recta tangente.

Posteriormente comenzó a desarrollar la actividad 2). Por razones de tiempo no retomó el problema de cómo calcular Δt y Δs para los cuales se habían observado dificultades en el trabajo en grupo. La docente decidió trabajar algebraicamente con una función $s(t)$ cualquiera. Preguntó cómo se escribe en símbolos cada cambio y cómo se lo interpreta física y geométricamente.

Al analizar qué es lo que ocurre cuando la amplitud del intervalo se hace infinitamente pequeña, las conclusiones las hizo prácticamente la docente. Resolvió el límite del inciso c) en el pizarrón y planteó e interrogó a los alumnos sobre el siguiente inciso.

La docente redondeó todo lo trabajado, explicando que el límite planteado es la derivada de la función en el punto.

Para reforzar el aspecto algebraico, planteó el ejemplo de calcular la derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

A esta altura la participación de los alumnos era muy escasa. Faltaban pocos minutos para la finalización de la clase y no prestaban demasiada atención.

La docente hizo entonces el desarrollo en el pizarrón, a través de preguntas a la clase. Una vez obtenido el valor de la derivada, planteó qué representa dicho valor si la función describe la posición de una partícula. Lo relacionó con la velocidad y la pendiente.

Comentarios

La resolución de las dos actividades de esta parte de la secuencia demandaba del manejo de nociones desarrolladas en las sesiones anteriores así como del cálculo de límites. Los alumnos manifestaron diversas dificultades en ambos aspectos.

Si bien fueron capaces de completar las tablas con los espacios recorridos y las velocidades medias, así como dibujar la recta tangente, tuvieron problemas para responder sobre la velocidad aproximada en el instante. Pensamos que esto puede deberse, no necesariamente a que no hayan comprendido lo trabajado en las clases, sino también a no haber fijado las nociones a través de la resolución de otras actividades.

El acercamiento visual propuesto en la primera actividad, permitió que algunos alumnos descubran por sí mismos la relación entre la pendiente de la recta secante a la gráfica de una función y la razón de cambio media. Por otro lado, también algunos fueron capaces de determinar la pendiente de la tangente mediante una aproximación en el registro gráfico e, inducidos por la pregunta planteada, observar que es similar al valor encontrado para la velocidad instantánea. La visualización del proceso de encontrar la recta tangente mediante aproximaciones sucesivas de rectas secantes, sólo se logró en la instancia de debate grupal e institucionalización, cuando el docente presentó las gráficas superpuestas y mostró cómo va cambiando la posición de las secantes acercándose a la de la tangente.

También observamos nuevamente cómo prefieren el trabajo algorítmico ante el visual, al realizar todos los cálculos de las pendientes y no buscar una relación entre las gráficas y lo realizado en la tabla. Están más adiestrados en el cálculo de pendientes a través de una fórmula. Esto ya fue analizado en los comentarios de la primera sesión.

El acercamiento numérico planteado en la segunda actividad les permitió inducir correctamente el límite de las sucesiones de cada fila de la tabla y relacionar con lo estudiado sobre límite de una función.

A partir del tercer inciso se plantea el cálculo algebraico de la velocidad media e instantánea. Observamos dificultades en el trabajo algebraico que incluso fue dejado de lado por muchos equipos. Esto es raro teniendo en cuenta que la enseñanza enfatiza generalmente estos aspectos.

En el cálculo de la velocidad media fueron notorias las deficiencias. Siendo que se trataba de una operación básica con expresiones algebraicas, presentaron dificultades con el desarrollo del binomio elevado a un exponente entero positivo, con la factorización y con la simplificación.

Los incisos d) y e) fueron los que menos porcentaje de respuesta tuvieron. Consideramos que eran cuestiones que los alumnos observaban como desconocidas o no trabajadas anteriormente, por eso no las resolvieron. Prefirieron los incisos que requerían acercamientos numéricos y/o gráficos.

A pesar de que algunos resolvieron los incisos c), d) y e), no observaron la relación con lo razonado en a) y b), por lo menos hasta que fue planteado por la docente.

A pesar de todos los problemas detectados, la resolución o, por lo menos el intento de solución de las distintas actividades fue significativa para llegar a construir la derivada. Los alumnos debieron explorar varios aspectos variacionales relacionados con este objeto: la manera en la cual la medida de una pendiente a una curva está relacionada con la razón de cambio, la aproximación a la razón de cambio instantánea por medios numéricos, lo que implica calcular cambios cada vez más pequeños, y el manejo intuitivo de la noción de límite.

La presentación de la derivada de una función en un punto en la instancia de institucionalización fue el último paso de la secuencia. De esta manera no resultó un concepto abstracto, sino que se intentó la construcción del objeto a partir de la interpretación del significado concreto, tanto físico como geométrico, de cada uno de los términos del límite planteado.

Consideramos que los objetivos planteados para esta sesión se cumplieron. Los aspectos que no pudieron descubrir los alumnos en la resolución de las actividades fueron abordados luego en el debate grupal y en la institucionalización.

Como en la primera sesión, la participación fue muy activa en el trabajo en equipo y bastante escasa en el trabajo en conjunto con toda la clase y en la institucionalización.

5.4.4 Reflexiones acerca de la implementación de la secuencia

Las situaciones planteadas en cada sesión se revelaron adecuadas según los objetivos planteados. A pesar de que se presentaron dificultades, dieron lugar a las reflexiones esperadas, permitiendo trabajar distintos aspectos variacionales de la derivada: la identificación de las funciones como relaciones entre variables en fenómenos de cambio, el análisis del comportamiento de los cambios (que da lugar a la necesidad de encontrar las leyes que describen esos cambios para poder medirlos y predecirlos), la cuantificación de los cambios, el cálculo de razones de cambio que se interpretan como la relación o comparación de los cambios de una variable con respecto a los cambios de la otra variable, la necesidad de encontrar una manera de describir y cuantificar los cambios que se dan a cada instante en una situación, la relación entre las razones de cambio con la pendiente correspondiente.

De esta manera se trató de favorecer a lo largo de las sesiones el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de nuestros alumnos.

El uso de la visualización formó parte del diseño, ya que se buscó que el alumno obtenga información relevante y explique sus conjeturas a través de las gráficas presentadas en las diferentes actividades. Se intentó en todo momento obtener la máxima información posible de cada una de las situaciones representadas, de manera de beneficiar el desarrollo de su capacidad de análisis.

Con respecto al manejo de los registros, además de lo comentado en el análisis de cada actividad, queremos agregar que, en general, no detectamos grandes preferencias por un registro u otro. Pensamos que esto está determinado por el tipo de actividades propuestas, más bien cerradas, en el sentido que se pide explícitamente cómo resolverlas (complete la tabla, realice el gráfico, etc.). No se incluyeron demasiadas preguntas donde el alumno pudiera o debiera elegir el camino a seguir para resolverlo.

Durante las instancias de institucionalización de cada sesión se intentó que los alumnos relacionen lo trabajado en otras actividades, inclusive de sesiones anteriores, haciendo un paralelo entre distintas representaciones de un mismo registro o de registros diferentes siempre que haya sido posible. Pero se dedicó mayor tiempo y esfuerzo a los aspectos algebraicos que se requerían en cada instancia para poder formalizar y continuar con su desarrollo en las clases siguientes.

En relación a los aspectos referidos a la relación entre profesor, saber, alumno y medio, el análisis de las sesiones nos muestra que, en general, las actividades propuestas lograron motivar a los alumnos y movilizar sus concepciones. Los alumnos sentían que eran capaces de resolverlas y el conocimiento esperado fue emergiendo tanto en las discusiones de los pequeños grupos como en la puesta en común de toda la clase.

La metodología de trabajo propuesta logró que todos se involucraran y se dispusieran a analizar las actividades planteadas. La formación de pequeños grupos favoreció también este aspecto, ya que ninguno tomó una actitud pasiva.

Notamos más disposición en el trabajo de a dos que en la discusión general de la clase. Generalmente se observó en estas etapas, más que un debate entre los alumnos, una exposición de ideas al profesor, quien debía trasmitirlas a la clase completa. Sin embargo, la insistencia para que tomaran partido en las distintas intervenciones y propusieran argumentos que permitan validar o rechazar alguna opinión llevó en distintos momentos a la construcción colectiva de conocimiento.

Consideramos que las causas de la escasa participación de los alumnos en el debate grupal (pocos intervinieron y siempre los mismos) se relacionan no solamente con que están cansados o no están interesados, sino que no se animan a dar su opinión ya que tienen miedo de equivocarse frente a sus compañeros o el docente. Los alumnos no están acostumbrados a hablar en clase, menos a debatir y defender sus opiniones.

Un factor organizativo limitante fue el tiempo disponible para el desarrollo de la secuencia. Los objetivos propuestos para cada sesión eran amplios, abarcando varias nociones importantes para la construcción de la derivada. La cantidad de actividades preparadas llevó a que los tiempos de debate grupal e institucionalización fueran limitados, lo que hizo que no se trabajaran suficientemente todos los aspectos abarcados en las situaciones y se pudiera indagar más profundamente sobre la comprensión de lo desarrollado en la clase. El tratamiento de la misma secuencia en más sesiones, daría la posibilidad, no sólo de trabajar con más tranquilidad sino también de que los alumnos puedan avanzar en la conceptualización y comprensión de las nuevas nociones.

5.5 Análisis e interpretación de los datos aportados por otros instrumentos

5.5.1 Las entrevistas

Conscientes de la importancia de profundizar en las concepciones de nuestros alumnos, planteamos desde un principio la realización de entrevistas a algunos de ellos.

Luego de implementar las secuencias y analizar las respuestas obtenidas, vimos la necesidad de estudiar cuestiones relativas sobre las resoluciones, lo que nos condujo a utilizar como protocolo de las entrevistas las actividades de la secuencia.

La técnica usada fue la de entrevista basada en un cuestionario (Goldin, 2000, en González, 2006) en la que el entrevistado no sólo interactúa con el entrevistador, sino también con el conjunto de tareas (preguntas, problemas o actividades) que se le encomiendan.

Fue complicado determinar cómo realizar la entrevista, si a ambos miembros del grupo conformado para trabajar en clase o individualmente. Como nuestro mayor interés se centraba en poder ahondar en sus pensamientos y analizar de alguna manera su grado de comprensión, decidimos entrevistarlos de manera individual. La elección de los alumnos se hizo según su desempeño en la asignatura durante el año, teniendo en cuenta también sus trabajos y algunas formas de proceder significativas.

De esta manera se seleccionó a cinco estudiantes para ser entrevistados y obtener información directa sobre los procesos y razonamientos que habían seguido en sus respuestas. Además se analizó cómo evolucionaron sus razonamientos luego de la etapa de institucionalización.

De todas formas, con la intención de controlar de alguna manera la influencia del trabajo en equipo, se entrevistó también a cada uno de sus compañeros. Así, se desarrollaron en total 10 entrevistas.

Las mismas se realizaron la semana siguiente a la que se implementó la secuencia. Fueron audio-grabadas. Las duraciones variaron entre 45 minutos y una hora aproximadamente.

Para cada entrevista se llevó la hoja de trabajo del alumno entrevistado para hacerle preguntas particulares sobre lo que había escrito. Se indagó también cómo resolvería las cuestiones que en ese momento había dejado sin contestar o había resuelto incorrectamente. Si realizaba algún cambio sobre lo realizado oportunamente se preguntó sobre las razones.

Se decidió incorporar, de acuerdo al desarrollo de cada entrevista, su duración y las respuestas de los alumnos, algunas cuestiones integradoras referentes a los temas estudiados. Se añadió además una pregunta sobre su opinión acerca de la metodología de trabajo.

Dado que la extensión de la entrevista se haría muy larga si se les consultaba sobre todas las actividades, se decidió tomar determinados incisos donde se trabajan las distintas nociones involucradas (razón de cambio media, razón de cambio instantánea, interpretación física, geométrica, aproximación numérica, etc.).

Es necesario tener en cuenta que al momento de la entrevista se había seguido avanzando en el cursado de la asignatura con el desarrollo de los temas correspondientes (derivabilidad y continuidad, reglas de derivación). Además, durante la semana de las entrevistas, algunos de los alumnos debían recuperar el primer parcial de matemática por lo que, según ellos mismos manifestaron, no dedicaron tiempo a trabajar con los temas de la secuencia.

Al analizar las transcripciones de las entrevistas, observamos que no se presentaban diferencias significativas entre lo expresado por cada integrante de un equipo. Por eso decidimos presentar el análisis sobre los trabajos de un miembro de cada equipo.

De las entrevistas realizadas elegimos tres, que corresponden a alumnos con desempeño muy bueno, bueno y regular, respectivamente, en el cursado general de la asignatura. Tuvimos en cuenta además que aparezcan respuestas representativas de todas las entrevistas realizadas, así como el menor o mayor grado de dificultad para responder a las distintas cuestiones.

Transcribimos algunos fragmentos de las mismas donde se observan sus logros y también sus dificultades. Como se leerá en algunas transcripciones, la docente trató de aclarar significados en los casos que no recordaban o cometían error. Esto se decidió así porque en el dictado de la asignatura ya se estaban trabajando los temas que siguen en el programa y no queríamos que los alumnos se vayan con dudas. A continuación presentamos un análisis breve de las entrevistas.

Los enunciados de las actividades se encuentran en el anexo 3 (p. 251). Las figuras a las que se hace referencia son producciones de los alumnos correspondientes a algunos aspectos de la secuencia trabajados durante la entrevista y se encuentran en el anexo 4 (p. 255).

Actividad 2 - Primera parte de la secuencia

Las actividades 1 y 2 de la primera parte de la secuencia involucran la razón de cambio media. En la primera se detectaron menos dificultades, quizás por tratarse de un ejemplo más concreto y cercano a los alumnos. Se decidió mostrar lo analizado sobre la segunda, que además de ser más general, trabaja con las notaciones simbólicas, indaga sobre la interpretación geométrica y comienza a tratar la noción de velocidad instantánea.

Con respecto a esta actividad, se pidió a los alumnos que interpreten el significado de cada columna de la tabla. Además, en algunos casos, se consultó sobre la interpretación gráfica de las distintas medidas. Se realizaron preguntas para indagar acerca de los distintos tipos de velocidad (media e instantánea), el cálculo de cada una y por qué en este caso la velocidad en un instante coincide con la velocidad media en cualquier intervalo. También se indagó sobre la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Entrevista a Vanesa

Profesor (P) - Bueno, vamos a repasar la actividad 2. Leela para recordarla (Figura 1).

Vanesa (V) - Bueno. *(Lee)*

P- Vamos a revisar lo que hicimos en la tabla. Esta primera columna que completaron, ¿qué significa?

V- La variación del tiempo.

P- ¿Y la segunda?

V- Variación del espacio.

P- Entonces, por ejemplo, ¿qué significa este tres?

V- Que el auto se movió tres metros en un segundo.

P- Entonces en esta columna, ¿qué obtenés?

V- La velocidad media.

P- Es lo que les faltaba en esta respuesta *(señala la hoja de trabajo)*. ¿Cómo resulta la velocidad media en todos los intervalos?

V- Constante.

P- Y fijate el gráfico, ¿cómo es?

V- Lineal.

P- Es una recta el gráfico. O sea que el movimiento del móvil, ¿es de qué tipo?

V- Rectilíneo uniforme.

P- ¿Y eso qué significa?

V- Que la velocidad se mantiene constante en todo su trayecto.

P- Entonces, a los dos segundos, ¿cuál es la velocidad?

V- Tres metros sobre segundos.

P- ¿Por qué?

V- Igual, como la velocidad era constante, era la misma que en este punto.

Entrevista a Luis

Profesor (P) - Fijate en la actividad 2 que vamos a revisar algunas cosas. Leela si querés (Figura 2).

Luis (L) - *(Lee)*

P- ¿Vos te acordás qué significa lo dado en cada columna?

L- Esto es el cambio en la variable dependiente y el cambio en la variable independiente, Δx y Δy. Eran todos iguales en esta función.

P- Y en la tercera columna, ¿qué se obtiene?

L- En esa nos daba lo que era la velocidad.

P- ¿Y qué velocidad?

L- Esa era la velocidad media.

P- Y en general para cualquier aplicación, ¿qué nombre recibe este cociente, si no hablamos de velocidad?

L- La razón de cambio media.

P- Acá tenían un problema con la gráfica. *(Señala la hoja de trabajo)*

L- Sí, graficamos los cambios de s, después cuando le preguntamos a los chicos vimos que, vamos no habíamos leído bien, y después corregimos.

P- Esta pregunta, quiero que reveas, ¿cuál es la interpretación geométrica de la cantidad Δs sobre Δt?

L- mmmm…

P- Vos dijiste que te da siempre tres, ¿qué es ese tres?

L- Es la pendiente de la recta. Uno sería la posición inicial. Lo que escribimos ahí quedó de lo otro que habíamos graficado.

P- ¿Cuál es la velocidad del móvil a los dos segundos de iniciado el movimiento? ¿Estás de acuerdo todavía con esta respuesta?

L- ….

P- ¿Qué calcularon acá?

L- Nosotros acá, calculamos la imagen del dos, de la función.

P- En la función s(t). Esa función, ¿qué representa?

L- Esa es la función posición. A qué distancia estaba del punto de referencia a los dos segundos. O sea, nada que ver, la velocidad del móvil siempre va a ser la misma, o siempre va a ser tres.

<u>Entrevista a Valentín</u>

Profesor (P) - Pasamos a la actividad 2. Completamos esta tabla. ¿Me podés decir qué significa $\Delta t = t_2 - t_1$? ¿Qué estás calculando? (Figura 3)

Valentín (VR) - Tiempo.

P- ¿Qué del tiempo? ¿Qué significa Δt?

VR- Cambio.

P- ¿El cambio de qué?

VR- Del tiempo.

P- Y en esta columna, ¿Δs?

VR- ¿La imagen del tiempo?

P- Y la resta, ¿qué te da?

VR- La diferencia entre $s(t_2)$ y $s(t_1)$.

P- ¿Y qué significa?

VR- El cambio.

P- ¿El cambio de qué ahora?

VR- Metros, la cantidad que recorrió.

P- La cantidad de metros que recorrió. Entonces, cuando hacen el cociente, ¿qué estás calculando?

VR- La velocidad.

P- ¿Qué tipo de velocidad?

VR- La velocidad media.

P- Bien. Te pedía que señales en el gráfico qué significa $\Delta t = t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$. ¿Lo podés hacer?

VR- *(Señala bien)*

P- ¿Cuál es la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

VR- …

P- Fijate que cuando lo calcularon les dio tres para cualquier intervalo, ese tres ¿qué es?

VR- La velocidad.

P- ¿Y geométricamente, en la recta que dibujaron?

VR- …

P- Fijate lo que señalaste en el gráfico y lo que hiciste en la tabla, el tres lo obtenés de dividir tres que marcaste acá dividido uno, que lo marcaste así. ¿Qué representa entonces el tres? *(Señala en la gráfica)*

VR- Lo que va aumentando.

P- Y de la recta, ¿qué es?

VR- La pendiente.

P- Sí. Vamos a revisar esta pregunta sobre cuál es la velocidad del móvil a los dos segundos de iniciado el movimiento. Si vos hablás con otra persona y le das una velocidad, ¿decís hice tanto cada dos segundos? ¿Cómo se expresa una velocidad? ¿Cuál sería la respuesta a esa pregunta?

VR- A los dos segundos…. *(Piensa)*

P- ¿Cuál es la velocidad del móvil? ¿Es necesario hacer algo?

VR- No, porque lo contás con esto. *(Muestra la tabla)*

P- Pero si vos miras esto, ¿qué velocidades son?

VR- La velocidad media.

P- ¿Y cómo es la velocidad en todo el trayecto?

VR- Constante.

P- Entonces a los dos segundos, ¿que velocidad va a tener?

VR- Tres.

P- ¿Y la unidad?

VR- Metros por segundo. Claro, si es constante la velocidad es la misma.

Análisis

Luis y Vanesa mostraron mucha claridad en sus observaciones, recordando e interpretando correctamente lo trabajado en clase, tanto lo resuelto en la hoja como en la discusión grupal. Corrigieron lo que habían hecho de manera incorrecta en la hoja y recordaron bastante lo desarrollado en la institucionalización. Resalta el hecho de poder asociar el tipo de movimiento con la representación gráfica de la trayectoria (velocidad constante – recta) y también poder inferir que, como la velocidad es constante, en cualquier instante la velocidad coincide con la velocidad media en cualquier intervalo.

Valentín presentó dificultades en distintos aspectos. Interpretó con más trabajo el significado de cada columna de la tabla. Gráficamente no tuvo problemas para dar el significado de cada medida a pesar de que no lo había hecho en su hoja de trabajo. Presentó problemas para explicar que el valor calculado para $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ coincide con la pendiente de la recta graficada. Si bien al principio pareció reconocer fácilmente que está trabajando con la velocidad media, en el último tramo de la entrevista le costó diferenciarla de la instantánea y explicar cómo determinar su valor en este movimiento particular.

Actividad 3 - Primera parte de la secuencia

En relación a esta actividad nos pareció interesante, a partir de las respuestas en las hojas de trabajo, solicitar a los alumnos entrevistados que describan la trayectoria de la piedra y el comportamiento de la velocidad. También se decidió indagar sobre la velocidad instantánea, cómo la habían calculado en su momento y cómo la harían ahora. Se trató de llevar a los alumnos a relacionar la velocidad en cada punto con su interpretación geométrica.

Entrevista a Vanesa

P- Pasamos a la actividad 3. ¿La velocidad es constante? (Figura 4)

V- No.

P- ¿Cómo te das cuenta?

V- Porque recorre en distintos intervalos de tiempo más o menos espacios.

P- ¿Qué ves en la gráfica?

V- Que crece y decrece.

P- Y no es una recta.

V- Sí, cuando es una recta la velocidad es constante.

P- Claro. Porque en el mismo tiempo avanza siempre el mismo espacio. En cambio en este, lo mismo que me dijiste con palabras lo ves en el gráfico. Para un segundo…

V- *(Interrumpe)* Aumenta seis, después dos.

P- Claro. Entonces, a ver, ¿te acordás el enunciado?

V- *(Lee)*

P- ¿Qué pasa con la trayectoria de la piedra? ¿Me podrías enunciar cómo es la trayectoria de la piedra a medida que transcurre el tiempo?

V- ¿Y aumenta, en los intervalos?

P- A medida que transcurre el tiempo, ¿qué pasa con la posición de la piedra?

V- Aumenta su posición.

P- Es decir, ¿que aumenta qué?

V- La velocidad.

P- Con respecto a la posición, ¿qué es lo que aumenta en realidad de la piedra, si la estás tirando hacia arriba?

V- La altura.

P- Claro, aumenta la altura, ¿hasta qué instante?

V- Hasta el dos.

P- ¿Y después?

V- Disminuye hasta el cuatro.

P- Hasta $t = 4$. ¿Qué pasa con la velocidad de la piedra?

V- Aumenta hasta el tiempo $t = 2$ y empieza a disminuir…

P- ¿Estás segura de eso? Si mirás la tabla, ¿qué columna te describe velocidades?

V- Ésta.

P- ¿Qué tipo de velocidades describe?

V- Media.

P- ¿En intervalos de qué amplitud?

V- De un segundo.

P- En el primer intervalo de un segundo, ¿la velocidad media cuál fue?

V- Seis.

P- ¿En el segundo intervalo?

V- Dos.

P- ¿Aumenta o disminuye la velocidad?

V- Disminuye. Claro.

P- Hasta dos disminuye. ¿Es lógico eso? Pensalo desde la física o desde lo intuitivo. Vos tirás una piedra hacia arriba, la piedra sube, después cae. ¿Qué tuvo que pasar para eso?

V- Disminuir…parar la velocidad.

P- ¿Y entonces?

V- Disminuye de a poco.

P- Acá lo vemos en los intervalos con las velocidades promedio. Si nosotros podríamos calcular la velocidad en cada instante veríamos lo mismo. ¿Cómo podemos hacer con lo que estudiamos para calcular las velocidades en cada instante?

V- Con la velocidad media, el límite cuando tiende a cero.

P- O sea que ahí estás calculando, ¿qué tipo de velocidad?

V- Instantánea.

P- ¿Y cómo la calculás?

V- …

P- ¿Qué concepto estás usando cuando calculás el límite?

V- ¿Derivada?

P- Sí. Y geométricamente ¿cómo la podés interpretar?

V- Con la tangente de la curva en ese punto.

P- ¿Seguro?

V- Con la pendiente de la recta.

P- Ah. Eso quiere decir que la velocidad instantánea es también ¿qué?

V- Una recta.

P- ¿Qué?

V- La pendiente de una recta.

P- Si te pregunto entonces la velocidad de la piedra en el instante t = 2. ¿Cuál es?

V- Y, cero.

P- ¿Por qué?

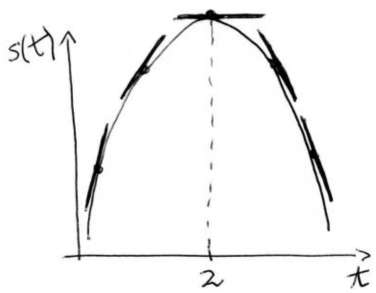
V- Porque la tangente, la pendiente de la recta tangente sería cero.

P- Claro. ¿Te animás a hacer el dibujo, a esbozarlo? Es para dibujar algunas tangentes a ver qué va pasando.

V- Sí.

P- Hacelo en esta hoja.

V- *(Dibuja)*. Acá la pendiente sería cero. Bueno, más o menos.



P- Si vos analizás las rectas tangentes que trazaste, qué va pasando con la velocidad?

V- Van decre *(se interrumpe)*. Acá están crecientes, las rectas. Y acá decrecientes.

P- ¿Qué conclusión podés sacar?

V- Que cuando las rectas tangentes son crecientes, la velocidad va aumentando.

P- …. A ver, la pendiente de la recta tangente, es a su vez, la velocidad en el instante. Recordemos lo que pasa con las velocidades medias.

V- Ajá.

P- Algunas dan positivas y algunas negativas. ¿Por qué sucede eso?

V- Porque es decreciente la recta.

P- O sea...

V- Aparte porque las velocidades decrecen.

P- ¿La velocidad decrece? A ver, porque estás mezclando las dos funciones, posición, que es la que tenés graficada y velocidad. Vamos a tratar de aclarar las cosas. Acá está graficada la posición s(t) y estamos hablando de velocidad. Acá la velocidad media da positiva en los dos primeros intervalos. Y vemos que en el primer intervalo es mayor que en el segundo intervalo. Por lo que me explicaste antes, en un segundo recorre seis metros y después en un segundo recorre dos metros.

V- Sí.

P- Después, las velocidades medias son negativas. ¿Por qué dan negativas las velocidades medias?

V- Porque baja la altura.

P- ¿Qué pasa con la piedra en esos intervalos?

V- Cae.

P- Bien. Si quiero analizar la rapidez de la piedra, cuando la piedra empieza a caer, ¿cae cada vez más rápido o más despacio?

V- Y….

P- ¿Qué te dice el sentido común?

V- Cae más rápido.

P- Cae cada vez más rápido. ¿Qué observás acá en las rectas?

V- …… *(Se ríe)*

P- ¿Qué tenés que mirar de las rectas para saber sobre la velocidad?

V- ¿La pendiente?

P- La pendiente.

V- Es como que está más inclinada….

P- O sea, la primera tiene mayor inclinación que la segunda, entonces acá, ¿cómo es la rapidez con respecto a esta otra?

V- Más chica.

P- Ajá. O sea que acá la rapidez es mayor que ésta. ¿Por qué digo rapidez?

V-…….

P- Porque la velocidad, ¿Qué signo me va a dar?

V- Negativo.

P- Entonces, si miramos los números de la tabla, menos seis es menor que menos dos, la velocidad es menor, pero lo que interesa

V- *(Interrumpe)* Es el valor absoluto.

P- El valor absoluto. Lo que me da la rapidez. El valor absoluto da la rapidez con que cae la piedra, cada vez más rápido, que lo miras acá, cada vez más inclinado.

V- Claro, entonces más inclinada, más rápido va la piedra.

P- El signo sólo indica…

V- Que la piedra está cayendo.

P- O sea, la orientación.

V- Ajá.

P- En el caso de la piedra si está subiendo o está cayendo. Bueno, acá te pedíamos la velocidad a los tres segundos, si dibujamos la recta tangente, la pendiente la calcularíamos aproximada. Me dijiste antes que exacto lo podrías hacer con la derivada, ¿te animás a hacerlo?

V- Sí.

P- Acá tenés el enunciado.

V- ¿Tengo que plantear toda la derivada o lo puedo hacer con las reglas?

P- Como quieras.

V- *(Trabaja)*. Así, porque lo otro me cuesta.

P- ¿Qué?

V- Reemplazar, pasar de un lado para otro. Cuando son muy complicadas las funciones.

P- ¿Usando la definición?

V- Claro.

P- Las reglas simplifican un montón.

V- Igual la sé a la definición. *(Calcula la derivada usando reglas prácticas y evalúa en $t=3$ correctamente)*

<u>Entrevista a Luis</u>

P- Seguimos con la actividad 3. ¿La recordás? (Figura 5)

L- *(Lee)*

P- Observando la gráfica, ¿me podés describir cómo es la trayectoria que realizó la piedra? ¿Qué va pasando con la posición de la piedra a medida que transcurre el tiempo?

L- La posición de la piedra va cambiando sería.

P- Sí. ¿Cómo va cambiando?

L- No de manera uniforme sería. Va cambiando en un movimiento que no se puede describir con una recta.

P- Explicame cómo va variando la posición de la piedra.

L- Va a subir hasta cierto punto que va a bajar.

P- ¿Hasta qué instante sube la piedra?

L- Hasta el instante dos.

P- Ahora sí, describí cómo fue la velocidad de la piedra durante el movimiento.

L- En el primer intervalo aumenta, bastante, cómo decirlo, aumenta más rápido. En este intervalo la piedra sube mucho más que en este, que es un intervalo de igual longitud.

P- Pero, ¿qué velocidad tenés en este intervalo? *(Marca la primera fila de la tabla)*

L- Seis.

P- ¿Y en éste? *(Marca la segunda fila de la tabla)*

L- Dos.

P- A medida que transcurre el tiempo, ¿que sucede con la velocidad de la piedra?

L- Va disminuyendo.

P- Sí.

L- En este instante la velocidad se hace cero y después la velocidad es negativa porque la piedra está cayendo.

P- Con lo que aprendimos durante las clases, ¿cómo te das cuenta de que en este punto la velocidad es cero?

L- Eh…

P- ¿Con qué lo podés relacionar geométricamente?

L- Eh…

P- La velocidad en un instante, geométricamente, ¿qué interpretación tiene?

L- Eh…, no me acuerdo. Yo me acuerdo que acá la recta tangente es perpendicular al eje x. *(Marca el punto de abscisa $x = 2$)*

P- ¿Seguro? ¿Cómo dibujarías la recta tangente?

L- No, acá la recta tangente es paralela al eje x, acá hay un máximo.

P- ¿Y qué pasa con la recta tangente, para qué nos sirve?

L- La pendiente de la recta tangente es la derivada en ese punto.

P- Sí, ¿y qué más? Físicamente, ¿qué significa, la derivada o la pendiente de la recta tangente?

L- Eh…Es la velocidad instantánea.

P- Entonces, como podés, relacionando esos conceptos, decir que la velocidad ahí es cero, cómo explicás.

L- Porque la pendiente de la recta tangente ahí es cero.

P- Sí.

