COLECCIÓN **CÁTEDRA**

MAT

GEO 3D

Geometría en 3D

Ana María Mántica
Marcela Götte

ediciones UNL

UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL LITORAL

ediciones UNL

Dirección editorial
Ivana Tosti
Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación diseño
Alina Hill
Coordinación comercial
José Díaz

Corrección
Verónica Radesca
Diagramación interior
José Díaz
Diseño de tapa
Laura Canterna

—

Sugerencias y comentarios
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

Mántica, Ana María,
Geometría en 3D / Mántica, Ana María; Marcela Götte. - 1a ed - Santa Fe: Ediciones UNL, 2022.
Libro digital, PDF – (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978–987–749–344–3

1. Geometría. 2. Matemática. 3. Educación Superior. I. Götte, Marcela II. Título
CDD 516

Geometría en 3D

Ana María Mántica
Marcela Götte

ediciones UNL

CÁTEDRA

Índice

Prólogo

La presente obra responde a la necesidad de contar con un texto de geometría en tres dimensiones que pueda ser utilizado en el nivel superior y particularmente con estudiantes de profesorado en Matemática. Exponemos lo producido y revisado desde nuestro rol como docentes del profesorado en Matemática de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) por más de una década. Por ello, en la presentación del libro encontrarán un nivel de formalidad riguroso en la exposición de conceptos y propiedades.

Suponemos que los lectores de este libro cuentan con herramientas particulares requeridas para el trabajo geométrico como también con conocimientos de conceptos y propiedades de geometría del plano.

La geometría es, fundamentalmente, una ciencia deductiva y de allí que las demostraciones sean necesarias para que las aseveraciones tengan un fundamento riguroso con el fin de ser consideradas verdaderas. Una demostración está construida correctamente si se apoya en axiomas y proposiciones demostradas con anterioridad, no en lo que se presenta de manera obvia. Los axiomas y definiciones pueden variar de un texto a otro, pero una vez establecidos no deben quebrantarse. La demostración es necesaria para establecer la generalidad de la proposición tratada. El proceso de demostrar requiere del establecimiento de hipótesis y de tesis de dicha propiedad ya que es esencial para realizarla, puesto que se considera equivalente al reconocimiento de datos e incógnitas en un problema a resolver. Por lo tanto, encontrarán propiedades demostradas más las propuestas y, al final de cada capítulo, más problemas para resolver.

A los conceptos básicos como *recta* y *plano*, y a los conceptos de interrelación entre ellos, como *perpendicularidad* y *paralelismo*, los consideramos conocidos en el contexto de la Geometría Plana. Su extensión al espacio tridimensional no cambia su significado básico, pero se amplía la variedad de posibles relaciones entre ellos. Estas nuevas posibilidades necesitan una capacidad de visualización que es a menudo bastante limitada por estar acostumbrados a ver todo en un plano. Incluso conociendo la existencia de diferentes planos y direcciones, se tiende a ver solo un plano a la vez. Este tipo de conflictos suele ser un terreno en el que podrían surgir fácilmente conceptos erróneos.

El libro está organizado en seis capítulos. En el primero se exponen los fundamentos requeridos por la geometría euclídea, su método deductivo, el valor de los axiomas y de la deducción de las propiedades. En el segundo capítulo presentamos los axiomas sobre los que asentaremos nuestro trabajo y las primeras definiciones de figuras tridimensionales. En el tercero trabajamos con transformaciones geométricas y los conceptos de paralelismo y perpendicularidad estableciendo nuevas relaciones entre los elementos y propiedades particulares que en el espacio de tres dimensiones generan dichas relaciones. En el cuarto y quinto capítulo definimos figuras poliédricas y no poliédricas y determinamos sus elementos. Dedicamos un apartado especial a la geometría en la superficie esférica solo con la intención de mostrar que con otras definiciones y elementos podría desarrollarse una geometría que no cumpla los axiomas de la euclídea. La geometría, además de estudiar los problemas afines de los objetos geométricos (incidencia, intersección y paralelismo, entre otros), se ocupa de los problemas geométricos de medida tales como: el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes y medición de ángulos. Este estudio está presente en el último capítulo.

Esperamos que esta obra sea de utilidad tanto para profesores como para estudiantes de nivel superior.

Ana y Marcela

Capítulo 1

Fundamentos

Las matemáticas enfrentaron crisis en casi todas las etapas, debido a la forma en que fueron construidas. Su estructura podría compararse a la de un rascacielos al que no se le cavaron buenos cimientos cuando fue construido, más bien se lo construyó sobre la superficie del terreno, pues no se pensó en un edificio tan alto como resultó. La construcción comenzó con números y figuras geométricas que parecían estar sólidamente fundamentadas en las experiencias cotidianas. A medida que comenzó a elevarse el edificio se vio que se tambaleaba y que posteriores avances podrían poner en riesgo el edificio entero. Fueron los griegos, en el período del 600 al 300 antes de Cristo (a. C.) que percibieron el peligro y proporcionaron los contrafuertes que consideraron necesarios. Surgen así dos medidas: por un lado, seleccionar zonas firmes del terreno donde pudieran asentarse los muros; estas zonas eran las verdades evidentes de la naturaleza. Por otro lado, colocar acero en la estructura que fue la demostración deductiva de cada adición que se le hiciera a la misma. La estructura matemática como fue trabajada por los griegos, consistente principalmente en la geometría Euclídea, resultó bastante estable. La geometría comenzó siendo un conjunto de reglas y conocimientos empíricos, obtenidos por vía experimental y usados por los constructores y medidores de terrenos de los antiguos pueblos orientales. Euclides (siglo III a. C.) desarrolla y fundamenta la geometría en forma lógica y sistemática, en un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 465 proposiciones distribuidas en 13 libros denominados *Elementos*. Estos libros eran fuente de autoridad y fijaron “una especie de estándar de exigencia tanto en lo referente a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimientos como en lo referente al rigor informal de una prueba matemática” (Puertas Castaños, 1991:40). Representan, además, una normalización de la exposición demostrativa de las proposiciones geométricas. Esta Geometría se ocupa del espacio real del que nuestras mentes parecen poseer conocimiento intuitivo. Asimismo, se declara que deducir o demostrar una verdad es establecerla como consecuencia de verdades anteriormente establecidas. Si se retrocede en esa cadena deductiva se llegará al punto de partida, formado por algunas verdades imposibles de reducir a otras más simples y cuya certeza es forzoso admitir, ya sea por su evidencia inmediata o

por la validez de lo que de ella se deduce. A estas proposiciones se las llama *axiomas o postulados*, para distinguirlas de las proposiciones demostrables, llamadas *teoremas*: así aparecen clasificadas en los famosos Elementos de Euclides. De la misma manera que hay proposiciones que se admiten sin demostración existen conceptos primarios que no es posible definir rigurosamente, por la imposibilidad de referirlos a otros más simples; en cambio, se establecen simples nociones de los elementos a considerar y se intenta dar una definición descriptiva de los objetos geométricos. Estos conceptos se caracterizan estableciendo sus propiedades mediante los axiomas o postulados. Todos los teoremas se deducen de los axiomas mediante métodos rigurosos. A pesar de su aparente solidez, los Elementos de Euclides contienen algunas grietas que pasaron desapercibidas durante siglos. A fines del siglo XIX y principios del XX, la matemática sufrió una revisión crítica, abandonando los intentos de definición que Euclides pretendía dar de punto, recta, plano, ..., como también adecuando a un lenguaje más sencillo. La axiomatización de la geometría euclídea llevada a cabo por Hilbert en su libro *Fundamentos de la geometría* suele ser considerada una de sus contribuciones más importantes a la matemática moderna. En este célebre trabajo, publicado originalmente en 1899, Hilbert logró conformar una nueva lista de axiomas a partir de los cuales era posible construir íntegramente la geometría euclídea elemental y deducir de un modo riguroso, sin recurrir a construcciones o a figuras geométricas, sus teoremas fundamentales. Se lo conoce como "método axiomático formal".
A partir de este método la geometría, que es lo que se trabaja en este libro, se funda en las siguientes normas:

1. Enunciar, sin definición, los conceptos primeros.
2. Admitir, sin demostración, ciertas propiedades que relacionan estos conceptos, enunciando los axiomas correspondientes.
3. Deducir de manera lógica las restantes propiedades o teoremas.

El problema de determinar las propiedades que se aceptan sin demostración no es sencillo. Los geómetras han buscado el modo de reducir la lista de axiomas hasta el menor número posible y obtener el resto de las propiedades por razonamiento deductivo, considerando como punto de partida un número pequeño de axiomas. Según Fetisov (1973) las razones para reducir el número de axiomas consisten en que cuando esto sucede cada uno en particular adquiere mayor significado, porque estos contienen en sí mismos toda la geometría futura que va a deducirse de ellos. Por lo tanto, mientras menor sea el número de axiomas, más importantes, profundas y de mayor alcance serán las propiedades que revela cada uno. Otra razón para esforzarse a limitar el número es que mientras menor sea, más fácil es investigar la validez de cada uno y de todos ellos. Los axiomas no pueden seleccionarse al azar, deben tener relaciones entre sí. No se pueden seleccionar en forma aislada sino que deben ser un sistema completo de axiomas.

Las condiciones que debe cumplir este sistema son:

1. Los axiomas han de ser compatibles, es decir, ninguno de ellos debe estar en contradicción con los demás o sus consecuencias.
2. Los axiomas deber ser independientes, es decir, ninguno de ellos o parte de ellos debe poder demostrarse como consecuencia de los demás.

La primera es propiedad esencial para la validez del sistema. La segunda es una condición de elegancia (Puig Adam, 1980:2).

Los axiomas se clasificaron en cinco categorías:

I. Axiomas de incidencia (enlace).

II. Axioma de paralelismo.

III. Axiomas de ordenación y división.

IV. Axioma de continuidad.

V. Axiomas de movimiento.

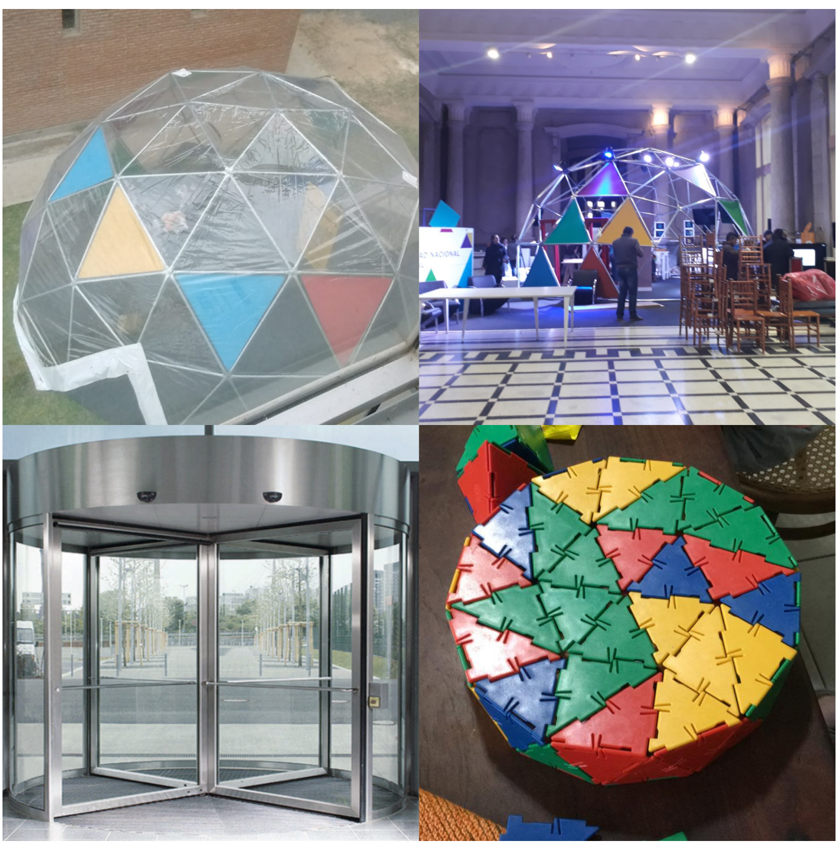
Se proponen estas categorías aun cuando los axiomas sobre los que se fundamenta este texto no coincidan exactamente con los de Hilbert. Serán entonces esos axiomas los que se tomen como punto de partida para el desarrollo del texto. La geometría se considera fundamentalmente como una ciencia deductiva, "una demostración es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas y proposiciones previamente establecidas" (Fetisov, 1973:17). En cuanto a la distinción entre axioma y teorema, Rey Pastor y Puig Adam (1948) sostienen que no es intrínseca, sino que depende de la ordenación que se adopte para la organización lógica. Esta ordenación se puede hacer de diversidad de formas, pero una vez adoptado un ordenamiento debe respetarse insistiendo en que cada teorema debe solo apoyarse en teoremas anteriores, advirtiendo que de lo contrario, se establece un círculo vicioso.
La postura respecto a lo que es el "hacer matemático", consiste en que el "saber matemático" no es un saber plenamente cristalizado sino un saber vivo, en constante proceso. El "saber matemático" no es un saber acabado, sino en constante construcción; hay problemas planteados en el siglo XIX que ha llevado años y discusiones entre matemáticos encontrar la solución y hay otros que todavía no han sido resueltos. Al trabajar con un libro de texto quizás lo que quede fosilizado sea lo que se plasme en dicho material [1]. Itzcovich (2005) plantea que para que los alumnos puedan involucrarse en el trabajo con demostraciones no es suficiente con la presentación de buenos problemas. Es necesario que los estudiantes se vayan apropiando de ciertos recursos y técnicas que son propias de los procesos de demostración en matemática. Sería simple si se pudiera aislar ese conjunto de técnicas y enseñarlas de "una vez y para siempre" con el objetivo de que los alumnos las apliquen. Lamentablemente las cosas son mucho más complejas: las técnicas van apareciendo en la medida en que constituyen recursos posibles para enfrentar problemas, y son los problemas los que "reclaman" ciertas técnicas. Por otra parte, es de destacar que tanto el lenguaje

[1] "Donde las definiciones se presentan con radical precisión y como punto de partida, las demostraciones se muestran 'completas' y solo una por teorema, la estructura del texto aparece cerrada y de tal forma que se llega a la convicción de que en la Matemática ya no queda nada por hacer"(de Lorenzo, 1998:16).

empleado como las demostraciones se presentan teniendo en cuenta que los estudiantes de nivel superior, para quienes se piensa el presente texto, requieren el uso de notación formal. Weber (2013) destaca que en distintos momentos de la carrera académica de un estudiante se requieren diferentes tipos de justificación aunque esto rara vez se explicita. Señala que el estudiante suele recibir mensajes mixtos, dado que en general los libros de texto matemáticos ofrecen en algunos casos una explicación intuitiva, en otros un ejemplo y en otros casos una prueba rigurosa para justificar una proposición, aunque la transición entre pensamiento intuitivo, empírico y riguroso no está explícitamente marcada. Esto puede llevar a los estudiantes a adquirir creencias matemáticas indeseables sobre el rigor, la explicación y las pruebas, y puede explicar parcialmente por qué los estudiantes presentan argumentos informales como pruebas en cursos avanzados.
Se dispone de un gran número de propiedades de la Geometría Euclídea del plano. Dado que estas propiedades se han demostrado, en este libro las tomaremos como propiedades disponibles y en algunos casos se hacen explícitas.

Capítulo 2

Axiomas, figuras y sentido



Se expresan los axiomas que se consideran en las diferentes categorías enunciadas en el Capítulo 1: Fundamentos, a partir de lo que se construirá la geometría en el espacio de tres dimensiones.

2.1. Axiomas de incidencia (enlace); ordenación y división (separación); paralelismo y continuidad

2.1.1. Axiomas de incidencia (enlace)

Ax I.1- Existen infinitos entes llamados puntos, cuyo conjunto se denomina espacio.

Ax I.2- Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados planos y los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados rectas.

Ax I.3- Dos puntos distintos determinan una recta y solo una.

Ax I.4- Tres puntos no alineados determinan un plano y solo uno.

Ax I.5- Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los demás puntos de la recta también lo están.

2.1.2. Axioma de paralelismo

Ax II- Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella.

En relación con estos dos grupos de axiomas se consideran disponibles las siguientes propiedades:

a) Una recta y un punto exterior determinan un plano que pasa por ellos.

b) Dos rectas secantes determinan un plano que las contiene.

c) Dos rectas paralelas determinan un plano.

d) Dos rectas en el espacio, se cortan, o son paralelas o se cruzan (cruzadas o alabeadas).

2.1.3. Axiomas de ordenación y división (Separación)

Ax III.1- La recta es un conjunto de puntos linealmente ordenado, abierto y denso.

Ax III.2- Toda recta r establece una clasificación de los puntos del plano, no contenidos en ella, en dos únicas clases o regiones, tales que:

- Todo punto exterior a la recta pertenece a una u otra región.
- El segmento que une dos puntos $\left\{\begin{matrix} A, C \\ A, B \end{matrix}\right\}$ de $\left\{\begin{matrix} \textit{la misma} \\ \textit{distinta} \end{matrix}\right\}$ región $\left\{\begin{matrix} \textit{no corta} \\ \textit{corta} \end{matrix}\right\}$ a la recta r.

Ax III.3- Todo plano α establece una clasificación de los puntos del espacio, no contenidos en él, en dos únicas clases o regiones, tales que:

- Todo punto exterior al plano pertenece a una u otra región.
- El segmento que une dos puntos $\left\{\begin{matrix} A, C \\ A, B \end{matrix}\right\}$ de $\left\{\begin{matrix} \textit{la misma} \\ \textit{distinta} \end{matrix}\right\}$ región $\left\{\begin{matrix} \textit{no corta} \\ \textit{corta} \end{matrix}\right\}$ al plano α.

Teorema 2.1: Si el segmento determinado por dos puntos $\left\{\begin{array}{c} A, B \\ A, C \end{array}\right\}$ que no pertenecen al plano $\alpha \left\{\begin{array}{c} \textit{corta} \\ \textit{no corta} \end{array}\right\}$ al plano, los puntos pertenecen a $\left\{\begin{array}{c} \textit{distinta} \\ \textit{la misma} \end{array}\right\}$ región.

Definición 2.1: Semiespacio es el conjunto de puntos de cada región más el conjunto de los puntos del plano llamado borde.

Teorema 2.2: Si dos puntos están en el mismo semiespacio también están en él todos los puntos del segmento que determinan.

Teorema 2.3: Si un plano α separa un par de puntos *A*, *B* de una terna *A*, *B*, *C* de puntos no contenidos en él, separa también otro par (por ejemplo *B*, *C*) pero no el tercero (*A*, *C*).

Teorema 2.4: Dos planos con un punto en común tienen una recta en común que pasa por dicho punto.

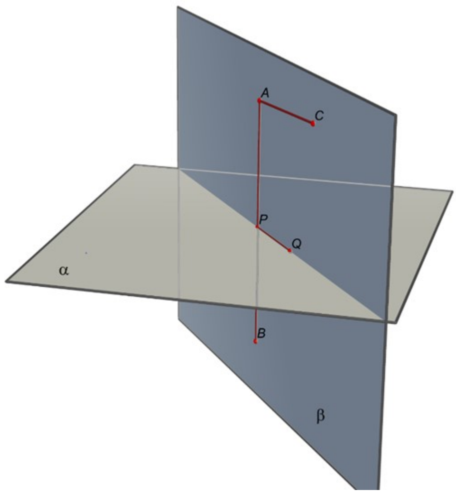
Hipótesis: $P \in \alpha \ \wedge \ P \in \beta$

Tesis: $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{PQ}$

Demostración: Bastará con probar que tienen otro punto común *Q* (Ax I.5). Tracemos una recta *r* que pasa por *P* incluida en β. Si *r* está en α el teorema está probado. Si *r* no está en α consideramos dos puntos *A* y *B* tal que $A \in r$, $B \in r$ a distinto lado de α y sea *C* un punto tal que $C \in \beta \wedge C \notin r$

a) Si $C \in \alpha$, el teorema está probado.

b) Si $C \notin \alpha$, por el T. 2.1 y Axioma de división del espacio, podemos decir:
El segmento $\overline{AC}$ o el $\overline{BC}$ corta a α en un punto. Suponemos que $\overline{BC}$ corta a α.
Sea $Q \in \overline{BC}$ tal que $Q \in \beta \ \wedge \ Q \in \alpha$, donde $Q \neq P$ pues $C \notin r$.



Tenemos $P \in \alpha \wedge P \in \beta$, $Q \in \alpha \wedge Q \in \beta$

$$\left.\begin{cases} P \in \alpha \wedge Q \in \alpha \rightarrow^{(1)} & \overleftrightarrow{PQ} \subset \alpha \\ P \in \beta \wedge Q \in \beta \rightarrow^{(1)} & \overleftrightarrow{PQ} \subset \beta \end{cases}\right\} \overleftrightarrow{PQ} \subset \alpha \cap \beta$$

(1) Si una recta tiene dos puntos en el plano está incluida en dicho plano por Ax I.5. De este teorema y del axioma de división del espacio tenemos: dos planos secantes se dividen mutuamente en dos semiplanos contenidos en los respectivos semiespacios que cada plano determina.

2.1.4. Axioma de continuidad

Ax IV- Dada una clasificación de los puntos de una recta en dos clases C_1 y C_2 que cumplan las condiciones:

1. existen puntos de la recta en una y otra clase;
2. todo punto de la recta está en una u otra clase;
3. todo punto de C_1 precede a todo punto de C_2,

Existe un punto, y solo uno, P, de la recta tal que todos los puntos que le preceden pertenecen a la clase C_1, y todos los que le siguen pertenecen a la clase C_2.

2.2. Figuras en el espacio

2.2.1. Concepto de diedro

Definición 2.2: Dados dos semiplanos α, β con un borde común r, pero situados en planos distintos, se llama diedro convexo al conjunto de puntos comunes a los semiespacios limitados por los planos α y β que contienen, respectivamente, los semiplanos β y α. La recta r es la arista del diedro y los semiplanos α y β se llaman caras.

Todos los puntos del segmento que unen dos puntos de sus caras, no pertenecientes a las aristas, pertenecen al diedro. También todos los rayos de los ángulos convexos definidos por dos semirrectas a, b con origen común $V / V \in r \ \wedge \ \overrightarrow{VA} \subset \alpha \ \wedge \ \overrightarrow{VB} \subset \beta$.

Definición 2.3: Dos diedros con una cara común y las otras dos en un mismo plano, se llaman adyacentes.

Definición 2.4: Dos diedros cuyas caras son semiplanos respectivamente opuestos se llaman opuestos por la arista.

Definición 2.5: Un diedro convexo y sus dos adyacentes constituyen una región del espacio llamada diedro cóncavo.

Definición 2.6: Dos diedros adyacentes llenan un semiespacio que recibe el nombre de diedro llano.

Definición 2.7: Dos planos secantes determinan cuatro diedros convexos. Estos diedros llenan el espacio y lo llamaremos diedro completo.

Teorema 2.5: El semiplano determinado por la arista de un diedro y un punto interior tiene todos sus puntos pertenecientes al diedro, y lo llamamos interno o interior al diedro.

H) Diedro $(\alpha\beta)$, r arista, P interior al diedro $(\alpha\beta)$

T) El semiplano (r, P) es interno al diedro $(\alpha\beta)$

D) Consideremos el semiplano que determinan r y P y en él una recta determinada por P y un punto A tal que $A \in r$. La semirrecta $\overrightarrow{AP}$ es interior al diedro por pertenecer los dos puntos a los dos semiespacios que lo definen.
Como esto ocurre para todo punto A de r, todos los puntos del semiplano son interiores al diedro.

Teorema 2.6: El segmento que une dos puntos respectivamente situados en las caras de un diedro convexo corta a todo semiplano interior.

Teorema 2.7: Todo semiplano interior a un diedro convexo lo divide en dos diedros situados en distinto semiespacio respecto de dicho plano.

2.2.2. Conceptos de triedro y ángulo poliedro

Definición 2.8: Dadas tres semirrectas a, b, c no coplanares con un origen común V, se llama triedro al conjunto de puntos comunes a los semiespacios respectivamente limitados por los planos ab,[1] bc y ca y que contienen la semirrecta restante. Las tres semirrectas se llaman aristas. Cada uno de los ángulos convexos ab, bc y ca se llaman caras del triedro y vértice al punto común a las tres caras.

Definición 2.9: Un triedro es isósceles si tiene dos caras iguales.

Definición 2.10: Dadas en un orden varias semirrectas a, b, c, d, e, f, de origen común V; tales que el plano determinado por cada dos consecutivas deja a las demás en un mismo semiespacio, el conjunto de los puntos comunes a todos estos semiespacios se llama ángulo poliedro convexo o anguloide convexo.

[1] Esta expresión refiere al plano que contiene al ángulo que determinan las semirrectas a y b.

Propiedades

a) En un ángulo poliedro, el ángulo convexo definido por una arista *r* y una semirrecta cualquiera con origen en el vértice del ángulo poliedro incluida en una cara que no contiene a *r*, pertenece a él.

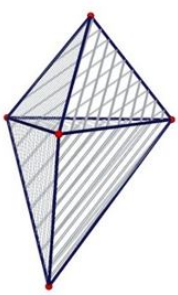
b) Tres planos concurrentes en un punto sin pasar los tres por una misma recta, dividen al espacio en ocho triedros.

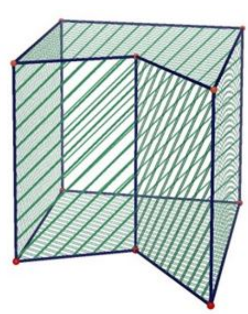
2.2.3. Superficie poliédrica

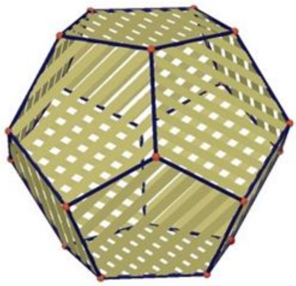
Definición 2.11: Una *superficie poliédrica* es un conjunto de un número finito de *polígonos*, llamados *caras* de la superficie, que cumplan las siguientes condiciones:

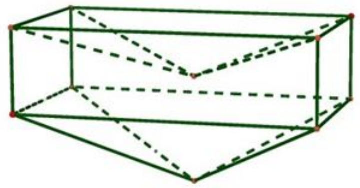
1. Cada lado de una cara pertenece también a otra y solo otra. Ambas caras se llaman contiguas.
2. Dos caras contiguas están en distinto plano.
3. Dos caras no contiguas pueden unirse por una sucesión de caras contiguas.
4. Dos caras no contiguas no pueden tener más punto común que un vértice y si lo tienen deben pertenecer ambas a un mismo ángulo poliedro.

A partir de esta definición, se deduce que toda superficie poliédrica divide al espacio en dos regiones conexas, una interior y otra exterior.







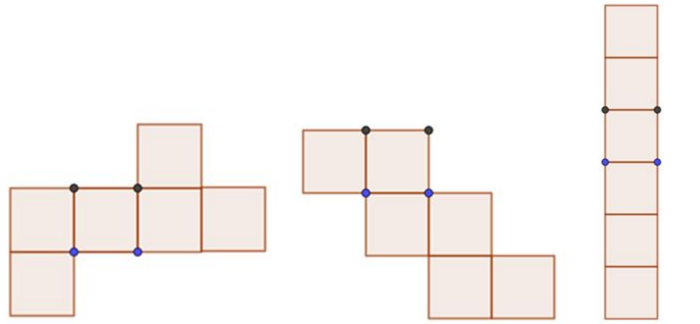


Definición 2.12: La superficie poliédrica se llama *convexa* si además de las condiciones de la definición anterior se cumple que el plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a las demás.

2.2.4. Desarrollo plano o patrón de una superficie poliédrica

Si bien lo que sigue no es un concepto geométrico puro, involucra cuestiones que para la enseñanza de poliedros y específicamente en lo concerniente a medidas es importante considerar.
El *desarrollo plano* o *patrón* de una superficie poliédrica es la representación de las caras de la superficie que se logra a partir de un plano que contenga una de dichas caras y las restantes colocadas sobre dicho plano, de modo que cada cara abatida o volcada sobre ese plano, tenga al menos un lado en común con otra.
En general, una superficie poliédrica tiene más de un desarrollo plano. Para realizarlo se debe considerar no solamente cuántos y qué polígonos lo forman, sino también cuántos y qué polígonos concurren en cada uno de sus vértices.

Por ejemplo, se consideran las siguientes representaciones formadas por seis cuadrados yuxtapuestos:



Hexamino 1 Hexamino 2 Hexamino 3

Estas representaciones se denominan poliminos y son "formas que se obtienen juntando cuadrados lado a lado" (Guillén, 1991:182). En este caso todos están formados por seis cuadrados y se denominan *hexaminos*. Se puede intuir que estos hexaminos corresponden a desarrollos planos de un cubo dado que es un poliedro formado por seis caras cuadradas. Efectivamente, para saber si corresponden al cubo debemos tener en cuenta que: en cada vértice del cubo concurren tres caras, es un prisma que tiene cuatro caras laterales y las dos bases cuadradas. Teniendo en cuenta esto se puede afirmar que el Hexamino 1 y el Hexamino 2 son desarrollos planos del cubo en tanto que el Hexamino 3 no lo es.

2.2.5. Poliedros

Definición 2.13: Un poliedro es el conjunto de los puntos de la superficie poliédrica y los interiores a la misma. Los vértices y lados de las caras se llaman vértices y aristas del poliedro.

Definición 2.14: Si la superficie que determina al poliedro es convexa el *poliedro* se llama *convexo*. De lo contrario se denomina *poliedro cóncavo*.

Propiedad de los poliedros convexos

De la definición resulta:

a) El segmento determinado por dos puntos del poliedro convexo tiene todos sus puntos en él.

b) Las secciones planas de un poliedro convexo son polígonos convexos.

Según lo enunciado se desprenden las siguientes propiedades de los poliedros convexos:

I- Toda semirrecta *r* con origen en un punto *O* interior al poliedro convexo corta a la superficie en un punto.

II- Existen rectas cuyos puntos son todos exteriores a la superficie.

III- Lo mismo el interior que el exterior son regiones conexas.

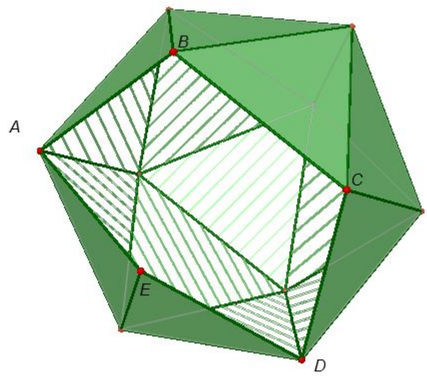
IV- Toda quebrada que une un punto interior con otro exterior corta a la superficie.

