

**MÉTODO DE DOMINIO INMERSO PARA PROBLEMAS
DE POISSON EN REGIONES ANULARES:
Optimización del flujo en función de la forma externa con
frontera interior dependiente del tiempo.**

TESIS DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Tesista: Lic. Adriana Estela Frausin

Director : Dr. Hugo Aimar

Codirector : Dr. Ricardo Grau

Integrantes del Jurado:

Dr. Domingo Tarzia

Dr. Rubén Spies

Dr. Pedro Morín

Diciembre 2008

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL.

SANTIAGO DEL ESTERO 2829 – 3000 SANTA FE - ARGENTINA.

afrausin@fiq.unl.edu.ar

INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA DEL LITORAL, CONSEJO NACIONAL DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS Y TÉCNICAS.

GÜEMES 3450 – 3000 SANTA FE - ARGENTINA.

haimar@santafe-conicet.gov.ar

INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO PARA LA INDUSTRIA QUÍMICA, CONSEJO NACIONAL DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS Y TÉCNICAS.

RUTA NACIONAL 168. PARAJE EL POZO – 3000 SANTA FE - ARGENTINA.

cqfina@santafe-conicet.gov.ar

Índice general

| | |
|--|-----|
| Resumen | v |
| Problemas que motivan este trabajo | vii |
| Capítulo 1. Los dominios admisibles | 1 |
| 1.1. El caso de frontera interior fija | 1 |
| 1.2. El caso de frontera interior con dinámica prescrita | 10 |
| Capítulo 2. Generalidades sobre Problemas extremales y Espacios de Sobolev | 15 |
| 2.1. Cálculo Diferencial en Espacios de Banach | 16 |
| 2.2. Espacios de Sobolev | 23 |
| 2.3. Los espacios $H_{2\pi}^{1/2}$ y $H^{1/2}(\gamma)$ | 33 |
| 2.4. Homeomorfismo entre $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(\gamma)$ y $H_{2\pi}^{1/2}$ para curvas admisibles | 37 |
| 2.5. Los operadores traza sobre una familia de curvas admisibles | 41 |
| 2.6. Los operadores de extensión de funciones de Sobolev definidas sobre curvas admisibles | 46 |
| Capítulo 3. El problema de contorno que especifica la dinámica del sistema | 57 |
| 3.1. El problema de contorno básico | 57 |
| 3.2. La Técnica de Dominio inmerso | 61 |

| | |
|--|-----|
| Capitulo 4. Formulaciones del problema de optimización de flujo considerando como variable la forma del dominio | 67 |
| 4.1. Formulación del problema de control óptimo | 67 |
| 4.2. Reformulación del problema con la técnica de dominio inmerso | 70 |
| Capitulo 5. Teoría de existencia de solución del problema de optimización de flujo considerando como variable la forma del dominio | 75 |
| 5.1. Resultados previos | 75 |
| 5.2. El Teorema de la Dependencia Continua | 79 |
| Capitulo 6. El problema de optimización para el caso de frontera interior con dinámica prescrita | 89 |
| 6.1. Formulación del problema de control óptimo cuando el borde interno cambia con el tiempo | 90 |
| 6.2. Reformulación del problema ($P^{Opt,T}$) en espacios mixtos. | 92 |
| 6.3. Teorema de la dependencia continua | 99 |
| Conclusiones | 109 |
| Bibliografía y Referencias | 111 |

Resumen

La motivación central que origina el desarrollo de esta tesis es el estudio de problemas de liberación controlada de drogas y en particular la exploración de formas geométricas óptimas que conduzcan a patrones de liberación aproximadamente constantes.

Se utilizan herramientas del análisis funcional para demostrar existencia de soluciones de modelos matemáticos del fenómeno de difusión en estado estacionario en medios no isotrópicos, con términos fuentes no nulos y condiciones de contorno arbitrarias en dominios anulares “variables” .

Atendiendo a su robustez teórica y a sus potenciales aplicaciones numéricas se orientó la investigación hacia los métodos variacionales de Dominio Inmerso y Continuidad de los parámetros, como los desarrollados por J. Haslinger, T. Kozubek, K. Kunisch, G. Peichl para el caso sin fuentes y en medios isotrópicos.

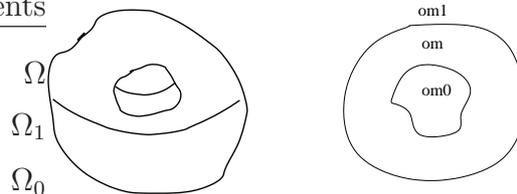
Dado que en problemas concretos en dominios anulares con frontera exterior “libre” puede ocurrir que la curva interior del dominio no esté fija y tenga a su vez una dinámica conocida con respecto a una variable temporal, también se aplican estos métodos para un problema de minimización de un nuevo funcional cuando el borde interno del dominio anular cambia con el tiempo.

Problemas que motivan este trabajo

Si bien este trabajo es en esencia teórico y se ocupa del problema matemático de adecuar la estructura analítica para demostrar la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones, entendemos que es importante comenzar con una breve reseña de los modelos matemáticos que están en su origen.

Tal vez el concepto físico más clásico y sencillo que motiva el tipo de problemas que consideraremos en esta tesis sea el de capacidad eléctrica. En general un condensador eléctrico (capacitor) es un sistema formado por dos superficies metálicas dispuestas en forma de corona separadas por un aislante (el dieléctrico).

PSfrag replacements



Desde el punto de vista matemático tenemos dos dominios Ω_0 y Ω_1 con fronteras Γ_0 y Γ_1 respectivamente, tales que $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1$. Llamaremos Ω al “dieléctrico”: $\Omega = \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_0$.

Si cargamos la placa interior del condensador de manera que tenga un potencial eléctrico unitario con respecto a la placa exterior que está a potencial cero (tierra), entre ambas placas, en Ω , se genera un campo eléctrico \bar{E} conservativo y solenoidal que es el gradiente de la única

solución del problema de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \\ u = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \\ u = 1 \quad \text{en } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

La capacidad eléctrica está dada por $C(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dvol$. En este sentido la capacidad es una función del dominio y un problema natural es hallar las formas extremales para $C(\Omega)$ cuando, por ejemplo, el volumen de Ω permanece constante.

En realidad nuestro interés en el tema está motivado por aplicaciones más actuales de los problemas de optimización de formas tales como los de **liberación controlada de drogas** (drug controlled release).

Un sistema de liberación controlada de drogas es una entidad que administra una droga o agente terapéutico a una velocidad predeterminada, constante si es necesario, durante un tiempo también preestablecido. Para este propósito existen diversos sistemas, tan extremos como bombas dosificadoras y dispositivos poliméricos. Estos últimos son preferidos en varios campos de aplicación (medicina humana, veterinaria, control de plagas y agronomía, para mencionar los principales) debido a su practicidad, pequeño tamaño y bajo costo.

Hay tres mecanismos fundamentales por los cuales una droga puede ser liberada desde un polímero: difusión, disolución, y erosión. En la práctica, la combinación de más de uno de ellos es conveniente, o aún necesaria, para alcanzar patrones de liberación aproximadamente constantes (idealmente, cinéticas de orden cero) que garanticen la administración de drogas dentro de los niveles máximos de toxicidad y

mínimos de eficacia requeridos en cada caso específico. Pero este objetivo no es sencillo de alcanzar porque el desempeño depende de múltiples variables y condiciones; por ejemplo de la carga de droga en la matriz (concentración y distribución), de las propiedades fisicoquímicas de sistema (composición, solubilidad, parámetros de transporte y partición), del diseño estructural del sistema polimérico (tamaño, forma, y arquitectura), y de las condiciones operantes en el medio de liberación (resistencia a la transferencia externa de la droga y concentración de droga). La intrincada naturaleza de esta clase de dispositivos motivó un sostenido interés por su modelado matemático con el fin de facilitar su concepción, desarrollo, y optimización [1].

A partir del pionero modelo de Higuchi desarrollado a comienzos de la década de los '60 [2], numerosas generalizaciones y aplicaciones especiales han generado un gran espectro de aproximaciones al modelado matemático de estos sistemas. Estas incluyen soluciones exactas y aproximadas para geometrías planas [3-6]; geometrías no planas [7-14]; distribución inicial no uniforme de droga [15-18]; resistencia a la transferencia de droga a un medio externo finito [17, 19-24]; arquitecturas multi-laminadas o compuestas [17, 25, 26] y droga dispersa disolviéndose a velocidades finitas [27-34]. Los modelos varían en complejidad, detalles y metodología de solución. Sin embargo, al presente, no hay un modelo matemático general que describa todos los posibles procesos fisicoquímicos que pueden tener lugar.

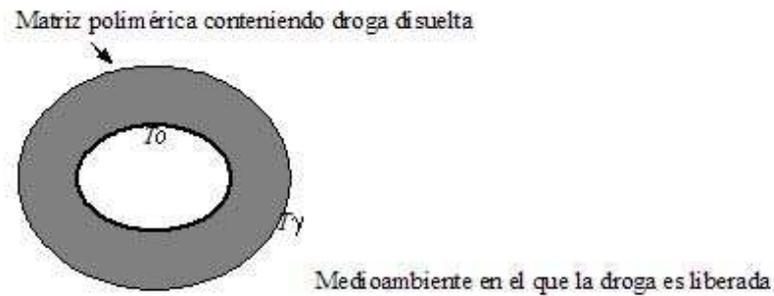
La forma geométrica del dispositivo puede afectar la velocidad de liberación de droga, por este motivo ha atraído siempre la atención de muchos investigadores y tecnólogos. En consecuencia varios intentos

han sido realizados para regular el comportamiento del sistema controlando su forma geométrica. Geometrías plana, cilíndrica, esférica, cilíndrica hueca, semiesférica hueca, biconvexa, y otras más complejas han sido estudiadas [35-46]. Sin embargo, todos los estudios están basados en proponer a priori una determinada forma y analizar el comportamiento del sistema.

Desde el punto de vista estrictamente matemático hay varias estrategias tendientes a resolver el problema básico de existencia de formas óptimas. Una de ellas es el **Método de Dominio Inmerso para Problemas de Poisson en Regiones Anulares** junto con métodos de continuidad y de compacidad usado y propuesto por J.Haslinger, T.Kozubek, K.Kunisch y G.Peichl, “An embedding domain approach for a class of 2-d shape optimization problems” [HKKP], para la optimización del flujo en función de la forma externa en medios isotrópicos y sin fuentes.

Antes de presentar el desarrollo de la plataforma matemática sobre la que está fundamentado este método para medios no isotrópicos ni homogéneos, con fuentes y borde interno dependiente del tiempo, se realizará una breve descripción de la necesidad que ha motivado su desarrollo.

Sea un sistema conformado por una matriz polimérica en un dominio (región sombreada) limitado por un borde interno (∂T_0) y uno externo (∂T_γ) que contiene una droga solubilizada. El borde ∂T_0 es impermeable de modo tal que la droga no lo puede atravesar. Pero, el borde ∂T_γ sí es permeable, por lo tanto la liberación de la droga al medio ambiente tiene lugar a través del mismo.



El transporte de la droga desde el interior de la matriz hacia ∂T_γ está gobernado por los gradientes de concentración dentro de la matriz, siendo el flujo molar de droga (J) factible de ser descrito por la ley de Fick $J = -D \nabla u$, donde D representa el coeficiente de difusión de la droga en la matriz polimérica y u la concentración de droga disuelta. Esta situación es usualmente descripta por el siguiente problema de valores de contorno en $T = T_\gamma \setminus T_0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial t = \Delta u \quad \text{en } T \\ u = 0 \quad \text{en } \partial T_\gamma \\ u = c \quad \text{en } \partial T_0 \end{array} \right.$$

donde la concentración de droga es mantenida constante (no nula) en el borde de T_0 , e igual a cero en el borde de T_γ porque se supone que se diluye inmediatamente en el medio ambiente.

El objetivo ideal es que la cantidad de droga liberada por unidad de tiempo a través de ∂T_γ sea sostenido y prácticamente constante, es decir que

$$(*) \quad J = -D \nabla u \cdot \bar{n} = L$$

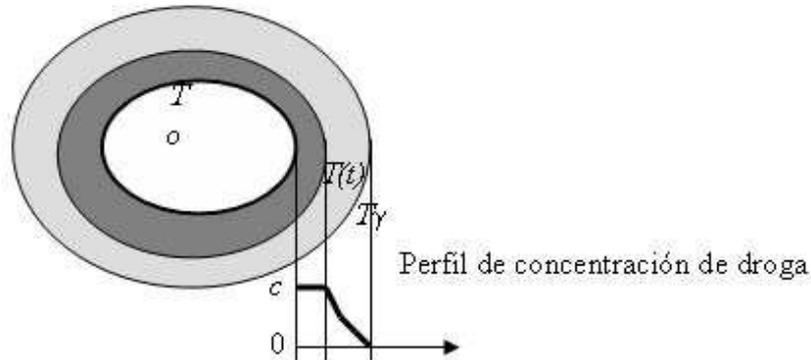
sobre ∂T_γ , donde L es una constante que representa el valor deseado o predeterminado de la cantidad de droga a ser liberada por unidad de superficie y tiempo.

Para cumplir con esta premisa, siendo D una constante, $\nabla u \cdot \bar{n}$ debería ser también constante sobre ∂T_γ . El transporte difusivo per se no permite alcanzar esta condición. La incorporación de droga en cantidades suficientes para saturar (sobresaturar) la matriz generando partículas o cristales de droga que disuelvan a medida que la droga es liberada es el recurso más usual para evitar parcialmente este problema. De modo tal que el sistema es ahora descrito matemáticamente por el siguiente problema de valores de contorno

$$\begin{cases} \partial u / \partial t - \Delta u = f & \text{en } T \\ u = 0 & \text{en } \partial T_\gamma \\ u = c & \text{en } \partial T_0 \end{cases}$$

donde f es un término fuente que da cuenta de la disolución de droga.

La solución de este problema para determinadas formas funcionales de f permite una mejor aproximación de la ecuación (*). Sin embargo, la calidad de la aproximación es dependiente de la forma geométrica de ∂T_γ . En la presente contribución, como primer paso en esta dirección, se tratará el siguiente problema clásico inspirado en el modelo pionero de Higuchi, donde la matriz presenta una región interna sobresaturada con droga, $T(t) \setminus T_0$, (región gris oscura) que disuelve con velocidad prácticamente infinita sobre un frente de disolución $\partial T(t)$ y difunde en estado cuasiestacionario en la región $T_\gamma \setminus T(t)$ (región gris claro). El frente de disolución $\partial T(t)$ avanza hacia adentro a medida que transcurre la liberación de droga.



Por lo tanto, el sistema físico puede ser descrito por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } T \\ u = 0 & \text{en } \partial T_\gamma \\ u = c & \text{en } \partial T(t) \end{cases}$$

donde f representa un término fuente de droga de forma funcional arbitraria (reacción química, degradación, etc.), y la posición del frente $T(t)$ es conocida a partir de ecuaciones de balance de masa adicionales.

El problema a resolver consiste en encontrar la forma de ∂T_γ que permita minimizar la desviación de la cantidad de droga liberada por unidad de tiempo respecto de un valor deseado predeterminado L . Matemáticamente, esto equivale a resolver un problema de optimización del tipo

$$\text{mín } \|\nabla u \cdot \bar{n} - L\|^2 \quad \text{sobre } \partial T_\gamma.$$

En otras situaciones que pueden tener interés en medios no isotrópicos, el operador de Laplace se sustituye por otro en forma de divergencia $\mathcal{L}u = \nabla \cdot (A \nabla u)$, donde los elementos de la matriz A describen la naturaleza anisotrópica y no homogénea del medio.

Sin dudas la resolución del problema es relevante para el diseño de nuevos dispositivos matriciales para la liberación de drogas porque permitirá la búsqueda de formas sin recurrir al azar o guiada meramente por la intuición. Entre otras aplicaciones, se visualiza el diseño de disipadores de calor de dispositivos electrónicos.

Los problemas que se abordan en esta tesis son **problemas de control óptimo** donde la variable de control pertenece a una clase de **dominios admisibles** y la **dinámica del sistema** está especificada por una ecuación de tipo Poisson en un medio generalmente no isotrópico ni homogéneo.

En el Capítulo 1 se define la clase de dominios admisibles para el problema de “Encontrar un miembro óptimo que minimice la distancia, en su norma natural, entre el flujo de la concentración u y un flujo objetivo constante, siendo u la solución de un problema de Poisson en dicho dominio correspondiente a un medio no isotrópico”.

En el Capítulo 2 se revisan los conceptos necesarios en los espacios funcionales involucrados.

Se demuestra, en el Capítulo 3, la existencia y unicidad de la solución de un problema auxiliar equivalente al Problema de Poisson, que se obtiene aplicando técnicas de dominio inmerso basadas en los Multiplicadores de Lagrange del borde.

Esta técnica de dominio ficticio, debida a J.Haslinger, T.Kozubek, K.Kunisch y G.Peichl, “An embedding domain approach for a class of 2-d shape optimization problems” [HKKP], evita la delicada cuestión de la dependencia continua del flujo normal sobre el borde del dominio.

Más precisamente se prueba en el Capítulo 4 que el multiplicador de Lagrange correspondiente a la componente de borde donde se prescribe concentración nula coincide con el flujo normal a través de dicha componente .

En el Capítulo 5 queda de manifiesto que estas técnicas constituyen un marco de trabajo para analizar problemas de optimización, pues proveen las herramientas para describir la dependencia continua de la concentración u y de los multiplicadores de Lagrange con respecto a la forma como variable. Este resultado es la principal contribución de este trabajo ya que implica la existencia de solución al problema de optimización de formas formulado en el Capítulo 4.

Finalmente en el Capítulo 6, se analiza bajo estas técnicas el caso de dominios cuya componente de borde interna cambia con el tiempo.

Los resultados originales contenidos en este trabajo son:

1. Extensión de los resultados de [HKKP] para el Laplaciano a operadores en forma de divergencia que modelan medios no isotrópicos.
2. Extensión de los resultados de [HKKP] cuando hay un término fuente.
3. Aplicación del Método de Dominio Inmerso y Continuidad con respecto a los parámetros junto con métodos de Compacidad para un problema de minimización de un nuevo funcional cuando el borde interno cambia con el tiempo.

CAPITULO 1

Los dominios admisibles

En este capítulo se define la familia de dominios a la que pertenece la variable de control para el problema de optimización de formas que se desarrollará en los Capítulos 3 a 6.

Consideraremos dominios conexos, cuyos complementos tengan dos componentes conexas (regiones anulares) en \mathbb{R}^2 y distinguiremos dos casos respecto de la curva interior de la frontera de estos dominios.

1.1. El caso de frontera interior fija

En esta sección vamos a definir el conjunto de los dominios planos admisibles para el problema de control óptimo, que se abordará en los Capítulos 3, 4 y 5 cuando la curva interior de la frontera del mismo está fija y en el Capítulo 6 cuando ésta tiene una dinámica conocida.

Designaremos con Γ_0 a esta curva fija del plano, cerrada, suave y simple contenida en el cuadrado $\Omega = (-1, 1)^2$. El ejemplo típico será una circunferencia.

La suavidad de Γ_0 que nos permitirá aplicar la teoría clásica de espacios de Sobolev es de tipo \mathcal{C}^1 . Esto significa que para cada punto $x_0 \in \Gamma_0$ existe un ϵ positivo y una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 tal que, en un adecuado sistema de coordenadas, se cumple que $\Omega_0 \cap B(x_0, \epsilon) = \{x = (x_1, x_2) \in B(x_0, \epsilon) / x_2 > f(x_1)\}$, donde Ω_0 es la componente conexa acotada del complemento de Γ_0 .

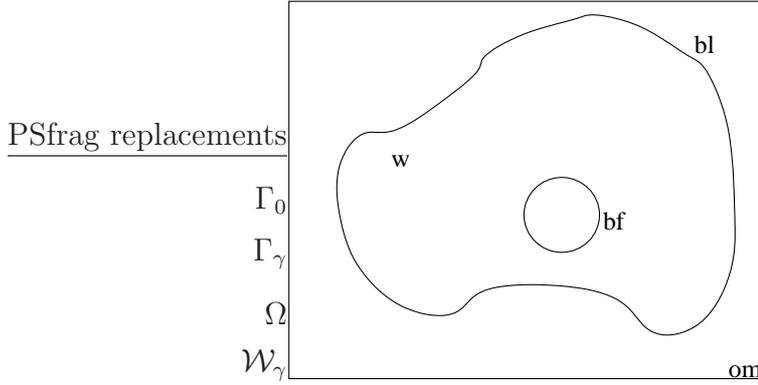


FIGURA 1.1. Dominio admisible, borde interior fijo.

Definiremos unas familias de curvas, cerradas y suaves, que “encierren a Γ_0 ” y que designaremos con Γ_γ , donde γ es una adecuada parametrización de Γ_γ . Denotaremos \mathcal{W}_γ a la región comprendida entre ambas curvas, cuya clausura deberá estar contenida en el cuadrado Ω , como se muestra en la FIGURA 1.1. A veces nos referiremos a Γ_γ como el borde libre de \mathcal{W}_γ .

Sean $h > 0, 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \infty, \alpha_3 > 0, \rho > 0$ y Γ_0 una curva cerrada simple suave contenida en Ω . Denotamos con $\mathcal{S}(h, \alpha_i, \rho, \Gamma_0)$ o $\mathcal{S}(h, \alpha_i, \rho)$ o simplemente \mathcal{S} , cuando todos los parámetros estén claros, al conjunto de todas las curvas $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega$ que satisfacen las siguientes propiedades:

- [S1] $\gamma \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi], \Omega)$;
- [S2] $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ y $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, para todo $t \neq s$;
- [S3] $\Gamma_\gamma = \gamma[0, 2\pi] \subset \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$ donde Ω_0 es el interior de la componente acotada del complemento de Γ_0 ;
- [S4] para todo $t \in [0, 2\pi]$ existen dos discos abiertos de radio h , B_i y B_e , tales que $\gamma(t) \in \overline{B}_i \cap \overline{B}_e$ con $B_i \subset \mathcal{W}_\gamma$ y $B_e \subset \Omega \setminus \overline{\mathcal{W}_\gamma}$;
- [S5] $|\dot{\gamma}(t)| \geq \alpha_1, \forall t \in [0, 2\pi]$ y $\|\dot{\gamma}\|_\infty \leq \alpha_2$;

$$\boxed{\text{S6}} \quad \|\ddot{\gamma}\|_{\infty} \leq \alpha_3;$$

$\boxed{\text{S7}}$ $\dot{\gamma}$ es Lipschitz continua con constante ρ , esto es

$$|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)| \leq \rho |t - s| \quad \text{con } t, s \in [0, 2\pi].$$

Una **familia de curvas** con estas propiedades será llamada **admisibile**.

Si $\gamma \in \mathcal{S}(h, \alpha_i, \rho, \Gamma_0)$ diremos que \mathcal{W}_γ es un dominio $h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho, \Gamma_0$ admisibile o simplemente un **dominio admisibile**, cuando los parámetros estén claros.

La regularidad \mathcal{C}^2 que se pide en $\boxed{\text{S1}}$ a los bordes libres quedará justificada más adelante, en la construcción del difeomorfismo necesario para demostrar que la familia de operadores trazas $\{\mathcal{T}_\gamma, \gamma \in S\}$ está uniformemente acotada. (Ver Cap 2, Sec. 2.5)

Las condiciones de $\boxed{\text{S2}}$ nos dicen que estas parametrizaciones γ corresponden a curvas cerradas y simples.

Dado que las curvas son conjuntos compactos, pues son las imágenes continuas en \mathbb{R}^2 del compacto $[0, 2\pi]$, $\boxed{\text{S3}}$ implica que “hay espacio” entre las curvas componentes del borde del dominio, así como entre el borde libre y el borde del cuadrado Ω , que denotaremos $\partial\Omega$, es decir existe $d > 0$ tal que $\text{dist}(\Gamma_0, \Gamma_\gamma) \geq d$ y $\text{dist}(\Gamma_\gamma, \partial\Omega) \geq d$.

La propiedad $\boxed{\text{S4}}$ implica que si designamos con x_i al centro del disco interior B_i entonces $\gamma(t) - x_i = h\nu(t)$ donde $\nu(t)$ es el vector unitario normal al borde libre Γ_γ y exterior al dominio \mathcal{W}_γ en el punto $\gamma(t)$. De esta manera para $\eta \in (0, 1)$, $\gamma(t) - \eta h\nu(t) \in \mathcal{W}_\gamma$ y de manera análoga $\gamma(t) + \eta h\nu(t) \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{W}_\gamma}$. Por lo tanto $\boxed{\text{S4}}$ implica que el h -entorno de Γ_γ , $E_\gamma = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Gamma_\gamma) < h\}$ puede escribirse en la forma $E_\gamma = \{\gamma(t) \pm \eta h\nu(t), \eta \in [0, 1), t \in [0, 2\pi]\}$. (Ver FIG. 1.2)

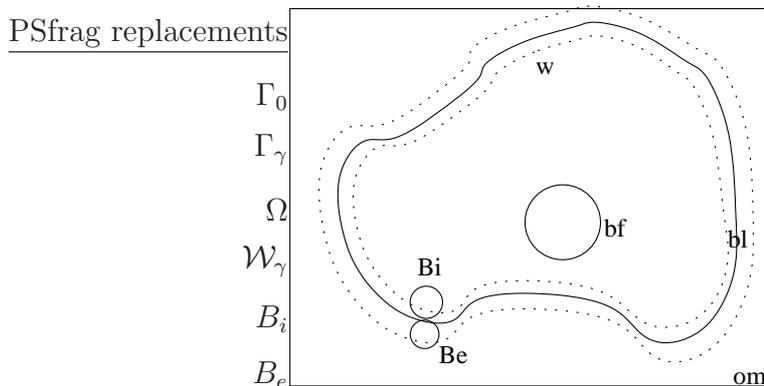


FIGURA 1.2. Entorno Tubular del borde libre.

Como consecuencia de [S5] notemos que toda parametrización en \mathcal{S} es regular, pues $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, para todo $t \in [0, 2\pi]$, estando así definido el vector tangente en todas partes.

En [S6] pedimos que la curvatura $|\ddot{\gamma}(t)|$ de Γ_γ esté acotada lo cual geoméricamente significa que la curva no podrá alejarse “tan rápido” de la tangente.

La propiedad [S7] será suficiente para obtener la compacidad de la clase \mathcal{S} (ver Proposición 1.1).

Si bien las propiedades cuantitativas en la definición de las clases admisibles no son independientes, notar por ejemplo que [S6] implica la estimación superior de $\|\dot{\gamma}\|_\infty$ contenida en [S5], las mantendremos a todas para mostrar la dependencia explícita de los parámetros en las estimaciones funcionales que obtendremos a lo largo de todo el trabajo.

Una topología natural sobre una familia \mathcal{S} como la que estamos considerando, y que atiende a la máxima regularidad requerida a las curvas

que la constituyen es la de $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, que está definida por la norma $\max_{k=0,1,2} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |\varphi^{(k)}(t)| = \max_{k=0,1,2} \|\varphi^{(k)}\|_\infty$.

Dado que el principal resultado de esta tesis es el **Teorema sobre la dependencia continua** de la concentración u y de los multiplicadores de Lagrange con respecto a la forma del dominio dada por γ de \mathcal{S} (Teorema 5.3), y que esto implica que la funcional J que se desea minimizar alcanza su mínimo en \mathcal{S} , la siguiente proposición que se basa en la propiedad S7 será útil para probar la existencia de solución.

Proposición 1.1. *Con la topología de la convergencia uniforme de las derivadas segundas, se tiene que \mathcal{S} es compacto.*

Según el espacio en que se encuentren los conjuntos, existen criterios especiales de compacidad que resultan más cómodos para la aplicación práctica. Así como en un espacio euclideo n -dimensional, la compacidad de un conjunto cerrado es equivalente a su acotación, para uno de los espacios métricos más importantes en el Análisis, el espacio $\mathcal{C}([a, b])$ de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$, un criterio importante y frecuentemente empleado de **compacidad relativa** de un conjunto, es decir, compacidad de su clausura, lo ofrece el siguiente teorema que es el resultado clásico principal en la prueba de la proposición anterior.

Teorema de Ascoli-Arzelà: Para que una familia A de funciones continuas definidas en $[a, b]$, sea relativamente compacta en $\mathcal{C}([a, b])$ es necesario y suficiente que A sea:

(i) **equiacotada**, es decir que debe existir una constante k tal que para todo $x \in [a, b]$ y para toda $f \in A$ se cumple que $|f(x)| < k$; y

(ii) **equicontinua**, es decir que para cada $\epsilon > 0$ debe existir un $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ para toda $f \in A$ y para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $|x_1 - x_2| < \delta$.

DEMOSTRACIÓN. (**Proposición 1.1**)

Para probar que \mathcal{S} es compacto tenemos que ver que si $\{\gamma_n\}_n$ es una sucesión cualquiera en \mathcal{S} entonces existe una subsucesión $\{\gamma_{n_j}\}_j$ de $\{\gamma_n\}$ tal que γ_{n_j} converge a una γ perteneciente a \mathcal{S} . La sucesión de vectores planos $\{\gamma_n(0)\}$ está contenida en Ω , por consiguiente tiene algún punto de acumulación x^0 en $\bar{\Omega}$. Por [S4] este punto pertenece a Ω . Por [S1] cada $\dot{\gamma}_n \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$, más aún como γ_n satisface [S7] se tiene que $\{\ddot{\gamma}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia equicontinua de funciones sobre $[0, 2\pi]$ ya que $|\ddot{\gamma}_n(t) - \ddot{\gamma}_n(s)| \leq \rho |t - s|$. Como además cada γ_n satisface [S6], resulta que $|\ddot{\gamma}_n(s)| \leq \alpha_3$, para todo $s \in [0, 2\pi]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir $\{\ddot{\gamma}_n\}$ resulta equiacotada.

Así el Teorema de Ascoli-Arzelá asegura que esta familia es precompacta, es decir existe una subsucesión $\{\ddot{\gamma}_{n_k}\}_k$ de $\{\ddot{\gamma}_n\}_n$ y una función continua φ tal que $\ddot{\gamma}_{n_k}$ converge uniformemente a φ en $[0, 2\pi]$, en otros términos $\ddot{\gamma}_{n_k} \rightrightarrows \varphi$.

Redesignando los elementos de esta subsucesión con $\ddot{\gamma}_n$, notemos que para cada $t \in [0, 2\pi]$, podemos escribir $\dot{\gamma}_n(t) = \dot{\gamma}_n(0) + \int_0^t \ddot{\gamma}_n(s) ds$

Además por [S6] resulta que $|\dot{\gamma}_n(t) - \dot{\gamma}_n(s)| \leq \left| \int_s^t \ddot{\gamma}_n \right| \leq \alpha_3 |t - s|$.

Por lo tanto $\{\dot{\gamma}_n\}_n$ es equicontinua y uniformemente acotada por [S5].

Nuevamente el Teorema de Ascoli-Arzelá nos permite inferir que este conjunto es precompacto, por lo cual existe una subsucesión $\dot{\gamma}_{n_j}$ uniformemente convergente, esto es, $\dot{\gamma}_{n_j} \rightrightarrows \phi \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$.

Volviendo a integrar podemos escribir para esta subsucesión

$\gamma_{n_j}(t) = \gamma_{n_j}(0) + \int_0^t \left\{ \dot{\gamma}_{n_j}(0) + \int_0^s \ddot{\gamma}_{n_j}(\tilde{s}) d\tilde{s} \right\} ds$. Finalmente haciendo $j \rightarrow \infty$, $\gamma_{n_j} \rightrightarrows \gamma$ donde $\gamma(t) = x^0 + \int_0^t \left\{ \phi(0) + \int_0^s \varphi(\tilde{s}) d\tilde{s} \right\} ds$.

Resta ver que $\gamma \in S$. Por construcción las propiedades $\boxed{\text{S1}}$ y $\boxed{\text{S2}}$ son inmediatas. Que γ satisface $\boxed{\text{S3}}$ es una consecuencia de $\boxed{\text{S3}}$ y $\boxed{\text{S4}}$ para las γ_n . Que γ satisface $\boxed{\text{S4}}$ también se deduce de $\boxed{\text{S4}}$ para $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Puesto que $\dot{\gamma}(t) = \phi(0) + \int_0^t \varphi(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} (\dot{\gamma}_n(0) + \int_0^t \ddot{\gamma}_n(s) ds) = \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\gamma}_n(t)$, $\boxed{\text{S5}}$ se satisface para γ . Análogamente, como $\ddot{\gamma}(t) = \varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{\gamma}_n(t)$, obtenemos que γ satisface $\boxed{\text{S6}}$.

Finalmente, dado que $|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\dot{\gamma}_{n_j}(t) - \dot{\gamma}_{n_j}(s)| \leq \rho |t - s|$, es claro que $\dot{\gamma}$ satisface $\boxed{\text{S7}}$.

□

El siguiente lema juega un papel fundamental en la prueba de la acotación uniforme de los operadores de traza, que se dará en el siguiente capítulo, y en su demostración se reflejan claramente las propiedades básicas de las familias de curvas admisibles.