L- Nosotros habíamos trazado la recta tangente así, así, así *(muestra en distintos puntos)* hasta que en un punto la pendiente va a valer cero.

P- Entonces si vos vas dibujando rectas tangentes en distintos puntos, ¿cómo son las pendientes?

L- Acá son positivas porque la función crece y acá son negativas porque la función decrece.

P- Son positivas, pero ¿cómo es la pendiente de la recta si la trazás por este punto y la pendiente si la trazás por este otro? *(Marca puntos donde la función es creciente)*

L- ¿Cómo?

P- ¿Cómo son entre sí? ¿Mayor, menor?

L- Acá va a ser menor.

P- Entonces, ¿qué sucede con respecto a la velocidad?

L- Ah, que en este instante la velocidad va a ser menor que en este.

P- Claro. Que al principio lo habías dicho al revés. Lo habías confundido con posición de la piedra. Pasamos a la velocidad de la piedra en cada instante. Habían escrito bien que no es constante. ¿Qué habían hecho para calcular que la velocidad es dos metros por segundo? ¿Te acordás?

L- Sí. Primero habíamos mirado lo que los demás hacían y nos pareció medio mal, entonces dijimos vamos a buscar por otro lado. Lo que sacamos acá era, trabajando rudimentario, en un segundo cuántos metros había recorrido.

P- O sea, ¿qué tipo de velocidad habían calculado?

L- Nosotros habíamos sacado la velocidad media en el intervalo (2, 3).

P- Sí. Y según lo que estudiamos después, ¿qué es lo que hicieron entonces?

L- Me acuerdo que dijimos que la que más se aproximaba era la del intervalo más pequeño alrededor del instante.

P- Bueno. Esta es la ley de la función, ¿vos podrías calcular ahora la velocidad exacta a los tres segundos de iniciado el movimiento?

L- Sí. Lo puedo hacer gráficamente pero va a ser aproximado también.

P- Claro, y para tener el valor exacto, ¿cómo lo hacés?

L- Y, con la derivada en tres…Es la primera vez que voy a derivar le cuento *(Trabaja usando reglas de derivada. Va enunciando las reglas en voz alta. Termina bien)*. Queda menos cuatro.

$$s(t) = -2.t^2 + 8t + 2$$
$$s'(t) = -2.2t + 8 + 0$$
$$s'(3) = -2.2.(3) + 8$$
$$s'(3) = -4 \frac{m}{seg}$$

<u>Entrevista a Valentín</u>

P- Esa situación cambia en la actividad 3 (Figura 6).

VR- Acá se ve. *(Muestra la tabla)*

P- Claro, si miramos las velocidades medias, ya no son las mismas. ¿Querés leerla para recordar la actividad?

VR- *(Lee).* Nosotros lo que hicimos acá fue reemplazar en s cada valor de t y restar. *(Muestra segunda columna de la tabla)*

P- Está bien. Si mirás la gráfica, ¿cómo describirías la trayectoria de la piedra? ¿Qué sucede con la piedra a medida que transcurre el tiempo?

VR- Y, en el intervalo (0, 2) la piedra aumenta la altura, y la velocidad también, no, va a ir disminuyendo la velocidad. Y en el intervalo (2, 4) la piedra va cayendo.

P- ¿Y qué pasa con la velocidad en ese intervalo?

VR- Va reduciendo, cada vez menos… No, una vez que llega a este punto, ahí empieza a aumentar.

P- A ver, si miramos la tabla de las velocidades promedios, tenemos seis, dos, menos dos, menos seis. Menos dos es más chico que dos, ¿va disminuyendo la velocidad?

VR- No….

P- ¿Qué significado tiene el menos?

VR- Que va para abajo.

P- ¿Qué va para abajo?

VR- La piedra.

P- O sea está relacionado con la posición de la piedra.

VR- Claro.

P- Lo que tengo que mirar es la rapidez de la piedra.

VR- Sin los signos.

P- La piedra va cada vez más rápido cuando va cayendo. Con lo que estudiamos en clase, a partir de la gráfica, ¿cuál es la velocidad en el instante t = 2?

VR- Cero.

P- ¿Cómo lo explicás?

VR- Con la recta tangente.

P- A ver…

R- *(Dibuja)* Te da cero.

P- ¿Qué te da cero?

VR- La pendiente.

P- Bien. ¿Qué quiere decir? La velocidad en un instante, geométricamente ¿Es lo mismo que qué?

VR- Que la pendiente de una recta.

P- En ese punto. Con esas rectas tangentes, si vos dibujás distintas rectas, en distintos puntos, dos antes del dos y después dos después, o más, las que quieras. ¿Qué conclusión podés sacar mirando las rectas tangentes?

VR- ¿La velocidad?

P- ¿Qué pasa con la velocidad?

VR- Acá aumenta y va disminuyendo, a medida que se acerca a cero. Es decir te das cuenta por la pendiente de la recta.

P- Sí, pero acá no aumenta, o sea acá es mayor que acá, porque si vos a su vez, dibujás la tangente en un punto anterior, ¿cómo va a ser la pendiente?

VR- Mayor que ésta.

P- Claro. Entonces va disminuyendo hasta llegar al instante dos, ¿ahí que pasa?

VR- Vale cero.

P- Después la pendiente es negativa, ¿eso qué significa?

VR- Que la piedra baja.

P- Entonces siempre mirás los valores absolutos para comparar velocidades. El signo se relaciona con la posición. Este concepto que te permite calcular la velocidad instantánea y la pendiente, ¿cuál es? Matemáticamente, ¿qué nombre recibe?

VR- La derivada.

P- Bien. Entonces acá, cuando pedimos la velocidad de la piedra a los tres segundos de iniciado el movimiento, ¿te acordás por qué escribieron esta respuesta?

VR- No.

P- ¿Querés revisar para ver si te acordás?

VR- Habré hecho lo de Δy sobre Δx. Ah, ¿pero de qué punto? … *(Piensa)* La velocidad en éste va a ser la misma que en éste.

P- La rapidez.

VR- Habré hecho ocho menos dos sobre uno menos cero, pero no me da.

P- Hasta los dos segundos, ¿cuánto recorrió la piedra?

VR- Ocho. No, diez.

P- A los dos segundos, ¿en qué posición estás?

VR- En diez.

P- ¿Cuánto recorrió?

VR- Diez.

P- ¿De dónde salió?

VR- De dos.

P- ¿Cuánto recorrió?

VR- Ocho.

P- Y del segundo dos al segundo tres, ¿cuánto recorrió?

VR- Tres metros, no,…

P- Fue de acá a acá.

VR- Seis.

P- Acá, ¿en qué posición estás?

VR- Diez menos dos … ocho. Entonces recorrió ocho, ocho y ocho.

P- No, hasta los dos segundos, ¿cuánto recorrió la piedra?

VR- Diez, sería menos estos dos, entonces ocho.

P- Y en el último segundo, ¿Cuántos metros recorrió?

VR- Ocho, no, seis, porque tenés ocho menos estos dos.

P- ¿Estás seguro?

VR- No.

P- Anotá la posición que estás en cada instante.

VR- Primero en diez y después en ocho, o sea recorrió dos, a sí, sí, ya entendí.

P- O sea, ¿cuánto recorrió en total la piedra?

VR- Diez.

P- Entonces, si hacés la velocidad media con ese valor tampoco te da 2,66. Yo creo que lo que hicieron fue ocho dividido tres, es decir tomar la posición de la piedra y dividirlo por el tiempo transcurrido. Tienen que tener cuidado para el caso de calcular la velocidad media. Si lo hacen de esa manera está mal, porque no buscaron el espacio recorrido…

Vos dijiste antes que la velocidad instantánea la calculás con la derivada, ¿la podés calcular para esta función?

VR- No.

P- ¿No te acordás?

VR- No. Lo podía aproximar por derecha y por izquierda…

P- Sí. Bueno, vemos si con otras actividades recordás.

<u>Análisis</u>

Las entrevistas revelan en general dificultades para la interpretación del movimiento. En la hoja de trabajo tenían la gráfica y la tabla con las velocidades medias en los distintos intervalos, pero les costó relacionar y complementar los datos de ambos registros.

Luis y Vanesa confundieron la trayectoria con la velocidad. Lograron darse cuenta cómo es realmente la situación de diferentes maneras: observando los valores de las velocidades medias en los distintos intervalos, relacionando con las pendientes de las rectas tangentes asociadas a la velocidad en distintos instantes, apelando a la intuición o el sentido común.

Valentín explicó correctamente el comportamiento de la piedra, y también de su velocidad. El problema que tuvo para explicar la velocidad en los otros dos segundos está claramente relacionado con la diferenciación entre esta noción y la de rapidez.

Esta confusión también apareció en los otros alumnos. Según las respuestas y las dificultades que presentaban, en algunos casos se ahondó más que en otros. A Vanesa y Valentín se les preguntó directamente por el significado de rapidez y velocidad, de manera de analizar si interpretaban y diferenciaban ambas nociones. Se notó mucha dificultad en este sentido.

Valentín tuvo muchos problemas para determinar el espacio recorrido hasta los tres segundos.

Consideramos que el hecho de aparecer velocidades negativas complicó en exceso la interpretación de esta actividad.

La inclusión de un problema correspondiente a un movimiento no uniforme, es decir con velocidad variable, pero siempre en la misma dirección, puede favorecer la diferenciación de las distintas situaciones y, por lo tanto, la comprensión de estas nociones.

En otros aspectos manifestaron mucha claridad. Todos interpretaron geométricamente para expresar que la velocidad en $t = 2$ es cero. Esto dio lugar a conversar sobre la relación entre la pendiente de la tangente en un punto con la velocidad instantánea y/o la derivada en un punto. También a trabajar con la recta tangente y el signo y/o el valor absoluto de la velocidad. Se notó que tienen incorporada la idea que para cada uno de los valores de la función se puede asociar una recta tangente. Esta concepción y su visualización gráfica contribuyen en gran medida a la comprensión de la derivada.

Se les consultó también sobre la velocidad a los tres segundos, manifestando que para obtener su valor exacto debían calcular la derivada de la función en ese punto. Al solicitarles que la determinen, Valentín no recordó cómo mientras que Vanesa y Luis la calcularon con reglas prácticas. También se les preguntó sobre el signo de la velocidad a los tres segundos. Relacionaron de manera correcta el hecho de que sea negativo con la piedra que está cayendo.

Resumiendo, las transcripciones referidas a esta actividad muestran que los alumnos trabajaron el concepto de tangente que va cambiando en cada punto, dieron significado a la pendiente como algo que permite ver los cambios, la relacionaron con las funciones crecientes y decrecientes sin que eso haya sido explícitamente objeto de enseñanza. Todo esto ayuda a dar significado a la derivada en el plano gráfico y geométrico.

Actividad 1 – Segunda parte de la secuencia

En la actividad 4 de la primera parte de la secuencia se trabajó la aproximación numérica de la velocidad instantánea a través del cálculo de las velocidades medias en intervalos cada vez más pequeños alrededor del punto en cuestión. Muchos alumnos habían presentado dificultades o incluso no habían completado la tabla.

Al retomar este aspecto en la primera actividad de la segunda parte de la secuencia, observamos que las tablas estaban completas de manera correcta, por lo que consideramos que las dificultades en este sentido habían sido superadas en las instancias de debate grupal e institucionalización.

Por esta razón, y por los tiempos disponibles, decidimos analizar esta actividad y abordar directamente el cálculo de la velocidad de la bola en el instante $t = 1$. Posteriormente preguntamos sobre la relación de las velocidades promedio con las pendientes de las rectas secantes y la velocidad instantánea con la pendiente de la tangente.

<u>Entrevista a Vanesa</u>

P- Vamos a trabajar con la actividad 1 de la otra guía. ¿Querés leerla?

V- Bueno. *(Lee)*

P- ¿Está?... En el inciso a) calculamos una velocidad promedio y en el inciso b) calculamos también velocidades promedio en intervalos más chicos.

V- Sí.

P- Les preguntamos cuál sería aproximadamente la velocidad en el instante $t = 1$. Ustedes contestaron 35, ¿te acordás por qué?

V- Porque era la que más se acercaba.

P- En ese momento no sabían calcular la velocidad exacta con la derivada. Así que lo hicimos de una manera aproximada. Bueno, en el inciso d) tenían la misma gráfica y tenían que calcular las pendientes de las rectas secantes que unen dos puntos. Estos valores que obtuvieron, ¿qué relación tienen con las velocidades promedio? Esto es lo que no escribieron ustedes (Figura 7).

V- Son iguales. Deberían ser iguales.

P- Trabajaron con los mismos números, escribieron todos los cálculos de nuevo. ¿No se dieron cuenta que estaban haciendo lo mismo?

V- Sí, pero a la mitad que habíamos hecho todo.

P- Está bien. O sea, después se dieron cuenta. ¿Cómo enunciarías la conclusión?

V- La pendiente de la recta de la curva es igual a la velocidad promedio.

P- ¿Qué pendiente?

V- De la recta secante. ..a las velocidades por esos puntos.

P- Por otro lado, la pendiente de la recta tangente, ¿coincide con qué?

V- La derivada… *(Se corta).* Con la velocidad instantánea.

P- Después vimos que coinciden con la derivada.

<u>Entrevista a Luis</u>

P- Vamos a la otra guía, a la actividad 1. Primero en el inciso a) y en el b) calculamos velocidades promedio y después te preguntamos cuál de todas era la más cercana a la velocidad en el instante $t = 1$. ¿Te acordás por qué respondieron 25 metros por segundo?

L- Sí, buscamos el intervalo más corto, con valores más cercanos.

P- Porque era el intervalo más pequeño. ¿Es la velocidad exacta en $t = 1$?

L- No. Es aproximada.

P- En el 1)b) y en el d) habían trabajado con valores diferentes, pero después escribieron que las velocidades medias coinciden con las pendientes, ¿por qué?

L- Sí, después nos dimos cuenta de que era lo mismo y ni lo hubiéramos necesitado hacer.

P- ¿Y la pendiente de la recta tangente? (Figura 8)

L- Coincide con la velocidad instantánea.

<u>Entrevista a Valentín</u>

P- Vamos a pasar a la otra guía. En el 1)b) calculamos las velocidades medias en distintos intervalos. Cuando te pregunta cuál es aproximadamente la velocidad instantánea en t = 1, ustedes respondieron 15 centímetros por segundo. ¿De dónde salió el 15? ¿Qué hicieron ahí?

VR- Otra vez delta y sobre delta x.

P- Es decir, otra vez calcularon una velocidad media. Cuando el movimiento no tiene velocidad constante, ¿la velocidad media coincide con la velocidad en cada instante?

VR- No.

P- ¿Y para qué hicimos los intervalos cada vez más chicos? ¿Cual de todas éstas va a ser la velocidad más aproximada a la verdadera velocidad en t = 1?

VR- 0,8. *(Da como respuesta la amplitud del mayor de los intervalos de tiempo)*

P- Fijate, los intervalos son así, esto es Δt, entonces armamos los intervalos [1; 1,8] … [1; 1,2]. Las velocidades promedio están bien calculadas. De las cuatro velocidades promedio que ustedes calcularon acá, ¿cuál es la más cercana a la velocidad real en t = 1?

VR- Ésta. *(Muestra la velocidad correcta)*

P- ¿Por qué?

VR- Porque es la más cercana al uno.

P- Porque es la que se calcula con el intervalo más pequeño. Cuando hicimos esto intentamos hacer la mejor aproximación a la velocidad. Ahora no necesitamos hacerlo así porque la podemos calcular exacto.

VR- Con la derivada.

P- Cuando en el inciso siguiente calcularon las pendientes y escribieron la relación que observaban, anotaron son similares, porque obtuvieron números parecidos. Ustedes acá no escribieron los cálculos así que yo no sé bien cómo lo hicieron. (Figura 9)

VR- *(Señala las gráficas)*

P- Sí. Los datos que usamos acá, ¿no eran los mismos que usamos acá?

VR- Sí, sí, son parecidos, son semejantes.

P- Si calculamos la velocidad promedio y la pendiente de la recta secante en el mismo intervalo, ¿qué pasa?

VR- ¿Es lo mismo?

P- Sí.

VR- Y, va a ser igual.

P- Es el mismo valor. En el punto siguiente, les pedía que al trazar la recta tangente en un punto encontraran qué relación tiene con la velocidad instantánea. No lo respondieron acá.

VR- La pendiente…

P- ¿La pendiente de qué?

VR- Es igual a la velocidad promedio.

P- ¿La velocidad promedio?

VR- La media.

P- La velocidad promedio y la media es lo mismo, es la velocidad en un intervalo.

VR- Ah, ahora estamos calculando en el momento.

P- Es la velocidad instantánea.

<u>Análisis</u>

Al momento de resolver la actividad en el trabajo en grupo, Luis y Vanesa habían elegido para la velocidad instantánea el valor correspondiente a la velocidad promedio en el intervalo [1; 1,2], o sea el más pequeño alrededor de $t = 1$ y, al ser entrevistados, recordaron que lo hicieron de esa forma porque tenían que buscar la mejor aproximación.

Valentín explicó que al resolver la actividad en la hoja había aplicado la fórmula espacio sobre tiempo. De esta manera, y como ya reconoció en una actividad anterior, se refiere a la fórmula de velocidad media. Dado que habían considerado una amplitud de un segundo, explicó que debe buscar una mejor aproximación. Con dificultad, luego de ser orientado sobre el significado de cada fila de la tabla, indicó que la del último intervalo es la más apropiada.

Todos explicaron además que no es la velocidad exacta.

Con respecto a la relación de las velocidades promedio con las pendientes de las rectas secantes, tanto los que la habían descubierto resolviendo la actividad como los que no, recordaron que los cálculos realizados en los incisos b) y d) son los mismos, que no los hubieran necesitado hacer y que entonces, la velocidad promedio en un intervalo coincide siempre con la pendiente de la recta secante que une los puntos que corresponden a los extremos del intervalo.

Excepto Valentín, los demás recordaron también que la velocidad instantánea coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.

Actividad 2 – Segunda parte de la secuencia

En esta actividad se habían presentado muchas dificultades en el trabajo algebraico y en la interpretación de resultados. Se indagó sobre estos aspectos y, según los casos, se preguntó sobre la definición de derivada de una función en un punto.

Entrevista a Vanesa

P- En la actividad 2 trabajamos con intervalos todavía más pequeños que en la primera. Les preguntamos qué pasaría si el intervalo fuera infinitamente pequeño. Y ustedes comprobaron después que si hacían el límite de la expresión obtenían el mismo valor. (Figura 10)

V- Sí.

P- Esta actividad que no alcanzaron a terminar, ¿te animarías a hacerla ahora?

V- Bueno.

P- El inciso e).

V- ¿Con esta función?

P- Sí.

V- *(Trabaja)* ¿Con qué valores lo hago?

P- ¿En qué valor te pide que evalúes?

V- ¿t_0?

P- Sí. Entonces la función es ésta y la tenés que trabajar en este punto, t_0.

V- Lo dejo expresado. *(Sigue trabajando)*

P- El cubo del binomio, ¿te acordás la fórmula? Lo habían trabajado acá.

V- *(Lo va diciendo con ayuda de la profesora)* Esto puedo cancelar…No sé qué más.

P- ¿Qué te queda en ese límite?

V- *(Piensa)*…Me queda una indeterminación.

P- Ajá.

V- Tengo que sacar este acá afuera.

P- Bueno.

V- *(Sigue trabajando)*. Ahora sí. Sería ésto.

P- Sí.

V- ¿Lo expreso también?

P- Escribí el resultado.

V- *(Trabaja)*

P- Ahí ya calculaste el límite.

V- Sí, no, tengo que reemplazar, eh, sí.

P- Entonces no escribas más límite, ya lo calculaste.

V- Ah, es verdad.

P- Bien, ese es el resultado. A partir de ahí, ¿te acordás que en el inciso d) lo habías calculado en dos? Si vos ahora reemplazas t_0 por un punto cualquiera, por ejemplo el dos, ¿cuánto te da el límite?

V- Doce.

P- Fijate que es lo mismo que obtuvieron acá.

V- Sí.

P- Lo estás trabajando para un valor cualquiera t_0 del dominio de la función.

V- Sí, eso sí.

P- Entonces, fijate que acá pedíamos que interpreten física y geométricamente el resultado. ¿Qué significa esto, entonces en el problema, desde la física?

V- La velocidad en un instante.

P- ¿En qué instante?

V- En el instante dos.

P- ¿Y en general?

V- Ah, en el instante t_0.

P- Sí, ¿y geométricamente?

V- La pendiente de la recta tangente.

P- A la grafica de s(t) en t_0.

V- En t_0.

P- Y me dijiste que este límite, ¿qué nombre recibe en general?

V- Derivada.

P- ¿Te animás a escribir la definición de derivada?

V- ….

P- ¿A qué se llama derivada de una función f cualquiera en un punto?

V- Es igual al límite, yo lo hago con h el límite de f. *(Sigue escribiendo y diciendo)*

P- ¿En qué punto estás calculando la derivada?

V- En x_0.

P- Claro. Siempre que este límite exista, existe la derivada. Eso es lo que te faltaría en la definición.

V- ¿Siempre que exista?

P- Sí. Porque, ¿siempre existe un límite?

V- No.

P- Bueno, muy bien.

<u>Entrevista a Luis</u>

P- Repasá la actividad 2.

L- *(Lee)*

P- Fijate qué significa esta expresión *(se refiere a la respuesta del inciso c)* (Figura 11)

L- La velocidad en un intervalo.

P- ¿En qué intervalo?

L- En [2, 2+ Δt].

P- Sí. Entonces, ¿qué significa el límite de esa expresión cuando Δt tiende a cero?

L- Sí, estamos sacando el valor aproximado de la velocidad instantánea. Cuando hacemos que delta t tienda a cero, estamos yendo al primer instante, que sería el dos.

P- Ahora, cuando vos calculás el límite, el resultado no es un valor aproximado, sino que es el valor exacto de la velocidad instantánea.

L- Ah… ¿no es una aproximación?

P- No, el límite te da la velocidad exacta. Una aproximación obtenés si trabajás numéricamente, por ejemplo, mediante una tabla, haciendo cada vez más pequeño delta t o si lo hacés gráficamente, que trazás la tangente y estimás la pendiente.

L- Ah, perfecto.

P- Este límite que te da la velocidad instantánea, ¿qué concepto matemático representa?

L- Es la definición de derivada.

P- ¿Podrías anotar la definición de derivada?

L- Sí…

P- Entonces la derivada, ¿para qué te parece que te puede servir para tu carrera?

L- Uy… me mato.

P- ¿Dónde aparece la derivada? ¿En qué situaciones?

L- Se puede aplicar en un montón de cosas. Velocidad de partículas, en el laboratorio, cuando hay cambios.

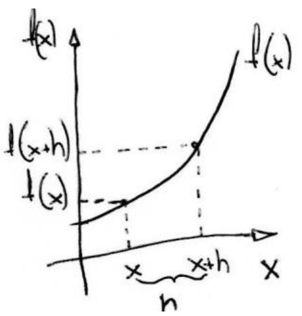
P- En la definición de derivada, ¿qué significa esta expresión? *(Señala el numerador)*

L- ¿Desglosando? Esto es un intervalo.

P- A ver, dibujá la gráfica de cualquier función. Marcá x y x+h.

L- *(Dibuja y marca)*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



P- Entonces, ¿qué significa lo que está en el numerador?

L- Esto *(marca en la fórmula),* el delta y, el cambio de la variable dependiente.

P- ¿Y en el denominador?

L- El cambio de la variable independiente. La derivada es un cociente entre cambios.

P- ¿Qué del cociente?

L- El límite cuando h tiende a cero.

P- Fijate entonces acá. Esto es la derivada, ¿de qué función, en qué punto?

L- En el punto t_0, derivada de la función s(t).

Entrevista a Valentín

P- Bueno, veamos la actividad 2. Vamos a intentar completarla un poco. Acá cuando completaron la tabla tenés un error. (Figura 12)

VR- Sí, lo corregimos después.

P- A ver, ¿podés hacer esto que no terminaron? *(Se refiere al inciso c)*

VR- *(Revisa y trabaja, duda, quiere simplificar mal Δt)*. No, acá Δt está sumando.

P- Fijate que aparece en todos los sumandos, ¿qué podés hacer si lo querés simplificar?

VR- Factor común.

P- Sí.

VR- Saco Δt *(Termina bien, empieza el inciso d)*. Para sacar el límite, ¿tengo que resolver esto? *(Señala el cociente en la hoja)*

P- Sí, ¿no lo hiciste antes?

VR- No.

P- ¿Qué te pedimos en el inciso c)?

VR- Velocidad media de la partícula en el intervalo…

P- Pero fijate la expresión.

VR- Ah, o sea ¿sería el límite de esto?

P- Claro, ¿lo vas a volver a hacer?

VR- No, no hace falta, ya está. Límite de esto acá.

P- Bueno, ¿qué significa ese límite, qué es el 12?

VR- ….

P- Fijate, ¿esta expresión, qué representa?

VR- La velocidad media.

P- ¿En qué intervalo?

VR- [2, 2 + Δt].

P- Si vos ahora hacés el límite de esa expresión cuando Δt tiende a cero, ¿que estás calculando?

VR- La velocidad.

P- ¿Qué tipo de velocidad?

VR- Media, no digo, instantánea.

P- Como Δt es infinitamente pequeño, estás calculando la velocidad en un instante. ¿En qué instante?

VR- Cero.

P- No.

VR- ….

P- Lo que se hace cero es la amplitud del intervalo pero, ¿en qué instante estás calculando la velocidad?

VR- ….

P- En dos. En el e) te pedíamos este límite, que no lo habían hecho. ¿Lo hacés ahora?

VR- ¿En t_0, o sea en el tiempo $t = 0$?

P- En un instante t_0 cualquiera significa, antes te pedimos calcular la velocidad en dos, ahora en cualquier instante.

VR- *(Trabaja, en el planteo tiene problemas de redacción).*

2) c. $\frac{2^3 + 3.2^2.\Delta t + 3.2.\Delta t^2 + \Delta t^3 - 8}{\Delta t} =$

$\frac{\cancel{8} + 12\Delta t + 6\Delta t^2 + \Delta t^3 - \cancel{8}}{\Delta t}$

$\frac{12\Delta t + 6\Delta t^2 + \Delta t^3}{\Delta t} =$

$\frac{\cancel{\Delta t}.(12 + 6\Delta t + \Delta t^2)}{\cancel{\Delta t}} =$

d)- $\lim_{\Delta t \to 0} 12 + 6\Delta t + \Delta t^2 = \lim_{\Delta t \to 0} 12 + 6.0 + 0^2 = \boxed{12}$

e) $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t)^3 - s(t_0)}{\Delta t} =$

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{t_0^3 + 3.t_0^2.\Delta t + 3t_0\Delta t^2 + \Delta t^3 - t_0}{\Delta t} =$

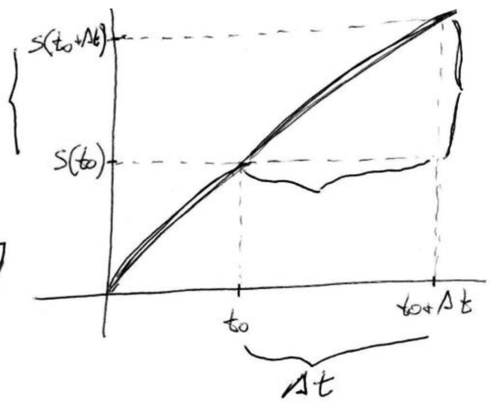
$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{t_0^3 + 3t_0^2.\Delta t + 3t_0\Delta t^2 + \Delta t^3 - t_0^3}{\Delta t}$

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{3t_0^2.\Delta t + 3t_0\Delta t^2 + \Delta t^3}{\Delta t}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\Delta t}\,(3t_0^2 + 3t_0\Delta t + \Delta t^2)}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} 3t_0^2 + 3t_0\Delta t + \Delta t^2$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} 3t_0^2 + 3\cancel{t_0}\cdot 0 + \cancel{\Delta}^2 = \boxed{3t_0^2}$$



P- Está bien. ¿Podrías decirme entonces lo que hicimos en los incisos c), d) y e)?

VR- …

P- En el inciso d) calculaste un límite que te dio 12, ¿qué es ese 12?

VR- Límite.

P- Pero en el problema, ¿qué es ese 12?

VR- Cómo me cuesta ésto.

P- Primero en el inciso c) calculamos la velocidad promedio en un intervalo. Entonces cuando hicimos el límite cuando Δt tiende a cero, ¿qué calculás?

VR- La velocidad.

P- ¿Qué velocidad?

VR- Instantánea.

P- Entonces acá, ¿qué calculamos?

VR- La velocidad promedio.

P- No, si hicimos lo mismo, ¿qué cambió de un inciso a otro?

VR- Los valores. Lo hicimos en general, o sea.

P- Entonces, de esta manera, físicamente, calculamos la velocidad

VR- *(Corta)* Instantánea.

P- ¿Y en qué instante?

VR- En t_0.

P- Geométricamente, ¿esa velocidad en el instante qué significa?

VR- La pendiente de la recta.

P- ¿Qué tipo de recta?

VR- Tangente.

P- Tangente, ¿en qué punto?

VR- t_0.

P- Este límite, escrito así, que te permite calcular la velocidad instantánea o, en general, para cualquier problema, la razón de cambio instantánea, y la pendiente de la recta tangente, ¿qué es?

VR- …

P- ¿Cómo llamamos a este límite desde la matemática?

VR-…

P- Ese límite es la derivada de la función en el punto.

VR- No me acuerdo.

Análisis

Se observa en primer lugar que los que no habían completado en la secuencia lo correspondiente al trabajo algebraico para la determinación de la velocidad promedio e instantánea, lo hicieron al momento de la entrevista.

En Luis y Vanesa se detectó más claridad en sus manifestaciones. Se notó comprensión de los conceptos y que los recordaban. Pudieron relacionar correctamente el límite del cociente incremental con la velocidad en un instante, con la pendiente de la recta tangente y la derivada de una función en un punto. Cuando se les solicitó que escriban la definición, lo hicieron simbólicamente (como había sido dada en clase) y pudieron interpretar cada término.

En cambio a Valentín le costó bastante distinguir las distintas nociones, recordar y relacionar con lo trabajado anteriormente. No fue capaz de relacionar la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente con la derivada en un punto. Manifestó directamente que no recordaba qué es la derivada.

En la respuesta de Luis se observó que no le quedó claro que con el límite del cociente incremental se calcula el valor exacto de la velocidad en el instante, sino que habló de aproximación. Esta es una dificultad propia del límite que debe ser trabajada con más profundidad. Se presentaron también dificultades de notación y en el trabajo algebraico.

Conclusiones

La revisión de las respuestas nos ha permitido analizar con mayor profundidad los procedimientos utilizados por los alumnos y los argumentos utilizados por ellos para fundamentar sus respuestas.

En primer lugar, con respecto a los registros observamos que se apoyaron bastante en el gráfico para obtener información. Cuando se les complicó recurrieron al numérico (tablas) o al analítico (leyes de las funciones).

En relación a los contenidos involucrados, observamos la persistencia de dificultades con respecto a las nociones físicas requeridas para la resolución de las actividades, así como la resistencia al cambio de algunas concepciones de los estudiantes.