Teorema 2.8: **Teorema de Euler** En todo poliedro convexo la suma del número c de caras más el número v de vértices excede en dos unidades al número a de aristas.

$$c + v = a + 2$$

Demostraciones del teorema de Euler

Se presentan dos demostraciones del teorema. Para la *primera* se sigue la idea del libro de Sánchez Mármol y Pérez Beato (1961).
Se necesita previamente definir lo siguiente:
Si en una superficie poliédrica (convexa o no) se suprime una cara, o varias contiguas, se obtiene una superficie denominada *casquete poliédrico*. Los lados de los polígonos que no son ahora comunes a dos caras constituyen una línea poligonal cerrada, plana o alabeada, que se llama *orla* del casquete poliédrico.
Una superficie poliédrica puede tener una o varias orlas, según que las caras suprimidas sean o no contiguas.
En la figura ABCDEA es una orla alabeada.



Retornando a la demostración del teorema, si se separa en el poliedro convexo una cara quedará un casquete poliédrico que seguirá teniendo v vértices, a aristas pero $c-1$ caras.
Demostrar en un poliedro la relación de Euler $c + v = a + 2$ equivale pues, a demostrar en el casquete resultante que $c+v = a+1$.
Si se suprime en el casquete considerado, una cara marginal en la que sea m el número de aristas de ella que constituían parte de la orla del casquete, se obtendrá un nuevo casquete con v_1 vértices, c_1 caras y a_1 aristas, tales que:

$$v_1 = v - (m-1); \qquad c_1 = c - 1; \qquad a_1 = a - m$$

Luego:

$$v_1 + c_1 - a_1 = v + c - a (*)$$

La diferencia $v + c - a$ permanece constante al suprimir caras marginales y al llegar a un último polígono plano de n lados, se tendrá:

$$v_{c-1} = n; \, c_{c-1} = 1; \, a_{c-1} = n$$

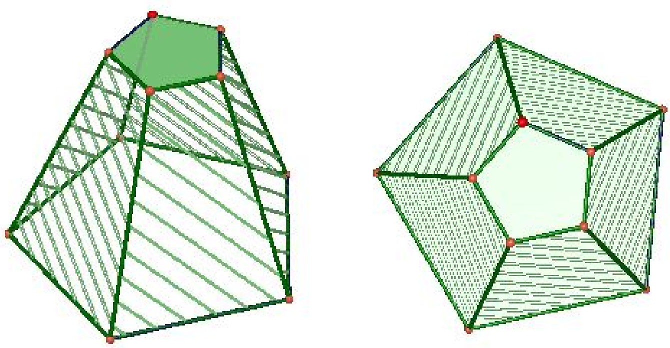
La diferencia $(*)$ da $v+c-a = 1$ por lo tanto la propiedad queda demostrada.

En la *segunda* demostración se considera la idea de Cauchy presentada por Lakatos (1978).
Si se imagina que la superficie del poliedro es de caucho, se saca una cara y se deforma la superficie restante hasta extenderla sobre el plano, las áreas de las caras y las amplitudes de sus ángulos se alterarán, pero la red plana contendrá el mismo número de vértices y el mismo número de aristas que el poliedro original, pero el número de polígonos es uno menos que el del primitivo. Se probará que en esta red plana se verifica

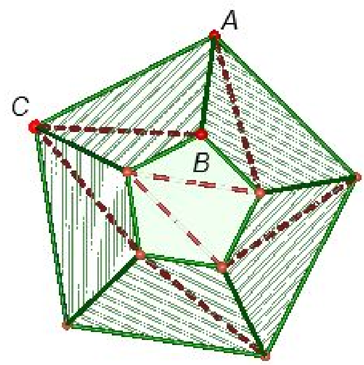
$$v - a + c = 1$$

teniendo en cuenta la cara suprimida, para el poliedro dado resulta

$$c + v = a + 2$$



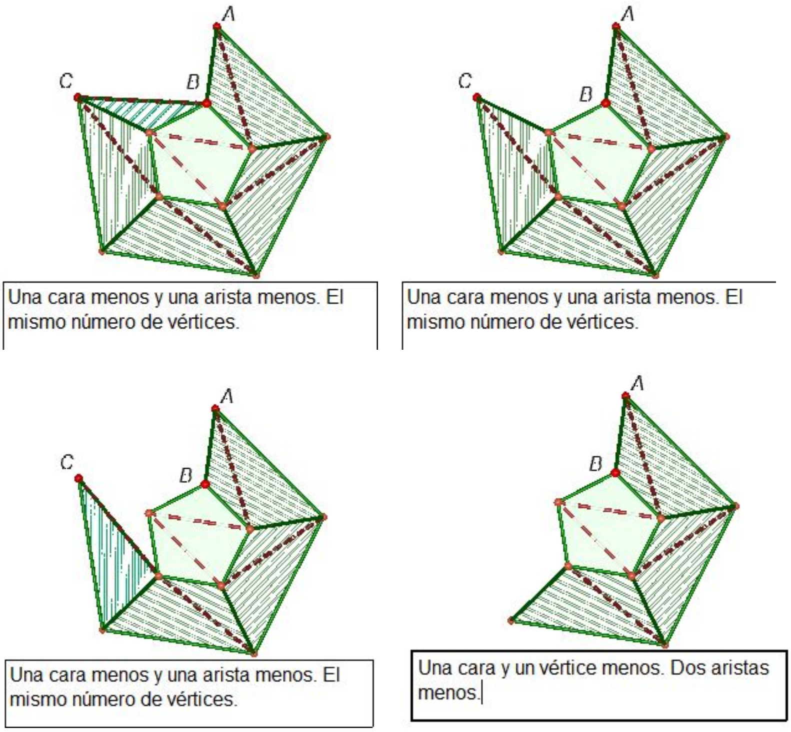
Si se toma la red plana y se la triangula de la siguiente manera: en cualquier polígono de la red que no sea triángulo se trazan todas las diagonales a partir de un vértice cualquiera. Esto incrementa los números a y c en 1 unidad por cada diagonal trazada, de manera que el número $v - a + c$ se conserva.



Así, en la red triangulada el número de Euler se conserva con el mismo valor que tenía antes de la triangulación puesto que el trazado de diagonales no lo ha alterado. Los triángulos pueden tener dos lados en la frontera de la red plana, ningún lado o solo uno (por ejemplo el ABC en el gráfico). Si se elije un triángulo que tiene por lo menos uno de sus lados en la frontera y se realiza el siguiente proceso:

- se quita el o los lados de la frontera,
- se quita el triángulo,
- se quitan los vértices que queden aislados (solo quedarán en caso que el triángulo seleccionado tenga dos lados en la frontera).

Al realizar este proceso, si se quita un triángulo con solo un lado en la frontera, el número de aristas a y el número de caras c disminuye en 1 unidad, mientras que el número v de vértices no cambia. En cambio, si se quita un triángulo con dos lados en la frontera, los números v y c disminuyen en 1 y el número a disminuye en 2. En ambos casos el número $v - a + c$ se conserva. Mediante una adecuada elección de la sucesión de estas operaciones se puede ir separando triángulos que tengan algún lado en la frontera hasta dejar un solo triángulo, con tres vértices, tres lados y una cara. Para esta red $v - a + c = 3 - 3 + 1 = 1$ y como el proceso no altera el valor de $v - a + c$, también la red plana inicial $v - a + c = 1$ y lo mismo para el poliedro del que se había suprimido una cara. En conclusión: $v - a + c = 2$.



Teorema 2.9: (Corolario del Teorema de Euler) En todo poliedro convexo existe por lo menos un triángulo, un cuadrilátero o un pentágono.

Superficies poliédricas eulerianas

Muchas superficies no convexas cumplen con el teorema de Euler.

Definición 2.15: Dadas dos superficies poliédricas, son isomorfas si entre sus caras respectivas se puede establecer una correspondencia tal que:

1. A cada cara n-gonal de una de las superficie corresponde una cara n-gonal en la otra.

2. A cada vértice de una, corresponde un vértice y solo uno en la otra.

3. A caras contiguas de una corresponden caras contiguas en la otra.

Estas superficies tienen el mismo número de caras, de vértices y de aristas.
"Toda superficie isomorfa de una poliédrica convexa cumple el Teorema de Euler".
Las superficies isomorfas de las poliédricas convexas se llaman *eulerianas*.

Definición 2.16: *Poliedros Regulares Convexos* son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.

Teorema 2.10: (Corolario del Teorema de Euler) solo existen cinco poliedros regulares convexos.

Demostración: Suponiendo que cada cara tiene p lados, que en cada vértice concurren q aristas y utilizando propiedades de series de razones iguales:

$$qv = 2a = pc = \frac{v}{\frac{1}{q}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{p}} = \frac{v - a + c}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} = \frac{v - a + c}{\frac{2p-pq+2q}{2pq}} = \frac{4pq}{2p - pq + 2q}$$

de donde: $v = \frac{4p}{2p-pq+2q}$, $a = \frac{2pq}{2p-pq+2q}$, $c = \frac{4q}{2p-pq+2q}$ y como a, v y c

son positivos con $p \geq 3$ y $q \geq 3$, entonces:

- Si las caras son triangulares, $p = 3$ entonces $6 - q > 0$ de donde $q < 6$. Es decir que para $p = 3$, $q = 3$ o $q = 4$ o $q = 5$.

- Si las caras son cuadrangulares, $p = 4$ entonces $8 - 2q > 0$ de donde $q < 4$. Es decir que para $p = 4$, $q = 3$.

- Si las caras son pentagonales, $p = 5$ entonces $10 - 3q > 0$ de donde $q < \frac{10}{3}$. Es decir que para $p = 5$, $q = 3$.

- Si las caras son exagonales, $p = 6$ entonces $12 - 4q > 0$ de donde $q < 3$ contra lo supuesto. Se puede comprobar que para caras con mayor número de lados que 5 (como en el caso de los exágonos), no existen poliedros regulares convexos con esa forma de caras.

Además como a, v y c son positivos, entonces $2p + 2q - qp > 0$ o $(p - 2)(q - 2) < 4$ y resumiendo:

p	3	3	3	4	5
q	3	4	5	3	3
c	4	8	20	6	12
a	6	12	30	12	30
v	4	6	12	8	20

corresponden a los cinco poliedros regulares. Obsérvese que este resultado vale en el caso más general en el que el número de lados de cada cara y el de aristas que concurren en cada vértice sean el mismo, aunque las caras no sean regulares.

2.3. Sentido en el espacio

Los dos sentidos en un haz de semiplanos

Los semiplanos que se intersecan en una recta, constituyen un haz de semiplanos.
Cada par de semiplanos no coplanares, definen un diedro convexo y otro cóncavo.
En forma similar a lo trabajado en el plano, se afirma: Si en un haz de semiplanos se supone suprimido uno de ellos, llamado origen, los demás forman un conjunto ordenado, abierto y denso. Por lo tanto, es posible establecer una ordenación entre los semiplanos restantes, un criterio de precedencia tal que:

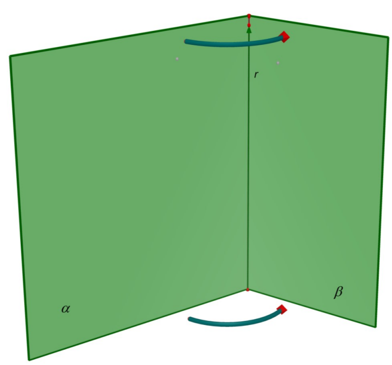
1. Dados dos semiplanos α y β o α precede a β o β precede a α.

2. Si α precede a β y β a γ, α precede a γ

Dado un semiplano cualquiera existen otros que le preceden y otros que le siguen. Entre dos semiplanos cualquiera existen siempre otros intermedios.
Lo dicho antes permite considerar dos sentidos en un haz de semiplanos lo mismo que en el haz de rayos, siendo necesario para fijar uno de ellos ordenar tres semiplanos del haz. Un haz de semiplanos se llamará *orientado* cuando se fija en él un sentido.
Basta tomar un plano que corte a la arista del haz y considerar el sentido con el haz de rayos determinado por la intersección del plano y el haz.

Individualización de los sentidos

A la individualización de los sentidos en un haz no es posible distinguirlas por vía geométrica pura ya que es necesario acudir a elementos ajenos a la geometría.
Para distinguir uno u otro se puede imaginar un observador colocado a lo largo de la arista del haz y llamar positivo, al sentido en el que se ve ordenado los semiplanos de derecha a izquierda, por ejemplo, y negativo el sentido contrario.



Esto supone la elección previa de un sentido de la arista para orientar al observador ya que al invertir la orientación de este variará el criterio.

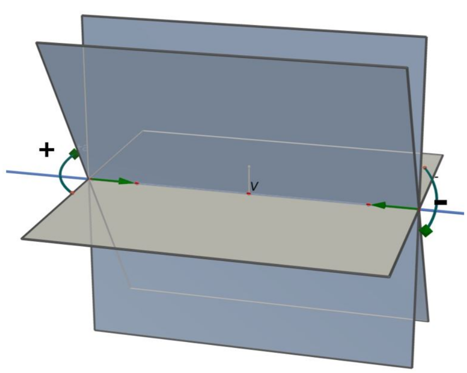
Es decir, que se puede definir en un sentido positivo o negativo del haz en relación con un determinado sentido previamente asignado a la arista.

Los dos sentidos en la radiación

Radiación de rayos es el conjunto de todas las semirrectas que tienen un origen común en un punto *V*, llamado vértice de la radiación.

En toda radiación existen dos sentidos opuestos. Fijado un sentido en uno de los haces de semiplano queda fijado un sentido igual en todos los demás de la radiación. En ese caso se dice que la radiación está orientada.

Observación
De acuerdo con estos convenios, un haz de semiplanos orientados en una radiación tiene un sentido distinto con respecto a cada una de las dos semirrectas que el vértice *V* de la radiación determina en la arista, o sea, para los dos observadores dirigidos según estas semirrectas con los pies hacia el vértice *V*, los sentidos del mismo haz son opuestos.

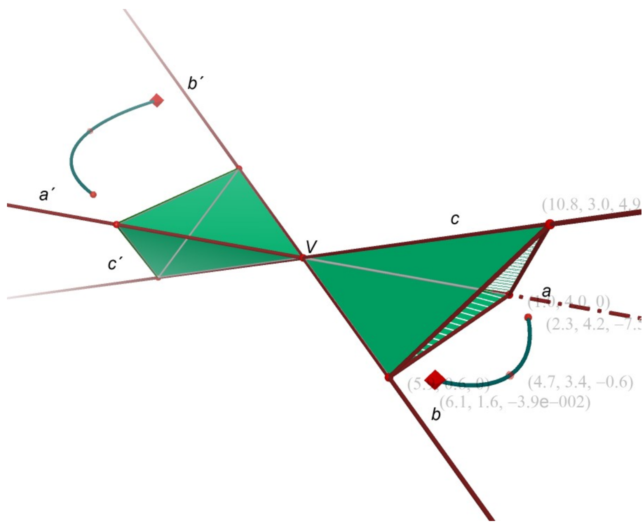


Los sentidos en un ángulo poliedro

Recorriendo las aristas de un ángulo poliedro convexo, en el orden en que se han tomado para definirlo, se establece un sen-

tido en cada cara que nos permite ordenar sus rayos.
Es decir que el sentido de una radiación se puede definir dando las aristas de un ángulo poliedro convexo y en particular un triedro en un cierto orden *a*, *b* y *c*.

Sentidos de triedros y anguloides opuestos por el vértice



Las semirrectas opuestas a las que definen un triedro o un ángulo poliedro definen en el mismo orden, otro triedro o ángulo poliedro cuyas caras son ángulos opuestos por el vértice de las caras del primero y cuyos diedros son diedros opuestos por la arista de los de este. Por esta razón se llama a este nuevo triedro o ángulo poliedro opuesto por el vértice al primero.
"Dos triedros y en general dos ángulos poliedros opuestos por el vértice son de sentidos opuestos en la radiación a que pertenecen".

Los dos sentidos del espacio

En el espacio se definen dos sentidos opuestos. Para determinar uno de ellos basta fijar:

a) un sentido en un haz de planos correspondiente a un sentido en la arista (haz orientado) o bien

b) las aristas de un triedro en un orden (triedro orientado)

Cuando se ha fijado un sentido en el espacio se dice que este está orientado.

2.4. Para profundizar

1. Determinar, si es posible, un poliedro que sea:

   a) convexo y euleriano

   b) convexo y no euleriano

   c) no convexo y euleriano

   d) no convexo y no euleriano

2. Representar, a través de un modelo, un triedro cuyas caras sean ángulos rectos.

3. Determinar, si es posible, el número de caras y vértices de un poliedro convexo con 7 aristas.

4. Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántas diagonales tiene ese poliedro, es decir, cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro no son aristas ni están contenidos en una cara?

5. Considerar la siguiente notación. C_n: número total de caras del poliedro con n aristas (ejemplo: C_4 indica el número de cuadriláteros que tiene el poliedro); V_n: número total de vértices del poliedro al que concurren n aristas (ejemplo: V_3 indica el número total de vértices que tiene el poliedro en el que concurren tres aristas) Justificar las siguientes fórmulas para poliedros convexos:

a) $2A = \sum_{i=3}^{t} iC_i$, t es el máximo número de lados de una cara del poliedro.

b) $2A = \sum_{i=3}^{r} iV_i$, r es el número máximo de aristas que concurren en un vértice del poliedro

c) $2V - 4 = \sum_{i=3}^{t}(i-2)C_i$.

d) $2C - 4 = \sum_{i=3}^{r}(i-2)V_i$.

Capítulo 3

Transformaciones 3D

Las transformaciones puntuales del espacio son de sumo interés por las propiedades que de cada una de ellas se desprenden, las condiciones que conservan y las que no, los elementos necesarios para definirlas, las propiedades que permiten enunciar y las relaciones que habilitan establecer entre rectas, entre rectas y planos y entre planos. Es importante clasificarlas atendiendo a estas cuestiones mencionadas.

3.1. Movimiento y congruencia

Intuitivamente se puede decir que dos figuras del espacio son congruentes si, moviendo una de ellas se la puede hacer coincidir con la segunda de tal forma que ambas coincidan en todas sus partes. A primera vista, esta definición de la congruencia parece clara, pero si se la analiza cuidadosamente, resulta circular. En efecto, para determinar la congruencia de las figuras, estas deben coincidir y, para hacerlas coincidir, hay que mover una de ellas con la condición de que durante ese proceso, esta se mantenga inalterada. ¿Pero que significa que se mantenga inalterada? Significa que la figura siempre se mantiene congruente a su forma original. Por tanto, se define "congruencia" del movimiento de una "figura inalterable" y se define una "figura inalterable" por medio del concepto de "congruencia". Por lo tanto, para evitar este problema, se define movimiento mediante un grupo de axiomas, el quinto grupo de ellos.

Axiomas de movimiento

La experiencia o la intuición nos dicen que el movimiento de un sólido queda perfectamente determinado en cuanto se determina el movimiento de un plano rígidamente unido al mismo. En consecuencia, los axiomas de movimiento que caracterizan las propiedades del movimiento de un plano, pueden servir para caracterizar las del movimiento del espacio, sin más que modificar sus términos para darles la nueva interpretación tridimensional.

Ax.V.1 Los movimientos del espacio son transformaciones puntuales biunívocas del mismo.

Ax.V.2 Todo movimiento del espacio conserva las relaciones de incidencia, ordenación y sentido.

Ax.V.3 (Axioma de rigidez) Ningún movimiento puede transformar un segmento, ángulo o diedro en parte del mismo.

Ax.V.4-5 Los movimientos del espacio forman grupo. (El producto resultante de dos movimientos es otro movimiento, la identidad es un caso particular de movimiento, por lo cual es el neutro. se cumple la propiedad asociativa y la transformación recíproca de un movimiento es otro movimiento).

Ax.V.6 (Axioma de determinación) Existe un movimiento y solo uno que transforma una semirrecta en otra y un semiplano limitado por la recta primera en un semiplano limitado por la segunda.

Definición 3.1: Dos figuras F y F' son congruentes o iguales cuando una de ellas puede obtenerse transformando la otra mediante un movimiento.

Al conservarse los axiomas del movimiento del plano en el espacio, se conservarán también sus consecuencias, en particular, son válidos en el espacio los criterios de igualdad de triángulos estudiados en geometría plana, aun cuando las figuras comparadas no se hallen en un mismo plano.
La perpendicularidad entre rectas secantes se conserva en el movimiento, por ser una relación de igualdad entre ángulos adyacentes.

3.2. La perpendicularidad en 3D

En el espacio tridimensional el concepto de perpendicularidad no cambia su significado base, pero amplía los elementos que relaciona, dado que no se establece solo entre rectas sino también entre rectas y planos y entre planos.

Teorema 3.1: El lugar geométrico[1] de los puntos equidistantes de dos A y A' es un plano que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ y que contiene a todas las perpendiculares a $\overleftrightarrow{AA'}$ que pasan por M (mediatrices).

Definición 3.2: Los puntos A y A' se dice que son simétricos respecto del plano α, que se llama plano de simetría del segmento $\overline{AA'}$.

3.2.1. Plano perpendicular a una recta y rectas ortogonales

Teorema 3.2: (Corolario del T.3.1) Todas las perpendiculares a una recta r que pasan por un punto M de ella están en un único plano.

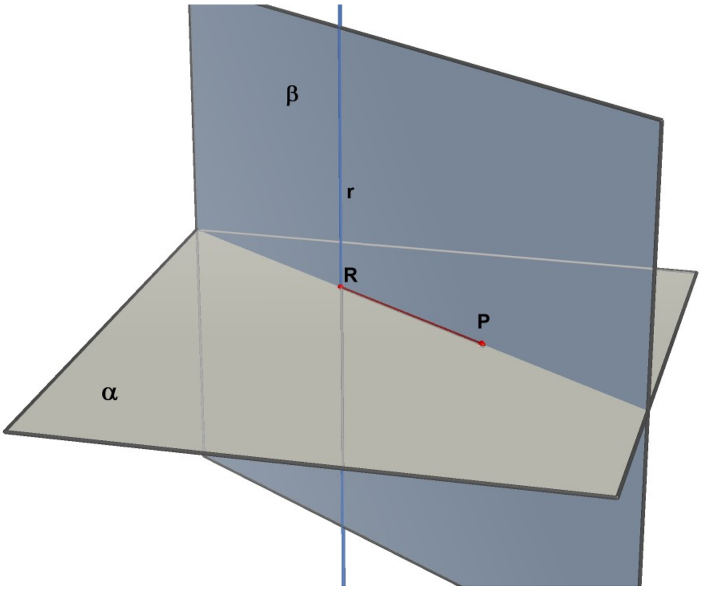
Demostración: Sean en r dos puntos A y A' cuyo punto medio es M, por el teorema anterior queda demostrada la propiedad.
Este plano no depende del segmento ya que cualquier par de puntos B y B' cuyo punto medio también sea M tiene las mediatrices comunes con AA'.

Definición 3.3: El plano que contiene a todas las perpendiculares a una recta r por un punto M de ella se llama perpendicular a la recta y la recta r se llama perpendicular al plano.

Teorema 3.3: (Corolario del T.3.1) Sean a y b rectas secantes en M. Si r es perpendicular a a y a b en M, entonces es perpendicular al plano que determinan.

Teorema 3.4: Por un punto P pasa un plano y solo uno perpendicular a una recta r.

[1] *Cuando una figura contiene todos los puntos que cumplen una determinada propiedad y, recíprocamente, solo contiene puntos que la cumplen, se dice que es el lugar geométrico de dichos puntos* (Puig Adam, 1980:37).



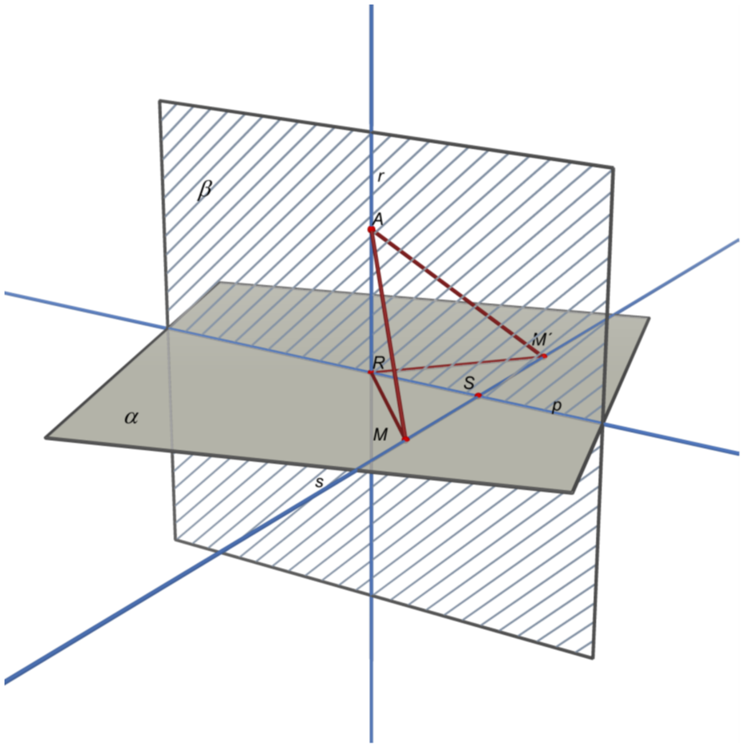
H) P punto cualquiera, r recta

T) $\exists!$ plano α / $P \in \alpha$ y $\alpha \perp r$

D) Si $P \in r$ la propiedad es consecuencia del T.3.2. y de la definición 3.3.
Si $P \notin r$, P y r determinan un plano β. Sea en β la única perpendicular a r por P y R el pie de la perpendicular. El T.3.2 y la Def. 3.3 permiten afirmar que por R existe $\alpha/\alpha \perp r$ y $P \in \alpha$ pues contiene a todas las rectas perpendiculares a r por R, en particular $\overleftrightarrow{RP}$.

La prueba de la unicidad queda a cargo del lector.

Teorema 3.5: Dadas dos rectas cruzadas r y s, si por una de ellas s se puede trazar un plano α perpendicular a la otra r, por esta se puede trazar un plano β perpendicular a s.



H) r y s rectas cruzadas
$s \subset \alpha$, $\alpha \perp r$

T) $\exists \beta \, / \beta \perp s$ y $r \subset \beta$

D) Sea $\{R\} = \alpha \cap r$. Sea p en $\alpha / p \perp s \wedge R \in p$. Sea $\{S\} = p \cap s$. Sea en s, a ambos lados de S, los puntos M y $M' / |\overline{SM}| = |\overline{SM'}|$. Los segmentos $\overline{RM'}$ y $\overline{RM}$ son perpendiculares a r pues están en el plano perpendicular a r por R y además $|\overline{RM}| = |\overline{RM'}|$, pues $R\overset{\triangle}{S}M$ y $R\overset{\triangle}{S}M'$ son triángulos rectángulos con catetos iguales y por lo tanto congruentes.

Sea $A \in r / A \neq R$. Los triángulos $A\overset{\triangle}{M}R$ y $A\overset{\triangle}{R}M'$ son rectángulos con catetos iguales $\therefore$ $|\overline{AM}| = |\overline{AM'}|$. Luego A equidista de M y M' como R y S. El plano β será pues el determinado por A, R y S que es $\perp$ a s (pues es plano de simetría de

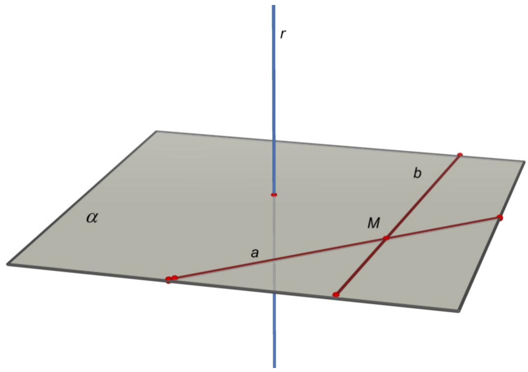
$\overline{MM'} \subset s$) y $r \subset \beta$ puesto que tiene dos puntos en dicho plano.

Definición 3.4: *Rectas ortogonales*. Dos rectas son ortogonales si y solo si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.

Las rectas ortogonales pueden ser rectas que se cruzan o rectas secantes. De aquí en adelante utilizaremos el símbolo $\perp$ para indicar que dos rectas son ortogonales.

Teorema 3.6: Si una recta es perpendicular a un plano, es ortogonal a toda recta de este.

Teorema 3.7: Si una recta r es ortogonal a dos rectas a y b secantes entre sí es perpendicular al plano que estas determinan.



H) r ortogonal a a
r ortogonal a b
$a \cap b = \{M\}$
α plano determinado por $a \wedge b$

T) $r \perp \alpha$

D) El plano perpendicular a r por M es único (T.3.4) y por lo tanto coincide con el plano perpendicular a r por a y con el perpendicular a r por b que existen por definición 3.4, o sea que es α, donde α es el plano determinado por a y b. Así $r \perp \alpha$.

Teorema 3.8: Por un punto P pasa una perpendicular, y solo una, a un plano π.

Definición 3.5: Sea π un plano y Q un punto exterior. Sea P el pie de la perpendicular a π por Q. La longitud del segmento $\overline{PQ}$ es la distancia del punto Q al plano π.

3.2.2. SECCIÓN RECTA DE UN DIEDRO Y PLANOS PERPENDICULARES

Definición 3.6: La sección producida en un diedro por un plano perpendicular a la arista, es decir, el conjunto de los puntos comunes a este plano y al diedro, es un ángulo plano llamado sección recta del diedro. Sus lados son perpendiculares a la arista.

Teorema 3.9: Dos diedros $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$ son iguales si y solo si sus secciones rectas son iguales.
Se tiene que demostrar que:

a) Si dos diedros $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$ son iguales $\Rightarrow$ sus secciones rectas son iguales.

b) Si las secciones rectas de dos diedros son iguales $\Rightarrow$ los dos diedros son iguales.

a) Demostración: Si dos diedros son iguales, entonces uno de ello puede obtenerse del otro mediante un movimiento (Definición 3.1). Como todo movimiento conserva la perpendicularidad entre rectas secantes, las secciones rectas de diedros iguales son iguales.

b) Demostración: Si las secciones rectas de dos diedros son iguales, existe un movimiento que transforma una en otra (Definición 3.1). Dicho movimiento transformará la perpendicular, única al plano que contiene al ángulo plano $\widehat{rs}$, por el vértice O en la única perpendicular al plano que contiene a $\widehat{r's'}$ por el vértice O' y deberá coincidir el transformado del semiplano α con α'(donde α está determinado por la recta que contiene a uno de los lados del ángulo y la arista del diedro) y β con β'. Por lo tanto, existe un movimiento que transforma $\alpha\beta$ en $\alpha'\beta'$ y los diedros son iguales.

