

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



DOCTORADO EN INGENIERÍA

**Control predictivo robusto apto para la
identificación de sistemas en lazo cerrado**

Alejandro Anderson

FICH

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

INTEC

INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO PARA LA INDUSTRIA
QUÍMICA

CIMEC

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DE MÉTODOS COMPUTACIONALES

sinc(i)

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN SEÑALES, SISTEMAS E INTELIGENCIA
COMPUTACIONAL

Tesis de Doctorado **2018**

Doctorado en Ingeniería
Mención Inteligencia Computacional Señales y Sistemas

Título de la obra:

Control predictivo robusto apto para la identificación de sistemas en lazo cerrado

Autor: Alejandro Anderson

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras clave: MPC basado en conjuntos, estabilidad, atractividad, convergencia en tiempo finito, dominio de atracción, re-identificación de sistemas a lazo cerrado.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigaciones en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

**Control predictivo robusto apto para la identificación de
sistemas en lazo cerrado**

Alejandro Anderson

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado

como parte de los requisitos para la obtención

del grado de

DOCTOR EN INGENIERÍA

Mención Inteligencia Computacional Señales y Sistemas

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2018

Comisión de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria,
Paraje: El Pozo, S3000, Santa Fe, Argentina.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigaciones en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

Control predictivo robusto apto para la identificación de sistemas en lazo cerrado

Alejandro Anderson

Lugar de trabajo:

INTEC

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Universidad Nacional del Litoral

Director:

Alejandro Hernán, González (INTEC-CONICET-UNL)

Co-director:

Ernesto, Kofman (CIFASIS-CONICET-UNR)

Jurado evaluador:

Julio Normey

Pablo Lotito

Eduardo Adam

Diego Feroldi

2018

Control predictivo robusto apto para la identificación de sistemas en lazo cerrado

Alejandro Anderson



Universidad Nacional del Litoral

Noviembre 2018

*Merci à mon directeur, Alejandro H. González, pour les
nombreux conseils avisés qu'il a su me prodiguer
durant ces années*

Índice general

Resumen	VII
Notación	IX
I	1
Capítulo 1. Presentación de la Tesis	3
1.1. Objetivo inicial	3
1.2. Contribuciones finales	5
1.3. Organización de la Tesis y trabajos relacionados	6
Capítulo 2. Sistemas Dinámicos de Control	11
2.1. Sistemas dinámicos	11
2.2. Estabilidad de sistemas dinámicos	15
2.3. Modelos de predicción utilizados en la Tesis	16
2.4. Teoría de estabilidad de Lyapunov	18
2.5. Identificación de modelos	19
Capítulo 3. Control Predictivo basado en Modelo	25
3.1. Conceptos generales en control predictivo	26
3.2. Estabilidad del MPC	32
3.3. Formulaciones de MPC robusto	35
3.4. MPC para seguimiento	38
3.5. MPC por zona	42
Capítulo 4. Conjuntos Invariantes en Control	43
4.1. Introducción	43
4.2. Conjuntos controlables y alcanzables	45
4.3. Conjuntos invariantes positivos	47
4.4. Conjuntos invariantes de control	49

IV	Índice general
4.5. Conjuntos invariantes probabilísticos	51
II	55
Capítulo 5. Conjuntos Invariantes Propuestos	57
5.1. Invariante de control contractivo	57
5.2. Propiedad geométrica de los invariantes contractivos	58
5.3. Conjuntos k -Cáscara	60
5.4. Invariantes probabilísticos a un paso	61
Capítulo 6. Convergencia en Tiempo Finito para MPC	67
6.1. Introducción	68
6.2. Formulación de MPC robusto basada en conjuntos	70
6.3. Resultados previos	71
6.4. Formulación de MPC propuesta	74
6.5. Ejemplos	80
Capítulo 7. MPC con Máximo Dominio de Atracción	85
7.1. Introducción	86
7.2. MPC con máximo dominio de atracción	87
7.3. Estabilidad asintótica	89
7.4. Ejemplos	91
Capítulo 8. MPC Robusto para Identificación de Sistemas a Lazo Cerrado	99
8.1. Introducción	99
8.2. Esquema de re-identificación	101
8.3. Modelo de predicción incierto	102
8.4. Estrategia Robusta	103
8.5. Re-identificación a lazo cerrado	108
Capítulo 9. MPC para Identificación a Lazo Cerrado basado en Invariantes Probabilísticos	111
9.1. Introducción	111
9.2. Diseño del conjunto Target	112
9.3. Resumen de la estrategia	115
9.4. Simulaciones	116
Conclusiones	127

9.5. Futuras líneas de investigación	129
Publicaciones	131
Publicaciones en revistas	131
Publicaciones en congresos internacionales	131
Publicaciones en congresos nacionales	132
Bibliografía	133

Resumen

El *Control Predictivo basado en modelos* (MPC) es una estrategia de control avanzado ampliamente utilizada (y estudiada) tanto en ámbitos académicos como industriales. Entre sus principales virtudes se encuentra la de ser una estrategia optimizante, con robustez frente a perturbaciones o discrepancias entre planta y modelo, y la de considerar de forma explícita restricciones en las variables de estado, de entrada y de salida del sistema que se quiere controlar. Para su formulación - intrínsecamente ligada al estudio de sistemas dinámicos - pueden alcanzarse diferentes niveles de abstracción, de modo de garantizar, bajo ciertas hipótesis generales, estabilidad, factibilidad recursiva, robustez y optimalidad según criterios exógenos al problema de control.

Más allá de sus evidentes ventajas, el uso explícito de objetivos tipo conjunto ha sido poco explotado en la literatura. Esta generalización - la de pasar de objetivos dados por puntos de equilibrios a objetivos dados por conjuntos invariantes - ha mostrado ser de suma utilidad en diferentes aplicaciones, sino en la mayoría. Partiendo de que en la realidad raramente se encuentren objetivos puntuales (entendiendo por tal la abstracción matemática que representa el punto), es habitual encontrar en aplicaciones tan diversas como lo son las industriales o las biomédicas, lo que se conoce como *control por zonas*, que no es más que una primera generalización que considera como objetivo de control un conjunto (agregación) de puntos de equilibrio. La extensión que le sigue es la de considerar conjuntos que también permitan el movimiento de los estados en su interior (régimen transitorio), y allí la generalización por excelencia del concepto de equilibrio son los conjuntos invariantes.

De este modo, y con independencia del tamaño que estos conjuntos puedan tener en torno al equilibrio formal que contienen, se abre un marco conceptual diferente para las formulaciones de MPC. Primero, el nuevo control considerará alcanzado el objetivo una vez que el sistema alcance el conjunto, pero dada su

condición de invariante, el sistema ya no abandonará a este, a menos que se presente una perturbación o un cambio de objetivo. En ese caso, sin embargo, el control se activará nuevamente, devolviendo el sistema al conjunto objetivo.

En este escenario, y dado que dentro del conjunto objetivo el sistema estará, en cierto modo, en lazo abierto (el controlador sólo prohibirá la aplicación de acciones de control fuera de cierto conjunto), pueden realizarse otras operaciones, como ser la excitación y posterior recolección de datos para una re-identificación. Y esto puede hacerse en forma segura, dada la supervisión que ejercerá el control para casos en que el conjunto objetivo sea abandonado. Más aún, bajo el concepto novedoso de conjuntos invariantes probabilísticos, esta operación puede realizarse en regiones arbitrariamente reducidas, si se está dispuesto a permitir 'escapes' esporádicos del conjunto, con una probabilidad baja.

Más allá de este tipo de aplicaciones, el marco general de MPC basado en conjuntos, permite también, desde un punto de vista puramente teórico, garantizar la atractividad en tiempo finito de esos conjuntos, bajo ciertas suposiciones simples, como ser, la de que los conjuntos sean, además de invariantes, contractivos. Más aún, a partir de esta convergencia en tiempo finito, se puede finalmente extender el dominio de atracción de los controles MPC a su máximo posible (máximo que depende sólo del sistema y sus restricciones), por medio de una secuencia de leyes implícitas, que al contar con la garantía de alcance en tiempo finito, van llevando el sistema de un conjunto a otro, estrictamente interior, de modo de alcanzar cualquier equilibrio admisible.

En este marco, el objetivo general de la presente tesis es ampliar las fronteras de los desarrollos teóricos del MPC basados en conjuntos invariantes, con objetivos concretos como son los de mejorar las condiciones de estabilidad, ampliar los dominios de atracción y permitir aplicaciones de tipo duales, es decir, aplicaciones en donde parte del objetivo se lleva a cabo dentro del conjunto invariante considerado como objetivos de control.

Notación

Denotamos, por $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ al conjunto de números naturales, por $\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ al conjunto de números enteros, por $\mathbb{I} := \{0, 1, 2, \dots\}$ al conjunto de enteros no negativos, por $\mathbb{I}_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ al conjunto de números no enteros negativos. \mathbb{R} es el conjunto de reales, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ al conjunto de reales mayor o igual a cero, y \mathbb{R}^n el conjunto de vectores reales de dimensión n . Dado un número real $x \in \mathbb{R}$, el piso de x se define por $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{I} : n \leq x\}$.

Un conjunto C-propio es un conjunto compacto, convexo que contiene al origen en su interior. Considere los dos conjuntos $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que contengan al origen, y una constante λ . La suma de Minkowski $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ está definida como $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} := \{(u+v) : u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$; y el conjunto $\lambda\mathcal{U} := \{\lambda u : u \in \mathcal{U}\}$ es un escalado del conjunto \mathcal{U} . Además, $\mathcal{U} \ominus \mathcal{V} := \{x : x+v \in \mathcal{U}, \text{ para todo } v \in \mathcal{V}\}$.

Dado $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x - y\|_M^2 := (x - y)^T M (x - y)$, con $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, mientras $\|x - y\| := \sqrt{(x - y)^T (x - y)}$. La distancia desde $x \in \mathbb{R}^n$ a un conjunto \mathcal{V} es definida como $d_{\mathcal{V}}(x) := \inf\{\|x - \bar{x}\|^2 : \bar{x} \in \mathcal{V}\}$. $d_{\mathcal{V}}(x)$ es una función continua y convexa, y $d_{\mathcal{V}}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, mientras $d_{\mathcal{V}}(x) = 0$ si y sólo si $x \in \mathcal{V}$.

Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$. La *bola abierta con centro en $x \in \mathcal{X}$ y radio $\varepsilon > 0$ relativa a \mathcal{X}* es dada por $\mathcal{B}_{\varepsilon}(x, \mathcal{X}) := \{y \in \mathcal{X} : \|x - y\| < \varepsilon\}$. Dado $x \in \Omega \subseteq \mathcal{X}$, decimos que x es un *punto interior de Ω relativo a \mathcal{X}* si existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta $\mathcal{B}_{\varepsilon}(x, \mathcal{X}) \subseteq \Omega$. El *interior de Ω relativo a \mathcal{X}* es el conjunto de todos los puntos interiores y se denota por $\text{int}_{\mathcal{X}} \Omega$. En caso $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ se omite el conjunto en la última definición, i.e. $\mathcal{B}_{\varepsilon}(x) := \mathcal{B}_{\varepsilon}(x, \mathbb{R}^d)$ y $\text{int } \Omega := \text{int}_{\mathbb{R}^d} \Omega$.

Sean Ω_1 y Ω_2 dos conjuntos en \mathbb{R}^d , denotamos la diferencia entre Ω_1 y Ω_2 por $\Omega_1 \setminus \Omega_2 := \{x \in \Omega_1 : x \notin \Omega_2\}$. Si \mathcal{V} es cerrado, la frontera de \mathcal{V} se denota $\partial\mathcal{V}$, y está definido como $\partial\mathcal{V} := \mathcal{V} \setminus \text{int } \mathcal{V}$.

Presentación de la Tesis

La presente tesis está dividida en dos partes claramente diferenciadas. La primera (I) introduce, por medio de cuatro breves capítulos, las nociones básicas y los conceptos necesarios para abordar los resultados principales, que serán presentados en la segunda parte (II).

En lo que sigue se explicará el objetivo inicial que motivó la realización de la tesis, y cómo la investigación de los conceptos involucrados fue derivando en otras contribuciones adicionales, que acabaron siendo tan importantes como la original.

1.1. Objetivo inicial

El control predictivo basado en modelos (en inglés, *Model Predictive Control*, o, abreviadamente, MPC) será la estrategia de control que dará marco a todos los capítulos de la tesis. Como se mencionó brevemente en el Resumen, el MPC es una técnica de control avanzado utilizado para controlar sistemas dinámicos, en forma optimizante, mientras se satisfacen las restricciones que le son propias. Para ello, la estrategia utiliza un modelo del sistema que se quiere controlar, con el fin de predecir su comportamiento futuro y así alcanzar algún objetivo predefinido (que puede consistir en mucho más que guiar el sistema a un punto equilibrio).

En general, en la mayoría de las aplicaciones, los modelos de predicción se van deteriorando con el tiempo (el sistema real cambia) y van perdiendo su capacidad de predecir apropiadamente el comportamiento del sistema. Para solucionar este problema, este modelo debe ser actualizado periódicamente, lo que comporta abrir el lazo, detener el sistema, y realizar la correspondiente experiencia de excitación, recolección de datos, y re-identificación. Como se intuye, este procedimiento de abrir el lazo cada vez que se sospecha que el modelo se deterioró no es lo deseable en ninguna aplicación, máxime si éstas consisten en

el control de plantas de gran porte. Por tanto es altamente deseable contar con estrategias de control que permitan realizar el procedimiento de re-identificación sin necesidad de abrir el lazo. Esto es lo que se conoce como re-identificación a lazo cerrado.

En este marco, el objetivo original de la presente tesis fue el de ampliar los desarrollos teóricos de MPCs aptos para re-identificación de sistemas en lazo cerrado. Estas extensiones, como se detallará a continuación, involucran tanto el estudio de la estabilidad del lazo cuando se incorpora información probabilística de las señales utilizadas para la excitación del sistema a re-identificar, como así también de los conjuntos invariantes (e invariantes probabilísticos) propios de dicho sistema. El concepto de invarianza es fundamental en este marco, porque permite asegurar que un sistema excitado persistentemente, o perturbado, se mantenga en una región dada del espacio. Es así como el estudio exhaustivo de la teoría de conjuntos invariantes, y su vinculación con MPC, se transformó en una etapa esencial para el desarrollo de este objetivo.

El desafío principal a la hora de diseñar controladores MPC aptos para re-identificación de sistemas a lazo cerrado reside en que las tareas de *controlar* un sistema y *excitarlo* para su posterior re-identificación son tareas esencialmente antagónicas. Conceptualmente, estabilizar un lazo cerrado significa mantenerlo en un equilibrio, minimizando los posibles apartamientos respecto de dicho equilibrio, cuando aparecen perturbaciones o cambios de objetivos. Contrariamente, para poder identificar un sistema (conocer su dinámica), es necesario inyectar una señal de excitación de modo que éste recorra las regiones del espacio de estado que le son propias. Esto implica, perturbar el sistema, lo que hará que un eventual controlador (suponiendo que estamos en lazo cerrado) trate de compensar/contrarrestar la excitación.

Una forma de manejar esta simultaneidad de objetivos contrapuestos (controlar e identificar, al mismo tiempo) es la de generalizar el concepto de control, de suerte que ambas tareas sean realizadas en regiones disjuntas del espacio de estado. En una dada región, menor y centrada en el punto de operación de interés, se identifica, y en otra, mayor, y circundante de la anterior, se controla el sistema. Para que esta separación de objetivos pueda ser realizada satisfactoriamente, el segundo objetivo deberá consistir en guiar (y mantener en) el sistema, no ya hacia el punto de equilibrio de interés, si no hacia la región completa donde se realiza

la identificación. Esto es lo que se conoce como generalización del concepto de control o estabilidad generalizada, y el concepto clave de esta generalización es el de conjunto invariante: concretamente, la región objetivo donde se realiza la identificación debe ser un conjunto invariante de control del sistema. Como se intuye, estos conjuntos invariantes son propios del sistema, pues no dependen del control utilizado, sino de la dinámica y las restricciones del sistema.

En este contexto, el objetivo inicial y específico de la presente tesis consistió en el diseño de estrategias de MPC novedosas que permitan mejorar la compatibilidad entre las tareas de controlar e identificar un sistema. Aprovechando el hecho de que las señales para identificación tienen distribuciones de probabilidad conocidas a priori, dichas distribuciones pueden ser explícitamente incorporadas en el diseño de los controladores, a través del concepto de conjuntos invariantes probabilísticos. Como se verá más adelante, esta mejora - que supone un desarrollo teórico no menor - permite obtener estrategias mucho más eficientes y seguras, en el sentido de que las regiones para excitación son mucho más pequeñas que en el caso de usar conjuntos invariantes determinísticos.

Los resultados obtenidos en este contexto se presentan al final de la Tesis, en los Capítulos 8 y 9 y pueden encontrarse publicados en [Anderson et al., 2015, Anderson et al., 2016a, Anderson et al., 2016b, Anderson et al., 2018e].

1.2. Contribuciones finales

Haciendo abstracción de las estrategias de MPC para re-identificación, llegamos a lo que podríamos denominar - y da finalmente título a esta Tesis - estrategias de MPC basadas en conjuntos invariantes de control (esto es, estrategias de MPC que no consideran ya puntos de equilibrio como objetivos de control, sino conjuntos invariantes de distinto tipo). Así, el análisis formal de estabilidad y robustez, habituales en el diseño de cualquier MPC, cobra un significado diferente.

Por un lado, dado que las re-identificaciones se precisan justamente cuando hay sospechas de deficiencias del modelo vigente, el MPC debe ser necesariamente robusto para diferencias entre planta y modelo. Por otro lado, ya no es suficiente garantizar la *convergencia asintótica* del sistema al conjunto invariante donde se realiza la re-identificación, sino que ahora hay que garantizar la *convergencia en*

tiempo finito, pues, de otro modo, no existe garantía de que el procedimiento de identificación efectivamente comience.

Para abordar esta temática más general fue necesario un estudio exhaustivo de los resultados existentes sobre garantía de convergencia en tiempo finito a conjuntos objetivos. Contrariamente a lo que se suponía, no se encontró en la literatura un análisis acabado sobre este tema, con excepción de algunos trabajos que, sin embargo, no arribaban a resultados concluyentes. De esta forma, la convergencia en tiempo finito robusta se convirtió en un objetivo del trabajo de investigación *per se*. El resultado que se obtuvo fue que el uso apropiado de conjuntos de entrada asociados a conjuntos objetivo de tipo contractivo, permite garantizar la búsqueda convergencia. Este análisis da lugar, por tanto, al Capítulo 6 de la presente tesis, y los resultados alcanzados fueron publicados en [Anderson et al., 2018d, Anderson et al., 2018c].

Una consecuencia indirecta y, creemos, valiosa de los resultados de convergencia en tiempo finito mencionados recientemente se puede encontrar en el Capítulo 7. Allí se proporciona una nueva formulación de MPC con el máximo dominio atracción que el sistema permite, debido a la dinámica propia y sus restricciones. Esta propiedad, no registrada en forma concluyente en la literatura de MPC, redundaba en un gran beneficio de los controladores desde el punto de vista de las aplicaciones, porque es bien sabido que esta estrategia, en general, para conseguir garantizar la estabilidad, desaprovecha significativamente el espacio de estado desde el cual un punto de equilibrio admisible puede ser estabilizado, para un dado sistema. Los resultados alcanzados en este tema fueron enviados para su publicación ([Anderson et al., 2018b]).

En cada una de las nuevas formulaciones propuestas en esta tesis, ya sea para demostrar convergencia en tiempo finito, obtener el máximo dominio de atracción o permitir la re-identificación de un sistema a lazo cerrado, el análisis de la teoría de conjuntos invariantes y su rol en la teoría de control, es imprescindible. Por tanto, se han destinado los Capítulos 4 y 5 a compendiar los conceptos concernientes a esta teoría, tanto en lo que refiere a resultados preliminares y existentes (Capítulo 4) como a resultados obtenidos y propuestas para el diseño de los nuevos controladores (Capítulo 5).

1.3. Organización de la Tesis y trabajos relacionados

Parte I. Esta primera parte está destinada a introducir los conceptos fundamentales, ya conocidos, que serán necesarios para abordar apropiadamente las propuestas que se estudiarán en la segunda parte.

Capítulo 2: Sistemas Dinámicos de Control. En este capítulo se introduce el concepto de *sistema dinámico de control* de manera de estudiar su comportamiento en el espacio de estado y cómo, por medio de entradas de control factibles, este comportamiento puede modificarse. Los conceptos que más interesan, en el contexto del control, son algunas regiones de estado que los sistemas dinámicos determinan, como ser puntos fijos o de equilibrio, conjuntos invariantes (en sentido amplio), etc. Luego se introducen los tipos de modelos que representan a estos sistemas reales y que se considerarán a lo largo de la tesis.

Capítulo 3: Control Predictivo basado en Modelo. En esta parte se introduce al control predictivo basado en modelos (MPC). Primeramente se formula una estrategia de MPC básica basada en conjuntos, la cual será la base para las distintas formulaciones que se presentarán a lo largo de la tesis. Luego, se presentan las condiciones para la estabilidad asintótica y dos estrategias conocidas que se utilizarán en otros capítulos, un esquema de MPC robusto y la estrategia de MPC para seguimiento (MPCT).

Capítulo 4: Conjuntos Invariantes en Control. Dado que las estrategias de MPC propuestas en los capítulos siguientes basan sus propiedades en la teoría de conjuntos invariantes, el objetivo de este capítulo es proporcionar un análisis profundo de la teoría de conjuntos invariantes de control e invariantes probabilísticos existente en la literatura.

Parte II. En esta segunda parte se presentan los resultados generales y particulares de la Tesis.

Capítulo 5: Conjuntos Invariantes Propuestos. Este es el primer capítulo en el cual se aportan resultados propios. Se proporcionan nuevos conceptos que agrupan diferentes propiedades del espacio de estado. Se introduce la noción de conjuntos invariantes contractivos de control junto a sus características; este concepto es utilizado en la propuesta del Capítulo 6. Las k -cáscaras utilizadas en la formulación del MPC propuesto en el capítulo 7 son definidas y

analizadas. Y el concepto de invarianza probabilística a un paso, los denominados OSPIS (*one step probabilistic invariant sets*), se definen de manera rigurosa y se proporciona una forma de calcularlos, para poder ser utilizados luego en la formulación del MPC propuesto en el Capítulo 8 y 9.

Capítulo 6: Convergencia en Tiempo Finito para MPC. En este capítulo se propone una formulación de MPC basado en conjuntos, para el cual se logra demostrar la convergencia en tiempo finito - del sistema dinámico controlado por este MPC - hacia un conjunto objetivo, el cuál debe ser un invariante contractivo de control. Más aún, se proporciona una cota superior en el tiempo de convergencia, la cuál depende del estado inicial del cual se parte.

Capítulo 7: MPC con Máximo Dominio de Atracción. Dos problemas fundamentales del control predictivo son abordados en este capítulo. La solución al problema de pérdida de factibilidad bajo cambios en el punto de referencia es una propiedad que el MPC propuesto aquí hereda del MPC para seguimiento. Además, la estrategia propuesta logra alcanzar el máximo dominio de atracción que el sistema admite, bajo cualquier horizonte de predicción fijo. Esto último se consigue gracias a los resultados de convergencia en tiempo finito presentado en el capítulo anterior.

Capítulo 8: MPC Robusto para Identificación de Sistemas a Lazo Cerrado. En este capítulo, se propone un MPC robusto con el objetivo de resolver, el conflicto que existe cuando se desea re-identificar un sistema a lazo cerrado. Es decir, se halla un compromiso entre la excitación del sistema con fines de identificación y el control del mismo, de forma de garantizar estabilidad asintótica de una región del espacio de estado.

Capítulo 9: MPC para Identificación a Lazo Cerrado basado en Invariantes Probabilísticos. En este capítulo, se sigue estudiando la propuesta de MPC robusto para re-identificación presentada en el Capítulo 8, incluyendo de forma apropiada el concepto de invarianza probabilística en el diseño del controlador, con el objetivo de reducir el conservadurismo de las formulaciones robustas. Los beneficios de la estrategia son probados en varias simulaciones.

Trabajos relacionados. En este apartado se describen brevemente algunos trabajos del autor que, si bien están en estrecha relación con los mencionados

temas de estabilidad, robustez, y factibilidad de controladores MPC, no fueron explícitamente incluidos en la Tesis.

- En [D'Jorge et al., 2018b] se diseña un MPC robusto para seguimiento (ver Capítulo 3) con objetivos económicos. Esta formulación está directamente relacionada con el MPC propuesto en el Capítulo 7 donde se diseña un MPC para seguimiento con máximo dominio de atracción.
- El estudio de los conjuntos invariantes probabilísticos analizados en los Capítulos 4 y 5 fueron el impulso para estudiar las propiedades del MPC con restricciones de tipo estocásticas. En [D'Jorge et al., 2018c] se diseñó un MPC estocástico para seguimiento, con garantía de estabilidad.
- En [Anderson et al., 2018a] se propuso una nueva clase de conjuntos; los *i-steps closed loop sets*, los cuales pueden ser calculados mediante la cota de convergencia en tiempo finito proporcionada en el Capítulo 6, y mostraron ser de gran utilidad para el análisis de sistemas a lazo cerrado.
- En [D'Jorge et al., 2018a] se propone una comparación entre el desempeño de los MPC robustos y los MPC estocásticos estudiados.

Sistemas Dinámicos de Control

La teoría moderna de sistemas dinámicos se originó al final del siglo *XIX* con preguntas fundamentales concernientes a la estabilidad de la evolución del sistema solar. Los intentos por responder esas preguntas llevaron al crecimiento de un próspero campo con aplicaciones en física, biología, meteorología, astronomía, economía, ingeniería, entre muchas otras áreas. La teoría de control es un campo interdisciplinario de la ingeniería y la matemática, que estudia el comportamiento de estos sistemas dinámicos, y la forma de modificarlos según objetivos específicos. Formalmente, desde un punto de vista matemático, un sistema dinámico es una función que describe la dependencia temporal de puntos (o partículas) en un espacio geométrico.

2.1. Sistemas dinámicos

La noción más generalizada de sistema dinámico incluye los siguientes ingredientes ([Katok and Hasselblatt, 1995]):

- i. Un *espacio de fase*, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ cuyos elementos o puntos, x , representan los posibles estados del sistema.
- ii. Tiempo continuo o discreto, t , que se extenderá hacia el futuro (procesos irreversibles), o hacia el pasado como hacia el futuro (procesos reversibles). La secuencia de momentos de tiempo discreto para procesos reversibles es una correspondencia biyectiva al conjunto de todos los números enteros $t \in \mathbb{Z}$; el caso irreversible se corresponde de la misma manera solamente con los enteros no negativos $t \in \mathbb{I}$. De forma similar, para procesos de tiempo continuo, el tiempo en los procesos irreversibles y reversibles son representados por el conjunto de todos los números reales $t \in \mathbb{R}$, y por el conjunto de todos los números reales no negativos $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, respectivamente.

- iii. Una ley de evolución temporal, $\varphi_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, que permite saber cómo evolucionarán los estados en el tiempo. De este modo, si x se escribe como función del tiempo, se tiene $x(t) = \varphi_t(x(0))$, para denotar que su valor depende de la condición inicial.

En esta Tesis nos concentraremos exclusivamente en los *sistemas dinámicos en tiempo discreto e irreversibles*, por ser ésta la forma en que los considerarán los controladores predictivos propuestos. Además se supondrá que la ley φ_t no cambia con el tiempo (es invariante), lo que significa que el resultado de la evolución temporal dependerá solamente de la posición inicial del sistema.

Formalmente, tenemos:

DEFINICIÓN 1. (*Sistema dinámico en tiempo discreto*) Un sistema dinámico en tiempo discreto se define como la dupla (φ_k, \mathcal{X}) , donde \mathcal{X} es un conjunto no vacío, $\varphi_k : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es la ley o mapa que describe la evolución temporal del sistema y $k \in \mathbb{I}$ es el tiempo discreto. El mapa φ_k debe cumplir $\varphi_{r+s}(x) = \varphi_s(\varphi_r(x))$, para todo $r, s \in \mathbb{I}$, y $\varphi_0(x) = x$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

Al conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ lo llamaremos *conjunto de estados*, y a cada punto dentro de él, estado del sistema.

OBSERVACIÓN 1. Nótese que según la definición anterior, tenemos que $\varphi_k(x) = \varphi_1^{(k)}(x)$, para todo $k \in \mathbb{I}$; es decir, $\varphi_k(x)$ es la composición, k -veces, de $\varphi_1(x)$.

Si pensamos en un sistema que evoluciona en el tiempo, normalmente el tiempo *cero* suele relacionarse con un estado inicial (donde se inició la trayectoria del sistema dinámico). De esta forma, y mediante estos elementos (estado inicial y tiempo discreto) puede definirse una trayectoria.

DEFINICIÓN 2. (*Trayectorias u órbitas*) Dado un sistema dinámico (φ_k, \mathcal{X}) y un estado inicial $x(0)$ en el espacio de estados \mathcal{X} , se define una trayectoria con estado inicial $x(0)$ como el conjunto

$$\mathbf{x}(x(0)) := \{x(0), x(1), \dots\},$$

donde $x(k) = \varphi_k(x(0))$, para todo $k \in \mathbb{I}$.

OBSERVACIÓN 2. Una trayectoria está determinada únicamente por el estado inicial, $x(0)$, y el tiempo $k \in \mathbb{I}$.

A continuación se definen conceptos fundamentales respecto al estudio de los sistemas dinámicos, como son el de punto de equilibrio, conjunto invariante y estado atractor de un sistema dinámico.

DEFINICIÓN 3. (Punto fijo o de equilibrio) Dado un sistema dinámico (φ_k, \mathcal{X}) , si existe un estado $x^* \in \mathcal{X}$ para el cual $\varphi_k(x^*) = x^*$ para todo $k \in \mathbb{I}$, se dice que x^* es un punto fijo o punto de equilibrio del sistema dinámico (φ_k, \mathcal{X}) .

DEFINICIÓN 4. (Conjunto invariante) Un subconjunto Ω de \mathcal{X} es un conjunto invariante para el sistema dinámico (φ_k, \mathcal{X}) si $\varphi_k(\Omega) \subseteq \Omega^1$ para todo $k \in \mathbb{I}$.

DEFINICIÓN 5. (Estados atractores) Dado un sistema dinámico (φ_k, \mathcal{X}) , un punto fijo $x^* \in \mathcal{X}$ se dice atractor, si existe un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ tal que para todo $x(0) \in \mathcal{A}$ se tiene que $\mathcal{B}_\varepsilon(x^*) \cap \bigcup_{k \in \mathbb{I}} \varphi_k(x(0)) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Al conjunto \mathcal{A} se le llama dominio de atracción del estado atractor x^* .

2.1.1. Sistemas dinámicos de control. Existe una distinción entre los dos tipos de sistemas que se estudiarán en esta Tesis: por un lado tenemos los sistemas autónomos, o de lazo cerrado, cuya evolución sólo depende del estado inicial y nada puede hacerse para modificarla y, por el otro, tenemos los sistemas de control, en los cuales existen variables, denominadas acciones o entradas de control, con las que podemos modificar su comportamiento. En adelante llamaremos *sistemas dinámicos autónomos* a los sistemas presentados en la Definición 1.

Antes de definir los sistemas dinámicos de control, definiremos formalmente las secuencias de control.

DEFINICIÓN 6. (Secuencias de control) Dado un conjunto no vacío \mathcal{U} y un par de enteros no negativos, $a < b$, una secuencia de control, $\mathbf{u}_{[a,b]}$, está dada por $\mathbf{u}_{[a,b]} := \{u(a), u(a+1), \dots, u(b-1)\}$ donde $u(k) \in \mathcal{U}$ para todo $a \leq k < b$.

Diremos que $\mathbf{u}_{[a,b]} \in \mathcal{U}^{a-b}$, donde $\mathcal{U}^{a-b} := \mathcal{U} \times \dots \times \mathcal{U}$, $a - b$ veces.

OBSERVACIÓN 3. Nótese que, según la definición anterior, $\mathbf{u}_{[a,a+1]} := u(a)$, para cualquier $a \in \mathbb{I}$. Esto busca evidenciar que $\mathbf{u}_{[0,k]}$, esto es, la secuencia de control que afectará al sistema desde el tiempo 0 hasta el tiempo k , sólo estará compuesta por las acciones $\{u(0), u(1), \dots, u(k-1)\}$, y no por la acción $u(k)$.

¹La condición que denotamos como $\varphi_k(\Omega) \subseteq \Omega$ implica que $\varphi_k(x) \in \Omega$ para todo $x \in \Omega$.

Dicho de otro modo, sólo se consideran sistemas causales en esta Tesis. En adelante, por simplicidad, cuando los tiempos iniciales y finales no sean relevantes, o estén determinados por el contexto, la secuencia de controles $\mathbf{u}_{[a,b]}$ se denotará directamente como \mathbf{u} .

Ahora sí estamos en condiciones de definir los *sistemas dinámicos de control*.

DEFINICIÓN 7. (Sistema dinámico de control) Un sistema dinámico de control se define como una 3-tupla $(\varphi_k, \mathcal{X}, \mathcal{U})$, donde \mathcal{X} es el conjunto de estados, \mathcal{U} es el conjunto de entradas (o de control) y $\varphi_k : \mathcal{X} \times \mathcal{U}^k \rightarrow \mathcal{X}$, con $k \in \mathbb{I}$ representando el tiempo discreto, es el mapa que determina el avance del sistema.

Para todo estado $x(0) \in \mathcal{X}$, y secuencia de control $\mathbf{u}_{[0,r+s]}$, con tiempos arbitrarios $0 \leq r < s$, el mapa φ_k debe cumplir

$$\varphi_{r+s}(x(0), \mathbf{u}_{[0,r+s]}) = \varphi_s(\varphi_r(x(0), \mathbf{u}_{[0,r]}), \mathbf{u}_{[r,r+s]})$$

²y, además,

$$\varphi_0(x(0), u) = x(0),$$

para todo $u \in \mathcal{U}$.

El término *control* en la definición anterior da cuenta de que la secuencia $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^k$ es una acción externa que ingresa al sistema para modificar su evolución. En este contexto, debe ser pensada como una variable elegida arbitrariamente, en \mathcal{U} , y cada tiempo k , con el fin de *controlar* al sistema.

OBSERVACIÓN 4. Nótese que según las definiciones dadas, los conjuntos de estado y entrada (\mathcal{X} y \mathcal{U}) se consideran parte inherente de los sistemas dinámicos.

DEFINICIÓN 8. (Trayectoria factible) Dado un sistema dinámico de control $(\varphi_k, \mathcal{X}, \mathcal{U})$, un estado inicial $x(0) \in \mathcal{X}$, y una secuencia $\mathbf{u}_{[0,k]} \in \mathcal{U}$, la trayectoria de estados factibles, $\mathbf{x}(x(0), \mathbf{u}_{[0,k]})$, está dada por

$$\mathbf{x}(x(0), \mathbf{u}_{[0,k]}) := \{x(j) \in \mathcal{X} : x(j) = \varphi_j(x(0), \mathbf{u}_{[0,j]}), j = 0, 1, \dots, k\}.$$

DEFINICIÓN 9. (Punto de equilibrio de control) Dado un sistema dinámico $(\varphi_k, \mathcal{X}, \mathcal{U})$, un estado $x^* \in \mathcal{X}$ se dice que es un equilibrio de control si para todo $k \in \mathbb{I}$, existe $\mathbf{u}_{[0,k]} \in \mathcal{U}^k$ tal que $\varphi_k(x^*, \mathbf{u}_{[0,k]}) = x^*$.

²Se considera que $\mathbf{u}_{[0,r+s]}$ está formado por $\mathbf{u}_{[0,r]}$ en sus primeros r elementos y por $\mathbf{u}_{[r,r+s]}$ en sus últimos s elementos.

Para completar esta sección, se definirán a continuación los sistemas dinámicos de lazo cerrado, que son en realidad *sistemas autónomos*, pero con limitaciones adicionales para los estados, dadas, en forma implícita, por las limitaciones en las acciones de control del *sistema de control* que los origina.

Consideremos primero que una *ley de control* $\kappa : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, es una función de \mathcal{X} en \mathcal{U} que indica cuál decisión (control) tomar, dependiendo del estado en el cual se encuentra el sistema.

DEFINICIÓN 10. (*Sistema dinámico en lazo cerrado*) Sea ley de control $\kappa(\cdot)$, un sistema dinámico en lazo cerrado se define entonces como el correspondiente sistema dinámico de control, $(\varphi_k, \mathcal{X}, \mathcal{U})$, donde los controles están dados por $u(k) := \kappa(x(k))$. De este modo, podemos denotar al mapa de evolución del sistema como $\varphi_k^x : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, de modo que el sistema de lazo cerrado queda $(\varphi_k^x, \mathcal{X}, \mathcal{U})$, donde debe cumplirse que $\kappa(x(k)) \in \mathcal{U}$, para todo $k \in \mathbb{I}$.

2.2. Estabilidad de sistemas dinámicos

La teoría de estabilidad de los sistemas dinámicos estudia cómo varían las soluciones bajo pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales.

DEFINICIÓN 11. (*Estabilidad local*) Dado un sistema dinámico autónomo (φ_k, \mathcal{X}) , un conjunto invariante $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es localmente estable, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $d_\Omega(x) < \delta$ implica que $d_\Omega(\varphi_k(x)) < \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{I}$.

Esta definición, claramente, puede ser extendida al caso de sistemas dinámicos de lazo cerrado, cuando $\mathcal{U} \equiv \mathbb{R}^m$, y se conoce habitualmente como estabilidad de Lyapunov ([Rawlings and Mayne, 2009]) o estabilidad $\varepsilon - \delta$. Otro concepto de gran importancia en los sistemas dinámicos es la atractividad de los conjuntos invariantes.

DEFINICIÓN 12. (*Atractividad global*³) Dado un sistema dinámico autónomo (φ_k, \mathcal{X}) , un conjunto invariante $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es globalmente atractivo si para todo $x \in \mathcal{X}$ se cumple que $d_\Omega(\varphi_k(x)) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

OBSERVACIÓN 5. En caso de que la atractividad se de sólo en un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$, y no en todo \mathcal{X} , se tendrá sólo la atractividad de Ω , con un dominio de atracción dado justamente por \mathcal{A} .

³El término *global* suele utilizarse para hacer referencia al caso en que $\mathcal{X} \equiv \mathbb{R}^n$.