Una dificultad importante fue describir el comportamiento de la velocidad de la piedra para el caso de un movimiento no uniforme. Este aspecto no estaba contemplado como objetivo de la secuencia, pero surgió en las respuestas de los alumnos ante la pregunta planteada. Observamos que no todos recurrieron al sentido común o la intuición para responder. Durante la entrevista algunos se dieron cuenta cuando relacionaron con las pendientes de las tangentes. Estas observaciones confirman los resultados de otras investigaciones sobre los problemas de los alumnos para interpretar aceptablemente las gráficas que representan movimiento físico (Dolores, Alarcón y Albarrán, 2002). Los resultados no fueron mejores al complementar la situación con el registro numérico.

El trabajo realizado con la resolución de la secuencia no fue suficiente para la interiorización de todo lo desarrollado. Luis y Vanesa, de rendimiento general en la materia bastante bueno, son los que mostraron a lo largo de la entrevista mayor nivel de comprensión de las nociones involucradas, además de recordar y manifestar lo trabajado en la institucionalización. Valentín presentó más dificultades en la entrevista, acordes a su desempeño general en matemática.

Sin embargo nos mostramos conformes, ya que pudimos constatar que las distintas actividades motivaron a los alumnos a pensar sobre diversos aspectos variacionales. Observamos que pudieron realizar un vínculo entre la pendiente vista como un número (visión estática de la pendiente) y la pendiente variable de la tangente. En algunos casos apareció la idea de dirección de una curva. Como se menciona en Artigue (1998), esto lleva implícita la idea de tangente dinámica. A partir del tratamiento de esta noción han aparecido ideas de tipo variacional relacionadas con función creciente y decreciente, puntos donde la función no crece ni decrece (máximos y mínimos). Las inclinaciones que tiene la recta tangente en los diferentes puntos de una curva nos dan una idea de que tan rápido está cambiando eso que está cambiando, lo cual está relacionado con el valor que tiene la derivada al ser evaluada en cada uno de los puntos de la curva. El signo de la derivada está relacionado también con estos aspectos.

Conclusiones de este tipo sólo pueden obtenerse si se han desarrollado algunas estrategias del pensamiento y lenguaje variacional.

Debemos tener en cuenta que, debido a los paros, luego de las clases correspondientes al desarrollo de la secuencia, sólo una comisión tuvo una clase de práctica de los contenidos trabajados. La semana siguiente se continuó con el desarrollo de los temas. Esto, sumado a que los alumnos no dedicaron tiempo en sus casas, ya que era una semana con muchas exigencias (recuperatorio de matemática y evaluaciones parciales en otras asignaturas), influyó también, ya que no fijaron lo trabajado.

5.5.2 La evaluación de contenidos

Con la finalidad de obtener más datos que aporten a la valoración de los resultados de la implementación de la ingeniería, estaba previsto implementar un cuestionario de contenidos al final de su desarrollo. Por motivos de organización de la cátedra, teniendo en cuenta especialmente los tiempos disponibles, decidimos considerar directamente el examen parcial con el cual debían evaluarse, entre otros, los contenidos desarrollados con la secuencia.

Esta evaluación forma parte de la currícula de la asignatura Matemática II y es condición obligatoria para regularizar la asignatura.

Las preguntas se prepararon especialmente con el objetivo de analizar el aprendizaje de los alumnos sobre los temas impartidos y conocer el grado de apropiación del saber institucionalizado. Dada la cantidad de alumnos a evaluar se decidió elaborar dos temas.

En esta sección se presentan las preguntas relacionadas a la secuencia, un breve análisis de las mismas y un estudio, esencialmente cualitativo, de las respuestas dadas por 26 alumnos (de los cuales 16 resolvieron el tema I y 10 el tema II). Las evaluaciones analizadas corresponden a los alumnos integrantes de los equipos cuyas hojas de trabajo fueron consideradas en el análisis a posteriori y que asistieron al parcial[5].

Descripción de las preguntas

Las preguntas se diseñaron con la idea de explorar los avances y obstáculos en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos.

Específicamente indagan sobre el comportamiento variacional de las funciones relacionado a la noción de derivada. Pretenden además identificar el tratamiento en los registros semióticos de representación: verbal, numérico, gráfico y analítico, así como si existen rasgos de conversión entre ellos.

Dado que hasta el momento del parcial se avanzó en el desarrollo de los contenidos y se resolvieron problemas aplicados a diferentes contextos (específicos de la agronomía, de la biología, de la economía, de la administración, etc.), en la evaluación se incluyeron situaciones variadas, que van más allá del contexto físico planteado en la secuencia.

Se enuncian a continuación algunas preguntas del parcial, describiendo sus características y los conocimientos que se pretenden movilizar con cada una, además del tipo de respuestas esperadas.

<u>TEMA I</u>

<u>Pregunta 1</u>

Elija la opción correcta y justifique la respuesta elegida.

La razón de cambio media de una función en el intervalo [a, b] es:

i) La derivada de la función en a.

ii) La pendiente de la recta secante a la gráfica de la función que une los puntos de abscisas a y b.

En esta pregunta, planteada en el registro verbal, se indaga sobre el significado geométrico de la razón de cambio media como la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función que une los puntos cuyas abscisas corresponden a los extremos del intervalo, sometiéndolo a contraste con la noción de derivada de una función en un punto.

[5] La disminución en la cantidad de alumnos con respecto a los considerados en el análisis de la secuencia, se debe a que en una semana intermedia entre la implementación de la secuencia y la evaluación, los alumnos tuvieron el recuperatorio del primer parcial. Dado que la secuencia se llevó adelante en el cursado normal y fue implementada dentro del marco de las exigencias de regularidad, los alumnos que no lo aprobaron, si bien siguieron asistiendo a las clases, no pudieron rendir el segundo parcial, que es el que corresponde a la evaluación considerada en la tesis.

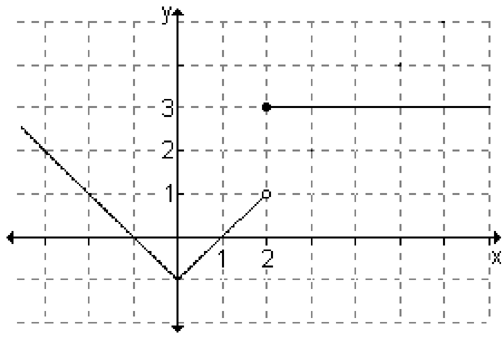
A pesar de que se trata de una pregunta de selección, se solicita justificación. Con la misma pretendemos analizar los distintos argumentos que los alumnos utilizan para explicar. Nos interesa observar si se manejan en el registro verbal o utilizan recursos pertenecientes a otros registros (gráfico, analítico).

Pregunta 2

Dada la función y = f(x) definida gráficamente:

a) Analice los puntos en los que no es derivable.

b) Determine la derivada en x = –2 y x = 4. Explique cómo obtiene.



Esta actividad permite explorar el tratamiento de la información presentada en el registro gráfico. Los alumnos pueden elaborar la respuesta trabajando en este registro o convirtiendo a otro (analítico, numérico).

Se presenta una función por tramos y se pide en primer lugar el análisis de los puntos donde la función no es derivable. Este inciso no se tendrá en cuenta en el análisis ya que su resolución implica aspectos que van más allá de los contenidos de la secuencia.

En segundo lugar se solicita el cálculo de la derivada en dos valores del dominio. Los mismos se pueden deducir fácilmente, sin ningún cálculo, a partir del análisis del comportamiento variacional de la función presentada. Esto exige que los alumnos hagan la correlación entre la recta que representa una situación de cambio constante, la pendiente de la recta como la medida de la razón de cambio constante y la derivada (razón de cambio instantánea) coincidiendo con ese valor.

Pretendemos analizar si son capaces de, a partir del gráfico, reconocer que, para x = –2 la derivada es menos uno ya que es la pendiente del tramo de recta que corresponde según la abscisa y, análogamente, en x = 4, la derivada vale cero.

Por los temas desarrollados hasta el momento del parcial, los alumnos pueden también convertir al registro analítico, determinando la ley de la función y calcular la derivada en cada punto, aplicando definición o reglas prácticas.

Pregunta 3

Una epidemia azota a los habitantes de una ciudad y los médicos estiman que la cantidad de personas enfermas t días después del principio de la epidemia está dada por e(t).

i) Explique el significado de e(30) = 2700 y e' (30) = 90 en términos de la situación planteada.

ii) ¿Por qué es significativo el signo de e' (30)?

A partir de una situación de cambio presentada en los registros verbal y analítico se solicita el significado del valor numérico de la función que la modela en un punto y del valor de la derivada en el mismo punto. Esto permite analizar qué conocen respecto de la información que proporciona la derivada en un punto acerca de la función, además del significado del signo de la misma.

Esperamos que recurran a la interpretación física de la derivada en un punto, para explicar su significado en el problema. Pretendemos identificar si realizan el tratamiento en los registros planteados o si convierten al gráfico.

Pregunta 4

Se le suministra suero a un paciente, inyectándole un medicamento para combatir cierta deficiencia en la sangre. La cantidad de medicamento inyectado (en miligramos) está dada por $s(t) = 0{,}01t^{\frac{2}{3}}$ donde t está dado en segundos.

i) ¿Cuánto medicamento se inyectó durante el segundo minuto, es decir entre los 60 y los 120 segundos?

ii) ¿Cuál es la razón de cambio media de la cantidad de medicamento inyectado con respecto al tiempo durante el segundo minuto?

iii) Para que el medicamento tenga efecto, al cabo de 64 segundos se debe estar suministrando al paciente un mínimo de 0,0015 miligramos por segundo. ¿Se cubre este requerimiento? ¿Por qué?

En esta actividad se explora, a partir de la expresión algebraica de una función, la interpretación de una situación específica de cambio. Se trata de identificar el tratamiento en los registros verbal y analítico así como la conversión de uno a otro y al numérico.

El primer inciso está relacionado con la cuantificación de la variación por medio de diferencias. Se requiere la evaluación de la función en dos valores particulares del dominio, $t = 60$ y $t = 120$, y la obtención de la diferencia $s(120) - s(60)$ a partir de la expresión matemática de la función.

En el punto siguiente se exige la cuantificación relativa de la variación por medio de la velocidad media para el mismo intervalo.

En el último inciso se requiere la identificación de la razón de cambio instantánea con la derivada de una función en un punto y la determinación de su valor para poder comparar y enunciar la respuesta. Para nuestro trabajo, se evaluará solamente el primer aspecto y no el cálculo de la derivada, cuestión no contemplada en la secuencia.

Pregunta 5

Disponemos de la representación gráfica de una función f y nos piden que calculemos la derivada de f en un punto, ¿podríamos hacerlo? En caso afirmativo, explique cómo lo haría y muestre con un ejemplo.

La pregunta planteada en el registro verbal, indaga acerca de la interpretación geométrica de la derivada en un punto como la pendiente de la tangente a la gráfica en dicho punto.

Esperamos que los alumnos expliquen verbalmente, apoyándose en el registro gráfico. De acuerdo al enunciado de la pregunta, al proponer el ejemplo, deberían considerar únicamente dicho registro. Analizaremos si trabajan de esa manera o si recurren al registro analítico, planteando la ley de la función.

Pregunta 6

Calcule la derivada de $f(x) = -2x^2 + 3$ en $x = -1$ usando la definición.

En esta actividad se explora el conocimiento de la definición de derivada y su aplicación para el cálculo de la derivada de una función definida algebraicamente. Esto requiere el planteo y resolución de un límite. Exige básicamente el trabajo en el registro analítico. Los alumnos pueden plantear y calcular directamente $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$, o bien pueden determinar la función derivada $f'(x)$ y luego sustituir x por -1.

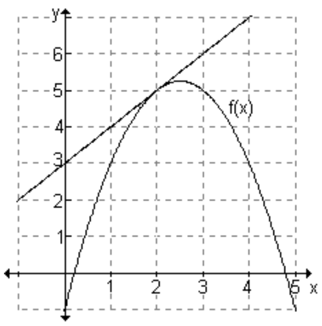
TEMA II

Pregunta 1 ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? Explique.

i) $f'(2) = 5$ **ii)** $f'(2) = 3$

iii) $f'(2) = -1$ **iv)** $f'(2) = 1$

v) $f'(2) = \frac{3}{5}$ **vi)** Otro: ....



En esta actividad, de opción múltiple, se presenta la representación gráfica de una función y la recta tangente en determinado valor del dominio. Se solicita el valor de la derivada en dicho punto. La respuesta implica dos actividades fundamentales. La primera y más importante, es la correlación entre la derivada y la pendiente de la recta tangente. La otra, la obtención de la pendiente a partir del gráfico dado.

Una de las dificultades que pueden presentarse en esta situación está relacionada con la comprensión de la función original y de la derivada de la función en un punto. Uno de los aspectos es la distinción entre $f(x_0)$ y $f'(x_0)$. Por esta razón se incluye como posibles respuestas las opciones correspondientes a $f(2)$ y a $f'(2)$.

Fue diseñada para identificar el tratamiento en los registros analítico y gráfico y la transición de uno a otro. Está planteada en el registro gráfico y esperamos que los alumnos puedan responderla razonando en este mismo registro. Se presenta la gráfica con un fondo cuadriculado que permite observar fácilmente la pendiente de la tangente. Exige además la conversión al registro verbal para elaborar la respuesta.

Pregunta 2

¿Qué significa que la derivada de una función en un punto sea negativa? ¿Que sea positiva? Grafique una función que tenga derivada positiva en $x = -2$ y derivada negativa en $x = 1$.

En esta actividad se indaga sobre la interpretación del signo de la derivada. Está planteada verbalmente y los alumnos deben trabajar en ese registro para elaborar la respuesta. Esperamos que expresen que en un punto donde la derivada es positiva la pendiente de la tangente a la curva es positiva y donde es negativa, la pendiente es negativa. También pueden referirse directamente a la pendiente de la curva o relacionar con el crecimiento o decrecimiento de la función en cada punto.

Luego, deben ser capaces de convertir la información al registro gráfico, dibujando la representación gráfica de una función que cumpla las características enunciadas.

Pregunta 3

Para combatir el smog, una compañía liberará en la atmósfera desde las 0 horas y durante un período de 12 horas diarias, cierta cantidad de toneladas de una sustancia química dada por la función $s(x) = 0{,}2x^2 + 2x$.

a) ¿Cuántas toneladas de la sustancia química habrá en la atmósfera desde que se empieza a liberar hasta dos horas después?

b) Determine $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$ si $x_0 = 0$ y $\Delta x = 2$. ¿Cuál es el significado de esta cantidad en términos del problema?

c) Calcule $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$. ¿Cuál es el significado de lo obtenido en términos del problema? ¿Cómo lo interpreta geométricamente?

d) Calcule $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$. ¿Cuál es el significado de lo obtenido en términos del problema? ¿Cómo lo interpreta geométricamente?

e) ¿Qué concepto matemático está aplicando en el inciso anterior? ¿Cómo lo escribe simbólicamente?

Se presenta una función definida analíticamente que modela una situación de cambio. Su resolución exige el tratamiento en ese mismo registro y la conversión en los diferentes incisos a los registros verbal, numérico y gráfico.

En el primer inciso se requiere la determinación del cambio de la variable dependiente entre dos instantes dados. Esto implica la interpretación del fenómeno planteado y la capacidad de determinar el valor de la función en un punto, además de utilizar la diferencia para calcular el cambio. Los alumnos deben interpretar las condiciones enunciadas verbalmente y trabajar simbólicamente a partir de la expresión analítica de la función. Exige el tránsito al registro numérico para la cuantificación de los cambios.

Los incisos b), c) y d) están planteados en el registro simbólico y su resolución exige el tratamiento en este registro y la conversión a los registros verbal, numérico y gráfico.

En los dos primeros se presenta la fórmula de la razón de cambio media, en un intervalo específico y luego en uno cualquiera, y se solicita su cálculo para la función del problema, así como la interpretación de los resultados.

En el inciso d) se presenta la fórmula para calcular una razón de cambio instantánea. Se solicita que calculen el límite y que interpreten en el problema y geométricamente.

En el último inciso, planteado en el registro verbal, se requiere la identificación del límite anterior como la derivada de una función en un punto. Se solicita que escriban la definición en símbolos.

Análisis de las respuestas de los alumnos

Con la finalidad de tener una idea aproximada del desempeño global en la resolución de las preguntas propuestas, se decidió analizar el puntaje obtenido por los alumnos al momento de ser evaluados. Teniendo en cuenta la puntuación otorgada a cada inciso en el examen parcial, se obtuvo el porcentaje correspondiente a cada uno considerando como total la suma de los puntajes de todas las preguntas analizadas. La puntuación correspondiente a las preguntas de cada tema, se muestra en las siguientes tablas:

TEMA I

	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Pregunta 6
Puntaje	5	6	6	10	5	5

TEMA II

	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3				
			a	b	c	d	e
Puntaje	5	8	2	3	6	6	3

En la tabla que sigue a continuación se detalla la distribución de los puntajes obtenidos por cada alumno en cada pregunta.

La última columna muestra el porcentaje del puntaje total posible para esas preguntas. Esto nos proporciona información sobre la actuación general de cada alumno.

La penúltima fila presenta las medias de las notas obtenidas por pregunta y la última fila los porcentajes de acierto por pregunta (es decir, la proporción entre los puntajes totales obtenidos respecto al total posible). Estos renglones nos aportan datos sobre el grado de dificultad para los alumnos de cada pregunta.

TEMA I

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Puntaje obtenido (en %)**
M	3	6	6	10	1	5	84
L	5	6	2	5	0	4	59

A	5	6	6	10	5	5	100
V	3	6	4	10	5	5	89
P	5	3	3	4	0	1	43
PC	0	0	2	0	0	0	5
E	0	3	2	6	0	5	43
MB	5	3	2	6	0	5	57
J	3	6	6	6	5	0	70
MF	5	6	4	1	1	5	59
F	5	6	6	8	0	5	81
D	2	4	6	0	0	3	41
MA	1	6	4	8	0	5	65
I	5	0	2	10	1	5	62
C	5	6	0	9	0	0	54
R	2	3	6	7	0	0	49
Medias	3,38	4,38	3,81	6,25	1,13	3,31	
%	67,5	72,92	63,54	62,5	22, 5	66,25	

TEMA II

Pregunta	**1**	**2**	**3**					**Puntaje obtenido (en %)**
			a	**b**	**c**	**d**	**e**	
F	5	0	0	0	2	3	3	39
VR	0	4	0	0	3	3	3	39
MI	5	8	2	1	3	4	3	79
LO	0	8	2	3	4	5	0	67
EM	5	8	0	2	3	4	3	76
ER	5	4	0	2	0	1	3	45
CG	0	8	0	2	0	1	3	42
EK	0	0	0	2	3	3	0	24
PG	0	4	0	0	2	3	3	36
ED	5	8	0	3	5	4	0	76
Medias	2,5	5,2	0,4	1,5	2,5	3,1	2,1	
%	50	65	20	50	41,67	51,67	70	

Teniendo en cuenta todos los alumnos, la distribución de los resultados es la siguiente:

Intervalo	[0, 25)	[25, 50)	[50, 75)	[75, 100]
Alumnos Tema 1	PC	P, E, D, R	L, MB, J, MF, MA, I, C	M, A, V, F
Alumnos Tema 2	EK	F, VR, ER, CG, PG	LO	MI, EM, ED
Total de alumnos	2	9	8	7

Se observa que 11 alumnos obtienen un puntaje inferior al 50%, mientras que 15 alumnos superan ese porcentaje.

Considerando los porcentajes de la última fila de la tabla de distribución de notas de todos los alumnos, se ordenan las preguntas según el grado de dificultad:

TEMA I

Intervalo	[0, 25)	[25, 50)	[50, 75)				
Pregunta	5	–	4	3	6	1	2
Porcentaje	22,5	–	62,5	63,54	66,25	67,5	72,92

TEMA II

Intervalo	[0, 25)	[25, 50)	[50, 75)				
Pregunta	3a	3c	1	3b	3d	2	3e
Porcentaje	20	41,67	50	50	51,67	65	70

Se observa que, en el Tema I, en cinco de los seis apartados (83% de la evaluación) los alumnos han obtenido un porcentaje de éxito superior al 50% (específicamente más del 60%), mientras que en el Tema II, en cinco de los siete ítems (71%) han obtenido más del 50 % de éxito (y sólo dos más del 60%).

A continuación se analizan e interpretan las respuestas dadas a cada pregunta. Las diferenciamos según los recursos que utilizaron para resolver la situación planteada o para realizar la justificación. También consideramos los registros a los que recurrieron.

<u>Tema I</u>

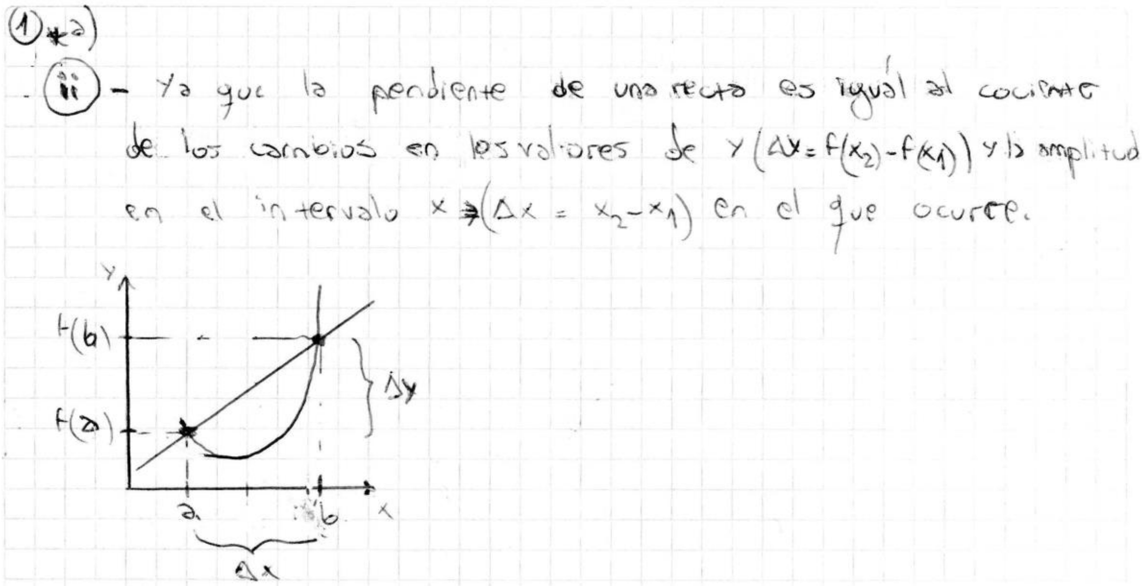
Pregunta 1

La respuesta a este ítem exige conocer la interpretación geométrica de la razón de cambio media de una función en un intervalo. Sólo un alumno no respondió (PC). Otro no marcó la opción correcta (E). En su explicación expresó *"porque la derivada de la función en a es la pendiente de la recta tangente que pasa por a"*, lo cual hace pensar que no interpretó la consigna o que asoció la razón de cambio media con la derivada.

Con respecto a las justificaciones de los alumnos que eligieron la opción **ii)**, las agrupamos y las presentamos en el siguiente cuadro:

1	Escribieron la fórmula para razón de cambio media en el intervalo [a, b]. Explicaron que es la misma que permite determinar la pendiente de la recta secante a la curva. Complementaron con un gráfico que permite visualizar la situación.	L, A, MB, C
2	Escribieron simbólicamente la fórmula que permite calcular la pendiente o la razón de cambio media de una función en el intervalo [a, b].	P, J, MF, D, I
3	Se refirieron a la diferencia entre razón de cambio media e instantánea.	V, R, F
4	Recurrieron a un ejemplo.	M
5	No justificaron.	MA

Las respuestas de los primeros cuatro alumnos fueron las más completas. Uno de ellos se expresó verbalmente y en símbolos. Los otros recurrieron a los registros verbal, analítico y gráfico para justificar. En la figura que sigue se presenta la respuesta de un alumno.



Las respuestas de los alumnos P, J, MF, D e I (segunda fila de la tabla) se diferencian de las anteriores porque no explicaron cómo se relacionan los dos conceptos.

Con respecto a las respuestas de los alumnos V y R agrupados en la tercera fila de la tabla, relacionaron la razón de cambio media con la pendiente de la recta secante y la razón de cambio instantánea con la pendiente de la tangente. Una fue *"está definida en un intervalo y no en un punto"*, y otra *"porque es la razón de cambio media y no la razón de cambio instantánea"*. El alumno F explicó por qué no eligió la opción i): *"porque la derivada de la función en a no sería la razón de cambio media, sino la velocidad instantánea en a".*

El alumno M (cuarta fila) recurrió a un ejemplo de una función de primer grado definida algebraicamente. Calculó la razón de cambio media, representó gráficamente pero no explicó la relación con la recta secante.

Los 14 alumnos que justificaron mostraron haber formado algún tipo de relación entre la razón de cambio y la interpretación geométrica. Utilizaron alternadamente los registros analítico, gráfico y/o verbal para explicar.

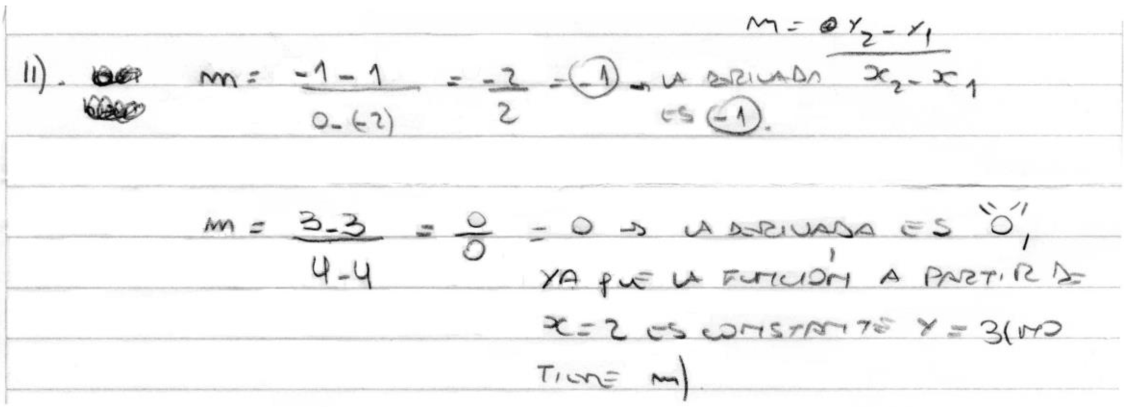
Pregunta 2

En esta actividad los alumnos debían determinar y justificar el valor de la derivada en dos puntos del dominio de una función definida gráficamente.

Centrándonos en las explicaciones sobre cómo obtuvieron la derivada en cada punto, agrupamos las respuestas de la siguiente manera:

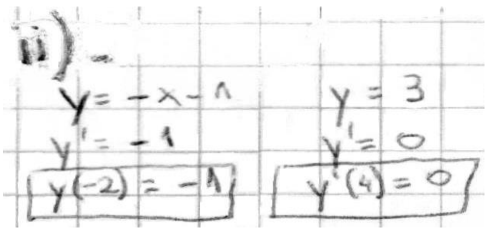
1	Determinaron la pendiente de la ecuación de la recta correspondiente a cada tramo.	Con errores.	L, MA
2	Obtuvieron la ley de la función (completa o de los tramos que necesitan) y calcularon la derivada en cada punto aplicando definición y/o reglas prácticas. Algunos determinaron en primer lugar la función derivada y luego calcularon en cada valor, otros directamente la derivada en el valor pedido.	Correctamente.	M, A, V, P, J, F, C
		Con errores.	E, MB, MF, D
3	Otra respuesta.	Con errores.	R

En esta pregunta esperábamos analizar si los alumnos usan el mismo registro gráfico para explicar, recurriendo al comportamiento variacional de la función dada. Sólo dos alumnos parecen haber trabajado de esta manera, aunque ambos realizaron igualmente los cálculos de las pendientes. Esto no era necesario, ya que el segundo tramo es una función constante y para el primero está marcado el cuadriculado que permite fácilmente determinarla. Además no explicaron por qué la derivada toma ese valor. Uno de ellos tuvo un error de signo y el otro en el planteo de la pendiente. Mostramos el trabajo de uno:



La mayoría, los 11 alumnos de la segunda fila de la tabla (68, 75%), recurrieron al registro algebraico para trabajar. Los errores que cometieron fueron diversos (error de signo, mal la ley de la función, error en el límite, incoherencias en la explicación).

En el trabajo que sigue, el alumno usó reglas prácticas para calcular la derivada:



Para la derivada en x = 4, dos alumnos respondieron que es cero porque se trata de la función constante. Esto no nos aporta datos sobre su pensamiento. Sin embargo, creemos que simplemente aplicaron la regla de derivada de este tipo de función.

El alumno R mostró confusión en su respuesta. Para el primer valor escribió: *"Derivada en x = –2: pendiente de la recta que se derivó. Se obtiene una función constante, es decir, la pendiente de dicha recta es 0".* Para el otro valor expresó que vale cero y lo obtuvo derivando la función y luego evaluando en cuatro.

Resumiendo, podemos decir que siete alumnos (43,75%) respondieron correctamente (sin ningún error de cálculo o en la explicación) esta pregunta. Dos alumnos no contestaron (PC, I). No consideramos que no conocieran (por lo menos todos los alumnos) la relación con el comportamiento variacional de este tipo de función, sino que les resulta más sencillo trabajar analíticamente o bien se sienten más cómodos o seguros justificando en este contexto.

Pregunta 3

Esta actividad, que requiere la interpretación del enunciado de un problema sencillo para poder expresar el significado del valor numérico de la función en determinado valor del dominio y el valor y signo de la derivada en el mismo punto, trajo bastantes dificultades, especialmente las dos últimas cuestiones. Sólo tres alumnos (18,75%) respondieron todo correctamente. Analizamos cada punto.

En relación al valor e(30) = 2700, el 87,5% (14 alumnos) contestó que la cantidad de personas enfermas a los 30 días de iniciada la epidemia es 2700.

Los otros dos alumnos contestaron mal, refiriéndose a la cantidad de personas enfermas en un intervalo. De alguna manera explicaron que representa e(30) – e(0).

Con respecto a e' (30) = 90, el 50% de los alumnos dio una respuesta aproximada. Mostramos los resultados en el siguiente cuadro:

<table>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Correcta o aceptable.</td><td>A los 30 días de iniciada la epidemia la enfermedad se está propagando a razón de 90 personas por día.</td><td rowspan="2">M, A, V, J, F, D, MB, R</td></tr>
<tr><td>La velocidad con que las personas se enferman a los 30 días de iniciada la epidemia es de 90 personas por día.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Incorrecta.</td><td>La cantidad de personas enfermas a los 30 días es 90.</td><td>L, P, E, I, C</td></tr>
<tr><td>Otra respuesta.</td><td>MF</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">No respondieron.</td><td>PC, MB</td></tr>
</table>

Observamos en la segunda fila que el 31,25% de los alumnos confundió el valor de la derivada en un punto con la imagen de la función en dicho punto.

Para el significado del signo de la derivada, seis alumnos (37,5%) se acercaron a la respuesta. Resumimos de la siguiente manera:

<table>
<tr><td>1</td><td>Correcta o aceptable.</td><td>El signo muestra que la cantidad de personas enfermas está aumentando ya que es positivo. Si fuera negativo la cantidad estaría disminuyendo.</td><td>V, P, J, MF, F, R</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">Incorrecta.</td><td>La derivada es positiva porque la velocidad con que se están enfermando las personas está creciendo.</td><td>M, A, D</td></tr>
<tr><td>El signo es positivo porque dado que $e'(30) = 90$ representa cantidad de personas enfermas, no puede dar un número negativo.</td><td>E, I, C</td></tr>
<tr><td>Otra respuesta.</td><td>L, PC</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">No respondió.</td><td>MB</td></tr>
</table>

Los alumnos M, A y D de la segunda fila confundieron la interpretación del signo de la derivada con el crecimiento de la velocidad.