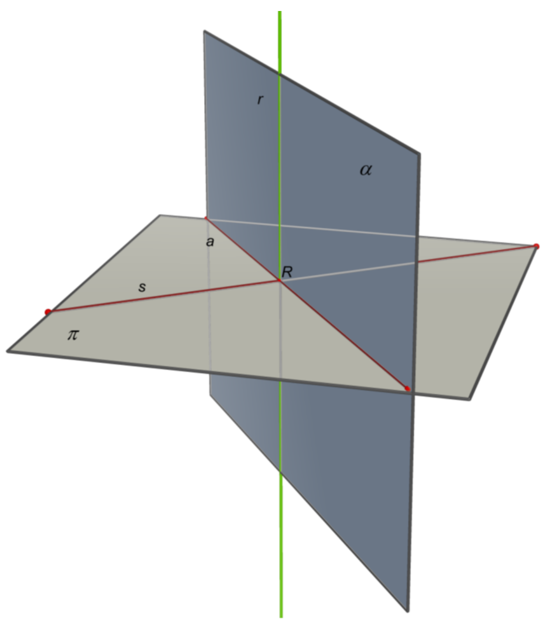
Teorema 3.10: (Corolario del T.3.9) Los diedros opuestos por la arista son iguales.

Teorema 3.11: (Corolario del T.3.9) Las secciones rectas de un diedro son iguales.

Definición 3.7: Los diedros son proporcionales a sus secciones rectas. Adoptando como diedro unidad el que tiene sección recta unidad, la medida de un diedro es igual a la de su sección recta.

Definición 3.8: Si la sección recta de un diedro es un ángulo recto, el diedro se llama recto y se dice que los planos son perpendiculares.

Teorema 3.12: Todo plano α que pasa por una perpendicular *r* a un plano π es perpendicular a él.

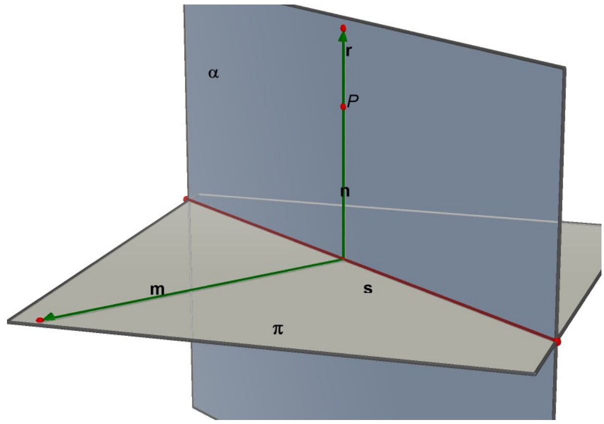


H) $r \perp \pi$, $r \subset \alpha$;

T) $\alpha \perp \pi$

D) Sea $r \cap \pi = \{R\}$ y sea $\pi \cap \alpha = a$ (si tienen un punto en común R, tienen una recta en común).
En π, sea $s \perp a$ por R, entonces $r \perp a$ y $s \perp a$. Es decir que la sección recta del diedro determinado por α y π, es un ángulo recto pues $r \perp s$, por lo que $\alpha \perp \pi$

Teorema 3.13: Todo plano α perpendicular a π trazado por un punto P contiene la perpendicular r por P a dicho plano π.



H) $\alpha \perp \pi$, $P \in \alpha$, $r \perp \pi$, $P \in r$.

T) $r \subset \alpha$.

D) Sea $s = \alpha \cap \pi$ y sea por P el plano $\perp$ a la arista s del diedro.
Sean m y n las intersecciones de dicho plano con las caras del diedro. Puesto que $\alpha \perp \pi$, la sección recta del diedro es un ángulo recto, entonces $m \perp n$ y $m \perp s$ pues s es $\perp$ al plano que m y n determinan.
Si r no está incluída en α, pero $P \in r$ y $r \perp \pi$ y $m \perp \pi$ (pues m es $\perp$ a dos rectas de π) y $P \in m$ por construcción, entonces existen dos rectas $\perp$ a π por P. Absurdo, por T. 3.8, que proviene de suponer que $r \not\subset \alpha$, luego $r \subset \alpha$.

Teorema 3.14: Por un punto P pueden trazarse infinitos planos perpendiculares a un plano dado π.

Teorema 3.15: Por una recta t no perpendicular a un plano π pasa un plano perpendicular a π y solo uno.

3.2.3. Las simetrías en 3D

La simetría axial

Definición 3.9: Sea r una recta. Se llama simetría axial de eje r: S_r al movimiento del espacio tal que al punto A le hace corresponder el punto:

- A, si $A \in r$
- A', si $A \notin r$ tal que:
  - A' pertenece al plano que A y r determinan.
  - A y A' están en distinto semiplano respecto de r.
  - $\overleftrightarrow{AA'} \perp r$.
  - $d(A, r) = d(A', r)$

Propiedades

a) En la simetría axial si F tiene por simétrica F', F' tiene por simétrica F.

b) Todo semiplano β de borde r se transforma en su opuesto. Todo plano que pasa por el eje es doble.

c)] Todo diedro cuya arista está en el eje se transforma en su opuesto, lo que prueba nuevamente la igualdad de los diedros opuestos por la arista.

d) El eje de simetría es mediatriz de los segmentos que unen puntos homólogos. Toda recta perpendicular al eje es doble. Todo plano perpendicular al eje es doble. Los puntos homólogos en estos planos dobles son simétricos en la simetría plana central que tiene por centro el punto de intersección del eje con el plano.

e) Toda recta a ortogonal no secante al eje tiene por simétrica una recta paralela a ella.

Simetría central

Definición 3.10: La simetría central de centro O es la transformación puntual que se obtiene haciendo corresponder a cada punto A su simétrico[2] A' respecto del punto O y a este el mismo.

Propiedades

a) La simetría central es una transformación involutiva, por corresponderse doblemente cada par de puntos homólogos.

b) Si dos rectas son secantes, sus homólogas también.

c) La simetría central invierte el sentido, pues transforma un triedro en su opuesto por el vértice.

d) La simetría central conserva las relaciones de incidencia y orden.

e) Los segmentos y ángulos planos simétricos son iguales. Al ser los ángulos iguales se conserva la perpendicularidad. Los diedros simétricos son iguales.

f) Las rectas y los planos que pasan por el centro son dobles.

g) Toda recta a que no pasa por el centro tiene por simétrica otra paralela y todo plano α que no pase por el centro tiene por simétrico otro α' que no tiene con él punto común.

Simetría especular

Definición 3.11: Sea α un plano. Se llama simetría especular respecto al plano α: S_α a la transformación del espacio tal que al punto A le hace corresponder el punto:

- A, si $A \in \alpha$
- A', si $A \notin \alpha$ tal que:

[2] Refiere a la definición de simetría central en 2D.

- A' pertenece a la recta perpendicular a α por el punto A.
- A y A' están en distinto semiespacio respecto de α.
- $d(A, \alpha) = d(A', \alpha)$

Propiedades

a) Todos los puntos, rectas y figuras del plano de simetría son dobles. Todas las rectas y los planos perpendiculares al plano de simetría son dobles.

b) Si varios puntos ABC... están alineados y ordenados, sus simétricos $A'B'C'$... también lo están. Los segmentos simétricos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son iguales.

c)] Y de la igualdad de los segmentos simétricos se desprende, como en la simetría central, la igualdad de los triángulos, la conservación de la perpendicularidad y la igualdad de diedros.

d) La simetría especular invierte el sentido.

Pseudomovimiento y pseudoigualdad

El producto de un movimiento por una simetría central o especular es una transformación puntual que tiene las siguientes propiedades:

1. Ser biunívoca.
2. Conservar las relaciones de incidencia y orden.
3. Invertir el sentido.
4. Transformar los segmentos, ángulos y diedros en otros iguales a ellos.

Como estas propiedades son también las del movimiento, salvo la inversión del sentido, a toda transformación que las cumpla se denomina pseudomovimiento, y dos figuras correspondientes en un pseudomovimiento se llamarán pseudoiguales o

pseudocongruentes.
El producto de dos pseudomovimientos es un movimiento. El producto de un movimiento por un pseudomovimiento es un pseudomovimiento. Por tanto, en analogía con el axioma determinación de movimiento se expresa el siguiente postulado.

Postulado: Existe un pseudomovimiento, y solo uno, que transforma una semirrecta r en otra r' y un semiplano α limitado por la recta que contiene r en otro semiplano α' limitado por la recta r'.

3.2.4. Semiplano bisector de un diedro

Definición 3.12: Se llama semiplano bisector de un diedro al semiplano determinado por la arista de un diedro y la bisectriz de una de sus secciones rectas.

Teorema 3.16: El semiplano bisector de un diedro lo divide en dos diedros iguales.

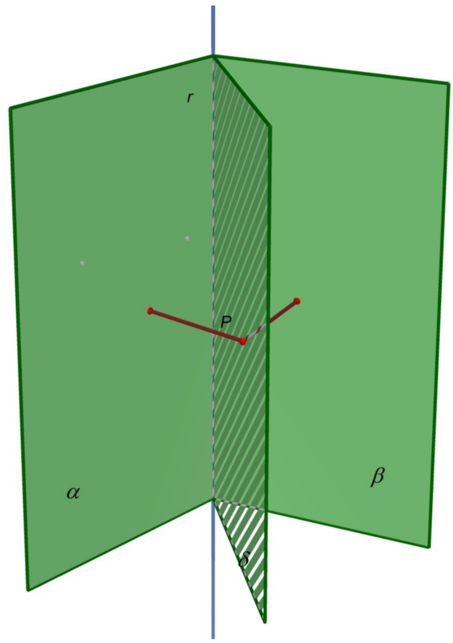
D) Puesto que la bisectriz de una sección recta divide al ángulo plano en dos iguales, los diedros que tienen esas secciones rectas iguales son iguales (Teorema 3.9)

Teorema 3.17: El semiplano bisector de un diedro contiene las bisectrices de todas las secciones rectas del diedro.

D) Por el teorema anterior, el diedro queda dividido por el semiplano bisector en dos iguales, así cualquier sección recta quedará dividida en dos ángulos planos iguales, pues a ángulos diedros iguales corresponden secciones rectas iguales. Se ha probado en geometría plana que la semirrecta que divide a un ángulo en dos iguales es la bisectriz del mismo.

Teorema 3.18: Los semiplanos bisectores de los diedros formados por dos planos son dos a dos opuestos y están en dos planos perpendiculares entre sí.

Teorema 3.19: El semiplano bisector de un diedro es el lugar geométrico de los puntos interiores equidistantes de los planos de sus caras.



Se debe probar que:

a) Si P está en el semiplano bisector,entonces P equidista de las caras.

H) $\alpha\beta$ diedro, γ semiplano bisector,
$P \in \alpha\beta$, $P \in \gamma$

T) $d(P, \alpha) \; = \; d(P, \beta)$

D) Las perpendiculares desde P a los planos α y β son ortogonales a la arista r del diedro por el T.3.6, es decir, determinan el plano de la sección recta por el T.3.7. La distancia de P a cada cara es la distancia de P al lado a y al lado b de la sección recta. En cada sección recta el lugar geométrico en cuestión es la bisectriz y el lugar de todas ellas es el plano bisector.

b) Todo punto P interior al diedro que equidista de sus caras está en el semiplano bisector.

H) $d(P, \alpha) \;=\; d(P, \beta)$; $P \in \alpha\beta$;

T) $P \in \gamma$, γ semiplano bisector

D) Sea la sección recta del diedro $\alpha\beta$ que pasa por P. Sean ab los lados de la sección recta. P equidista de a y b. Por lo tanto P está en la bisectriz de la sección recta. Por lo tanto P está en el semiplano bisector, por T. 3.17.

Teorema 3.20: (Corolario del T.3.19) El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos planos secantes es el conjunto de dos planos perpendiculares entre sí llamados bisectores de los diedros formado por aquellos.
Cada uno de estos planos es plano de simetría de los dos dados, ya que forma ángulos iguales con ellos.

Teorema 3.21: Si dos caras de un triedro son iguales, lo son también los diedros opuestos.

Sugerencia: Probar que el triedro es simétrico respecto del semiplano bisector del diedro que forman las caras iguales.

3.3. El paralelismo en 3D

Como en la perpendicularidad se amplían los elementos que relaciona, el paralelismo se establece entre rectas, entre rectas y planos y entre planos. Esta relación es considerada solo en el caso que los elementos que se vinculan (rectas, planos, rectas y planos) no tienen puntos en común.

3.3.1. Traslación en 3D

Definición 3.13: Sea $\overrightarrow{v}$ un vector. Se llama traslación de vector $\overrightarrow{v}$: $T_{\overrightarrow{v}}$ al movimiento del espacio tal que al punto A le hace corresponder el punto A' tal que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v}$, es decir, el vector $\overrightarrow{AA'}$ tiene igual dirección, sentido y módulo que el vector $\overrightarrow{v}$. A la recta $\overleftrightarrow{AA'}$ se la llama guía de la traslación.

PROPIEDADES

a) Todos los planos que pasan por la guía son dobles.

b) Todas las traslaciones con una misma guía forman grupo.

c) Dos rectas a y b paralelas a una tercera r son paralelas o coincidentes.

d) Dos rectas homólogas p y p' en una traslación son paralelas o coincidentes.

e) El producto de dos traslaciones es una nueva traslación independiente del orden en que se efectúen las traslaciones componentes.

3.3.2. PARALELISMO DE PLANOS Y DE RECTA Y PLANO

Definición 3.14: Dos planos son paralelos si no tienen puntos en común.

Definición 3.15: Una recta es paralela a un plano si no tiene puntos en común con él.

Teorema 3.22: Una recta a es paralela a un plano α, si y solo si existe en α una recta a' paralela a a, tal que la recta a no esté incluida en α.

Teorema 3.23: El lugar geométrico de todas las paralelas a un plano π por un punto exterior A' es otro plano paralelo π'.

D) Trazar por A' las paralelas a las rectas de un haz de vértice A en π. La traslación $\overrightarrow{AA'}$ transforma el haz de vértice A en el de sus paralelas por A', es decir que todas ellas están en el plano transformado de π por dicha traslación.
Como dos rectas paralelas son simétricas respecto del punto medio O del segmento AA', los dos planos son simétricos respecto de dicho punto y por lo tanto paralelos entre sí. (Con esto queda probado una de las condiciones exigidas por la definición de lugar geométrico. Queda al lector identificar y probar la otra condición).

Teorema 3.24: (Corolario del T.3.23) Existen por un punto A' exterior a un plano infinitas paralelas al mismo.

Teorema 3.25: En toda traslación los planos homólogos, no dobles, son paralelos.

Teorema 3.26: Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son rectas paralelas.

H) $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = r$, $\gamma \cap \beta = r'$

T) $r \parallel r'$

D) $r \wedge r'$ son coplanares por estar ambas en γ y todo punto común que tuvieran r y r' sería común a los dos planos, contra lo supuesto. Por lo tanto $r \cap r' = \emptyset$. r y r' son coplanares y su intersección es vacía, por tanto $r \parallel r'$.

Teorema 3.27: Por un punto A exterior a un plano π existe un único plano α paralelo a este.

H) π plano, $A \notin \pi$

T) $\exists!$ plano α / $A \in \alpha$ y $\alpha // \pi$

D) Si hubiera dos planos α y α' por A, estos tendrían una recta r común, por tener un punto en común A. Todo plano que pase por A y un punto B de π sin contener a r, cortaría al plano π según una recta y a sus paralelos según dos rectas paralelas a ellas por A (teorema anterior), en contra del axioma de paralelismo (por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella). Por tanto α es único. Queda probar al lector la existencia de dicho plano.

Teorema 3.28: Dos planos paralelos π y π' pueden transformarse uno en otro mediante la traslación definida por el vector AA' que une dos cualesquiera de sus puntos.

Teorema 3.29: Dos planos paralelos a un tercero son paralelos o coincidentes.

Teorema 3.30: Si un plano α corta a otro plano π, corta a todo paralelo π' a este.

H) $\alpha \cap \pi = r$, $\pi \parallel \pi'$

T) $\alpha \cap \pi' = r'$

D) R/A). Si $\alpha \cap \pi' = \emptyset \rightarrow \alpha \parallel \pi'$ y como $\pi \parallel \pi'$ por el teorema anterior $\alpha \parallel \pi$ es decir $\alpha \cap \pi = \emptyset$ contradice esto a la hipótesis $\therefore \alpha \cap \pi \neq \emptyset$

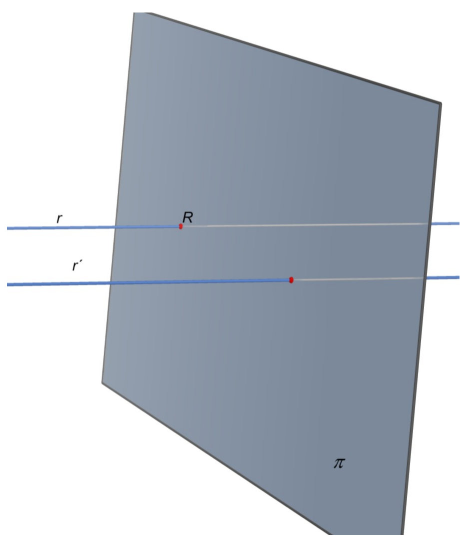
Teorema 3.31: Si una recta r corta a un plano π corta a todo paralelo π'.

H) $r \cap \pi = \{P\}$, $\pi \parallel \pi'$

T) $r \cap \pi' \neq \emptyset$

D) R/A. Si $r \cap \pi' = \emptyset$ es decir $r \parallel \pi'$, r estaría contenida en el plano π por T. 3.23. contra lo que supone la hipótesis (Si una recta corta a un plano es porque tiene solo un punto en común con él).

Teorema 3.32: Si un plano corta a una recta, corta a todas sus paralelas.



H) $\pi \cap r = \{R\}$, $r \parallel r'$

T) $\pi \cap r' \neq \emptyset$

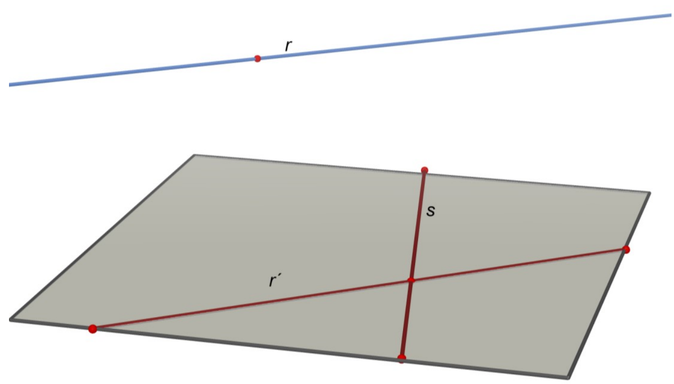
D) r y r' determinan un plano α, $\alpha \cap \pi = a$ que por cortar a r lo hará a su paralela r', luego esta tiene un punto en común A con el plano π y no puede tener otro, porque coincidiría con a y no sería paralela a r.

Teorema 3.33: Por un punto P exterior a una recta r pasan infinitos planos paralelos a ella.

D) Todos los planos que pasan por r' con $r' \parallel r$ y $P \in r'$ (excepto el que r y r' determinan) son paralelos a r por T. 3.22.

Teorema 3.34: Si una recta es paralela a dos planos secantes lo es a su intersección.

Teorema 3.35: Por una recta s que se cruza con otra r pasa un plano paralelo a ella y solo uno.



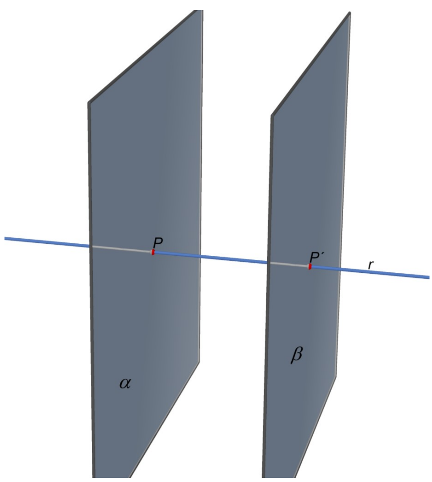
D) El plano que determinan s y la paralela a r por un punto de s es paralelo a r por T.3.22. La prueba de la unicidad queda a cargo del lector.

3.4. Perpendicularidad y paralelismo 3D

La traslación, como todo movimiento, conserva la perpendicularidad entre rectas secantes y por lo tanto entre recta y plano. Se introducen en esta sección algunos conceptos como el de proyección ortogonal en función de su empleo en demostraciones que se realizan en este punto.

Teorema 3.36: Si una recta es perpendicular a un plano, lo es a todos sus paralelos.

Teorema 3.37: Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí.



H) $\alpha \perp r$, $\beta \perp r$, $\alpha \cap r = \{P\}$, $\beta \cap r = \{P'\}$

T) $\alpha \parallel \beta$

D) Sea a una recta de $\alpha / P \in a$. Sea en el plano determinado por r y a la traslación de vector $\overrightarrow{PP'}$ donde $T_{\overrightarrow{PP'}} a = a'$ ($a \parallel a'$). Como $a \perp r$ ($r \perp \alpha$ y $a \subset \alpha$ T. 3.6) entonces $r \perp a'$ pues en el plano dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí. Si se aplica esta misma traslación al haz de rectas del plano α que pasan por P se obtiene un haz de rectas que pasan por P' tal que cada una de estas rectas es paralela a una de α y por tanto paralela a α. Además, todas estas rectas son perpendiculares a r. Por T. 3.23 todas estas rectas determinan un plano α' paralelo a α por P' y α' es perpendicular a r por T. 3.2. Por el T. 3.4 el plano α' no es otro que β pues por hipótesis $\beta \perp r$ y $P' \in \beta$.

Teorema 3.38: Si un plano es perpendicular a una recta lo es a todas sus paralelas.

Teorema 3.39: Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre sí.

H) $a \perp \alpha, \quad b \perp \alpha$

T) $a \parallel b$

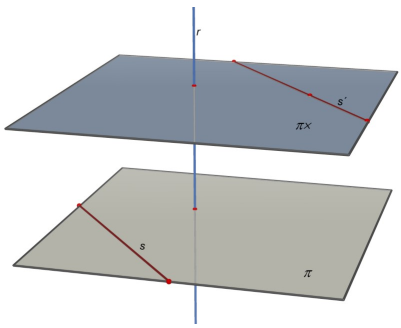
D) $\alpha \cap a = \{O\} \qquad \alpha \cap b = \{O'\}$
$T_{\overrightarrow{OO'}} a = b$ por conservar los movimientos la perpendicularidad $\therefore a \parallel b$ por corresponderse en una traslación.

Teorema 3.40: Si una recta r es ortogonal a otra lo es a todas sus paralelas.

H) $r \perp s; s \parallel s'$

T) $r \perp s'$

D) Si $r \perp s \longrightarrow \exists$ un plano $\pi / s \subset \pi$ y $\pi \perp r$. Si $s \parallel s' \longrightarrow \exists$ un plano $\pi' / s' \subset \pi'$ y $\pi \parallel \pi' \longrightarrow r \perp \pi'$ pues si una recta es perpendicular a un plano, lo es a todos sus paralelos y $r \perp s'$ dado que si una recta es perpendicular a un plano, es ortogonal a toda recta de este.



Teorema 3.41: Los segmentos AA', BB' y CC'... de rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales.

Teorema 3.42: (Corolario del T. 3.41) Los segmentos de perpendiculares comunes a dos planos y comprendidos entre ellos son iguales. También se expresa esta propiedad diciendo: Dos planos paralelos son equidistantes.

Zona de espacio

Definición 3.16: El paralelismo de dos planos exige que cada uno de ellos esté por completo en un semiespacio limitado por el otro. El conjunto de los puntos comunes a ambos semiespacios se llama *zona de espacio*.

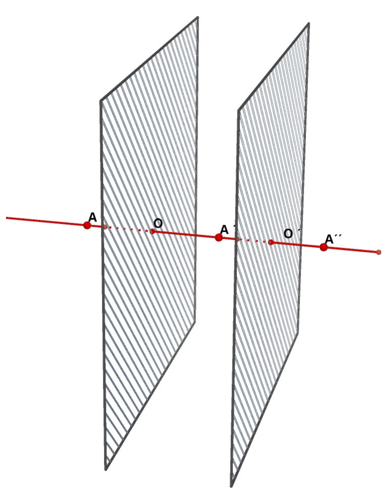
Teorema 3.43: El plano paralelo a dos planos dados por el punto medio del segmento de perpendicular a ambos, pasa también por el punto medio de todo otro segmento de perpendicualar a ambos. (Plano de simetría)

Definición 3.17: El plano paralelo medio de dos planos dados es su plano de simetría.

Teorema 3.44: El plano paralelo medio biseca a todo segmento comprendido entre ambos planos.

3.4.1. Algunos productos (composiciones) de transformaciones

Teorema 3.45: El producto de dos simetrías de planos paralelos es una traslación de vector perpendicular a los planos y cuyo módulo es el doble de la distancia entre los planos.



H) $\alpha \parallel \alpha'$

T) $S_{\alpha'}$ *o* $S_\alpha = T_{\overrightarrow{v}}; \overrightarrow{v} \perp \alpha'$ y $|\overrightarrow{v}| = 2d(\alpha, \alpha')$

D) La transformación resultante es un movimiento pues el producto de dos pseudomovimientos es un movimiento.
Sea A un punto cualquiera y sea $S_\alpha(A) = A'$ y $S_{\alpha'}(A') = A''$, es decir, $S_{\alpha'} \circ S_\alpha(A) = S_{\alpha'}(S_\alpha(A)) = A''$. De la definición de simetría especular se tiene que si $\overleftrightarrow{AA'} \cap \alpha = \{O\}$ y $\overleftrightarrow{A'A''} \cap \alpha' = \{O'\}$ entonces $\overleftrightarrow{AA'} \perp \alpha$; $\overleftrightarrow{A'A''} \perp \alpha'$; $|AO| = |OA'|$ y $|A'O'| = |O'A''|$.
Como $\overleftrightarrow{AA'} \perp \alpha$ y $\overleftrightarrow{A'A''} \perp \alpha'$ Y $\alpha \parallel \alpha'$ los puntos A, A' y A'' están alineados pues si una recta es perpendicular a un plano lo es a todos sus paralelos y por un punto A' pasa una única perpendicular a un plano. De aquí que $|AA''| = |AA'| + |A'A''| = |AO| + |OA'| + |A'O'| + |O'A''| = 2|OA'| + 2|A'O'| = 2(|OA'| + |A'O'|) = 2|OO'| = 2d(\alpha, \alpha')$ pues $|\overline{OO'}|$ es la distancia de α a α'.
De lo anterior $T_{\overrightarrow{2OO'}}(A) = A''$, por definición de traslación.
Como A es un punto cualquiera:

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha'} \circ S_\alpha(A) &= T_{\overrightarrow{2OO'}}(A)\\
S_{\alpha'} \circ S_\alpha(B) &= T_{\overrightarrow{2OO'}}(B)\\
S_{\alpha'} \circ S_\alpha(C) &= T_{\overrightarrow{2OO'}}(C)
\end{aligned}
$$

Y con estos tres puntos quedan determinados una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y un semiplano limitado por ella (el que contiene a C) y por Axioma V.6 concluimos que $S_{\alpha'} \circ S_\alpha = T_{\overrightarrow{2OO'}}$

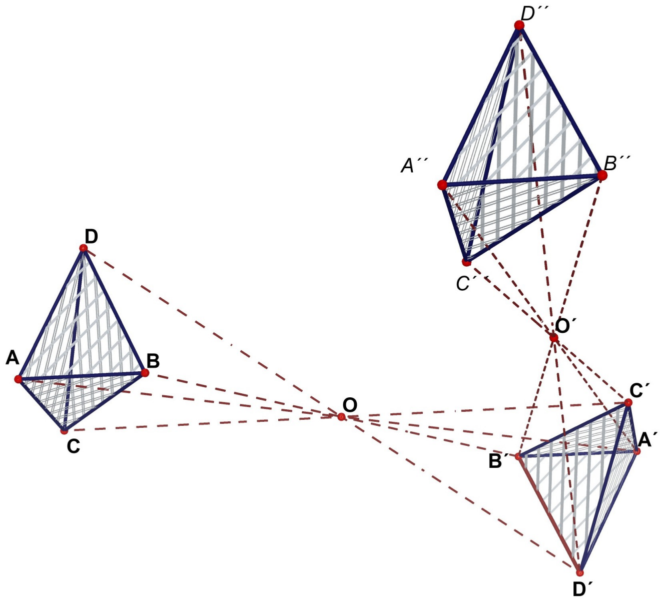
Teorema 3.46: Toda traslación se obtiene de infinidad de maneras como producto de dos simetrías especulares.

Teorema 3.47: El producto de dos simetrías centrales respecto de centros O y O' distintos es una traslación.

H) S_o ; $S_{o'}$

T) $S_{O'} \circ S_o = T$

D) Dados A; B; C; D puntos no coplanares, vértices de un tetraedro tales que A, B y O no estén alineados. Aplicamos la S_O y $S_{O'}$



$S_{O'} \circ S_O$ es un movimiento pues pseud x pseud es movimiento.
Sea

$$S_O(A) = A'; \quad S_{O'}(A') = A'', \textit{es decir que } S_{O'} \circ S_O(A) = A''$$
$$S_O(B) = B'; \quad S_{O'}(B') = B'', \textit{es decir que } S_{O'} \circ S_O(B) = B''$$

De la definición de simetría central:

- $|AO| = |OA'|$ y $|BO| = |OB'| \rightarrow ABA'B'$ es un paralelogramo, por lo tanto $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$ y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$.
- $|B'O'| = |O'B''|$ y $|A'O'| = |O'A''| \rightarrow A'B'A''B''$ es un paralelogramo y por lo tanto $|\overline{A'B'}| = |\overline{A''B''}|$ y $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{A''B''}$.