Dada $\gamma \in \mathcal{S}$, sea E_γ^r el r -entorno de la curva Γ_γ con $r \leq h$ dado por $E_\gamma^r = \{\gamma(t) \pm \eta r \nu(t), \eta \in [0, 1), t \in [0, 2\pi]\}$. Consideraremos el subconjunto D_γ^r de E_γ^r dado por

$$D_\gamma^r = \{\gamma(t) + r\eta\nu(t), \eta \in (-1, 1), t \in (0, 2\pi)\},$$

consistente en “cortar” E_γ^r eliminando un segmento de recta para que D_γ^r sea \mathcal{C}^1 -difeomorfo con $Q = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$.

Lema 1.2. *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}(h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho, \Gamma_0)$ una familia de curvas admisibles dada. Entonces existe $r : 0 < r \leq h$ que sólo depende de h y de α_i tal que para cada $\gamma \in \mathcal{S}$, la aplicación $T_\gamma : Q \rightarrow D_\gamma^r$ definida por $T_\gamma(t, \eta) = \gamma(t) + r\eta\nu(t)$ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 entre Q y D_γ^r . Más aún la norma Frobenius de la matriz jacobiana de la aplicación inversa, $\|(DT_\gamma)^{-1}\|_F$ está acotada uniformemente para toda γ en \mathcal{S} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma \in \mathcal{S}$ dada. Es claro que para cada $x \in E_\gamma$ existe algún instante $t_0 = t(x) \in [0, 2\pi)$ tal que t_0 minimiza la función $d(t) = |x - \gamma(t)|^2$. Veamos que existe $r : 0 < r \leq h$ tal que para cada $x \in E_\gamma^r$ es único el punto $p(x)$ sobre la curva Γ_γ , al que llamaremos la proyección de x sobre Γ_γ , y que minimiza la distancia entre x y Γ_γ .

Dado que $\dot{d}(t) = \frac{d}{dt} |x - \gamma(t)|^2 = -2(x - \gamma(t), \dot{\gamma}(t))$, entonces por [S5](#) y [S6](#) tenemos en $\{t \in (0, 2\pi) : |x - \gamma(t)| < r\}$ la estimación

$$\ddot{d}(t) = 2|\dot{\gamma}|^2 - 2(x - \gamma(t), \ddot{\gamma}(t)) \geq 2(\alpha_1^2 - |x - \gamma(t)| |\ddot{\gamma}(t)|) \geq 2(\alpha_1^2 - r\alpha_3),$$

que muestra que $\ddot{d}(t) > \alpha_1^2$, para r suficientemente chico, independiente de x y de $\gamma \in \mathcal{S}$, y por lo tanto existe un único $t^* \in [0, 2\pi)$ que minimiza d . Notemos que $\gamma(t^*) = p(x)$ y que $x - \gamma(t^*) = l\nu(t^*)$ con $l = \pm |x - \gamma(t^*)|$ según $x \in (\Omega \setminus \mathcal{W}_\gamma) \cap D_\gamma$ o $x \in \mathcal{W}_\gamma \cap D_\gamma$ respectivamente. Por lo tanto, todo $x \in D_\gamma$ puede representarse de manera única como $x = \gamma(t) + h\eta\nu(t)$. Es decir, existe un único par $(t, \eta) \in Q$ para todo $x \in D_\gamma$, con lo cual la aplicación T_γ es biyectiva. Notemos que, puesto que $\nu(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t))$ es el vector normal exterior a γ y suponemos que Γ_γ está parametrizada en sentido antihorario en $[0, 2\pi)$, necesariamente $-\dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)| = (\nu_2(t), -\nu_1(t))$. Entonces, el

determinante de la matriz jacobiana de T_γ es

$$\det[DT_\gamma(t, \eta)] = \begin{vmatrix} \dot{\gamma}_1 + r\eta\dot{\nu}_1 & r\nu_1 \\ \dot{\gamma}_2 + r\eta\dot{\nu}_2 & r\nu_2 \end{vmatrix} = -r|\dot{\gamma}| - r^2\eta(\dot{\nu} \cdot \dot{\gamma}/|\dot{\gamma}|),$$

por consiguiente, por la desigualdad de Schwartz y por [S5] y [S6], $|\det[DT_\gamma(t, \eta)]| \geq r(|\dot{\gamma}| - r\eta|\dot{\nu}|) \geq r(\alpha_1 - r\eta|\dot{\nu}|) \geq r\alpha_1/2$, para r suficientemente chico pero que sólo depende de los parámetros de la familia \mathcal{S} . Por lo tanto T_γ define un difeomorfismo \mathcal{C}^1 de Q en D_γ^r . Notar que en esta prueba sólo se ha usado que la curva es de clase \mathcal{C}^1 .

Ahora estimamos la norma Frobenius de la matriz jacobiana de T_γ^{-1} , definida como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus elementos,

$$\begin{aligned} \|(DT_\gamma)^{-1}\|_F^2 &= \frac{1}{|\det DT_\gamma|^2} \left\| \begin{pmatrix} r\nu_2 & -r\nu_1 \\ -\dot{\gamma}_2 - r\eta\dot{\nu}_2 & \dot{\gamma}_1 + r\eta\dot{\nu}_1 \end{pmatrix} \right\|_F^2 \\ &= \frac{1}{|\det DT_\gamma|^2} (r^2 + |\dot{\gamma} + r\eta\dot{\nu}|^2) \leq \frac{4c}{(r\alpha_1)^2} = \tilde{c}, \end{aligned}$$

donde c es una constante que depende de las cotas uniformes para $|\dot{\gamma}|$ y $|\dot{\nu}|$ dadas por [S5] y [S6].

□

El próximo lema que muestra que si γ y σ son dos curvas próximas entonces $T_\sigma^{-1} \circ T_\gamma$ está próxima a la identidad, se aplicará en el capítulo siguiente para probar la convergencia de los operadores extensión en los espacios funcionales correspondientes.

Lema 1.3. *Sea T_γ el difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 entre Q y D_γ definido en el Lema 1.1 para $\gamma \in \mathcal{S}(h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$*

tal que si $\sigma \in \mathcal{S}(h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $\max_{k=0,1,2} \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{d^k}{dt^k} (\gamma(t) - \sigma(t)) \right| < \delta$ entonces $|(T_\sigma^{-1} \circ T_\gamma)(t, \eta) - (t, \eta)| < \epsilon$, $(t, \eta) \in Q \cap T_\gamma^{-1}(D_\sigma \cap D_\gamma)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T_\gamma : Q \rightarrow D_\gamma$ y $T_\sigma : Q \rightarrow D_\sigma$. Entonces

$$T_\sigma^{-1} \circ T_\gamma : Q \cap T_\gamma^{-1}(D_\gamma \cap D_\sigma) \rightarrow Q.$$

Siempre que $|T_\gamma(t, \eta) - T_\sigma(t, \eta)| < \tilde{\delta}$ para algún $\tilde{\delta}_\epsilon > 0$, se tiene que $|(T_\sigma^{-1} \circ T_\gamma)(t, \eta) - (t, \eta)| = |T_\sigma^{-1}(T_\gamma(t, \eta)) - T_\sigma^{-1}(T_\sigma(t, \eta))| < \epsilon$ pues T_σ^{-1} es uniformemente continua en el compacto Q .

Por otra parte, tomando $\delta < \frac{\tilde{\delta}}{1+h}$, tenemos

$$\begin{aligned} |T_\gamma(t, \eta) - T_\sigma(t, \eta)| &= |(\gamma(t) + \eta r \nu_\gamma(t)) - (\sigma(t) + \eta r \nu_\sigma(t))| \\ &\leq |\gamma(t) - \sigma(t)| + \eta r |\nu_\gamma(t) - \nu_\sigma(t)| \\ &< (1 + \eta r) \delta < (1 + h) \delta < \tilde{\delta}, \end{aligned}$$

ya que por hipótesis γ y σ están cerca en el sentido de la norma de $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, $-1 \leq \eta \leq 1$ y $r \leq h$.

□

1.2. El caso de frontera interior con dinámica prescrita

Los dominios admisibles doblemente conexos tienen ahora como borde interno, que denotaremos con Γ_0^t , una curva suave que se contrae a medida que transcurre el tiempo y que suponemos conocida para cada $t \in [0, T]$. Enfatizamos que es preciso distinguir esta nueva variable t de la variable de parametrización s de las curvas Γ_0^t y $\Gamma_\gamma \in \mathcal{S}$. Para estos dominios el problema de optimización involucra un nuevo funcional que estudiaremos en el Capítulo 6. Describiremos a continuación las

propiedades básicas de la familia $\mathcal{G} = \{\Gamma_0^t : t \in [0, T]\}$ que serán relevantes en el análisis en ese capítulo. Si bien estaremos requiriendo a esta clase de curvas varias de las propiedades de las familias \mathcal{S} descritas en la Sección 1, es preciso tener en mente que una situación sencilla es el caso en que Γ_0^t sean circunferencias concéntricas de radio decreciente que llenan el anillo entre Γ_0^0 y Γ_0^T . Mientras que por otra parte la familia \mathcal{S} de curvas admisibles que no es monoparamétrica, ni mucho menos, tiene las propiedades de la Sección 1 con respecto a Γ_0^0 . Denotaremos \mathcal{W}_γ^t a la región comprendida entre Γ_0^t y Γ_γ para cada $t \in [0, T]$, con $\mathcal{W}_\gamma = \mathcal{W}_\gamma^0$. (Ver FIGURA 1.3)

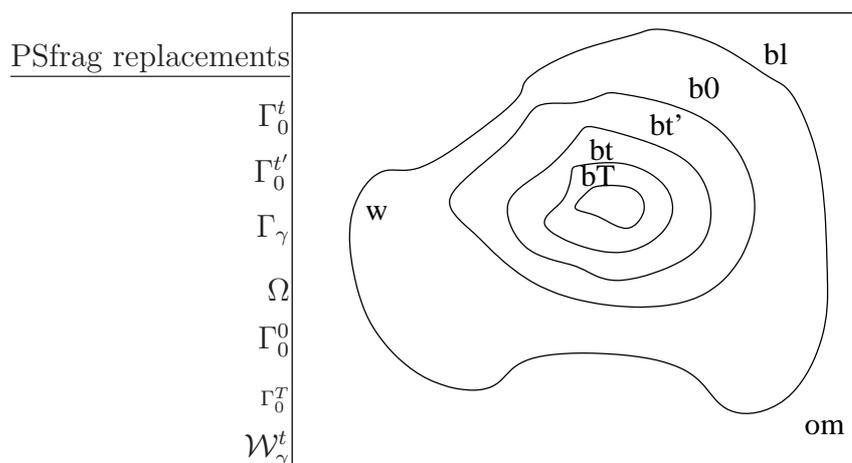


FIGURA 1.3. Dominios admisibles dinámicos.

En lo que sigue designaremos con γ_0^t a la parametrización de la curva “interior” de clase \mathcal{C}^2 , $\Gamma_0^t = \gamma_0^t([0, 2\pi])$ y la veremos como la sección en $t \in [0, T]$ de la función $\gamma_0 : [0, T] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface:

- D1** Para cada $t \in [0, T]$ se tiene que $\gamma_0(t, 0) = \gamma_0(t, 2\pi)$ y que $\gamma_0(t, s) \neq \gamma_0(t, s')$ si $s \neq s'$. En términos geométricos, cada Γ_0^t es cerrada y simple .
- D2** La curva $\Gamma_0^0 \subset \Omega = (-1, 1)^2$.
- D3** Siempre que $t' < t$, cada curva $\Gamma_0^t \subset \Omega_0^{t'}$. $\Omega_0^{t'}$ es la componente conexa acotada del complemento de $\Gamma_0^{t'}$. En otros términos $\Omega_0^t \subset \Omega_0^{t'}$. Geométricamente esta propiedad describe la monotonía de las curvas Γ_0^t .
- D4** $\Omega_0^T \neq \emptyset$. Supondremos por simplicidad de notación que $0 \in \Omega_0^T$ y entonces, existe $\eta > 0$ tal que $\overline{B(0, \eta)} \subset \Omega_0^T$.
- D5** Las parametrizaciones $\{\gamma^t(\cdot) : t \in [0, T]\}$ satisfacen uniformemente en $t \in [0, T]$ las propiedades **S1** a **S7** con respecto a $\partial B(0, \eta)$.
- D6** La familia $\{\Gamma_0^t, t \in [0, T]\}$ es continua en t en el siguiente sentido: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0 : |t - t'| < \delta$ implica $\Gamma_0^{t'} \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : dist(x, \Gamma_0^t) < \epsilon\}$.

En el caso de las circunferencias concéntricas antes mencionado, $\Gamma_0^t = \partial B(0, r(t))$ donde el radio $r(t)$ está dado por la función r monótona decreciente en $[0, T]$ y tal que $r(0) = 1$; $r(t) > 0$ para todo t ; $r(T) = \epsilon_0 > 0$. Tenemos entonces la familia de curvas $\mathcal{G} = \{\Gamma_0^t, t \in [0, T]\}$ cuyas parametrizaciones γ_0^t satisfacen las propiedades de \mathcal{S} con respecto a $\Gamma_0^T = \partial B(0, \epsilon_0)$ como curva interior fija.

En el Capítulo 6, cuando usemos la expresión $\{\mathcal{W}_\gamma^t : t \in [0, T], \gamma \in \mathcal{S}\}$ es una “familia admisible con frontera interior dependiente del tiempo”, querremos decir que:

(i) está dada una familia $\mathcal{G} = \{\Gamma_0^t : t \in [0, T]\}$ que satisface las propiedades $\boxed{\text{D1}}$ a $\boxed{\text{D6}}$,

(ii) está dada una familia $\mathcal{S}(h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho, \Gamma_0^0)$ de curvas admisibles que satisface $\boxed{\text{S1}}$ a $\boxed{\text{S7}}$ con respecto a Γ_0^0 .

Con esta definición, por $\boxed{\text{D3}}$, vemos que la familia $\mathcal{S}(h, \alpha_i, \rho, \Gamma_0^0)$, que seguiremos denotando $\mathcal{S}(h, \alpha_i, \rho)$, también satisface las propiedades de admisibilidad con los mismos parámetros pero con respecto a cualquier otra de las curvas Γ_0^t con $t \in [0, T]$.

CAPITULO 2

Generalidades sobre Problemas extremales y Espacios de Sobolev

Los problemas extremales son muy variados, sin embargo usualmente es posible separar tres componentes en ellos : una función a optimizar $f(v)$, su dominio X y un subconjunto K de X , que dá las condiciones del problema. En palabras un problema extremal puede formularse de la siguiente manera: *Encontrar el ínfimo, o supremo, de la función $f(v)$ sobre todos los v que pertenecen al conjunto K de los elementos admisibles.*

Para el tratamiento de problemas de optimización, la convexidad representa la propiedad natural. Su suposición hace posible evadir ciertas hipótesis de continuidad y diferenciabilidad que, en problemas de optimización en espacios de dimensión infinita, imponen restricciones muy fuertes.

En la primera sección de este capítulo recordaremos conceptos básicos en la teoría de problemas extremales correspondientes al Cálculo Diferencial en espacios de Banach. El principal resultado de esta sección es el Principio de los Multiplicadores de Lagrange, que proporciona condiciones necesarias para la existencia de un extremo.

Dado que la solución al problema de minimización en estudio debe satisfacer un problema de contorno, los Espacios de Sobolev constituyen

el marco natural de trabajo y aspectos generales de su teoría serán abordados en la segunda sección.

En la tercera sección se presentan los espacios de Sobolev periódicos en los que la literatura es menos abundante y serán una herramienta imprescindible en nuestro trabajo ulterior.

2.1. Cálculo Diferencial en Espacios de Banach

Los espacios métricos en los que resulta equivalente decir que una sucesión es convergente a decir que es de Cauchy, se llaman **espacios métricos completos**. En particular, los espacios normados completos reciben el nombre de **espacios de Banach**.

Sabemos que dado un espacio normado cualquiera X , siempre existe un espacio de Banach \bar{X} , tal que X es isométrico a un subespacio vectorial denso de \bar{X} y, la norma inducida por \bar{X} en X coincide con la norma original de X . Además \bar{X} es único, salvo isomorfismo vectorial y métrico. El espacio de Banach \bar{X} se llama **completado o completación** de X .

Los fundamentos de una teoría de la derivada existen para funciones con dominios y rangos en espacios de Banach. La idea principal en el Cálculo diferencial es la aproximación local de una función por una aplicación lineal y el concepto central es el de la **diferencial Frèchet**.

Recordemos algunos conceptos primarios referentes al Análisis Funcional No Lineal al que pertenece, de hecho, una rama clásica de las Matemáticas que es el **Cálculo de Variaciones**.

Definición 2.1 (Primera variación y Derivada Gâteaux). Sea X un espacio vectorial, Y un espacio lineal normado, $F : X \rightarrow Y$ una función dada y $u \in X$ un punto fijo. Si para todo $v \in X$, existe la derivada direccional de F en u en la dirección de v ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}$$

a la que denotaremos $(DF)(u)v$, entonces la aplicación $v \mapsto (DF)(u)v$ se llama **primera variación** de F en u .

Aquí el límite debe entenderse en el sentido de la convergencia según la norma del espacio Y .

Notemos además que $(DF)(u)v = \frac{d}{dt}[F(u + tv)]|_{t=0}$.

Si la primera variación de F en u es una aplicación lineal y continua de v , diremos que $(DF)(u)$ es la **derivada o diferencial de Gâteaux** de la función F en el punto u .

Notemos que F es diferenciable Gâteaux en u si y sólo si, existe una aplicación lineal y continua $\Lambda : X \rightarrow Y$

$$F(u + tv) = F(u) + t\Lambda v + o(t) \text{ para cualquier } v \in X$$

donde $o(t)$ es una función tal que $o(t)/|t| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Además Λ es la única aplicación lineal y continua que satisface esta propiedad a la que denotaremos $f'_G(u)$.

Una de las aplicaciones más importantes de la derivada Gâteaux está en la determinación del máximo y mínimo de funcionales. Puede demostrarse que si la funcional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo o un máximo en $u \in X$ y existe $f'_G(u)$, entonces $f'_G(u) = 0$. El recíproco es válido para funcionales convexas.

Recordemos que una función $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v)$$

para todo $u, v \in V$, subconjunto convexo de X , y $0 < t < 1$.

El siguiente concepto de derivada es más fuerte que el de Gâteaux, en particular implica la continuidad.

Definición 2.2 (Derivada Frèchet). Sea $F : X \rightarrow Y$, ambos espacios normados lineales, dado $u \in X$, si existe un operador lineal y continuo $\Lambda : X \rightarrow Y$ tal que

$$\lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(u+v) - F(u) - \Lambda v\|_Y}{\|v\|_X} = 0$$

entonces F se dice diferenciable Frèchet en u y Λ se llama **derivada Frèchet de F en u con incremento v** .

Si existe esta derivada para todo punto de un abierto U de X , diremos que F es **Fréchet diferenciable en U** .

En otras palabras diremos que $F : X \rightarrow Y$, ambos espacios normados, es diferenciable Frèchet, o fuertemente diferenciable, en el punto u si y sólo si, existe una aplicación lineal y continua $\Lambda : X \rightarrow Y$ tal que

$$F(u+v) = F(u) + \Lambda(v) + r(v)$$

$$\text{donde } \frac{\|r(v)\|_Y}{\|v\|_X} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|v\|_X \rightarrow 0.$$

Observemos que la aplicación Λ con estas propiedades es única y la denotaremos $F'(u)$.

Recordando que la topología en el espacio de los operadores lineales y continuos de X en Y , ambos espacios de Banach, que denotaremos $\mathcal{L}(X, Y)$, es la topología generada por la norma

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{\|\Lambda v\|_Y}{\|v\|_X},$$

es fácil ver que:

Si $F : U \subset X \rightarrow Y$, U entorno de u en X , es Frèchet diferenciable en u entonces F es continua en u y Gâteaux diferenciable en este punto, y ambas derivadas coinciden, es decir $F'_G(u) = F'(u)$.

En general la derivada Frèchet es difícil de calcular. Por ello para probar que F es diferenciable Frèchet en u y para hallar su derivada de Frèchet en u podemos calcular la diferencial-Gâteaux en la dirección de v , y si existe ver luego si es cierto que

$$F(u + v) = F(u) + F'_G(u)(v) + r(v)$$

$$\text{donde } \frac{\|r(v)\|_Y}{\|v\|_X} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|v\|_X \rightarrow 0.$$

Por ejemplo es fácil ver que para $F : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ definida por

$F(u(x)) = u^2(x)$, se tiene que $F'_G(u)v = 2uv$. Por otra parte

$$\lim_{\|v\|_{\mathcal{C}[0,1]} \rightarrow 0} \frac{\|F(u + v) - F(u) - 2uv\|_{\mathcal{C}[0,1]}}{\|v\|_{\mathcal{C}[0,1]}} = \lim_{\|v\|_{\mathcal{C}[0,1]} \rightarrow 0} \frac{\|v\|^2}{\|v\|} = 0.$$

Por lo tanto $F'(u)v = 2uv$.

También puede asegurarse que si $F : U \subset X \rightarrow Y$, U abierto, es diferenciable Gâteaux en cada punto de U , y si F'_G es continua de U en $\mathcal{L}(X, Y)$, entonces es Frèchet diferenciable en U y para todo $u \in U$, $F'_G(u) = F'(u)$.

Este resultado es una consecuencia del **Teorema del valor medio en espacios de Banach**.

Si $F : U$ (abierto) $\subset X \rightarrow Y$ es diferenciable Gâteaux en cada punto del “intervalo” $[u, u+v] = \{w/w = u + tv, 0 \leq t \leq 1\} \subset U$ y la aplicación $w \mapsto F'_G(w)v$ es continua de $[u, u+v]$ en Y , entonces

$$\|F(u+v) - F(u)\|_Y = \left\| \int_0^1 F'_G(u+tv)v dt \right\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|F'_G(u+tv)\|_{\mathcal{L}} \|v\|_X$$

y para cualquier $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$\|F(u+v) - F(u) - \Lambda v\|_Y \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|F'_G(u+tv) - \Lambda\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|v\|_X.$$

Por lo tanto tomando en particular $\Lambda = F'_G(u)$ tenemos

$$\|F(u+v) - F(u) - F'_G(u)v\|_Y \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|F'_G(u+tv) - F'_G(u)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|v\|_X.$$

Como la aplicación $w \mapsto F'_G(w)$ de U en $\mathcal{L}(X, Y)$ es continua, para cada ϵ positivo existe un δ positivo tal que $\|w - u\| < \delta$ implica $\|F'_G(w) - F'_G(u)\| < \epsilon$.

Por lo tanto $\|F(u+v) - F(u) - F'_G(u)v\| = o(\|v\|)$, lo cual significa que F es Frèchet-diferenciable y $F'(u) = F'_G(u)$.

Para probar el principio de los multiplicadores de Lagrange usaremos como base el **Método de variaciones** y aplicaremos el **Teorema de Ljusternik** que describe en términos algebraicos al conjunto tangente al gráfico de una aplicación diferenciable Frèchet en un punto regular.

Definimos el **cono tangente** C en el punto u a un subconjunto K de un espacio de Banach X como el conjunto de los vectores $v \in X$ para los cuales existen $\varepsilon > 0$ y una aplicación $t \mapsto r(t)$ del intervalo $[0, \varepsilon]$ en X , tal que $u + tv + r(t) \in K$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$ y $t^{-1} \|r(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. (Notemos que este conjunto C es un cono puesto que para todo α positivo, $\alpha v \in C$ para todo $v \in C$.)

Diremos que $F : X \rightarrow Y$ (ambos espacios normados) es una **aplicación regular** en $u \in X$ si F es Frèchet diferenciable en u y si la aplicación $F'(u) : X \rightarrow Y$ dada por $v \mapsto F'(u)v$ es suryectiva.

Cuando exista $F'(w)$ para todo $w \in U$ abierto en X y la aplicación $\Lambda : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ dada por $w \mapsto F'(w)$ sea continua en $u \in U$ entonces diremos que F es **continuamente diferenciable en el punto u o de clase \mathcal{C}^1 en u** .

Teorema de Ljusternik: Sean X e Y dos espacios de Banach, U abierto en X y la aplicación $F : U \rightarrow Y$ continuamente diferenciable Frèchet en $u \in U$ y regular en u entonces, el cono tangente al conjunto $K = \{v \in U : F(u) = F(v)\}$ en el punto u coincide con el espacio vectorial definido por el núcleo del operador $F'(u)$. (Por una demostración ver [I-T] pág 30 a 36).

La esencia del **Método de variaciones** es la siguiente:

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se considera el problema general “ $\underset{v \in K}{\text{minimizar}} f(v)$ ”, $K \subset X$. Cuando X es un espacio topológico y u es un punto de X , una **variación de u** es una aplicación continua de $[0, \epsilon] \rightarrow X$ dada por

$\lambda \mapsto v(\lambda)$ y tal que $v(0) = u$ y ϵ es algún número positivo. Diremos que una variación es admisible para el problema de minimización planteado, si para λ suficientemente pequeño todos los puntos de la curva $v(\lambda)$ pertenecen a K . Si una variación $v(\lambda)$ es tal que la función $\varphi(\lambda) = f(v(\lambda))$ es diferenciable en 0 y si u es un punto de mínimo local de f , la función φ debe tener un mínimo en 0 y por lo tanto $\varphi'(0) \geq 0$ (condición necesaria para un mínimo de una función de una variable definida en $[0, \epsilon]$).

Teorema 2.3. (El principio de los multiplicadores de Lagrange):

Sean X e Y dos espacios de Banach y u un punto de mínimo del problema “minimizar $f(v)$ ” con $K = \{v \in X : F(v) = 0\}$, donde $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable Fréchet en u y $F : X \rightarrow Y$ es continuamente diferenciable Fréchet en u y regular en ese punto. Entonces existe en Y^* , dual de Y , un elemento y^* llamado multiplicador de Lagrange tal que

$$(1) \quad f'(u) - [F'(u)]^* y^* = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que F satisface las hipótesis del Teorema de Ljusternik en el punto u . Por lo tanto el espacio tangente al conjunto $K = \{v \in X : F(v) = 0\}$ en u coincide con el núcleo del operador $F'(u) : X \rightarrow Y$ dado por $v \mapsto F'(u)v$.

Si w pertenece al núcleo de $F'(u)$, entonces por definición de cono tangente podemos construir una variación del punto u , $v(t, w) = u + tw + r(t) \in K$, es decir $F(v(t, w)) = 0$ para $-\epsilon \leq t \leq \epsilon$, $\epsilon > 0$ y $t^{-1} \|r(t)\| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow 0$. Entonces la función $\varphi(t) = f(v(t, w))$ alcanza un mínimo local para $t = 0$, y por lo tanto $\varphi'(0) = f'(u)(w) = 0$ para todo w perteneciente al núcleo de $F'(u)$. Así $f'(u) \in \text{Im}[F'(u)]^*$,

ya que el espacio ortogonal al núcleo de un operador lineal, continuo y suryectivo entre espacios de Banach es igual a la imagen del operador adjunto. (Por una demostración, ver Lema pág 16 en [I-T]).

Por lo tanto existe $y^* \in Y^*$ tal que $f'(u) = [F'(u)]^*y^*$, quedando así demostrado el teorema.

□

Notemos que dado $y^* \in Y^*$ entonces $x^*(v) = y^*(F(v))$, $v \in X$, define un elemento de X^* . Como x^* es lineal su diferencial de Fréchet coincide con x^* y $x^* = (x^*)' = (y^* \circ F)'$. Por otra parte el operador adjunto $[F'(u)]^* : Y^* \rightarrow X^*$ está definido por $[F'(u)]^*y^* = x^*$, con lo cual tenemos que $(y^* \circ F)' = F'^*(u)y^*$. Por lo tanto (1) es equivalente a decir que, el funcional Lagrangiano $L(v, y^*) = f(v) - y^*(F(v))$ es estacionario en u , i.e. la diferencial de L en u es nula.

Usaremos $\langle y^*, F(v) \rangle_{Y^*, Y}$ para denotar el escalar $y^*(F(v))$.

2.2. Espacios de Sobolev

Dado el problema de encontrar una función u que satisfaga una ecuación diferencial de orden m y una o más condiciones de borde, es claramente de gran valor saber de antemano cuándo tal solución existe, y si es así, cuándo es única y finalmente cuán suave es esta función u .

Cuando se estudian estas cuestiones uno está esencialmente ocupándose de las propiedades de un operador diferencial parcial definido entre espacios de funciones, por lo cual para comenzar es necesario elegir los espacios adecuados.

Aunque los espacios $C^m(\mathcal{W})$ de las funciones m veces continuamente diferenciables con dominio \mathcal{W} abierto y acotado en \mathbb{R}^n , aparentan

ser apropiados para tratar ecuaciones diferenciales de orden m , presentan la desventaja de no ser completos con respecto a las normas de energía que son las naturales al intentar resolver el problema de Dirichlet minimizando el funcional $J(u) = \int_{\mathcal{W}} |\nabla u|^2 dx$, para $u \in K = \{u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{W}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathcal{W}}) : u = g \text{ en } \Gamma = \partial\mathcal{W}\}$.

Si bien no existe una completa equivalencia entre el problema de Dirichlet y el problema de minimización, al minimizar J sobre K se está considerando la expresión $J(u)$ evaluada en sucesiones de funciones pertenecientes a K , y si queremos asegurar la existencia de un mínimo debemos demostrar que existe el límite de dicha sucesión. Lamentablemente no es posible capturar fácilmente este límite en la clase K , y es más fácil extender K a funciones que sí tengan este límite.

Aquí es donde surgen los **espacios de Sobolev** como el marco natural para el estudio de problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales, porque antes que nada son la completación de $\mathcal{C}^m(\mathcal{W})$ respecto a las normas adecuadas y es posible obtener resultados bastante generales sobre existencia y unicidad de soluciones. Además producen una forma muy natural para caracterizar el grado de suavidad de una función, esto es ¿cuántas veces puede ser diferenciada la función en el sentido débil, que definiremos enseguida, antes de dejar de pertenecer al espacio?

También, métodos de solución aproximada como Galerkin para Elementos Finitos, son correctamente formulados e implementados en sub-espacios de dimensión finita de un espacio de Sobolev.

Como pretendemos introducir los conceptos y resultados estrictamente necesarios para nuestro trabajo, resulta suficiente la teoría básica del

espacio de Sobolev de orden de derivación igual a uno, con la norma cuadrática y en dimensión dos.

Con $L^2(\mathcal{W})$ denotaremos el espacio de las funciones a valores reales definidas en \mathcal{W} que son de cuadrado integrable.

Recordemos que en $L^2(\mathcal{W})$ identificamos dos funciones cuando coinciden en casi todo punto de \mathcal{W} , es decir que sólo pueden diferir sobre un subconjunto de \mathcal{W} de medida cero. Tenemos entonces que $L^2(\mathcal{W})$ con el producto escalar usual $(u, v)_{\mathcal{W}} := \int_{\mathcal{W}} u(x) v(x) dx$ y la norma inducida $\|u\|_{L^2(\mathcal{W})} := \left(\int_{\mathcal{W}} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ resulta un espacio de Hilbert.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ es un par de enteros no negativos y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, la α -ésima **derivada parcial débil** de una función $u \in L^2(\mathcal{W})$, denotada por $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2}$, es la distribución (funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{W})$), definida por

$$(D^\alpha u)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathcal{W}} u D^\alpha \phi dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{W}).$$

Definimos el **espacio de Sobolev de orden uno** como el espacio de todas las funciones escalares de $L^2(\mathcal{W})$ cuyas derivadas parciales débiles de primer orden también son funciones de cuadrado integrable en \mathcal{W} . Simbólicamente $H^1(\mathcal{W}) = \{u : D^\alpha u \in L^2(\mathcal{W}), \forall |\alpha| \leq 1\}$.

Introduciendo en $H^1(\mathcal{W})$ el producto interno de Sobolev, definido por

$$(u, v)_{H^1(\mathcal{W})} := \int_{\mathcal{W}} \sum_{|\alpha| \leq 1} D^\alpha u D^\alpha v dx \quad \forall u, v \in H^1(\mathcal{W})$$

se genera una norma llamada **norma de Sobolev de orden uno** que denotaremos con $\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{W})}$. De esta manera para cada $u \in H^1(\mathcal{W})$

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{W})}^2 = \int_{\mathcal{W}} \sum_{|\alpha| \leq 1} (D^\alpha u)^2 dx = \|u\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 + \|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 + \|\partial_{x_2} u\|_{L^2(\mathcal{W})}^2.$$

$H^1(\mathcal{W})$ es un espacio de Hilbert por ser un espacio con producto interno completo, en particular es la completación o clausura con respecto a la norma de Sobolev del espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W})$ de las funciones infinitamente diferenciables con norma $\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{W})}$ finita. De la definición de completación de un espacio, surge que $\mathcal{C}^1(\mathcal{W})$ y $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{W})$ son densos en $H^1(\mathcal{W})$. Por lo tanto para cualquier $u \in H^1(\mathcal{W})$ es siempre posible encontrar una función f infinitamente diferenciable “suficientemente” próxima a u , o sea que para cualquier $\epsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W})$ tal que $\|u - f\|_1 < \epsilon$.

Un resultado que constituye una herramienta fundamental para la demostración de existencia de solución de ecuaciones en derivadas parciales no lineales y que usaremos en el Capítulo 5, es el siguiente caso particular del **Teorema de Rellich-Kondrachov**: *Sea \mathcal{W} acotado con frontera Γ de clase \mathcal{C}^1 . Entonces $H^1(\mathcal{W})$ está compactamente contenido en $L^2(\mathcal{W})$, es decir la inclusión no sólo es continua sino que además es compacta. Esto es :*

- (i) para toda $u \in H^1(\mathcal{W})$, $\|u\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq \|u\|_{H^1(\mathcal{W})}$
- (ii) toda sucesión acotada en $H^1(\mathcal{W})$ es precompacta en $L^2(\mathcal{W})$, es decir tiene una subsucesión convergente en $L^2(\mathcal{W})$.