Por último, basándonos en los dos conceptos anteriores, presentamos la noción de estabilidad asintótica de un sistema autónomo.

DEFINICIÓN 13. (*Estabilidad asintótica global*) Dado un sistema dinámico autónomo (φ_k, \mathcal{X}) , un conjunto invariante $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es global asintóticamente estable si es localmente estable y globalmente atractivo.

OBSERVACIÓN 6. Nuevamente, en el caso de que la atractividad se dé sólo en un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$, y no en todo \mathcal{X} , se tendrá sólo estabilidad asintótica, con un dominio de atracción dado por \mathcal{A} .

2.3. Modelos de predicción utilizados en la Tesis

Como es sabido, la forma de describir los sistemas dinámicos en tiempo discreto presentados, es mediante ecuaciones en diferencias. De este modo, es directa la asociación entre el mapa de un determinado sistema dinámico de control, $\varphi_k(x(0), \mathbf{u}_{[0,k]})$, $k \in \mathbb{I}$, con una ecuación del estilo $x(k+1) = F(x(k), u(k))$, y sus iteraciones a partir de un dado $x(0)$, donde F es una función que puede asumir diversas formas y presentar diversas propiedades. Más precisamente, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x(0), \mathbf{u}_{[0,1]}) &= F(x(0), u(0)), \\ \varphi_2(x(0), \mathbf{u}_{[0,2]}) &= F(F(x(0), u(0)), u(1)), \\ &\vdots \\ \varphi_k(x(0), \mathbf{u}_{[0,k]}) &= F(\cdots F(F(x(0), u(0)), u(1)), \cdots, u(k-1)). \end{aligned}$$

Precisamente, a continuación se presentan algunas de las formas que asumiré F para los modelos de predicción que se utilizarán a largo de la tesis, según corresponda al problema particular que se trate.

2.3.1. Modelos Lineales. A pesar de que los sistemas reales son esencialmente no lineales, es habitual realizar una linealización en torno a un punto de operación de interés, es decir, una aproximación del sistema real por medio de un modelo lineal alrededor de un punto de equilibrio. De este modo tenemos sistemas mucho más sencillos de analizar.

2.3.1.1. *Caso Nominal.* El modelo de predicción lineal nominal es el más sencillo de todos los modelos que se considerarán, debido a que en este no se tiene en cuenta las incertidumbres del modelo.

$$(2.3.1) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k).$$

La incertidumbre que dichos modelos de predicción, como tales, poseen, puede ser modelada de diferentes maneras.

2.3.1.2. *Incertidumbre paramétrica.* La incertidumbre que tiene en cuenta la diferencia entre el modelo y el sistema dinámico real puede ser descrita mediante el siguiente modelo paramétrico:

$$(2.3.2) \quad x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k), \quad \theta \in \Theta,$$

donde $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema en el tiempo k , $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^l$ es un parámetro fijo desconocido que da cuenta de la diferencia entre el modelo y el sistema real, y el conjunto Θ se denomina conjunto de incertidumbres y contiene al origen. $A : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ se suponen funciones Lipschitz en Θ ⁴.

La ecuación 2.3.2 describe una familia de modelos de predicción con tantos elementos como los tiene el conjunto Θ . La hipótesis es que esta familia contiene al sistema dinámico real.

2.3.1.3. *Incertidumbres aditivas.* En el análisis de control de sistemas perturbados es muy común considerar a las incertidumbres del sistema como aditivas. Por lo que también se estudiará el siguiente modelo lineal invariante en el tiempo

$$(2.3.3) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \quad w(k) \in \mathcal{W},$$

donde $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de perturbaciones, se considera compacto y contiene al origen en su interior. Nuevamente, la familia de modelos 2.3.3 debe contener al sistema real.

2.3.2. Modelos no lineales. En el caso no lineal, no es demasiado lo que puede decirse de las ecuaciones en diferencias del modelo. Solo formalizaremos su ecuación, para los casos nominal y con incertidumbres.

⁴Una función $F : M \rightarrow N$ entre dos espacios métricos (M, d_M) y (N, d_N) se dice que es Lipschitz en M si existe una constante $K > 0$ tal que $d_N(F(x), F(y)) \leq d_M(x, y)$ para todo $x, y \in M$.

2.3.2.1. *Caso Nominal.* El modelo no lineal nominal que se usará en capítulos posteriores está dado por:

$$(2.3.4) \quad x(k+1) = F(x(k), u(k)), \quad x(0) = x_0,$$

donde $x(k) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema a tiempo k , x_0 es el estado inicial y $u(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ es la entrada de control. La función $F : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ es continua en $\mathcal{Z} := \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ y $F(0, 0) = 0$.

2.3.2.2. *Caso incierto.* Para el caso del modelo con incertidumbres, se tendrá:

$$(2.3.5) \quad x(k+1) = F(x(k), u(k), w(k)), \quad x(0) = x_0,$$

donde $w(k) \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$ es una perturbación desconocida, al tiempo k . La función $F : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}$ es, al igual que antes, continua en $\mathcal{Z} := \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ y $F(0, 0, 0) = 0$.

Debe entenderse que la función F no es la misma para el caso nominal que para el caso incierto, pues están definidas en distintas dimensiones. Sin embargo, se utiliza la misma notación por simplicidad.

OBSERVACIÓN 7. *Como se dijo, se considerarán dos tipos de modelos de predicción; modelo nominal y modelo incierto. En el caso nominal se asume que no existe error entre el sistema dinámico y su modelo de predicción, i.e.*

$$\varphi_1(x, u) = F(x, u),$$

para todo estado $x \in \mathcal{X}$ y entrada $u \in \mathcal{U}$. Mientras tanto, para el caso incierto se asume que el sistema real está contenido dentro de una familia de modelos de predicción determinada por los conjuntos de incertidumbre \mathcal{W} o θ definidos anteriormente, por ejemplo la ecuación 2.3.5 supone que

$$\varphi_1(x, u) \in \{F(x, u, w) : w \in \mathcal{W}\},$$

para todo estado $x \in \mathcal{X}$ y entrada $u \in \mathcal{U}$.

2.4. Teoría de estabilidad de Lyapunov

Para determinar la estabilidad o estabilidad asintótica, la teoría de Lyapunov provee un marco conveniente. Si es posible encontrar una función real tal que sea positiva y decreciente a lo largo de trayectorias de estado no pertenecientes al conjunto Ω , entonces el estado convergerá a este conjunto.

Antes de dar la definición formal de función de Lyapunov, recordemos que las funciones \mathcal{K}_∞ es la clase de funciones que van de los reales positivos a los reales positivos, son continuas, estrictamente crecientes, valen cero en el origen y son no acotadas. Del mismo modo, la clase de funciones definidas positivas es la de las funciones que van de \mathbb{R}^n a los reales positivos, son continuas y positivas en un entorno del origen, excepto en el origen.

Una función de Lyapunov se definen como sigue

DEFINICIÓN 14. (**Función de Lyapunov**) Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es de Lyapunov para el modelo $x(k+1) = F(x(k))$ y el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si existen funciones $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$, para $i = 1, 2$ y una función α_3 definida positiva, tal que

$$(2.4.1) \quad V(x) \geq \alpha_1 d_\Omega(x),$$

$$(2.4.2) \quad V(x) \leq \alpha_2 d_\Omega(x),$$

$$(2.4.3) \quad V(F_c(x)) - V(x) \leq -\alpha_3 d_\Omega(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$

La existencia de una función de Lyapunov es una condición suficiente para la estabilidad asintótica global como afirma el siguiente resultado presentado en [Rawlings and Mayne, 2009].

TEOREMA 1. Si existe una función de Lyapunov, $V(\cdot)$, para el sistema $x(k+1) = F(x(k))$ y el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$. Entonces, Ω es asintóticamente estable.

La demostración de este Teorema puede verse en [Rawlings and Mayne, 2009, Teorema B11].

2.5. Identificación de modelos

La identificación de sistemas consiste en obtener modelos de los sistemas dinámicos a partir de datos experimentales. En control, los métodos de identificación de sistemas son utilizados para crear reguladores, diseñar algoritmos de predicción, o realizar simulaciones. Por otro lado, en aplicaciones de procesamiento de señales, se utilizan para análisis espectral, detección de fallas (fault detection), reconocimiento de patrones, filtros adaptativos, predicción lineal, etc.

([Soderstrom and Stoica, 1989]). La calidad del modelo que se utiliza en los controladores predictivos afecta directamente la performance del control del proceso. Sin embargo, en la búsqueda del modelo que mejor se adapte al comportamiento del sistema real, nunca se llegará a encontrar un modelo que represente en forma exacta al sistema; sólo se obtendrá una aproximación del mismo.

Los métodos de identificación más populares en la actualidad son el método de predicción del error (PEM) y el método de identificación por subespacios (SID). El método PEM se basa en algoritmos de optimización local, mientras que los métodos de subespacios se basan en operaciones geométricas en subespacios generados por las matrices de datos y no utilizan criterios explícitos de optimización. Por lo tanto, en general, los métodos de subespacios son rápidos y confiables. Una desventaja es que son menos precisos que PEM.

El proceso de identificación puede realizarse en lazo abierto o en lazo cerrado. El primero se realiza por lo general cuando el sistema de control se encuentra en su estado inicial de desarrollo, o sea, cuando se cuenta con la posibilidad de llevar el sistema a su punto de operación y moverlo alrededor del mismo sin ninguna realimentación que trate de modificarlo. El segundo se realiza cuando no es posible abrir el lazo de control. Las razones para esto pueden ser varias: inestabilidad en lazo abierto, control de producción, ganancias (dinero), seguridad o debido a que el sistema contiene un mecanismo de retroalimentación inherente [Ljung, 1999]. A continuación se presentan algunas desventajas de la identificación en lazo cerrado [Forsell and Ljung, 1999]:

- El lazo de control produce la correlación entre las señales de entrada (manipuladas) y el ruido del sistema, lo que resulta en el fallo de muchos métodos de identificación, como por ejemplo el $N4SID$.
- Varias estructuras de modelos resultan muy difíciles de usar, especialmente en estructuras no paramétricas [Ljung, 1999].
- Por definición, un sistema en lazo cerrado contiene un controlador que se esfuerza por reducir las perturbaciones del sistema, manteniendo el mismo en un punto de operación deseado. Esto resulta en la reducción de la excitación del sistema junto con la información que contienen los datos cuando se está identificando.

El último ítem refiere a un factor importante para obtener un modelo preciso del sistema identificado. Para el caso de lazo abierto, el único criterio para datos

informativos es que la señal de entrada sea de excitación persistente, como se define en lo siguiente.

DEFINICIÓN 15 (Señal de Excitación Persistente). *Dado un conjunto compacto no vacío $V \subset \mathbb{R}^m$, decimos que un proceso estacionario $v : \mathbb{N} \rightarrow V$ es una señal de excitación persistente si satisface $E[v_k] = 0$ y $\text{cov}[v_k] > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, si además v_k es no está correlacionado con v_j , para $k \neq j$.*

2.5.1. Procedimiento de identificación. La construcción de modelos a partir de datos está relacionada con tres elementos básicos [Ljung, 1999]:

- Conjunto de datos entrada-salida.
- Conjunto de candidatos de modelos.
- Un criterio para asignar el modelo del conjunto que mejor se ajuste a los datos.

Los datos de entrada-salida son por lo general obtenidos a partir de un experimento específico de identificación, donde el usuario puede determinar qué señales medir, cuándo medirlas y las características de las señales de entradas que excitarán al sistema. El objetivo del experimento será entonces realizar estas elecciones en forma correcta de manera de obtener un conjunto de datos con la mayor información posible. En algunos casos, estas elecciones que realiza el usuario para la identificación no son posibles y éste se debe limitar a los datos que entrega el sistema cuando opera en forma normal, como por ejemplo en el caso de un sistema controlado en lazo cerrado.

Definir qué conjunto de modelos serán los candidatos dependerá, por lo general, de la información previa que se tenga del sistema a identificar. Determinar el modelo del conjunto que mejor se adapta a los datos mediante un criterio se denomina método de identificación. Los algoritmos que determinan los métodos de identificación pueden dividirse en tres clases:

- Métodos de predicción de error (PEM).
- Métodos de identificación por subespacios (SID).
- Métodos de análisis espectral y correlación.

Luego del procedimiento de identificación se determina cuándo el modelo es suficientemente bueno, o sea, cuándo es válido para el propósito en particular. Este test se denomina validación de modelo. Hay varias maneras de evaluar el modelo, la manera más natural es comparando el modelo en una simulación

con los datos medidos en proceso real. Un índice que se utiliza para realizar la validación es el índice de ajuste FIT:

$$\text{FIT}(\%) = 100 \left(1 - \frac{\|\hat{y} - y\|}{\|\bar{y} - y\|} \right),$$

donde \hat{y} es el valor predicho por el modelo, y es el valor real de sistema y \bar{y} es el promedio de las mediciones obtenidas.

El procedimiento de identificación de sistemas se puede representar también en forma esquemática mediante el diagrama en bloque de la Figura 1 ([Bustos et al., 2016]), en la cual se puede observar como primer paso, la obtención de los datos, luego se elige el conjunto de modelos y por último se determina el que mejor ajuste a ese conjunto de datos. En el caso de que el modelo que se obtuvo

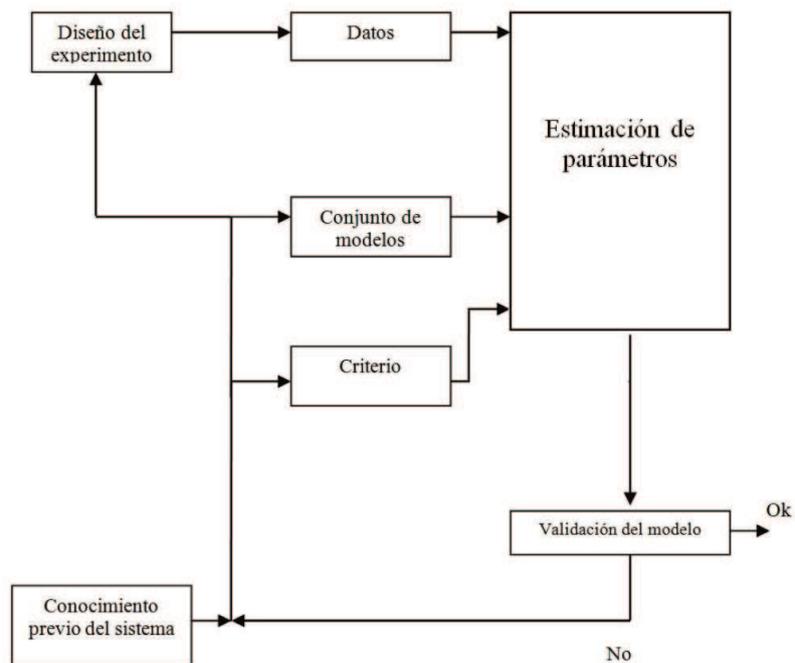


FIGURA 1. Estrategia de identificación de sistemas.

no pase la validación, se debe revisar todos los pasos realizados previamente y repetir el procedimiento de identificación.

El modelo puede ser deficiente por varias razones: i) el procedimiento numérico falla en encontrar el mejor modelo acorde a nuestro criterio; ii) el criterio no fue elegido en forma correcta; iii) el conjunto de modelos no es apropiado (en este no se halla una buena descripción del sistema); iv) el conjunto de datos no tiene información suficiente para poder obtener un buen modelo.

2.5.2. Método de subespacios. En general, en la industria, es necesario realizar identificaciones en lazo cerrado. Las razones son varias: inestabilidad en lazo abierto, control de producción, pérdidas de ganancias, seguridad, o a que el sistema contiene un mecanismo de retroalimentación inherente [Ljung, 1999]. Existen diversas estrategias generales de identificación en lazo cerrado, como ser los métodos directos, indirectos o combinados entrada-salida [G.Bustos, 2014]. En esta sección se dará una descripción del método por subespacios. El nombre de identificación por subespacios proviene del hecho de que los modelos lineales que se obtienen mediante este método surgen del espacio fila y columna (subespacios) de ciertas matrices, que son calculadas a partir de los datos de entrada-salida del sistema. Por lo general, el espacio columna de tales matrices de datos contiene información del sistema, mientras que el espacio fila permite obtener la secuencia de estados. Estas matrices se calculan directamente de los datos de entrada-salida, sin conocimiento previo del sistema que las genera [Overschee and Moor, 1996].

En la actualidad los algoritmos de Métodos de Identificación por Subespacios compiten en su performance con los Métodos de Predicción de Error y han mostrado buenas propiedades. A continuación se presentan algunas de ellas:

- Una de las principales ventajas de los métodos de identificación por subespacios es que no necesitan de una parametrización previa al proceso de identificación, que en el caso de sistemas multivariados es una tarea complicada.
- Otra de sus ventajas importantes es su eficiencia y robustez computacional otorgada por la utilización de herramientas de álgebra lineal como son la descomposiciones en valores singulares.
- El único parámetro que se debe definir es el orden del sistema. No existe la necesidad de parametrizaciones complejas, aún para sistemas multivariados, ya que este método utiliza modelos en espacio de estados.

- Reducción del orden del sistema: Este método incorpora implícitamente un reductor de orden, el cual es importante cuando se usan datos reales de planta.

Control Predictivo basado en Modelo

Esta tesis se centra en la técnica denominada control predictivo basado en modelo, MPC¹, también conocida como control de horizonte deslizante, por ser ésta la forma en la que se aplican las acciones de control.

MPC se enmarca dentro de los controladores óptimos, es decir, aquellos controladores que calculan las acciones de control en base a la optimización de un cierto criterio o función de costo, relacionado con el comportamiento futuro del sistema dinámico. Para predecir el comportamiento futuro del sistema dinámico bajo control se utiliza un modelo del mismo, tales como se presentaron en el Capítulo 2, los cuales, en el contexto del MPC, suelen llamarse *modelo de predicción*, que da nombre a la estrategia - en este modelo también se incluyen las limitaciones de las variables. El intervalo de tiempo futuro que se considera en la optimización se denomina horizonte de predicción.

Dado que el comportamiento futuro del sistema depende de las actuaciones que se aplican a lo largo del horizonte de predicción/control, son éstas últimas las variables de decisión respecto a las que se optimiza el criterio. La aplicación de las actuaciones óptimas al sistema conducen a un control en lazo abierto, que ignora las posibles discrepancias entre el comportamiento predicho y el comportamiento real del sistema, debido a perturbaciones o diferencias entre el sistema y el modelo del sistema. Esto crea la necesidad de imponer cierta robustez al lazo cerrado, mediante la incorporación de una realimentación, en cada instante, de los estados del sistema. Esta realimentación se consigue mediante la técnica de *horizonte deslizante* que consiste en aplicar sólo las actuaciones obtenidas durante un periodo de tiempo, tras el cual se mide o estima nuevamente el estado

¹Acrónimo derivado del término inglés Model Predictive Control. Dado que estas siglas son con las que se denomina frecuentemente esta técnica de control en la literatura, se utilizarán para designarla a lo largo de este documento.

real del sistema dinámico y se resuelve un nuevo problema de optimización. De esta manera, el horizonte de predicción se va deslizando a lo largo del tiempo.

Una de las propiedades más atractivas del MPC es su formulación abierta, que permite la incorporación de distintos tipos de modelos de predicción, sean lineales o no lineales, mono-variables o multi-variables, y la consideración explícita de restricciones/limitaciones en las señales del sistema. Esto hace, del MPC, una de las estrategias más utilizada en diversas áreas del control, como se pone de manifiesto en los trabajos [Ramírez et al., 1999a, Gómez-Ortega et al., 2001, Ramírez et al., 1999b]. Estas características han hecho del control predictivo una de las pocas estrategias de control avanzado con un alto impacto en ámbitos industriales ([Qin and Badgwell, 1997]). En este sentido, es importante resaltar que el control predictivo se ha desarrollado en el mundo de la industria, y ha sido la comunidad científica la que se ha esforzado en dar un soporte teórico a los resultados prácticos obtenidos.

3.1. Conceptos generales en control predictivo

Los objetivos del *control predictivo* se pueden resumir del siguiente modo.

- Supóngase que se quiere controlar un *sistema dinámico de control discreto* $(\varphi_k, \mathcal{X}, \mathcal{U})$, de tal forma que este se dirija a un conjunto en particular $\Omega \subset \mathcal{X}$.
- Para esto se precisa un *modelo de predicción* discreto del sistema $(\varphi_k, \mathcal{X}, \mathcal{U})$, supóngase que este es

$$x(k+1) = F(x(k), u(k)),$$

donde $x(k) \in \mathcal{X}$ son los estados, $u(k) \in \mathcal{U}$ las entradas de control, además $F(\cdot)$ es continua en $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ y $F(0, 0) = 0$.

- También se debe elegir un horizonte de predicción/control $N \in \mathbb{N}$, de tal forma que nuestro modelo sea adecuado al predecir sobre este horizonte, i.e. dado un $x(0) \in \mathcal{X}$

$$\underbrace{F(\cdots F(F(x(0), u(0)), u(1)), \cdots, u(i-1))}_{\text{composición de } F \text{ } i \text{ veces}} \approx \varphi_i(x_0, \mathbf{u}_{[0, i-1]}),$$

con $\mathbf{u}_{[0, i-1]} = \{u(0), u(1), \cdots, u(i-1)\}$, para todo $i = 0, 1, \cdots, N$.

- El conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ debe ser un invariante de control (o conjunto de equilibrio) para el sistema $(\varphi_k, \mathcal{X}, \mathcal{U})$, de tal forma que el control pueda mantener al sistema en esa región.

El objetivo del *control predictivo* es logrado *prediciendo* la evolución del sistema y calculando la secuencia admisible de entradas de control que minimice un funcional de costo, tal que la evolución del sistema satisfaga las restricciones. El problema se puede plantear como un problema de optimización; la secuencia de control obtenida se aplica mediante la estrategia de horizonte deslizante, resolviendo el problema de optimización en cada periodo de muestreo.

Según [Limon, 2002], el control predictivo está formado por los siguientes elementos fundamentales:

- i. Modelo de predicción del sistema.
- ii. Función de costo.
- iii. Restricciones del sistema.

3.1.1. Modelo de predicción. La descripción de un modelo de predicción fue introducida en el Capítulo 2, donde se lo categoriza como *modelos matemáticos que describen de forma aproximada el comportamiento esperado del sistema*. Pueden ser considerados lineales o no lineales, de tiempo continuo o discreto, en variables de estado o variables de entrada y salida.

La literatura proporciona un amplio conjunto de métodos para discretizar ecuaciones diferenciales. Asimismo, la aplicación de la técnica de horizonte deslizante se resuelve por simulaciones en computadora, lo cual hace más natural la consideración de modelos discretos, por lo que serán los que utilizaremos en el transcurso de la Tesis.

Consideremos el modelo de predicción más general, el que fue presentado en la ecuación 2.3.5, sin perturbaciones, y reproducido aquí por simplicidad:

$$(3.1.1) \quad x(k+1) = F(x(k), u(k)), \quad x(0) = x_0,$$

donde $x(k) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema a tiempo k , x_0 es el estado inicial y $u(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ es la entrada de control.

3.1.2. Función de costo. Antes de definir la función costo, consideremos la notación - que tiene por objetivo diferenciar los estados del sistema real $(\varphi_k, \mathcal{X}, \mathcal{U})$ según el tiempo k dónde se encuentre, con las predicciones que obtenemos por el modelo de predicción - presentada a continuación:

- $x = x(k)$ es el estado actual, y determina el estado en el que se encuentra el sistema real $(\varphi_k, \mathcal{X}, \mathcal{U})$ en el tiempo $k \in \mathbb{I}$. Generalmente el estado $x(k)$ suele ser medido o estimado.
- $x(j)$ es la predicción para el tiempo $j \in \mathbb{I}_N$, hecha a partir del estado actual x al tiempo k , según el modelo de predicción propuesto, cuando las entradas de control son $u(j)$, $j \in \mathbb{I}_{N-1}$.

La función de costo se define de la siguiente manera

$$V_N(x; \mathbf{u}) := \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x(j), u(j)) + V_f(x(N)),$$

donde $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de costo de etapa y $V_f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ la función de costo terminal, y ambas se asumen definidas positivas. La secuencia de entradas predichas está dada por $\mathbf{u} := \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$. La predicción depende de la secuencia de actuaciones aplicadas desde el instante k hasta el instante $k+j$, y por lo tanto futuras, $x(j+1) = F(x(j), u(j))$, para $j \in \mathbb{I}_{N-1}$.

En el contexto de control predictivo, se denomina estado terminal al estado predicho al final del horizonte de predicción, es decir $x(N)$.

3.1.3. Formulación del control predictivo. El problema de optimización que resuelve MPC en el instante de tiempo k , $\mathcal{P}_N(x)$, está dado por:

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} V_N(x; \mathbf{u}) \\ \text{s.a.} \quad & x(0) = x, \\ & x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{I}_{N-1}, \\ & x(j+1) = F(x(j), u(j)), \\ & x(N) \in \Omega. \end{aligned}$$

La solución a este problema es una secuencia de N entradas de control, denotada como

$$\mathbf{u}^0(x) := \{u(0; x)^0, u(1; x)^0, \dots, u(N-1; x)^0\},$$

que determinan la trayectoria óptima (qué minimiza el costo) para alcanzar el conjunto Ω . La estrategia del control predictivo (u horizonte deslizante) consiste en aplicar la ley de control (implícita) $\kappa_{MPC}(x) = u^0(0; x)$, donde $u^0(0; x)$ es el primer elemento de la secuencia óptima $\mathbf{u}^0(x)$.

Luego se deja evolucionar el sistema real y, en base a la medición o estimación del estado al tiempo $k + 1$,

$$x(k + 1) = \varphi_1(x(k), \kappa_{MPC}(x(k))) \text{ (re-alimentación),}$$

se resuelve nuevamente el problema de optimización, para el instante de tiempo $k + 1$, para el estado actual $x = x(k + 1)$, y así para todo $k \geq 0$.

Por último, la función de costo óptimo en el instante k esta dada por:

$$(3.1.3) \quad V_N^0(x) := V_N(x; \mathbf{u}^0(x)).$$

3.1.4. Restricciones del problema de optimización. Las restricciones del problema anterior pueden ser simplificadas a la forma $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_N(x)$, siendo $\mathcal{U}_N(x)$ el conjunto de secuencias de control que satisfacen tanto las restricciones de estado como las de control. Formalmente,

$$\mathcal{U}_N(x) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}^N : u(j) \in \mathcal{U}, x(j) \in \mathcal{X}, j \in \mathbb{I}_{N-1}, x(N) \in \Omega\},$$

donde el conjunto \mathcal{U}_N es función del parámetro x (esto se debe a la restricción $x(N) \in \Omega$). De esta manera, podemos re-definir el Problema 3.1.2 de forma más compacta:

$$\mathcal{P}_N(x) : \text{mín}\{V_N(x; \mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{U}_N(x)\}.$$

3.1.5. Dominio de atracción. Como se demostrará más adelante, el MPC estabiliza asintóticamente el sistema, garantizando la satisfacción de las restricciones impuestas a los estados y las actuaciones a lo largo de la evolución del mismo. Pero la restricción terminal (que es una restricción de alcance, es decir, que exige alcanzar una dada región en una determinada cantidad de pasos) determina implícitamente una región (dominio de atracción del lazo cerrado) fuera de la cual los estados iniciales harán infactible al problema de optimización. El conocimiento y caracterización de este conjunto, claro está, es importante para representar el dominio de validez del controlador. Por lo demás, cuanto mayor sea esta región, mayor será el conjunto de estados estabilizables por el controlador, lo cual implica un gran beneficio ([Limon, 2002, Kerrigan and Maciejowski, 2000]).

El *dominio de atracción del controlador MPC* se denota como \mathcal{X}_N , para explicitar su dependencia del horizonte de predicción N y es subconjunto del espacio de estado \mathcal{X} , aunque en rigor depende de todas las restricciones, incluyendo

al conjunto terminal Ω . Se define formalmente como:

$$\mathcal{X}_N := \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{U}_N(x) \neq \emptyset\}.$$

Existen varias estrategias para incrementar el dominio de atracción ([Limon, 2002]). Entre las más obvias (ver Figura 1) se encuentra la de aumentar el horizonte de predicción, lo cuál implica un aumento en el costo computacional de resolver \mathcal{P}_N . Asimismo, una modificación adecuada de la función de costo terminal, puede llevar a encontrar una mayor región terminal en la que se satisfacen las condiciones suficientes de estabilidad, y de esta forma aumentar el dominio de atracción. Por último, un aumento del tamaño del conjunto terminal derivará también en un aumento del dominio de atracción.

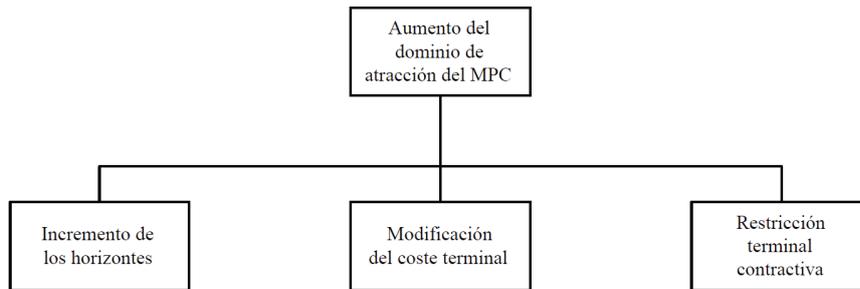


FIGURA 1. Técnicas para el aumento del dominio de atracción

OBSERVACIÓN 8. *El Capítulo 7 introduce una nueva estrategia de MPC y se demuestra que la misma extiende el dominio de atracción al máximo dominio de atracción que el sistema dinámico puede permitir.*

3.1.6. Factibilidad recursiva. La estrategia de horizonte deslizante implica que en cada instante de muestreo se toma un nuevo estado del sistema, se resuelve el problema de optimización y se aplica sólo la actuación obtenida para el siguiente periodo de muestreo, descartando las restantes. Luego, en el siguiente periodo, se repite toda la operación. Esto provee de realimentación (y cierta robustez) a la formulación, a la vez que provoca que el horizonte se desplace en cada instante, haciendo que las trayectorias sucesivas no sean directamente comparables.

El problema de la estabilidad tiene su origen en una característica típica de los controladores predictivos: la necesidad de utilizar un horizonte de predicción finito e invariante en el tiempo, y la estrategia de horizonte deslizante. En esta sección se analizarán las causas fundamentales que hacen que la formulación original del control predictivo basado en modelos sea incapaz de garantizar la factibilidad y la convergencia.

Considérese la implementación del problema de control óptimo de horizonte finito, mediante programación dinámica (que es la estrategia típica de lo que habitualmente se conoce como *Control Óptimo*): partiendo de un estado inicial $x(0)$ tal que el problema de optimización con horizonte N sea factible. Si se aplica sobre el sistema la actuación óptima $u(0) = \kappa_N(x(0))$, el estado evoluciona a $x(1)$ y, en ese instante - en concordancia con el principio de optimalidad de Bellman² - la actuación óptima viene dada por la ley de control óptima con un horizonte $N-1$, es decir, $u(1) = \kappa_{N-1}(x(1))$. Continuando este razonamiento, en el instante k la actuación óptima vendrá dada por $u(k) = \kappa_{N-k}(x(k))$, que es el controlador óptimo para conducir al sistema en $N - k$ pasos al conjunto terminal Ω . De este modo, el horizonte de predicción se va encogiendo a cada instante hasta el instante N , en el cual el sistema alcanza la región terminal. Por lo tanto, el lazo cerrado converge al conjunto terminal, y si el problema es factible en el inicio, lo será en todo instante (es decir, se tiene factibilidad recursiva).

Ahora considérese la implementación del mismo problema de control óptimo de horizonte finito, pero mediante la estrategia de horizonte deslizante (habitualmente conocido como control predictivo): la estrategia de horizonte deslizante y horizonte finito e invariante (o fijo) hace que siempre se aplique el controlador con horizonte N . De allí que la ley de control del MPC sea invariante en el tiempo y venga dada por $\kappa_{MPC}(\cdot) = \kappa_N(\cdot)$. Ahora bien, esta ley hace que la convergencia del controlador óptimo con horizonte finito se pierda, pues no hay reducción del horizonte, por lo que este controlador no garantiza que el sistema evolucione hacia el punto de equilibrio, ni siquiera que alcance la región terminal.

Naturalmente, esto último se debe a que ya no se aplica el principio de optimalidad de Bellman, es decir, al retroceder el horizonte ya no se optimiza sobre la cola del problema anterior, perdiéndose la factibilidad recursiva.

²En programación dinámica, el principio de optimalidad de Bellman dice: Dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez, óptima.

Supóngase que el problema tiene solución factible en el instante k , es decir, el estado actual pertenece al conjunto controlable a N pasos³, i.e., $x(k) \in \mathcal{S}_N(\Omega)$. Esto garantiza que el próximo estado $x(k+1)$ pertenecerá a $\mathcal{S}_{N-1}(\Omega)$ (pues de no mediar una perturbación, este estado será exactamente el predicho) pero no a $\mathcal{S}_N(\Omega)$, como requiere la estrategia de horizonte deslizante de MPC. De hecho, el conjunto $\mathcal{S}_N(\Omega)$ no tiene porqué estar contenido en $\mathcal{S}_{N-1}(\Omega)$, a menos que la región terminal Ω sea un invariante positivo o un invariante de control⁴, y de este modo puede ocurrir que, contrariamente a lo que indica la intuición, el estado $x(k+1)$ pueda llegar en $N-1$ pasos a Ω pero no en N .

Por lo tanto, se puede decir que a pesar de que MPC aplica en cada instante una actuación óptima - optimiza un cierto costo teniendo en cuenta las restricciones - esta actuación no garantiza ni la convergencia ni la factibilidad del sistema en lazo cerrado.

3.2. Estabilidad del MPC

Consideramos el sistema a lazo cerrado $x(k+1) = F(x(k), \kappa_{MPC}(x(k))) := F_c(x(k))$, donde $\kappa_{MPC}(\cdot)$ es la ley de control obtenida al resolver el problema $\mathcal{P}_N(\cdot)$. Debido a que esta ley es una función implícita del estado bien puede no ser continua, provocando que $F_c(\cdot)$ tampoco lo sea. Por esto se debe suponer que $F_c(\cdot)$ es localmente acotada⁵ (ver Apéndice B de [Rawlings and Mayne, 2009]).

3.2.0.1. Hipótesis para la existencia de soluciones MPC. Para la existencia de soluciones al problema $\mathcal{P}_N(x)$ se deben considerar algunas hipótesis básicas además de las mencionadas referentes a los conjuntos de restricciones:

HIPÓTESIS 1. (Continuidad del modelo de predicción y del costo)
Las funciones de costo final, $V_f(\cdot)$, costo de etapa, $\ell(\cdot)$ y modelo de predicción, $F(\cdot)$, se supondrán continuas y, además, valdrán cero en el origen.

³Puntos del espacio de estado que pueden ser llevados en N pasos y de forma admisible a la región terminal (la definición formal se presenta en el Capítulo 4).

⁴Este tipo de resultados se introducirá en el Capítulo 4.

⁵Una función $f: X \rightarrow X$ es localmente acotada si para todo $x \in X$ existe un entorno \mathcal{N} de x tal que $f(\mathcal{N})$ es un conjunto acotado, i.e., existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathcal{N}$.

HIPÓTESIS 2. (**Propiedad de las restricciones**) El conjunto final \mathcal{X} y $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ son cerrados y \mathcal{U} compacto. Cada uno de ellos contiene al origen en su interior.

HIPÓTESIS 3. (**Supuesto básico de estabilidad**)

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \{V_f(F(x, u)) + \ell(x, u) : F(x, u) \in \Omega\} \leq V_f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

HIPÓTESIS 4. (**Supuesto de invarianza**) El conjunto Ω es un invariante de control para el sistema $x(k+1) = F(x(k), u(k))$.

Bajo estas suposiciones, se tiene que ([Rawlings and Mayne, 2009]):

- (i) La función de costo $V_N(\cdot)$ es continua en $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$.
- (ii) Para cada $x \in \mathcal{X}_N$, existe una solución para $\mathcal{P}_N(x)$.

OBSERVACIÓN 9. Para el análisis básico de estabilidad que se dará a continuación, se considera que no existe error entre el modelo de predicción y el sistema dinámico que se quiere controlar, como se asume en la siguiente hipótesis. Cuando este no es el caso, se realiza un estudio robusto (ver Sección 3.3).

HIPÓTESIS 5. (**Modelo de predicción sin error**) Para todo tiempo $k \in \mathbb{I}$, en la realimentación del problema $\mathcal{P}_N(x_k)$ se considera que

$$F(x(k), \kappa_{MPC}(x(k))) = \varphi_1(x(k), \kappa_{MPC}(x(k))).$$

Ahora bien, bajo las hipótesis mencionadas, se puede presentar el siguiente Teorema, el cual determina las condiciones generales para la estabilidad de MPC [Rawlings and Mayne, 2009].

TEOREMA 2. (**Decrecimiento del costo óptimo**) Supóngase, como es usual, ciertas las Hipótesis 1, 2, 3, 4 y 5. Entonces

$$V^0(F_c(x(k))) \leq V^0(x) - \ell(x, \kappa_{MPC}(x)),$$

para todo $x \in \mathcal{X}_N$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede encontrarse en [Rawlings and Mayne, 2009, Lemma 2.14]. \square

El resultado del teorema anterior se mantiene si el conjunto de entradas \mathcal{U} es cerrado aunque no necesariamente acotado, y puede usarse, con suposiciones adecuadas en la función de costo de etapa $\ell(\cdot)$, para establecer la estabilidad

asintótica del origen. La propiedad de decrecimiento establecida en el teorema anterior puede establecerse también utilizando una propiedad de monotonía de la función de costo óptimo. Como muestra la siguiente propiedad.

PROPIEDAD 1. (**Monotonía del costo óptimo**) *Supóngase ciertas las Hipótesis 1, 2, 3, 4 y 5. Entonces*

$$(3.2.1) \quad V_{j+1}^0(x) \leq V_j^0(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

$$(3.2.2) \quad V_N^0(x) \leq V_f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede encontrarse en [Rawlings and Mayne, 2009, Lemma 2.15]. \square

La propiedad anterior también es cierta si \mathcal{U} es cerrado y no acotado. La propiedad de monotonía de la función de costo óptimo puede utilizarse para establecer el decrecimiento del costo propuesto en el Teorema 2 ([Rawlings and Mayne, 2009]).