Como

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'} \wedge \overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{A''B''} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A''B''} \text{ y}$$
$$|AB| = |A'B'| \wedge |A'B'| = |A''B''| \Rightarrow |AB| = |A''B''|$$

Así $ABA''B''$ es un paralelogramo y por tanto $|\overline{AA''}| = |\overline{BB''}|$ y $\overleftrightarrow{AA''} \parallel \overleftrightarrow{BB''}$ por tanto existe una traslación (de vector $\overrightarrow{AA''}$) que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{A''B''}$.
Del mismo modo para un punto $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ se tiene que $|BC| = |B''C''|$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B''C''}$ por lo que $BCB''C''$ es un paralelogramo y por tanto $|BB''| = |CC''|$ y $\overleftrightarrow{BB''} \parallel \overleftrightarrow{CC''}$ y con lo anterior:

$$|AA''| = |BB''| = |CC''| \text{ y } \overleftrightarrow{AA''} \parallel \overleftrightarrow{BB''} \parallel \overleftrightarrow{CC''}$$

y por el axioma de determinación del movimiento $S_{O'} \circ S_O = T_{\overrightarrow{AA''}}$ (existe un único movimiento que transforma una semirrecta $\overrightarrow{AB}$ en otra, un semiplano limitado por la recta primera –el semiplano de borde $\overrightarrow{AB}$ y que contiene a C– en un semiplano determinado por la segunda). Resta determinar el módulo del vector traslación en función de la distancia entre los centros de simetría. $S_O O = O$ y $S_{O'} O = O''$ por esto $\overline{OO'} = \overline{O'O''}$ y además O, O' y O'' están alineados por definición de simetría central.
$\overline{OO''} = 2\overline{OO'}$. Además $\overline{OO''} \parallel \overline{BB''}$, porque $BOO''B''$ es un paralelogramo.
De lo anterior $S_{O'} \circ S_O = T_{\overrightarrow{v}}$ siendo $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{OO'}$ en el sentido de O a O'.

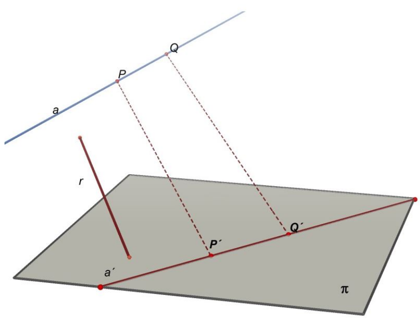
Teorema 3.48: Toda traslación puede obtenerse como producto de dos simetrías centrales.

3.4.2. Proyección paralela

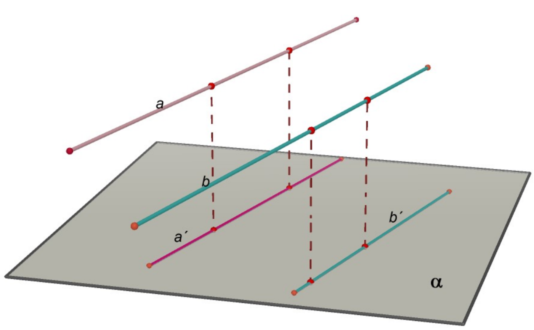
Definición 3.18: La proyección P' de un punto P sobre un plano π en la dirección de una recta r no paralela a π es la intersección del plano π con r (si $P \in r$) o a la intersección del plano π con la paralela por P a r. La recta r o las paralelas se llaman rayos proyectantes y el plano π plano de proyección. Si la dirección dada es perpendicular al plano de proyección esta se llama ortogonal, o simplemente proyección, cuando no da lugar a confusiones. Si r no es perpenpicular al plano de proyección la proyección se llama oblicua.

Definición 3.19: La proyección de una recta, de un segmento y en general de una figura sobre un plano es la figura que forman las proyecciones de sus puntos.

La proyección de una recta *a* no paralela a la dirección de proyección es otra recta *a*′, intersección del plano π con el que forman las paralelas a *r* por los puntos de *a*, plano llamado proyectante; de donde, la proyección de un segmento es otro segmento comprendido en la faja de plano limitada por los rayos proyectantes extremos. Si la recta proyectada es paralela a la dirección de proyección, ella misma es la proyectante de todos sus puntos y su proyección se reduce a su propia traza sobre el plano.



Teorema 3.49: Si dos rectas son paralelas, sus proyecciones sobre el plano (en dirección no paralela a ella) son dos rectas paralelas entre sí o coincidentes.

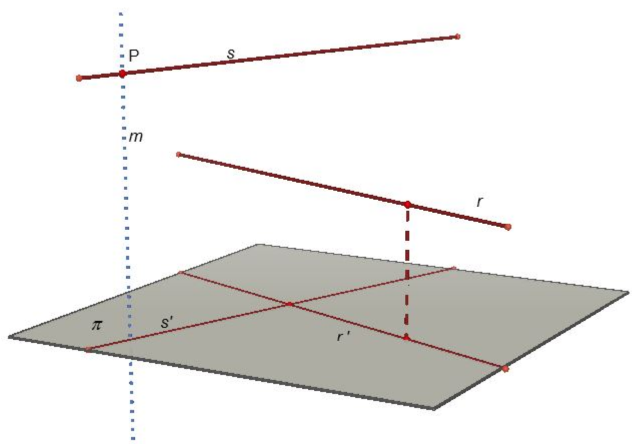


H) $a \parallel b \quad Proy_\alpha a = a' \quad Proy_\alpha b = b'$

T) $a' \parallel b'$ o $a' = b'$

D) Los planos que determinan los rayos proyectantes de cada punto de las rectas (planos proyectantes) son paralelos o coincidentes (¿Por qué?). Y si los planos son paralelos son también paralelas sus trazas sobre α pues "las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son rectas paralelas".

Teorema 3.50: Si dos rectas *r* y *s* son ortogonales, sin ser ninguna perpendicular al plano de proyección π, y una de ellas *r* es paralela a π, las proyecciones ortogonales de dichas rectas son perpendiculares entre sí.



H) $r \perp s \quad r \parallel \pi \quad s \not\perp \pi; \quad Proy_\pi r = r' \quad Proy_\pi s = s'$

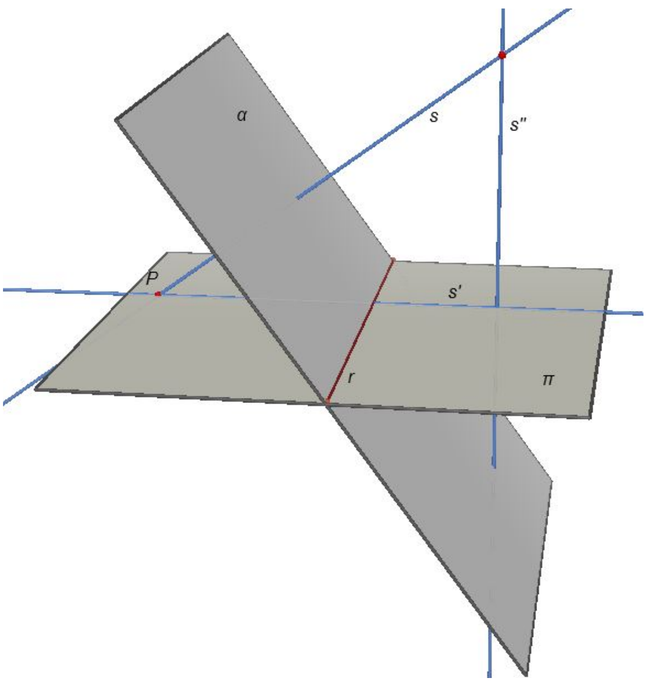
T) $r' \perp s'$

D) Puesto que $Proy_\pi r = r'$ y como $r \parallel \pi$ entonces $r' \parallel r$
El rayo proyectante *m* de un punto *P* de *s* es ortogonal a r', por ser perpendicular a π. $s \perp r'$ por T. 3.40 ya que $s \perp r$. El plano proyectante de *s* sobre π (el determinado por *s* y s') es perpendicular a r' por T. 3.7 ya que dicho plano contiene a dos rectas *s* y *m*, secantes entre sí y ambas ortogonales a r' y la traza s' de este plano es perpendicular a r', dado

que si una recta es perpendicular a un plano, es ortogonal a toda recta de este, es decir $r' \perp s'$.

Teorema 3.51: Si las proyecciones ortogonales de dos rectas r y s sobre un plano π son perpendiculares entre sí y una de ellas r es paralela a π, o está contenida en él, ambas rectas son ortogonales entre sí.

Teorema 3.52: Si π y α son planos secantes en r y s es una recta perpendicular a α y $s' = proy_\pi(s)$ entonces $s' \perp r$.



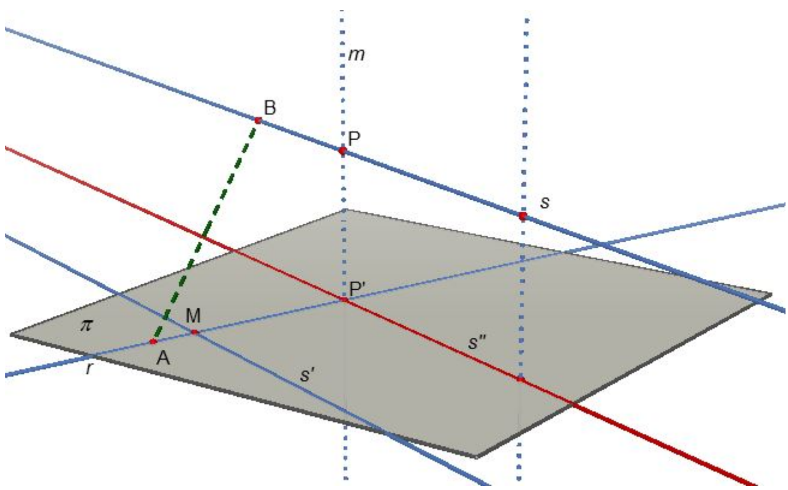
3.4.3. DISTANCIA ENTRE RECTAS, ENTRE RECTA Y PLANO Y ENTRE PLANOS

En la Definición 3.5 se establece la distancia de un punto a un plano. Se define en esta sección distancia entre dos planos paralelos, entre plano y recta paralela y entre rectas cruzadas.

Definición 3.20: La distancia entre dos planos paralelos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano. Esta distancia es independiente del punto elegido, por la igualdad de los segmentos de perpendiculares entre ambos planos.

Definición 3.21: La distancia entre una recta y un plano paralelo a ella es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Esta distancia es independiente del punto elegido.

Teorema 3.53: Dadas dos rectas cruzadas existe una y solo una perpendicular a ambas. El segmento determinado por los puntos de intersección es menor que cualquier otro que une dos puntos respectivamente situados en una y otra recta.



H) r y s rectas cruzadas

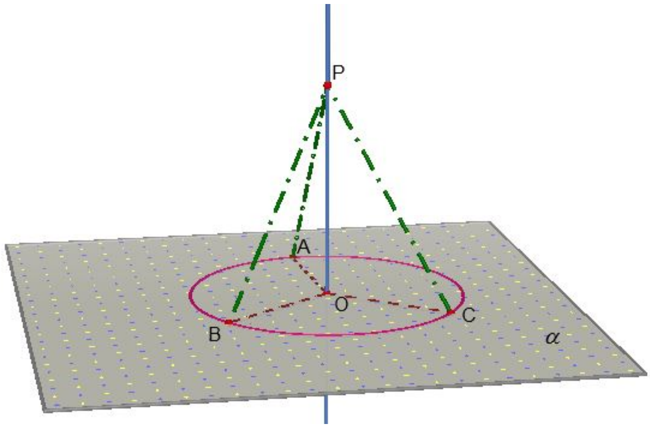
T) $\exists!$ recta m / m es perpendicular a r y s. Si $r \cap m = \{P'\}$ y $s \cap m = \{P\}$, $\overline{PP'} < \overline{AB}$ con cualesquiera A y B con $A \in r$ y $B \in s$.

D) Sean $M \in r$, $s' \parallel s$ por M y π el plano determinado por r y s'. Toda perpendicular a r y s debe ser ortogonal a r y s' por T. 3.40 y por lo tanto es perpendicular al plano π por T. 3.37. Ahora bien, todas las perpendiculares a π por los puntos de s cortan a π según la proyección ortogonal s'' de s sobre π, que es paralela a s ($s \parallel \pi$ por T. 3.37, $s'' \subset \pi$ y s y s'' son coplanares pues están en el plano proyectante de s sobre π) y no es paralela a r, por no serlo r y s entre sí. Así r y s'' se cortan en un punto P' que será pie de una perpendicular bajada desde un cierto punto P de s sobre el plano π. La recta PP' es la recta buscada m. La recta m está incluida en el plano proyectante de s sobre π y en el plano determinado por las perpendiculares al plano π por los puntos de r. Así m es única por ser la intersección de dichos planos. El segmento PP' es menor, por lo antes demostrado, que cualquier otro segmento AB, oblicuo a π, que une puntos de r y s distintos de P y P'.

Definición 3.22: La longitud del segmento determinado por los puntos de intersección de la recta perpendicular a dos rectas cruzadas se llama distancia entre dichas rectas.

Teorema 3.54: El lugar geométrico de los puntos de un plano α equidistantes de un punto exterior P es una circunferencia cuyo centro está en el pie de la perpendicular desde P a α.

a) Si A y B son puntos de α y pertenecen a la circunferencia cuyo centro está en el pie de la perpendicular desde P a α entonces equidistan de P.



H) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C_{(O,r)} \subset \alpha$, O pie de la perpendicular a α por P, con $P \notin \alpha$
$A \in C_{(O,r)}$, $B \in C_{(O,r)}$

T) $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$

D) Los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{POA}$ y $\overset{\triangle}{POB}$ son congruentes dado que PO es común y $|OA| = |OB|$ por ser radios de la circunferencia, de donde $|PA| = |PB|$.

b) Si P, punto exterior de α, equidista de A y B, puntos de α, entonces A y B pertenecen a la circunferencia cuyo centro O es el pie de la perpendicular a α por P.

H) $|PA| = |PB|$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ con $P \notin \alpha$ y O pie de la perpendicular a α por P.

T) $\overline{AO} = \overline{OB}$

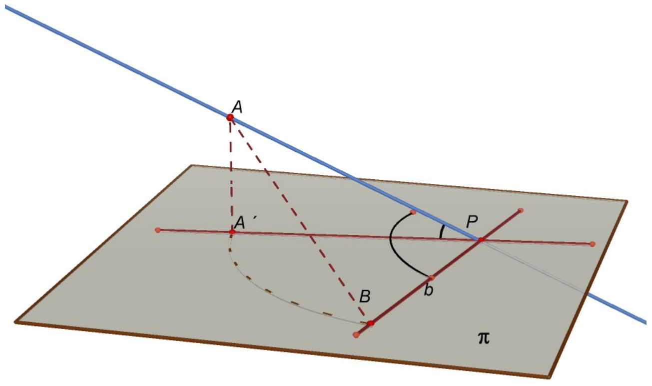
D) Los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{POA}$ y $\overset{\triangle}{POB}$ son congruentes dado que $\overline{PO}$ es común y por hipótesis $|PA| = |PB|$, por lo que $|AO| = |OB|$ por lo que A y C pertenecen a la circunferencia.

Teorema 3.55: (Corolario del T. 3.54) El lugar geométrico de los puntos equidistantes de tres A, B, C no alineados es la perpendicular al plano que A, B y C determinan, por el circuncentro O del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

Por el teorema anterior, todo punto de esta perpendicular equidista de A, B y C y recíprocamente si $PA = PB = PC$, A, B y C equidistan del pie de la perpendicular, pero el único punto del plano ABC equidistantes de estos puntos es el circuncentro del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

3.4.4. ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO Y ENTRE RECTAS

Definición 3.23: Si una recta es perpendicular a un plano forma un ángulo recto con él y si es paralela forma ángulo nulo. Si la recta no es paralela ni perpendicular (oblicua) al plano π, el ángulo de la recta con el plano es el ángulo agudo que forma la recta con su proyección sobre el plano.



Observación: Se define así por ser este ángulo menor que cualquier otro de los ángulos que forma dicha recta con las rectas que pasan por el punto *P* intersección de la recta con el plano. La proyección de un punto A de la recta *r* sobre π, es el punto *A′*. Se considera el punto *B* de una recta *b* en π, tal que $PB = PA$, por definición de distancia de un punto a un plano se afirma que $AA' < AB$ y, por tanto, en virtud del teorema de los triángulos incongruentes, es posible asegurar que $A\hat{P}A' < A\hat{P}B$.

Definición 3.24: El ángulo entre dos rectas cruzadas no ortogonales, es el ángulo agudo que forman las paralelas o coincidentes a cada una de ellas por un punto. Cualquiera sea el punto elegido se obtienen ángulos iguales.
Si las rectas son ortogonales se dice que su ángulo es recto, por ser también perpendiculares las rectas en cuestión.

Invariancia de las distancias y ángulos en el movimiento

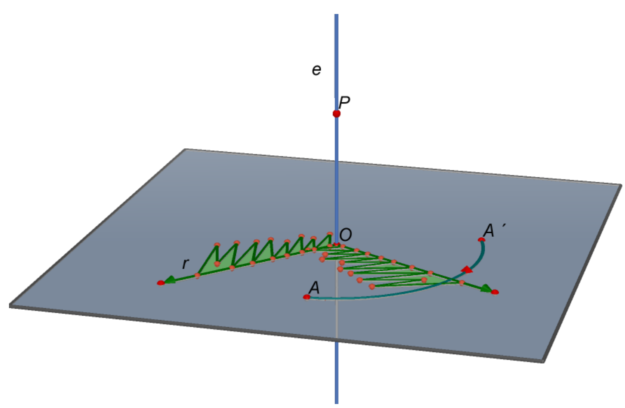
Las distancias o ángulos antes definidos lo han sido mediante relaciones de paralelismo y perpendicularidad, que se conservan en todo movimiento y en todo pseudomovimiento; por lo tanto, el ángulo o la distancia entre dos elementos (planos, rectas, puntos) es igual al ángulo o distancia entre los elementos homólogos en todo movimiento o pseudomovimiento.

3.5. MOVIMIENTOS CON EJE

3.5.1. GIRO EN 3D

Definición 3.25: Sea r una recta y α un ángulo plano orientado. Se llama giro de eje r y ángulo α: $G_{(r,\alpha)}$ al movimiento del espacio tal que al punto A le hace corresponder el punto:

- A, si $A \in r$
- A', si $A \notin r$ tal que:
  - A' pertenece al plano π perpendicular a r por A.
  - el ángulo $A\hat{O}A'$ tiene igual amplitud y sentido que el ángulo $\hat{\alpha}$, donde O es el punto de intersección de π con r.
  - $d(A, O) = d(A', O)$

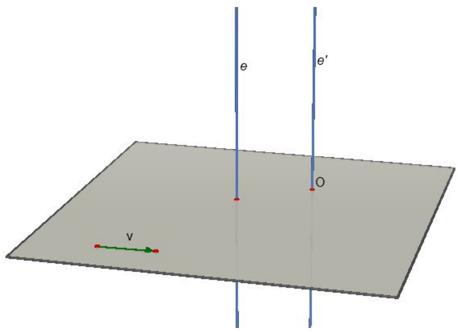


Teorema 3.56: El producto de dos simetrías axiales de ejes secantes es un giro de eje perpendicular al plano que los ejes determinan por el punto de intersección y ángulo el doble del ángulo entre los ejes.

Teorema 3.57: Todo giro puede obtenerse de infinidad de maneras como producto de dos simetrías axiales.

Teorema 3.58: Todo movimiento del espacio con un punto fijo O es un giro alrededor de un eje que pasa por O.

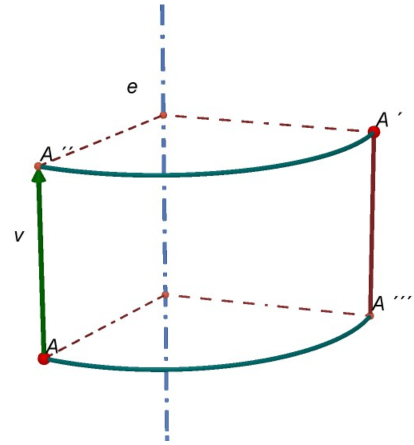
Teorema 3.59: El producto de una traslación de vector v con un giro de eje e perpendicular a las guías de la traslación es un giro alrededor de un eje e' paralelo a e.



D) El producto de estos dos movimientos es un movimiento. Todo plano perpendicular al eje de giro es doble en el giro y en la traslación. En dicho plano se verifican una traslación y un giro plano, cuyo producto es un giro alrededor de cierto punto O (teorema en el plano), y el movimiento del espacio será un giro alrededor del eje perpendicular al plano, es decir, paralelo al anterior por O.

3.5.2. Movimiento helicoidal

Definición 3.26: El producto de una traslación por un giro alrededor de una de sus guías se llama movimiento helicoidal.
El producto es independiente del orden en que se efectuan dichos movimientos.



Teorema 3.60: Todo movimiento del espacio se puede reducir a un movimiento helicoidal.

Teorema 3.61: El producto de dos simetrías especulares de planos secantes es un giro.

Teorema 3.62: Todo giro puede descomponerse de infinitas maneras en producto de dos simetrías especulares.

Reducción de un movimiento a producto de simetrías especulares

Teorema 3.63: Todo movimiento del espacio se puede obtener como producto de simetrías especulares.

D) Toda traslación (T. 3.46) y todo giro (T. 3.62) pueden obtenerse como producto de dos simetrías especulares. Así todo movimiento helicoidal (T. 3.60), y por lo tanto, todo movimiento en el espacio puede obtenerse como producto de cuatro simetrías especulares.

Teorema 3.64: Todo movimiento del espacio puede reducirse a un producto de dos simetrías axiales.

3.6. Congruencia de ángulos triedros y poliedros

Definición 3.27: Dos triedros *abc* y *a′b′c′* son congruentes o pseudocongruentes si tienen sus caras y diedros respectivamente iguales.

Definición 3.28: Si dos poliedros tienen sus aristas correspondientes iguales, sus diedros correspondientes iguales y las caras concurrentes en cada vértice respectivamente iguales, dichos poliedros son congruentes.

Teorema 3.65: Si desde un punto *P* de la arista de un diedro convexo $\alpha\beta$ se trazan las semirrectas *a* y *b* perpendiculares a las caras del diedro y situadas respecto de cada cara en distinto semiespacio que el que contiene al diedro, el ángulo $\widehat{ab}$ formado por estas semirrectas es suplementario del diedro $\alpha\beta$ (sección recta del diedro).

H) $\alpha\beta$ diedro de arista r, $P \in r$

$a \perp \alpha$ por P, $\quad b \perp \beta$ por P.

T) $\widehat{ab} + \widehat{\alpha\beta} = 180°$

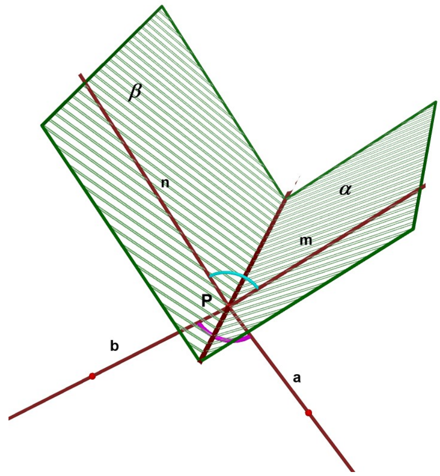
D) $a \perp r$ porque $a \perp \alpha$

$b \perp r$ porque $b \perp \beta$

$pl(ab) \perp r$, $pl(ab) \cap \widehat{\alpha\beta} = \widehat{mn} \ \wedge \ \widehat{mn}$ sección recta de $\alpha\beta$.

$\widehat{mn}+\widehat{nb}+\widehat{ab}+\widehat{am} = 4$ rectos y $\widehat{nb} = \widehat{ma} = 1$ recto de donde

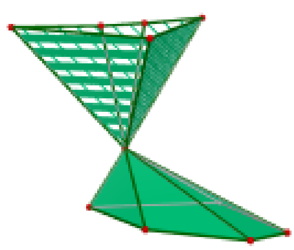
$\widehat{mn} + \widehat{ab} = 2$ rectos



3.6.1. Anguloides polares

El concepto de anguloides polares se utiliza para las demostraciones de las propiedades que se estudian en esta sección.

Definición 3.29: Si desde el vértice de un anguloide convexo *A* se trazan semirrectas perpendiculares a sus caras, situadas respecto de cada una de ellas en distinto semiespacio que el que contiene el anguloide, todos ellos definen un anguloide convexo *A′*. El anguloide *A′* se llama polar de *A*.



Teorema 3.66: Las caras del anguloide polar de un anguloide son suplementarias con los diedros del mismo.

Para probar que las caras del anguloide polar son suplementarias con los diedros del anguloide, se aplica el T. 3. 65 a los diedros del anguloide.
En el anguloide $a'b'c'd'e'$, $a' \perp ab$, $b' \perp bc$, $c' \perp cd$, $d' \perp de$ y $e' \perp ea$.
$\widehat{a'b'} + diedro(abc) = 2R$ y de igual modo para cada cara del anguloide polar, lo que prueba el teorema.

3.6.2. Criterios de congruencia de triedros

Para que dos triedros sean congruentes basta que se verifiquen algunas de las condiciones exigidas por la definición.

1. Si dos triedros tienen respectivamente iguales dos caras y el diedro comprendido son iguales.

   H) Triedros abc y $a'b'c'$, $ab = a'b'$, $ac = a'c'$ y $\alpha = \alpha'$

   T) Los triedros son congruentes.

   D) Sean ambos triedros del mismo sentido. Se aplica al triedro $a'b'c'$ el movimiento que hace coincidir ab con $a'b'$ y los semiespacios en los que se sitúan c y c'.
   Como $\alpha = \alpha'$ coinciden los semiplanos ac y $a'c'$, coincidirán c y c' ($a'c' = ac$ por hipótesis) y por lo tanto coincidirán los triedros.
   Si los triedros no tienen el mismo sentido, se aplica el razonamiento a uno de los triedros y al opuesto por el vértice al otro, con lo cual los triedros dados serían pseudocongruentes.

2. Si dos triedros tienen, respectivamente, iguales una cara y los dos diedros contiguos, son iguales.

   H) Triedros abc y $a'b'c'$, $ab = a'b'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$

   T) Los triedros son congruentes

D) Para demostrarlo se utilizan los triedros polares.
Sea $a''b''c''$ el polar de abc y $a'''b'''c'''$ el polar de $a'b'c'$.
Por hipótesis y por propiedad de triedros polares se tiene:

$$\begin{aligned} ab = a'b' &\Rightarrow \quad \alpha'' = \alpha''' \\ \alpha = \alpha' &\Rightarrow \quad c''b'' = c'''b''' \\ \beta = \beta' &\Rightarrow \quad a''c'' = a'''c''' \end{aligned}$$

Los triedros polares son iguales por cumplir lo demostrado en el criterio anterior. Esto permite afirmar que el triedro abc es igual al $a'b'c'$.

3. Dos triedros que tienen sus caras respectivamente iguales son iguales.

4. Dos triedros que tienen los diedros respectivamente iguales, son iguales.

3.6.3. Criterios de congruencia de tetraedros

Para que dos tetraedros sean congruentes basta que se verifiquen algunas de las condiciones exigidas por la definición (Definición 3.28).

1. Dos tetraedros que tengan respectivamente iguales dos caras y el diedro que forman, son iguales.

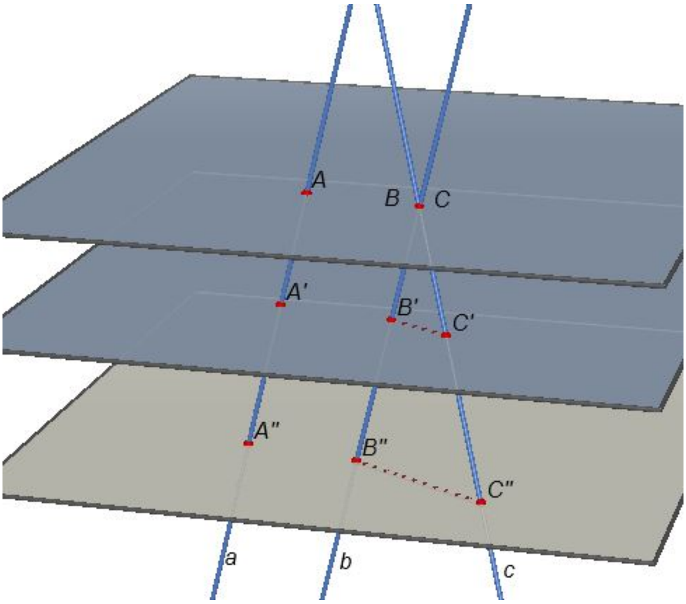
2. Dos tetraedros que tienen respectivamente iguales una cara y los tres diedros contiguos son iguales.

3. Dos tetraedros que tienen tres caras respectivamente iguales son iguales.

3.7. La semejanza en 3D

3.7.1. Rectas cortadas por planos paralelos

Teorema 3.67: Los segmentos interceptados en dos rectas por un sistema de planos paralelos secantes a ambas son proporcionales.



Demostración:
Si las rectas son paralelas (a y b en la figura) los segmentos de ellas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, $\overline{A''A'}$ y $\overline{B''B'}$, ... comprendidos entre planos paralelos son iguales por T. 3.41 y por tanto proporcionales.
Si las rectas son secantes (c y b en la figura) el plano que determinan es cortado por los planos del sistema según un sistema de rectas paralelas $\overleftrightarrow{B'C'}$ y $\overleftrightarrow{B''C''}$, ... y por tanto por el teorema de Thales en el plano, los segmentos correspondientes $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$, $\overline{B''B'}$ y $\overline{C''C'}$, ... son proporcionales.
Si las rectas son alabeadas (a y c en la figura) trazando por un

punto C de una de ellas una paralela a la otra y aplicando los casos anteriores, se tiene que los segmentos $\overline{CC'}, \overline{C''C'}$, ... son proporcionales a $\overline{BB'}$, $\overline{B''B'}$, ... y por tanto a sus iguales $\overline{AA'}$, $\overline{A''A'}$,...

Teorema 3.68: (Corolario del T. 3.67) Si varios puntos $A', B', C', D', \ldots$ son coplanarios, todo otro conjunto de puntos $A'', B'', C'', D'', \ldots$ respectivamente alineados con los anteriores y con un punto fijo O, de tal modo que se verifican en valor y signo las proporciones

$$\frac{OA'}{OA''} = \frac{OB'}{OB''} = \frac{OC'}{OC''} = \frac{OD'}{OD''} = \ldots$$

están también en un plano.

3.7.2. Homotecia en el espacio

Definición 3.30: Dado un punto O y un número real $k \neq 0$. Se llama homotecia de centro O y razón k: $H_{(O,k)}$ a la transformación que hace corresponder a todo punto A distinto de O otro punto $A' \in \overleftrightarrow{OA}$, tal que $\frac{OA'}{OA} = k$ y al punto O él mismo. Las figuras homotéticas son aquellas en que sus puntos se corresponden en una homotecia.