(Por una demostración ver [E] Teorema 1 pág 272)

Recordemos también el llamado **Teorema de compacidad débil** que asegura que toda sucesión acotada en un espacio de Hilbert es débilmente precompacta. Por consiguiente una sucesión acotada en $H^1(\mathcal{W})$ contiene una subsucesión débilmente convergente. (Por una demostración ver [G-T] Teorema 5.12 pág 80)

Otro resultado de suma importancia es la desigualdad de Poincaré, pues permite definir una norma “Hilbertiana” equivalente a la norma de Sobolev, que en particular será la que usaremos en el desarrollo de nuestro trabajo.

Llamaremos con $H_0^1(\mathcal{W})$ a la completación del espacio de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en \mathcal{W} con respecto a la norma de Sobolev, es decir

$$u \in H_0^1(\mathcal{W}) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in H^1(\mathcal{W}) \\ \exists \{u_n\}_n \subset C_0^\infty(\mathcal{W}) \quad \text{tal que} \quad u_n \xrightarrow{H^1(\mathcal{W})} u \end{cases}$$

Desigualdad de Poincaré. ([E] Teorema 1 pág 275) *Sea \mathcal{W} abierto y acotado entonces existe una constante c , que depende de \mathcal{W} , tal que*

$$\forall u \in H_0^1(\mathcal{W}) : \|u\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{W})}.$$

Corolario: En $H_0^1(\mathcal{W})$, $(\nabla u, \nabla u)_{\mathcal{W}}^{1/2} = (\int_{\mathcal{W}} |\nabla u|^2)^{1/2}$ es una norma equivalente a la norma de $H^1(\mathcal{W})$.

En el espacio $H^1(\mathcal{W})$ o en $H_0^1(\mathcal{W})$ para \mathcal{W} un dominio de \mathbb{R}^2 hay funciones discontinuas. La relación entre el orden de derivación $m = 1$ y la dimensión $n = 2$ no satisface el requerimiento básico del Teorema de Inmersión de Sobolev ($m > n/2$, ver [E] Teo 6 pág 270). Puede probarse que para cualquier $v \in H_0^1(\mathcal{W})$ existe una representante de v absolutamente continua sobre casi toda paralela al eje x_i en \mathcal{W} para $i = 1, 2$ y la derivada parcial de cada representante coincide en ctp de \mathcal{W} con una representante de $L^2(\mathcal{W})$ de la i -ésima derivada débil de v . (Por una demostración ver [K-S]pág 50).

Cuando se abordan problemas con valores en el borde (PVB) interesa no sólo el valor de funciones en un dominio abierto \mathcal{W} , sino también sus valores en el borde Γ de dicho dominio.

En el caso de funciones continuas en la clausura del dominio, $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \cup \Gamma$, el valor de la función u en el borde Γ que denotaremos $u|_{\Gamma}$ es simplemente evaluar u en Γ y claramente $u|_{\Gamma} \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Al plantear problemas de contorno en espacios de Sobolev, necesitamos definir $u|_{\Gamma}$ cuando $u \in H^1(\mathcal{W})$, $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2$.

La dificultad básica para definir $u|_{\Gamma}$ con $u \in H^1(\mathcal{W})$ está en el hecho que las funciones de $H^1(\mathcal{W})$ son clases de Lebesgue y dos funciones que difieren en un conjunto de medida nula representan el mismo elemento de $H^1(\mathcal{W})$ y bajo las hipótesis presentes en \mathcal{W} , la frontera Γ tiene medida cero. Entonces no hay un significado directo que podamos dar a la expresión $u|_{\Gamma}$ cuando $u \in H^1(\mathcal{W})$. **Los espacios de Sobolev de orden fraccionario y el Teorema de trazas** dan respuesta a la cuestión planteada.

En particular, para poder considerar valores en el borde de funciones de $H^1(\mathcal{W})$ es preciso caracterizar los **Espacios de Sobolev de orden 1/2**. En esta caracterización interviene la **Transformada de Fourier**. Sabemos que si $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$ podemos definir la transformada de Fourier de u , que denotaremos \hat{u} por

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot y} u(y) dy,$$

o también la antitransformada de Fourier de u , \check{u} como

$$\check{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix \cdot y} u(y) dy.$$

Tanto \hat{u} como \check{u} son continuas si $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Una de las clases de funciones especialmente adecuada para el estudio de la transformada de Fourier es la clase de Schwartz,

$$\mathbb{S} = \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) : \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |x^\beta D^\alpha u(x)| < \infty \right\},$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$ y $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$.

A partir de las siguientes relaciones entre la transformada de Fourier y las derivadas parciales de una función $u \in \mathbb{S}$,

$$D^\alpha \widehat{u}(x) = \widehat{(-iy)^\alpha u}(x) \quad \text{y} \quad \widehat{D^\alpha u}(x) = (ix)^\alpha \widehat{u}(x),$$

se puede concluir que la transformada de Fourier es un isomorfismo en \mathbb{S} continuo y con inversa continua.

Teorema de inversión para la transformada de Fourier : Si $u \in \mathbb{S}$, entonces $\check{\check{u}} = \hat{\hat{u}} = u$.

Aplicando convenientemente este teorema se obtiene

$$(u, v)_{L^2} = (\hat{u}, \hat{v})_{L^2} \quad \text{o en particular} \quad \|u\|_{L^2} = \|\hat{u}\|_{L^2} \quad \text{para todo } u \in \mathbb{S},$$

lo cual permite extender la definición de transformada de Fourier a cualquier función $u \in L^2$.

Que la transformada de Fourier sea una transformación lineal que conserva la norma en L^2 , o sea una L^2 -isometría, es uno de los resultados más importantes de toda su teoría.

La clase \mathbb{S} resulta densa en $H^1(\mathbb{R}^2)$ y esto nos permite trasladar algunas propiedades de la transformada de Fourier en la clase \mathbb{S} a la clase $H^1(\mathbb{R}^2)$. Por ejemplo, para cualquier $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(x) = i x_j \widehat{u}(x), \quad j = 1, 2.$$

Por lo tanto para cualquier $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, tenemos que (ver [Z] pág 41/3)

$$u \in H^1(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow (1 + |x|^2)^{1/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Estos hechos inducen una nueva definición para los espacios de Sobolev que tiene sentido también para cualquier exponente real positivo s :

$$H^s(\mathbb{R}^2) = \{u : (1 + |x|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2\}.$$

Denotando para cualquier s real positivo,

$$((u, v))_s := \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|^2)^s \hat{u} \bar{\hat{v}} dx$$

como el producto interno que induce la siguiente norma

$$\|u\|_s = \|(1 + |x|^2)^{s/2} \hat{u}\|_{L^2},$$

$H^s(\mathbb{R}^2)$ es un espacio de Hilbert para todo s real positivo.

(Más detalles sobre estos resultados pueden hallarse en [W] pág 297).

La observación que precede a la definición de $H^s(\mathbb{R}^2)$ muestra que $H^1(\mathbb{R}^2)$ es uno de los espacios de esta escala. Esta manera de ver los espacios $H^s(\mathbb{R}^2)$ y $H^s(\mathbb{R})$ permite obtener una versión sencilla del **Teorema de la traza para funciones de $H^1(\mathbb{R}_+^2)$** , aplicando el siguiente esquema (ver [Z] pág 45 a 48):

1. Se define un operador lineal y continuo $\tilde{\tau} : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^{1/2}(\mathbb{R})$ como $\tilde{\tau}u(x_1, x_2) = u(x_1, 0)$, restricción de u a la recta $x_2 = 0$ y se estima su norma $\|u(x_1, 0)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq c_{2,1} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$.
2. Por ser $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ denso en $H^1(\mathbb{R}^2)$ se extiende $\tilde{\tau}$ a $H^1(\mathbb{R}^2)$.

3. Sea $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$. Dado que existe un operador extensión lineal y continuo $E : H^1(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|Eu\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq c\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^2)}$, para $c > 0$, la composición $\tilde{\tau} \circ E : H^1(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow H^{1/2}(\mathbb{R})$ cumple que

$$\|(\tilde{\tau} \circ E)u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq \tilde{c}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^2)}, \text{ para } \tilde{c} > 0.$$

Para poder extender el teorema de trazas a los espacios $H^1(\mathcal{W})$ y $H^{1/2}(\Gamma)$ necesitamos dar una definición de este último. Veamos el siguiente resultado demostrado en [T] pág 229:

Lema 2.4. *Para cualquier $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|) |\hat{\varphi}(x)|^2 dx = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + c \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 / |x - y|^2 dx dy$ donde c es una constante que no depende de φ .*

Este lema permite definir el espacio de funciones $H^{1/2}(\Gamma)$ de la siguiente manera:

Definición 2.5. Diremos que $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de $H^{1/2}(\Gamma)$ si $\varphi \in L^2(\Gamma)$ (i.e. $\int_{\Gamma} |\varphi(x)|^2 d\Gamma_x < \infty$) y si

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 / |x - y|^2 d\Gamma_x d\Gamma_y < \infty.$$

La norma en $H^{1/2}(\Gamma)$ está dada por

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 := \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 / |x - y|^2 d\Gamma_x d\Gamma_y.$$

Un argumento de localización y “aplastamiento” (por cambio de variables) de la frontera Γ de \mathcal{W} nos conduce al siguiente Teorema de la Traza para funciones de $H^1(\mathcal{W})$. Por los detalles y por generalizaciones a más dimensiones ver [T] pág 237 (Cap III Sec 26) y [A] pág 217 (Cap VII) .

Teorema 2.6. Teorema de la Traza para funciones de $H^1(\mathcal{W})$.

Sea \mathcal{W} abierto y acotado con borde Γ de clase \mathcal{C}^1 , entonces existe un único operador lineal y continuo $\tau : H^1(\mathcal{W}) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ tal que

- i) $\tau u = u|_{\Gamma}$ si $u \in H^1(\mathcal{W}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathcal{W}})$.
- ii) $\|\tau u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq k \|u\|_{H^1(\mathcal{W})}$ para alguna constante positiva k que depende sólo de \mathcal{W} y no de u .

Inversamente, si $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, entonces existe $u \in H^1(\mathcal{W})$ tal que $\varphi = \tau u$ y $\|u\|_{H^1(\mathcal{W})} \leq \tilde{k} \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ para alguna constante \tilde{k} positiva.

En la Sección 2.5 necesitaremos un resultado de trazas sobre un segmento de una función del espacio de Sobolev sobre un rectángulo que también se prueba con las técnicas expuestas en esta sección.

Teorema 2.7. Sea $u \in H^1(R)$ donde R es un rectángulo centrado en el origen de \mathbb{R}^2 , $R = (-a, a) \times (-b, b)$. Entonces la norma $H^{1/2}(I_a)$ sobre el segmento $I_a = \{(x_1, 0) : -a < x_1 < a\}$ de la traza de u está acotada por una constante veces la norma $H^1(R)$ de la función u .

Otros resultados sobre trazas que necesitamos recordar, y que serán utilizados en el Capítulo 3, son:

Lema 2.8. Sea B el disco unitario de \mathbb{R}^2 , $B = G^+ \cup G^- \cup \Sigma$, donde G^+ es el semidisco abierto del semiplano superior, G^- es el semidisco abierto del semiplano inferior y Σ el segmento $-1 < x_1 < 1, x_2 = 0$. Si $v^+ \in H^1(G^+)$, $v^- \in H^1(G^-)$ y sus trazas sobre Σ coinciden, entonces

$$v(x) := \begin{cases} v^+(x) & \text{si } x \in G^+ \\ v^-(x) & \text{si } x \in G^- \end{cases}$$

es una función de $H^1(B)$.

La demostración puede verse en [K-S] pág 56 o en [K-P] pág 31.

Lema 2.9. *Sea Ω el cuadrado $(-1, 1)^2$ que contiene a la clausura de un dominio anular abierto \mathcal{W} con borde exterior Γ y Ω_1 la componente conexa de $\Omega \setminus \mathcal{W}$ adyacente a Γ . Entonces el operador traza τ definido para funciones de $H^1(\Omega_1 \cup \Gamma \cup \mathcal{W})$ es suryectivo en $H^{1/2}(\Gamma)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dado que Ω_1 y \mathcal{W} son dominios abiertos y acotados con borde “suave”, usando la segunda parte del teorema de trazas 2.6 podemos definir

$$\Phi := \begin{cases} \Phi_1 & \text{en } \Omega_1 \\ \Phi_2 & \text{en } \mathcal{W} \end{cases}$$

donde $\Phi_1 \in H^1(\Omega_1) : \tau \Phi_1 = \varphi$ y $\Phi_2 \in H^1(\mathcal{W}) : \tau \Phi_2 = \varphi$. Entonces por el lema anterior, $\Phi \in H^1(\Omega_1 \cup \Gamma \cup \mathcal{W})$ y $\tau \Phi = \varphi$.

□

2.3. Los espacios $H_{2\pi}^{1/2}$ y $H^{1/2}(\gamma)$

Puesto que en el problema que nos ocupa estaremos trabajando siempre con la familia de curvas \mathcal{S} introducida en el Capítulo 1, en esta sección nos proponemos describir los espacios $H^{1/2}(\Gamma)$, donde Γ es la imagen por $\gamma \in \mathcal{S}$ de $[0, 2\pi]$, de un modo uniforme que no dependa de la curva γ particular de la familia \mathcal{S} . Para tal fin introducimos otro modo de enfocar la norma del espacio de Sobolev fraccionario que denotaremos con $H^{1/2}(\gamma)$ y que se obtendrá de otro concepto que proviene del análisis de Fourier clásico que es el de las funciones 2π -periódicas con la regularidad de las funciones de $H^{1/2}$, que denotaremos $H_{2\pi}^{1/2}$.

Hablar de funciones definidas en $[0, 2\pi)$ es lo mismo que hablar de funciones periódicas de período 2π en toda la recta, pues cualquier función definida en un segmento puede ser prolongada periódicamente.

Sabemos que toda $f \in L^2([0, 2\pi])$ se puede expresar en términos de su serie de Fourier $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}$ en el sentido de $L^2([0, 2\pi])$,

donde $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ son los coeficientes de Fourier de f respecto de la base ortonormal $\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ por lo cual satisfacen la identidad de Parseval, $\|f\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$.

Definimos el espacio de Sobolev de orden $1/2$ en $[0, 2\pi]$ dando su norma en términos de los coeficientes de Fourier c_k de f ,

$$H_{2\pi}^{1/2} = \left\{ f : \|f\|_{H_{2\pi}^{1/2}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 (1 + k^2)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Como en el caso no periódico, $H_{2\pi}^{1/2}$ es un espacio de Hilbert.

El siguiente resultado contiene una descripción de esta norma en términos del módulo de continuidad en L^2 y prescindiendo de la serie de Fourier.

Lema 2.10. *La función f pertenece a $H_{2\pi}^{1/2}$ si y sólo si*

$$f \in L^2([0, 2\pi]) \quad y \quad \int_0^{2\pi} \frac{(w_2(h))^2}{(\sin \frac{h}{2})^2} dh < \infty,$$

donde $w_2(h) = \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^2([0, 2\pi])}$ es el módulo de continuidad L^2 de f (cuando el punto de evaluación de f no está en $[0, 2\pi)$ entendemos que f ha sido extendida a \mathbb{R} como función periódica de período 2π).

Además

$$\|f\|_{H_{2\pi}^{1/2}}^2 \approx \|f\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 + \int_0^{2\pi} \frac{w_2^2(h)}{(\sin \frac{h}{2})^2} dh.$$

Es decir $\|f\|_{H_{2\pi}^{1/2}}^2 \approx \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(t) - f(s)|^2}{(\sin \frac{t-s}{2})^2} dt ds.$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in H_{2\pi}^{1/2}$. Denotaremos también con f a su extensión periódica a todo \mathbb{R} , entonces

$$(w_2(h))^2 = \|f(t+h) - f(t)\|_{L^2([0,2\pi])}^2 = \int_0^{2\pi} |f(t+h) - f(t)|^2 dt,$$

para cada $h \in [0, 2\pi)$. Llamando $\varphi_h(t) = f(t+h) - f(t)$, podemos escribir usando la igualdad de Parseval para φ_h que

$$(w_2(h))^2 = \|\varphi_h\|_{L^2([0,2\pi])}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\varphi_h)|^2 \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} c_k(\varphi_h) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_h(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_h^{2\pi+h} f(\eta) e^{-ik(\eta-h)} d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{e^{ikh}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) e^{-ik\eta} d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \end{aligned}$$

Entonces los coeficientes de Fourier de φ_h se pueden expresar en términos de los coeficientes de Fourier de f de la siguiente manera,

$$c_k(\varphi_h) = c_k(f) (e^{ikh} - 1).$$

Por lo tanto $\int_0^{2\pi} \frac{(w_2(h))^2}{\sin^2 \frac{h}{2}} dh = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \int_0^{2\pi} \frac{|e^{ikh} - 1|^2}{\sin^2 \frac{h}{2}} dh.$

Veamos ahora que la última integral que denotaremos con $J(k)$ es como $|k|$ en el sentido que existen constantes positivas y finitas $c_1 \leq c_2$ tales que $c_1 |k| \leq J(k) \leq c_2 |k|$.

Escribimos $J(k) = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos kh - 1)^2}{\sin^2 \frac{h}{2}} dh + \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 kh}{\sin^2 \frac{h}{2}} dh$, y partimos cada integral sobre $(0, \pi)$ y sobre $(\pi, 2\pi)$. Estimaremos sólo una de las

cuatro integrales en la prueba de la afirmación precedente, los restantes casos pueden obtenerse similarmente.

$$\begin{aligned} \text{Consideremos la primera de ellas definida por } & \int_0^\pi \frac{(\cos kh - 1)^2}{\sin^2 \frac{h}{2}} dh = \\ \frac{1}{|k|} \int_0^{|k|\pi} \frac{(\cos u - 1)^2}{\sin^2 \frac{u}{2|k|}} du &= 4|k| \int_0^{|k|\pi} \frac{(\cos u - 1)^2}{u^2} \frac{\left(\frac{u}{2|k|}\right)^2}{\sin^2 \frac{u}{2|k|}} du. \end{aligned}$$

Basta entonces probar que $\int_0^\infty \frac{(\cos u - 1)^2}{u^2} du$ es finita y que la sucesión de funciones de u dada por $\frac{\left(\frac{u}{2|k|}\right)^2}{\sin^2 \frac{u}{2|k|}}$ con $u \in (0, |k|\pi)$, está acotada uniformemente por arriba y por abajo por constantes positivas y finitas. La primera afirmación se sigue de la acotación de $(\cos u - 1)^2$ en todo \mathbb{R} y del comportamiento de $\cos u$ cerca del origen. La segunda es consecuencia de la acotación $1 \leq \frac{t}{\sin t} \leq \frac{\pi}{2}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Por lo tanto $J(k) \simeq |k|$, con lo cual las condiciones

$$f \in L^2([0, 2\pi]) \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} \frac{(w_{2,0}(h))^2}{h^2} dh < \infty$$

son respectivamente equivalentes a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 |k| < \infty,$$

que juntas son equivalentes a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 (1 + k^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$, ya que

$$(1 + k^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + |k| < \sqrt{3}(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Esta demostración es una versión discreta del caso continuo tratado por Stein en [S] Cap V Sec 3.5, pág 139.

Ahora procederemos a definir el espacio de Sobolev asociado a una parametrización γ de clase \mathcal{C}^1 de una curva plana cerrada Γ .

Si $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ y si γ es una parametrización sobre $[0, 2\pi]$ de Γ , definimos

$$H^{1/2}(\gamma) = \left\{ \varphi : \varphi \circ \gamma \in H_{2\pi}^{1/2} \right\} \text{ con la norma } \|\varphi\|_{H^{1/2}(\gamma)} = \|\varphi \circ \gamma\|_{H_{2\pi}^{1/2}}.$$

2.4. Homeomorfismo entre $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(\gamma)$ y $H_{2\pi}^{1/2}$ para curvas admisibles

En las secciones precedentes se introdujeron varias versiones de espacios de Sobolev: sobre dominios de \mathbb{R}^2 , para funciones periódicas y sobre curvas. Resumimos en una tabla las normas definidas en cada uno de estos espacios

| Espacios | Cuadrado de las normas |
|--------------------|--|
| $H^1(\mathcal{W})$ | $\sum_{ \alpha \leq 1} \ D^\alpha u\ _{L^2(\mathcal{W})}^2$ |
| $H^{1/2}(\Gamma)$ | $\int_{\Gamma} \varphi(x) ^2 d\Gamma_x + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{ \varphi(x) - \varphi(y) ^2}{ x - y ^2} d\Gamma_x d\Gamma_y$ |
| $H_{2\pi}^{1/2}$ | $\ f\ _{L^2([0, 2\pi])}^2 + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ f(t) - f(s) ^2}{\sin^2(t - s)/2} dt ds$ |
| $H^{1/2}(\gamma)$ | $\ \varphi \circ \gamma\ _{H_{2\pi}^{1/2}}^2$ |

Teorema 2.11. *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}(h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho)$ una familia admisible que satisface [S1](#) a [S7](#) del Cap. 1. Entonces para toda Γ , curva parametrizada por $\gamma \in \mathcal{S}$, los espacios $H^{1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\gamma)$ coinciden como conjuntos y las normas son equivalentes con constantes de equivalencia que sólo dependen de $h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Más aún ambos espacios son isomorfos como espacios de Banach con el espacio $H_{2\pi}^{1/2}$ a través del isomorfismo $\varphi \mapsto \varphi \circ \gamma$.*

DEMOSTRACIÓN. La pertenencia de φ a $H^{1/2}(\gamma)$ es equivalente a la finitud de su norma, es decir $\|\varphi\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 = \|\varphi \circ \gamma\|_{H^{1/2}}^2 =$

$$= \int_0^{2\pi} |\varphi \circ \gamma(t)|^2 dt + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi \circ \gamma(t) - \varphi \circ \gamma(s)|^2}{\sin^2(\frac{t-s}{2})} dt ds < \infty.$$

De la misma manera, la pertenencia de φ a $H^{1/2}(\Gamma)$ es equivalente a

$$\int_{\Gamma} |\varphi(x)|^2 d\Gamma_x + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 / |x - y|^2 d\Gamma_x d\Gamma_y < \infty.$$

Teniendo en cuenta la parametrización γ del borde Γ , la norma de $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ queda expresada de la siguiente manera,

$$\int_0^{2\pi} |\varphi \circ \gamma|^2 |\dot{\gamma}(t)| dt + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi \circ \gamma(t) - \varphi \circ \gamma(s)|^2}{|\gamma(t) - \gamma(s)|^2} |\dot{\gamma}(t)| |\dot{\gamma}(s)| dt ds.$$

Por lo tanto la equivalencia entre ambas normas, y por consiguiente la igualdad de los conjuntos, se sigue inmediatamente de [S5](#) y de la siguiente estimación: existen constantes positivas m y M que sólo dependen de $h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que las desigualdades

$$(*) \quad m \leq \frac{|\gamma(t) - \gamma(s)|}{|\sin(t-s)/2|} \leq M$$

valen para toda $\gamma \in \mathcal{S}$, para todo t y s en $[0, 2\pi]$ con $s \neq t$.

Por [S5](#) para toda $\gamma \in \mathcal{S}$, se tiene que $|\dot{\gamma}(t)| \geq \alpha_1 > 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Por consiguiente, para todo $t \in [0, 2\pi]$ alguna de las desigualdades $|\dot{\gamma}_1(t)| \geq \alpha_1/\sqrt{2}$ o $|\dot{\gamma}_2(t)| \geq \alpha_1/\sqrt{2}$ es necesariamente válida. Por [S6](#) resulta que la familia $\{\dot{\gamma} : \gamma \in \mathcal{S}\}$ es una familia equicontinua de funciones. En efecto, $|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)| \leq (\max_{[0, 2\pi]} |\ddot{\gamma}|) |t - s| \leq \alpha_3 |t - s|$. En vista de las dos observaciones precedentes, no es difícil probar que existe un número positivo δ , $0 < \delta < \pi$, tal que por lo menos una de las dos desigualdades $|\dot{\gamma}_1(\xi)| \geq \alpha_1/4$ o $|\dot{\gamma}_2(\xi)| \geq \alpha_1/4$ vale para todo $\xi \in (t - \delta, t + \delta) \cap [0, 2\pi]$, para todo $t \in [0, 2\pi]$ y para toda $\gamma \in \mathcal{S}$.

Luego particionamos el intervalo $[0, 2\pi]$ en dos subconjuntos

$$I_1 = \{t \in [0, 2\pi] : |\dot{\gamma}_1(\xi)| \geq \alpha_1/4, \quad \forall \xi \in (t - \delta, t + \delta) \cap [0, 2\pi]\}$$

$$\text{e } I_2 = [0, 2\pi] \setminus I_1.$$

Para probar la primera desigualdad en (*), suponemos primero que $I_1 \neq \emptyset$, elegimos $t \in I_1$ y distinguimos tres casos para $\sigma \in (-2\pi, 2\pi)$ si $s = t + \sigma$, $\sigma \neq 0$:

(i) Sea $0 < |\sigma| < \delta$.

Como $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{\min(x, \pi - x)} < 1$, para $0 < x < \pi$; entonces

$$\begin{aligned} \frac{|\gamma(\sigma + t) - \gamma(t)|}{|\sin \sigma/2|} &> \frac{|\gamma(\sigma + t) - \gamma(t)|}{\min(|\sigma|/2, \pi - |\sigma|/2)} \geq \\ &\geq \frac{2}{|\sigma|} |\gamma_1(\sigma + t) - \gamma_1(t)| = \frac{2}{|\sigma|} \left| \int_t^{t+\sigma} \dot{\gamma}_1(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Además $\dot{\gamma}_1$ no puede cambiar de signo en $[t, t + \sigma]$ por ser continua y $|\dot{\gamma}_1| \geq \alpha_1/4$, podemos tomar módulo dentro de la integral y encontrar así una cota inferior m . En efecto

$$\frac{2}{|\sigma|} \left| \int_t^{t+\sigma} |\dot{\gamma}_1(s)| ds \right| \geq \frac{2}{|\sigma|} \frac{\alpha_1}{4} |\sigma| = \frac{\alpha_1}{2} = m.$$

(ii) Sea $2\pi - \delta < |\sigma| < 2\pi$. Por la periodicidad de γ resulta válida la misma desigualdad ya que cuando , por ejemplo, $2\pi - \delta < \sigma < 2\pi$ tenemos $\gamma(\sigma + t) - \gamma(t) = \gamma((\sigma - 2\pi) + t) - \gamma(t)$ con $0 < |\sigma - 2\pi| < \delta$.

(iii) Ahora sea $\delta \leq |\sigma| \leq 2\pi - \delta$, veamos que existe una constante k independiente de $\gamma \in \mathcal{S}$ tal que $k \leq |\gamma(\sigma + t) - \gamma(t)|$. Supongamos que la desigualdad no es cierta, es decir que existe una sucesión de funciones $\{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}$ para la cual $|\gamma_n(\sigma_n + t_n) - \gamma_n(t_n)| < 1/n$, para $(|\sigma_n|, t_n) \in [\delta, 2\pi - \delta] \times [0, 2\pi]$. Por la compacidad de este producto de intervalos y de \mathcal{S} , podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$\gamma_n \rightarrow \gamma \in \mathcal{S}$ en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, $\sigma_n \rightarrow \sigma \in [\delta, 2\pi - \delta]$ y $t_n \rightarrow t \in [0, 2\pi]$.

Con lo cual, sumando y restando convenientemente, resulta

$$\begin{aligned} |\gamma(\sigma + t) - \gamma(t)| &\leq |\gamma(\sigma + t) - \gamma(\sigma_n + t_n)| + |\gamma(\sigma_n + t_n) - \gamma_n(\sigma_n + t_n)| \\ &+ |\gamma_n(\sigma_n + t_n) - \gamma_n(t_n)| + |\gamma_n(t_n) - \gamma(t_n)| + |\gamma(t_n) - \gamma(t)| \end{aligned}$$

y haciendo $n \rightarrow \infty$ resulta que $|\gamma(\sigma + t) - \gamma(t)| = 0$, y esto no es posible para una curva simple.

Por lo tanto $\frac{|\gamma(\sigma + t) - \gamma(t)|}{|\sin \sigma/2|} > \frac{k}{\min(|\sigma|/2, \pi - |\sigma|/2)} \geq \frac{2k}{\pi} = m$.

Si $I_1 = \emptyset$ entonces $I_2 = [0, 2\pi]$, y para $t \in I_2$ el argumento es análogo con γ_2 en lugar de γ_1 en (i) y (ii).

Para la segunda desigualdad en (*) usamos que, por [S5], $\|\dot{\gamma}\|_\infty \leq \alpha_2$, junto con las desigualdades elementales $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{\min(x, \pi - x)} < 1$, para $0 < x < \pi$; y analizamos para los valores de σ en cada uno de los casos que hemos distinguido:

$$\begin{aligned} \text{(i) Si } 0 < |\sigma| < \delta, \text{ entonces } \frac{|\gamma(\sigma + t) - \gamma(t)|}{|\sin \sigma/2|} &\leq \sup_{[0, 2\pi]} |\dot{\gamma}| \frac{|\sigma|}{\sin |\sigma|/2} \\ &\leq \alpha_2 \frac{2 \min(|\sigma|/2, \pi - |\sigma|/2)}{\sin |\sigma|/2} \leq \alpha_2 \pi = M. \end{aligned}$$

(ii) Si $2\pi - \delta < |\sigma| < 2\pi$, por la periodicidad de γ resulta válida la misma desigualdad.

(iii) Para $\delta \leq |\sigma| \leq 2\pi - \delta$, aplicando [S3] obtenemos,

$$\frac{|\gamma(\sigma + t) - \gamma(t)|}{|\sin \sigma/2|} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sin \delta/2} = M.$$

Por lo tanto para $\gamma \in \mathcal{S}$ las normas de los espacios $H^{1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\gamma)$, son equivalentes y el operador identidad $i_\gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\gamma)$ es un isomorfismo.

Además por la definición de $H^{1/2}(\gamma)$, el operador $\mathcal{J}_\gamma : H^{1/2}(\gamma) \rightarrow H_{2\pi}^{1/2}$ que a cada φ le asigna $\varphi \circ \gamma$ es claramente una inmersión de $H^{1/2}(\gamma)$ en $H_{2\pi}^{1/2}$, y como para cada $\phi \in H_{2\pi}^{1/2}$, la función $\varphi = \phi \circ \gamma^{-1}$ es un elemento de $H^{1/2}(\gamma)$, tenemos que \mathcal{J}_γ es suryectivo, por lo cual es una isometría. Por lo tanto **los espacios $H_{2\pi}^{1/2}$, $H^{1/2}(\gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$ resultan homeomorfos.**

□

2.5. Los operadores traza sobre una familia de curvas admisibles

Los resultados de la sección anterior nos permiten comparar normas de Sobolev fraccionarias definidas sobre objetos geométricos diferentes. En efecto, si γ_1 y γ_2 son dos curvas en una clase de tipo \mathcal{S} contenidas en $\Omega = (-1, 1)^2$ y v es una función de $H_0^1(\Omega)$, las trazas $\tau_{\Gamma_1}v$ y $\tau_{\Gamma_2}v$ están definidas sobre $\Gamma_1 = \gamma_1([0, 2\pi])$ y $\Gamma_2 = \gamma_2([0, 2\pi])$ que son generalmente conjuntos diferentes. Pero ambas pueden compararse dentro de $H_{2\pi}^{1/2}$.

Dada una curva en Ω parametrizada por una función γ , construimos un nuevo operador de traza que denotamos por \mathcal{T}_γ definido sobre $H_0^1(\Omega)$ y con valores en $H_{2\pi}^{1/2}$ componiendo la traza clásica τ_Γ con los isomorfismos del Teorema 2.11,

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{\mathbb{T}} & H^{1/2}(\Gamma) & \xrightarrow{i_\gamma} & H^{1/2}(\gamma) & \xrightarrow{\mathcal{J}_\gamma} & H_{2\pi}^{1/2} \\
 \\
 u & \mapsto & \tau_\Gamma u = \varphi & \mapsto & \varphi & \mapsto & \varphi \circ \gamma
 \end{array}$$

de esta manera definimos $\mathcal{T}_\gamma := \mathcal{J}_\gamma \circ i_\gamma \circ \tau_\Gamma$.

En esta sección se demuestra la continuidad de la operación de traza sobre el borde considerada, para $v \in H_0^1(\Omega)$ fija, como una aplicación

de \mathcal{S} en $H_{2\pi}^{1/2}$ dada por $\gamma \mapsto \mathcal{T}_\gamma v$. En el próximo teorema se enuncia precisamente esta idea. (Los resultados son esencialmente los de [HKKP])

Teorema 2.12. *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}(h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho)$ una familia admisible que satisface $\boxed{S1}$ a $\boxed{S7}$ del Cap. 1. Entonces para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ y para toda sucesión $\{\gamma_n\}$ en \mathcal{S} convergente a $\gamma \in \mathcal{S}$, en el sentido que le dimos en el Capítulo 1, se tiene que $\|\mathcal{T}_{\gamma_n} v - \mathcal{T}_\gamma v\|_{H_{2\pi}^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En otros términos, $\mathcal{T}_{\gamma_n} \rightarrow \mathcal{T}_\gamma$ fuertemente .*

Para demostrar este teorema haremos uso del siguiente lema que tiene interés por sí mismo.