3.2.0.2. *El costo óptimo es una función de Lyapunov.* El Teorema 2 muestra que la función de costo óptimo $V_N^0(\cdot)$ tiene la propiedad de decrecimiento que la convierte en la candidata adecuada para ser una función de Lyapunov (véase Definición 14 del Capítulo 2), con lo cual se puede utilizar para establecer la estabilidad del origen para una amplia variedad de sistemas MPC. Para continuar, se postula la siguiente condición en el costo de la etapa ℓ y el costo de la terminal V_f requeridos para demostrar que V_N^0 tiene las propiedades indicadas en la Definición 14 del Capítulo 2, que son suficientes para establecer estabilidad del origen. Nuestro supuesto adicional es:

HIPÓTESIS 6. (**Cotas para el costo de etapa y final**) *El costo de etapa $\ell(\cdot)$ y el costo final $V_f(\cdot)$ satisfacen*

$$\ell(x, u) \geq \alpha_1(|x|) \quad \forall x \in \mathcal{X}_N, \quad y \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

$$V_f(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in \Omega.$$

Con esta hipótesis extra se tiene la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 1. (**Función de Lyapunov en \mathcal{X}_N**) *Supóngase ciertas las Hipótesis 1, 2, 3, 4, 5 y 6, además Ω es acotado y contiene al origen en su interior. Entonces, existen funciones $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$, $i = 1, 2$, tal que $V_N^0(\cdot)$ tiene las*

siguientes propiedades

$$\begin{aligned} V_N^0(x) &\geq \alpha_1(|x|), \\ V_N^0(x) &\leq \alpha_2(|x|), \\ V_N^0(F_c(x)) &\leq V_N^0(x) - \alpha_1(|x|), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{X}_N$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba puede encontrarse en [Rawlings and Mayne, 2009, Proposición 2.19]. \square

Ahora, teniendo en cuenta el Teorema 1 del Capítulo 2, y la Proposición anterior, se tiene el siguiente corolario.

COROLARIO 1. *Supóngase ciertas las hipótesis requeridas en la Proposición 1. Luego, el origen es asintóticamente estable para el sistema a lazo cerrado $x(k+1) = F_c(x(k))$.*

3.3. Formulaciones de MPC robusto

La estabilidad de los controladores predictivos se garantiza bajo la Hipótesis 5, es decir que el modelo de predicción coincide con el sistema dinámico a controlar. Sin embargo, todo sistema tiene asociado un error con el modelo que representa su dinámica, como se mencionó en el Capítulo 2. Por ello, para que un controlador sea aplicable debe poseer ciertas características de robustez. En el caso en que no hubiese incertidumbres, si se aplica la secuencia de actuaciones obtenida en lazo abierto, el sistema evoluciona de una manera admisible hasta alcanzar el conjunto terminal. Sin embargo, las posibles discrepancias existentes entre el modelo de predicción y el sistema real, así como la presencia de perturbaciones, pueden hacer que su evolución viole las restricciones o bien que el controlador deje de ser factible o incluso que se pierda la convergencia del sistema en lazo cerrado.

El hecho de que el MPC se aplique mediante la estrategia de horizonte deslizante hace que la actuación sea recalculada en cada periodo de muestreo, lo que dota de realimentación al sistema y por lo tanto de cierta robustez. Sin embargo, el objetivo es garantizar, para cierto grado de incertidumbres⁶, la estabilidad, la

⁶ El grado de incertidumbre es proporcionado por el tamaño del conjunto de incertidumbres \mathcal{W} .

satisfacción de las restricciones y, de ser posible, alguna especificación sobre el desempeño.

3.3.1. Modelo de predicción incierto. Consideremos nuevamente el sistema presentado en la ecuación 2.3.5, pero ahora considerando la incertidumbre:

$$(3.3.1) \quad x(k+1) = F(x(k), u(k), w(k)), \quad x(0) = x_0,$$

donde $x(k) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema a tiempo k , x_0 es el estado inicial, $u(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ es la entrada de control y $w(k) \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$ es una incertidumbre desconocida pero acotada, la cual considera la diferencia entre el modelo de predicción y el sistema real. Suponemos que el conjunto \mathcal{X} es cerrado, el conjunto \mathcal{U} compacto y ambos contienen al origen en su interior. Además, asumimos que \mathcal{W} es compacto y convexo y también contiene al origen en su interior. La función $F : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ es continua en $\mathcal{Z} := \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ y $F(0, 0, 0) = 0$.

OBSERVACIÓN 10. *Para una formulación robusta, la garantía de Convergencia-Estabilidad-Factibilidad proviene de la hipótesis de compacidad del conjunto de incertidumbre \mathcal{W} . En cambio, en análisis probabilístico o estocástico, este conjunto no es necesariamente debe ser acotado (ver [Kofman et al., 2012]), debido a que las garantías se dan con cierta probabilidad.*

El conjunto \mathcal{W} puede abarcar desde incertidumbres en el modelo de predicción, es decir diferencia con el sistema real; hasta posibles perturbaciones que entran al sistema (*procesos estocásticos*). En este último caso suele conocerse su naturaleza, i.e. su media, varianza y distribución de probabilidad.

En lo que sigue se asume la siguiente hipótesis.

HIPÓTESIS 7. *En lo que sigue, se asume que el sistema real está contenido en la familia de modelos de predicción determinada por el conjunto de incertidumbre \mathcal{W} , i.e.*

$$\varphi_1(x, u) \in \{F(x, u, w) : w \in \mathcal{W}\},$$

para todo estado $x \in \mathcal{X}$ y entrada $u \in \mathcal{U}$.

Controlar el modelo con incertidumbre 3.3.1, requiere una estrategia que asegure estabilidad y factibilidad para toda incertidumbre dentro del conjunto \mathcal{W} . Para esto, existen varias formulaciones de MPC robusto ([Mayne, 2016, Mayne

et al., 2005, Goulart et al., 2006a, Goulart et al., 2006b, Limon et al., 2008, Raimondo et al., 2009, Langson et al., 2004, Chisci et al., 2001]).

En esta sección se analizará el método de *Optimización por método min-max* ([Rawlings and Mayne, 2009]), el cual será utilizado en el MPC propuesto en el Capítulo 6. Ya en el Capítulo 8, se propondrá la estrategia *MPC basado en tubos determinísticos* ([Mayne et al., 2005]).

A continuación se presenta la formulación min-max.

3.3.2. Formulación min-max. Dado un horizonte fijo $N \in \mathbb{N}$, y un conjunto compacto y convexo $\Omega \subseteq X$ que contiene al origen en su interior, se propone el siguiente costo

$$(3.3.2) \quad V_N(x; \mathbf{u}) := \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N} \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x(j), u(j)) + V_f(x(N)),$$

donde $x = x(0)$ es el estado actual; $x(j)$ son las predicciones de estado para $j \in \mathbb{I}_{N-1}$; $\mathbf{u} := \{u(0), \dots, u(N-1)\}$ es una secuencia de controles; y $\mathbf{w} := \{w(0), \dots, w(N-1)\}$ es una secuencia de perturbaciones o incertidumbres tal que $w(j) \in \mathcal{W}$ para $j \in \mathbb{I}_{N-1}$. Además, la función de costo de etapa $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ y la función de costo terminal $V_f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ son ambas definidas positivas y valen cero en un conjunto $\Omega \subset \mathcal{X}$ ⁷.

Sea

$$\mathcal{X}_N = \{x(0) \in \mathcal{X} : x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{I}_{N-1} \text{ y } x(N) \in \Omega, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}^N\},$$

la región factible inicial o dominio de atracción para el horizonte N .

Para cada $x \in \mathcal{X}_N$ se denota por $\mathcal{U}_N(x)$ al conjunto de secuencias de control, \mathbf{u} , que satisfacen las restricciones de estado y entradas ($x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}$ con $j \in \mathbb{I}_{N-1}$), junto con la restricción terminal $x(N) \in \Omega$, para cualquier secuencia de perturbaciones posible $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N$, donde el estado inicial viene dado por x . En cada instante de tiempo k , la ley de control del MPC robusto es derivada de la solución del siguiente problema de optimización

$$\mathcal{P}_N(x, \Omega) : V^0(x, \Omega) := \min\{V_N(x, \Omega; \mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{U}_N(x)\}$$

donde Ω y el estado inicial $x \in \mathcal{X}$ son los parámetros de optimización y la secuencia \mathbf{u} es la variable de optimización.

⁷Más adelante se darán las condiciones que debe cumplir el conjunto Ω para asegurar la estabilidad del MPC.

Asociada a la secuencia óptima de control

$$\mathbf{u}^0(x) := \{u^0(0; x), u^0(1; x), \dots, u^0(N-1; x)\}$$

existe un haz de trayectorias óptimas de estados posibles $\{\mathbf{x}^0(x, \mathbf{w})\}$, donde cada trayectoria se corresponde con una secuencia de perturbaciones $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N$:

$$x^0(x, \mathbf{w}) := \{x^0(0; x, \mathbf{w}), x^0(1; x, \mathbf{w}), \dots, x^0(N; x, \mathbf{w})\} \in \{\mathbf{x}^0(x, \mathbf{w})\}.$$

Por la definición de $\mathcal{P}_N(x, \Omega)$, $x^0(N; x, \mathbf{w}) \in \Omega$ para cada secuencia \mathbf{w} admisible. La ley de control, derivada de la aplicación de la regla de horizonte deslizante de control esta dada por $\kappa_{MPC}(x) = u^0(0; x)$, donde $u^0(0; x)$ es el primer elemento de la secuencia óptima $\mathbf{u}^0(x)$.

De esta forma, la función de costo óptimo definida como

$$(3.3.3) \quad V_N^0(x, \Omega) = V_N(x, \Omega, \mathbf{u}^0(x)),$$

es una función de Lyapunov ([Rawlings and Mayne, 2009]).

3.4. MPC para seguimiento

La estrategia de MPC para seguimiento, o MPCT según sus siglas en inglés (*MPC for tracking*), tiene como propósito resolver dos problemas principales del MPC. El primer objetivo es solucionar la pérdida de factibilidad del controlador cuando hay cambios en el punto de referencia (o setpoint), lo cual suele ser una situación usual en MPC económico donde el punto de referencia proviene de exigencias de mercado. El segundo es extender el dominio de atracción del controlador, lo cual, como se explicó en la Sección 3.1.5, suele ser de gran beneficio.

La importancia de introducir la noción básica de MPCT en esta sección se debe a que, más adelante en el Capítulo 7, se presenta un MPC para seguimiento que extiende el dominio de atracción del controlador al máximo dominio que el sistema permite, para cualquier horizonte de predicción $N \in \mathbb{N}$.

3.4.1. Marco teórico. La mayoría de los resultados sobre MPC, consideran el problema de regulación, es decir el problema de llevar el sistema al punto de equilibrio deseado, en general al origen. Está claro que para una referencia distinta de cero, se puede hacer un cambio de coordenadas de forma que el único punto de equilibrio sea el origen ([Muske and Rawlings, 1993]). Sin embargo, la elección de un costo terminal y de restricciones depende del estado

de equilibrio deseado; así un cambio de referencia necesita un nuevo diseño del controlador. Este enfoque no es factible por la elevada cantidad de cálculo que se necesita.

Existen algunos resultados para resolver el problema de seguimiento (o tracking) de sistemas lineales. Un primer enfoque notable es el control de referencia (*reference governor*) ([Gilbert et al., 1994]), donde se añade un filtro no lineal de la referencia para garantizar la evolución admisible del sistema. Esto es como añadir una referencia artificial (la salida del filtro). En [Limon et al., 2008] se propone un diseño de MPCT sin offset de una secuencia admisible de referencias. En [Bemporad et al., 1997] se diseña un control de referencia para minimizar un índice de prestaciones de la evolución predicha del sistema. En [Blanchini and Miani, 2000] se prueba que cualquier conjunto invariante para el sistema sujeto a restricciones es un dominio de atracción para el seguimiento y se propone una ley de control basada en interpolaciones. En [Rossiter and Kouvaritakis, 1998] y [Bemporad et al., 1997] se muestra que existen semejanzas entre controladores predictivos y *reference governor*: los dos calculan una acción de control para que las restricciones sean satisfechas y se garantice convergencia a la referencia. La principal diferencia es la manera de considerar esta acción de control. En [Chisci et al., 2003] se presenta una estrategia de controlador dual basada en MPC: si el MPC no es factible, el controlador cambia a un modo de recuperación de factibilidad, que conduce el sistema a la región de factibilidad del MPC.

3.4.2. Introducción. En ese capítulo se presenta la formulación de MPC para seguimiento de cualquier referencia. El controlador permite alcanzar cualquier punto de equilibrio admisible, y si no lo es, el sistema alcanza el punto admisible más cercano. Esta estrategia extiende el dominio de atracción de controlador y, además, soluciona el problema de pérdida de factibilidad frente a cambios en los puntos de referencia ([Alvarado, 2007, Ferramosca et al., 2009a, Ferramosca et al., 2011, Limon et al., 2008]). El método rastrea cualquier punto admisible, por medio de evoluciones admisibles, con los siguientes ingredientes principales: (i) un punto de referencia artificial en el conjunto de estados de equilibrio, \mathcal{X}_s , agregado como variable de decisión, (ii) un costo de etapa que minimiza la desviación del valor predicho de la trayectoria a este estado artificial, y (iii) un costo adicional, una función de costo de compensación,

que penaliza la desviación entre el punto de referencia artificial y el punto de referencia real.

En la Figura 2 (tomada de [Ferramosca, 2011]) se ilustra la pérdida de factibilidad bajo un cambio de setpoint, en un MPC convencional. Considérese el estado inicial x_0 y el setpoint r_1 . Se tiene la restricción terminal $x(N) \in O_\infty(r_1)$ y un MPC con horizonte $N = 3$. El dominio de atracción del controlador está dado por el conjunto controlable en tres pasos a r_1 , $X_3(r_1)$. Supongamos que el setpoint cambia a r_2 para un cierto tiempo de muestreo. Se necesita cambiar la restricción final a $O_\infty(r_2)$ y el dominio de atracción en este caso sería $X_3(r_2)$. Debido a que x_0 no está en $X_3(r_2)$, el MPC con este horizonte es infactible. Para recuperar la factibilidad, el horizonte debería extenderse a $N = 6$, como puede verse en la gráfica.

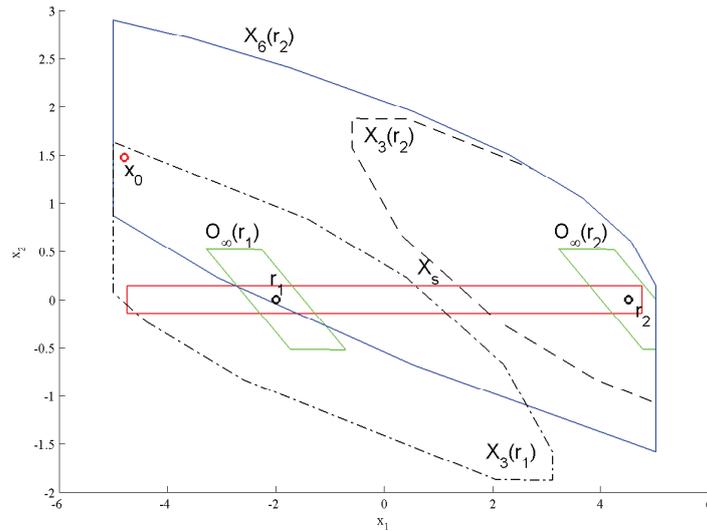


FIGURA 2. Pérdida de factibilidad del problema de optimización derivado de una condición terminal no admisible para el horizonte de predicción dado.

3.4.3. Modelo de predicción. En la literatura referente a MPCT suele considerarse el modelo de predicción descrito por el siguiente modelo lineal discreto invariante en el tiempo (aunque los resultados son aplicables también a

sistemas no lineales)

$$(3.4.1) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

donde $x(k) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema en el momento k y $u(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ es el control en el momento i , donde \mathcal{X} y \mathcal{U} son conjuntos compactos, convexos que contienen el origen. Como de costumbre, asumiremos que el par (A, B) es controlable, y el estado se mide en cada tiempo de muestreo.

El conjunto de estados y entradas de equilibrio del sistema (3.4.1) viene dado por

$$\mathcal{Z}_s := \{(x_s, u_s) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U} : x_s = Ax_s + Bu_s\}.$$

Por lo tanto, el estado de equilibrio y los conjuntos de entrada de equilibrio se definen como

$$\mathcal{X}_s := \text{proj}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}_s \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_s := \text{proj}_{\mathcal{U}} \mathcal{Z}_s.$$

3.4.4. Función costo. La función de costo en el MPCT tiene dos términos. El primero penaliza el error entre las trayectorias de estado y entrada predichas y unas variables artificiales, de equilibrio, dadas por x_s y u_s , respectivamente. El segundo, denominado costo de *offset* o compensación, $V_O(x_s, x^*)$, penaliza la desviación de la variable de estado artificial, x_s , respecto del punto de referencia deseado x^* , o *setpoint*.

Formalmente, función de costo está dada por:

$$(3.4.2) \quad V_N(x, x^*; \mathbf{u}, x_s, u_s) = \sum_{j=0}^{N-1} \|x(j) - x_s\|_Q^2 + \|u(j) - u_s\|_R^2 + V_O(x_s, x^*),$$

donde \mathbf{u} es, como antes, la secuencia de N controles futuros, i.e. $\mathbf{u} = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$, $x(j)$ es la predicción de los estados del sistema al tiempo k dado por $x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$, con $x(0) = x$. La función de costo de offset debe ser una función convexa y definida positiva (ver [Limon et al., 2018]). En nuestro caso, por simplicidad, lo consideraremos como una forma cuadrática $V_O(x_s, x^*) = \|x_s - x^*\|_T^2$.

En el caso de restricción terminal de igualdad, el problema de optimización MPCT, en el instante k ; $\mathcal{P}_N^T(x, x^*)$, está dado por

$$(3.4.3) \quad \min_{\mathbf{u}, x_s, u_s} V_N(x, x^*; \mathbf{u}, x_s, u_s)$$

$$(3.4.4) \quad \text{s.a.} \quad x(0) = x,$$

$$(3.4.5) \quad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j \in I_{0:N-1},$$

$$(3.4.6) \quad x(j) \in \mathcal{X}, \quad u(j) \in \mathcal{U}, \quad j \in I_{0:N-1},$$

$$(3.4.7) \quad (x_s, u_s) \in \mathcal{Z}_s,$$

$$(3.4.8) \quad x(N) = x_s.$$

Las restricciones (3.4.4)–(3.4.6) fuerzan a la trayectoria predicha a ser consistente con las ecuaciones del modelo dinámico. La restricción (3.4.7) asegura que la variable artificial (x_s, u_s) es un punto de equilibrio admisible. La restricción terminal de igualdad (3.4.8) obliga al estado terminal a alcanzar la variable artificial. Estas restricciones aseguran la factibilidad recursiva, la estabilidad y aumentan el dominio de atracción evitando la pérdida de factibilidad en presencia de cambios en el punto de referencia. Para una prueba de estos resultados, véase [Limon et al., 2008].

3.5. MPC por zona

Una primera aproximación al MPC basado en conjuntos - en el cual se basan las propuestas de MPC de esta Tesis - es lo que se conoce como MPC por zona ([Ferramosca et al., 2010b, Ferramosca et al., 2009b]).

Básicamente, el MPC por zona es un MPCT donde el objetivo de control ya no es un punto de referencia, o punto de equilibrio, sino un conjunto de equilibrio $\mathcal{X}_s^{tar} \subset \mathcal{X}_s$. De esta forma, la función de costo de offset del MPCT, $V_O(x_s, x^*)$, se reemplaza por una función que penaliza la distancia de las variables de equilibrio artificiales al conjunto \mathcal{X}_s^{tar} . Es decir, se considera el costo de offset como $V_O(x_s, x^*) := d_{\mathcal{X}_s^{tar}}(x_s)$, donde la función d es una distancia que puede ser considerada de distintas maneras, según como se desea que el sistema se aproxime al conjunto target \mathcal{X}_s^{tar} .

Conjuntos Invariantes en Control

En este capítulo se presentan los conceptos de conjuntos controlables, invariantes, invariantes robustos e invariantes probabilísticos, y se analiza el papel fundamental que dichos conjuntos juegan en el ámbito del control de sistemas con restricciones.

4.1. Introducción

Un problema fundamental en la caracterización de sistemas de control perturbados es el de determinar un subconjunto en el espacio de estados tal, que si el sistema parte de cualquier estado de ese subconjunto, entonces puede alcanzar un dado objetivo (que puede ser, a su vez, otro conjunto) por medio de una secuencia de controles admisibles y siguiendo trayectorias factibles, para todas las posibles secuencias de perturbaciones (realizaciones).

El problema general de guiar un sistema a un conjunto objetivo en presencia de perturbaciones y restricciones en las entradas se consideró relativamente temprano en la literatura de control moderno. En [**Delfour and S.K.Mitter, 1969**], donde el conjunto objetivo se denomina "fuertemente alcanzable" si existe una secuencia de controles admisibles que permita alcanzarlo en forma factible y robusta, se proporcionan ya resultados preliminares, muy generales, que ayudan a su caracterización. En [**Bertsekas and Rhodes, 1971**] se analiza el mismo problema, para sistemas no lineales variantes en el tiempo. Resultados similares pueden encontrarse en [**Glover and Schweppe, 1971**], donde además son aplicados a una síntesis de controladores para sistemas lineales variantes en el tiempo y con restricciones variantes en el tiempo.

Más cerca en el tiempo, [**Blanchini, 1994**] presenta un detallado y completo estudio de la alcanzabilidad de objetivos tipo conjunto. Se trabaja allí el concepto de conjuntos contractivos para sistemas LTI, cuando la incertidumbre de estado está acotada en conjuntos politópicos. Una discusión rigurosa sobre sistemas LTI

(Lineal Time Invariant) en lazo cerrado con una ley de retroalimentación lineal y perturbaciones de estado acotadas puede encontrarse en [Kolmanovsky and Gilbert, 1998], donde se extienden los resultados presentados en [Gilbert and Tan, 1991], de modo de proponer algoritmos de cómputo (de los conjuntos) más sencillos y prácticos. Un estudio más completo, referido ya al uso general de conjuntos invariantes en control, se presenta en [Blanchini, 1999]. Este capítulo no intenta duplicar discusiones ya resueltas, sino que apunta a amalgamar parte de la generalidad de los primeros trabajos con nuevas ideas, notación y terminología.

A menos que se aclare lo contrario, en este capítulo se asumirá el siguiente sistema dinámico discreto e invariante en el tiempo (ya presentado en 2.3.5, y repetido aquí por simplicidad)

$$(4.1.1) \quad x(k+1) = F(x(k), u(k), w(k)), \quad x(0) = x_0,$$

donde $x(k)$ es el estado del sistema a tiempo k , x_0 es el estado inicial, $u(k)$ es la entrada de control, y además

$$w(k) \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p,$$

es la perturbación en el tiempo presente. Las restricciones de estado y entrada vienen dadas por

$$(4.1.2) \quad x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$(4.1.3) \quad u(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m,$$

suponemos que el conjunto \mathcal{X} es cerrado, el conjunto \mathcal{U} compacto y ambos contienen al origen en su interior, y que \mathcal{W} es compacto y convexo y también contiene al origen en su interior. La función $F : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}$ es continua en $\mathcal{Z} := \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ y $F(0, 0, 0) = 0$.

El sistema autónomo asociado a (4.1.1) (es decir, sin la variable de control) se denotará simplemente por $x(k+1) = F(x(k), w(k))$ y el sistema nominal asociado a (4.1.1) (es decir, sin perturbaciones) se describirá como

$x(k+1) = F(x(k), u(k))$ ¹. En adelante, se denotarán como *nominales* los conjuntos relacionados a este último sistema, y como *robustos*, los relacionados al sistema (4.1.1).

4.2. Conjuntos controlables y alcanzables

Existen dos conjuntos en particular que son usados a través del análisis de controlabilidad y alcanzabilidad de sistemas.

4.2.1. Conjunto controlable. El primer conjunto que presentamos es el *conjunto controlable robusto a un paso*.

DEFINICIÓN 16. (**Conjunto controlable robusto a un paso**) Dado los conjuntos $\Omega \subset \mathcal{X}$ y $\Psi \subseteq \mathcal{U}$, el conjunto controlable robusto a un paso a Ω correspondiente a Ψ , $S(\Omega, \Psi)$, es el conjunto de todos los estados $x \in \mathcal{X}$ para los cuales existe $u \in \Psi$ tal que $F(x, u, w) \in \Omega$, para todo $w \in \mathcal{W}$, i.e.,

$$S(\Omega, \Psi) := \{x \in \mathcal{X} : \exists u \in \Psi \text{ tal que } F(x, u, w) \in \Omega, \forall w \in \mathcal{W}\}.$$

En otras palabras, $S(\Omega, \Psi)$ es el conjunto de estados en \mathcal{X} para los cuales existe una entrada de control admisible, en el conjunto Ψ , que garantiza que el sistema llega en un paso al conjunto Ω , independientemente del efecto de la perturbación.

PROPOSICIÓN 2. Dado dos conjuntos cualquiera Ω_1 y Ω_2 en \mathcal{X} , entonces

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow S(\Omega_1, \Psi) \subseteq S(\Omega_2, \Psi),$$

para cualquier $\Psi \subseteq \mathcal{U}$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba es análoga a la dada en [Blanchini, 1999], considerando $\Psi = \mathcal{U}$. \square

PROPOSICIÓN 3. Si Ω es la unión

$$\Omega := \bigcup_{i \in I} \Omega_i,$$

¹Debe entenderse que la función F se utiliza para describir diferentes sistemas (autónomos, de control, con o sin perturbaciones) por lo cual no es la misma para cada caso, sin embargo se usa la misma función para mayor claridad.

entonces

$$S(\Omega, \Psi) := \bigcup_{i \in I} S(\Omega_i, \Psi),$$

para cualquier $\Psi \subseteq \mathcal{U}$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba puede encontrarse en [Kerrigan, 2000], nuevamente considerando $\Psi = \mathcal{U}$. \square

4.2.2. Conjunto controlable en i -pasos. Definimos el conjunto controlable robusto en i -pasos.

DEFINICIÓN 17 (**Conjunto controlable robusto en i -pasos**). Dado $i \in \mathbb{N}$ y los dos conjuntos $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ y $\Psi \subseteq \mathcal{U}$, el Conjunto Controlable en i -pasos a Ω correspondiente al conjunto de entradas Ψ , para el sistema (7.1.1), esta dado por

$$S_i(\Omega, \Psi) := \{x(0) \in \mathcal{X} : \forall j \in I_{i-1}, \exists u(j) \in \Psi \text{ tal que} \\ x(j+1) \in \mathcal{X} \text{ y } x(i) \in \Omega, w(k) \in \mathcal{W}\}.$$

Por conveniencia, definimos $S_0(\Omega, \Psi) := \Omega$ y $S_\infty(\Omega, \Psi) := \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i(\Omega, \Psi)$, i.e., S_∞ es el conjunto de estados admisibles que pueden llevarse al conjunto Ω utilizando una secuencia infinita de controles en Ψ . Además, $S_1(\Omega, \Psi) := S(\Omega, \Psi)$, donde $S(\Omega, \Psi)$ es el conjunto controlable a un paso de la Definición 16.

El siguiente enunciado establece la cerradura de los conjuntos controlables $S_i(\Omega, \Psi)$ cuando el conjunto Ω es cerrado.

PROPIEDAD 2. ([Blanchini and Miani, 2008]) Sea $\Omega \subset \mathcal{X}$ un conjunto cerrado y $\Psi \subseteq \mathcal{U}$ compacto. Luego, $S_i(\Omega, \Psi)$ es cerrado para todo $i \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una sucesión $\{x(k)\}_{k \in \mathbb{I}_{\geq 0}} \subset S(\Omega, \Psi)$ convergente, con límite igual a \bar{x} . Probar la cerradura de $S(\Omega, \Psi)$ es equivalente a mostrar que $\bar{x} \in S(\Omega, \Psi)$. Para demostrar esto, observemos que por la mera definición de $S(\Omega, \Psi)$, existe una sucesión $\{u(k)\} \subset \Psi$ tal que

$$(4.2.1) \quad F(x(k), u(k), w(k)) \in \Omega, \forall w(k) \in \mathcal{W}, k \in \mathbb{N}.$$

Por la compacidad de Ψ , la sucesión $\{u(k)\}$ admite una subsucesión $\{u'(k)\} \subset \Psi$ la cual converge a $\bar{u} \in \Psi$. Consideremos la secuencia $\{x'(k)\} \subset S(\Omega, \Psi)$ que se corresponde con $\{u'(k)\}$. Claramente $x'(k) \rightarrow \bar{x}$.

Por lo tanto, dado que $x'(k) \rightarrow \bar{x}$, y $u'(k) \rightarrow \bar{u}$, por la continuidad de F tenemos que

$$F(x'(k), u'(k), w(k)) \rightarrow F(\bar{x}, \bar{u}, w(k)), \forall w(k) \in \mathcal{W}$$

Dado que la secuencia $\{F(x'(k), u'(k), w(k))\}$ está contenida en el conjunto cerrado Ω , entonces $F(\bar{x}, \bar{u}, w(k))$ también está en Ω para todo $w(k) \in \mathcal{W}$. Esto significa que $\bar{x} \in S(\Omega, \Psi)$, que es lo que queríamos demostrar. El hecho de que $S_i(\Omega, \Psi)$ es cerrado para todo $i \in \mathbb{N}$ se sigue por inducción. \square

4.2.3. Conjunto alcanzable. El próximo conjunto que introducimos es el conjunto alcanzable.

DEFINICIÓN 18. (*Conjunto alcanzable robusto*) El conjunto $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ es el conjunto de todos los estados en \mathcal{X} a los cuales el sistema evolucionará, en la siguiente paso, dado un estado $x(k) \in \Omega$, una entrada de control admisible y una perturbación posible, i.e.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega) := \{x(k+1) \in \mathcal{X} : \exists x(k) \in \Omega, u \in \mathcal{U}, w \in \mathcal{W} \text{ tal que} \\ x(k+1) = F(x(k), u, w)\}. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 11. Si no hay perturbaciones presentes en el modelo, entonces se tiene lo siguiente

$$\mathcal{S}(\Omega, \Psi) := \{x \in \mathcal{X} : \exists u \in \Psi \text{ tal que } F(x, u) \in \Omega\},$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Omega) := \{x(k+1) \in \mathcal{X} : \exists x(k) \in \Omega, u \in \mathcal{U}, \text{ tal que} \\ x(k+1) = F(x(k), u)\}. \end{aligned}$$

El conjunto alcanzable robusto no siempre tiene un uso práctico. El conjunto alcanzable para el sistema nominal, o el conjunto alcanzable para un sistema de lazo cerrado, i.e. $u = h(x)$, suelen ser más usados ([Kerrigan, 2000]).

4.3. Conjuntos invariantes positivos

Dado un conjunto Ω y un estado inicial $x_0 \in \Omega$, es interesante determinar si la evolución del sistema autónomo permanecerá dentro del conjunto para todo tiempo positivo, a pesar de la presencia de perturbaciones.

DEFINICIÓN 19. (**Invariante positivo robusto**) El conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es un invariante positivo robusto para el sistema $x(k+1) = F(x(k), w(k))$ si y sólo si para todo $x(0) \in \Omega$ y $w(k) \in \mathcal{W}$, la evolución del sistema satisface $x(k) \in \Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, Ω es un conjunto invariante positivo robusto si y solo si

$$x(k) \in \Omega \Rightarrow x(k+1) \in \Omega, \forall w(k) \in \mathcal{W}.$$

Debido a que el tiempo en los sistemas dinámicos considerados en la tesis se extiende hacia el futuro, i.e. sólo se estudian sistemas dinámicos irreversibles, el término *positivo* puede eliminarse en la definición anterior.

El siguiente resultado se sigue inmediatamente de la definición.

PROPOSICIÓN 4. La unión de dos conjuntos invariantes robustos es también un conjunto invariante robusto

El conjunto de restricciones de estado, \mathcal{X} , no necesariamente es un invariante robusto. Sin embargo, con frecuencia resulta de interés determinar el máximo invariante robusto contenido en \mathcal{X} .

DEFINICIÓN 20. (**Máximo invariante robusto**) El conjunto $\tilde{\mathcal{O}}(\mathcal{X})$ es el máximo invariante robusto para el sistema $x(k+1) = F(x(k), w(k))$ si y sólo si $\tilde{\mathcal{O}}(\mathcal{X})$ es un invariante robusto y contiene a todos los invariantes robustos contenidos en \mathcal{X} .

OBSERVACIÓN 12. Puede demostrarse que el máximo invariante robusto es único ([Kerrigan, 2000]).

4.3.1. Conjuntos invariantes contractivos. En la siguiente definición se introducirá el concepto de conjunto invariante contractivo, que será de gran utilidad en el análisis de estabilidad de los controladores propuestos en capítulos posteriores.

DEFINICIÓN 21. (**γ -Invariante robusto**) Dada la constante $\gamma \in (0, 1]$ y el conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$, que contiene al origen en su interior, decimos que Ω es un γ -invariante robusto para el sistema $x(k+1) = F(x(k), w(k))$ si y sólo si para todo $x(0) \in \Omega$ y $w(k) \in \mathcal{W}$ la evolución del sistema satisface $x(k) \in \gamma\Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

La constante γ da cuenta de la contractividad del conjunto para el sistema $x(k+1) = F(x(k), w(k))$, debido a que si $\gamma < 1$ y Ω contiene al origen en su interior, entonces $\gamma\Omega \subset \text{int } \Omega$. Si $\gamma = 1$ se recupera la definición de invariante robusto.

4.4. Conjuntos invariantes de control

De manera similar a lo hecho con los conjuntos invariantes robustos, es importante determinar si, dado un conjunto Ω y un estado inicial $x(0) \in \Omega$, es posible encontrar una secuencia de controles admisibles tal que la evolución del sistema permanezca en Ω para todo el tiempo siguiente, a pesar de las perturbaciones.

DEFINICIÓN 22. (*Invariante robusto de control*) *El conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es un invariante robusto de control para el sistema $x(k+1) = F(x(k), u(k), w(k))$, si para todo $x \in \Omega$ existe una entrada $u \in \mathcal{U}$ tal que $F(x, u, w) \in \Omega$, para todo $w \in \mathcal{W}$.*

Algo interesante de considerar - lo cual no se ha hecho en la bibliografía existente - es el conjunto de entradas admisibles que hacen a Ω invariante de control. Es decir, podemos definir el conjunto de entradas correspondientes a Ω como:

DEFINICIÓN 23. (*Conjuntos de entradas correspondientes al invariante*) *Sea Ω un invariante robusto de control. Asociado a Ω está el conjunto de entradas correspondiente $\Psi(\Omega) \subseteq \mathcal{U}$, definido como*

$$\Psi(\Omega) := \{u \in \mathcal{U} : \exists x \in \Omega \text{ tal que } F(x, u, w) \in \Omega, \forall w \in \mathcal{W}\}.$$

Este conjunto $\Psi(\Omega)$ es tal que, una vez que el sistema alcanza Ω , siempre existe una entrada de control en él, que es capaz de dejar al sistema en Ω , independientemente del efecto de la perturbación.

OBSERVACIÓN 13. *La importancia de la Definición 23 se verá más adelante en la Tesis, cuando se definan las funciones de costo del problema de control predictivo (Capítulos 6, 7 y 8). Allí, se penalizará la distancia de las trayectorias de estado predichas a Ω , como así también la distancia de las secuencias de control predichas a $\Psi(\Omega)$, para obtener una formulación del tipo MPC basado en conjuntos.*

PROPOSICIÓN 5. *Sea Ω un invariante robusto de control para el sistema $x(k+1) = F(x(k), u(k), w(k))$, entonces*

$$(4.4.1) \quad \Omega \subseteq S(\Omega, \Psi(\Omega)),$$

donde S es el conjunto controlable a un paso de la Definición 16. Además, $S(\Omega, \Psi(\Omega))$ es un invariante robusto de control para el mismo sistema.

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede encontrarse en [Doréa and Hennet, 1999]. De hecho, en este se demuestra $\Omega \subseteq S(\Omega, \mathcal{U})$, aunque para ello utiliza solamente las entradas de control que están en $\Psi(\Omega)$, lo cuál prueba 4.4.2. La prueba de que $S(\Omega, \Psi(\Omega))$ es un invariante de control también puede encontrarse en [Doréa and Hennet, 1999]. \square

4.4.1. γ -Invariantes de control. Al igual que con los invariantes robustos, definiremos los conjuntos invariantes de control.

DEFINICIÓN 24. (*γ -Invariante robusto de control*) Sea $\gamma \in (0, 1]$ y $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ tal que contenga al origen en su interior. Decimos que Ω es γ -invariante robusto de control para el sistema $x(k+1) = F(x(k), u(k), w(k))$ si para todo $x \in \Omega$ existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $F(x, u, w) \in \gamma\Omega$, para todo $w \in \mathcal{W}$.

Nuevamente las entradas correspondiente se definen como.

DEFINICIÓN 25. (*Conjuntos de entradas correspondientes al invariante*) Sea Ω un γ -invariante robusto de control. Asociado a Ω está el conjunto de entradas correspondiente $\Psi(\Omega) \subseteq \mathcal{U}$, definido como

$$\Psi(\Omega) := \{u \in \mathcal{U} : \exists x \in \Omega \text{ tal que } F(x, u, w) \in \gamma\Omega, \forall w \in \mathcal{W}\}.$$

PROPOSICIÓN 6. *Sea Ω un γ -invariante robusto de control para el sistema $x(k+1) = F(x(k), u(k), w(k))$ con $\gamma \in (0, 1)$, entonces*

$$(4.4.2) \quad \Omega \subseteq S(\Omega, \Psi(\Omega)),$$

DEMOSTRACIÓN. Todo γ -invariante con $\gamma > 0$ es a la vez invariante. Luego, de la Proposición 5 sale el resultado. \square

La ventaja de los γ -invariantes sobre los conjuntos invariantes definidos anteriormente se debe al hecho de que para el caso $\gamma < 1$, estos conjuntos se

consideran contractivos, en el sentido de que el sistema evoluciona hacia el interior del conjunto. Más adelante, en el Capítulo 5, se propondrá una nueva clase de conjuntos invariantes de control contractivos y varias propiedades de interés.

4.5. Conjuntos invariantes probabilísticos

La noción de conjuntos invariantes ha demostrado ser un concepto importantes en el análisis del comportamiento de los sistemas dinámicos, así como una herramientas muy útil para el diseño de sistemas de control. El detalle más importante para asegurar la existencia y compacidad de estos conjuntos, en su versión robusta, es que las perturbaciones que afectan al sistema deben ser consideradas acotadas. Esto representa una desventaja en el caso de que no se conozcan los límites reales de la perturbación y, además, impide un análisis teórico más profundo cuando se consideran perturbaciones generales, como ser las modeladas por la ubicua distribución Gaussiana.

Por esto, en [Kofman et al., 2012] se presenta el concepto de conjunto invariante probabilístico, es decir, un conjunto en el cual los estados futuros del sistema permanecerán sólo con cierta probabilidad. Estos conjuntos amplían los conceptos de conjuntos invariantes robustos clásicos y, aprovechando el conocimiento de las características estocásticas de las señales (su distribución), permite obtener conjuntos mucho menos conservadores.

Para el estudio de estos conjuntos se asume el siguiente sistema dinámico lineal, discreto e invariante en el tiempo

$$(4.5.1) \quad x(k+1) = Ax(k) + Dw(k), \quad x(0) = x_0,$$

donde $x(k)$ es el estado del sistema a tiempo k , x_0 es el estado inicial y $w(k)$ debe ser entendida como una señal de perturbación aditiva, que proviene de un proceso estocástico. Vamos a considerar también que esta perturbación es una señal de excitación persistente según la Definición 15 del Capítulo 2, de forma que conocemos su distribución de probabilidad. Además,

$$(4.5.2) \quad x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$(4.5.3) \quad w(k) \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m,$$

donde suponemos que el conjunto \mathcal{X} es cerrado, el conjunto \mathcal{W} es compacto y ambos contiene al origen en su interior.

A continuación se presenta el concepto de invarianza probabilística.

DEFINICIÓN 26. (*Conjunto Invariante Probabilístico [Kofman et al., 2012]*) Sea $p \in (0, 1]$. Un conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es un conjunto invariante probabilístico con probabilidad p para el sistema (4.5.1), si y sólo si $\Pr[x(k) \in \Omega \mid x(0) \in \Omega] \geq p$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

El concepto anterior nos dice que si partimos de un estado inicial dentro del conjunto Ω , entonces la probabilidad de que cualquier estado siguiente se mantenga adentro es mayor a p .

Consideremos los siguientes resultados, cuya demostraciones pueden encontrarse en [Kofman et al., 2012].

LEMA 1. Sea $\{\Omega_i\}_{i=1}^r$ una colección de conjuntos invariantes probabilísticos para el sistema (4.5.1) con probabilidad p_i , para $i = 1, \dots, r$, respectivamente, de forma que $\sum_{i=1}^r p_i > (r - 1)$. Luego, el conjunto $\Omega = \bigcap_{i=1}^r \Omega_i$ es un invariante probabilístico con probabilidad $p = \sum_{i=1}^r p_i - (r - 1)$.

LEMA 2. Sea $\{\Omega_i\}_{i=1}^r$ una colección de conjuntos invariantes probabilísticos para el sistema (4.5.1) con probabilidad p_i , para $i = 1, \dots, r$, respectivamente. Luego, el conjunto $\Omega = \bigcup_{i=1}^r \Omega_i$ es un invariante probabilístico con probabilidad $p = \min\{p_i : i = 1, \dots, r\}$.

OBSERVACIÓN 14. Cuando $p_i = 1$, $i = 1, \dots, r$, los Lemas 1 y 2 nos dicen que la intersección y unión de invariantes determinístico es, de hecho, un invariante determinístico, el cual es un resultado conocido.

El siguiente resultado, presentado en [Kofman et al., 2012], provee una manera de calcular los conjuntos invariantes probabilísticos para el caso en que $w(k)$ tiene una distribución genérica. El resultado está basado en la desigualdad de Chebyshev, la cual es una desigualdad muy conservadora, por lo cual también lo terminan siendo los conjuntos calculados de esta forma.

TEOREMA 3 ([Kofman et al., 2012]). Consideremos el sistema 4.5.1, donde la matriz A se asume diagonalizable y Hurwitz y D es la matriz identidad. Σ_w es la matriz de covarianza de $w(k)$ y 0 su media. Sea $p \in (0, 1)$ y $\tilde{p}_i \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, n$ tal que $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p$. Luego, el conjunto $\Omega = \{x : |V^{-1}x| \preceq b\}$ es un conjunto invariante probabilístico con probabilidad p , donde V es tal que

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = V^{-1}AV,$$

es la descomposición de Jordan de la matriz A , y los componentes de $b = [b_1 \cdots b_n]^t$ son calculados de acuerdo a

$$b_i = \sqrt{\frac{[\Sigma_v]_{i,i}}{\tilde{p}_i}} \frac{1}{(1 - |\lambda_i|)}; \quad i = 1, \dots, n$$

con

$$\Sigma_v = V^{-1} \Sigma_w (V^{-1})^*$$

El siguiente teorema, válido para el caso en el que $w(k)$ tiene distribución Gaussiano, proporciona límites más estrictos que los dados por el teorema anterior. Este último se logra recurriendo a propiedades específicas de las distribuciones gaussianas.

TEOREMA 4 ([Kofman et al., 2012]). *Consideremos el sistema 4.5.1, donde la matriz A se asume diagonalizable y Hurwitz y D es la identidad. Sea*

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = V^{-1} A V,$$

la descomposición de Jordan de la matriz A . $w(k)$ tiene distribución Gaussiana con media 0 y matriz de covarianza Σ_w . Sea $p \in (0, 1)$ y $\tilde{p}_i \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, n$ tal que $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p$, con la restricción de que para cada par conjugado de autovalores $\lambda_i, \lambda_j = \bar{\lambda}_i$ se toma $\tilde{p}_i = \tilde{p}_j$. Luego, el conjunto $\Omega = \{x : |V^{-1}x| \preceq b\}$ es un conjunto invariante probabilístico con probabilidad p , donde los componentes de $b = [b_1 \cdots b_n]^t$ son calculados de acuerdo a

$$b_i = \frac{\sqrt{2[\Sigma_v]_{i,i}}}{(1 - |\lambda_i|)} \text{erf}^{-1}(1 - \tilde{p}_i); \quad i = 1, \dots, n$$

con

$$\Sigma_v = V^{-1} \Sigma_w (V^{-1})^*$$

Conjuntos Invariantes Propuestos

El contenido de este capítulo puede pensarse como una extensión del capítulo anterior. La diferencia principal se encuentra en que lo presentado aquí son conceptos, referentes a la invarianza de un sistema dinámico, desarrollados particularmente en esta Tesis para el diseño y formulación de los controladores que se propondrán más adelante. Asimismo, se estudian resultados referentes a la teoría de conjuntos y se desarrollan algoritmos para calcularlos.

5.1. Invariante de control contractivo

El concepto que presentaremos a continuación, junto a las propiedades que reúne esta sección, generalizan la noción de invarianza contractiva establecida en la Definición 24 del capítulo anterior. Este concepto fue introducido en [Anderson et al., 2018b], demostrando su utilidad en la formulación y diseño de controladores MPC, con el objetivo de obtener máximo dominio de atracción (ver Capítulo 7).

DEFINICIÓN 27 (Conjunto Invariante de control contractivo, CCIS). Sea $\Omega \subset S_\infty := S_\infty(\Omega, \mathcal{U})$ un conjunto invariante de control para el sistema $x(k+1) = F(x(k), u(k))$. Luego, Ω es un conjunto invariante de control contractivo (CCIS¹) si para todo $x \in \Omega$ existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $F(x, u) \in \text{int}_{S_\infty} \Omega$ ².

Notar que la definición anterior es similar a la de *Conjuntos γ -Invariantes de Control*, presentada en la Definición 24. De hecho, si Ω es un conjunto γ -invariante de control entonces para todo $x \in \Omega$, existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $F(x, u) \in \text{int} \Omega \subseteq \text{int}_{S_\infty} \Omega$. Entonces cada γ -invariante de control es un CCIS. Sin embargo, el recíproco no necesariamente es cierto. La importancia de considerar este concepto

¹Del acrónimo en inglés Contractive Control Invariant Set.

²Donde $\text{int}_{S_\infty} \Omega$ es el interior de Ω relativo a S_∞ (ver Notación).

debilitado - i.e de considerar el interior relativo al conjunto S_∞ , en lugar del interior absoluto - se abordará en Capítulo 7.

Nuevamente las entradas correspondiente se definen como.

DEFINICIÓN 28. (*Conjuntos de entradas correspondientes al CCIS*)
Sea Ω un CCIS. Asociado a Ω está el conjunto de entradas correspondiente $\Psi(\Omega) \subseteq \mathcal{U}$, definido como

$$\Psi(\Omega) := \{u \in \mathcal{U} : \exists x \in \Omega \text{ tal que } F(x, u) \in \text{int}_{S_\infty} \Omega\}.$$

5.2. Propiedad geométrica de los invariantes contractivos

Ahora podemos presentar una propiedad propia de los invariantes contractivos (γ -invariantes de control y CCIS), que guarda similitud con la Proposición 4.4.2 del Capítulo 4. Lo que sigue fue presentado por primera vez en [Anderson et al., 2018d] y empleado en la prueba de convergencia en tiempo finito en MPC, problema que se aborda en el Capítulo 6.

PROPIEDAD 3. (*Propiedad geométrica del γ -invariante de control*)
Sea $\gamma < 1$ y $\Omega \subset \text{int } \mathcal{X}$ un γ -invariante robusto de control cerrado y convexo, para el sistema $x(k+1) = F(x(k), u(k), w(k))$, que contiene al origen en su interior. Entonces, $\Omega \subseteq \text{int } S(\Omega, \Psi(\Omega))$.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 5 sabemos que Ω está contenido en $\Omega \subseteq S(\Omega, \Psi(\Omega))$. Queda demostrar que cada punto de Ω es un punto interior de $S(\Omega, \Psi(\Omega))$. Consideremos el estado $\bar{x} \in \Omega$. Dado que el conjunto Ω es γ -invariante de control existe $\bar{u} \in \Psi(\Omega)$ tal que $F(\bar{x}, \bar{u}, w) \in \gamma\Omega$, para todo $w \in \mathcal{W}$. Además, si $\gamma < 1$ y Ω es un conjunto convexo que contiene al origen en su interior tenemos que $\gamma\Omega \subset \text{int } \Omega$. Luego

$$(5.2.1) \quad \varepsilon := \inf\{d(y, z) : y \in \partial\Omega, z \in \gamma\Omega\},$$

es tal que $\varepsilon > 0$, donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω .

Por la continuidad de F en \bar{x} , existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{B}_\delta(\bar{x})$ se cumple

$$(5.2.2) \quad d(F(x, \bar{u}, w), F(\bar{x}, \bar{u}, w)) < \varepsilon, \quad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Dado que $F(\bar{x}, \bar{u}, w) \in \gamma\Omega$ y $d(F(x, \bar{u}, w), F(\bar{x}, \bar{u}, w)) < \varepsilon$, para todo $w \in \mathcal{W}$, y además Ω es cerrado y convexo, se sigue de (5.2.1) que $F(x, \bar{u}, w) \in \Omega$ para todo

$w \in W$. Luego, por ser $S(\Omega, \Psi(\Omega))$ un conjunto cerrado (Propiedad 2) tenemos que $x \in S(\Omega, \Psi(\Omega))$. Entonces $\mathcal{B}_\delta(\bar{x}) \subset S(\Omega, \Psi(\Omega))$, i.e. $\Omega \subseteq \text{int } S(\Omega, \Psi(\Omega))$. \square

LEMA 3 (Propiedad geométrica de los CCIS). *Sea $\Omega \subset S_\infty$ un CCIS para el sistema $x(k+1) = F(x(k), u(k))$, compacto y convexo. Luego,*

$$\Omega \subseteq \text{int}_{S_\infty} S(\Omega, \Psi(\Omega)).$$

DEMOSTRACIÓN. Se puede ver que $\Omega \subseteq S(\Omega, \Psi(\Omega))$ es cierto por la propiedad de invarianza del conjunto. Queda demostrar que cada punto de Ω es un punto interior de $S(\Omega, \Psi(\Omega))$ relativo a S_∞ . Sea $x \in \Omega$, dado que Ω es un CCIS, existe $u \in \Psi(\Omega)$ tal que $F(x, u) \in \text{int}_{S_\infty} \Omega$. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(F(x, u), S_\infty) \subseteq \Omega$. Dado que $F(x, u)$ es una función continua en x , para u fija, de S_∞ a S_∞ , entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $\tilde{x} \in \mathcal{B}_\delta(x, S_\infty)$ tenemos que

$$F(\tilde{x}, u) \in \mathcal{B}_\varepsilon(F(x, u), S_\infty) \subseteq \Omega.$$

Luego $\tilde{x} \in S(\Omega, \Psi(\Omega))$. Por lo tanto $\mathcal{B}_\delta(x, S_\infty) \subseteq S(\Omega, \Psi(\Omega))$, i.e.

$$\Omega \subseteq \text{int}_{S_\infty} (S(\Omega, \Psi(\Omega))).$$

\square

OBSERVACIÓN 15. *Notar que en el Lema anterior no se necesita la hipótesis de que Ω contenga al origen en su interior, lo cual sí se necesita en la Propiedad 3.*

El siguiente lema muestra que la propiedad de invarianza de control contractiva se hereda para los sucesivos conjuntos controlables.

LEMA 4. *Sea $\Omega \subset \mathcal{X}$ un CCIS compacto y convexo para el sistema $x(k+1) = F(x(k), u(k))$. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto $S_i(\Omega, \mathcal{U})$ es convexo, compacto y CCIS.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que Ω está bajo los supuestos del Lema 3 entonces

$$\Omega \subseteq \text{int}_{S_\infty} S(\Omega, \Psi(\Omega)) \subseteq \text{int}_{S_\infty} S(\Omega, \mathcal{U}).$$

Entonces $S(\Omega, \mathcal{U})$ es un CCIS para el sistema nominal. Por [Kerrigan, 2000] sabemos que $S(\Omega, \mathcal{U})$ es compacto y convexo. Por lo tanto, $S(\Omega, \mathcal{U})$ también está bajo los supuestos de Lema 3. Luego, como $S(\Omega, \mathcal{U}) = S_1(\Omega, \mathcal{U})$, el resultado se sigue por inducción. \square

OBSERVACIÓN 16. La semejanza entre las definiciones de los CCIS y γ -invariante de control podría plantear el interrogante de si es necesario introducir este nuevo tipo de conjunto. Obsérvese que en el Lema 3 se demostró una propiedad geométrica de los CCIS análoga a la Propiedad 3 para γ -invariantes de control. Sin embargo, en esta última propiedad se requiere que $\Omega \subseteq \text{int } \mathcal{X}$. Este requisito representa un obstáculo en la demostración del Lema 4 cuando se aplica recursivamente el Lema 3 a los conjuntos $S_i(\Omega, \mathcal{U})$, porque es habitual que para algún i suficientemente grande, los conjuntos $S_i(\Omega, \mathcal{U})$ colapsen en la frontera del conjunto \mathcal{X} (es decir, compartan parte de la frontera; ver Capítulo 7). Por lo tanto, en ese caso, no cumplirán la hipótesis $S_i(\Omega, \mathcal{U}) \subset \text{int } \mathcal{X}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

5.3. Conjuntos k -Cáscara

A continuación se define una clase de conjuntos introducidos en [Anderson et al., 2018b], que permite una descomposición disjunta del espacio de estado, y que será utilizada en la formulación del MPC propuesto en el Capítulo 7.

DEFINICIÓN 29 (k -Cáscara). Sea $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathcal{X}$ un conjunto invariante de control y $\Psi \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto de entradas. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ definimos la k -Cáscara como $L_{kN}(\Omega, \Psi) := S_{(k+1)N}(\Omega, \Psi) \setminus S_{kN}(\Omega, \Psi)$.

OBSERVACIÓN 17. En la definición anterior, pedimos que Ω sea un conjunto invariante. Esto implica que los conjuntos controlables en i -pasos, $S_i(\Omega, \Psi)$, están anidados (Proposición 5). Por lo tanto, los conjuntos de k -Cáscaras son disjuntos (ver Figura 1) y más aun

$$(5.3.1) \quad S_\infty(\Omega, \Psi) = S_N(\Omega, \Psi) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} L_{kN}(\Omega, \Psi).$$

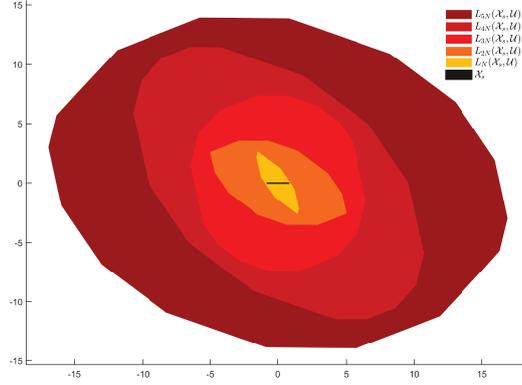


FIGURA 1. Las primeras cinco cáscaras del sistema oscilador armónico con $N = 3$, donde $\Omega = \mathcal{X}_s$ es el equilibrio del sistema.

5.4. Invariantes probabilísticos a un paso

El concepto de conjuntos invariantes probabilísticos presentado en el capítulo anterior extiende la noción de invarianza determinística dando flexibilidad en su aplicación a sistemas dinámicos. Un inconveniente es calcularlos debidamente, debido a que los métodos existentes son conservadores perdiendo así precisión. Sin embargo, puede definirse el concepto de invarianza probabilística a un paso ([Anderson et al., 2016b, Anderson et al., 2018e]), el cual determina la permanencia de la evolución de un sistema dentro de un conjunto con cierta probabilidad solamente en el primer paso. Estos conjuntos serán de usados en el diseño del MPC basado en conjuntos que se presentará en el Capítulo 9.

A continuación se presentan los conjuntos invariantes probabilísticos a un paso, OSPIS (por sus siglas en inglés, One Step Probabilistic Invariant Set).

DEFINICIÓN 30 (Invariante Probabilístico a un Paso, OSPIS). Sea $p \in (0, 1]$. Un conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es un invariante probabilístico a un paso con probabilidad p para el sistema (4.5.1), si y sólo si $\Pr[x(k+1) \in \Omega \mid x(k) \in \Omega] \geq p$.

El OSPIS es, en general, una invarianza que requiere condiciones más débiles que la que requieren los conjuntos invariantes probabilísticos. Cada conjunto invariante probabilístico es un OSPIS, aunque su recíproco no necesariamente es cierto.

5.4.1. Caracterización de los invariantes probabilísticos a un paso.

La siguiente proposición presenta una forma de caracterizar los OSPIS ([Anderson et al., 2018e]).

PROPOSICIÓN 7. Sea $p \in (0, 1]$. Sea el conjunto $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ tal que $Pr[w \in \mathcal{V}] \geq p$. Sea $\Omega \subset \mathcal{X}$ un conjunto tal que cumple la siguiente condición de invarianza

$$(5.4.1) \quad x \in \Omega \Rightarrow Ax + Dw \in \Omega \quad \forall w \in \mathcal{V}.$$

Luego, Ω es un OSPIS con probabilidad p para el sistema (4.5.1).

DEMOSTRACIÓN. Considere el estado $x(k) \in \Omega$. Si $w(k) \in \mathcal{V}$, entonces, por (5.4.1), $x(k+1) \in \Omega$. Por lo tanto

$$Pr[x(k+1) \in \Omega] \geq Pr[w(k) \in \mathcal{V}] \geq p,$$

lo que concluye la prueba. \square

OBSERVACIÓN 18. En [Hirata and Ohta, 2003] se puede ver una forma de calcular los conjuntos que satisfacen la condición (5.4.1). De hecho, de existir, el mínimo invariante robusto $\Omega = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i D \mathcal{V}$ es un OSPIS con probabilidad p para el sistema (4.5.1).

5.4.2. OSPIS contractivos. Al igual que con los invariantes determinísticos, se puede definir contractividad para los invariantes probabilísticos. En particular, y debido a la flexibilidad de los OSPIS, estos pueden caracterizarse de manera sencilla.

A continuación se define el concepto de OSPIS contractivo ([Anderson et al., 2018e]).

DEFINICIÓN 31 (γ -Invariante Probabilístico a un Paso, γ -OSPIS). Sea $p \in (0, 1]$ y $\gamma \in (0, 1]$. Un conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$, que contiene al origen en su interior, se dice que es γ -invariante probabilístico a un paso con probabilidad p para el sistema (4.5.1), si y sólo si $Pr[x(k+1) \in \gamma\Omega \mid x(k) \in \Omega] \geq p$.

Dado el método para calcular OSPIS de la sección anterior, se pueden calcular OSPIS contractivos, como muestra la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 8. Sea $p \in (0, 1]$ y $\lambda \in (0, 1]$. Sean $\Phi \subset \mathcal{X}$ y $\Psi \subset \mathcal{X}$ conjuntos convexos que contienen al origen en su interior, tal que Φ es un OSPIS con

probabilidad p para el sistema (4.5.1) y Ψ satisface

$$(5.4.2) \quad x \in \Psi \Rightarrow Ax \in \lambda\Psi.$$

Luego, el conjunto $\Omega = \Phi \oplus \Psi$ es un γ -OSPIS con probabilidad p para el sistema (4.5.1) con $\gamma < 1$.

DEMOSTRACIÓN. Suponga que $x(k) \in \Omega$. Lo cual significa que $z(k) \in \Phi$ y $y(k) \in \Psi$ tal que $x(k) = z(k) + y(k)$. Luego,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Dw(k) \\ &= Az(k) + Ay(k) + Dw(k) \\ &= z(k+1) + y(k+1) \end{aligned}$$

donde $z(k+1) = Az(k) + Dw(k)$, $y(k+1) = Ay(k)$. Notar que $Pr[z(k+1) \in \Phi] > p$ y $y(k+1) \in \lambda\Psi$.

Dado que $\lambda < 1$ se cumple que $\Phi \oplus \lambda\Psi \subset \Phi \oplus \Psi$. Entonces, podemos encontrar una constante $\gamma < 1$ tal que $\Phi \oplus \lambda\Psi \subseteq \gamma(\Phi \oplus \Psi)$ (este γ existe debido a que Ψ y Φ son conjuntos convexos y contienen al origen). Luego,

$$\begin{aligned} Pr[x(k+1) \in \gamma\Omega] &\geq Pr[x(k+1) \in \Phi \oplus \lambda\Psi] \\ &= Pr[z(k+1) + y(k+1) \in \Phi \oplus \lambda\Psi] \\ &\geq Pr[z(k+1) \in \Phi] > p. \end{aligned}$$

Entonces, Ω es un γ -OSPIS con probabilidad p y $\gamma < 1$ para el sistema (4.5.1). \square

5.4.3. Invarianza probabilística a un paso robusta. Además del sistema $x(k+1) = Ax(k) + Dw(k)$, nos interesa estudiar ahora una familia sistemas, y el espacio de estado en el cual esta familia de sistemas es invariante. Es decir, consideremos la siguiente familia de sistemas en tiempo discreto descritos por

$$(5.4.3) \quad x(k+1) = A(\theta)x(k) + D(\theta)w(k), \quad \theta \in \Theta,$$

donde $x(k)$ es el estado, $w(k)$ es una perturbación del sistema al tiempo k , $A(\theta)$ y $D(\theta)$ son funciones Lipschitz de $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$, y θ es un parámetro fijo desconocido que considera la diferencia entre el modelo y el sistema real. El modelo sin incertidumbre θ se representa por (A, D) , donde $A := A(0)$, y $D := D(0)$.

A continuación se presenta la definición de OSPIS robustos contractivos ([Anderson et al., 2018e]).

DEFINICIÓN 32 (γ -Invariante Probabilístico a un Paso Robusto, $R\gamma$ -OSPIS). Sea $p \in (0, 1]$ y $\gamma \in (0, 1]$. Un conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es un γ -invariante probabilístico a un paso robusto con probabilidad p para el sistema 5.4.3, si y sólo si $\Pr[(A(\theta)x + D(\theta)w) \in \gamma\Omega : x \in \Omega] \geq p$, para todo $\theta \in \Theta$.

Observe que la propiedad robusta de la definición anterior se refiere a toda la familia de modelos determinada por el parámetro $\theta \in \Theta$, mientras que la propiedad probabilística se refiere a la perturbación $w(k) \in \mathcal{W}$. Un conjunto Ω que cumple la Definición 32 con $\Theta = \{0\}$ (sistema nominal), es llamada γ -OSPIS (si $\gamma = 1$, simplemente OSPIS). Además, cuando $\gamma = 1$ el $R\gamma$ -OSPIS es simplemente ROSPIS.

Ahora presentamos la siguiente propiedad

PROPIEDAD 4. Sea $p \in (0, 1]$ y Ω como un ROSPIS con probabilidad p para el sistema 5.4.3. Luego, para todo $x(k) \in \Omega$, resulta que $\Pr[x(k+1) \in \Omega \wedge x(k+2) \in \Omega \wedge \dots \wedge x(k+q) \in \Omega] \geq p^q$, para todo $\theta \in \Theta$.

DEMOSTRACIÓN. El hecho de que $w(k)$ es una señal de excitación persistente y θ es un parámetro fijo desconocido implica que $x(k)$ tiene la propiedad Markov, es decir, dado $x(k)$, el valor de $x(k+1)$ no depende de los valores pasados del estado antes de k . De esta manera, la propiedad ROSPIS que asegura $\Pr[x(k+2) \in \Omega \mid x(k+1) \in \Omega] > p$ se lleva a cabo independientemente sobre el hecho de que $x(k) \in \Omega$. Luego, $\Pr[x(k+2) \in \Omega \mid x(k+1) \in \Omega \wedge x(k) \in \Omega] > p$.

Entonces, dado que $x(k) \in \Omega$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Pr[x(k+2) \in \Omega \wedge x(k+1) \in \Omega] &= \Pr[x(k+2) \in \Omega \mid x(k+1) \in \Omega] \cdot \\ &\quad \cdot \Pr[x(k+1) \in \Omega] \\ &\geq p^2, \end{aligned}$$

y la prueba concluye por el uso recursivo de este razonamiento. \square

Ahora presentamos una manera de caracterizar los OSPIS robustos.

PROPOSICIÓN 9. Sea $\Omega \subset \mathcal{X}$ un γ -OSPIS con probabilidad $p \in (0, 1]$ y $\gamma < 1$ para el sistema (4.5.1). Luego, existe $\bar{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^l$ tal que Ω es un ROSPIS con probabilidad p para el sistema 5.4.3, con conjunto de incertidumbre definido por $\Theta := \bar{\Theta}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(k) \in \Omega$. Considere el sistema nominal $\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + Dw(k)$, y el sistema incierto $x(k+1) = A(\theta)x(k) + D(\theta)w(k)$. Luego, extrayendo ambos valores futuros de los estados obtenemos

$$x(k+1) - \bar{x}(k+1) = [A(\theta) - A]x(k) + [D(\theta) - D]w(k)$$

aplicando normas y desigualdad triangular, resulta que

$$\begin{aligned} \|x(k+1) - \bar{x}(k+1)\| &= \|[A(\theta) - A]x(k) + [D(\theta) - D]w(k)\| \\ &\leq \|A(\theta) - A\| \cdot \|x(k)\| + \|D(\theta) - D\| \cdot \|w(k)\| \\ &\leq L_A \cdot \|\theta\| \cdot \|x(k)\| + L_D \cdot \|\theta\| \cdot \|w(k)\| \end{aligned}$$

donde L_A y L_D son las constantes de Lipschitz para las funciones $A(\theta)$ y $D(\theta)$ en \mathbb{R} , respectivamente. Luego,

$$(5.4.4) \quad \|x(k+1) - \bar{x}(k+1)\| \leq (L_A \cdot r_x + L_D \cdot r_w) \cdot \|\theta\| := \alpha \cdot \|\theta\|$$

donde $r_x := \max_{x \in \Omega} \|x\|$ $r_w := \max_{w \in \mathcal{W}} \|w\|$.

Sea $d := \inf_{x \notin \Omega} d_{\gamma\Omega}(x)$, i.e., a distancia mínima desde la frontera de Ω al conjunto $\gamma\Omega$. Entonces, considere el siguiente conjunto

$$(5.4.5) \quad \bar{\Theta} := \{\theta \in \mathbb{R}^l : \|\theta\| \leq \frac{d}{\alpha}\}$$

Luego, que $\theta \in \bar{\Theta}$ implica que $\alpha\|\theta\| \leq d$, y, por la ecuación (5.4.4), tenemos

$$\theta \in \bar{\Theta} \Rightarrow \|x(k+1) - \bar{x}(k+1)\| \leq d$$

Teniendo en cuenta que d es la distancia mínima desde el borde de Ω hasta el conjunto $\gamma\Omega$, la última condición establece que $\bar{x}(k+1) \in \gamma\Omega \Rightarrow x(k+1) \in \Omega$. Luego

$$Pr[x(k+1) \in \Omega] \geq Pr[\bar{x}(k+1) \in \gamma\Omega] \geq p \quad \forall \theta \in \bar{\Theta}$$

lo que demuestra que Ω es un ROSPIS con probabilidad p para el sistema 5.4.3, para todo el conjunto incierto $\Theta := \bar{\Theta}$. \square

OBSERVACIÓN 19. *Notar que el tamaño del conjunto $\bar{\Theta}$ depende de d/α , de acuerdo con la ecuación (5.4.5). d depende de la contractividad del conjunto Ω , pero α es proporcional al tamaño de Ω , lo que significa que el tamaño de $\bar{\Theta}$ es inversamente proporcional al tamaño del conjunto Ω . Esto indica que un*

conjunto Ω más pequeño implica un conjunto de incertidumbre más grande $\bar{\Theta}$, o sea representa una mayor familia de modelos³.

³Es decir, si queremos mayor robustez para la familia de modelos de predicción 5.4.3, debemos sacrificar la probabilidad de permanencia.

Convergencia en Tiempo Finito para MPC

La estabilidad asintótica (convergencia y estabilidad $\epsilon - \delta$) de conjuntos invariantes bajo estrategias de MPC se estudió ampliamente en las últimas décadas, haciendo uso de la teoría de Lyapunov, en la mayoría de los casos. Sin embargo, y a pesar de sus amplios beneficios de aplicación ([Anderson et al., 2018d]), el problema de convergencia en tiempo finito no ha recibido mucha atención en la literatura.

Mientras un análisis de estabilidad permite asegurar que la trayectorias controladas no se alejen de un determinado objetivo y la convergencia (atractividad) determina que se aproximará a él asintóticamente (es decir, para un tiempo infinito), un resultado referido a la convergencia en tiempo finito nos permitiría tener la garantía de que las trayectorias de los sistemas dinámicos controlados, en efecto, alcanzarán el objetivo. Esto no es sencillo de lograr (ver referencias [Schockaert et al., 1999, Kerrigan and Maciejowski, 2004, de la Pena and Christofides, 2008, Calafiore and Fagiano, 2013]) en el contexto de MPC con horizonte fijo, pues el análisis de estabilidad de Lyapunov sólo nos permite, mediante el decrecimiento del costo óptimo a una tasa de decaimiento radial (depende de la distancia al objetivo), demostrar la convergencia en tiempo infinito. Por ejemplo, si el objetivo es el origen se tiene que

$$V(x^+) - V(x) \leq -\alpha(\|x\|_2),$$

donde x^+ representa (por simplicidad en la notación) el estado posterior al estado x , V es la función de Lyapunov (dada en MPC por la función de costo óptima) y α es una función \mathcal{K}_∞ . Al ser $V \geq 0$ y real, por definición, el decrecimiento anterior implica que V convergerá asintóticamente a un valor positivo, a medida que los estados avanzan. De este modo, no hay garantías de que en un tiempo finito V converja, por lo que no hay garantía de que el objetivo sea alcanzado realmente.

Debido a la importancia que tiene el alcanzar positivamente los objetivos de control para algunas aplicaciones generales y, en particular, para desarrollos posteriores de esta tesis (Capítulo 7 y 8), se presentará en este Capítulo un MPC basado en conjuntos novedoso que garantiza la mencionada convergencia en tiempo finito, manteniendo siempre un horizonte de predicción/control finito y fijo y que, además, permite calcular una cota superior para el tiempo de convergencia.

Cabe destacar que los resultados obtenidos fueron alcanzados para sistemas no lineales en general, sin requerimientos extras en la formulación. Además, las hipótesis utilizadas son muy similares a las que frecuentemente se requieren en el contexto de un MPC convencional.

6.1. Introducción

6.1.1. Marco conceptual sobre estabilidad. En las últimas dos décadas se ha investigado extensamente la teoría de MPC, con resultados sólidos sobre estabilidad, robustez, satisfacción de restricciones y costo computacional tratable para sistemas lineales y no lineales [Rawlings and Mayne, 2009]. En el ámbito académico existe un consenso que establece la teoría de Lyapunov [Khalil, 2002] como el marco más adecuado para probar estabilidad asintótica de puntos de equilibrio [Mayne et al., 2000]. En [Ferramosca et al., 2010a, Gonzalez and Odloak, 2009], el concepto de estabilidad de puntos de equilibrio se generaliza a estabilidad de conjuntos de equilibrio, pero estos conjuntos no incluyen estados transitorios (i.e. son agregaciones de puntos de equilibrio y, en general, no es posible ir de un punto a otro sin abandonar el conjunto).

La teoría de conjuntos invariantes ([Blanchini, 1999, Kerrigan and Maciejowski, 2000, Li and Lin, 2017, Bitsoris and Vassilaki, 2017, Rungger and Tabuada, 2017, Capítulo 4 y 5]) ha demostrado ser una herramienta importante a la hora de analizar sistemas dinámicos sujetos a restricciones, y permite la extensión de los conceptos de estabilidad de puntos de equilibrios a regiones del espacio de estado. En [Rawlings and Mayne, 2009], por ejemplo, se define una función de Lyapunov para la estabilidad asintótica de conjuntos invariantes en general. Esta generalización, *a priori* simple, permite sin embargo una serie de aplicaciones (formulaciones para re-identificación en lazo cerrado, o controles en dos etapas [González et al., 2014, Bustos et al., 2016]) y representa un cambio de paradigma, dado que al ser un conjunto invariante completo

el objetivo de control, el controlador considerará logrado su objetivo una vez el sistema lo alcance, y no hará en adelante más que cuidar que el conjunto no sea abandonado.

La consideración de conjuntos invariantes en la formulación del MPC es la estrategia adecuada para las aplicaciones que se caracterizan por una necesidad de realizar acciones particulares dentro de una región determinada. Por ejemplo, cuando se desea reemplazar el MPC por una ley de control explícita (controladores duales), o dejar al sistema en lazo abierto para excitar persistentemente al sistema, con el fin de recolectar datos de entrada-salida para una re-identificación del sistema ([Anderson et al., 2018e, Anderson et al., 2016b, González et al., 2014, Bustos et al., 2016, Capítulo 8]), etc.

Para estos casos sólo se demuestra la convergencia asintótica a la región en la cual la segunda tarea comienza, bajo la hipótesis heurística de que, en la práctica, se alcanzará el objetivo en un tiempo finito. Sin embargo, no se ha formalizado ningún resultado teórico en este sentido, lo cual representa una deficiencia de las formulaciones, dado que no existe garantía de que la segunda tarea de control - la que se realizará en el objetivo - comience alguna vez.

A pesar de la importancia de la convergencia en tiempo finito en este contexto, muy pocos trabajos pueden encontrarse en la bibliografía que aborden este tema (siempre en el caso de formulaciones aplicables, con horizonte de control fijo): en [Sckaert et al., 1999] se muestra que, si la función de costo de etapa está acotada por debajo por una función \mathcal{K} , entonces la convergencia en tiempo finito a cierto conjunto terminal puede asegurarse. En [Kerrigan and Maciejowski, 2004], en el contexto de min-max MPC (esto es, MPC robusto que se basa en la minimización del peor caso), los autores proponen una función de costo no convencional basada en la distancia al conjunto, asegurando la convergencia en tiempo finito con hipótesis similares a las presentadas en [Sckaert et al., 1999]. Otros trabajos muestran resultados similares a través de la consideración de hipótesis más fuertes. Por ejemplo, los resultados presentados en [de la Pena and Christofides, 2008, Calafiore and Fagiano, 2013] se obtienen haciendo uso de hipótesis adicionales, a veces muy restrictivas, en la función de costo y el modelo del sistema véase sección 6.3, a continuación.

En contraste, este Capítulo presenta una formulación de MPC robusto basado en conjuntos, para sistemas no lineales, que garantiza la convergencia en

tiempo finito a objetivos invariantes de interior no vacío. La convergencia es garantizada para todo estado inicial perteneciente a un dominio de atracción predeterminado y, también, se calcula una cota superior para el tiempo de convergencia (o alcance) al conjunto objetivo.

6.2. Formulación de MPC robusto basada en conjuntos

6.2.0.1. Modelo dinámico. En el transcurso de este capítulo se considerará el modelo no lineal presentado en 2.3.5, y reescrito brevemente a continuación, para facilitar la lectura:

$$(6.2.1) \quad x(k+1) = F(x(k), u(k), w(k)), \quad x(0) = x_0.$$

La versión nominal del modelo anterior, es decir, cuando no se considera ninguna perturbación, será la descrita en 2.3.4.

6.2.0.2. Función costo. Dado un horizonte finito y fijo $N \in \mathbb{N}$, y un conjunto compacto y convexo $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ que contiene al origen en su interior, se propone el siguiente costo

$$(6.2.2) \quad V_N(x, \Omega; \mathbf{u}) := \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N} \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x(j), u(j); \Omega),$$

donde $x = x(0)$ es el estado actual; $x(j+1) = F(x(j), u(j), w(j))$, para $j \in \mathbb{I}_{0:N-1}$; $\mathbf{u} := \{u(0), \dots, u(N-1)\}$ es una secuencia de controles; y $\mathbf{w} := \{w(0), \dots, w(N-1)\}$ es una secuencia de perturbaciones. Además, se asume que $\ell(\cdot) \geq 0$, y $\ell(x, \cdot, \cdot) = 0$ cuando $x \in \Omega$. Ω es el conjunto objetivo donde queremos que el sistema a lazo cerrado converja.

6.2.0.3. Dominio de atracción. Antes de formular la estrategia de MPC con la cual se demostrará convergencia en tiempo finito, es preciso definir la región factible para el control; esta está formada por todos los estados que pueden ser llevados al conjunto Ω en N pasos, por un camino factible, por medio de controles admisibles y para cualquier perturbación posible. Es decir,

$$\mathcal{X}_N = \{x \in \mathcal{X} : x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \text{ y } x(N) \in \Omega, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}^N\},$$

es la región factible. Entonces, para cada $x \in \mathcal{X}_N$ podemos denotar por $\mathcal{U}_N(x)$ al conjunto de secuencia de controles \mathbf{u} de tamaño N , que satisfacen las restricciones de estado y entradas, i.e. $x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}$, para $j \in \mathbb{I}_{0:N-1}$, junto con la restricción terminal $x(N) \in \Omega$, para toda perturbación admisible $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N$.

6.2.0.4. *Formulación.* En cada instante de tiempo k , la ley de control del MPC robusto es derivada de la solución del siguiente problema de optimización

$$(6.2.3) \quad \mathcal{P}_N(x, \Omega) : V^0(x, \Omega) := \min\{V_N(x, \Omega; \mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{U}_N(x)\}$$

donde Ω y el estado inicial $x \in \mathcal{X}$ son los parámetros de optimización y la secuencia \mathbf{u} es la variable de optimización.

Asociada a la secuencia óptima de control $\mathbf{u}^0(x) := \{u^0(0; x), u^0(1; x), \dots, u^0(N-1; x)\}$ existe un haz de trayectorias óptimas de estados, $\{\mathbf{x}^0(x, \mathbf{w})\}$, donde cada trayectoria se corresponde con una secuencia de perturbaciones admisibles $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N$:

$$x^0(x, \mathbf{w}) := \{x^0(0; x, \mathbf{w}), x^0(1; x, \mathbf{w}), \dots, x^0(N; x, \mathbf{w})\} \in \{\mathbf{x}^0(x, \mathbf{w})\}.$$

Por definición de $\mathcal{P}_N(x, \Omega)$, $x^0(N; x, \mathbf{w}) \in \Omega$ para cada \mathbf{w} admisible. La ley de control, derivada de la aplicación de la regla de horizonte deslizante de control esta dada por $\kappa_{MPC}(x) = u^0(0; x)$, donde $u^0(0; x)$ es el primer elemento de la secuencia óptima $\mathbf{u}^0(x)$. De esta forma, el sistema a lazo cerrado bajo la ley de control del MPC robusto viene dado por

$$(6.2.4) \quad x(k+1) = F(x(k), \kappa_{MPC}(x(k)), w(k)).$$

y la función de costo óptimo por

$$(6.2.5) \quad V_N^0(x, \Omega) = V_N(x, \Omega, \mathbf{u}^0(x)).$$

Hasta aquí nada nuevo hay en la formulación considerada, que no sea la consideración de conjuntos como objetivos. El costo considera el peor caso con respecto a las perturbaciones, i.e. se trabaja con el enfoque robusto *min-max*, presentado en el Capítulo 3, cuyo costo de etapa es una función continua, $\ell(\cdot)$, que depende del conjunto objetivo, Ω , de forma que vale cero dentro de él y un valor no negativo fuera. La razón para considerar este costo tan general es que la función de costo de etapa $\ell(\cdot)$ engloba una serie de formas posibles, según los objetivos perseguidos, tal y como se discutirá en las secciones subsiguientes.

6.3. Resultados previos

6.3.1. Primer enfoque. Los artículos [Sckaert et al., 1999] y [Sckaert and Mayne, 1998] se ocupan de estudiar convergencia en tiempo finito a un conjunto Ω para sistemas dinámicos controlados por MPC con horizonte de

predicción fijo. El análisis se realiza para sistemas no lineales y no perturbados, o nominales.

En ambos trabajos se consideran las siguientes hipótesis para el costo de etapa $\ell(\cdot)$:

- (i) existe una función \mathcal{K} , $\alpha_\ell(\cdot)$, tal que $\ell(x, u; \Omega) \geq \alpha_\ell(\|(x, u)\|)$, para todo $x \notin \Omega$ y para todo $u \in U$.
- (ii) $\ell(x, h_\ell(x); \Omega) = 0$ para cada $x \in \Omega$, donde $h_\ell(\cdot)$ es una ley de control local impuesta una vez que el estado controlado entre al conjunto Ω .

Además, se asume que Ω es un conjunto invariante para el sistema a lazo cerrado $x(k+1) = F(x(k), h_\ell(x(k)), 0)$, lo cuál establece una dependencia no deseada de Ω con la ley de control arbitrara $h_\ell(x)$.

Sin embargo, dado que se asume que Ω contiene en su interior al origen, las suposiciones (i) y (ii) implican que la función $\ell(\cdot)$ es discontinua en los bordes de Ω , lo cual es una suposición fuerte que puede derivar en problemas de aplicación.

La forma en que esta formulación asegura la convergencia en tiempo finito se puede resumir como sigue. Mediante procedimientos usuales en la teoría de estabilidad del MPC, la función de costo óptimo, $V_N^0(x, \Omega) = V_N(x, \Omega; \mathbf{u}^0)$, satisface

$$V_N^0(x(k+1), \Omega) - V_N^0(x(k), \Omega) \leq -\ell(x(k), \kappa_{MPC}(x(k)); \Omega), \quad \forall x(k) \notin \Omega,$$

Dado que para todo $x \notin \Omega$ existe $r > 0$ tal que $\|x\| > r$, por la suposición (i), se puede ver que

$$\ell(x, u; \Omega) \geq \alpha_\ell(\|(x, u)\|) \geq \alpha_\ell(\|x\|) \geq \alpha_\ell(r), \quad \forall x \notin \Omega,$$

entonces

$$(6.3.1) \quad V_N^0(x(k+1), \Omega) - V_N^0(x(k), \Omega) \leq -\alpha_\ell(r).$$

Esto significa que, con el supuesto de que $x(k) \notin \Omega$ para ningún $k \in \mathbb{N}$, a cada paso hay un decrecimiento en el costo de al menos $\alpha_\ell(r) > 0$, lo cual es mucho mas fuerte que el decrecimiento radial que usualmente se cumple para el costo óptimo (ver Capítulo 3), i.e. el decrecimiento depende de la distancia al conjunto Ω . De esta manera, en cierto punto se debe tener que $x(k) \in \Omega$.

6.3.2. Segundo enfoque. El principal inconveniente del enfoque anterior es claramente la hipótesis (i), que implica la discontinuidad del costo de etapa. El uso de un costo de etapa discontinuo es un gran obstáculo en la implementación

cuando se utiliza programación lineal, cuadrática o no lineal convexa para resolver los problemas de optimización (según se manifiesta, explícitamente, en [Kerrigan and Maciejowski, 2004]). Para solucionar este inconveniente, [Kerrigan and Maciejowski, 2004] propone - en el contexto de MPC lineal robusto - i.e., considerando nuevamente el sistema con incertidumbre, (6.2.1) - el siguiente costo de etapa

$$(6.3.2) \quad \ell(x, u; \Omega) := \min_{y \in \Omega} \|Q(x - y)\|_p + \|R(u - h_\ell(x))\|_p,$$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices de ponderación y $\|\cdot\|_p$ una norma particular. El sistema lineal está dado por $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k)$ con $w(k) \in \mathcal{W}$, y la ley de control local $h_\ell(x)$ es la ganancia de realimentación fija $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$. El conjunto Ω en este caso es un invariante robusto para $x(k+1) = Ax(k) + BKx(k) + w(k)$, y nuevamente, depende de K , como es habitual en el contexto de MPC dual.

El función de costo resultante con el costo de etapa (6.3.2) es continuo (de hecho no cumple la condición (i)). Sin embargo, esta formulación asegura la convergencia en tiempo finito suponiendo la siguiente ley de control

$$\begin{cases} \kappa_{MPC}(x) & \text{if } x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{O}(\mathcal{X}), \\ h_\ell(x) & \text{if } x \in \mathcal{O}(\mathcal{X}), \end{cases}$$

donde $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ es el máximo invariante robusto. Si se asume que $\Omega \subset \text{int } \mathcal{O}(\mathcal{X})$, entonces el mínimo invariante robusto $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{O}(\mathcal{X})$ es asintóticamente estable para el sistema a lazo cerrado con la ley de control definida arriba. Además, si se cumple que $\mathcal{F}_\infty \subset \text{int } \Omega$, hay convergencia en tiempo finito al conjunto Ω . De esta manera, el verdadero conjunto objetivo está dado por \mathcal{F}_∞ , y así, la convergencia en tiempo finito al conjunto Ω es lograda por la convergencia asintótica al conjunto \mathcal{F}_∞ , junto a la suposición $\mathcal{F}_\infty \subset \text{int } \Omega$.

OBSERVACIÓN 20. Como caso particular, si el escenario nominal es considerado ($\mathcal{W} = \{0\}$), entonces el mínimo invariante robusto viene dado por $\mathcal{F}_\infty = \{0\}$, y se recupera la atractividad clásica de origen. Por lo tanto, cualquier conjunto que contiene al origen en su interior - como el conjunto propuesto Ω - será trivialmente alcanzado en tiempo finito.

Otros trabajos avocados a lograr la convergencia en tiempo finito en el contexto de controladores predictivos duales son [Michalska and Mayne, 1993]

y [Michalska, 1997]. Sin embargo, estos enfoques consideran en la formulación del MPC el horizonte variable, lo cual constituye todo un escenario diferente al considerado en este capítulo.

6.4. Formulación de MPC propuesta

Se considerará un costo de etapa $\ell(\cdot)$ dependiente tanto de un conjunto (de estados) Ω , que es γ -invariante robusto de control, con $\gamma < 1$, y de un conjunto (de entradas) $\Psi(\Omega)$, que es el que se corresponde justamente con Ω (véase la Definición 24, Capítulo 4). De esta forma, como se verá, la convergencia en tiempo finito a Ω puede asegurarse sin suposiciones adicionales en la formulación del controlador.

Consideremos el siguiente costo de etapa para una realización particular de las perturbaciones.

$$(6.4.1) \quad \ell(x, u; \Omega) = d_{\Omega}(x) + d_{\Psi(\Omega)}(u),$$

donde la función $d_{\Omega}(x)$ es la distancia euclidiana desde el estado x al conjunto objetivo Ω , y $d_{\Psi(\Omega)}(u)$ es la distancia euclidiana desde la entrada u al conjunto $\Psi(\Omega)$. Ω se lo asume compacto, convexo, y γ -invariante robusto de control con $\gamma < 1$, y con el origen en su interior.

OBSERVACIÓN 21. Notar que de acuerdo a esta formulación, los objetivos de control son alcanzados una vez que el sistema entra en el conjunto Ω , y no se consideran otros objetivos implícitos adicionales. Sin embargo, un punto a destacar es que el sistema no estará completamente en lazo abierto un vez alcance a Ω , dado que el controlador estará actuando cada vez que los estados salgan afuera de Ω , por el efecto de una perturbación desconocida.

El siguiente Lema establece la convergencia asintótica a Ω del sistema a lazo cerrado derivado del Problema (6.2.3), cuando el costo de etapa viene dado por (6.4.1)¹.

LEMA 5. *Sea $x = x(0) \in \mathcal{S}^N(\Omega, \mathcal{U})$. Considérese la formulación del MPC robusto $\mathcal{P}_N(x, \Omega)$, (6.2.3), con costo de etapa dado por (6.4.1). Luego, el sistema*

¹Como es sabido, la convergencia es una condición para asegurar la estabilidad por los métodos clásicos de Lyapunov.

a lazo cerrado $x(k+1) = F(x(k), \kappa_{MPC}(x(k)), w(k))$ satisface que

$$V_N^0(x(k+1), \Omega) - V_N^0(x(k), \Omega) \leq -d_\Omega(x(k)) - d_{\Psi(\Omega)}(u(k)),$$

para todo $k \geq 0$, por lo que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_\Omega(x(k)) = 0$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{\Psi(\Omega)}(u(k)) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathcal{S}^N(\Omega, U)$, para un tiempo dado k . Supongamos que la función de costo óptimo para este tiempo k este dada por

$$(6.4.2) \quad V_N^0(x, \Omega) = \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N} \sum_{j=0}^{N-1} d_\Omega(x^0(j; x)) + d_{\Psi(\Omega)}(u^0(j; x)),$$

donde $u^0(j; x)$, para $j \in \mathbb{I}_{0:N-1}$, forma la trayectoria de entradas óptimas, y $x^0(j; x)$ la trayectoria de estados óptimos correspondientes que pertenece al haz de estados óptimos $\{x^0(j; x, \mathbf{w})\}$, para cada realización de perturbaciones admisibles $w \in \mathcal{W}$.

Sea $x^+ = x^0(1; x)$ el estado sucesor a x bajo el sistema a lazo cerrado, entonces $x^+ \in \{x^0(1; x, \mathbf{w})\}$ y $\{x^0(N; x, \mathbf{w})\} \subset \Omega$. Una solución factible al Problema $\mathcal{P}_N(x^+, \Omega)$ en el tiempo $k+1$ bien podría ser la secuencia $\hat{\mathbf{u}} := \{u^0(1; x), \dots, u^0(N-1; x), \hat{u}\}$, donde \hat{u} es una acción de control perteneciente al conjunto $\Psi(\Omega)$, tal que $\hat{x} := F(x^0(N; x), \hat{u}, w) \in \Omega$ para todo $w \in \mathcal{W}$ (la existencia de esta entrada $\hat{u} \in \Psi(\Omega)$ esta garantizada debido a que $x^0(N; x) \in \{x^0(N; x, \mathbf{w})\} \subset \Omega$, y Ω es un conjunto γ -invariante robusto de control). Dado que la función de costo tiene en cuenta el peor escenario en todo momento, el costo factible correspondiente a esta entrada factible, para el problema $\mathcal{P}_N(x^+, \Omega)$, puede escribirse como

$$V_N(x^+, \Omega; \hat{\mathbf{u}}) = V_N^0(x, \Omega) + d_\Omega(\hat{x}) + d_{\Psi(\Omega)}(\hat{u}) - d_\Omega(x) - d_{\Psi(\Omega)}(u^0(0; x)),$$

donde $d_\Omega(\hat{x}) = 0$ y $d_{\Psi(\Omega)}(\hat{u}) = 0$. Además, por optimalidad se tiene que $V_N^0(x^+, \Omega) \leq V_N(x^+, \Omega; \hat{\mathbf{u}})$, lo cual implica que

$$V_N^0(x^+, \Omega) - V_N^0(x, \Omega) \leq -d_\Omega(x) - d_{\Psi(\Omega)}(u^0(0; x)).$$

En otras palabras, para cualquier tiempo $k \in \mathbb{I}_{\geq 0}$, la función de costo óptimo satisface que $V_N^0(x(k+1), \Omega) - V_N^0(x(k), \Omega) \leq -d_\Omega(x(k)) - d_{\Psi(\Omega)}(u(k))$ y, dado que $V_N^0(\cdot)$ es no negativo, resulta que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_\Omega(x(k)) = 0$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{\Psi(\Omega)}(u(k)) = 0$. \square

Antes de presentar el resultado principal de este capítulo, se introduce el siguiente lema, el cual es una propiedad particular del costo de etapa propuesto (6.4.1).

LEMA 6. *Considérese la formulación del MPC $\mathcal{P}_N(x, \Omega)$, (6.2.3), con costo de etapa (6.4.1), y la ley de control, $\kappa_{MPC}(\cdot)$. Si $x \in \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$ entonces $F(x, \kappa_{MPC}(x), w) \in \Omega$, para todo $w \in \mathcal{W}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(0) = x \in \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$, entonces existe una acción de control $u(0) \in \Psi(\Omega)$ tal que

$$x(1) = F(x(0), u(0), w(0)) \in \Omega, \quad \forall w(0) \in \mathcal{W}$$

Debido a la propiedad del conjunto objetivo Ω de ser un γ -invariante robusto de control, existen acciones de control $u(k) \in \Psi(\Omega)$, $k = 1, \dots, N-1$, para las cuales $x(k) \in \gamma\Omega \subseteq \Omega$, con $k = 2, \dots, N-1$, y para todo $w(k) \in \mathcal{W}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$. El uso de esta secuencia de controles produce un costo

$$\begin{aligned} V_N(x, \Omega, \mathbf{u}) &= d_\Omega(x(0)) + \underbrace{d_{\Psi(\Omega)}(u(0))}_{=0} \\ &+ \underbrace{\max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} (d_\Omega(x(j)) + d_{\Psi(\Omega)}(u(j)))}_{=0} \\ &= d_\Omega(x(0)) \end{aligned}$$

mientras que cualquier otro control que deje $x(1)$ afuera de Ω produce un costo mayor que $d_\Omega(x(0))$. Luego, el MPC lleva el estado x al conjunto objetivo en un paso. \square

OBSERVACIÓN 22. *Lo interesante del resultado anterior, con el cual se demostrará la convergencia en tiempo finito del MPC propuesto, es que las entradas de control dentro del conjunto $\Psi(\Omega)$ no representan costo adicional (o positivo) en el costo de etapa (6.4.1), cuando se está en el objetivo o en el conjunto a un paso de él. Esta forma de presentar el costo surge como natural si se lo compara con el costo del control por zonas (Capítulo 3), donde el objetivo está dado por un conjunto de equilibrio, \mathcal{X}_s , y las entradas son guiadas a un conjunto \mathcal{U}_s que le corresponde [Ferramosca et al., 2010b, Ferramosca et al., 2009b]. Sin embargo, lo que se consigue en nuestro caso, y que no ocurre con ninguna otra formulación de MPC, es que los estados en el conjunto a un paso del objetivo, serán llevados necesariamente en un paso al objetivo.*

Además, por la Propiedad 3 del Capítulo 4, sabemos que $\Omega \subset \text{int } \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$, lo que significa que siempre se puede llegar al conjunto a un paso de Ω , asociado a $\Psi(\Omega)$, sin llegar a Ω .

6.4.1. Ejemplo ilustrativo. Para ilustrar el rol del conjunto $\Psi(\Omega)$ en la formulación del MPC, la Figura 1 y 2 muestran la evolución de los estados de un sistema a lazo cerrado (arbitrario) correspondientes a dos puntos iniciales distintos. El controlador utilizado es el MPC robusto propuesto, $\mathcal{P}(\Omega, x)$, con costo de etapa (6.4.1), y las simulaciones fueron hechas en un escenario nominal, $\mathcal{W} = \{0\}$, por simplicidad (los parámetros de simulación se presentan al final del capítulo). El controlador se detiene cuando el estado entra al conjunto objetivo Ω . Nótese que cuando el estado inicial $x(0) \in \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$ (Fig. 1), el controlador lleva el sistema al conjunto Ω en un paso, como expone el Lema 6. Por otro lado, si el estado inicial es tal que $x(0) \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$, aun siendo posible llevar el sistema a Ω en un paso (por la misma definición de conjunto controlable a un paso), el controlador MPC lo llevará en dos pasos (Fig. 2), porque esa es la elección que proporciona un costo menor. Una cuestión central que evidencia este contra ejemplo es que el uso del conjunto $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{U})$, en lugar de $\mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$, en el costo de etapa (6.4.1), bien puede estropear la propiedad de convergencia en tiempo finito.

6.4.2. Convergencia en tiempo finito. Así como se introdujeron las definiciones de estabilidad local y atractividad en el Capítulo 3, a continuación se define formalmente el concepto de convergencia en tiempo finito.

DEFINICIÓN 33. (Convergencia en tiempo finito) Dado un estado inicial $x(0) \in \mathcal{X}$ y un conjunto $\Omega \subset \mathcal{X}$, el sistema a lazo cerrado $x(k+1) = F(x(k), \kappa(x(k)), w(k))$, controlado por una ley de control $\kappa(\cdot)$, converge en tiempo finito al conjunto Ω si existe $K \in \mathbb{N}$, tal que $x(k) \in \Omega$ para todo $k \geq K$ y para todo $w(k) \in \mathcal{W}$.

En la definición anterior, a la constante K se denomina cota de convergencia, y la convergencia descrita es robusta, es decir, es para un sistema de control con perturbaciones.

El resultado que sigue muestra que el sistema (6.2.4) controlado por el MPC $\mathcal{P}_N(x, \Omega)$, (6.2.3), con costo de etapa (6.4.1), converge en tiempo finito al conjunto Ω .

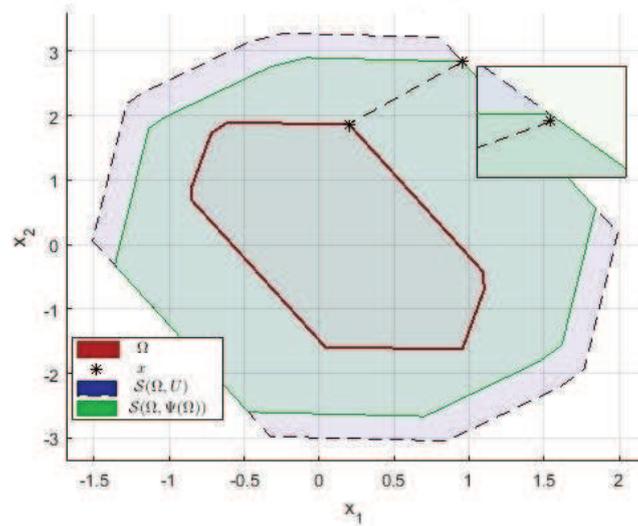


FIGURA 1. Evolución del estado a lazo cerrado, comenzando en $\mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$.

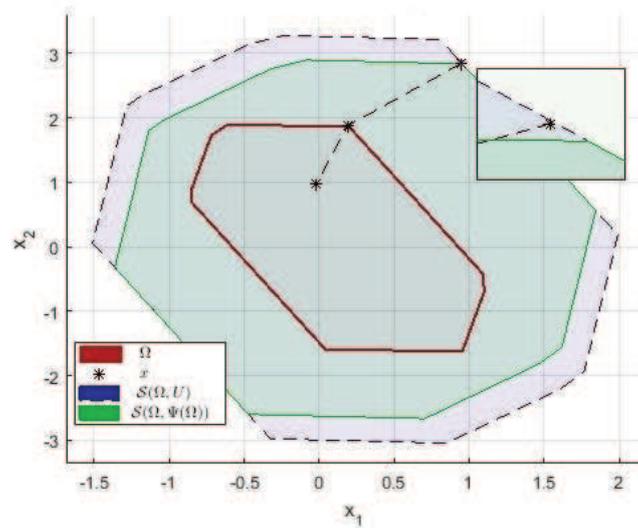


FIGURA 2. Evolución del estado a lazo cerrado, comenzando en $\mathcal{S}(\Omega, U) \setminus \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$. El estado no alcanza el objetivo establecido Ω en un solo paso.

TEOREMA 5. *Considérese el MPC derivado del problema $\mathcal{P}_N(x, \Omega)$, (6.2.3), con costo de etapa (6.4.1). Luego, para cualquier $x = x(0) \in \mathcal{S}^N(\Omega, U)$, el sistema $x(k+1) = F(x(k), \kappa_{MPC}(x(k)), w(k))$ converge en tiempo finito al conjunto Ω , para todo $w \in \mathcal{W}$.*

DEMOSTRACIÓN. De la Lema 5 se sabe que $d_\Omega(x(k)) \rightarrow 0$, por lo que se tiene que los estados controlados $x(k)$ convergen al conjunto Ω . Además por la Propiedad 3 del Capítulo 4 se tiene que $\Omega \subseteq \text{int } \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$. De estos dos resultados se tiene que existe un valor de $K \in \mathbb{N}$ tal que $x(k) \in \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$ para todo $k \geq K$. Por último, de la Propiedad 6, que afirma que el sistema controlado lleva los puntos de $\mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$ en un paso al conjunto Ω , se tiene que el sistema $x(k+1) = F(x(k), \kappa_{MPC}(x(k)), w(k))$ converge en tiempo finito al conjunto Ω con cota de convergencia $K+1$. \square

6.4.3. Cota de convergencia. Sabemos que el MPC propuesto converge en tiempo finito al conjunto objetivo, como se determinó en la sección anterior. El siguiente teorema proporciona, además, una cota superior para el tiempo de convergencia.

TEOREMA 6. *Considérese el MPC derivado del problema $\mathcal{P}_N(x, \Omega)$, (6.2.3), con costo de etapa (6.4.1). Luego, para cualquier $x = x(0) \in \mathcal{S}^N(\Omega, U)$, Ω es alcanzado por el sistema $x(k+1) = F(x(k), \kappa_{MPC}(x(k)), w(k))$ en a lo sumo $\lfloor K \rfloor$ pasos, con²*

$$(6.4.3) \quad K = \frac{V_N^0(x, \Omega)}{\min_{x \in \partial \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))} d_\Omega(x)} + 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Se procederá por contradicción. Consideremos un estado inicial $x(0) \in \mathcal{S}^N(\Omega, U) \setminus \mathcal{S}(\Omega, \Pi(\Omega))$ y un escalar m tal que $m > \frac{V_N^0(x(0), \Omega)}{\min_{x \in \partial \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))} d_\Omega(x)} = K - 1$, y supongamos que $x(k) \notin \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$, para todo $k = 1, 2, \dots, m$. Luego

$$(6.4.4) \quad -d_\Omega(x(k)) \leq -\min_{x \in \partial \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))} d_\Omega(x) < 0, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

²Notar que K está bien definido dado que por la Propiedad 3 del capítulo Capítulo 4, $\Omega \subset \text{int } \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$, y entonces $\min_{x \in \partial \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))} d_\Omega(x) \neq 0$.

Mas aún, por Lema 5, se sigue que $V_N^0(x(k+1), \Omega) - V_N^0(x(k), \Omega) \leq -d_\Omega(x(k))$, lo cual implica que

$$(6.4.5) \quad V_N^0(x(k+1), \Omega) - V_N^0(x(k), \Omega) \leq - \min_{x \in \partial \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))} d_\Omega(x) < 0,$$

para $k = 0, 1, \dots, m$. Resumiendo los términos de la última desigualdad desde $k = 0$ a $k = m$, se sigue que

$$(6.4.6) \quad V_N^0(x(m), \Omega) - V_N^0(x(0), \Omega) \leq -m \min_{x \in \partial \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))} d_\Omega(x),$$

lo cual significa que

$$(6.4.7) \quad V_N^0(x(m), \Omega) \leq -m \min_{x \in \partial \mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))} d_\Omega(x) + V_N^0(x(0), \Omega) < 0$$

Esta última desigualdad representa una contradicción, ya que el costo por definición es no negativo. Luego, $x(k)$ debe estar adentro de $\mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$ para algún $k \leq K - 1$. Además, el Lema 6 asegura que $x(k) \in \Omega$ para algún $k \leq K$, lo que concluye la prueba. \square

OBSERVACIÓN 23. Notar que el único requerimiento que debe cumplir el conjunto objetivo Ω , es el de ser un conjunto γ -invariante robusto de control, con $\gamma < 1$. Entonces, si uno tiene un punto objetivo de equilibrio x_{sp} , es posible elegir un conjunto Ω como $\hat{\Omega} \oplus x_{sp}$, donde $\hat{\Omega}$ es un conjunto γ -invariante robusto de control arbitrariamente pequeño (lo suficientemente grande como para asegurar que siga siendo cierta la Propiedad 3 del capítulo Capítulo 4), con un valor arbitrariamente pequeño de γ . En este caso, Ω aproxima el punto objetivo de equilibrio, y el problema de seguimiento de un punto es recuperado (aproximadamente).

6.5. Ejemplos

Aunque la principal contribución del capítulo es de naturaleza teórica, esta sección presenta resultados de simulación simples para ilustrar la forma en que se logra la convergencia de tiempo finito. El sistema seleccionado para probar el controlador es doble integrador $d^2y(t)/dt^2 = u(t)$, que proviene de una masa simple en un espacio unidimensional y , bajo el efecto de una fuerza variable en el tiempo entrada u . Mediante una discretización (con un tiempo de muestreo de $T = 1seg$) se obtiene el siguiente sistema de tiempo discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

$$\text{where } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$x = [x_1, x_2]^T$, con x_1, x_2 como la velocidad y la posición de la masa, respectivamente. Las restricciones de estado y entrada están dados por $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty \leq 4\}$, $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x_1\|_\infty \leq 15, \|x_2\|_\infty \leq 12\}$. Por razones de simplicidad, sólo el caso nominal será considerado ya que el objetivo es mostrar la convergencia en tiempo finito, una propiedad independiente de la robustez del controlador.

El controlador MPC es derivado del Problema (6.2.3), con el costo de etapa dado por (6.4.1), donde Ω es un conjunto γ -invariante arbitrario (ver Figura 3), con $\gamma < 1$, y $\Psi(\Omega)$ su conjunto de entradas correspondiente. La simulación, corriendo sobre 10 pasos de tiempo, comienza en cuatro estados iniciales diferentes fuera del conjunto Ω : $x_{01} = [-7, -7]^T$, $x_{02} = [7, 7]^T$, $x_{03} = [-15, 11]^T$ y $x_{04} = [15, -11]^T$.

Las siguientes afirmaciones pueden observarse después de ver las trayectorias mostradas en las Figuras 3 y 4:

- El sistema controlado alcanza al conjunto objetivo en un número de pasos significativamente menor al de la cota superior calculada en (6.4.3), la cual es mayor a 50 en todos los casos.
- Dado que Ω es un conjunto γ -invariante, con $\gamma < 1$, está contenido en el interior de $\mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$.
- Los estados del sistema no convergen al origen, pero a un punto arbitrario en el conjunto de estados de equilibrio \mathcal{X}_s (en negro, en la Figura 3), dado que no existen penalizaciones una vez que el sistema entra en Ω .
- Cada vez que el sistema controlado entra en $\mathcal{S}(\Omega, \Psi(\Omega))$, el conjunto Ω es alcanzado en un paso, como afirma el Lema 6.
- Para el estado inicial $x_{01} = [-7, -7]^T$ (o $x_{03} = [7, 7]^T$), el sistema entra en $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{U})$, en el paso 3. Luego, aunque puede alcanzar al conjunto Ω en el próximo paso de acuerdo a la dinámica del lazo abierto, no lo hace dado que no es el camino óptimo.

- El costo es nulo una vez que el sistema entra a Ω , como puede verse en la Figura 4.

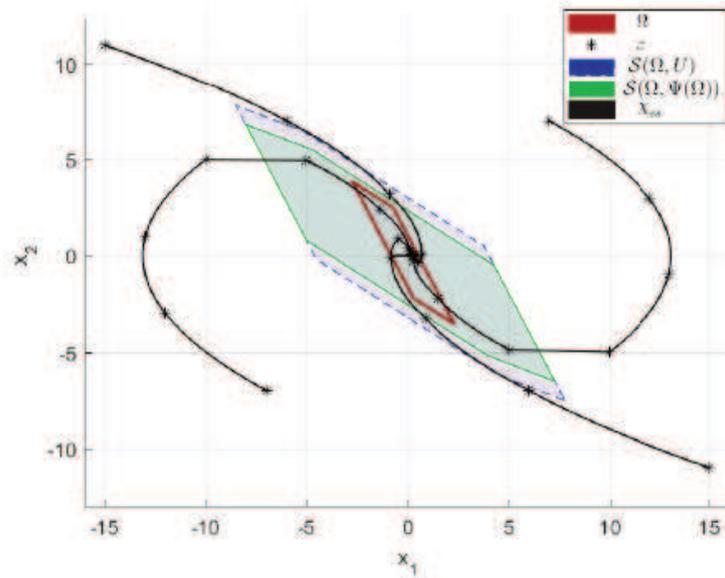


FIGURA 3. Evolución del sistema en lazo cerrado hacia el conjunto Ω .

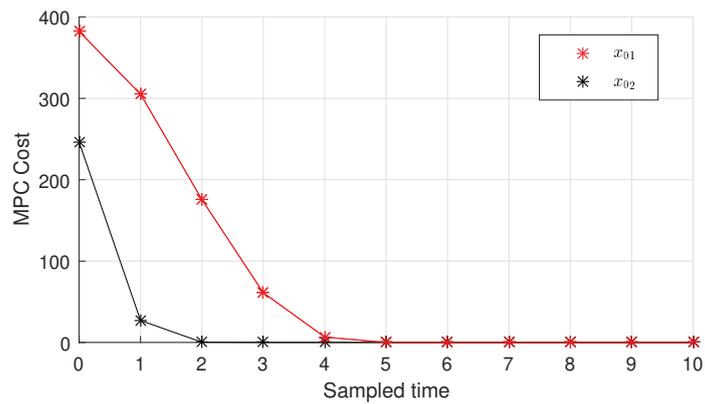


FIGURA 4. Costos producido por el MPC para diferentes estados iniciales.

OBSERVACIÓN 24. *Los conjuntos utilizados en el algoritmo $(\Omega$ y $\Psi(\Omega, \mathcal{U})$) se calculan fuera de línea (offline) con una complejidad computacional que depende de la función dinámica involucrada en el modelo ([Li and Lin, 2017, Bitsoris and Vassilaki, 2017, Rungger and Tabuada, 2017]). Con respecto a los cálculos en línea, la función de costo mide distancias entre conjuntos y puntos. Excepto por el cálculo de estas distancias (cuya complejidad depende de la forma de los conjuntos), el algoritmo propuesto no es más costoso desde el punto de vista informático que cualquier otra estrategia tradicional de MPC.*

6.5.0.1. *Parámetros de simulación de las Figuras 1 y 2.* Las simulaciones ilustradas en las Figuras 1 y 2 corresponden a sistema lineal estable de segundo orden $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, similar al presentado en [González et al., 2014], con los parámetros

$$(6.5.1) \quad A = \begin{bmatrix} 0,7476 & -0,4984 \\ 0,0356 & 1,0680 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,3 \\ -0,4 \end{bmatrix}.$$

Las restricciones del sistema están dadas por $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 10\}$ y $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty \leq 4\}$. El horizonte de predicción del controlador MPC $\mathcal{P}(\Omega, x)$, (6.2.3), con el costo de etapa (6.4.1), es $N = 7$, y el conjunto Ω es γ -invariante de control ($W = \{0\}$) con $\gamma = 0,65$, y su conjunto de entradas correspondientes es $\Psi(\Omega) = \{u \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty \leq 3\}$.

Los resultados de este capítulo fueron publicados en [Anderson et al., 2018d, Anderson et al., 2018c].

MPC con Máximo Dominio de Atracción

La importancia del dominio de atracción de un controlador MPC ya fue mencionada y explicada en el Capítulo 3, Sección 3.1.5. Allí se explican cuáles son los beneficios de expandir el dominio de atracción de un controlador y se describen algunas formas de lograrlo. Un punto importante a destacar en este contexto, es que un dado sistema o modelo, junto a las restricciones que le son propias, posee ya, implícitamente, un dominio de estabilizabilidad (dado formalmente por el máximo conjunto conjunto controlable), que contiene todos los estados que pueden ser controlados (de forma admisible) a algún equilibrio admisible [Kerrigan, 2000]. De este modo, toda región de este conjunto no cubierta por el dominio de atracción del MPC, constituirá un desperdicio del espacio de estado, debido sólo a limitaciones del control, y no del sistema en sí. De allí que el objetivo que realmente se busca cuando se busca expandir el dominio de atracción de un MPC, es justamente el de igualarlo al máximo conjunto controlable que el sistema admite. Aunque existen estrategias previas que logran incrementos significativos en el dominio de atracción del MPC, ninguna logra incrementar el dominio al máximo posible.

En este capítulo, se propone una formulación novedosa que explota los resultados de convergencia finita obtenidos en el capítulo anterior y, a partir de esto, consigue expandir el dominio de atracción hasta igualarlo al máximo conjunto controlable del sistema bajo control. Además, se mantienen las propiedades propias del MPCT (Capítulo 3), según las cuales no se pierde la estabilidad y factibilidad bajo ningún cambio del punto de referencia o setpoint.

Por lo demás, la propuesta consiste en un único problema de optimización que, sin embargo, se comporta como un MPC múltiple. Esta multiplicidad se presenta entre diferentes regiones del espacio de estado, caracterizadas como *cáscaras* en la Sección 29 del Capítulo 4. La estabilidad del lazo cerrado es demostrada sobre el final del Capítulo.

7.1. Introducción

La restricción terminal y el horizonte de predicción no demasiado largo son considerados como parte fundamental de las formulaciones MPC con garantía de estabilidad, pero a la vez representan una limitación en el conjunto de estados que el controlador puede estabilizar, este conjunto de estados se llama *dominio de atracción*.

Las estrategias para expandir este dominio, sin perder la estabilidad, van desde incrementar el horizonte de control, pasando por la modificación del costo y la restricción terminales, hasta el uso de restricciones terminales contractivas.

De estas, la más obvia, desde el punto de vista práctico, es la de incrementar el horizonte de predicción. Aunque esta estrategia es teóricamente válida, tiene dos inconvenientes principales: por un lado, el aumento del costo computacional puede ser desproporcionado y, por otro, y quizá peor, la pérdida de precisión en las predicciones de largo plazo que suelen mostrar los modelos utilizados, pueden afectar el desempeño del lazo.

El tercer enfoque (ver [Limon et al., 2005]), consiste en sustituir la restricción terminal por una restricción terminal contractiva (que se van encogiendo con el tiempo) utilizando conjuntos invariantes de control calculados previamente. El método alcanza el máximo dominio de atracción aunque el cambio el punto de referencia viene acompañado por el cálculo de una nueva secuencia de conjuntos invariantes de control, lo cual también es considerado computacionalmente costoso, ya que debe llevarse a cabo en línea¹, cada vez que ocurre un cambio.

La forma típica de solucionar esta potencial pérdida de factibilidad, es mediante la técnica conocida como MPC para seguimiento (MPCT) ([Limon et al., 2018]), descrita en Capítulo 3, Sección 3.4. Estas estrategias resuelven el problema de la factibilidad recursiva e incluso aumentan el dominio de atracción, pero generalmente sin alcanzar el máximo conjunto controlable.

Se considerará en este Capítulo un sistema lineal, nominal, como el descrito en 2.3.1, y reproducido a continuación por simplicidad:

$$(7.1.1) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k).$$

¹También podría hacerse offline, pero implicaría detener el controlador y, por lo tanto, dejar el sistema en lazo abierto, lo cual no es deseable por cuestiones de seguridad.

7.2. MPC con máximo dominio de atracción

Para un control de horizonte fijo $N \in \mathbb{N}$, vamos a presentar un MPC novedoso para seguimiento que permite ampliar el dominio de atracción de cualquier punto de referencia admisible $x^* \in \mathcal{X}_s$ al máximo conjunto controlable a \mathcal{X}_s , $S_\infty(\mathcal{X}_s, \mathcal{U})$. A partir de ahora, simplificamos la notación de $S_i(\mathcal{X}_s, \mathcal{U})$ y $L_i(\mathcal{X}_s, \mathcal{U})$ (conjunto controlable en i -pasos a \mathcal{X}_s , Sección 17, y conjunto i -cáscara, Sección 29), denotándolos por S_i y L_i , respectivamente, para todo $i = 0, 1, \dots, \infty$.

Sea $x \in S_\infty$. Se propone la siguiente función de costo

$$(7.2.1) \quad V_N(x; \mathbf{u}, \mathbf{x}^a, \mathbf{u}^a, x_s) = \sum_{j=0}^{N-1} \|x(j) - x^a(j)\|_Q^2 + \|u(j) - u^a(j)\|_R^2 + \|x_s - x^*\|_T^2,$$

donde \mathbf{u} es una secuencia de N entradas de control predichas, $\mathbf{u} := \{u(0), \dots, u(N-1)\}$. $x(j)$ es el estado predicho del sistema en el tiempo j dado por $x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$, con $x_0 = x$, $j \in \mathbb{I}_{N-1}$. La secuencia de N variables de estados y control auxiliares $\mathbf{x}^a := \{x^a(0), \dots, x^a(N-1)\}$ y $\mathbf{u}^a := \{u^a(0), \dots, u^a(N-1)\}$, tiene el propósito de representar la distancia de los estados $x(j)$ y entradas $u(j)$ a ciertos conjuntos que definiremos más adelante. Por último, x_s representa una variable artificial, que estará siempre en \mathcal{X}_s .

El controlador se deriva de la solución del problema de optimización $P_N(x, x^*)$ dado por

$$(7.2.2) \quad \min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}^a, \mathbf{u}^a, x_s} V_N(x; \mathbf{u}, \mathbf{x}^a, \mathbf{u}^a, x_s)$$

$$(7.2.3) \quad \text{s.a.} \quad x_0 = x,$$

$$(7.2.4) \quad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j),$$

$$(7.2.5) \quad x(j) \in \mathcal{X}, \quad j \in I_{N-1},$$

$$(7.2.6) \quad u(j) \in \mathcal{U}, \quad j \in I_{N-1},$$

$$(7.2.7) \quad x^a(j) \in \Omega_x, \quad j \in I_{N-1},$$

$$(7.2.8) \quad u^a(j) \in \Psi(\Omega_x), \quad j \in I_{N-1},$$

$$(7.2.9) \quad x(N) \in \Omega_x,$$

$$(7.2.10) \quad x_s \in \mathcal{X}_s,$$

donde Ω_x es un conjunto target que depende de la posición del estado inicial x , definido por

$$(7.2.11) \quad \Omega_x = \begin{cases} S_{kN}, & \text{si } x \in L_{kN}, \text{ con } k \geq 1 \\ \{x_s\}, & \text{si } x \in S_N, \end{cases}$$

y el conjunto $\Psi(\Omega_x)$ es el conjunto de entradas correspondientes a Ω_x . Téngase en cuenta que cuando el sistema está dentro de S_N tenemos $\Omega_x = \{x_s\}$, y por lo tanto, el conjunto de entrada correspondiente es $\Psi(\Omega_x) = \{u_s\}$, con u_s tal que $x_s = Ax_s + Bu_s$.

Teniendo en cuenta la estrategia de horizonte deslizante, la ley de control está dada por $\kappa_{MPC}(x) = \dot{u}(0)$, donde $\dot{u}(0)$ es el primer elemento de la secuencia óptima $\dot{\mathbf{u}} = \{\dot{u}(0), \dots, \dot{u}(N-1)\}$ de $P_N(x, x^*)$. Y el costo óptimo se define por

$$\dot{V}_N(x) := V_N(x; \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{x}}^a, \dot{\mathbf{u}}^a, \dot{x}_s)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{x}}^a, \dot{\mathbf{u}}^a, \dot{x}_s$ son las soluciones óptimas del problema $P_N(x, x^*)$.

La formulación del problema $P_N(x, x^*)$ depende del cálculo offline anterior de los conjuntos controlables S_{kN} para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado que \mathcal{X} es un conjunto compacto, la secuencia S_k converge (hasta una tolerancia dada) en finitos pasos para el conjunto S_∞ . Estos conjuntos se calculan solo una vez y son independientes de cualquier cambio en el punto de referencia, porque dependen del conjunto de equilibrio completo \mathcal{X}_s y no de x^* .

Las siguientes observaciones muestran que el problema $P_N(x, x^*)$ presenta un comportamiento dual dependiendo de la posición del estado inicial.

OBSERVACIÓN 25. *Cuando el estado actual x pertenece a $S_\infty \setminus S_N$, existe $k \geq 1$ tal que $x \in L_{kN}$. La variable artificial x_s no depende de ninguna otra variable de optimización. Por lo tanto, por optimalidad, será igual a $x^* \in \mathcal{X}_s$ y $\|x_s - x^*\| = 0$. Por lo tanto, el problema a resolver es equivalente a*

$$(7.2.12) \quad \begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} \sum_{j=0}^{N-1} d_Q(x(j), \Omega_x) + d_R(u(j), \Psi(\Omega_x)) \\ & \text{s.t.} \quad x_0 = x, \\ & \quad \quad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j \in I_{N-1}, \\ & \quad \quad x(j) \in \mathcal{X}, \quad j \in I_{N-1}, \\ & \quad \quad u(j) \in \mathcal{U}, \quad j \in I_{N-1}, \end{aligned}$$

$$x_N \in \Omega_x,$$

donde $\Omega_x = S_{kN}$ y $d_Q(x(j), \Omega_x) := \min\{\|x(j) - x(j)^a\|_Q^2 : x(j)^a \in \Omega_x\}$ es una distancia desde el estado predicho $x(j)$ al conjunto de destino Ω_x y $d_R(u(j), \Psi(\Omega_x)) := \min\{\|u(j) - u(j)^a\|_R^2 : u(j)^a \in \Psi(\Omega_x)\}$ es la distancia del control $u(j)$ al conjunto $\Psi(\Omega_x)$.

Esto significa que, mientras el estado actual no alcance el conjunto controlable en N -pasos, el controlador intentará minimizar la distancia de la trayectoria predicha a la siguiente cáscara.

OBSERVACIÓN 26. Cuando el sistema controlado alcanza al conjunto S_N , el conjunto objetivo es $\Omega_x = \{x_s\}$. Luego, por la restricción (7.2.9) $x(N) = x_s$, por (7.2.7) $x^a(0) = x^a(1) = \dots = x^a(N-1) = x_s$, y por (7.2.8) $u^a(0) = u^a(1) = \dots = u^a(N-1) = u_s$ con u_s tal que $x_s = Ax_s + Bu_s$; obteniendo el MPCT descrito anteriormente.

7.3. Estabilidad asintótica

A partir de ahora consideramos la siguiente suposición.

HIPÓTESIS 8. El conjunto S_N es un CCIS compacto y convexo (ver Definición 27).

OBSERVACIÓN 27. Tenga en cuenta que la suposición anterior no es tan restrictiva. Por ejemplo, es suficiente tener $S_N \subseteq \text{int}_{S_\infty} S_{N+1}$, incluso cuando no es cierto que $S_N \subseteq \text{int} S_{N+1}$ (ver el ejemplo presentado al final del capítulo). De hecho, si $S_N \subseteq \text{int}_{S_\infty} S_{N+1}$ luego S_N es un CCIS, y por el Lema 4 todos los S_{kN} son también CCIS, para todo $k \geq 1$.

7.3.1. Resultados preliminares. En primer lugar, tenga en cuenta que la factibilidad recursiva es una consecuencia inmediata de la propiedad anidada de los conjuntos controlables S_i . Sin embargo, la prueba de la atracción es más sutil ya que el costo óptimo no es una función de Lyapunov en todo el dominio de la atracción. Para demostrar que la trayectoria real producida por la estrategia propuesta alcanza en finitos pasos al conjunto S_N , primero debemos suponer lo contrario. El siguiente lema va en esta dirección.

LEMA 7. Sea $x \in L_{kN}$ para algún $k \geq 1$. Sea $\{x(i)\}_{i=0}^\infty$ la secuencia dada por el sistema a lazo cerrado $x(i+1) = Ax(i) + B\kappa_{MPC}(x(i))$, con $x(0) = x$. Si

$x(i) \notin S_{kN}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces

$$(7.3.1) \quad d_Q(x(i), S_{kN}) \rightarrow 0, \quad \text{when } i \rightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la solución del problema $P_N(x(i), x^*)$ es-
ta dado por $\dot{\mathbf{u}} = \{\dot{u}(0), \dots, \dot{u}(N-1)\}$, $\dot{\mathbf{u}}^a = \{\dot{u}^a(0), \dots, \dot{u}^a(N-1)\}$, $\dot{\mathbf{x}}^a =$
 $\{\dot{x}^a(0), \dots, \dot{x}^a(N-1)\}$, $\dot{x}_s = x^*$ y la secuencia de estado óptimo correspondiente
es $\dot{\mathbf{x}} = \{\dot{x}(0), \dots, \dot{x}(N)\}$ donde $\dot{x}(0) = x(i)$ y $\dot{x}(N) \in S_{kN}$. El costo óptimo está
dado por

$$\dot{V}_N(x(i)) = \sum_{j=0}^{N-1} \|\dot{x}(j) - \dot{x}^a(j)\|_Q^2 + \|\dot{u}(j) - \dot{u}^a(j)\|_R^2.$$

Dado que S_{kN} es un invariante, entonces existe $\hat{u} \in \Psi(S_{kN})$ tal que $\hat{x} = A\dot{x}(N) +$
 $B\hat{u} \in S_{kN}$. Entonces una solución factible del problema $P_N(x(i+1), x^*)$ es $\hat{\mathbf{u}} =$
 $\{\hat{u}(1), \dots, \hat{u}(N-1), \hat{u}\}$, $\hat{\mathbf{u}}^a = \{\hat{u}^a(1), \dots, \hat{u}^a(N-1), \hat{u}\}$, $\hat{\mathbf{x}}^a = \{\hat{x}^a(1), \dots, \hat{x}^a(N-1),$
 $\hat{x}_N\}$ y $\hat{x}_s = x^*$. La secuencia de estado factible predicha asociada es $\hat{\mathbf{x}} =$
 $\{\hat{x}(1), \dots, \hat{x}(N), \hat{x}\}$. Dado que $\hat{x}(1) = x(i+1) \notin S_{kN}$ entonces se puede ver que
 $\hat{x}(1) \in L_{kN}$. Por lo tanto, el costo factible correspondiente a $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{u}}^a$, $\hat{\mathbf{x}}^a$ y \hat{x}_s , está
dado por

$$(7.3.2) \quad \begin{aligned} V_N(x(i+1); \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}^a, \hat{\mathbf{u}}^a, \hat{x}_s) &= \sum_{j=1}^{N-1} \|\hat{x}(j) - \hat{x}^a(j)\|_Q^2 + \|\hat{u}(j) - \hat{u}^a(j)\|_R^2 \\ &+ \underbrace{\|\hat{x}(N) - \hat{x}(N)\|_Q^2 + \|\hat{u} - \hat{u}\|_R^2}_{=0} \end{aligned}$$

Lo que significa que

$$(7.3.3) \quad \begin{aligned} V_N(x(i+1); \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}^a, \hat{\mathbf{u}}^a, \hat{x}_s) - \dot{V}_N(x(i)) &= -\|\dot{x}(0) - \dot{x}^a(0)\|_Q^2 - \|\dot{u}(0) - \dot{u}^a(0)\|_R^2 \\ &\leq -\|\dot{x}(0) - \dot{x}(0)^a\|_Q^2 \\ &= -d_Q(x(i), S_{kN}), \end{aligned}$$

donde (7.3.3) es inmediato de la Observación 25. De ahí el costo óptimo $\dot{V}_N(x(i+1))$ satisface

$$(7.3.4) \quad \begin{aligned} \dot{V}_N(x(i+1)) - \dot{V}_N(x(i)) &\leq V_N(x(i+1); \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}^a, \hat{\mathbf{u}}^a, \hat{x}_s) - \dot{V}_N(x(i)) \\ &= -d_Q(x(i), S_{kN}), \end{aligned}$$

Luego $\{\dot{V}_N(x(i))\}_{i=0}^{\infty}$ es una secuencia decreciente positiva. Luego, $\dot{V}_N(x(\cdot))$ converge y así

$$\dot{V}_N(x(i+1)) - \dot{V}_N(x(i)) \rightarrow 0$$

donde $i \rightarrow \infty$. Por lo tanto, por (7.3.4), $d_Q(x(i), S_{kN}) \rightarrow 0$ donde $i \rightarrow \infty$. \square

7.3.2. Resultados principales. El siguiente Lema muestra que, cuando estamos bajo los supuestos de la Observación 25, i.e. el estado actual está en $S_\infty \setminus S_N$, el sistema de circuito cerrado dirige el estado actual de una capa a la siguiente.

LEMA 8 (Paso de una cáscara a otra). *Sea $x \in L_{kN}$ para $k \geq 1$. El sistema (7.1.1) controlado por la ley implícita $\kappa_{MPC}(\cdot)$ proporcionado por el problema $P_N(x, x^*)$ alcanza la siguiente cáscara $L_{(k-1)N}$.*

Ahora tenemos todos los ingredientes para presentar y probar el resultado principal de este capítulo.

TEOREMA 7 (Atractividad del máximo conjunto controlable). *Sea $x \in S_\infty$. Sea $\{x(i)\}_{i=0}^\infty$ la secuencia dada por el sistema a lazo cerrado $x(i+1) = Ax(i) + B\kappa_{MPC}(x(i))$, con $x(0) = x$. Luego*

$$(7.3.5) \quad d_Q(x(i), x^*) \rightarrow 0, \quad \text{para } i \rightarrow \infty.$$

COROLARIO 2 (Estabilidad asintótica). *El punto de referencia $\{x^*\}$ es asintóticamente estable para el sistema a lazo cerrado controlado por $\kappa_{MPC}(\cdot)$ para todo $x \in S_\infty$.*

7.4. Ejemplos

En este capítulo se presentarán algunos resultados de simulaciones para evaluar la estrategia de control propuesta. Primero, se muestra una descripción de el sistema, luego presentamos los resultados de la simulación dinámica.

7.4.1. Descripción del sistema. Para mostrar los beneficios y las propiedades del controlador propuesto, consideramos un doble integrador:

$$(7.4.1) \quad x(i+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(i) + \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} u(i).$$

El sistema debe cumplir las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : -5 \leq x_1 \leq 5; -1 \leq x_2 \leq 1\}, \\ \mathcal{U} &= \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_\infty \leq 0,05\}. \end{aligned}$$

La Figura 1 muestra el conjunto de equilibrio \mathcal{X}_s , el conjunto controlable S_{N+1} , y la secuencia de conjuntos S_{kN} , $k \in \mathbb{N}$, con un horizonte de predicción $N = 3$. Observar que $S_N \subset \text{int}_{S_\infty} S_{N+1}$, el cual implica que S_N es un CCIS (ver Observación 27). Entonces, el MPC propuesto se formulará bajo la Suposición 8. Se puede notar que el máximo dominio de atracción del sistema (7.4.1) se alcanza con $k = 7$, i.e $S_\infty = S_{7N}$.

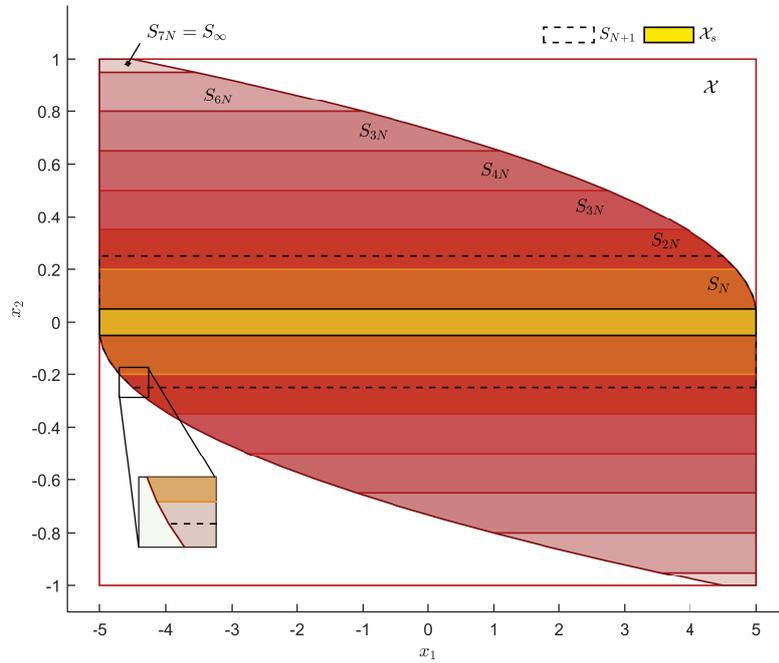


FIGURA 1. Secuencia de conjuntos controlables S_{kN} para $k = 1, \dots, 7$ y $N = 3$. La ventana muestra que el conjunto S_N pertenece al interior de S_{N+1} relativo a S_∞ .

Para probar el desempeño del sistema a lazo cerrado controlado por el MPC propuesto, se considera un estado inicial en la cáscara más alejada al conjunto de equilibrio, $x_0 = (-4,9; 0,96)$. Además, se considera un cambio de setpoint. Antes de que el sistema a lazo cerrado alcance el setpoint inicial $x_i^* = (-4; 0)$, el punto de operación cambia por $x_f^* = (3,5; 0)$, en el tiempo $k = 70$. La evolución

de estados en la Figura 2 claramente muestra la capacidad del controlador propuesto en dirigir al sistema a lazo cerrado hacia el setpoint deseado, sin perder la factibilidad.

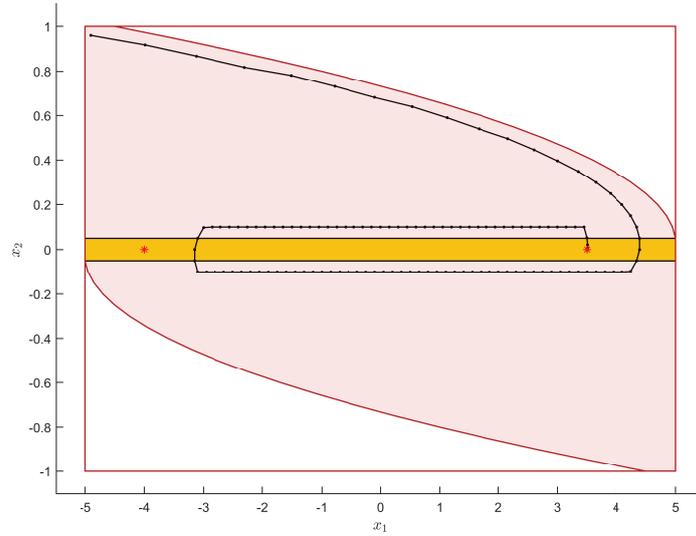


FIGURA 2. Evolución del sistema a lazo cerrado empezando en $x_0 = (-4,9; 0,96)$. Para el tiempo $k \leq 70$ el setpoint es $x_i^* = (-4; 0)$ y $x_f^* = (3,5; 0)$ para $k > 70$.

7.4.2. Desempeño comparado con otras estrategias. En esta sección, el desempeño del MPC propuesto se compara con otras dos estrategias. La comparación se realizará primero con el MPCT propuesto en [Limon et al., 2018], que resuelve el problema de la pérdida de factibilidad bajo cambios en el setpoint y extiende el dominio de atracción del controlador. Luego, en una segunda etapa, el MPC propuesto se compara con el MPC presentado en [Limon et al., 2005], que también logra alcanzar el dominio máximo de atracción que el sistema permite para cualquier horizonte de predicción.

Para cuantificar adecuadamente el desempeño del controlador, se propone el siguiente índice.

$$(7.4.2) \quad \Phi = \frac{1}{T_{sim}} \sum_{k=1}^{T_{sim}} \|x(k) - x^*\|_{\infty} + \|u(k) - u^*\|_{\infty},$$

donde T_{sim} representa el tiempo total de simulación. El índice Φ penaliza la distancia - dada por la norma infinito - entre los estados y las entradas del sistema a lazo cerrado con respecto al setpoint.

a) La primera estrategia con la que se compara el desempeño del controlador propuesto es el MPC para el seguimiento (MPCT) con una función de costo de terminal y una restricción de desigualdad de terminal, propuesta en [Limon et al., 2018]. La función de costo terminal para este controlador está dada por $V_f(x - x_a) = \|x - x_a\|_P^2$, la cual es una función de Lyapunov para el sistema bajo un controlador local. La restricción terminal está dada por $(x(N), x_a, u_a) \in \Omega_t^a$, donde Ω_t^a es el conjunto invariante para tracking, y también está asociado al control local. El control local (terminal) se eligió por el regulador cuadrático lineal (LQR de sus siglas en inglés Linear Quadratic Regulator) con $Q = 0,5I_n$ y $R = 2I_m$, y está dado por

$$(7.4.3) \quad K_{LQR} = \begin{bmatrix} 0,0509 & -0,3910 \\ -0,4335 & -0,7736 \end{bmatrix}.$$

Sea Ω_t la proyección de Ω_t^a sobre \mathcal{X} , luego, el dominio de atracción está dado por el conjunto de estados que pueden ser llevados de forma admisible al conjunto Ω_t en N pasos, i.e. $S_N(\Omega_t, \mathcal{U})$.

La Figura 3 compara el dominio de atracción del MPCT, $S_N(\Omega_t, \mathcal{U})$ con el dominio de atracción del MPC propuesto, S_∞ , con horizonte de predicción $N = 3$ en ambos casos. Como puede verse, el dominio de atracción del MPC propuesto es significativamente mayor que el del MPCT para el horizonte seleccionado. Más aún, para alcanzar el máximo dominio de atracción con el MPCT, se necesitaría un horizonte de predicción de $N = 18$, i.e. $S_\infty = S_{18}(\Omega_t, \mathcal{U})$, el cual incrementaría el costo computacional del problema de optimización y además, al incrementar el horizonte de predicción, el modelo podría no ajustar adecuadamente al sistema real.

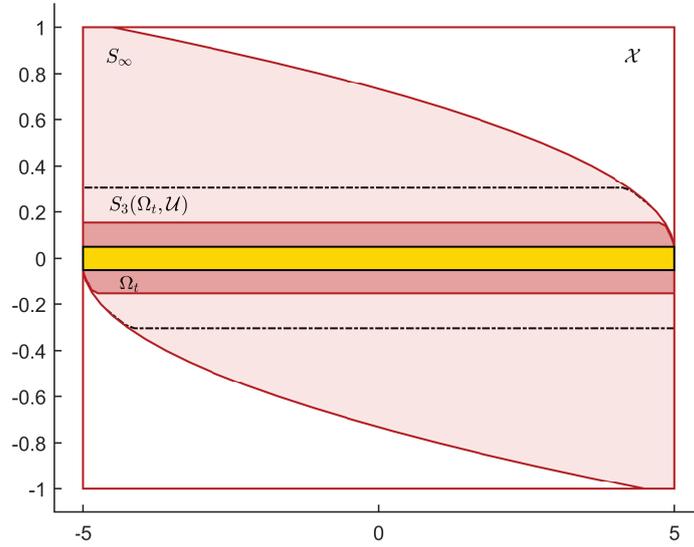


FIGURA 3. $S_3(\Omega_t, \mathcal{U})$: Dominio de atracción del MPCT con horizonte de predicción $N = 3$. S_∞ : Dominio de atracción del MPC propuesto, con el mismo horizonte de predicción.

La comparación numérica entre el rendimiento de ambos controladores se realizó utilizando el índice (7.4.2). Para llevar a cabo esta comparación, se tomaron varios puntos aleatorios iniciales dentro del conjunto S_∞ . Cada punto inicial es llevado hacia el setpoint dado por ambos controladores. En el diseño de MPC propuesto para este experimento se utilizó un horizonte de predicción. $N = 3$. El MPCT no es capaz de controlar cada punto de S_∞ con $N = 3$, por lo que se lo diseñó con un horizonte de predicción de $N = 18$. El promedio del índice en cada caso se muestra en la Tabla 1.

	Promedio de Φ
MPC Propuesto	2.0480
MPC Propuesto en [Limon et al., 2018]	2.0053

CUADRO 1. Desempeño del MPC propuesto y del MPCT

Como era de esperar, la performance del controlador propuesto no es mejor que la del MPCT². De hecho, el mejor desempeño del MPCT se justifica debido a que se utiliza un horizonte de predicción mucho mayor ($N = 18$). De cualquier forma, se debería notar que la diferencia entre los rendimientos no son significantes, y parece ser un precio razonable a pagar para obtener el máximo dominio de atracción posible con una reducción significativa del horizonte de predicción ($N = 3$).

b) La segunda estrategia seleccionada para comparar el desempeño del controlador propuesto, es el MPC presentado en [Limon et al., 2005]. Las simulaciones se harán con el sistema lineal de segundo orden presentado en el trabajo mencionado, i.e.

$$(7.4.4) \quad x(i+1) = \begin{bmatrix} 1,2775 & -1,3499 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(i) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(i),$$

con $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 5\}$ y $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty < 1\}$. Los controladores son diseñados con parámetros iguales: $N = 5$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $R = 10$. Figura 4 presenta la evolución del sistema a lazo cerrado controlado por el MPC propuesto, para el estado inicial $x_0 = (-4, 17, -2)$.

²Asimismo, el controlador MPCT trata de conducir el sistema al punto de referencia lo más rápido posible. Por otro lado, el MPC propuesto sólo busca ir a la cáscara más interior hasta alcanzar la última, descuidando en un principio el objetivo de tracking.

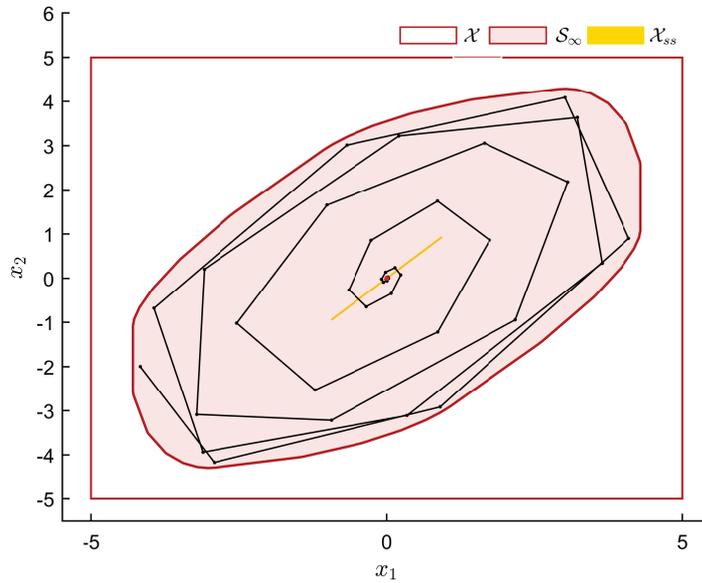


FIGURA 4. Evolución del sistema a lazo cerrado empezando en $x_0 = (-4, 17; -2)$ y con setpoint $x^* = (0, 0)$.

Nuevamente, varios puntos iniciales al azar fueron considerado dentro del conjunto S_∞ para ser controlados y llevados al setpoint $x^* = (0, 0)$ por ambos controladores. La Tabla 2 muestra que ambos controladores tienen desempeños similares de acuerdo al índice 7.4.2.

	Promedio de Φ
MPC Propuesto	0.6280
MPC Propuesto en [Limon et al., 2005]	0.6282

CUADRO 2. Desempeño del MPC propuesto y del MPC presentado en [Limon et al., 2005]

Resumiendo, a pesar de varios beneficios de las estrategias anteriores, a la hora de expandir el dominio de atracción [Limon et al., 2018, Limon et al., 2005], estas no logran una única formulación con la cual no se pierda factibilidad bajo cambios de setpoint y alcance el máximo dominio de atracción que el sistema permita para cualquier horizonte de predicción. En este capítulo se

propuso un MPC que resuelve esta debilidad sin tener diferencia significativa en el desempeño. Más aún, el método propuesto evita el uso del conjunto invariante para tracking utilizado en [Limon et al., 2018] -el cual, paso algunos caso, presenta cierta dificultad a la hora de calcularlo- y, además, almacena considerablemente menos conjuntos controlables que la estrategia propuesta por [Limon et al., 2005].

Los resultados de este capítulo dieron origen a un artículo enviado a Automatica, [Anderson et al., 2018b].

MPC Robusto para Identificación de Sistemas a Lazo Cerrado

La estrategia de *control predictivo* basado en conjuntos invariantes ha sido desarrollada a lo largo de toda esta tesis, ya sea con el objetivo de mostrar convergencia en tiempo finito o expandir el dominio de atracción del MPC. En este capítulo se siguen estudiando las ventajas del esquema de MPC basado en conjuntos, esta vez con la finalidad de diseñar un control adecuado para re-identificar un sistema sin la necesidad de abrir el lazo. La propuesta busca resolver el conflicto que se presenta en estos casos, y que tiene que ver con la necesidad simultánea de excitar persistentemente el sistema (para poder identificarlo), y de rechazar perturbaciones (para poder permanecer en lazo cerrado).

Basado en las ideas que originalmente se propusieron en [González et al., 2014], este capítulo extiende aquellos resultados debido a la consideración de las incertidumbres del modelo original en el diseño del control predictivo ([Anderson et al., 2018e]), los cual no fue contemplado previamente.

8.1. Introducción

8.1.1. Marco teórico. Como es sabido, el control predictivo basado en modelos es una técnica de control que basa su performance, principalmente, en un modelo simplificado del sistema dinámico a controlar. En la mayoría de las aplicaciones, este modelo requiere una actualización periódica (re-identificación) la cuál es preferible realizarla a modo de lazo cerrado en orden de no parar el proceso de control. El principal problema de la actualización del modelo a lazo cerrado es que los objetivos de control son opuestos a los de excitar el sistema para su correspondiente identificación. Desde el punto de vista del controlador, la excitación persistente requerida por cualquier procedimiento de identificación es tomada como una perturbación que debe rechazarse. Por otro lado, desde el

punto de vista de la identificación, las acciones de control producen correlaciones indeseables entre las señales utilizadas para obtener los parámetros del modelo.

En la literatura se han desarrollado varias estrategias para realizar una re-identificación a lazo cerrado bajo controladores MPC. El lector interesado puede remitirse a [Genceli and Nikolaou, 1996, Zacekova et al., 2013], donde se explica y estudia el problema principal de una identificación a lazo cerrado, es decir, que los objetivos de control son incompatibles (opuestos) con los objetivos de identificación, o [Heirung et al., 2012, Potts et al., 2014] en el que se propone un método para manejar estos objetivos opuestos, y cómo realizar la re-identificación de un sistema a lazo cerrado en ([Patwardhan and Gopaluni, 2014, Marafioti et al., 2014, Larsson et al., 2013]).

El principal inconveniente teórico de estos esquemas es la falta de garantía en el análisis de factibilidad formal y estabilidad asintótica. Sin embargo, [González et al., 2014] alcanzó un diseño de MPC adecuado para la re-identificación que supera este inconveniente, garantizando estabilidad asintótica y factibilidad recursiva, realizando al mismo tiempo una identificación segura a lazo cerrado. La idea básica de este diseño es guiar los estados del sistema hacia el interior de un conjunto invariante (conjunto target), al cual llaman ISI (del acrónimo en inglés Invariant Set for Identification). Es decir, controlar fuera del target, y una vez que el sistema entre dentro del conjunto target excitar sus estados de forma persistente, así se obtienen datos de entrada-salida no correlacionados para la identificación de los parámetros del modelo. Como la formulación basada en conjuntos utiliza la noción de distancia generalizada desde un punto (trayectoria de estado y de entrada) a un conjunto invariante, ambas tareas opuestas pueden ser separadas espacialmente en el espacio de estado. Esta estrategia fue examinada aplicándose a un reactor de polimerización en [Bustos et al., 2016, G.Bustos, 2014] con resultados satisfactorios.

Sin embargo, la propuesta presentada en [González et al., 2014] el diseño sólo fue desarrollado para el caso nominal, es decir, para un modelo sin incertidumbres (aunque el conjunto target es calculado de forma robusta), siendo que los escenarios de re-identificación se dan precisamente cuando el modelo de predicción ya no es válido. Para resolver esto, en este capítulo se propone una formulación de MPC con propiedades de robustez durante todo el proceso de re-identificación (control e identificación). Para esto nos basamos en formulación

de MPC asentado en la noción de tubos determinísticos presentado en [Mayne et al., 2005]. Existen diferentes enfoques robustos con cual realizar el análisis, entre todos empleamos la estrategia propuesta por [Mayne et al., 2005] debido a que esta expone el mismo orden de complejidad en línea que el mostrado para el MPC convencional aplicado a sistemas lineales nominales, i.e. costo cuadrático e incertidumbres aditivas, entre otras ventajas. Con el objetivo de emplear la estrategia de tubos determinísticos, la incertidumbre paramétrica del modelo se convierte en incertidumbre aditiva por medio de una transformación adecuada. Aunque la formulación de MPC basada en tubos determinísticos es la elegida para tratar la incertidumbre del sistema, existen varias maneras de extender el MPC nominal del trabajo anterior al caso robusto, podemos hacer referencia, por ejemplo, a los siguientes trabajos importantes [Limon et al., 2008, Raimondo et al., 2009, Langson et al., 2004], donde el enfoque es diferente pero igualmente aplicable.

En resumen, la contribución de este capítulo es ampliar la estrategia presentada en [González et al., 2014] al caso robusto y considerar incertidumbres paramétricas y aditivas en el modelo del sistema.

8.2. Esquema de re-identificación

8.2.1. Planteo del problema. En este capítulo se supone una estructura de control general en la cual un MPC no robusto (basado en un modelo nominal) se usa para controlar un sistema. Habiendo sospecha de que el modelo de predicción utilizado se encuentra significativamente deteriorado, el MPC nominal es reemplazado por un MPC adecuado para la re-identificación, y se realiza el procedimiento de excitación y recolección de datos para obtener un nuevo (y más preciso) modelo. Una vez obtenido el modelo nominal actualizado, el MPC nominal reanuda el control de la planta. La idea detrás de esta estrategia es que el MPC nominal con un modelo preciso es la mejor opción para controlar un sistema en comparación con estrategias robustas de MPC (se realizaron muchos estudios sobre el alto conservadurismo intrínseco y el gasto computacional de los MPC robustos ([Mayne, 2016])

Con respecto al MPC adecuado para la re-identificación a lazo cerrado, el objetivo de este capítulo es desarrollar una estrategia **robusta** de MPC que permita

una re-identificación segura a lazo cerrado para toda la familia de sistemas lineales que se presenta en la ecuación (8.3.1). Este controlador divide espacialmente la tarea de controlar e identificar en dos partes: fuera de un conjunto target dado (TS por su acrónimo en inglés), dirige robustamente al sistema incierto hacia él y en el interior realiza una excitación de los estados la cual permite una re-identificación adecuada y segura. En este contexto, el TS debe entenderse en su doble función como conjunto target de control (cuando la entrada del sistema es una acción de control manipulada) y por conjunto de excitación (cuando la entrada del sistema es una señal de excitación no manipulada). Para la primera función, el TS debe ser invariante robusto para la incertidumbre paramétrica descrita en la siguiente sección (para poder mostrar la estabilidad robusta) mientras que, en la segunda función, el TS debe ser además invariante para la señal de excitación persistente necesaria para la re-identificación, para que el sistema permanezca dentro del TS durante la excitación.

8.3. Modelo de predicción incierto

8.3.1. Familia de modelos. Se considera que el sistema real y desconocido se encuentra en la familia de modelos de predicción dados en la ecuación 2.3.2, y reescrito nuevamente para facilitar la lectura:

$$(8.3.1) \quad x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k), \quad \theta \in \Theta,$$

donde $x(k) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema a tiempo de muestra k , $u(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $A(\theta)$ y $B(\theta)$ son funciones Lipschitz de $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$, y θ es un parámetro fijo desconocido que considera la diferencia sistema real y modelo de predicción. El modelo de predicción nominal se representa por (\bar{A}, \bar{B}) , donde $\bar{A} := A(0)$, y $\bar{B} := B(0)$. Se asume que los conjuntos \mathcal{X} , \mathcal{U} y Θ son compactos, convexos y contienen al origen en su interior. Además, $A(\theta)$ tiene todos sus valores propios estrictamente dentro del círculo unitario, y el par $(A(\theta), B(\theta))$ se supone controlable, para todos $\theta \in \Theta$.

Se supone que el conjunto Θ es convexo. Por lo tanto, el conjunto de posibles modelos viene dado por

$$\mathcal{M} = \text{co}\{(A(\theta), B(\theta)) : \forall \theta \in \Theta\}.$$

Por lo tanto, el par $(A(\theta), B(\theta))$ puede tomar, en cualquier momento, cualquier valor en el conjunto convexo \mathcal{M} . El conjunto \mathcal{M} representa a la familia de posibles modelos.

8.4. Estrategia Robusta

8.4.1. Incertidumbres aditivas. En esta sección, el MPC propuesto en [González et al., 2014] se extiende al caso robusto, de acuerdo con la estrategia de aproximación por tubo presentada en [Mayne et al., 2005]. Para dar cuenta de incertidumbres aditivas, de forma que también cubra el modelo con incertidumbres paramétricas presentado en la ecuación (8.3.1)¹, se considera el siguiente modelo:

$$(8.4.1) \quad x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) + w(k),$$

con $w(k) \in \mathcal{W}$, y el conjunto $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ definido como

$$(8.4.2) \quad \mathcal{W} = \{(A(\theta) - \bar{A})x + (B(\theta) - \bar{B})u : \theta \in \Theta, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\}.$$

esta forma \mathcal{W} es un conjunto acotado que contiene el origen en su interior y además si $w(k)$ es tal que toma el valor $w(k) = (A(\theta) - \bar{A})x(k) + (B(\theta) - \bar{B})u(k)$, entonces $w(k) \in \mathcal{W}$, y la familia de modelos (8.4.1) contiene (quizás de manera conservadora) a toda la familia (8.3.1) ([Rawlings and Mayne, 2009]).

OBSERVACIÓN 28. Representar incertidumbres paramétricas como incertidumbres aditivas puede ser una solución intuitiva y relativamente sencilla pero conservadora. Sin embargo, es una forma práctica de tratar las incertidumbres paramétricas, y permite aplicar estrategias robustas de MPC conocidas como el MPC por tubos ([Rawlings and Mayne, 2009, Chapter 3]).

8.4.2. Tubos determinísticos. El sistema nominal correspondiente a (8.4.1) viene dado por

$$(8.4.3) \quad \bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k),$$

entonces el error $e(k) = x(k) - \bar{x}(k)$ tiene la siguiente dinámica incierta $e(k+1) = \bar{A}e(k) + w(k)$.

¹Las incertidumbres paramétricas del sistema (8.3.1) se transforman en incertidumbres aditivas (usando las ideas de [Rawlings and Mayne, 2009, Capítulo 3]) para afrontarlas de una manera que ha sido estudiada más detenidamente en el marco teórico.

En base al modelo para el error, se introducen los llamados tubos determinísticos.

PROPOSICIÓN 10. *Supongamos que Z es un conjunto invariante robusto² para el sistema $e(k+1) = \bar{A}e(k) + w(k)$. Si $x(k) \in \bar{x}(k) \oplus Z$, entonces $x(k+1) \in \bar{x}(k+1) \oplus Z$ para todo $w(k) \in \mathcal{W}$, donde $x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) + w(k)$ y $\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k)$.*

8.4.3. Conjunto target (TS). El conjunto target que usaremos en la formulación del MPC robusto propuesto es un conjunto $\Omega \subset \mathcal{X}$ tal que este sea un *invariante robusto de control* para el sistema 8.3.1 según la Definición 22, y el conjunto de entradas correspondientes a $\Psi(\Omega)$ según la Definición 23, presentadas en el Capítulo 4.

8.4.4. Restricciones del problema nominal. Sea $Z \subset \mathcal{X}$ definido como en la Proposición 10, y Ω definido como en la Sección 8.4.3. Se definen los siguientes conjuntos de restricciones:

$$(8.4.4) \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{X}} &:= \mathcal{X} \ominus Z, \\ \bar{\Omega} &:= \Omega \ominus Z, \end{aligned}$$

se debe asumir que $Z \subset \mathcal{X}$ y $\Omega \subset Z$ (hipótesis habituales en este contexto), para que los conjuntos en (8.4.4) no sean vacíos.

PROPOSICIÓN 11. *El conjunto $\bar{\Omega}$ definido en (8.4.4) es un invariante de control para el sistema nominal (8.4.3).*

DEMOSTRACIÓN. Para ver eso, tenga en cuenta que Ω es en particular un invariante de control para el sistema (8.4.3), ya que $0 \in \Theta$. Sea $x(k) \in \bar{\Omega}$, lo cual significa que $x(k) = y(k) - z(k)$ para algún $y(k) \in \Omega$, $z(k) \in Z$, y sea $u(k)$ sea tal que $\bar{A}y(k) + \bar{B}u(k) \in \Omega$. Luego

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) \\ &= \bar{A}(y(k) - z(k)) + \bar{B}u(k) \\ &= \bar{A}y(k) + \bar{B}u(k) - \bar{A}z(k), \end{aligned}$$

y $\bar{B}u(k) - \bar{A}z(k) \in \Omega \ominus Z = \bar{\Omega}$. □

²Recordemos que Z es un conjunto invariante robusto para el sistema $e(k+1) = \bar{A}e(k) + w(k)$ si $e(k) \in Z \Rightarrow e(k+1) \in Z$, para todo $w(k) \in \mathcal{W}$.

Los conjuntos $\bar{\mathcal{X}}$ y $\bar{\Omega}$ son las restricciones de estados y restricción final para los estados nominales, de la formulación que se presentará más adelante.

8.4.5. Función costo. La formulación de MPC robusta está basada en predicciones nominales perteneciente al conjunto de restricciones de estado y conjunto terminal $\bar{\mathcal{X}}$ y $\bar{\Omega}$, respectivamente. La función de costo del propuesta es

$$(8.4.5) \quad V_N(x, \bar{\Omega}; \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} [\alpha d_{\bar{\Omega}}(\bar{x}(j)) + \beta d_{\Psi(\Omega)}(u(j))],$$

donde $\mathbf{u} = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$ es la secuencia de acciones de control, $\bar{x}(j)$ es el estado del modelo de predicción nominal 8.4.3. α y β son constantes positivas, y $N \in \mathbb{N}$ es el horizonte de predicción.

8.4.6. Formulación nominal. Dado un estado $x \in \bar{\mathcal{X}}_N \subset \bar{\mathcal{X}}$, donde $\bar{\mathcal{X}}_N$ es el conjunto controlable en N -pasos a $\bar{\Omega}$ para el modelo de predicción nominal 8.4.3. Y el conjunto $\mathcal{U}_N(x)$ es la familia de secuencias $\mathbf{u} = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$, con $u(j) \in \mathcal{U}$ para $j \in \mathbb{I}_N$, tal que llevan al estado x en N pasos al conjunto $\bar{\Omega}$ por medio de una trayectoria factible, i.e.

$$\mathcal{U}_N(x) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}^N : x(0) = x, u(j) \in \mathcal{U}, x(j) \in \bar{\mathcal{X}}, k \in \mathbb{I}_{N-1}, x(N) \in \bar{\Omega}\},$$

En cada instante de tiempo k se resuelve el problema de optimización $\mathcal{P}_N(x, \bar{\Omega})$ en cada paso de tiempo y este viene dado por

$$V_N^0(x, \bar{\Omega}) = \min\{V_N(x, \bar{\Omega}; \mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{U}_N(x)\},$$

Si no se consideran explícitamente las incertidumbres, del Capítulo 3 o resultados similares ([González et al., 2014]), para la secuencia óptima de control $\mathbf{u}^0(x) := \{u_0^0(0; x), \dots, u_0^0(N-1; x)\}$, tal que la ley de control del MPC nominal es $\kappa_N(x, \bar{\Omega}) = u_0^0(0; x)$, sabemos que se cumple:

$$(8.4.6) \quad V_N^0(\bar{A}x + \bar{B}\kappa_N(x, \bar{\Omega}), \bar{\Omega}) - V_N^0(x, \bar{\Omega}) \leq -\alpha d_{\bar{\Omega}}(x).$$

De la cual se deriva la estabilidad asintótica del conjunto $\bar{\Omega}$.

8.4.7. Formulación robusta. Si la incertidumbre se considera explícitamente, no es necesariamente cierto que, dado cualquier $x \in \bar{\mathcal{X}}_N \setminus (\bar{\Omega} \oplus Z)$, $V_N^0(\bar{A}x + \bar{B}\kappa_N(x, \bar{\Omega}) + w, \bar{\Omega})$ es más pequeño que $V_N^0(x, \bar{\Omega})$, para todo $w \in \mathcal{W}$.

Por lo tanto, necesitamos establecer la estabilidad asintótica robusta del conjunto $\bar{\Omega} \oplus Z$, teniendo en cuenta que $\bar{\Omega} \oplus Z = \Omega \ominus Z \oplus Z \subseteq \Omega$ ([Blanchini and Miani, 2008]), implica la estabilidad asintótica robusta del conjunto Ω .

El problema robusto propuesto $\mathcal{P}_N^{rob}(x, \bar{\Omega})$ esta definido por

$$(8.4.7) \quad V_N^*(x, \bar{\Omega}) = \min\{V_N(\bar{x}(0), \bar{\Omega}; \mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{U}_N(x), x \in \bar{x}(0) \oplus Z\}.$$

En el problema $\mathcal{P}_N^{rob}(x, \bar{\Omega})$, las variables de decisión son \mathbf{u} y $\bar{x}(0)$. La función costo, la restricción de estado, entrada y restricción terminal son las mismas que en problema nominal $\mathcal{P}_N(x, \bar{\Omega})$. Sin embargo, para tener en cuenta la robustez deseada, es necesaria una restricción adicional para el estado inicial nominal. Dado que ahora x es incierto, el estado inicial \bar{x}_0 es una nueva variable de decisión ([Mayne et al., 2005]) que debe cumplir lo siguiente.

$$x \in \bar{x}(0) \oplus Z.$$

8.4.8. Sistema con incertidumbre aditiva a lazo cerrado. La solución de $\mathcal{P}_N^{rob}(x, \bar{\Omega})$ produce la secuencia de control óptima

$$\mathbf{u}^*(x) := \{u^*(0; x), \dots, u^*(N-1; x)\}$$

y el estado inicial nominal óptimo

$$\bar{x}^*(0; x),$$

tal que la secuencia de estado óptima asociada es $\bar{\mathbf{x}}^*(x) := \{\bar{x}^*(0; x), \dots, \bar{x}^*(N; x)\}$. Cabe aclarar que la solución $\bar{x}^*(0; x)$ no es necesariamente igual al estado actual x del sistema controlado.

La ley del MPC (implícita) es, por lo tanto,

$$(8.4.8) \quad \kappa_N^*(x, \bar{\Omega}) := u^*(0; x),$$

y el modelo de predicción incierto - bajo el modelo robusto de control predictivo satisface

$$(8.4.9) \quad x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}\kappa_N^*(x(k), \bar{\Omega}) + w(k),$$

con $w(k) \in \mathcal{W}$.

8.4.9. Estabilidad asintótica robusta. La ley de control del MPC robusto $\kappa_N^*(x, \bar{\Omega})$ proporciona una función de Lyapunov no creciente a lo largo de trayectorias que comienzan en cualquier estado $x \in \mathcal{X}_N$, donde este último se define como

$$\mathcal{X}_N := \{x : \exists \bar{x}(0) \in \bar{\mathcal{X}}_N \text{ tal que } x \in \bar{x}(0) \oplus Z\},$$

para todo $w \in \mathcal{W}$. Esto muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 8. Suponga que $x \in \mathcal{X}_N$, entonces una solución al problema $\mathcal{P}_N^{rob}(x, \bar{\Omega})$ existe, supongamos que esta es $(\bar{x}^*(0; x), \mathbf{u}^*(x))$. Por lo tanto, para todo $x^+ \in \bar{A}x + \bar{B}\kappa_N^*(x, \bar{\Omega}) \oplus \mathcal{W}$, el par $(\bar{x}^*(1; x), \tilde{\mathbf{u}}(x))$ es factible para $\mathcal{P}_N^{rob}(x^+, \bar{\Omega})$, con $\tilde{\mathbf{u}}(x)$ definido como

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) := \{u^*(1; x), \dots, u^*(N-1, x), \tilde{u}\},$$

tal que $\tilde{x} := \bar{A}\bar{x}^*(N; x) + \bar{B}\tilde{u} \in \bar{\Omega}$. Además se tiene que

$$(8.4.10) \quad V_N^*(x^+, \bar{\Omega}) - V_N^*(x, \bar{\Omega}) \leq -d_{\bar{\Omega}}(x^*(0; x)).$$

DEMOSTRACIÓN. Seguimos pasos similares a la prueba proporcionada en la Propiedad 3 en [Mayne et al., 2005], pero considerando que ahora el objetivo es un conjunto invariante en lugar de puntos de equilibrio.

Las secuencias de estado asociadas con la secuencia óptima en el tiempo k , $\mathbf{u}^*(x) = \{u^*(0; x), \dots, u^*(N-1; x)\}$ y la secuencia factible en el tiempo $k+1$, $\tilde{\mathbf{u}}(x) = \{u^*(1; x), \dots, u^*(N-1, x), \tilde{u}\}$ son $\mathbf{x}^*(x) = \{\bar{x}^*(0; x), \dots, \bar{x}^*(N; x)\}$ y $\tilde{\mathbf{x}}(x) : \{\bar{x}^*(1; x), \dots, \bar{x}^*(N; x), \tilde{x}\}$, respectivamente.

Debido a que $x \in \bar{x}^*(0; x) \oplus Z$, se sigue de la Proposición (10), que $x^+ \in \bar{x}^*(1; x) \oplus Z$.

Dado que $(\bar{x}^*(0; x), \mathbf{u}^*(x))$ es factible para $\mathcal{P}_N^{rob}(x, \bar{\Omega})$, las restricciones son cumplidas por $\mathbf{u}^*(x)$ y $\bar{\mathbf{x}}^*(x)$, por lo tanto, las restricciones de entrada se cumplen para los primeros $N-1$ elementos de $\tilde{\mathbf{u}}(x)$ y las restricciones de estado se satisfacen para los primeros N elementos de $\tilde{\mathbf{x}}(x)$. Tomamos $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ tal que $\tilde{x} \in \bar{\Omega}$, por lo tanto, tanto las restricciones de entrada como las finales se satisfacen. Luego, $\tilde{\mathbf{u}}(x)$ es una secuencia de entrada factible.

Por otra parte, ya que $x^+ \in \bar{x}^*(1; x) \oplus Z$, el par $(\bar{x}^*(1; x), \tilde{\mathbf{u}}(x))$ es factible para $\mathcal{P}_N^{rob}(x^+, \bar{\Omega})$ y $x^+ \in \mathcal{X}_N$.

Para demostrar la disminución del costo, tenga en cuenta que $x^+ \in \bar{x}^*(1; x) \oplus Z$, entonces $(\bar{x}^*(1; x), \mathbf{u}^*(\bar{x}^*(1; x)))$ es factible para $\mathcal{P}_N^{rob}(x^+, \bar{\Omega})$, entonces por mera optimalidad se tiene que $V_N^*(x^+) \leq V_N^0(\bar{x}^*(1; x))$. Pero por (8.4.6), $V_N^*(\bar{x}^*(1; x)) \leq V_N^0(\bar{x}^*(0; x)) - \alpha d_{\bar{\Omega}}(\bar{x}^*(0; x))$, dado que $\bar{x}^*(1; x)$ es el estado del sistema nominal en el tiempo posterior al tiempo inicial, si en el inicio el estado era $\bar{x}^*(0; x)$ y el control $\kappa_N(\bar{x}^*(0; x), \bar{\Omega})$. Finalmente, dado que $V_N^*(x) = V_N^0(\bar{x}^*(0; x))$, se tiene el decrecimiento del costo. \square

En función de este último resultado, podemos demostrar que el TS Ω es asintóticamente estable para el modelo de predicción incierto a lazo cerrado (8.4.9).

TEOREMA 9 (Estabilidad robusta). *El conjunto Ω es asintóticamente estable robusto para el sistema incierto a lazo cerrado (8.4.9), con dominio de atracción dado por \mathcal{X}_N .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathcal{X}_N$. Tomando la misma notación del Teorema anterior, sabemos que $x^+ \in x^*(0; x) \oplus Z$ y, por el hecho que $d_{\bar{\Omega}}(x^*(0; x)) \geq d_{\bar{\Omega} \oplus Z}(x^*(0; x) + z)$ para todo $z \in Z$, tenemos que $d_{\bar{\Omega}}(x^*(0; x)) \geq d_{\bar{\Omega} \oplus Z}(x^+)$. Esto implica, por medio del decrecimiento del costo (8.4.10), que

$$(8.4.11) \quad V_N^*(x^+, \bar{\Omega}) - V_N^*(x, \bar{\Omega}) \leq -d_{\bar{\Omega}}(x^*(0; x)) \leq -d_{\bar{\Omega} \oplus Z}(x^+),$$

para todo $x^+ \in x^*(0; x) \oplus Z$. Luego, por la teoría clásica de Lyapunov el conjunto $\bar{\Omega} \oplus Z$ es asintóticamente estable robusto para el sistema con incertidumbre aditiva o a lazo cerrado (8.4.9), y dado que $\bar{\Omega} \oplus Z \subseteq \Omega$, se tiene el resultado. \square

8.4.10. Sistema con incertidumbre paramétrica a lazo cerrado. El último resultado muestra que el sistema con incertidumbre paramétrica a lazo cerrado (8.4.9) converge al TS Ω , para todos $w(k) \in \mathcal{W}$. Además, de acuerdo con (8.4.2), significa que el sistema incierto a lazo cerrado

$$(8.4.12) \quad x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)\kappa_N^*(x(k), \bar{\Omega}), \quad \theta \in \Theta,$$

también converge a Ω , para todo $\theta \in \Theta$.

8.5. Re-identificación a lazo cerrado

8.5.1. Señal de excitación. De acuerdo con el rol *conjunto de excitación* del TS, se debe recordar el concepto de *señal de excitación persistente* presentado en la Definición 15 del Capítulo 2. La siguiente da cuenta del concepto formal de *excitación persistente* presentado en [Ljung, 1999].

DEFINICIÓN 34 (Señal de Excitación Persistente). *Dado un conjunto compacto no vacío $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$, decimos que un proceso estacionario $v : \mathbb{N} \rightarrow V$ es una señal de excitación persistente si satisface $E[v(k)] = 0$ y $\text{cov}[v(k)] > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, si además $v(k)$ es no está correlacionado con $v(j)$, para $k \neq j$.*

8.5.2. Función de costo. Como mencionamos anteriormente, una vez que el MPC robusto $\mathcal{P}_N^{rob}(x, \bar{\Omega})$ dirija al sistema (8.3.1) hacia el TS Ω , el objetivo es excitar persistentemente al sistema (por medio de la señal de excitación persistente) para realizar un procedimiento de re-identificación adecuado. Para hacer eso, se modifica la función de costo del problema $\mathcal{P}_N^{rob}(x, \bar{\Omega})$ para incluir la acción de excitación.

Sea $v(k) \in \mathcal{V}$ una señal de excitación persistente y k el tiempo de muestreo real. La función de costo propuesta está dada por

$$V_N^{exc}(x, \bar{\Omega}, v(k); \mathbf{u}) = [1 - \rho(x)]V_N(x, \bar{\Omega}; \mathbf{u}) + \rho(x)\|u(0) - v(k)\|,$$

donde $\rho(x) = 1$ si $x \in \Omega$, y $\rho(x) = 0$ si no.

8.5.3. Formulación del MPC. Para todo estado inicial x en $\mathcal{X}_N \subset \mathcal{X}$ en el instante k , el problema de optimización a resolver en cada instante de tiempo k , $\mathcal{P}_N^{exc}(x, \bar{\Omega}, v(k))$, viene dado por.

(8.5.1)

$$V_N^*(x, \bar{\Omega}, v(k)) = \min\{V_N^{exc}(\bar{x}(0), \bar{\Omega}, v(k); \mathbf{u}) : x \in \bar{x}(0) \oplus Z, \mathbf{u} \in \mathcal{U}_N(x)\}.$$

Observe que $\rho(x)$ es una función discontinua necesaria para cancelar la ley de control y aplicar la excitación persistente siempre que el estado ingrese al conjunto Ω . La idea de este problema de optimización es separar espacialmente las acciones del controlador. Dentro de TS Ω , una señal de excitación persistente se inyecta al sistema de acuerdo con el término del costo $\|u(0) - v(k)\|$. Fuera de Ω , el objetivo es exclusivamente guiar el sistema hacia él mismo Ω^3 .

8.5.4. Modo de re-identificación a lazo cerrado. La solución al Problema $\mathcal{P}_N^{exc}(x, \bar{\Omega}, v(k))$ puede expresarse como

$$(8.5.2) \quad \kappa_N^{exc}(x) = \begin{cases} \kappa_N^*(x, \bar{\Omega}) & \text{if } x \in \mathcal{X}_N \setminus \Omega, \\ v(k) & \text{if } x \in \Omega, \end{cases}$$

y el modelo de predicción con incertidumbre paramétrica a lazo cerrado (8.4.12) se convierte en

$$(8.5.3) \quad x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)\kappa_N^{exc}(x(k)), \theta \in \Theta.$$

³Por lo visto en capítulos anteriores, puede garantizarse la convergencia en tiempo finito hacia Ω , asegurando así que el proceso de re-identificación realmente comience.

Bajo estos esquemas de control propuestos, queda definir las condiciones adicionales para el TS, las cuales debe cumplir para garantizar un procedimiento de identificación apropiado, es decir, las condiciones bajo las cuales la probabilidad de que la excitación saque al sistema de este conjunto sea pequeña. Esto se tratará en el capítulo que sigue.

MPC para Identificación a Lazo Cerrado basado en Invariantes Probabilísticos

En este capítulo se considera un apropiado TS para MPC robusto para re-identificación presentado en el Capítulo anterior. Para esto, se incorpora el concepto de invarianza probabilística establecido en [Kofman et al., 2012] (y descrito en el Capítulo 4) en el diseño del controlador presentado en 8.5.1. De esta forma, podemos valernos del conocimiento de distintos parámetros que determinan la señal de excitación utilizada para identificar el sistema, lo cual no es aprovechado si el TS es un invariante de control robusto y, de esta forma, se obtiene un control menos conservador. Es decir, el análisis probabilístico permite el uso de conjuntos target más pequeños, mejorando el desempeño del sistema a lazo cerrado durante el proceso de re-identificación. Estos resultados se muestran en diferentes simulaciones al final del capítulo.

9.1. Introducción

La propuesta presentada en el capítulo anterior extendía el MPC introducido en [González et al., 2014] al caso robusto. Este capítulo está centrado en el cálculo del conjunto target, de manera que este sea elegido adecuadamente. De lo contrario, si el TS es tomado como en [González et al., 2014], i.e, de acuerdo al máximo valor que podría tomar la señal de excitación, sin tener en cuenta el conocimiento de su distribución de probabilidad, resultan regiones objetivo considerables que contienen a sistema excitado persistentemente de manera conservadora. Esto implica un bajo rendimiento.

Con el propósito de utilizar un conjunto target más reducido, es necesario valerse de la información extra que se tiene de la señal de excitación necesaria para la identificación. Para esto, se estudian los conceptos de invarianza probabilística presentado en el Capítulo 4 y 5. Estos conjuntos son tales que cada trayectoria que inicia dentro de ellos, permanecen allí la mayor parte del tiempo (con una

probabilidad elegida a priori). Así, el conjunto target resulta significativamente menor que los invariantes clásicos.

En resumen, la contribución de este capítulo viene dada por la inclusión apropiada de los conceptos de invarianza probabilística ([Kofman et al., 2012, Anderson et al., 2018e]) para obtener una formulación menos conservadora. Además se muestra que, con una probabilidad dada, el sistema permanece dentro del conjunto target durante un período de tiempo lo suficientemente largo como para garantizar la re-identificación del sistema. Todas estas ventajas y una comparación con la formulación determinista [González et al., 2014] son ilustradas por medio de simulaciones numéricas.

9.2. Diseño del conjunto Target

En el contexto de MPC para re-identificación, el TS debe cumplir dos requisitos (opuestos). Debe ser estable para la familia entera de modelos (8.4.12), lo que se demostró en la sección 8.4.9, además debe ser invariante *en algún sentido* para la excitación persistente, de manera que esta misma no saque al sistema excitado fuera del conjunto. Para este último requisito, es suficiente (aunque no es necesario) que el TS sea invariante para todas las posibles excitaciones persistentes, es decir, invariante para la siguiente familia de sistemas

$$(9.2.1) \quad z(k+1) = A(\theta)z(k) + B(\theta)v(k), \quad \theta \in \Theta,$$

donde $v(j)$ es una señal de excitación persistente dentro del conjunto compacto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

OBSERVACIÓN 29. Notar que el modelo de predicción excitado persistentemente introducido en la ecuación 9.2.1 es similar al presentado en la ecuación 5.4.3 del Capítulo 4, considerando la matriz $D = B$.

Los conjuntos ISI presentados en [González et al., 2014] cumplen esta condición, pero pagan el precio de ser demasiado grandes¹ por tener en cuenta toda posible excitación. Además, la incertidumbre establecida Θ debe considerarse muy pequeña, dependiendo del tamaño de la excitación establecida en \mathcal{V} ,

¹Aquí, un conjunto grande significa un conjunto invariante (determinístico o probabilístico) con gran volumen. La condición de invarianza implica una forma de conjunto que captura la dinámica del sistema.

podría ser tan pequeña y no alcanzar a cubrir todos los modelos necesarios para una descripción completa de la incertidumbre.

Para superar estos inconvenientes, el TS propuesto en este trabajo será más pequeño que el ISI y de tal forma que garantizará la estabilidad del sistema a lazo cerrado (8.4.12), y a la vez, será lo suficientemente grande para asegurar la excitación constante del sistema. Para unir simultáneamente estos dos objetivos, se utiliza el concepto de invarianza probabilística propuesto en el Capítulo 4, ya que la caracterización de estos depende de la distribución de probabilidad de la excitación persistente, y no sólo del tamaño del conjunto \mathcal{V} .

9.2.1. Invariantes probabilísticos. El concepto de *conjunto invariante probabilístico* introducido en la Definición 26 del Capítulo 4 es claramente un candidato para ser el TS de nuestro MPC robusto, ya que al sacar provecho del conocimiento de la distribución de probabilidad de la señal de excitación, reducen drásticamente el tamaño final del mismo, en comparación con los invariantes determinísticos. Al mismo tiempo, aseguran que el estado del sistema se mantendrá en el conjunto durante un tiempo suficientemente grande para realizar la identificación.

En nuestro contexto, sin embargo, no es necesario considerar conjuntos invariantes probabilísticos como TS. De hecho, solo es necesario invarianza probabilística en un paso. Es decir, si el estado abandona el TS en algún instante de tiempo específico el controlador aborta la excitación para controlarlo y dirigirlo nuevamente adentro. De modo que, el mejor candidato a TS son los conjuntos γ -invariantes probabilísticos a un paso robustos (γ -ROSPIS), introducido en la Definición 32 del Capítulo 4.

OBSERVACIÓN 30. Recordemos del Capítulo 4 que un γ -ROSPIS con $\Theta = \{0\}$ (sistema nominal) es llamado γ -OSPIS, y si $\gamma = 1$, simplemente OSPIS. Además, cuando $\gamma = 1$ el $R\gamma$ -OSPIS es simplemente ROSPIS y cuando $p = 1$, el $R\gamma$ -OSPIS es un γ -ISI set (ver [González et al., 2014]).

OBSERVACIÓN 31. El OSPIS es en general un concepto que requiere condiciones más débiles que los invariantes probabilísticos (Definición 26). Cada invariante probabilístico es un OSPIS, aunque lo opuesto no es cierto. Además, no existen métodos para calcular un invariantes probabilísticos robustos, mientras que un OSPIS robusto (necesario en la formulación de MPC propuesta) se

puede calcular por medio de los procedimientos presentados en el Capítulo 4 (Proposición 9). Más aún, en el procedimiento de re-identificación a lazo cerrado es suficiente garantizar la invarianza del TS a un paso, y en caso de que algún estado excitado abandone el conjunto el proceso se suspenderá para pasar a controlar el estado fuera del TS y llevarlo nuevamente a el conjunto.

9.2.2. Propiedades de los OSPIS. A continuación, mostraremos que un $R\gamma$ -OSPIS con probabilidad $p > 0$ para (9.2.1) es también un conjunto invariante de control robusto del sistema (8.3.1), lo que significa que puede usarse como TS para el problema $\mathcal{P}_N^{exc}(\cdot)$ (ver Sección 8.4.3).

PROPOSICIÓN 12. *Sea $p \in (0, 1]$ y $\gamma \in (0, 1]$. Si $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es un $R\gamma$ -OSPIS con probabilidad p para el sistema (9.2.1), entonces es un invariante de control robusto para el mismo sistema.*

DEMOSTRACIÓN. Considera $x(k) \in \Omega$. Luego, $Pr[A(\theta)x + B(\theta)v \in \gamma\Omega] \geq p$, donde $v \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ es una señal de excitación persistente. Como $p > 0$ entonces existe algún $\bar{v} \in \mathcal{V}$ tal que $A(\theta)x + B(\theta)\bar{v} \in \gamma\Omega$, de otro modo sería $Pr[A(\theta)x + B(\theta)v \in \gamma\Omega] = 0$. Además, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y $\gamma\Omega \subseteq \Omega$, lo que significa que Ω es un invariante de control robusto para el sistema (8.3.1). \square

Para recopilar suficientes datos de entrada-salida destinados a realizar la identificación (digamos un vector de datos de longitud q), el sistema bajo la excitación debe permanecer dentro en el TS al menos los próximos q pasos de tiempo. Queremos que esto suceda con una alta probabilidad, para ver esto, puede remitirse a la Propiedad 4 de los ROSPIS presentada en el Capítulo 4.

9.2.3. Características de los OSPIS. En el Capítulo 4 se provee distintos métodos para calcular los invariantes probabilísticos a un paso. En lo que sigue se resumen las propiedades que pueden observarse de estos métodos, en relación al MPC para identificación propuesto.

9.2.3.1. Cálculo del OSPIS. La Proposición 7 determina una manera de calcular un OSPIS, y de esta puede observarse lo siguiente.

OBSERVACIÓN 32. *De la Proposición 7, se puede ver que un OSPIS con probabilidad $p_1 < 1$, es más pequeño que uno con probabilidad $p_2 > p_1$ (un conjunto contiene el otro). Si se desea un TS más pequeño, basta con seleccionar una probabilidad p menor.*

Es importante notar que un OSPIS más pequeño implica la permanencia del estado a lazo abierto en una región menor durante el procedimiento de re-identificación, no sólo garantizando mayor seguridad del control sino también mejorando el desempeño del mismo. Sin embargo, de acuerdo con la Proposición 4, se requiere un valor grande de p para garantizar que el estado permanezca dentro del conjunto target durante el tiempo requerido para finalizar el proceso de identificación. Por lo tanto, seleccionar un valor correcto para p implica una compensación entre el objetivo de control en reducir el tamaño del OSPIS y los requisitos del procedimiento de re-identificación.

9.2.3.2. *Cálculo del ROSPIS.* La Proposición 9 proporciona una forma de calcular un ROSPIS, el cual es considerado como el TS para el MPC para re-identificación propuesto, según la Sección 8.4.3.

OBSERVACIÓN 33. *Se acuerdo a la Observación 19 del Capítulo 4, el tamaño de $\bar{\Theta}$ es inversamente proporcional al tamaño del TS Ω . Esto indica que un conjunto Ω más pequeño implica un conjunto de incertidumbre mayor, es decir, se representa una familia más grande de modelos. Por lo que si queremos mayor robustez para la familia de modelos (5.4.3), debemos sacrificar la probabilidad de permanencia.*

9.3. Resumen de la estrategia

El MPC Robusto apto para la re-identificación a lazo cerrado propuesto en el capítulo anterior (ecuación (8.5.1)) tiene como TS un invariante robusto (ISI de [González et al., 2014]). En este capítulo se propone utilizar un ROSPIS para el sistema (9.2.1).

Las ventajas de el controlador presentado en el Capítulo 8, con un ROSPIS como TS en comparación al MPC nominal basado en los ISI presentado en [González et al., 2014] se detallan a continuación.

- (i) El MPC propuesto garantiza la estabilidad robusta del TS para toda la familia de modelos (8.3.1), este es un punto crucial en el escenario de re-identificación debido al deterioro significativo del modelo.
- (ii) Dependiendo de la probabilidad elegida a priori p , el TS utilizado puede hacerse considerablemente pequeño lo cual implica grandes beneficios (Observación 32). Dado que el sistema dentro del TS se encuentra a

lazo abierto (en proceso de re-identificación) la reducción de tamaño del mismo deriva operaciones de control más seguras.

- (iii) El conjunto de incertidumbre del sistema (8.3.1), Θ , es significativamente mayor cuando se elijen probabilidades $p < 1$ menores, como indica la Observación 19, lo cual implica que una familia de modelos más grande puede considerarse para el análisis robusto.
- (iv) La excitación persistente del sistema está garantizada, con cierta probabilidad, durante un tiempo suficientemente grande, de tal forma que se obtienen datos no correlacionados de entrada-salida, lo que es una ventaja principal desde el punto de vista en la teoría de identificación. Esta propiedad proviene del hecho de que dentro del TS no se toman medidas de control por parte del MPC.

9.3.1. Algoritmo del método propuesto. Un algoritmo que resume la estrategia propuesta en este capítulo se describe en los siguiente pasos.

- Seleccione una señal de excitación persistente adecuada, $v(k)$, para re-identificar el modelo.
- Seleccione un valor de la probabilidad p para el TS.
- Para el $v(k)$ y p seleccionado, calcule el ROSPIS Ω y su conjunto de entrada correspondiente, $\Psi(\Omega)$ para el sistema (9.2.1) (vea la Proposición 9).
- Formule el Problema $\mathcal{P}_N^{exc}(x, \bar{\Omega}, v(k))$ presentado en (8.5.1).
- Si el rendimiento del MPC nominal se deteriora, reemplace por el MPC propuesto, $\mathcal{P}_N^{exc}(x, \bar{\Omega}, v(k))$ hasta que los parámetros del modelo sean estimados y validados. Luego regrese al MPC nominal con el modelo actualizado.

9.4. Simulaciones

Con el fin de probar la metodología propuesta en entre los Capítulos 8 y 9, consideramos un sistema incierto de tiempo-continuo y de segundo orden con salida perturbada. La versión de tiempo-discreto del sistema para tiempo de muestreo $T = 1$ es (este sistema es muy similar al que se introdujo en [González et al., 2014]).

$$(9.4.1) \quad x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + d(k),$$

donde

$$(9.4.2) \quad A(\theta) = \begin{bmatrix} 0,42 & -0,28 \\ 0,02 & 0,6 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -0,13 & 0,12 \\ -0,1 & -0,11 \end{bmatrix},$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 0,3 \\ -0,4 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix},$$

$C = [-0,3 \ 0,6]$, $\theta \in \Theta = [-0,15, 0,15] \subseteq \mathbb{R}$ y $d(k)$ es un ruido blanco en la salida con media cero y varianza $\sigma_d = 0,005^2$.

El *sistema real* y desconocido pertenece a esta familia aunque sabemos que corresponde a un $\theta \neq 0$. El modelo nominal viene dado por $A(0)$ y $B(0)$. Por último, las restricciones del sistema están dadas por $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 10\}$ y $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty \leq 4\}$.

9.4.1. Operación normal. Comenzamos la simulación con una *operación normal* controlando la salida del sistema real a tres zonas operativas dadas por

$$\mathcal{Y}_1 = \{y \in \mathbb{R} : 2,6 \leq y \leq 2,8\}$$

para el tiempo $0 \leq t \leq 20$;

$$\mathcal{Y}_2 = \{y \in \mathbb{R} : -1,2 \leq y \leq -1\}$$

para $20 < t \leq 35$ y

$$\mathcal{Y}_3 = \{y \in \mathbb{R} : -2,8 \leq y \leq -2,6\}$$

para $35 < t \leq 50$.

Mediante un MPC nominal basado en el modelo nominal $(A(0), B(0))$, el control nominal es un MPC por zona (tal como muestra [González et al., 2014], Sección 4.1), con los parámetros $N = 7$, $Q = \text{diag}([1000 \ 1000])$, $R = 10$ y restricción terminal de igualdad. El escenario de simulación seleccionado consiste en dar un estado inicial, $[0, \ 0]$, con un tiempo de simulación de 50 pasos. Además, se utiliza un filtro de Kalman ajustado correctamente para estimar los estados de la salida.

Para medir el rendimiento de este controlador, proponemos el siguiente índice

$$I_{perf} := \sum_{t=0}^{50} [d_{\mathcal{Y}_i}(y_t) + d_{\mathcal{U}_i}(u_{MPC}(x_t))]$$

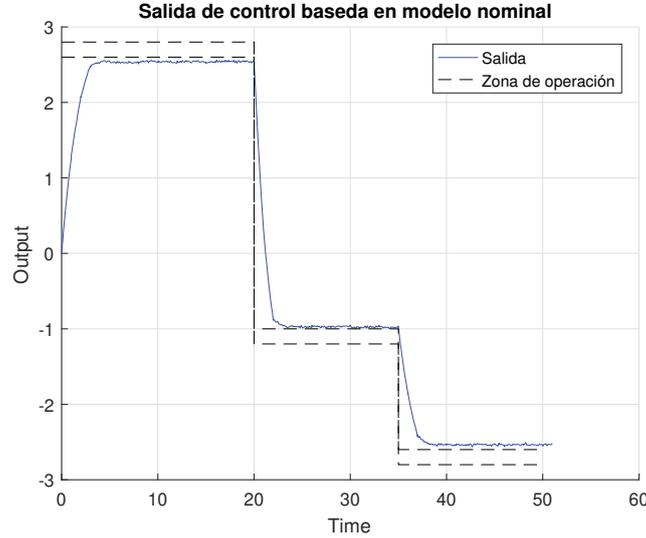


FIGURA 1. Evolución de salida (en azul) a las zonas de operación (en negro) del controlador MPC nominal por zona en función del modelo nominal.

donde \mathcal{Y}_i es la zona operativa dependiendo del tiempo t y $\mathcal{U}_i = (C(I-A)^{-1}B)^{-1}\mathcal{Y}_i$ es el conjunto de entrada correspondiente de \mathcal{Y}_i . x_t es el estado medido del sistema a lazo cerrado y $\kappa_{MPC}(\cdot)$ es la ley implícita de control del MPC nominal. I_{ref} es el índice de referencia, computado después de una re-identificación validada, denota el mejor valor posible para I_{perf} para un escenario dado. Por esto, el índice estandarizado $I_{std} := I_{ref}/I_{perf}$ es considerado para evaluar el desempeño del sistema a lazo cerrado.

La evolución de la salida del sistema controlado puede verse en la Figura 1. El índice estándar correspondiente a este escenario es $I_{std} = 0,706$.

Para medir el deterioro del modelo nominal, notar que valores lejanos a 1 del índice estandarizado indica que los parámetros del modelo nominal describen pobremente al sistema real. En consecuencia, no solo se tiene una performance deficiente, sino también que no se puede garantizar la factibilidad recursiva ni tampoco la estabilidad de la zona donde se quiere llevar al sistema. Como se ve en la Figura 1, donde puede verse que la salida no alcanza realmente la zona operativa (este problema se puede resolver por medio de un offset-free, sin embargo indica una falla en el modelo nominal).

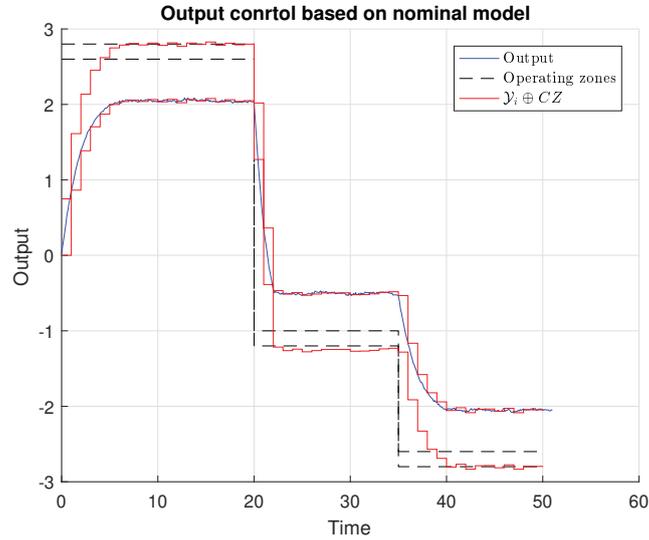


FIGURA 2. Evolución de salida del controlador MPC Robusto por zona en base a los tubos determinísticos. La salida (en azul) se dirige al conjunto $\mathcal{Y}_i \oplus CZ$ (en rojo), dependiendo del tiempo. Z es un conjunto invariante robusto como el de Proposición 10.

Bajo la sospecha de que el modelo nominal está deteriorado surgen dos alternativas. La primera, con tal de garantizar la fiabilidad del controlador - estabilidad y factibilidad - es reemplazar el MPC nominal por una formulación robusta. Puede controlarse mediante la un RMPC basado en tubos determinísticos (como el presentado en [Mayne et al., 2005]). Sin embargo, el índice indica que la performance de los métodos robustos es deficiente ($I_{std} = 0,1771$), como suele ser el caso de los controladores MPC robustos. Esta deficiencia en los métodos robustos es debido a que estas estrategias son muy conservadoras, un precio por garantizar estabilidad y factibilidad. La Figura 2 muestra la evolución de la salida controlada por el MPC robusto.

La segunda alternativa, la cual apreciamos como la mejor opción para aplicar en sistemas reales y además la cual atacamos como objetivo principal en este capítulo, es realizar una re-identificación del sistema a lazo cerrado a modo de obtener un modelo más preciso para luego controlar mediante un MPC nominal por zona. En esta dirección, para contar con los datos necesarios para la re-identificación del sistema (entrada-salida excitados) de manera segura y correcta

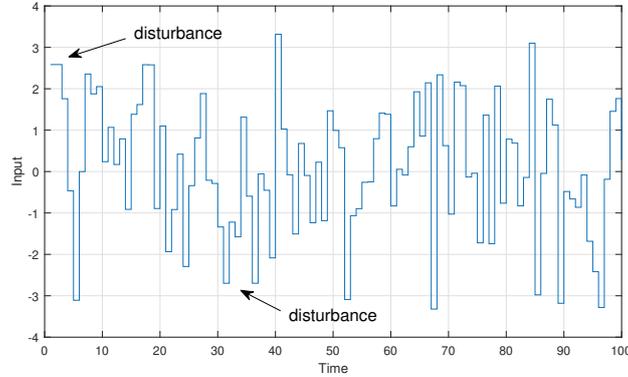


FIGURA 3. Señal de excitación persistente utilizada para la identificación

y sin detener la planta, se pone en funcionamiento el MPC Robusto propuesto para la re-identificación a lazo cerrado, $\mathcal{P}_N^{exc}(x, \bar{\Omega}, v(k))$ definido en (8.5.1).

9.4.2. Operación de re-identificación. La re-identificación procede de la siguiente manera: El sistema es dirigido antes que nada hacia $y = 0$. Allí, el controlador descrito en la sección anterior es reemplazado por la propuesta de MPC Robusto para re-identificación de sistemas a lazo cerrado.

Consideramos un tiempo de simulación que se extiende hasta 500 pasos, cantidad de datos suficientes para identificar y validar un nuevo modelo. Además, se inyectan perturbaciones ($x = [-9, 9]$ en el tiempo $k = 0$ y $x = [2, -6]$ en $k = 30$) con el fin de probar los beneficios establecidos de la nueva estrategia.

El desempeño del MPC Robusto para re-identificar que proponemos depende en gran medida de que el conjunto target (TS) sea adecuado. Este conjunto, Ω (ver Figura 4), es calculado de acuerdo al procedimiento descritos en el Capítulo 4. La probabilidad elegida para su cálculo es $p = 0,99$ y para una señal de excitación persistente, $v(k)$, que tiene una distribución normal truncada dentro del conjunto $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{R} : \|v\|_{\infty} \leq 3,5\}$, con media $E[v(k)] = 0$ y covarianza $cov[v(k)] = 1,64^2$ (la Figura 3 muestra la señal de excitación persistente para los primeros 100 pasos de tiempo). La restricción terminal está dada por $\bar{\Omega} = \Omega \ominus Z$, donde Z es un conjunto invariante robusto como el que definimos en la Proposición 10.

La Figura 4 muestra la evolución de los estados controlados por el MPC Robusto propuesto (los primeros 50 instantes de tiempo). Como puede verse, los estados reales evolucionan dentro del tubo determinístico centrados en el estado nominal inicial (como indica la Proposición 10). El sistema real converge al TS, Ω , y una vez dentro se interrumpe el control para comenzar la excitación persistente del sistema. Aunque el TS no es un conjunto invariante robusto sino probabilístico, no se ven estados que lo abandonen por efecto de la señal de excitación. Esto puede explicarse debido a que el TS es invariante probabilístico para todos los modelos perteneciente a la familia (9.4.1) y el que está siendo excitado persistentemente solamente es el sistema real y desconocido. Los primeros 300 estados excitados son recolectados con el objetivo de re-identificar el modelo y los últimos 200 para validar el mismo. No se incluyen para ningún análisis los datos afectados por las perturbaciones adicionales al sistema. La Figura 5 muestra los primeros 100 pasos de tiempo de la señal de salida durante el procedimiento de excitación, la cual se asume que está afectada además por un ruido (ver modelo (9.4.1)).

9.4.3. Características de identificación. El nuevo modelo se obtiene en base a los datos de entrada-salida no correlacionados obtenidos por medio de la excitación del sistema dentro del TS. Para estimar el modelo de espacio-estado usamos el método basado en subespacios, N4SID. De esta forma se obtiene un FIT del modelo de 99,6%. Debido a que los datos de entrada-salida no están correlacionados, el FIT no llega al 100% exclusivamente por el ruido en la salida $d(k)$. Analizamos las características de esta re-identificación utilizando la función de Matlab *ident*². La Figura 6 muestra cómo es la autocorrelación de la salida residual y la correlación cruzada de los residuos entre entrada y salida. El primer gráfico muestra una señal impulsiva como es deseado, mientras que el último muestra los valores dentro de la región de confianza. Lo que significa que no existe correlación entre entrada-salida (fuera de la explicada por el modelo identificado).

Para resaltar los beneficios de la propuesta en términos de datos no correlacionados, simulamos el mismo lazo cerrado pero excitando al sistema superponiendo la señal de excitación persistente con la entrada calculada por el

²System Identification Toolbox.

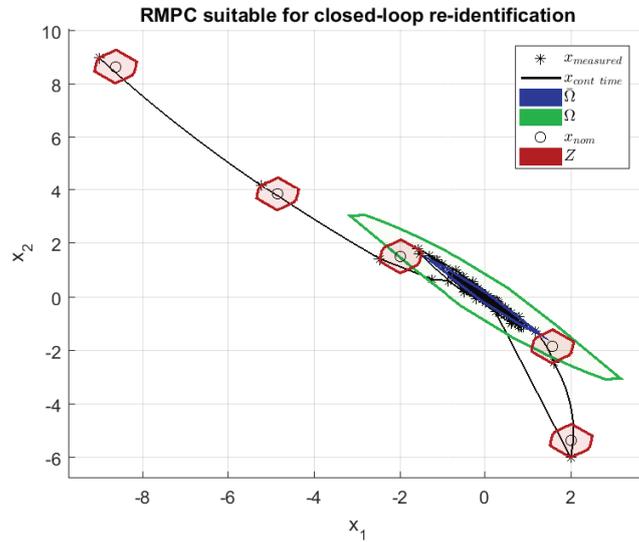


FIGURA 4. Evolución de los estados controlados por el MPC Robusto para la re-identificación. El sistema real es llevado al TS Ω . Una vez que el sistema real ingresa en Ω se inicia el procedimiento de excitación. Tenga en cuenta también que cuando la perturbación ingresa al sistema, la excitación se cancela, y el sistema regresa a TS.

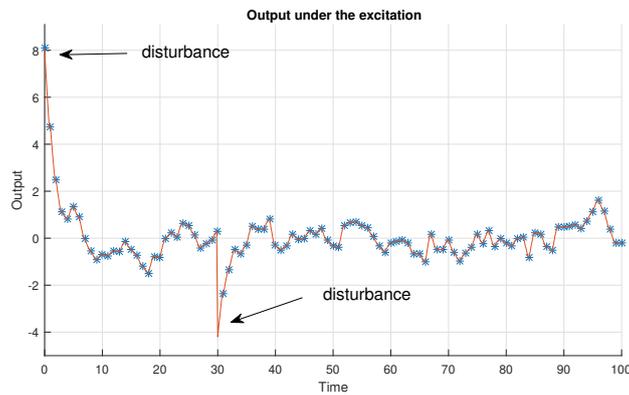


FIGURA 5. Evolución de salida bajo el procedimiento de excitación.

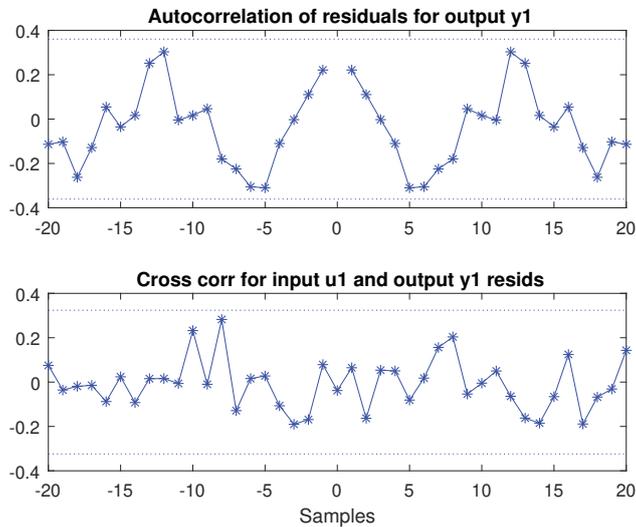


FIGURA 6. Autocorrelación de la salida y la correlación cruzada entre los residuos de entrada y salida según la estrategia propuesta.

controlador (en lugar de separar las tareas de control y excitación de el sistema). Como resultado, el FIT obtenido es de 99,37 % usando el mismo método de identificación (el FIT es similar al primero debido a la simplicidad del modelo y el escenario de excitación). La Figura 7 muestra la autocorrelación de la salida residual y la correlación cruzada entre los residuos de entrada y salida. En esta gráfica se ven que dos puntos de la correlación cruzada están fuera de la región de confianza, lo que denota una correlación entrada-salida.

9.4.4. Operación normal con el modelo estimado. Una vez que el nuevo modelo es identificado se vuelve a la *operación normal*, es decir, controlar el modelo nominal con un MPC nominal. El índice en este caso es $I_{std} = 0,9795$. La Figura 8 muestra la evolución de salida bajo las mismas perturbaciones que se describen en la Sección 9.4.1.

El desempeño del MPC basado en el modelo identificado muestra una mejora de 27 % en comparación con el modelo nominal original. Además se puede garantizar la estabilidad y factibilidad recursiva del sistema controlado. Y en

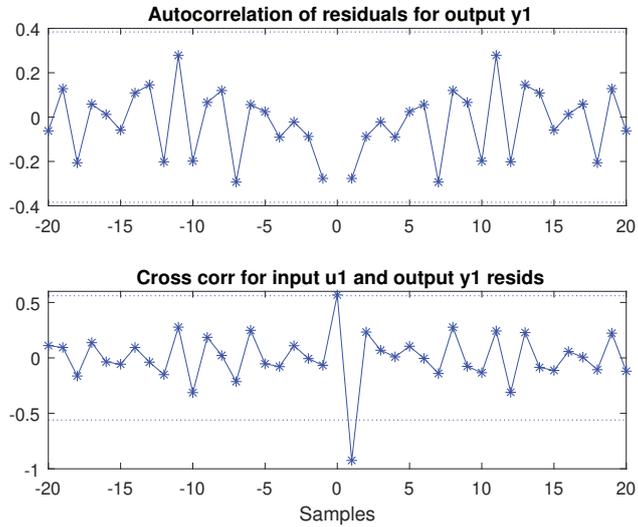


FIGURA 7. Autocorrelación de la salida y la correlación cruzada entre los residuos de entrada y salida según procedimientos clásicos de identificación a lazo cerrado.

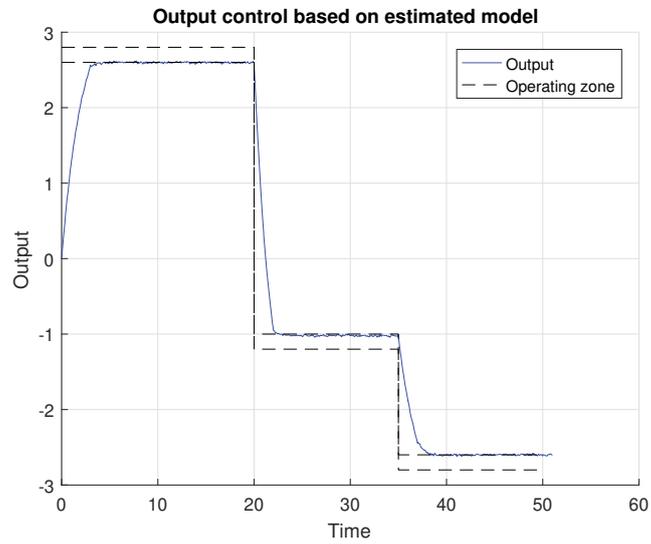


FIGURA 8. Evolución de salida del controlador MPC nominal por zona en función del modelo identificado.

comparación al MPC Robusto la mejora es del 80 %, mostrando nuevamente lo inconveniente de usar MPC robustos y destacando la importancia de re-identificar sistemas. Resumiendo, tal como esperábamos la mejora en el desempeño fue significativa respecto a los escenarios alternativos.

Los resultados de este capítulo y el anterior fueron publicados en [[Anderson et al., 2018e](#), [Anderson et al., 2016b](#), [Anderson et al., 2016a](#), [Anderson et al., 2015](#)].

Conclusiones

Las contribuciones principales de esta Tesis están relacionadas con la Teoría de Conjuntos Invariantes aplicados al Control Predictivo Basado en Modelos.

El análisis y el diseño de controladores MPC para sistemas lineales y no lineales sujetos a restricciones es el marco sobre el cual los aportes centrales de la Tesis se presentan. En particular, la estabilidad y la robustez de los controladores predictivos se estudiaron y profundizaron, de esta manera se han adquirido conocimientos que servirán de base para las futuras líneas de investigación. Todo esto se ha llevado a cabo siguiendo un hilo argumental: garantizar la estabilidad del sistema bajo el MPC. La teoría de Lyapunov y la teoría de conjuntos invariantes han sido el soporte teórico del análisis, así como de las pruebas de estabilidad realizadas a lo largo de la tesis.

Los aportes de la Tesis se desarrollan a partir del Capítulo 5. En este se estudia de manera intensiva la *teoría de conjuntos invariantes*; proporcionando una extensión del concepto de invarianza por medio de los conjuntos invariantes contractivos, los cuales, además de ser invariantes, tienen la propiedad de contraer el sistema –por medio de un control admisible– hacia el interior del mismo. Esta propiedad amplía el análisis de estabilidad de los sistemas controlados bajo el MPC basado en conjuntos de la manera en que ya se la conoce, permitiendo garantizar estabilidad asintótica y convergencia en tiempo finito (Capítulo 6). Además se presentan las llamadas *k*-cáscaras, que permiten una apropiada descomposición disjunta del espacio de estados, así puede ser utilizada en la formulación del MPC que permite obtener el máximo dominio de atracción que el sistema permite, como se muestra en el Capítulo 7. Por último, contribuyendo al estudio de los conjuntos invariantes probabilísticos, se extiende esta noción proponiendo los OSPIS (One step probabilistic invariant sets), con el cual se formula un MPC

apto para la re-identificación de sistemas a lazo cerrado, como se postula en el contenido del Capítulo 9, dotando a este control de grandes ventajas ante otras formulaciones. Concluyendo, la *teoría de conjuntos invariantes* es un campo aún en desarrollo, con propiedades que son de gran beneficio en las formulaciones de MPC, y en vista al avance en la teoría de control predictivo, es completamente necesario su estudio exhaustivo.

Como se mencionó en el párrafo anterior, las propiedades de los conjuntos invariantes contractivos permite garantizar, bajo ciertas condiciones, la convergencia en tiempo finito de un controlador MPC basado en estos conjuntos, esto se muestra en el Capítulo 6. Este resultado amplía la noción de atractividad en el sentido que ya no se garantiza la convergencia sino la llegada al conjunto objetivo. La aplicabilidad de este resultado puede verse en controladores tipo duales, donde se necesita la garantía de que los estados alcanzan cierta zona para poder cambiar el objetivo del mismo, como ser el MPC para re-identificación propuesto en el Capítulo 8, en el cual se excita al sistema una vez que este entra a cierto conjunto.

El Capítulo 7 aborda el análisis del dominio de atracción del MPC orientado a su aumento. Es decir, el sistema es localmente estable en una determinada región denominada dominio de atracción, que es además un invariante del sistema controlado. El conocimiento de este conjunto es importante debido a que representa el dominio de validez del controlador, de manera que, si la planta partiese de estados fuera del mismo, el controlador no sería apropiado. Por tanto, cuanto mayor sea esta región, mayor será el conjunto de estados estabilizables por el controlador. En este capítulo se propone un MPC basado en conjuntos que alcanza el máximo dominio de atracción que permite el sistema junto a sus restricciones, lo cual es notablemente beneficioso.

Por último, en los Capítulos 8 y 9 se propone un esquema de control basado en conjuntos invariantes probabilísticos (OSPIS) que resuelve el conflicto que existe al controlar un sistema e identificarlo al mismo tiempo. Se logra un controlador con un buen desempeño debido a la propiedad de los invariantes probabilísticos a un paso, como se muestra en varias simulaciones.

9.5. Futuras líneas de investigación

Las características del control predictivo y el rápido avance que se ha experimentado recientemente en aspectos teóricos como estabilidad y robustez, hacen que esta estrategia tenga un futuro prometedor. Sin embargo, quedan temas abiertos en los que trabajar, principalmente orientados a la implementación.

La extensión de los controladores robustos propuestos al caso estocástico es una línea prometedora debido a los beneficios que han sido demostrados recientemente en esta dirección [Mayne, 2016]. En este contexto, en lugar de garantizar la convergencia al conjunto objetivo cumpliendo las restricciones para todas una familia de modelos de predicción, se cumplirán ciertas restricciones estocásticas, i.e., con una cierta probabilidad arbitrariamente cercana a la unidad. De esta forma se logra reducir el conservadurismo de las estrategias robustas [Cannon et al., 2011, Mayne, 2016, Lorenzen et al., 2017]. En particular, interesa extender el diseño de MPC robusto apto para re-identificación para el caso con restricciones estocásticas (en lugar de deterministas) ampliando así la fronteras de su aplicación. Asimismo, con tal de resaltar las virtudes de la metodología descrita, se podría implementar la estrategia propuesta a un reactor de polimerización, lo cual constituye una prueba crítica a su desempeño.

Otra extensión es el diseño de MPC basados en conjuntos para sistemas impulsivos. A partir recientes desarrollos ([Rivadeneira et al., 2018]), se entiende que con la ayuda de la teoría de conjuntos invariantes se puede garantizar la estabilidad fuerte, considerando no solo los instantes de muestreo sino en tiempo continuo, lo que incluye la respuesta libres entre impulso. La idea es por tanto utilizar estos modelos de predicción para diseñar controles MPC basados en conjuntos y estrategias ya estudiadas ([Anderson et al., 2018d, Rivadeneira et al., 2018, Rivadeneira et al., 2017, Rivadeneira et al., 2016]), que sean capaces de alcanzar los objetivos particulares según el problema en particular que se aborde.

Publicaciones

Publicaciones en revistas

- A. Anderson, A.H. González, A. Ferramosca, A. D'Jorge and E. Kofman. Robust MPC suitable for closed-loop re-identification, based on probabilistic invariant sets. *Systems & Control Letters. Volume 118, August 2018, Pages 84-93.*
- A. Anderson, A.H. González, A. Ferramosca and E. Kofman. Finite-time convergence results in robust model predictive control. *Optimal Control Applications & Methods. March 2018. DOI: 10.1002/oca.2430.*
- A. Anderson, A. D'Jorge, A.H. González, A. Ferramosca and M. Actis. MPC for tracking with maximum domain of attraction. *Automatica-submitted 2018.*
- A. D'Jorge, A. Anderson, A.H. González and A Ferramosca. A robust economic mpc for changing economic criterion. *International Journal of Robust and Nonlinear Control. June 2018. <https://doi.org/10.1002/rnc.4243>*
- A. D'Jorge, B. Santoro, A. Anderson, A.H. González and A. Ferramosca. Stochastic model predictive control for tracking linear systems. *Optimal Control Applications & Methods March 2018. DOI: 10.1002/oca.2501.*
- A. Anderson, A.H. González, A. Ferramosca and E. Kofman. Probabilistic invariant sets for closed-loop re-identification. *IEEE Latin America Transactions, 14:2744 - 2751, 2016.*

Publicaciones en congresos internacionales

- A. Anderson, A.H. González, A. Ferramosca and E. Kofman. Finite-time convergence results in model predictive control. *European Control Conference, ECC 2018.*

- A. D' Jorge, A. Anderson, A.H. González and A. Ferramosca. A robust economic mpc for changing economic criterion. In *IEEE Multi-Conference on Systems and Control, MSC 2016, September 19-22 2016*.

Publicaciones en congresos nacionales

- A. Anderson, A. D' Jorge, A. Ferramosca, E. Kofman and A.H. González. i-steps closed-loop sets for constrained linear systems under model predictive control. *AADECA, 2018*.
- A. D' Jorge, A. Anderson, A. Ferramosca, E. Kofman and A.H. González. Robust and stochastic mpc for tracking: a performance comparison. *AADECA, 2018*.
- M. Actis, A. Anderson and A. D'Jorge. MPC para sistemas lineales con máximo dominio de atracción. *UMA, 2017*.
- A. Anderson, A.H. González, A. Ferramosca and E. Kofman. Extended mpc for closed-loop re-identification based on probabilistic invariant sets. *AADECA, 2016*.
- A. Anderson, A.H. González, A. Ferramosca and E. Kofman. Probabilistic invariant sets for closed-loop re-identification. *RPIC, 2015*.

Bibliografía

- [Alvarado, 2007] Alvarado, I. (2007). *Model Predictive Control for Tracking Constrained Linear Systems*. PhD thesis, Univ. de Sevilla.
- [Anderson et al., 2018a] Anderson, A., D’Jorge, A., Ferramosca, A., Kofman, E., and González, A. (2018a). i-steps closed-loop sets for constrained linear systems under model predictive control. *Asociación Argentina de Control Automático*.
- [Anderson et al., 2018b] Anderson, A., D’Jorge, A., González, A., Ferramosca, A., and Actis, M. (Submitted 2018b). MPC for tracking with maximum domain of attraction. *Automatica*.
- [Anderson et al., 2015] Anderson, A., González, A., Ferramosca, A., and Kofman, E. (2015). Probabilistic invariant set for closed loop reidentification. *In Proceedings of the 16th Workshop on Information Processing and Control, RPIC*.
- [Anderson et al., 2016a] Anderson, A., Gonzalez, A., Ferramosca, A., and Kofman, E. (2016a). Extended mpc for closed loop re identification based on probabilistic invariant sets. *Asociación Argentina de Control Automático*.
- [Anderson et al., 2018c] Anderson, A., Gonzalez, A., Ferramosca, A., and Kofman, E. (2018c). Finite time convergence results in model predictive control. *European Control Conference 2018, Limassol Cyprus*.
- [Anderson et al., 2018d] Anderson, A., Gonzalez, A., Ferramosca, A., and Kofman, E. (2018d). Finite time convergence results in robust model predictive control. *Optimal Control Applications and Methods*, 39(5):1627–1637.
- [Anderson et al., 2018e] Anderson, A., González, A. H., Ferramosca, A., D’Jorge, A., and Kofman, E. (2018e). Robust MPC suitable for closed loop reidentification, based on probabilistic invariant sets. *Systems & Control Letters*, 118:84 –93.
- [Anderson et al., 2016b] Anderson, A., González, A. H., Ferramosca, A., and Kofman, E. (2016b). Probabilistic invariant sets for closed-loop re-identification. *IEEE Latin America Transactions*, 14:2744 – 2751.
- [Bemporad et al., 1997] Bemporad, A., Casavola, A., and Mosca, E. (1997). Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:340–349.
- [Bertsekas and Rhodes, 1971] Bertsekas, D. and Rhodes, I. (1971). On the minimax reachability of target sets and target tubes. *Automatica*, 7:233–247.
- [Bitsoris and Vassilaki, 2017] Bitsoris, G. and Vassilaki, M. (2017). Enlargement of contractive sets of discrete-time systems: The generators approach. *25th Mediterranean Conference on Control and Automation*.

- [Blanchini, 1994] Blanchini, F. (1994). Ultimate boundedness control for discrete-time uncertain system via set-induced lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:428–433.
- [Blanchini, 1999] Blanchini, F. (1999). Set invariance in control. *Automatica*, 35:1747–1767.
- [Blanchini and Miani, 2000] Blanchini, F. and Miani, S. (2000). Any domain of attraction for a linear constrained system is a tracking domain of attraction. *SIAM J. Control Optim.*, 38:971–994.
- [Blanchini and Miani, 2008] Blanchini, F. and Miani, S. (2008). *Set-Theoretic Method in Control*. Birkhauser.
- [Bustos et al., 2016] Bustos, G., Ferramosca, A., Godoy, J. L., and González, A. (2016). Application of model predictive control suitable for closed-loop re-identification to a polymerization reactor. *Journal of Process Control*, 44:1–13.
- [Calafiore and Fagiano, 2013] Calafiore, G. C. and Fagiano, L. (2013). Robust model predictive control via scenario optimization. *IEEE transactions on automatic control*, 58(1).
- [Cannon et al., 2011] Cannon, M., Kouvaritakis, B., Rakovic, S. V., and Cheng, Q. (2011). Stochastic tubes in model predictive control with probabilistic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(1):194–200.
- [Chisci et al., 2003] Chisci, L., Falugi, P., and Zappa, G. (2003). Tracking of piecewise constant references for constrained nonlinear systems. In *Proc. of European Control Conference. Cambridge, UK*.
- [Chisci et al., 2001] Chisci, L., Rossiter, J. A., and Zappa, G. (2001). Systems with persistent disturbances: predictive control with restricted constraints. *Automatica*, 37:1019–1028.
- [de la Pena and Christofides, 2008] de la Pena, D. M. and Christofides, P. D. (2008). Lyapunov-based model predictive control of nonlinear systems subject to data losses. *IEEE transactions on automatic control*, 53(9).
- [Delfour and S.K.Mitter, 1969] Delfour, M. and S.K.Mitter (1969). Reachability of perturbed systems and min sup problems. *SIAM Journal of Control*, 7(4):521–533.
- [D’Jorge et al., 2018a] D’Jorge, A., Anderson, A., González, A., and Ferramosca, A. (2018a). Robust and stochastic mpc for tracking: a performance comparison. *Asociación Argentina de Control Automático*.
- [D’Jorge et al., 2018b] D’Jorge, A., Anderson, A., González, A. H., and Ferramosca, A. (2018b). A robust economic MPC for changing economic criterion. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(15):4404–4423.
- [D’Jorge et al., 2018c] D’Jorge, A., Santoro, B., Anderson, A., González, A., and Ferramosca, A. (Submitted 2018c). Stochastic model predictive control for tracking linear systems. *Optimal Control Applications & Methods*.
- [Doréa and Hennes, 1999] Doréa, C. E. T. and Hennes, J. C. (1999). (a,b)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 103(3):521–542.
- [Ferramosca, 2011] Ferramosca, A. (2011). *Model Predictive Control for Systems with Changing Setpoints*. PhD thesis, Univ. de Sevilla. <http://fondosdigitales.us.es/tesis/autores/1537/>.

-
- [Ferramosca et al., 2009a] Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2009a). MPC for tracking with optimal closed-loop performance. *Automatica*, 45:1975–1978.
- [Ferramosca et al., 2011] Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., Castaño, F., and Camacho, E. F. (2011). Optimal MPC for tracking of constrained linear systems. *Int. J. of Systems Science*, 42(8). Accepted for publication.
- [Ferramosca et al., 2010a] Ferramosca, A., Limón, D., González, A., Odloak, D., and Camacho, E. F. (2010a). Mpc for tracking zone regions. *Journal of Process Control*, 20:506–516.
- [Ferramosca et al., 2009b] Ferramosca, A., Limon, D., González, A. H., Odloak, D., and Camacho, E. F. (2009b). MPC for tracking target sets. In *Proceedings of 48th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2009*, Shanghai, China.
- [Ferramosca et al., 2010b] Ferramosca, A., Limon, D., González, A. H., Odloak, D., and Camacho, E. F. (2010b). MPC for tracking zone regions. *Journal of Process Control*, 20:506–516.
- [Forsell and Ljung, 1999] Forsell, U. and Ljung, L. (1999). Closed-loop identification revisited. *Automatica*, (35):1215:1241.
- [G.Bustos, 2014] G.Bustos (2014). *Identificación y Control Predictivo*. PhD thesis, Univ. Nacional del Litoral.
- [Genceli and Nikolaou, 1996] Genceli, H. and Nikolaou, M. (1996). New approach to constrained predictive control with simultaneous model identification. *AIChE Journal*, 42:2857–2868.
- [Gilbert et al., 1994] Gilbert, E. G., Kolmanovsky, I., and Tan, K. T. (1994). Nonlinear control of discrete-time linear systems with state and control constraints: A reference governor with global convergence properties. In *Proceedings of the CDC*.
- [Gilbert and Tan, 1991] Gilbert, E. G. and Tan, K. (1991). Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:1008–1020.
- [Glover and Schweppe, 1971] Glover, J. and Schweppe, F. (1971). Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(5):411–423.
- [Gómez-Ortega et al., 2001] Gómez-Ortega, J., Ramírez, D. R., Limon, D., and Camacho, E. F. (2001). Genetic algorithms based predictive control for mobile robot navigation in changing environments. In *Proceedings of the ECC*.
- [González et al., 2014] González, A., Ferramosca, A., Bustos, G., Marchetti, J., Fiacchini, M., and Odloak, D. (2014). Model predictive control suitable for closed-loop re-identification. *Systems and Control Letters*, 69:23–33.
- [Gonzalez and Odloak, 2009] Gonzalez, A. H. and Odloak, D. (2009). A stable MPC with zone control. *Journal of Process Control*, 19:110–122.
- [Goulart et al., 2006a] Goulart, P. J., Kerrigan, E. C., and Maciejowski, J. M. (2006a). Optimization over state feedback policies for robust control with constraints. *Automatica*, 42(4).
- [Goulart et al., 2006b] Goulart, P. J., Kerrigan, E. C., and Ralph, D. (2006b). Efficient robust optimization for robust control with constraints. *Math. Program.*, 114(1):115–147.

- [Heirung et al., 2012] Heirung, T. A. N., Ydstie, B. E., and Foss, B. (2012). Towards dual mpc. *4th IFAC Nonlinear Model Predictive Control Conference*, pages 502–507.
- [Hirata and Ohta, 2003] Hirata, K. and Ohta, Y. (2003). ϵ -feasible approximation of the state reachable set for discrete time systems. In *Proceedings of 42nd IEEE Conf. Decision and Control, Maui, HI*, pages 5520–5525.
- [Katok and Hasselblatt, 1995] Katok, A. and Hasselblatt, B. (1995). *Introduction to the modern theory of dynamic system*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press.
- [Kerrigan, 2000] Kerrigan, E. C. (2000). *Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control*. PhD thesis, University of Cambridge.
- [Kerrigan and Maciejowski, 2000] Kerrigan, E. C. and Maciejowski, J. M. (2000). Invariant sets for constrained discrete-time systems with application to feasibility in model predictive control. In *Proceedings of the CDC*.
- [Kerrigan and Maciejowski, 2004] Kerrigan, E. C. and Maciejowski, J. M. (2004). Feedback min max model predictive control using a single linear program: robust stability and the explicit solution. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(4):395–413.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, 3 edition.
- [Kofman et al., 2012] Kofman, E., Dona, J. D., and Seron, M. (2012). Probabilistic set invariance and ultimate boundedness. *Automatica*, 48:2670–2676.
- [Kolmanovsky and Gilbert, 1998] Kolmanovsky, I. and Gilbert, E. G. (1998). Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical Problems in Engineering: Theory, Methods and Applications*, 4:317–367.
- [Langson et al., 2004] Langson, W., Chrysochoos, I., Rakovic, S. V., and Mayne, D. Q. (2004). Robust model predictive control using tubes. *Automatica*, 40:125–133.
- [Larsson et al., 2013] Larsson, C., Annergren, M., Hjalmarsson, H., Rojas, C. R., Bombois, X., Mesbah, A., and Modén, P. E. (2013). Model predictive control with integrated experiment design for output error systems. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, pages 3790–3795. IEEE.
- [Li and Lin, 2017] Li, Y. and Lin, Z. (2017). The maximal contractively invariant ellipsoids for discrete-time linear systems under saturated linear feedback. *Automatica*, 76:336–344.
- [Limon, 2002] Limon, D. (2002). *Control Predictivo de sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez*. PhD thesis, Universidad de Sevilla.
- [Limon et al., 2005] Limon, D., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2005). Enlarging the domain of attraction of MPC controllers. *Automatica*, 41:629–645.
- [Limon et al., 2008] Limon, D., Alamo, T., Raimondo, D. M., Munoz de la Pena, D., Bravo, J. M., and Camacho, E. F. (2008). Input-to-state stability: an unifying framework for robust model predictive control. In *Proceedings of the Int. Workshop on Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control (NMPC08). 5-9 Sept. Pavia, Italy*.
- [Limon et al., 2008] Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2008). Mpc for tracking piecewise constant reference for constrained linear systems. *Automatica*, 44(9):2382–2387.

-
- [Limon et al., 2018] Limon, D., Ferramosca, A., Alvarado, I., and Alamo, T. (2018). Nonlinear MPC for tracking piece-wise constant reference signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [Ljung, 1999] Ljung, L. (1999). *System identification-theory for the user*. Prentice-Hall, 2 edition.
- [Lorenzen et al., 2017] Lorenzen, M., Dabbene, F., Tempo, R., and Allgower, F. (2017). Constraint-tightening and stability in stochastic model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(7):3165–3177.
- [Marafioti et al., 2014] Marafioti, G., Bitmead, R. R., and Hovd, M. (2014). Persistently exciting model predictive control. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, 28:536 – 552.
- [Mayne, 2016] Mayne, D. (2016). Robust and stochastic model predictive control: Are we going in the right direction? *Annual Reviews in Control*, 41:184–192.
- [Mayne et al., 2000] Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V., and Sokaert, P. O. M. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36:789–814.
- [Mayne et al., 2005] Mayne, D. Q., Seron, M. M., and Rakovic, S. V. (2005). Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, 41:219–224.
- [Michalska, 1997] Michalska, H. (1997). A new formulation of receding horizon control without a terminal constraint on the state. *European Journal of Control*, 3(1):2–14.
- [Michalska and Mayne, 1993] Michalska, H. and Mayne, D. Q. (1993). Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11):1623–1633.
- [Muske and Rawlings, 1993] Muske, K. and Rawlings, J. B. (1993). Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, 39:262–287.
- [Overschee and Moor, 1996] Overschee, P. V. and Moor, B. D. (1996). Subspace identification for linear systems: theory, implementation, applications. *Kluwer Academic Publishers*.
- [Patwardhan and Gopaluni, 2014] Patwardhan, R. S. and Gopaluni, R. B. (2014). A moving horizon approach to input design for closed loop identification. *Journal of Process Control*, 24:188 – 202.
- [Potts et al., 2014] Potts, A., Romano, R., and Garcia, C. (2014). Improving performance and stability of MPC relevant identification methods. *Control Engineering Practice*, 22:20–33.
- [Qin and Badgwell, 1997] Qin, S. J. and Badgwell, T. A. (1997). An overview of industrial model predictive control technology. In *Proceedings of the conference on Chemical Process Control*.
- [Raimondo et al., 2009] Raimondo, D. M., Limon, D., Lazar, M., Magni, L., and Camacho, E. (2009). Min-max Model Predictive Control of Nonlinear Systems: A Unifying Overview on Stability. *European Journal of Control*, 15(1):5–21.
- [Ramírez et al., 1999a] Ramírez, D. R., Limón, D., Gómez-Ortega, J., and Camacho, E. F. (1999a). Model based predictive control using genetic algorithms: Application to a pilot plant. In *Proceedings of the ECC*.

- [Ramírez et al., 1999b] Ramírez, D. R., Limón, D., Gómez-Ortega, J., and Camacho, E. F. (1999b). Nonlinear MBPC for mobile robot navigation using genetic algorithms. In *Proceedings of the ICRA*.
- [Rawlings and Mayne, 2009] Rawlings, J. B. and Mayne, D. Q. (2009). *Model Predictive Control: Theory and Design*. Nob-Hill Publishing, 1st edition.
- [Rivadeneira et al., 2017] Rivadeneira, P. S., Caicedo, M., Ferramosca, A., González, A. H., and Rivadeneira, P. (2017). Impulsive zone model predictive control (iZMPC) for therapeutic treatments: application to hiv dynamics. In *Proceedings of the 56th IEEE Conference on Decision and Control, Melbourne, Australia*.
- [Rivadeneira et al., 2016] Rivadeneira, P. S., Ferramosca, A., Ferramosca, A., González, A. H., and Rivadeneira, P. (2016). Impulsive zone model predictive control with application to type i diabetic patients. In *Proceedings of the 2016 IEEE Multi-Conference on Systems and Control, MCSC, Buenos Aires, Argentina*.
- [Rivadeneira et al., 2018] Rivadeneira, P. S., Ferramosca, A., and González, A. H. (2018). Control strategies for non-zero set-point regulation of linear impulsive systems. *tac*.
- [Rossiter and Kouvaritakis, 1998] Rossiter, J. A. and Kouvaritakis, B. (1998). Reference governors and predictive control. In *Proceedings of the ACC*.
- [Rungger and Tabuada, 2017] Rungger, M. and Tabuada, P. (2017). Computing robust controlled invariant sets of linear systems. *IEEE transactions on automatic control*, 62(7).
- [Sogaert and Mayne, 1998] Sogaert, P. O. M. and Mayne, D. Q. (1998). Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(8):1136–1142.
- [Sogaert et al., 1999] Sogaert, P. O. M., Mayne, D. Q., and Rawlings, J. B. (1999). Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability). *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3):648–654.
- [Soderstrom and Stoica, 1989] Soderstrom, T. and Stoica, P. (1989). *System identification*. Prentice-Hall, 1 edition.
- [Zacekova et al., 2013] Zacekova, E., Pravara, S., and Pcolka, M. (2013). Persistent excitation condition within the dual control framework. *Journal of Process Control*, 23:359–371.