Propiedades:

a) Si $A' \neq O$, $A' \in \overrightarrow{OA}$ si $k > 0$ y si $k < 0$ está en la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{OA}$.

b) Si $k = 1$ la homotecia es la identidad y si $k = -1$ es una simetría central de centro O.

c) El centro O es el único punto doble si $k \neq 1$.

d) Las rectas que pasan por el centro son dobles.

e) Los planos que pasan por el centro son dobles y los puntos homólogos en cada uno de estos planos lo son en una homotecia en dicho plano de centro O y razón k.

f) A los puntos de una recta que no pasa por O le corresponden los de otra recta paralela si $k \neq 1$.

g) La homotecia conserva el orden de los puntos de una recta.

h) La razón entre segmentos homólogos es constante e igual a k.

i) A los puntos de un plano que no pasa por O corresponden los puntos de un plano paralelo si $k \neq 1$.

j) A todo ángulo plano le corresponde otro igual.

k) Los ángulos diedros formados por semiplanos homólogos son iguales.

l) Los triedros homólogos son iguales.

Teorema 3.69: Dos triángulos sean o no coplanarios son homotéticos con razón $k \neq 1$ si y solo si tienen lados paralelos no iguales.

3.7.3. Semejanza en el espacio

Definición 3.31: La semejanza es el producto de una homotecia por un movimiento o pseudomovimiento. Las figuras semejantes son aquellas en que sus puntos se corresponden en una semejanza.

Propiedades:

a) A puntos alineados le corresponden puntos alineados en igual orden.

b) A puntos coplanarios corresponden puntos coplanarios.

c) Los segmentos homólogos son proporcionales. La razón de proporcionalidad se llama razón de semejanza.

d) A todo ángulo plano le corresponde otro igual.

e) Los ángulos diedros formados por semiplanos homólogos son iguales.

f) Los triedros homólogos son iguales.

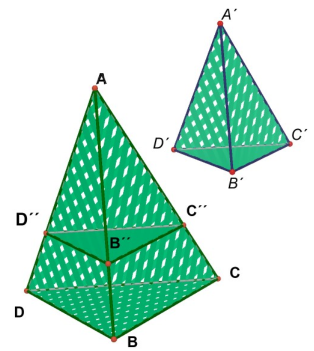
g) El sentido del espacio se conserva si los conservan o los invierten los dos factores y se invierte si lo conserva solo un factor.

3.7.4. Semejanza de tetraedros y poliedros

Definición 3.32: Dos poliedros son semejantes si sus caras homólogas son semejantes, sus aristas homólogas proporcionales, sus ángulos diedros y anguloides homólogos son iguales.

Para reconocer la semejanza de dos poliedros no es preciso comprobar todas las condiciones, basta que se cumplan algunas de ellas para que se cumplan las demás. Se presentan condiciones de semejanza de tetraedros.

Criterios de semejanza de tetraedros



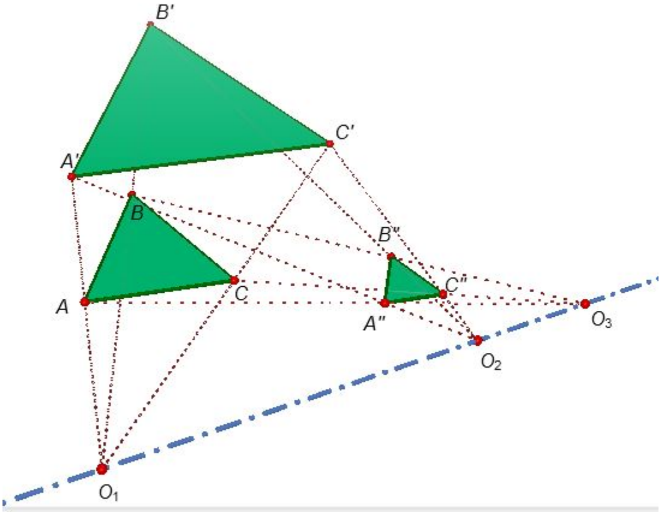
Sean ABCD y A'B'C'D' dos tetraedros. Sea además $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ y sobre $\overline{AB}$ sea un punto B'' tal que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$. Por B'' sea el plano paralelo al que pasa por D, B, C. Sean C'' y D'' las intersecciones de este plano con $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. El tetraedro AB”C”D” es homotético del ABCD y por tanto semejante. Todo criterio que permita afirmar la igualdad de AB”C”D” con A’B’C’D’ dará un criterio de semejanza entre los tetraedros dados. Ellos son:

1. Dos tetraedros que tengan respectivamente semejantes dos caras e igual el diedro que forman, son semejantes.
2. Dos tetraedros que tienen respectivamente semejantes una cara y los tres diedros contiguos iguales, son semejantes.
3. Dos tetraedros que tienen tres caras respectivamente semejantes, son semejantes.

PRODUCTO DE DOS HOMOTECIAS

Teorema 3.70: El producto de dos homotecias del mismo centro y de razones k_1 y k_2 es otra homotecia del mismo centro y razón $k_1.k_2$.

Teorema 3.71: El producto de dos homotecias de centros O_1 y O_2 distintos y de razones no recíprocas k_1 y k_2 es otra homotecia de razón $k_1.k_2$ y cuyo centro O_3 está alineado con O_1 y O_2.



Demostración: Sea ABC un triángulo; A'B'C' su homólogo en la homotecia $H_{(O_1,k_1)}$ y A"B"C" el homólogo de este en $H_{(O_2,k_2)}$. ABC y A"B"C" tienen sus lados homólogos paralelos entre sí por serlo a los del triángulo A'B'C', luego por el T. 3.69 son homotéticos. Sea O_3 el centro de la homotecia. Lo mismo se puede repetir para otro triángulo ABD que con A"B"D" resultarán homotéticos con centro de homotecia en la intersección de $\overleftrightarrow{AA''}$ y $\overleftrightarrow{BB''}$, es decir, en el mismo punto O_3 y razón

$$k_3 = \frac{O_3D''}{O_3D} = \frac{O_3A''}{O_3A} = \frac{A''B''}{AB} = \frac{A''B''}{A'B'}.\frac{A'B'}{AB} = k_1.k_2 \neq 1$$

Así, todos los pares de puntos homólogos D y D" en el producto están alineados con O_3 y su razón de distancias a O_3 es constante, es decir, las figuras primera y tercera son homotéticas. Además, como la recta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ es doble en las homotecias componentes, lo es en la homotecia producto y por eso pasa por O_3.

Si $k_1.k_2 = 1$ las figuras resultantes serán congruentes y sus rectas homólogas paralelas, es decir, estarán ligadas por una traslación.

3.8. Cuadro síntesis transformaciones

El siguiente cuadro sintetiza las transformaciones estudiadas en este capítulo, a través de algunas de sus particularidades.

Transf.	Elementos que la define	Conserva ángulos	Conserva distancias	Conserva sentido	Puntos fijos
Simetría axial	recta (eje)	si	si	si	los del eje
Simetría central	punto (centro)	si	si	no	el centro
Simetría espe-cular	plano	si	si	no	los del plano
Traslación	vector	si	si	si	no tiene
Giro	recta (eje) y ángulo	si	si	si	los del eje
Homotecia	punto (centro) y razón k $\neq 0$	si	no	no, si $k < 0$ si, si $k > 0$	el centro
Proyección	plano y dirección	no	no	-	los del plano

3.9. Para profundizar

1. Justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

    a) Por un punto exterior a un plano, pasan infinitos planos paralelos a él.

    b) Por un punto exterior a una recta, pasan infinitas perpendiculares a ella.

2. Sea $\overline{AP}$ un segmento perpendicular a un plano α con $P \in \alpha$ y de longitud h. Se traza en el plano α con centro en P una circunferencia de radio r. Por un punto cualquiera M de esta circunferencia, se traza en α una recta tangente MN.

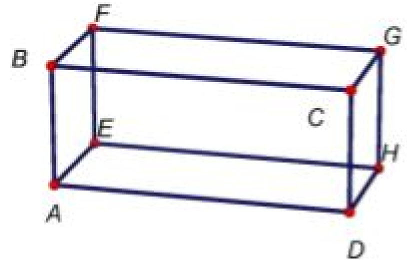
Sea la longitud de $\overline{MN} = q$. Se une A con N. ¿Qué longitud tendrá el segmento $\overline{AN}$? Justificar tus razonamientos.

3. Demostrar que todo plano β perpendicular a α es doble en S_α y que los puntos de β experimentan una simetría axial en dicho plano.

4. Demostrar que toda recta que no contiene al centro de simetría, tiene como imagen una recta paralela a ella.

5. ¿Qué transformación se obtiene al componer una simetría central de centro O con una simetría axial de eje e tal que e pasa por O? Demostrar.

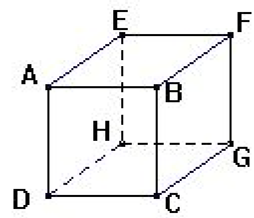
6. Determinar la transformación que se obtiene al componer una simetría central con centro en el punto de intersección de AG con FD; con una simetría axial de eje EC en el ortoedro ABCDEFGH. Hallar los elementos de la transformación resultante, en función del ortoedro.



7. Se considera un plano α y en él un trapecio ABCD con AB paralelo a CD. Sean: V un punto tal que $V \notin \alpha$, M punto medio de $\overline{VC}$ y N punto medio de $\overline{VD}$. Probar que la recta $\overleftrightarrow{MN}$ es paralela al plano que determinan V, A y B.

8. Determinar cómo hallar una recta que pasa por un punto P y sea secante a dos rectas cruzadas. Establecer distintos casos.

9. Hallar el eje y ángulo de giro de la rotación que en el cubo ABCDEFGH, transforma a la semirrecta EF en la opuesta a GF y al semiplano de borde EF y que contiene a A en el de borde FG que contiene a B. Hallar la imagen del triángulo HEA en dicha rotación.



10. Sea $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cubo (ABCD es paralela a $A_1B_1C_1D_1$ y aristas AA_1, BB_1, CC_1 y DD_1). Hallar la magnitud del ángulo entre las rectas: i) AA_1 y B_1D, ii) AD_1 y D_1C.

11. Demostrar que si dividimos en la misma razón los segmentos trazados desde un punto a los vértices de una pirámide, los puntos de división pueden considerarse como los vértices de una segunda pirámide semejante a la primera.

12. Demostrar que el tetraedro cuyos vértices son los centros de gravedad de las caras de un tetraedro regular dado es semejante a este tetraedro. Hallar la razón de semejanza.

Capítulo 4

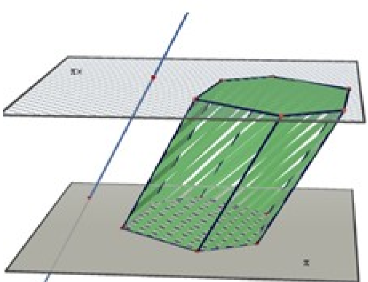
Figuras 3D: Poliedros

Existen diferentes clasificaciones de poliedros las cuales surgen de las características de los mismos. Se expondrá en este capítulo la definición y elementos de algunos poliedros particulares. Se mencionan, a modo de ejemplo, otros tipos de poliedros no estudiados en profundidad en este apartado, como son los deltaedros, las bipirámides, los antiprismas, los arquimedianos, entre otros.

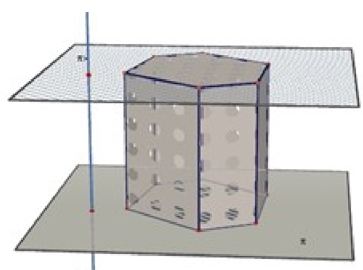
4.1. PRISMA

4.1.1. DEFINICIÓN Y ELEMENTOS DE PRISMA

Definición 4.1: Sean π y π' dos planos paralelos, *m* una recta secante a π y **P** un polígono convexo en π. Por cada punto *A* del polígono **P** se tiene a *m* o a una única recta paralela a *m* que corta en A' al plano π'. Se llama prisma al poliedro determinado por todos los puntos de los segmentos $\overline{AA'}$, para todos los puntos *A* de **P**. Al polígono **P** y al polígono determinado por la intersección de las rectas paralelas a *m* (o *m*) por los puntos de **P** con π' se los llama bases del prisma.



Prisma oblicuo



Prisma recto

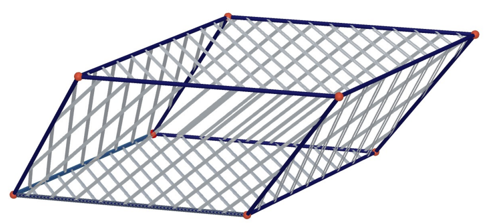
A cualquier segmento de recta perpendicular a los planos que contienen a las bases y cuyos extremos se encuentran en los mismos, se lo llama altura del prisma.

Si un prisma es tal que las aristas laterales (las que no son de las bases) son perpendiculares a los planos de las bases, se denomina recto y en caso que no sea recto se denomina oblicuo. El prisma se llama triangular, cuadrangular, pentagonal,..., n-gonal según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos,..., n-ágonos.
Las caras laterales de un prisma son paralelogramos, en particular, si el prisma es recto dichos paralelogramos son rectángulos.

4.1.2. Paralelepípedo

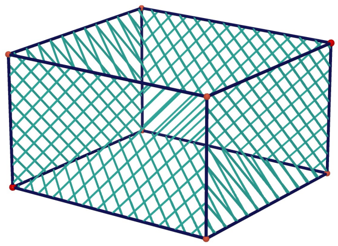
Definición 4.2: Un prisma recto u oblicuo cuyas bases son paralelogramos se llama paralelepípedo.

Cada cara y la paralela se llaman opuestas. Se llaman vértices opuestos los que no están en la misma cara. Los segmentos de rectas que unen los vértices opuestos se llaman diagonales. Es decir, que el paralelepípedo tiene 4 diagonales.



4.1.3. Ortoedro

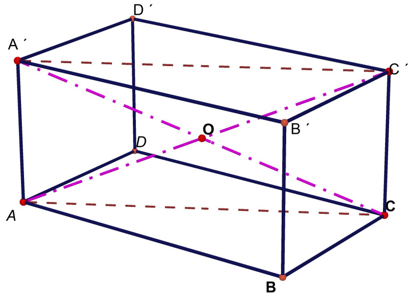
Definición 4.3: Todo paralelepípedo recto de bases rectangulares se llama ortoedro. (Esta denominación fue introducida por Rey Pastor)



Las seis caras del ortoedro son rectángulos, las caras opuestas son iguales, las aristas concurrentes en un vértice definen dos a dos dichos rectángulos y sus medidas son las tres dimensiones del ortoedro.

Teorema 4.1: En todo ortoedro el cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las aristas concurrentes en un vértice.

Teniendo en cuenta la propiedad "Las diagonales del ortoedro son iguales", se puede decir que en el rectángulo $ABCD$, se verifica que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, en el rectángulo $ACC'A'$, $\overline{AC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CC'}^2$ por lo que se puede afirmar que $\overline{AC'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CC'}^2$.

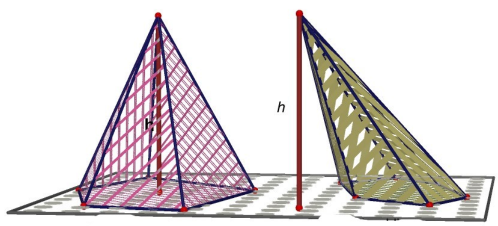


El ortoedro cuyas aristas son iguales se llama cubo.

4.2. Pirámide

4.2.1. Definición y elementos de pirámide

Definición 4.4: Sean π un plano, **P** un polígono convexo en π y *V* un punto exterior a π. El conjunto de los puntos de todos los segmentos $\overline{AV}$ para todos los puntos *A* de **P** se llama pirámide[1]. Al polígono *P* se le llama base de la pirámide y al punto *V* se le llama vértice, cúspide o ápice de la pirámide.



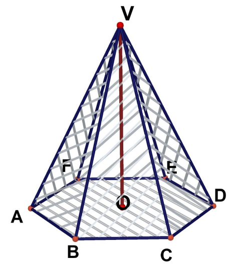
A los triángulos determinados por la cúspide *V* y un lado de la base de la pirámide se les llama caras laterales. Al segmento de recta perpendicular al plano que contiene a la base por *V*, determinado por *V* y el pie de dicha perpendicular se llama altura de la pirámide.
La pirámide se llama triangular, cuadrangular, pentagonal,...n-gonal según que la base sea un triángulo, cuadrilátero, pentágono,...n-ágono. La pirámide triangular se llama tetraedro por ser un poliedro de 4 caras.

4.2.2. Pirámide regular

Definición 4.5: La pirámide se llama regular cuando la base es un polígono regular y la cúspide está en la perpendicular al plano de la base por el centro de esta base, perpendicular llamada eje de la pirámide.

[1]Se puede definir también a la pirámide como el conjunto de todos los puntos de un anguloide situados en el semiespacio αV donde α es un plano que corta a todas sus aristas sin contener a *V*, vértice del anguloide.

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales.



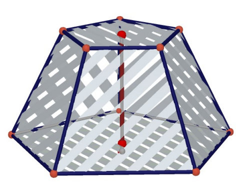
4.2.3. Tronco de pirámide

Definición 4.6: Si se interseca una pirámide por un plano α paralelo al de la base, que separe esta del vértice V, la pirámide queda descompuesta en dos poliedros:

1. el situado en el semiespacio que contiene a V que es otra pirámide, llamada pirámide deficiente y

2. el poliedro situado en el semiespacio opuesto, que se llama *tronco de pirámide*.

Los polígonos de la base de la pirámide y el obtenido de la intersección de dicha pirámide con el plano α se llaman bases del tronco. A cualquier segmento de perpendicular comprendido entre los planos que contienen a dichas bases se lo denomina altura del tronco de pirámide.



Definición 4.7: Si la pirámide de donde se obtiene el tronco es regular, se lo denomina *tronco de pirámide regular.*

Teorema 4.2: Las bases del tronco de pirámide son polígonos semejantes. La razón de semejanza es igual a la que existe entre las alturas de la pirámide total y la deficiente.

4.3. POLIEDROS QUASI–REGULARES CONVEXOS

Existen poliedros convexos que cumplen solo dos de las tres condiciones exigidas por la definición de poliedro regular convexo. A estos poliedros se los denomina quasi–regulares.
Las condiciones de la definición de poliedro regular, son:

X: Sus caras son polígonos regulares.

Y: Sus caras son polígonos iguales.

Z: En cada vértice concurren el mismo número de caras [2].

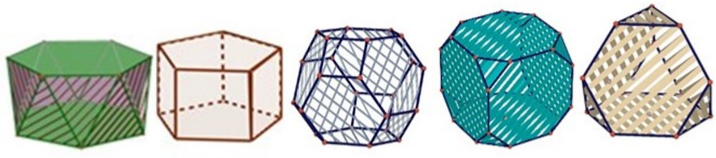
Denominación	condición X	condición Y	condición Z
Quasi–regular Tipo 1	SI	NO	SI
Quasi–regular Tipo 2	SI	SI	NO
Quasi–regular Tipo 3	NO	SI	SI

Quasi–regular Tipo 1
Sus caras son polígonos regulares de dos o más tipos y en cada vértice concurren los mismos polígonos. Cumplen la condición exigida de tener caras regulares y de que en cada vértice concurran los mismos polígonos, pero no la de que todas sus caras sean iguales. Son ejemplos de éstos los prismas con bases polígonos regulares y caras laterales cuadrados, y también los antiprismas[3] con bases polígonos regulares

[2] En los poliedros regulares convexos es equivalente esta condición a considerar la congruencia de sus ángulos poliedros.

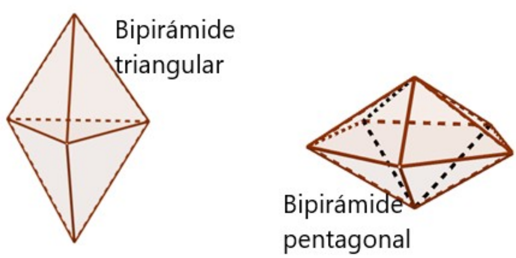
[3] Antiprismas: poliedros de bases poligonales iguales e incluidas en planos paralelos y caras laterales triangulares. En los antiprismas el polígono de una base está girado respecto al polígono de la otra base. “En los polígonos regulares, los vértices de un polígono se corresponden con los puntos medios de los lados del otro” (Guillén, 1991:17).

y caras laterales triángulos equiláteros. Además, se pueden considerar en esta familia los poliedros que se obtienen por truncamientos específicos de los poliedros regulares.



Quasi–regular Tipo 2

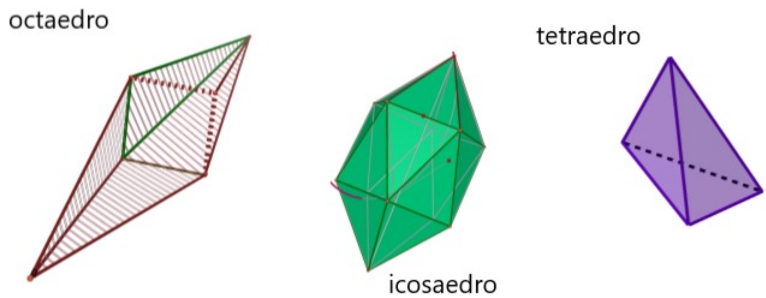
Poliedros cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice no concurren los mismos polígonos. Son ejemplos de estos las bipirámides[4] de caras triángulos equiláteros.



Quasi–regular Tipo 3

Poliedros cuyas caras son polígonos iguales no regulares y en sus vértices concurren los mismos polígonos. Son ejemplos de estos el octaedro, icosaedro, tetraedro con caras triángulos no equiláteros.

[4]Bipirámides: poliedros que “se obtienen cuando se juntan dos pirámides de bases iguales, de manera que se ajusten completamente sus bases” (Guillén, 1991:18).



4.4. POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

EXISTENCIA DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Se ha definido poliedro regular convexo, en el capítulo 2, como el poliedro cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.

Como corolario del Teorema de Euler se puede afirmar que no es posible que existan más de 5 poliedros regulares convexos. Se prueba en esta sección la existencia de dichos poliedros.

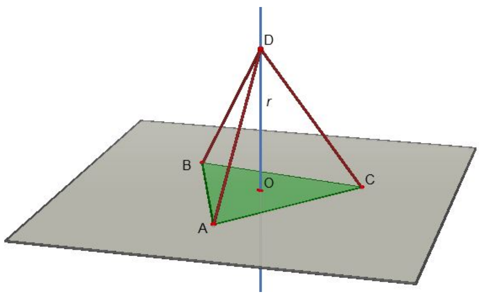
Definición 4.8: El poliedro conjugado **P'** de un poliedro **P** es el que tiene como vértices los centros de las caras[5] del poliedro **P**.

EXISTENCIA DEL TETRAEDRO REGULAR

Sea un triángulo equilátero $\overset{\triangle}{ABC}$ y por el centro O (circuncentro), la perpendicular r al plano que contiene a $\overset{\triangle}{ABC}$. Sea D un punto de r tal que $\overline{AD} = \overline{AB}$ (Queda a cargo del lector justificar la existencia de D). El punto D equidista de A, B y C (T. 3. 55) por lo que

[5] De esta definición se desprende que las caras del poliedro P tienen que tener centro, es decir, un punto que equidiste de los vértices del polígono.

los triángulos $\overset{\triangle}{DAB}$, $\overset{\triangle}{DBC}$ y $\overset{\triangle}{DAC}$ son equiláteros e iguales al triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$. Se ha construido así un TETRAEDRO regular, pues es convexo y en cada vértice concurren tres triángulos equiláteros.



Teorema 4.3: Los ángulos poliedros del tetraedro regular son iguales.

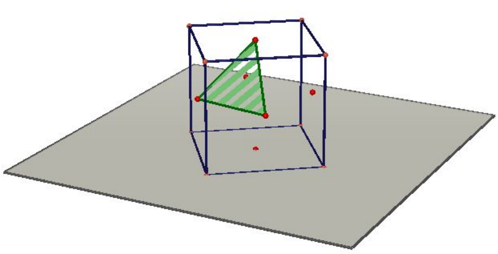
Existencia del HEXAEDRO regular o CUBO

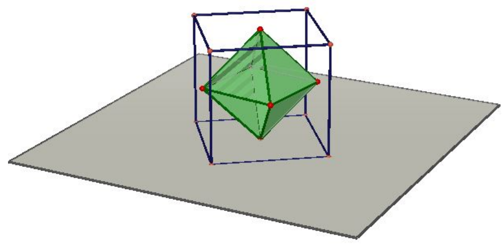
Para construir un cubo basta considerar un ortoedro cuyas tres dimensiones sean iguales.

Teorema 4.4: Los ángulos poliedros del cubo son iguales.

Existencia del OCTAEDRO regular

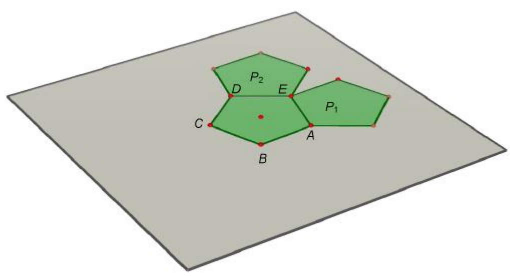
Considerando el poliedro conjugado de un cubo, se obtiene un octaedro regular.

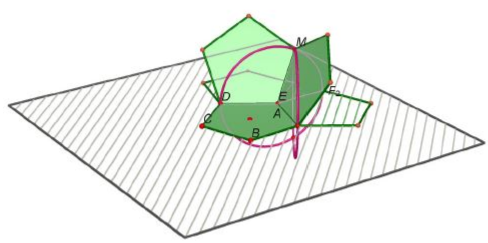




EXISTENCIA DEL DODECAEDRO REGULAR

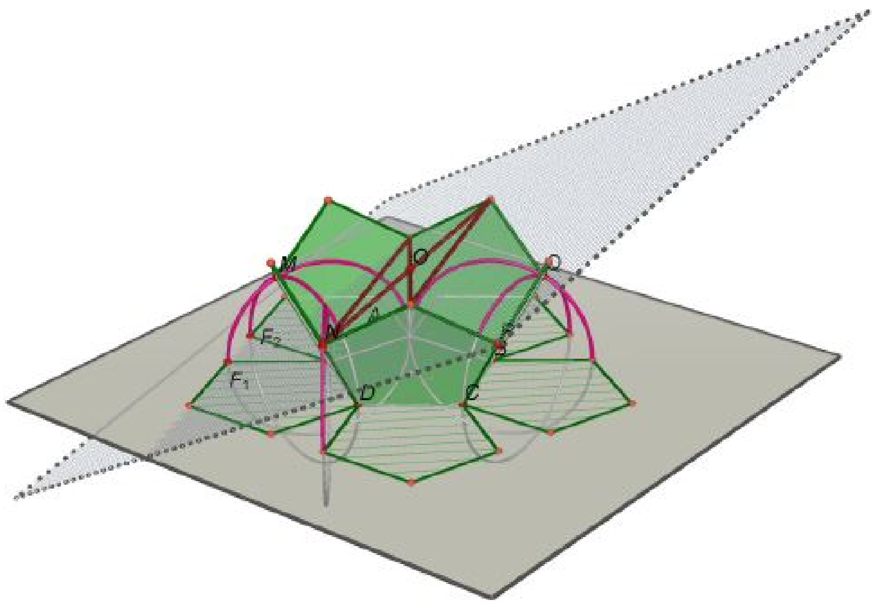
Sea un pentágono regular ABCDE. Por simetrías del mismo, respecto a las rectas que contienen a los lados $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$ se obtienen otros pentágonos regulares P_1 y P_2.



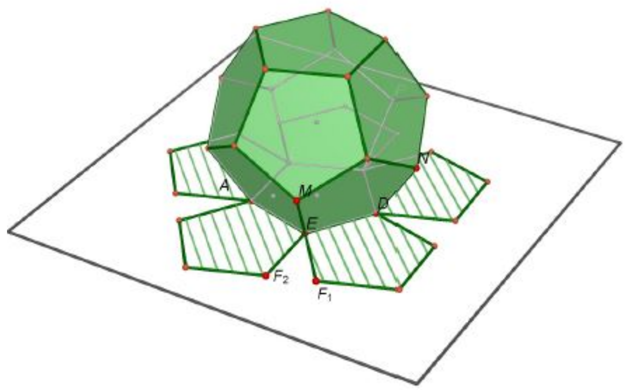


Sean los giros de P_1 y P_2 respecto de las rectas que contienen a los lados $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$ respectivamente. Los vértices de dichos polígonos excepto A y E de P_1 y D y E de P_2 describen circunferencias que se encuentran en planos perpendiculares a $\overleftrightarrow{AE}$ y cuyo centro se encuentra sobre dicha recta y circunferencias en planos perpendiculares a $\overleftrightarrow{DE}$ y cuyo centro se encuentra sobre dicha recta.

Sea M punto de intersección de la circunferencia descripta por F, vértice del pentágono P_1 consecutivo de E, con la circunferencia descripta por el vértice G consecutivo de E en P_2 (Se deja a cargo del lector la prueba de la existencia de M). El pentágono obtenido por el giro de P_1 con eje $\overleftrightarrow{AE}$ y que lleva el punto F a M y el giro de P_2, de eje $\overleftrightarrow{ED}$ que lleva G en M forman con el pentágono ABCDE un ángulo triedro de un dodecaedro regular. Realizando un procedimiento similar en cada vértice del pentágono regular ABCDE se obtiene un casquete poliédrico de seis pentágonos.

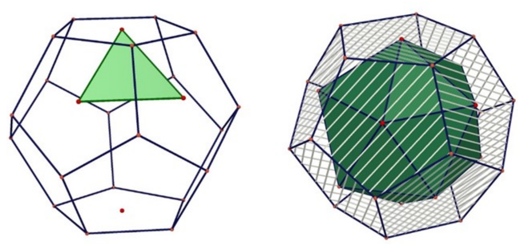


El borde libre del casquete es un decágono alabeado cuyo centro de simetría O se determina considerando un paralelogramo formado por dos de sus lados opuestos (se deja a cargo del lector la existencia y unicidad de este punto). Por simetría central respecto de O del casquete formado por los seis pentágonos regulares queda construido otro casquete de seis pentágonos regulares y por tanto determinado el dodecaedro regular.



EXISTENCIA DEL ICOSAEDRO REGULAR

Considerando el poliedro conjugado de un dodecaedro regular, se obtiene un icosaedro regular.



Teorema 4.5: Los diedros y los anguloides de un poliedro regular son iguales entre sí.

Teorema 4.6: En todo poliedro regular existe un punto, llamado centro, que equidista de sus caras y equidista de sus aristas.

4.5. PARA PROFUNDIZAR

1. Probar que las diagonales del ortoedro son iguales.

2. Probar que los planos perpendiculares por los puntos medios de las seis aristas de un tetraedro concurren en un punto llamado circuncentro.

3. Describir y justificar todos los planos de simetría del cubo y del octaedro.

4. Representar el poliedro que se obtiene tomando como vértices los puntos que dividen a las aristas de un tetraedro regular en tres partes iguales. Describirlo e indicar si es regular. Realiza un desarrollo plano de ambos poliedros.