Lema 2.13. *Sea \mathcal{S} una familia como la considerada en el Teorema 2.12. Entonces la familia de trazas asociadas a \mathcal{S} dada por $\{\mathcal{T}_\gamma : \gamma \in \mathcal{S}\}$ es acotada en $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_{2\pi}^{1/2})$. Más precisamente existe $M > 0$ tal que $\|\mathcal{T}_\gamma\|_{\mathcal{L}} \leq M$, para toda $\gamma \in \mathcal{S}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos por Lema 1.2 del Capítulo 1 que existe $r : 0 < r \leq h$ que sólo depende de los parámetros de la familia \mathcal{S} para el cual el r -entorno D_γ^r de Γ_γ “cortado en $t = 0$ ” resulta \mathcal{C}^1 -difeomorfo con $Q = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$. Hemos denotado con T_γ a este difeomorfismo y con E_γ^r al entorno “tubular” de radio r de Γ_γ . Sea Γ_σ el segmento de recta en Q parametrizado por $\sigma(t, \eta) = (t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Notar que $T_\gamma(\Gamma_\sigma) = \Gamma_\gamma$, ya que $T_\gamma(t, \eta) = \gamma(t) + r\eta\nu(t)$.

Elegimos $u \in \mathcal{C}_0^1(E_\gamma^r)$ y notamos que $\mathcal{T}_\gamma u = (\tau_\Gamma u) \circ \gamma = u \circ \gamma$. Como $\gamma(t) = T_\gamma(t, 0)$ tenemos que

$$\|\mathcal{T}_\gamma u\|_{H_{2\pi}^{1/2}} = \|u(T_\gamma(\cdot, 0))\|_{H_{2\pi}^{1/2}}.$$

Con la notación introducida en el Teorema 2.7, el miembro derecho en la igualdad anterior es la norma $H^{1/2}([0, 2\pi])$ y por lo tanto vale la desigualdad

$$\|\mathcal{T}_\gamma u\|_{H_{2\pi}^{1/2}} \leq c \|u\|_{H^1(Q)}.$$

Finalmente cambiamos las variables t, η por las variables x, y con $(x, y) = T_\gamma(t, \eta)$, usamos la no singularidad de este cambio de variables obteniendo cotas que dependen sólo de $\frac{1}{\|det[DT_\gamma]\|_{L^\infty(Q)}}$ y dado que $|det[DT_\gamma]|$ está inferiormente acotado por $r\alpha_1/2$ (ver demostración del Lema 1.2 del Capítulo 1) podemos escribir

$$\|\mathcal{T}_\gamma u\|_{H_{2\pi}^{1/2}} \leq \tilde{c} \|u\|_{H^1(D_\gamma^r)}.$$

Ahora vamos a extender esta estimación para cualquier $u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$.

Elegimos $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+)$ tal que $f(0) = 1$, $f \geq 0$ en $[0, \infty)$ y $f = 0$ en $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Definimos $g_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ por

$$g_\gamma(y) := \begin{cases} f(\pi_2 T_\gamma^{-1}(y)) & y \in D_\gamma^r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde π_2 es la proyección de \mathbb{R}^2 sobre la segunda coordenada. Por continuidad g_γ puede ser extendida de manera única a $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$, denotaremos esta extensión con el mismo nombre. Notemos que g_γ depende de γ , pues el entorno “cortado” D_γ^r y el difeomorfismo T_γ dependen de γ . Por construcción $ug_\gamma \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ satisface $ug_\gamma = 0$ en $\Omega \setminus D_\gamma^r$ y $ug_\gamma = u$ en Γ_γ . Aplicando a ug_γ la estimación antes deducida,

$$\|\mathcal{T}_\gamma u\|_{H_{2\pi}^{1/2}} = \|\mathcal{T}_\gamma ug_\gamma\|_{H_{2\pi}^{1/2}} \leq \tilde{c} \|ug_\gamma\|_{H^1(D_\gamma^r)} = c(\nabla ug_\gamma, \nabla ug_\gamma)_{D_\gamma^r}^{1/2}$$

ya que ug_γ se anula en los bordes de D_γ^r y en $H_0^1(D_\gamma^r)$ la norma de Sobolev es equivalente a la norma Hilbertiana o seminorma $-H^1$.

Para estimar esta seminorma tendremos en cuenta que

$$\nabla g_\gamma(y) = f'(\pi_2 \circ T_\gamma^{-1}(y)) \nabla \pi_2(T_\gamma^{-1}(y)) DT_\gamma^{-1}(y),$$

con lo cual usando que la norma Frobenius de DT_γ^{-1} está acotada (ver Lema 1.2) tenemos $\|\nabla g_\gamma\| \leq \|f'\|_\infty \|DT_\gamma^{-1}\| \|\nabla \pi_2\| \leq \tilde{c} \|f'\|_\infty$. Así,

$$\begin{aligned} \int_{D_\gamma^r} |\nabla u g_\gamma|^2 &= \int_{D_\gamma^r} |g_\gamma \nabla u + u \nabla g_\gamma|^2 \\ &= \int_{D_\gamma^r} (g_\gamma^2 |\nabla u|^2 + 2u g_\gamma \nabla u \cdot \nabla g_\gamma + u^2 |\nabla g_\gamma|^2) \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + 2\tilde{c} \|f\|_\infty \|f'\|_\infty \int u |\nabla u| + \tilde{c}^2 \|f'\|_\infty^2 \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \tilde{C} \|u\|_{H^1(D_\gamma^r)}^2 (\|f\|_\infty^2 + 2\|f\|_\infty \|f'\|_\infty + \|f'\|_\infty^2) \\ &= \tilde{C} \|u\|_{H^1(D_\gamma^r)}^2 (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)^2, \end{aligned}$$

donde $\tilde{C} = \max\{1, 2\tilde{c}, \tilde{c}^2\}$. Por lo tanto, para cada $u \in C_0^1(\Omega)$, tenemos la siguiente cota para los operadores traza \mathcal{T}_γ (uniforme respecto de $\gamma \in \mathcal{S}$), $\|\mathcal{T}_\gamma u\|_{H_{2\pi}^{1/2}} \leq M = \sqrt{\tilde{C}} \|u\|_{H^1(D_\gamma^r)} (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$, y el Lema se sigue por la densidad de $C_0^1(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$.

□

DEMOSTRACIÓN. (**Teorema 2.12**) Tomemos primero $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$, y estimemos la norma en $H_{2\pi}^{1/2}$ de $\mathcal{T}_{\gamma_n} w - \mathcal{T}_\gamma w$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\gamma_n} w - \mathcal{T}_\gamma w\|_{H_{2\pi}^{1/2}}^2 &= \int_0^{2\pi} [w(\gamma_n(t)) - w(\gamma(t))]^2 dt + \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[w(\gamma_n(t)) - w(\gamma(t)) - w(\gamma_n(s)) + w(\gamma(s))]^2}{(\sin(t-s)/2)^2} dt ds = \\ &= I_n^1 + I_n^2. \end{aligned}$$

Por el teorema de la convergencia dominada, la primera integral I_n^1 converge a cero cuando $n \rightarrow \infty$. En efecto, notar que por la suavidad

de w y por la convergencia de γ_n a γ tenemos que $w \circ \gamma_n \rightarrow w \circ \gamma$ uniformemente.

Definimos para $(t, s) \in [0, 2\pi]^2$ la sucesión de funciones

$$h_n(t, s) := w(\gamma_n(t)) - w(\gamma(t)) - w(\gamma_n(s)) + w(\gamma(s)).$$

Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n(t, s)}{\sin(t-s)/2} = 0$ para todo $t \neq s$, para demostrar que el límite de I_n^2 es cero cuando $n \rightarrow \infty$, basta ver que $\varphi_n(t, s) = \frac{h_n(t, s)}{\sin(t-s)/2}$ es uniformemente acotada en el conjunto U que se obtiene excluyendo del cuadrado $[0, 2\pi]^2$ la diagonal desde el origen, es decir $U = [0, 2\pi]^2 \setminus \{t = s\}$ cuya medida sigue siendo $4\pi^2$.

Para encontrar una cota uniforme para φ_n , definimos para un δ suficientemente pequeño el siguiente subconjunto de U ,

$$V_\delta = [\{(t, s) \in [0, 2\pi]^2 : |t - s| < \delta\} \cup B((0, 2\pi), \delta) \cup B((2\pi, 0), \delta)] \cap U.$$

Es claro que la sucesión $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotada uniformemente en $U \setminus V_\delta$, por $c \frac{\|w\|_\infty}{\delta}$ para alguna constante $c > 0$. Veamos ahora qué ocurre para puntos (t, s) en V_δ y δ suficientemente chico.

Para $|t - s| < \delta$, aplicando el teorema del valor medio tenemos que

$$|h_n(t, s)| = |h_n(t, s) - h_n(t, t)| \leq \|h_n\|_{C^1} |t - s|.$$

Por el Teorema de Taylor, $\sin \frac{t-s}{2} \geq \frac{t-s}{2} - \frac{(t-s)^3}{2^3 3!}$.

De ambas desigualdades obtenemos la siguiente estimación,

$$|\varphi_n(t, s)| \leq \|h_n\|_{C^1} \left| \frac{t-s}{\sin(t-s)/2} \right| \leq \frac{2c}{1 - \delta^2/24}, \text{ para } |t-s| < \delta.$$

Sólo resta estimar φ_n en $[B((0, 2\pi), \delta) \cup B((2\pi, 0), \delta)] \cap U$. Debido a la simetría es suficiente encontrar una cota en $B((2\pi, 0), \delta) \cap U$. Un

argumento similar al anterior conduce a,

$$|h_n(t, s)| = |h_n(t, s) - h_n(2\pi, 0)| \leq \|h_n\|_{C^1} \sqrt{(t - 2\pi)^2 + s^2}, \text{ luego}$$

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t, s)| &\leq \|h_n\|_{C^1} \frac{\sqrt{(t - 2\pi)^2 + s^2}}{|\sin(t - s)/2|} \leq c \frac{\sqrt{(t - 2\pi)^2 + s^2}}{|\sin(2\pi - t + s)/2|} \\ &= c \frac{\sqrt{(t - 2\pi)^2 + s^2}}{2\pi - t + s} \frac{2\pi - t + s}{\sin(2\pi - t + s)/2} \leq \frac{2c}{1 - \delta^2/6}. \end{aligned}$$

Lo que prueba la estimación uniforme que buscábamos y que

$$\|\mathcal{T}_{\gamma_n} w - \mathcal{T}_\gamma w\|_{H_{2\pi}^{1/2}} \rightarrow 0 \text{ para } w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \supset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Para el caso general, dada $v \in H_0^1(\Omega)$, y $\epsilon > 0$ tomamos $w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $\|v - w\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon$ entonces, llamando M a la cota uniforme para los operadores \mathcal{T}_{γ_n} que proporciona el Lema 2.13, tenemos que la norma $\|\mathcal{T}_{\gamma_n} v - \mathcal{T}_\gamma v\|_{H_{2\pi}^{1/2}}$ está acotada por

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{T}_{\gamma_n}(v - w)\|_{H_{2\pi}^{1/2}} + \|\mathcal{T}_{\gamma_n} w - \mathcal{T}_\gamma w\|_{H_{2\pi}^{1/2}} + \|\mathcal{T}_\gamma(v - w)\|_{H_{2\pi}^{1/2}} \\ &< M\epsilon + \|\mathcal{T}_{\gamma_n} w - \mathcal{T}_\gamma w\|_{H_{2\pi}^{1/2}} + M\epsilon. \end{aligned}$$

En otros términos, $\mathcal{T}_{\gamma_n} \rightarrow \mathcal{T}_\gamma$ fuertemente.

□

2.6. Los operadores de extensión de funciones de Sobolev definidas sobre curvas admisibles

En esta sección se muestra la construcción, para cada $\gamma \in \mathcal{S}$, de operadores extensión $\mathcal{E}_\gamma : H_{2\pi}^{1/2} \rightarrow H_0^1(\Omega)$, se demuestra que están uniformemente acotados para $\gamma \in \mathcal{S}$ y que $\mathcal{T}_\gamma \mathcal{E}_\gamma \varphi = \varphi$ para toda $\varphi \in H_{2\pi}^{1/2}$.

Por razones de simplicidad notacional, sustuiremos en lo que sigue $H_{2\pi}^{1/2}$ por el espacio $H_2^{1/2}$ que se define como $H_{2\pi}^{1/2}$ reemplazando el

intervalo $[0, 2\pi]$ por $[-1, 1]$. Teniendo en cuenta el cambio de variables $t \mapsto \pi + \pi t$; la norma en este espacio puede definirse por

$$\|\varphi\|_{H_2^{1/2}} = \sqrt{\pi \int_{-1}^1 \varphi^2(t) dt + \pi^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|\varphi(t) - \varphi(s)|^2}{|\sin \pi \frac{t-s}{2}|^2} dt ds}.$$

Notemos que el mismo cambio de variables muestra que los espacios $H_2^{1/2}$ y $H_{2\pi}^{1/2}$ resultan isométricos, por consiguiente podemos sustituir el problema de extensión de funciones de $H_{2\pi}^{1/2}$ por el de extensión de funciones de $H_2^{1/2}$. Necesitaremos una versión del espacio de Sobolev en $R = (-1, 1)^2$ que contenga sólo las funciones que son 2–periódicas en su primera variable t para cada valor η de la segunda variable en $(-1, 1)$ fijo. Sea $H_{per}^1(R)$ la clausura en $H^1(R)$ de las restricciones a R de las funciones $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times (-1, 1))$ que para cada $\eta \in (-1, 1)$ resultan 2–periódicas en t , i.e. $v(t + 2, \eta) = v(t, \eta)$ para todo $\eta \in (-1, 1)$, y para todo $t \in \mathbb{R}$. Comenzamos con la extensión valuada en $H_{per}^1(R)$.

Lema 2.14. *Sea $R = (-1, 1)^2$, $I = (-1, 1)$. Entonces existe un operador extensión lineal y continuo $\mathcal{E} : H_2^{1/2} \rightarrow H_{per}^1(R)$ que satisface, $(\mathcal{E}\varphi)(\cdot, 0) = \varphi$.*

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos tomando $\varphi \in C^\infty \cap H_2^{1/2}$. Para trabajar en toda la recta real, seguiremos denotando con φ a una función $C^\infty(\mathbb{R})$ con los mismos valores sobre $[-3, 3]$ que la extensión 2–periódica de φ pero ahora con soporte compacto, digamos contenido en $[-4, 4]$.

Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\psi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 1$ y $\text{sop } \psi \subset [-1, 1]$.

Definimos para $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : y > 0\}$ la función

$$\Phi(x, y) = (\psi_y * \varphi)(x) = \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{y} \int_{|x-\xi| < y} \psi\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \varphi(\xi) d\xi.$$

Argumentos usuales muestran que $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ y que $\Phi(x, y) \rightarrow \varphi(x)$ cuando $y \rightarrow 0$, en el sentido de la norma $L^2(\mathbb{R})$ y puntualmente.

En particular $\lim_{y \rightarrow 0} \|\Phi(\cdot, y) - \varphi(\cdot)\|_{L^2(I)} = 0$.

Notemos ahora que $\Phi(1, y) = \Phi(-1, y)$ para todo $0 < y \leq 1$. En efecto, $\Phi(1, y) = \int_{-1}^1 \psi(z)\varphi(1 - yz)dz = \int_{-1}^1 \psi(z)\varphi(-1 - yz)dz = \Phi(-1, y)$.

Definimos $(\mathcal{E}\varphi)(x, y)$ como la función de x que para cada $y \in (0, 1]$ se obtiene por extensión 2-periódica de la restricción de $\Phi(\cdot, y)$ al intervalo $[-1, 1]$. Notemos que $(\mathcal{E}\varphi)(x, 0) = \varphi(x)$ en $[-1, 1]$.

Resta probar que $\mathcal{E}\varphi \in H^1(R)$ y que su norma está acotada por la norma $H_2^{1/2}$ de φ . Comenzaremos probando que $\mathcal{E}\varphi \in H^1(R^+)$ donde $R^+ = \{(x, y) \in R : y > 0\}$.

Estimaremos la norma de $\mathcal{E}\varphi$ en $L^2(R^+)$ usando la desigualdad de Schwartz con respecto a la medida $\psi(z) dz$ y el teorema de Fubini de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}\varphi\|_{L^2(R^+)} &= \int_0^1 \int_{-1}^1 |(\mathcal{E}\varphi)(x, y)|^2 dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \psi(z)\varphi(x - yz)dz \right|^2 dx dy \\ &\leq \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi(z)\varphi^2(x - yz)dz dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \psi(z) \int_{-1}^1 \varphi^2(x - yz)dx dz dy = \\ &\leq \int_0^1 \int_{-1}^1 \psi(z) \int_{-1-yz}^{1-yz} \varphi^2(\xi)d\xi dz dy \\ &\leq \int_0^1 \int_{-1}^1 \psi(z) \int_{-2}^2 \varphi^2(\xi)d\xi dz dy = 2 \|\varphi\|_{L^2(I)}^2, \end{aligned}$$

la última desigualdad se sigue de la periodicidad de φ en $[-3, 3]$.

Debemos ahora estimar la norma en $L^2(R^+)$ de $\partial_x \mathcal{E}\varphi$.

Dado que $\psi(-1) = \psi(1) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\partial_x \mathcal{E}\varphi(x, y) &= \frac{1}{y^2} \int_{\mathbb{R}} \psi'\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}} \psi'(z) \varphi(x-yz) dz \\ &= \int_{-1}^1 \psi'(z) \frac{\varphi(x-yz)}{y} dz = \int_{-1}^1 \psi'(z) \left[\frac{\varphi(x-yz) - \varphi(x)}{y} \right] dz,\end{aligned}$$

la última igualdad vale porque $\int_{-1}^1 \psi'(z) dz = \psi(1) - \psi(-1) = 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned}\|\partial_x \mathcal{E}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \psi'(z) \frac{\varphi(x-yz) - \varphi(x)}{y} dz \right|^2 dx dy \\ &\leq \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\int_{-1}^1 (\psi')^2(z) dz \right) \left(\int_{-1}^1 \frac{|\varphi(x-yz) - \varphi(x)|^2}{y^2} dz \right) \right\} \\ &\leq c \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{|\xi-x|<y} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{y^3} d\xi dx dy.\end{aligned}$$

El dominio de integración en la última integral está dado por

$$D = \{(x, y, \xi) : |x| < 1, 0 < y < 1, |\xi - x| < y\}.$$

Para $x \in I$, fijo, consideramos la sección $D_x = \{(y, \xi) : (x, y, \xi) \in D\}$,

entonces $D = \bigcup_{|x|<1} (\{x\} \times D_x)$.

Notemos que D_x puede escribirse como

$$\begin{aligned}D_x &= \{(y, \xi) : x < \xi < x+1, 0 < \xi - x < y < 1\} \\ &\cup \{(y, \xi) : x-1 < \xi < x, 0 < x - \xi < y < 1\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto aplicando el teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned}\|\partial_x \mathcal{E}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 &\leq c \int_{-1}^1 \int_{x-1}^x \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2} \left\{ \left| \sin \frac{\pi}{2}(\xi - x) \right|^2 \int_{x-\xi}^1 y^{-3} dy \right\} d\xi dx \\ &\quad + c \int_{-1}^1 \int_x^{x+1} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2} \left\{ \left| \sin \frac{\pi}{2}(\xi - x) \right|^2 \int_{\xi-x}^1 y^{-3} dy \right\} d\xi dx.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2 \int_{|x-\xi|}^1 y^{-3} dy$ es acotada, resulta

$$\begin{aligned} \|\partial_x \mathcal{E}\varphi\|_{L^2(R^+)}^2 &\leq \tilde{c} \int_{-1}^1 \left[\int_{x-1}^x \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2} d\xi + \int_x^{x+1} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2} d\xi \right] dx \\ &\leq \tilde{c} \int_{-1}^1 \left[\int_{-2}^2 \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2} d\xi \right] dx \\ &= \tilde{c} \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^1 + \int_1^2 \right\} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2} d\xi dx. \end{aligned}$$

Por la periodicidad de φ resulta que,

$$\int_{-2}^{-1} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi + 2 - x)|^2} d\xi = \int_{-2}^{-1} \frac{|\varphi(\xi + 2) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi + 2 - x)|^2} d\xi = \int_0^1 \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2} d\xi.$$

$$\text{Análogamente } \int_1^2 \frac{|\varphi(\xi - 2) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - 2 - x)|^2} d\xi = \int_{-1}^0 \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2} d\xi.$$

Reemplazando obtenemos la siguiente estimación

$$\|\partial_x \mathcal{E}\varphi\|_{L^2(R^+)}^2 \leq \tilde{c} \int_{-1}^1 \left[2 \int_{-1}^1 \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x)|^2}{|\sin \frac{\pi}{2}(\xi - x)|^2} d\xi \right] dx \leq \frac{2\tilde{c}}{\pi^2} \|\varphi\|_{H_2^{1/2}}^2.$$

Una estimación similar puede deducirse para $\|\partial_y \mathcal{E}\varphi\|_{L^2(R^+)}^2$. Por densidad concluimos que la extensión a R^+ es continua. Finalmente reflejando $\mathcal{E}\varphi$ por antisimetría respecto del eje $y = 0$, es decir definiendo para $-1 < y < 0$, $\mathcal{E}\varphi(x, y) = -\mathcal{E}\varphi(x, -y)$ tendremos que

$$\partial_x \mathcal{E}\varphi(x, y) = -\partial_x \mathcal{E}\varphi(x, -y) \quad \text{y que} \quad \partial_y \mathcal{E}\varphi(x, y) = \partial_y \mathcal{E}\varphi(x, -y),$$

lo que concluye el Lema. \square

Notemos que si multiplicamos $\mathcal{E}\varphi$ por una función $\chi \in C^\infty(R)$ tal que $\chi(\cdot, 0) = 1$, $\chi \geq 0$, $\chi(\cdot, y) = 0$ para $|y \pm 1| < \frac{1}{10}$ y $\chi(1, \cdot) = \chi(-1, \cdot)$ obtenemos una extensión de φ que se anula para $y = \pm 1$.

Lema 2.15. *Sea \mathcal{S} una familia admisible que satisface $\boxed{S1}$ a $\boxed{S7}$ del Capítulo 1. Entonces existe un operador extensión lineal y continuo $\mathcal{E}_\gamma : H_{2\pi}^{1/2} \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tal que su norma está uniformemente acotada para $\gamma \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{T}_\gamma \mathcal{E}_\gamma \varphi = \varphi$ para toda $\varphi \in H_{2\pi}^{1/2}$. Más aún el soporte de $\mathcal{E}_\gamma \varphi$ está contenido en el entorno “tubular cortado” D_γ^r de Γ_γ .*

DEMOSTRACIÓN. Por la isometría entre $H_2^{1/2}$ y $H_{2\pi}^{1/2}$, por el lema anterior y la construcción de la función Φ en su demostración tenemos, luego de los pertinentes cambios de escalas, que dada $\varphi \in H_{2\pi}^{1/2}$ la extensión $\mathcal{E}\varphi$ a $Q = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ resulta de $H_{per}^1(Q)$, por lo tanto afirmamos que existe un operador extensión lineal y continuo $\mathcal{E} : H_{2\pi}^{1/2} \rightarrow H_{per}^1(Q)$ tal que, por la observación que precede al lema, $\mathcal{E}\varphi(., 0) = \varphi$, $\mathcal{E}\varphi(., \pm 1) = 0$, y $\mathcal{E}\varphi(0, .) = \mathcal{E}\varphi(2\pi, .)$.

Sea $T_\gamma : Q \rightarrow D_\gamma^r$ el difeomorfismo definido en el Lema 1.2 del Capítulo 1 por, $(t, \eta) \mapsto \gamma(t) + r\eta\nu(t)$ donde D_γ^r es el r -entorno de Γ_γ cortado en $t = 0$. Definimos la aplicación,

$$\mathcal{D}_\gamma : H_{per}^1(Q) \rightarrow H^1(D_\gamma^r) \text{ por } \mathcal{D}_\gamma u := u \circ T_\gamma^{-1}.$$

Notemos que $\mathcal{D}_\gamma \mathcal{E}\varphi$ está bien definida en D_γ^r y que por la periodicidad en t de $\mathcal{E}\varphi$ para cada η tenemos que $\mathcal{D}_\gamma \mathcal{E}\varphi$ se extiende con continuidad a E_γ^r . Puesto que necesitamos obtener funciones en el dominio fijo, con $\widetilde{\mathcal{D}_\gamma \mathcal{E}\varphi}$ denotamos la extensión por cero de $\mathcal{D}_\gamma \mathcal{E}\varphi$ en los puntos de Ω que no están en $\overline{E_\gamma^r}$. Definimos finalmente, $\mathcal{E}_\gamma \varphi = \widetilde{\mathcal{D}_\gamma \mathcal{E}\varphi}$.

Probemos que \mathcal{E}_γ así definido satisface las propiedades de la tesis. Veamos primero que \mathcal{T}_γ es la inversa izquierda de $\mathcal{E}\varphi$; recordemos que el operador \mathcal{T}_γ se obtiene componiendo τ_Γ , i_γ y \mathcal{J}_γ , donde

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{\tau_\Gamma} H^{1/2}(\Gamma_\gamma) \xrightarrow{i_\gamma} H^{1/2}(\gamma) \xrightarrow{\mathcal{J}_\gamma} H_{2\pi}^{1/2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Entonces } \mathcal{T}_\gamma \mathcal{E}_\gamma \varphi &= (\mathcal{J}_\gamma \circ i_\gamma \circ \tau_\Gamma) \widetilde{\mathcal{D}_\gamma \mathcal{E}_\gamma \varphi} = (\widetilde{\mathcal{D}_\gamma \mathcal{E}_\gamma \varphi}) \circ \gamma = \\
&= \mathcal{E}_\gamma \circ T_\gamma^{-1} \circ \gamma = \mathcal{E}_\gamma(T_\gamma^{-1}(\gamma)) = \mathcal{E}_\gamma(\cdot, 0) = \varphi.
\end{aligned}$$

Probaremos conjuntamente la continuidad de cada \mathcal{E}_γ y su acotación uniforme para $\gamma \in \mathcal{S}$. Puesto que $\mathcal{E}_\gamma = \widetilde{\mathcal{D}_\gamma \circ \mathcal{E}}$ y que por el lema anterior \mathcal{E} es acotado, sólo resta obtener una cota uniforme para las normas de los operadores \mathcal{D}_γ . Esto sigue de las propiedades de \mathcal{S} que permiten obtener las siguientes desigualdades, donde ∇_{xy} denota el gradiente con respecto a las variables $x, y \in \Omega$ y $\nabla_{t,\eta}$ respecto a las variables $t, \eta \in Q$,

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{xy} \mathcal{D}_\gamma u\|_{L^2(D_\gamma^r)}^2 &= \int_{D_\gamma^r} |[\nabla_{t\eta}(u \circ T_\gamma^{-1})^T D(T_\gamma^{-1})] \circ T_\gamma^{-1}(x, y)|^2 dx dy \\
&= \int_Q |(\nabla_{t\eta} u)^T (DT_\gamma)^{-1}|^2 |\det DT_\gamma| dt d\eta \\
&\leq \int_Q |\nabla_{t\eta} u|^2 |(DT_\gamma)^{-1}|_F^2 |\det DT_\gamma| dt d\eta \\
&\leq c^2 \|\nabla_{t\eta} u\|_{L^2(Q)}^2,
\end{aligned}$$

siendo c es una constante independiente de γ pues $|\det DT_\gamma|$ está acotado superiormente para toda $\gamma \in \mathcal{S}$ por $\boxed{\text{S5}}$.

De manera similar se puede obtener una cota uniforme para

$$\|\mathcal{D}_\gamma u\|_{L^2(D_\gamma^r)}. \quad \square$$

Otro resultado que se necesitará es la continuidad de la operación de extensión, para $\varphi \in H_{2\pi}^{1/2}$ fija, como una aplicación de \mathcal{S} en $L^2(\Omega)$ dada por $\gamma \mapsto \mathcal{E}_\gamma \varphi$. Esta idea se enuncia en el próximo teorema cuya demostración necesita del siguiente lema

Lema 2.16. *Sea Q_n una sucesión de subconjuntos abiertos (relativos) de $Q = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ tales que para todo $(t, \eta) \in Q^\circ$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $(t, \eta) \in Q_n$. Supongamos que para cada n existe un difeomorfismo $I_n : Q_n \rightarrow Q$ con Jacobianos superior e inferiormente uniformemente acotados y además para todo compacto $K \subset Q^\circ$, $\sup_{(t, \eta) \in K} |I_n(t, \eta) - (t, \eta)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Entonces para toda $g \in L^2(Q)$ se tiene que $\|g(I_n(t, \eta)) - g(t, \eta)\|_{L^2(Q_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que el lema es válido para $g \in \mathcal{C}(Q)$. Dado $\epsilon > 0$, K un compacto en Q° tal que $|Q \setminus K| < \epsilon^2$,

$$\begin{aligned} \|g(I_n(t, \eta)) - g(t, \eta)\|_{L^2(Q_n)} &= \int_{Q_n} |g(I_n(t, \eta)) - g(t, \eta)|^2 dt d\eta \\ &= \int_{K \cap Q_n} |g(I_n(t, \eta)) - g(t, \eta)|^2 dt d\eta \\ &\quad + \int_{Q_n \setminus K} |g(I_n(t, \eta)) - g(t, \eta)|^2 dt d\eta \\ &\leq 4\pi\epsilon^2 + |Q \setminus K| 4 \|g\|_\infty^2 < c\epsilon^2, \end{aligned}$$

para alguna constante c positiva.

Ahora para $g \in L^2(Q)$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $h \in \mathcal{C}(Q)$ tal que $\|h - g\|_{L^2(Q)} < \epsilon$. Entonces,

$\|g \circ I_n - g\|_{L^2(Q_n)} \leq \|g \circ I_n - h \circ I_n\| + \|h \circ I_n - h\| + \|h - g\|_{L^2_Q} < c\epsilon$
pues se escogió h en $\mathcal{C}(Q)$ próxima a g y además,

$$\begin{aligned} \|g \circ I_n - h \circ I_n\|_{L^2(Q_n)}^2 &= \int_{Q_n} |g \circ I_n(t, \eta) - h \circ I_n(t, \eta)|^2 dt d\eta \\ &= \int_Q |g(\tilde{t}, \tilde{\eta}) - h(\tilde{t}, \tilde{\eta})|^2 J \left(\frac{t, \eta}{\tilde{t}, \tilde{\eta}} \right) d\tilde{t} d\tilde{\eta} \\ &\leq \tilde{c} \int_{\tilde{Q} \subset Q} |g - h|^2 d\tilde{t} d\tilde{\eta} < \tilde{c}\epsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.17. *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}(h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho)$ una familia admisible que satisface $\boxed{S1}$ a $\boxed{S7}$ del Cap. 1. Entonces para toda $\varphi \in H_{2\pi}^{1/2}$ y para toda sucesión γ_n en \mathcal{S} convergente a $\gamma \in \mathcal{S}$, en el sentido que dimos en el Capítulo 1, se tiene que $\|\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi - \mathcal{E}_\gamma\varphi\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Estimaremos la norma L^2 de $\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi - \mathcal{E}_\gamma\varphi$ teniendo en cuenta los operadores que definimos en los lemas anteriores para construir los \mathcal{E}_γ asi como el difeomorfismo T_γ definido en el Cap.1,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi - \mathcal{E}_\gamma\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi(x, y) - \mathcal{E}_\gamma\varphi(x, y)|^2 dx dy \\ &= \int_{D_{\gamma_n}^r \cap D_\gamma^r} |\mathcal{E}\varphi(T_{\gamma_n}^{-1}(x, y)) - \mathcal{E}\varphi(T_\gamma^{-1}(x, y))|^2 dx dy \\ &\quad + \int_{D_{\gamma_n}^r \setminus D_\gamma^r} |\mathcal{E}\varphi(T_{\gamma_n}^{-1}(x, y))|^2 dx dy \\ &\quad + \int_{D_\gamma^r \setminus D_{\gamma_n}^r} |\mathcal{E}\varphi(T_\gamma^{-1}(x, y))|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Haciendo cambio de variables y teniendo en cuenta que el valor absoluto del jacobiano de la aplicación T_γ está acotado superiormente para toda $\gamma \in \mathcal{S}$, veremos que cada uno de estos tres términos tiende a cero cuando $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} &\int_{D_{\gamma_n}^r \cap D_\gamma^r} |\mathcal{E}\varphi(T_{\gamma_n}^{-1}(x, y)) - \mathcal{E}\varphi(T_\gamma^{-1}(x, y))|^2 dx dy \\ &= \int_{T_\gamma^{-1}(D_{\gamma_n}^r \cap D_\gamma^r)} |\mathcal{E}\varphi(T_{\gamma_n}^{-1}(T_\gamma(t, \eta))) - \mathcal{E}\varphi(t, \eta)|^2 |\det DT_\gamma| dt d\eta \\ &\leq c \int_Q |\mathcal{E}\varphi(T_{\gamma_n}^{-1} \circ T_\gamma(t, \eta)) - \mathcal{E}\varphi(t, \eta)|^2 dt d\eta \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

pues $\mathcal{E}\varphi(T_{\gamma_n}^{-1} \circ T_\gamma(t, \eta)) \rightarrow \mathcal{E}\varphi(t, \eta)$ cuando $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$ por lema anterior y Lema 1.2 del Capítulo 1. Por otra parte la convergencia en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$ de γ_n a γ implica la convergencia uniforme de $D_{\gamma_n}^r$ a D_γ^r , por lo cual la medida de su diferencia tiende a cero y

$$\int_{D_\gamma^r \setminus D_{\gamma_n}^r} |\mathcal{E}\varphi(T_\gamma^{-1}(x, y))|^2 dx dy \longrightarrow 0.$$

Además dado que T_{γ_n} es un difeomorfismo (biyectiva y bicontinua) la medida de $T_{\gamma_n}^{-1}(D_{\gamma_n}^r \setminus D_\gamma^r)$ también tiende a cero cuando $\gamma_n \rightarrow \gamma$, de esta manera

$$\begin{aligned} \int_{D_{\gamma_n}^r \setminus D_\gamma^r} |\mathcal{E}\varphi(T_{\gamma_n}^{-1}(x, y))|^2 dx dy &= \int_{T_{\gamma_n}^{-1}(D_{\gamma_n}^r \setminus D_\gamma^r)} |\mathcal{E}\varphi(t, \eta)|^2 |\det DT_{\gamma_n}| dt d\eta \\ &\leq c \int_{T_{\gamma_n}^{-1}(D_{\gamma_n}^r \setminus D_\gamma^r)} |\mathcal{E}\varphi(t, \eta)|^2 dt d\eta \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

CAPITULO 3

El problema de contorno que especifica la dinámica del sistema

En este capítulo planteamos y resolvemos un problema auxiliar que denotaremos P_{DI} (por Dominio Inmerso) equivalente al problema de contorno, que designaremos por P_{VB} , que especifica la dinámica del sistema para el problema de optimización de formas que se formulará en el Capítulo 4, en el que deseamos determinar el dominio óptimo que “produce” un determinado flujo a través de su componente libre del borde. Aplicaremos las técnicas de dominio inmerso que fueron probadas por J. Haslinger, T. Kozubek, K. Kunisch y G. Peichl para el caso de medios isotrópicos, homogéneos y sin fuentes internas en [HKKP] y veremos que estas técnicas pueden extenderse al caso de medios no isotrópicos ni homogéneos y con fuentes internas originadas por alguna reacción química por ejemplo.

3.1. El problema de contorno básico

En esta sección reformularemos el problema de Poisson a valores en el borde (P_{VB}) como un problema de minimización de una funcional sobre un conjunto convexo y cerrado de funciones de H^1 definidas en un dominio admisible.

Para **cada** $\gamma \in \mathcal{S}$, familia de curvas admisibles definida en la Sección 1.1 del Capítulo 1, consideremos el siguiente problema a valores en el borde

definido en cada dominio admisible $\mathcal{W}_\gamma \subset \mathbb{R}^2$ con borde $\partial\mathcal{W}_\gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\gamma$, donde Γ_0 es la componente interior fija y Γ_γ la componente exterior libre,

$$(2) \quad (\text{PVB}) \quad \begin{cases} -\text{div}(A\nabla u) = f & \text{en } \mathcal{W}_\gamma \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_\gamma \\ u = c & \text{en } \Gamma_0 \end{cases}$$

donde A es una matriz simétrica 2×2 cuyos coeficientes $a_{ij}(x)$ son funciones acotadas, es decir $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega \setminus \Omega_0)$ para $i, j = 1, 2$, que describen la naturaleza heterogénea y anisotrópica del medio y c es una constante dada. El término fuente f también está dado y es de cuadrado integrable en el dominio $\Omega \setminus \Omega_0$, es decir $f \in L^2(\Omega \setminus \Omega_0)$ con $\Omega = (-1, 1)^2 \supset \mathcal{W}_\gamma$ y Ω_0 es la región delimitada por Γ_0 .

Físicamente sabemos que la incógnita $u : \mathcal{W}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ representa en este caso la densidad de alguna concentración química en estado estacionario en el interior de la región \mathcal{W}_γ .

En el caso heterogéneo pero isotrópico la ecuación diferencial parcial de este problema de contorno se obtiene a partir de la ley de difusión de Fick (ley de Fourier o ley de Ohm si u fuera temperatura o potencial electrostático, respectivamente) que establece que el flujo por unidad de área es un múltiplo negativo del gradiente, la constante de proporcionalidad se llama conductividad y mide la habilidad del material para propagar el contaminante, podemos entonces expresar este flujo como el campo vectorial $-A(x)\nabla u$, donde $A(x) = a(x)I$.

En general en un medio no homogéneo ni isotrópico el flujo total hacia afuera de cualquier subregión suave U del dominio es la integral sobre el borde de U de la componente normal de $\Phi = -A\nabla u$. Por otra parte,

integrando el término fuente sobre U obtenemos la concentración total generada en el interior de U y usando el Principio de conservación de la energía resulta ,

$$\int_{\partial U} -A\nabla u \cdot n \, ds = \int_U f \, dA.$$

Luego usando el Teorema de la divergencia tenemos que

$$\int_U (-div(A\nabla u) - f) \, dA = 0.$$

Como esta integral es cero para toda subregión que uno quiera considerar donde valga el teorema, es necesario que el integrando sea cero en todo punto del dominio \mathcal{W}_γ , así se obtiene la ecuación diferencial del problema (P_{VB}) contenido en (2).

Supondremos una condición clásica en A que implica la elipticidad uniforme del operador , esto es: existe alguna constante λ positiva tal que para cualquier $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$ la siguiente condición

$$(3) \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2.$$

Claramente esta desigualdad implica que $A(x)\xi \cdot \xi = 0$ sólo si $\xi = \bar{0}$, con lo cual $A\xi \cdot \eta = \eta^T A\xi$ define en \mathbb{R}^2 un producto interno, que vamos a denotar $(\xi, \eta)_A$. La desigualdad (3), llamada condición de elipticidad, implica que el flujo va de regiones de mayor a menor concentración, pues la densidad del flujo difusivo satisface $\Phi \cdot \nabla u = -A\nabla u \cdot \nabla u \leq 0$.

Dado que A es definida positiva y sus elementos son funciones acotadas, el operador $-div A\nabla$ resulta uniformemente elíptico (acotado y uniformemente coercitivo) lo cual implica que para cualquier f en $L^2(\mathcal{W}_\gamma)$ y g en $H^1(\mathcal{W}_\gamma)$ el problema de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A \nabla u = f & \text{en } \mathcal{W}_\gamma \\ u = g & \text{en } \partial \mathcal{W}_\gamma \end{cases}$$

tiene única solución $u \in H^1(\mathcal{W}_\gamma)$ para cada γ fija ([G-T] pág 181).

Como es sabido el problema anterior está relacionado con otro de minimización ([K-S] Capítulos 1 y 2). En particular consideremos el siguiente problema

$$(4) \quad \min_{v \in K} \left\{ 1/2 \int_{\mathcal{W}_\gamma} A \nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_{\mathcal{W}_\gamma} f v \, dx \right\}$$

$$K = \{v \in H^1(\mathcal{W}_\gamma) : \tau_{\Gamma_\gamma} v = 0, \tau_{\Gamma_0} v = c\}.$$

Sea $J(v) := 1/2 \int_{\mathcal{W}_\gamma} A \nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_{\mathcal{W}_\gamma} f v \, dx$. Notemos que si $\tilde{u} \in K$ es una solución del problema de minimización (4) entonces es solución del problema de contorno (PVB) de (2).

En efecto si \tilde{u} realiza el mínimo de J en K , $J(\tilde{u}) = \min_{v \in K} J(v)$, entonces la derivada Gâteaux de J en \tilde{u} debe anularse, es decir $\left. \frac{dJ(\tilde{u} + tv)}{dt} \right|_{t=0} = 0$ para cualquier $v \in H^1(\mathcal{W}_\gamma)$ tal que $\tilde{u} + tv \in K$, por lo cual v debe ser cero sobre ambas componentes del borde.

Definimos entonces $\tilde{K} = \{v \in H^1(\mathcal{W}_\gamma) : v|_{\Gamma_0} = v|_{\Gamma_\gamma} = 0\}$ y calculamos para cualquier $v \in \tilde{K}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\tilde{u} + tv) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_\gamma} \frac{d}{dt} [A \nabla(\tilde{u} + tv) \cdot \nabla(\tilde{u} + tv)] - \int_{\mathcal{W}_\gamma} \frac{d}{dt} f(\tilde{u} + tv) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_\gamma} (2 A \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v + 2t A \nabla v \cdot \nabla v - 2fv) \, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\left. \frac{dJ(\tilde{u} + tv)}{dt} \right|_{t=0} = \int_{\mathcal{W}_\gamma} (A \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v - fv) \, dx = 0 \quad \forall v \in \tilde{K}$.

Aplicando la fórmula de integración por partes en $H^1(\mathcal{W}_\gamma)$,

$$0 = \int_{\partial\mathcal{W}_\gamma} (A\nabla\tilde{u}\cdot\nu) v \, ds - \int_{\mathcal{W}_\gamma} \nabla\cdot(A\nabla\tilde{u}) v \, dx - \int_{\mathcal{W}_\gamma} f v \, dx.$$

Como la primera integral es cero pues $v \in \tilde{K}$, tenemos

$$\int_{\mathcal{W}_\gamma} [\nabla\cdot(A\nabla\tilde{u}) + f] v \, dx = 0, \text{ para todo } v \in \tilde{K}.$$

Por lo tanto, $-\operatorname{div}(A\nabla\tilde{u}) = f$ en \mathcal{W}_γ . Además \tilde{u} satisface las condiciones de borde de (2) pues $\tilde{u} \in K$.

La unicidad se deduce de la unicidad en (2).

Por lo tanto encontrar una solución de (P_{VB}) contenido en (2) se reduce a resolver el problema de minimización (4).

3.2. La Técnica de Dominio Inmerso

Como en los problemas que consideraremos en los Capítulos 4 y 6 el dominio \mathcal{W}_γ es también una incógnita y será necesario estudiar los operadores en espacios funcionales definidos sobre conjuntos diferentes, la “técnica de dominio inmerso” nos permite considerar espacios funcionales en un dominio fijo.

La idea de la técnica de dominio inmerso consiste en extender el problema a un dominio más grande Ω con una geometría simple, que contenga a \mathcal{W}_γ , y deducir luego ecuaciones en Ω tales que una solución de éstas restringida a \mathcal{W}_γ sea solución del problema original. Así las condiciones de borde del problema original serán condiciones sobre curvas internas impuestas por multiplicadores de Lagrange.

Sea $\Omega = (-1, 1)^2$ el dominio simple que contiene a cada dominio \mathcal{W}_γ para toda $\gamma \in \mathcal{S}$, donde \mathcal{S} es una familia admisible que satisface $\boxed{\text{S1}}$ a $\boxed{\text{S7}}$ del Capítulo 1.

Sea \tilde{f} la función de cuadrado integrable en Ω que coincide con f en \mathcal{W}_γ y es cero en $\Omega \setminus \mathcal{W}_\gamma$.

Llamaremos Ω_0 a la región delimitada por Γ_0 y Ω_γ a la componente conexa de $\Omega \setminus \mathcal{W}_\gamma$ adyacente a Γ_γ , como indica la figura 3.1.

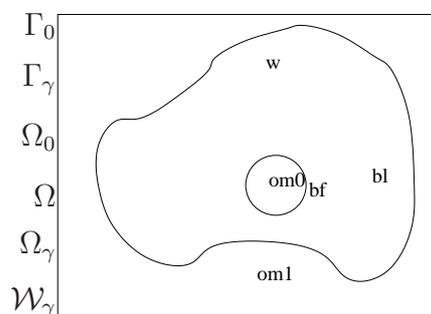


FIGURA 3.1. Regiones en el dominio simple Ω .

Sea $\hat{K} = \{\hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \tau_{\Gamma_\gamma} \hat{v} = 0, \tau_{\Gamma_0} \hat{v} = c\}$. Notemos que si para cualquier $v \in L^2(\mathcal{W}_\gamma)$, definimos la siguiente extensión de v a Ω

$$w := \begin{cases} v & \text{en } \mathcal{W}_\gamma \\ c & \text{en } \Omega_0 \\ 0 & \text{en } \Omega_\gamma \end{cases}$$

tendremos que $w \in H_0^1(\Omega)$ si v está en $H^1(\mathcal{W}_\gamma)$ y satisface las condiciones de borde de (PVB) pues de esta manera v , 0 y c se “pegan” bien en los bordes (Lema 2.8 del Capítulo 2). Por otra parte

$$w \in \hat{K} \quad \text{si y sólo si} \quad v \in K = \{v \in H^1(\mathcal{W}_\gamma) : \tau_{\Gamma_\gamma} v = 0, \tau_{\Gamma_0} v = c\}.$$

Por lo tanto, como $\tilde{f} = 0$ en Ω_0 , el problema de minimización (4) será equivalente al siguiente

$$(5) \quad \min_{\hat{v} \in \hat{K}} \left\{ 1/2 \int_{\Omega} A \nabla \hat{v} \cdot \nabla \hat{v} \, dx - \int_{\Omega} \tilde{f} \hat{v} \, dx \right\}$$

$$\hat{K} = \{ \hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \tau_{\Gamma_\gamma} \hat{v} = 0, \tau_{\Gamma_0} \hat{v} = c \}$$

De esta manera la restricción a \mathcal{W}_γ de la solución de (5) en el dominio “ficticio” Ω , será una solución de (4) y por consiguiente de (PvB).

Aplicaremos ahora a (5) la condición necesaria que proporciona el Principio de los multiplicadores de Lagrange (Teorema 2.3).

Notemos que el funcional $\hat{J} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\hat{J}(\hat{v}) := 1/2 \int_{\Omega} A \nabla \hat{v} \cdot \nabla \hat{v} \, dx - \int_{\Omega} \tilde{f} \hat{v} \, dx$ es estrictamente convexo en el convexo y cerrado \hat{K} .

Definimos el siguiente operador vectorial no lineal y continuo $\bar{F}_\gamma : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_0) \times H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$, $\bar{F}_\gamma v = (\tau_0 v - c, \tau_\Gamma v)$ y dotamos al espacio de Hilbert producto $H^{1/2}(\Gamma_0) \times H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ de la siguiente norma

$$\|(\varphi, \psi)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0) \times H^{1/2}(\Gamma_\gamma)}^2 := \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 + \|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma_\gamma)}^2.$$

Notemos que $\hat{v} \in \hat{K}$ si y sólo si $\bar{F}_\gamma \hat{v} = \bar{0}$, entonces para \hat{u} , único punto de mínimo de \hat{J} sobre \hat{K} , necesariamente $\bar{F}_\gamma \hat{u} = \bar{0}$.

Además \hat{J} y \bar{F}_γ son diferenciables Fréchet con derivadas

$$\hat{J}'(\hat{u})\hat{v} = (A \nabla \hat{u}, \nabla \hat{v})_\Omega - (\tilde{f}, \hat{v})_\Omega \quad \text{y} \quad \bar{F}_\gamma'(\hat{u})\hat{v} = (\tau_0 \hat{v}, \tau_\Gamma \hat{v}).$$

Puesto que el operador traza de $H^1(\Omega)$ en $H^{1/2}(\Gamma)$ es suryectivo (Lema 2.9) no es difícil ver que el operador $\bar{F}_\gamma'(\hat{u})$ es suryectivo.

Por lo tanto \hat{u} es un punto regular y podemos afirmar entonces que existe un multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_\gamma)$ en el dual de $H^{1/2}(\Gamma_0) \times$

$H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$, que denotamos con $H^{-1/2}(\Gamma_0) \times H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)$, que hace al Lagrangiano L estacionario en \hat{u} , siendo

$$L : H_0^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_0) \times H^{-1/2}(\Gamma_\gamma) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definido por}$$

$$L(\hat{v}, \bar{\lambda}) = \hat{J}(\hat{v}) - \bar{\lambda}(\bar{F}_\gamma \hat{v}) \quad \text{donde} \quad \bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_\gamma),$$

y $\bar{\lambda}(\bar{F}_\gamma \hat{v}) = \langle \bar{\lambda}, \bar{F}_\gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_0 \cup \Gamma_\gamma}$ es la dualidad entre los espacios producto $H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2}$ y $H_{\Gamma_0}^{1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{1/2}$. Por lo tanto

$$L'_G(\hat{u}, \bar{\lambda})(\hat{v}) = \frac{d}{dt} L(\hat{u} + t\hat{v}, \bar{\lambda})|_{t=0} = 0 \quad \forall \hat{v} \in H_0^1(\Omega).$$

Teniendo en cuenta que $\langle \bar{\lambda}, \bar{F}_\gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_0 \cup \Gamma_\gamma} := \langle \lambda_0, \tau_0 \hat{v} - c \rangle_{\Gamma_0} + \langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_\gamma}$, resulta que

$$\begin{aligned} L(\hat{u} + t\hat{v}, \lambda_0, \lambda_\gamma) &= 1/2 \int_{\Omega} A \nabla(\hat{u} + t\hat{v}) \cdot \nabla(\hat{u} + t\hat{v}) \, dx - \\ &- \int_{\Omega} \tilde{f}(\hat{u} + t\hat{v}) \, dx - \langle \lambda_0, \tau_0(\hat{u} + t\hat{v}) - c \rangle_{\Gamma_0} - \langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma(\hat{u} + t\hat{v}) \rangle_{\Gamma_\gamma} \\ &= 1/2(A \nabla \hat{u}, \nabla \hat{u})_{\Omega} + t(A \nabla \hat{u}, \nabla \hat{v})_{\Omega} + t^2/2(A \nabla \hat{v}, \nabla \hat{v})_{\Omega} - (\tilde{f}, \hat{u})_{\Omega} - \\ &t(\tilde{f}, \hat{v})_{\Omega} - \langle \lambda_0, \tau_0 \hat{u} \rangle_{\Gamma_0} - t \langle \lambda_0, \tau_0 \hat{v} \rangle_{\Gamma_0} + \langle \lambda_0, c \rangle_{\Gamma_0} - \langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma \hat{u} \rangle_{\Gamma_\gamma} - t \langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_\gamma}, \end{aligned}$$

derivando con respecto a t y evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$(6) \quad (A \nabla \hat{u}, \nabla \hat{v})_{\Omega} - (\tilde{f}, \hat{v})_{\Omega} - \langle \lambda_0, \tau_0 \hat{v} \rangle_{\Gamma_0} - \langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_\gamma} = 0 \quad \forall \hat{v} \in H_0^1(\Omega).$$

Además como $\bar{F}_\gamma \hat{u} = \bar{0}$, entonces $\langle \bar{\mu}, \bar{F}_\gamma \hat{u} \rangle_{\Gamma_0 \cup \Gamma_\gamma} = 0$ para todo $\bar{\mu} = (\mu_0, \mu_\gamma) \in H^{-1/2}(\Gamma_0) \times H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)$, y escribimos

$$(7) \quad \langle \mu_0, \tau_0 \hat{u} \rangle_{\Gamma_0} + \langle \mu_\gamma, \tau_\Gamma \hat{u} \rangle_{\Gamma_\gamma} = \langle \mu_0, c \rangle_{\Gamma_0}.$$

Resumiendo, si \hat{u} es solución de (5) entonces \hat{u} satisface (6) y (7).

Diremos que $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ resuelve el Problema de Dominio Inmerso si \hat{u} satisface el siguiente problema

$$(PDI) \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } (\lambda_0, \lambda_\gamma) \in H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2} \text{ tal que, para todo } \hat{v} \in H_0^1(\Omega) \\ \text{y para todo } (\mu_0, \mu_\gamma) \in H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2} \text{ se tiene que,} \\ (A\nabla\hat{u}, \nabla\hat{v})_\Omega - (\tilde{f}, \hat{v})_\Omega - \langle \lambda_0, \tau_0\hat{v} \rangle_{\Gamma_0} - \langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma\hat{v} \rangle_{\Gamma_\gamma} = 0 \quad \text{y} \\ \langle \mu_0, \tau_0\hat{u} \rangle_{\Gamma_0} + \langle \mu_\gamma, \tau_\Gamma\hat{u} \rangle_{\Gamma_\gamma} = \langle \mu_0, c \rangle_{\Gamma_0}, \end{array} \right.$$

donde para abreviar, hemos usado $H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2}$ para denotar el espacio producto $H^{-1/2}(\Gamma_0) \times H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)$. Además con $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denotamos la dualidad entre $H_\Gamma^{1/2}$ y $H_\Gamma^{-1/2}$ (notación introducida en la Sección 1 del Capítulo 2).

Las consideraciones anteriores plantean (PDI) como condición necesaria para (4). El siguiente resultado muestra que (PDI) es suficiente para (PVB).

Teorema 3.1. *Si $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ resuelve (PDI) entonces $u = \hat{u}|_{\mathcal{W}_\gamma}$ resuelve (PVB).*

DEMOSTRACIÓN. Resulta inmediato que, si $(\hat{u}, \lambda_0, \lambda_\gamma)$ es una solución de (PDI), para $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$, $\tau_0\hat{v} = \tau_\Gamma\hat{v} = 0$ se obtiene de (6) que $(A\nabla\hat{u}, \nabla\hat{v})_\Omega - (\tilde{f}, \hat{v})_\Omega = 0$ y en particular si $\hat{v} \in H_0^1(\mathcal{W}_\gamma)$,

$$(A\nabla\hat{u}, \nabla\hat{v})_{\mathcal{W}_\gamma} - (\tilde{f}, \hat{v})_{\mathcal{W}_\gamma} = 0.$$

De (7), para $(0, \mu_\gamma)$ se tiene que $\langle \mu_\gamma, \tau_\Gamma\hat{u} \rangle_{\Gamma_\gamma} = 0$, lo cual implica que $\tau_\Gamma\hat{u} = 0$. Similarmente para $(\mu_0, 0)$ resulta $\langle \mu_0, \tau_0\hat{u} - c \rangle_{\Gamma_0} = 0$ y $\tau_0\hat{u} = c$. Por lo tanto $u = \hat{u}|_{\mathcal{W}_\gamma} \in K$ es solución del problema (PVB).

□

Notemos que el problema (PDI) tiene única solución $(\hat{u}, \lambda_0, \lambda_\gamma)$. En efecto, la unicidad de \hat{u} sigue de las propiedades de convexidad del funcional y del conjunto de restricciones. Por lo tanto si $(\hat{u}, \mu_0, \mu_\gamma)$ fuera otra terna tendríamos que para todo $\hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \langle \bar{\mu} - \bar{\lambda}, \bar{F}_\gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_0 \cup \Gamma_\gamma} = 0$, y dado que \bar{F}_γ es suryectiva, esta igualdad es válida en todo el espacio $H^{1/2}(\Gamma_0) \times H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$, es decir para todo $\bar{F}_\gamma(\hat{v})$. Por lo tanto $\bar{\mu} = \bar{\lambda}$ y la solución de (7) es única.

Observemos que, por definición de \tilde{f} , para toda \hat{v} suave y con soporte en $\Omega_\gamma \cup \Omega_0$, la primera de las igualdades en (PDI) asegura que $(A\nabla\hat{u}, \nabla\hat{v})_\Omega = 0$ y por consiguiente $\hat{u} \equiv 0$ en Ω_γ y en Ω_0 .

CAPITULO 4

Formulaciones del problema de optimización de flujo considerando como variable la forma del dominio

En este capítulo formulamos precisamente el problema extremal que consiste en encontrar, en una clase de dominios admisibles, un elemento óptimo \mathcal{W}^* que minimice alguna distancia entre el flujo de droga a través del borde libre del dominio y un flujo constante deseado, de modo tal que la concentración de droga u sea la solución de un problema de tipo Poisson en \mathcal{W}^* , como el estudiado en el capítulo anterior. El principal objetivo de este capítulo es la reformulación del problema de optimización aplicando la técnica del dominio inmerso descrita en el Capítulo 3.

4.1. Formulación del problema de control óptimo

Como se mencionó en la introducción, un problema natural, en el estado estacionario, consiste en encontrar qué forma exterior Γ_γ del dominio anular hace que el flujo saliente $\frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A}$ a través de Γ_γ , esté lo más cerca posible de un flujo prescrito constante L , donde $\frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A} = \nu A \cdot \nabla u_\gamma$ es la derivada direccional de u_γ en la dirección de νA . Observamos que en el caso clásico en que A es la identidad, $\frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A}$ no es más que la derivada normal. Si A es una matriz que satisface la condición de elipticidad (3)

del Capítulo 3, puesto que

$$0 < \lambda = \lambda |\nu|^2 \leq \nu A \nu^T = |\nu A| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre νA y ν tenemos que, como Γ_γ tiene recta tangente en todo punto, $\frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A}$ es un “flujo saliente” de \mathcal{W}_γ .

Veamos por qué la norma natural que medirá la proximidad entre $\frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A}$ y el flujo objetivo constante L es $\|\cdot\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)}$.

Heurísticamente, como para cada γ la concentración u_γ es una función de $H^1(\mathcal{W}_\gamma)$, su traza sobre Γ_γ está en $H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ y es de esperar que la derivada “normal” $\frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A}$ pertenezca a $H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)$. Para que esta propuesta sea aceptable es necesario darle un sentido preciso a $\frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A}$ como elemento de $H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)$.

Dado que u es una solución de $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ nuestra información básica es que $u \in H^1(\mathcal{W}_\gamma)$. Pero como $f \in L^2(\mathcal{W}_\gamma)$ puede demostrarse (ver [T] Cap 3, Secc 37) que $u \in H_{loc}^2(\mathcal{W}_\gamma)$.

En particular si $\mathcal{W}_\gamma^\epsilon$, con $0 < \epsilon < 1$, es una familia uniparamétrica de dominios con clausura compacta en \mathcal{W}_γ y con normales que convergen a la normal de \mathcal{W}_γ , entonces el Teorema de Green se puede aplicar a cada $\mathcal{W}_\gamma^\epsilon$. De esta manera se puede definir (ver de nuevo [T]) $\tau_1 u_\gamma$ o $\frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A}$ como el elemento de $H^{-1/2}(\partial \mathcal{W}_\gamma)$ dado por

$$\langle \tau_1 u_\gamma, \varphi \rangle_{\partial \mathcal{W}_\gamma} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{W}_\gamma^\epsilon} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A} v \, ds,$$

para $\varphi \in H^{1/2}(\partial \mathcal{W}_\gamma)$ donde $v \in H^1(\mathcal{W}_\gamma)$ es una función asociada a φ por el Teorema de Trazas 2.6 (Sección 2 del Cap 2).

Para probar que esto define un elemento de $H^{-1/2}(\partial\mathcal{W}_\gamma)$, aplicamos la fórmula de Green en los dominios $\mathcal{W}_\gamma^\epsilon$, donde $u \in H^2$, usando el producto interno $(\xi, \eta)_A = (A\xi, \eta)_{\mathcal{W}_\gamma^\epsilon}$, definido en la Sección 1 del Capítulo 3. De esta manera tenemos que

$$\int_{\partial\mathcal{W}_\gamma^\epsilon} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A} w \, ds = \int_{\mathcal{W}_\gamma^\epsilon} A \nabla u_\gamma \cdot \nabla w \, dx + \int_{\mathcal{W}_\gamma^\epsilon} f w \, dx,$$

vale para toda $w \in C^\infty(\overline{\mathcal{W}_\gamma})$ y también para toda $w \in H^1(\mathcal{W}_\gamma)$, en particular para v .

Por consiguiente para todo ϵ tenemos la siguiente estimación,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\mathcal{W}_\gamma^\epsilon} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A} v \, ds \right| &\leq c \left(\|u\|_{H^1(\mathcal{W}_\gamma)} \|v\|_{H^1(\mathcal{W}_\gamma^\epsilon)} + \|f\|_{L^2(\mathcal{W}_\gamma)} \|v\|_{L^2(\mathcal{W}_\gamma^\epsilon)} \right) \\ &\leq c \left(\|u\|_{H^1(\mathcal{W}_\gamma)} + \|f\|_{L^2(\mathcal{W}_\gamma)} \right) \|v\|_{H^1(\mathcal{W}_\gamma)} \leq \tilde{c} \|\varphi\|_{H_{\partial\mathcal{W}_\gamma}^{1/2}}. \end{aligned}$$

Con estas consideraciones el problema de optimización de flujo para dominios con forma exterior variable definida por una curva $\gamma \in \mathcal{S}$, donde $\mathcal{S} = \mathcal{S}(h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho)$ es una clase compacta como la definida en el Capítulo 1, consiste en

$$(P^{Opt}) \begin{cases} \text{encontrar una curva } \gamma^* \in \mathcal{S} \text{ que satisfaga} \\ \left\| \frac{\partial u_{\gamma^*}}{\partial \nu_A} - L \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{\gamma^*})} = \min_{\gamma \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A} - L \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)} \\ \text{donde } u_\gamma \text{ resuelve (PVB) en } \mathcal{W}_\gamma \end{cases}$$

(PVB) es el problema a valores en el borde formulado en el Capítulo 3 :

$$(PVB) \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{en } \mathcal{W}_\gamma \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_\gamma \\ u = c & \text{en } \Gamma_0 \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\Omega \setminus \Omega_0)$.

4.2. Reformulación del problema con la técnica de dominio inmerso

Usualmente la existencia de solución a un problema de minimización se deduce de alguna continuidad del funcional de costo y en nuestro caso esto requiere que tenga sentido la convergencia $u_{\gamma_n} \rightarrow u_\gamma$ para $\gamma_n \rightarrow \gamma$. Dado que el dominio de definición de u_{γ_n} depende de γ_n , esto llevaría a comparar elementos de diferentes espacios funcionales. Sin embargo la técnica de dominio inmerso (Sección 3.2) y el homeomorfismo entre los espacios $H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ y $H_{2\pi}^{1/2}$ (Sección 2.4) nos permitirán trabajar en espacios funcionales con respecto al dominio fijo $\Omega = (-1, 1)^2$.

Además la extensión a Ω a partir de esta técnica permite mostrar que el multiplicador de Lagrange correspondiente al borde libre donde se prescriben condiciones homogéneas, coincide con el flujo normal de la concentración original.

La observación precedente es parte del resultado contenido en el teorema que sigue. Para enunciarlo planteamos el problema de optimización en el dominio inmerso,

$$(P_{DI}^{Opt}) \left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar una curva } \gamma^* \in \mathcal{S} \text{ que satisfaga} \\ \left\| \tilde{\lambda}_{\gamma^*} - L |\dot{\gamma}^*| \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} = \min_{\gamma \in \mathcal{S}} \left\| \tilde{\lambda}_\gamma - L |\dot{\gamma}| \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} \\ \text{donde } \tilde{\lambda}_\gamma \in H_{2\pi}^{-1/2} \text{ y es tal que existen } \hat{u}_\gamma \in H_0^1(\Omega), \lambda_{0\gamma} \in H_{\Gamma_0}^{-1/2} \\ \text{de modo que } \forall \hat{v} \in H_0^1(\Omega), \forall (\mu_0, \tilde{\mu}_\gamma) \in H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2} \text{ valen,} \\ (A\nabla\hat{u}_\gamma, \nabla\hat{v})_\Omega - (\tilde{f}, \hat{v})_\Omega - \langle \lambda_{0\gamma}, \tau_0\hat{v} \rangle_{\Gamma_0} - \langle \tilde{\lambda}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma\hat{v} \rangle_{2\pi} = 0 \text{ y} \\ \langle \mu_0, \tau_0\hat{u}_\gamma \rangle_{\Gamma_0} + \langle \tilde{\mu}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma\hat{u}_\gamma \rangle_{2\pi} = \langle \mu_0, c \rangle_{\Gamma_0} \end{array} \right.$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2\pi}$ indica el par dualidad en $H_{2\pi}^{1/2}$ y \tilde{f} , como antes, es la extensión de f por cero dentro de Ω_0 .

Teorema 4.1. *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}(h, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho)$ una familia admisible que satisface $\boxed{S1}$ a $\boxed{S7}$ del Cap. 1 y sea L el flujo deseado. Entonces si el problema (P_{DI}^{Opt}) tiene solución la misma resuelve (P^{Opt}) .*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.1, el Teorema 4.1 estará probado si demostramos que

- (a) que $\lambda_\gamma = \tau_1 u_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A}$ y
- (b) que las normas $H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)$ y las dualidades entre $H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ y $H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)$ pueden escribirse en términos del espacio de Sobolev periódico $H_{2\pi}^{1/2}$.

Dado que u es solución de (PVB), reemplazando $-div A \nabla u = f$ en la versión general de la fórmula de Green obtenemos

$$(8) \quad (A \nabla u, \nabla v)_{\mathcal{W}_\gamma} - (f, v)_{\mathcal{W}_\gamma} - \langle \tau_1 u, \tau_0 v \rangle_{\Gamma_0} - \langle \tau_1 u, \tau_\Gamma v \rangle_{\Gamma_\gamma} = 0.$$

donde $\langle \tau_1 u, \tau_0 v \rangle_{\Gamma_0} + \langle \tau_1 u, \tau_\Gamma v \rangle_{\Gamma_\gamma} = \langle \tau_1 u, \tau v \rangle_{\partial \mathcal{W}_\gamma}$, puesto que $\partial \mathcal{W}_\gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\gamma$ y $\Gamma_0 \cap \Gamma_\gamma = \emptyset$.

Como la función $\hat{u}_\gamma \in H_0^1(\Omega)$ es solución de (P_{DI}) entonces para un par $(\lambda_0, \lambda_\gamma) \in H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2}$ vale que, para todo $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$,

$$(9) \quad (A \nabla \hat{u}_\gamma, \nabla \hat{v})_\Omega - (\tilde{f}, \hat{v})_\Omega - \langle \lambda_0, \tau_0 \hat{v} \rangle_{\Gamma_0} - \langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_\gamma} = 0.$$

Por la observación final del Capítulo 3 tenemos que los dos primeros términos de (8) y (9) coinciden. Por consiguiente para toda $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$, $\langle \tau_1 u, \tau_0 \hat{v} \rangle_{\Gamma_0} + \langle \tau_1 u, \tau_\Gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_\gamma} = \langle \lambda_0, \tau_0 \hat{v} \rangle_{\Gamma_0} + \langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_\gamma}$.

Tomando una $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$ que se anule en Γ_0 , resulta $\tau_1 u = \lambda_\gamma$, lo que implica que $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \lambda_\gamma$.

$$\text{De esta manera } \min_{\gamma \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial u_\gamma}{\partial \nu_A} - L \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)} = \min_{\gamma \in \mathcal{S}} \|\lambda_\gamma - L\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)}.$$

Demostraremos (b) usando el homeomorfismo entre los espacios $H_{2\pi}^{1/2}$ y $H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ y los operadores traza \mathcal{T}_γ (Sección 2.5).

Puesto que $i_\gamma : H^{1/2}(\Gamma_\gamma) \rightarrow H^{1/2}(\gamma)$ y $\mathcal{J}_\gamma : H^{1/2}(\gamma) \rightarrow H_{2\pi}^{1/2}$ son isometrías y que $\tau_\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ es suryectiva tenemos que los operadores $\mathcal{T}_\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H_{2\pi}^{1/2}$, definidos por $\mathcal{T}_\gamma := \mathcal{J}_\gamma \circ i_\gamma \circ \tau_\Gamma$, son lineales, acotados y suryectivos. Los operadores conjugados de cada uno de ellos son los operadores lineales y continuos, definidos en los respectivos duales.

En el siguiente diagrama denotamos con el supraíndice “ $-*$ ” a los operadores conjugados inversos:

$$\begin{array}{ccccc} H_{2\pi}^{-1/2} & \xrightarrow{\mathcal{J}_\gamma^*} & H^{-1/2}(\gamma) & \xrightarrow{i^*} & H^{-1/2}(\Gamma_\gamma) \\ \mathcal{J}_\gamma^{-*} i_\gamma^{-*} \lambda_\gamma & \longmapsto & i_\gamma^{-*} \lambda_\gamma & \longmapsto & \lambda_\gamma \end{array}$$

Notemos que para la funcional $\lambda_\gamma \in H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)$ y $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ tenemos que $\langle \lambda_\gamma, \varphi \rangle_{\Gamma_\gamma} = \langle i_\gamma^{-*} \lambda_\gamma, i_\gamma \varphi \rangle_\gamma = \langle \mathcal{J}_\gamma^{-*} i_\gamma^{-*} \lambda_\gamma, \mathcal{J}_\gamma i_\gamma \varphi \rangle_{2\pi}$.

Llamando $\tilde{\lambda}_\gamma := \mathcal{J}_\gamma^{-*} i_\gamma^{-*} \lambda_\gamma$ resulta que, para $\varphi = \tau_\Gamma \hat{v}$ con $\hat{v} \in H^1(\Omega)$, $\langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma \hat{v} \rangle_{\Gamma_\gamma} = \langle \tilde{\lambda}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma \hat{v} \rangle_{2\pi}$.

Notemos además que un funcional sobre $H_{2\pi}^{1/2}$ inducido por una constante L se transforma de acuerdo a

$$\langle L, \varphi \rangle_{\Gamma_\gamma} = L \int_{\Gamma_\gamma} \varphi d\Gamma_\gamma = L \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| \varphi \circ \gamma dt = \langle L |\dot{\gamma}|, \varphi \circ \gamma \rangle_{2\pi},$$

de aquí que $\|\lambda_\gamma - L\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)} = \left\| \tilde{\lambda}_\gamma - L |\dot{\gamma}| \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}}$.

□

Una ventaja de esta última formulación, (P_{DI}^{Opt}) , sobre el problema original (P^{Opt}) respecto a la resolución numérica por el Método de Elementos Finitos podría ser que el sistema de ecuaciones definido en el dominio fijo Ω puede resolverse más eficientemente sobre una grilla fija debido a la geometría simple del mismo.

CAPITULO 5

Teoría de existencia de solución del problema de optimización de flujo considerando como variable la forma del dominio

En este capítulo veremos que los métodos de compacidad son aplicables para resolver la reformulación de nuestro problema presentada en el Capítulo 4, demostrando la dependencia continua de la concentración y de los multiplicadores de Lagrange con respecto a la forma del dominio. El principal resultado de este capítulo es el Teorema 5.3 cuyo corolario inmediato es la existencia de solución de (P_{DI}^{Opt}) , con la notación introducida en el capítulo anterior.

5.1. Resultados previos

También en este capítulo \mathcal{S} denotará una clase compacta que satisface $\boxed{\text{S1}}$ a $\boxed{\text{S7}}$. Demostraremos en esta sección dos resultados que usaremos para probar el Teorema de la Dependencia continua. Denotaremos con $(P_{DI}^{2\pi})$ al problema de dominio inmerso (PDI) en $H_{2\pi}^{-1/2}$,

$$(P_{DI}^{2\pi}) \begin{cases} \text{encontrar } (\hat{u}_\gamma, \lambda_{0\gamma}, \tilde{\lambda}_\gamma) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2} & \text{tal que :} \\ (A\nabla\hat{u}_\gamma, \nabla\hat{v})_\Omega - (\tilde{f}, \hat{v})_\Omega - \langle \lambda_{0\gamma}, \tau_0\hat{v} \rangle_{\Gamma_0} - \langle \tilde{\lambda}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma\hat{v} \rangle_{2\pi} = 0, \hat{v} \in H_0^1 \\ \langle \mu_0, \tau_0\hat{u}_\gamma \rangle_{\Gamma_0} + \langle \tilde{\mu}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma\hat{u}_\gamma \rangle_{2\pi} = \langle \mu_0, c \rangle_{\Gamma_0}, (\mu_0, \tilde{\mu}_\gamma) \in H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}. \end{cases}$$

Lema 5.1. *El conjunto de soluciones de $(P_{DI}^{2\pi})$, $\{(\hat{u}_\gamma, \lambda_{0\gamma}, \tilde{\lambda}_\gamma) : \gamma \in \mathcal{S}\}$, está acotado en $H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que para los dominios admisibles “hay espacio” entre las componentes del borde, es decir existe una constante $d > 0$ tal que $\text{dist}(\Gamma_0, \Gamma_\gamma) \geq d$ para toda $\gamma \in \mathcal{S}$, por lo tanto podemos construir independientemente de γ una función $\hat{v}^* \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\hat{v}^* = c$ en Γ_0 y $\hat{v}^* = 0$ en Γ_γ para toda $\gamma \in \mathcal{S}$.

Si \hat{u}_γ denota a la función que minimiza en \hat{K} a \hat{J} siendo

$$\hat{J}(v) = 1/2 \int_{\Omega} A \nabla \hat{v} \cdot \nabla \hat{v} \, dx - \int_{\Omega} \tilde{f} \hat{v} \, dx$$

y

$$\hat{K} = \{ \hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \hat{v}|_{\Gamma_\gamma} = 0, \hat{v}|_{\Gamma_0} = c \}$$

entonces, $\hat{J}(\hat{u}_\gamma) \leq \hat{J}(\hat{v}^*)$ y como $\|\hat{v}\|_{H_0^1(\Omega)} \approx \|\hat{v}\|_A = (A \nabla \hat{v}, \nabla \hat{v})_{\Omega}^{1/2}$, obtenemos la siguiente acotación, para toda $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$ y $\tilde{c} > 0$,

$$\|\hat{u}_\gamma\|_{H^1}^2 \leq \tilde{c} \left(\|\hat{v}^*\|_{H^1}^2 + 2 \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2} \|\hat{v}^*\|_{H^1} + 2 \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2} \|\hat{u}_\gamma\|_{H^1} \right).$$

Dado que \hat{v}^* y f están fijas, en la desigualdad anterior el miembro izquierdo es cuadrático en $\|\hat{u}_\gamma\|_{H^1}$ y el derecho es lineal en esa variable. Por consiguiente para alguna constante c positiva tenemos que $\|\hat{u}_\gamma\|_{H^1(\Omega)} \leq c$ para toda $\gamma \in \mathcal{S}$.

Ahora elegimos $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, y la extendemos a $\hat{v} \in H^1(\Omega)$ de manera que $\text{supp } \hat{v} \subset \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Gamma_0) < d/2\}$. Reemplazando \hat{v} en la primera ecuación de $(P_{DI}^{2\pi})$ tenemos

$$(10) \quad \langle \lambda_{0_\gamma}, \varphi \rangle_{\Gamma_0} = \langle \lambda_{0_\gamma}, \tau_0 \hat{v} \rangle_{\Gamma_0} = (A \nabla \hat{u}_\gamma, \nabla \hat{v})_{\Omega} - (\tilde{f}, \hat{v})_{\Omega}.$$

Como $(A \nabla \hat{u}_\gamma, \nabla \hat{v})_{\Omega}$ es un producto interno, y los elementos de A están acotados, existe una constante k tal que

$$(A \nabla \hat{u}_\gamma, \nabla \hat{v})_{\Omega} \leq k \|\hat{u}_\gamma\|_{H^1(\Omega)} \|\hat{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{k} c \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)},$$

donde \tilde{k} es el producto de k con una constante de inmersión apropiada para \hat{v} .

Por otra parte $(\tilde{f}, \hat{v})_\Omega \leq \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2} \|\hat{v}\|_{H^1} \leq \frac{\tilde{k}}{k} \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}$.

Reemplazando ambas estimaciones en (10) resulta,

$|\langle \lambda_{0\gamma}, \varphi \rangle_{\Gamma_0}| \leq \tilde{k} \left(c + \frac{1}{k} \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2} \right) \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}$. Tomando el supremo sobre $\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} = 1$ tenemos la acotación deseada

$$\|\lambda_{0\gamma}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \leq \tilde{k} \left(c + \frac{1}{k} \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2} \right) \text{ para toda } \gamma \in \mathcal{S}.$$

Por otra parte, para cualquier $\varphi \in H_{2\pi}^{1/2}$, por la acotación uniforme de los operadores trazas \mathcal{T}_γ sobre los bordes libres en $H_{2\pi}^{1/2}$ (Lema 2.13) y por la acotación de las extensiones \mathcal{E}_γ en $H_0^1(\Omega)$ (Lema 2.15), de cuya construcción se dedujo que $\text{supp } \mathcal{E}_\gamma \subset \bar{D}_\gamma$, de la primera ecuación de $(P_{DI}^{2\pi})$ deducimos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \left| \langle \tilde{\lambda}_\gamma, \varphi \rangle_{2\pi} \right| &= \left| \langle \tilde{\lambda}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma \mathcal{E}_\gamma \varphi \rangle_{2\pi} \right| \leq |(A \nabla \hat{u}_\gamma, \nabla \mathcal{E}_\gamma \varphi)_\Omega| + \left| (\tilde{f}, \mathcal{E}_\gamma \varphi)_\Omega \right| \leq \\ &\leq k c \|\mathcal{E}_\gamma\| \|\varphi\|_{H_{2\pi}^{1/2}} + \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2} \|\mathcal{E}_\gamma\| \|\varphi\|_{H_{2\pi}^{1/2}} \leq a \left(k c + \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2} \right) \|\varphi\|_{H_{2\pi}^{1/2}} \end{aligned}$$

donde a es la cota uniforme para los operadores extensión.

Tomando el supremo sobre $\|\varphi\|_{H_{2\pi}^{1/2}} = 1$ tenemos la estimación deseada

$$\left\| \tilde{\lambda}_\gamma \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} \leq a \left(k c + \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2} \right), \text{ para toda } \gamma \in \mathcal{S}.$$

□

En el siguiente lema se usará una propiedad elemental de las trazas. Si v es una función que está en $H^1(\Omega)$ y que es constantemente igual a c en el dominio interior o en el dominio exterior determinados por una curva γ suave cerrada contenida en Ω , entonces $\tau_\Gamma v = c$.

Lema 5.2. *Supongamos que $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, $\gamma_n, \gamma \in \mathcal{S}$ y sea $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ cualquier sucesión en $H_0^1(\Omega)$ que satisface $\tau_0 v_n = c$ y $\tau_{\gamma_n} v_n = 0$. Si v_n converge débilmente a v en $H_0^1(\Omega)$ entonces $\tau_0 v = c$ y $\tau_\Gamma v = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$\tilde{v}_n := \begin{cases} c & \text{en } \bar{\Omega}_0 \\ v_n & \text{en } \mathcal{W}_{\gamma_n} \\ 0 & \text{en } \Omega_1^n = \Omega \setminus (\bar{\mathcal{W}}_{\gamma_n} \cup \Omega_0) \end{cases}$$

y

$$\tilde{v} := \begin{cases} c & \text{en } \bar{\Omega}_0 \\ v & \text{en } \mathcal{W}_\gamma \\ 0 & \text{en } \Omega_1 = \Omega \setminus (\bar{\mathcal{W}}_\gamma \cup \Omega_0) \end{cases}$$

Notemos que $\|\tilde{v}_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}$. Como $v_n \rightharpoonup v$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces existe $M > 0$: $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$ (consecuencia del Principio de acotación uniforme de Banach-Steinhaus, ver [B-N] Teorema 15.4 pág 255) , en particular $\|\tilde{v}_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$ para todo n . Luego por la precompacidad débil de las bolas de $H_0^1(\Omega)$ existe una subsucesión $\{\tilde{v}_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ débilmente convergente en $H_0^1(\Omega)$ que, por el Teorema de Rellich, podemos suponer convergente en $L^2(\Omega)$ a una función w de $H_0^1(\Omega)$ (ver Sección 2.2 del Capítulo 2). Como cada \tilde{v}_{n_k} es constantemente c en Ω_0 , también lo es w en el mismo abierto cuya frontera es Γ_0 . Por consiguiente $\tau_0 w = c$. Por otra parte $w \equiv 0$ en Ω_1 . En efecto, dado $x \in \Omega_1$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, 2\delta) \subset \Omega_1$. Por la convergencia uniforme de γ_n a γ , para n suficientemente grande $B(x, \delta)$ no corta a Γ_{γ_n} , entonces $B(x, \delta) \subset \Omega_1^n$ ($n \geq N$) y $\tilde{v}_{n_k}|_{B(x, \delta)} = 0$ para esos valores de n , de donde w es la función nula en $B(x, \delta)$. De aquí que $\tau_\Gamma w = 0$.

Notemos que en la prueba anterior estamos demostrando, en particular que $w \equiv \tilde{v}$ en Ω_1 . Ya habíamos argumentado que $w = c = \tilde{v}$ en Ω_0 . Para probar que w es \tilde{v} , argumentamos de un modo similar en \mathcal{W}_γ y obtenemos el resultado. \square

5.2. El Teorema de la Dependencia Continua

Teorema 5.3. *Supongamos que $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, $\gamma_n, \gamma \in \mathcal{S}$. Sea $(\hat{u}_n, \lambda_{0n}, \tilde{\lambda}_n) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}$ la solución de $(P_{DI}^{2\pi})$ correspondiente a γ_n y sea $(\hat{u}, \lambda_0, \tilde{\lambda}) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}$ la solución de $(P_{DI}^{2\pi})$ correspondiente a γ . Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{u}_n = \hat{u}$ en $H_0^1(\Omega)$ en el sentido de la norma, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_n = \tilde{\lambda}$ débilmente en $H_{2\pi}^{-1/2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{0n} = \lambda_0$ fuertemente en $H_{\Gamma_0}^{-1/2}$. Además si $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, entonces la convergencia de $\tilde{\lambda}_n$ a $\tilde{\lambda}$ en $H_{2\pi}^{-1/2}$ es fuerte.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\{\gamma_n\}$ está contenida en \mathcal{S} , por el Lema 5.1 tenemos que la sucesión $\{(\hat{u}_n, \lambda_{0n}, \tilde{\lambda}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ está acotada en el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}$. Entonces existe alguna subsucesión de $\{(\hat{u}_n, \lambda_{0n}, \tilde{\lambda}_n)\}$ que es débilmente convergente. Probaremos que cualquiera sea la subsucesión $\{(\hat{u}_{n_k}, \lambda_{0n_k}, \tilde{\lambda}_{n_k})\}$ débilmente convergente, su límite débil $(\hat{u}, \lambda_0, \tilde{\lambda})$ es la única solución de $(P_{DI}^{2\pi})$ correspondiente a γ . Esto será suficiente para la convergencia débil de la sucesión completa $\{(\hat{u}_n, \lambda_{0n}, \tilde{\lambda}_n)\}$ al mismo límite $(\hat{u}, \lambda_0, \tilde{\lambda})$.

Denotemos con $\{(\hat{u}_n, \lambda_{0n}, \tilde{\lambda}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ a cualquier subsucesión débilmente convergente de la sucesión dada. Denotemos con $(\hat{u}, \lambda_0, \tilde{\lambda})$ a su límite débil, en estos términos

$$(\hat{u}_n, \lambda_{0n}, \tilde{\lambda}_n) \rightharpoonup (\hat{u}, \lambda_0, \tilde{\lambda}) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}.$$

En el Lema 5.2 demostramos que el límite débil \hat{u} de \hat{u}_n en $H_0^1(\Omega)$ cumple las condiciones de borde del problema original, por lo cual \hat{u} satisface la segunda ecuación de $(P_{DI}^{2\pi})$,

$$\langle \mu_0, \tau_0 \hat{u} \rangle_{\Gamma_0} + \langle \tilde{\mu}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma \hat{u} \rangle_{2\pi} = \langle \mu_0, c \rangle_{\Gamma_0}, \quad (\mu_0, \tilde{\mu}_\gamma) \in H_{\Gamma_0}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}.$$

Por otra parte $(\hat{u}_n, \lambda_{0n}, \tilde{\lambda}_n)$ es la solución de la primera ecuación de $(P_{DI}^{2\pi})$ para cada γ_n , de esta forma para toda $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$

$$(11) \quad (A\nabla \hat{u}_n, \nabla \hat{v})_\Omega - (\tilde{f}, \hat{v})_\Omega - \langle \lambda_{0n}, \tau_0 \hat{v} \rangle_{\Gamma_0} - \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_{\gamma_n} \hat{v} \rangle_{2\pi} = 0.$$

Ahora haciendo $n \rightarrow \infty$ para \hat{v} fijo, resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_{\gamma_n} \hat{v} \rangle_{2\pi} = (A\nabla \hat{u}, \nabla \hat{v})_\Omega - (\tilde{f}, \hat{v})_\Omega - \langle \lambda_0, \tau_0 \hat{v} \rangle_{\Gamma_0}.$$

Por otro lado usando el Teorema 2.12 (Sección 2.5, Capítulo 2) sobre la convergencia fuerte de los operadores traza \mathcal{T}_{γ_n} cuando $\gamma_n \xrightarrow{c^1} \gamma$, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_{\gamma_n} \hat{v} \rangle_{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_{\gamma_n} \hat{v} - \mathcal{T}_\gamma \hat{v} \rangle_{2\pi} + \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_\gamma \hat{v} \rangle_{2\pi} \} = \langle \tilde{\lambda}, \mathcal{T}_\gamma \hat{v} \rangle_{2\pi},$$

puesto que $\left| \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_{\gamma_n} \hat{v} - \mathcal{T}_\gamma \hat{v} \rangle \right| \leq \left\| \tilde{\lambda}_n \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} \left\| \mathcal{T}_{\gamma_n} \hat{v} - \mathcal{T}_\gamma \hat{v} \right\|_{H_{2\pi}^{1/2}}$ y que $\left\| \tilde{\lambda}_n \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}}$ está uniformemente acotada, por ser la sucesión $\{ \tilde{\lambda}_n \}$ débilmente convergente. De las dos últimas identidades resulta que $(\hat{u}, \lambda_0, \tilde{\lambda})$ también satisface la primera ecuación de $(P_{DI}^{2\pi})$.

Veamos ahora que las normas de \hat{u}_n convergen a la norma de \hat{u} .

Reemplazando \hat{v} por \hat{u}_n en (11) y teniendo en cuenta que \hat{u}_n satisface las condiciones de borde resulta, haciendo $n \rightarrow \infty$, que

$$(A\nabla \hat{u}_n, \nabla \hat{u}_n)_\Omega = (\tilde{f}, \hat{u}_n)_\Omega + \langle \lambda_{0n}, c \rangle_{\Gamma_0} \rightarrow (\tilde{f}, \hat{u})_\Omega + \langle \lambda_0, c \rangle_{\Gamma_0} = (A\nabla \hat{u}, \nabla \hat{u}).$$

Por lo tanto $\| \hat{u}_n \|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \| \hat{u} \|_A$, para $\hat{u}_n, \hat{u} \in H_0^1(\Omega)$.

Notemos que esta convergencia de las normas y la convergencia débil implican la convergencia “en” norma. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}_n - \hat{u}\|_A^2 &= \int_{\Omega} (A(\nabla\hat{u}_n - \nabla\hat{u})) \cdot (\nabla\hat{u}_n - \nabla\hat{u}) \\
&= \int_{\Omega} (A\nabla\hat{u}_n \cdot \nabla\hat{u}_n - 2A\nabla\hat{u}_n \cdot \nabla\hat{u} + A\nabla\hat{u} \cdot \nabla\hat{u}) \\
&= \|\hat{u}_n\|_A^2 - 2(A\nabla\hat{u}_n, \nabla\hat{u})_{\Omega} + \|\hat{u}\|_A^2 \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\hat{u}\|_A^2 - 2\|\hat{u}\|_A^2 + \|\hat{u}\|_A^2 = 0,
\end{aligned}$$

y la convergencia $\hat{u}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{u}$ es fuerte en $H_0^1(\Omega)$ en el sentido de la norma inducida por A y por lo tanto en el sentido de la norma tradicional de H^1 .

A partir de esta convergencia vamos a probar la convergencia fuerte de los multiplicadores de Lagrange.

Consideremos una $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ y una $\hat{v} \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\tau_0\hat{v} = \varphi$ y $\hat{v} = 0$ fuera de un entorno suficientemente pequeño de Γ_0 y $\|\hat{v}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}$ para alguna constante c .

Con esta \hat{v} en (11) para \hat{u}_n y \hat{u} obtenemos, restando miembro a miembro, la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
|\langle \lambda_{0_n} - \lambda_0, \varphi \rangle_{\Gamma_0}| &= |(A\nabla(\hat{u}_n - \hat{u}), \nabla\hat{v})_{\Omega}| \leq k \|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{H^1} \|\hat{v}\|_{H^1} \\
&\leq k \|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{H^1(\Omega)} c \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}
\end{aligned}$$

donde k es una cota para la norma Frobenius de A . Tomando supremo para $\|\varphi\|_{H_{\Gamma_0}^{1/2}} = 1$ resulta que $\|\lambda_{0_n} - \lambda_0\|_{H_{\Gamma_0}^{-1/2}} \leq \tilde{c} \|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{H^1}$ y por lo tanto tenemos la convergencia fuerte $\lambda_{0_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ en $H_{\Gamma_0}^{-1/2}$.

Veamos ahora que si $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, entonces $\tilde{\lambda}_n \rightarrow \tilde{\lambda}$ fuertemente en $H_{2\pi}^{-1/2}$. Notemos que para toda $\varphi \in H_{2\pi}^{1/2}$ las extensiones

$\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi$ y $\mathcal{E}_\gamma\varphi$ se anulan en un entorno de Γ_0 (Sección 2.6, Capítulo 2). Por lo tanto usando el Lema 2.15 y la ecuación (11) para $\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi$ y $\mathcal{E}_\gamma\varphi$ en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda}, \varphi \rangle_{2\pi} &= \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_{\gamma_n} \mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi \rangle_{2\pi} - \langle \tilde{\lambda}, \mathcal{T}_\gamma \mathcal{E}_\gamma \varphi \rangle_{2\pi} \\ &= (A\nabla \hat{u}_n, \nabla \mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi)_\Omega - (\tilde{f}, \mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi)_\Omega - (A\nabla \hat{u}, \nabla \mathcal{E}_\gamma \varphi)_\Omega + (\tilde{f}, \mathcal{E}_\gamma \varphi)_\Omega \end{aligned}$$

Sumando y restando $(A\nabla \hat{u}, \nabla \mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi)_\Omega$ podemos escribir,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda}, \varphi \rangle_{2\pi} &= (A\nabla(\hat{u}_n - \hat{u}), \nabla \mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi)_\Omega + (A\nabla \hat{u}, \nabla(\mathcal{E}_{\gamma_n} - \mathcal{E}_\gamma)\varphi)_\Omega \\ &\quad - (\tilde{f}, \mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi)_\Omega + (\tilde{f}, \mathcal{E}_\gamma \varphi)_\Omega. \end{aligned}$$

Por la continuidad de la operación de extensión como aplicación de \mathcal{S} en $L^2(\Omega)$ dada por $\gamma \mapsto \mathcal{E}_\gamma\varphi$ (Teorema 2.17 Capítulo 2), la suma de los dos últimos términos del segundo miembro de la igualdad anterior tiende a cero cuando $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$.

Ahora vamos a estimar los dos primeros términos del segundo miembro de dicha igualdad. Denotando, como antes, con k a una cota para la norma Frobenius de la matriz A y con c a la cota uniforme para \mathcal{E}_{γ_n} (ver Lema 2.15), tenemos la siguiente estimación para el primer término

$$(A\nabla(\hat{u}_n - \hat{u}), \nabla \mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi)_\Omega \leq k \|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{H^1} \|\mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi\|_{H^1} \leq kc \|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{H^1} \|\varphi\|_{H_{2\pi}^{1/2}}.$$

Al segundo término lo expresaremos como una suma de tres términos que estimaremos separadamente. Recordando que $\text{supp } \mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi \subset \bar{D}_{\gamma_n}^r$, que el difeomorfismo $T_\gamma : Q = (0, 2\pi) \times (-1, 1) \rightarrow D_\gamma^r$, asigna a cada par $(t, \eta) \mapsto (x, y) = \gamma(t) + r\eta\nu(t)$, para $r \leq h$ (Lema 1.2, Capítulo 1) y que el operador extensión $\mathcal{E} : H_2^{1/2} \rightarrow H_{per}^1(\Omega)$ que satisface $(\mathcal{E}\varphi)(\cdot, 0) = \varphi$, es tal que \mathcal{E}_γ es la extensión por cero de $\mathcal{E}\varphi \circ T_\gamma^{-1}$ en los puntos de Ω que no están en \bar{D}_γ^r (Lema 2.14 y 2.15, Capítulo 2),

podemos escribir

$$\begin{aligned}
(A\nabla\hat{u}, \nabla(\mathcal{E}_{\gamma_n} - \mathcal{E}_\gamma)\varphi)_\Omega &= \int_\Omega (A\nabla\hat{u})^T \nabla(\mathcal{E}_{\gamma_n} - \mathcal{E}_\gamma)\varphi \, dx \, dy = \\
&= \int_{D_{\gamma_n}^r} (A\nabla\hat{u})^T \nabla\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi \, dx \, dy - \int_{D_\gamma^r} (A\nabla\hat{u})^T \nabla\mathcal{E}_\gamma\varphi \, dx \, dy = \\
&\int_{T_{\gamma_n}(Q)} (A\nabla\hat{u})^T \nabla(\mathcal{E}\varphi \circ T_{\gamma_n}^{-1}) \, dx \, dy - \int_{T_\gamma(Q)} (A\nabla\hat{u})^T \nabla(\mathcal{E}\varphi \circ T_\gamma^{-1}) \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena y el Teorema de la aplicación inversa, $DT_\gamma^{-1} = (DT_\gamma)^{-1}$, denotando $(DT_\gamma)^{-T} = (DT_\gamma^{-1})^T$ resulta que

$$\begin{aligned}
&\int_{T_\gamma(Q)} (A\nabla\hat{u})^T \nabla(\mathcal{E}\varphi \circ T_\gamma^{-1}) \, dx \, dy = \\
&\int_{T_\gamma(Q)} (A\nabla\hat{u})^T (DT_\gamma)^{-T} \circ T_\gamma^{-1}(\nabla\mathcal{E}\varphi) \circ T_\gamma^{-1} \, dx \, dy = \\
&\int_Q (A\nabla\hat{u})^T \circ T_\gamma(t, \eta) (DT_\gamma)^{-T}(\nabla\mathcal{E}\varphi) |det \, DT_\gamma| \, dt \, d\eta.
\end{aligned}$$

Como lo mismo vale cuando γ se reemplaza por γ_n , resulta que

$$\begin{aligned}
&(A\nabla\hat{u}, \nabla(\mathcal{E}_{\gamma_n} - \mathcal{E}_\gamma)\varphi) = \\
&= \int_Q (A\nabla\hat{u})^T \circ T_{\gamma_n}(t, \eta) (DT_{\gamma_n})^{-T}(\nabla\mathcal{E}\varphi) |det \, DT_{\gamma_n}| \, dt \, d\eta - \\
&\quad - \int_Q (A\nabla\hat{u})^T \circ T_\gamma(t, \eta) (DT_\gamma)^{-T}(\nabla\mathcal{E}\varphi) |det \, DT_\gamma| \, dt \, d\eta.
\end{aligned}$$

Sumando y restando $\int_Q (A\nabla\hat{u})^T \circ T_{\gamma_n}(t, \eta) (DT_{\gamma_n})^{-T}(\nabla\mathcal{E}\varphi) |det \, DT_\gamma| \, dt \, d\eta$ y $\int_Q (A\nabla\hat{u})^T \circ T_{\gamma_n}(t, \eta) (DT_{\gamma_n})^{-T}(\nabla\mathcal{E}\varphi) |det \, DT_\gamma| \, dt \, d\eta$ tendremos que,

$$(A\nabla\hat{u}, \nabla(\mathcal{E}_{\gamma_n} - \mathcal{E}_\gamma)\varphi)_\Omega = \sum_{i=1}^3 I_i^n,$$

donde cada término de esta suma queda definido por

$$I_1^n = \int_Q (A\nabla\hat{u})^T \circ T_{\gamma_n}(t, \eta) (DT_{\gamma_n})^{-T} (\nabla\mathcal{E}\varphi) (|\det DT_{\gamma_n}| - |\det DT_\gamma|) dt d\eta$$

$$I_2^n = \int_Q (A\nabla\hat{u})^T \circ T_{\gamma_n} (DT_{\gamma_n})^{-T} (DT_\gamma - DT_{\gamma_n})^T (DT_\gamma)^{-T} (\nabla\mathcal{E}\varphi) |\det DT_\gamma| dt d\eta$$

$$I_3^n = \int_Q ((A\nabla\hat{u})^T \circ T_{\gamma_n} - (A\nabla\hat{u})^T \circ T_\gamma) (DT_\gamma)^{-T} (\nabla\mathcal{E}\varphi) |\det DT_\gamma| dt d\eta$$

Notamos que para obtener la expresi3n correspondiente a I_2^n se us3

$$\begin{aligned} (DT_{\gamma_n})^{-T} - (DT_\gamma)^{-T} &= (DT_{\gamma_n})^{-T} [(DT_\gamma)^T (DT_\gamma)^{-T} - (DT_{\gamma_n})^T (DT_\gamma)^{-T}] \\ &= (DT_{\gamma_n})^{-T} [(DT_\gamma)^T - (DT_{\gamma_n})^T] (DT_\gamma)^{-T}. \end{aligned}$$

Ahora estimaremos cada uno de los t3rminos I_i^n , $i = 1, 2, 3$ y concluiremos que cada uno tiende a cero cuando $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned} |I_1^n| &\leq \int_Q |(A\nabla\hat{u})^T \circ T_{\gamma_n} (DT_{\gamma_n})^{-T}| |\nabla\mathcal{E}\varphi| |\det DT_{\gamma_n}| - |\det DT_\gamma| dt d\eta \leq \\ &\| \det DT_{\gamma_n} - \det DT_\gamma \|_{L^\infty(Q)} \| (DT_{\gamma_n})^{-T} \|_F \|_{L^\infty(Q)} \int_Q |A\nabla\hat{u}^T \circ T_{\gamma_n}| |\nabla\mathcal{E}\varphi| \end{aligned}$$

Usando adem3s el hecho de que la norma en $L^\infty(Q)$ de la norma Frobenius de la matriz jacobiana $(DT_{\gamma_n})^{-T}$ puede acotarse independientemente de n , como se mostr3 en la demostraci3n del Lema 1.2 del Cap3tulo 1, resulta la siguiente estimaci3n

$$|I_1^n| \leq C \| \det DT_{\gamma_n} - \det DT_\gamma \|_{L^\infty(Q)} \| (A\nabla\hat{u})^T \circ T_{\gamma_n} \|_{L^2(Q)} \| \nabla\mathcal{E}\varphi \|_{L^2(Q)},$$

$$\text{y como } \left(\int_Q |(A\nabla\hat{u})^T \circ T_{\gamma_n}|^2 dt d\eta \right)^{1/2} \leq \frac{k \|\hat{u}\|_{H^1}}{\| \det DT_{\gamma_n} \|_{L^\infty(Q)}} \leq \tilde{k} \|\hat{u}\|_{H^1},$$

$$|I_1^n| \leq \tilde{C} \| \det DT_{\gamma_n} - \det DT_\gamma \|_{L^\infty(Q)} \|\varphi\|_{H_{2\pi}^{1/2}}.$$

Con argumentos similares se puede llegar a la siguiente estimación

$$|I_2^n| \leq \tilde{C} \left\| \|DT_{\gamma_n} - DT_\gamma\|_F \right\|_{L^\infty(Q)} \|\varphi\|_{H_{2\pi}^{1/2}}.$$

Para estimar $|I_3^n|$ elegimos $\epsilon > 0$ arbitrario y $\hat{w} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|\hat{u} - \hat{w}\|_{H^1} < \epsilon$, y teniendo en cuenta que $\hat{u} \circ T_{\gamma_n} \in H^1(Q)$, podemos deducir que

$$\begin{aligned} & \left\| A\nabla\hat{u}^T \circ T_{\gamma_n} - A\nabla\hat{u}^T \circ T_\gamma \right\|_{L^2(Q)} \leq \\ & \left\| A\nabla(\hat{u} - \hat{w})^T \circ T_{\gamma_n} - A\nabla(\hat{u} - \hat{w})^T \circ T_\gamma \right\|_{L^2} + \left\| A\nabla\hat{w}^T \circ T_{\gamma_n} - A\nabla\hat{w}^T \circ T_\gamma \right\|_{L^2} \\ & \leq c\epsilon + \left\| A\nabla\hat{w}^T \circ T_{\gamma_n} - A\nabla\hat{w}^T \circ T_\gamma \right\|_{L^2(Q)}. \quad \text{Por lo tanto} \end{aligned}$$

$$|I_3^n| \leq C \left(\epsilon + \left\| A\nabla\hat{w}^T \circ T_{\gamma_n} - A\nabla\hat{w}^T \circ T_\gamma \right\|_{L^2(Q)} \right) \|\varphi\|_{H_{2\pi}^{1/2}}.$$

En la demostración del Lema 1.2 del Capítulo 1 hemos hallado la expresión para el $\det DT_\gamma(t, \eta)$, por lo tanto en cada $(t, \eta) \in Q$ vale la igualdad

$$|\det DT_{\gamma_n} - \det DT_\gamma| = \left| -r |\dot{\gamma}_n| - r^2 \eta (\dot{\nu}_n \cdot \frac{\dot{\gamma}_n}{|\dot{\gamma}_n|}) + r |\dot{\gamma}| + r^2 \eta (\dot{\nu} \cdot \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}) \right|.$$

Bajo la hipótesis presente, $\gamma_n \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \gamma$ se tiene que $\dot{\gamma}_n \rightrightarrows \dot{\gamma}$ y que $\dot{\nu}_n \rightrightarrows \dot{\nu}$ y por las propiedades de la familia \mathcal{S} y la compacidad del dominio Q , la convergencia a cero de $|\det DT_{\gamma_n} - \det DT_\gamma|$ es uniforme en Q . Entonces $I_1^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Para acotar uniformemente la norma Frobenius de $DT_{\gamma_n} - DT_\gamma$ basta estimar uniformemente cualquiera de las dos derivadas parciales, con respecto a t o con respecto a η , de cualquiera de las dos componentes de $T_{\gamma_n} - T_\gamma$. Pero estos cálculos están contenidos (para T_γ) en la fórmula para el $\det DT_\gamma$ (ver demostración Lema 1.2 Cap. 1). Explícitamente

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_{\gamma_n} - T_\gamma)_1 = \dot{\gamma}_{n1} + r\eta\dot{\nu}_{n1} - \dot{\gamma}_1 - r\eta\dot{\nu}_1;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_{\gamma_n} - T_{\gamma})_2 = \dot{\gamma}_{n2} + r\eta\dot{\nu}_{n2} - \dot{\gamma}_2 - r\eta\dot{\nu}_2;$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(T_{\gamma_n} - T_{\gamma})_1 = r(\nu_{n1} - \nu_1);$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(T_{\gamma_n} - T_{\gamma})_2 = r(\nu_{n2} - \nu_2).$$

Notamos que las dos últimas convergen a cero en L^∞ con sólo suponer que $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$. Lo mismo ocurre con los términos $\dot{\gamma}_{n1} - \dot{\gamma}_1$ y $\dot{\gamma}_{n2} - \dot{\gamma}_2$ contenidos en la primera y la segunda de las ecuaciones anteriores, respectivamente. En cambio, es nuevamente en los términos $r\eta(\dot{\nu}_{n1} - \dot{\nu}_1)$ y $r\eta(\dot{\nu}_{n2} - \dot{\nu}_2)$ en los que usamos la convergencia en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$ de γ_n a γ , que es nuestra hipótesis en el teorema. Por lo tanto $I_2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Para estimar $|I_3^n|$ notamos que usando el teorema del valor medio tenemos que $\|A\nabla\hat{w}^T \circ T_{\gamma_n} - A\nabla\hat{w}^T \circ T_{\gamma}\|_{L^2(Q)} =$

$$\begin{aligned} &= \int_Q \sum_{i=1}^2 |(A\nabla\hat{w}^T)_i(T_{\gamma_n}(t, \eta)) - (A\nabla\hat{w}^T)_i(T_{\gamma}(t, \eta))|^2 dt d\eta \\ &\leq \int_Q \sum_{i=1}^2 \left| (A\nabla\hat{w}^T)'_i(\xi) \right|^2 |T_{\gamma_n}(t, \eta) - T_{\gamma}(t, \eta)|^2 dt d\eta \end{aligned}$$

tiende a cero cuando $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$. Como ϵ fue elegido arbitrariamente, resulta que $I_3^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Por lo tanto cuando $\gamma_n \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \gamma$ tenemos $\|\tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda}\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

□

Corolario: Existencia de solución para (P_{DI}^{Opt}) Sea \mathcal{S} una familia que satisfice $\boxed{S1}$ a $\boxed{S7}$. Entonces el funcional $J : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $J(\gamma) = \|\tilde{\lambda}_\gamma - L|\dot{\gamma}\|_{H_{2\pi}^{-1/2}}$ es continuo y por lo tanto tiene un mínimo en el compacto \mathcal{S} .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma_n \xrightarrow{S} \gamma$. Notemos que

$$\begin{aligned} |J(\gamma_n) - J(\gamma)| &\leq \left\| \tilde{\lambda}_{\gamma_n} - L|\dot{\gamma}_n| - (\tilde{\lambda}_\gamma - L|\dot{\gamma}|) \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} \\ &\leq \left\| \tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda} \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} + |L| \left\| |\dot{\gamma}_n| - |\dot{\gamma}| \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} \\ &\leq \left\| \tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda} \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} + |L| \left\| |\dot{\gamma}_n| - |\dot{\gamma}| \right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Continuidad se tiene que $\left\| \tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda} \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

El último sumando también tiende a cero por la convergencia uniforme de $|\dot{\gamma}_n|$ a $|\dot{\gamma}|$.

□

CAPITULO 6

El problema de optimización para el caso de frontera interior con dinámica prescrita

Como se mencionó en la Introducción, en problemas concretos, puede ocurrir que la curva interior Γ_0 no esté fija y tenga a su vez una dinámica que supondremos conocida con respecto a una variable temporal t . Llamaremos a esta curva Γ_0^t . Si bien para cada t podemos plantear y, al menos desde el punto de vista teórico, resolver el problema del Capítulo 5 con esta Γ_0^t como la curva interior, queremos elegir una forma exterior que sea en promedio adecuada para todas las curvas Γ_0^t de un cierto intervalo $[0, T]$. Si bien el problema puede plantearse en medios anisotrópicos y no homogéneos y con fuentes, por razones de simplicidad de notación consideraremos en este capítulo un medio isotrópico y homogéneo sin fuentes internas. Veremos que la técnica de dominio inmerso puede aplicarse también al caso de dominios anulares con frontera interior que cambia con el tiempo. En la Sección 1 se formula precisamente el problema que nos ocupa en este capítulo. En la Sección 2 se adapta a esta situación la técnica del dominio inmerso. Finalmente, en la Sección 3 se prueba el teorema central de dependencia continua y se concluye la existencia de minimizante.

6.1. Formulación del problema de control óptimo cuando el borde interno cambia con el tiempo

En este modelo supondremos el conocimiento de la evolución de la curva interior, que llamaremos Γ_0^t , así como del valor que la concentración tiene en Γ_0^t , que designaremos con $c(t)$ para $t \in [0, T]$.

En este capítulo usaremos toda la notación introducida en el Capítulo 1 y en particular en su Sección 1.2. Con \mathcal{S} denotaremos una clase compacta de bordes exteriores admisible. Puesto que estaremos buscando que, en promedio temporal, el flujo saliente este cercano al objetivo L , es natural considerar un funcional de la forma

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left\| \frac{\partial u_\gamma^t}{\partial \nu} - L \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)}^2 dt,$$

donde $u_\gamma^t = u_\gamma(t)$ resuelve el (P_{VB}) correspondiente a Γ_0^t como curva interior con dato $c(t)$ y a Γ_γ como curva exterior donde, como antes, consideramos el dato nulo.

Aunque podríamos elegir otras potencias de la norma para promediar en el tiempo, la potencia dos produce una estructura de espacio de Hilbert.

Así nuestro problema en este capítulo será el siguiente

$$(P^{Opt,T}) \left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar una curva } \gamma^* \in \mathcal{S} \text{ que satisfaga} \\ \int_0^T \left\| \frac{\partial u_{\gamma^*}^t}{\partial \nu} - L \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{\gamma^*})}^2 dt = \min_{\gamma \in \mathcal{S}} \int_0^T \left\| \frac{\partial u_\gamma^t}{\partial \nu} - L \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)}^2 dt \\ \text{donde } u_\gamma^t \text{ resuelve } (P_{VB}^t), \end{array} \right.$$

y (P_{VB}^t) es el siguiente problema a valores en el borde

$$(P_{VB}^t) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_x u^t = 0 \quad \text{en } \mathcal{W}_\gamma^t \\ u^t = 0 \quad \text{en } \Gamma_\gamma \\ u^t = c(t) \quad \text{en } \Gamma_0^t \end{array} \right.$$

Como antes el objetivo o flujo deseado L es una constante dada .

Vamos a verificar que el funcional a minimizar está bien definido en el sentido que la función de la variable t resulta integrable. Probaremos que es continua en la variable t .

Aplicando al gradiente de u , que también es armónico en \mathcal{W}_γ^t , el teorema del valor medio que caracteriza a las funciones armónicas y luego el teorema de la divergencia, obtenemos la siguiente estimación interior para el gradiente en cualquier bola B de centro y y radio h en \mathbb{R}^2 , ver [G-T pág 22] :

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{2}{h} \sup_{\partial B} |u|.$$

Notemos que si $t, s \in [0, T]$, $t < s$ entonces u^t y u^s son ambas armónicas en \mathcal{W}_γ^t . Por lo tanto para cualquier punto $y \in \Gamma_\gamma \subset \Omega$ tenemos que

$$\left| \frac{\partial u^t}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) \right| = |(\nabla u^t(y) - \nabla u^s(y)) \cdot \nu(y)| \leq$$

$$|\nabla(u^t - u^s)(y)| \leq \frac{2}{h} \sup_{\partial B(y,h)} |u^t - u^s|.$$

Aplicando el principio del máximo para comparar u^t y u^s en la parte del borde de la bola incluida en \mathcal{W}_γ^t resulta que:

$$\sup_{\partial B(y,h)} |u^t - u^s| \leq |c(t) - u^s|_{\Gamma_0^t}(x) \leq |c(t) - c(s)| + |c(s) - u^s|_{\Gamma_0^t}(x).$$

Siempre que c sea continua en $[0, T]$, el primer término del tercer miembro tiende a cero cuando $t \rightarrow s$. Para acotar el segundo sumando, teniendo en cuenta que u^s es continua en el compacto $\overline{\mathcal{W}_\gamma^s}$, tenemos que

dado $\epsilon > 0$, para todo $z \in \Gamma_0^s$ existe $\delta_{(\epsilon, z)} > 0$ tal que si $|x - z| < \delta$ para $x \in \mathcal{W}_\gamma^s$, entonces $|u^s(z) - u^s(x)| = |c(s) - u^s(x)| < \epsilon$. Como Γ_0^s es compacto, puede cubrirse por un número finito N de bolas $B(z_i, \frac{\delta_{(\epsilon, z_i)}}{10})$, $i = 1, \dots, N$. Como $\Gamma_0^t \rightarrow \Gamma_0^s$ cuando $t \rightarrow s$, por $\boxed{\text{D6}}$ de Sección 1.2 Capítulo 1, si $|t - s|$ es pequeño, entonces Γ_0^t también está cubierta por las $B(z_i, \delta_{(\epsilon, z_i)})$, $i = 1, \dots, N$. De esta manera si $x \in \Gamma_0^t$ entonces $x \in B(z_i, \delta_{(\epsilon, z_i)})$, para algún $i = 1, \dots, N$, y $|c(s) - u^s(x)| < \epsilon$ para $x \in \Gamma_0^t$. Por lo tanto la derivada normal $\frac{\partial u_\gamma^t}{\partial \nu} : [0, T] \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_\gamma)$ resulta continua en t para γ fija y el funcional a minimizar está bien definido pues la función de la variable t dada por $\left\| \frac{\partial u_\gamma^t}{\partial \nu} - L \right\|_{H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2}}$ también es continua.

6.2. Reformulación del problema $(P^{Opt, T})$ en espacios mixtos.

Comenzamos esta sección introduciendo brevemente los espacios mixtos $L^2(I, E)$. En general para cualquier conjunto $I \subset \mathbb{R}^n$, ($n \geq 1$) y cualquier espacio de Banach E , se define $L^2(I, E)$, como la completación del espacio vectorial $\mathcal{C}_0(I, E)$ de las funciones continuas de soporte compacto en I con valores en E respecto de la norma natural $(\int_I \|u(t, \cdot)\|_E^2 dt)^{1/2}$.

El espacio de Banach $L^2(I, E)$ es un espacio de Hilbert sólo cuando E es en sí mismo un espacio de Hilbert. De esta manera $L^2(I, E)$ está equipado con la estructura canónica de un espacio de Hilbert definida por el producto interno

$$((u, v))_{L^2(I, E)} := \int_I (u(t), v(t))_E dt.$$

El teorema de Riesz nos permite identificar cada elemento del espacio dual de $L^2(I, E)$ con una función del espacio $L^2(I, E^*)$, donde E^* es el dual de E .

Dadas $f \in L^2(I, E)$ y $g \in L^2(I, E^*)$ la dualidad se escribe

$$\langle\langle g, f \rangle\rangle = \int_I \langle g(t), f(t) \rangle_{E^*, E} dt.$$

(Por un resumen de estos resultados básicos ver Cap. IV, Sec.39 de [T]).

Estudiaremos ahora la minimización de un funcional particular que involucra tanto las variables espaciales x como la variable temporal t que describe la evolución de la curva interna. Veremos luego cómo se relacionan las soluciones de este problema con las del problema original (P_{VB}^t) para $t \in [0, T]$ de la sección anterior.

Para lo que sigue aplicaremos el esquema general para espacios con normas mixtas expuesto arriba con $I = [0, T]$ y $E = H_0^1(\Omega)$ y Ω , como siempre, es $(-1, 1)^2$.

Con respecto a los espacios funcionales sobre las curvas, sus duales y el teorema de trazas necesitaremos elaborar un poco más el contexto.

Dada una familia $\mathcal{G} = \{\Gamma_0^t, t \in [0, T]\}$ que satisface $\boxed{\text{D1}}$ a $\boxed{\text{D6}}$ del Capítulo 1 Sección 1.2, definimos $L^2([0, T], H_{\mathcal{G}}^{1/2})$ como el espacio de las funciones $\varphi : [0, T] \rightarrow \bigcup_{t \in [0, T]} H_{\Gamma_0^t}^{1/2}$ tales que $\varphi(t) \in H_{\Gamma_0^t}^{1/2}$ y además

$$\|\varphi\|_{L^2([0, T], H_{\mathcal{G}}^{1/2})}^2 = \int_0^T \|\varphi(t)\|_{H_{\Gamma_0^t}^{1/2}}^2 dt < \infty.$$

Con esta notación podemos también considerar un operador traza asociado a la familia \mathcal{G} definido para v en el espacio $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ con valores en $L^2([0, T], H_{\mathcal{G}}^{1/2})$ por $\tau_{\mathcal{G}}v(t) = \tau_{\Gamma_0^t}(v(t))$. Notemos que por los

resultados del Capítulo 2 (Sección 2.4 y 2.5), tendremos que $\tau_{\mathcal{G}}$ es un operador acotado entre esos espacios, en efecto

$$\begin{aligned} \|\tau_{\mathcal{G}}v\|_{L^2([0,T],H_{\mathcal{G}}^{1/2})}^2 &= \int_0^T \|\tau_{\Gamma_0^t}v(t)\|_{H_{\Gamma_0^t}^{1/2}}^2 dt \\ &\leq M^2 \int_0^T \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt = M^2 \|v\|_{L^2([0,T],H_0^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

De un modo análogo definimos el espacio $L^2([0,T],H_{\mathcal{G}}^{-1/2})$ de todas las funciones $\lambda : [0,T] \rightarrow \bigcup_{t \in [0,T]} H_{\Gamma_0^t}^{-1/2}$ tales que $\lambda(t) \in H_{\Gamma_0^t}^{-1/2}$ y además

$$\|\lambda\|_{L^2([0,T],H_{\mathcal{G}}^{-1/2})}^2 = \int_0^T \|\lambda(t)\|_{H_{\Gamma_0^t}^{-1/2}}^2 dt < \infty.$$

La dualidad entre estos espacios estará dada por

$$\langle \langle \lambda, \varphi \rangle \rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^T \langle \lambda(t), \varphi(t) \rangle_{\Gamma_0^t} dt$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_0^t}$ indica la dualidad entre $H_{\Gamma_0^t}^{-1/2}$ y $H_{\Gamma_0^t}^{1/2}$.

También será preciso considerar los espacios $L^2([0,T],H_0^1(\mathcal{W}_{\gamma}^{\mathcal{G}}))$ de las funciones $v : [0,T] \rightarrow \bigcup_{t \in [0,T]} H_0^1(\mathcal{W}_{\gamma}^t)$ tales que $v(t) \in H_0^1(\mathcal{W}_{\gamma}^t)$ y además

$$\|v\|_{L^2([0,T],H_0^1(\mathcal{W}_{\gamma}^{\mathcal{G}}))}^2 = \int_0^T \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{W}_{\gamma}^t)}^2 dt < \infty.$$

Aunque todas las integrales que definen estos espacios a valores “ vectoriales ” son funciones escalares, en la demostración del Lema 6.4 nos encontraremos con una integral de Bochner de funciones a valores en espacios de Sobolev. Solamente usaremos la conmutatividad de un operador cerrado sobre un espacio de Banach con la integral de Bochner. (ver Teorema de Hille en Cap 6 de [C-P], pág 91)

Ahora consideremos en $L^2([0,T],H_0^1(\Omega))$ el siguiente funcional.

Sea $v : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega)$, $v(t) \in H_0^1(\Omega)$ para cada $t \in I = [0, T]$, definimos $\tilde{J}(v) := \int_0^T \|\nabla_x v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$. El problema

$$(12) \quad \begin{cases} \text{mín}_{v \in \tilde{K}} \tilde{J}(v) \\ \tilde{K} := \{v \in L^2(I, H_0^1(\Omega)) : \tau_{\Gamma^t} v(t) = c(t), \tau_{\Gamma_\gamma} v(t) = 0, t \in I\} \end{cases}$$

tiene solución única por las propiedades de convexidad de \tilde{K} y \tilde{J} .

Esto nos permite obtener un análogo del Teorema 3.1 formulado en el Capítulo 3.

Notemos primero que la única solución de (12) es tal que su restricción a \mathcal{W}_γ^t para cada $0 \leq t \leq T$ resuelve (P_{VB}^t) . En efecto, sea $\hat{u} \in L^2(I, H_0^1(\Omega))$ el mínimo de \tilde{J} en \tilde{K} . Si tomamos $v(t, x) = v_1(x)v_2(t) \in \mathcal{C}^\infty(I, \Omega)$ con soporte en \mathcal{W}_γ^t es decir, $v_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\text{sop } v_1 \subset \mathcal{W}_\gamma^t$.

Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\hat{u} + \epsilon v) &= \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla_x \hat{u}(t, x)|^2 dx \right) + \epsilon^2 \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla_x v_1(x)|^2 dx \right) v_2^2(t) \\ &\quad + 2\epsilon \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla_x \hat{u}(t, x) \cdot \nabla_x v_1(x) dx \right) v_2(t) dt. \quad \text{Por lo tanto} \end{aligned}$$

$\frac{d}{d\epsilon} \tilde{J}(\hat{u} + \epsilon v)|_{\epsilon=0} = \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla_x \hat{u}(t, x) \cdot \nabla_x v_1(x) dx \right) v_2(t) dt = 0$ para toda v_2 , lo cual implica que $\int_\Omega \nabla_x \hat{u}(t, x) \cdot \nabla_x v_1(x) dx = 0$ para todo t y para toda v_1 . Luego aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos $\nabla_x^2 \hat{u}(t, x) = 0$ en \mathcal{W}_γ^t .

Además por definición de \tilde{K} , \hat{u} satisface, para cada t , las condiciones de borde de (P_{VB}^t) .

Como para cada $t \in [0, T]$ el problema (P_{VB}^t) tiene única solución (ver Capítulo 3) necesariamente $u(t) = \hat{u}|_{\mathcal{W}_\gamma^t}$, donde $\hat{u} \in L^2(I, H_0^1(\Omega))$ es la solución del problema de minimización (12).

Ahora aplicaremos a (12) el Principio de Lagrange (Sección 2.1, Cap. 2). Definimos el operador

$$\tilde{F}_\gamma : L^2([0, T], H_0^1(\Omega)) \rightarrow L^2([0, T], H_{\mathcal{G}}^{1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{1/2}),$$

$$\tilde{F}_\gamma(v) := (\tau_{\mathcal{G}}v - c, \tau_{\Gamma_\gamma}v).$$

Puede probarse que \tilde{J} y \tilde{F}_γ satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3, son ambas continuamente diferenciables Frechet en \hat{u} siendo

$$\tilde{J}'(\hat{u})v = \int_0^T (\nabla_x \hat{u}, \nabla_x v)_\Omega dt \quad \text{y} \quad \tilde{F}'_\gamma(\hat{u})v = (\tau_{\mathcal{G}}v, \tau_{\Gamma_\gamma}v).$$

Estos resultados se obtienen calculando la derivada Gâteaux en \hat{u} de \tilde{J} y de \tilde{F}_γ en la dirección de cualquier $v \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$, verificando luego que cada una es la derivada Frèchet correspondiente (estrategia descrita en la Sección 2.1 del Capítulo 2).

Además $\tilde{F}'_\gamma(\hat{u})$ es suryectiva . En efecto, sea $\bar{\varphi}(t, x) = (\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x)) \in L^2(I, H_{\mathcal{G}}^{1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{1/2})$. Sabemos que para cada t fijo de $[0, T]$, existen $\mathcal{E}_{\gamma_0^t}\varphi_1$ y $\mathcal{E}_\gamma\varphi_2$ en $H_0^1(\Omega)$ con soportes disjuntos (Lema de extensión 2.15 para ambos bordes) tal que $\tau_{\gamma_0^t}\mathcal{E}_{\gamma_0^t}\varphi_1(t, \cdot) = \varphi_1(t, \cdot)$ y $\tau_\Gamma\mathcal{E}_\gamma\varphi_2(t, \cdot) = \varphi_2(t, \cdot)$. Proponemos para cada $t \in [0, T]$, $v(t, \cdot) = \mathcal{E}_{\gamma_0^t}\varphi_1(t, \cdot) + \mathcal{E}_\gamma\varphi_2(t, \cdot)$ y notamos que $v \in L^2(I, H_0^1(\Omega))$ pues su norma es finita,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt &= \int_0^T \|\mathcal{E}_{\gamma_0^t}\varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|\mathcal{E}_\gamma\varphi_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq c_1 \int_0^T \|\varphi_1\|_{H_{\Gamma_0^t}^{1/2}}^2 dt + c_2 \int_0^T \|\varphi_2\|_{H_{\Gamma_\gamma}^{1/2}}^2 dt < \infty, \quad \text{y} \quad \tilde{F}'_\gamma(\hat{u})v = \bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe en el dual de $L^2([0, T], H_{\mathcal{G}}^{1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{1/2})$, un elemento que denotaremos $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_\gamma) \in L^2([0, T], H_{\mathcal{G}}^{-1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2})$ tal que el Lagrangiano $L(v, \bar{\lambda}) = \tilde{J}(v) - \bar{\lambda}(\tilde{F}_\gamma(v))$ es estacionario en \hat{u} , es decir $\tilde{J}'(\hat{u})v - \bar{\lambda}(\tilde{F}'_\gamma(\hat{u})v) = 0$, donde la dualidad en el espacio mixto producto es $\bar{\lambda}(\tilde{F}'_\gamma(\hat{u})v) = \langle\langle \lambda_0, \tau_{\mathcal{G}}v \rangle\rangle_{\mathcal{G}} + \langle\langle \lambda_\gamma, \tau_{\Gamma_\gamma}v \rangle\rangle_{\Gamma_\gamma}$, resultando la primera

ecuación del problema (P_{DI}^T) definido en el teorema que sigue, donde $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\Gamma_\gamma}$ indica el par dualidad entre los espacios mixtos $L^2(I, H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2})$ y $L^2(I, H_{\Gamma_\gamma}^{1/2})$ sobre la curva Γ_γ .

Por otro lado como $\tilde{F}_\gamma(\hat{u}) = 0$, entonces para todo $\bar{\mu} = (\mu_0, \mu_\gamma) \in L^2([0, T], H_{\mathcal{G}}^{-1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2})$ resulta $\bar{\mu}(\tilde{F}_\gamma(\hat{u})) = 0$ y \hat{u} satisface la segunda ecuación del problema (P_{DI}^T) .

Teorema 6.1. *Sea $\Omega = (-1, 1)^2$, el dominio simple que contiene a cada dominio \mathcal{W}_γ^t para toda $\gamma \in \mathcal{S}$, donde \mathcal{S} es una familia admisible que satisface $\boxed{S1}$ a $\boxed{S7}$ del Capítulo 1, Sección 1.1. Sea $\mathcal{G} = \{\Gamma_0^t, t \in I = [0, T]\}$ que satisface $\boxed{D1}$ a $\boxed{D6}$ del Capítulo 1, Sección 1.2. Si $\hat{u} \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ resuelve*

$$(P_{DI}^T) \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } (\lambda_0, \lambda_\gamma) \in L^2(I, H_{\mathcal{G}}^{-1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2}) \text{ tal que} \\ \int_0^T (\nabla_x \hat{u}, \nabla_x v)_\Omega dt - \langle\langle \lambda_0, \tau_{\mathcal{G}} v \rangle\rangle_{\mathcal{G}} - \langle\langle \lambda_\gamma, \tau_\Gamma v \rangle\rangle_{\Gamma_\gamma} = 0 \\ \langle\langle \mu_0, \tau_{\mathcal{G}} \hat{u} \rangle\rangle_{\mathcal{G}} + \langle\langle \mu_\gamma, \tau_{\Gamma_\gamma} \hat{u} \rangle\rangle_{\Gamma_\gamma} = \langle\langle \mu_0, c \rangle\rangle_{\mathcal{G}}, \text{ para todo} \\ v \in L^2(I, H_0^1(\Omega)) \text{ y } (\mu_0, \mu_\gamma) \in L^2(I, H_{\mathcal{G}}^{-1/2} \times H_{\Gamma_\gamma}^{-1/2}), \end{array} \right.$$

entonces $u(t) = \hat{u}|_{\mathcal{W}_\gamma^t}$ resuelve (P_{VB}^t) para $0 \leq t \leq T$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $v(t, x) = v_1(x)v_2(t) \in \mathcal{C}^\infty(I, \Omega)$ con $\text{sop } v_1 \subset \mathcal{W}_\gamma^t$. Entonces de la primera ecuación de (P_{DI}^T) , obtenemos

$$\int_0^T (\nabla_x \hat{u}, \nabla_x v_1)_\Omega v_2(t) dt = 0 \quad \text{para toda } v_2, \quad \text{lo cual implica que}$$

$$\int_\Omega \nabla_x \hat{u}(t, x) \cdot \nabla_x v_1(x) dx = 0 \quad \text{para todo } t \text{ y para toda } v_1. \text{ De donde,}$$

$$\nabla_x^2 \hat{u}(t, x) = 0 \quad \text{en } \mathcal{W}_\gamma^t.$$

De la segunda ecuación, para $(0, \mu_\gamma)$ se tiene que $\langle\langle \mu_\gamma, \tau_\Gamma \hat{u} \rangle\rangle_{\Gamma_\gamma} = 0$, lo cual implica $\tau_\Gamma \hat{u} = 0$.

Similarmente para $(\mu_0, 0)$ resulta $\langle\langle \mu_0, \tau_{\mathcal{G}}\hat{u} - c \rangle\rangle_{\mathcal{G}} = 0$ y $\tau_{\Gamma_0^t}\hat{u}(t) = c(t)$. Por lo tanto $u(t) = \hat{u} |_{\mathcal{W}_\gamma^t} \in \tilde{K}$ es solución del problema (P_{VB}^t) para $0 \leq t \leq T$. \square

Notamos que la solución de (P_{DI}^T) es única. La unicidad de $\bar{\lambda}$ se deduce de la suryectividad de \tilde{F}_γ similarmente a lo demostrado en el Teorema 3.1 del Capítulo 3.

Recordando ahora que tanto $H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ como $H^{1/2}(\Gamma_0^t)$, para cada $t \in [0, T]$, son espacios homeomorfos a $H_{2\pi}^{1/2}$, es decir Γ_0^t tiene para cada t una parametrización $\gamma_0^t \in H_{2\pi}^{1/2}$ y que los operadores traza $\tau_{\Gamma_0^t}$ tienen las mismas propiedades que los operadores τ_{Γ_γ} (ver los lemas correspondientes al borde libre demostrados en el Capítulo 2), el problema (P_{DI}^T) puede reescribirse reemplazando todos los espacios $H^{-1/2}$ por $H_{2\pi}^{-1/2}$ y los operadores de traza τ por los \mathcal{T} adoptando, para cada $\gamma \in \mathcal{S}$, la siguiente forma

$$(P_{DI}^{T, 2\pi}) \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } (\tilde{\lambda}_{0\gamma}, \tilde{\lambda}_\gamma) \in L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}) : \\ \int_0^T (\nabla_x \hat{u}_\gamma, \nabla_x v)_\Omega dt - \langle\langle \tilde{\lambda}_{0\gamma}, \mathcal{T}_{\mathcal{G}}v \rangle\rangle_{2\pi} - \langle\langle \tilde{\lambda}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma v \rangle\rangle_{2\pi} = 0, \\ \langle\langle \tilde{\mu}_0, \mathcal{T}_{\mathcal{G}}\hat{u}_\gamma \rangle\rangle_{2\pi} + \langle\langle \tilde{\mu}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma\hat{u}_\gamma \rangle\rangle_{2\pi} = \langle\langle \tilde{\mu}_0, c \rangle\rangle_{2\pi}, \text{ para todo} \\ v \in L^2(I, H_0^1(\Omega)) \text{ y } (\tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_\gamma) \in L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}). \end{array} \right.$$

Notemos además que, con la observación precedente y los argumentos en el Teorema 4.1 del Capítulo 4, necesariamente $\frac{\partial \hat{u}_\gamma^t}{\partial \nu} = \tilde{\lambda}_\gamma(t)$, la evaluación en $t \in I = [0, T]$ de $\tilde{\lambda}_\gamma \in L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2})$. De esta manera nuestro problema ahora consiste en hallar una solución del sistema de ecuaciones $(P_{DI}^{Opt, T})$ que definimos a continuación. Sea

$$(P_{DI}^{Opt,T}) \left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar una curva } \gamma^* \text{ que minimice en } \mathcal{S} \text{ el funcional} \\ J(\gamma) = \int_0^T \left\| \tilde{\lambda}_\gamma(t) - L |\dot{\gamma}| \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}}^2 dt \\ \text{donde } \tilde{\lambda}_\gamma \in L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2}) \text{ y es tal que existen} \\ \hat{u}_\gamma \in L^2(I, H_0^1(\Omega)), \tilde{\lambda}_{0\gamma} \in L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2}) \text{ de modo que} \\ \int_0^T (\nabla_x \hat{u}_\gamma, \nabla_x v)_\Omega dt - \langle \tilde{\lambda}_{0\gamma}, \mathcal{T}_G v \rangle_{2\pi} - \langle \tilde{\lambda}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma v \rangle_{2\pi} = 0, \\ \langle \tilde{\mu}_0, \mathcal{T}_G \hat{u}_\gamma \rangle_{2\pi} + \langle \tilde{\mu}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma \hat{u}_\gamma \rangle_{2\pi} = \langle \tilde{\mu}_0, c \rangle_{2\pi}, \text{ para todo} \\ v \in L^2(I, H_0^1(\Omega)) \text{ y } (\tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_\gamma) \in L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}), \end{array} \right.$$

donde $I = [0, T]$, $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{2\pi}$ indica la dualidad entre $L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2})$ y $L^2(I, H_{2\pi}^{1/2})$ y $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función continua que proporciona el dato de borde en cada Γ_0^t .

Teorema 6.2. *Si el problema $(P_{DI}^{Opt,T})$ tiene solución entonces la misma resuelve el problema $(P^{Opt,T})$.*

En la siguiente sección probamos el correspondiente teorema de la dependencia continua que nos proporcionará el resultado de existencia.

6.3. Teorema de la dependencia continua

De manera análoga a lo demostrado en el Capítulo 5, veremos que los resultados sobre la dependencia continua de la solución del problema $(P_{DI}^{Opt,T})$ son válidos en el espacio $L^2([0, T], H_0^1(\Omega) \times H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2})$ y como consecuencia, la existencia de solución para el $(P^{Opt,T})$ por argumentos de compacidad.

Solamente se hará énfasis en los aspectos en los que la demostración difiera esencialmente de la del Teorema 5.3 del Capítulo 5. Comenzamos probando dos lemas auxiliares análogos a los Lemas 5.1 y 5.2 .

Lema 6.3. Sea $\{\mathcal{W}_\gamma^t : t \in [0, T], \gamma \in \mathcal{S}\}$ una “familia admisible con frontera interior dependiente del tiempo”. Entonces el conjunto de soluciones $\{(\hat{u}_\gamma, \tilde{\lambda}_{0\gamma}, \tilde{\lambda}_\gamma), \gamma \in \mathcal{S}\}$ del problema $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ está acotado en $L^2([0, T], H_0^1(\Omega) \times H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2})$.

DEMOSTRACIÓN. Imitaremos la demostración del Lema 5.1 donde la función $\hat{v}^* \in H_0^1(\Omega)$ se toma ahora en $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ de modo que $\hat{v}^*(t) = 0$ en Γ_γ , $\hat{v}^*(t) = c(t)$ en Γ_0^t y $\hat{v}^*(t)$ tiene, para cada $t \in [0, T]$, soporte en un entorno compacto de Γ_0^0 contenido en $\Omega \setminus \overline{B(0, \eta/2)}$ (ver D4 Sección 1.2 del Capítulo 1).

Como $\tilde{J}(v) = \int_0^T \|\nabla_x v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$, si \hat{u}_γ denota a la función que minimiza en \tilde{K} a \tilde{J} , entonces $\tilde{J}(\hat{u}_\gamma) \leq \tilde{J}(\hat{v}^*)$.

Por lo tanto $\|\hat{u}_\gamma\|_{L^2(I, H_0^1(\Omega))} \leq k \|\hat{v}^*\| < \infty$, para alguna constante positiva k correspondiente a la equivalencia entre las normas (Poincaré).

Ahora para una familia $\mathcal{G} = \{\Gamma_0^t, t \in [0, T]\}$ que satisface D1 a D6 del Capítulo 1 Sección 1.2, tomamos $\varphi \in L^2([0, T], H_{\mathcal{G}}^{1/2})$ es decir, $\varphi : [0, T] \rightarrow \bigcup_{t \in [0, T]} H_{\Gamma_0^t}^{1/2}$ tal que $\varphi(t) \in H_{\Gamma_0^t}^{1/2}$ y

$$\|\varphi\|_{L^2([0, T], H_{\mathcal{G}}^{1/2})}^2 = \int_0^T \|\varphi(t)\|_{H_{\Gamma_0^t}^{1/2}}^2 dt < \infty.$$

Extendemos φ a $\hat{v} \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ de manera que para cada $t \in [0, T]$ el soporte de $\hat{v}(t)$ esté en un entorno compacto de Γ_0^0 contenido en $\Omega \setminus \overline{B(0, \eta/2)}$ y $\hat{v}(t) = 0$ sobre Γ_γ . Reemplazando \hat{v} en la primera ecuación de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ tenemos

$$\left| \langle \tilde{\lambda}_{0\gamma}, \mathcal{T}_{\mathcal{G}} \hat{v} \rangle_{2\pi} \right| = \left| \int_0^T (\nabla_x \hat{u}_\gamma, \nabla_x \hat{v})_\Omega \right| \leq \tilde{k} \|\hat{u}_\gamma\|_{L^2(I, H_0^1(\Omega))} \|\varphi\|_{L^2(I, H_{2\pi}^{1/2})},$$

donde \tilde{k} es una constante de inmersión apropiada para \hat{v} . Tomando el supremo sobre $\|\varphi\| = 1$ tenemos, $\left\| \tilde{\lambda}_{0\gamma} \right\|_{L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2})} \leq M$ para toda $\gamma \in \mathcal{S}$.

Similarmente, dado que \mathcal{S} tiene las propiedades $\boxed{\text{S1}}$ a $\boxed{\text{S7}}$ con respecto a Γ_0^0 , para cualquier $\varphi \in L^2([0, T], H_{2\pi}^{1/2})$ usando el teorema de acotación de los operadores extensión \mathcal{E}_γ , de cuya construcción se dedujo que $\text{supp } \mathcal{E}_\gamma \varphi \subset \bar{D}_\gamma$, se obtiene la acotación uniforme en $L^2([0, T], H_{2\pi}^{-1/2})$ respecto de $\gamma \in \mathcal{S}$ para el multiplicador de Lagrange $\tilde{\lambda}_\gamma$.

□

Lema 6.4. *Supongamos que $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, $\gamma_n, \gamma \in \mathcal{S}$ y sea $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones de $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ tales que para cada $0 \leq t \leq T$, $v_n(t, \cdot)$ es la solución de $(P_{V_B}^t)$, correspondiente a γ_n , $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $\tau_{\mathcal{G}} v_n(t) = c(t)$ y $\tau_{\gamma_n} v_n = 0$, $0 \leq t \leq T$, $n \in \mathbb{N}$. Si v_n converge débilmente a v en $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ entonces $\tau_{\mathcal{G}} v(t) = c(t)$ para todo $0 \leq t \leq T$ y $\tau_\Gamma v = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las funciones v_n son continuas, entonces $\tau_{\mathcal{G}} v_n(t) = v_n|_{\Gamma_0^t}$, es decir $c(t) = v_n(t, z)$, para todo $z \in \Gamma_0^t$. Sean $t_0 \in [0, T]$ y $x_0 \in \Gamma_0^{t_0}$ dados.

Sea $\Psi(t, x) = \Psi_1(t)\Psi_2(x)$, con Ψ_1 y Ψ_2 de clase \mathcal{C}^∞ y soportes respectivos en $\{|t - t_0| < \delta_1\}$ y $\{|x - x_0| < \delta_2\}$.

Notar que por la propiedad $\boxed{\text{D6}}$ de la familia \mathcal{G} , ver Sección 1.2 del Capítulo 1, dado $\delta_2 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|t - t_0| < \delta_1$ entonces $B(x_0, \delta_2) \cap \Gamma_0^t \neq \emptyset$. Para cada t tal que $|t - t_0| < \delta_1$, sea $y(t)$ un punto en $B(x_0, \delta_2) \cap \Gamma_0^t$. Reemplazando $c(t)$ por $v_n(t, y(t))$ y usando el teorema

del valor medio tenemos que

$$\begin{aligned}
(13) &= \left| \int_0^T \int_{\Omega} (v_n(t, x) - c(t)) \Psi_1(t) \Psi_2(x) dx dt \right| \\
&= \left| \int_0^T \int_{\Omega} (v_n(t, x) - v_n(t, y(t))) \Psi_1(t) \Psi_2(x) dx dt \right| \\
&\leq \int_0^T \int_{\Omega} \left(\int_0^1 |\nabla v_n(t, (1-s)y(t) + sx) \cdot (x - y(t))| ds \right) |\Psi_1| |\Psi_2| dx dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\Omega} |x - y(t)| |\Psi_1| |\Psi_2| \int_0^1 |\nabla v_n(t, (1-s)y(t) + sx)| ds dx dt \\
&= \int_0^1 \left[\int_{|t-t_0| < \delta_1} \int_{B(x_0, \delta_2)} |x - y(t)| |\Psi_1| |\Psi_2| |\nabla v_n(\cdot, \cdot)| dx dt \right] ds \\
&\leq \left[\int_{|t-t_0| < \delta_1} \int_{B(x_0, \delta_2)} |x - y(t)|^2 |\Psi_1(t)|^2 |\Psi_2(x)|^2 dx dt \right]^{1/2} \\
&\quad \int_0^1 \left[\int_{|t-t_0| < \delta_1} \int_{B(x_0, \delta_2)} |\nabla v_n(t, (1-s)y(t) + sx)|^2 dx dt \right]^{1/2} ds,
\end{aligned}$$

luego de aplicar la desigualdad de Hölder en las variables x, t .

Haciendo $z = (1-s)y(t) + sx$, $dz = s dx$ en el segundo factor de la última expresión, y volviendo luego a los dominios $[0, T]$ y Ω tenemos que este factor está acotado por

$$\int_0^1 \left[\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v_n(t, z)|^2 dz dt \right]^{1/2} \frac{ds}{s^{1/2}}.$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ en $L^2(I, H_0^1(\Omega))$, sabemos que existe $M > 0$ tal que $\|v_n\|_{L^2(I, H_0^1(\Omega))} \leq M$. Por consiguiente este factor está acotado por $M \int_0^1 \frac{ds}{s^{1/2}} = \frac{M}{2}$.

Por otra parte el primer factor de la última estimación de (13) está acotado por una constante veces δ_2^2 . Por consiguiente para todo $\epsilon > 0$ existen δ_2 y δ_1 que dependen de ϵ y de M , tales que para todo n ,

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (v_n(t, x) - c(t)) \Psi_1(t) \Psi_2(x) dx dt \right| < \epsilon.$$

Entonces por la convergencia débil de v_n a v ,

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (v(t, x) - c(t)) \Psi_1(t) \Psi_2(x) dx dt \right| \leq \epsilon.$$

Tomando aproximaciones a la identidad, $\{\Psi_1^m : m \in \mathbb{N}\}$ y $\{\Psi_2^m : m \in \mathbb{N}\}$ en $L^1([0, T])$ y $L^1(\Omega)$ respectivamente, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\Psi_1^m, \Psi_2^m \geq 0$, $\|\Psi_1^m\|_{L^1} = \|\Psi_2^m\|_{L^1} = 1$ y existen para todo $\epsilon_m > 0$, δ_1^m y δ_2^m tales que $\text{sop } \Psi_1^m \subset |t - t_0| < \delta_1^m$, $\text{sop } \Psi_2^m \subset B(x_0, \delta_2^m)$. Por lo tanto para $\epsilon_m = \frac{1}{m}$, tendremos

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (v(t, x) - c(t)) \Psi_1^m(t) \Psi_2^m(x) dx dt \right| < \frac{1}{m},$$

y para $m \rightarrow \infty$, resulta $v(t_0, x_0) = c(t_0) = 0$.

Para probar que $\tau_T v = 0$ notemos que, la convergencia débil de v_n a v en $L^2(I, H_0^1(\Omega))$ implica que para toda $\psi(t, x) = \psi_1(t)\psi_2(x)$ con ψ_1, ψ_2 suaves, vale que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla \psi dx dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi dx dt.$$

Por consiguiente

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\int_0^T v_n(t, x) \psi_1(t) dt \right) \nabla \psi_2(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla \left(\int_0^T v(t, x) \psi_1(t) dt \right) \nabla \psi_2.$$

Esto es la convergencia débil de

$$V_n(x) := \int_0^T v_n(t, x) \psi_1(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T v(t, x) \psi_1(t) dt := V(x), \text{ en } H_0^1(\Omega).$$

Por el Teorema de la traza, Capítulo 2, y por la propiedad 6.2 de [C-P], pág 91, tenemos que \mathcal{T}_{γ_n} conmuta con la integral de Bochner.

En particular $\mathcal{T}_{\gamma_n} V_n(x) = \int_0^T \mathcal{T}_{\gamma_n} v_n(t, x) \psi_1(t) dt = 0$. Entonces por el

Lema 5.2, Capítulo 5, $\mathcal{T}_{\gamma} V = 0$. Es decir, $\mathcal{T}_{\gamma} \left[\int_0^T v(t, x) \psi_1(t) dt \right] = 0$

para toda ψ_1 . Pero esto también es $\int_0^T \mathcal{T}_{\gamma} v(t) \psi_1(t) dt = 0$ para toda ψ_1 , de donde $\mathcal{T}_{\gamma} v(t) = 0$ para todo t . \square

Teorema 6.5. Continuidad y Existencia de solución

Sea $\{\mathcal{W}_\gamma^t : t \in [0, T], \gamma \in \mathcal{S}\}$ una “familia admisible con frontera interior dependiente del tiempo”. Supongamos que $\gamma_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \gamma$.

Sea $(\hat{u}_n, \tilde{\lambda}_{0n}, \tilde{\lambda}_n) \in L^2(I, H_0^1(\Omega) \times H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2})$ la solución de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ correspondiente a γ_n y sea $(\hat{u}, \tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}) \in L^2(I, H_0^1(\Omega) \times H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2})$ la solución de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ correspondiente a γ . Entonces $\hat{u}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \hat{u}$ en $L^2(I, H_0^1(\Omega))$ en el sentido de la norma, $\tilde{\lambda}_{0n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tilde{\lambda}_0$ y $\tilde{\lambda}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tilde{\lambda}$ en $L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2})$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\{\gamma_n\} \subset \mathcal{S}$, por el Lema 6.3 tenemos que la sucesión $\{(\hat{u}_n, \tilde{\lambda}_{0n}, \tilde{\lambda}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ está acotada en el espacio de Hilbert $L^2(I, H_0^1(\Omega) \times H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2})$. Entonces existe un elemento $(\hat{u}, \tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}) \in L^2(I, H_0^1(\Omega) \times H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2})$ tal que alguna subsucesión converge débilmente a $(\hat{u}, \tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda})$. Seguiremos denotando $\{(\hat{u}_n, \tilde{\lambda}_{0n}, \tilde{\lambda}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ a cualquier subsucesión débilmente convergente. Así

$$(\hat{u}_n, \tilde{\lambda}_{0n}, \tilde{\lambda}_n) \rightharpoonup (\hat{u}, \tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}) \in L^2(I, H_0^1(\Omega) \times H_{2\pi}^{-1/2} \times H_{2\pi}^{-1/2}).$$

Veamos que \hat{u} es la solución de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ correspondiente a γ .

Por el Lema 6.4, $\mathcal{T}_G \hat{u}(t) = c(t)$ para todo $0 \leq t \leq T$ y $\mathcal{T}_\gamma \hat{u} = 0$. De esta manera \hat{u} satisface la segunda ecuación de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$.

Por otra parte $(\hat{u}_n, \tilde{\lambda}_{0n}, \tilde{\lambda}_n)$ es para cada n la solución de la primera ecuación de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ correspondiente a γ_n , entonces

$$\int_0^T (\nabla_x \hat{u}_n, \nabla_x v)_\Omega dt - \langle \langle \tilde{\lambda}_{0n}, \mathcal{T}_G v \rangle \rangle_{2\pi} - \langle \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_{\gamma_n} v \rangle \rangle_{2\pi} = 0.$$

Ahora haciendo $n \rightarrow \infty$ para v fijo, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_{\gamma_n} v \rangle \rangle_{2\pi} = \int_0^T (\nabla_x \hat{u}, \nabla_x v)_\Omega dt - \langle \langle \tilde{\lambda}_0, \mathcal{T}_G v \rangle \rangle_{2\pi}$$

pues \hat{u}_n y $\tilde{\lambda}_{0n}$ convergen débilmente a \hat{u} y $\tilde{\lambda}_0$ respectivamente.

Luego por la convergencia fuerte de los operadores trazas \mathcal{T}_{γ_n} cuando $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, Teorema 2.12 del Capítulo 2, y por la acotación uniforme de $\tilde{\lambda}_n$ en $H_{2\pi}^{-1/2}$ obtenemos, procediendo como en la demostración del Teorema 5.3 de Capítulo 5, que para toda subsecución débilmente convergente $(\hat{u}_n, \tilde{\lambda}_{0_n}, \tilde{\lambda}_n)$, su límite débil satisface la primera ecuación de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ correspondiente a γ . Por la unicidad de la solución de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ estos límites coinciden. Por lo tanto la sucesión completa converge débilmente a la solución de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ correspondiente a γ .

Veamos ahora que las normas de \hat{u}_n convergen a $\|\hat{u}\|_{L^2(I, H_0^1(\Omega))}$. Reemplazando v por \hat{u}_n en la primera ecuación de $(P_{DI}^{T, 2\pi})$ correspondiente a γ_n y teniendo en cuenta que \hat{u}_n satisface las condiciones de borde resulta, $\int_0^T (\nabla_x \hat{u}, \nabla_x \hat{u})_\Omega dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\nabla_x \hat{u}_n, \nabla_x \hat{u}_n)_\Omega dt = \langle \langle \tilde{\lambda}_0, c \rangle \rangle_{2\pi}$. Como $(\nabla_x \hat{u}_n, \nabla_x \hat{u}_n)_\Omega \approx \|\hat{u}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2$, tenemos que

$$\|\hat{u}_n\|_{L^2(I, H_0^1(\Omega))} \rightarrow \|\hat{u}\|_{L^2(I, H_0^1(\Omega))}.$$

La convergencia de las normas y la convergencia débil implica la convergencia “en” norma de \hat{u}_n a \hat{u} en $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$. En efecto

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{L^2(I, H_0^1(\Omega))}^2 &= \int_0^T \|\hat{u}_n(t, \cdot) - \hat{u}(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq C \int_0^T (\nabla_x(\hat{u}_n - \hat{u}), \nabla_x(\hat{u}_n - \hat{u}))_\Omega dt \end{aligned}$$

tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ (por detalles ver la demostración del Teorema 5.3).

Ahora por el Lema 2.15 del Capítulo 2 sabemos que para toda $\gamma_n \in \mathcal{S}$, existe un operador lineal y continuo $\mathcal{E}_{\gamma_n} : H_{2\pi}^{1/2} \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tal que su norma está uniformemente acotada respecto de $\gamma_n \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{T}_{\gamma_n} \mathcal{E}_{\gamma_n} \varphi = \varphi$ para toda $\varphi \in H_{2\pi}^{1/2}$.

Como las parametrizaciones del borde interior γ_0^t son un caso particular de las $\gamma_n \in \mathcal{S}$, podemos afirmar que existen las extensiones $\mathcal{E}_{\gamma_0^t}$ para cada γ_0^t , que se anulan en un entorno del borde Γ_γ , y que la familia $\{\mathcal{E}_{\gamma_0^t}, t \in [0, T]\}$ está acotada. Además $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\mathcal{E}_{\gamma_0^t}\varphi(t)) = \varphi(t)$. Por lo tanto para cualquier $\varphi \in L^2([0, T], H_{2\pi}^{1/2})$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \langle \langle \tilde{\lambda}_{0_n} - \tilde{\lambda}_0, \varphi \rangle \rangle_{2\pi} \right| &= \left| \langle \langle \tilde{\lambda}_{0_n} - \tilde{\lambda}_0, \mathcal{T}_{\mathcal{G}}\mathcal{E}_{\gamma_0^t}\varphi \rangle \rangle_{2\pi} \right| \\ &= \left| \int_0^T (\nabla(\hat{u}_n - \hat{u}), \nabla\mathcal{E}_{\gamma_0^t}\varphi)_\Omega dt \right| \\ &\leq \int_0^T \|\nabla(\hat{u}_n - \hat{u})\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\mathcal{E}_{\gamma_0^t}\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{L^2(I, H_0^1(\Omega))} \|\mathcal{E}_{\gamma_0^t}\| \|\varphi\|_{L^2(I, H_{2\pi}^{1/2})} \end{aligned}$$

Tomando supremo para $\|\varphi\| = 1$ resulta que

$$\left\| \tilde{\lambda}_{0_n} - \tilde{\lambda}_0 \right\|_{L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2})} \leq c \|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{L^2(I, H_0^1(\Omega))}$$

y por lo tanto tenemos la convergencia fuerte $\tilde{\lambda}_{0_n} \xrightarrow{L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2})} \tilde{\lambda}_0$, cuando $n \rightarrow \infty$ pues $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$ en $L^2(I, H_0^1(\Omega))$.

Ahora suponemos que $\gamma_n \rightarrow \gamma$ en $\mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$ y observamos que para toda $\varphi \in L^2([0, T], H_{2\pi}^{1/2})$ las extensiones \mathcal{E}_{γ_n} y \mathcal{E}_γ se anulan en un entorno de Γ_0^t para cada $t \in [0, T]$. Así, usando nuevamente el Lema 2.15 sobre los operadores extensión y la primera ecuación ($P_{DI}^{T, 2\pi}$),

$$\begin{aligned} \langle \langle \tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda}, \varphi \rangle \rangle_{2\pi} &= \langle \langle \tilde{\lambda}_n, \mathcal{T}_{\gamma_n}\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi \rangle \rangle_{2\pi} - \langle \langle \tilde{\lambda}, \mathcal{T}_\gamma\mathcal{E}_\gamma\varphi \rangle \rangle_{2\pi} \\ &= \int_0^T (\nabla\hat{u}_n, \nabla\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi)_\Omega dt - \int_0^T (\nabla\hat{u}, \nabla\mathcal{E}_\gamma\varphi)_\Omega dt \\ &= \int_0^T (\nabla(\hat{u}_n - \hat{u}), \nabla\mathcal{E}_{\gamma_n}\varphi)_\Omega + \int_0^T (\nabla\hat{u}, \nabla(\mathcal{E}_{\gamma_n} - \mathcal{E}_\gamma)\varphi)_\Omega. \end{aligned}$$

El primer término del último miembro está acotado por

$$\|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{L^2(I, H_0^1)} \|\mathcal{E}_{\gamma_n}\| \|\varphi\|_{L^2(I, H_{2\pi}^{1/2})},$$

El segundo término del último miembro puede descomponerse en suma de tres integrales y acotarse, similarmente a lo realizado en el Teorema 5.3, de tal manera que tomando supremo para $\|\varphi\| = 1$ y luego haciendo $n \rightarrow \infty$, resulta

$$\left\| \tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda} \right\|_{L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2})} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \gamma_n \xrightarrow{C^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)} \gamma,$$

$$\text{es decir} \quad \tilde{\lambda}_n \xrightarrow{L^2(I, H_{2\pi}^{-1/2})} \tilde{\lambda}.$$

□

Corolario: Existencia de solución para $(P_{DI}^{Opt, T})$

Sea $\{\mathcal{W}_\gamma^t : t \in [0, T], \gamma \in \mathcal{S}\}$ es una “familia admisible con frontera interior dependiente del tiempo” y si \mathcal{S} una familia compacta con la topología de la convergencia de las derivadas segundas de la curva parametrizada, correspondiente al borde exterior, entonces el funcional

$$J(\gamma) = \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \tilde{\lambda}_\gamma(t) - L|\dot{\gamma}| \right\|_{H_{2\pi}^{-1/2}}^2 dt$$

es continuo en \mathcal{S} y por lo tanto tiene un mínimo en el compacto \mathcal{S} .

Conclusiones

Los métodos de dominio inmerso y continuidad en los parámetros, de Haslinger, Kozubek, Kunish y Peichl, junto con métodos clásicos de compacidad permiten demostrar la existencia y unicidad de solución para los problemas de optimización de formas en liberación controlada de drogas, en casos de fuentes no nulas en medios no isotrópicos, con soluciones en conjuntos compactos de curvas y en espacios de Sobolev para las concentraciones.

Estos métodos pueden aplicarse también al caso de dominios anulares, con frontera interior que cambia con el tiempo, para problemas de minimización de un nuevo funcional que surge naturalmente al buscar, que en promedio temporal, el flujo saliente este cercano al objetivo. De esta manera se ha demostrado que puede elegirse una forma exterior que sea en promedio (temporal) adecuada para todas las curvas interiores con dinámica prescrita en cierto intervalo de tiempo.

Bibliografía y Referencias

- [A] R.Adams. Sobolev Spaces. New York. Academic Press 1975.
- [B-N] G. Bachman- L. Narici . Functional Analysis. New York and London. Academic Press. 1968
- [C] J.Crank. The Mathematics of Diffusion. Oxford University Press 1975.
- [C-P] R.Curtain - A.Pritchard. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics. Academic Press. London, New York, San Francisco 1977.
- [E] L.Evans. Partial Differential Equations. American Mathematical Society. 1998
- [G-T] D.Gilbarg - N.Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer Verlag 1983.
- [I-T] A.Ioffe-V.Tihomirov. Theory of Extremal Problems. North-Holland Publishing Company. Amsterdams, New York, Oxford 1979.
- [K-P] Kunisch-Peichl. Shape optimization for mixed boundary value problems based on an embedding domain method. Dynam.Contin.Discrete Impuls.Systems 4 (1998) 439-478.
- [K-S] D.Kinderlehrer, G. Stampacchia. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic Press, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco 1980.

- [H-K-K-P] Haslinger-Kozubek-Kunisch-Peichl. An embedding domain approach for a class of 2-d shape optimization problems: mathematical analysis. *J.Math.Anal.Appl.*290(2004) 665-685.
- [S] E.M.Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*.Princenton University Press, New Jersey 1970.
- [T] F.Treves. *Basic Linear Partial Differential Equations*. Academic Press, New York, San Francisco, London 1975.
- [W] J.Weidman. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer Verlag 1980.
- [Z] F.Zó Cuadernos de Matemática y Mecánica. N°1 Notas sobre el problema de Dirichlet. CONICET-UNL. 1985

Referencias de la introducción.

- [1]J.Siepmann and N.A. Peppas, Modeling of drug release from delivery systems based on hydroxypropyl methylcellulose (HPMC), *Ad. Drug Delivery Reviews*, 48 (2001) 139.
- [2]T.Higuchi, Rate of release of medicaments from ointment bases containing drugs in suspension, *J. Pharmaceutical Sci.*50(1961) 874.
- [3] D.R. Paul and S.K. McSpadden, Diffusional release of a solute from a polymeric matrix. *J. Membrane Sci.*, 1 (1976) 33.
- [4] P.I. Lee, Diffusional release of a solute from a polymeric matrix- approximate analytical solutions. *J. Membrane Sci.*, 7 (1980) 256.
- [5]M.J.Abdekhodaie and Y.I. Cheng, Diffusional release of a dispersed solute from a sperical polymer matrix. *J.Membrane Sci.* 115 (1996) 171.
- [6] A.L. Bunge, Release rates from topical formulations containing drugs in suspension, *J. Control. Release*, 52 (1998) 141.

- [7] T. Higuchi, Mechanism of sustained action medication: theoretical analysis of rate of release of solid drugs dispersed in solid matrices, *J. Pharmaceutical Sci.*, 52(12) (1963) 1145.
- [8] T.J. Roseman and W.I. Higuchi, Release of medroxyprogesterone acetate from a silicone polymer, *J. Pharmaceutical Sci.* (1970) 353.
- [9] R.A. Lipper and W.I. Higuchi, Analysis of theoretical behaviour of a proposed zero-order drug delivery system, *J. Pharmaceutical Sci.*, 66 (1977) 163.
- [10] W.D. Rhine, D.S.T. Hsieh and R. Langer, Polymers for sustained macromolecule release: procedures to fabricate reproducible delivery systems and control release kinetics, *J. Pharmaceutical Sci.* 69(1980)265.
- [11] S. Bécharde and J.N. Mc Mullen, Solute release from a porous polymeric matrix: inwardly tapered disk with a central releasing hole, *J. Pharmaceutical Sci.*, 77 (1988) 222.
- [12] D.S.T. Hsieh, W.D. Rhine, R. Langer, Zero-order controlled release polymer matrices for micro- and macromolecules, *J. Pharmaceutical Sci.*, 72 (1983) 17.
- [13] B. Narasimhan, and R. Langer. Zero-order release of micro- and macromolecules from polymeric devices: The Role of the burst effect, *J. Control. Release*, 47 (1997) 13.
- [14] R.A. Siegel, Theoretical analysis of inward hemispheric release above and below drug solubility, *J. Control. Release*, 69 (2000) 109.
- [15] P.I. Lee, Effect of non-uniform initial drug concentration distribution on the kinetics of drug release from glassy hydrogel matrices, *Polymer*, 25(7) (1984) 973.

- [16] S. Lu, W.F. Ramirez and K.S. Anseth, Modeling and optimization of drug release from laminated polymer matrix devices, *AIChE J.*, 44(7) (1998) 1689.
- [17] Y. Zhou and X.Y. Wu, Finite element analysis of diffusional drug release from complex matrix systems. I. Complex geometries and composite structures, *J. Control. Release*, 49 (1997) 277.
- [18] Y. Zhou and X.Y. Wu, Finite element analysis of diffusional drug release from complex matrix systems. II. Factors influencing release kinetics, *J. Control. Release*, 51 (1998) 57.
- [19] Y.W. Chien, H.J. Lambert, D.E. Grant, Controlling drug release from polymeric devices I. Technique for rapid in vitro release studies, *J. Pharmaceutical Sci.*, 63 (1974) 365.
- [20] K. Tojo, Intrinsic release rate from matrix-type drug delivery systems, *J. Pharmaceutical Sci.*, 74 (1985) 685.
- [21] M.J. Abdekhodaie and Y.-I. Cheng, Diffusional release of a dispersed solute from a spherical polymer matrix, *J. Membrane Sci.*, 115 (1996) 171.
- [22] M.J. Abdekhodaie and Y.-I. Cheng, Diffusional release of a dispersed solute from planar and spherical matrices into finite external volume, *J. Control. Release*, 43 (1997) 175.
- [23] X.Y. Wu and Y. Zhou, Studies of diffusional release of a dispersed solute from polymeric matrixes by finite element method, *J. Pharmaceutical Sci.*, 88(10) (1999) 1050.
- [24] Y. Zhou and X.Y. Wu, Theoretical analyses of a dispersed-drug release from planar matrices with a boundary layer in a finite medium, *J. Control. Release*, 84 (2002) 1.

- [25] D.R. Paul, Modeling of solute release from laminated matrices, *J. Membrane Sci.*, 23 (1985) 221.
- [26] G.Ch. Charalambopoulou, E.S. Kikkinides, K.G. Papadokostaki, A.K. Stubos and A.Th. Papaioannou, Numerical and experimental investigation of the diffusional release of a dispersed solute from polymeric multilaminate matrices, *J. Control. Release*, 70 (2001) 309.
- [27] J.W. Ayres and F.T. Lindstrom, Diffusion model for drug release from suspensions: I. Release to a perfect sink, *J. Pharmaceutical Sci.*, 66 (1977) 662.
- [28] S.K. Chandrasekaran and D.R. Paul, Dissolution-controlled transport from dispersed matrices, *J. Pharmaceutical Sci.*, 71 (1982) 1399.
- [29] R.S. Harland, C. Dubernet, J.-P. Benoit and N.A. Peppas, A model of dissolution-controlled diffusional drug release from non-swellable polymeric microspheres, *J. Control Release*, 7(3) (1988) 207.
- [30] N.J. Chang and K.J., Himmelslein, Dissolution-diffusion controlled constant rate release from heterogeneously loaded drug-containing materials, *J. Control. Release*, 12 (1990) 201.
- [31] R.T.Kurnik and R.O.Potts, Modeling of diffusion and crystal dissolution in controlled release systems, *J. Control Release*, 45(1997)257.
- [32] G. Frenning, Theoretical investigation of drug release from planar matrix systems: Effects of a finite dissolution rate, *J. Control. Release*, 92 (2003) 331.
- [33] G. Frenning, Theoretical analysis of the release of slowly dissolving drugs from spherical matrix systems, *J. Control. Release*, 95 (2004) 109.

- [34] M.I. Cabrera, J.A. Luna, R.J.A. Grau, Modeling of dissolution-diffusion controlled drug release from planar polymeric systems with finite dissolution rate and arbitrary drug loading, *J. Membrane Sci.*, 280 (2006) 693.
- [35] M.I. Cabrera,, R.J.A. Grau. A generalized integral method for solving the design equations of dissolution-diffusion controlled drug release from planar, cylindrical and spherical matrix devices, *J. Membrane Sci*, 293, 1 (2007) 1.
- [36] J. Ford, M.H. Rubinstain, J.E. Hogan, A.J. Edgar, *Int. J. Pharm.* 40 (1987), 223-234.
- [37] G. Ertan, E. Karasulu, D. Demirtas, M. Arici, T. Güneri, *J. Pharmacol.* 49 (1997), 229-
- [38] D. Brooke, R.J. Washkuhn, *J. Pharm. Sci.* 66 (1977), 159-162.
- [39] J. Cobby, M. Mayersohn, G.C. Walker, *J. Pharm. Sci.* 63 (1974), 725-731.
- [40] R.A. Lipper, W.I. Higuchi, *J. Pharm. Sci.* 66 (1977), 163-164.
- [41] E.G. Rippie, J.R. Johnson, *J. Pharm. Sci.* 58 (1969) 428-431.
- [42] J. Siepmann, H. Kranz, N.A. Peppas, R. Bodmeier, *Int. J. Pharm.* 201 (2000) 151-164.
- [43] T.J. Roseman, *J. Pharm. Sci.* 61 (1972), 46-50.
- [44] M.E. Sangalli, P. Giunchedi, L. Maggi, U. Conte, A Gzaniga, *Eur. J. Pharm. Biopharm.* 40 (1994), 370-373.
- [45] H. Yesim Krasulu, Gökhan Ertan, *II Farmaco* 57 (2002) 939-945.
- [46] D. Brooke, R.J. Washkuhn, *J. Pharm. Sci.* 66 (1977) 159-162.