Los tres que justificaron expresando que la cantidad de personas no puede ser un número negativo (E, I, C) fueron coherentes con la respuesta dada en el punto anterior.

Destacamos que, a pesar de las dificultades observadas y si bien algunos en sus explicaciones se refirieron en primer lugar a la derivada como la razón de cambio instantánea y relacionaron el signo de la derivada con el crecimiento de una función, la mayoría intentó referirse al enunciado del problema, utilizando términos variacionales que describen el fenómeno.

En relación a los registros, todos explicaron verbalmente, utilizando algunos la misma simbología presentada en el enunciado de la pregunta.

Pregunta 4

Esta actividad explora los procedimientos para la cuantificación numérica y el análisis cualitativo de los cambios así como la idea de rapidez de variación, primero en un intervalo y luego en un instante. Analizamos cada inciso.

En el primero, 12 alumnos (75%) lograron interpretar la situación e identificar la necesidad de calcular el cambio de la variable dependiente en el intervalo [60, 120]. En el cuadro siguiente se resumen los resultados:

<table>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Plantearon y calcularon $s(120) - s(60)$.</td><td>Correctamente.</td><td>M, L, A, V, E, MB, J, MA, I</td></tr>
<tr><td>Con errores de operatoria (no respetaron el orden de las operaciones al evaluar la función en cada instante).</td><td>F, C, R</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Plantearon mal.</td><td>Calcularon la razón de cambio media en el intervalo dado.</td><td>P, D</td></tr>
<tr><td>Calcularon $s(2)$.</td><td>PC, MF</td></tr>
</table>

En el segundo inciso se indaga sobre la determinación numérica de la razón de cambio media en el intervalo [60, 120]. Catorce alumnos (87,5%) escribieron correctamente la fórmula necesaria. De ellos, dos no interpretaron los datos del problema y plantearon mal. En el cuadro se presentan las respuestas:

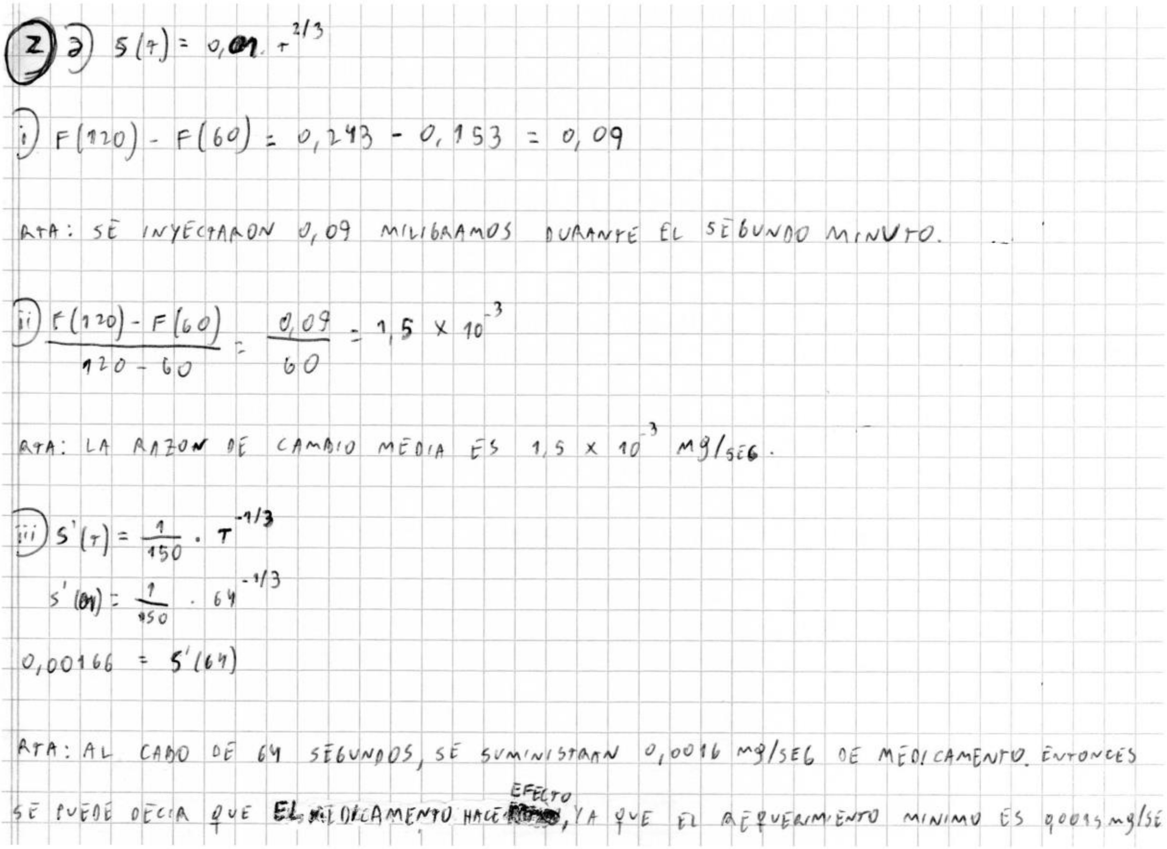
<table>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">Plantearon y calcularon $\frac{s(120)-s(60)}{120 - 60}$</td><td>Correctamente.</td><td>M, A, V, J, I,</td></tr>
<tr><td>Olvidaron la unidad o fue incorrecta.</td><td>L, P, E, MA</td></tr>
<tr><td>Arrastraron error del primer inciso.</td><td>F, C, R</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">No interpretaron correctamente según los datos del problema.</td><td>Calculó la razón de cambio media en el intervalo [1, 2].</td><td>MF</td></tr>
<tr><td>Calculó en el intervalo [0, 120].</td><td>MB</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Otro error.</td><td>D</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">No respondió.</td><td>PC</td></tr>
</table>

El tercer inciso, que requiere identificar en el enunciado la necesidad de calcular la derivada para obtener a qué ritmo está cambiando la función en determinado instante, fue razonado correctamente por 11 alumnos (68,75%).

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Plantearon $s'(64)$.</td><td>M, A, V, P, E, MB, F, MA, I, C, R</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Otras respuestas.</td><td>Consideraron el valor del inciso anterior (relacionaron con razón de cambio media).</td><td>L, J, MF</td></tr>
<tr><td>Calculó s(64).</td><td>D</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">No respondió.</td><td>PC</td></tr>
</table>

Revisando todas las evaluaciones encontramos que cuatro alumnos (25%) respondieron correctamente la actividad completa y dos más (12,5%) trabajaron todo bien pero tuvieron problemas con la unidad en el segundo inciso (un alumno no la escribió y el otro dio una unidad incorrecta).

Sin embargo, casi todos mostraron comprender la situación planteada e interpretar en mayor o menor medida lo requerido en los distintos incisos. En un fenómeno de cambio en el que se plantea la expresión algebraica de la función, realizaron un tratamiento adecuado en los registros verbal y analítico, así como la conversión de uno a otro y al numérico, de distintos aspectos fundamentales para comprender la derivada. Mostramos el trabajo de un alumno:



2) a) $S(T) = 0{,}09 \cdot T^{2/3}$

i) $F(120) - F(60) = 0{,}243 - 0{,}153 = 0{,}09$

RTA: SE INYECTARON 0,09 MILIGRAMOS DURANTE EL SEGUNDO MINUTO.

ii) $\dfrac{F(120) - F(60)}{120 - 60} = \dfrac{0{,}09}{60} = 1{,}5 \times 10^{-3}$

RTA: LA RAZON DE CAMBIO MEDIA ES $1{,}5 \times 10^{-3}$ mg/SEG.

iii) $S'(T) = \dfrac{1}{150} \cdot T^{-1/3}$

$S'(64) = \dfrac{1}{150} \cdot 64^{-1/3}$

$0{,}00166 = S'(64)$

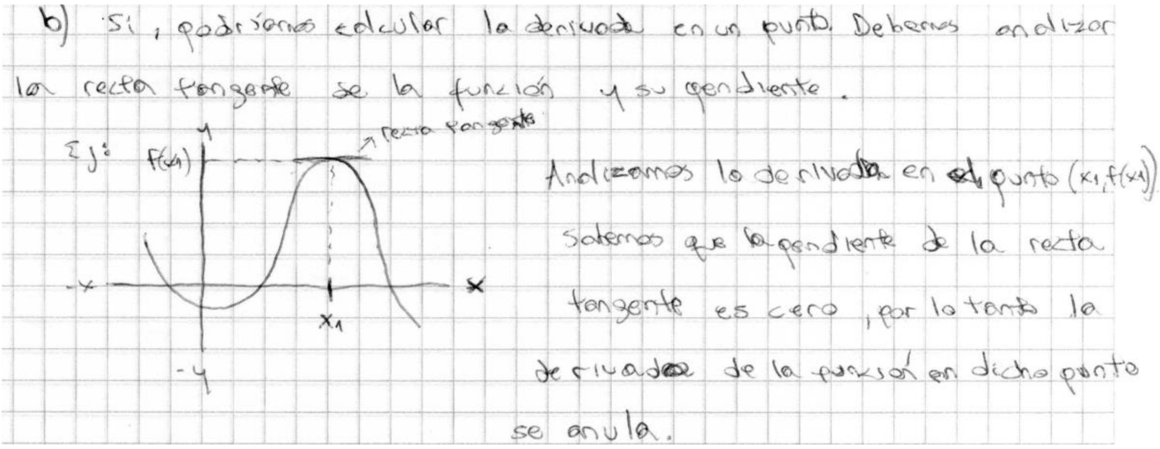
RTA: AL CABO DE 64 SEGUNDOS, SE SUMINISTRAN 0,0016 mg/SEG DE MEDICAMENTO. ENTONCES SE PUEDE DECIR QUE EL MEDICAMENTO HACE EFECTO, YA QUE EL REQUERIMIENTO MINIMO ES 0,0015 mg/SE

Pregunta 5

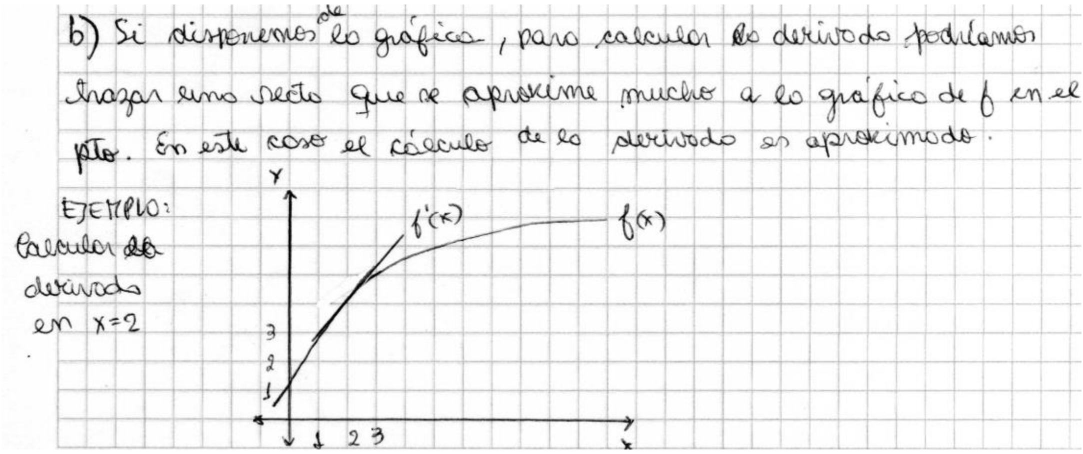
Esta actividad planteada en el registro verbal, exige convertir al gráfico y volver al verbal para elaborar la respuesta. Resumimos las respuestas de la siguiente manera:

<table>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Trabajaron en el registro gráfico.</td><td>Relacionaron la derivada con la pendiente de la recta tangente a la gráfica. Dibujaron una función, trazaron la tangente en un punto y determinaron su pendiente.</td><td>A, V, J</td></tr>
<tr><td>Relacionaron la derivada con la recta tangente o con una pendiente pero de manera incorrecta.</td><td>R, MA</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Transitaron del registro gráfico al analítico.</td><td>Dibujaron la gráfica de una función sencilla, obtuvieron su ley y calcularon la derivada en un punto, algunos por definición y otros con reglas prácticas.</td><td>M, P, MB, MF, D, I, C</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">No respondieron.</td><td>L, PC, E, F</td></tr>
</table>

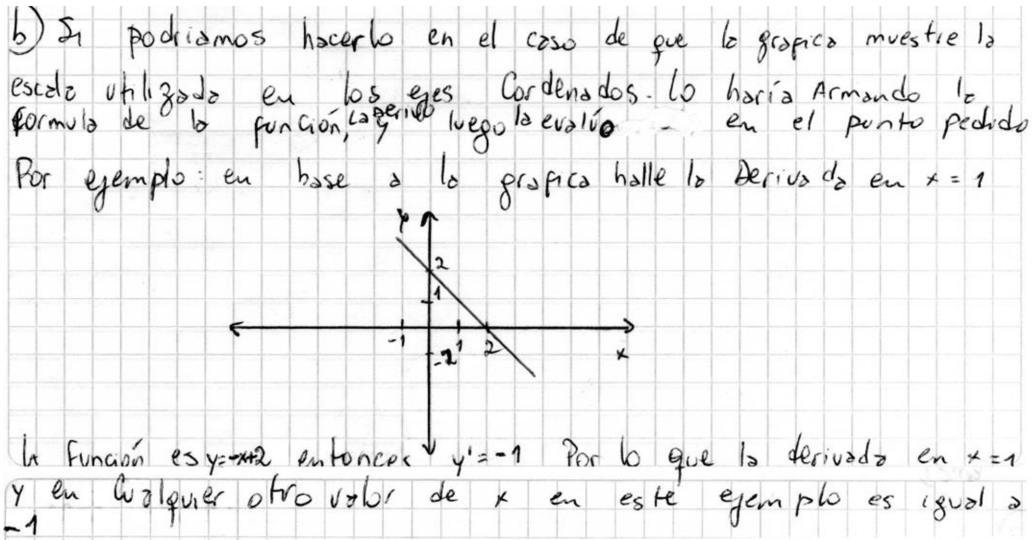
Los alumnos A, V y J trabajaron correctamente y mostraron mucha claridad en sus explicaciones y ejemplos. Aprovecharon el cuadriculado de la hoja para determinar fácilmente la pendiente o graficaron una recta de pendiente cero y asociaron estos valores a la derivada. Lo vemos en el siguiente trabajo:



Las respuestas de los otros dos alumnos fueron incorrectas, aunque mostraron tener conocimiento de la relación de la derivada en un punto con la recta tangente en un caso y con una pendiente en el otro e intentaron responder desde el registro gráfico.



Observamos, analizando la segunda fila de la tabla, que casi el 50 % convirtió al registro analítico. Es el caso del siguiente trabajo:



Resumiendo, hacemos notar que sólo tres alumnos (18,75%) pudieron dar una respuesta según lo que esperábamos, es decir, recurriendo al registro gráfico. Siete (43,75%) recurrieron al registro analítico. Cuatro (25%) no respondieron.

Pregunta 6

Con esta actividad se evalúa el conocimiento y manejo de la definición de derivada de una función en un punto. Para su determinación se requiere el cálculo analítico de un límite.

Doce alumnos (75%) plantearon correctamente. Algunos trabajaron directamente con la derivada de la función en un punto. Otros aplicaron la definición de función derivada y luego evaluaron en el valor solicitado. Mostramos la distribución de respuestas:

<table>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">Plantearon correctamente.</td><td rowspan="2">Plantearon y calcularon f '(–1).</td><td>Llegaron al resultado correcto.</td><td>M, A, E, MB, MA, I</td></tr>
<tr><td>Cometieron errores.</td><td>L</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Calcularon f '(x) y luego evaluaron en x = –1.</td><td>Llegaron al resultado correcto.</td><td>V, F</td></tr>
<tr><td>Cometieron errores.</td><td>P, J, D</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">Plantearon mal.</td><td>PC, MF</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">No respondieron.</td><td>C, R</td></tr>
</table>

Observamos que ocho alumnos (50%) llegaron al resultado correcto.

(C) $f(x) = -2x^2 + 3$ en $x = -1$.

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \frac{-2\cdot(-1+h)^2 + 3 - [-2(-1)^2 + 3]}{h}$$

$$= \frac{-2\cdot(1-2h+h^2) + 3 - [1]}{h}$$

$$= \frac{-\cancel{2} + 4h - 2h^2 + \cancel{3} - \cancel{1}}{h}$$

$$= \frac{-2h^2 + 4h}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(-2h+4)}{\cancel{h}}$$

$$\boxed{= 4}$$

LA DERIVADA EN $x = -1$ ES 4

Con respecto a los alumnos que plantearon mal, uno calculó el límite de la función cuando x tiende a –1 y el otro calculó la derivada pero luego encontró la recta tangente en ese valor de la abscisa y dio como respuesta dicha ecuación.

Teniendo en cuenta que se trata de una función sencilla, notamos soltura para el trabajo en el registro analítico. La mayoría de los alumnos escribió correctamente la definición de derivada y reemplazó para la función dada. La mitad logró llegar al resultado correcto, sin cometer errores en la determinación del límite por la vía algebraica.

<u>Tema II</u>

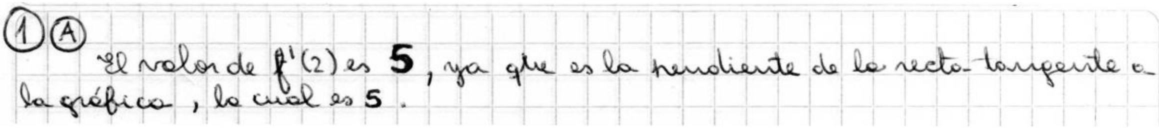
Pregunta 1

Esta pregunta, como la 5 del tema I, explora acerca de la interpretación geométrica de la derivada en un punto. En este caso la actividad está planteada en los registros gráfico y analítico y requiere el tratamiento y relación entre ambos registros y el tránsito al verbal para dar la respuesta. Un alumno no contestó y cinco (50%) respondieron y explicaron correctamente. Resumimos las respuestas en el cuadro que sigue:

<table>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">Eligieron la opción correcta iv) $f'(2)=1$</td><td>Explicaron verbalmente.</td><td>EM, ER, ED</td></tr>
<tr><td>Calculó numéricamente la pendiente.</td><td>F</td></tr>
<tr><td>Determinó la expresión analítica de la recta tangente a partir de dos puntos y dedujo la pendiente.</td><td>MI</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Eligieron la opción i) $f'(2)=5$</td><td>Relacionaron la derivada en un punto con la pendiente de la tangente pero no la identificaron gráficamente.</td><td>LO, PG</td></tr>
<tr><td>Confundieron derivada con la imagen del punto de tangencia.</td><td>VR, EK</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">No respondió.</td><td>CG</td></tr>
</table>

De los cinco alumnos que eligieron la opción correcta, sólo tres explicaron verbalmente a partir de lo que observaron en la gráfica. Los otros dos apoyaron su justificación determinando la ecuación de la recta (argumentaron trabajando en el registro analítico).

Los alumnos LO y PG (segunda fila) mostraron conocer la interpretación geométrica de la derivada en un punto, pero no la pudieron utilizar en el registro planteado. Mostramos una de las respuestas:


1 A El valor de $f'(2)$ es 5, ya que es la pendiente de la recta tangente a la gráfica, la cual es 5.

Los otros dos tuvieron más dificultades, relacionaron con la recta tangente pero no específicamente con la pendiente.

Pregunta 2

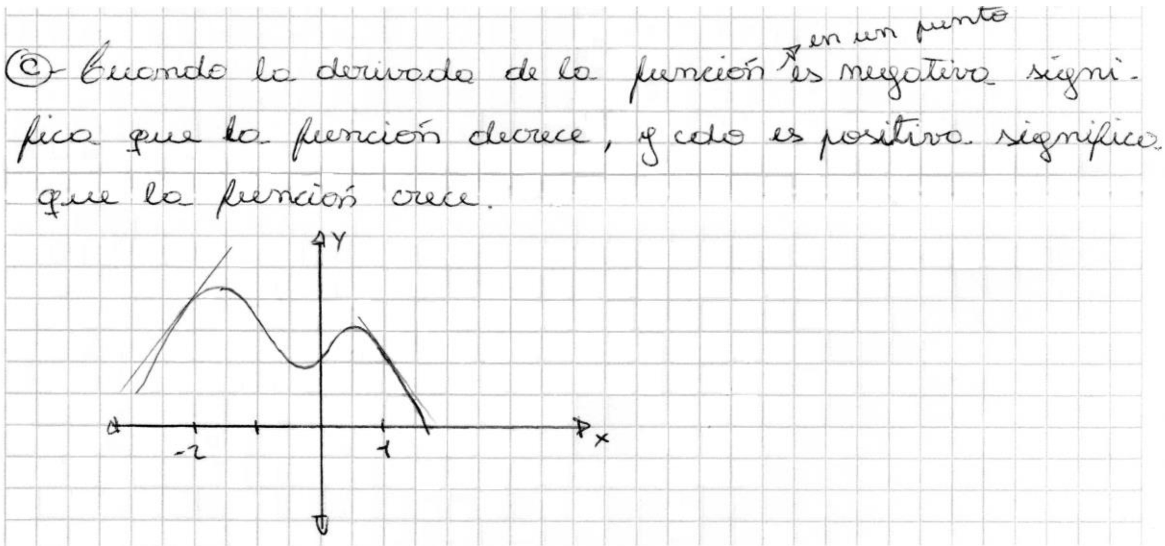
Esta pregunta, como la 3 del tema I, explora sobre el significado del signo de la derivada. Está planteada en el registro verbal y requiere transitar al gráfico, dibujando una función que verifique las características dadas. Observamos que cinco alumnos (50%) respondieron y ejemplificaron correctamente.

1	Si la derivada de una función en un punto es negativa la función decrece en ese punto, si es positiva la función crece.	Ejemplificaron bien.	MI, LO, EM, CG, ED
		Ejemplificaron mal.	VR, PG
2	Explicaron incorrectamente.	Ejemplificaron bien.	ER
		Ejemplificaron mal.	F, EK

Todos los que explicaron de manera acertada, relacionaron el signo de la derivada en el punto con el crecimiento o decrecimiento de la función.

Los alumnos agrupados en la segunda fila de la tabla tuvieron respuestas diversas.

Cuatro alumnos agregaron en la gráfica presentada, la recta tangente en los dos puntos, mostrando que tienen idea de la interpretación geométrica de la derivada en un punto.



Pregunta 3

En esta pregunta, que evalúa aspectos similares a la 4 del tema I, se presenta un fenómeno de cambio del cual se desprenden cinco incisos relacionados con distintos aspectos variacionales. Analizamos cada uno.

En el inciso a) se pregunta verbalmente sobre el cambio de la variable dependiente de la situación para determinado cambio de la variable independiente. Se requiere transitar del registro verbal al analítico y numérico.

Exige en primer lugar reconocer y expresar en símbolos cada variable y determinar el valor numérico de la función. Todos evaluaron correctamente en $t = 0$ y $t = 2$, pero dos alumnos (20%) tuvieron dificultades con la notación simbólica, escribiendo $s(x)$ cuando correspondía $s(0)$ o $s(2)$.

Con respecto a la determinación de las toneladas liberadas en el intervalo de tiempo, sólo dos alumnos (20%) interpretaron que debían calcular el cambio y plantearon s(2) − s(0). Siete alumnos (70%) calcularon directamente s(2) y respondieron que luego de dos horas habrá 4,8 toneladas de sustancia química. Dado que para la función del problema, s(0) = 0, la respuesta es acertada, pero no podemos saber si los alumnos razonaron correctamente. Teniendo en cuenta además que uno de los extremos del intervalo de la variable independiente es el cero, nos inclinamos por pensar que interpretaron mal, asociando cambio de la función con imagen de la función en el otro extremo del intervalo.

1	Plantearon y calcularon s(2) − s(0).	MI, LO
2	Calcularon s(2).	F, VR, EM, ER, CG, PG, ED
3	Calcularon la razón de cambio media en el intervalo planteado.	EK

El inciso b) exige el tratamiento en el registro analítico, convertir al numérico para hacer los cálculos y al verbal para interpretar lo realizado. Se presenta en símbolos la fórmula que permite calcular la razón de cambio media. Es necesario interpretarla y aplicarla en el problema para un intervalo específico [0, 2].

En primer lugar, hacemos notar que un solo alumno (LO) utilizó el resultado obtenido en el inciso anterior. Consideramos que no relacionaron lo pedido en cada inciso, ya que está planteado en registros diferentes, o bien porque al presentar la fórmula analíticamente, simplemente la utilizaron y no pensaron en el significado de la expresión.

Todas nuestras suposiciones se hacen más fuertes cuando observamos que ocho alumnos (80%) plantearon correctamente, entre los cuales varios habían calculado s(2) en el primer inciso.

1	Trabajaron simbólicamente en el intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Luego evaluaron.	Bien.	EK
		Con errores.	ER, VR
2	Trabajaron simbólica y numéricamente evaluando la función directamente en [0, 2].	Bien.	LO, EM, CG, ED, PG
		Con errores.	F, MI

Los errores que cometieron fueron diversos. Dos alumnos (VR y F) presentaron errores en el planteo y los otros cometieron errores de signo u operatoria.

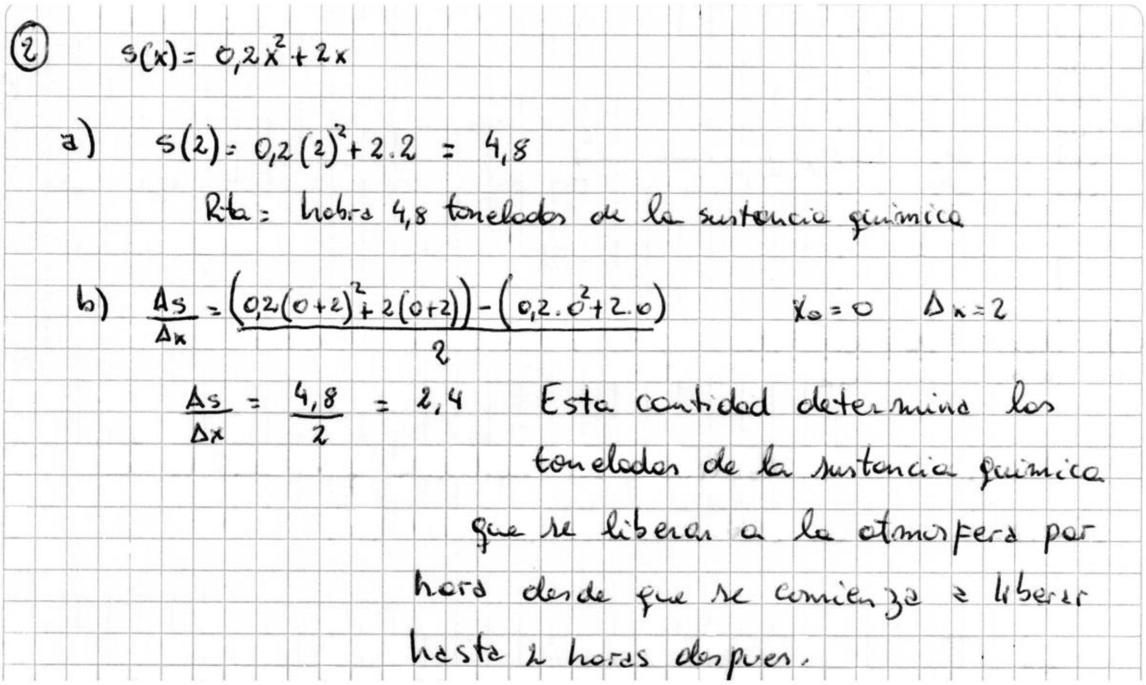
Con respecto al significado, agrupamos las respuestas de la siguiente manera:

1	Relacionaron con la razón de cambio promedio.	F, MI, LO, EM, ER, CG, ED
2	Relacionaron con el cambio de la variable dependiente.	VR, EK, PG

De los alumnos agrupados en la primera fila de la tabla, cuatro respondieron correctamente y los otros tres mostraron tener idea pero la respuesta resultó incompleta o regular ya que expresaron que representa la razón de cambio promedio pero no explicaron en el problema o lo hicieron con dificultades.

Los tres alumnos de la segunda fila expresaron que representa las toneladas liberadas en esas horas, mostrando confusión con el cambio de la variable dependiente.

Mostramos el trabajo correspondiente a los dos incisos de un alumno. Se observa cómo no relacionó lo solicitado verbalmente en el primer inciso con el numerador del cociente del inciso b). Interpretó bastante bien el significado de la razón de cambio media.


② $s(x) = 0,2x^2 + 2x$

a) $s(2) = 0,2(2)^2 + 2.2 = 4,8$

Rta: habra 4,8 toneladas de la sustancia química

b) $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\left(0,2(0+2)^2 + 2(0+2)\right) - \left(0,2.0^2 + 2.0\right)}{2}$ $\quad x_0 = 0 \quad \Delta x = 2$

$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{4,8}{2} = 2,4$ Esta cantidad determina las toneladas de la sustancia química que se liberan a la atmosfera por hora desde que se comienza a liberar hasta 2 horas despues.

El inciso c) explora el manejo algebraico para el cálculo de la razón de cambio media en un intervalo cualquiera de una función sencilla. Indaga también sobre la interpretación de lo realizado según el enunciado del problema y geométricamente.

Observamos que ocho alumnos (80%) plantearon evaluando $s(x_0)$ y $s(x_0 + \Delta x)$. Los que ya lo habían hecho en el inciso anterior repitieron todo el procedimiento. Luego, excepto un alumno que dejó planteado (EM), trabajaron algebraicamente con la diferencia y el cociente. No se observaron dificultades en este sentido. Sólo un alumno cometió pequeños errores en la resolución (F). Los otros dos no respondieron (ER, CG).

Con respecto al significado en el problema, resumimos las respuestas en el cuadro:

<table>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Relacionaron con la razón de cambio media</td><td>Explicaron el significado en el problema.</td><td>LO, EM, ED</td></tr>
<tr><td>No interpretaron para la situación planteada.</td><td>VR, ER, PG</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Otras respuestas.</td><td>F, MI, EK</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">No respondió.</td><td>CG</td></tr>
</table>

Las respuestas de los alumnos de la segunda fila fueron incorrectas, asociando sólo con alguna variación.

Para la interpretación geométrica, ningún alumno contestó que la expresión corresponde a la pendiente de la recta secante que une los puntos de abscisa x_0 y $x_0 + \Delta x$.

1	Escribió en símbolos la fórmula de pendiente.	VR
2	Escribieron que se relaciona con la recta secante.	MI, ER, EK
3	Dibujaron una recta.	LO, ED
4	Otra respuesta.	EM
5	No respondieron.	F, CG, PG

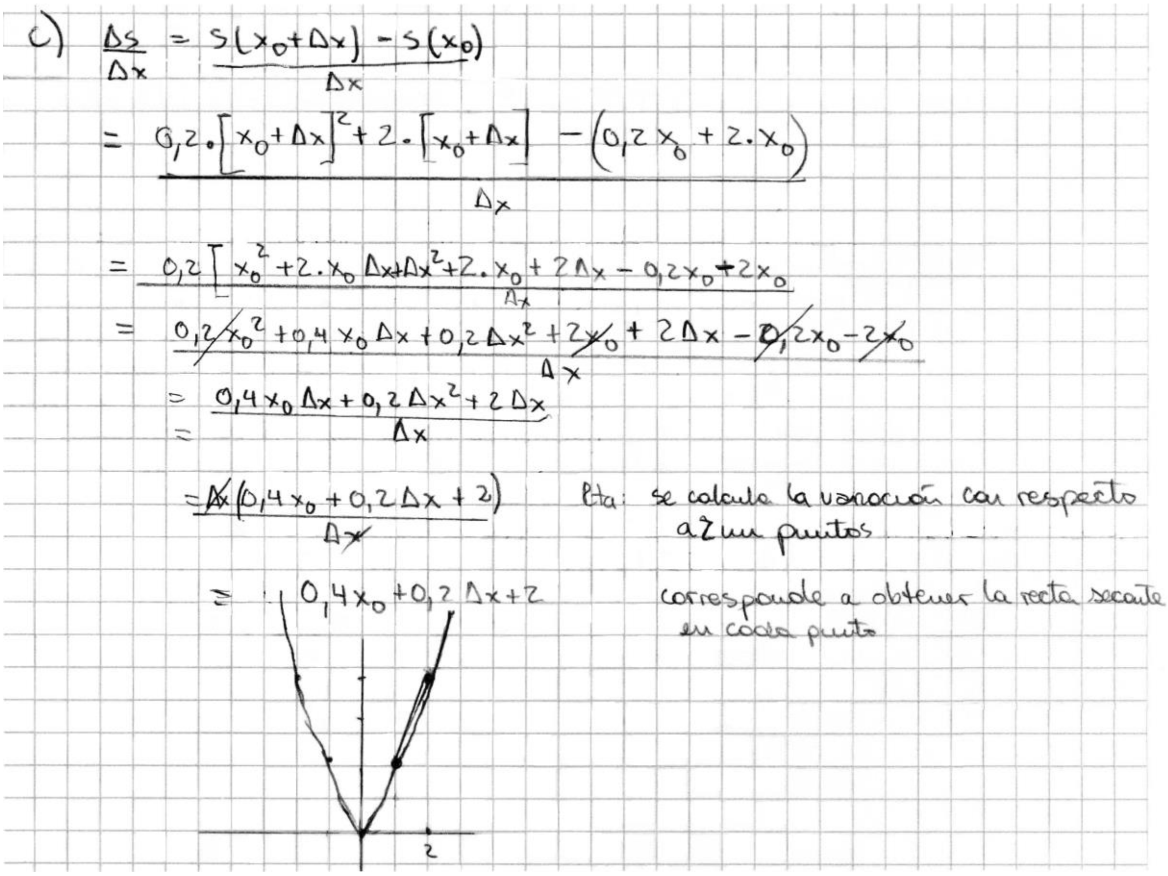
El primer alumno escribió: *"Geométricamente se representa* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$*"*. Esta es la notación que solemos usar para escribir simbólicamente la pendiente de una recta conocidos dos puntos, por lo que consideramos que conocía la relación.

Los alumnos agrupados en la segunda fila de la tabla mostraron tener idea de la relación.

Con respecto a las respuestas de LO y ED (tercera fila), uno de ellos dibujó una recta que pasa por el origen y de pendiente 2,4 (valor de la pendiente para el inciso anterior) y el otro dibujó una recta cualquiera y marcó dos valores x_0, $x_0 + \Delta x$ y los cambios Δx y Δs.

Consideramos que los confundió el hecho de obtener una expresión algebraica. No fueron capaces de relacionarla con la pendiente de una recta, que asocian a un número.

Presentamos la respuesta de un alumno que trabajó bien la parte algebraica pero tuvo problemas en la interpretación.



En el inciso d) se plantea el límite del cociente del inciso anterior cuando $\Delta x \to 0$, o sea se debe determinar la razón de cambio instantánea de la función en $x = x_0$.

Todos hicieron el planteo escribiendo el límite del cociente y evaluando la función del problema en x_0 y en $x_0 + \Delta x$. Fueron dos alumnos (VR, ED) los únicos que utilizaron los resultados del inciso anterior. Los demás repitieron todo el trabajo algebraico.

<table>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">Plantearon correctamente.</td><td rowspan="2">Resolvieron el límite.</td><td>Correctamente.</td><td>VR, MI, LO, PG, ED</td></tr>
<tr><td>Con errores.</td><td>F, EK</td></tr>
<tr><td colspan="2">No resolvieron el límite.</td><td>EM, ER</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">Cometió error en el planteo.</td><td>CG</td></tr>
</table>

Observamos que cinco alumnos (50%) llegaron al resultado correcto.

En relación a la interpretación, se presentaron nuevamente muchas dificultades pero especialmente en relación al problema.

<table>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Relacionaron con la razón de cambio instantánea</td><td>Explicó el significado en el problema.</td><td>EM</td></tr>
<tr><td>No interpretó para la situación planteada.</td><td>LO</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Interpretaron como la cantidad de sustancia en un instante.</td><td>EK, PG, ED</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Otra respuesta.</td><td>F, MI</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">No respondieron.</td><td>VR, ER, CG</td></tr>
</table>

Sólo dos alumnos (20%) interpretaron como la velocidad instantánea, aunque uno solo se refirió al fenómeno planteado.

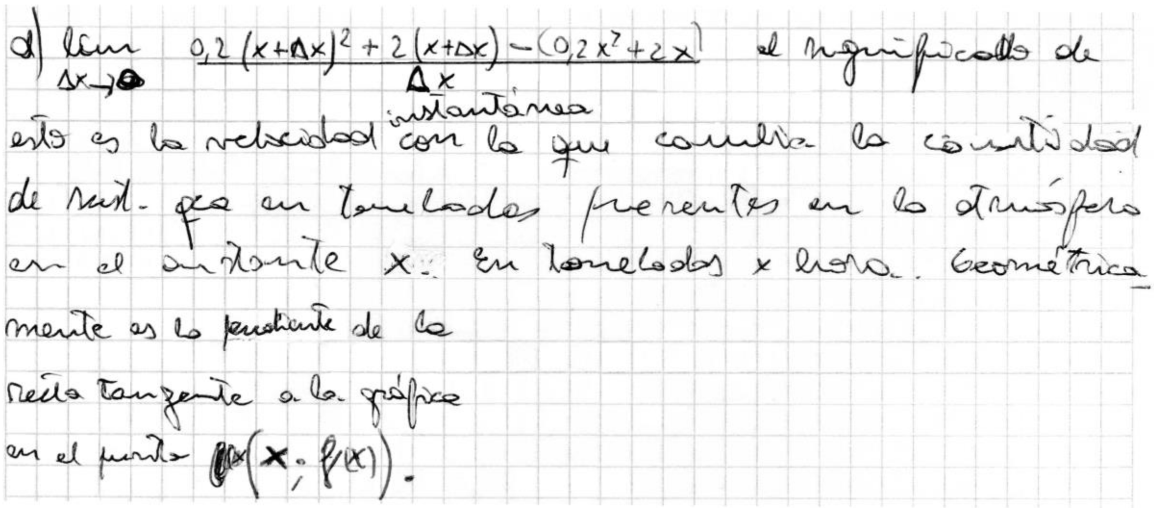
Los tres alumnos (30%) de la segunda fila relacionaron el límite con lo que sucede en un instante, pero no con la velocidad de cambio.

Los dos alumnos de la tercera fila respondieron: *"velocidad desde* x_0 hasta $x_0 + \Delta x$*"* y *"variación en las horas transcurridas"*.

Para la interpretación geométrica los resultados fueron mejores. Cinco alumnos (50%) relacionaron con la pendiente de la recta tangente en $x = x_0$ y uno se refirió a la recta tangente en un punto de la función.

1	Es la pendiente de la recta tangente en x_0.	F, MI, EM, EK, ED
2	Es la recta tangente en un punto de la función.	ER
3	No respondieron.	VR, LO, CG, PG

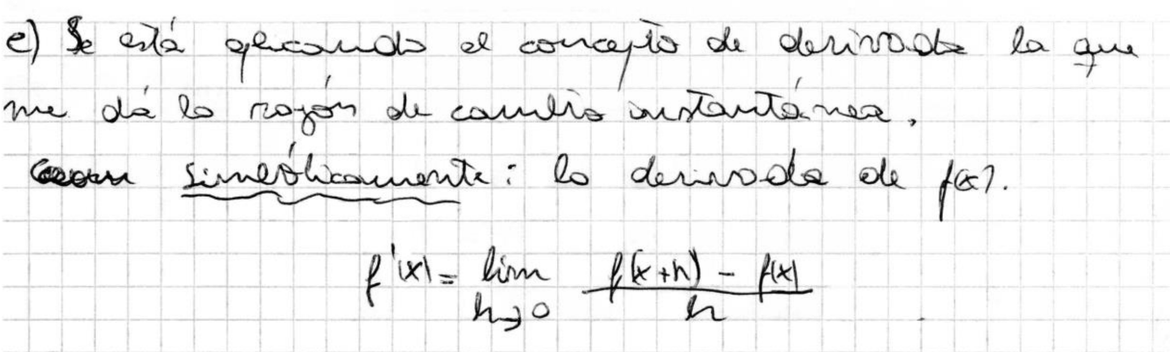
Presentamos el trabajo de un alumno, que si bien no completó la resolución del límite, interpretó adecuadamente.



d) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{0,2(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - (0,2x^2+2x)}{\Delta x}$ el significado de esto es la velocidad instantánea con la que cambia la cantidad de resid. gas en toneladas presentes en la atmósfera en el instante x. En toneladas x hora. Geométricamente es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(x; f(x))$.

En el inciso e), siete alumnos (70%) explicaron que en el inciso anterior se está aplicando el concepto de derivada. Al escribir simbólicamente, sólo dos utilizaron la notación correspondiente a la derivada de una función en un punto. Los demás se refirieron directamente a $f'(x)$. Dos alumnos dieron la interpretación física o geométrica. Uno expresó que es la velocidad instantánea (LO) y el otro la pendiente de la tangente en el punto x_0 (EK). Uno (ED) no respondió.

Mostramos la respuesta correspondiente al mismo alumno del trabajo anterior:



e) Se está aplicando el concepto de derivada la que me da la razón de cambio instantánea.
Simbólicamente: la derivada de $f(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Análisis global de los resultados de la evaluación

En las distintas preguntas se trabajaron varias ideas variacionales, algunas previas a la noción de derivada, pero necesarias para su comprensión, y otras directamente relacionadas a este objeto.

Teniendo en cuenta ese criterio, clasificamos las actividades en dos grupos, de manera de hacer un análisis global de las respuestas. Las del primer grupo se refieren al análisis cuantitativo y cualitativo de la variación, mientras que las otras se refieren a la derivada.

	Ideas precedentes a la derivada		Ideas relativas a la derivada		
Nociones que exploran	Cuantificación e interpretación de la variación	Razón de cambio media y pendiente de la recta secante	La derivada y su interpretación física	La derivada y su interpretación geométrica	La derivada como un límite
Tema I	4i)	1; 4ii)	3i), ii); 4iii)	2; 5	6
Tema II	3a)	3b), c	3d)	1; 2; 3d)	3e)

Las actividades 3i), 4i) del tema I y 3a) del tema II exploran aspectos relativos a las variables y las funciones, básicos para trabajar luego con la variación y la rapidez de variación. No se presentaron grandes dificultades. Para la pregunta 4i) del tema I, excepto un alumno, los demás reconocieron las variables independiente y dependiente y expresaron simbólicamente cada una. En la actividad 3a) del tema II, dos alumnos tuvieron errores en la notación simbólica. Un muy buen porcentaje de alumnos interpretó y calculó razonablemente el valor numérico de la función en un punto (87,5% en las actividades 3i) y 4i) del tema I, 100% en la actividad 3a) del tema II).

Las preguntas 4i) del tema I y 3a) del tema II están relacionadas con la variación física. Abordan la idea de la determinación cuantitativa de los cambios físicos y el análisis cualitativo de los mismos. En la primera de las actividades mencionadas, el 75% de los alumnos interpretó el enunciado como el cambio de la variable dependiente y planteó en símbolos teniendo en cuenta la ley de la función. De ellos, las tres cuartas partes resolvieron correctamente. Los otros cometieron errores diversos de operatoria. En cambio, en la otra actividad, sólo el 20% de los alumnos planteó correctamente. La mayoría (70%) asoció $s(2) - s(0)$ con $s(2)$. Consideramos que dado que el primer valor de la variable independiente es $x_0 = 0$, relacionaron las toneladas liberadas en el intervalo con la cantidad liberada en $x = 2$.

Las preguntas 1, 4ii) del tema I, 3b) y 3c) del tema II exploran también aspectos sobre la variación física, pero en este caso referidos a la velocidad de la variación en un intervalo. Indagan también sobre la interpretación geométrica del cociente que permite calcular la razón de cambio media.

En la actividad 1 del tema I, el 100% de los alumnos mostró conocer la relación de la pendiente con la razón de cambio media, aunque no todos la expresaron de manera completa. En la actividad siguiente, 4ii) del tema I, el 87,5% planteó la fórmula correspondiente, el 75% reemplazó correctamente teniendo en cuenta los datos del problema y calculó el valor (incluidos los alumnos que cometieron errores de cálculos ya considerados en la evaluación de la función). El 25% de los alumnos tuvo dificultades con la unidad de la razón de cambio (la mitad de ellos dio como unidad miligramos y la otra mitad no la escribió).

La pregunta 3b) del tema II explora sobre la razón de cambio media en un intervalo específico dada una función definida algebraicamente. El 60% de los alumnos evaluó y realizó correctamente los cálculos. Con respecto a la interpretación de esta cantidad, el 70% la relacionó con la razón de cambio promedio, y de ellos, sólo el 40% interpretó según el enunciado del problema. En el inciso c) de la misma actividad se evalúa la interpretación de la fórmula como la razón de cambio media para la misma función en un intervalo cualquiera. El 60% de los alumnos resolvió correctamente. El mismo porcentaje interpretó como la razón de cambio media, de los cuales la mitad lo relacionó con el problema. Ningún alumno interpretó geométricamente. Nos preguntamos si es así porque el resultado obtenido es una expresión algebraica. Un solo alumno mostró conocer la relación ya que escribió la fórmula de pendiente por dos puntos.

Analizamos a continuación las respuestas del segundo grupo de preguntas, las relacionadas directamente con la derivada.

La pregunta 2 del tema II explora acerca de la interpretación del signo de la derivada. Todos los alumnos explicaron verbalmente introduciendo algunos de ellos notación simbólica y refiriéndose a la pendiente de la tangente, la pendiente de la curva o con el crecimiento de la función. Suponíamos que el ejemplo solicitado en el registro gráfico podía llevarlos directamente a dar una respuesta de este tipo. Ninguno se refirió a velocidad de cambio o a otro aspecto físico. El 50% respondió correctamente y presentó la representación gráfica de una función que cumple las condiciones dadas.

También se explora sobre este aspecto en la pregunta 3ii) del tema I. Dado que en este caso la pregunta está relacionada con el enunciado del problema, los alumnos relacionaron derivada con velocidad de cambio y asociaron el signo positivo con crecimiento. Algunos respondieron mal ya que expresaron que la velocidad está aumentando. El 37,5% de los alumnos respondió correctamente que la cantidad de personas está aumentando.

Las preguntas 3i), 4iii) del tema I y 3d) del tema II están planteadas en un contexto físico, esperando que los alumnos relacionen la derivada en un punto con la velocidad instantánea. En la primera de las actividades, el 50% dio una respuesta aceptable, mientras que en la segunda el 68,75% dio una respuesta correcta. Los resultados para la pregunta del otro tema fueron muy diferentes. Sólo el 20% interpretó como una razón de cambio instantánea y la mitad de ellos relacionó con el problema. Consideramos que las diferencias se debieron al registro en que estaban dadas las preguntas. A pesar de que todas están planteadas verbalmente a partir de un problema, en la última está dada analíticamente la fórmula de la razón de cambio instantánea.

Las preguntas 2 y 5 del tema I, 1 y 3d) del tema II están diseñadas para explorar la relación que los alumnos pudieran establecer entre la derivada en un punto y algún aspecto relacionado con la interpretación geométrica.

En la pregunta 2 del tema I, los alumnos podían dar la respuesta directamente desde el registro gráfico, observando el comportamiento variacional de la función. Ya que se trata de una función de primer grado el crecimiento es constante, la razón de cambio es la misma en cualquier intervalo y en cualquier punto. Sólo dos alumnos (12,5%) intentaron trabajar con la pendiente, aunque tuvieron dificultades. El 75% recurrió al registro analítico, determinando la ley de la función y obteniendo la derivada en los valores pedidos por definición o reglas prácticas. El 43,75% lo hizo correctamente.

En la pregunta 5 del mismo tema se explora la determinación de la derivada en un punto en el registro gráfico. Esto exige relacionarla con la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Sólo el 18,75% explicó correctamente trabajando en este registro. Varios alumnos expresaron que obtendrían la ley de la función graficada y a partir de ahí con definición o reglas calcularían la derivada.

En las preguntas 1 y 3d) del tema II, el 50% de los alumnos relacionó con la pendiente de la tangente. Notamos que en la primera de ellas sólo el 30% explicó verbalmente según lo observado en el gráfico. Los demás buscaron obtener la ecuación de la recta o determinar su pendiente con la fórmula.

Las preguntas del último grupo se refieren a la definición de derivada e intentan explorar las interpretaciones de los alumnos acerca de la simbología utilizada o su aplicación para una función sencilla. En la pregunta 6 del tema I deben calcular la derivada de una función definida analíticamente aplicando la definición. El 75% de los alumnos planteó adecuadamente y el 50% llegó al resultado correcto. En la pregunta 3e) del tema II los alumnos deben relacionar el límite trabajado en el inciso anterior con la definición de derivada. El 70% respondió aceptablemente.

Conclusiones

Haciendo una revisión general de las actividades de los dos temas, notamos que un buen porcentaje de alumnos mostró manejar en algún grado diferentes ideas variacionales.

No se observaron grandes dificultades con respecto a las nociones de variable y función, lo cual era esperado teniendo en cuenta que fueron tratadas ampliamente al estudiar funciones en etapas anteriores.

Con respecto al análisis cualitativo y cuantitativo de los cambios, observamos una buena interpretación cuando el intervalo de la variable independiente, para el cual estaba pedido el cambio de la variable dependiente, no comenzaba en el origen.

En relación a la noción de razón de cambio media, las dificultades mayores se observaron en la interpretación de los resultados, tanto en el contexto físico como geométrico, especialmente cuando se trabajó en el registro analítico.

Observamos un manejo aceptable de la derivada. Los alumnos mostraron evidencias de poder relacionar, interpretar y utilizarla en diferentes instancias o situaciones:

- La velocidad instantánea. Convirtieron del registro simbólico al verbal y dieron el significado en la situación planteada. También convirtieron del registro verbal al simbólico interpretando el enunciado como una velocidad instantánea y relacionando con la derivada de una función en un punto.

- La pendiente de la recta tangente. Según el registro planteado el tratamiento fue en un tema con mejores resultados que en otro. En la pregunta 1 del tema II aproximadamente la mitad de los alumnos hicieron un tratamiento de la relación en los registros gráfico, analítico y verbal. Mientras que en la actividad 5 del tema I que requería el trabajo en los registros verbal y gráfico, el porcentaje de alumnos que trabajó correctamente no alcanzó el 20%. Nos preguntamos si no conocen la relación o no la pueden aplicar en el contexto de la actividad. Consideramos que los mejores resultados obtenidos en el primer caso pueden deberse a que la gráfica, además de la función presenta el trazo de la recta tangente.
- Un límite. En las distintas preguntas que se indaga sobre la definición de derivada, los resultados fueron buenos, ya sea en el reconocimiento o su aplicación en el cálculo.

Referido a la interpretación del signo de la derivada, los resultados fueron mejores cuando el enunciado de la actividad los llevó a interpretar geométricamente. Aproximadamente la mitad de los alumnos dio una respuesta aceptable. Explicaron en el registro verbal y mostraron gráficamente, dibujando una función que cumple determinadas condiciones dadas. Los porcentajes de respuestas correctas fueron menores cuando tuvieron que explicar relacionando con la interpretación física.

Con respecto a los sistemas de representación, observamos que manejaron los diferentes registros según lo solicitado en las distintas preguntas, pero se notó en varias de ellas preferencia por el trabajo algebraico y algorítmico.

Por ejemplo en la actividad 2 del tema I, no recurrieron a explicar el valor de la derivada según el comportamiento variacional de la función. Buscaron la ley y calcularon la derivada por reglas prácticas. Lo mismo notamos en la actividad 5 de ese tema. No razonaron en el registro gráfico. Si bien utilizaron este registro en otras actividades para explicar (pregunta 1, tema I), no lo usaron en estos casos para obtener información variacional.

Dada una función sencilla definida analíticamente (pregunta 4 del tema I y pregunta 3 del tema II), demostraron bastante dominio del registro algebraico para determinar el valor de la función en x_0 y en $x_0 + \Delta x$, obtener los cambios de la variable dependiente Δs y el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, así como para calcular la razón de cambio instantánea evaluando el límite. En cambio les costó mucho interpretar los resultados obtenidos en esos incisos.

Consideramos que estos resultados confirman lo reportado por numerosas investigaciones. Los alumnos están más acostumbrados a utilizar procedimientos analíticos y algorítmicos, dejando de lado los argumentos visuales, que además, son de mayor dificultad cognitiva. Consideran que estos aspectos son los esenciales y de esa manera trabajan también en las evaluaciones.

Sin embargo, los resultados obtenidos nos manifiestan que los alumnos han logrado visualizar en mayor o menor medida los conceptos en juego. Las respuestas muestran que han representado, transformado, generado, comunicado y reflejado información visual, aspectos requeridos en la definición de visualización dada por Cantoral y otros

(2003). Esto les permitió construir y otorgar un significado a los conceptos que a su vez lograron plasmar en el papel, aspectos básicos en las definiciones de visualización de Zazkis, Dubinsky y Dauterman (1996) o de Zimmermann y Cunningham (1991) en las que nos hemos basado.

Todos los aspectos mencionados exigen y, a su vez favorecen, el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos, y en particular, de su pensamiento y lenguaje variacional.

5.5.3 La opinión de los alumnos

En el último tramo de la entrevista, con el objetivo de explorar aspectos actitudinales, se indagó sobre la opinión de los alumnos con respecto a la metodología empleada. Según el desarrollo de la entrevista, se hicieron distintas preguntas: ¿Que te pareció el trabajo con las guías? ¿Te ayudó? ¿Te gusta más que los docentes desarrollemos el tema directamente en el pizarrón?

Se presentan a continuación las respuestas de los alumnos entrevistados.

Mariano- Sí, lo único que nosotros no lo podíamos al principio relacionar con esto, pero creo que cuando nos pongamos a estudiar, vamos que tener que volver a las guías. Es una forma práctica de darse cuenta el sentido, el uso. Yo comparo con chicos que estudian en otros lados, el profesor llega y les da todo, después se agarran la cabeza. Ustedes siempre hacen una introducción y después empiezan.

Alejandro- Y esto estuvo bueno. Dando esto a mí no me obligó a leerlo. Por eso es que todavía no leí nada. Si uno estaría totalmente perdido, me siento en mi casa y leo. Siempre estudio con otro, aparte trabajé con Mariano, que nos llevamos bien, estudiamos juntos, nos ponemos las pilas los dos así que bien.

Luis- Yo creo que con todos estos ejemplos, pasando por todos los pasos vemos como cada cosa se va transformando, hicimos todo sin darte cuenta, estuvo bien. Esto hay que aprenderlo y para eso no alcanza con que te lo den. Estos son temas muy importantes. Y esta es una buena forma de aprenderlo bien y ya saber aplicarlo en otros casos. Ya, hablando en general, la cátedra es como la más organizada, el tema del libro te ayuda un montón, nunca alcancé a hacer todos los ejercicios, está bien explicado.

Emiliano- Y no sé, porque hacíamos cosas pero yo no sabía bien que era. Hacíamos por instinto, por cosas que sabíamos. Lo que pasa es que yo entiendo mas fácil, se me hace más fácil, a veces en clase empiezan a explicar todo con letras, letras, letras y no entiendo nada, pero por ahí con dos ejemplos se me hace más fácil entenderlo. No sé, esto todavía no lo pude estudiar porque venimos muy complicados. Yo mañana tengo dos parciales, el de inglés y de biología. Ya tenemos matemática, morfo. Está re duro.

Vanesa- Sí, por ahí, al principio medio que no entendía nada pero después más adelante sí. A mí me ayudó bastante porque me doy cuenta, aparte hay un montón de cosas que están en el libro que las resumí así, ahora que las leo las entiendo bien. Porque si no a veces leo y no entiendo nada. Así, esto lo entendí bien. Trabajándolo así. Cuando nos dan los temas ustedes lo hubiese sabido hacer, o sea, pero lo que a mí me cuesta es que si así me dan las cosas así como son, yo no las pienso.

Mirna- Sí…Estuvo más entretenido. Aparte no sabíamos mucho lo que nos íbamos dando cuenta nosotros. Eso me ayudó mejor a entender. Y también trabajar en grupo. Yo necesito que me ayuden.

Florencia- Me gustó porque teníamos clase y no teníamos los paros pero me parece que así entendés más. Al principio no sabés qué se relaciona con qué, es decir estás como perdida, pero sí, enganchás más. Igual por ahí le poníamos cualquier cosa. Me da lo mismo cualquier forma de clase. A lo mejor así tenés más tiempo para entrar en el tema, de la otra forma es de un día para otro y te cuesta más enganchar.

María Inés- Más divertido. Aparte lo entiendo mejor yo, gráficamente que algebraicamente. Yo necesito ver. Aprendo mejor comparando.

Valentín- A mí me gusta más así porque después te das cuenta de los errores que hiciste vos y es más fácil aprender. Que si lo explican y después vos tenés que hacer solo.

Análisis

En general se observa que la propuesta ha sido valorada positivamente, sin depender del grado de dificultad que han tenido para resolver las actividades de la secuencia e incluso el grado de comprensión que han manifestado en la entrevista. Varios alumnos expresaron que, como no saben a qué apuntan las actividades, no se dan cuenta si están trabajando en el sentido correcto y se sienten perdidos, piensan que están escribiendo cualquier cosa. Sin embargo, todos rescataron algún aspecto (me obliga a trabajar, me permite dar cuenta de la aplicabilidad del tema, me ayuda a entender mejor, me permite ver los errores y corregir).

CAPÍTULO 6
CONCLUSIONES

Los desarrollos, reflexiones y conclusiones presentados en los distintos capítulos de esta memoria, han permitido dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas al principio del trabajo, constatar el grado de alcance de los objetivos propuestos, así como también analizar la pertinencia de las hipótesis de trabajo planteadas en el análisis a priori. En este capítulo se presenta una reflexión y valoración general de la investigación realizada. Posteriormente se realiza una evaluación global de la propuesta y se analiza la viabilidad de su implementación en la enseñanza universitaria. Se enuncian también algunas cuestiones que quedan abiertas, que motivarán seguramente el desarrollo de futuras investigaciones.

Según se planteó al principio de esta tesis, esta investigación surgió por la preocupación ante las dificultades para el aprendizaje y la enseñanza del cálculo. En el ámbito de la educación matemática es conocido que los alumnos alcanzan competencias aceptables en los aspectos algorítmicos y algebraicos, logrando graficar funciones, calcular límites, derivadas o integrales, pero presentando dificultades significativas para reconocer y relacionar las ideas asociadas a cada objeto. Las causas atribuidas a esta problemática están relacionadas en gran medida con el proceso de enseñanza.

El cálculo es la matemática de la variación y el cambio. Esto lo convierte en necesario para modelar, explicar, predecir y cuantificar la variación. Sin embargo, en el sistema educativo actual se ha perdido este enfoque y se han priorizado procesos de construcción y validación formales así como sus aspectos algorítmicos. Es común además que el conocimiento se trate fuera de los contextos apropiados, presentando a los alumnos problemas estereotipados, desvinculados generalmente de la realidad. Esto potencia las dificultades, especialmente en el caso de carreras donde la mayoría de los estudiantes van a ser usuarios de la matemática y no matemáticos de profesión.

Toda esta situación se refleja en que, aunque aprueben los cursos de cálculo, no comprenden de manera satisfactoria los conceptos y no desarrollan adecuadamente los métodos de pensamiento propios de esta rama de la matemática, de manera de poder afrontar más adelante la solución de problemas de áreas específicas de sus carreras.

El estudio de diversas investigaciones nos reveló que las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática priorizan el desarrollo de los procesos de pensamiento sobre la mera transferencia de contenidos. En particular, en el desarrollo del cálculo diferencial, se centra la atención en la comprensión de las ideas fundamentales y el desarrollo de ideas claves que le dieron origen: la rapidez de la variación y el problema de la recta tangente.

Por otro lado, hemos visto que los alumnos construyen conocimiento con cierta independencia del discurso de la enseñanza, interviniendo como un factor fundamental su interacción con el entorno. La actividad humana juega un papel muy importante en la búsqueda de construcción de significados ya que es considerada como la fuente principal de la reorganización de la obra matemática.

Se mostró también la importancia de los registros de representación en la visualización de los conceptos y en el establecimiento de relaciones entre las diversas nociones desarrolladas. El uso de las diferentes representaciones de un objeto matemático resulta imprescindible para la comprensión.

Teniendo en cuenta estas consideraciones nos propusimos estudiar las nociones que construyen los alumnos cuando interactúan con actividades articuladas en torno a la idea de variación y cambio, que promueven el manejo y la coordinación de diversos sistemas de representación, poniendo la atención tanto en los contenidos como en las prácticas sociales, como generadoras de conocimiento. Dada su importancia en la currícula de la carrera, consideramos a la derivada para abordar en la investigación.

El desarrollo de cada capítulo muestra el trabajo realizado con el fin de dar cumplimiento al objetivo general propuesto. A continuación hacemos referencia de una manera global a los aportes realizados por nuestra investigación, organizados en torno a los objetivos específicos planteados. La consecución de los distintos objetivos propuestos nos permite dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo.

- *Investigar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral.*

A lo largo de este trabajo hemos expuesto la importancia del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en la comprensión de los temas del cálculo.

En el análisis didáctico hemos mostrado cómo en nuestro contexto, en la escuela secundaria y según lo propuesto en los libros de uso común para la enseñanza, el tratamiento de los contenidos no promueve, en general, que el alumno ponga en juego aspectos de su pensamiento variacional, por lo que no se posibilita el desarrollo de este tipo de pensamiento.

A fin de lograr construir la noción de derivada es necesario incorporar elementos variacionales y lograr que los alumnos den significado a las variaciones en estudio. Por eso, desde un principio de la investigación nos interesó conocer qué estrategias variacionales utilizan al trabajar con los conceptos en juego y cómo pueden ir evolucionando al resolver actividades preparadas especialmente con esta intención.

En las conclusiones del cuestionario aplicado a nuestros alumnos (ver análisis cognitivo, apartado 3.3.3, p. 78) analizamos que las mayores dificultades surgieron cuando debían utilizar, para la resolución de las actividades, sus conocimientos variacionales. Diversas investigaciones relacionan esta problemática con la enseñanza, que desde los primeros años, no pone énfasis en el desarrollo del pensamiento variacional.

El diseño de la secuencia hizo hincapié en estos aspectos, de manera de llegar a construir una noción de derivada con significado. Intentamos esencialmente que los alumnos logren asociar la derivada con la variación. “En las prácticas humanas, en las disciplinas de referencia, la derivada no se entiende exclusivamente como el límite del cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o de decrecimiento” (Cantoral, 2003a, p. 178).

El análisis a posteriori de las hojas de trabajo de nuestros alumnos, el desarrollo de las entrevistas y los resultados de los parciales, nos muestran que en distintos momentos han utilizado estrategias de trabajo que implican el uso del pensamiento y lenguaje variacional.

Sin embargo, notamos la recurrencia a los procedimientos algebraicos o algorítmicos. Si bien los argumentos de tipo variacional, basados en ideas de cambio, están presentes en los estudiantes, ya que fueron capaces de reconocer y expresar distintos tipos de comportamiento variacional al ser requeridos, naturalmente recurren a los procedimientos tradicionales, que apelan a la memoria o a la utilización de argumentos basados en expresiones algebraicas o fórmulas.

Por ejemplo, observamos en las distintas instancias (resolución de la guía, entrevista, evaluación), que al tener que determinar el valor de la velocidad en un instante para el caso del movimiento con velocidad constante, por lo general recurrieron a determinar la expresión de la ley que representa el movimiento y calcular la derivada en un punto y no justificar a partir del comportamiento variacional de la función.

El análisis de las respuestas de los alumnos nos ha permitido observar la manera en que construyen conocimiento matemático y por otro lado, comentar que los argumentos de tipo variacional están presentes, sin embargo, éstos quedan limitados por otro tipo de argumentos. El tratamiento dado al concepto función durante su formación previa los limita de alguna manera, ellos piensan en una función más como una fórmula o como una expresión algebraica y no como una relación entre magnitudes variables.

A pesar de esto nos mostramos conformes con el trabajo realizado. Los significados que han logrado establecer de la derivada y de las nociones relacionadas (analizados en distintos apartados del capítulo 5) constituyen un aporte significativo al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Como hemos señalado anteriormente, este proceso necesita de tiempos prolongados, y supone el dominio e integración de distintos campos numéricos y geométricos, además de la comprensión de procesos específicos complejos como son el paso al límite, la noción de variación y de variable, entre otros.

- *Diseñar y poner en práctica una secuencia didáctica que propicie la comprensión de la derivada, articulada en torno a la idea de variación y cambio y que promueva el manejo y la articulación de diversos sistemas de representación.*

La aproximación teórica considerada, así como la metodología de la ingeniería didáctica, hicieron posible el diseño de una secuencia didáctica para la introducción de la derivada.

Las elecciones didácticas que se hicieron, tanto respecto a los contenidos a enseñar como a la forma de presentarlos, se basaron en una serie de estudios preliminares. Estos nos permitieron conocer el origen y evolución histórica del saber en juego, nos llevaron a revisar el estado actual de la enseñanza del tema a nivel universitario y al mismo tiempo analizar las dificultades y obstáculos que su aprendizaje genera.

Desde sus orígenes el cálculo se caracterizó por tener un componente fundamentalmente visual e intuitivo que se mantuvo durante los siglos siguientes, en interacción constante con problemas geométricos y físicos. El análisis de la variación en los fenómenos dinámicos es lo que condujo al estudio de la derivada y al desarrollo del cálculo.

Concebimos el proceso de comprensión como un proceso que ocurre en la mente de los estudiantes, que se forma a partir de una secuencia de actividades que llevan a diversos procesos mentales. Dado que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos, es fundamental el papel que juegan las representaciones en la construcción de conocimiento matemático.

Dado el carácter social del conocimiento matemático escolar y el reconocimiento de la importancia del papel de las interacciones sociales en la construcción del conocimiento, se decidió privilegiar las prácticas compartidas, de manera de proporcionar a los alumnos el ámbito para contrastar significados, ya sea en grupos pequeños como en la discusión de la clase completa.

A partir de esto se plantearon las siguientes hipótesis de trabajo:

- La comprensión de la derivada se favorece si se propone una secuencia didáctica que permite a los alumnos manejar y coordinar los diversos registros de representación asociados a situaciones de variación.
- La resolución de las situaciones propuestas a través del trabajo grupal propicia un aprendizaje constructivo y significativo de las nociones involucradas.

Con el diseño de la secuencia no se pretendió un estudio teórico riguroso de la derivada sino una presentación simple e intuitiva que tenga en cuenta las tres nociones físicas fundamentales: la variación, la razón de cambio media y la razón de cambio instantánea, y que explore la relación de estas últimas con la medida de la pendiente.

Las distintas cuestiones relativas tanto al diseño como a la implementación de la secuencia fueron descriptas detalladamente en los capítulos 4 y 5.

El análisis de los resultados obtenidos, tanto de la implementación de la secuencia, como las entrevistas y la evaluación, valida la pertinencia de ambas hipótesis. Las respuestas de los alumnos evidencian una evolución positiva en la comprensión de las diferentes nociones y de las diferentes interpretaciones de las mismas en los distintos registros: verbal, numérico, gráfico y analítico.

Los acercamientos visuales se revelaron como positivos para el estudio y la comprensión de las situaciones de variación. Por un lado, resultan más intuitivos que los acercamientos algebraicos tradicionales, y por otro, posibilitan el análisis desde un punto de vista dinámico. La exigencia de las producciones escritas y el debate oral favoreció la coordinación con los registros numérico, analítico y verbal, lo cual es imprescindible para la comprensión.

El proceso de aprendizaje de los alumnos fue influenciado de manera positiva por la interacción en el aula. Fue en la discusión en los pequeños grupos donde se observaron los mejores intercambios entre los alumnos, mientras que en las instancias de debate de la clase completa se observó poca participación. Las respuestas a las preguntas del docente basadas en lo observado en el trabajo de pares, proporcionaron los elementos básicos para promover el análisis en los momentos de validación e institucionalización.

Con respecto a las dificultades para la implementación de la secuencia, los problemas para resolver las actividades se relacionaron en general con el manejo de los conocimientos previos necesarios, tanto a nivel conceptual como algorítmico.

La introducción de la noción de derivada a partir del ejemplo físico de la velocidad tuvo sus ventajas, porque resultó un caso cercano a sus vidas cotidianas. Sin embargo, sus conocimientos previos se manifestaron bastante escasos. Esto provocó que durante las clases se presenten problemas para comprender algunas cuestiones (como por ejemplo distinguir entre velocidad promedio y velocidad instantánea o entre rapidez y velocidad). Se nota que cuesta interiorizar estas nociones dado que, a pesar de ser trabajadas en distintos momentos (trabajo en grupos de dos, debate grupal, institucionalización), en la entrevista y en la evaluación volvieron a surgir problemas.

La cantidad de nociones involucradas en la secuencia hicieron que los tiempos de trabajo, especialmente en las etapas de validación e institucionalización, fueran escasos. La misma secuencia distribuida en más sesiones puede llevar a mejores resultados.

Un elemento externo que afectó y requirió una reorganización de la ingeniería fueron los paros docentes coincidentes con los días en que se implementó la secuencia. Si bien muchos alumnos demostraron su satisfacción al no perder las clases, otros decidieron ir a sus casas aprovechando que no tenían actividades en la mayoría de las asignaturas, por lo que hubo un considerable porcentaje de ausencias.

Otro factor que influyó en el desarrollo, fue la presencia de varios exámenes durante la semana de implementación de la secuencia y la posterior. Los alumnos trabajaron en las clases pero no dedicaron tiempos extras a leer o desarrollar actividades adicionales durante esa semana, ni tampoco dedicaron demasiado tiempo para el estudio para el parcial en el que se evaluaron los contenidos correspondientes.

- *Describir y analizar las producciones de los alumnos cuando se enfrentan a las diversas tareas propuestas por los profesores.*

Las observaciones de clase, el análisis de las hojas de trabajo de los alumnos, las transcripciones de las entrevistas y las resoluciones de las actividades de la evaluación nos han permitido analizar las producciones de los alumnos y estudiar las nociones que pusieron en juego al encarar las distintas situaciones. Dichos análisis se desarrollan ampliamente en el Capítulo 5.

- *Validar la secuencia didáctica implementada con los alumnos utilizando una metodología investigativa de ingeniería didáctica.*

La confrontación del análisis a priori del Capítulo 4 y el análisis a posteriori del Capítulo 5 han permitido realizar la valoración, esencialmente cualitativa, de la secuencia implementada.

Las producciones escritas referidas a las distintas sesiones, las transcripciones de tramos de entrevistas y los resultados de la evaluación, nos han permitido contrastar los resultados de los datos con nuestras hipótesis del análisis a priori y nos han descripto la naturaleza de las construcciones realizadas por los alumnos.

Los resultados del análisis a posteriori presentado en el Capítulo 5, constatan un adecuado funcionamiento de la secuencia didáctica.

En cada sesión los alumnos fueron enfrentados a situaciones para las que no tenían todos los conocimientos requeridos. De esta manera fueron puestos en conflicto. Lo desarrollado en cada clase, teniendo en cuenta los distintos momentos (acción, formulación, validación e institucionalización) fue apropiado para habilitar a los alumnos a trabajar la instancia siguiente.

Las actividades motivaron a los alumnos a pensar y desarrollar diversos aspectos variacionales: trabajaron ideas relativas a la explicación de los fenómenos del cambio y a la cuantificación de la variación, desarrollaron la idea sobre la derivada como una razón de cambio instantánea y como pendiente de una tangente, además de interpretar aceptablemente el significado de la notación con que se representa. Utilizaron métodos numéricos, gráficos y algebraicos para la obtención de la derivada, logrando argumentar sobre algunos procedimientos realizados.

Sin embargo, el trabajo realizado con la resolución de la secuencia no fue suficiente para la interiorización de todo lo desarrollado. Como hemos descrito en las conclusiones de las distintas etapas, se observaron dificultades en todas las instancias y las evaluaciones no arrojaron grandes cambios en los resultados logrados habitualmente.

Manifestamos en el análisis a posteriori varias diferencias entre lo ocurrido realmente y lo previsto en el análisis a priori. Algunos problemas que obstaculizaron el logro de todos los objetivos de la secuencia fueron:

- El nivel de conocimientos que se mostró más bajo del esperado. Se observó en general falta de dominio tanto de nociones matemáticas como del contexto físico en el que están planteadas las actividades, así como la resistencia al cambio de algunas concepciones de los estudiantes.
- El tiempo reducido para trabajar todas las actividades planteadas por parte de los alumnos y para desarrollar adecuadamente el debate con la clase que permita revisar y contrastar en detalle lo realizado por los estudiantes con lo que se esperaba en cada actividad.
- La escasa participación de los estudiantes en las instancias de debate con la clase completa.

A pesar de las dificultades señaladas, los resultados alcanzados nos permiten expresar que la secuencia generada ha cumplido con las expectativas: colocar a los alumnos en camino hacia la comprensión de la derivada. Además, nos ha permitido investigar cómo piensan nuestros alumnos e identificar algunas dificultades para el aprendizaje, lo que ha sido analizado en los distintos capítulos.

El trabajo realizado fue valorado positivamente por los alumnos entrevistados. Los estudiantes se han involucrado y han debatido intensamente para resolver las actividades propuestas. En muchos casos, sus soluciones dieron paso a conocimientos susceptibles de institucionalización.

La propuesta planteada para la introducción de la derivada, basada en la implementación de una secuencia didáctica con actividades que los alumnos deben resolver a través del trabajo grupal, ha mostrado su viabilidad para ser trabajada con alumnos que realizan un curso de introducción al cálculo. Las nociones de cambio y velocidad de cambio son intuitivas y susceptibles de ser abordadas a partir de registros numéricos, gráficos y analíticos.

Por otro lado, este trabajo de investigación no puede considerarse agotado. Existen varias cuestiones que en el terreno investigativo merecen ser revisadas a la luz de los resultados obtenidos en la experiencia.

En primer lugar, las dificultades planteadas nos motivan a revisar el diseño de la secuencia. Con respecto a la decisión de introducir la derivada a partir del planteo de problemas físicos relacionados con el movimiento, creemos que ningún acercamiento que se haga al estudio del cálculo estará libre de dificultades. Consideramos que enfrentando a los alumnos a estas dificultades les proporcionamos herramientas que les permitirán resolver más adelante problemas relacionados a sus áreas de interés.

A partir de esto, ¿qué acciones es posible implementar para subsanar de alguna manera las dificultades relacionadas con el bajo nivel de los conocimientos previos de nuestros alumnos? ¿Qué modificaciones deben plantearse en las actividades propuestas de manera de optimizar el funcionamiento de la secuencia? ¿Es posible destinar más tiempo a su desarrollo?

Estos planteos nos llevan a reflexionar sobre qué ideas y habilidades relativas al estudio de la variación son factibles de ser desarrolladas previo al ingreso a la universidad, de modo que contribuyan a la formación de una base más sólida para nuestros alumnos. También nos preocupa la revisión de nuestro trabajo al abordar los contenidos referentes a funciones, de manera de hacer mayor hincapié en los aspectos relacionados al cambio. Los resultados no se obtienen de manera instantánea. Las situaciones problemáticas que necesitan de un tratamiento variacional ayudarán a que el alumno, al enfrentarse a ellas, desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, para eso es necesario ir incorporando a lo largo de distintas etapas actividades que lleven a su desarrollo.

Otro aspecto susceptible de investigación, es cómo se pueden utilizar las nuevas tecnologías para el fortalecimiento de la propuesta. Integrar los recursos tecnológicos a los procesos permite, entre otras cosas, mejorar el acceso a los contenidos y a sus distintas representaciones. El uso de software que integre posibilidades de cálculo numérico, simbólico y representación gráfica posibilita presentar situaciones que estimulen al alumno a la búsqueda de relaciones entre información gráfica, numérica y algebraica, analizando el significado y la aplicabilidad de los conceptos y resultados desde diferentes perspectivas.

Por último, consideramos que con el trabajo hemos realizado nuestro aporte al desarrollo de las investigaciones en educación matemática. Hemos logrado:

- reflexionar y tomar conciencia de lo importante que resulta conocer los resultados derivados de investigaciones,
- profundizar en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje y trasladar a la práctica docente los saberes adquiridos.
- generar, en base a lo anterior, una propuesta de aula apoyada en los resultados de la investigación,
- desarrollar una propuesta de enseñanza favoreciendo el pensamiento y lenguaje variacional, buscando alcanzar mejores niveles en el proceso de aprendizaje y en la formación universitaria y
- comprobar que es posible innovar en el aula universitaria fomentando la participación de los alumnos y la construcción de conocimiento.

Si bien ni las ideas en la que se basó la secuencia elaborada como la metodología propuesta son originales ya que, como fue aclarado oportunamente, considera y combina las sugerencias de otros investigadores, consideramos que el mayor valor de esta investigación radica especialmente en efectivizar una propuesta en el aula universitaria. A partir de las concepciones teóricas sobre las que se fundamenta nuestro trabajo, hemos logrado diseñar una secuencia didáctica y adaptar una metodología de trabajo a nuestro contexto particular, alumnos de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral. Logramos mostrar que es posible intentar cambios en la enseñanza buscando despertar el trabajo comprometido de los alumnos.

No resulta una tarea sencilla transformar el conocimiento basado en investigación en una estrategia educativa efectiva. Compartimos las expresiones de Zaldívar (2006, p. 23):

> Las principales críticas por parte de los profesores hacia los resultados de las investigaciones, son sin duda, los tiempos empleados en desarrollar un tema y el número de estudiantes a manejar en las aulas. En cuanto a la primera, si bien es cierto que las investigaciones invierten más tiempo para desarrollar y trabajar con los conceptos que cuando se abordan en las clases convencionales, las ventajas en cuanto a la comprensión y aprendizaje de los estudiantes, en muchos casos, son evidentes. Creemos que si se pretende que los estudiantes logren comprender y manejar las ideas y los tipos de razonamientos que el cálculo desarrolla; es decir, si queremos que nuestros estudiantes al estudiar la derivada piensen y se comuniquen en códigos variacionales, habilidad necesaria para el estudio y entendimiento del cálculo diferencial, sería conveniente rediseñar nuestra práctica

docente y orientarla hacia propiciar la aparición de las ideas que la matemática involucra y desarrolla.

Estamos convencidas de que, con nuestro trabajo, facilitamos que nuestros alumnos produzcan conocimiento matemático, reflexionen sobre sus producciones y generen teoría sobre dicho conocimiento. Todo esto deriva necesariamente en aprendizajes significativos.

Por otro lado, no significó solamente modificar el contenido de la enseñanza, sino también otras cuestiones fundamentales, como repensar nuestro rol docente, el rol del alumno, las interacciones entre el docente y el alumno, cómo y qué evaluar luego de enseñar.

Como docentes representó resignificar nuestra tarea profesional, reflexionando sobre las prácticas educativas y mejorando nuestra formación didáctica.

Este tipo de aportes de la investigación a la educación matemática pueden resultar importantes si hacemos posible que lleguen a otros docentes. Consideramos interesante que los profesores de cálculo conozcan esta propuesta, que la pongan en práctica con sus estudiantes y valoren sus alcances. Sus sugerencias y observaciones pueden ser valiosas para su perfeccionamiento.

Afonso, R. (2002). *Problemas de convergencia en un contexto de software educativo*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de La Laguna, España.

Artigue, M. (1995a). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1995b). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(1), 40-55.

Artigue, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education. *Notices of the AMS 46*(3), 1377-1385.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Ávila, J. (2005). *Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* España: Síntesis.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. (Primera Reimpresión). España: Síntesis.

Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. La derivada un concepto a caballo entre la Matemática y la Física*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problémes en mathematiques. *Reserches en Didactique des Mathématiques 4* (2), 165-198. Traducción: Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática. Obtenido el 2 de junio de 2004 desde http:/fractus.mat,uson.mx/Papers/Brousseau/ObtaculosBrousseau.htm

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Reserches en Didactique des Mathématiques 7* (2), 33-115. Traducción: Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Obtenido el 2 de junio de 2004 desde http:/fractus.mat,uson.mx/Papers/Brousseau/Fundamentos Brousseau.htm

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné à l'Université de Montréal en juin 1997 à l'occasion de la remise du doctorat honoris causa par Mr René Simard recteur de l'université. Obtenido el 5 de noviembre de 2011 desde http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

Buendía, G. y Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (1), 7-28.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 2-25). México: Ediciones Díaz de Santos.

Camargo, L. y Guzmán, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón.* Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Cantoral, R. (1988). Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada. En F. Hitt, O. Figueras, L. Radford y E. Bonilla (Eds.), *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* 381-386. México: Sección de Matemática Educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados del I.P.N.

Cantoral, R. (1991). Proyecto de investigación: formación de la noción de función analítica. *Mathesis 7* (2), 223-239.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En R. Farfán (Ed.), *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, (1)* 1-10. México: Sección de Matemática Educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados del I.P.N.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En R. Farfán, C. Matias, D. Sánchez y A. Tavarez (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*, 54-62. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14,* 70-81. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2003a). Enseñanza y aprendizaje en ambientes tecnológicos: el caso de la matemática escolar. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza. *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 169-184). México: Trillas.

Cantoral, R. (2003b). Pensamiento matemático avanzado: una revisión de los enfoques a la investigación sobre didáctica del análisis. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza. *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 205-218). México: Trillas.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.). *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8. Sevilla, España* (pp. 69-91). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo*. México: Thomson Editores.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* México: Pearson Education.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (2), 133-154.

Carabús, O. (2002). El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus Niveles de Comprensión. Producciones Científicas NOA. Sección: Educación y Sociedad. Catamarca. Obtenido el 13 de diciembre de 2006 desde http://www.editorial.unca.edu.ar/NOA2002/Aprendizaje%20Calculo%20Universidad.pdf

Carabús, O. (2007). *Ingenierías Didácticas. La comprensión en la conceptualización del Cálculo.* Argentina: Editorial Científica Universitaria.

Carrasco, E. (2005). *Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Castiblanco, A.; Urquina, H.; Acosta, E. y Rodríguez, F. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Serie Documentos. Colombia: Enlace Editores Ltda.

Catalán, A. y Dolores, C. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal: Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. En R. Farfán, M. Matías, D. Sánchez y A. Tavares (Eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13,* 36 – 41. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard, Y. (2005). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? Ponencia (mesa redonda): Confrontación de marcos teóricos. XVIII Jornadas del SI-IDM. Castellón, 2002. Obtenido el 18 de abril de 2007 desde http://www.ugr.es/~jgodino/ siidm/castellon_2002/contreras_vicen.doc

D´Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemática como causa de la falta de devolución. *Revista TED de la Universidad Pedagógica de Bogotá 11*, 63-71.

D´Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9 (Extra 1)*, 177-195.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis doctoral. Instituto Superior Pedagógico: Enrique J. Varona, Cuba.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8. Sevilla, España* (pp. 69-91). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas, concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7* (3), 195-218.

Dolores, C. (2007a). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp.169-204). México: Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. (2007b). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. (2007c). Usos de las gráficas y sus repercusiones en el aprendizaje de la matemática. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 479-484. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5* (3), 225-250.

Dolores, C. y Catalán, A. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal: Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. En R. Farfán, C. E. Matias, D. Sánchez y A. Tavares (Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13,* 36–41. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.*), Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking proceses. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathematiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques (16)* 3, 349-382. Traducción del francés: Ana María Ojeda. Documento de trabajo (1997). Seminario Probabilidades y Estadística en Matemática Educativa

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol. 5 (1993).

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME (9)* 1, 143-168. Obtenido el 10 de agosto de 2010 desde http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, historicity, classroom, and culture* (pp. 39-62). Rotterdam: Sense Publishers.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunnigham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Washington: Mathematical Association of America.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (2003). Lenguaje algebraico y pensamiento funcional. Un estudio de las funciones pretextando la resolución de desigualdades. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza. *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 89-144). México: Trillas.

Ferrari, M. y Farfán, F. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (3), 309-353.

García, E. (2006). *Una caracterización de la cultura didáctica al interior del aula de cálculo. Factor reflexivo del quehacer docente en los estilos de aprendizaje*. Tesis de

Licenciatura no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

García, M. (2007). *Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia educativa a distancia. Un estado del arte.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

González, A. (2006). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y aprendizaje*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de La Laguna. España.

Guzmán, M. (1996). El Rincón de la Pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Capítulo 0. Madrid: Pirámide. Obtenido el 8 de julio de 2008 desde http://www.mat.ucm.es/~angelin/labred/visrincon /00indice.htm

Guzmán, M; Colera, J. y Salvador, A. (1988). *Matemáticas, Bachillerato 3*. España: Anaya.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 10* (2), 213-223.

Jarero, M. (2006). *Elementos para el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la ecuación vectorial de la recta.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

López, J. (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

López, J. (2007). *Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto función*. Tesis para optar al título de Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Martínez, J.; López, R.; Gras, A. y Torregrosa, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. *Revista Enseñanza de las Ciencias 20* (2), 271-283.

Montiel, G. (2003). Construcción visual de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas. *Mosaicos Matemáticos 11*, 103-108.

Montiel, G. (2005a). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Montiel, G. (2005b). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 219-233.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96).

Córdoba, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y la Sociedad Española de investigación en Educación Matemática SEIEM.

Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de Bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Ordóñez, A. y Buendía, G. (2007). Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas. En C. Crespo, P. Lestón, T. Ochoviet y C. Oropeza (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* 427-431. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rico, L. (2001). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. España: Universidad de Huelva.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. España: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ruiz, L. (2001). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, 132-140. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Sánchez, M. y Molina, J. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 739-744. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sánchez, G.; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (2), 267-296.

Santibáñez, R. (2001). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar con estudiantes de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Serna, L. (2007). *Estudio socioepistemológico de la tangente.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Socas, M. (1999). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. Socas, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Argentina: Erre Eme S.A.

Suárez, L. (2008). *Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un análisis socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Testa, Z. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Ursini, S. y Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México : Grupo Editorial Iberoamérica.

Valero, M. (2003). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Wenzelburger, E. (1993). *Didáctica Cálculo diferencial*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zaldívar, J. (2006). *Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education 27*(4), 435-457. National Council of Teachers of Mathematics.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America.

ANEXOS

Anexo 1. Elementos para la componente didáctica

Análisis del diseño curricular de Matemática para la escuela secundaria argentina

Se presenta la secuenciación de contenidos conceptuales y procedimentales correspondientes al eje “Funciones” propuesto en el diseño para el área Matemática en primer y segundo año y los enunciados para el eje “Funciones y precálculo” para tercer y cuarto año.

⊗ CONTENIDOS CONCEPTUALES

♠ CONTENIDOS PROCEDIMENTALES

PRIMER AÑO	SEGUNDO AÑO
⊗ Lenguaje coloquial, gráfico y simbólico.	⊗ Lenguaje coloquial, gráfico y simbólico.
♠ Utilización del lenguaje coloquial, gráfico y simbólico (pasaje de uno a otro) para describir distintas situaciones o fenómenos.	→
♠ Comunicación de enunciados o situaciones mediante un lenguaje matemático adecuado.	→
	♠ Identificación y utilización correcta de símbolos y expresiones matemáticas en problemas u otras situaciones.
⊗ Expresiones algebraicas.	⊗ Expresiones algebraicas.
♠ Reconocimiento y utilización de expresiones algebraicas.	→
♠ Utilización de la jerarquía y las propiedades de las operaciones con expresiones algebraicas sencillas.	♠ Utilización de la jerarquía y las propiedades de las operaciones con expresiones algebraicas.
♠ Reconocimiento y utilización del cuadrado, el cubo de un binomio y la diferencia de cuadrados en expresiones algebraicas.	→
♠ Reconocimiento y utilización de propiedades en la simplificación de expresiones algebraicas sencillas.	♠ Reconocimiento y utilización de propiedades en la simplificación de expresiones algebraicas.
⊗ Ecuaciones – Inecuaciones	⊗ Ecuaciones – Inecuaciones
....	.....
⊗ Funciones	⊗ Funciones
♠ Determinación de la regla de formación de patrones numéricos de recurrencia.	→
♠ Exploración de patrones numéricos generados con calculadoras o	→

computadoras.	♠ Utilización de la notación simbólica para expresar el término general de una sucesión (ej.:1, 1/2, 1/3...1/n). ♠ Representación y cálculo de los términos de una sucesión (uso de calculadoras), conocido el término general.
♠ Reconocimiento de situaciones que representan funciones.	→
♠ Utilización de distintas formas para expresar la dependencia entre variables.	→
♠ Utilización del lenguaje coloquial, gráfico y simbólico para expresar funciones.	→
♠ Interpretación gráfica de funciones lineales, hiperbólicas y cuadráticas (casos sencillos).	♠ Interpretación gráfica de funciones lineales, hiperbólicas y cuadráticas.
♠ Generación de varios tipos de gráficas de funciones con computadoras o calculadoras gráficas.	→
♠ Visualización y observación de regularidades numéricas o geométricas a partir de funciones (uso de computadoras o calculadoras gráficas).	→
	♠ Generación de varios tipos de gráficos con computadoras o calculadoras gráficas, utilizando iteraciones. ♠ Reconocimiento del comportamiento de funciones sencillas (incremento, ceros, decrecimientos, periodicidad). ♠ Reconocimiento y graficación de funciones exponenciales y trigonométricas (casos sencillos).
♠ Obtención del gráfico y expresión de funciones derivadas de otras funciones (ej. f(x) +a .....)	→
♠ Creación de problemas a partir de actividades del mundo real, de información organizada o de funciones.	♠ Modelización utilizando funciones aplicadas a distintas áreas de conocimiento: biología, física, química, etc. ♠ Análisis y establecimiento del dominio de funciones sencillas, discriminado el tipo de variables que intervienen.

	♠ Comunicación de estrategias utilizadas en la resolución de problemas que involucren funciones.

TERCER AÑO	CUARTO AÑO
⊗ Funciones polinomiales y racionales. ♠ Graficación de funciones polinomiales y racionales. ⊗ Funciones irracionales. ♠ Reconocimiento del dominio de funciones irracionales. ♠ Graficación de funciones con radicales. ♠ Resolución de problemas y modelización de situaciones aplicando las funciones mencionadas. ♠ Reconocimiento y utilización de la composición de funciones. Casos sencillos. ♠ Reconocimiento del dominio en la composición de funciones. Casos sencillos. ⊗ Función inversa. ♠ Exploración de las condiciones para la existencia de la función inversa. ♠ Reconocimiento de las gráficas de una función y su inversa. ⊗ Funciones exponenciales y logarítmicas. ♠ Reconocimiento de funciones exponenciales y logarítmicas. ♠ Graficación de funciones exponenciales y logarítmicas. ♠ Exploración de propiedades que tienen la función exponencial y logarítmica. ♠ Resolución de problemas utilizando funciones exponenciales y logarítmicas. ⊗ Funciones trigonométricas. ♠ Graficación de funciones: seno, coseno y tangente. ♠ Reconocimiento de las propiedades de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente).	⊗ Funciones polinomiales y racionales. → ⊗ Funciones irracionales. → → ♠ Resolución de ecuaciones con radicales. → ♠ Reconocimiento y utilización de la composición de funciones. → ⊗ Función inversa. → → ⊗ Funciones exponenciales y logarítmicas. → ♠ Generación de funciones y gráficas utilizando software. ♠ Demostración de propiedades que tienen las funciones exponenciales y logarítmicas. → ⊗ Funciones trigonométricas. ♠ Utilización de las propiedades de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente). →

♠ Reconocimiento y utilización de identidades trigonométricas. ♠ Resolución de triángulos rectángulos y otras aplicaciones de las funciones trigonométricas.	→ ⊗ Sucesiones y series. ♠ Visualización y observación de regularidades numéricas y geométricas previo al reconocimiento de sucesiones. ♠ Reconocimiento y utilización de la notación simbólica para expresar el término general de una sucesión o de una serie (casos sencillos). ♠ Exploración de la convergencia y divergencia de sucesiones y series (casos sencillos). ⊗ Límite y continuidad de funciones reales. ♠ Exploración de la noción de límite de una función en un punto. ♠ Exploración del concepto de continuidad de la función en un punto. ⊗ Derivada. ♠ Exploración del concepto de tasa de variación instantánea. ♠ Reconocimiento de la existencia de la derivada de una función. ♠ Interpretación geométrica de la derivada. ♠ Resolución de problemas y graficación de funciones aplicando derivadas (casos sencillos).

MODALIDADES CIENCIAS NATURALES Y PRODUCCIÓN DE BIENES Y SERVICIOS

MATEMÁTICA APLICADA

Los tratamientos especiales desde estas modalidades se refieren a profundizar el estudio de las funciones trascendentes, mostrando diferentes contextos de uso de la derivada y buscando un manejo adecuado del cálculo y el análisis de funciones.

EJE **Funciones y pre-cálculo**

⊗ Resolución de problemas y modelización de situaciones aplicando funciones.

- ♠ Graficación de funciones con radicales.
- ♠ Resolución de ecuaciones con radicales.
- ♠ Resolución de problemas.
- ♠ Modelización de situaciones utilizando composición y descomposición de funciones.

⊗ Función inversa.

♠ Exploración de las condiciones para la existencia de la función inversa.

♠ Funciones exponenciales y logarítmicas.

♠ Resolución de ecuaciones exponenciales.

♠ Generación de funciones y gráficas utilizando software.

♠ Demostración de propiedades que tienen las funciones exponenciales y logarítmicas.

♠ Resolución de problemas y modelos matemáticos relacionados al crecimiento y decaimiento exponencial (aplicación a las Ciencias Naturales o al campo de la Tecnología, según la modalidad).

♠ Utilización de la función logística como modelo.

⊗ Funciones trigonométricas.

♠ Utilización de las propiedades de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente).

♠ Reconocimiento y utilización de identidades trigonométricas.

♠ Resolución de triángulos rectángulos y otras aplicaciones de las funciones.

⊗ Sucesiones y series.

♠ Visualización y observación de regularidades numéricas y geométricas como paso previo al reconocimiento de sucesiones.

♠ Exploración de la convergencia y divergencia de sucesiones y series (casos sencillos).

♠ Utilización y generación de sucesiones y series. Reconocimiento de su convergencia o divergencia.

♠ Comunicación de estrategias y de modelos utilizados en la resolución de los diferentes problemas.

⊗ Límite y continuidad de funciones reales.

♠ Reconocimiento y cálculo del límite de una función en un punto.

♠ Reconocimiento de la continuidad o no de las funciones en puntos de su dominio (casos sencillos).

⊗ Derivada.

♠ Utilización de la tasa de variación instantánea en problemas (relativos a las Ciencias Naturales o al campo de la Tecnología, según la modalidad).

♠ Utilización y cálculo de la derivada de una función en un punto.

♠ Resolución de problemas y modelización de situaciones utilizando razones de cambio en las Ciencias Naturales o en el campo de la Tecnología.

♠ Resolución de problemas y graficación de funciones aplicando derivadas (casos sencillos).

MODALIDAD ECONOMÍA Y GESTIÓN DE LAS ORGANIZACIONES

MATEMÁTICA FINANCIERA

⊗ Funciones exponencial y logarítmica. Aplicaciones.

♠ Lectura e interpretación de enunciados de problemas.

♠ Selección y simbolización de las operaciones matemáticas correspondientes a la situación problemática.

♠ Interpretación de gráficos de funciones.

♠ Creación de problemas a partir de actividades del mundo real y de información organizada.

♠ Elaboración de fórmulas y utilización en la resolución de problemas.

Fuente:

- Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe (1999). Diseño Curricular Juridiccional para Tercer Ciclo EGB de la provincia de Santa Fe. Argentina.
- Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe (2003). Diseño Curricular para Educación Polimodal. Argentina.

Análisis del diseño curricular de Física para la escuela secundaria argentina

Se presenta la secuenciación de contenidos conceptuales y procedimentales correspondientes al eje “Fuerzas y movimiento” propuesta para séptimo de primaria y primer y segundo año de secundaria.

⊗ CONTENIDOS CONCEPTUALES

♠ CONTENIDOS PROCEDIMENTALES

⊗ Diversas formas de ubicar el móvil. Rapidez y velocidad. La aceleración. Movimientos simples (por ejemplo, con aceleración constante).

⊗ Las leyes de Newton como modelo de la relación entre causas y efectos.

⊗ Campo gravitatorio terrestre. La fuerza peso y la aceleración de la gravedad. Energía cinética y potencial gravitatoria.

⊗ Situaciones de conservación y de no conservación de la energía mecánica (por ejemplo movimiento en el campo gravitatorio con y sin rozamiento).

♠ Observación, registro y control de las variables que intervienen en un movimiento.

♠ Análisis de movimientos de aceleración constante (desde el punto de vista cinético y dinámico).

♠ Análisis de situaciones en las que varía la energía mecánica de un sistema.

Fuente:

- Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe (1999). Diseño Curricular Juridiccional para Tercer Ciclo EGB de la provincia de Santa Fe. Argentina.

Programas analíticos de Matemática I y Matemática II de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral

Matemática I

Tema 1: F*unciones*

Concepto de función. Función valor absoluto, constante, identidad y otras. Función polinomial. Casos especiales: las funciones de primer y segundo grado. Función de proporcionalidad inversa. Función racional fraccionaria. Funciones circulares. La función exponencial. Composición de funciones. Función inversa de otra. La función logarítmica. Funciones definidas por tramos. Operaciones aritméticas con funciones conocidas. La curva logística. Aplicaciones.

Tema 2: *Vectores y matrices*

Vectores de n componentes. Operaciones con vectores. Producto. Matrices. Operaciones con matrices. Multiplicación. Inversa de una matriz cuadrada. Traspuesta de una matriz. Matrices reducidas y matrices inversas. Aplicaciones.

Tema 3: D*eterminantes*

Definición. Propiedades de los determinantes. Determinantes e inversas. Ecuaciones matriciales.

Tema 4: S*istemas de ecuaciones lineales*

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación de Gauss - Jordan. Eliminación Gaussiana. Sistemas homogéneos. Regla de Cramer.

Tema 5: V*ectores en el plano y en el espacio*

Vectores en el plano. Producto escalar y proyecciones. Vectores en el espacio. Producto vectorial de dos vectores. Producto mixto.

Tema 6: E*lementos de geometría analítica*

Coordenadas cartesianas y polares. Gráficas. Secciones cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Sus ecuaciones y elementos. Rectas y planos en el espacio.

Matemática II

Tema 1. *Análisis combinatorio*

Objeto del análisis combinatorio. Arreglos, permutaciones y combinaciones simples. Números combinatorios. Propiedades. Fórmula de Stieffel. Triángulo de Tartaglia. Potencia enésima de un binomio. Fórmula de Newton. Arreglos, permutaciones y combinaciones con repetición.

Tema 2. *Sistemas de inecuaciones lineales - Programación lineal*

Sistemas de inecuaciones lineales. Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución gráfica. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución gráfica. Programación Lineal. Resolución gráfica.

Tema 3. *Límite y continuidad*

La recta real. Intervalos abiertos, semi-abiertos, cerrados, semi-cerrados, semi-infinitos, infinitos. Función real de variable real. Límite funcional. Interpretación geométrica. Límites laterales. No existencia de límite. Teoremas elementales de límite. Operaciones y cálculo de límite. Álgebra de límites. Continuidad de una función en un punto. Distintos tipos de discontinuidades. Propiedades de las funciones continuas.

Tema 4. *Derivadas y diferenciales*

Incrementos. Razón de cambio. Derivada de una función en un punto. Función derivada. Interpretación geométrica y física. Continuidad y derivabilidad. Reglas de derivación. Diferencial de una función. Teoremas fundamentales del Cálculo diferencial. Crecimiento. Decrecimiento. Extremos relativos de una función. Criterios para determinar extremos locales. Extremos absolutos. Concavidad y puntos de inflexión. Estudio de funciones. Regla de L'Hopital. Fórmula de Taylor y Mac Laurin.

Tema 5. *Cálculo integral*

Primitivas e integrales indefinidas. Interpretación geométrica. Integración inmediata. Métodos de integración: por sustitución y por partes. Integración de funciones trigonométricas. Descomposición en fracciones simples. Integrales definidas. Interpretación geométrica. Propiedades fundamentales. Función integral. Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow. Cálculo de áreas. Aplicaciones.

Tema 6. *Nociones sobre ecuaciones diferenciales*

Origen de las ecuaciones diferenciales. Definición. Clasificación. Solución de una ecuación diferencial. Ecuación diferencial de variables separables.

Tema 7. *Nociones sobre funciones de varias variables*

Función de varias variables. Función de dos variables. Gráficas. Curvas de nivel. Derivadas parciales. Extremos relativos de funciones de dos variables.

Índice de contenidos de los libros utilizados

FUNCIONES (Engler, Müller, Vrancken y Hecklein, 2008)

1. FUNCIONES
    - 1.1 Funciones
    - 1.2 Funciones escalares
    - 1.3 Gráficas de funciones según distintas transformaciones

2. FUNCIONES ESCALARES ALGEBRAICAS
    - 2.1 Funciones algebraicas especiales
    - 2.2 Función de primer grado
    - 2.3 Función de segundo grado
    - 2.4 Función polinomial
    - 2.5 Función racional fraccionaria

3. FUNCIONES ESCALARES TRASCENDENTES
    - 3.1 Función exponencial
    - 3.2 Función logística
    - 3.3 Función logarítmica
    - 3.4 Funciones trigonométricas

PROBLEMAS INTEGRADORES DE FUNCIONES

RESPUESTAS

BIBLIOGRAFÍA

EL CÁLCULO DIFERENCIAL (Engler, Müller, Vrancken y Hecklein, 2007)

1. NÚMEROS REALES Y LA RECTA REAL
    - 1.1 Un poco de historia y el nacimiento del cálculo
    - 1.2 Números reales y la recta real

2. LÍMITE DE FUNCIONES
    - 2.1 Noción intuitiva de límite
    - 2.2 Definición de límite de una función y propiedades
    - 2.3 Límites infinitos y límites en el infinito
    - 2.4 Límites indeterminados

3. FUNCIÓN CONTINUA
    - 3.1 Continuidad de una función en un punto
    - 3.2 Función continua en un intervalo
    - 3.3 Teoremas de las funciones continuas

4. EL CONCEPTO DE DERIVADA
    - 4.1 Razones de cambio

Anexo 2. El cuestionario

GUÍA DE ACTIVIDADES **Matemática II** **2008**
Integrantes del grupo ....

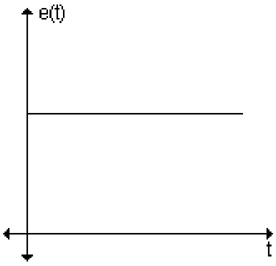
Actividad 1. Supongamos que se está llenando un balde con agua.
En esta situación de variación están involucradas diversas magnitudes, como por ejemplo el volumen del balde, es decir su capacidad total. Mencione otras magnitudes que intervienen (por lo menos tres).
¿Cuáles de esas magnitudes aumentan? ¿Cuáles disminuyen? ¿Alguna permanece constante?

....

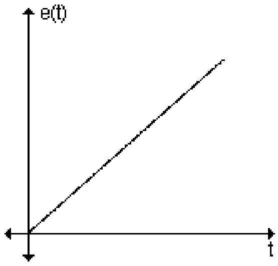
....

Actividad 2. Cada una de las siguientes gráficas muestra la posición e(t) de un auto en función del tiempo desde cierto punto de referencia. Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explique.

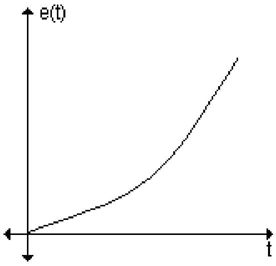
i)



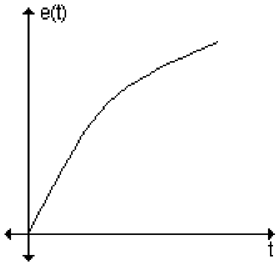
ii)



iii)



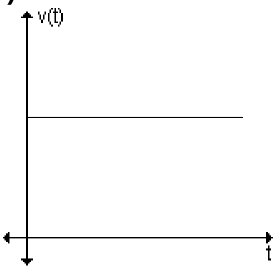
iv)



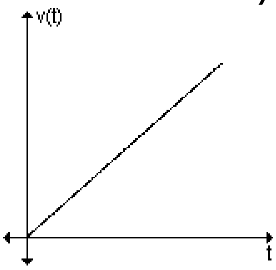
....

Actividad 3. Determine cuál de las siguientes gráficas muestra la velocidad con que se mueve el auto del problema anterior. Explique.

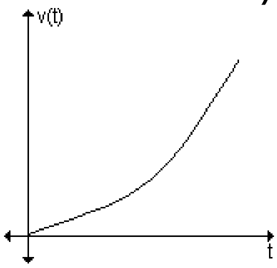
i)



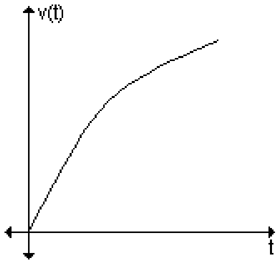
ii)



iii)



iv)



....

Actividad 4. Los valores de la tabla dan la posición e (en metros) de un automóvil desde cierto punto de referencia, en el instante en que han transcurrido t segundos.

t(segundos)	0	1	2	3	4	5
e(metros)	17	34	51	68	85	102

a) ¿Qué valores puede tomar la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?

....

b) Teniendo en cuenta los valores de la tabla, ¿cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan? ....

....

c) Complete las siguientes tablas con el cambio entre dos valores consecutivos de la variable considerada. Escriba en cada casillero la operación que realiza.

t	0	1	2	3	4	5
	cambio	cambio	cambio	cambio	cambio	

e	17	34	51	68	85	102
	cambio	cambio	cambio	cambio	cambio	

¿Qué significado tienen las operaciones hechas en cada tabla? ....

....

¿Por medio de qué operación calculó los cambios? ....

¿Cómo fueron los cambios para cada una de las variables? ....

Actividad 5. En la tabla se muestran las ganancias de una pequeña empresa en cada uno de los primeros cinco años de trabajo.

a) Complete la tabla con el cambio de ganancia año a año.

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Ganancia (en miles de pesos)	7	18	45	34	30	30
Cambio de ganancia						

b) ¿En qué períodos la ganancia aumentó? ....

c) ¿En qué períodos la ganancia disminuyó? ....

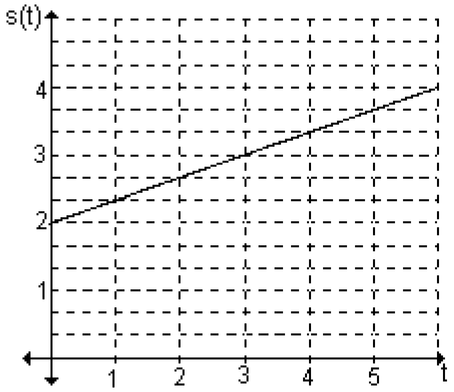
d) ¿En qué períodos la ganancia no cambió? ....

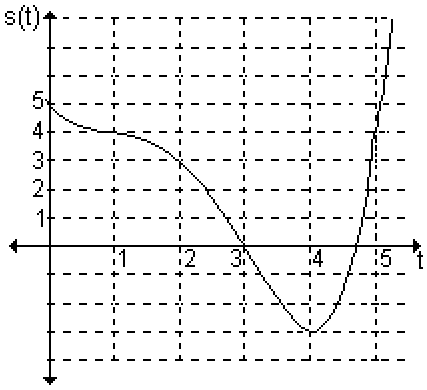
e) ¿Qué puede observar en la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones

anteriores?..

....

Actividad 6. Las gráficas muestran la posición s(t) de dos partículas desde cierto punto de referencia para determinado intervalo de tiempo.





a) Para cada una de las gráficas, explique qué sucede con una de las magnitudes a medida que varía la otra.

....

....

b) Complete las tablas para cada función. Recuerde que la letra Δ indica cambio de una cantidad, por lo que Δs significa el cambio de la variable s en el intervalo de t correspondiente.

Intervalos	Δs
$0 \le t \le 1$	
$1 \le t \le 2$	
$2 \le t \le 3$	
$3 \le t \le 4$	
$4 \le t \le 5$	

Intervalos	Δs
$0 \le t \le 1$	
$1 \le t \le 2$	
$2 \le t \le 3$	
$3 \le t \le 4$	
$4 \le t \le 5$	

c) Describa el comportamiento de los cambios Δs para la primer gráfica ....

....

Describa el comportamiento de los cambios Δs para la segunda gráfica ....

....

Si corresponde, indique en qué intervalos los cambios de la variable dependiente fueron más rápidos ....

....

Actividad 7. La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene, para cada instante t (en segundos), mediante la ley $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$, donde s_0 es la altura inicial del objeto, en metros, v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración de la gravedad, que en la superficie terrestre es de $-9{,}8\,\frac{m}{seg^2}$.

Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio que tiene 30 m de altura.

a) Obtenga la ley que permite determinar su posición en cada instante t, teniendo en cuenta que su velocidad inicial es nula.

b) Calcule $s(1{,}5) - s(1)$ y exprese su significado en términos del problema.

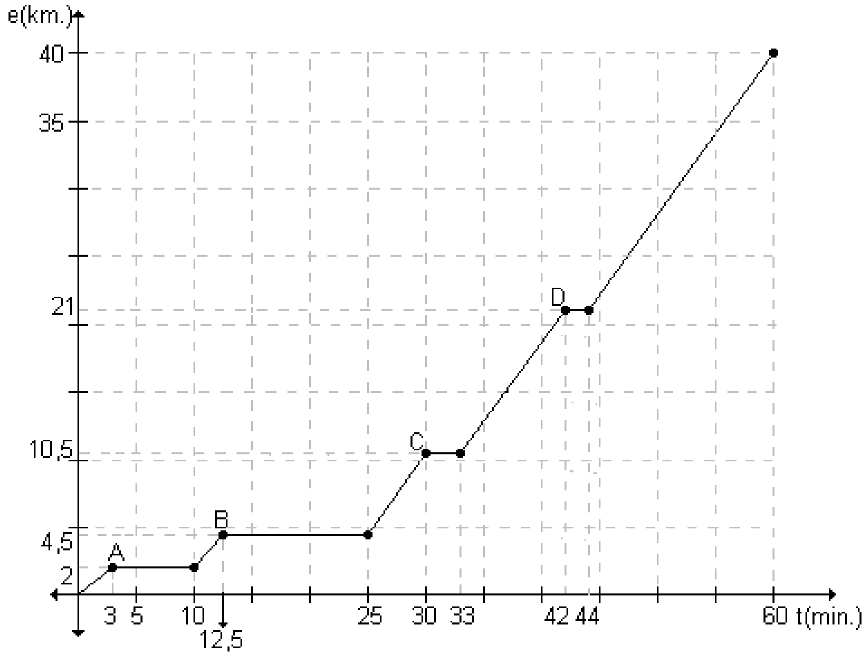
c) Determine $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ y explique su significado.

Anexo 3. Secuencia de actividades

GUÍA DE ACTIVIDADES - Primera Parte **Matemática II** **2008**

Integrantes del grupo ....

Actividad 1. En el gráfico se observa la representación del espacio recorrido por un auto en función del tiempo en su trayecto desde Esperanza a Santa Fe.



Referencias:
A: Entrada a estación de servicio
B: Parada en el arco de la Colonización
C: Peaje
D: Cruce de rutas

a) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el coche? ¿Cuánto tiempo duró el viaje? ¿Cuál fue la velocidad media del auto a lo largo de todo su recorrido?

b) ¿Cuál fue la velocidad media en el trayecto que realizó desde que salió del peaje hasta que llegó al cruce de rutas?

c) ¿Cuál fue la velocidad media durante los primeros 15 minutos? ¿Y si no se tienen en cuenta los intervalos de tiempo en los que el auto estuvo parado?

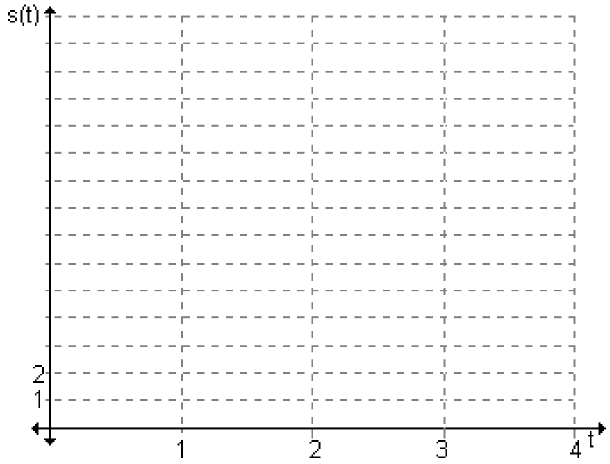
d) ¿Cuál fue la velocidad media entre los instantes 25 y 30 minutos?

e) ¿Cuánto marca el velocímetro del auto cuando transcurrió un minuto de haber salido? Explique.

Actividad 2. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 3t + 1$ metros. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$ calculadas para uno de los intervalos.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$			
$1 \le t \le 2$			
$2 \le t \le 3$			
$3 \le t \le 4$			

¿Qué concepto físico representan los valores de la última columna de la tabla? Determine las unidades en los que se expresan.



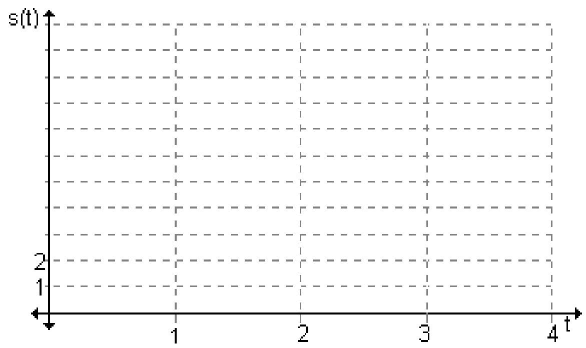
¿Cuál es la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto?

¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

Actividad 3. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla y realice la representación gráfica.

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$		
$1 \leq t \leq 2$		
$2 \leq t \leq 3$		
$3 \leq t \leq 4$		



¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto?

Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

Actividad 4. Para estudiar el movimiento de una partícula, un investigador la ha iluminado mediante un flash que lanza destellos instantáneos a intervalos de 0,1 segundos. Tomando medidas sobre una fotografía, ha registrado los espacios recorridos por la partícula en los instantes que se muestran en la tabla.

Instante t (en segundos)	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4
Espacio e recorrido hasta el instante t	12	12,37	12,68	12,93	13,13	13,28	13,5	16

a) El investigador intentó determinar la velocidad exacta de la partícula en t = 2 segundos mediante la fórmula $\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_2) - e(t_1)}{t_2 - t_1}$ haciendo coincidir el instante inicial y el final del intervalo, es decir considerando $t_1 = 2$ y $t_2 = 2$. ¿Qué puede observar si realiza este procedimiento?

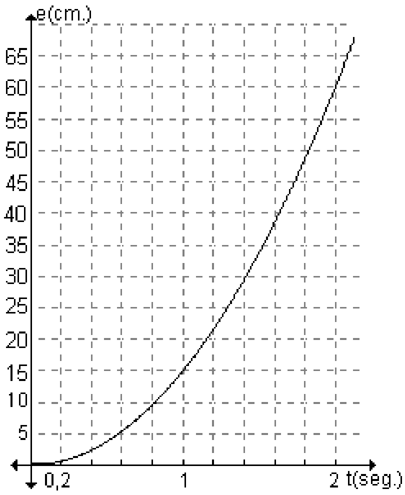
b) Complete la tabla con los espacios recorridos y las velocidades medias de la partícula en el intervalo [2, t] teniendo en cuenta que los valores de t son los que aparecen en la primera fila de la tabla anterior.

Intervalo [2, t]	[2; 2,1]	[2; 2,2]					
Espacio recorrido en el intervalo [2, t]							
Velocidad media en el intervalo [2, t]							

Según los cálculos realizados, ¿cuál de los valores para la velocidad media es una mejor aproximación de la velocidad en el instante t = 2 segundos? Explique.

GUÍA DE ACTIVIDADES - Segunda Parte **Matemática II** **2008**
Integrantes del grupo ....

Actividad 1. En un experimento de laboratorio se estudió la caída libre de una bola de hierro pequeña. La gráfica muestra el espacio e recorrido por la bola, en centímetros, desde que se lanzó y durante t segundos.



a) Determine la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.

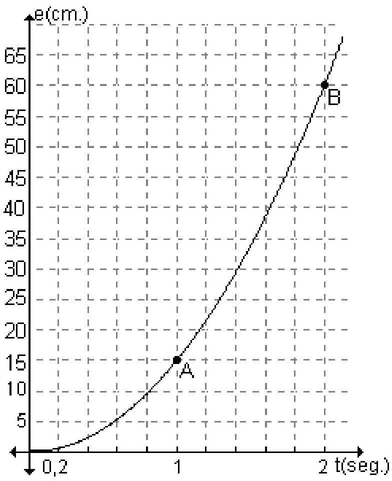
b) Observe el gráfico y complete la tabla considerando los intervalos [1, 1 + Δt], teniendo en cuenta los valores de Δt que aparecen en la primer fila de la tabla.

Δt	0,8 seg.	0,6 seg.	0,4 seg.	0,2 seg.
Intervalo [1, 1 + Δt]				
Espacio recorrido				
Velocidad promedio				

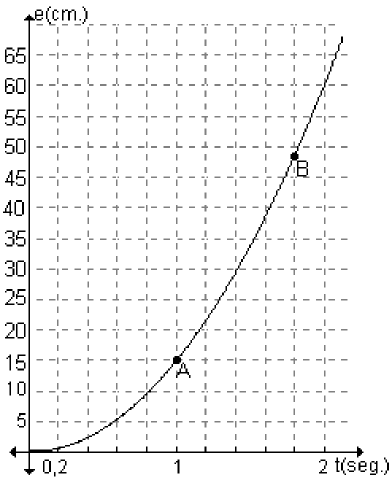
c) ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t = 1 segundo?

d) En cada uno de los siguientes gráficos, calcule la pendiente de la recta que une los puntos A y B. Relacione los valores de las pendientes con los cálculos realizados en los incisos anteriores. Dibuje la recta.

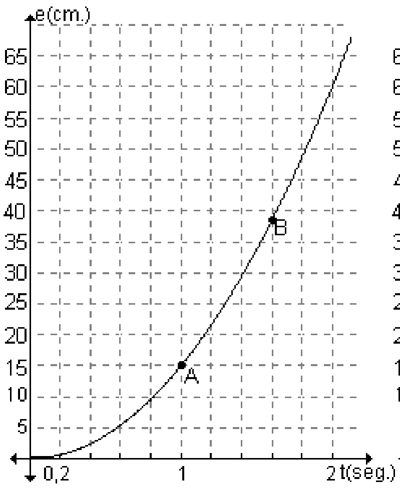
i)



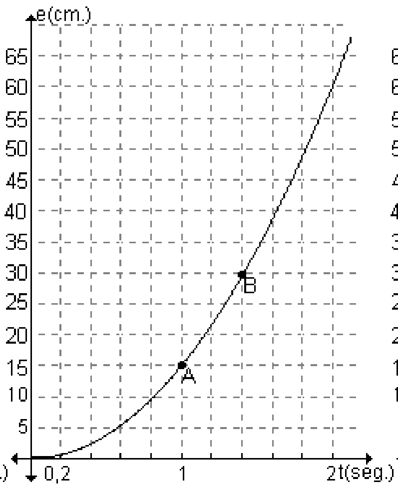
ii)



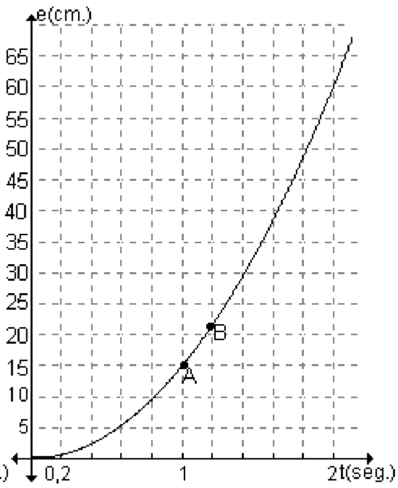
iii)



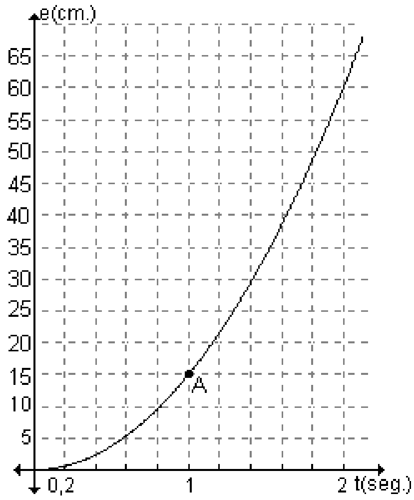
iv)



v)



e) Dibuje la recta tangente a la gráfica en el punto **A**. Estime su pendiente ¿Qué relación existe entre la pendiente de esta recta y la velocidad pedida en **c)?**



Actividad 2. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley $s(t) = t^3$.

a) Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

$t_0 \leq t \leq t_1$	$1,9 \leq t \leq 2$	$1,99 \leq t \leq 2$	$1,999 \leq t \leq 2$	... →		← ...	$2 \leq t \leq 2,001$	$2 \leq t \leq 2,01$
Δt				... →		← ...		
Δs				... →		← ...		
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$				... →		← ...		

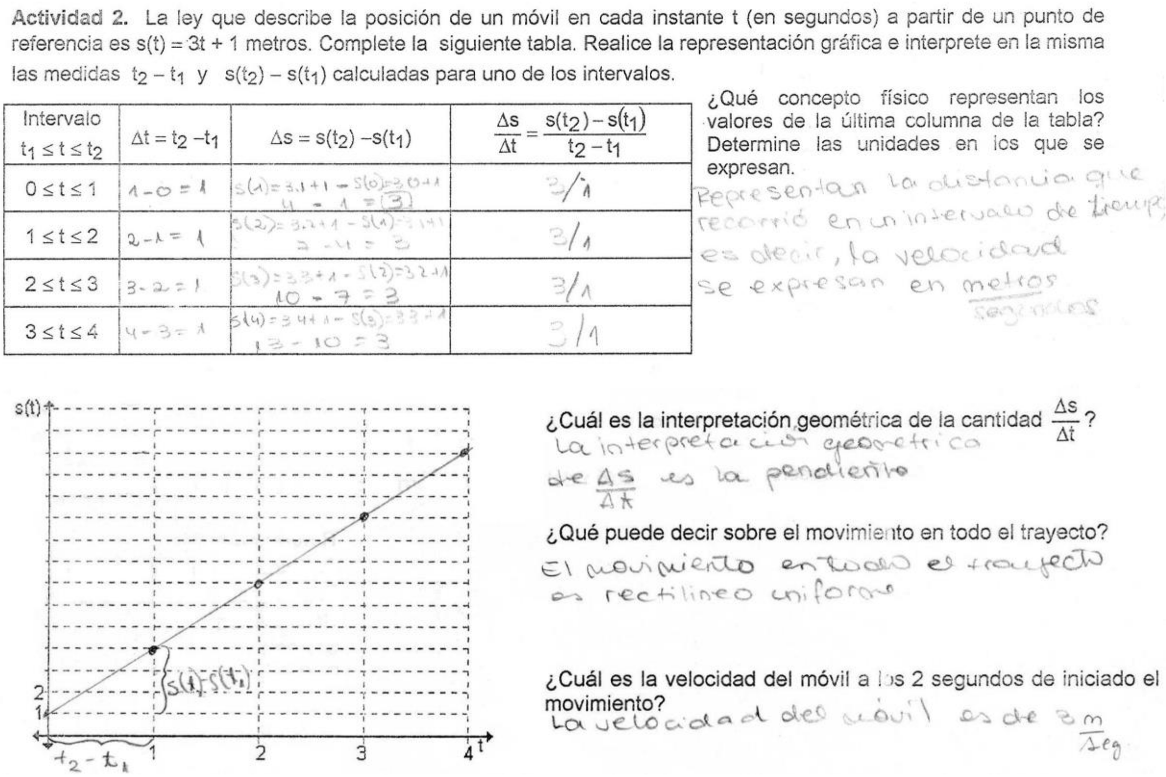
b) Según el acercamiento realizado en la tabla**,** ¿qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en $t = 2$? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura?

c) Obtenga la velocidad media $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ de la partícula en el intervalo $[2, 2 + \Delta t]$. Interprete geométricamente la expresión obtenida.

d) Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso **b)**, ¿cuál es el significado de $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$? Calcule el límite. ¿Qué observa?

e) Calcule $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ e interprete física y geométricamente el resultado.

Anexo 4. Producciones de los alumnos


Actividad 2. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 3t + 1$ metros. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$ calculadas para uno de los intervalos.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	1 - 0 = 1	s(1) = 3.1+1 - s(0) = 3.0+1 4 - 1 = 3	3/1
$1 \le t \le 2$	2 - 1 = 1	s(2) = 3.2+1 - s(1) = 3.1+1 7 - 4 = 3	3/1
$2 \le t \le 3$	3 - 2 = 1	s(3) = 3.3+1 - s(2) = 3.2+1 10 - 7 = 3	3/1
$3 \le t \le 4$	4 - 3 = 1	s(4) = 3.4+1 - s(3) = 3.3+1 13 - 10 = 3	3/1

¿Qué concepto físico representan los valores de la última columna de la tabla? Determine las unidades en los que se expresan.

Representan la distancia que recorrió en un intervalo de tiempo, es decir, la velocidad se expresan en metros/segundos

¿Cuál es la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

La interpretación geométrica de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ es la pendiente

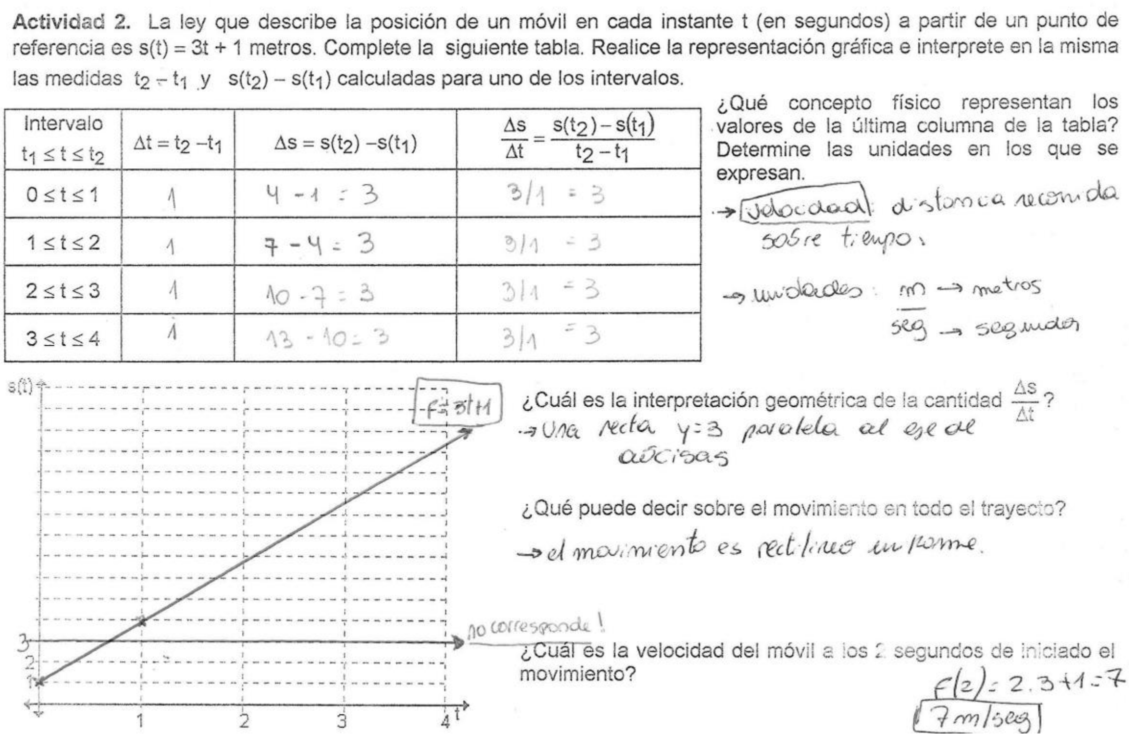
¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto?

El movimiento en todo el trayecto es rectilíneo uniforme

¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

La velocidad del móvil es de 3 m/seg

Figura 1. Resolución actividad 2, primera parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Vanesa


Actividad 2. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 3t + 1$ metros. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$ calculadas para uno de los intervalos.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	1	4 - 1 = 3	3/1 = 3
$1 \le t \le 2$	1	7 - 4 = 3	3/1 = 3
$2 \le t \le 3$	1	10 - 7 = 3	3/1 = 3
$3 \le t \le 4$	1	13 - 10 = 3	3/1 = 3

¿Qué concepto físico representan los valores de la última columna de la tabla? Determine las unidades en los que se expresan.

→ $\boxed{\text{Velocidad}}$: distancia recorrida sobre tiempo.

→ unidades: m/seg → m → metros, seg → segundos

¿Cuál es la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

→ Una recta y = 3 paralela al eje de abcisas

¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto?

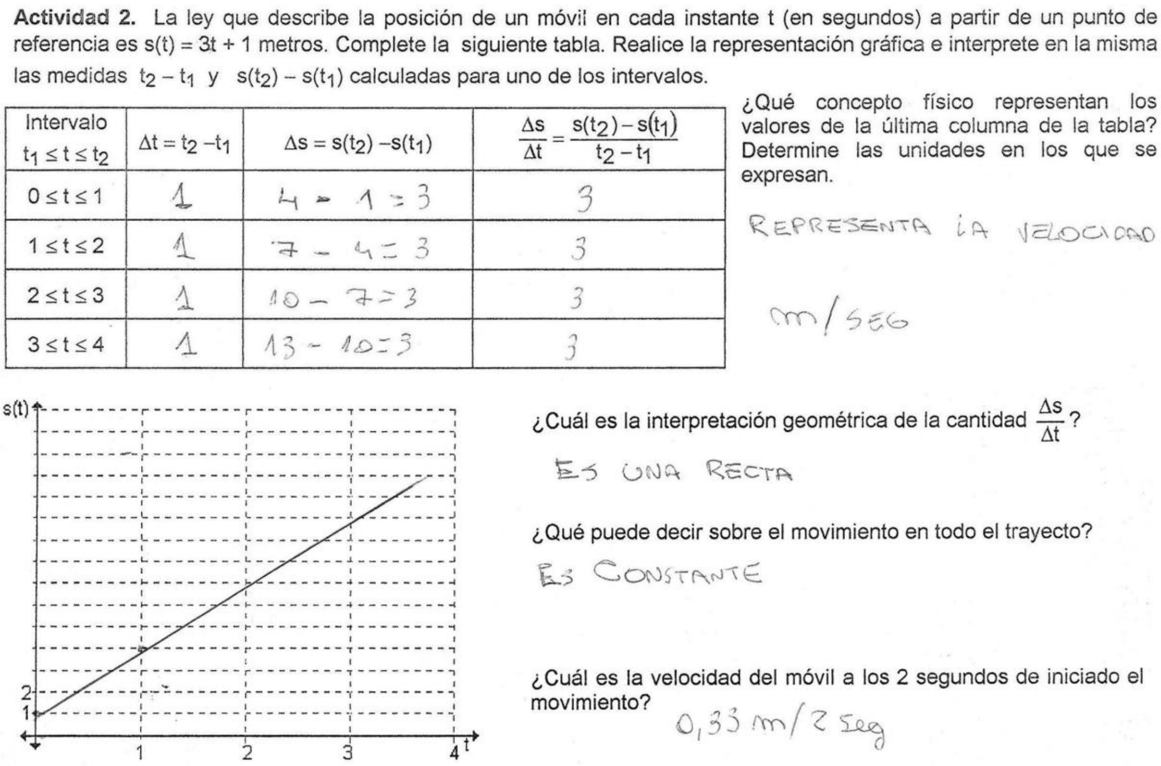
→ el movimiento es rectilíneo uniforme.

¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

f(2) = 2.3+1 = 7

$\boxed{7 \text{ m/seg}}$

Figura 2. Resolución actividad 2, primera parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Luis



Actividad 2. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 3t + 1$ metros. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$ calculadas para uno de los intervalos.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	1	4 - 1 = 3	3
$1 \le t \le 2$	1	7 - 4 = 3	3
$2 \le t \le 3$	1	10 - 7 = 3	3
$3 \le t \le 4$	1	13 - 10 = 3	3

¿Qué concepto físico representan los valores de la última columna de la tabla? Determine las unidades en los que se expresan.

REPRESENTA LA VELOCIDAD

m/seg

¿Cuál es la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

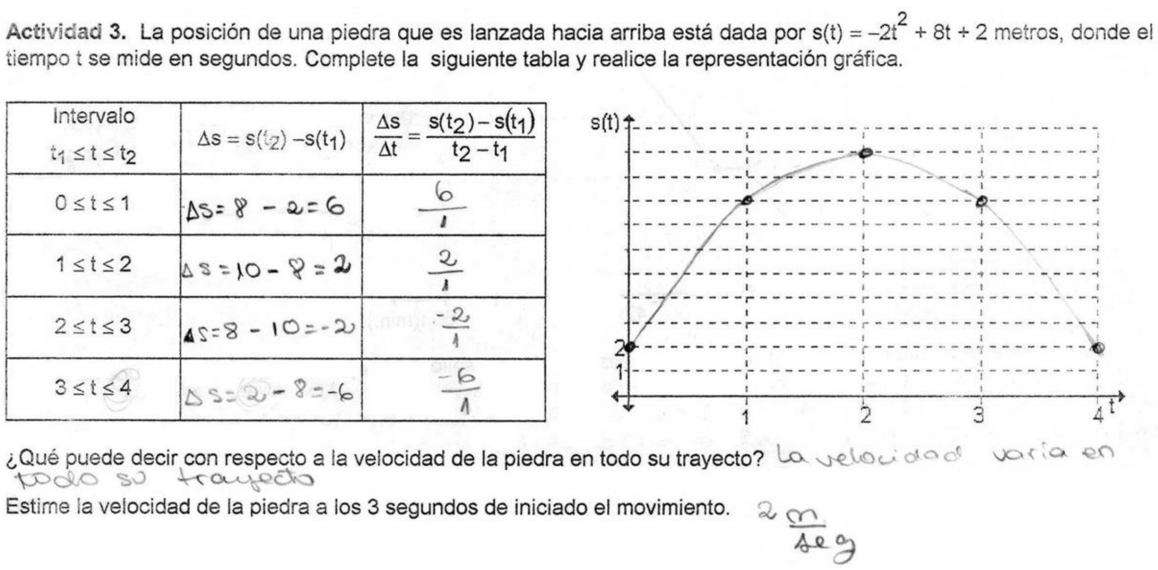
ES UNA RECTA

¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto?

ES CONSTANTE

¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciado el movimiento? 0,33 m/2 seg

Figura 3. Resolución actividad 2, primera parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Valentín



Actividad 3. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla y realice la representación gráfica.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	Δs = 8 - 2 = 6	$\frac{6}{1}$
$1 \le t \le 2$	Δs = 10 - 8 = 2	$\frac{2}{1}$
$2 \le t \le 3$	Δs = 8 - 10 = -2	$\frac{-2}{1}$
$3 \le t \le 4$	Δs = 2 - 8 = -6	$\frac{-6}{1}$

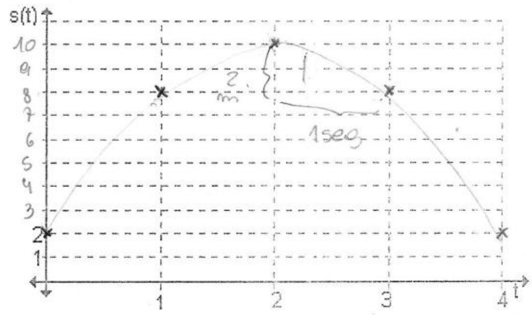
¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto? La velocidad varía en todo su trayecto

Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento. $2 \frac{m}{seg}$

Figura 4. Resolución actividad 3, primera parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Vanesa

Actividad 3. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla y realice la representación gráfica.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	8 - 2 = 6	$\frac{6}{1} = 6$
$1 \le t \le 2$	10 - 8 = 2	$\frac{2}{1} = 2$
$2 \le t \le 3$	8 - 10 = -2	$\frac{-2}{1} = -2$
$3 \le t \le 4$	2 - 8 = -6	$\frac{-6}{1} = -6$



¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto? → la velocidad no es costante, varía con el tiempo.

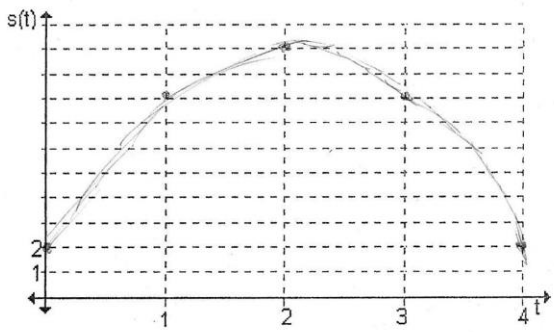
Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

Velocidad: 2 $\frac{m}{seg}$ → $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

Figura 5. Resolución actividad 3, primera parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Luis

Actividad 3. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla y realice la representación gráfica.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	8 - 2 = 6	6
$1 \le t \le 2$	10 - 8 = 2	2
$2 \le t \le 3$	8 - 10 = -2	-2
$3 \le t \le 4$	2 - 8 = -6	-6



¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto?

[0,2] AUMENTA [2,4] DISMINUYE

Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

2,66 m/seg

Figura 6. Resolución actividad 3, primera parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Valentín

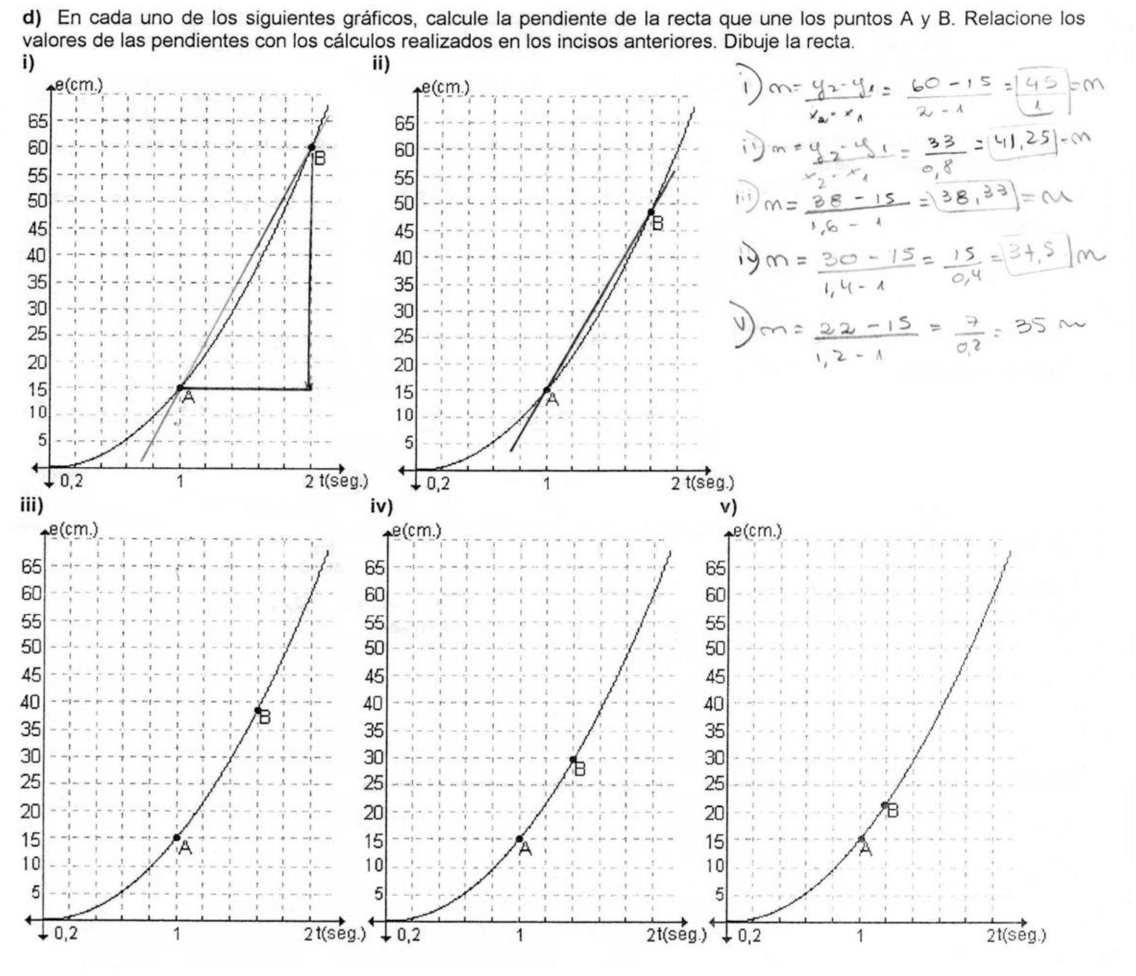


Figura 7. Resolución inciso d, actividad 1, segunda parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Vanesa

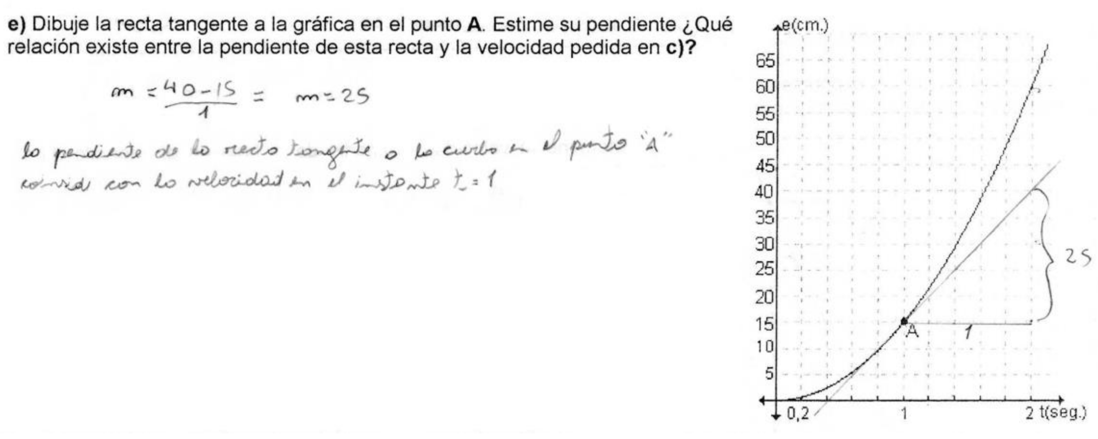
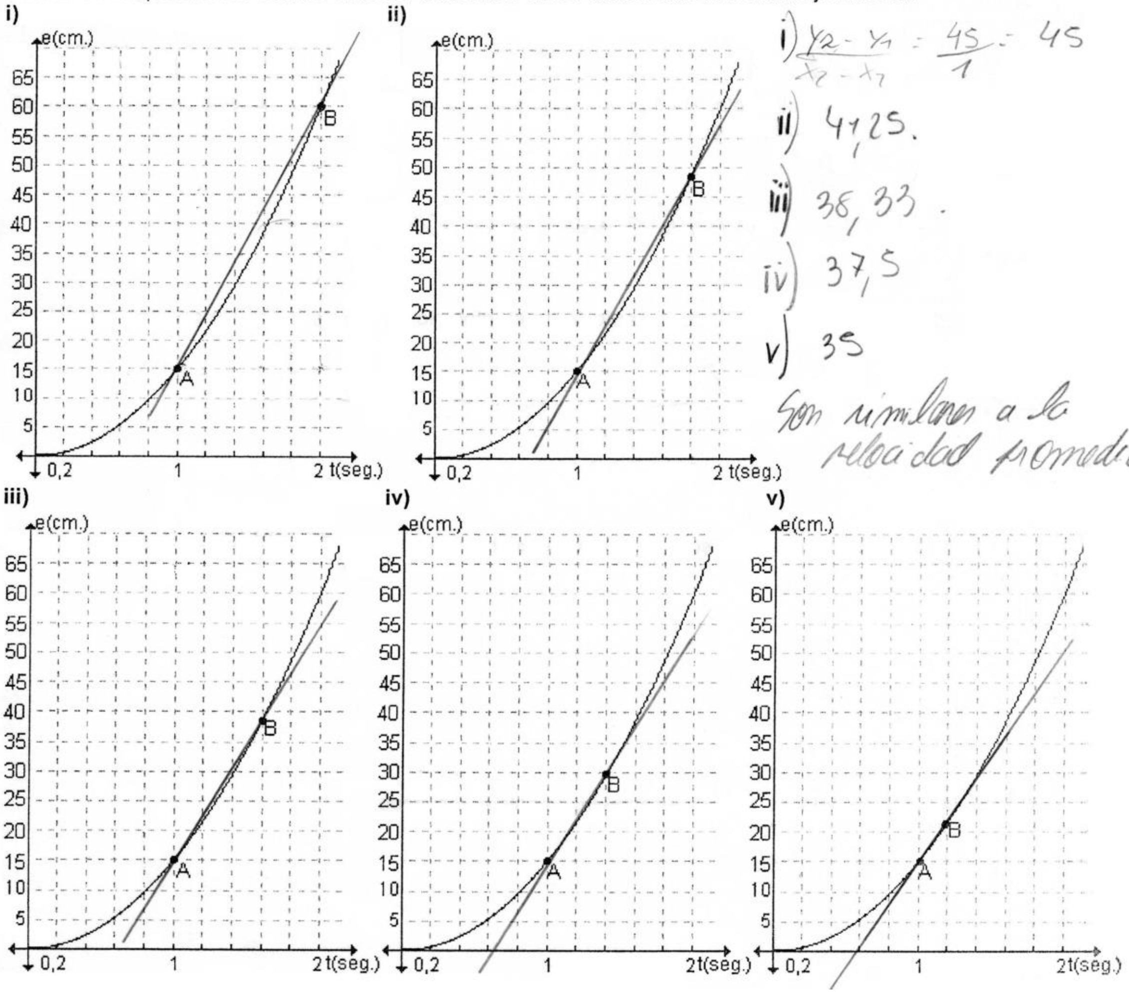


Figura 8. Resolución inciso e, actividad 1, segunda parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Luis

d) En cada uno de los siguientes gráficos, calcule la pendiente de la recta que une los puntos A y B. Relacione los valores de las pendientes con los cálculos realizados en los incisos anteriores. Dibuje la recta.



i) $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{45}{1} = 45$

ii) 41,25.

iii) 38,33.

iv) 37,5

v) 35

Son similares a la velocidad promedio

Figura 9. Resolución inciso d, actividad 1, segunda parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Valentín

Actividad 2. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley $s(t) = t^3$.

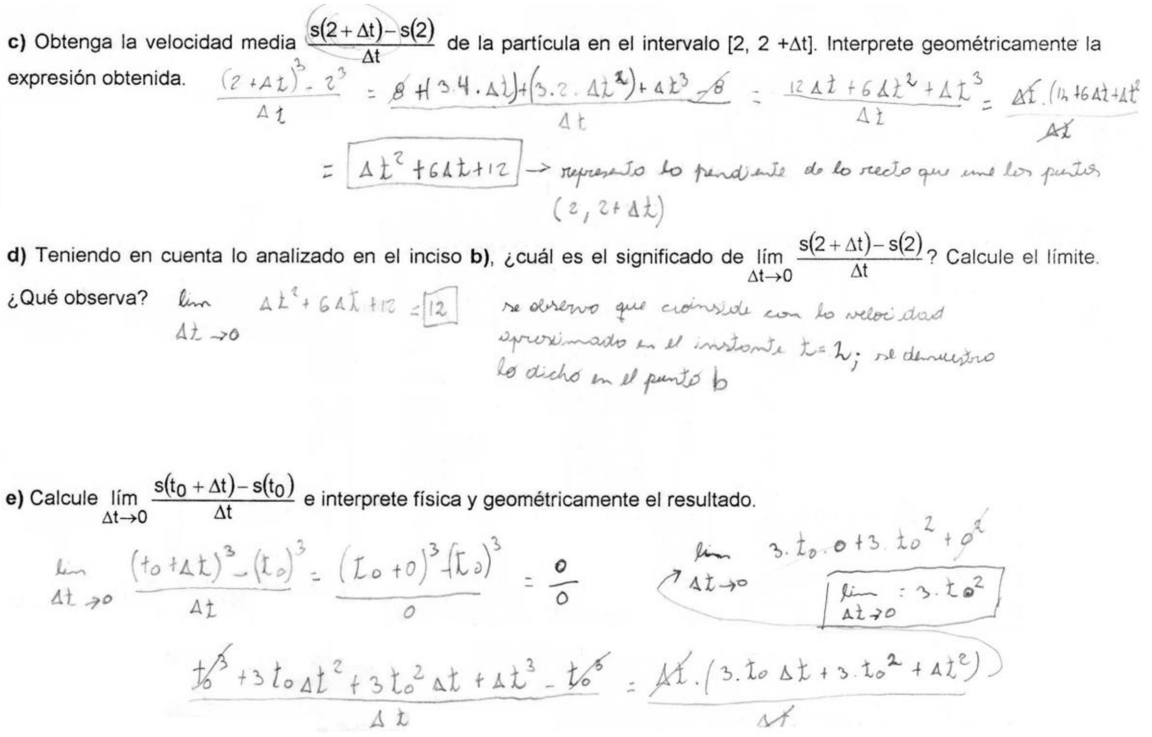
a) Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

$t_0 \le t \le t_1$	$1,9 \le t \le 2$	$1,99 \le t \le 2$	$1,999 \le t \le 2$	… →		← …	$2 \le t \le 2,001$	$2 \le t \le 2,01$
Δt	0,1	0,01	1.10^{-3}	… →		← …	1.10^{-3}	0,01
Δs	$2^3-(1,9)^3$ 1,141	$2^3-(1,99)^3=0,119$	$2^3-(1,999)^3=0,01199$	… →		← …	$2^3-(2,001)^3=0,012$	$2^3-(2,01)^3=0,12$
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	11,41	11,94	11,99	… →		← …	12,0006	12,06

b) Según el acercamiento realizado en la tabla, ¿qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en t = 2? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura?

La velocidad de la partícula en t=2 tiende a 12. Si se continuará cumpliendo.

Figura 10. Resolución incisos a y b, actividad 2, segunda parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Vanesa



c) Obtenga la velocidad media $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ de la partícula en el intervalo [2, 2 +Δt]. Interprete geométricamente la expresión obtenida.

$$\frac{(2+\Delta t)^3-2^3}{\Delta t} = \frac{\cancel{8}+(3\cdot 4\cdot\Delta t)+(3\cdot 2\cdot\Delta t^2)+\Delta t^3-\cancel{8}}{\Delta t} = \frac{12\Delta t+6\Delta t^2+\Delta t^3}{\Delta t} = \frac{\cancel{\Delta t}\cdot(12+6\Delta t+\Delta t^2)}{\cancel{\Delta t}}$$

$= \boxed{\Delta t^2+6\Delta t+12}$ → representa la pendiente de la recta que une los puntos (2, 2+Δt)

d) Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso **b)**, ¿cuál es el significado de $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$? Calcule el límite. ¿Qué observa?

$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta t^2+6\Delta t+12 = \boxed{12}$

se observa que coincide con la velocidad aproximada en el instante t = 2; se demuestra lo dicho en el punto b

e) Calcule $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ e interprete física y geométricamente el resultado.

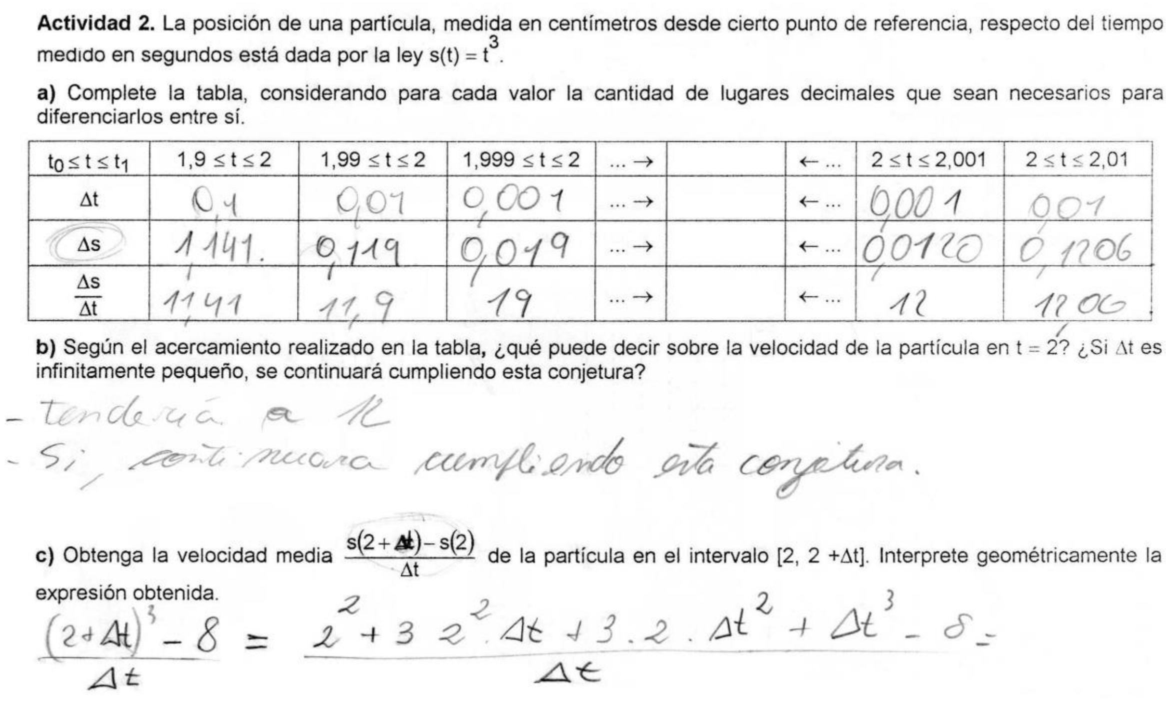
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t_0+\Delta t)^3-(t_0)^3}{\Delta t} = \frac{(t_0+0)^3-(t_0)^3}{0} = \frac{0}{0}$$

$\lim_{\Delta t\to 0} 3\cdot t_0\cdot 0+3\cdot t_0^2+0^2$

$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0} = 3\cdot t_0^2}$

$$\frac{\cancel{t_0^3}+3t_0\Delta t^2+3t_0^2\Delta t+\Delta t^3-\cancel{t_0^3}}{\Delta t} = \frac{\cancel{\Delta t}\cdot(3\cdot t_0\Delta t+3\cdot t_0^2+\Delta t^2)}{\cancel{\Delta t}}$$

Figura 11. Resolución incisos c, d y e, actividad 2, segunda parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Luis



Actividad 2. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley $s(t) = t^3$.

a) Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

$t_0 \le t \le t_1$	$1,9 \le t \le 2$	$1,99 \le t \le 2$	$1,999 \le t \le 2$	… →		← …	$2 \le t \le 2,001$	$2 \le t \le 2,01$
Δt	0,1	0,01	0,001	… →		← …	0,001	0,01
Δs	1,141.	0,119	0,019	… →		← …	0,0120	0,1206
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	11,41	11,9	19	… →		← …	12	12,06

b) Según el acercamiento realizado en la tabla, ¿qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en t = 2? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura?

- tenderá a 12
- Si, continuará cumpliendo esta conjetura.

c) Obtenga la velocidad media $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ de la partícula en el intervalo [2, 2 +Δt]. Interprete geométricamente la expresión obtenida.

$$\frac{(2+\Delta t)^3-8}{\Delta t} = \frac{2^2+3\cdot 2^2\cdot\Delta t+3\cdot 2\cdot\Delta t^2+\Delta t^3-8}{\Delta t} =$$

Figura 12. Resolución incisos a, b y c, actividad 2, segunda parte de la secuencia, correspondiente al equipo de Valentín