5. Dada la siguiente proposición: *Las aristas opuestas de una pirámide triangular son ortogonales*. Determinar si la misma es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla. En caso de ser falsa, establecer en qué condiciones es verdadera y demostrarla.

6. ¿Cuántos poliedros quasi–regulares de tipo 2 existen?

7. La diagonal de un poliedro es el segmento que une vértices del poliedro que no pertenecen a la misma cara. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma pentagonal? ¿Las pirámides y bipirámides tienen diagonales? ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro?

8. ¿Qué poliedro se obtiene al truncar un cubo por planos que pasen por los puntos medios de las aristas que concurren en un vértice? (Se realiza el truncamiento en cada vértice) ¿Qué relación existe entre la arista del cubo y la del poliedro obtenido por truncamiento? ¿Podrías obtener este poliedro partiendo de otro poliedro regular? ¿Cómo realizarías el truncamiento?

9. Explorar con un software de geometria dinámica (SGD) el teorema 4.5 y el teorema 4.6.

10. Realizar empleando un SGD la construcción del dodecaedro regular.

Capítulo 5

Figuras 3D: No Poliedros

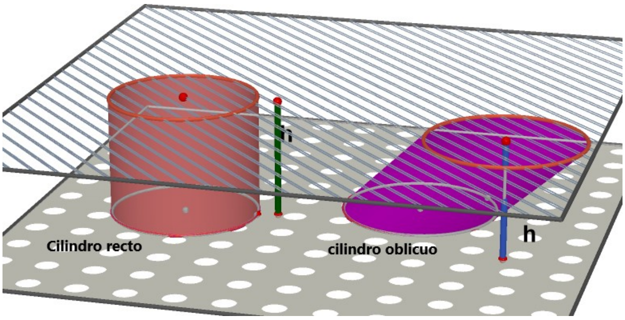
Algunos textos definen a las figuras que se establecen en este capítulo como cuerpos redondos o cuerpos de revolución. Se prefiere denominarlas "figuras"para mantener la coherencia del texto, en particular figuras no poliédricas. La denominación de cuerpos que ruedan, que se encuentra en diversos textos, no se considera apropiada dado que el requisito que ruede, externo a la geometría, no caracteriza a estas figuras. Por ejemplo, un dodecaedro rueda si se lo arroja sobre una superficie adecuada y con un impulso conveniente a pesar de ser poliedro.

Particularmente en este capítulo se focaliza en algunas figuras no poliédricas: cilindro circular [1], cono circular, tronco de cono circular y esfera.

5.1. Figuras no poliédricas desarrollables

5.1.1. Definición y elementos de cilindro circular

Definición 5.1: Cilindro circular
Sean π y π' dos planos paralelos, *m* una recta secante a π y **C** un círculo en π. Por cada punto *A* de **C** se tiene a *m* o a una única recta paralela a *m* que corta en A' al plano π'. Se llama cilindro a la figura determinada por todos los puntos de los segmentos $\overline{AA'}$, para todos los puntos *A* de **C**.



[1]Se consideran solamente en este texto cilindros circulares, conos circulares y troncos de conos circulares, es decir, figuras cuyas bases son círculos.

- Al círculo **C** y al círculo determinado por la intersección de las rectas paralelas a m (o m) por los puntos de **C** con π' se los llama bases del cilindro.

- A cualquier segmento de recta perpendicular a los planos que contienen a las bases del cilindro y cuyos extremos pertenecen a dichos planos, se lo llama altura del cilindro.

- A cualquier segmento de recta paralela a m (o m) determinado por puntos de las circunferencias de las bases se denomina generatriz del cilindro.

- El radio de los círculos bases se denomina radio del cilindro.

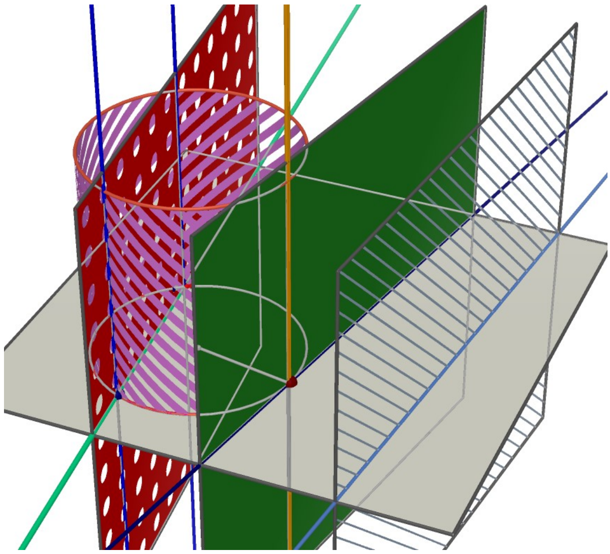
- Todos los puntos de las generatrices del cilindro determinan su superficie lateral.

Definición 5.2: Se llama recto al cilindro si los planos de las bases son perpendiculares a la recta que contiene a una generatriz del cilindro. La recta que pasa por los centros de las bases se denomina eje del cilindro.

Definición 5.3: El cilindro donde las rectas que contienen a las generatrices no son perpendiculares a los planos de las bases se llama cilindro circular oblicuo.

Planos secantes, tangentes y exteriores al cilindro circular recto

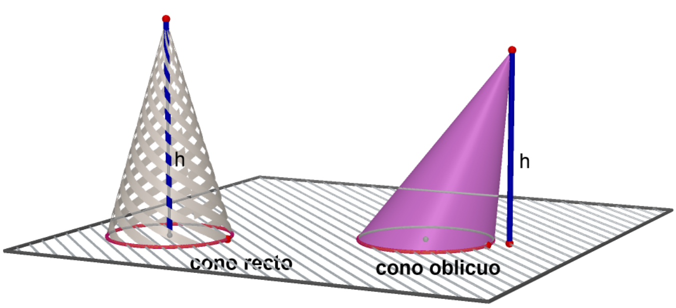
Sea π un plano paralelo o que contiene al eje de un cilindro circular recto. Dicho plano tiene en común con la superficie lateral del cilindro dos generatrices, una o ninguna según que la distancia del plano al eje sea menor, igual o mayor a un radio, respectivamente. A los planos que tienen dos generatrices en común se los llama secantes, a los que tienen una generatriz en común se los llama tangente y exterior a los que no tienen en común generatrices con el cilindro.



Teorema 5.1: Por una recta paralela al eje y exterior a un cilindro circular recto pasan dos planos tangentes al cilindro.

5.1.2. Definición y elementos del cono circular

Definición 5.4: Sean π un plano, **C** un círculo en π y *V* un punto exterior a π . El conjunto de los puntos de todos los segmentos $\overline{AV}$ para todos los puntos *A* de **C** se llama *cono circular*.



- Al punto V se lo denomina vértice del cono, ápice o cúspide.

- Al círculo **C** se lo denomina base del cono y al radio de este círculo, radio del cono.

- Al segmento de recta perpendicular al plano que contiene a la base por V, cuyos extremos son V y el pie de dicha perpendicular, se lo llama altura del cono.

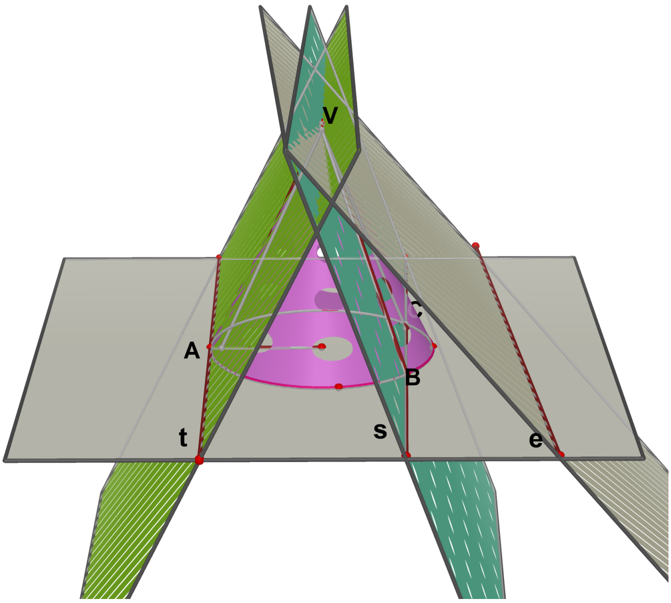
- A todo segmento de recta determinado por V y un punto de la circunferencia de la base se denomina generatriz del cono.

- Todos los puntos de las generatrices del cono determinan su superficie lateral.

Definición 5.5: Se llama recto al cono si el vértice V está en la perpendicular al plano que contiene a la base por el centro de la base. La recta que pasa por el centro de la base del cono recto y por el vértice V se la llama eje del cono y al ángulo plano formado por el eje y una de las generatrices se llama *semiabertura* del cono.

Definición 5.6: Se llama oblicuo al cono cuando no es recto.

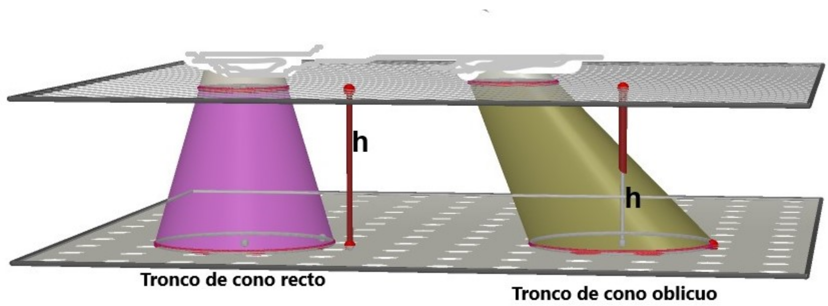
Planos secantes, tangentes y exteriores al cono circular recto
Sea π un plano que pasa por el vértice V de un cono circular recto no paralelo al plano de la base y sea r la recta intersección entre este plano y el que contiene a la base del cono. La recta r puede tener en común con la circunferencia de la base, dos puntos, un punto o ningún punto y por tanto el plano π tendrá en común con la superficie lateral del cono dos generatrices, una o ninguna respectivamente, según que el ángulo que el plano π forme con el eje sea menor, igual o mayor a la semiabertura del cono. A los planos que tienen dos generatrices en común se los llama *secantes*, a los que tienen solo una generatriz en común se los llama *tangentes* y *exteriores* a los que no tienen en común generatrices del cono.



Teorema 5.2: La sección producida en un cono circular por un plano paralelo a la base es un círculo y la razón de semejanza entre este círculo sección y el de la base es igual a la razón de distancias de *V* al plano secante y al plano de la base.

5.1.3. Definición y elementos del tronco de cono circular

Definición 5.7: Dado un cono circular de vértice *V* y un plano β paralelo al plano α que contiene a la base del cono, con β entre α y *V*. Sea **C** la base del cono y **C'** la intersección de β con el cono. El cono queda dividido por β en dos figuras, una de ellas en el semiespacio que contiene a *V*, que es otro cono circular de base **C'**; y otra figura en el semiespacio opuesto al que contiene a *V* que se llama tronco de cono circular.



- A los círculos **C** y **C’** se los llama bases del tronco de cono y a los radios de estos círculos, radios del tronco.

- A cualquier segmento de recta perpendicular a los planos que contienen a las bases del tronco y cuyos extremos pertenecen a dichos planos, se lo llama altura del tronco de cono.

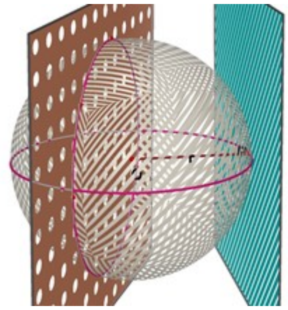
- A cualquier segmento de generatriz del cono con extremos en las circunferencias de las bases del tronco se los llama generatriz del tronco de cono.

- Todos los puntos de las generatrices del tronco determinan su superficie lateral.

5.2. Figuras no desarrollables

5.2.1. Definición y elementos de la superficie esférica y de la esfera

Definición 5.8: Superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos del espacio que están a igual distancia de un punto fijo *O* una distancia *r* ($r > 0$).



- Al punto *O* se lo llama centro de la superficie esférica y a cualquier segmento determinado por *O* y un punto de la superficie se lo llama radio. La longitud de dicho segmento es *r*.
- Toda recta y todo plano que pasan por el centro se llaman diametrales.
- La sección producida por un plano diametral se llama circunferencia máxima.
- La sección producida por un plano cuya distancia al centro es mayor que 0 pero menor que *r*, se llama circunferencia menor.
- Un plano que está a una distancia *r* del centro se llama plano tangente a la superficie esférica.

Definición 5.9: Esfera es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia a *O* es menor o igual que *r* ($r > 0$).

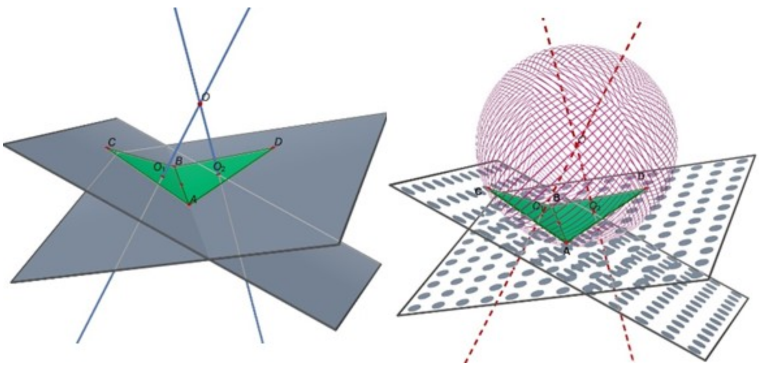
- Al punto O se lo llama centro de la esfera y a cualquier segmento determinado por O y un punto de la superficie esférica determinada por esa esfera se lo llama radio. La longitud de dicho segmento es *r*.
- Todo plano diametral divide a la esfera en dos partes llamados hemisferios o semiesfera.

Teorema 5.3: Dos superficies esféricas (dos esferas) de igual radio son congruentes.

Teorema 5.4: Los hemisferios determinados por un plano diametral son congruentes.

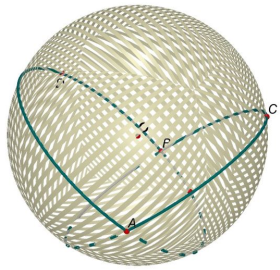
5.2.2. Determinación de la superficie esférica

Teorema 5.5: Por cuatro puntos no coplanares pasa una y solo una superficie esférica.

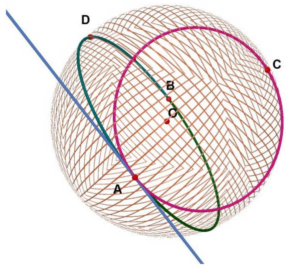


Demostración: Sean A, B, C y D cuatro punto no coplanares. Sea el plano perpendicular a $\overline{AB}$ por su punto medio M. Este plano contiene a las mediatrices de $\overline{AB}$ en el plano determinado por A, B y C, y en el plano determinado por A, B y D, y por tanto contiene a los circuncentros O_1 y O_2 de los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{ABD}$ respectivamente. Dicho plano también contiene a la recta perpendicular al plano que pasa por A, B y C por el circuncentro de $\overset{\triangle}{ABC}$, puesto que esta recta es ortogonal a toda recta del plano ABC. Asimismo, contiene a la perpendicular al plano que pasa por A, B y D por el circuncentro de $\overset{\triangle}{ABD}$. Estas rectas se cortan en un punto O (Queda a cargo del lector justificar la existencia y unicidad de O). O equidista de A, de B, de C y de D por T. 3. 55. Por tanto existe una única superficie esférica de centro O que pasa por los puntos A, B, C y D.

Teorema 5.6: (Corolario del Teorema 5.5) Por dos circunferencias secantes no coplanarias pasa una superficie esférica y solo una.



Teorema 5.7: (Corolario del Teorema 5.5) Por dos circunferencias no coplanarias que tienen un punto común A y la tangente común en A, pasa una superficie esférica y solo una.



Teorema 5.8: (Corolario del Teorema 5.5) Por una circunferencia y un punto exterior al plano de esa circunferencia pasa una superficie esférica y solo una.

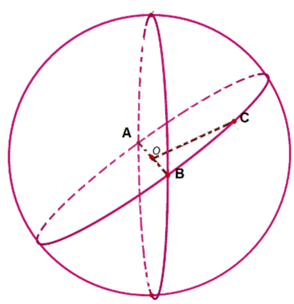
5.3. Geometría en la superficie esférica

Cuando se estudia la geometría euclídea se establece que existen conceptos que no se definen, como por ejemplo el punto, la recta y el plano. Si bien Euclides caracteriza a estos elementos, todos tenemos una *idea* sobre estos conceptos.
Se desarrolla en este apartado una aproximación a la geometría particular que surge a partir de la discusión generada por el *quinto postulado* [2]. Se considera en esta sección el espacio

[2] Axioma de paralelismo.

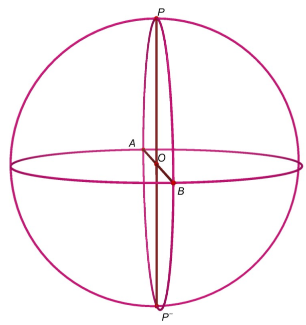
representado por una superficie esférica dada invariable y se toman figuras trazadas sobre esta superficie.

Definición 5.10: Distancia esférica entre dos puntos *B* y *C* de la superficie esférica es el menor de los arcos de circunferencia máxima que tienen sus extremos en ellos. Si los puntos son diametralmente opuestos (A y B) hay infinitas circunferencias máximas que pasan por dichos puntos.

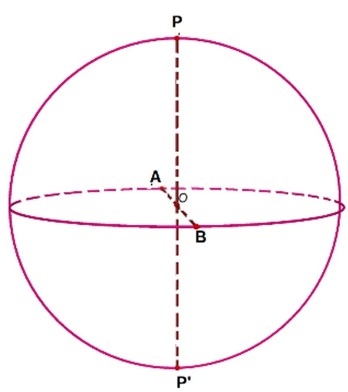


Como se considera invariable la superficie esférica cuyo centro es *O*, las distancias esféricas son proporcionales a los ángulos que las proyectan desde el centro de la esfera, por lo tanto, se expresa la medida de $\overset{\frown}{CB}$ por la del ángulo $C\hat{O}B$.

Definición 5.11: Dos circunferencias máximas se cortan en los extremos del diámetro común $\overline{AB}$ por estar incluidas en planos que pasan por *O* y la superficie esférica queda dividida en cuatro regiones que se denominan husos o ángulos esféricos. Cada una de estas regiones están comprendidas en los cuatro diedros que los planos en los que están incluidas determinan. La medida de cada uno de estos diedros se toma también como la medida del ángulo esférico o abertura del huso. Dos circunferencias máximas que formen un ángulo recto son perpendiculares.



Definición 5.12: Se llaman polos de una circunferencia C a los extremos del diámetro de la recta perpendicular al plano que incluye a dicha circunferencia.



Propiedades:

a) Todas las circunferencias incluidas en planos paralelos tienen polos comunes.

b) Todas las circunferencias máximas son iguales.

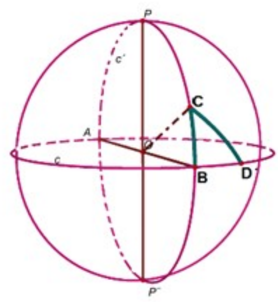
c) Toda circunferencia máxima biseca a la esfera.

d) Dos circunferencias máximas se bisecan entre sí.

e) Dos circunferencias máximas perpendiculares pasan cada una de ellas por los polos de la otra.

Definición 5.13: La distancia[3] de un punto *A* a una circunferencia máxima **C** es el arco de circunferencia máxima **C’**, determinada por el punto *A* y los polos de **C**, de extremos el punto *A* y el punto de intersección de **C’** con **C**.

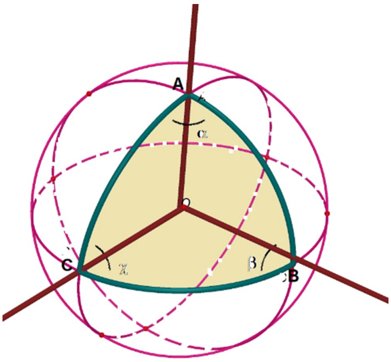
El arco de circunferencia máxima que define esta distancia es el menor de los arcos entre el punto *A* y un punto de la circunferencia máxima **C** (Queda a cargo del lector demostrar esta proposición).

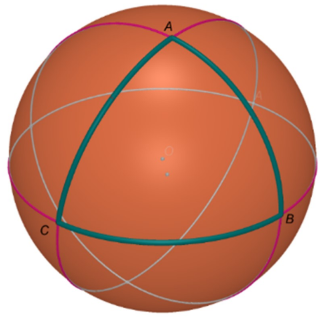


5.3.1. Definición y elementos del triángulo esférico

Definición 5.14: La intersección de un triedro cuyo vértice es el centro de la superficie esférica con dicha superficie define un triángulo esférico. Así un triángulo esférico es la porción de superficie esférica limitada por tres arcos de circunferencias máximas.

[3]Corresponde a la distancia de un punto a una recta en la geometría euclídea.

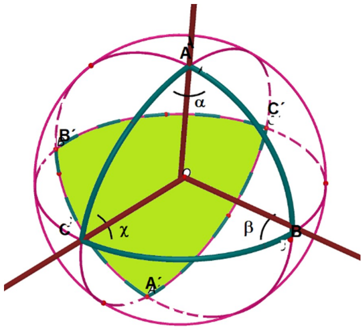




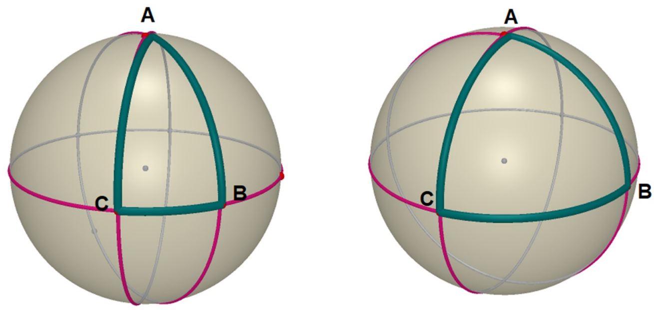
- Los puntos A, B y C de intersección de las aristas del triedro con la superficie esférica son los vértices del triángulo esférico.
- Las secciones de las caras del triedro con la superficie esférica son arcos de circunferencias máximas $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ y $\widehat{CA}$, llamados lados del triángulo.
- Cada diedro del triedro (α, β y γ) es un ángulo del triángulo esférico.

Teorema 5.9: Los lados de un triángulo esférico son menores a una semicircunferencia.

Definición 5.15: Sean A', B' y C' los puntos diametralmente opuestos a A, B y C respectivamente, vértices del triángulo esférico ABC, el triángulo esférico simétrico es el $A'B'C'$.



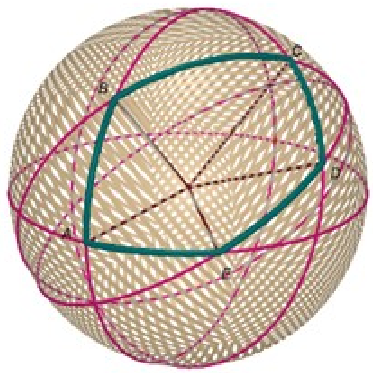
Definición 5.16: Un triángulo esférico que tiene dos lados iguales se denomina isósceles, si tiene los tres lados iguales equilátero. Es rectángulo si tiene un ángulo recto, birrectángulo si tiene dos y trirrectángulo si tiene tres. Un triángulo trirrectángulo se llama octante de la superficie esférica.



De la definición de triángulo esférico y de los criterios de congruencia de triedros se enuncian los siguientes criterios de congruencia de triángulos esféricos:

- Dos triángulos esféricos que tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, son iguales.
- Dos triángulos esféricos que tienen iguales un lado y los dos ángulos contiguos iguales, son iguales.
- Dos triángulos esféricos de lados respectivamente iguales, son iguales.
- Dos triángulos esféricos de ángulos respectivamente iguales, son iguales.

Definición 5.17: Un polígono esférico convexo es la sección producida en la superficie esférica por un ángulo poliedro convexo cuyo vértice es el centro de la superficie esférica.



A cada cara del anguloide corresponde un lado del polígono esférico (arco de circunferencia máxima) y a cada diedro del ángulo poliedro un ángulo del polígono esférico.

5.3.2. Similitudes y diferencias entre la geometría euclídea y la geometría esférica

Es posible observar la similitud entre ciertas propiedades de la geometría en la superficie esférica y la geometría euclídea plana, si se establece una relación entre algunos conceptos: circunferencia máxima y recta; arco de circunferencia máxima y segmento; ángulo esférico y ángulo plano, entre otros. También en las relaciones de igualdad y desigualdad de los lados de un triángulo y en tres de los criterios de igualdad de triángulos esféricos con tres de los criterios de congruencia de triángulos planos.

Las diferencias que se pueden establecer son: dos rectas secantes del plano solo pueden tener un punto en común, en la superficie esférica dos circunferencias máximas tienen siempre dos puntos en común. Dos rectas perpendiculares a una recta en el plano son paralelas pero en la superficie esférica dos circunferencias máximas perpendiculares a una tercera se cortan en los polos de esta. No existe el paralelismo entre circunferencias máximas.

Dos triángulos con sus ángulos iguales en la geometría plana son semejantes, en la geometría en la superficie esférica son iguales. El lugar geométrico de los puntos de un semiplano equidistantes de una recta, es otra recta paralela, en la geometría euclídea. En la superficie esférica ya no es una recta (circunferencia máxima) sino es una circunferencia menor.
Las diferencias entre ambas geometrías tienen su origen en la noción de paralelismo presente en todos los conceptos mencionados.
Las propiedades de las figuras trazadas sobre la superficie esférica proporcionan un ejemplo de geometría que puede estudiarse partiendo de los conceptos punto y recta esférica en la que no interviene el carácter abierto de la recta, modificando esto los axiomas fundamentales, particularmente, los de determinación de una recta y ordenación de sus puntos y además la supresión del axioma de paralelismo que constituyen un ejemplo de geometría no euclídea.

5.4. PARA PROFUNDIZAR

1. Dada la proposición: “Por un punto exterior a un cilindro circular recto pasan dos planos tangente”. Determinar si es verdadera o falsa.

2. Tres esferas iguales de diámetro igual a 10 cm están colocadas en el interior de una esfera de modo que todas ellas son tangentes. Hallar la distancia entre el plano que pasa por los centros de las esferas iguales y el centro de la esfera que las contiene sabiendo que esta última tiene un diámetro de 60 cm.

3. Trazar los planos tangentes a una esfera que sean: i) paralelos a una recta dada. ii) perpendiculares a un recta dada.

4. Describir y representar la figura engendrada por un triángulo equilátero de lado **a** al girar $360°$ alrededor del eje **e**,

siendo **e** exterior al triángulo, paralela a uno de sus lados e incluida en el plano del triángulo.

5. Conociendo los radios de dos secciones paralelas de una esfera y la distancia entre las mismas, hallar el radio de la esfera.

6. Demostrar que el lugar de los puntos de una esfera equidistantes de dos puntos A y B dados sobre ella, es el círculo máximo perpendicular en el punto medio del arco de cincunferencia máxima que une los dos puntos dados.

7. Representar el cilindro equilátero (g= 2r) de 10 cm de altura y la esfera inscripta en él. Representar la sección producida en cada superficie por un plano perpendicular a las generatrices del cilindro y cuya distancia al centro de la esfera es de 3 cm.

8. Dados dos planos α y β, con $\alpha \bigcap \beta = t$. Sean $A \in \alpha$, $B \in \beta$ y $A \notin t$, $B \notin t$. Hallar, si existe, un punto $P \in t$ tal que $A\hat{P}B = 90^o$.

Capítulo 6

Medida en 3D

La geometría también se ocupa de estudiar el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, medición de ángulos, entre otros aspectos. Desde los orígenes de la humanidad, el hombre comparó objetos o eventos y para esto creó el número. Posteriormente en el acto de comparar distinguió diferencias entre los objetos a cotejar y estableció un tercer objeto para realizar esta comparación: la unidad de medida. Esta comparación, llamada medición es una asignación de números a objetos o eventos de acuerdo con reglas establecidas. En este capítulo se trabajan algunos de estos aspectos, particularmente en 3D.
Observación: En adelante, cuando se enuncie el producto de dos segmentos deberá entenderse como tal el número producto de sus medidas respecto de una misma unidad.

6.1. MÉTRICA DE ÁNGULOS EN 3D

6.1.1. PROPIEDADES MÉTRICAS DE CARAS Y DIEDROS DE UN TRIEDO

Teorema 6.1: Toda cara de un triedro es menor que la suma de las otras dos.

H) triedro de aristas $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ y de vértice V

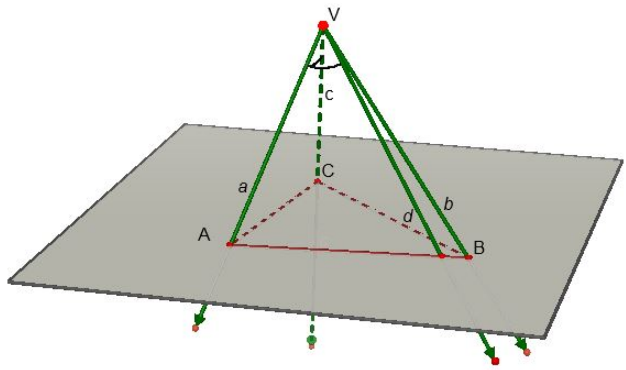
T) $\hat{ab} < \hat{ac} + \hat{bc}$; $\hat{ab} < \hat{ac} + \hat{bc}$ y $\hat{bc} < \hat{ac} + \hat{ab}$

D) Se demuestra el teorema para la cara mayor. Sea $\hat{ab}$ la cara mayor [1]. Se considera una semirrecta $\overrightarrow{d} \subset pl(ab)$ tal que $\hat{ad} = \hat{ac}$.
Sea $A \in \overrightarrow{a}$, $B \in \overrightarrow{b}$ y sea el segmento $\overline{AB}$ con $\overline{AB} \subset \hat{ab}$. Sea $\{D\} = \overrightarrow{d} \cap \overline{AB}$. Sobre la semirrecta $\overrightarrow{c}$ sea C tal que $\overline{VC} = \overline{VD}$.
Si comparamos los triángulos $A\overset{\triangle}{V}D$ y $A\overset{\triangle}{V}C$, tenemos:
$A\overset{\triangle}{V}D = A\overset{\triangle}{V}C$ ($\hat{ac} = \hat{ad}$, $\overline{VC} = \overline{VD}$ y $\overline{VA} = \overline{VA}$) por lo tanto $\overline{AC} = \overline{AD}$ y como en el triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$:

$$\overline{BC} > \overline{AB} - \overline{AC}$$

$$\overline{BC} > \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{BD}$$

[1]Si el triedro tiene dos caras iguales, mayores que la tercera o las tres caras iguales esta demostración no es válida, pero el teorema es trivial.



Además los triángulos $\overset{\triangle}{VBC}$ y $\overset{\triangle}{VBD}$ tienen $\begin{cases} \overline{VB} = \overline{VB} \\ \overline{VD} = \overline{VC} \\ \overline{BC} > \overline{DB} \end{cases}$

es decir, tienen dos lados respectivamente iguales y desigual el tercer lado, podemos decir que por teorema de triángulos incongruentes:

$\hat{bc} > \hat{db}$

$\hat{bc} > \hat{ab} - \hat{ac} \quad \Rightarrow \quad \hat{bc} + \hat{ac} > \hat{ab}$

Teorema 6.2: (Corolario del T.6.1) Toda cara de un triedro es mayor que la diferencia de las otras dos.

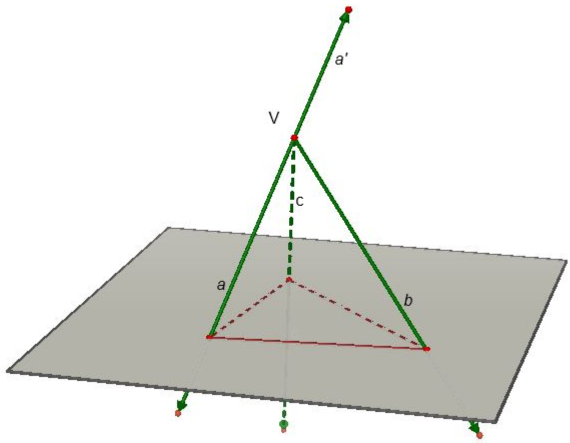
Teorema 6.3: La suma de las caras de un triedro es menor que 4 rectos.

H) triedro de aristas $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$

T) $\hat{ab} + \hat{bc} + \hat{ca} \quad < 4\text{R}$

D) Sea la semirrecta $\overrightarrow{a'}$ opuesta a $\overrightarrow{a}$ y por el T.6.1 en el triedro de aristas $\overrightarrow{a'}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \overset{\wedge}{bc} &< \overset{\wedge}{a'b} + \overset{\wedge}{a'c} \\ \overset{\wedge}{bc} &< 2R - \overset{\wedge}{ab} + 2R - \overset{\wedge}{ca} \\ \overset{\wedge}{bc} + \overset{\wedge}{ab} + \overset{\wedge}{ca} &< 4R \end{aligned}$$



Teorema 6.4: La suma de los diedros de un triedro está comprendida entre dos y seis rectos.

H) triedro de aristas $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ y α, β y γ los diedros de arista $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ respectivamente.

T) $2R < \alpha + \beta + \gamma < 6R$

D) Por el T.6.3 aplicado al triedro polar de *abc* se tiene que:

$$0 < a'\hat{}b' + b'\hat{}c' + c'\hat{}a' < 4R \qquad (1)$$

Por propiedad de triedro polar

$$\begin{aligned} \gamma + a'\hat{}b' &= 2R \\ \alpha + b'\hat{}c' &= 2R \\ \beta + c'\hat{}a' &= 2R \end{aligned}$$

Reemplanzando en (1)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & < & (2R-\alpha)+(2R-\beta)+(2R-\gamma) & < & 4R \\ -6R & < & -(\alpha+\beta+\gamma) & < & -2R \\ 2R & < & \alpha+\beta+\gamma & < & 6R \end{array}$$

Teorema 6.5: El menor de los diedros del triedro difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.

H) α, β, γ diedros del triedro con $\alpha < \beta \ \wedge \ \alpha < \gamma$

T) $\beta + \gamma - \alpha < 2R$

D) Por el T.6.1 aplicado al triedro polar se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \widehat{b'c'} & < & \widehat{a'c'} + \widehat{a'b'} \\ 2R - \alpha & < & 2R - \beta + 2R - \gamma \\ \beta + \gamma - \alpha & < & 2R \end{array}$$

De las propiedades demostradas se pueden deducir las siguientes de triángulos esféricos.

a) La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos.

b) Cada lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

c) La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis [2].

d) El menor de los ángulos de un triángulo esférico difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.

e) En todo triángulo esférico, a mayor lado se opone mayor ángulo.

6.1.2. PROPIEDADES MÉTRICAS DE LAS CARAS Y TRIEDROS DE UN ANGULOIDE

Teorema 6.6: Cada cara de un anguloide *abcde* es menor que la suma de las restantes.

H) *abcde* anguloide

T) $\widehat{ab} < \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} + \widehat{ea}$

[2] La suma de los ángulos interiores de un triángulo en la geometría plana es constante e igual a dos rectos; en la geometría en la superficie esférica no es constante y es mayor a dos rectos y menor a seis.

D) Si se considera el T.6.3 en los triedros *abc*, *acd*, *ade* se tiene que

$$\begin{array}{ccc} \widehat{ab} & < & \widehat{bc} + \widehat{ac} \\ \widehat{ac} & < & \widehat{cd} + \widehat{da} \\ \widehat{ad} & < & \widehat{de} + \widehat{ea} \\ \hline \widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{ad} & < & \widehat{bc} + \widehat{ac} + \widehat{cd} + \widehat{ad} + \widehat{de} + \widehat{ea} \\ \widehat{ab} & < & \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} + \widehat{ea} \end{array}$$

Teorema 6.7: La suma de las caras de un anguloide convexo es menor que cuatro rectos.

Teorema 6.8: La suma de los diedros α, β, γ... de un anguloide convexo de n caras está comprendida entre $2n - 4$ y $2n$ ángulos rectos.

H) *abcde*... anguloide convexo.
α, β, γ... diedros del anguloide convexo.

T) $(2n - 4)R < \alpha + \beta + \gamma + ... < 2Rn$

D) Si se aplica el T.6.7 al anguloide polar se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} 0 & < & (2R - \alpha) + (2R - \beta) + (2R - \gamma) + ... & < & 4R \\ 2Rn & > & \alpha + \beta + \gamma + ... & > & -4R + 2Rn \\ (2n - 4)R & < & \alpha + \beta + \gamma + ... & < & 2Rn \end{array}$$

6.2. Área de figuras en 3D

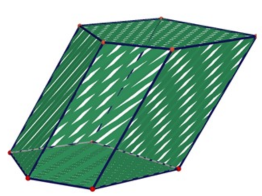
Este aspecto de la medida es abordado en la geometría plana, por esa razón todas las figuras que puedan desarrollarse requerirán, para el cálculo de su área, de nociones conocidas.

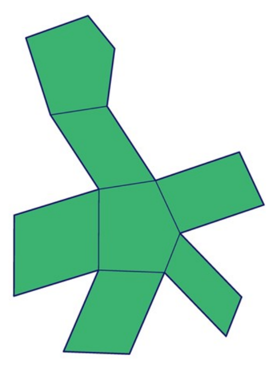
6.2.1. Área de figuras poliédricas

Prisma, pirámide y tronco de pirámide

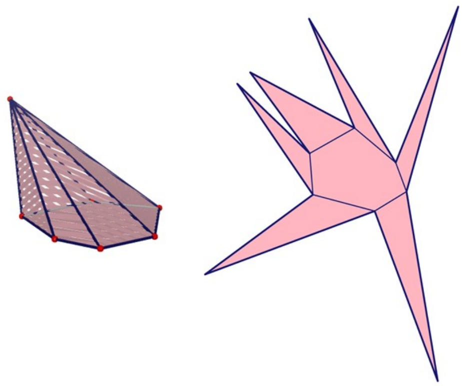
Para el cálculo del área de estas figuras se considera la suma de las áreas de los polígonos que las forman. Para ello, es importante reconocer al menos un desarrollo plano de la figura cuya área se pretende calcular.

Área del Prisma: El área de un prisma es igual al doble del área del polígono de la base más el área de los *n* paralelogramos que forman la superficie lateral del mismo.

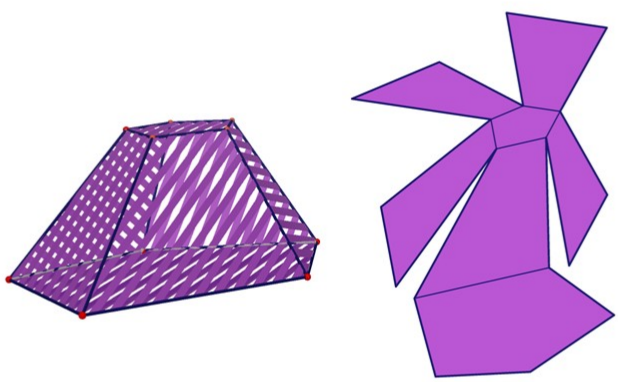




Área de la Pirámide: El área de una pirámide es igual a la suma del área del polígono de la base más el área de los *n* triángulos que forman la superficie lateral de la misma.

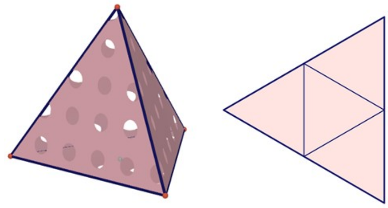


Área del Tronco de Pirámide: El área del tronco de pirámide es igual a la suma de las áreas de las bases más el área de los *n* trapecios que forman el área lateral del mismo.

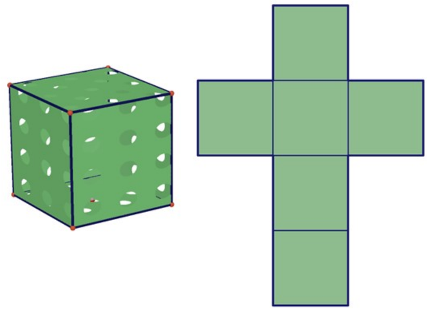


ÁREA DE POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

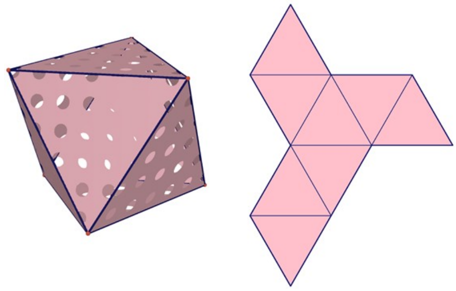
Área del Tetraedro regular: El área del tetraedro regular es igual a cuatro veces el área de una de sus caras (triángulo equilátero).



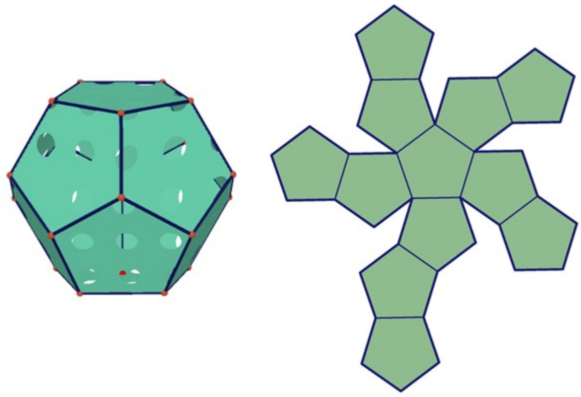
Área del Hexaedro regular: El área del cubo es igual a seis veces el área de una de sus caras (cuadrado).



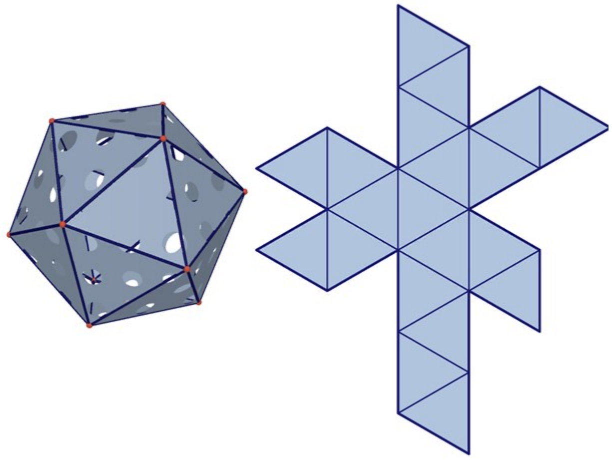
Área del Octaedro regular: El área del octaedro regular es igual ocho veces el área de una de sus caras (triángulo equilátero).



Área del Dodecaedro regular: El área del dodecaedro regular es igual doce veces el área de una de sus caras (pentágono regular).



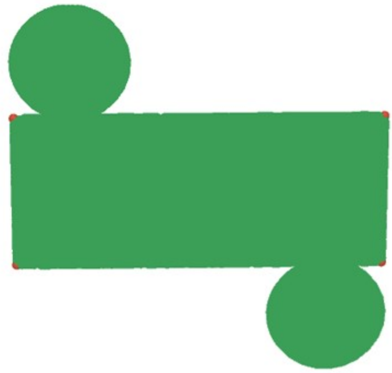
Área del Icosaedro regular: El área del icosaedro regular es igual veinte veces el área de una de sus caras (triángulo equilátero).



6.2.2. ÁREAS DE FIGURAS NO POLIÉDRICAS DESARROLLABLES

CILINDRO CIRCULAR RECTO, CONO CIRCULAR RECTO Y TRONCO DE CONO CIRCULAR RECTO

Área del cilindro circular recto: el área del cilindro circular recto es igual al doble del área del círculo de la base más el área del rectángulo cuyas dimensiones son la longitud de la circunferencia del círculo de la base y la altura del cilindro.



Si *r* es el radio de la base y *h* la medida de la altura:

Área lateral= $2\pi rh$, **Área total**= $2\pi rh + 2\pi r^2$

Área del cono circular recto: el área del cono circular recto es igual al área del círculo de la base más el área del sector circular cuya longitud de arco es la longitud de la circunferencia del circulo de la base y el radio del mismo es la generatriz del cono.

Si *r* es el radio de la base y *g* la medida de la generatriz:

Área lateral= πrg, **Área total**= $\pi rg + \pi r^2$

Área del tronco de cono circular recto: el área del tronco de cono circular recto es igual a la suma de las áreas de los círculos de las bases más el área del trapecio circular que tiene por longitudes de arco las correspondientes a cada base del tronco y cuya altura es la generatriz del tronco.

Si r_1 y r_2 son los radios de las bases y g la medida de la generatriz:

Área lateral= $\pi(r_1 + r_2)g$, **Área total**= $\pi(r_1 + r_2)g + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

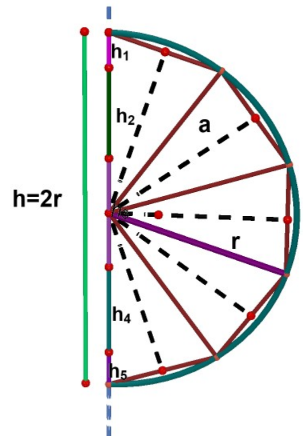
6.2.3. ÁREA DE FIGURAS NO DESARROLLABLES

SUPERFICIE ESFÉRICA, HUSO Y TRIÁNGULO ESFÉRICO

Área de la superficie esférica: Para obtener el área de la superficie esférica se pensará la misma como el área de la figura que se obtiene al girar una poligonal regular[3] alrededor

[3]Se denomina poligonal regular a la poligonal formada por cuerdas iguales de una semicircunferencia. A la distancia común del centro a sus lados se llama apotema de la poligonal **a** y h es la suma $h_1 + h_2 + ... + h_n$ de las proyecciones de los lados de la poligonal sobre el eje.

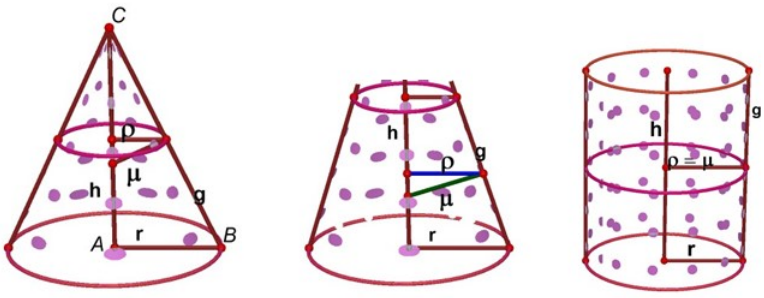
de un eje que pasa por su centro y cuyos extremos están en el mismo.



Esta poligonal al girar alrededor del eje describe un cono, un tronco de cono o un cilindro según el lado de la misma sea secante, no paralela y no secante o paralela respectivamente a dicho eje.

Para hacer esta deducción se escribe la fórmula del área lateral de estas figuras en función de los elementos disponibles al realizar este giro. Se expresan las fórmulas para obtener el área lateral del cilindro circular recto, cono circular recto y el tronco de cono circular recto en función del radio de la sección media[4] ρ y el segmento de mediatriz μ de la generatriz comprendido entre esta y el eje de la superficie considerada.

[4]La sección media es la intersección de un plano perpendicular por el punto medio de la altura de la figura.



En el caso del cono: Sea A el centro de la circunferencia de la base. B un punto de dicha circunferencia y C el vértice del cono. Sea P el centro de la circunferencia media, Q un punto de la circunferencia media y R el punto de intersección de la mediatriz de la generatriz del cono con el eje del mismo. Los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{BAC}$ y $\overset{\triangle}{QPR}$ son semejantes por tener ángulos congruentes $\overset{\wedge}{BAC} = \overset{\wedge}{QPR}$, por ser ángulos rectos, $\overset{\wedge}{BCA} = \overset{\wedge}{PQR}$ y $\overset{\wedge}{ABC} = \overset{\wedge}{QRP}$ por ser ángulos de lados perpendiculares. Por tanto, sus lados homólogos son proporcionales: $\frac{\overline{AC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{RQ}}$, es decir $\frac{h}{\rho} = \frac{g}{\mu}$ o $h.\mu = g.\rho$ (h y g son la altura y generatriz del cono respectivamente).

El mismo razonamiento puede realizarse para el tronco de cono circular recto.
En el cilindro circular recto $r = \rho$ y $g = h$.

De las fórmulas expresadas en el apartado 6.2.2, y las relaciones obtenidas anteriormente se pueden reescribir como:

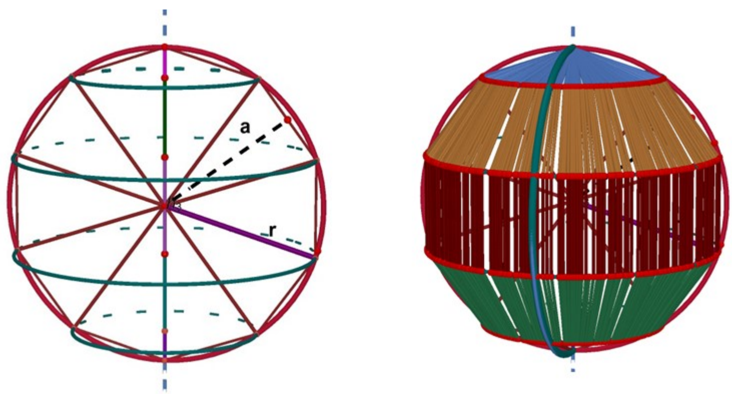
Área lateral del cilindro circular recto = $2.\pi.r.h = 2.\pi.\rho.g$
Área lateral del cono circular recto = $\pi.r.g = 2.\pi.\rho.g$
Área lateral del tronco de cono circular recto
$=\pi.g.r_1 + \pi.g.r_2 = \pi.g.(r_1 + r_2) = 2.\pi.\rho.g$

Escribiendo la fórmula en función de μ y h, se obtiene:

Área lateral del cilindro circular recto = $2.\pi.\mu.h$
Área lateral del cono circular recto = $2.\pi.\mu.h$
Área lateral del tronco de cono circular recto =$2.\pi.\mu.h$

Así, el área de la figura obtenida es la suma de las áreas laterales de los conos, tronco de conos y cilindros que la forman:

Área de la poligonal regular al girar alrededor del eje=
$$2\pi ah_1 + 2\pi ah_2 + 2\pi ah_3 + \ldots + 2\pi ah_n = 2\pi a(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n) =$$
$$\mathbf{2.\pi.a.h}$$



Si la superficie esférica se considera como el límite de una poligonal regular que gira alrededor de un eje no secante que pasa por su centro cuando el número de lados de dicha poligonal aumenta, se tiene que $a = r$ y $h = 2r$ por tanto

Área de la superficie esférica = $2.\pi.r.2.r= 4.\ \pi\ r^2$

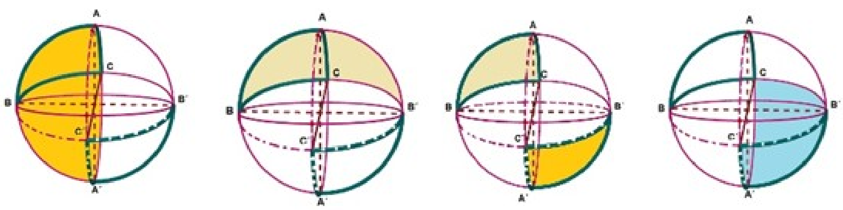
Área del huso: El área de un huso de un grado es la trescientos sesenta avas partes del área de la superficie esférica. Por tanto el área de un huso de **n** grados, es el producto del área del huso de un grado por **n**.

Área del huso de $n^o = \frac{\pi.r^2.n}{90^o} = 2.r^2.\alpha$ (α amplitud en radianes)

Área de triángulo esférico

Teorema 6.9: El área de un triángulo esférico de ángulos α, β y γ (tomados en grados) es igual a $\frac{\pi.r^2.\epsilon}{180^o}$ con $\epsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^o$, a ϵ se lo denomina exceso esférico.

Demostración: Las circunferencias máximas que incluyen a los lados del triángulo esférico ABC forman tres husos de amplitudes α, β y γ, ángulos de dicho triángulo. Tomando el diedro opuesto, γ', de γ, los tres husos α, β y γ' completan un hemisferio (semiesfera) en el que el triángulo esférico ABC es considerado dos veces y una vez el triángulo esférico simétrico A'B'C'.



Los triángulos esféricos ABC y A'B'C' son simétricos respecto de O, centro de la superficie esférica, dichos triángulos tienen igual área (Queda a cargo del lector dicha prueba). Las áreas de los tres husos: α, β y γ determinados por los ángulos de un triángulo esférico suman el área de un hemisferio más dos veces el área S del triángulo ABC.
Es decir: $\frac{\pi.r^2}{90^o}.(\alpha + \beta + \gamma) = 2.\pi.r^2 + 2S$.

De donde: $S = \frac{\pi.r^2}{180^o}.(\alpha + \beta + \gamma \breve{} 180^o) = \frac{\pi.r^2.\epsilon}{180^o}$

6.3. Volumen de figuras en 3D

Definición de volumen

Definición 6.1: Existe una única función **v** que asigna a cada poliedro **P** un número real positivo llamado volumen de **P** tal que:

a) Poliedros congruentes tienen igual volumen.

b) Si un poliedro es suma de otros, su volumen es suma de los volúmenes de los mismos.

c) Si C es un cubo de arista de longitud 1, el volumen de C es igual a 1.

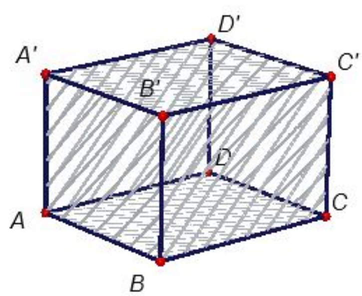
6.3.1. Volumen de figuras poliédricas

Prisma, pirámide y tronco de pirámide

Teorema 6.10: El volumen del ortoedro es igual al producto de las longitudes de tres aristas que tienen un vértice en común.

H) $ABCDA'B'C'D'$ ortoedro de aristas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$.

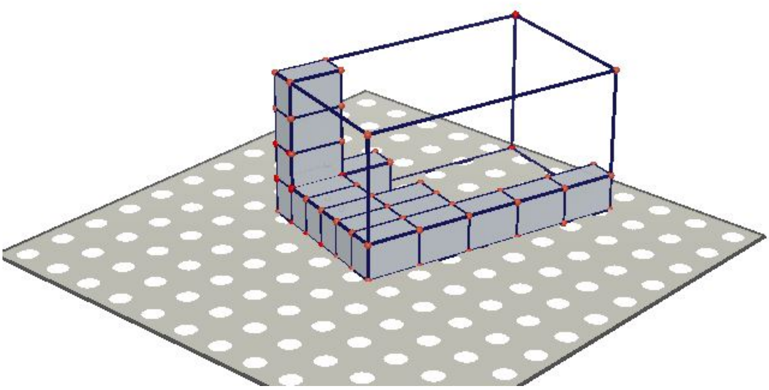
T) $\boldsymbol{v}(ABCDA'B'C'D')= |AB|.|BC|.|BB'|$



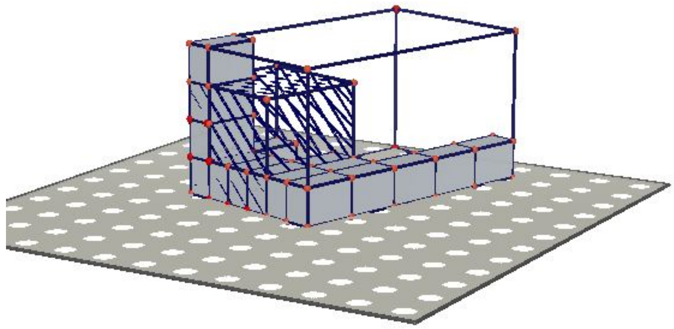
D) La demostración se realiza por casos, a saber: **Caso I** las longitudes de las aristas son números racionales y **Caso II** las longitudes son números reales.

Caso I) Puesto que las longitudes de las aristas son números racionales, existen p, q, r, s, t, u enteros positivos tal que

$$|AB| = \frac{p}{q}; |BC| = \frac{r}{s}; |BB'| = \frac{t}{u}$$



Se puede considerar el ortoedro $ABCDA'B'C'D'$ formado por $p.r.t$ ortoedros **O** de aristas de longitud $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{s}$ y $\frac{1}{u}$. Pero el cubo C de aristas de longitud 1 es suma de $q.s.u$ ortoedros **O**. De este modo: $\mathbf{v}(C) = 1 = q.s.u.\mathbf{v}(\mathbf{O})$ y $\mathbf{v}(ABCDA'B'C'D') = p.r.t.\mathbf{v}(\mathbf{O}) = p.r.t.\frac{1}{q.s.u} = \frac{p}{q}.\frac{r}{s}.\frac{t}{u}$

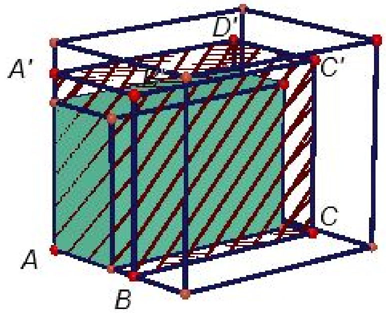


Caso II) Como las longitudes de las tres aristas concurrentes en un vértice del ortoedro $ABCDA'B'C'D'$ son números reales x, w y z, existen entonces números racionales m, m', n, n', k, k' tales que: $m < x < m'$; $n < w < n'$ y $k < z < k'$. Se puede pensar al ortoedro $ABCDA'B'C'D'$ dentro del ortoedro O_2 de vértice A y longitudes de las aristas m', n' y k' y conteniendo al ortoedro O_1 de vértice A y aristas de longitudes m, n y k. Así:

$$\mathbf{v}(O_1) < \mathbf{v}(ABCDA'B'C'D') < \mathbf{v}(O_2)$$
$$\mathbf{v}(O_1) = m.n.k$$
$$\mathbf{v}(O_2) = m'.n'.k'$$
$$m'.n'.k' < v(ABCDA'B'C'D') < m.n.k$$

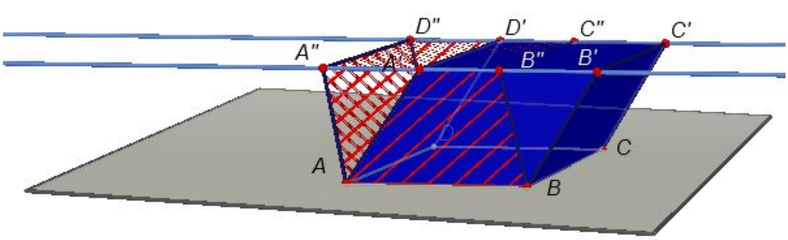
Como la diferencia $m.n.k - m'.n'.k'$ se puede hacer tan pequeña como se quiera resulta que

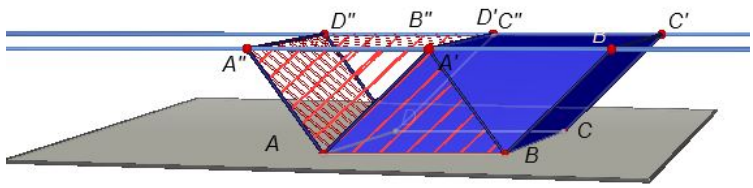
$$\mathbf{v}(ABCDA'B'C'D') = x.w.z$$



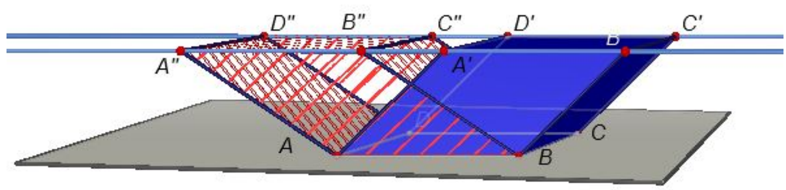
Teorema 6.11: Dos paralelepípedos con una cara común y la altura correspondiente a esa cara congruentes tienen igual volumen.

Demostración: Sean **P**= $ABCDCA'B'C'D'$ y **P'**= $ABCDA''B''C''D''$ los paralelepípedos con A'' en el plano determinado por A', B' y C'. Se toma en primer lugar que para dos aristas de la cara común sus respectivas paralelas están incluidas en una misma recta. Por ejemplo, $\overline{A''B''}$ y $\overline{A'B'}$ están en una misma recta y $\overline{D''C''}$ y $\overline{D'C'}$ están incluidas en la misma recta. En estas condiciones se pueden establecer dos casos: que los segmentos $\overline{A''B''}$ y $\overline{A'B'}$ tengan intersección no vacía y que tengan intersección vacía.



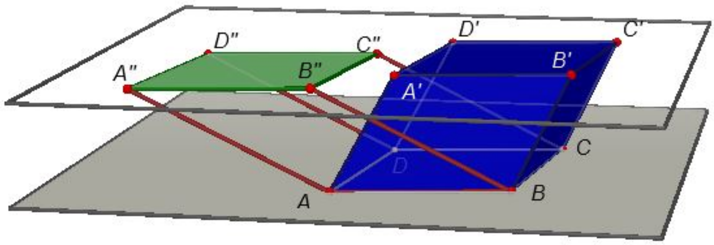


En el primer caso los paralelepípedos **P** y **P'** están formados por un prisma común (de base un trapecio o triángulo) y un prisma triangular $BB'B''CC'C''$ y $AA'A''DD'D''$ respectivamente que son congruentes ya que uno se obtiene del otro por la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$. Así **P** y **P'** tienen igual volumen por el inciso b) de la definición 6.1.



En el segundo caso **P** y **P'** están formados por un prisma triangular común $ABXDCX'$ (con $X = \overline{BB''} \cap \overline{AA'}$ y $X' = \overline{CC''} \cap \overline{DD'}$) y un prisma de base un trapecio $BXA'B'CX'D'C'$ y $AXB''A''DX'C''D''$ respectivamente. Estos prismas tienen igual volumen ya que se pueden obtener de los prismas triangulares congruentes $BB'B''CC'C''$ y $AA'A''DD'D''$ (por el caso anterior) menos el prisma triangular común $XA'B''X'D'C''$.

Sea ahora el caso general en que las caras paralelas a la cara común están en un mismo plano.

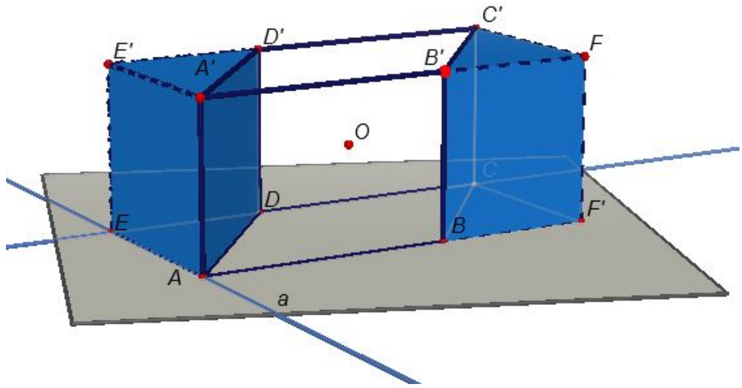


Por definición de paralelepípedo los paralelogramos $A'B'C'D'$ y $A''B''C''D''$ son congruentes y coplanares y sus lados son paralelos dos a dos, con lo cual existe una traslación de vector $\overrightarrow{A'A''}$ que los hace corresponder. Dicho vector puede obtenerse como una combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{D'A'}$ y $\overrightarrow{A'B'}$, pero en dichos casos los paralelepípedos tienen igual volumen por lo demostrado en la primera parte de esta prueba.

Teorema 6.12: El volumen de un paralelepípedo es igual al producto del área de una base por la longitud de la altura correspondiente a esa base.

Se define paralelepípedo (Def. 4.2) al prisma recto u oblicuo cuyas bases son paralelogramos. Se toman en la demostración dos casos de acuerdo con esta definición: prisma recto de base un paralelogramo y prisma oblicuo de base un paralelogramo.

Caso I) $ABCDA'B'C'D'$ es un prisma recto cuyas bases son los paralelogramos $ABCD$ y $A'B'C'D'$. Si $ABCD$ es un rectángulo, el prisma es un ortoedro y al aplicarse el teorema anterior, se deduce la tesis. Si $ABCD$ no es rectángulo, entonces dos ángulos consecutivos de este paralelogramo son suplementarios y no rectos. Por ejemplo, $D\hat{A}B$ es agudo y $A\hat{D}C$ obtuso o viceversa. Si $D\hat{A}B$ es agudo (en caso contrario se toma para el análisis el $A\hat{D}C$) y en el plano determinado por los puntos A, B y C, sea $\overleftrightarrow{a}$ la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{DC}$ por A. Sea $E = \overleftrightarrow{a} \cap \overleftrightarrow{DC}$.
Sean $E' = T_{\overrightarrow{AA'}}(E)$, O punto de intersección de las diagonales del paralelepípedo y $F = S_O(E)$ y $F' = S_O(E')$.

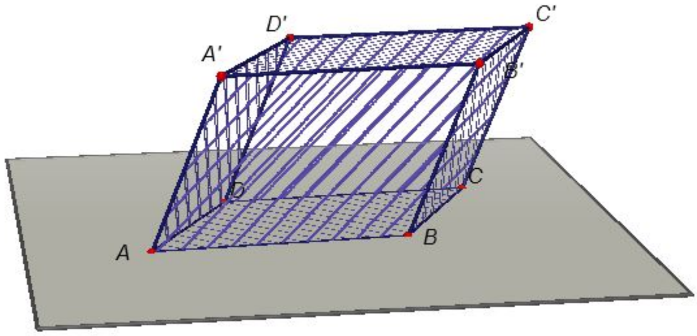


Los poliedros $ADEA'D'E'$ y $BCF'B'C'F$ son prismas rectos triangulares congruentes por corresponderse sus vértices en una simetría central de centro O, donde la suma de sus volúmenes es igual a la de un ortoedro de aristas concurrentes en un vértice igual a $|EA|$, $|ED|$ y $|EE'|$. (Se deja al lector probar esta afirmación). Además $AF'CEA'FC'E'$ es un prisma recto de base rectangular (ortoedro) ya que $AF'CE$ es un rectángulo (Se deja al lector probar esta afirmación).Así,

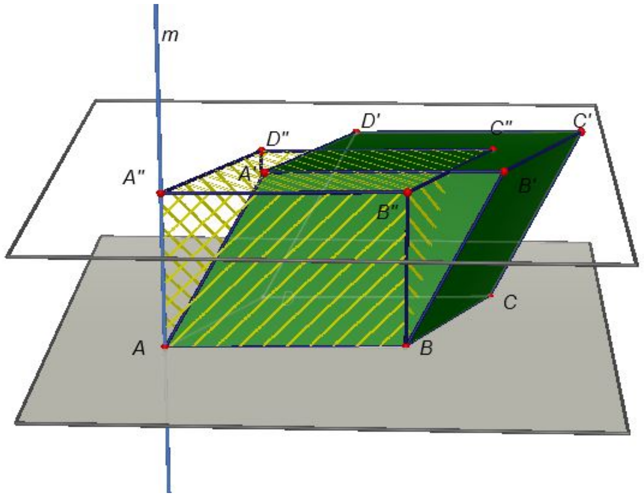
$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}(ABCDA'B'C'D') = \\
\mathbf{v}(AF'CEA'FC'E') - \mathbf{v}(ADEA'D'E') - \mathbf{v}(BCF'B'C'F) = \\
= \mathbf{v}(ABFDA'B'F'D') - 2\mathbf{v}(ADEA'D'E') = \\
=|EC|.|EA|.|AA'| - |ED|.|EA|.|AA'|= \\
=|EA|.|AA'|.(|EC| - |ED|) = |EA|.|AA'|.|CD|
\end{gathered}
$$

donde $|CD|.|EA|$ es el área del paralelogramo y $|AA'|$ es la altura del paralelepípedo correspondiente a la base $ABCD$.

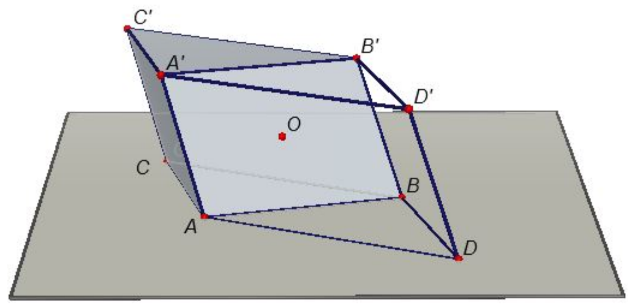
Caso II) $ABCDA'B'C'D'$ es un prisma oblicuo cuyas bases son los paralelogramos $ABCD$ y $A'B'C'D'$.



Sea $\overleftrightarrow{m}$ la recta perpendicular por A al plano determinado por A, B y C. Sea A'' la intersección de $\overleftrightarrow{m}$ con el plano determinado por A', B' y C'. El paralelepípedo $ABCDA''B''C''D''$ por el teorema anterior es equivalente al $ABCDA'B'C'D'$ ya que tienen una cara congruente y la altura correspondiente a esa cara congruente. Además $ABCDA''B''C''D''$ es un prisma recto y por el Caso I se deduce la tesis.



Teorema 6.13: El volumen de un prisma de base triangular es igual al producto del área de la base por la longitud de la altura.

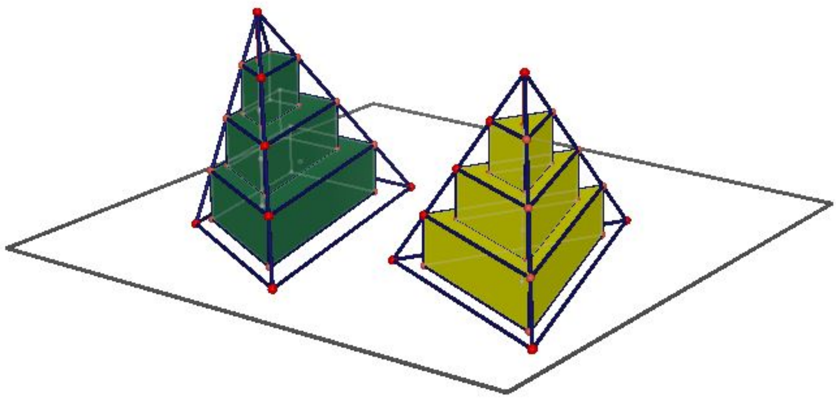


Teorema 6.14: El volumen de un prisma cualquiera es igual al área de la base por la medida de la altura.

Descomponiendo, por planos, convenientemente el prisma en prismas triangulares se obtiene la tesis. (Se dejan los detalles de la demostración al lector).

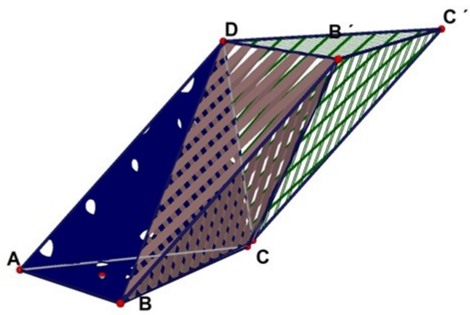
Teorema 6.15: Dos pirámides de bases de igual área y alturas congruentes tienen igual volumen.

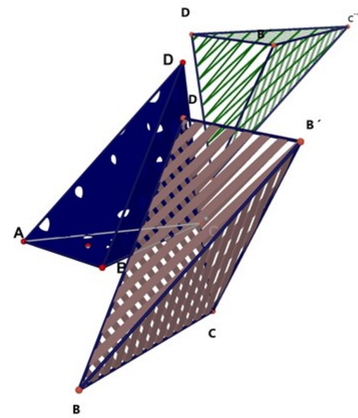
Si se consideran $n-1$ puntos que dividen a la altura de cada pirámide en n segmentos congruentes y se traza por ellos planos paralelos a la base por cada uno de ellos, se obtiene por cada plano un polígono homotético a la base con razón de homotecia igual a $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$,... ,$\frac{n-1}{n}$. Por propiedad de homotecia, y dado que las bases tienen igual área, los polígonos homotéticos en cada pirámide tienen respectivamente igual área. Si se considera en cada pirámide un prisma con base en cada polígono homotético y altura $\frac{H}{n}$. Cada uno de los respectivos prismas tienen igual volumen y la suma de los volúmenes de los prismas de cada pirámide se aproxima al volumen de esa pirámide cuando la altura de cada uno se acerca a cero.



Teorema 6.16: El volumen de una pirámide triangular es igual a un tercio del área de una de las caras por la longitud de la altura correspondiente a esa cara.

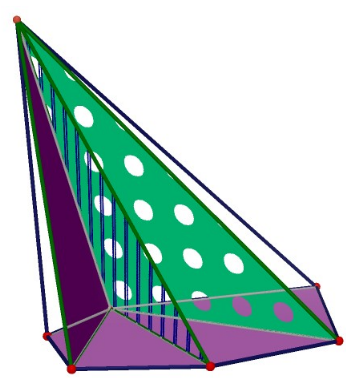
Sea $ABCD$ la pirámide y los puntos B' y C' las intersecciones de las rectas paralelas a $\overleftrightarrow{AD}$ por B y C respectivamente con el plano paralelo por D al determinado por A, B y C. De esto, $ABCDB'C'$ es un prisma triangular. Este se puede descomponer en tres pirámides: $ABCD$, $DB'C'C$ y $DB'CB$. Estas pirámides tienen igual volumen pues $ABCD$ y $DB'C'C$ tienen bases congruentes (las opuestas del prisma) y alturas congruentes (iguales a la altura del prisma) y por teorema anterior tienen igual volumen. $DB'C'C$ y $DB'CB$ tienen una cara congruente BCB' y $B'C'C$ (por ser $\overline{B'C}$ diagonal del paralelogramo $BCC'B'$) y alturas congruentes (distancia de D al plano determinado por B, C y B') y por teorema anterior tienen igual volumen. Por tanto, el volumen de la pirámide $ABCD$ es tercio del volumen del prisma $ABCDB'C'$ que es igual al área de $\overset{\triangle}{ABC}$ por la medida de la altura, y de aquí la tesis.





Teorema 6.17: El volumen de una pirámide es igual a la tercera parte del producto del área de la base por la longitud de la altura.

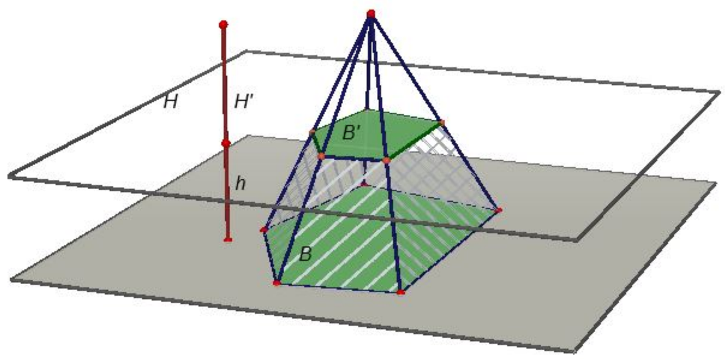
Descomponiendo, por planos, convenientemente la pirámide en pirámides triangulares se obtiene la tesis. (Se dejan los detalles de la demostración al lector).



Teorema 6.18: (Corolario del T. 6.17) Pirámides de bases de igual área e igual altura, tienen igual volumen.

Teorema 6.19: El volumen del tronco de pirámide es igual a un tercio del producto de la longitud de la altura por la suma de las áreas de las bases más la raíz cuadrada del producto de las mismas.

Sean B y B' las bases del tronco y h su altura. H' es la altura de la pirámide de base B' y H la altura de la pirámide de la que se obtiene el tronco. Haciendo abuso de la notación, sean B y B' las áreas respectivas de las bases del tronco y h, H y H' las longitudes de las alturas.



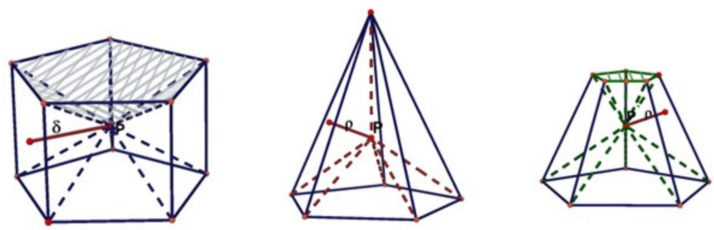
Con esta notación, se debe probar que $\mathbf{v} = \frac{1}{3}.h.(B + B' + \sqrt{B.B'})$ Para ello, si se usan las relaciones que se obtienen de la semejanza de los polígonos B y B' y de sus áreas. Sea k la razón de semejanza u homotecia.

$$\frac{H}{H'} = k;\ \frac{B}{B'} = k^2.\ \text{y}\ H - H' = h$$

De aquí: $H = kH' = k(H - h)$ y operando queda $H = \frac{kh}{k-1}$ y reemplazando en esta igualdad $k = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}$ queda $H = \dfrac{\sqrt{B}.h}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$.

El volumen del tronco es el volumen de la pirámide de base B y altura H menos el volumen de la pirámide de base B' y altura H'. Se tiene así: $\mathbf{v} = \frac{1}{3}.B.H - \frac{1}{3}B'.H' = \frac{1}{3}(B.H - B'.(H-h))$ reemplazando por H y con alguna cuentas se llega a lo buscado.

Teorema 6.20: En un prisma, pirámide o tronco de pirámide regular si se toman los puntos de todos los segmentos determinados por un punto P del eje y cada punto de las caras laterales se obtienen un conjunto de pirámides cuyo volumen total es $\frac{1}{3}A\delta$, donde A es el área lateral de la figura (prisma, pirámide o tronco de pirámide) y δ es la distancia de P a dichas caras laterales.

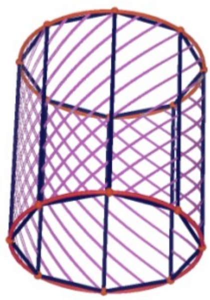


6.3.2. Volumen de figuras no poliédricas

Cilindro circular recto, cono circular recto y tronco de cono circular recto

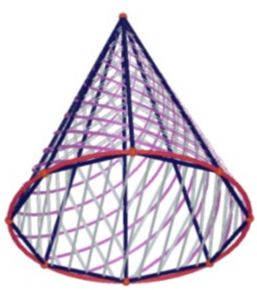
Teorema 6.21: El volumen del cilindro circular recto es igual a $\pi r^2 h$ con r longitud del radio del círculo base del cilindro y h la longitud de la altura.

Considerando el cilindro inscripto en un prisma recto regular cuando el número de lados de la base tiende a infinito se obtiene la tesis. (Se dejan los detalles de la demostración al lector).



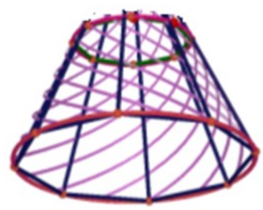
Teorema 6.22: El volumen del cono circular recto es igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ con r longitud del radio del círculo base del cono y h la longitud de la altura.

Considerando el cono inscripto en una pirámide recta regular cuando el número de lados de la base tiende a infinito se obtiene la tesis. (Se dejan los detalles de la demostración al lector).



Teorema 6.23: El volumen del tronco de cono circular recto es igual a $\frac{\pi.h}{3}.(r_1^2 + r_2^2 + r_1.r_2)$ con r_1 y r_2 longitudes de los radios de los círculos de las bases del tronco de cono y h la longitud de la altura.

Considerando el tronco de cono inscripto en un tronco de pirámide recta regular cuando el número de lados de las bases tiende a infinito se obtiene la tesis. (Se dejan los detalles de la demostración al lector).

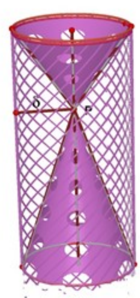


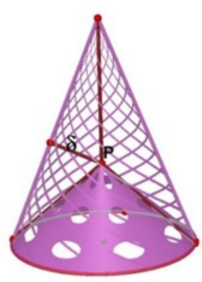
Esfera, sector cilíndrico, sector cónico y sector troncocónico

Definición 6.2: El sector cilíndrico de un cilindro circular recto es la figura determinada por todos los puntos del cilindro al que se le extraen dos conos cuyas bases son las bases del cilindro y con vértices en un punto P (P es un punto del eje).

Definición 6.3: El sector cónico de un cono circular recto es la figura determinada por todos los puntos del cono al que se le extrae un cono cuya base es la base del cono y su vértice es un punto P del eje.

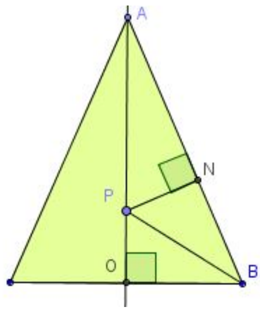
Definición 6.4: El sector troncocónico de un tronco de cono circular recto es la figura determinada por todos los puntos del tronco de cono al que se le extraen dos conos cuyas bases son las bases del tronco y con vértices en un punto P (P es un punto del eje).





Teorema 6.24: El volumen de un sector cilíndrico, cónico o troncocónico es igual a $\frac{1}{3}A\delta$, donde A es el área lateral del cilindro,

cono o tronco de cono que genera al sector y δ la distancia del punto P a una generatriz del cilindro, cono o tronco de cono que lo genera.



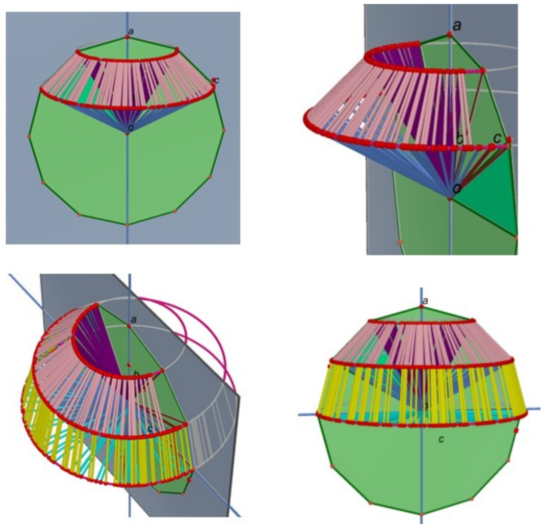
En el caso del sector cónico: $\delta = \overline{PN}$; $h = \overline{AO}$; $g = \overline{AB}$ y $r = \overline{OB}$ y de la semejanza de los triángulos $\overset{\triangle}{APN}$ y $\overset{\triangle}{AOB}$ se tiene que $\frac{\delta}{r} = \frac{\overline{AP}}{g}$. El volumen del sector cónico es igual al volumen del cono de radio de la base r y altura $\overline{AO}$ menos el volumen del cono de radio r y altura $\overline{PO}$, es decir:
$v = \frac{1}{3}\pi r^2(h - \overline{PO}) = \frac{1}{3}\pi r^2\overline{AP} = \frac{1}{3}\pi rr\overline{AP} = \frac{1}{3}\pi r\delta g = \frac{1}{3}\delta\pi rg = \frac{1}{3}\delta A$
donde A es el área lateral del cono.

Se deja a cargo del lector la justificación para el volumen del sector cilindrico y el sector troncocónico.

Teorema 6.25: (Corolario del T. 6. 24) El volumen definido por una poligonal regular al girar alrededor de un eje que pasa por su centro y cuyos extremos están en el mismo, es igual a un tercio del producto de la apotema por el área de la superficie engendrada por la poligonal.

$$Volumen = \frac{a}{3}2\pi ah = \frac{2}{3}a^2\pi h$$

donde a es la longitud del apotema de la poligonal y h es la longitud de la altura de la misma.



El cuerpo obtenido se compone de un conjunto de sectores cónicos, troncocónicos y cilíndricos con la distancia δ común a todos ellos e igual a la apotema a del sector.
Si el número de lados de la poligonal aumenta el límite de dicho volumen es el volumen de la esfera. En este caso $a = r$ y $h = 2r$ de donde se deduce que el siguiente teorema:

Teorema 6.26: El volumen de una esfera de radio r es igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$

6.4. PARA PROFUNDIZAR

1. Expresar el área de los poliedros regulares en función de la arista.

2. Se considera un tetraedro regular ABCD de arista x. Si se toman los seis puntos medios de las aristas, queda determinado un octaedro regular. Calcular el volumen del tetraedro y probar que el volumen del octaedro es la mitad del volumen del tetraedro. Realizar dos desarrollos planos distintos de cada uno de los poliedros que intervienen en el problema.

3. Dividir la superficie lateral de un cono circular recto en n ($n > 1$) partes equivalentes en área mediante planos paralelos a la base. Determinar la distancia desde el vértice del cono donde se deben trazar los planos.

4. La altura de una pirámide regular de base cuadrada es 20 cm; su área total es de $9dm^2$; calcular sus aristas.

5. Construir, con un software de Geometría Dinámico, un tetraedro de modo que una cara sea un triángulo equilátero y los ángulos diedros en esta cara sean de 60^o, 30^o y 45^o. Construir la superficie esférica circunscripta a ese tetraedro.

6. Una pirámide con base cuadrada se inscribe en un cono circular recto de manera que tengan la misma cúspide y la base de la pirámide quede inscripta en la base del cono. La longitud de la altura de ambas superficies es de 18 cm y la longitud de un lado del cuadrado es de 1,5 dm. Calcular el volumen de la pirámide y el del cono.

7. Con un sector de 270° y radio igual a 10 cm; se ha construido una superficie cónica de revolución. ¿Cuál es su área y su volumen?

8. Una caldera de forma cilíndrica, terminada por dos hemisferios de igual radio que el cilindro, tiene una superficie total de $6m^2$. Calcular las dimensiones, sabiendo que el largo es triple que el ancho.

9. Considerando la Tierra como una esfera de 6370 km de radio, calcular el área del huso comprendido entre: a) Los meridianos 6 h y 4 h de longitud oeste, b) Los meridianos de 50° 20’ de longitud oeste y de 9° 40’ de longitud este.

10. ¿Cuál es el espesor de una pompa de jabón de 15 cm de diámetro interno si se ha hecho con una gota esférica de agua jabonosa de 2 mm de diámetro?

11. Determinar las dimensiones de un depósito en forma de ortoedro de 3000 litros de capacidad, cuya altura sea la mitad del ancho y este los 2/3 de la longitud.

12. Expresar en función de las bases y de la altura de un trapecio el volumen engendrado por él al girar alrededor de la base mayor.

13. En una esfera de radio r, un cilindro inscripto tiene área lateral mitad de la de un círculo máximo. Calcular el radio del cilindro y la altura.

Anexo

1. Axiomas de incidencia (enlace)
   Ax. I.1 Reconocemos la existencia de infinitos entes llamados "puntos", cuyo conjunto llamaremos .espacio"
   Ax I.2 Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados "planosz los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados rectas"
   Ax. I.3 Por dos puntos distintos pasa una recta y solo una.
   Ax. I.4 Por tres puntos no alineados pasa un plano y solo uno.
   Ax. I.5 Si dos puntos de una recta están en un plano, todo los demás puntos de la recta también lo están.

2. Axioma de paralelismo
   Ax II. Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella.

3. Axiomas de división y separación
   Ax III.1 La recta es un conjunto de puntos linealmente ordenado, abierto y denso.
   Ax. III.2 Toda recta de un plano establece una clasificación de los puntos no contenidos en ella en dos únicas clases o regiones tales que: Todo punto exterior a la recta pertenece a una u otra región. El segmento que une dos puntos A, B de la misma región no corta a la recta r; el segmento que une dos puntos A, C de distintas regiones corta a la recta r.

4. Axioma de continuidad
   Ax IV Dada una clasificación de los puntos de una recta en dos clases C_1 y C_2 que cumplan las condiciones:

a) existen puntos de la recta en una y otra clase;

b) todo punto de la recta está en una u otra clase;

c) todo punto de C_1 precede a todo punto de C_2,

existe un punto, y solo uno, P, de la recta tal que todos los puntos que le preceden pertenecen a la clase C_1, y todos los que le siguen pertenecen a la clase C_2.

5. Axiomas de movimiento
Ax V.1 Los movimientos son transformaciones puntuales biunívocas.
Ax V.2 Todo movimiento conserva las relaciones de incidencia, ordenación y sentido.
Ax V.3 Ningún movimiento puede transformar un segmento o ángulo en una parte del mismo.
Ax V.4 La transformación resultante de aplicar dos movimientos sucesivamente es otro movimiento.
Ax V.5 La transformación inversa de todo movimiento es otro movimiento. [5]
Ax. V.6 Existe un movimiento y solo uno que transforma una semirrecta en otra, y un determinado semiplano limitado por la recta primera en un determinado semiplano limitado por la segunda.

[5] Los axiomas IV.4 y IV.5 podrían considerarse en un solo enunciando: Ax IV.4-5 Los movimientos del plano forman grupo.

Referencias bibliográficas

De Lorenzo, Javier (1998). *La matemática: de sus fundamentos y crisis.* Tecnos.

Fernández Val, Walter (2004). *Geometría métrica. Plano y espacio.* Kapelusz.

Festisov, Antonin (1973). *La demostración en geometría.* Limusa-Wiley.

Götte, Marcela (2020). Resoluciones de problemas de geometría espacial. Errores y dificultades en futuros profesores de matemática. (tesis inédita de maestría). Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe.

Guillén Soler, Gregoria (1991). *Poliedros.* Síntesis.

Hilbert, David (1996). *Fundamentos de la Geometría.* Textos universitarios. Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Itzcovich, Horacio (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría.* Libros del Zorzal.

Lakatos, Imre (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza Editorial.

Puertas Castaños, María (1991). *Euclides. Elementos.* Gredos.

Puig Adam, Pedro (1980). *Curso de geometría métrica. Tomo I Fundamentos.* Gómez Puig Ediciones.

Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro (1948). *Metodología de la matemática elemental.* Ibero-Americana.

Sánchez Mármol, Luis y Pérez Beato, Manuel. (1961). *Geometría métrica, proyectiva y sistemas de representación.* SAETA.

Weber, Keith (2013). Students' difficulties with proof. MAA Research sampler 8. https://www.maa.org/programs/

Sobre las autoras

Ana María Mántica

Profesora de la cátedra Geometría Euclídea Espacial en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, en el profesorado en Matemática. Magíster en Didácticas Específicas, mención en matemática. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo. Autora de diversas publicaciones en revistas especializadas nacionales e internacionales.

Marcela Götte

Profesora de las cátedras Geometría Euclídea Espacial y Matemática Discreta I y II en el Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Magíster en Didácticas Específicas. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo. Autora de diversas publicaciones sobre la temática en distintas revistas especializadas nacionales e internacionales.

Geometría en 3D

Ana María Mántica

Marcela Götte

C Á T E D R A

Este libro presenta una excelente oportunidad para ahondar en el apasionante mundo de la geometría euclídea en tres dimensiones. Es ideado y acrisolado para estudiantes y profesores de nivel superior, particularmente de profesorados en Matemática. Se organiza en seis capítulos. El primero contiene los fundamentos de la geometría euclídea, su método deductivo, el valor de los axiomas y de la deducción de las propiedades. El segundo presenta los axiomas sobre los que se cimenta el texto y definiciones de figuras tridimensionales. En el tercero se exponen transformaciones geométricas y los conceptos de paralelismo y perpendicularidad que establecen relaciones específicas entre los elementos del espacio en 3D. El cuarto y el quinto capítulo versan sobre figuras poliédricas y no poliédricas y se dedica un apartado sobre la geometría en la superficie esférica. Por último, se encuentra el estudio de la medida: el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes y medición de ángulos.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL