UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS

Tesis de Maestría en Docencia Universitaria

Consignas de Matemática en carreras de FICH. Configuraciones discursivas y procesos de aprendizaje

Tesista: Prof. Andrés Julio Efron

Directora: Mg. Estela Isabel Mattioli

Co-director: Mg. Mario Garelik

Año: 2024

Aprendí mucho de mis maestros, más de mis compañeros y, de mis alumnos, más que de todos.

Talmud. Tratado de Taanit. 7.a

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, deseo agradecer a la Facultad de Humanidades y Ciencias por mi primera etapa de formación como Profesor de Letras y por esta segunda oportunidad para continuar aprendiendo sobre esta desafiante y apasionante tarea que es la enseñanza.

En segundo lugar, agradecer a la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas que me permitió seguir creciendo en mi carrera docente y a los equipos de Cátedra de Comunicación Oral y Escrita y del área de Matemáticas que me incentivaron en la investigación que derivó en esta tesis.

A mis directores, Estela Isabel Mattioli y Mario Garelik, que generosamente me han acompañado, incentivado y alentado en esta compleja tarea que implica la escritura de la tesis.

A mis amigos y a mis compañeros de cátedras que, con sus palabras, su paciencia, su humor y sus sugerencias me hicieron más ameno este trayecto de formación.

Por último, a mis padres que siguen siendo mi sostén y siempre confiaron en mí.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se focaliza en el relevamiento y análisis de un corpus de consignas de matemáticas en el nivel superior, específicamente en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la UNL, en las áreas de matemática básica y Cálculo I.

Con el propósito de ir profundizando en las características y configuración de las consignas de matemática seleccionadas, se propone un recorrido de análisis y reflexión que busca comprender en profundidad las singularidades lingüísticas, cognitivas y disciplinares de este género discursivo.

En el **primer capítulo** se procederá a describir los aspectos vinculados a la fundamentación del tema: su enunciación, una descripción de él y su relevancia. En segundo lugar, se explicitarán las preguntas que orientan esta investigación, como así los objetivos.

En el **segundo Capítulo** se realizará una síntesis relacionada con el estado del arte del tema a abordar. Se efectuará un recorrido por diferentes autores, trabajos y corrientes que abordan el problema de las consignas en general y el de matemática en particular.

En el **tercer capítulo** se mencionarán y explicarán cuáles son las principales líneas y categorías teóricas que sostienen esta tesis. Se hará énfasis en aquellas que se vinculan directamente con el trabajo: lingüísticas, cognitivo-didácticas y matemáticas.

En el **cuarto capítulo** se explicitará cuáles son los supuestos metodológicos que orientan esta investigación. Asimismo, se detallarán las decisiones metodológicas específicas que fueron tomadas a la hora de elegir y seleccionar el corpus, como también la manera de analizar e interpretar a este último.

En el **quinto capítulo** se expondrán y detallarán los principales rasgos que distinguen a las consignas de matemática en tanto género. Se atenderá a los diferentes componentes que la constituyen, etapas y fases, como también a algunas singularidades vinculadas con el sistema de ideación (metáfora gramatical, relaciones nucleares, taxonómicas, etc.) y con la conjunción externa e interna. Por último, se reflexionará sobre el impacto cognitivo y lingüístico de cada uno de ellos.

En el **sexto capítulo** se describirá y analizará el componente de la demanda en la consigna desde la perspectiva de la negociación, es decir, como interacción. Se procederá a describir la dimensión interpersonal de las demandas, atendiendo a su realización tanto en los estratos semántico-discursivo, como en el léxico-gramatical. También se abordará de qué modo impactan estos aspectos en términos cognitivos-didácticos.

En el **séptimo capítulo** se llevará a cabo una caracterización cognitiva, semántica y disciplinar de las demandas. Asimismo, se consignará la frecuencia con la que aparecen y también una comparación entre las que se presentan en los exámenes y aquellas que se emplean en el manual de Cálculo I. Por último, se analizarán estos hallazgos a la luz de sus proyecciones en términos de comprensión y aprendizaje.

En el **octavo capítulo** se procederá a realizar un relevamiento e interpretación de la encuesta que se aplicó a estudiantes y docentes.

Por último, se consignarán las principales conclusiones a las que se ha arribado luego del recorrido de análisis por los diferentes capítulos. Además, se propondrán líneas de acción para poner en práctica algunas ideas que surgen de esta investigación.

CAPÍTULO 1 . Fundamentación del tema

1.1. Enunciación, descripción y relevancia del tema

El tema de la presente tesis será: consignas de matemática en carreras de FICH. Configuraciones discursivas y procesos de aprendizaje.

La investigación tomará como objeto de análisis a las consignas escritas de las asignaturas de Cálculo I y Matemática Básica, materias que se ofrecen en el ciclo básico de las diferentes carreras de la Facultad de Ingeniería en Ciencias Hídricas de la UNL.

El tema encuentra su origen en el marco de un proyecto de investigación CAI+D entre las áreas de Comunicación Oral y Escrita y Matemática (Básica, Cálculo I y II) de las carreras de la Facultad de Ingeniería en Ciencias Hídricas. De las diversas problemáticas esbozadas principalmente por el equipo docente de Matemática, surgen las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de comprender el enunciado de las consignas. De lo expuesto, se concluye que estos obstáculos no son solo disciplinares, sino también lingüísticos. De este modo, se inicia la investigación que da origen al tema de esta tesis, es decir, indagar tanto los aspectos lingüísticos-textuales y didácticos-cognitivos presentes en la formulación de consignas de matemática en producciones auténticas (exámenes, trabajos prácticos y capítulos seleccionados del manual de Cálculo I), como también de qué manera ellos confluyen en la configuración de los procesos de aprendizaje.

Las consignas, como dispositivos didácticos y lingüísticos que median entre el conocimiento del docente y del alumno con el propósito de favorecer el aprendizaje y la reflexión, constituyen una problemática medular para poder comprender los modos y las dificultades de apropiación del conocimiento. En el caso del aula universitaria, supone, además, usos del lenguaje que construyen significados singulares que es preciso atender para comprender su funcionamiento. Sin embargo, esta temática no encuentra un campo amplio de exploración, en particular en lo que respecta al nivel superior y al área de las “ciencias exactas”, en especial. Asimismo, como se observará con mayor precisión en el estado del arte, no son numerosos los trabajos que aborden las consignas de matemática desde una dimensión discursiva y lingüística.

Por otra parte, el tema de consignas en el nivel superior puede encuadrarse, de manera general, en lo que se denominó "Alfabetización académica" (Carlino, 2006) o "literacidad académica" (Gee, 2004). Estos conceptos, implican, de modo general, que el aprendizaje se concreta en un contexto de interacción social en el cual, la cultura escrita, en tanto práctica social, está vinculada a contextos concretos en donde se generan significados que son propios y solo son comprendidos por aquellos que participan de ellos. En Argentina las investigaciones y propuestas didácticas sobre alfabetización académica, desde diferentes perspectivas y corrientes teóricas (pedagógicas y lingüísticas), comienzan a profundizarse, sobre todo, desde hace dos décadas aproximadamente. Si bien existen trabajos previos, fueron las dificultades que empiezan a presentar los estudiantes para comprender los textos y los distintos géneros discursivos que circulan en la Universidad las que aceleraron los estudios y las propuestas didácticas (manuales) para hacer frente a esa situación. En este sentido, las consignas en la universidad, y las de matemática en especial, forman parte de estos problemas que manifiestan los estudiantes a la hora de entender los enunciados y que, al poseer características que son propias de la cultura académica donde se producen, exigen ser analizadas a la luz de estos supuestos.

Por estas razones, y porque el resultado de esta investigación puede contribuir en la potenciación de las prácticas de enseñanza de los docentes de la universidad, en particular la de los de matemática, es que se decide elegir esta temática para analizar.

1.2. Preguntas que orientan la investigación

Algunos interrogantes que intentarán ser respondidos a lo largo de la investigación son:

¿Cuáles son las configuraciones lingüísticas que sustentan las consignas? ¿Cómo impactan estas configuraciones en los modos de aprender y, específicamente, en la comprensión de consignas escritas en matemática?

¿Qué tipo de consignas y qué aspectos de su formulación lingüístico-textual ofrecen mayor dificultad a los estudiantes y por qué?

¿Qué tipo de consignas y qué aspectos de su formulación lingüístico-textual promueven aprendizajes más potentes y por qué?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

- Describir las configuraciones discursivas de las consignas de matemática e identificar el impacto de estas en los procesos de comprensión y de aprendizaje.

1.3.2. Objetivos específicos

- Identificar y caracterizar el componente de las demandas cognitivas presentes en las consignas, así como también qué tipo de aprendizajes promueven.
- Describir y analizar las características lingüísticas, cognitivas y disciplinares del género consignas de Matemática en el corpus relevado.
- Proponer líneas de reflexión y de acción sobre esta temática que puedan potenciar las prácticas de enseñanza de Matemática en la FICH.

CAPÍTULO 2. Estado del Arte

Las consignas como dispositivos didácticos y lingüísticos que median entre el conocimiento del docente y del alumno con el propósito de favorecer el aprendizaje, son una problemática medular para la comprensión de los modos y dificultades de apropiación del conocimiento. Esta situación no se condice con el escueto campo de exploración que presenta esta temática en las investigaciones tanto desde el ámbito de la didáctica y las teorías del aprendizaje en el nivel superior, como desde los estudios discursivos y lingüísticos.

En el ámbito académico se ha suscitado en los últimos años un creciente interés por el análisis discursivo de consignas de escritura, demandadas en la formación universitaria, que surge en el contexto del rol destacado que se le han asignado en las últimas dos décadas, en Argentina, a los estudios sobre los géneros discursivos de la ciencia y los procesos de alfabetización académica, como así a las investigaciones en el campo de la lingüística aplicada. (Carlino, 2006; Navarro: 2012).

No obstante, estos desarrollos se diferencian de la trayectoria que la problemática ha tenido para los especialistas en el nivel primario y secundario de la educación obligatoria en Argentina, quienes hace desde varias décadas vienen investigando al respecto.

Con relación a las consignas se observa un campo de investigación profuso y diverso. Profuso porque comienza a visualizarse en los diferentes niveles de la educación obligatoria y no solo en el ingreso a la Universidad. Así, los estudios sobre consignas aparecen en trabajos que van desde el primario hasta el universitario, aunque con mayor profusión en los dos últimos niveles de la educación obligatoria argentina.

Sobre las consignas en la escuela secundaria se pueden mencionar, entre otros, los trabajos de Riestra (2008), Atorresi, (2005). También se destacan los aportes de Maite Alvarado (2013) en su célebre artículo de “Escritura e invención”, como así en el de Fajre y Arancibia (2000), “La consigna: un manual de instrucciones para leer la escuela”.

Las investigaciones desde el campo de la enseñanza para la diversidad, dentro de líneas constructivistas del conocimiento, han tenido desarrollo, por ejemplo, en trabajos como los de Anijovich (2007; 2011) que han abordado la problemática del aprendizaje significativo y el papel de las consignas en la construcción del conocimiento. Es de señalar que sus experiencias fueron principalmente en escuelas primarias y secundarias.

En lo que respecta al nivel superior se registra un número mayor de investigaciones en las humanidades y las ciencias sociales, no así en el campo de las ciencias exactas donde la cantidad es menor.

En el ámbito de las ciencias sociales y las humanidades se destaca la investigación de Dora Riestra (2010) quien, además de abordar las consignas en el nivel medio, lo ha hecho también en el superior. Por su parte, Vázquez (2006, 2007; 2008) ha realizado aportes desde el área de las ciencias sociales y las humanidades y, al igual que la autora anterior, privilegia en los análisis los procesos de aprendizajes y de comprensión involucrados en las consignas.

Grigüelo (2010) y Natale y Satagnaro (2014) proponen el abordaje de las consignas en el marco de manuales de escritura académica para el ingreso a la Universidad. En ambos casos se analizan tareas académicas para carreras humanísticas y sociales, específicamente, en el contexto de exámenes. Además, como en todo manual, las autoras ofrecen allí actividades prácticas sobre el tema.

Mabel Giammatteo et.al. (2005), por su parte, presenta una línea de investigación acerca del diseño y problemas de comprensión de consignas en el nivel superior, específicamente en la Facultad de Filosofía y Letras de Buenos Aires.

En el área de ciencias exactas se puede mencionar el trabajo de Lucía Natale (2013) quien compendia diferentes investigaciones acerca de las consignas en el nivel superior en carreras como ingenierías, administración, entre otras. En esta misma línea se encuentra la indagación que llevan a cabo Navarro y Stagnaro (2012) sobre la configuración de las consignas en Ingeniería Industrial. Muñoz y Musci (2014), por su parte, analizan la escritura de géneros profesionales en la carrera de Ingeniería en Recursos Naturales Renovables de la UNPA, prestando especial atención a la formulación de consignas por parte de los docentes y a las respuestas de los alumnos.

Los trabajos sobre consignas en el área de matemáticas en el nivel superior no son numerosos. Entre otros se pueden mencionar, en primer lugar, los aportes de Mabel Rodríguez (2014; 2016; 2017) quien analiza el potencial epistémico de las consignas de matemática. En tanto, Arancibia Carvajal et.al. (2022), describe las implicancias cognitivas y disciplinares de ciertas demandas matemáticas en el contexto del pensamiento crítico en carreras de ingeniería.

En lo que hace a investigaciones más generales sobre las consignas, se encuentra, por ejemplo, el libro de Silvestri (1995) sobre el discurso instruccional. Es un texto inaugural en español sobre las características generales del género de las instrucciones, del cual las consignas son una parte. Isabel Sole, analiza en un trabajo de 2004, el impacto cognitivo de las tareas o demandas en los ejercicios, como también la función de ellas dentro de los diferentes dominios disciplinares. Jorba et. al. (2000) realiza una descripción y explicación sobre diferentes habilidades cognitivo-lingüísticas implicadas en la escritura y la oralidad. Si bien no aborda el género consignas, se centra en la dimensión cognitiva y lingüística de las demandas como procesos del pensamiento y del aprendizaje. Por último, Camelo González (2010), reflexiona en torno a las características discursivas de aquellos textos que tienen como finalidad regular, ordenar y dirigir los procesos de escritura. Este estudio, además, indaga respecto de los alcances cognitivos involucrados en las tareas académicas.

En lo que respecta a la diversidad, se hace hincapié en la heterogeneidad de enfoques epistemológicos y pedagógicos con los cuales se investiga el campo de las consignas en general, y en el nivel universitario en particular. Mayoritariamente predominan las perspectivas pedagógicas-didácticas y del aprendizaje, por sobre las miradas lingüísticas y discursivas del fenómeno. En algunos casos, para dar cuenta sobre la comprensión, se recuperan teorías psicológicas cognitivas que tuvieron aplicaciones pedagógicas, como son los casos de las derivadas de autores como Vigotzki, Piaget, Ausubel, Gardner y Perkins. Si bien estos últimos toman en consideración el rol del lenguaje en los procesos de la comprensión lectora, hacen más foco en la dimensión cognitiva que en la participación de los aspectos léxico-gramaticales de este fenómeno pedagógico. Sin embargo, se hallan estudios, como el de Dora Riestra, que articulan los aportes del interaccionismo sociodiscursivo, a través de uno de sus representantes, Bronckart, para integrar los aspectos cognitivos y lingüísticos de las consignas. La lingüística sistémico-funcional también aporta una mirada sobre este fenómeno.

CAPÍTULO 3 . Marco Teórico

El presente apartado busca esbozar algunas líneas principales sobre el marco teórico que nutre y sustenta la investigación de esta tesis.

El trabajo aborda la problemática del género consignas en matemáticas en el nivel superior. Esto supone un análisis que abrevará de tres diferentes marcos teóricos principales: lingüístico, didáctico-matemático y pedagógico. Si bien los tres, como se podrá apreciar luego, comparten un mismo sustrato relacionado con el aprendizaje y la enseñanza, a los efectos de la precisión que un marco teórico exige, se realizarán las caracterizaciones pertinentes de cada uno.

Como se señaló en el primer párrafo, aquí se expondrán las categorías centrales de cada propuesta, ya que en el desarrollo del análisis del corpus se presentan aportes teóricos específicos que provienen de este marco general. Se concibe así la teoría no como una dimensión separada del corpus, sino como un movimiento epistémico de construcción del conocimiento científico necesario en toda investigación de tipo educativa.

Cabe señalar que el objetivo de esta tesis no es realizar una investigación lingüística, sino un trabajo vinculado con el propósito de la maestría, es decir, con el abordaje de problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje en la universidad. En ese sentido, no se llevará a cabo un desarrollo lingüístico exhaustivo de los temas, aunque sí se retomarán aspectos que permitan profundizar en la temática de esta tesis. Cabe señalar que un análisis sobre prácticas educativas no puede prescindir del impacto que posee el lenguaje en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Tanto Vigotzki (2007), Ausubel (1998), Halliday (1993, 2017), Litwin (2000), y Jorba et.al. (2000), entre muchísimos otros autores más, han reflexionado y teorizado sobre la relación del lenguaje con el pensamiento y el aprendizaje. En este marco general se enmarcará la presente tesis. En otras palabras, se busca analizar la consigna de matemática desde una doble mirada -lingüística y cognitiva- para describir y explicar los efectos que se producen en el aprendizaje y la comprensión de la matemática.

3.1. Consignas y demandas

Las consignas son uno de los dispositivos didácticos y géneros discursivos que más se emplean en la configuración didáctica de las clases. Buscan mediar entre los procesos de enseñanza y aprendizaje y favorecer la apropiación de los saberes de los estudiantes. La característica principal es su función performativa y, en su conformación textual, la acción cumple un rol central. Buscan que el destinatario, en este caso el estudiante, ejecute órdenes, que desarrolle determinadas conductas o alcance un saber que no posee. Estas acciones se configuran a través de directivas de actividades cognitivas que persiguen el desarrollo y la transformación de los conocimientos. En ocasiones, las consignas pueden promover aprendizaje significativos y profundos y, en otras, actividades reproductivas o memorísticas.

Según Anijovich, la consigna es la explicitación de la tarea que los alumnos tienen que abordar" (2007, p.54); para Riestra (2010), "se trata del texto que media en la coherencia de su realización, el texto que organiza las acciones mentales en los aprendientes, podemos decir, el que regula, el que ordena, el que dirige, el que prescribe" (p.178). De acuerdo con Silvestre (1995), la consigna formaría parte de lo que denomina "discurso instruccional", ya que busca que el enunciatario lleve a cabo una tarea determinada. "Se trata de un discurso que intenta regular la actividad del interlocutor, el tránsito a la acción". (Silvestre, 1995, p. 14). En coincidencia con Silvestre, Navarro y Stagnaro sostienen que "se trata, entonces, de un género que se emplea para organizar y controlar los procesos mentales y actividades del estudiante por medio de prescripciones" (2012, p.65).

Las consignas y las demandas son, según Riestra (2004) "(…) operaciones mentales incluidas en acciones que producirán determinadas apropiaciones de contenidos". (p.58). La relevancia del estudio de las consignas, en particular de las demandas, deviene del hecho que a través de sus análisis es posible profundizar en los modos de apropiación de los conocimientos matemáticos. Expresa Riestra (2004): "La acción que se propone como ejecución (…) será la que, al lograr una meta determinada, constituya un paso en la apropiación conceptual o procedimental" (p.62).

Las demandas instrumentales, por caso, como se analizará más adelante, se constituyen también en herramientas, instrumentos que contribuyen con el andamiaje del conocimiento matemático y el desarrollo mental potencial de los estudiantes (Baquero, 1997; Riestra 2004). Desde esta perspectiva sociocultural del aprendizaje, heredera de los aportes de Vigotski y Bruner, es el docente quien posee el saber experto y el conocimiento en los modos de enseñar y, por medio de una actividad deliberadamente intencional en términos didácticos, diseña estrategias y demandas particulares para andamiar la construcción de los saberes matemáticos.

Por estas razones, las consignas guardan relación directa con la planificación didáctica de la clase, ya que es el docente quien decide, a través de las tareas que propone a sus estudiantes, cuáles son las actividades más adecuadas para regular, secuenciar, dirigir, ordenar o andamiar el proceso de aprendizaje.

Al tiempo que regulan los procesos de aprendizaje de los estudiantes, las consignas "son herramientas didácticas que proporcionan un marco de referencia compartido, encauzan el comentario y la corrección" (Vázquez, et al., 2006, p.3). Se construyen como una instancia de diálogo entre estudiantes y docentes para verificar si se alcanzaron los saberes enseñados, qué errores existen, qué mejorar, y cómo puede el alumno continuar con el progreso de su aprendizaje. Además, al docente le permite evaluar los conocimientos alcanzados por parte de los estudiantes, reflexionar sobre los resultados y reajustar las estrategias didácticas tendientes a mejorar los procesos de enseñanza. En el caso particular de la presente tesis, se abordarán consignas que forman parte de lo que Cubo de Severino (2014) denomina "Géneros de control de conocimiento", es decir, parciales, exámenes finales, entre otros. Como expresa Vázquez (2007), "La consigna constituye entonces un elemento mediador entre las expectativas del profesor sobre el aprendizaje de los estudiantes y la representación que estos elaboran acerca de lo que se espera que realicen" (p.4).

A los efectos de esta investigación, la consigna es concebida como género, del modo que Martin y Rose (2007) lo definen, es decir, "diferentes tipos de textos que representan diversos tipos de contextos sociales" (p.20). Según estos autores, el género es un proceso social que está orientado a un propósito y es realizado en etapas o pasos. En este sentido, el género de las consignas participa de diferentes prácticas sociales donde se requiere de la instrucción, la guía o la orientación; en el caso de esta tesis, pertenecen a prácticas sociales vinculadas con la educación universitaria.

Debido a la exposición que los hablantes de una lengua poseen con las consignas escolares, pueden reconocer ciertos aspectos genéricos de ellas que las distinguen de otras. Así, las realizaciones léxico-gramaticales prototípicas en español en modo imperativo o con infinitivos, la extensión de los textos (escritos u orales), la estructuración en ítems, los pasos y etapas de la consigna, la orden, un enunciador que solicita la realización de tareas y un enunciatario que responde a ellas, son aspectos del género que las identifican.

Las consignas de matemáticas poseen ciertas particularidades que las distinguen. Una de las características más sobresalientes es su composición multimodal, donde diferentes registros lingüísticos dialogan entre sí dentro de una misma tarea académica: el natural, el algebraico, el aritmético, el gráfico y el visual. Además, se suman los rasgos distintivos del discurso matemático que es el empleo de entidades simbólicas en un contexto intra-matemático particular, en el cual los significados son parte de un campo experiencial restringido (O´Halloran, 2005).

Por último, un componente y fase central de la consigna es la demanda, que es la expresión misma de la tarea académica, es la orden, la prescripción de la actividad, la que indica y regula la acción. Debido a que es a través de la demanda (directa e indirecta) donde se materializa la orden de la tarea cognitiva, se realizará a lo largo del trabajo un abordaje minucioso sobre ella. Al respecto, es necesario efectuar algunas precisiones teóricas.

Como se podrá observar de manera detallada en el capítulo dedicado a la descripción del género, la demanda es una fase que se halla dentro de la etapa de la expresión de la tarea académica. Como fase es obligatoria para que se constituya el género y aparece siempre de manera directa o por medio de otras formas de realizaciones léxico-gramaticales indirectas como son las preguntas, por caso.

Para poder comprender en profundidad las nociones de orden, demanda, instrucción, acción perlocutiva asociadas al género consigna, es preciso previamente realizar un rastreo por diferentes acercamientos teóricos al tema. Si bien estos últimos provienen de desarrollos teóricos-lingüísticos diferentes, todos aportan perspectivas e información que permiten andamiar el análisis propuesto para este trabajo.

Desde una perspectiva pragmática o desde la filosofía del lenguaje (Austin, 1990; Searle, 1994), la demanda puede ser considerada una forma de acto de habla, en tanto se utiliza el lenguaje para realizar acciones y producir efectos "que tales actos tienen sobre las acciones, pensamientos o creencias, etc., de los oyentes" (Searle, 1994, p.34). Son "cosas" que hacemos con palabras, en el caso de las demandas, son las acciones que llevan a cabo los estudiantes en un examen como calcular, demostrar, explicar, justificar, entre otras.

Searle señala que “enunciar, preguntar, mandar, prometer, etcétera son realizar actos ilocucionarios” (1994, p.33). Una de las formas que toman las demandas es a través de la orden, aunque, como se verá, no es la única manera. Además de la formulación léxico-gramatical, para que una demanda se convierta en tal, se necesita de una persona en posición de autoridad, otorgada esta última por su conocimiento y su pertenencia a la academia (profesores de las carreras o autores del manual) y un receptor o enunciatario (los estudiantes) que es compelida a realizar las demandas solicitadas con el objetivo de controlar los conocimientos adquiridos (Cubo de Severino, 2005). Explica Searle:

> Las condiciones preparatorias incluyen que el hablante esté en posición de autoridad sobre el oyente, la condición de sinceridad consiste en que el hablante desea que se lleve a cabo el acto ordenado, y la condición esencial tiene que ver con el hecho de que el hablante intenta que la emisión haga que el oyente lleve a cabo el acto. (1994, p.72)

Esta noción de acto de habla es retomada y reformulada por la LSF. Las demandas podrían ser analizadas como actos de habla, específicamente dentro del sistema de modo (Metafunción interpersonal del lenguaje).

> Un ‘acto de habla’ no solo implica que el hablante hace algo sino también que quiere algo que debe hacer el oyente. Por eso, podría decirse también, más apropiadamente, que un acto de habla es una “interacción” o un “intercambio” en el que podemos reconocer dos tipos fundamentales de roles discursivos: 1) dar y 2) demandar. En este intercambio el ‘dar’ implica el recibir, y ‘demandar’ implica dar una respuesta. (Ghio y Fernández, 2008, p.122)

Esto forma parte de las funciones del habla que describe Halliday y que será profundizado en el próximo apartado que recupera categorías centrales de la LSF.

Desde el sistema de transitividad (metafunción ideacional del lenguaje), las demandas, particularmente las que se constituyen como procesos finitos, formarían parte de lo que se denominan procesos. Según Ghio y Fernández (2008) este sistema podría definirse como: "un recurso gramatical para construir el flujo de la experiencia en términos de un proceso realizado gramaticalmente como una cláusula" (p.93). Según estas autoras, "la forma prototípica de la experiencia 'externa' es el de las acciones y los eventos: ocurren cosas y las personas, u otros actores, hacen cosas o hacen que ocurran cosas". (2008, p.94).

Esta corriente teórica distingue tres tipos de procesos básicos: los materiales, los mentales y los relacionales. Los primeros son procesos del mundo que nos rodea, forman parte de la experiencia "externa", los segundos se ubican en la experiencia "interior", en nuestra conciencia, mientras que los últimos permiten generalizar y relacionar diferentes procesos experienciales. Esta distinción es de base semántica y no solo formal.

Además de la lingüística sistémico funcional, pero en clara relación con ella, se recuperan aportes de lo que Silvestri denomina discurso instruccional, específicamente del texto instruccional del cual las consignas forman parte. En este sentido, Silvestri (1995) señala que el discurso instruccional guarda

> relación con la conducta, con la actividad (…) resulta un caso particular dentro de un conjunto más amplio de enunciados, el de los enunciados directivos. Este tipo de enunciados tiene como propósito lograr que el interlocutor ejecute una acción determinada. Se trata de un discurso que intenta regular la actividad del interlocutor, el tránsito a la acción. (p.14)

3.2. El marco teórico-lingüístico

Esta tesis recupera aportes de diferentes marcos teóricos lingüísticos. La lingüística sistémico-funcional se constituye en el soporte principal del análisis, sin embargo, se emplean contribuciones que provienen del campo amplio de la lingüística textual, como también de la pragmática. Si bien cada uno de ellos procede de marcos conceptuales y tradiciones diferentes, todos coinciden en una reflexión amplia sobre el uso y función del lenguaje, acerca de los usuarios y destinatarios de este, como así en torno al contexto sociocultural en que se producen los textos. Todas estas dimensiones son fundamentales para poder llevar a cabo el análisis lingüístico de las consignas.

Este eclecticismo teórico busca enriquecer la investigación y ofrecer insumos conceptuales en aquellas instancias donde los marcos teóricos son limitados y no alcanzan para dar cuenta de la complejidad del objeto de estudio. Esto se puede evidenciar aún más con el tema de esta tesis donde el desarrollo de investigaciones en torno al rol del lenguaje sobre consignas de matemática en el nivel superior no es profuso.

3.2.1. La lingüística sistémico funcional

En primer lugar, la elección de este marco teórico, entre otros que componen la tesis, se debe a que muchas de sus categorías y desarrollos son apropiadas para pensar la problemática abordada desde una perspectiva que tenga también impacto en la dimensión del aprendizaje de los conocimientos. Incorporar contribuciones del lenguaje a una investigación vinculada con una temática pedagógica, como es el caso de las consignas en las clases de matemática, refuerza la idea que expresa Halliday (2017) acerca de que "el lenguaje no es un dominio del conocimiento humano(..); el lenguaje es la condición esencial del conocimiento, el proceso por el cual la experiencia se convierte en conocimiento" (p. 216).

Si bien existen otros aproximamientos teóricos sobre la relación de aprendizajes, conocimientos y lenguaje, la Lingüística Sistémico-Funcional explora en la dimensión semiótica del aprendizaje, aspecto considerado potente para poder dar cuenta del objeto de la presente investigación. En su artículo "Hacia una teoría del aprendizaje basada en el lenguaje" Halliday, (2017) señala que

> la característica que distingue el aprendizaje humano es que se trata de un proceso de construcción de significados —un proceso semiótico—y la forma prototípica de la semiosis humana es el lenguaje. Por eso, la ontogénesis del lenguaje es al mismo tiempo la ontogénesis del aprendizaje. (p. 216)

En segundo lugar, la Lingüística Sistémico funcional provee de trabajos y experiencias en el campo educativo, en especial los desarrollos llevados a cabo por lo que se conoce como “Escuela de Sydney”. Esta alude a un grupo de lingüistas y pedagogos (Martin, Christie, Rose, Eggins, Hassan entre otros) que se abocaron a la elaboración de programas australianos de alfabetización basados en el género. Esta corriente toma los aportes de Halliday y se inscribe en el marco teórico general de la lingüística sistémica funcional, aunque con contribuciones y elaboraciones teórico-metodológicas propias. En este sentido, si bien existen diferentes corrientes lingüísticas que abordan la cuestión del género y su potencialidad en la enseñanza, ha sido la escuela de Sidney, junto con autores como Moyano (2007), por ejemplo, quienes colaboraron en el desarrollo de una didáctica de la lectura y escritura centrada en el género. Este marco general es el que se recupera para analizar las consignas de matemática.

En tercer lugar, y en consonancia con lo expresado anteriormente, muchos trabajos de la LSF (Lingüística Sistémico Funcional) vinculados con la educación, exploraron en el conocimiento de los discursos escritos de las instituciones sociales contemporáneas con el fin de democratizar el acceso a ellos. Al respecto Martin y Rose (2007) sostienen que “todos los hablantes de un idioma comparten una gama igual de recursos para la creación de significado, pero también hay ciertas variedades de significados que no están distribuidas equitativamente” (p. 16). En el caso de la universidad, en particular con los estudiantes ingresantes, se observa un acceso desigual en cuanto al conocimiento y manejo de los géneros y los discursos. Esto se evidencia, entre otros, en los problemas que manifiestan a la hora de poder comprender de manera adecuada consignas y, con ello, las dificultades de muchos de ellos para sostener su recorrido académico. Es preciso expresar que la razón de algunos fracasos en los estudios es multicausal y no solo por el desconocimiento de los géneros, sin embargo, es un punto que debe ser atendido e investigado. En este sentido, para dar respuesta a problemas como los señalados, diferentes corrientes de la LSF exploraron el acceso a estos discursos a través de pedagogías de alfabetización basadas en el análisis del discurso. (Martin y Rose, 2007).

Así, la Universidad posee el desafío de crear estrategias e investigaciones que favorezcan la democratización de estos saberes y significados discursivos específicos que redundarán en estudiantes que finalicen sus trayectorias académicas, como también en futuros profesionales competentes. Esta tesis busca generar conocimiento que pueda responder a estos objetivos.

Por último, como se expresó, el propósito de esta tesis no fue llevar a cabo un análisis lingüístico exhaustivo, ya que el objetivo era atender a una problemática vinculada con el aprendizaje en el contexto de la educación universitaria, recurriendo a categorías lingüísticas que echen luz sobre el problema investigado. No obstante, en este trabajo se intentará precisar el marco teórico lingüístico, ampliar el análisis del género, como también abordar y desarrollar otras cuestiones referidas a las realizaciones en los estratos semántico-discursivo y léxico-gramatical.

3.2.1.1. Categorías centrales de la teoría

Un análisis que pretenda aplicar los aportes de la LSF debe partir en primer lugar del constructo teórico que desarrolló esta corriente en relación con el modelo estratificado del lenguaje. Cabe señalar que se tomarán las contribuciones teóricas de la LSF en general, aunque se orientará más a la propuesta de Martin en particular. En este sentido, tanto desde lo teórico como metodológico, se seguirán los trabajos sobre el género y el análisis discursivo de Martin y Rose (2007;2008), Eggins y Martin (2003) y Moyano (2011, 2013, 2021).

Para comprender este modelo se debe partir de la idea de que, tal como sostienen Martin y Rose (2007), "el lenguaje implica una teoría sobre cómo funciona el lenguaje" (p.3). En función de esto, la LSF desarrolla un modelo relacionado con el uso y funcionamiento del lenguaje en diferentes contextos sociales.

Este modelo presupone tres aspectos centrales: la lengua, el uso y el contexto social. Los desarrollos teóricos se orientarán para dar cuenta acerca de cada uno de ellos, como a las relaciones y determinaciones entre uno y otro. De este modo, se responderá acerca de la organización de la lengua para su uso, como así de qué manera los hablantes la utilizan en la construcción de significados que puedan ser intercambiados con otros en el marco de su vida social. Según lo indica Moyano (2013), la lengua se define "como recurso para la construcción de significados que los hablantes intercambian al llevar a cabo su vida social, es decir, la lengua como recurso socio semiótico" (p.34).

En este contexto, toman relevancia los dos términos que dan nombre a esta teoría: lo sistémico y lo funcional. El primero, describe a la lengua como un potencial de significados que se encuentran en la cultura. Esto refuerza la dimensión semántica de la lengua. Potencial de significados refiere al hecho que estos se organizan en una lengua como sistema de opciones lingüísticas que están disponibles para los hablantes o escritores. Estos últimos eligen del sistema de opciones aquellos significados que precisan con el fin de construir su mensaje o texto en un contexto determinado. El segundo, se propone "indagar cómo funciona la lengua en contextos (los usos lingüísticos) y reconocer que son estos usos de los hablantes los que, generación tras generación, han ido configurando 'el sistema lingüístico'" (Ghio y Fernández, 2008. p.7). En otras palabras, la Lingüística Sistémico-Funcional se centra en comprender de qué modo el lenguaje funciona como un sistema de opciones para expresar significado y cómo desarrolla diversas funciones en contextos comunicativos y sociales. Se construye así una relación dialéctica entre lenguaje y contexto social, donde no es posible abordar el fenómeno lingüístico-gramatical abstrayéndose del contexto en el cual se produce.

Así, se elabora un constructo-teórico abstracto que busca mostrar la organización del lenguaje y su relación con el contexto social: el modelo estratificado del contexto y el lenguaje. El siguiente cuadro, tomado de Moyano (2011), materializa en un gráfico lo que se acaba de enunciar:

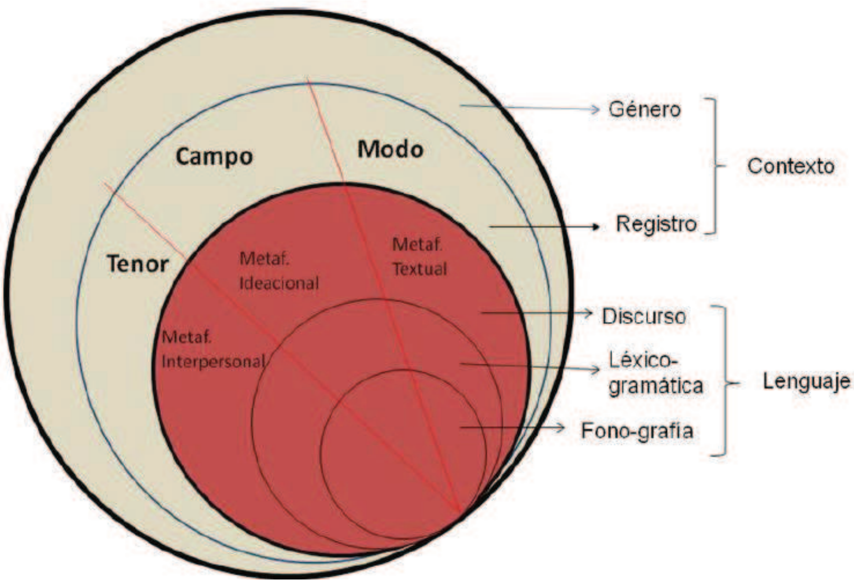


Figura I: Estratificación del contexto y su relación con el lenguaje

Por una parte, se describirá la dimensión del contexto a través de sus dos estratos: el género y el registro y, por otro, la dimensión del lenguaje por medio de los estratos semántico-discursivo, léxico-gramatical y fono-gráfico con sus respectivas metafunciones.

La organización de los estratos en círculos da cuenta de las vinculaciones y determinaciones que existe entre ellos. Martin y Rose (2007) señalan que

> La gramática, el discurso y la actividad social se simbolizan como una serie de círculos, en los que el discurso se anida dentro de la actividad social y la gramática se anida dentro del discurso, sugiriendo tres perspectivas complementarias sobre un solo fenómeno complejo. (P.4)

Según Moyano (2013), los estratos podrían comprenderse a modo de capas o niveles, tanto del lenguaje como del contexto, que poseen diferentes grados de abstracción y que son realizados desde el nivel más abstracto al de menor abstracción. Asimismo, por ejemplo, el contexto se realiza por las elecciones lingüísticas que se encuentran en los estratos del lenguaje. Esta relación entre contexto y lenguaje, o entre texto y contexto se denomina realización, es decir, "las elecciones en el nivel del contexto se manifiestan en las elecciones de un sistema de menor abstracción: el lenguaje" (Moyano, 2013:36). Así, la realización podría comprenderse como una forma de recodificación del lenguaje.

Esta descripción general del modelo de sistema estratificado de lenguaje y contexto, se desarrollará en los siguientes apartados.

3.2.1.1.1. Género y Registro

Los niveles más abstractos del modelo son los que pertenecen al contexto social: el género y el registro.

Debido a que la noción de contexto ha sido explorada y desarrollada por diferentes corrientes y esferas del saber que van desde la sociología, la antropología, la etnografía, entre otras, es preciso explicitar qué entiende la LSF sobre contexto. Este puede ser considerado como "sistema de actividades sociales posibles, potencial de significados complejos disponibles en la cultura, que se dan en diferentes situaciones de acuerdo con la actividad en juego, la relación entre quienes interactúan en ella y el rol que juega el lenguaje" (Moyano, 2013, p.36). La autora agrega también que el contexto puede comprenderse como el "conjunto de actividades sociales que se llevan a cabo en una cultura, las que, como han sugerido diversos autores, dan lugar a la creación de textos".

(2013, pp. 35-36). Esto último será central para comprender, por ejemplo, la noción de género desde la mirada de Martin y Rose. La definición que efectúa Halliday sobre el contexto de situación se emparenta con esta descripción del contexto:

> el lenguaje solo surge a la existencia cuando funciona en algún medio. No experimentamos el lenguaje en el aislamiento, sino siempre en relación con algún escenario, con algún antecedente de personas, actos y sucesos de los que derivan su significado las cosas que se dicen. (2005:42)

Las dimensiones del contexto de cultura y de situación que propone Halliday, sin perder los principios orientadores básicos de la LSF, sufre algunas modificaciones de mano de Martin y Rose. Si bien el estrato de mayor abstracción continúa emparentado con la cultura, el género es considerado como contexto de cultura. Del mismo modo, el registro se comprende como contexto de situación. De esta manera el género y el registro serán los estratos de mayor abstracción y los que representen al contexto. En palabras de Martin y Rose:

> Nuestra solución a este dilema fue modelar el género en el estrato de la cultura, más allá del registro, donde pudiera funcionar como un patrón de campo, tenor y modo. En este paso, habíamos remodelado el lenguaje en el contexto social como un sistema semiótico integrado, en el que 'situación' y 'cultura' fueron reconstruidas como estratos semióticos sociales: registro y género. (200, p.16)

Estos aportes, que presentan controversias entre otros autores de la LSF, buscan precisar la teoría de Halliday y hacerla potente para ofrecer propuestas que puedan mejorar las prácticas de lectura y escritura en las escuelas: “Esto fue particularmente importante para el trabajo de nuestras escuelas, tanto en términos de mapeo curricular como de construcción de trayectorias de aprendizaje” (Martin y Rose, 2008, p.17). Asimismo, explican los autores que esto “facilitó la exploración de la gama de configuraciones de campo, tenor y modo que una cultura pone en práctica en comparación con aquellas que no lo hace” (p.17).

Para comprender la noción de género es necesario entender a qué se refiere cultura en este contexto. Ante todo, la cultura se compone de una multitud de textos vinculados entre sí. No obstante, como observa Moyano (2013), “la cultura es más que eso; es un fenómeno de diferente naturaleza y mayor abstracción, que se manifiesta a través de los textos que ponen en evidencia esas actividades y relaciones sociales” (p.35). De este modo, surge una de las tantas definiciones que brindan Martin y Rose sobre el género como el de “diferentes tipos de textos que representan diversos tipos de contextos sociales” (2007, p.8).

En su trabajo, los autores mencionados avanzan en la definición de género y explican que este se concibe como un proceso social que está orientado a un propósito y está realizado en etapas o pasos. “Social porque participamos en géneros con otras personas; orientado a un propósito porque utilizamos géneros para hacer cosas; realizado en etapas porque usualmente nos toma más de un paso alcanzar nuestros objetivos” (Martin y Rose, 2007, p.8). En este sentido, participamos de la cultura a través de los géneros, con ellos nos comunicamos, enseñamos, transmitimos, damos directivas, con ellos hacemos cosas que tienen un objetivo comunicativo particular.

Si bien como participantes activos de la cultura las personas pueden reconocer los diferentes géneros, el estudio y la enseñanza sistemática de ellos puede contribuir a una utilización más efectiva de la lengua, como así en una apropiación más significativa de la sociedad y la cultura.

Los diferentes estratos se realizan en los de menor abstracción y el género se realiza en primer lugar en el registro. Martin y Rose explican que el género posee la capacidad de producir combinaciones en las dimensiones del registro como son el campo, el tenor y el modo en una cultura dada. Además, es tarea de este nivel contextual evidenciar cómo el propósito social perseguido se alcanza por medio de una serie de pasos y etapas que son los que conforman su estructura. Básicamente, el género produce estructuras esquemáticas o genéricas que son, cuando se analiza un texto, las que posibilitarán determinar el tipo de actividad social, el propósito y la manera en que se desarrollan los pasos y las etapas en una cultura. Asimismo, esto hará posible prever los recursos lingüísticos que, como instancia de realización del registro, podrán ser hallados en los niveles discursivo-semántico y léxico-gramatical.

En tanto proceso social que está orientado a un propósito y está realizado en etapas o pasos, el género de las consignas, que es el objeto de esta tesis, participa de diferentes prácticas sociales donde se requiere de la instrucción, la guía o la orientación; en el caso de esta tesis, pertenecen a prácticas sociales vinculadas con la educación universitaria. De un modo más general, Martin y Rose (2008) caracterizan el género procedimental en el cual las instrucciones y las demandas participan de él. Los autores explican que:

> Los procedimientos son textos pedagógicos en el sentido de que enseñan al lector cómo realizar una secuencia especializada de actividades en relación con ciertos objetos y lugares. Esta secuencia de actividades tiene una función especializada en la cultura, instrumental o ritual, y requiere conocimientos esotéricos para ser realizada; se requiere tutoría experta. (p.180)

Los lingüistas se abocan a analizar principalmente géneros de procedimientos en el mundo del trabajo, por ejemplo, cómo operar máquinas en fábricas. La premisa es que existe un correlato educativo, ya que enseñan y preparan a los futuros operarios. Sin embargo, en el caso de las consignas de matemática, como se explicitó, el género asociado con la instrucción está vinculado directamente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de una disciplina. Las tareas académicas en este contexto no buscan enseñar cómo actuar o proceder sobre un artefacto, sino verificar, controlar, y constatar un conocimiento. También se proponen fortalecer los saberes matemáticos en torno al área de cálculo.

Debido a la exposición que los usuarios de una lengua poseen con las consignas escolares, pueden reconocer aspectos genéricos de ellas que las distinguen de otros géneros. Así, en el caso de las consignas de matemática, se observa una estructuración prototípica en ítems, descripciones y narraciones en el caso de los problemas, como también una organización que contempla etapas y fases (aunque no siempre igual en todos los casos) como son la expresión de la tarea académica (Demanda+objeto+circunstancia [opcional]), la información para la resolución de la actividad y una instancia de andamiaje cognitivo optativa.

Asimismo, como se explicó, el estrato del género se realiza en otros de menor jerarquía. Por ejemplo, en el estrato semántico-discursivo, en lo que refiere a la dimensión de la negociación que construye el significado interpersonal, es posible analizar las funciones del habla. Las consignas y, específicamente las demandas que aparecen dentro de la etapa de la expresión de la tarea académica, se relacionan con la acción de pedir, es decir, ordenar. En este contexto, la negociación se produce entre un enunciador que solicita la realización de tareas y un enunciatario que responde a ellas. A su vez, a nivel léxico-gramatical, la orden se realiza típicamente en español en modo imperativo, aunque como se verá, la misma función puede ser realizada por otras formas como la pregunta, los infinitivos, construcciones impersonales, etc.

En cuanto a la construcción de significados ideacionales y textuales, se puede apreciar cómo se configura el sentido en los textos de los problemas a partir de pistas que ofrecen las relaciones conjuntivas, en lo que refiere al primer significado, y en lo que respecta al segundo, las referencias a través del seguimiento de los participantes. También, la organización y articulación del registro algebraico y visual, que se visualizan en las etapas y fases del género de las consignas matemáticas, se asocian con la variable del modo en el registro y, a su vez, con las respectivas realizaciones a nivel léxico-gramatical. Cada uno de los estratos, despliega a la manera de un zoom, las etapas del género, en cuanto a su dimensión discursiva y léxico-gramatical y a la forma en que se construyen los significados ideacionales, interpersonales y textuales.

En el registro, por su parte, considerado en tanto contexto de situación, se pueden observar diferentes dimensiones sociales que varían de forma independiente y que se las conoce como campo, tenor y modo. Halliday reconoce en estos últimos tres funciones sociales del lenguaje: construir su experiencia de la actividad social (campo), representar las relaciones de los hablantes (tenor), y tejer estas representaciones e interpretaciones en un discurso con sentido (modo).

Martin y Rose (2008), retomando a Halliday, señalan que el campo "se refiere a lo que está sucediendo, a la naturaleza de la acción social que se está llevando a cabo: en qué se están involucrando los participantes, en lo que el lenguaje figura como un componente esencial"; El tenor "se refiere a quién está participando, a la naturaleza de los participantes, sus estatus y roles: qué tipos de relaciones de roles se obtienen, (…) como todo el conjunto de relaciones socialmente significativas en las que están involucrados"; Por su parte, el modo "se refiere a qué papel está desempeñando el lenguaje, qué es lo que los participantes esperan que el lenguaje haga por ellos en la situación: la organización simbólica del texto, el estatus que tiene y su función en el contexto" (p.11).

A su vez, el registro y sus variables se realizan en los estratos discursivo y léxico-gramatical. Estos se instancian en los textos a través de las tres metafunciones de la lengua: ideacional, interpersonal y textual, donde la primera se vincula con la variable del campo, la segunda con la del tenor y la última con el modo. Halliday define a las metafunciones como las dimensiones funcionales del lenguaje. "Así como el lenguaje realiza sus contextos sociales, cada dimensión de un contexto social es realizada por una dimensión funcional particular del lenguaje" (Martin y Rose, 2008:11). En lo que respecta al modo en que el lenguaje realiza sus contextos sociales, el registro puede inferirse a través de los patrones semánticos-discursivos empleados por los hablantes junto con las configuraciones gramaticales, tomando en consideración la relación entre los tres tipos de variables. De esta manera se van configurando significados de tres tipos que la lengua va construyendo en el discurso. Moyano (2013) y Martin y Rose (2008) lo resumen en la siguiente tabla:

Variables del registro	**Metafunciones del lenguaje**
Campo: Acción social que tiene lugar	**Ideacional**: Construcción de la experiencia.
Tenor: Tipo de relaciones entre los roles	**Interpersonal**: Actuación de las relaciones.
Modo: Rol del lenguaje en la actividad	**Textual**: organización del discurso

Tabla I

Después de esta caracterización general de los estratos del contexto, se describirán aquellos que se corresponden con el lenguaje.

3.2.1.1.2. Estratos semántico-discursivos, léxico-gramatical y fono-gráfico

Como se puede apreciar a partir de la caracterización de los estratos del contexto, todas las dimensiones de este sistema estratificado del lenguaje están relacionadas, solo que, a efectos de claridad explicativa, se separan.

Este trabajo privilegia en primer lugar el estrato semántico-discursivo y se recurrirá, en la medida que se necesite, a cuestiones vinculadas con la léxico-gramática. No se profundizará sobre lo fono-gráfico, solamente se mencionarán algunos aspectos que sean significativos.

El estrato semántico-discursivo toma como unidad el texto y lo referido a su textura. Esta alude a la "propiedad intrínseca de un texto que se deriva del hecho de que este funciona como una unidad con respecto a su entorno y que lo distingue de cualquier otra cosa que no es un texto" (Ghio y Fernández, 2008, p.162). Moyano (2013) la entiende como la articulación de diferentes tipos de significados "más allá de los límites de una oración o cláusula" (p.37). Las autoras mencionadas coinciden que en este estrato se busca describir de qué manera se construye cohesión al interior de los textos y cómo se configura la coherencia en relación con el contexto.

¿Qué aspectos analiza este estrato? Según Moyano (2013) la jerarquización de "los significados para organizar y distribuir la información a lo largo del texto para construir una unidad con sentido y con propósito", la relación "entre los diferentes procesos o actividades que se construyen en el texto" y sus participantes, de qué forma aparece en la escena textual "la subjetividad de los hablantes", como también el modo en que "se construyen posiciones sobre las cuestiones que se abordan". (p.37)

El estrato léxico-gramatical toma como unidad de análisis la cláusula y los elementos que la componen. Cabe destacar que la léxico-gramática en la LSF, a diferencia de otras perspectivas teóricas, centra su atención en los significados; es una gramática con una mirada semántica de los fenómenos lingüísticos. Al respecto expresan Ghio y Fernández (2008): "Si un significado no puede ser construido por la léxico-gramática de una lengua entonces no es un significado lingüístico de esa lengua" (p.91). En la cláusula se realizan las metafunciones y se combinan tres tipos de significado diferentes que se corresponden con estas, o sea, tres estructuras distintas que manifiestan un tipo particular de organización semántica. Según Martin y Rose (2007), la cláusula desde una perspectiva semántico-discursiva "construye una actividad que involucra personas y cosas. Los elementos centrales de tal figura son el proceso y las personas y cosas que están directamente involucradas en él, mientras que otros elementos como lugares y cualidades pueden ser más periféricos" (p.74). Además, la cláusula construye otros significados, como los interpersonales realizados a través del sistema de Modo o los textuales, realizados por medio del sistema de Tema.

El estrato fono-gráfico, posee como unidades la entonación y el fonema, e incluye todo aquello vinculado a la ortografía, los grafemas y fonemas, entre otros.

Como se ha explicado, cada uno de estos estratos elaboran, al mismo tiempo, tres tipos de significado que son considerados como funciones sociales o metafunciones. Dada la centralidad que poseen estas categorías en la construcción del sistema estratificado del lenguaje, se procederá a describir a cada uno de ellos.

La metafunción ideacional, vinculada con la variable del Campo del registro, se ocupa de construir la experiencia "lo que está sucediendo, incluyendo quién está haciendo qué a quién, dónde, cuándo, por qué y cómo, y la relación lógica de un suceso con otro" (Martin y Rose, 2008, p.24). Los significados construidos en esta metafunción se realizan en la cláusula a través de los procesos, las entidades "que se vinculan a ellos como participantes y circunstancias en las que los procesos tienen lugar" (Moyano, 2013:39). Martin y Rose (2007), incluyen dentro del análisis discursivo de esta metafunción los aspectos vinculados con la ideación (metáfora gramatical, relaciones nucleares, taxonómicas, etc.) y la conjunción externa e interna.

La metafunción interpersonal, relacionada con la variable del Tenor del registro, según Martin y Rose (2008), se encarga de los recursos "que se ocupan de negociar las relaciones sociales: cómo interactúan las personas, incluidos los sentimientos que intentan compartir" (p.24). Esta metafunción construye la interacción social por medio de las funciones del habla y la modalidad que sería, según Moyano (2013), "el grado de afirmación, esto es, si la afirmación se hace de manera rotunda o moderada en diferentes grados" (p.40). En la cláusula se realiza a través de la responsabilidad modal. Martin y Rose (2007), incluyen dentro del análisis de esta metafunción los aspectos asociados con la valoración y la negociación.

Por último, la metafunción textual, relacionada con la variable del modo, hace referencia a aquellos recursos textuales que, según Martin y Rose "se ocupan del flujo de información: las formas en que los significados ideacionales e interpersonales se distribuyen en ondas de semiósis, incluidas las interconexiones entre las ondas y entre el lenguaje y las modalidades asociadas (acción, imagen, música, etc.)" (2008:24). Estos autores, incluyen aquí el análisis de la identificación. Esta metafunción analiza, además, la distribución y el movimiento de la información en la cláusula, donde la noción de Tema adquiere relevancia. Moyano (2013) alude, entre otros, al tema experiencial o tópico que es el que marca los picos de relevancia en la información y explica que,

> tiene por función orientar la interpretación del mensaje hacia un ángulo particular del Campo, es decir, de la "realidad" construida en el texto. En la cláusula en español, el punto de mayor prominencia experiencial (Tema experiencial) es el Participante principal, que se identifica por su concordancia con el verbo. En general, está en posición inicial de la cláusula, pero puede encontrarse elidido o aparecer pospuesto al verbo. (p.41)

En los ejemplos de análisis del corpus se incluirán y ampliarán algunas categorías teóricas sobre estas funciones que sean necesarias para comprender la descripción.

3.2.1.1.3. Funciones de habla y gramática interpersonal: el lenguaje como interacción

Si el lenguaje, como fue explicado, es una forma de conducta moldeada por el contexto social en el que se encuentra presente, los recursos lingüísticos interpersonales son centrales para la LSF.

Puesto que las consignas presentan características particulares en lo que respecta a la dimensión del lenguaje como interacción, se desplegarán algunas consideraciones teóricas sobre la realización del registro a través de la metafunción interpersonal en los estratos del lenguaje.

Cuando el hablante o enunciador de las consignas realiza selecciones en el sistema de modo, asume un rol discursivo y al mismo tiempo otorga un rol complementario al oyente/lector/estudiante, es decir, el que efectúa la demanda y el que la lleva a cabo. Con sistema de modo se hace referencia al sistema léxico-gramatical que realiza o construye el significado. "Expresa las relaciones entre el hablante/escritor y el oyente/lector/audiencia. Esto implica la actitud del hablante hacia lo que dice, cómo se representa a sí mismo y a su audiencia y cómo se posiciona en una determinada situación comunicativa" (Ghio y Fernández, 2008, p.92). Tal como expresa Quiroz Olivares

(2017): "en términos de la orientación que asumen los interlocutores en el intercambio dialógico y la naturaleza de lo que negocian en dicho intercambio" (p.158).

Desde el estrato semántico-discursivo, la interacción organiza en el diálogo dos tipos de opciones generales, denominadas roles del habla. Estos son elegidos y atribuidos por los mismos interlocutores. Asimismo, se encuentra la mercancía semiótica que se fija como una "moneda de intercambio" en la interacción. Estas posibilidades se organizan en el sistema semántico-discursivo de función de habla que es posibilitado por el movimiento interactivo. Quiroz Olivares (2017:159) lo esquematiza así:

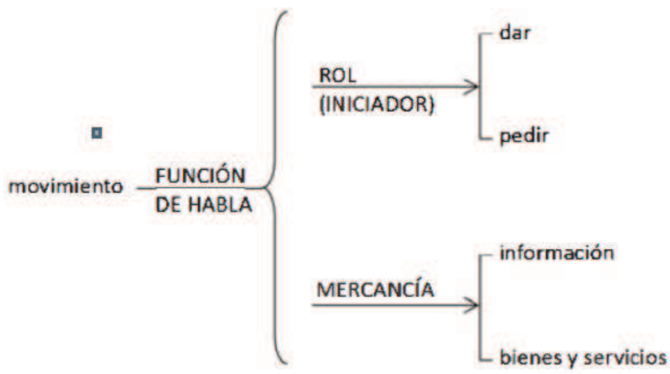


Figura II: Funciones del habla

En esta figura se observan dos sistemas: el de rol (iniciador) y el de mercancía. El primero describe las opciones que existen entre dos tipos de roles interactivos, también de carácter general, que asumen los hablantes: dar y pedir. Adoptar algunos de estos roles significa, como fue mencionado, la asignación de otros complementarios a los destinatarios; estos pueden ser aceptados, rechazados o puestos en cuestión. Aunque, este modelo es pensado hacia el movimiento interactivo de la estructura del diálogo, las consignas también podrían formar parte de él. Mediante la demanda, el profesor/autor del manual, que se ubica en el rol de pedir dentro de la mercancía de bienes y servicios, ordena realizar una actividad de la que el estudiante tiene la decisión de hacerla o no. Al respecto, Quiroz Olivares explica que cuando se trata de bienes o servicios, como es el caso de las demandas-órdenes, el destinatario puede llevar a cabo "el cumplimiento, el acatamiento, la aceptación, la resistencia o el rechazo de cursos de acción. Este tipo específico de negociabilidad define a órdenes" (2017, p.160).

La combinación de las opciones en los sistemas de rol y mercancía originan cuatro tipos de funciones de habla básicas: aserciones/afirmaciones, preguntas, ofrecimientos y órdenes. Cada una de estas funciones se vincula con un potencial de negociación que es particular del tipo de mercancía que se intercambia (bienes y servicios o información). Así, por ejemplo, las aserciones/afirmaciones y las preguntas comparten un tipo de negociabilidad que las identifica como proposiciones, mientras que las órdenes y los ofrecimientos lo hacen como propuestas. Quiroz Olivares (2015:269) resume el movimiento de función de habla del siguiente modo:

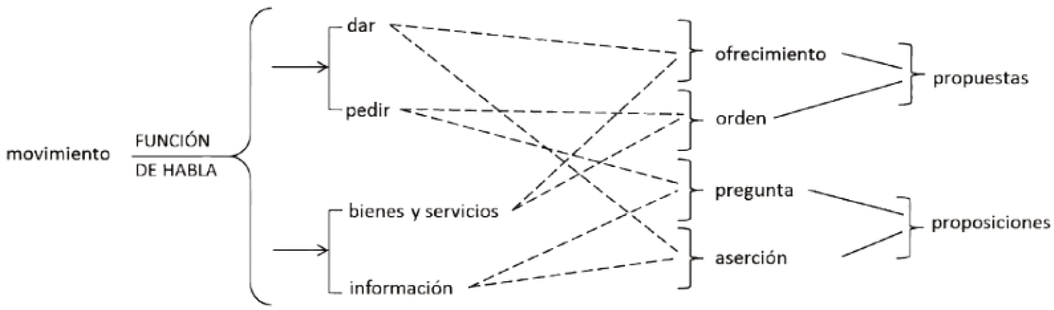


Figura III: Movimiento de función del habla

Lo expuesto responde, como se explicó, al estrato semántico-discursivo, sin embargo, la combinación de sus variables se gramaticaliza, es decir, se realiza en el estrato léxico-gramatical a través de cláusulas organizadas en el sistema de modo. Quiroz Olivares (2017) señala que las "funciones de habla del estrato semántico-discursivo - aserciones, preguntas y órdenes - se realizan de manera 'congruente' por medio de tipos clausales básicos en el estrato léxico-gramatical, o sea, por medio de cláusulas declarativas, interrogativas e imperativas, respectivamente". En cuanto a los ofrecimientos, la autora explica que forman un caso aparte, puesto que "los ofrecimientos no mostrarían una interacción regular con patrones clausales que le sean propios (…) lo que se atribuye al hecho de que (…) la gramática de las propuestas tiende a ser menos elaborada que la gramática de las proposiciones" (p.161). En esta línea, Quiroz Olivares (2015) propone los siguientes esquemas que explicitan la realización de las funciones del habla en el sistema de modo del estrato léxico-gramatical. El primero (Figura III), responde a las variables de funciones de habla realizadas en forma congruente por selecciones de modo; el segundo (Figura IV), focaliza el fenómeno a nivel de los estratos:

MERCANCÍA / ROL	información	bienes y servicios
dar	aserción: ↘ declarativa	ofrecimiento: (varios)
pedir	pregunta: ↘ interrogativa	orden: ↘ imperativa

Figura III. Variables de funciones por selecciones de modo

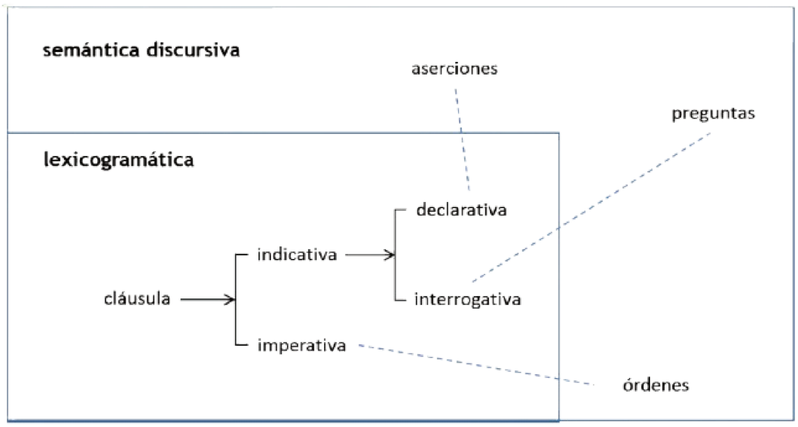


Figura IV. Variables de funciones a nivel de los estratos

La cláusula en el sistema de modo se encarga de la realización de la responsabilidad modal. En la cláusula española esto implica que el sistema interpersonal solo necesita en su estructura la función de Predicador que es realizada por un grupo verbal finito, esto es, que contiene por lo menos un verbo flexionado. (Quiroz Olivares, 2015; 2017; Moyano, 2013). Desde la perspectiva “de la estructura interpersonal básica del español, el grupo verbal finito realiza (…) la función de Predicador. Dentro del Negociador, este es el elemento estructural mínimo requerido para establecer el estatus de negociabilidad de la cláusula” (Quiroz Olivares, 2015, p.27)

En lo que respecta a las cláusulas imperativas en español, que son las que mayormente se utilizan en las consignas, presentan un predicador que acepta una serie de opciones respecto de la persona a la que se otorga responsabilidad modal principalmente a través de la morfología flexiva del verbo y la posición de los elementos clíticos. (Justific**a**-justifiqu**e**-justifiqu**elo**).

Otro aspecto a considerar es que en la cláusula española la persona discursiva sobre la que recae la responsabilidad modal de llevar a cabo la acción/orden "puede negociarse en español fundamentalmente por medio de los contrastes morfológicos de PERSONA, esto es, las selecciones entre primera, segunda o tercera persona gramatical" (Quiroz Olivares, 2017, p.65). En el siguiente ejemplo, adaptado de Quiroz Olivares (2017), se puede observar este fenómeno:

Ejemplo	**Responsable Modal**
Encuentre un patrón entre f y g y sus derivadas respectivas	**Destinatario Formal (Ud.)**
Encuentra un patrón entre f y g y sus derivadas respectivas	**Destinatario informal (Tú)**
Encontrá un patrón entre f y g y sus derivadas respectivas	**Destinatario informal (Vos)**
Encuentren un patrón entre f y g y sus derivadas respectivas	**Destinatario plural**
Encontremos un patrón entre f y g y sus derivadas respectivas	**Destinatario y hablante**

Tabla II

En el corpus de la tesis se observan los primeros cuatro casos. Se incluye aquí el "vos" que Quiroz Olivares no lo presenta, aunque en la variedad rioplatense conforma un tipo de destinatario informal frecuente.

Por último, Quiroz Olivares (2015) señala que "en la interpretación interpersonal del español, las cláusulas imperativas no se restringen a aquellas que seleccionan "modo verbal imperativo" (p.286). Aunque la cláusula imperativa se realiza congruentemente en español a través del modo imperativo, existen otras formas de realización léxico-gramatical de la orden. Martin y Rose (2007) explican que "distintas estructuras gramaticales pueden usarse para realizar la misma función del habla" (p.227). Esto ocurre particularmente con las cláusulas imperativas. Desde una perspectiva discursiva-semántica implica que la acción de ordenar posee diversas maneras de realizarse gramaticalmente. Por ejemplo: *¿Cuál es el resultado? Escriba el resultado. Escribir el resultado. Se pide escribir el resultado*, etc. Es una característica frecuente en muchas lenguas y el español no es una excepción.

La diversidad de realizaciones léxico-gramaticales en que se presenta la demanda puede repercutir en las maneras de comprender las consignas. El valor semántico perlocutivo asociado a la orden no se pierde, aun si esta aparece en otras formas gramaticales. Abordar en la clase las diferentes maneras de realización léxico-gramatical de las demandas es un desafío que debe incluirse en las planificaciones de enseñanza de la matemática, dado que no interpretar adecuadamente un tipo de tarea puede llevar a una resolución incorrecta de los ejercicios. Más adelante, se explicitarán cuáles son los modos en que las demandas-órdenes se realizan.

3.3. El marco didáctico-pedagógico

En este apartado se describirán las principales corrientes pedagógicas que sostienen teóricamente el análisis de las consignas.

Para este trabajo se recuperan autores y categorías diversas, algunas provenientes de teoría psicológicas y, otras, de desarrollos más vinculados a la enseñanza. También se incorporan conceptos asociados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Parte de los aportes procede del campo de la psicología cognitiva (Ausubel, Vygotsky, Bruner, Perkins). Esta corriente busca explicar cómo se produce el aprendizaje y cuáles son los procesos cognitivos que participan de él. En este sentido, sus desarrollos conceptuales ofrecen algunas puntas de reflexión sobre qué dimensiones intervienen en la cognición y cuáles pueden considerarse más potentes y significativas en términos de aprendizaje y comprensión.

En lo que respecta a Ausubel se recupera la categoría de aprendizaje significativo. Este último se produce cuando se relacionan los nuevos aprendizajes a partir de las ideas y conocimientos previos del estudiante. El aprendizaje de un nuevo conocimiento depende de lo que se sabe, es decir, el inicio de la construcción del nuevo conocimiento parte de los conceptos que ya poseen los estudiantes. Ausubel et.al (1998), explica que

> si el estudiante emplea una actitud de aprendizaje significativo (una disposición para relacionar de manera significativa el nuevo material de aprendizaje con su estructura existente de conocimiento), y si la tarea de aprendizaje en sí es potencialmente significativa (si consiste en sí de un material razonable o sensible y puede relacionarse de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva del estudiante particular) (…) él (estudiante) únicamente necesita relacionarlo activa y significativamente con los aspectos relevantes de su estructura cognoscitiva y retenerlo ´para el recuerdo o reconocimientos posteriores, o como una base para el aprendizaje del nuevo material relacionado. (p. 17)

Esta perspectiva del aprendizaje es particularmente relevante para esta tesis, puesto que permite analizar las diferentes operaciones cognitivas implicadas en las demandas y las consignas en general. Además, posibilita mostrar cuáles de ellas son más potentes para generar relaciones significativas de los conocimientos y, de ese modo, proyectar el diseño de consignas y herramientas metacognitivas que le faciliten al docente conocer la organización de la estructura cognitiva del estudiante. Esto contribuye en una orientación más precisa de los procesos de aprendizaje. En otras palabras, poder diseñar actividades matemáticas que propicien aprendizajes significativos, que interconecten los contenidos unos con los otros en forma de red de conocimiento, que sean duraderos y que sirvan de base para poder ir incorporando de manera progresiva saberes y formas del pensamiento cada más complejas.

En clara vinculación con el concepto de aprendizaje significativo, Perkins (2001) propone una perspectiva del aprendizaje en el que se promueva el uso activo del conocimiento: el aprendizaje reflexivo. Al respecto señala Perkins (2001): “El aprendizaje es una consecuencia del pensamiento. Sólo es posible retener, comprender y usar activamente el conocimiento mediante experiencias de aprendizaje en las que los alumnos reflexionan sobre lo que están aprendiendo y con lo que están aprendiendo” (p.21).

Este autor plantea una problemática que atañe a la formación general de muchos estudiantes universitarios, en particular, aquellos que ingresan a la academia: la dificultad en el uso de los conocimientos que poseen. Muchos alumnos presentan un conocimiento frágil, no reflexivo, con dificultades para conectarlo con otros saberes o situaciones nuevas. De acuerdo con Perkins, pensar por medio del conocimiento es poder solucionar problemas, hacer inferencias, entre otros. Es tener la capacidad de relacionar y transferir el conocimiento a diferentes situaciones reales y de la vida.

En este sentido, el análisis de las operaciones cognitivas presentes en las demandas y en las consignas busca poner de manifiesto cuáles de ellas promueven un uso activo y reflexivo del conocimiento. En ocasiones, los problemas en la comprensión están asociados a la dificultad de establecer relaciones activas entre los saberes, ya que los conocimientos aprendidos son frágiles. A estos últimos, Perkins (2001) los clasifica en inertes, olvidados o ingenuos. Son inertes cuando los estudiantes "son incapaces de recordarlos o usarlos en situaciones que admiten más de una respuesta y en las que verdaderamente los necesitan" (p.33); son olvidados cuando "han desaparecido de la mente de los alumnos que alguna vez lo tuvieron y podrían haberlo recordado" (p.33), y son ingenuos cuando "los alumnos captan muy superficialmente la mayor parte de los conocimientos científicos y matemáticos fundamentales. (p.34). Por último, se describe el que se denomina ritual, que en ocasiones se vincula con la matemática y es aquel que lo adquieren para cumplir con tareas escolares: "Saben sumar, restar, multiplicar y dividir. En los niveles superiores, aplican las reglas del cálculo y del álgebra. Pero cuando se trata de solucionar un problema, no saben cuál de las cuatro operaciones elegir" (p.39). En otras palabras, saberes que le posibilitan al alumno resolver actividades matemáticas, que se obtiene con la práctica mecánica y que, muchas veces, le sirven para aprobar los exámenes. Sin embargo, tener éxito en una evaluación no significa que se haya aprendido, dado que un examen puede presentar tareas que propongan operaciones cognitivamente pobres, es decir, que no impliquen un pensamiento reflexivo como las inferencias, la argumentación, las relaciones, el análisis, la interpretación, la generalización, entre otros.

Por su parte, y en esta dirección, Litwin (2000) distingue conocimientos superficiales de conocimientos profundos. Mientras que los primeros resultan de actividades cognitivas que "generan un conocimiento trivial de conceptos importantes expresado en una familiaridad superficial con el significado" (p.82), en los segundos, "los estudiantes están en condiciones de realizar distinciones claras, desarrollar argumentos, resolver problemas o construir explicaciones” (p.82).

Siguiendo esta línea, Coronado (2022), refiere al desarrollo de actividades que estimulan el aprendizaje activo. Según ella, estas tareas cognitivas son “acciones más o menos estructuradas que desarrolla el estudiante orientado y guiado por las consignas proporcionadas o mediadas por el docente, con el objetivo de experimentar, descubrir, construir o poner en juegos conocimientos, (…) practicar o ampliar lo aprendido”. (p.117).

Dentro del campo de la psicología cognitiva, se recuperan los aportes de la teoría socio-cultural de Lev Vygotsky, cuya idea principal es que el aprendizaje es un proceso social y cultural donde la interacción con otros ejerce un rol central en el desarrollo cognitivo de un individuo. De acuerdo con estas ideas, los procesos psicológicos superiores poseen su origen en la vida social, con la participación del sujeto en actividades que comparte con otros. Esta teoría busca analizar el desarrollo de los procesos psicológicos superiores a partir de la internalización de prácticas sociales que son específicas. Para este autor, existe una relación entre aprendizaje y desarrollo. Desde esta perspectiva, Vygotsky propone la categoría de zona de desarrollo próximo que la define como: “la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz” (2009, p.133). En este sentido, para alcanzar el aprendizaje y el desarrollo potencial, es fundamental la figura del docente, en tanto mediador de la cultura, y las actividades que él promueve. Ambos aspectos son los que acompañan el desarrollo cognitivo de los aprendices.

Esta manera de interacción del profesor con sus estudiantes, en la cual él actúa primero de soporte para desarrollar la competencia cognitiva a partir de la zona de desarrollo próximo, forma parte de los procesos de mediación del conocimiento. La mediación educativa es un proceso interactivo donde el docente alienta la interiorización de los procesos psicológicos del pensamiento de sus alumnos. Wood y Bruner (1976), proponen el concepto de andamiaje para describir también a este proceso:

> El andamiaje consiste básicamente en que el adulto "controle" aquellos elementos de la tarea que inicialmente están más allá de la capacidad del estudiante, lo que

> le permite concentrarse y completar sólo aquellos elementos que están dentro de su rango de competencia. (p.90)

En este contexto, los profesores se constituyen en intérpretes al convertirse en "puentes" entre los conocimientos previos de los estudiantes y la apropiación de nuevos saberes. Las consignas, y el rol del lenguaje, operan como herramientas psicológicas de mediación que contribuyen con los procesos de internalización de los saberes. En particular, las actividades cognitivas que demandan pueden o no colaborar con la potenciación de la zona de desarrollo próximo. Riestra (2004) expresa que las consignas problematizan a los sujetos que aprenden:

> en este caso la consigna sería considerada como herramienta para producir el mayor desarrollo mental posible. Este saber hacer de la consigna implicaría conocer la zona de desarrollo potencial de los alumnos, es decir, partir del nivel operacional adquirido para desde allí transitar el desarrollo próximo. (p.58)

Estos aportes teóricos permiten comprender de qué manera se articula la enseñanza y cómo ella puede contribuir en resignificar los aprendizajes disciplinares. Se valora el rol del docente experto, como también de aquellos elementos/recursos/estrategias que contribuyan para que los estudiantes comprendan los conocimientos, los textos o las consignas. Baquero (1997) expresa que el andamiaje es una situación de interacción en la que "un sujeto experto, o más experimentado en un dominio, y otro novato, o menos experto, (…) tiene por objetivo que el sujeto menos experto se apropie gradualmente del saber experto" (p.7). En otras palabras, "la actividad se resuelve 'colaborativamente' teniendo en el inicio un control mayor o casi total de ella el sujeto experto, pero delegándolo gradualmente sobre el novato" (p.7).

Asimismo, como se podrá apreciar en el análisis del corpus, en la estructura de la consigna se configuran instancias de andamiaje cognitivo a través de diferentes recursos lingüísticos, como la paratextualidad, las demandas instrumentales y ciertas expresiones y conectores que orientan, organizan o direccionan la tarea académica y la resolución adecuada de los ejercicios.

Tradiciones educativas diferentes a las anteriores, como las derivadas de la filosofía o la matemática, también aportan en la comprensión y profundización sobre el aprendizaje y el tipo de actividades cognitivas que lo potencian. Autores como Facione (2007) o Arancibia Carvajal et.al. (2022) proponen la noción de pensamiento crítico que, además, se enmarca con los requerimientos de los diseños curriculares de muchas carreras de ingeniería. Según Arancibia Carvajal et.al. (2022) es un pensamiento

> que consiste en evaluar críticamente la información y los argumentos, ver patrones y conexiones, construir conocimiento significativo y aplicarlo en el mundo (…) Como pensamiento complejo, involucra habilidades de comprensión, deducción, generación de juicios propios, capacidad de identificar y analizar argumentos y supuestos implícitos, percibir relaciones fundamentales, realizar inferencias correctas usando métodos deductivos e inductivos, evaluar evidencias y deducir conclusiones, efectuar evaluación y emitir juicios; siendo esencial para el aprendizaje. El pensamiento crítico es una habilidad que puede ser adquirida, a través de educación, instrucción y práctica. (pp. 220-221)

Esta concepción del pensamiento crítico guarda relación con el aprendizaje reflexivo propuesta por Perkins. No se busca asimilar categorías que provienen de tradiciones y recorridos diferentes, pero sí se intenta encontrar puntos de encuentros, en este caso, categorías que nos permitan hallar miradas comunes sobre lo que se espera en términos de aprendizaje, en especial en el campo matemático. Las inferencias, el análisis, el evaluar evidencias, el poder relacionar lo aprendido con situaciones nuevas o con "el mundo" entre otras, son actividades que se encuentran en las demandas de las consignas y que caracterizan el discurso disciplinar de la matemática.

Por su parte, Facione reconoce el pensamiento crítico en habilidades cognitivas y disposiciones que se esperan, por ejemplo, en un estudiante universitario. Sin embargo, no es algo que se adquiere *ex nihilo,* sino que exige de una enseñanza y un entrenamiento. Las demandas de las consignas pueden contribuir en el desarrollo de habilidades cognitivas potentes que posibiliten a los alumnos de ingeniería poder interpretar, analizar y relacionar los saberes teóricos aprendidos en las cátedras con la "realidad" del mundo posterior de la profesión. "De las habilidades cognitivas, esto es lo que los expertos consideran como lo esencial del pensamiento crítico: interpretación, análisis, evaluación, inferencia, explicación y autorregulación" (Facione, 2007, p.4).

Desde la didáctica de la matemática, se recuperan los aportes de Font (2008) y Font y Godino (2006) sobre la categoría de "actividades ricas", es decir, tareas que promueven aprendizajes activos y potentes frente a actividades repetitivas o que configuran un estudiante pasivo:

> la actividad de los alumnos en clase de matemáticas es una cuestión central en su enseñanza, puesto que el aprendizaje es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas esto es lo que se aprende y lo que queda en los alumnos. Por lo tanto, hay que procurar incorporar en la unidad actividades "ricas" en el sentido de que permitan superar el aprendizaje pasivo, gracias a la incorporación al proceso de enseñanza-aprendizaje, entre otros, (…) el uso de materiales y recursos informáticos, problemas contextualizados, grupos de trabajo, uso de diferentes representaciones, etc. (Font, 2008, pp. 55-56)

Los conocimientos que emergen de actividades ricas se opondrían, si se tomara a Perkins, a saberes ritualizados, mecánicos que producen aprendizajes pasivos y no reflexivos ni ricos. En este sentido, Font y Godino (2006) mencionan que actividades que favorezcan la intradisciplinariedad, es decir, una relación interactiva entre diferentes puntos del currículum matemático, la transdisciplinariedad en la cual "una de las áreas asume el tratamiento simultáneo de contenidos propios y ajenos" (p.94), la transversalidad, que relaciona tópicos que son transversales a la educación e interdisciplinariedad, o sea, "la colaboración entre diferentes áreas" (p.94), pueden colaborar para alcanzar aprendizajes potentes y reflexivos.

Este marco teórico se propuso principalmente desarrollar un recorrido por algunas corrientes del pensamiento relacionadas con el aprendizaje y con la construcción del conocimiento en los estudiantes, sin embargo, las consignas forman parte también del diseño intencional de la planificación y configuración didáctica de la clase. Para que se produzcan aprendizajes y actividades cognitivas que lo potencien, debe diseñarse la clase con este propósito. Aquí toma relevancia la noción de configuración didáctica que es definida por Litwin (2000), como “la manera particular que despliega el docente para favorecer los procesos de construcción del conocimiento” (p.51). Las consignas, y su elaboración, son elementos constituyentes de la configuración didáctica de la clase y de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

3.4. El marco discursivo-didáctico matemático

En este apartado se recuperan diferentes categorías del discurso matemático y su didáctica que son relevantes para el análisis de las consignas.

En primer lugar, se retoman las distinciones realizadas por Font y Godino (2006) en cuanto a las configuraciones epistémicas relacionadas con las formas de enseñanza de la matemática, tanto en la universidad como en la escuela secundaria. Los autores distinguen entre configuraciones axiomáticas, especialmente formalistas de la enseñanza y configuraciones contextualizadas. Mientras las primeras suelen aparecer con más frecuencia en la universidad, las segundas se pueden observar en el nivel secundario. Desde la perspectiva axiomática,

> se eligen ciertos enunciados de la teoría como axiomas y se exige que todos los demás sean probados a partir de ellos (…) presupone un carácter convencional a las reglas matemáticas (…) los conceptos que se definen y las proposiciones que se introducen no se intentan justificar por su acuerdo con una realidad extra matemática. (Font y Godino, 2006, p.72)

Este tipo de configuración epistémica presupone una matemática con un carácter altamente deductivo, con una concepción de saber acabado en el cual el estudiante solo debe aplicar o demostrar leyes y teoremas. Se centra en una matemática por la matemática misma, sin diálogo con la realidad extra-matemática.

Sin embargo, existe otra concepción que toma en consideración al contexto en el cual se producen los saberes matemáticos, es decir, el ‘entorno’ del texto en cuestión. Se trataría de responder a preguntas del tipo ¿En qué “lugar” se halla”? ¿Qué tiene a su alrededor? ¿Dónde “vive”? ¿Con qué otros objetos matemáticos se relacionan?, ¿En qué institución se utiliza?” (Font y Godino, 2006, p.71). Este tipo de configuración epistémica propone una enseñanza de la matemática inductiva, modelizada, con un rol más activo por parte del estudiante en la construcción del conocimiento disciplinar. Asimismo, promueve relaciones con otros contextos extra-matemáticos. Esto podría ser relevante si se piensa en qué saberes y destrezas matemáticas precisan los estudiantes después en su futura vida profesional como ingenieros o licenciados. Esta configuración se vincula más a las concepciones de aprendizaje significativo, reflexivo o rico.

En el corpus analizado se podrá observar la existencia de ambas configuraciones, aunque la perspectiva formal tendrá más protagonismo.

Las distinciones entre la realidad intra y extra-matemática responden a las maneras en que el discurso matemático se fue configurando históricamente.

En primer lugar, la matemática tiende a prescindir del contexto extra-matemático para construir su propio universo semiótico (O´Halloran, 2005; Mangui, 2000). En este sentido, los significados elaborados en la matemática forman parte de un campo experiencial restringido (O´Halloran, 2005). En estos discursos, por ejemplo, la persuasión sobre la verdad de una afirmación no precisa de estrategias retóricas para convencer a un alocutario, sino que es el propio discurso matemático el que busca legitimarse sobre la verdad, falsedad o adecuación de diferentes proposiciones por medio de leyes, teoremas y propiedades.

El discurso matemático creó, a lo largo de la historia, su propio universo referencial y lingüístico a través de diferentes recursos como condensaciones léxicas, abstracciones, metáforas gramaticales, una sintaxis que alterna diferentes registros semióticos, como también el desarrollo de registros simbólicos y gráficos. De este modo, el discurso matemático prescinde del lenguaje natural con el propósito de diseñar un universo lingüístico particular que contiene representaciones semióticas propias de la realidad intra y extra-matemática. Lemke (1998), explica que

> Las matemáticas tienen su origen en el lenguaje natural, pero en todos los lugares donde el lenguaje natural era semánticamente débil para representar las características de los procesos materiales de interés práctico para nuestros antepasados, las matemáticas extendieron sus categorías (números y razones no enteros, relaciones cuantitativas, variables, funciones), infinitesimales, topologías, etc.). (p. 2)

En esta nueva configuración semiótica, el discurso matemático se centra más en los procesos y el conocimiento que en sus participantes o destinatarios. Este universo discursivo matemático se construye en torno a la precisión conceptual y a la objetividad disciplinar. Así, la matemática crea un registro particular que posee singularidades léxico-gramaticales en el cual se evita el empleo de expresiones de subjetividad. (Modalizaciones, metáforas léxicas, entre otras). En su lugar, se elabora un discurso lógico, fáctico y objetivo. O´Halloran (2005), expresa que el "Discurso de la matemática aparece como una verdad factual y objetiva, debido a los tipos de elecciones interpersonales que se realizan utilizando el lenguaje y a la organización precisa de esas elecciones en el texto matemático" (pp. 73-74). Las valoraciones y las evaluaciones del enunciador respecto de su enunciado son tomadas como innecesarias en el discurso matemático. Explica O´Halloran (2005) que "La ausencia de modalización funciona para que los enunciados matemáticos aparezcan como correctos y fácticos" (p. 72).

La matemática construye un discurso focalizado en el significado lógico donde predominan los procesos relacionales, simbólicos y mentales, las construcciones relacionales, las cláusulas declarativas e impersonales, los conectores lógicos de causa-consecuencia, entre otros. Además, tal como lo indica Mangui (2000), "La matemática está diseñada para capturar, modelar y predecir patrones en la forma más económica" (Mangui, 2000, p. 58). Por esta razón este discurso se caracteriza por la exactitud en su codificación, como también por la elisión de toda información no relevante en la elaboración del significado lógico.

A pesar de lo expresado, los enunciadores realizan evaluaciones y valoraciones interpersonales, "Sin embargo, estos juicios aparecen presumiblemente como fácticos más que evaluativos" (O´Halloran, 2005, p. 74). No obstante, el discurso matemático que forma parte del cuerpo de análisis no es solo matemático, sino que está mediatizado por "traducciones" o reconstrucciones de tipo didácticas destinadas a ser enseñadas a un público no experto como son los estudiantes. En otras palabras, el material trabajado parte de una transposición didáctica (Chevallard, 1998) que apela a recursos donde se valoriza el vínculo pedagógico. En la descripción de la metafunción interpersonal se podrán observar estos matices que van de un discurso factual a otro más valorativo y "emocional".

Otras de las características del discurso matemático, y que deriva de lo anteriormente expresado, es su construcción multisemiótica. Lemke (1998) señala que "la ciencia no está hecha, no está comunicada, solo a través del lenguaje verbal. Los ‘conceptos’ de la ciencia no son conceptos verbales (…) ellos son un *híbrido* semiótico, simultánea y esencialmente verbal-tipológico y matemático-gráfico-operacional-topológico” (p.3). Esto indica que la matemática es parte de discursos que se encuentran conformados a través de diversos sistemas funcionales de signos, y no exclusivamente el lingüístico. Lemke explica que para llevar a cabo cualquier habilidad discursiva de la ciencia (leer, escribir, hablar) se precisa “combinar de manera canónica el discurso verbal, la expresión matemática, la representación gráfico-visual y las operaciones motoras en el mundo "natural" (incluido el humano como natural)” (1998, p.3).

En esta línea se recupera el concepto de registro de representación semiótica de Duval (2000,2004). De acuerdo con este autor, la matemática precisa de formas de funcionamiento cognitivo que necesitan emplear sistemas específicos de representación. Estos últimos constituyen registros de representación semiótica. Las representaciones semióticas refieren, entonces, a aquellos sistemas de expresión y representación que pueden contener distintos sistemas de escritura.

La noción de representación, que proviene de los desarrollos semióticos más generales, supone que los conceptos matemáticos no son objetos reales en sí y para conocerlos o estudiarlos, se debe recurrir a sus diferentes representaciones semióticas. Así, los conceptos matemáticos necesitan de estas, puesto que no existen objetos reales que se puedan observar. Toda conceptualización matemática requiere de registros representativos. Oviedo et.al. (2012) indica que “si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática” (p.30). La comprensión se produce a través de esas representaciones. Conocer sus características y funciones es fundamental para comprender el discurso matemático.

Asimismo, Duval (2000) señala que una de las particularidades de los sistemas de representación son las transformaciones. El autor divide a estas en dos: los tratamientos y las conversiones. Los primeros son transformaciones de representaciones como la resolución de una ecuación, lo que mantiene el mismo sistema de notación; las segundas, cambian el recurso semiótico manteniendo el objeto denotado, por ejemplo, pasar de una notación algebraica a una representación gráfica.

Para finalizar, el despliegue de estas categorías posibilita comprender, por un lado, la singularidad y la complejidad del discurso matemático, en tanto universo lingüístico restringido con construcciones semióticas propias y, por el otro, invita a reflexionar acerca del lugar que ocupa el lenguaje en su constitución y desarrollo. Estos aspectos serán vinculados en el análisis de las consignas y permitirán comprender los particulares modos en que ellas se configuran y de qué manera se distinguen de otras.

CAPÍTULO 4 . Metodología

En este apartado se procederá a explicar la dimensión metodológica de esta tesis. En primer lugar, se describirá desde qué paradigma teórico-epistemológico está ubicada esta investigación y, en segundo lugar, se enumerarán y explicarán las decisiones y características metodológicas particulares de este trabajo.

Debido al objeto de estudio que aborda la presente tesis, relacionado con el campo educativo, la dimensión metodológica se inscribirá dentro del campo amplio que se denomina investigación educativa. (Achilli, 2015; Arnal et. al., 1992; Rodriguez, Gómez y Valldeoriola Roquet, 2009).

Tal como lo expresa Arnal et. al. (1992), el término investigación educativa "se ha constituido, pues, en una categoría conceptual amplia en el estudio y análisis de la educación" (p.35). Aborda diferentes aspectos relacionados con la metodología "en el marco de la búsqueda progresiva de conocimiento en el ámbito educativo" (p.35).

El conocimiento que se deriva de estas investigaciones surge, según Achilli (2015) de la "intersección entre los procesos de investigación -ámbito en el que se generan/construyen- y los procesos derivados de la práctica docente -ámbito de re-trabajo al interior de los procesos de enseñanza y de aprendizaje" (p.25).

Este trabajo se propone generar conocimiento en relación con el modo general en que se producen los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemática de la FICH, específicamente a por medio del género de las consignas. Una investigación que surge del aula, a través de exámenes, trabajos prácticos, manuales y la voz de los sujetos de la educación, plasmados en encuestas, que busca, mediante un análisis reflexivo, regresar a ella para producir transformaciones en lo que refiere a prácticas de enseñanza y aprendizaje. En palabras de Achilli, "estas instancias de recursividad, generadas en un contexto dialógico entre sujetos de la educación, transforman los conocimientos y las prácticas de investigación y docencia en un doble movimiento" (2015, p.37).

Esta perspectiva de investigación en educación supone el abordaje del objeto desde una dimensión interpretativa y crítica. Como respuesta diferenciada al modelo de investigación positivista de las ciencias, "la educación se concibe como acción intencionada, global y contextualizada, regida por reglas personales y sociales y no tanto por leyes científicas" (Arnal et al., 1995, p.35). En este sentido, en lugar de recurrir a un modelo de comprobación y aplicación de leyes (deducción), la investigación educativa buscará la singularidad de los fenómenos, partiendo de ellos para arribar a un conocimiento que emerge como consecuencia de este movimiento investigativo.

Para el análisis del corpus esta tesis adoptará una perspectiva interpretativa y crítica. Respecto de la primera, “el propósito de la investigación educativa es interpretar y comprender los fenómenos educativos más que aportar explicaciones de tipo causal” (Arnal et al., 1995, p.36). En cuanto a la segunda, “la investigación trata de desvelar creencias, valores y supuestos que subyacen en la práctica educativa. De ahí la necesidad de plantear una relación dialéctica entre teoría y práctica mediante la reflexión crítica. De esta manera el conocimiento se genera desde la praxis y en la praxis” (Arnal et al., 1995, p.36).

En esta línea, la presente investigación se propone generar un tipo de conocimiento que sea útil para la acción educativa, es decir, un aporte reflexivo, en el caso de la tesis, sobre la formulación de consignas y su impacto en los procesos de enseñanza-aprendizaje y comprensión en las aulas de matemática de la FICH. Esto se realizará partiendo y volviendo sobre los recursos didácticos que los profesores de la facultad emplean en sus clases, resignificando y valorizando sus propuestas didácticas, sin recurrir a teorías generales que no se condicen con la realidad pedagógica de la institución.

Otra característica de la investigación educativa es su multidisciplinariedad, es decir, se construye en diálogo con otros ámbitos del conocimiento. De este modo, el análisis de consignas busca generar un conocimiento que se articula con los aportes de la didáctica, las teorías del aprendizaje, la lingüística y la matemática. Un abordaje matemático solo de las consignas podría soslayar cuestiones relevantes que otras disciplinas pueden enriquecer. Esta dimensión podrá observarse en el desarrollo del análisis del corpus.

En relación con la modalidad de investigación que asumirá esta tesis se adoptarán los criterios propuestos por Arnal, et.al. (1992) referidos al carácter de la medida, la profundidad u objetivo, la finalidad de la investigación, y la orientación.

El carácter de la medida hace referencia a los enfoques clásicos de investigación: el cuantitativo y el cualitativo. Según Arnal et.al. (1992), el primero “se centra fundamentalmente en los aspectos observables y susceptibles de cuantificación de los fenómenos educativos, utiliza la metodología empírico-analítica y se sirve de pruebas estadísticas para el análisis de datos" (p.44), mientras que el segundo, "se orienta al estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social. Utiliza la metodología interpretativa (…) y su interés se centra en el descubrimiento de conocimiento" (p.44).

Esta investigación adoptará ambos enfoques, aunque se hará mayor énfasis en el cualitativo e interpretativo.

Con respecto al cuantitativo, se realizan cuantificaciones referidas a la frecuencia de las demandas y tipo de consignas en el material relevado, tanto en el corpus de exámenes y trabajos prácticos, como en el manual. El propósito es observar regularidades y singularidades y establecer comparaciones entre uno y otro corpus. Asimismo, se llevaron a cabo encuestas a docentes y estudiantes de las carreras de FICH para conocer qué aspectos en la formulación o características de las consignas matemáticas generan problemas de comprensión o dificultan la resolución adecuada de los ejercicios.

El objetivo de este relevamiento no es la comprobación de una ley o hipótesis, sino generar información que permita comprender cómo se construye el género de las consignas de matemática en la FICH y de qué manera este aspecto influye en la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina. En otras palabras, se centra en el descubrimiento de un conocimiento nuevo que impacte en acciones que potencien las prácticas didácticas de los profesores en las aulas. Este modo de investigar e interpretar la muestra relevada responde al enfoque cualitativo que asumirá también la presente tesis.

La profundidad u objetivo refiere a si la investigación será descriptiva, o sea, centrada en "la descripción de los fenómenos (…) utiliza métodos descriptivos como la observación, estudios correlacionales, de desarrollo, etc." o explicativa, centrada en "la explicación de los fenómenos y el estudio de sus relaciones para conocer su estructura y los aspectos que intervienen en la dinámica de aquellos" (Arnal et.al., 1992, p.44). En el caso de este trabajo, se decidió emplear ambos criterios investigativos.

La tesis tendrá un carácter descriptivo y explicativo. Por un lado, se realiza una descripción del diseño de las consignas en parciales, trabajos prácticos de matemática y manual de Cálculo I, haciendo énfasis en los aspectos lingüísticos y discursivos particulares, como también en aquellos relacionados con dimensiones del aprendizaje. Por el otro lado, se indaga cómo aparecen estos aspectos en los distintos tipos de consignas y trabajos, así como aquellos que aparecen iterados, las divergencias, las relaciones entre ellos, la frecuencia de aparición, las semejanzas y diferencias entre el corpus de exámenes y el del Manual de cálculo I, entre otros.

En lo que respecta a la dimensión explicativa, se intenta dilucidar qué relación guardan las diferentes variables entre sí, por ejemplo, los distintos componentes lingüísticos entre sí, qué impacto tienen estos últimos en la comprensión y en la claridad de la consigna y, al mismo tiempo, cómo configuran los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Asimismo, se pretende explicar algunas respuestas de los estudiantes a los ejercicios, como también qué aspecto de las consignas como género suelen dificultar la resolución, cuáles andamian el conocimiento y cuáles potencian el aprendizaje.

En cuanto a la orientación que asume, esta investigación está orientada al descubrimiento y a la aplicación. El descubrimiento se propone "generar o crear conocimiento desde una perspectiva inductiva. Emplea principalmente métodos interpretativos (…) Su objetivo es interpretar y comprender los fenómenos. Utiliza técnicas y procedimientos de tipo cualitativo y enfatiza el contexto de descubrimiento" (Arnal et. al., 1992, p.46). Este trabajo pretende construir conocimiento desde una perspectiva inductiva derivada del análisis de consignas en producciones auténticas en el nivel superior. En este sentido, y debido a que las investigaciones sobre consignas de matemática en el nivel superior no son profusas, se busca poder aportar conocimiento nuevo sobre esta problemática, al tiempo de ofrecer nuevas interpretaciones y explicaciones.

La aplicación, según Arnal et. al. (1992) tiene como objetivo "la adquisición de conocimiento con el propósito de dar respuesta a problemas concretos. En el marco de la intervención educativa se orienta a la toma de decisiones (investigación evaluativa) y al cambio o mejora de la práctica educativa (investigación acción, investigación en el aula)" (P.46). Esta tesis surge en el marco de un proyecto de investigación, CAI+D, entre las áreas de Comunicación Oral y Escrita y Matemática de la FICH, cuyo objetivo principal es brindar información útil para mejorar las prácticas de aprendizaje y comprensión y el rol del lenguaje en estas. Una de las problemáticas elevadas por el equipo docente de matemática, y reafirmada a partir de las encuestas que se le realizaron, es la dificultad en la comprensión de las consignas. Así, el resultado de este trabajo es generar conocimiento que se traduzca en acciones para mejorar la práctica educativa matemática y, al mismo tiempo, precisar qué estrategias y contenidos específicos debe aportar el área de Comunicación Oral y Escrita a sus estudiantes.

Para la descripción del género y su realización en los diferentes estratos del modelo estratificado, se emplearán las propuestas metodológicas de análisis que surgen de trabajos de diferentes autores que se enmarcan en la LSF. Puesto que el corpus de consignas trabajadas se encuentra en español y que, por otro lado, gran parte de las investigaciones en LSF se circunscriben al inglés, se decidió incluir autores de referencia en esta lengua con otros que han analizado las particularidades del sistema y su realización en el español. En cuanto a los primeros, se incluyen a Halliday (2014), Martin y Rose (2007 y 2008) y Eggins y Martin (2003); en lo que respecta a los segundos, se emplean los lineamientos metodológicos de Ghio y Fernández (2008), Quiroz Olivares (2015, 2017 y 2023) y Moyano (2011, 2013 y 2021).

La deconstrucción del género consignas realizado en la tesis, también se enmarca en las aportaciones metodológicas de la LSF, particularmente lo referido al proceso de semiogénesis (Martin, 1999). Este último consiste en un trabajo particular con el género, de deconstrucción conjunta, construcción conjunta e individual. (Moyano, 2011). Si bien esta propuesta se piensa más en términos de enseñanza como una "guía a través de la interacción en un contexto de experiencia compartida" (Martin, 1999, p.126), puede utilizarse como una metodología para poder analizar diferentes géneros, en particular aquello que refiere a su deconstrucción.

4.1. El corpus

Para llevar a cabo la investigación, se decidió trabajar con un corpus variado constituido por:

- producciones auténticas de las cátedras: exámenes finales, parciales y trabajos prácticos;
- una selección de capítulos del manual que se utiliza en la materia de Cálculo I de Ron Larson;
- algunas respuestas de los estudiantes a los trabajos prácticos y exámenes;
- encuestas a estudiantes ingresantes, a otros más avanzados del ciclo básico y a docentes del departamento de Matemática de la FICH.

El recorte realizado comprende:

1. Consignas de matemática formuladas en exámenes finales (9), parciales (1), trabajos prácticos (2) de las asignaturas Cálculo I y de Matemática Básica de la FICH.
2. Algunas resoluciones de estudiantes de Cálculo I y Matemática Básica (20 estudiantes).
3. Consignas de tres capítulos del manual “Cálculo I” de Ron Larson (2.1; 5.4; 7.2).

Esta muestra corresponde a materias de matemática del ciclo inicial de la carrera (Matemática Básica y Cálculo I). La razón de la elección de estas materias es porque se encuentran en el ciclo básico, tramo que, por sus características, lo convierte en significativo para el análisis. Esto último obedece, entre otros, a los siguientes motivos: en primer lugar, debido a que es el tiempo donde se produce el mayor desgranamiento de estudiantes y, en segundo lugar, porque allí se ubica una mayor cantidad de asignaturas de ciencias básicas (matemática, física, química) que, por sus particularidades y por no establecer siempre relación directa con las materias propias de la ingeniería, suelen ofrecer dificultades en los estudiantes. Se puede sumar que el objetivo es también brindar algunas reflexiones en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y el rol que desempeña el lenguaje en ellos.

La decisión de incluir en el corpus consignas del manual de matemática deriva del hecho de que parte de la ejercitación de cálculo se encuentra presente allí. La cátedra emplea el manual para reforzar y poner en práctica los contenidos abordados en clases, pero además opera como modelo del estilo de consignas que se solicitarán en los exámenes. Si bien, no siempre guardan el mismo estilo, se alinean con las propuestas generales de trabajo en la materia. Además de estas razones, tal como señalan Font y Godino (2006),

> El saber didáctico que progresivamente va produciendo la investigación en educación matemática queda reflejado en diversas fuentes dispersas y heterogéneas (revistas, monografías de investigación, etc.), pero de manera más accesible a los profesores se refleja en los libros de texto escolares. Los manuales escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia

práctica de los profesores, y en cierta medida, los resultados de la investigación. (p.1)

Cabe destacar que la alusión de los autores a los textos escolares se refiere a manuales del nivel secundario, sin embargo, en el universitario se produce el mismo proceso. El resultado de las investigaciones y la experiencia derivada de la práctica del ejercicio del rol docente se ven sistematizados en estos géneros divulgativos, como son los manuales.

El total de consignas relevadas es de 279, de las cuales 131 son múltiples, vale decir, que incluyen más de una demanda en un mismo enunciado o en diferentes microconsignas, y 148 son simples, o sea, con una sola demanda. El total de estas últimas es de 494.

La presente investigación tomó como objeto la consigna entera, es decir, en tanto género, pero, al mismo tiempo, se procedió a desmontarlas con el propósito de describir y analizar la dimensión cognitiva y discursiva de sus componentes, como son las demandas, por ejemplo.

Si bien las demandas son una parte integral de las consignas, se procedió a separarlas para el análisis. La finalidad obedece a un objetivo metodológico-investigativo que busca hacer foco en unos de los componentes centrales del género instruccional, del cual la consigna forma parte. Sin embargo, el análisis efectuará un movimiento permanente entre lo particular (la demanda) y la consigna como género (general).

Con respecto a las demandas, se procedió a identificarlas, cuantificarlas y agruparlas. En relación con la cuantificación, se registró el orden de frecuencia con que aparecen en las consignas, tanto en los exámenes y prácticos de las asignaturas, como en el manual. Posteriormente, se efectuó una comparación entre el corpus de evaluaciones y el del manual para observar frecuencias, semejanzas y diferencias.

En cuanto a la agrupación, se las incluyó en distintas categorías más generales denominadas macroprocesos. Estos últimos comprenden demandas que, por sus semejanzas semántico-disciplinares, pueden incorporarse en un mismo grupo más general. Algunas funcionan como sinónimos y, otras, comparten cierto aspecto en común que las identifica con el resto.

Por otra parte, se efectuó una caracterización cognitiva e interpersonal de las demandas. Con respecto a la primera, debido a que ellas están relacionadas con los aprendizajes que los docentes buscan generar en los estudiantes, se consideró relevante realizar un rastreo del impacto cognitivo de cada una, esto es, describir qué tipos de aprendizajes promueven. En relación con la interpersonalidad, se buscó identificar cuáles son las maneras más frecuentes de formularlas, las formas más y menos directas de solicitar la tarea cognitiva, como también de qué modo cada una de ellas impacta en la comprensión por parte del estudiante.

4.2. Las encuestas

Se elaboraron dos encuestas destinadas a tres públicos diferentes: por un lado para ingresantes a las carreras y estudiantes de segundo año y otra a docentes del departamento de Matemáticas. Esta última se basó en las preguntas realizadas a los estudiantes, pero atendiendo a las dificultades que expresan los docentes y confrontar, de ese modo, las percepciones y respuestas de uno y otro.

La encuesta estuvo conformada por tres preguntas cada una. El motivo por el que se aplicó el mismo dispositivo a dos destinatarios diferentes (ingresantes y estudiantes de segundo año) fue para observar si las dificultades y problemas entre uno y otros grupos eran las mismas, si persistían algunas, si cambiaban, etc.

Las preguntas fueron de respuesta múltiple, a partir de la formulación de opciones. Para el caso de los estudiantes los interrogantes y opciones fueron:

1. Los errores cometidos por usted en la resolución de los ejercicios y señalados por los docentes, por lo general se deben a: (se puede marcar más de uno).

   a) Problemas en la comprensión de los conceptos evaluados. (Por ejemplo, derivada de una función, integral, matriz invertible, etc.)

   b) Problemas en el procedimiento para la resolución de los ejercicios. (Errores de cálculo, omisión de algún procedimiento matemático, errores en las fórmulas, etc.).

   c) Problemas para convertir de un lenguaje a otro (Por ejemplo, convertir un gráfico en una expresión algebraica o viceversa, convertir un enunciado formulado en lenguaje cotidiano en una expresión aritmética o algebraica, entre otros).

d) Problemas en la interpretación de lo demandado en la consigna (lo que se pide hacer).

e) Omisión de alguna demanda de la consigna. (En particular en consignas múltiples, es decir, que solicitan realizar más de una actividad).

2. Señale cuáles son las principales dificultades que halla a la hora de comprender lo solicitado en las consignas de ejercicios de matemática. (Puede ser en exámenes, trabajos prácticos o en el Manual de estudio. Puede elegir más de una)

a) Presencia de gráficos, números, símbolos y lenguaje natural (el que utilizamos en la comunicación diaria) en la misma consigna.

b) Dificultades en la comprensión acerca de lo que significa la consigna. (Es decir, qué quiere decir justificar, dar la función analítica, demostrar, explicar, etc.).

c) Utilización de léxico técnico y con un alto grado de abstracción.

d) Problemas en la comprensión de los conceptos evaluados. (Por ejemplo, derivada de una función, integral, matriz invertible, etc.).

e) Dificultad para relacionar lo solicitado en la consigna con un concepto trabajado en clases.

f) Ausencia de una demanda clara.

En caso de haber elegido la opción "Ausencia de una demanda clara", enuncie ejemplos de demandas no claras

3. Indique con qué frecuencia necesita que los docentes expliquen las consignas (De los exámenes, trabajos prácticos, del manual de estudio, etc.)

(Siempre/casi siempre/con frecuencia/en ocasiones/casi nunca/nuca)

Para el caso de los docentes los interrogantes y opciones fueron:

1. Los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de los ejercicios, por lo general se deben a: (Se puede marcar más de uno).

a) Problemas en la comprensión de los conceptos evaluados.

b) Problemas en el procedimiento para la resolución de los ejercicios.

c) Problemas para convertir de un registro semiótico a otro.

d) Problemas en la interpretación de lo demandado en la consigna.

e) Omisión de alguna demanda de la consigna. (En particular en consignas múltiples, es decir, que solicitan realizar más de una actividad).

2. A partir de su experiencia en el trabajo con los estudiantes, señale cuáles son las principales dificultades que estos hallan a la hora de comprender lo solicitado en las consignas de ejercicios de matemática. (Se puede marcar más de una)

a) Presencia de varios registros semióticos en la misma consigna.

b) Dificultades en la comprensión acerca de lo que solicita la demanda de la consigna.

c) Utilización de léxico técnico y con un alto grado de abstracción.

d) Dificultad para relacionar lo solicitado en la consigna con un concepto trabajado en clases.

3. Indique con qué frecuencia necesita explicar las consignas a los estudiantes. (De los exámenes, trabajos prácticos, del manual de estudio, etc.) (Siempre/casi siempre/con frecuencia/en ocasiones/casi nunca/nuca)

Cabe señalar que las preguntas tenían la opción de “otras”, para agregar otros factores y el de “comentarios adicionales”, por si los consultados deseaban ampliar, explicar o justificar las elecciones.

La encuesta fue realizada a través de formularios Google. A la de ingresantes respondieron 40 estudiantes, mientras que los de Cálculo I fueron 33. En cuanto a los docentes, solo 7 respondieron.

CAPÍTULO 5 . El género consignas de matemática

5.1. Introducción

Este capítulo abordará las consignas desde su configuración genérica. Con el propósito de poder desmontarlas y describir sus etapas y fases, como también explicar de qué manera funcionan, se analizarán algunos ejemplos extraídos del corpus estudiado. Asimismo, se vincularán estos hallazgos con las implicancias didácticas y de aprendizaje que conllevan.

Las consignas pueden aparecer en diversas esferas de la vida social donde se precise llevar a cabo tareas en las cuales un hablante o enunciador construye un texto oral o escrito destinado para un oyente o enunciatario con el propósito que este realice determinadas acciones. Para que efectivamente se desarrolle la situación comunicativa, estos textos deben presentar características y estructuras prototípicas del género consignas, conocidas por los hablantes/enunciatarios y los oyentes/enunciatarios.

No obstante, referir al género consignas es muy amplio, ya que este se puede diversificar de acuerdo con los propósitos sociales y el contexto de cultura en que emerge. Las consignas pueden formar parte de muchas prácticas sociales, entre las cuales se incluyen las educativas. Así, las consignas que se eligen para esta investigación, desde una mirada macro, se ubican en el campo de la enseñanza-aprendizaje. De este modo se convierten en un instrumento de enseñanza que "organiza las acciones mentales en los aprendientes" (Riestra, 2010, p. 178) a través de la prescripción, la dirección y la orden de tareas pedagógicas. Como tales, forman parte de la configuración didáctica de la clase (Litwin, 2000) y son empleadas para poner en práctica los aprendizajes, para fortalecerlos o evaluarlos. Las consignas de trabajo o de evaluación forman parte habitual y "natural" de cualquier proceso educativo y se emplean en todo tipo de disciplina relacionada con la enseñanza y el aprendizaje. Sin embargo, la cultura y las prácticas sociales disciplinares construyen rasgos retóricos específicos que no pueden ser considerados como expresiones individuales y aisladas, sino que forman parte de un conjunto de prácticas letradas académicas donde convergen distintos tipos de acuerdos y disputas en torno a los diversos campos del saber (Navarro, 2014). En este sentido, aunque las consignas comparten características genéricas similares en lo que respecta al contexto didáctico, las de matemática presentan ciertos rasgos que las distinguen.

Con el propósito de la descripción del género consignas es necesario realizar algunas precisiones. En primer lugar, indicar que se analizarán ciertos ejemplos de consignas de matemática en general y, luego, aquellas que se configuran en el marco de los denominados "problemas matemáticos". En segundo lugar, señalar que la estructura esquemática o de género posibilitará, según expresa Moyano (2013), "inferir el tipo de actividad social, el propósito perseguido y el modo como éste se lleva a cabo en pasos o etapas en una cultura dada" (p.46). Esto posibilita también anticipar los recursos lingüísticos que, como fue indicado, al realizarse en el registro, se hallarán en los niveles discursivo-semántico. A los efectos de la organización del análisis, estos recursos serán señalados y desarrollados en este punto cuando algún aspecto del género necesite de la explicación semántica-discursiva y léxico-gramatical.

Incluir la variedad y la complejidad de la enunciación y caracterización de las consignas de matemática en el corpus relevado excedería los objetivos de la presente tesis. Sin embargo, se analizarán algunos aspectos que, por su formulación lingüística, por su modo de estructurar la consigna, o por el tipo de propuesta cognitiva y los contenidos pueden potenciar u obstaculizar los procesos de aprendizaje.

El corpus de consignas de matemática forma parte de exámenes finales, parciales, trabajos prácticos y el manual de Cálculo I. Muchas de las consignas aparecen en el marco de instancias evaluativas. Cubo de Severino (2014) denomina "géneros de control del conocimiento" a los parciales, exámenes finales, entre otros. Sobre estos, la autora expresa que:

> Este tipo de discurso conforma una familia de géneros de evaluación académica, que participa de lo que hemos llamado "géneros de control del conocimiento" (Cubo de Severino, 2005), que, en el continuum simetría-asimetría, se mueve hacia los extremos de la asimetría en géneros como el parcial, en el que el profesor establece de qué se va a hablar, cuánto, cómo y cuándo está bien, y en puntos intermedios, pero más cercanos a la simetría, en géneros como el informe de investigación en el que los investigadores son evaluados por pares. (p. 19)

En lo que respecta a los exámenes finales de cálculo, son escritos y están divididos entre una parte teórica y otra práctica; esta última se ubica después de aquella. El parcial de matemática básica alterna en distintas instancias del texto teoría y práctica. En cuanto al manual, este presenta en su sección de ejercitación una cantidad mayor de consignas prácticas que teóricas. Solo se reconocen a estas últimas por un recuadro que está acompañado del paratexto: “Desarrollo de conceptos”.

Por teoría se hace referencia a consignas que solicitan principalmente, definiciones, demostraciones, enunciación de teoremas, descripciones, explicaciones, determinaciones, preguntas, entre otras. Se busca recuperar conocimiento teórico-conceptual. Con relación a la práctica, se observan consignas vinculadas a cálculos, resolución de problemas, representaciones e interpretación gráfica, encontrar valores, entre otros.

Si bien el manual no forma parte de instancia evaluativas como las demás, sí la ejercitación con su posterior solucionario son una manera de ir examinando el conocimiento y el aprendizaje de forma autónoma.

En lo concerniente a la estructuración de las consignas, se observan (entre exámenes y manual) 44 con estructura compuesta o macroconsignas, es decir, con dos o más microconsignas (Navarro; Stagnaro, 2012) en su interior, y 133 con estructura simple, o sea, sin microconsignas. A los efectos de este trabajo, consigna es tanto la compuesta como la micro.

En lo relativo a la diferencia entre los corpus relevados, es en los exámenes donde aparece mayor cantidad de consignas compuestas (27), frente a 17 del manual. Sean compuestas o simples, cada una de ellas puede contener en su interior más de una demanda.

Esta información cobra relevancia si se la cruza con las respuestas de los distintos grupos que respondieron las encuestas. Ante la consulta sobre “Los errores cometidos por usted en la resolución de los ejercicios y señalados por los docentes, por lo general se deben a”, la opción de “Omisión de alguna demanda de la consigna. (En particular en consignas múltiples, esto es, que solicitan realizar más de una actividad)” fue elegida por un 15% de los estudiantes ingresantes (en cuarto lugar, de las diferentes opciones ofrecidas), por un 22% de los estudiantes de Cálculo (también en cuarto lugar) y por un 28% en el caso de los docentes (la misma cantidad de docentes coloca esta dificultad junto con la de convertir de un registro semiótico a otro). De lo expuesto se puede señalar que, si bien la multiplicidad de demandas y consignas no representa la mayor dificultad a la hora de resolver un ejercicio, sí aparece como un obstáculo que puede incidir en la respuesta de la actividad.

Aun cuando los géneros guardan cierta estructura composicional que le es propia, en el caso de las consignas de matemáticas relevadas, su configuración no es uniforme. A continuación, se presentarán las características genéricas más recurrentes halladas relacionadas con su impacto discursivo y/o con aspectos vinculados a la enseñanza y el aprendizaje.

5.2. La descripción del género y sus etapas

La descripción de las consignas se efectuará, atendiendo a la definición de género de Martin y Rose (2007;2008) y a los modelos propuestos por Moyano (2013; 2021). Particularmente, se diseñó un cuadro por consigna que está dividido en Etapas, fases y texto. La fase se incluye en aquellas etapas que se creen relevantes a los fines descriptivos.

Como se mencionó, la configuración de la consigna no es uniforme, sin embargo, hay ciertos pasos y fases que se repiten. No es uniforme, puesto que no siempre se presentan en el mismo orden y debido a que en algunos casos no aparecen. Este fenómeno podría tener razones variadas, aunque muchas de ellas se relacionan tanto con restricciones del campo, del tenor y del modo, como a decisiones retóricas y didácticas.

A partir de la descripción del género, se pueden visualizar algunas de sus etapas que se evidencian con frecuencia como son: la expresión de la tarea académica, la información para la resolución de la actividad e instancias de andamiaje cognitivo. En el caso de los manuales, se observan paratextos en forma de títulos que funcionan como síntesis orientadora del tema o macrotemas (Martin y Rose, 2007) y, en el caso de problemas, la descripción de las situaciones problemáticas.

Expresión de la tarea académica alude a la etapa en que se estructura la explicitación de la actividad cognitiva que se llevará a cabo y que incluye la enunciación de la acción. Este paso contiene diferentes fases que no están presentes siempre en todos los casos. Ellas son: La demanda, el objeto y la circunstancia. La demanda, la orden, que aparece en la cláusula a través de distintas realizaciones léxico-gramaticales y habitualmente en posición inicial (aunque puede tomar otros lugares dentro de la cláusula). El objeto es la parte en la que recae la acción de la demanda, es decir, aquello sobre lo cual opera la orden. La circunstancia que funciona como circunstanciales, generalmente asociados al modo y a la finalidad (demandas no finitas de realce: gerundios y frases preposicionales de para+infinitivo), ya que orienta o indica a través de qué herramienta se debe ejecutar la tarea académica. No obstante, existen circunstancias que explicitan características complementarias como expresar la duración de una acción (simultaneidad en los gerundios) o referir a una ubicación, entre otras.

La pregunta forma parte también de la expresión de la tarea académica. Si bien es una demanda, la decisión metodológica de separarla se debe a que presenta una formulación diferente, o sea, se materializa como una forma indirecta de la acción. Aun cuando, desde la perspectiva del sistema semántico-discursivo de función de habla, la pregunta cumple el rol de pedir información, su uso puede estar asociado a solicitar una acción y, por ello se la incorpora en esta etapa. Al respecto Martin y Rose (2007) sostienen: “Realizar una orden como una pregunta enmascara la desigualdad de estatus implícita en la orden (…). Pero una pregunta sigue siendo una demanda, aunque solo sea por información” (p.229). Esto último implica que la pregunta busca información y, para llevar a cabo este propósito, en algunas situaciones, un hablante o escritor pide una acción vinculada a recuperarla. Esto es característico en el género consignas, más aún en los exámenes, que forma parte del corpus analizado.

Las fases de la demanda y el objeto siempre aparecen. Sobre este último es necesario efectuar algunas precisiones. El objeto puede presentarse como palabras o cláusulas enteras y manifestarse en lenguaje natural, por medio de registros aritméticos y algebraicos o, en algunas situaciones, a través de gráficos o ilustraciones. Como se verá en la descripción de las etapas del género, el objeto a veces se encuentra elidido (señalado por corchetes), pero se lo puede reponer a partir del cotexto del enunciado. En otros casos (aquí no ejemplificados), se presenta a través de pronombres referenciales que permiten identificarlos por medio del seguimiento (tracking) de los participantes. (Martin y Rose, 2007). Un ejemplo al respecto, poco frecuente en el corpus, es el siguiente: “Obtendrás un rectángulo de área ½, llama**lo** rectángulo número 1”.

La expresión de la tarea académica puede “leerse” también por medio de su realización en los estratos del lenguaje, específicamente vinculada con la metafunción ideacional. Cuando Martin y Rose (2007) explican las relaciones nucleares dentro de la cláusula, señalan que “el patrón fundamental de experiencia es que las personas y los objetos participan en un proceso. En términos de Halliday, el participante central en el proceso se denomina Médium, sin el cual no existiría el proceso” (p.91). Más adelante, expresan que “además del Médium, una o dos personas más pueden estar involucradas en el proceso, incluyendo el Agente, el Beneficiario y varios tipos de Rango. Un Agente inicia el proceso, el cual afecta al Médium de alguna manera” (p.91). En la descripción del modelo transitivo propuesto por Halliday de un actor+proceso+meta. “El proceso en el que participa [el actor] puede extenderse (…) para afectar a otro participante, la meta” (Ghio y Fernández, 2008, p.101). La expresión académica se realizaría en la cláusula por medio de las relaciones nucleares: la demanda sería el proceso y el objeto podría ser el médium/meta el cual es afectado por un agente/actor. En este esquema nuclear las circunstancias ocupan una posición periférica y varían en su participación con los procesos. Ellas no forman parte de la estructura central y pueden estar presentes como no. Por esta misma razón, no siempre aparecen en la expresión de la tarea académica.

Por otra parte, la fase de la circunstancia presenta particularidades en cuanto a su funcionamiento. Además de pertenecer a esa fase, en algunas situaciones se constituye en demanda, particularmente en los casos de para+infinitivo, y como objeto. Al poseer un significado instrumental, las circunstancias pueden operar en otra etapa, es decir, a modo de instancia de andamiaje cognitivo, puesto que orientan la resolución e indican la manera o el instrumento con el que debe llevarse a cabo la demanda.

Todas estas características que presentan la circunstancia y el objeto dentro de la estructura genérica, como la manera en que se realizan en los estratos del lenguaje es relevante, dado que muestran cómo la cultura y las prácticas sociales disciplinares, mediante el género, el registro y las metafunciones, construyen rasgos retóricos y discursivos específicos asociados con restricciones y particularidades de este campo disciplinar. Por ejemplo, el objeto y las circunstancias se enmarcan y se realizan dentro de un universo semiótico restringido donde interactúan y dialogan diferentes registros que elaboran significados propios y que adquieren sentido al interior del discurso intra-matemático. Por estas razones, desde una perspectiva didáctica, se hace necesario deconstruir el género y sus realizaciones en los diferentes estratos, para observar y comprender estas características que la cultura matemática ha construido a lo largo de la historia.

La información para la resolución de la actividad son aquellos datos que se incluyen con el fin de resolver la ejercitación. Aquí se articulan el registro verbal, algebraico y gráfico. Se observan gráficos, cifras, dibujos, teoremas, leyes, fórmulas, etc. También esta etapa puede funcionar al mismo tiempo como instancia de andamiaje cognitivo, dado que las ilustraciones, gráficas, números, etc. aportan información que enmarcan y orientan la tarea. Desde esta perspectiva, la incorporación de esta etapa no responde solo a la estructuración prototípica del género, sino a decisiones didácticas en torno al modo de acompañar los aprendizajes de los estudiantes. Esto podrá determinar qué tipo de registro se emplee, como así la cantidad y el nivel de explicitación de la información.

Las instancias de andamiaje cognitivo son intervenciones con información que buscan orientar, ayudar, colaborar con los estudiantes para llevar a cabo un desarrollo satisfactorio de la consigna. Son aclaraciones, sugerencias, ayudas, (muchas veces aparecen entre paréntesis) que en ocasiones se manifiestan por medio de la explicitación de ciertas expresiones como: “ayuda”, “ayudín”, “sugerencia”, “notas”, conectores de reformulación como “o sea”, entre otros. La reformulación, por caso, que consiste en volver a expresar una idea o concepto utilizando diferentes palabras o estructuras, se puede convertir en andamio cognitivo en tanto busca clarificar, enfatizar o adaptar el enunciado de la consigna.

Además de lo mencionado, se pueden sumar los paratextos, las demandas instrumentales, diferentes tipos de aclaraciones, la información para la resolución de la actividad o la fase de circunstancia; todas ellos pueden operar como andamiaje. En la descripción de las consignas por etapas y fases se verán varios ejemplos.

El andamiaje cognitivo no es una etapa obligatoria y no siempre aparece, pero cuando sí lo hace, resalta el valor de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el diseño de las consignas. Estas instancias buscan, como sostienen Wood y Bruner (1976), “un tipo de proceso de ‘andamiaje’ que posibilita al niño o al novato, resolver un problema, realizar algún tipo de tarea, o alcanzar alguna meta que estaría más allá de sus esfuerzos sin su ayuda” (p.90).

En el caso del manual, en algunos ejercicios se incorporan paratextos que orientan el tipo de actividad que se va a realizar (verbales e icónicos) y que funcionan como macrotemas (Martin y Rose, 2007).

Estos son los componentes que se observan con mayor frecuencia en la consigna (aunque no son los únicos).

Si bien existe una estructura prototípica del género, se aprecia cierta flexibilización en sus etapas y fases que surge de características funcionales asociadas al discurso matemático y a decisiones didácticas. Cada una de las etapas y fases pueden construir significados diferentes de acuerdo con la función que cumplan en el género. Estas consideraciones son centrales a los fines de llevar a cabo una interpretación adecuada, como también con el propósito de comprender sus proyecciones en el campo de la enseñanza.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de consignas en las cuales se puede observar la estructura descrita anteriormente.

Ejemplo I: Examen final. Cálculo I. 4/2

Responder Verdadero o Falso. **[I]** Si responde verdadero, justifique en qué herramienta teórica se apoya. **[II]** Si responde falso, exhiba y desarrolle un contraejemplo de manera analítica y gráfica. **[III]** Sea $x = c$ un punto del dominio del dominio de una función $f(x)$ en el cual la misma es continua pero no derivable. Entonces x = c no puede ser un extremo relativo de $f(x)$. b) Supongamos que $f(x)$ es una función definida en un intervalo I. Sea $x = c \in I$. Si $f'(x) > 0\, \forall x \in I, x < c$ y $f'(x) < 0\, \forall x \in I, x > c$, entonces $x = c$ es un máximo relativo de $f(x)$ $en\ I$.

Etapas del género	Fases	Texto
Expresión de la tarea Académica	**[I]**	
	Demanda	*responder*
	Objeto	*verdadero o falso*
	[II]	
	Condición	*Si responde verdadero*
	Demanda	*justifique*
	Objeto	*en qué herramienta teórica se apoya*

	[III]	
	Condición	*Si responde falso*
	Demanda	*a) exhiba* *b) desarrolle*
	Objeto	*un contraejemplo*
	Circunstancia	*de manera analítica y gráfica*
Información para la resolución de la actividad		*Sea* $x = c$ *un punto del dominio del dominio de una función* $f(x)$ *en el cual la misma es continua pero no derivable. Entonces x = c no puede ser un extremo relativo de* $f(x)$. *b) Supongamos que* $f(x)$ *es una función definida en un intervalo I. Sea* $x = c \in I$. *Si* $f'(x) > 0\ \forall x \in I, x < c$ *y* $f'(x) < 0\ \forall x \in I, x > c$ *, entonces* $x = c$ *es un máximo relativo de* $f(x)$ *en* I.

En este ejemplo se observan solo dos etapas del género. En cuanto a la expresión de la tarea académica aparecen todas sus fases e incluso una nueva como es la condición. En el discurso matemático es frecuente introducir condiciones relacionadas con la construcción posible de hipótesis y modelizaciones.

Con relación a la realización de la demanda en la cláusula, no se ve un uso uniforme, ya que se opta por el infinitivo y el modo imperativo en forma usted. No obstante, estas realizaciones y empleo de la lengua se condicen con el género en tanto las consignas buscan dar órdenes, y estas se realizan congruentemente con el modo imperativo.

Por otra parte, desde el punto de vista del registro, en lo referido al modo, se aprecia el empleo de diferentes registros lingüísticos como el natural y el algebraico que interactúan al mismo tiempo construyendo el significado de la consigna.

El Tema de los registros matemáticos (Duval, 2006) constituye una problemática compleja que excede los objetivos de esta tesis, sin embargo, debido a que los mismos confluyen en las consignas de manera frecuente en el corpus analizado y, sumado a algunas dificultades que presentan a los estudiantes, es preciso efectuar algunos comentarios.

En primer lugar, solo un 31% de las consignas estudiadas utilizan solo el registro verbal, mientras que un 68% alterna diferentes formas de realizaciones semióticas: registros verbales, algebraicos, gráficos, aritméticos y visuales (dibujos e ilustraciones).

En segundo lugar, con relación al tema de la articulación de los registros de las consignas, en especial en lo que refiere a los procesos de transformación semiótica (Duval, 2006), un 25% de los estudiantes ingresantes expresa que los errores cometidos en la resolución de las consignas se deben a esta problemática; en el caso de los estudiantes de Cálculo II, un 35% asigna a este tema como fuente de sus errores. Esta información puede contribuir con los profesores en el diseño de la planificación didáctica de las clases de matemática, en particular a la hora de comprender cómo aprenden sus estudiantes y cuáles son sus dificultades en la resolución de las consignas. Puesto que los estudiantes están expuestos permanentemente en su formación a la práctica de resolución de consignas, debe enseñarse también cómo funcionan los registros matemáticos en este tipo de tareas académicas, cómo se articulan, qué se resuelve primero, cuáles son los supuestos, sobre qué se debe focalizar, qué tipos de registros se espera en las respuestas (por ejemplo, en caso de justificaciones o demostraciones matemáticas, algunos estudiantes emplean solo el registro verbal, cuando deberían apelar a argumentos que usen registros algebraicos, aritméticos o gráficos), etc.

Ejemplo II: Examen final. Cálculo I. 25/2

Dada la gráfica de la siguiente función $f(x)$, se pide esbozar una gráfica posible para su derivada $f'(x)$. **[I]** Justificar detalladamente los aspectos referidos a derivabilidad, monotonicidad, concavidad, extremos, inflexiones. **[II]** Gráfica posible para $f'(x)$ Ayuda: en $x = -4$ la gráfica de $f(x)$ tiene un ángulo, mientras que en $x = -3$, una cúspide

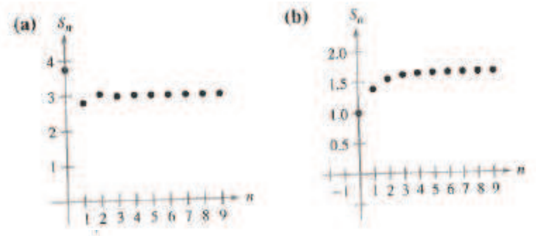
Etapas del género	Fases	Texto
Información para la resolución de la actividad		*Dada la gráfica de la siguiente función $f(x)$*
Expresión de la tarea Académica	**[I]**	
	Demanda	*Se pide esbozar*
	Objeto	*una gráfica posible para su derivada f'(x)*
	[II]	
	Demanda	*Justificar*
	Circunstancia	*detalladamente*
	Objeto	*los aspectos referidos a derivabilidad, monotonicidad, concavidad, extremos, inflexiones.*
Información para la resolución de la actividad		*Gráfica posible para $f'(x)$*
Instancia de andamiaje cognitivo		*Ayuda: en $x = -4$ la gráfica de $f(x)$ tiene un ángulo, mientras que en $x = -3$, una cúspide.*

En este ejemplo se observan todas las fases esperables del género. Aquí, se introduce el andamiaje cognitivo a través del término “ayuda”. A diferencia del anterior, las etapas no aparecen en el mismo orden e incluso se desdoblan como es la información para la resolución de la actividad que se presenta al inicio y en un tercer momento.

En cuanto a la realización léxico-gramatical de la demanda, se registra una de manera impersonal y otra con infinitivo que, aunque no se realizan congruentemente con el modo imperativo, mantienen el significado de orden de las funciones básicas del lenguaje. También aquí, desde la realización del género en el registro, desde la perspectiva del modo, se articulan los registros algebraico y natural para construir el significado de la consigna matemática.

. **Ejemplo III**: Manual. Cap 7.2. Ejer. 15-18

En los ejercicios 15-18, haga coincidir la gráfica con su sucesión de suma parciales. **[I]** [Las gráficas se han marcado con las letras (a), (b), (c), (d).] Use la gráfica para estimar la suma de la serie. **[II]** Confirme la respuesta analíticamente. **[III]**



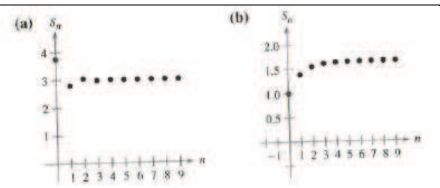
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{8}{9}\right)^n$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Etapas del género	Fases	Texto
Expresión de la tarea Académica	**[I]**	
	Circunstancia	*En los ejercicios 15-18*
	Demanda	*Haga coincidir*
	Objeto	*la gráfica con su sucesión de suma parciales*

Instancia de andamiaje cognitivo		*[Las gráficas se han marcado con las letras (a), (b), (c), (d).]*
Expresión de la tarea Académica	**[II]**	
	Demanda	*a) Use* *b) Para estimar*
	Objeto	*a) la gráfica* *b) la suma de la serie*
	Circunstancia	*para estimar la suma de la serie*
	[III]	
	Demanda	*Confirme*
	Objeto	*La respuesta*
	Circunstancia	*Analíticamente*
Información para la resolución de la actividad		 15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ 16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{8}{9}\right)^n$ 17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 18. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

En este ejemplo también se hallan todas las etapas esperables del género. Nuevamente se produce un desdoblamiento de etapas, pero de la “expresión de la tarea académica”. Aun cuando la manera de enunciación de la tarea guarda una lógica matemática en términos de pasos a seguir, esta organización del género, donde hay etapas que se repiten con exigencias diferentes, puede presentar cierta dificultad de comprensión por parte de estudiantes que no se encuentren entrenados con este tipo de consignas.

Asimismo, los distintos componentes de frase preposicional "para estimar la suma de la serie" forman parte de diferentes fases y cumplen con funciones diversas: demanda, objeto y circunstancia.

La etapa de instancia de andamiaje cognitivo se expresa y es reconocida por el uso del paréntesis (aquí se puede ver de qué manera se realiza el significado en un elemento del estrato fono-gráfico). Si bien no siempre aparece con dicha marca gráfica, es frecuente su empleo en esta etapa.

En lo que refiere a los registros verbales, se incorpora, además, el gráfico, que estaba ausente en los ejemplos anteriores. Se articulan tres tipos de registro: verbal, algebraico y gráfico. Este último es más frecuente en la ejercitación del manual, aunque las razones pueden obedecer al tipo de tema trabajado.

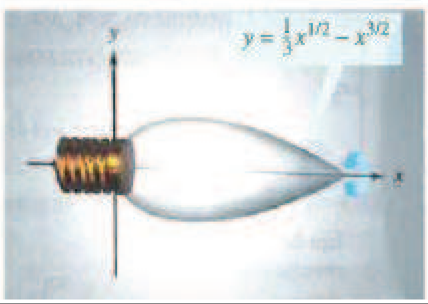
Para finalizar, el ejemplo presenta un caso de circunstancia que no opera solo como modo o finalidad de la demanda, sino que indica dónde o sobre qué ejercicios se deberá resolver la consigna. "En los ejercicios…". Este tipo de circunstancia es más frecuente en las actividades que aparecen en el manual. Es importante destacar que los manuales proponen un tipo de aprendizaje autónomo-autogestionado por medio de explicaciones, ejercicios y solucionarios y, por lo tanto, necesitan andamiar y guiar las consignas de una manera más precisa. En este sentido, las circunstancias poseen, además, un correlato didáctico.

Ejemplo IV: Manual. Cap 5.4. Ejer. 51

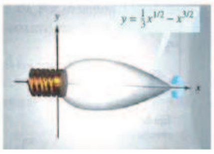
51. Diseño de una bombilla eléctrica. Se diseña una bombilla eléctrica ornamental mediante revolución de la gráfica de

$$y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

en torno al eje x, donde x y y se dan en pies (vea la figura). Encuentre el área de la superficie de la bombilla y use el resultado para dar una aproximación de la cantidad de vidrio que se necesita para hacer la bombilla. (Suponga que el espesor del vidrio es 0.015 pulgadas.)



Etapas del género	Fases	Texto
Paratexto: Título ejercicio		*Diseño de una bombilla eléctrica*
Información para la resolución de la actividad		*Se diseña una bombilla eléctrica ornamental mediante revolución de la gráfica de* $y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ *en torno al eje* x*, donde* x *y* y *se dan en pies*
Instancia de andamiaje cognitivo		*(vea la figura)*
	Demanda	*a) Encuentre* *b) use* *c) para dar*
Expresión de la tarea académica	*Objeto*	*a) el área de la superficie de la bombilla* *b) el resultado* *c) una aproximación de la cantidad de vidrio que se necesita para hacer la bombilla.*
	Circunstancia	*para dar una aproximación de la cantidad de vidrio que se necesita para hacer la bombilla.*
Instancia de andamiaje cognitivo		*(Suponga que el espesor del vidrio es 0.015 pulgadas.)*

Información para la resolución de la actividad		

Esta consigna posee todos los pasos esperados del género. Aquí la duplicación se observa en dos etapas: información para la resolución de la actividad e instancia de andamiaje cognitivo. Esta última, al igual que en el ejemplo precedente, se expresa en dos oportunidades a través del paréntesis.

De manera similar al caso anterior, los componentes de la frase preposicional “para dar una aproximación de la cantidad de vidrio que se necesita para hacer la bombilla” participan de las fases de demanda, objeto y circunstancia, construyendo así significados distintos.

Otra etapa que es particular del género en los manuales son los paratextos. Estos tienen la función de orientar la información, la lectura y los procesos de comprensión. Desde una perspectiva discursiva, en lo que atañe a la periodicidad (Martin y Rose, 2007) estos paratextos pueden funcionar como macrotemas. Sobre este aspecto, es preciso destacar que la periodicidad en un texto se manifiesta a través de dos tipos de prominencia: la prominencia temática, que anticipa el contenido de un bloque informativo, y la prominencia informativa, que resume y consolida la información presentada. Estas prominencias operan en distintos niveles del texto, creando una jerarquía de periodicidad. En el más alto, se encuentra el macrotema, que funciona como una predicción, por ejemplo, a través de títulos y subtítulos que organizan las secciones y que colaboran con la textura del texto. De este modo, en la consigna, el título adelanta que se abordará un ejercicio relacionado con el diseño de una bombilla.

Con respecto al modo, se incorpora un elemento semiótico que no apareció antes y es la ilustración de una bombilla con indicaciones en registro algebraico. Esto también opera como andamiaje cognitivo, ya que ilustra y trae información que colabora con la resolución de la actividad.

Ejemplo V: Examen Final. Matemática básica. 14/6

Si $f(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y $G(x)$ también una primitiva de la misma función $f(x)$, ¿Qué tipo de función será $F(x) - G(x)$? Justifique

Etapas del género	Fases	Texto
Información para la resolución de la actividad		*Si f(x) es una primitiva de f(x) y G(x) también una primitiva de la misma función f(x)*
Expresión de la tarea académica	*Pregunta*	*¿Qué tipo de función será F(x) – G(x)?*
	Demanda	*Justifique*
	Objeto	*[la respuesta a la pregunta]*

Esta consigna muestra algunas particularidades que la diferencia de las anteriores. Solo dos etapas se encuentran presentes: información para la resolución de la actividad y la expresión de la tarea académica.

La expresión de la tarea académica se manifiesta de dos maneras, mediante una pregunta y a través de una demanda/orden. La pregunta se realiza en una cláusula de tipo elemental (que busca información) por medio de un marcador funcional interrogativo como 'qué'.

Por su parte, el objeto aparece elidido, pero puede ser recuperado a partir de la lógica de cómo se desenvuelven las etapas y el mismo cotexto.

Esta descripción colabora en la comprensión del funcionamiento del género y de la manera en que los estudiantes pueden resolver de manera adecuada la consigna.

Ejemplo VI: Examen Final. Cálculo I. 18/2

Enunciar el Teorema del Valor Medio para Integrales e interpretar geométricamente. (Solo exponer un gráfico no alcanza…debe escribir su interpretación)

Etapas del género	Fases	Texto
Expresión de la tarea académica	*Demanda*	*a) Enunciar* *b) Interpretar*
	Objeto	*a) el Teorema del Valor Medio para Integrales* *b) [el teorema del Valor Medio para Integrales]*
	Circunstancia	*geométricamente*
Instancia de andamiaje cognitivo		(*Solo exponer un gráfico no alcanza…debe escribir su interpretación)*

En el ejemplo se hacen presentes solo las etapas de expresión de la tarea académica y la de instancia de andamiaje cognitivo. Esta última aparece entre paréntesis.

Si bien hay información que aporta la consigna para resolver la tarea, esta no se manifiesta en una etapa *per se*. Una razón puede adjudicarse al contexto en que se enuncia: resolución de tareas teóricas. Las consignas teóricas, a diferencia de las prácticas (esta distinción surge de la separación que hacen los docentes en los exámenes), emplean menos recursos como fórmulas, registros algebraicos, gráficas e ilustraciones. Esto se observa en la mayor parte de los casos del corpus analizado, aunque no implica que siempre sea así y dependerá de las decisiones didácticas y las características de los contenidos a enseñar.

En esta consigna también se ve un ejemplo donde el objeto de interpretar se elide y solo se incluye la circunstancia que indica el modo de llevar a cabo la actividad. Con el propósito de generar textura, se suprime el objeto que puede ser recuperado fácilmente por el cotexto.

Ejemplo VII: Manual. Cap. 2.1. Ejer.74

74. Conjetura. Considere las funciones $f(x) = \text{In}\ (2 + x)$ y $g(x) = x^3$.
a) Represente gráficamente f y f' en un mismo conjunto de ejes.
b) Represente gráficamente g y g' en un mismo conjunto de ejes.
c) Encuentre un patrón entre f y g y sus derivadas respectivas. Use este patrón para obtener conclusiones acerca de $h'(x)$ si $h(x)$=x^{a}, donde n es un entero y > 2.
d) Obtenga $f'(x)$ si $f(x)$ = x^4. **[I]** Compare el resultado con la conclusión obtenida en el inciso (c) **[II]**. ¿Es esta una prueba de la conjetura? **[III]** Explique. **[IV]**

Etapas del género	Fases	Texto
Paratexto. Título		*Conjetura*
Expresión de la tarea académica de la macroconsigna	*Demanda*	*Considere*
	Objeto	*las funciones* $f(x) = In\ (2 + x)$ *y* $g(x) = x^3$
Expresión de la tarea académica de las microconsignas	**a)**	
	Demanda	*Represente*
	Circunstancia	*gráficamente*
	Objeto	f *y* f' *en un mismo conjunto de ejes.*
	b)	
	Demanda	*Represente*

	Circunstancia	*gráficamente*
	Objeto	*gy g' en un mismo conjunto de ejes.*
	c)	
	Demanda	*a) Encuentre* *b) Use* *c)* para obtener
	Objeto	*a) un patrón entre f y g y sus derivadas respectivas* *b) este patrón* *c) conclusiones*
	Circunstancia	*para obtener conclusiones acerca de $h'(x)$ si $h(x) = x^a$, donde n es un entero $y > 2$*
	d)[I]	
	Demanda	*Obtenga*
	Objeto	$f'(x)$ si $f(x) = x^4$
	d)[II]	
	Demanda	*Compare*
	Objeto	*El resultado con la conclusión obtenida en el inciso (c)*
	d)[III]	
	Pregunta	¿Es esta una prueba de la conjetura?
	d)[VI]	
	Demanda	Explique
	Objeto	[la repuesta a la pregunta]

Esta consigna incluye complejidades y particularidades en lo que respecta al género, pero también en cuanto a su impacto en términos de enseñanza y aprendizaje. Desde un mapeo general del cuadro se puede apreciar una profusión de demandas, información, etapas y fases que se repiten y que, mirado de esa manera, podría abrumar a cualquier estudiante. ¿Por dónde comenzar?

Efectivamente, esta consigna presenta una secuenciación interna compleja. En primer lugar, se observa que la etapa de la expresión de la tarea académica se divide en dos: la de la macroconsigna y la de las microconsignas. La primera plantea la actividad marco y macro que engloba a las otras y se encuentra al inicio, mientras que las segundas guardan cierta autonomía en su formulación, pero a nivel de contenido se vinculan y dependen de la macroconsigna. Las microconsignas, agrupadas en el mismo ejercicio, se proponen recuperar diferentes perspectivas del tema que se encuentra planteado en la tarea marco. Exhiben una estructura recursiva que posee un correlato potente en términos de aprendizaje. Cada microconsigna se articula de manera explícita con la anterior, hace referencia a ella y se vinculan una con otra con el propósito de alcanzar un resultado final. La macroconsigna opera como una instancia hipotética para que, más adelante, en otras, se puedan advertir focos de conflictos disciplinares.

Al igual que en otros ejercicios del manual, un paratexto, el título, que opera a modo de macrotema e inicia la consigna.

En cuanto a la estructura de las fases de la etapa de la expresión académica, la consigna presenta en a) y b) un orden diferente dado por demanda+circunstancia+objeto. Este cambio, en el orden de las fases podría indicar que la circunstancia funciona de una manera central y no periférica. En este caso, desde la perspectiva del contenido disciplinar, la gráfica no se configura como una condición aleatoria o instrumental, sino que es central y se relaciona con los temas de la materia. La explicación se debe a que es una construcción terminológica propia del campo matemático. Las representaciones en esta disciplina se suelen graficar y, por lo tanto, son dos conceptos que se encuentran unidos semántica y matemáticamente. Desde su realización en el estrato léxico-gramatical, específicamente desde el sistema de modo, el 'gráficamente' funciona como un adjunto modal, por medio de un grupo adverbial, que se encuentra en el resto e indica el modo en que debe efectuarse la representación. Si se pospusiera al complemento, no perdería su valor semántico, sin embargo, esta selección gramatical remarca la relevancia funcional del grupo adverbial cercano al predicador. La representación de la cláusula a la que se alude sería esta:

	Represente	*gráficamente*	*f y f' en un mismo conjunto de ejes*
Claúsula	Predicador	Adj. Modal	complemento
Grupo	Grupo verbal	Grupo adv.	Frase prep.
	Negociador	**Resto**	

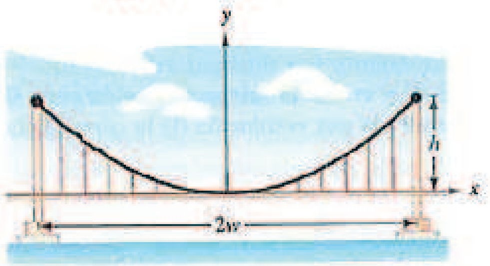
En el inciso c) nuevamente se presenta el caso de una misma frase preposicional que opera funcionalmente en distintas fases del género (Demanda, objeto y circunstancia).

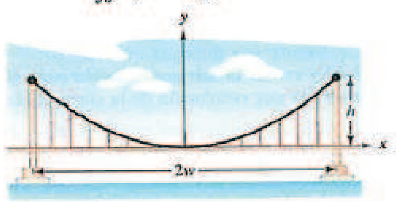
En el inciso d) [VI], el objeto se elide, pero se puede reponer. El corchete indica cuál es.

Ejemplo VIII: Manual. Cap. 5.4. Ejer.59

59. Puente suspendido. Un cable para un puente suspendido tiene la forma de una parábola cuya ecuación es $y = Kx^2$. Sea h la altura del cable desde su punto más baja hasta su punto más alto y sea $2w$ el largo total del puente (vea la figura). Demuestre que la longitud C del cable es:

$$C = 2\int_0^w \sqrt{1 + \frac{4h^2}{w^4}x^2}\,dx.$$



Etapas del género	Fases	Texto
Paratexto. Título		*Puente suspendido*
Descripción de la situación problemática	*Presentación*	*Un cable para un puente suspendido tiene la forma de una parábola cuya ecuación es* $y = Kx^2$.
	Introducción de variables matemáticas	*a) Sea h la altura del cable desde su punto más baja hasta su punto más alto.* *b) sea* $2w$ *el largo total del puente*
Instancia de andamiaje cognitivo		*(vea la figura)*
Expresión de la tarea académica	*Demanda*	*Demuestre*
	Objeto	*que la longitud* C *del cable es* $C = 2\int_0^w \sqrt{1 + \frac{4h^2}{w^4}x^2}\, dx.$
Información para la resolución de la actividad.		$C = 2\int_0^w \sqrt{1 + \frac{4h^2}{w^4}x^2}\, dx.$ 

Esta consigna presenta otra manera de estructuración de la tarea académica matemática que es por medio de los problemas. Si bien este tipo de subgénero dentro de las consignas matemáticas es prototípico y conocido por los estudiantes, ya que entran en contacto con él desde temprana edad en el sistema de escolarización, posee algunas particularidades que le son propias.

En primer lugar, los problemas proponen actividades que promueven un pensamiento crítico, acompañado de aprendizajes profundos y reflexivos, esto es, que apuntan a un uso activo del conocimiento. Según Arancibia Carvajal et.al. (2022), la resolución de problemas desde una perspectiva matemática implica “la capacidad de solucionar problemas y tomar decisiones, aplicando herramientas matemáticas válidas para la resolución” (p. 250). Los autores también recuperan el significado del concepto “resolver” y para ello recurren a Gortari (2000) quien explica que esta demanda implica “resumir, epilogar, recapitular; analizar una cosa compuesta en sus partes o elementos, para reconocerlos cada uno de por sí” (Gortari, 2000, p. 455, como se cita en Arancibia Carvajal et.al., 2022, p. 250)

En segundo lugar, los problemas promueven instancias de aprendizaje reflexivo. De acuerdo con Perkins (2001), este último es una consecuencia del pensamiento; pensar por medio del conocimiento es poder solucionar problemas, hacer inferencias, entre otros. Así, los problemas que aparecen en el corpus estudiado proponen actividades cognitivas que buscan relacionar los saberes matemáticos con situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, para resolver problemas “prácticos” que vinculan los contenidos disciplinares con otras áreas del conocimiento. Otras consignas del corpus analizado, incluyen tareas de investigación o de dibujo para arribar de manera inductiva a leyes y teoremas.

Por su parte, Coronado (2022), propone una clasificación de actividades que buscan promover un aprendizaje activo. Según la autora, este último está centrado en actividades y procesos de los estudiantes, en sus prácticas y participación. Las actividades son

> acciones más o menos estructuradas que desarrolla el estudiante orientado y guiado por las consignas proporcionadas o mediadas por el docente, con el objetivo de experimentar, descubrir, construir o poner en juegos conocimientos, habilidades, destrezas, hábitos y estrategias, practicar o ampliar lo aprendido. (p. 117)

Si bien los autores anteriormente mencionados provienen de perspectivas teóricas diferentes, tienen puntos de encuentro en relación con el uso activo del conocimiento y cómo la propuesta de actividades de aprendizajes potentes en términos de relación de saberes, de recuperación de contenidos previos, de vincularse con la praxis y la experiencia, pueden promover aprendizajes reflexivos, integrados y no frágiles o fragmentados. En este sentido, en el corpus relevado, los problemas presentan instancias de vinculación entre el conocimiento disciplinar y aplicación para resolver o interpretar situaciones de la vida cotidiana donde la matemática básica o el cálculo aparecen. Se observan problemas asociados con aspectos financieros, con la física (cálculos de movimientos y distancias), con el cálculo de diferentes longitudes, etc. En la mayor parte se describen situaciones y desafíos de la vida diaria (techados, graneros, bombita de luz, cableados, salarios, etc.) que necesitan de la matemática para solucionarlos. Si bien no se aprecian problemas conectados directamente con alguna problemática específica de las ingenierías de la facultad, estos ejercicios introducen a los estudiantes en un conocimiento (*savoir faire*) sobre cómo utilizar la matemática para la resolución de problemas en general, que más adelante será para aplicar, solucionar o proyectar situaciones laborales vinculadas a sus carreras.

En tercer lugar, los problemas presentan un texto cohesionado que se ubica al comienzo de la consigna donde se narra y/o se describe una situación. En él se articulan distintos registros, aunque, a diferencia de otro tipo de ejercicios, aquí existe una preeminencia del registro verbal. El texto se ubica como componente central en la estructura de la consigna. Para comprenderlo no solo es necesario conocer conceptos matemáticos y desplegar estrategias de pensamiento y lógica, sino que es preciso también poner en funcionamiento estrategias de comprensión lectora. En este sentido, la complejidad que manifiestan los problemas en términos de articulación de diferentes registros, comprensión lectora, estrategias variadas de pensamiento es, al mismo tiempo, una propuesta de actividades cognitivas ricas y potentes en lo que a aprendizaje se refiere.

En cuanto al ejemplo VIII se pueden identificar todas las etapas esperadas del género. Este caso es además particular porque pertenece a una consigna que se enmarca, como se expresó, en un problema matemático. A diferencia de las anteriores, aquí aparece, después del paratexto, la descripción de la situación problemática. Esta, a su vez, se organiza en dos fases: la presentación del problema y la introducción de las variables matemáticas que deberán tenerse en cuenta para la resolución. La primera fase es común en muchos problemas, aunque la segunda puede variar de acuerdo con el tipo de contenido que se trabaje.

En la etapa del andamiaje se registra entre paréntesis la indicación “vea la figura”. Esta se presenta como una indicación instrumental que posee una finalidad pedagógica en tanto busca andamiar y dirigir el proceso de aprendizaje. De este modo, el autor del manual/docente indica al lector/estudiante que la imagen no es accesoria o ilustrativa, sino que debe ser tenida en cuenta para resolver el problema de manera apropiada.

Desde su realización en el estrato del registro, específicamente en el modo, se observa cómo el andamiaje se configura a través de los significados que construyen los diferentes recursos semióticos como son el registro verbal ("vea la figura") para referir a un significado que aparece por medio de un registro gráfico-visual. A partir de la metafunción textual, a nivel de su realización en el estrato semántico-discursivo, esta expresión puede ser analizada mediante el recurso de la identificación de personas y cosas en el discurso (Martin y Rose, 2007). Esta situación presenta particularidades, dado que para reponer quién es la figura, no es posible efectuar un rastreo a nivel del registro verbal. La identificación de "sobre quién se está hablando" debe buscarse en otra materialización semiótica: la ilustración del puente. La figura, refiere de forma catafórica, al dibujo que se *ve* del puente. El uso del lenguaje de manera multimodal le imprime al discurso matemático características particulares que lo distinguen de otros.

El objeto y la información para la resolución de la actividad comparten la formulación algebraica y la ilustración. Asimismo, el objeto se conforma por el registro verbal. Aquí se observa cómo funcionalmente una misma información opera en distintas etapas del género.

Por último, la formulación de la situación problemática puede ser analizada desde el sistema de la ideación, a nivel de la realización de la metafunción ideacional en el estrato semántico-discursivo. Esto contribuye para comprender cómo se configura la experiencia desde el lenguaje y qué significados se construyen en el discurso matemático, más específicamente en las consignas. Para ello, se recurrirá al sistema de ideación y se analizarán las relaciones léxicas que se expresan dentro del problema. Es decir, "las relaciones semánticas entre las personas, cosas, procesos, lugares y cualidades particulares que construyen el campo de un texto" (Martin y Rose, 2007, p. 75). Estos elementos colaboran con la textura del texto e identificarlos y comprenderlos puede servir para pensar en estrategias didácticas que ayuden con la manera de enseñar a interpretar problemas. En otras palabras, explicitar la manera en que se construyen semánticamente estos aspectos del campo, impacta en los modos de abordar la comprensión de textos matemáticos; pueden convertirse en pistas que orienten la lectura.

Para el análisis se tomará la repetición léxica que forma parte de lo que Martin y Rose denominan relaciones taxonómicas: "Las personas, las cosas y los lugares pertenecen a clases más generales de entidades, y al mismo tiempo son partes de totalidades más grandes y están compuestas de partes más pequeñas" (2007, p. 80). Para estos autores, la repetición sucede cuando se itera el mismo elemento léxico, incluso en diferentes formas gramaticales.

Se elige dicha relación por dos razones. La primera, porque se destaca en este problema y otros; la segunda, debido a que tal tipo de conexión es prototípico en campos complejos y asociados con el registro científico y técnico como el caso del discurso matemático. La repetición y, en otros problemas matemáticos, la sinonimia también, contribuyen con la comprensión y la claridad de los enunciados. Martin y Rose (2007) explican que estos dos recursos son "particularmente útiles cuando el campo de un texto es muy complejo. Nos permiten mantener una o más cadenas léxicas relativamente simples (…) Por esta razón, los textos técnicos en muchos campos son contextos comunes para encontrar repetición y sinonimia" (p. 81). Según estos lingüistas, un ítem léxico inicia o expande el campo de un texto y se espera, en consecuencia, una serie de componentes léxicos relacionados que lo continúen.

Las cadenas léxicas que se conforman son:

1. *Cable-puente* (a nivel multimodal se puede agregar la imagen del puente).
2. *Altura-punto-baja-alto-largo-longitud.*

Repetición: *a) cable-cable-cable*

b) puente-puente

c) punto-punto

d) altura-alto

e) largo-longitud

La primera cadena se vincula con el ámbito del puente y puede establecer una relación de parte todo, al ser el cable parte del puente, el todo.

La segunda cadena se asocia con las medidas y podría establecer una serie de escalas: alto, bajo, largo.

Como el texto alude a altura, se espera que se expanda ese significado en el problema y, de este modo, se hallan ítems léxicos referidos a él como alto, longitud, etc. Lo mismo ocurre con puente, cable y la figura del puente.

Un trabajo didáctico explícito sobre cómo se configuran los textos a nivel de su realización en el estrato semántico-discursivo desde la metafunción ideativa, puede no solo contribuir a leer las pistas que el problema ofrece para su comprensión, sino, y además, entender de qué manera el campo disciplinar construye la experiencia en matemática (entiéndase, quiénes son los participantes, cuáles son los procesos y las circunstancias y las relaciones conjuntivas e ideativas que se establecen entre ellos).

Ejemplo IX: Manual. Cap. 7.2. Ejer.91

91. Marketing. Un fabricante de juegos electrónicos elabora un nuevo juego que estima tendrá ventas anuales de 8000 unidades. Cada año, el 10% de las unidades vendidas se volverán inoperativas. Por lo tanto, después de 1 año habrá 8000 unidades, después de 2 años [8000+0.9 (8000)] unidades, y así sucesivamente. ¿Cuántas unidades estarán en uso después de n años?

Etapas del género	Fases	Texto
Paratexto. Título		*Marketing*
Descripción de la situación problemática	*Presentación*	*Un fabricante de juegos electrónicos elabora un nuevo juego que estima tendrá ventas anuales de 8000 unidades.*
	Planteo del problema	*Cada año, el 10% de las unidades vendidas se volverán inoperativas. Por lo tanto, después de 1 año habrá 8000 unidades, después de 2 años [8000+0.9 (8000)] unidades, y así sucesivamente.*
Expresión de la tarea académica	*pregunta*	*¿Cuántas unidades estarán en uso después de n años?*

Este es otro ejemplo de un problema matemático cuya segunda fase de la etapa de la descripción de la situación problemática difiere del caso anterior. Aquí se presenta el planteo del problema que dará origen a la pregunta.

Por otra parte, la expresión de la tarea académica se formula por medio de una pregunta y no en una demanda directa. La pregunta se realiza en una cláusula interrogativa elemental que busca información.

Ejemplo X: Manual. Cap. 2.1. Ejer.43-44

Análisis gráfico, numérico y analítico. **[I]**En los ejercicios 43 y 44. Utilice una calculadora graficadora para representar gráficamente ƒ en el intervalo [-2, 2]. **[II]**Complete la tabla estimando gráficamente la pendiente de la gráfica en los puntos indicados. **[III]**Después evalúe analíticamente las pendientes y compare sus resultados con los obtenidos gráficamente.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$									
$f'(x)$									

43. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

44. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Etapas del género	Fases	Texto
Paratexto. Título		*Análisis gráfico, numérico y analítico*

Expresión de la tarea académica	**[I]**	
	Circunstancia	*En los ejercicios 43 y 44*
	Demanda	*a) utilice* *b) para representar*
	Objeto	*a) una calculadora graficadora* *b) f en el intervalo [-2, 2]*
	Circunstancia de la primera demanda	*para representar gráficamente f en el intervalo [-2, 2].*
	Circunstancia de la demanda de representación	*gráficamente*
Información para la resolución de la actividad.		*gráficamente f en el intervalo [-2, 2].*
	[II]	
Expresión de la tarea académica	*Demanda*	*a) Complete* *b) estimando*
	Objeto	*a) La tabla* *b) la pendiente de la gráfica en los puntos indicados*
	Circunstancia de la primera demanda	*estimando gráficamente la pendiente de la gráfica en los puntos indicados*
	Circunstancia de la demanda de estimación	*gráficamente*
	[III]	

<table>
<tr><td></td><td>Demanda</td><td>Después, Evalúe</td></tr>
<tr><td></td><td>Circunstancia</td><td>Analíticamente</td></tr>
<tr><td></td><td>Objeto</td><td>las pendientes</td></tr>
<tr><td></td><td>Demanda</td><td>Y compare</td></tr>
<tr><td></td><td>Objeto</td><td>sus resultados con los obtenidos gráficamente</td></tr>
<tr><td>Información para la resolución de la actividad.</td><td></td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1.5</td><td>-1</td><td>-0.5</td><td>0</td><td>0.5</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>f (x)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>f′ (x)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
43. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ 44. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
</td></tr>
</table>

Este último ejemplo que se presenta para el análisis posee varias aristas que lo convierten en un caso particular.

En primer lugar, si bien contiene todas las etapas y fases que se esperan en torno al género, se presenta de modos diferentes a los de los ejemplos anteriores. Esto refuerza lo explicado acerca de la flexibilidad en la conformación de las etapas del género.

En segundo lugar, las circunstancias resultan más visibles en este tipo de ejercicios que en otros. Aparecen las prototípicas de los manuales que ubican las tareas ("en los ejercicios") y las que indican modo o finalidad. Estas últimas incluyen en su interior, como se ve en [I] y [II], otras circunstancias asociadas a las demandas de gerundio o de para+infinitivo. En primer término, se presenta la circunstancia de la primera demanda ('utilice' y 'complete'), ubicada en posición inicial y realizada en el estrato léxico-gramatical como una orden en modo imperativo. Sería una circunstancia general. En segundo término, se encuentra el 'gráficamente' que aparece después de la demanda incluida en la frase preposicional o luego de la demanda de gerundio. En el cuadro se expresan como "Circunstancia de la demanda de representación y de estimación".

Con respecto a la demanda de gerundio, además de funcionar como adjunto de circunstancia, de modo, específicamente, señala duración y simultaneidad, es decir, una de las órdenes debe realizarse al mismo tiempo que la otra. Sin embargo, si bien ambas acciones deben llevarse a cabo, hay una de ellas que siempre se presenta como principal. Este aspecto, que impacta directamente en los modos de comprensión de una consigna y sus demandas, se desprende de la estructura misma de la cláusula. La orden principal o primera siempre se encuentra en posición inicial: “Complete la tabla”. El gerundio presenta una demanda que indica el modo en que debe hacerse la orden principal, aunque no por ello se convierte en instrumental u optativa; el gerundio puede conformar también demandas disciplinares, como en los ejemplos: estimar y justificar.

Este hallazgo produce un impacto directo sobre los aspectos vinculados a los procesos de enseñanza y aprendizaje, puesto que pone de relieve de qué manera los docentes configuran discursivamente las consignas, es decir, sobre qué aspectos disciplinares y de aprendizaje focalizan, qué saberes quieren que sus estudiantes prioricen, den cuenta o practiquen. Desde la perspectiva del lenguaje implica qué decisiones toman los profesores al enunciar la consigna y sus demandas: qué coloca en posición inicial, qué en un segundo lugar, al tiempo que debe elegir diferentes opciones del sistema de la lengua (formas no finitas como los gerundios o infinitivos) para formular el propósito de la tarea. Esto exige desplegar una práctica pedagógica consciente y reflexiva acerca de cómo pensar y formular las consignas. ¿Es el mismo el impacto de la interpretación de: “Complete la tabla, estimando gráficamente” que el de “estime gráficamente, completando la tabla”? Las respuestas a esta pregunta dependerán de la configuración de la clase, de las decisiones didácticas que tome cada profesor y sobre qué aspectos desea colocar el foco.

En cuanto al aprendizaje y a la comprensión, este tipo de demandas puede constituir un desafío cognitivo. ¿Qué valor tiene un gerundio de simultaneidad a la hora de resolver un ejercicio? ¿Está solicitando una acción o pide detenerse sobre la orden principal en posición temática? En ocasiones, especialmente si se atiende que Matemática Básica y Cálculo I se encuentran en el ciclo básico de la carrera, se parte del presupuesto que esta configuración lingüística y cognitiva de las demandas será obvia para los estudiantes. El trabajo de análisis y deconstrucción de las consignas invita a reflexionar sobre el impacto de estas en la tarea pedagógica.

A nivel de la realización en el estrato semántico-discursivo y léxico-gramatical, esta consigna presenta particularidades en lo que respecta a la lógica del discurso y de las conexiones entre los procesos, es decir, a nivel de la metafunción ideacional. Este es el caso de las conjunciones “y” y “después”. Cabe señalar que las conjunciones son "significados lógicos que conectan actividades y mensajes en secuencias" (Martin y Rose, 2007:115). La importancia del análisis de estos recursos desde dicha perspectiva radica, en términos de estos autores, en que "aquí se modela la conjunción como un conjunto de significados que organizan secuencias de actividades por un lado y el texto por el otro" (2007:116). Los significados que organizan secuencia de actividades refieren a las conjunciones externas, mientras que las que lo hacen con el texto se denominan conjunciones internas. A diferencia de la propuesta de Halliday y Matthiessen, que abordan las conjunciones como un recurso gramatical para relacionar una cláusula con la siguiente, en este modelo se enfatiza en el valor funcional de estos recursos en la construcción de significados. Si se considera que las consignas están asociadas indefectiblemente a la orden y a la instrucción, la manera en que se organizan los procesos como demandas es central para comprender este género.

En primer lugar, en el estrato léxico-gramatical se observan dos cláusulas independientes que poseen el mismo estatus o jerarquía, conectadas por "y". A nivel de su dependencia, este tipo de relación se conoce como parataxis:

///evalúe analíticamente las pendientes//**y** compare sus resultados [[con los obtenidos gráficamente]]///

A los efectos de este trabajo se omite el análisis de la cláusula incrustada no finita "con los obtenidos….".

Desde el estrato semántico-discursivo, la "y" es una conjunción que, dentro de las opciones básicas de conjunciones externas, construye significado de adición. Así, se solicitan llevar a cabo dos acciones, evaluar y comparar. También la conjunción marca pasos secuenciales en un proceso: primero, se debe realizar la evaluación analítica y, luego, la comparación; la primera acción, proporciona los datos de entrada para la segunda. Esta secuencialidad en las actividades es reforzada por otra conjunción externa que construye temporalidad y es la que inicia la cláusula: Después. Esta conjunción relaciona temporalmente las actividades anteriores (completar y estimar) con las que aparecen en estas cláusulas.

No obstante, aunque no se expresa de manera explícita la "y" podría funcionar en este caso como una relación de causa-efecto, ya que la evaluación es la causa o lo que da origen a la posterior comparación.

El análisis permite arribar a algunas conclusiones. En primer término, que, funcionalmente, las mismas conjunciones pueden construir significados diferentes. La "y", por ejemplo, señala una relación de adición en la organización de las actividades, pero, al mismo tiempo, puede indicar una expresión de causa-consecuencia. En segundo término, y en vinculación con lo anterior, las características del campo configuran funcionalmente las elecciones de las opciones de la lengua para construir diversos significados. Establecer conexiones lógicas entre las proposiciones de un enunciado es propio del discurso matemático y aquí aparece manifestado a través de las conjunciones externas. En tercer término, esta descripción muestra de qué manera se realiza el género en los estratos del lenguaje y cómo estos, a su vez, lo construyen. Las consignas matemáticas se caracterizan por secuenciar las órdenes en etapas y fases, indican qué hacer primero y qué después. En este sentido, las conjunciones, por caso, contribuyen a estructurar estas ideas y también materializar, desde el discurso, la etapa del andamiaje cognitivo. ("y", "después" funcionan como términos ordenadores y orientadores de la realización de las acciones).

5.3. A modo de cierre

En este capítulo se exploraron las características de las consignas de matemática como género, atendiendo a sus componentes lingüísticos y discursivos, sus proyecciones en términos de aprendizaje, como también de qué manera todos ellos se imbrican.

Las consignas de matemática, al igual que ocurre con otras que pertenecen a disciplinas diferentes, se constituyen como género y, así, comparten rasgos que le son comunes. Sin embargo, poseen aspectos y componentes particulares que les son propios.

La estructura composicional de las consignas de matemática no es uniforme, aunque sí mantiene ciertos elementos constitutivos comunes que se reiteran en los diferentes casos: expresión de la tarea académica que incluye demanda, objeto y circunstancia; información para la resolución de la actividad y andamiaje cognitivo. En este sentido, se realizó un proceso de deconstrucción del género (Martin, 1999; Moyano, 2011) que arrojó ciertas particularidades que pueden ser tomadas como dificultades o potencialidades en relación con la enseñanza y el aprendizaje.

La descripción del género segmentado por etapas y fases permitió visualizar de manera macro y micro su funcionamiento. Por un lado, este análisis posibilitó observar cómo funcionaban sus componentes, si seguían un ordenamiento establecido, si eran frecuentes sus etapas y fases, si existía flexibilización en su presentación, cómo se articulaban los elementos en su interior y cómo impactaban estos aspectos desde la dimensión didáctica y del aprendizaje, en términos de comprensión. Al respecto, de la descripción emerge la concomitancia funcional que poseen ciertas etapas y fases, es decir, que alguna de ellas puede funcionar de diferentes modos al mismo tiempo (por caso, la circunstancia se constituye en andamiaje cognitivo). De esto se desprende que, si bien existen etapas y fases del género estructurales, estas pueden variar de acuerdo con el contexto y la intención comunicativa en que la se producen.

Por su parte, los problemas presentan etapas y fases que son similares al género de las consignas analizadas y otras que son particulares de ellos. Por ejemplo, en estos se pueden observar etapas vinculadas a la presentación o la descripción de la problemática a resolver.

Desde una perspectiva del aprendizaje, el problema alienta el uso activo y significativo del conocimiento. Esto sucede ya que, para su resolución, exige por parte del estudiante poner en práctica diferentes actividades cognitivas complejas en contextos reales o asociados con su futuro perfil profesional. (contextos extra-matemáticos). Asimismo, requiere de un conocimiento del significado y el modo operativo de los diferentes registros matemáticos que allí se articulan.

Esta clase de organización discursiva de las consignas favoreció también la identificación de otros componentes funcionales del lenguaje, por caso, las relaciones léxicas, las conjunciones externas o el seguimiento. Estas últimas, que construyen significado a nivel de los estratos menos abstractos, como son el semántico-discursivo y el léxico-gramatical, aportan información que enriquece y complejiza la descripción del género.

CAPÍTULO 6 . La negociación. El lenguaje como interacción

6.1. Introducción

Este capítulo abordará los aspectos vinculados con lo que Martin y Rose (2007) han denominado “negociación” y que responden a la metafunción interpersonal, es decir, al lenguaje como interacción. Los autores explican que "La negociación se ocupa de la interacción como un intercambio entre hablantes: cómo los hablantes adoptan y asignan roles entre sí en el diálogo, y cómo los movimientos se organizan en relación entre sí." (p. 219).

Las consignas presentan características singulares en lo que respecta a la interacción, puesto que se producen en el marco de un intercambio entre un enunciador que solicita la realización de tareas y un enunciatario que responde a ellas. Esta es la particularidad que lleva a que se dedique un análisis más exhaustivo sobre la metafunción interpersonal ante que de otras.

En esta sección se abordará la realización del registro, específicamente el tenor, a través de la metafunción interpersonal en el estrato semántico-discursivo, como también en el léxico-gramatical.

Desde esta perspectiva, la enunciación de la consigna la realiza el profesor de cátedra/autor del manual, quien reviste una autoridad basada en su saber y en el rol social que cumple en la clase, y está destinada al estudiante del curso/lector del manual, quien asume el rol de aprendiz/lector aprendiente. El rol discursivo complementario de estos últimos es habilitado y asignado por el profesor/autor del manual. En otras palabras, el emisor de la demanda configura al mismo tiempo su rol como el del receptor de esta. Las huellas enunciativas de las distintas realizaciones léxico-gramaticales de la demanda, construyen tanto al enunciador como al mismo enunciatario. Aunque el modo imperativo y las formas no finitas de los procesos son las más frecuentes, existen otras formas, como se podrá observar más adelante.

En este sistema de interacción e intercambio de bienes y servicios el profesor espera que las demandas sean efectuadas, y el estudiante llevarlas a cabo. Este último puede negarse o no cumplirlas, sin embargo, esto conllevaría problemas para la aprobación de las materias, en especial en el caso de exámenes. En el manual, a menos que el docente pida la resolución obligatoria de los ejercicios como instancia de regularización del espacio, la realización de la demanda es optativa.

En cuanto a las consignas y demandas analizadas, se observa un enunciador/autor de las consignas que se encuentra en una posición de saber experto y un estudiante que se halla en una situación de un conocimiento en construcción y que debe dar cuenta de él. En el caso de exámenes, ese saber se coloca a evaluación por parte del experto quien, además acredita la apropiación o no de esos conocimientos. La relación es asimétrica y esa "posición dominante del enunciador se refuerza a través de opciones de simbolismo matemático y representación visual" (O´Halloran, 2005, p. 70).

En el caso del manual, tal como señala O´Halloran, "el autor también asume el papel de conocedor secundario que hace las preguntas y, más típicamente, proporciona las respuestas. El enunciador asume el papel de quien manda" (2005, p. 70). Este doble rol de evaluador y oferente de las respuestas (a través del solucionario que se encuentra al final), lo ubica en una posición de poder que contribuye a generar la asimetría.

La resolución de consignas del manual coloca al estudiante en una situación de evaluación, pero más orientada a la autoevaluación, ya que el libro cuenta con las soluciones a los ejercicios. Asimismo, se puede generar una supervisión docente sobre el desarrollo de los ejercicios, pero la actividad didáctica está pensada más en términos de aplicación y fortalecimiento de los contenidos aprendidos; no forma parte de un proceso de acreditación de saberes. El objetivo final es que el estudiante alcance un grado de conocimiento que lo acerque a un saber más próximo al que posee el docente/autor del manual.

Si bien la relación que se genera entre docentes y estudiantes es asimétrica, como en toda situación de enseñanza formal, no por ello es unilateral; para que el proceso de aprendizaje-enseñanza se materialice es preciso de las dos partes. Se constituye así un contrato simbólico entre el profesor y el alumno. Expresa Benveniste:

> El lenguaje no es posible sino porque cada locutor se pone como sujeto y remite a sí mismo como yo en su discurso. En virtud de ello, yo plantea otra persona, la que, exterior y todo a "mí", se vuelve mi eco al que digo tú y que me dice tú. (1997, p. 181)

Esta relación es central en la constitución de la tríada pedagógica que une a estudiantes y docentes alrededor del saber. La consigna, y la demanda en particular, no solo aportan una herramienta metodológica que contribuye a la construcción y andamiaje del conocimiento, sino también colaboran en la constitución del vínculo. En este sentido, los aspectos léxico-gramaticales y su realización en la cláusula, a través del sistema de modo, permiten reconstruir los aspectos interpersonales de la demanda en el discurso matemático, pero al mismo tiempo posibilitan dar cuenta de cómo se configura este vínculo pedagógico.

6.2. La realización en el estrato semántico-discursivo y léxico-gramatical

En términos generales, como se mencionó, las órdenes y las preguntas se realizan de manera congruente en cláusulas imperativas e interrogativas respectivamente. Sin embargo, como se observará en el listado de las demandas analizadas, las tareas solicitadas no siempre se realizan en este tipo de cláusulas. Al respecto, Quiroz Olivares señala: "Si bien las órdenes suelen tener un correlato congruente en las cláusulas imperativas, en general los ofrecimientos no muestran interacciones regulares con patrones clausales que le sean propios" (2015, p. 271). Esto mismo es sostenido por Eggins (2002, p. 280). En este sentido, del corpus relevado, se puede apreciar que las demandas se gramaticalizan de diversas maneras:

1) **Modo imperativo**, **usted y vos** *(responsabilidad modal formal e informal):* "Pint**á**" (TP, "apreciaciones sobre integrales impropias"), "Exhib**a** y desarroll**e**" (Examen final, Cálculo I, 04/2).
2) **Procesos no finitos con verboides: Infinitivos**: "Definir", "justificar" (Examen final, Cálculo I, 25/2/19); "Determinar el carácter de cada una de las siguientes series numéricas, <u>justificando</u> detalladamente los criterios utilizados" (Examen final, Cálculo I, 18/2).
3) **Preguntas en cláusulas interrogativas**: "¿Qué tipo de función será F(x) - G (x)?" (Examen parcial, Matemática Básica, 14/7).
4) **Perífrasis verbales**: "Debe escribir" (Examen final, Cálculo I, 18/2); "Haga coincidir" (Manual. Cap. 7.2. Ejer 15-18).

5) **Procesos no finitos: gerundios y frases preposicionales con infinitivo en cláusulas no finitas de realce:** "Use una aplicación gráfica para representar gráficamente esta ecuación" (Manual. Cap. 5.4. Ejer 52); "Emplee una aplicación gráfica para hallar el primer término menor a 0.0001 de cada una de las series convergentes" (Manual. Cap. 7.2. Ejer. 89-90). *Frases negativas*: "Sin calcular los coeficientes de Taylor, encontrar un desarrollo en Maclaurin" (Examen final, Cálculo I, 08/4); "Utilizando series de potencias de Maclaurin (y sin usar L'Hôspital), se pide encontrar …" (Examen final, Cálculo I, 09/9)
6) **Demandas negativas**: Además de las señaladas en el punto anterior, se pueden agregar las siguientes, "Decida con base en un dibujo del arco y no realizando cálculos" (Manual. Cap. 5.4. Ejer. 23-24); "No sufra pretendiendo calcular el límite" (Examen final, Cálculo I, 04/2)
7) **Construcciones impersonales con 'se'**: "Se pide dibujar una gráfica posible de f para cada caso, de modo que se satisfaga la condición adicional" (Examen final, Cálculo I, 08/4);" "Se pide determinar las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse" (Examen final, Cálculo I, 25/2).
8) **Cláusulas incrustadas**: "Encontrar el radio R de convergencia y el dominio de convergencia, que incluya, de ser necesario, el análisis de convergencia en fronteras" (Examen final, Cálculo I, 25/2); "Después redacte un párrafo en el que explique cómo puede definirse la función arcoseno" (Manual. Cap. 5.4. Ejer 56).

A continuación, se presentan dos gráficos, uno con la distribución de las realizaciones léxico-gramaticales de las demandas según la frecuencia con la que aparecen en el corpus analizado y otro, con la comparación entre exámenes y manual.

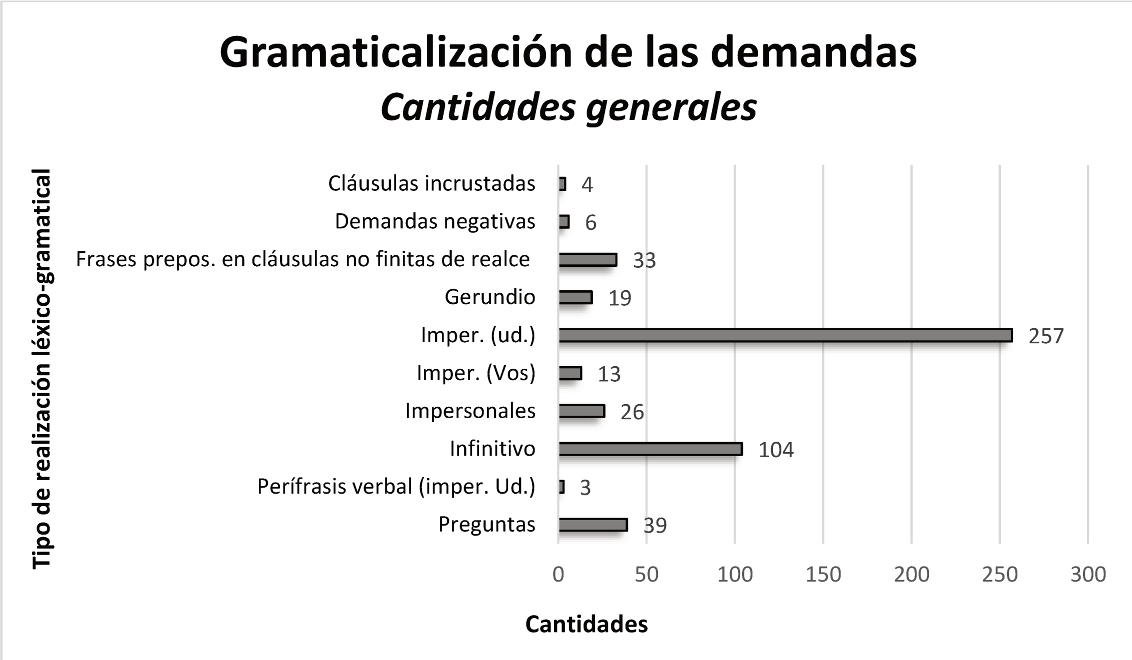


Gráfico I

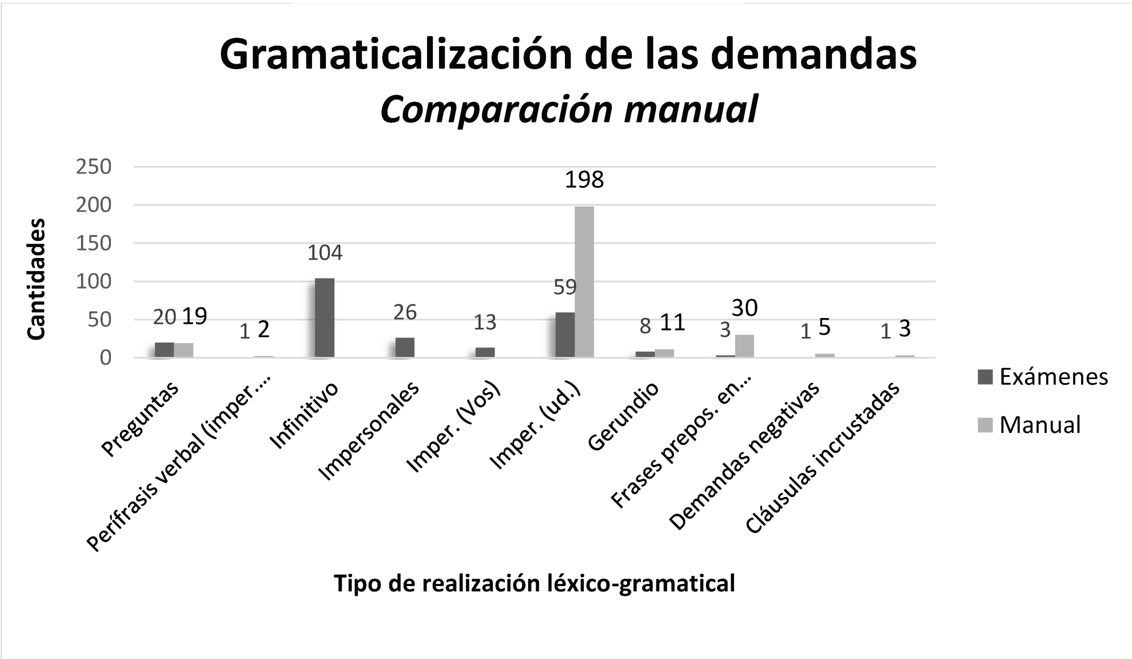


Gráfico II

Respecto de los gráficos es necesario realizar algunas precisiones metodológicas.

Las perífrasis verbales de obligación que, si bien se ubican separadas, forman parte de la cantidad general del modo imperativo del verbo con pronombre usted. La cifra que aparece en los gráficos de estos casos (tres en total) no se suma a los anteriores, sino que se incluyen en la cantidad general de las demandas en imperativo. La razón de la incorporación dentro de este modo verbal se debe a que el proceso principal se encuentra en imperativo. El motivo de la separación es que estas demandas presentan singularidades semánticas vinculadas con su construcción sintáctica e interpersonal. Esto mismo ocurre con los gerundios negativos que, si bien se introducen dentro de las demandas negativas, pertenecen a la categoría de gerundios. También las frases preposicionales en cláusulas no finitas de realce que integran las demandas negativas, pero que forman parte de su propia categoría. Por último, a una de las cláusulas incrustadas se la incorporó en la forma "usted" ya que la demanda de la incrustación aparece en el modo subjuntivo y en esta opción pronominal.

De acuerdo con el gráfico I, la manera más frecuente en que se gramaticalizan las demandas es a través del modo imperativo con el pronombre de tercera "usted". Como se aprecia en el gráfico II, esta forma gramatical aparece de manera más recurrente en el manual, sin embargo, se utiliza también en los exámenes.

Los infinitivos, como forma no finita de los procesos, se posicionan en un segundo lugar después del modo imperativo con "usted". Esta realización léxico-gramatical solo es posible observarla en el corpus de exámenes; en el manual se encuentra ausente.

Seguidamente, se ubican las preguntas, que poseen una cantidad casi similar en ambos corpus, frases preposicionales en cláusulas no finitas de realce y las impersonales, en ese orden. Las frases preposicionales en cláusulas no finitas de realce se hallan casi en su totalidad en el manual, mientras que las impersonales solo se observan en los exámenes.

A continuación, siguen los gerundios y el modo imperativo con el pronombre de segunda, "vos". Los primeros, se registran mayormente en el manual, aunque no se aprecia una diferencia marcada con su utilización en los exámenes. El segundo, se emplea en el trabajo práctico "apreciaciones sobre integrales impropias".

Los motivos en la elección por un tipo u otro de realización son variados e intervienen aspectos vinculados con el género (como se observó en el análisis del género), con el registro y con dimensiones asociadas a lo semántico-discursivo. En este contexto, se analiza "desde arriba", o sea, cómo los estratos superiores confluyen en la configuración de los significados y elecciones léxico-gramaticales.

La decisión, en algunos casos, se puede adjudicar a razones estilísticas. Estilo hace referencia, tal como lo define Bajtín (1999), a "la selección de los recursos léxicos, fraseológicos y gramaticales de la lengua" (p. 248). El acento está puesto en el sujeto productor del enunciado, la demanda, que elige entre diferentes recursos léxico-gramaticales disponibles en el sistema de opciones del español. Aunque el foco se encuentra sobre el profesor/autor de las consignas, esa elección se halla mediada por el contexto y por los participantes de la situación comunicativa. Así, en función de los destinatarios, se adopta un estilo que promueve la claridad enunciativa o la precisión disciplinar. Asimismo, las tradiciones discursivas y genéricas generales en torno a la formulación de consignas pueden influir en el estilo. Al respecto, se aprecia un predominio de formas estándares de escribir consignas a través de cláusulas imperativas, por medio de infinitivos, con preguntas, mediante el empleo de construcciones impersonales o por el intermedio de perífrasis verbales con matiz de obligación.

Las restricciones propias del campo disciplinar y del género académico inciden también sobre las maneras de formular la orden. La cultura universitaria construye convenciones discursivo-académicas y modos institucionalizados de escritura que impactan en la formulación de las consignas.

Los aspectos didácticos también afectan a la hora de configurar lingüísticamente la demanda. En algunos casos, el empleo de gerundios vinculados al "uso" sirve para dar indicaciones y para andamiar el aprendizaje. Esto es posible de observar en demandas dobles compuestas por gerundios que otorgan un matiz de simultaneidad, como también en otras con procesos del "uso" más una frase preposicional en una cláusula no finita de realce con sentido de finalidad. Ej: "<u>Usando</u> el *Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial*, se pide probar que…"; "Use una aplicación gráfica <u>para representar gráficamente esta ecuación</u>".

La inclusión de preguntas también responde a decisiones didácticas. Como fue explicado oportunamente, las funciones del habla se vinculan con el pedido de información y no con el intercambio de bienes y servicios, sin embargo, desde su funcionalidad semántica, pueden convertirse en órdenes, en tanto solicitan hacer algo para obtener la información. Podría decirse que se constituyen como demandas indirectas que buscan un hacer que no está atravesado por una orden configurada en una cláusula imperativa. Las preguntas suelen utilizarse como estrategia didáctica a la hora de recuperar conocimientos teóricos, como también, en otros casos, plantear a los estudiantes desafíos cognitivos con un potencial matemático profundo, al no estar mediadas por el andamiaje organizativo que ofrece la demanda directa. (Esta última, expresada en términos de actos de habla, direcciona, encamina y enmarca la tarea asignada; las preguntas de búsqueda de información realizadas en cláusulas interrogativas elementales, en cambio, dan origen a procesos de pensamiento complejo).

Las decisiones didácticas también impactan a la hora de configurar lingüísticamente la demanda. En algunos casos, a través de gerundios o con procesos vinculados al “uso”, se formulan demandas que tienen la finalidad de dar indicaciones y andamiar el aprendizaje. Esto es posible de observar en demandas dobles compuestas por gerundios que otorgan un matiz de simultaneidad, como también en otras con procesos del “uso” más una frase preposicional en una cláusula no finita de realce con sentido de finalidad. En ambos casos, como se puede apreciar en la tabla III, una de las partes es el andamio y, la otra, la tarea matemática propiamente dicha.

Andamio	**Tarea matemática**
“**Utilizando** el Teorema del Valor Medio (Lagrange),	demostrar que…” (Examen final, Cálculo I, 18/219)
“Use un sistema computarizado de álgebra	**para hallar** la suma del inciso b” (Manual. Cap. 7.2. Ejer 99).

Tabla III

6.2.1. Modo imperativo: usted y vos (responsabilidad modal formal e informal)

El aspecto interpersonal del modo imperativo ha sido descrito ya en los apartados anteriores. No obstante, se efectuarán algunas precisiones más.

En primer lugar, hay que señalar que, en uno u otro caso, se utiliza la forma singular y no la plural. La responsabilidad modal se construye con un destinatario formal, en el “usted”, e informal con el “vos” o “tú” (menos frecuente este último). La utilización del pronombre “usted” en el modo imperativo es producto de una elección que busca formalizar la relación entre quien elabora la consigna y el futuro estudiante que la resolverá; responde a la necesidad de constituir un tratamiento más formal del vínculo entre los sujetos involucrados en la demanda. El empleo de "usted" en español es característico de un registro formal y de respeto. La asimetría entre los roles discursivos, en términos de posesión y poder del conocimiento, también impacta en la configuración misma de la asimetría en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

El uso del pronombre "vos", aunque no deja de establecer la asimetría propia de los procesos educativos, genera un vínculo que busca acortar la distancia en términos enunciativos. Esto se produce, en primer lugar, por la utilización de un pronombre de 2da. persona singular y, en segundo lugar, debido a que se apela a un pronombre que es característico de la variedad lingüística rioplatense que se utiliza en la región donde se encuentra la UNL.

Con respecto al voseo, es frecuente que se lo emplee en las clases de manera oral y para dirigirse a los estudiantes, sin embargo, al momento de enunciar la orden en la escritura se cambia la responsabilidad modal por una más formal y se recurre al "usted" o a otras maneras más despersonalizadas, como se verá. Este fenómeno se lo observa principalmente en un trabajo práctico, mientras que para los exámenes se emplean usos más formales. Este dato podría indicar que la evaluación asociada a un examen requiere de una modalidad académica que genere un distanciamiento enunciativo más pronunciado entre los roles discursivos de la demanda.

6.2.2. Procesos no finitos con verboides: Infinitivos

En este punto se analizará el empleo de los infinitivos como forma de configurar léxico-gramaticalmente la demanda.

Los procesos no finitos, como infinitivos y gerundios, establecen una relación más distante entre el yo, enunciador/docente/autor manual, y el tú, el enunciatario/estudiante. Si bien la responsabilidad modal se asigna a cláusulas con procesos finitos, en estos casos la utilización de infinitivos busca establecer una relación formal entre los participantes de la interacción. Estas formas, desprovistas de la flexión gramatical que poseen los verbos conjugados, despersonalizan el vínculo que se establece entre las partes. La acción solicitada se centra más en la resolución de la tarea que en la configuración de la dimensión interpersonal de la consigna. El "yo"-"tú", que menciona Benveniste y que presupone toda demanda en tanto acto de habla, se elide en favor de formas lingüísticas que contribuyen con la creación de enunciados factuales, distantes y objetivos. Si bien este tipo de procesos no finitos, en especial el infinitivo, son habituales en otros registros disciplinares, la frecuencia en su elección para construir la demanda en el corpus analizado se vincula con las características de formalidad y objetividad que se persigue en el campo de matemáticas.

El saber y el contenido ocupan la centralidad, desplazando o "enmascarando" las huellas de la interacción que todo texto supone, en tanto sucede en un contexto comunicativo, más aún en un género como el de consignas.

Aun cuando los infinitivos no se realizan congruentemente en cláusulas imperativas, cumplen con lo esperable en términos de significados perlocutivos y esos son conocimientos de los supuestos genéricos que los destinatarios traen en tanto participantes de las esferas sociales relacionadas con la educación. Los estudiantes comprenden que un infinitivo, en el marco de un examen, implica resolver la tarea disciplinar que se les solicita.

6.2.3. Las preguntas y las cláusulas interrogativas

Como ya fue explicado oportunamente, en las preguntas la orden aparece de manera indirecta. Desde el estrato semántico-discursivo, específicamente desde la Función del habla, al formular una pregunta, explica Halliday, "el hablante asume para sí el rol de alguien que busca información y requiere al oyente que asuma el rol de alguien que puede proporcionar la información requerida" (Halliday, 1985[1994]:68, como se citó en Ghio y Fernández, 2008:122).

Además de Halliday, se recurrirá a los aportes y clasificaciones que Quiroz Olivares (2015) ofrece al respecto. Según la autora, desde la metafunción interpersonal, las preguntas de confirmación (estrato semántico-discursivo) se realizan típicamente en cláusulas interrogativas polares, mientras que las preguntas de búsqueda de información se realizan en cláusulas interrogativas elementales. Las primeras "constituyen el recurso típico para los movimientos de pregunta que buscan confirmación", mientras que las segundas, "se asocian de manera regular a movimientos de pregunta que buscan información" (2015, p. 284). En el corpus analizado se encuentran los dos tipos de cláusulas interrogativas. Algunos ejemplos:

Preguntas de búsqueda de información ***Cláusulas interrogativas elementales***	¿A qué hora precisa entre las 4 y las 5 coincidirán las agujas horarias y del minutero del reloj? (Examen final, Cálculo I, 09/9)
Preguntas de búsqueda de información ***Cláusulas interrogativas elementales***	¿Cuál de estas superficies de revolución tiene mayor área? (Manual. Cap. 5.4. Ejer. 46)
Preguntas de búsqueda de información ***Cláusulas interrogativas elementales***	¿Qué observa? (Manual. Cap. 7.2. Ejer. 85-86).
Preguntas de confirmación ***Cláusulas interrogativas polares***	¿Es acotada la región?" (Trabajo práctico. Cálculo I. Apreciaciones sobre integrales impropias)
Preguntas de confirmación ***Cláusulas interrogativas polares***	¿Es esta una prueba de la conjetura?" (Manual. Cap. 2.1. Ejer. 74).

Tabla IV

Las cláusulas interrogativas elementales, que realizan preguntas de búsqueda de contenidos, se caracterizan por emplear un marcador, conocido en la gramática tradicional como pronombres interrogativos y que se ubican al inicio de la cláusula. (Qué, cuál, por qué, etc.). Esto lo confirma Quiroz Olivares (2017) cuando expresa que "las cláusulas interrogativas elementales, (…) se caracterizan por requerir la presencia de un marcador interrogativo, que en la red sistémica correspondiente (…) se representa mediante la función Q-int.". Asimismo, indica que este último "elemento fonológicamente prominente tiende a aparecer en posición inicial (…) y abarca en español la clase de los llamados 'pronombres interrogativos'" (p. 271).

Solo una de las preguntas del corpus que busca información se estructura de una manera diferente: ¿Qué observa? Si bien inicia con un marcador interrogativo de función Q-int., este caso emplea un grupo verbal flexionado que configura una responsabilidad modal formal y se dirige a un 'usted' de manera directa. En las otras preguntas, se elide el destinatario y se elige centrar el foco en el contenido (por medio de los marcadores interrogativos de función Q-int.) o la polaridad.

Por otro lado, se encuentran preguntas que, si bien se realizan en cláusulas interrogativas polares o elementales, guardan una peculiaridad que está dada por el matiz de modalización que presentan. Halliday (2014) expresa que:

Hay grados intermedios, varios tipos de indeterminación que se encuentran entre como ‘a veces’ o ‘tal vez’. Estos grados intermedios, entre los polos positivo y negativo, se conocen colectivamente como MODALIDAD. Lo que hace el sistema de modalidades es interpretar la región de incertidumbre que se encuentra entre ‘sí’ y ‘no’. (p. 176)

La modalización o modalidad epistémica, a diferencias de las formas anteriores, introduce cierto grado de subjetividad por parte del enunciador. En la muestra relevada, se observa especialmente a través de operadores modales, que indican probabilidad, y mediante la utilización del modo potencial. “¿Es posible llevar un bote de P a Q navegando …? (Examen final, Cálculo I,09/9); “¿Puede una región no acotada tener área finita? ¿cómo es posible?”; “¿Qué pasaría si los ponés uno al lado del otro …?” (Trabajo práctico. Cálculo I. Apreciaciones sobre integrales impropias). Aunque las preguntas buscan contenidos o confirmación, aquí se enfatiza el valor de interacción con el enunciatario, en tanto se presupone una pregunta no explicitada que destaca su dimensión interactiva: ¿Piensa usted que ….es posible/puede/qué pasaría si?

Estas formas modales son frecuentes en el discurso matemático, el cual tiende a promover procesos de aprendizaje vinculados con el pensamiento hipotético y probabilístico. A esto se suma que la materia es cálculo, por lo que este tipo de preguntas es relevante en el presente contexto.

6.2.4. Perífrasis verbales

Las perífrasis verbales “Debe escribir” (Examen final, Cálculo I, 18/2/19); “Haga coincidir” (Manual. Cap. 7.2. Ejer. 15-18), están conformadas por un grupo verbal finito complejo de verbo auxiliar (“debe”; “haga”) y un auxiliado (“escribir”; “coincidir”). Estas forman parte también del elemento mínimo de la cláusula requerido para su negociabilidad.

Los grupos verbales complejos encabezados por “deber”, pueden ubicarse dentro de la modulación o modalidad deóntica (Ghio y Fernández, 2008) que, a través de un operador modal como "debe" expresa un grado de obligación. En este caso, la modulación cumple la función de reforzar el sentido exhortativo propio de la demanda por medio de esa construcción verbal. En "Escriba", "Escribir" o "Escribí" el valor semántico de la orden se encuentra presente, sin embargo, el uso del operador modal "debe" duplica e intensifica el valor exhortativo de la acción.

La modulación aporta un matiz prescriptivo a las órdenes. Refuerza y duplica el sentido exhortativo de la tarea a realizar. Entre "Realice un gráfico" y "Debe realizar un gráfico" no existe una diferencia en términos de alcance semántico de la demanda, sin embargo, en el segundo caso, desde una dimensión interpersonal, se establece con mayor claridad quién está en posición de poder y de conocimiento y quién debe responder a él. No es de suponer que el estudiante le diga al docente qué debe hacer. Estas construcciones sociales sobre el rol de los sujetos en la educación son transparentadas en el lenguaje mediante dichas selecciones gramaticales. Por otra parte, la prescripción funciona como una forma de andamiaje cognitivo, puesto que orienta al estudiante y lo direcciona sobre qué camino debe tomar en la resolución de la tarea académica.

6.2.5. Procesos no finitos: gerundios y frases preposicionales con infinitivo en cláusulas no finitas de realce

Las demandas en cláusulas no finitas de realce refieren a aquellas órdenes que se realizan a través de gerundio o por medio de frases preposicionales de "para + infinitivo". Estas realizaciones presentan diferentes particularidades en lo que respecta a su formulación, como a sus implicancias en términos de enseñanza y aprendizaje.

En este apartado, se efectuará un recorrido por aspectos vinculados a la realización léxico-gramatical a nivel de la cláusula, a singularidades de las realizaciones en el estrato semántico-discursivo, como así a las proyecciones didácticas que emergen del análisis.

Desde la metafunción ideacional, a nivel de la cláusula, las construcciones de gerundios y frases preposicionales no pueden considerarse cláusulas propiamente dichas, ya que para que existan necesitan de un proceso finito. Por lo tanto, son cláusulas dependientes por naturaleza y suceden sin un marcador explícito que identifique su condición. Según Ghio y Fernández (2008) muchas se constituyen como cláusulas hipotácticas de expansión. La expansión, enmarcada dentro del sistema lógico-semántico de la metafunción ideacional, sucede cuando la cláusula secundaria (la dependiente, de gerundio o con frase preposicional+infinitivo) expande a la cláusula primaria. Esto puede suceder de tres maneras: por elaboración, extensión o realce. En el caso del corpus analizado, la expansión observada es por realce, es decir, cuando "la cláusula secundaria realza o mejora a la primera de cierta manera: agregando una referencia de tiempo, lugar, manera, causa o condición" (Ghio y Fernández, 2008, p. 79). Los gerundios funcionan otorgándole a las cláusulas una referencia de modo, el cómo llevar a cabo la demanda principal, mientras que las frases preposicionales indican una finalidad o propósito. Cabe señalar que en el caso del español no hay estudios concluyentes al respecto desde la perspectiva sistémico-funcional. Leiva Salum (2022) explica que

> dentro de la LSF, en la descripción del inglés, se ha establecido que una cláusula puede expandirse por elaboración, por extensión o por realce. Trabajos pioneros sobre gramática española en la LSF han aplicado esta categorización al español y han mencionado la cláusulas no finitas de gerundio como posible medio de expresión de la relación lógico-semántica (…) Estos estudios con enfoque gramatical han contribuido a visibilizar la multifuncionalidad de la cláusulas no finitas de gerundio en el marco de la teoría de la LSF, aunque no profundizan en criterios distintivos de los diversos tipos de significado lógico realizados por esta estructura en español. (P. 819)

No obstante, para este trabajo se deciden tomar los aportes de Ghio y Fernández que, además, dan cuenta del funcionamiento de estas cláusulas en español.

En cuanto a la realización de la cláusula en español desde la metafunción interpersonal, se incluyen los aportes de Quiroz Olivares (2015;2017;2023) y Moyano (2013). Al igual que en el caso anterior, son los grupos verbales finitos quienes definen, en este contexto, la negociabilidad de la cláusula. Quiroz Olivares (2015) establece que "desde (…) la estructura interpersonal básica del español, el grupo verbal finito realiza, como un todo, la función de Predicador. Dentro del Negociador, este es el elemento estructural mínimo requerido para establecer el estatus de negociabilidad de la cláusula" (p. 27). El grupo verbal finito, explica Quiroz Olivares, es el recurso interpersonal clave en español. Dentro del predicador pueden incluirse otros elementos que forman parte de la negociación como son los clíticos pronominales (acusativo y dativo). Al respecto, la autora expresa que la persona a que se adjudica "responsabilidad modal por la validez de la proposición o por el cumplimiento de la propuesta es, en cambio, retomada y ajustada regularmente por los contrastes de persona en la flexión verbal, dentro del ámbito del Predicador" (p. 288). Por esta razón, "el sujeto remite a la persona discursiva– interactuante o no-interactuante – a la que se hace responsable ya sea de la validez asociada a la negociabilidad de las proposiciones, o bien al cumplimiento asociado con la negociabilidad de las propuestas" (p. 273).

Lo que queda de la cláusula es el resto. Allí se encuentran complementos y adjuntos. Estos últimos, sostienen Ghio y Fernández (2008), son realizados por un grupo adverbial o una frase preposicional. Debido a que tanto el gerundio como las frases preposicionales no se configuran como grupos verbales finitos, se ubicarán en el resto y su funcionamiento será el de adjuntos modales adverbiales que indican significado de modo o de finalidad, es decir, de qué manera o con qué finalidad se debe llevar a cabo la tarea cognitiva. A continuación, se muestra el análisis de la cláusula en cuatro ejemplos con uso de gerundio y frases preposicionales:

a)

	Encuentre	*la distancia*	*entre los puntos*	*usando la fórmula*	*para la distancia*
Claúsula	Predicador	Complemento	Adj. Modal	Adj.modal	complemento
Grupo	Grupo verbal	Grupo nom.	Frase prep.	Grupo adv.	Frase prep.
	Negociador	**Resto**			

b)

	Aproxime	*la longitud de arco*	*usando las capacidades*	*para integración*
Claúsula	Predicador	Complemento	Adj.modal	complemento
Grupo	Grupo verbal	Grupo nom.+ Frase prep.	Grupo adv.	Frase prep.
	Negociador	**Resto**		

c)

	Utilizando series de potencias de Maclaurin	*Sin usar* L'HÔSPITAL	*Se pide encontrar*
Claúsula	Adj. modal	Adj. Modal	Predicador
Grupo	Grupo adv.+Frase prep.	Frase prep.	Grupo verbal
	Resto		**Negociador**

d)

	Use	*una aplicación gráfica*	*para representar gráficamente esta ecuación*
Claúsula	Predicador	Complemento	Adj.modal
Grupo	Grupo verbal	Grupo nom.+adj.	Frase prep.
	Negociador	**Resto**	

Con respecto al análisis de estas cláusulas es necesario realizar algunas precisiones y observaciones.

En primer lugar, todos los casos presentados son cláusulas imperativas donde el negociador está compuesto por un predicador que contiene un grupo verbal finito en modo imperativo.

En segundo lugar, señalar que el orden del negociador y el resto no altera las funciones de cada uno. En el corpus trabajado es frecuente la estructura de negociador+resto, aunque existen algunas excepciones. Esto demuestra que la responsabilidad modal está puesta en el proceso, en este caso, en la orden. Así, se refuerza el posicionamiento del enunciador como autor y autoridad quien, desde ese lugar, espera que su destinatario cumpla lo que está solicitando. El cambio de orden, entre los componentes funcionales de la cláusula (negociador y resto), no altera, entonces, la responsabilidad modal, sin embargo, implica un cambio en el foco de lo que se quiere resaltar como importante. Este fenómeno puede producir impacto en términos de comprensión de las consignas, es decir, qué mirar primero y qué resolver, y también cómo configurar la cláusula de manera que resulte acorde a los propósitos de la clase.

En tercer lugar, una observación sobre el ejemplo “c”. El resto incluye un complemento, pero está formulado en un registro aritmético. Por esta razón, se lo omitió. El complemento es:

$$\frac{\ln\sqrt[3]{1+x}-\operatorname{sen} x}{x}$$

6.2.6. *Cláusulas de gerundios y frases preposicionales con valor instrumental. Demandas cognitivas e instrumentales*

Estas cláusulas de gerundio y frases preposicionales pueden adquirir diferentes funciones relevantes en lo discursivo y en cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje. De esta manera, pueden operar como realce y circunstancia, donde se indica el modo o finalidad de efectuar la tarea disciplinar, así como en demandas propiamente dichas con un significado instruccional enmascarado. En este último sentido, se pueden transformar en demandas que funcionan a manera de instrumento o herramienta de la tarea disciplinar o como andamio cognitivo.

Las demandas instrumentales suelen aparecer frecuentemente en posición inicial, como una actividad previa que debe realizar el estudiante para alcanzar la tarea cognitiva principal que se le propone luego. A continuación, se presentan algunos ejemplos:

Ej. I.

$\underbrace{\text{“\textit{Use una calculadora graficadora}}}_{\text{Demanda instrumental}}$

$\underbrace{\text{\textit{para representar la función y su recta tangente}”}}_{\text{Demanda cognitiva (la “propiamente dicha” a través de una frase preposicional en cláusula no finita de realce)}}$

(Manual. Cap. 2.1. Ejer. 19-24)

Ej. II.

"Aproxime la longitud del arco

Demanda cognitiva (la "propiamente dicha" a través de un verbo en imperativo)

usando las capacidades para la integración de una aplicación gráfica"

Demanda instrumental

(Manual. Cap. 5.4. Ejer. 15-22)

En el corpus relevado, estas demandas aparecen tanto a través de procesos finitos en modo imperativo, como en cláusulas no finitas con gerundio. En muchos casos, se emplean los verbos instrumentales "usar" y "utilizar" y, en menor medida, de otros tipos.

A partir del relevamiento realizado se observa que las demandas instrumentales aparecen de manera recurrente dentro de las consignas de matemática. Los siguientes gráficos dan cuenta de ello:

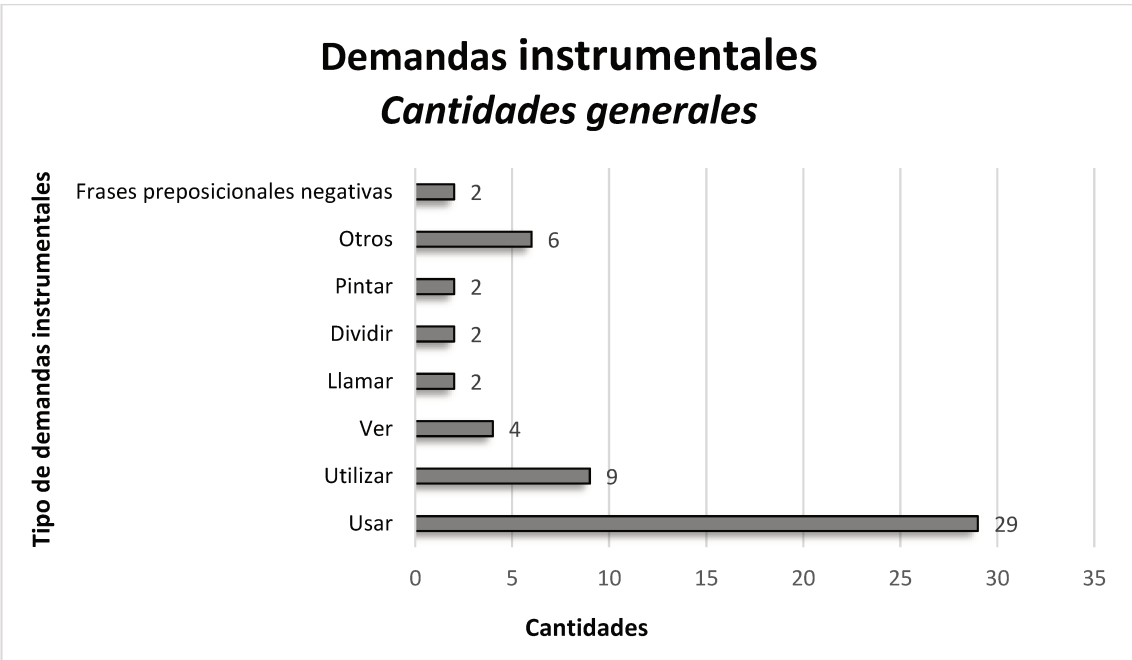


Gráfico III

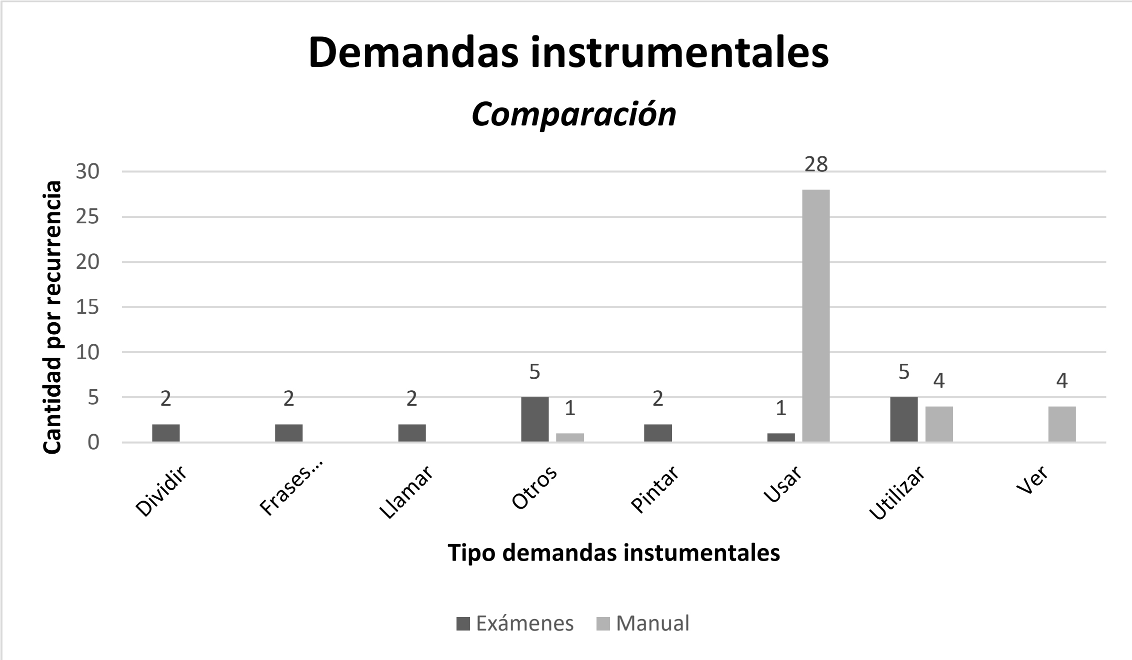


Gráfico IV

Con relación a los gráficos es necesario realizar algunas precisiones:

Los procesos relacionados con "uso" y "utilización" aparecen en forma finita en modo imperativo con pronombre usted, como también de maneras no finitas a través del gerundio. En siete oportunidades del total señalado, se emplea "usando" y, en tres, "utilizando".

Los procesos "llamar", "pintar", "dividir" y otros como "repetir", "poner", etc. se usan con el pronombre vos.

Las demandas instrumentales negativas son: "Sin calcular"; "Sin usar".

De los gráficos se desprende que la mayor parte de los procesos que encabezan demandas instrumentales emplean "usar" y "utilizar". Por medio de ellos, se anticipa que lo que se solicita tiene un carácter instrumental.

En cuanto a la comparación entre los dos corpus analizados, se observa que son más frecuentes en el manual que en los exámenes. Esto puede deberse a las características pedagógicas del manual que, por ser un texto que propone una actividad de enseñanza y aprendizaje autónoma y diferida, necesita recurrir a estrategias didácticas que andamien el conocimiento y guíen de manera adecuada al estudiante en pos de la resolución correcta de las consignas.

Estas demandas no poseen un impacto profundo y rico en términos cognitivos, sin embargo, desde una perspectiva didáctica su función es relevante, ya que orientan al estudiante y median su aprendizaje; le otorgan herramientas y estrategias de resolución que facilitan la resolución de las consignas.

Los instrumentos que aportan las demandas que emplean "usar" y "utilizar" para la resolución de la consigna pueden ser variados, aunque en su mayoría se reduce a conceptos matemáticos teóricos o a herramientas metodológicas y procedimentales:

Ej. I.

"Usando el *Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial*, **[Demanda instrumental. Concepto teórico]**

se pide probar que: dados dos números reales *a* y *b*, $a < b$, entonces la media aritmética de los dos números, $\frac{1}{2}(a+b)$, está en el intervalo abierto (a,b) ". **[Demanda cognitiva]**

(Examen final. Cálculo I. 08/4).

Ej. II.

"En los ejercicios 43 y 44,

utilice una calculadora graficadora **[Demanda instrumental. Herramienta de cálculo]**

para representar gráficamente ∫ en el intervalo [-2,2]". **[Demanda cognitiva. Frase preposicional en cláusula no finita de realce]**

(Manual. Cap. 2.1. Ejer.43-44)

Ej. III.

"En los ejercicios 25-26,

Aproxime la longitud del arco [**Demanda cognitiva]**

Usando las capacidades para integración de una aplicación práctica" **[Demanda instrumental. Concepto teórico]**

(Manual. Cap. 5.4. Ejer.25-26)

Estos ejemplos muestran, desde la estructura de la cláusula, cierta regularidad que se conforma a partir de combinaciones de las variables grupo verbal finito-no finito, por un lado, y demanda instrumental y demanda cognitiva, por el otro. Así, el empleo de una u otra forma léxico-gramatical se relaciona con un tipo particular de demanda. En este sentido, desde la organización de la cláusula a nivel de la metafunción ideacional, las demandas cognitivas se ubican en la cláusula principal con procesos finitos y, las instrumentales con gerundios, en la cláusula dependiente que funciona como realce. En cambio, en el caso de construcciones con frase preposicional, las demandas cognitivas se encuentran en la cláusula dependiente que funciona como realce, mientras que la demanda instrumental se halla en cláusula principal con procesos finitos.

Desde la organización de la cláusula a nivel de la metafunción interpersonal, la demanda cognitiva se encuentra en el predicador/negociador y la instrumental, que funciona como adjunto modal conformado por un grupo adverbial, en el resto. Mientras que, en el caso de las frases preposicionales, la demanda cognitiva se halla en el resto y la instrumental en el negociador.

Por último, se encuentran las demandas instrumentales negativas. No son abundantes en el corpus trabajado, no obstante, son significativas en tanto direccionan la consigna en lo que no debe hacerse para alcanzar la resolución efectiva de la actividad. En los dos ejemplos presentados se observan frases preposicionales negativas que funcionan como realce, indicando el modo de resolver la consigna (sin calcular, sin usar).

Ej. IV.

"<u>Sin calcular</u> los coeficientes de Taylor, **[Demanda instrumental]**

encontrar un desarrollo en Maclaurin para $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.**[Demanda cognitiva]**"

(Examen final. Cálculo I. 08/4).

Ej. V

"Utilizando series de potencias de Maclaurin (<u>Y SIN USAR</u> L'HÔSPITAL), **[Demanda instrumental]**

se pide encontrar   ln31+x-sen xx" **[Demanda cognitiva]**"

(Examen final. Cálculo I. 09/9).

Este cruce de realizaciones léxico-gramaticales, aspectos vinculados a la distinción de significados desde una mirada cognitiva y ubicaciones diferentes dentro de la cláusula, impacta en los modos de comprensión de la consigna. Esto muestra que la demanda instrumental no siempre es formulada de la misma manera, ni tampoco se comporta de dicha forma en todos los casos.

Desde una perspectiva didáctica, esto es, los docentes a la hora de planificar y poner en acto la enseñanza de los contenidos, las demandas operan como instancias mediatizadoras del aprendizaje, andamios que se construyen para sostener el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, es para los docentes un desafío pensar cómo potenciar la enseñanza a través de este tipo de herramientas, cómo se incluyen de manera explícita y consciente en la planificación, no sólo como una consigna en un ejercicio más de matemática, sino atendiendo a los procesos lingüísticos que contribuyen en la conformación de la ejercitación. La distinción y focalización entre un tipo de demanda u otra (cognitiva o instrumental) redunda en la comprensión de la tarea solicitada y, en suma, colabora con el aprendizaje eficaz de los contenidos.

Desde una dimensión del aprendizaje, este tipo de demandas desafían a los estudiantes a la hora de comprender adecuadamente lo que se les está solicitando. En los ejemplos citados, se observan ejericicios con demandas múltiples, es decir, dentro del mismo enunciado aparecen dos, una instrumental y otra cognitiva. Si a esto se le suma que no todas las que se encuentran en una consigna poseen la misma funcionalidad e impacto a la hora de resolver los ejercicios, la práctica de comprensión de consignas se torna en un obstáculo. Así, la distinción entre demandas cognitivas/disciplinares e instrumentales, como también de qué manera hallarlas desde una perspectiva léxico-gramatical en la estructura del enunciado, contribuye en la focalización de las tareas y en la jerarquización de estas.

La identificación léxico-gramatical de estos elementos permite también reconocer cómo funcionan las demandas dentro de una consigna, en particular en estas que no se presentan como prototípicas.

En primer lugar, aunque las demandas se realizan en estructuras lingüísticas no “convencionales”, no por ello pierden su valor instruccional. Continúan siéndolo, pero se muestran como si no lo fueran; son acciones “enmascaradas”, es decir, demandas que entrañan cierta dificultad para ser identificadas a partir de una primera vista o lectura. Se presentan con una “máscara” de realce o construcciones adverbiales, cuando, en realidad, es allí donde aparece la tarea cognitiva “propiamente dicha”. Las frases preposicionales se encuentran dentro de esta última.

En el caso de estos enunciados con dos demandas puede ocurrir que solo se atienda a aquellas con su forma finita (verbo conjugado) y se omita lo que no parezca una tarea cognitiva. Así, es un desafío para el estudiante comprender sobre qué focalizar o jerarquizar a la hora de resolver el ejercicio.

6.2.7. Demandas negativas

Este tipo de demandas son abordadas en otras realizaciones, por lo cual no se procederá a llevar a cabo un desarrollo particular en el presente apartado.

6.2.7. Construcciones impersonales con 'se'

El uso de 'se' en español es fuente de discusiones permanentes y las diferentes teorías y autores, presentan perspectivas diversas del fenómeno. Para este trabajo, tomamos la categorización de Arús (2006) que alude a las construcciones impersonales con 'se' como parte de las construcciones de 'se' no pronominal e indeterminado.

Estas construcciones impersonales "ocultan un agente o actor de la acción verbal. Hablar de agentes o actores es hablar de una función semántica, no sintáctica. El ocultamiento obedece a indeterminación, generalización o encubrimiento pragmático" (Fernández, 1998, p. 34). En el caso del discurso matemático, este procedimiento está vinculado con las características factuales y objetivas propias del género y del campo disciplinar. Se busca presentar la información de manera objetiva, despersonalizando al agente de la acción; no se especifica quién realiza la petición.

El efecto semántico de objetividad enunciativa y elisión de agentividad, se genera a partir de la incorporación de construcciones impersonales no pronominales con "se" en las cuales "su sujeto es cero, se sugiere un 'agente' o 'actor' que es arreferencial o está generalizado" (Fernández, 1998, p. 38). En otras palabras, el sujeto de este tipo de construcciones se elide y se borra la huella lingüística tanto del que enuncia como del destinatario de la acción a realizar.

El uso de la impersonalidad evita colocar el foco en el agente de la acción. Este hecho puede deberse a diferentes motivos: debido a que se desconoce quién es el agente de la acción, porque deliberadamente no se lo quiere mencionar o puesto que se busca, como en el caso de las demandas analizadas, resaltar la acción cognitiva por sobre quién la enuncia o debe llevarla a cabo.

Por otra parte, la utilización de esta forma de la impersonalidad puede introducir una manera de cortesía que atenúa el efecto exhortativo del modo imperativo o el distanciamiento generado por el infinitivo. El verbo "pedir" se encuentra presente en todas las instancias en que aparece la forma impersonal. La acción de "pedir" está asociada semánticamente a solicitar algo con respeto, como una manifestación del favor: "Te pido, por favor". La demanda precedida por el verbo "pedir" acentúa, entonces, el matiz de cortesía y de empatía con el enunciatario y reduce la carga semántica deóntica propia de los procesos en modo imperativo.

La introducción de la cortesía puede vincularse con lo que Halliday y Mathiessen denominan metáforas gramaticales interpersonales. Según los autores,

> Las variables de tenor se suelen discutir en términos de estatus, formalidad, imagen, tacto y cortesía (…). Lo que todos estos tienen en común es un sentido muy general de la distancia social entre el hablante y el destinatario. (…) las variantes metafóricas crean una mayor distancia semiótica entre el significado y la formulación, y esto representa una mayor distancia social entre el hablante y el destinatario. La distancia semiótica a menudo se manifiesta directamente en la léxico-gramática como una extensión sintagmática de la formulación. (2014, p. 705)

Este tipo de construcciones que apelan a la cortesía efectivamente construyen una distancia social mayor entre quien enuncia-el profesor/autor del manual, ubicado en el lugar de autoridad de saber-y el enunciatario-el estudiante/lector del manual, quien es un aprendiz, alguien que está en posición de aprendizaje. La extensión sintagmática a la que aluden los autores se observa en la suma de la perífrasis verbal '**se pide** dibujar una gráfica" en lugar de formular la demanda de forma directa con modo imperativo o con infinitivo: 'dibuja la gráfica-dibujar la gráfica'.

En este mismo sentido, y con el propósito de reforzar la distancia enunciativa, estas construcciones pueden expresar un significado deóntico, es decir, asociado con la obligación. La modulación o modalidad deóntica "se vincula con el modo imperativo y el intercambio de bienes y servicios" (Ghio y Fernández, 2008, p. 132). En otras palabras, refuerzan la demanda ya presente en la cláusula.

La modulación resalta el sentido prescriptivo de la demanda. Estas formas refuerzan y duplican el sentido exhortativo de la tarea a realizar. Son formas que direccionan y organizan con mayor intensidad las demandas y ofrecen menos posibilidad para que el estudiante lleve a cabo una acción que no es la que se solicita. En algunos casos funciona también como una forma de andamiaje cognitivo, ya que orienta al estudiante y le indica por cuál camino debe iniciar o resolver la tarea académica.

6.2.8 Cláusulas incrustadas

Si bien este caso no es representativo de la muestra debido a que se halla en pocas consignas, presenta singularidades que habilitan su análisis. Un ejemplo es "Encontrar el radio R de convergencia y el dominio de convergencia, [[que incluya, de ser necesario, el análisis de convergencia en fronteras"]] (Examen final, Cálculo I, 25/2).

En primer lugar, a nivel del sistema de interdependencia clausular, un elemento incrustado se define funcionalmente por ser modificador de un grupo nominal. Así, se modifican los grupos nominales: "radio de convergencia y "dominio de convergencia".

En segundo lugar, esta consigna se conforma por tres demandas: encontrar-incluir-analizar. Sin embargo, solo la primera, que aparece al comienzo, se expresa como una demanda esperable en términos genéricos. Las otras dos se realizan mediante un verbo en modo subjuntivo y por una nominalización, respectivamente. No obstante, no todas funcionan al mismo nivel, las demandas cognitivas propiamente dichas son 'encontrar' y 'análisis', la inclusión opera a modo instrumental.

En tercer lugar, la organización de las demandas en diferentes lugares de las cláusulas posee también sus singularidades. De las tres, dos aparecen en el elemento incrustado. Este tipo de formulación puede presentar dificultades en la comprensión, puesto que hay órdenes que se hallan en la incrustación y no en la cláusula finita. A esto se añade que los estudiantes puedan reconocer al 'incluir' como una demanda instrumental, dado que para la resolución adecuada de la consigna "se espera" que incorpore el análisis.

En cuarto lugar, y en cuanto al “se espera”, la cláusula incrustada agrega una modalización “de ser necesario” que introduce un matiz semántico de probabilidad o evaluación de parecer. En este sentido, las demandas que se encuentran en la incrustada se presentan como optativas, aunque sugeridas. Este ejemplo muestra de qué manera una demanda pierde su carga semántica deóntica, en favor de órdenes optativas. En este caso, el enunciador/profesor pone a consideración del destinatario/estudiante si lleva a cabo o no las tareas. La modalidad incorpora una variante en la construcción habitual de la interacción entre los participantes de la consigna.

En último lugar, aparece el análisis como una demanda enmascarada, en tanto se emplea un sustantivo, específicamente una nominalización, para indicar qué acción realizar. La nominalización forma parte de lo que Halliday denomina metáfora gramatical. O´Halloran, recuperando a Halliday define a esta última como, “Una 'variación en la expresión de un significado dado' que aparece en una forma gramatical, aunque también puede ocurrir alguna variación léxica” (2005, p. 3). El recurso más frecuente para crear metáforas gramaticales es a través de la nominalización en la que, según esta misma autora, “Una clase o estructura gramatical que realiza un proceso, circunstancia, cualidad o conjunción se convierte en otra clase gramatical, la de un grupo nominal que realiza un participante” (2005, p. 83). De este modo, “los procesos (congruentemente expresados como verbos) y las propiedades (congruentemente expresadas como adjetivos) son reformulados como sustantivos” (Ghio y Fernández, 2008, p. 169).

La nominalización tiende a la condensación léxica para poner más atención a los procesos que conforman el discurso científico que a los participantes de la acción. Es un recurso que evolucionó principalmente en los registros académicos y técnicos, tanto para alcanzar la objetividad enunciativa, (elidiendo la agentividad) como para construir abstracciones y jerarquizaciones. De este modo, su elección es congruente con los aspectos factuales y de objetividad que se busca en el discurso matemático, aunque no con lo esperable en términos de órdenes.

6.2.9. *Las metáforas léxicas*

Dos realizaciones particulares, una, ubicada dentro de las demandas negativas y otra, como parte de una consigna, merecen una atención detenida. Son los casos de "no sufra" y "para coronar su obra". "Realice el estudio completo de la función (…), para coronar su obra con un esbozo de la gráfica" (Examen final, Cálculo I, 22/7); "No sufra pretendiendo calcular el límite" (Examen final, Cálculo I, 04/2). Estas formas solo aparecen en exámenes finales.

Ambos ejemplos pueden ser caracterizados como metáforas léxicas, es decir, el cambio del significado de una expresión léxica. En este caso, se eligen formas figuradas y no congruentes con lo esperable en términos de formulación de consignas académicas. Esto se vincula con la especificidad del discurso matemático en general y el académico, en particular, que busca la denotación por medio de la construcción de textos formales, técnicos y objetivos; la connotación, las metáforas y las modalizaciones no son frecuentes en este tipo de discurso.

Las metáforas léxicas pueden enmarcarse dentro del sistema interpersonal de valoración. Bustos Vázquez (2023) explica que el

> sistema de valoración progresa en el estudio de la metáfora léxica, dado que le reconoce un rol en la negociación evocada o implícita de actitudes. En específico, este recurso lingüístico se describe como una estrategia que 'provoca' (…) una respuesta emocional en el destinatario (…). En esta línea, Liu (2018, p. 13) sostiene que la provocación de actitudes se explica por la dinámica o juego entre los dos campos o trasfondos culturales enraizados en las unidades metafóricas. (p. 391)

"Coronar una obra" constituye de por sí una metáfora léxica que se emplea en diferentes contextos, cuyo significado es concluir una obra-acción-tarea. Se corona a una persona, específicamente, a los monarcas; por medio de la corona, es decir, la conclusión de un proyecto, este último se convierte en un rey, o sea, se convierte en obra. La coronación también refiere a la envergadura y a la gloria del objeto/persona que se coronará. La "gloria y envergadura", la corona, en la consigna analizada debe ser realizar una gráfica. Se utiliza una manera metafórica con el propósito de indicar una acción que podría ser similar a “para concluir/finalizar su ejercicio con el esbozo de la gráfica”.

De forma similar, el sufrimiento es un sentimiento asociado al padecimiento, al dolor y a la pena. Todas estas variaciones del significado no se relacionan con la matemática ni con la demanda solicitada. Se emplea una manera metafórica para indicar una acción que podría ser similar a “no calcule el límite”. Evitar el sufrimiento es un modo de sugerirles a los estudiantes el uso de una estrategia menos laboriosa para resolver el ejercicio, busca evitarles que se les complique en demasía.

Estas metáforas interpersonales reflejan el modo con el cual el enunciador expresa los significados en relación con sus enunciatarios. Generan significados irónicos y humorísticos sobre el discurso matemático que se proponen construir una relación de cercanía y “complicidad” entre el docente y el estudiante. En otras palabras, estas metáforas buscan provocar una respuesta emocional (humor, distensión, etc.) en una dinámica o juego que conocen el enunciador y sus enunciatarios.

Para reconstruir el significado irónico y humorístico presente en las metáforas, es preciso de una participación activa por parte del enunciatario, en este caso el estudiante. Se produce una “complicidad” implícita que busca “desdibujar”, mediante estos recursos, tanto los roles discursivos presentes en la demanda, como la relación de asimetría pedagógica. En el marco de un examen que implica una situación de formalidad, tensión y nerviosismo, el humor y la ironía funcionan acercando al docente con sus estudiantes para sostenerlos y relajarlos. En esta “complicidad” el profesor les hace saber que él comprende que la matemática puede llegar a ser un sufrimiento, un padecimiento y un dolor.

6.3. A modo de cierre

Desde una perspectiva del lenguaje como interacción, este apartado llevó a cabo una descripción interpersonal de las demandas en matemática que proveyó de información relevante en lo que atañe a los hallazgos discursivos y léxico-gramaticales, como a aquellos vinculados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En cuanto al primero, relacionado con el enfoque sistémico-funcional, se expande y se profundiza en la descripción de las opciones disponibles dentro del sistema de modo para el caso de las consignas en matemática. En relación con la didáctica, se analiza de qué manera los aspectos léxico-gramaticales presentes en la formulación de las consignas, específicamente de las demandas, inciden en los procesos de enseñar, aprender y evaluar en la disciplina.

La interacción en las consignas, a través de las demandas particularmente, se establecen entre un enunciador docente/autor del manual en posición de poder que ordena a un enunciatario/estudiante cumplir con la resolución de la consigna. La construcción discursiva de este poder se produce por medio de la modulación y la despersonalización de las huellas enunciativas. Aunque pueden observarse otros mecanismos, estos son los que se destacan en el corpus analizado. La primera, se realiza léxico-gramaticalmente en perífrasis verbales y construcción impersonales que acentúan el valor perlocutivo de las órdenes y que pueden funcionar como andamiaje cognitivo, al establecer una dirección sobre la tarea a hacer. La segunda, en búsqueda de una interacción objetiva propia del discurso matemático, se realiza en cláusulas de proceso no finito a través de infinitivo, en frases preposicionales, en construcciones impersonales, en demandas nominalizadas, por medio del pronombre usted, entre otros. Todas ellos buscan lograr un efecto de objetividad mediante la despersonalización enunciativa que, como se sabe, nunca se alcanza por completo. Prueba de esto son las huellas enunciativas que es posible identificar en la interacción de las consignas mediante el empleo de la flexión del grupo verbal, las modalizaciones o el uso de metáforas léxicas.

En el primero de ellos, el destinatario se observa en la flexión del grupo verbal del modo imperativo mientras que el enunciador emerge en las modalizaciones, en especial con verbos como ‘poder’, ‘necesitar’, entre otros.

La modalización, por su parte, resalta la dimensión de la interacción por medio de una “invitación” al enunciatario (estudiante) para pensar y profundizar sobre los contenidos disciplinares. Se encuentran en cláusulas interrogativas elementales que buscan información. “¿podría?; “¿Cree que…?”. Se formulan como demandas indirectas que pretenden alcanzar por parte del estudiantado respuestas que refuercen operaciones cognitivas como la deducción, la hipótesis, la evaluación, entre otras.

Las metáforas léxicas, desde una perspectiva de la interacción, buscan generar reacciones emocionales en el destinatario mediante la construcción de significados particulares que cobran sentido en el contexto áulico de la clase de matemáticas. Expresiones como “no sufra” o “para coronar su obra” en instancias evaluativas genera una situación de desconcierto por parte del estudiante, y, a la vez, una empatía entre docente y el alumno producida por esta estrategia discursiva. El empleo de metáforas contribuye en el refuerzo de un vínculo pedagógico de cercanía distinto al previsto en un marco evaluativo.

La orden en español se realiza en el estrato léxico-gramatical de diferentes maneras. Aunque las órdenes y las preguntas, como se pudo apreciar en el análisis, se realizan de manera congruente en cláusulas imperativas e interrogativas respectivamente, pueden articularse con patrones clausales que no son propios. (cláusulas de proceso no finito a través de infinitivo, en frases preposicionales, en construcciones impersonales, entre otros).

Por otra parte, estos patrones clasusales que no son propios, configuran a nivel semántico órdenes que se presentan de forma enmascarada, es decir, que no pierden su dimensión perlocutiva, pero que no se asocian a maneras canónicas de formular las órdenes. Esto se observa, entre otras, en demandas nominalizadas, frases preposicionales y gerundios y, en menor medida, en los infinitivos. Este hallazgo impacta directamente en el ámbito de la enseñanza y exige por parte del docente disciplinar trabajar con los estudiantes sobre las implicancias que conlleva este fenómeno a la hora de comprender una consigna.

Los gerundios y las frases preposicionales, por su lado, funcionan a nivel de la cláusula como realce de modo y finalidad, desde la metafunción ideacional y a manera de adjuntos modales a partir de la metafunción interpersonal. Además de operar en calidad de circunstancias o realce, actúan como demandas instrumentales o cognitivas, o sea, a modo de órdenes que indican la forma de llevar a cabo la tarea o con qué instrumento (instrumentales) realizarlas y también como órdenes que se vinculan con la dimensión disciplinar propiamente dicha (cognitivas). De esta manera, integrando los aportes gramaticales y cognitivos, surge que cuando el realce es de modo, por medio de un gerundio, se establece una demanda instrumental y la demanda cognitiva se ubica en verbo flexionado. Por el contrario, cuando el realce es de finalidad, con una frase preposicional, funciona como una demanda cognitiva y la cláusula principal se convierte en instrumental. En este sentido, conocer y enseñar el tipo de realización léxico-gramatical de la orden, su ubicación dentro de la cláusula, como su funcionalidad es central, puesto que impacta en mejores resultados a la hora de comprender una consigna y permite a los estudiantes tomar mejores decisiones a la hora de resolver los ejercicios matemáticos.

Esta descripción que se realizó desde el lenguaje buscó al mismo tiempo echar luz sobre las implicancias que conlleva la formulación de las consignas y la elaboración de la interacción en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático en el nivel superior. Así, por ejemplo, las construcciones indirectas y enmascaradas de las órdenes poseen un correlato en la comprensión del enunciado del ejercicio que debe resolverse. Este tipo de configuración léxico-gramatical puede provocar la omisión de determinadas demandas relevantes por parte del estudiante o generar cierta complejidad a la hora de interpretar de la consigna. Esto implica un posicionamiento reflexivo por parte del docente en lo que atañe a las macro decisiones didácticas (Edelstein, 2011), es decir, atender a si la materia se ubica en el ciclo básico de las carreras, en qué año dentro de este período, qué conocimientos matemáticos previos traen los estudiantes, cuáles son las dificultades con las que se parte, de qué manera ir graduando y andamiando la formulación y la explicitación de las demandas, entre otros. El objetivo es que los alumnos de los ciclos superiores alcancen una comprensión efectiva del modo en que los especialistas conciben y escriben el discurso y su lógica disciplinar matemática.

CAPÍTULO 7 . Las demandas. Una aproximación cognitiva y semántica

7.1. Introducción

En este capítulo se volverá sobre el concepto de demandas, pero focalizando y profundizando en sus dimensiones cognitivas y en sus alcances perlocutivos y semánticos-disciplinares. ¿Qué significa en matemáticas en general y en Cálculo en particular, por ejemplo, 'representar gráficamente'? ¿Qué tipo de aprendizajes promueve? ¿La representación gráfica es lo mismo que la de funciones? ¿Qué valor adquieren las definiciones en el discurso matemático? Estas y otras preguntas serán abordadas en este capítulo a la luz de lo que ya fue explicado oportunamente como demandas.

7.2. Las Demandas: Caracterización General

Como fue mencionado, la demanda de una consigna es la realización lingüística que expresa la acción de ejecutar diferentes actividades cognitivas; es la indicación de la acción, la tarea asignada (Vázquez y Pelizza, et.al, 2006) propiamente dicha.

La cantidad de demandas relevadas es de 494. Al respecto es necesario realizar ciertas precisiones.

En primer lugar, que el número de demandas no es igual al de consignas analizadas, ya que en algunas hay más de una demanda. Las consignas pueden ser simples o múltiples, dependiendo de la cantidad de demandas que se encuentren en su interior. Se denominan múltiples a aquellas que poseen más de una tarea, ya sea en un mismo enunciado o en diferentes microconsignas que conforman una de estructura compuesta (Navarro y Stagnaro, 2012), mientras que simples son aquellas que contienen una sola demanda. Del número de consignas relevadas (en las que se incluyen los diferentes incisos, en los casos de las de estructura compuesta), 131 son múltiples y 148 son simples.

En segundo lugar, para esta instancia de caracterización se toman las operaciones cognitivas implicadas en las demandas, independientemente de su realización léxico-gramatical. Por ejemplo, si la demanda es "esbozar un gráfico" o "grafique", la operación cognitiva es graficar. Los análisis referidos a sus aspectos lingüísticos-discursivos y retóricos ya fueron desarrollados en los capítulos anteriores.

A los efectos de poder visualizar con mayor claridad las diferentes demandas y su recurrencia, se diseñaron los siguientes gráficos. Estos se organizan por orden alfabético y por el grado de iteración en las consignas.

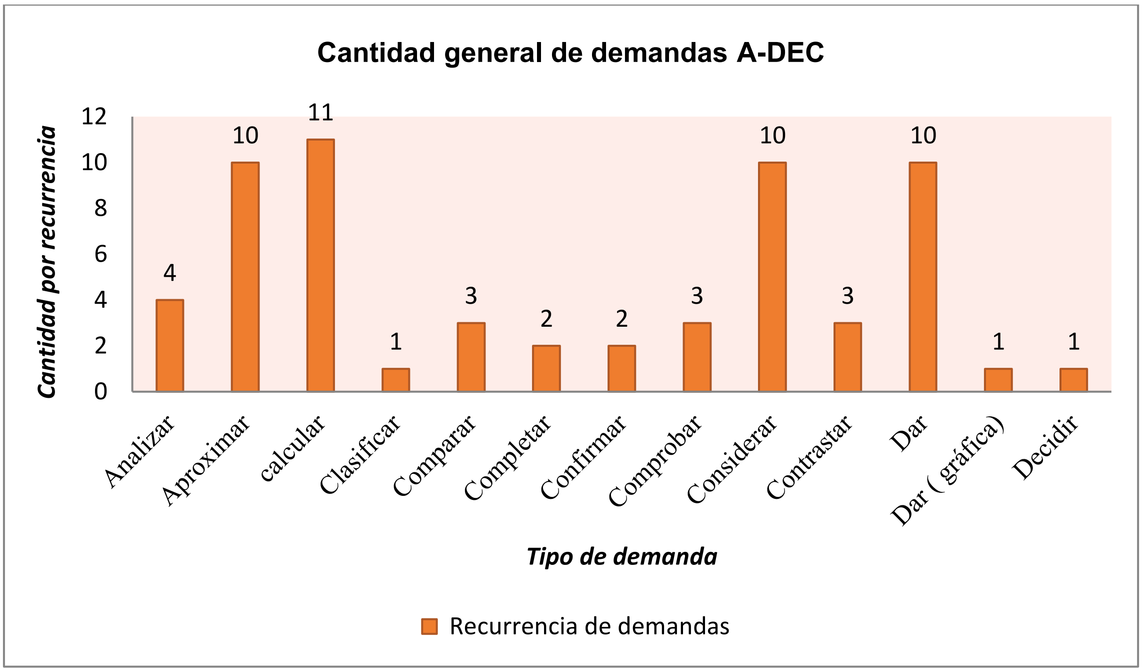


Gráfico V
Total de muestras: 494

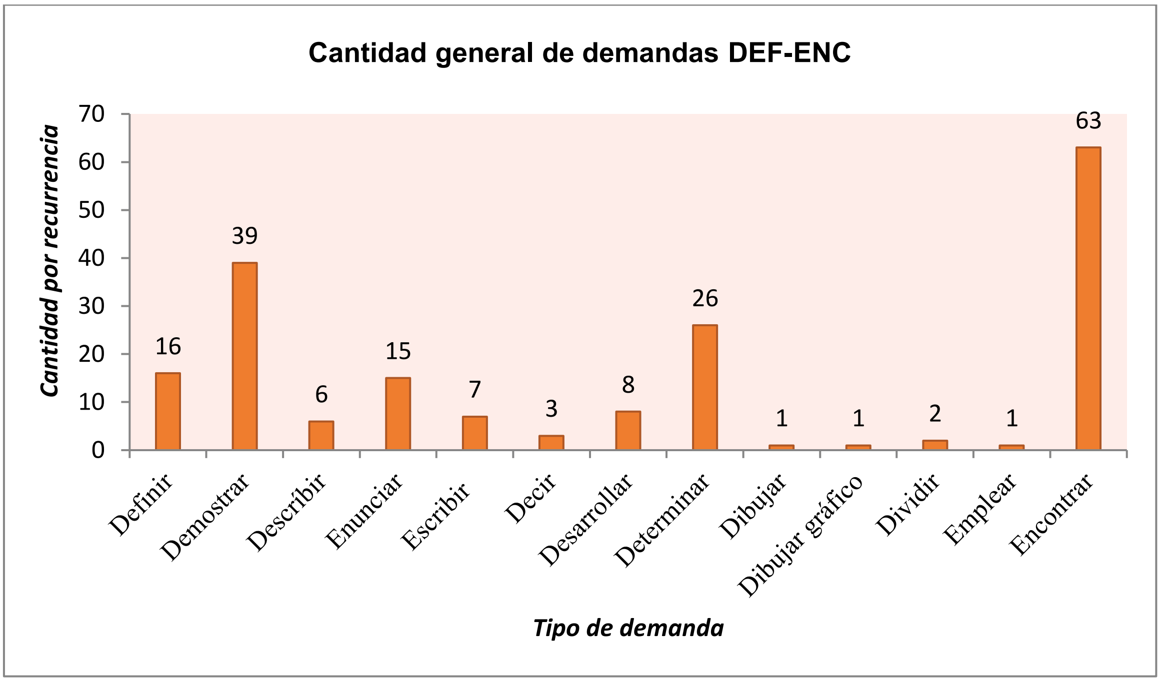


Gráfico VI
Total de muestras: 494

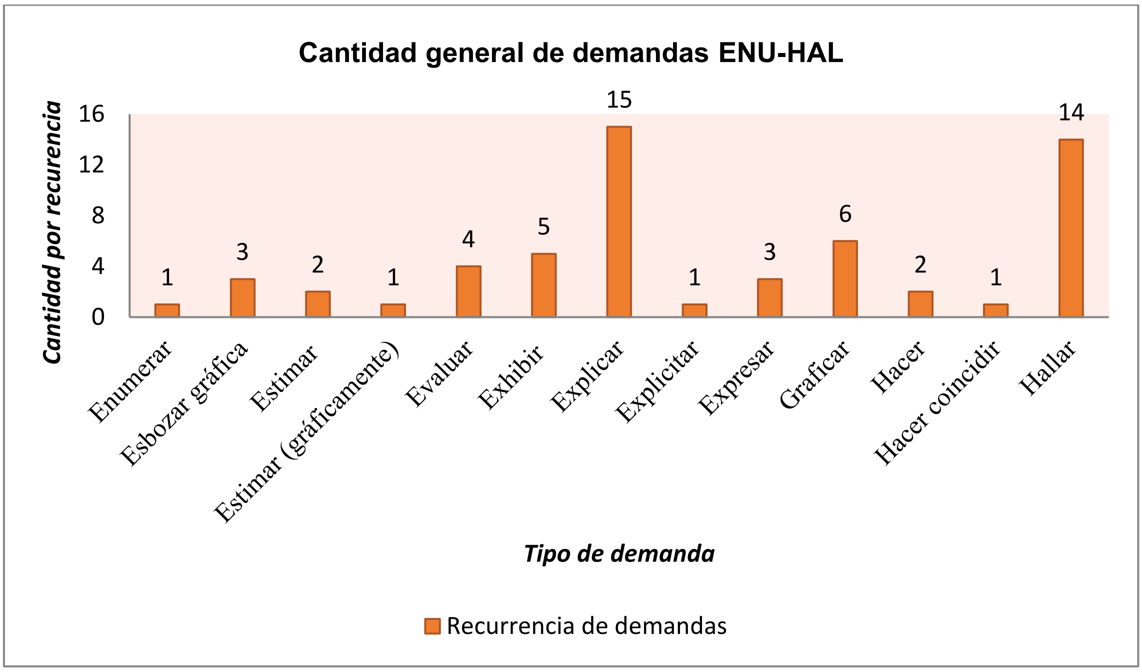


Gráfico VII
Total de muestras: 494

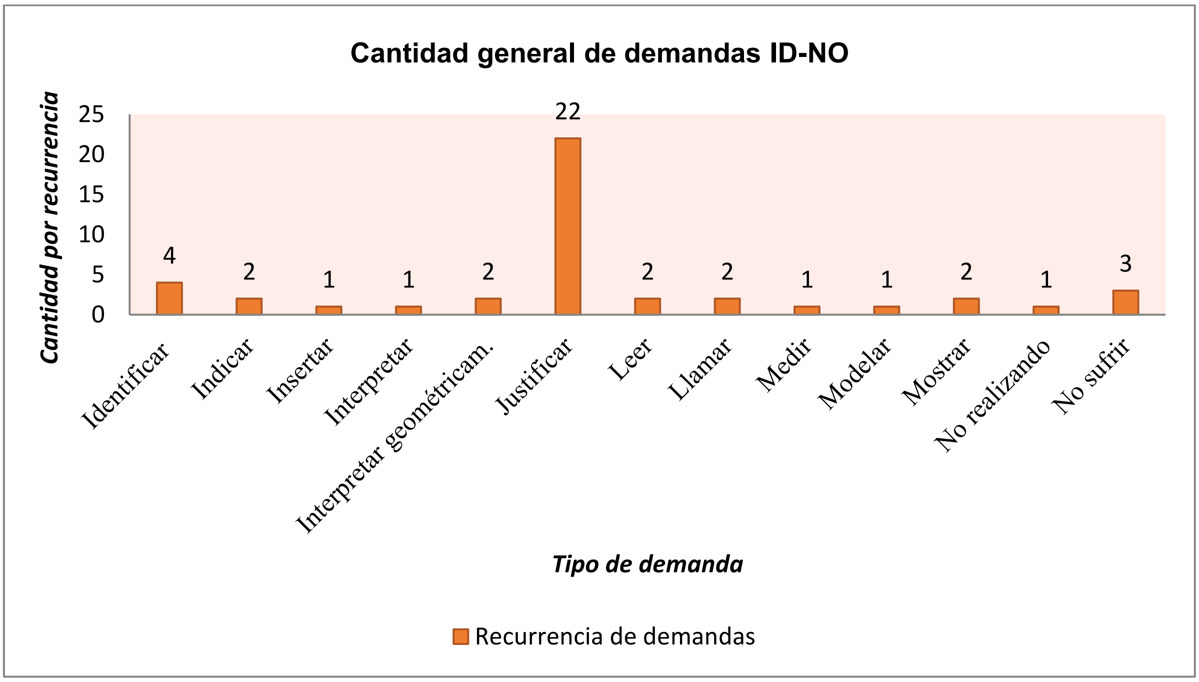


Gráfico VIII
Total de muestras: 494

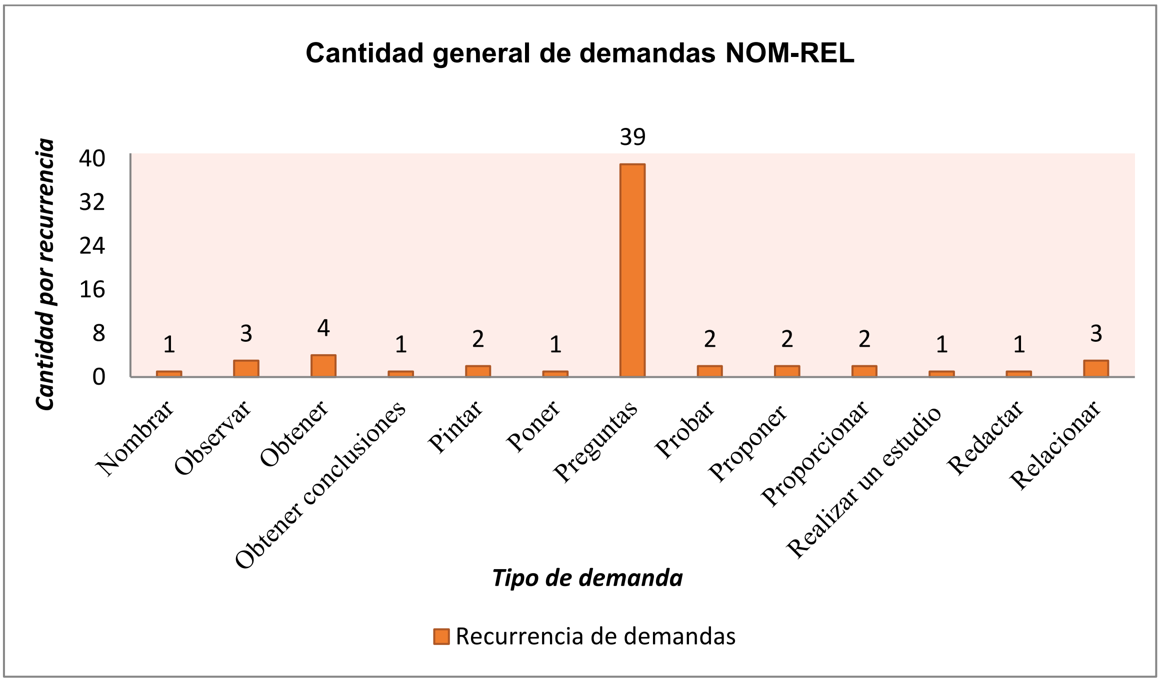


Gráfico IX
Total de muestras: 494

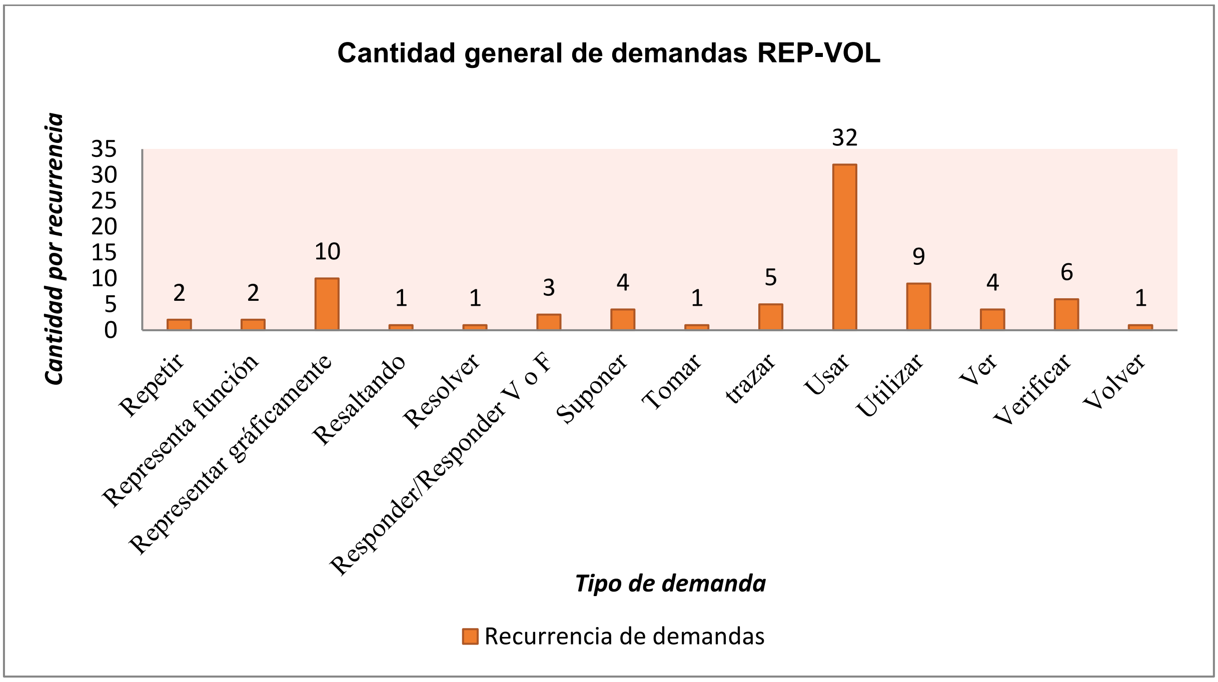


Gráfico X
Total de muestras: 494

La siguiente tabla presenta los datos de los gráficos precedentes ordenados en función de su grado de recurrencia, siendo el primero el que más veces aparece y los últimos las que menos se utilizan. Esto posibilita establecer cuáles son las operaciones cognitivas más recurrentes.

1	Encontrar	9	Calcular	17	Comparar-comprobar-decir-esbozar de manera gráfica-expresar-observar-relacionar-responder -contrastar- no sufrir
2	Demostrar-preguntas	10	Dar-aproximar-considerar-representar gráficamente	18	Completar-confirmar-dividir-estimar-hacer-indicar-leer-llamar-mostrar-pintar probar-proponer-proporcionar-repetir- representar la función-interpretar geométricamente
3	Usar	11	Utilizar	19	Clasificar-decidir-emplear-enumerar-estimar gráficamente-explicitar-hacer coincidir-insertar-medir-modelar-no realizando-nombrar-poner-pensar-realizar un estudio-redactar-resaltando-resolver-tomar-dar de manera gráfica-dibujar-dibujar de manera gráfica-volver-obtener conclusiones-interpretar.
4	Determinar	12	Desarrollar		
5	Justificar	13	Escribir		
6	Definir	14	Verificar- describir-graficar		
7	Explicar-enunciar	15	Trazar -exhibir		
8	Hallar	16	Analizar-evaluar-identificar-suponer-ver-obtener		

Tabla V

Asimismo, es posible organizar las demandas de las consignas en grupos más generales llamados macroprocesos. Como explican Navarro y Stagnaro, “Estos procesos generales corresponden a los sistemas semióticos o modos involucrados típicamente en las materias de la carrera” (2012, p. 69). La razón de estas formas diversas de organizar los datos relevados obedece a poder presentar la información haciendo foco en distintos aspectos de las demandas.

Muchos de estos procesos son, en algunos casos, sinónimos, por ejemplo, hallar y encontrar y, en otros, son diferentes en función de la especificidad del requerimiento. No obstante, pueden referir a un mismo campo general de acción, por ejemplo: graficar-trazar-esbozar de manera gráfica.

Algunos procesos no fueron incluidos en ningún macroproceso, ya que poseen una función muy particular que no es asimilable a otros. Por otra parte, como se observará, algunas demandas con igual denominación podrán aparecer en distintos macroprocesos. Esto se debe a que un mismo lexema puede implicar diferentes alcances perlocutivos.

Los macroprocesos están organizados por orden alfabético.

Macroprocesos	*Ejemplos*
Analizar e interpretar	Interpretar-escribir la interpretación-analizar-obtener conclusiones
Calcular	Encontrar-hallar-determinar-obtener (un resultado) resolver-calcular-aproximar-dar (Dar una aproximación)-confirmar resultados-realizar un estudio (completo de la función) –evaluar (analíticamente una función)
Comparar	Comparar-relacionar-contrastar
Definir	Definir-dar una definición
Argumentar	Demostrar-comprobar-verificar-probar-mostrar-justificar-ejemplificar (Proporcionar-proponer-desarrollar-exhibir-dar (un ejemplo o un ejemplo de lo contrario)
Enunciar y exhibir	Explicitar-enunciar- (enunciar un teorema) decir-expresar-escribir (un número)-responder-indicar-enumerar-dar (una fórmula, el criterio)-mostrar (dos sucesiones)-Describir
Escribir y leer	Redactar (un párrafo)-escribir (un párrafo)-leer
Graficar y dibujar	Graficar-representar gráficamente-dibujar de manera gráfica-dar de manera gráfica-esbozar de manera gráfica-representar la función -estimar gráficamente-interpretar gráficamente-pintar-trazar-dibujar-resaltar-medir-dividir-hacer coincidir la gráfica-llamar-nombrar-volver-poner-resaltar-clasificar (gráficas)
Observar e identificar	Observar-ver (la figura)-identificar
Preguntar	Diferentes preguntas

Procesos mentales	Suponer-considerar-no sufrir
Usar/instrumentalidad	Emplear-utilizar-usar-tomar-completar-insertar-repetir
Otros	• Explicar • Modelar

Tabla VI

Si bien muchas de estas demandas pueden hallarse en otras disciplinas, las aquí relevadas responden al campo específico de la matemática y de las de FICH, en particular. En este sentido, los hallazgos resultantes de la investigación pueden colaborar en la toma de decisiones más conscientes y reflexivas sobre la formulación de consignas y el impacto de estas en los procesos de aprendizajes.

Para comenzar con la primera etapa del análisis, es preciso relevar cuáles son los usos y significados de las demandas tal cual aparecen en los exámenes, en la ejercitación y en el manual. Para esto, se tomarán algunas demandas de los macroprocesos que presenten mayor grado de frecuencia, así como las que revistan cierta singularidad, ya sea en el discurso matemático o por su implicancia cognitiva.

7.3. Análisis cognitivo, matemático y semántico de los macroprocesos

7.3.3. Macroproceso: análisis e interpretación

Los procesos involucrados en el primer macroproceso, el de análisis e interpretación, no aparecen con frecuencia en el corpus estudiado. Gran parte de ellos es utilizada solo una vez aun cuando, como se verá a continuación, el impacto que promueven estas demandas en términos de aprendizaje es profundo, reflexivo y significativo (Litwin, 2000; Perkins, 2001; Rodríguez, 2017)

7.3.3.1. *Obtener conclusiones*

En el siguiente ejemplo, se solicita obtener conclusiones. Para arribar a estas últimas se precisa, previamente, realizar diferentes y variadas actividades cognitivas como comparación, relación, inferencias, síntesis, resolución de cálculos, entre otras. Esto queda corroborado por el paratexto que encabeza la consigna que es el de conjetura.

Ej. I.

74. ***Conjetura*** Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

(a) Represente gráficamente f y f' en un mismo conjunto de ejes.

(b) Represente gráficamente g y g' en un mismo conjunto de ejes.

(c) Identifique algún patrón entre f y g y sus derivadas respectivas. Use este patrón para obtener conclusiones acerca de $h'(x)$ si $h(x) = x^n$, donde n es un entero y $n \geq 2$.

(Manual. Cap. 2.1. Ejer. 74)

De acuerdo con Álvarez Alfonso et. al. (2014), la conjetura es

> el mecanismo por medio del cual se formulan afirmaciones acerca de las propiedades de determinados objetos o las relaciones que se dan entre estos, a partir de ciertas observaciones, exploraciones, ensayos o experimentos sobre dichos objetos, que permiten identificar información para plantear conjeturas a través de tales afirmaciones. (…) se considera que el conjeturar puede estructurarse a partir de las actividades de visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades, propiedades, etc.; formular, verificar, generalizar y validar conjeturas. (p. 76)

A partir de esta definición, puede observarse que la conjetura junto a la demanda de conclusión, promueven, en términos cognitivos, actividades del pensamiento ricas y profundas (Font y Godino, 2006), puesto que ponen en juego la relación de diferentes registros semióticos, generalizaciones, inducciones, deducciones, la vinculación de conocimientos teóricos y previos con casos prácticos y nuevos, entre otros.

La demanda de conclusiones aparece también a través de una pregunta: "¿Qué conclusiones pueden extraerse acerca de la comparación de los dominios de convergencia de ellas?" (Examen final. Cálculo I. 05/8). Este interrogante busca desarrollar tipos de aprendizajes profundos y reflexivos, por un lado, porque solicita extraer conclusiones y para ello, como se explicó, el estudiante debe apelar a procesos cognitivos complejos como el de inferencia y síntesis; por el otro, debido a que las conclusiones parten de un ejercicio previo cognitivamente rico como es el de la comparación. Sobre esta última se volverá más adelante.

7.3.3.2. Analizar

En la demanda de analizar, Facione (2007) indica que se busca "identificar las relaciones de inferencia reales y supuestas entre enunciados, preguntas, conceptos, descripciones u otras formas de representación que tienen el propósito de expresar creencia, juicio, experiencias, razones, información u opiniones" (p. 5). Acentuando esta idea, Arancibia Carvajal et. al. (2022) explica que, desde la matemática, analizar presupone "la capacidad de identificar información relevante y considerar las hipótesis o supuestos adecuados para resolver un problema y analizar los resultados en función de los supuestos" (p. 249). En los siguientes ejemplos se podrá observar el procedimiento del análisis en las consignas.

Ej. I.

73. Sea $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Analice la convergencia de $\{a_n\}$ y de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(Manual. Cap. 7.2. Ejer. 73)

En este caso, la demanda es el análisis de convergencia. De acuerdo con lo observado en las respuestas del manual y en otros ejemplos de los exámenes, el analizar implica varias acciones. La finalidad es enunciar si la serie es convergente o divergente. Para arribar a esa conclusión es preciso, previamente, realizar cálculos y también es necesario respaldar la respuesta a partir de teoremas. Desde un punto de vista de la enunciación, la resolución alterna diferentes registros matemáticos: verbal y simbólico-algebraico.

En términos cognitivos, el análisis aquí supone una actividad que no se circunscribe solo al cálculo, sino que parte de observar cada serie en particular, delinear una estrategia de resolución, e indicar cuál es el criterio conveniente para la determinación del carácter (convergente o divergente) de una serie. Tanto la decisión de criterios como la aplicación de un teorema exigen haber comprendido significativamente el tema, ya que un conocimiento frágil y memorístico no serviría para resolver este ejercicio.

En el ejemplo II, que se encuentra en la parte teórica de desarrollo y explicación de conceptos del manual, se muestran los pasos y acciones implicadas en el análisis de la pendiente. De manera similar al caso anterior, esta tarea conlleva varias actividades cognitivas de diferente complejidad como interpretar un gráfico y sacar conclusiones respecto de la función. Además, es preciso efectuar cálculos, aplicar teoría y realizar inferencias. Desde un punto de vista de la enunciación, también aquí la respuesta alterna diferentes registros matemáticos: verbal, gráfico y simbólico-algebraico.

Esta actividad es más compleja en términos cognitivos, dado que implica calcular, interpretar el gráfico, aplicar teoría y realizar inferencias.

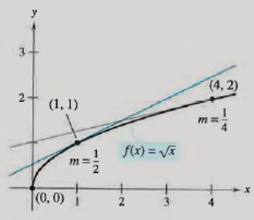
Ej. II.

Encuentre $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$. Después calcule la pendiente de la gráfica de f en los puntos (1, 1) y (4, 2). Analice el comportamiento de f en (0, 0).

Solución Use el procedimiento de racionalización del numerador, que se vio en la sección 1.6.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{Definición de derivada}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0
\end{aligned}
$$

En el punto (1, 1), la pendiente es $f'(1) = \frac{1}{2}$. En el punto (4, 2), la pendiente es $f'(4) = \frac{1}{4}$. Ver la figura 2.8. En el punto (0, 0), la pendiente es indefinida. Además, la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en (0, 0).



La pendiente de f en $(x, f(x))$, $x > 0$, es $m = 1/(2\sqrt{x})$.
Figura 2.8

Indica que en el sistema en línea Eduspace® para este libro, encontrará una exploración abierta, que además explora este ejemplo utilizando CAS Maple, Mathcad, Mathematica, *y* Derive.

(Manual. Cap. 2.1. Ejemplo 4)

7.3.3.3. Interpretar

La demanda de interpretación matemática es una actividad cognitiva potente que contribuye con el desarrollo del pensamiento crítico y que implica atribuir “a las expresiones iniciales del cálculo de modo que todas las expresiones estructuradas del cálculo adquieran sentido (significación y sentido, nombre, semántica lógica)" (Pantoja y Zúñiga, 2006, p. 253, como se citó en Arancibia Carvajal et. al., 2022, p. 247). En la siguiente muestra, se verán algunos ejemplos de interpretación y sus sentidos.

Ej. I.

5) Enunciar el Teorema del Valor Medio para Integrales e interpretar geométricamente. (*Sólo exponer un gráfico no alcanza... debe escribir su interpretación*)

(Examen final. Cálculo I. 18/2/19).

Esta demanda aparece principalmente asociada a la interpretación de gráficos. Por un lado, se encuentra la interpretación geométrica que es su representación gráfica, y por el otro, la interpretación que implica ampliar los alcances del teorema en otros registros matemáticos, por ejemplo, el verbal.

Asimismo, se solicita que se escriba la interpretación. Para comprender esta orden es indispensable contextualizar el ejercicio. Estas consignas forman parte de las evaluaciones de la asignatura y, de acuerdo con aportes de los docentes de la cátedra, cuando se solicitaba solamente la interpretación gráfica, los estudiantes realizaban el gráfico y con ello finalizaba la interpretación. Esta última también exige que deba expresarse analíticamente el significado del gráfico. Por ello, con la finalidad de andamiar mejor la consigna, los docentes incluyen esta aclaración para explicitar qué se espera por parte de los estudiantes cuando se pide "interpretar".

En otras situaciones, la interpretación geométrica sola no alcanza, puesto que no ofrece toda la información, por lo tanto, es preciso reponer lo que se encuentra ausente a través de otros registros semióticos, como, por ejemplo, una explicación verbal. Un caso sería (que no es el que aparece en el corpus relevado) que se deba interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto. Aquí el estudiante graficará una función y su recta tangente en un punto. Sin embargo, en el gráfico no queda expresado que la derivada no es la recta, sino su pendiente. El problema radica en que lo que grafica es la recta, ya que la pendiente no tiene gráfica. Esto último requiere de otro tipo de interpretación, además de la gráfica.

7.3.4. Macroproceso: Calcular

Calcular, junto con graficar y dibujar, es el que contiene la mayor cantidad de procesos diferentes en un mismo macroproceso.

Calcular engloba una variedad de demandas que no son similares en lo que solicitan, como tampoco en el tipo de desafío cognitivo propuesto. Sin embargo, gran parte de ellas comparte un sustrato común que es realizar procedimientos matemáticos a partir de una serie de razonamientos y pasos que buscan arribar a un resultado. Para ello, se llevan a cabo distintas operaciones, se busca alcanzar valores a partir de la aplicación de fórmulas y desarrollos de teoremas, entre otros.

7.3.4.1. Calcular

En los siguientes ejemplos se aprecian algunos rasgos comunes a la acción específica de calcular. En ambos se busca arribar a un resultado a partir de la aplicación de determinadas fórmulas y procedimientos. Sin embargo, en el ejemplo I, por caso, la idea es calcular, pero luego de un proceso de "traducción" del lenguaje natural al matemático. En el segundo, se refiere a un cálculo dentro de la disciplina misma, es decir, hallar la derivada aplicando la definición en un único proceso.

Ej. I.

"Calcular la longitud de la escalera más corta que se pueda desplegar desde una pared vertical, sobre una valla de 2 m de altura situada…" (Examen final. Cálculo I. 18/2)

Ej. II.

Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de

$$f(x) = x^2 + 1$$

en los puntos (0, 1) y (−1, 2), como se muestra en la figura 2.6.

Solución Sea $(c, f(c))$ un punto arbitrario de la gráfica de f. Entonces la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$ está dada por

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(c+\Delta x)^2+1]-(c^2+1)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c^2+2c(\Delta x)+(\Delta x)^2+1-c^2-1}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2c(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}(2c+\Delta x)\\
&= 2c.
\end{aligned}$$

(Manual. Cap. 2.1. Ejemplo 2)

7.3.4.2. Encontrar-hallar-obtener

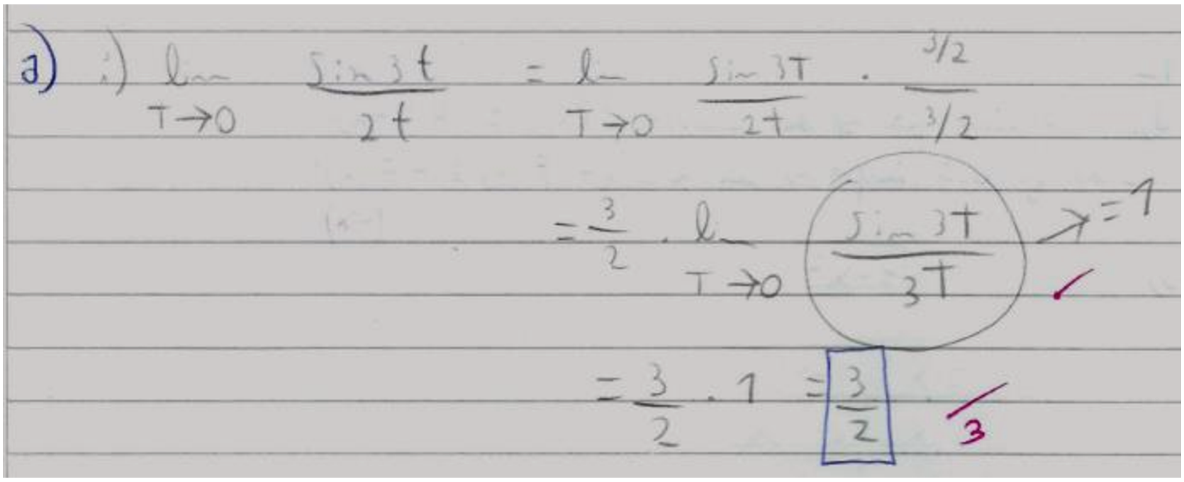
Estas demandas pueden funcionar como sinónimos. En todos los casos se busca alcanzar un resultado desde ciertos procedimientos y aplicación de fórmulas. Son otras maneras de enunciar el cálculo.

En el ejemplo siguiente, se solicita determinar los valores de “a” y “b” para los cuales la función dada tendrá el atributo de resultar continua. En este sentido, encontrar puede actuar como sinónimo de determinar.

Ej. I.

“Encuentre los valores de a y b tal que la función sea continua en toda la recta real”. (Examen parcial. Matemática básica. 14/06)

Esto queda corroborado con la respuesta que presenta un estudiante:



$$\text{a) i) } \lim_{T\to 0} \frac{\sin 3t}{2t} = \lim_{T\to 0} \frac{\sin 3T}{2t} \cdot \frac{3/2}{3/2}$$

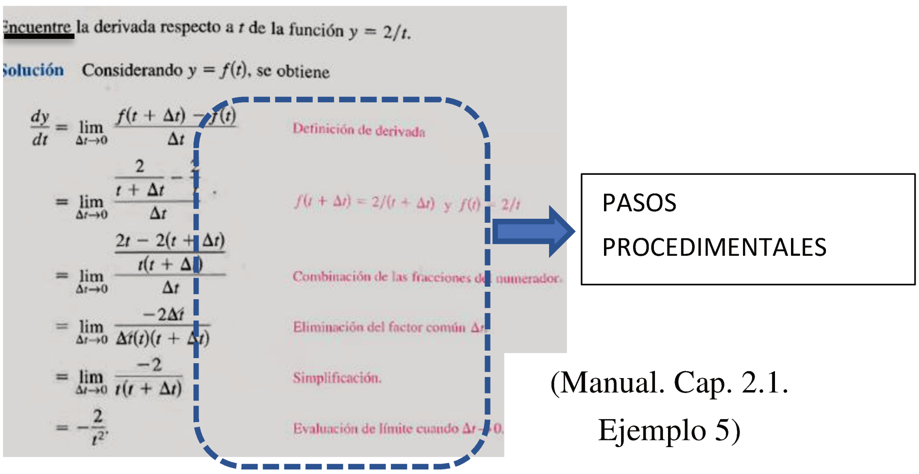
$$= \frac{3}{2} \cdot \lim_{T\to 0} \frac{\sin 3T}{3T} \rightarrow = 1$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

3

En el ejemplo II, extraído del manual, se muestra el desarrollo de lo que significa la acción de encontrar. Se parte de una definición y, luego de varios pasos procedimentales, se alcanza el valor buscado en el ejercicio. El modelo de pasos ofrecido en el texto coincide con la metodología empleada en la respuesta del estudiante y busca, además, que se justifique detalladamente.

Ej. II.



Encuentre la derivada respecto a t de la función $y = 2/t$.

Solución Considerando $y = f(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} && \text{Definición de derivada} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\frac{2}{t+\Delta t} - \frac{2}{t}}{\Delta t} && f(t+\Delta t) = 2/(t+\Delta t) \text{ y } f(t) = 2/t \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\frac{2t - 2(t+\Delta t)}{t(t+\Delta t)}}{\Delta t} && \text{Combinación de las fracciones del numerador.} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{-2\Delta t}{\Delta t(t)(t+\Delta t)} && \text{Eliminación del factor común } \Delta t \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{-2}{t(t+\Delta t)} && \text{Simplificación.} \\
&= -\frac{2}{t^2}. && \text{Evaluación de límite cuando } \Delta t \to 0.
\end{aligned}$$

(Manual. Cap. 2.1.
Ejemplo 5)

En el caso de hallar, se utiliza como sinónimo de encontrar:

Ej. III.

"Hallar la ecuación de la recta tangente T a g(x) en el punto R(0, 1) (Examen final. Cálculo I. 9/9).

Otra demanda relacionada con el cálculo es "obtener": "Obtenga la derivada":

Ej. IV.

En los ejercicios 11–18, obtenga la derivada por medio del proceso de límite.

11. $f(x) = 3$ **12.** $f(x) = 3x + 2$

(Manual. Cap. 2.1. Ejer.11-18)

Obtener implica alcanzar un resultado o valor, en este caso la derivada, previo cálculos y procedimientos matemáticos.

7.3.4.3. Determinar

En el corpus relevado, una de las demandas relacionadas con el cálculo que aparece con mayor frecuencia es determinar. En gran parte de los casos, la determinación es buscar, alcanzar un valor-resultado a través de procedimientos matemáticos específicos. Estos últimos pueden variar de acuerdo con el tema disicplinar abordado, sin embargo, el sentido perlocutivo de la demanda permanece.

En otras situaciones, el significado de la determinación puede cambiar si esta precede una cláusula condicional o cuando se solicita determinar el carácter. En estos contextos, la determinación se asocia con la noción de establecer o decidir. Desde una perspectiva cognitiva, la demanda se centra más en aspectos conceptuales-teóricos que en el cálculo propiamente dicho.

En la siguiente consigna se pueden observar dos demandas iguales, aunque con significados perlocutivos-matemáticos diferentes. La primera, determinar el carácter, implica enunciar el carácter de las integrales, es decir, si son convergentes o divergentes. Hace referencia a una cuestión más cualitativa del concepto. Para determinar el carácter se utilizan criterios y se despliegan procedimientos matemáticos. Esto podría relacionarse con una de las excepciones del término “determinar” que aparece en el Diccionario de la RAE: “Señalar o indicar algo con claridad o exactitud” (Real Academia Española, s.f., definición 4).

La segunda, determinar el valor, es la acción propiamente dicha de cálculo, en otras palabras, calcular cuánto vale la integral.

Ej. I.

"Determinar el carácter de cada una de las siguientes integrales. En caso de convergencia, determinar el valor de la integral. Justificar detalladamente" (Examen final. Cálculo I. 8/4)

5.1.1) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ (*) 5.1.2) $\int_0^\infty \frac{sen\,x}{e^x}dx$

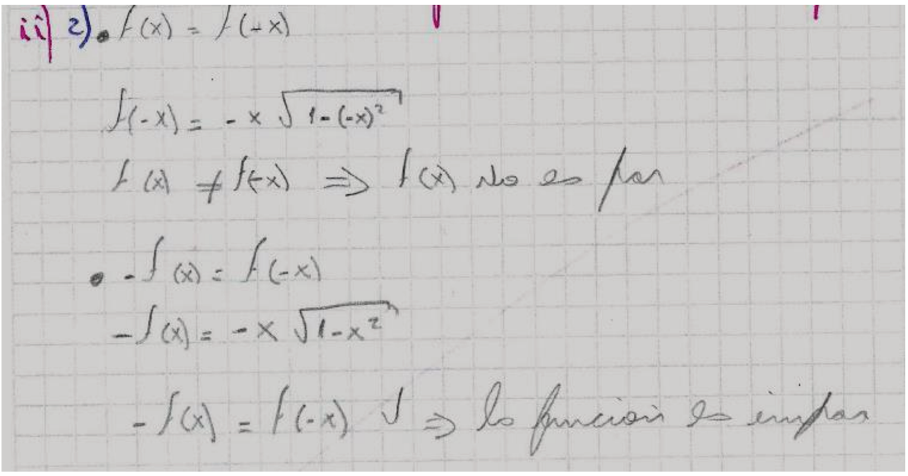
Otro caso, emparentado con la determinación del carácter, es cuando la demanda precede una cláusula condicional:

Ej. II.

"b) Considere la función: $x\sqrt{1-x^2}$.

ii) "Determine si la función es par, impar o ninguna" (Examen parcial. Matemática básica. 14/6)

La RAE propone otra acepción del término "determinar", además del indicado anteriormente: "Decidir algo, despejar la incertidumbre sobre ello" (Real Academia Española, s.f., definición 1). Estas dos acepciones contribuyen con la precisión del sentido perlocutivo de esta demanda ya que, previo desarrollo de un procedimiento matemático, el estudiante debe decidir cuál de las tres opciones es la correcta, o sea, establecer si la función posee o no esa cualidad o atributo. La introducción de la cláusula condicional contribuye a otorgarle a la demanda un matiz vinculado a la acción de toma de decisiones por parte del estudiante. Desde una perspectiva del aprendizaje, este tipo de determinación plantea un desafío cognitivo mayor al de la determinación solo como cálculo. A continuación, se observa la respuesta de un estudiante a esta demanda:



ii) 2) • $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = -x\sqrt{1-(-x)^2}$

$f(x) \neq f(-x) \Rightarrow f(x)$ no es par

• $-f(x) = f(-x)$

$-f(x) = -x\sqrt{1-x^2}$

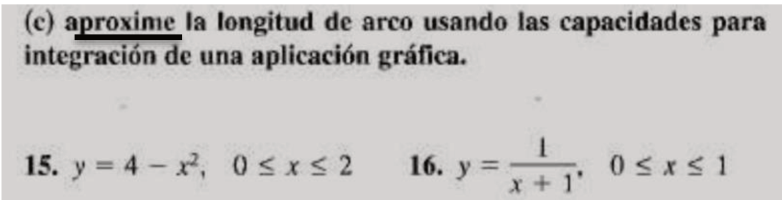
$-f(x) = f(-x)$ ✓ $\Rightarrow$ la función es impar

7.3.4.4. *Aproximar*

Si bien en la base de la aproximación se encuentra el cálculo, esta demanda es central para resolver los temas matemáticos desarrollados en la unidad 5.4 del manual: "longitud de arco y superficie de revolución". Es una operación de cálculo que busca obtener un valor aproximado de la longitud de una curva. Como su palabra lo indica, se procura un resultado próximo al exacto, por medio de diferentes procedimientos y cálculos.

En la siguiente consigna se puede observar esta demanda que se reitera en otros ejercicios de la unidad.

Ej. I.

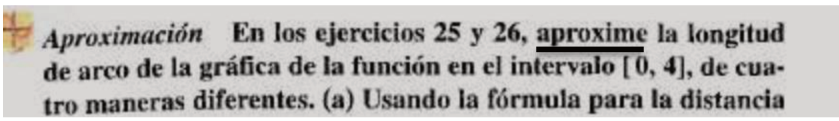


(c) aproxime la longitud de arco usando las capacidades para integración de una aplicación gráfica.

15. $y = 4 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$ **16.** $y = \frac{1}{x+1}, \quad 0 \leq x \leq 1$

(Manual. Cap. 5.4. Ejer.15-22)

Ej. II.



Aproximación **En los ejercicios 25 y 26, aproxime la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo [0, 4], de cuatro maneras diferentes. (a) Usando la fórmula para la distancia**

(Manual. Cap. 5.4. Ejer.25-26)

En este ejercicio se puede apreciar la aproximación como el resultado de diferentes operaciones. Se intenta determinar una longitud lo más exacta posible desde cuatro maneras viables.

7.3.5. Macroproceso: Comparar

Este tercer macroproceso está vinculado con la actividad general de la comparación. Como es sabido, la comparación es una operación lógica del pensamiento que consiste en la confrontación de objetos, hechos o fenómenos con el propósito de reconocer sus diferencias y semejanzas y descubrir sus relaciones. La comparación, relación y la contrastación forman parte de este macroproceso.

Desde un punto de vista cognitivo, estas demandas promueven en el aula, según Litwin (2016), un conocimiento valioso. La autora lo denomina conocimiento relacional y explica que "se trata de establecer relaciones: para ello identificamos temas y conceptos y los relacionamos entre sí. El reconocimiento de relaciones con sentido dará cuenta de que lo nuevo aprendido no queda aislado ni se pierde" (p. 52). Respecto de la operación específica de la comparación establece que "la comprensión se enriquece si somos capaces de comparar un fenómeno con otro, establecer analogías y construir metáforas. Favorecer la comprensión en aquellos casos en los que estas actividades despliegan nuevos y poderosos procesos reflexivos" (2016, p. 53). No obstante, la frecuencia de estas demandas en el corpus analizado es escasa; solo tres veces aparece cada una de ellas.

7.3.5.1. Comparar

En el siguiente ejemplo se solicita comparar el resultado del cálculo con una conclusión obtenida en un ejercicio anterior. En primer lugar, la comparación opera como un elemento cognitivo que otorga coherencia y cohesión a todo el ejercicio. Si bien son actividades diferentes dentro de una consigna de estructura compleja, cada uno de los ítems, aunque piden distintas tareas matemáticas, se integran y se relacionan a partir de esta operación cognitiva principal. En segundo lugar, el nivel de comparación es más complejo, ya que no solo se debe cotejar ítems de un mismo ejercicio, sino entre un resultado y una conclusión previa.

Ej. I.

"(c) Identifique algún patrón entre f y g y sus derivadas respectivas. Use ese patrón para obtener conclusiones acerca de *h´(x)* si $h(x)=x^n$, donde *n* es un número entero y $n \geq 2$.

(d) Obtenga $f^{'}(x)$ si $f(x) = x^{4}$. Compare el resultado con la conclusión obtenida en el inciso (c)" (Manual. Cap. 2.1. Ejer.74)

En el segundo ejemplo, la comparación de dominios (o los intervalos de integración) permitirá que el estudiante pueda realizar inferencias o abstracciones para reinvertir en casos más generales. Se plantea también un ejercicio comparativo entre diferentes ítems de una consigna de estructura compleja, aunque en este caso la comparación se manifiesta entre dos aspectos diferentes del mismo tema matemático.

Ej. II.

"(b) Dé una integral definida para hallar la longitud del arco en el primer cuadrante de la gráfica del inciso (a)

(c) Compare el intervalo de integración del inciso (b) con el dominio del integrando" (Manual. Cap. 5.4. Ejer.52).

En síntesis, la comparación presupone demandas y operaciones cognitivas más potentes que implican abstracción, inferencia, conclusión, resolución de un cálculo y comparación de resultados con una conclusión previa.

7.3.5.2. Contrastar

En el siguiente caso se presenta el sexto ítem de una consigna de estructura compleja. Al igual que fue explicado en el ejemplo anterior, se propone un ejercicio que posea coherencia interna y que los diferentes incisos se relacionen y se integren entre sí. En esta consigna, el objetivo se pretende alcanzar por medio del contraste, otra operación relacionada con la comparación. Sin embargo, esta última refiere al contraste entre métodos para calcular derivadas e integrales. Se solicita usar serie de potencias, otra manera de resolver las derivadas e integrales a las aprendidas en la asignatura matemática básica. Así, la demanda apunta a que el estudiante chequee que los resultados alcanzados con este nuevo método no contradigan los obtenidos con los métodos tradicionales.

Ej. I.

"Dada la función $f\ (x) = In(2 + \mathrm{x})$, se pide:

a) Encontrar un desarrollo en series de Taylor alrededor de c=2.
b) Encontrar el radio R de convergencia y el dominio de convergencia, que

incluya, de ser necesario, el análisis de convergencia en fronteras.

c) Encontrar la serie derivada de la hallada el apartado anterior, con su radio y dominio de convergencia correspondientes.

d) Encontrar la suma de la serie derivada.

e) Encontrar un desarrollo en series de Taylor para la función $f'(x)$ alrededor de c=2.

f) <u>Contrastar</u> coherencia de sus resultados" (Examen final. Cálculo I. 18/2).

7.3.5.3. Relacionar

En el siguiente ejercicio se solicita describir la relación entre las diferentes gráficas de dos funciones, esto es, comparar y luego describir lo que se observa. Es preciso aclarar que la f es la función a fin a a_n.

Ej. I.

"Clasifique las gráficas y describa la <u>relación</u> entre ellas" (Manual. Cap. 2.1. Ejer.49-50)

En este segundo ejemplo, se formula la demanda por medio de una pregunta. Se pide enunciar cuál es la relación que existe entre esos dos tipos de convergencias. Esta consigna forma parte del cuestionario teórico del examen y, a diferencia de otras demandas más reproductivas como enunciar, enumerar o definir propias de las consignas teóricas, aquí se solicita una actividad cognitiva que implica poner en relación conceptos.

Ej. II.

"¿Qué <u>relación</u> existe entre la convergencia en el infinito de $f(x)$ y la convergencia secuencial de $\{a_n\}$?" (Examen final. Cálculo I. 25/2).

7.3.6. Macroproceso: Definir

Este cuarto macroproceso incluye a la definición. Las definiciones son solicitadas mayormente en consignas de carácter teórico.

Desde una perspectiva cognitiva, se constituyen como demandas que apelan a un conocimiento reproductivo-memorístico y no presentan desafíos cognitivos profundos. No obstante, como fue explicitado, las definiciones forman parte indisoluble del conocimiento académico y, dada la precisión conceptual y lingüística con la que se construyen, muchas de ellas producto de varios siglos de elaboración, no pueden parafrasearse o enunciarse con las palabras de los estudiantes. Esta es la razón por la cual la memoria y la reproducción se hacen necesarias en este tipo de discursos. Sin embargo, las consignas teóricas alternan diferentes demandas, desde las más reproductivas a las más reflexivas.

Según Jorba et.al. (2000), la definición expresa "las características necesarias y suficientes para que el concepto no se pueda confundir con otro, con la ayuda de otros términos que se suponen conocidos" (p. 36). De acuerdo con este mismo autor, la definición forma parte de lo que él denomina habilidades cognitivo-lingüísticas. Estas últimas son habilidades básicas relacionadas con las tipologías textuales que, a su vez, son la realización lingüística de las habilidades cognitivas que son la base de los aprendizajes. La relación entre una y otra habilidad es recíproca:

> Las habilidades cognitivas, que están en la base del aprendizaje, posibilitan y se concretan en las habilidades cognitivo-lingüística que determinan, según las diversas maneras de usarlas, diferentes maneras de aprender los contenidos de las áreas curriculares. Por otro lado, la adquisición de los contenidos de las áreas curriculares desarrolla las habilidades cognitivo-lingüísticas que, a su vez, desarrollan las habilidades cognitivas. (Jorba et.al. 2000, p. 31)

Estas habilidades cognitivo-lingüísticas básicas son, además de la definición, la descripción, el resumen, la explicación, la justificación, la argumentación y la demostración. A los efectos de este trabajo se tomarán como soporte para el análisis, la descripción, la explicación, la justificación y la demostración. Debido a que el libro de Jorba et.al. fue elaborado principalmente centrado en el área de lengua, se realizarán aportes especiales vinculados con el discurso matemático.

Algunos ejemplos de demandas con definiciones:

Ej. I.

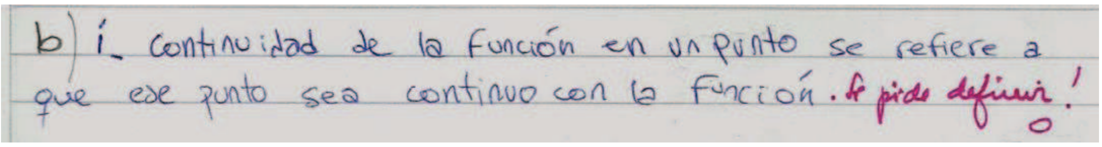
"2) i) <u>Defina</u> continuidad de una función en un punto.

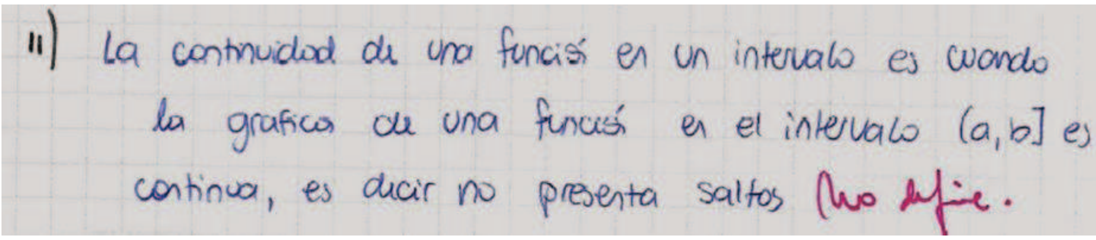
ii) <u>Defina</u> continuidad de una función en un intervalo (a.b]" (Examen parcial. Matemática básica. 14/6).

Ej. II.

"d) <u>Definir</u>, en términos de entornos, sucesión convergente de números reales." (Actividad 3. Cálculo I.).

Las consignas que exigen definiciones son las que más errores conllevan en la resolución por parte de los estudiantes. A continuación, se presentan dos respuestas a las consignas del ejemplo I.



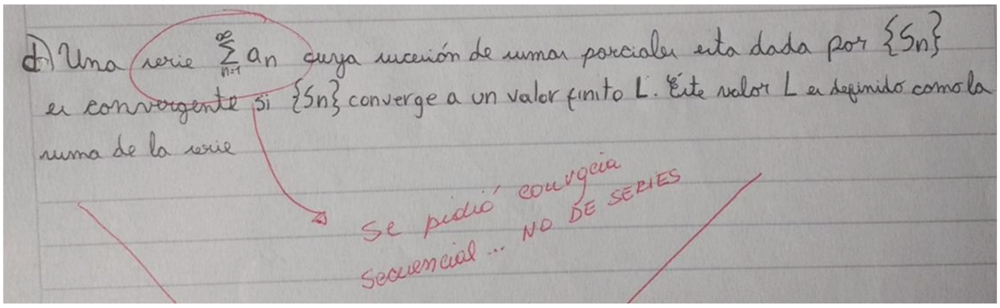


En ambos casos, la observación del docente marca que las respuestas no se adaptan a las formas académicas de formular la definición. Además, que los modos genéricos de definir no son adecuados, se suman algunas imprecisiones conceptuales, como en la segunda respuesta del estudiante. En esta última, se coloca que la gráfica es continua en el intervalo cuando solo es continua y, también, para aludir al concepto de continuidad se apela a una observación gráfica: "no presenta saltos". Una definición persigue cierto grado de generalización más allá de los casos particulares, y una respuesta que remite, como en esta situación, a los saltos, necesita de una gráfica, la cual no es relevante para este tipo de demanda.

Las definiciones presuponen ciertas estructuras lingüísticas y lógicas que no pueden reemplazarse ni parafrasearse, particularmente en áreas como la matemática que pertenecen a las ciencias "exactas". En este sentido, se define por el ejemplo, se emplean diferentes clases de verbos y colocaciones que no son propias de una definición. "La continuidad de una función en un intervalo <u>es cuando</u>" es incorrecta, ya que el nexo relacionante "cuando" introduce un ejemplo o apela a un caso particular. Por el contrario, las definiciones tienden a la generalización y a la abstracción.

En el primer caso, se observa una definición casi tautológica en la cual se iteran los conceptos: "Continuidad-continuo"; "En un punto-en ese punto"; "Función". La repetición de los términos atenta contra el objetivo que persigue una definición que es la claridad y la precisión. A esto se le suma la inadecuación de la forma impersonal “se refiere” para definir lo solicitado.

La respuesta de un estudiante a la consigna del ejemplo II, fue la siguiente:



En este caso, el problema que se presenta no se debe a la enunciación de la definición, sino a la precisión conceptual. De acuerdo con la observación del docente, el estudiante define convergencia de series y no convergencia secuencial. Este tipo de errores conceptuales son también muy frecuentes en las respuestas.

7.3.7. Macroproceso: Argumentar

La argumentación matemática presenta algunas particularidades que es necesario precisar.

A lo largo de la historia, el desarrollo de la noción de argumentar estuvo más asociado con la retórica y con las áreas humanísticas y sociales del conocimiento. Desde esta perspectiva, la argumentación es una función del lenguaje vinculada con la persuasión y el convencimiento de ciertas opiniones o pensamientos. El alocutario o receptor toma un rol fundamental, ya que la construcción de la estructura argumentativa está destinada para él. Según Calsamiglia y Tusón (1999):

> Se argumenta, en fin, en cualquier situación en la que se quiere *convencer* o *persuadir* de algo a una audiencia, ya esté formada por una única persona o por toda una colectividad.
>
> En un sentido amplio, la argumentación es una práctica discursiva que responde a una función comunicativa: la que se orienta hacia el receptor para

> lograr su adhesión. (…) Según la propuesta de Jakobson (1981), correspondería a la función apelativa o conativa. (p. 294).

Si bien la argumentación en matemática guarda algunos puntos de contacto con la definición precedente, presenta características que le son propias.

El discurso matemático se constituye de manera diferente a otros discursos. La matemática prescinde del contexto extra-matemático para construir su propio universo semiótico (O´Halloran, 2005; Mangui, 2009), en el cual la persuasión sobre la verdad de una afirmación no necesita de estrategias retóricas que busquen convencer a un alocutario, sino que es el propio discurso matemático el que busca legitimarse y persuadirse a sí mismo sobre la verdad, falsedad o adecuación de diferentes proposiciones a través de leyes, teoremas y propiedades. Tal como sostienen Zamudio y Atorresi (2000), el discurso demostrativo mantiene una independencia contextual. La argumentación matemática sería, entonces, autorreferencial y se autolegitima por medio de su propio discurso.

Expresan Zamudio y Atorresi (2000): “Las categorías, por otra parte, aparecen por lo general universalmente cuantificadas: ‘todos los hombres son mortales’, ‘todo punto exterior a una recta’. Este desembrague de la situación de enunciación hace de la demostración un discurso ‘cerrado’, que se autoabastece semántica y sintácticamente. (p. 33)

Es de destacar que la interpretación de la noción de argumentación en matemática no es uniforme entre los diferentes autores que la abordan (Calsamiglia y Tusón, 1999; Crespo, 2005; Álvarez Alfonso et. al., 2014; Toulmin, 2003; Duval, 2004).

Calsamiglia y Tusón (1999) distinguen entre argumentación y demostración. La primera se podría asociar a la noción de argumentación que busca persuadir de una verdad a un alocutario, mientras que la segunda sería la argumentación matemática.

Según las autoras, la argumentación “se dirige a un auditorio, se expresa en lengua natural, las premisas son probables, verosímiles en relación con un sistema de valores, su progresión depende del orador y las conclusiones son siempre discutibles”. La demostración, en cambio, “tiene valor en sí misma, se expresa en lenguaje formal, las premisas son verdaderas o falsas, su progresión depende de mecanismos internos y las conclusiones son verdaderas o falsas” (Calsamiglia y Tusón, 1999, p. 295).

Crespo (2005) rastrea el concepto de argumentación en diferentes autores, entre ellos a Duval, y explica que

> utilizan el término *demostración* para referirse de modo genérico al objeto emergente del sistema de *prácticas argumentativas* (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, o sea situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción. (p. 25)

Por su parte, Álvarez Alfonso et. al. (2014) sostiene que,

> El proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo, o en los que se quiere garantizar la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones. Argumentar, es decir, el proceso de generar argumentos tiene un carácter social y cobra sentido cuando hay la necesidad de garantizar la validez de alguna afirmación hecha. (p. 82)

Si bien las definiciones precedentes presentan distinciones y nombres diferentes, todas aportan elementos que contribuyen con la conformación de un campo más amplio que podría denominarse, como sostiene Crespo (2005), prácticas argumentativas matemáticas. Sobre la base de estas últimas se constituye el macroproceso de argumentar con sus respectivos procesos.

7.3.7.1. Demostrar

Esta demanda es una de las más frecuentes en el discurso matemático en general y en el corpus analizado, en particular. "Demostrar" es la que más aparece después de "encontrar". A esto se le suman sus otras formas como probar, comprobar, etc.

Según Zamudio y Atorresi, "Demostrar es seguir un razonamiento que conduce a poner en evidencia la certeza de una afirmación (…) o de enunciados precedentemente demostrados a partir de reglas establecidas. (…) la demostración siempre busca probar algo que se tiene por verdadero" (2000, p. 32). Probar o demostrar es remitirse a propiedades universales (ley, teorema, propiedad, lema, etc.) que buscan mostrar la veracidad de una tesis a través de la deducción. En el proceso de la demostración se utilizan razonamientos y pasos bien estructurados y establecidos que conducen a la verdad matemática que se intenta probar. Tal como lo expresa Duval et.al. (2016) "'demostración' (apodeixis) como una secuencia de enunciados organizados de acuerdo con reglas específicas" (p. 109).

La demostración es una actividad compleja que exige procesos cognitivos de abstracción y que requiere para su resolución trabajar con entidades simbólicas en un contexto intramatemático particular. Este forma parte de un significado dentro de un campo experiencial restringido (O´Halloran, 2005).

Este tipo de demandas, al igual que otras halladas en el corpus analizado, puede generar dificultades en los estudiantes. O' Halloran explica que "Halliday (1993b: 69-85) describe las dificultades en el lenguaje científico y matemático que incluyen definiciones entrelazadas, taxonomías técnicas, expresiones especiales, densidad léxica, ambigüedad sintáctica, metáforas gramaticales y discontinuidad semántica" (2005, p. 78). La autora aclara también que estos fenómenos surgieron con el origen de la matemática moderna: "La gramática de la matemática simbólica y moderna creció directamente por fuera de la léxico-gramática del lenguaje natural y esto podría explicar el alto nivel de integración de formas simbólicas y lingüísticas en el texto matemático" (2000, p. 362). Por su parte, Mangui expresa que

> en la descripción de patrones se excluyen procesos humanos relacionados con lo sensorial, con el comportamiento y el con hablar (sensing, behavioural, verbal), los participantes simbólicos se convierten en números y variables cuya función es representar, descartando las entidades específicas o grupos representados por elecciones léxicas del lenguaje. (2009, p. 56)

A continuación, se presentan dos ejemplos de la demanda "demostrar". Respecto del ejemplo I, además de la demostración se solicita enunciar la propiedad. Este tipo de actividades, en el marco de un examen, busca evaluar el estudio y el conocimiento del alumno.

Ej. I.

“6) Enunciar y demostrar la propiedad que explicita la forma de una serie de Taylor convergente” (Examen final. Cálculo I. 4/2).

Ej. II.

77. Sea $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Demuestre que en $x = 0$, f es continua, pero no derivable.

Demuestre que g es derivable en 0 y encuentre $g'(0)$.

(Manual. Cap. 2.1. Ejer.77)

7.3.7.2. Verificar

La verificación suele tener sentidos diferentes, sin embargo, en gran parte del corpus estudiado, se relaciona principalmente con la demostración, con la convicción de enunciados matemáticos o como medio de evidencia para despejar dudas.

Según Álvarez Alfonso et. al. (2014), la verificación,

> tiene como objetivo que la persona se convenza e intente convencer a otros de que tal afirmación tiene una alta probabilidad de ser verdadera en el contexto estudiado, en cuyo caso debe buscar, en la medida de las posibilidades, validar la conjetura formulada. (p. 79)

En el ejercicio I se puede observar la verificación como demostración: se solicita revisar si esas series están cumpliendo con los requisitos para diverger o no.

Ej. I.

En los ejercicios 7–14, verifique que la serie infinita diverge.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} 1000(1.055)^n$ 8. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

(Manual. Cap. 7.2. Ejer.7-14)

No obstante, en algunos casos el significado o el alcance perlocutivo de la verificación no es el mismo:

Ej. II.

(c) Verifique la respuesta del inciso (b) aproximando cada longitud de arco con una exactitud de tres posiciones decimales.

(Manual. Cap. 7.2. Ejer.7-14)

En este ejemplo, la verificación se asocia a la idea de control, constatación o determinación de inconsistencias entre los resultados a partir de un cálculo.

7.3.7.3. Justificar

La justificación es una de las demandas más frecuentes en el discurso matemático y se emparenta con actividades cognitivas que buscan hacer explícito el sustento teórico, la base conceptual sobre la cual se apoya la resolución del ejercicio propuesto. En ese sentido, tendría cierto grado de cercanía con la demostración, aunque la justificación en matemáticas implica enunciar qué herramienta teórica, es decir, ley, propiedad, teorema, etc., se utilizará para explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema.

A diferencia de la demostración, en la justificación los razonamientos o "argumentos" no son sometidos a un examen de aceptabilidad o validez, como sí en la demostración, sino que deben ser pertinentes. De acuerdo con Jorba et.al. (2000), quien recupera a Duval, la justificación es "producir razones o argumentos, establecer relaciones entre ellos y examinar su aceptabilidad" (p. 39). Los criterios de aceptabilidad, según Duval y Jorba et.al., son la pertinencia y la fuerza de los argumentos (razonamientos, leyes, propiedades, etc.).

En el siguiente ejemplo se debe indicar de qué modo o con qué instrumento teórico-conceptual se determinó el carácter de las integrales.

Ej. I.

"5.1) Determinar el carácter de cada una de las siguientes integrales. En caso de convergencia, determinar el valor de la integral. Justificar detalladamente" (Examen final. Cálculo I. 08/4).

5.1.1) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ (*) 5.1.2) $\int_0^\infty \frac{sen\,x}{e^x}dx$

En el ejemplo II, la justificación opera como respaldo conceptual y argumentativo, ya que la respuesta por sí o no, no es suficiente.

Ej. II.

"2.c.ii) Con los valores hallados en i) ¿es cierto que la función es derivable en todo punto? Justifique" (Examen parcial. Matemática básica. 14/6).

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -1 \\ ax + b & -1 < x < 3 \\ -2 & x \geq 3 \end{cases}$$

7.3.7.4. Ejemplificar

La ejemplificación es una estrategia textual y cognitiva muy utilizada en la enseñanza de diferentes disciplinas. Se emplea en textos y géneros diversos, aunque en el caso de la universidad, aparece con más frecuencia en aquellos con función explicativa o argumentativa. En estos la ejemplificación suele cumplir roles diferentes; mientras que en la explicación "es un procedimiento que concreta una formulación general o abstracta poniéndola en el escenario de una experiencia más próxima al interlocutor" (Calsamiglia y Tusón, 1999, p. 310), es decir, cumple "una función esclarecedora respecto con respecto al objeto de explicación" (Zamudio y Atorresi, 2000, p. 97), en la argumentación el ejemplo “sirve para legitimar los argumentos y tesis que se presentan” (Zamudio y Atorresi, 2000, p. 97). En gran parte del corpus relevado cuando se pide ejemplificar (ejemplo o contraejemplo), la demanda apunta hacia la legitimación de argumentos.

En matemáticas en general y, en el corpus analizado en particular, en muchas ocasiones la ejemplificación se enmarca como una estrategia más dentro de la demostración; un ejemplo o un contraejemplo sirven para legitimar un razonamiento, un teorema, etc.

Demostrar la verdad o falsedad de las afirmaciones puede lograrse de diversas maneras. En el caso de afirmaciones con cuantificadores existenciales, para demostrar que es verdadera, debe hallarse un ejemplo donde la propiedad mencionada se cumple; Si la afirmación contiene un cuantificador universal, para demostrar que es falsa, debe mostrarse un ejemplo donde la propiedad no se cumple (es decir, un ‘contraejemplo’).

Según Stlyianides (2007) (Citado en Alfaro Carvajal et al., 2019), “los modos de argumentación: usa formas de razonamiento que son válidas para la comunidad del aula (…), como las reglas lógicas de inferencia, el uso de definiciones para derivar afirmaciones generales, (…), la construcción de contraejemplos, el desarrollo de un razonamiento que muestra que se puede llegar a una contradicción, entre otros” (P. 62).

Si bien la demanda de ejemplificación no es recurrente en el corpus relevado, cuando aparece lo hace a través del ejemplo con función argumentativa. Se presenta en construcciones de OD como proponer, desarrollar exhibir, dar o proporcionar+ejemplo o un contrajemplo.

Ej. I.

“5.2) Proponga y desarrolle un ejemplo de serie de potencias que converja en un intervalo acotado, y en cuyas fronteras sea condicionalmente convergente” (Examen final. Cálculo I. 22/7).

Ej. II.

3) Responder *Verdadero* o *Falso*. Si responde verdadero, justifique en qué herramiena teórica se apoya. Si responde falso, exhiba y desarrolle un contraejemplo de manera analítica y gráfica.

a) Sea $x = c$ un punto del dominio del dominio de una función $f(x)$ en el cual la misma es continua pero no derivable. Entonces $x = c$ no puede ser un extremo relativo de $f(x)$.

b) Supongamos que $f(x)$ es una función definida en un intervalo I. Sea $x = c \in$ I.
Si $f'(x) > 0 \; \forall x \in$ I, $x < c$ y $f'(x) < 0 \; \forall x \in$ I, $x > c$, entonces $x = c$ es un máximo relativo de $f(x)$ en I.

(Examen final. Cálculo I. 04/2)

Ej. III.

> *¿Verdadero o falso?* **En los ejercicios 75 y 76, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa explique por qué o proporcione un ejemplo que muestre que es falsa.**

(Manual. Cap. 2.1. Ejer.75)

El primer ejercicio solicita proponer y desarrollar un ejemplo. La proposición es dar, escribir un ejemplo; el segundo refiere a precisar, ampliar y demostrar la convergencia del ejemplo.

En términos cognitivos, la proposición presenta una actividad que persigue involucrar más al estudiante como sujeto activo en la construcción del conocimiento; no es el docente el que ofrece el caso y el estudiante responde en una actitud de respuesta pasiva y reproductiva frente a la demanda, sino que, a partir de los conocimientos aprendidos, se debe buscar un ejemplo apropiado para poder realizar su desarrollo. Esto le otorga al estudiante un grado mayor de autogestión y autonomía en el conocimiento, al tiempo que a los docentes les posibilita verificar si existió aprendizaje significativo (Ausubel, 1998) y una comprensión genuina (Perkins 2001) a través del ejemplo dado.

En esta misma línea, el ejercicio II pide proponer, pero un contraejemplo. La dinámica es similar a la señalada en el párrafo anterior, sin embargo, aquí sí el docente ofrece el ejemplo y el estudiante, en caso en que la respuesta sea falsa, debe mostrar un contraejemplo. De acuerdo con el relato de los docentes de la cátedra de Cálculo I, este último surge para desafiar a los estudiantes a la hora de la respuesta, dado que solamente exhibían el ejemplo y no lo desarrollaban.

El contraejemplo es una manera de llevar a cabo un tipo de demostración para probar la falsedad de la afirmación universal. En este ejemplo la demanda es rica en términos cognitivos, puesto que debe desarrollar el contraejemplo en dos registros semióticos diferentes: a través del algebraico (analítico) y por medio del gráfico.

En el tercer ejercicio, se otorga la posibilidad de elegir entre explicar o proporcionar un ejemplo.

Para concluir con este macroproceso es posible afirmar que la descripción y análisis de los procesos que forman parte de este, impactan en la configuración didáctica de la clase. Los alcances perlocutivos y semánticos que adquiere el término argumentación, como se ha visto, varían de acuerdo con las disciplinas. Por otra parte, los conocimientos sobre prácticas argumentativas que traen los estudiantes son los de la escuela secundaria, en la cual la enseñanza acerca de la argumentación forma parte de los contenidos de lengua y literatura y de otras disciplinas sociales. Los estudiantes aprenden sobre este modo de argumentación y, en menor medida, acerca de cómo se constituye en el discurso matemático. De la misma manera, con el caso de la ejemplificación dentro de los contextos de demostración. Conocer esto puede orientar las decisiones didácticas que tomen los docentes del nivel superior a la hora de planificar la enseñanza de los contenidos matemáticos.

7.3.8. Macroproceso: Enunciar y exhibir

En el macroproceso de enunciar y exhibir se observan distintas demandas que, aunque con diferencias, apuntan al decir, comunicar, expresar, mostrar o registrar un contenido (datos, teoremas, valores, etc.). En términos cognitivos, no promueven aprendizajes profundos, sino que se presentan como actividades reproductivas y, en algunos casos, con un carácter instrumental.

7.3.8.1. Enunciar y explicitar

En los siguientes ejemplos, se pueden observar las demandas de enunciar y explicitar.

Con respecto a la primera, se utiliza para formular teoremas, propiedades o condiciones. Su objetivo, al igual que en las definiciones, es demostrar que los estudiantes se han apropiado conceptualmente del contenido.

En cuanto a la segunda, explicitar, es mostrar, escribir, hacer presente la ecuación de la tangente.

Ej. I.

“a). <u>Enunciar</u> y demostrar el Teorema de Rolle.

b). En el segmento de la parábola $y = x^2$ que está comprendido entre los puntos A (2, 4) y B (5, 25), encontrar un punto en el cual la tangente sea paralela a la cuerda AB.

Justificar con teoría la existencia de tal punto. Explicitar la ecuación de la tangente" (Examen final. Cálculo I. 05/8).

7.3.8.2. Decir y dar

En una misma consigna aparecen las demandas de "decir" y "dar". En este ejemplo se aprecia, de manera prototípica, los usos de estos procesos que son similares a otras actividades.

Ej. I.

"Defina una serie geométrica, diga cuándo converge y dé la fórmula para la suma de una serie geométrica convergente" (Manual. Cap. 7.2. Ejer.71)

Con relación al decir, se solicita enunciar, registrar cuándo, o sea, en qué contextos matemáticos particulares converge una serie geométrica. El empleo de decir en el marco del registro escrito no es adecuado, ya que este proceso se utiliza para la oralidad y la conversación. No obstante, es factible encontrar su uso en consignas académicas de otras disciplinas como sinónimo de enunciar, determinar, etc.

"Dar" se emplea en forma de colocaciones diversas. Desde un punto de vista sintáctico, conforma un sintagma de finito+ complemento directo. En el ejemplo ofrecido, funciona como sinónimo de escribir, registrar, anotar la fórmula.

Otro de los usos de "dar" se encuentra en consignas como la siguiente:

Ej. II.

"$f'(x) = 1\ si\ x < 3\ y\ f'(x) = 1 si\ x > 3$. Dar la expresión analítica para esta función" (Examen final. Cálculo I. 08/4).

En estos casos "dar" posee un significado restringido dentro del contexto discursivo matemático que es convertir y formular la función en términos de una ecuación. Este tipo de demandas implica procesos cognitivos más complejos, puesto que involucran procedimientos de transformación del conocimiento (Navarro; Revel Chion, 2013).

7.3.8.3. Expresar, escribir, indicar, responder

El significado de estas cuatro demandas es similar: enunciar, registrar, señalar, comunicar de manera escrita una distancia, un número o la veracidad de una respuesta (verdadero o falso). Si bien las demandas poseen este sustrato semántico común, en todos los casos para arribar a esos resultados es preciso realizar previamente cálculos, apelar a teoremas y propiedades, etc.

Respecto de responder, se toma el ejemplo II del macroproceso de ejemplificación.

Ej. I.

"(a) Exprese la distancia *d*, en función de *m*, que hay entre la recta y el punto (3.1)" (Manual. Cap. 2.1. Ejer.73).

Ej. II.

"1.b) Dado el número 0.0389898989… se pide:

b.1) Encontrar la serie numérica que lo representa.

b.2) A partir del inciso anterior, escribir el número dado en forma fraccionaria" (Examen final. Cálculo I. 09/9).

Ej. III.

EJERCICIO 3

Indique, justificando sus respuestas, si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = 1.$ ii) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x} = 1.$ iii)Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L.$

(Examen parcial. Matemática básica. 14/6).

7.3.8.4. Describir

En la descripción se intenta enumerar e indicar las características y detalles de un concepto u objeto como una relación, simetría o, como en el ejemplo propuesto, una diferencia. Aquí el objetivo es establecer las principales características y diferencias entre dos conceptos de distinta naturaleza matemática: las series y las sucesiones.

Ej. I.

70. Describa la diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

(Manual. Cap. 7.2. Ejer.70)

7.3.9. Macroproceso: Escribir y leer

Las demandas contenidas en el macroproceso de escritura y lectura no son recurrentes, al menos dentro del corpus analizado. A continuación, se presentan ejemplos de cómo son empleadas estas demandas.

Ej. I.

123. *Redacción* Lea el artículo "The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages" de Gerald M. Armtrong y Calvin P. Midgley en *Mathematics Teacher.* (Este artículo puede verlo en *www.matharticles.com.*) Escriba después un párrafo sobre cómo puede usarse una sucesión geométrica para hallar la cantidad total de un medicamento que permanece en el cuerpo del paciente después de la administración de *n* dosis iguales (a los mismos intervalos de tiempo).

(Manual. Cap. 7.2. Ejer.123)

Ej. II.

5) Enunciar el Teorema del Valor Medio para Integrales e interpretar geométricamente. (*Sólo exponer un gráfico no alcanza... debe escribir su interpretación*)

(Examen final. Cálculo I. 18/2)

Los usos y significados de la demanda "escribir" en el corpus analizado son diversos.

Un primer uso coincide con el significado que se le asigna en el ejemplo II del macroproceso de enunciar. De esta manera aparece mayoritariamente: "Escriba el decimal periódico en forma de una serie geométrica y escriba su suma como cociente de dos enteros" (Manual. Cap. 7.2. Ej. 47-52); "Escriba la suma de la serie en función de x" (Manual. Cap. 7.2. Ej. 75-80). Sin embargo, el empleo como escritura epistémica (Navarro; Rebel Chion, 2013), con una organización de ideas y razonamientos cohesionados no es frecuente. Solo en dos ocasiones aparecen en las demandas y son las señaladas en los ejemplos.

En el primer ejercicio se aprecia la única demanda de lectura. Se solicita leer un artículo académico y, a partir de esta actividad, se propone un ejercicio de escritura. Al respecto se observan indicaciones en cuanto al tema y a la extensión (un párrafo). La explicitación metalingüística del término “párrafo” da la pauta de que se trata de una escritura que, sin renunciar a la especificidad y a la utilización de registros matemáticos específicos, promueve la organización de las ideas en una secuencia textual explicativa de lenguaje natural.

En el segundo ejercicio, la demanda de escritura se relaciona con la interpretación geométrica. Esta última, desarrollada oportunamente en el macroproceso de análisis e interpretación, conlleva una escritura asociada a la acción de registrar la interpretación. Además de la representación gráfica, se pide incluir la escritura tanto de expresiones algebraicas (interpretación analítica) como de lenguaje natural.

7.3.10. Macroproceso: Graficar y dibujar

Este macroproceso, junto con los de “encontrar” y “demostrar” que forman parte de los macroprocesos de calcular y argumentar respectivamente, constituye una de las actividades más frecuentes y solicitadas en el corpus de consignas estudiadas.

El graficar es una actividad cognitiva compleja y rica en tanto supone procesos del pensamiento variados que conllevan transformación de representaciones semióticas (Duval, 2006), interpretación de gráficos y expresiones algebraicas diversas, inferencias, síntesis, aplicación de teoremas y fórmulas, diseño de gráficas, cálculos, entre otros.

La gráfica coloca en el centro del análisis la transformación de representaciones semióticas como actividad cognitiva compleja. De acuerdo con Duval (2006), la transformación es un tipo de actividad cognitiva que se aplica a cualquier tarea matemática. En este sentido, no solo en la elaboración de gráficas se observan transformaciones de representaciones semióticas, sino también entre otros registros (por ejemplo, en el caso analizado de “dar la expresión analítica”, en el cual se convierte la función en términos de una ecuación). Sin embargo, en la elaboración de gráficas se lo ve con mayor claridad.

La transformación incluye dos actividades matemáticas básicas: la conversión y el tratamiento. La primera se origina “cambiando el sistema semiótico (el registro) usado sin cambiar los objetos indicados”, mientras que la segunda sucede “manteniendo el mismo sistema semiótico” (Duval, 2006, p. 146). En el caso de las gráficas se observan ambos, aunque con más frecuencia el primero.

Según Duval, “cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo” (2006, p. 150). Para este autor, “La conversión y el tratamiento son fuentes totalmente independientes de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, y parece ser que la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento. El problema que la mayoría de los estudiantes encuentra es tan profundo que la conversión puede ser considerada como el umbral de la comprensión” (2006, p.149).

A continuación, se presentan solo cinco ejemplos de las múltiples consignas que trabajan con gráficas y dibujos.

Ej. I.

“b.3) Calcular el área de la región limitada inferiormente por las gráficas de f(x) y g(x) y superiormente por T.

b.4) Graficar” (Examen final. Cálculo I. 09/9).

Ej. II.

“En los ejercicios 15-22, (a) represente gráficamente la función, resaltando la parte correspondiente al intervalo dado.

15. $y = 4 - x^2 \quad 0 \leq x \leq 2$ 16. $y = \frac{1}{x+1} \quad 0 \leq x \leq 1$” (Manual. Cap. 5.4. Ejer.15-22)

Ej. III.

“En los ejercicios 25-30. (a) encuentre la suma de la serie, (b) use una aplicación gráfica para hallar la suma parcial S indicada y complete la tabla, (c) use una aplicación gráfica para representar gráficamente los 10 primeros términos de la sucesión de sumas parciales y una recta horizontal que represente la suma”.

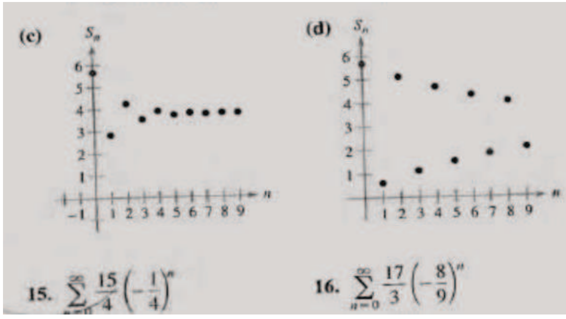
n	5	10	20	50	100
S_n					

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+3)}$ 26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)}$

(Manual. Cap. 7.2. Ejer.25-30)

Ej. IV.

"En los ejercicios 15-18, haga coincidir la gráfica con su sucesión de sumas parciales. [Las gráficas se han marcado con las letras (a), (b), (c) y (d)]. Use la gráfica para estimar la suma de la serie".



(Manual. Cap. 7.2. Ejer.15-18)

Como se puede apreciar, en algunas consignas se demanda la representación gráfica de funciones (gráfica de función) en un plano cartesiano a través de coordenadas, rectas, curvas, etc. Para arribar a la gráfica, en algunos casos, es preciso realizar previamente los análisis pertinentes que conduzcan a la gráfica requerida y, en otros, el mismo ejercicio ofrece la función que debe ser representada gráficamente. En todas las situaciones el estudiante debe convertir una representación semiótica en otra (de una algebraica a una gráfica o viceversa). Además, como en el ejemplo II, se pide intervenir sobre la gráfica elaborada a través de una forma de resaltado.

En los ejercicios III y IV se propone trabajar con otros conceptos matemáticos como las series y la aritmética. Además de representar gráficamente los términos de una serie, en el ejemplo IV, se solicitan dos demandas diferentes con gráficas; por un lado, se ofrecen las sucesiones de sumas parciales que deben ser resueltas y, con el valor hallado, indicar con cuáles de las gráficas propuestas se corresponde; por el otro, se debe usar la gráfica para estimar la suma de la serie. Se busca de este modo presentar con un ejemplo gráfico la idea que una suma de infinitos términos positivos puede arrojar un resultado finito. Esto resulta, muchas veces, contraintuitivo, por ello se pretende que la contradicción a la intuición se explicite con un ejemplo "amigable".

En otras palabras, no solo se observan ejercicios de representación y conversión gráfica, sino otros procedimientos deductivos e inductivos, (partir de la serie y de los valores, o tomar la gráfica para alcanzar estos) y otras actividades cognitivas que potencian el pensamiento matemático contraintuitivo.

La siguiente consigna se encuentra dentro de un trabajo práctico que presenta un problema de geometría. Para arribar a los resultados se pide, primero, elaborar el dibujo del cuadrado y las áreas. Es el ejemplo de otro tipo de representación semiótica que no es gráfica en los términos que se planteó anteriormente, sin embargo, supone tareas cognitivas complejas también.

En primer lugar, se solicita la observación y, como se explicará en el próximo macroproceso, esta demanda supone identificar las características de los objetos o figuras y las relaciones que se establecen entre ellas, siempre basándose en esquemas cognitivos previos.

En segundo lugar, el dibujar no es solo una tarea mecánica; implica el trabajo con otro registro semiótico y, como se ve en las preguntas, a partir de la visualización geométrica es posible potenciar actividades diversas del pensamiento como identificación de patrones, selección de aspectos relevantes y secundarios, relación entre propiedades u objetos, formulación de hipótesis, entre otras. (Álvarez Alfonso et.al., 2014).

Ej. V.

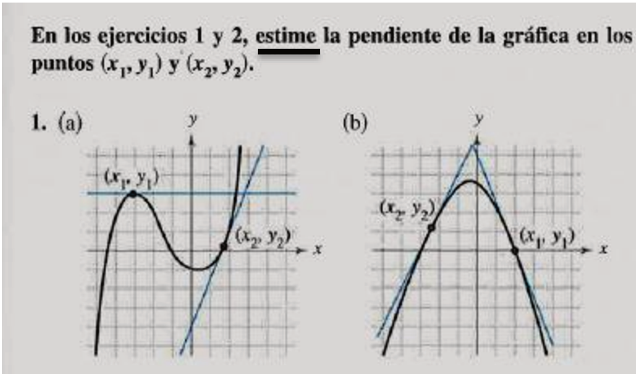
“Hacé el siguiente experimento. Dibujá un cuadrado grande de lado 1, pintá la mitad inferior del cuadrado. Obtendrás un rectángulo de área ½, llamalo rectángulo número 1. Al rectángulo superior, el que no está pintado, dividilo en dos mitades, igual que antes: una superior y una inferior (…) Ahora hacete las siguientes preguntas: ¿Cuántos rectángulos creés que podés obtener ejecutando este proceso? ¿Qué pasaría si los ponés uno al lado del otro y considerás la unión de todos ellos? ¿Es acotada la región? Observá que la base de cada rectángulo vale 1 (…)”. (Trabajo práctico. Cálculo I. Apreciaciones sobre integrales impropias).

Otra distinción relevante dentro del macroproceso de la gráfica es el de la estimación y el esbozo. Este último se utiliza para indicar que no se pretende una gráfica con suma precisión, sino una aproximada a la real en sus aspectos cualitativos. En otros contextos, también, puede remitir a “estimar gráficamente” una cantidad en una gráfica. Esta representa otra manera de hacer cálculos, en lugar de efectuarlos en un modelo analítico, se llevan a cabo a través de la estimación gráfica.

Desde un punto de vista cognitivo, estas demandas conllevan una actividad de aprendizaje más compleja y rica en tanto supone trabajar con registros semióticos diferentes (algebraico, gráfico y verbal), al tiempo que exige efectuar procesos de inferencias y arribar a conclusiones.

En los siguientes ejemplos se pueden visualizar estas demandas:

Ej. VI.



(Manual. Cap. 2.1. Ejer.1-2)

Ej. VII.

Complete la tabla <u>estimando</u> <u>gráficamente</u> la pendiente de la gráfica en los puntos indicados. Después evalúe analíticamente las pendientes y compare sus resultados con los obtenidos gráficamente.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$									
$f'(x)$									

43. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ **44.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

(Manual. Cap. 2.1. Ejer.43-44)

Ej. VIII.

"Ejercicio l. Dada la gráfica de la siguiente función f (x) , se pide <u>esbozar una gráfica</u> posible para su derivada f' (x)". (Examen final. Cálculo I. 04/2).

7.3.11. Macroproceso: Observar e identificar

Este macroproceso se encuentra presente principalmente en consignas que utilizan en su formulación gráficos e imágenes. Estos procesos cumplen funciones variadas.

Desde una perspectiva textual, estas demandas buscan dirigir la atención y la focalización sobre los paratextos. Asimismo, en otros casos, operan como elementos cohesivos multimodales catafóricos o anafóricos, como sucede con “vea”. (Se emplea el registro natural del lenguaje para señalar un elemento formulado en otro registro semiótico, gráfica, imagen, etc.).

Desde una concepción matemática y pedagógica, la observación de un objeto matemático se propone “identificar sus características y las relaciones que se establecen entre ellas, fundamentándose en los esquemas cognitivos previos que tiene el observador sobre tales objetos” (Álvarez Alfonso et.al., 2014, p. 77).

Las demandas con función cohesiva como el caso de “vea” aparecen entre paréntesis como una indicación instrumental, pero al mismo tiempo poseen una finalidad pedagógica que busca andamiar y dirigir el proceso de aprendizaje. En este sentido, el autor del manual/docente indica al lector/estudiante que la imagen no es accesoria o ilustrativa, sino que debe ser tenida en cuenta para resolver el problema de manera apropiada.

Desde una perspectiva cognitiva, este tipo de procesos suelen ser ricos (Font y Godino, 2006) y desafiantes en términos de aprendizaje, puesto que implican procesos de alternancia, traducción-transformación (Duval, 2006) y constatación entre diferentes registros semióticos. Estos procesos buscan poner de manifiesto la singularidad multimodal del discurso matemático.

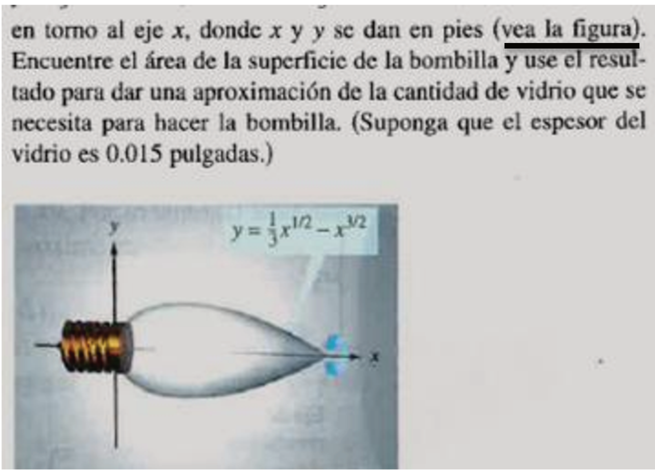
Ej. I.

“(b) encuentre una integral definida que represente la longitud de arco de la curva para el interlineado indicado y, observe que esa integral no puede ser evaluada con las técnicas estudiadas hasta ahora” (Manual. Cap. 5.4. Ejer.15-22)

Ej. II.

“(c) utilice una aplicación gráfica para representar gráficamente la función y las sumas parciales S_3 S_5. ¿Qué observa?” (Manual. Cap. 7.2. Ejer.85-86)

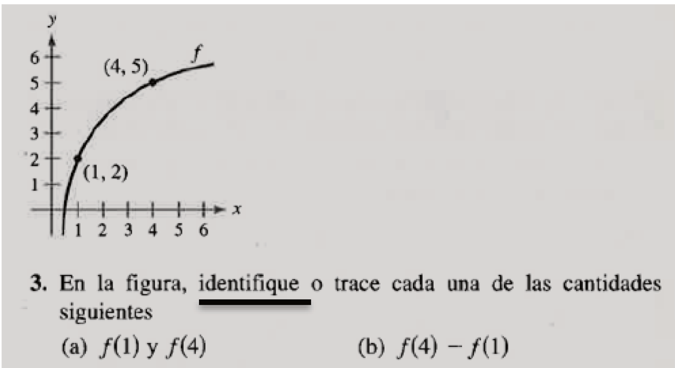
Ej. III.


en torno al eje x, donde x y y se dan en pies (vea la figura). Encuentre el área de la superficie de la bombilla y use el resultado para dar una aproximación de la cantidad de vidrio que se necesita para hacer la bombilla. (Suponga que el espesor del vidrio es 0.015 pulgadas.)

(Manual. Cap. 5.4. Ejer.51)

En el siguiente ejercicio se pide identificar. Si bien comparte aspectos similares con la observación en lo que hace al tipo de demanda, la identificación presupone una actividad de constatación entre dos registros semióticos (algebraico y gráfico), para aludir a una misma función matemática, pero expresada en registros diferentes. La consigna solicita, entonces, reconocer como parte de la gráfica las cantidades ofrecidas. Esta tarea no es mecánica, sino que presupone un procedimiento previo de cálculo de la función y traducción a otro registro que permita identificarlo en la gráfica.

Ej. IV.



3. En la figura, identifique o trace cada una de las cantidades siguientes

(a) $f(1)$ y $f(4)$ (b) $f(4) - f(1)$

(Manual. Cap.2.1. Ejer.3)

7.3.12. Macroproceso: Preguntar

Las preguntas no constituyen en sí procesos en los términos explicados, sin embargo, son formas indirectas de demandas que conllevan un poder perlocutivo y, al igual que los procesos, son tareas que se dirigen hacia la acción.

7.3.13. Macroproceso: Mental

El macroproceso mental incluye tres procesos: considerar, suponer y no sufrir. Si bien los dos primeros son típicos en el discurso matemático, no son exclusivos de él y pueden hallarse como demandas en otras disciplinas.

La particularidad de estas demandas radica en que no es posible traducirlas en una actividad material concreta, sino que parten de acciones que presuponen el pensamiento, el análisis, la hipótesis y la conjetura. Por esta razón, establecen relaciones de tipo lógicas y, al mismo tiempo, adquieren un carácter más abstracto. De acuerdo con Halliday (Ghio y Fernández, 2008), los procesos vinculados con el pensar y el sentir forman parte de los procesos mentales.

La demanda negativa "no sufrir" aparece solamente en los exámenes finales. Su impacto como metáfora léxica fue explicado oportunamente, aunque. desde una perspectiva cognitiva, se instala como un instrumento de mediación entre los estudiantes ya que, en los contextos en que aparece, "no sufrir" significa sugerirles el uso de una estrategia menos laboriosa para resolver el ejercicio. Opera como una ayuda, un andamio puesto por los docentes.

Ej. I.

"a) Suponga que P y Q son dos puntos sobre la superficie del mar, con Q ligeramente al este de P tal como se muestra en la figura. ¿Es posible llevar un bote de P a Q navegando casi hacia el este *sin nunca (*ni siquiera por un instante) navegar en la dirección exacta de P a Q?" (Examen final. Cálculo I. 09/9/19).

Ej. II.

Ejercicio 7. (*) Considerar la serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Hallar los intervalos de convergencia de: $f(x)$; $\int f(x)$ ¿Qué conclusiones pueden extraerse acerca de la comparación de los dominios de convergencia de ellas?

(Examen final. Cálculo I. 05/8)

Ej. III.

"Ayuda: Utilice una condición suficiente de convergencia. No sufra pretendiendo calcular el límite" (Examen final. Cálculo I. 18/2).

7.3.14. Macroproceso: Uso e instrumentalidad

El macroproceso del uso e instrumentalidad refiere a procesos que no tienen un impacto cognitivo profundo en términos de aprendizaje, sino que se emplean para indicar de qué manera llevar a cabo las demandas. Su presencia es recurrente en los ejercicios y suelen expresarse con términos que forman parte del campo semántico del uso: usar, utilizar, emplear, entre otros.

Ej. I.

"(b) use una calculadora graficadora para representar la función" (Manual. Cap. 2.1. Ejer.19-24)

7.3.15. Otros macroprocesos

Existen otros procesos que no forman parte de un macroproceso en particular, puesto que su alcance perlocutivo y cognitivo es singular. Ellos son explicar y modelar.

7.3.15.1. Explicar

La explicación es una actividad frecuente requerida en el discurso de las ciencias y la matemática no es una excepción. El alcance de esta tarea es amplio y no siempre es factible de hallar una delimitación clara en torno a su definición y proyección perlocutiva. Al respecto, Zamudio y Atorresi señalan:

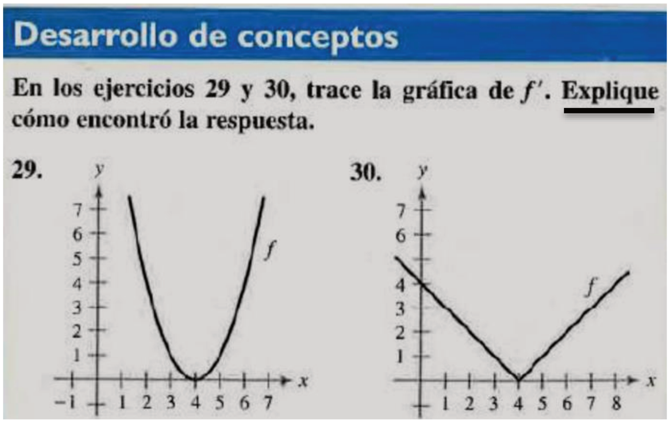
> En la dimensión interaccional "explicar" tiene como sinónimos a "comunicar" (formular, exponer, expresar), "enseñar" (hacer saber, comprender) y "justificar" (en sus acepciones de "dar motivos" y "excusar"). En la dimensión lógico-cognitiva, es sinónimo, por una parte, de "explicitar" (aclarar, definir, glosar) e "interpretar", y por la otra, en sentido estricto, de "dar razones", "validar", "probar". (2006, p. 10)

De acuerdo con esta cita, “explicar” podría formar parte de diferentes macroprocesos, sin embargo, debido a su particularidad, complejidad y relevancia en el discurso matemático, se decidió asignarle un lugar diferenciado.

En el siguiente ejercicio, la explicación se enmarca en una consigna de carácter más teórico (así lo explicita el paratexto: “Desarrollo de conceptos”). En este caso, se relaciona con la comunicación, con expresar el camino teórico seguido para alcanzar esa resolución. En este sentido, la explicación requerida no busca generar un conocimiento nuevo, sino informar, comunicar un saber teórico construido y legitimado por una comunidad académica, (Arnoux, 2002) a un docente que evalúa y pretende conocer si los estudiantes aprendieron los temas.

Asimismo, la explicación promueve una actividad de tipo metacognitiva dado que alienta a que el estudiante pueda dar cuenta de qué manera, con qué estrategias cognitivas y herramientas conceptuales-matemáticas pudo alcanzar ese resultado.

Ej. I.


Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 29 y 30, trace la gráfica de f'. Explique cómo encontró la respuesta.

(Manual Cap. 2.1. Ejer.29-30)

En el ejercicio II, explicar sigue a una pregunta cerrada que se responde por sí o por no. Esta demanda adquiere un significado más cercano a “dar razones” o justificar en su sentido argumentativo. En este contexto, la explicación deberá apelar a categorías teóricas que validen la respuesta.

Ej. II.

“(d) Obtenga $f'(x)$ *si* $f(x) = x^4$. Compare el resultado con la conclusión obtenida en el inciso (c). ¿Es esta una prueba de la conjetura? Explique” (Manual Cap. 2.1. Ejer.74).

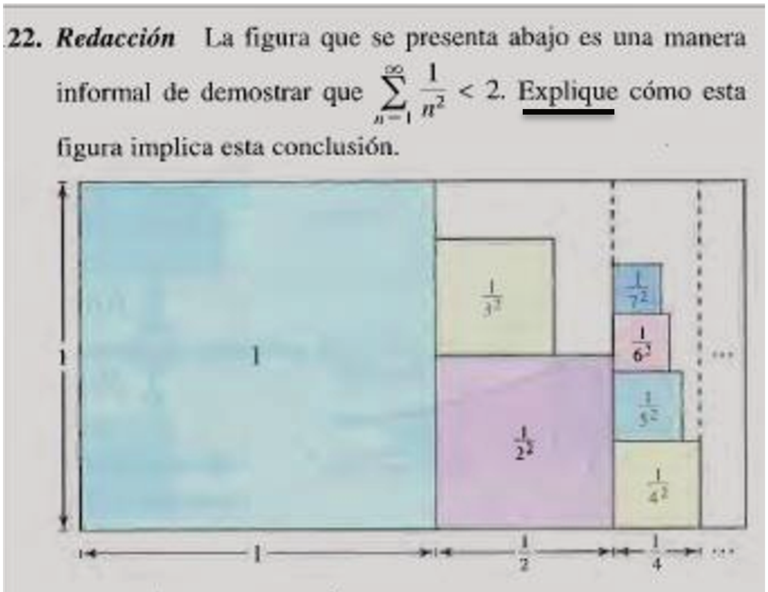
En el siguiente ejemplo, se solicita explicar el razonamiento, es decir, se debe informar, explicitar el modo en qué se procedió a razonar para responder a la pregunta cerrada. Aquí la respuesta demanda apelar a diferentes registros semióticos (lenguaje natural y simbólico), así como apoyarse en aspectos teóricos-conceptuales.

Ej. III.

"Dados $x = 1$ y $x = 2$, ¿Puede concluirse si los enunciados siguientes son verdaderos o no? Explique su razonamiento" (Manual Cap. 5.4 Ejer.84).

Este último ejercicio busca exponer, presentar razonamientos sobre las relaciones que se pueden establecer entre dos registros, uno algebraico y otro gráfico. Desde un punto de vista cognitivo, la explicación en este ejercicio se plantea en el marco de una actividad más compleja ya que implica explicar una relación entre dos registros semióticos diferentes.

Ej. IV.



(Manual Cap. 7.2. Ejer.122)

7.3.15.2. *Modelar*

La modelización aparece solamente una vez en una consigna a través de la demanda "modelar". No obstante, es un término y una metodología de trabajo matemático muy frecuente en los últimos años.

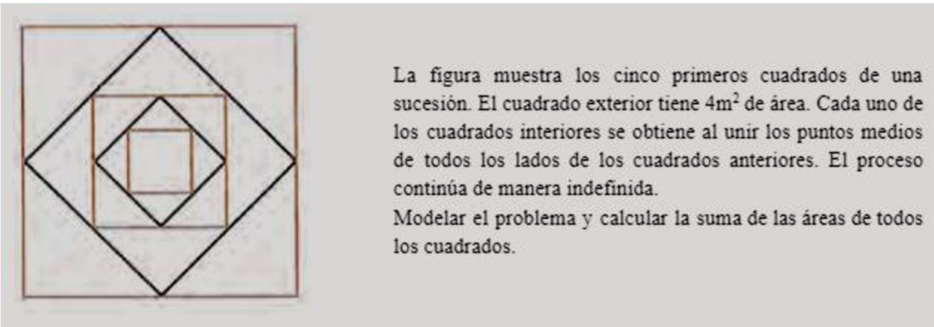
Según Font y Godino, (2006):

> Cuando se utiliza el término "modelización" se suele tener en mente un proceso complejo que implica primero partir de la situación concreta para, gracias a un proceso descontextualizador, obtener un objeto matemático y después, gracias a un proceso de contextualización, aplicar este objeto a diferentes situaciones reales. (P. 92)

Estos mismos autores plantean cinco fases en todo proceso de modelización, a saber: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad.

Desde una perspectiva cognitiva, la modelización se presenta como una actividad rica que requiere de procesos complejos de construcción de los aprendizajes; implica arribar a los conceptos matemáticos desde un método inductivo y no deductivo-aplicacionista. Sumado a esto, la modelización opera como un instrumento que sirve como puente, como andamio, entre la realidad extra-matemática y el discurso intra-matemático. Así la matemática abandona parcialmente su entelequia formal para poder conectar la realidad y comprender sus usos y funciones. Este tipo de actividad es significativa en carreras de ingeniería como las de FICH.

Ej. I.



La figura muestra los cinco primeros cuadrados de una sucesión. El cuadrado exterior tiene $4m^2$ de área. Cada uno de los cuadrados interiores se obtiene al unir los puntos medios de todos los lados de los cuadrados anteriores. El proceso continúa de manera indefinida.
Modelar el problema y calcular la suma de las áreas de todos los cuadrados.

(Examen final. Cálculo I. 08/4)

En este caso, se parte del problema, que sería la fase uno señalada anteriormente, y luego se continúa con los pasos tres y cuatro que son la construcción del modelo matemático. Este se elabora a través de los datos que se encuentran dentro del problema y que contribuirán a arribar al resultado esperado.

7.3.16. Comparación entre las demandas de los exámenes y el manual

A continuación, se presentan las demandas en su orden de frecuencia, discriminadas por exámenes y manual. Tanto uno como otro, forman parte de las consignas que construyen el proceso de enseñanza-aprendizaje integral de matemática. Las demandas que no se encuentran en los exámenes pueden hallarse en el manual y viceversa.

Por otro lado, la elección de tipos de demandas y sus estilos, en uno y otra clase de corpus, está determinada por los géneros discursivos elegidos.

Un examen final o parcial busca evaluar y acreditar conocimientos. Desde un punto de vista pedagógico, ambas actividades cognitivas no son acciones pedagógicas similares. En un examen final, en particular, no solo se evalúan conocimientos y procesos de aprendizaje, sino que, en el contexto de una carrera universitaria, se acredita, se certifica que esos saberes fueron aprendidos. Asimismo, el tiempo asignado para esta instancia es acotado y estructurado. Los criterios de evaluación y aprobación son regidos y dispuestos por la cátedra que, a su vez, están enmarcados en un régimen de enseñanza de la Facultad.

El manual funciona como complemento textual de los procesos de explicación y de enseñanza -aprendizaje de la cátedra. Se propone reforzar los conocimientos, ponerlos en práctica y generar instancias de autoevaluación (a partir de los solucionarios que se encuentran al final del manual). Los tiempos y los modos para la resolución son distintos a los de un examen y ofrece ejercitación que, al no estar regida por estos aspectos contextuales, promueve diferentes desafíos cognitivos.

Los aspectos vinculados con la enunciación de los materiales también forman parte de las razones por las cuales se discriminan las demandas. El manual "Cálculo esencial" es elaborado por un reconocido matemático norteamericano, Ron Larson, quien ha escrito numerosos manuales de matemática que son utilizados en muchas universidades del mundo. Si bien los procedimientos y conceptos matemáticos son universales, la versión del texto usado en FICH es una traducción del original. Además de la traducción, el manual para que funcione como género de divulgación, debe poseer un componente de generalidad y universalidad que pueda ser aplicado en diversos contextos académicos. En este sentido, el análisis del manual posibilita conocer cómo se configura el discurso disciplinar y cognitivo de la matemática en general.

No obstante, la universalidad del manual no puede dar cuenta de la particularidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en un contexto particular como la FICH. Son los autores de los exámenes, docentes de las cátedras, los que conocen la realidad específica de las aulas y de sus estudiantes en lo que respecta a modos de enseñanza y aprendizaje. De igual manera, como fue expresado en otros apartados, la ubicación de las asignaturas de matemática se encuentra en los primeros años de las carreras, lo que conlleva desafíos didácticos propios de esa etapa de la formación. Lo que se recoge a partir del análisis de exámenes y trabajos prácticos es un recorte del micromundo de la enseñanza de la matemática en FICH, de allí su relevancia y significación.

La organización de la comparación será, de manera similar a la presentada inicialmente, a través de gráficos y, luego, ordenadas de mayor a menor en cuanto a su recurrencia.

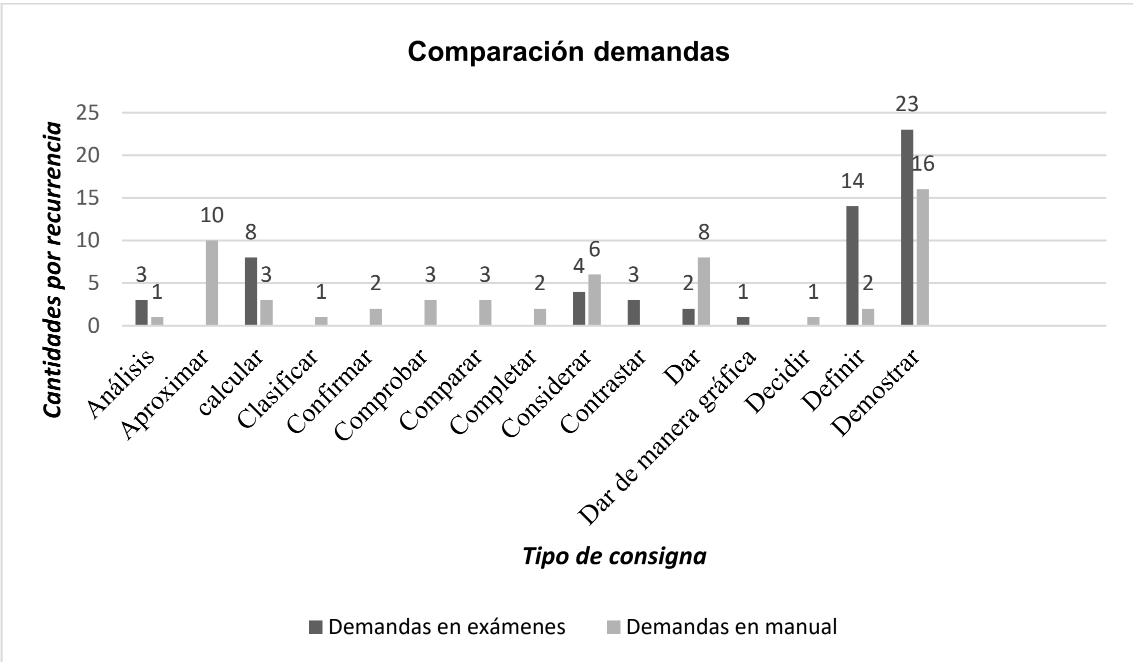


Gráfico XI
Total de demandas: 494

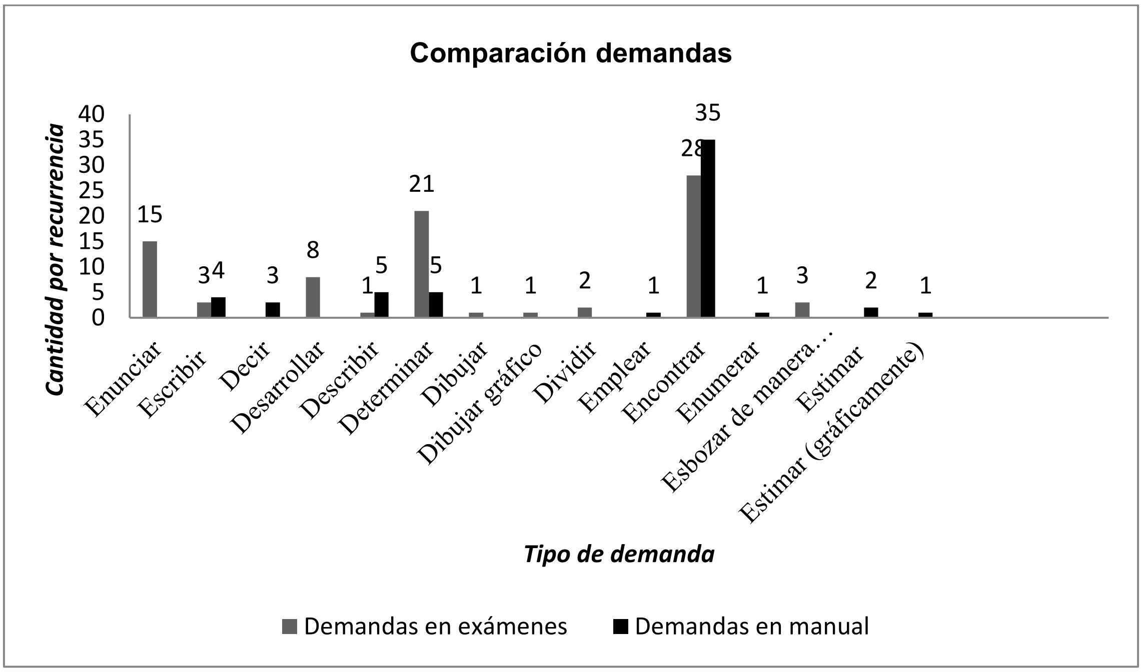


Gráfico XII
Total de demandas: 494

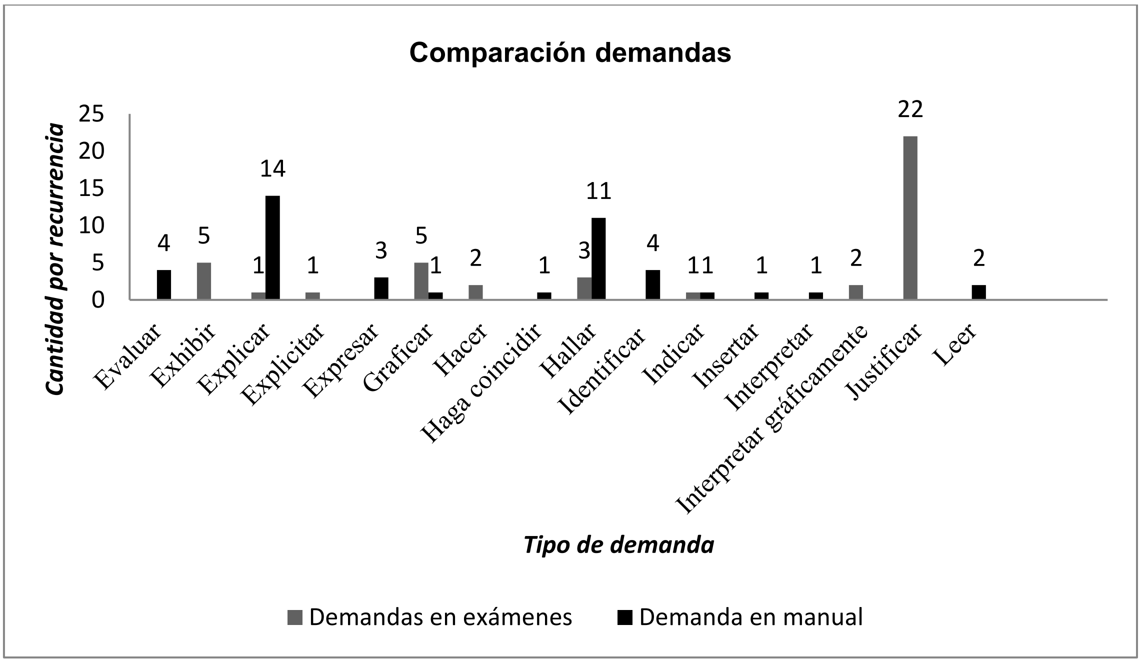


Gráfico XIII
Total de demandas: 494

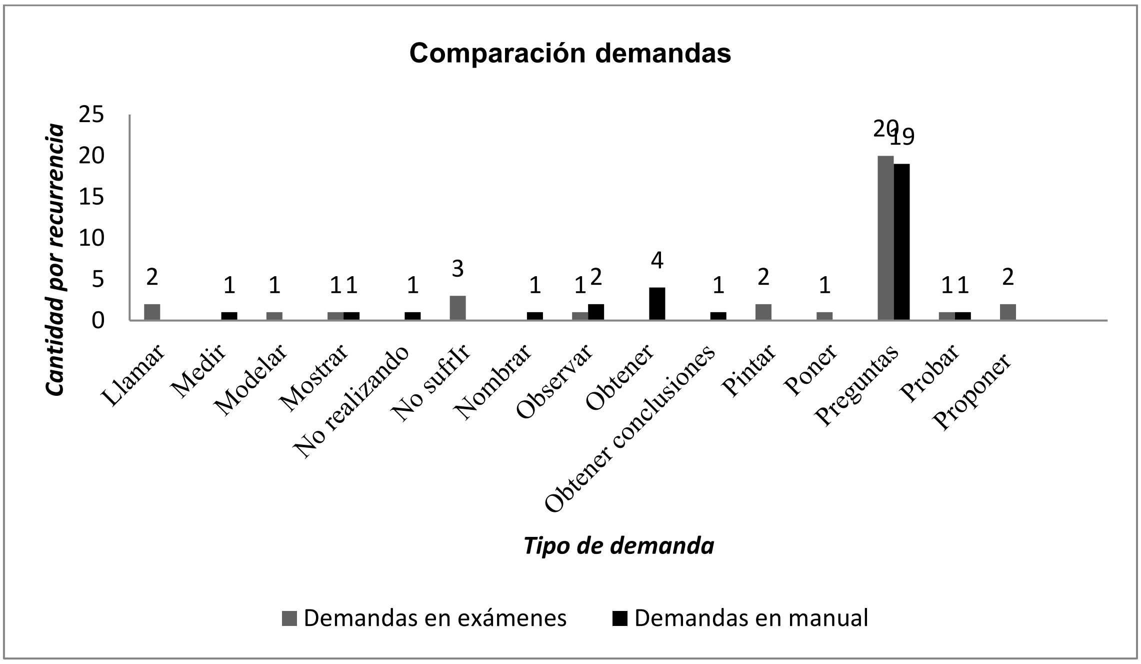


Gráfico XIV
Total de demandas: 494

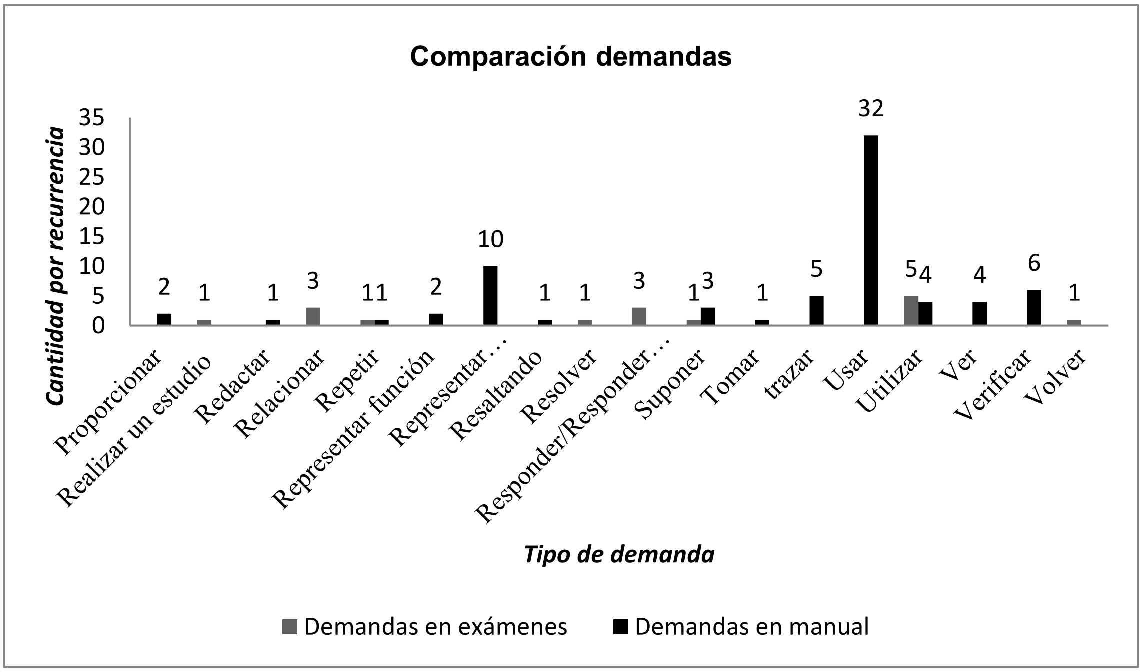


Gráfico XV
Total de demandas: 494

En la siguiente tabla se organizan las demandas de acuerdo con su orden de frecuencia, es decir, la cantidad de veces en que aparecen (consignada en las gráficas anteriores). La lista está organizada de mayor a menor y, como se podrá observar, no siempre coinciden las demandas en el mismo rango de frecuencia en ambas fuentes textuales. (Por ejemplo: en los exámenes la segunda que más aparece es la demostración, mientras que en el manual es el uso)

Orden	EXAMEN	MANUAL
1.	Encontrar	Encontrar
2.	Demostrar	Usar
3.	Justificar	Preguntas
4.	Determinar	Demostrar
5.	Preguntas	Explicar
6.	Enunciar	Hallar
7.	Definir	Aproximar- Representar gráf.
8.	Calcular-desarrollar	
9.	Utilizar- graficar- exhibir	Dar
10.	Considerar	Considerar- verificar
11.	Hallar- escribir- analizar- contrastar- esbozar gráf- no sufrir- responder- relacionar	Determinar- describir- trazar- utilizar
12.	Dar- dividir- interpretar gráf.- hacer- proponer- pintar- llamar- representar función	Escribir- identificar- Evaluar- obtener- ver
13.	Explicar- describir- suponer- observar- indicar- probar- mostrar- repetir- Dar de manera gráfica- dibujar gráfico- dibujar- explicitar- poner- modelar- volver- resolver- Realizar un estudio	Calcular- suponer- comparar- comprobar- decir- expresar
14.		Definir- observar- completar- confirmar- estimar- leer- proporcionar

15.		Graficar-analizar-indicar-probar-mostrar-repetir-decidir-clasificar-estimar gráf.-enumerar-emplear-interpretar-insertar-hacer coincidir-obtener (conclusiones)-nombrar-no realizando-medir-tomar-resaltando-redactar

Tabla VII: Demandas ordenadas por frecuencia

En la siguiente lista se [illegible]nandas ausentes en el manual o exámenes según corresponda. La celda vacía en color gris indica cuál se encuentra ausente en la otra fuente textual analizada.

Examen	**Manual**
Justificar	
Enunciar	
Desarrollar	
Exhibir	
Contrastar	
Esbozar gráf.	
No sufrir	
Responder	
Relacionar	
Dividir	
Interpretar gráf.	

Examen	**Manual**
Hacer	
Proponer	
Pintar	
Llamar	
Representar función	
Dar de manera gráfica	
Dibujar gráfico	
Dibujar	
Explicitar	
Poner	
Modelar	

Examen	Manual
Volver	
Resolver	
Realizar un estudio	

Examen	Manual
	Identificar
	Evaluar
	Obtener
	Ver
	Comparar
	Comprobar
	Decir
	Expresar
	Completar
	Confirmar
	Estimar
	Leer
	Proporcionar
	Decidir
	Clasificar
	Estimar gráf.
	Enumerar
	Emplear

Examen	Manual
	Interpretar
	Insertar
	Haga coincidir
	Obtener conclusiones
	Nombrar
	No realizando
	Medir
	Tomar
	Resaltando
	Redactar
	Usar
	Aproximar
	Representar gráf.
	Verificar
	Trazar

Tabla VIII: Demandas ausentes en exámenes y manual

De acuerdo con las gráficas y las tablas II y III, una parte de las demandas es similar en ambos corpus, lo que varía es la frecuencia con la que aparecen en uno y otro. También es posible observar que algunas solo se hallan en el manual o en los exámenes. En ocasiones, las diferencias entre ellas se deben a los temas abordados que no siempre son los mismos en ambos. A los efectos de este trabajo, se tomarán para el análisis algunas demandas, en particular aquellas que emergen con mayor frecuencia.

La demanda de "encontrar", aunque más solicitada en el manual, es la más recurrente en ambos casos, y se relacionaría con la centralidad asignada al cálculo en las cátedras.

La demostración es más requerida en los exámenes que en el manual, aunque es alta igualmente su presencia en este último. Esto destaca la importancia que tiene la demostración en la ejercitación matemática.

El empleo de "determinar", al igual que en el caso anterior, es más frecuente en los exámenes que en el manual. La cantidad de preguntas es casi similar en ambos corpus.

La explicación es más utilizada en el manual que en los exámenes, pero como contrapartida, estos solicitan más la operación de "justificar", demanda que se encuentra ausente en el manual.

Una diferencia en la frecuencia de demandas se observa con la definición. Esta es más requerida en los exámenes que en el manual y se circunscribe a las consignas teóricas. Este hecho podría relacionarse con el significado de la evaluación y acreditación de saberes y, en este sentido, la definición es una operación, aunque reproductiva y memorística, que funciona como indicador para evaluar conocimientos aprendidos. Asimismo, como se señaló oportunamente, la definición es una de las demandas que mayores problemas presenta en su resolución por parte de los estudiantes.

La demanda de "graficar", enunciada de maneras diversas, es igualmente recurrente en ambos corpus.

Otro punto son las demandas instrumentales. Ellas aparecen con mayor frecuencia en el manual. Dado que este propone un aprendizaje autogestionado, estas acciones buscan andamiar de manera más precisa el aprendizaje y la ejercitación.

7.4. A modo de cierre

A modo de cierre de este capítulo es posible afirmar que, desde su dimensión semántica y perlocutiva, de caracterización general y cognitiva, las demandas presentan variaciones y particularidades.

Se proponen las metáforas de transparencia y opacidad, en términos de comprensión por parte de los estudiantes, para describir aquellas demandas que, por su cercanía semántica con la realidad extra-matemática, con otras disciplinas y con el registro coloquial son más "transparentes" para los estudiantes; mientras que la denominación de opacas se les asigna a aquellas específicas vinculadas con el discurso intra-matemático.

En este sentido, demandas como encontrar, hallar, definir, completar, trazar, repetir, usar, entre otras, son más transparentes para los estudiantes ya que, aunque todas poseen alguna particularidad aplicada al discurso matemático, comparten significados operacionales básicos que los estudiantes han aprendido en otras disciplinas y a lo largo de su trayectoria escolar.

Por otro lado, se observan demandas que si bien entrañan una base semántica que es conocida por parte de los estudiantes, muestran un grado menor de transparencia y sí un mayor nivel de opacidad. Algunos ejemplos pueden ser "estimar", "aproximar", "representar gráficamente", entre otras. Por existir cierta cercanía semántica con una realidad extra-matemática, estas demandas pueden generar lo que se conoce en la traducción y la adquisición de lenguas extranjeras como la teoría de los falsos amigos o heterosemántica. Esto sucede con términos que se parecen, en la escritura o en la pronunciación, a palabras de la lengua materna del hablante que tienen un significado diferente y que conducen al mismo a cometer equivocaciones en su uso por creer que poseen el mismo valor semántico. Es de destacar que este trabajo se enmarca epistemológicamente desde otra perspectiva teórica. Aquí no se trata de idiomas diferentes, sino de registros y campos disciplinares diferentes, sin embargo, este aporte puede contribuir a esclarecer, en términos didácticos y semánticos, qué sucede con los alcances perlocutivos de algunas demandas.

Hay otras demandas que son más opacas como, por ejemplo: "modelar" o "dar la expresión analítica" que necesitan ser explicitadas y explicadas por los docentes para "transparentar" más su significado.

En términos de transparencia-opacidad, se registran demandas que, aunque se observan en otras disciplinas, permanecen opacas y esto es como consecuencia del nivel de abstracción y relación con el discurso lógico-filosófico. La demostración y la justificación son ejemplos de este tipo de tareas cognitivas.

Existen también demandas que se emplean como sinónimos, por ejemplo: “hallar”-“encontrar”-“calcular”-“determinar”; “demostrar”-“probar”; “graficar”-“representar gráficamente”-“dar la representación gráfica”, entre otros.

Por último, se observan demandas que no poseen un significado uniforme en todas las consignas. Como se explicitó en el desarrollo de esta caracterización general, “determinar”, “verificar”, “escribir”, “dar” o “explicar” presentan variaciones en sus usos.

Con respecto a las proyecciones cognitivas de las demandas, se observan algunas que son de carácter instrumental, reproductivo y memorístico y otras que promueven aprendizajes ricos y profundos.

Con relación a las primeras, se enmarcan en tipo de actividades que buscan la ejercitación, la aplicación, la fijación de procedimientos y fórmulas, como también para constatar el aprendizaje de los contenidos.

En cuanto a las segundas, exigen operaciones que implican procesos cognitivos como la inferencia, la relación, la comparación, la representación en diferentes registros semióticos, la autogestión a través de la selección y elección adecuada de conceptos teóricos para la justificación y la demostración, como también la proposición y desarrollo matemático de ejemplos, entre otros.

CAPÍTULO 8 . Análisis de las encuestas

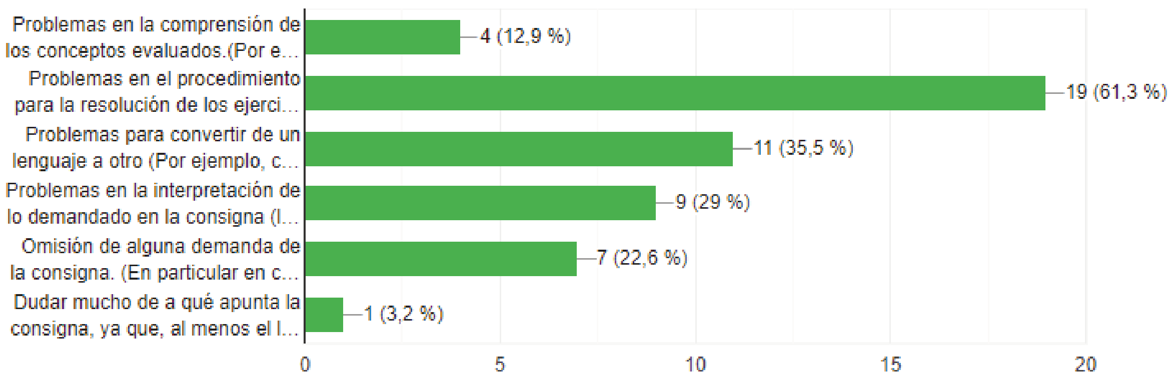
En este apartado se analizarán las encuestas realizadas a estudiantes y docentes. Como fue explicado en la sección de metodología, se efectuaron 3 preguntas a docentes, a estudiantes ingresantes y avanzados. Las preguntas fueron de respuesta múltiple, a partir de la formulación de opciones. La encuesta se llevó a cabo a través del sistema de formularios Google.

Cabe destacar que las preguntas elaboradas no fueron todas relacionadas directamente con las consignas, aunque sí con algunos presupuestos generales del discurso matemático y con otros aspectos que exceden el recorte destinado para el análisis de esta tesis. No obstante, las respuestas ofrecidas por parte de los encuestados echan luz sobre muchas de las cuestiones abordadas en este trabajo y es por esta razón que se incluyen datos de las encuestas en los análisis realizados.

El detalle de las preguntas fue consignado en el capítulo de metodología. Aquí se trabajará con los resultados y respuestas.

Pregunta I (Estudiantes):

Las respuestas de los estudiantes más avanzados (Cálculo II) a este punto fueron 31 de los 33 que participaron de esta encuesta. Los resultados fueron:



La mayor parte de las respuestas (19 estudiantes, un 61,3%) respondieron que los errores en los exámenes se deben a problemas con el procedimiento matemático.

En segundo lugar (11 respuestas, 35.5%), los errores que los estudiantes señalan tienen que ver con dificultades para convertir de un registro semiótico a otro.

En tercer lugar (9 respuestas, 29%), los estudiantes indican errores provenientes de problemas en la interpretación de las consignas.

En cuarto lugar (7 respuestas, 22.6%), los errores están vinculados a la omisión de alguna demanda dentro de las consignas, en especial en las de tipo múltiple.

En quinto lugar (4 respuestas, 12.9 %), los errores se encuentran relacionados con problemas en la comprensión de los temas evaluados.

En último lugar (1 respuesta, 3.2%), en la opción de otros, un estudiante señala: "Dudar mucho de a qué apunta la consigna, ya que, (...) los enunciados suelen ser bastante dudosos y entreverados, (…) muchas veces se interpreta algo incorrecto a pesar de haber estudiado y practicado mucho y entender el tema".

En el punto de comentarios adicionales, se hallan estas reflexiones: "El error típico, por mi parte, es aritmético. Lo considero consecuencia directa de realizar los ejercicios de forma apresurada. Una solución a este problema, que implementé (…), es forzar la prolijidad a través del uso de lápiz y goma (…)". Otro estudiante señala que "En muchas ocasiones, en lo personal, arranco bien un determinado ejercicio, y a mitad de camino tengo algún error u omisión de cálculo por lo cual no consigo resolver adecuadamente el mismo".

A partir de las respuestas obtenidas en este punto, se puede observar que los estudiantes asignan o muestran mayores errores en problemas concernientes a lo disciplinar, como los vinculados a procedimientos y a la conversión de un registro semiótico a otro. (Así lo demuestran los dos primeros lugares). Los comentarios adicionales también se dirigen en ese sentido.

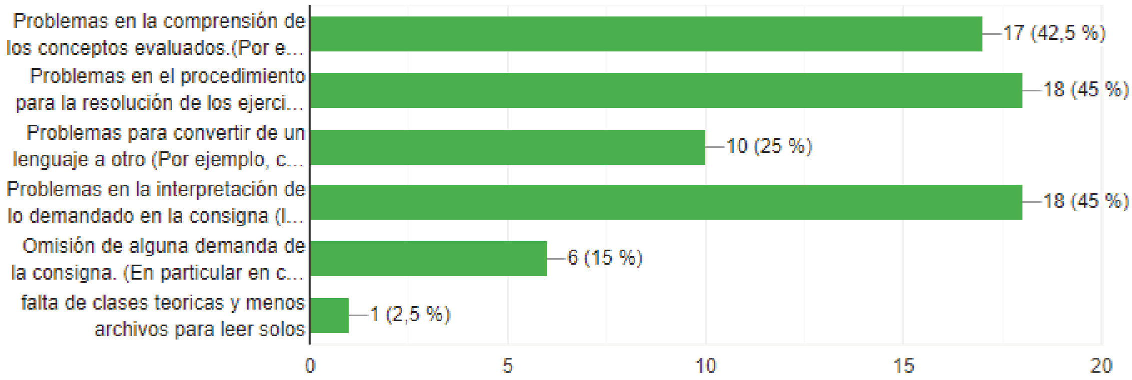
De los comentarios, dos respuestas señalan los errores aritméticos, los de cálculos, y otros aspectos como la prolijidad y el tiempo dedicado a la resolución de los ejercicios.

En cuarto lugar, se ubican los errores provenientes de la no comprensión de los temas enseñados, es decir, problemas de orden conceptual o teórico.

Los errores vinculados con la interpretación en las demandas es el que mayor porcentaje recibe. Luego, le sigue la omisión en la resolución de alguna demanda dentro de la consigna.

En este sentido, en la opción de otros, un estudiante expresa sus dificultades con las consignas. Al respecto, señala una disociación entre el estudio y la comprensión conceptual de los contenidos, como así lo que atañe a la formulación de los ejercicios. Sobre esto último se remarcan los problemas en la comprensión de lo que se solicita. Parte de los errores cometidos en la resolución provendría de la manera en que se diseñan las consignas, "Enunciados bastante dudosos y entreverados" y no exclusivamente con la falta de estudio o el dominio conceptual.

Las respuestas de los estudiantes ingresantes fueron 40 y respondieron lo siguiente:



En primer lugar, se observa una misma cantidad de respuestas (18 estudiantes, un 45%) tanto para errores provenientes en el procedimiento matemático, como a la dificultad en la interpretación de lo demandado en la consigna.

En segundo lugar (17 respuestas, 42.5%), se señalan errores relacionados con problemas en la comprensión de los temas evaluados. El porcentaje es alto, no muy lejos de los puntos anteriores.

En tercer lugar (10 respuestas, 25%), los errores que los estudiantes señalan tienen que ver con dificultades para convertir de un registro semiótico a otro.

En cuarto lugar (6 respuestas, 15%), se indican errores que provienen de la omisión de alguna demanda dentro de las consignas, en especial en las múltiples.

En último lugar (1 respuesta, 2.5%), en la opción de otros, un estudiante señala: "falta de clases teóricas y menos archivos para leer solos".

A partir de las respuestas obtenidas en este punto, se puede observar que los estudiantes asignan un mismo nivel de dificultad tanto en lo referente a los errores en los procedimientos, como a aquellos provenientes de la interpretación en las demandas.

A diferencia de los estudiantes de Cálculo II (más avanzados), en el caso de los ingresantes, se aprecia una dificultad mayor en la comprensión de las demandas de las consignas. (Aquí está en primer lugar, mientras que entre los estudiantes de Cálculo II se encuentra en un tercer término). Sin embargo, los errores originados por problemas en los procedimientos continúan siendo los primeros en ambas poblaciones estudiantiles.

Los errores más frecuentes según los estudiantes, y no mucho menos en porcentaje que los anteriores, son aquellos referidos a la comprensión de los contenidos disciplinares. (A diferencia de los estudiantes de Cálculo que esa dificultad está en un último lugar).

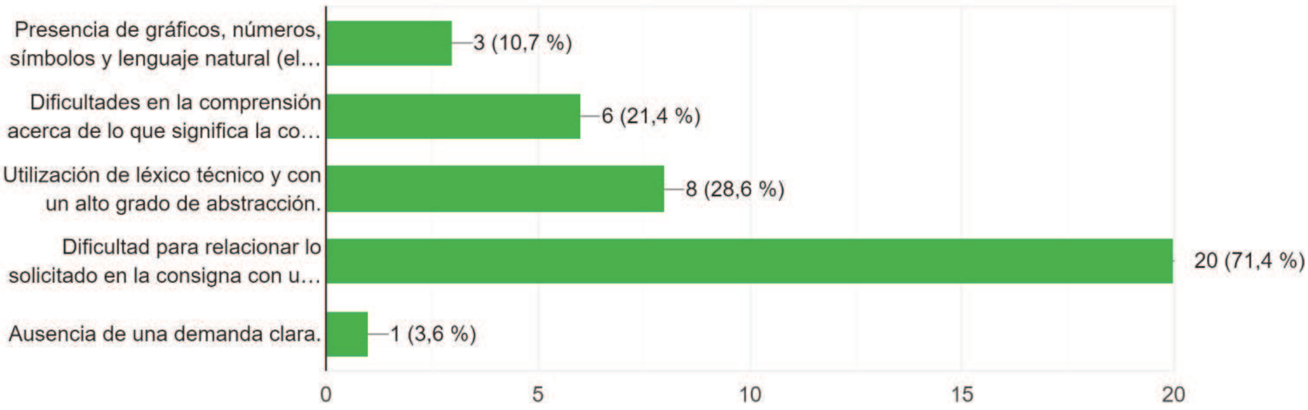
Con respecto a los errores provenientes de problemas en la conversión de un registro semiótico a otro, si bien existen diferencias en los porcentajes, se instala en ambas poblaciones de estudiantes en tercer término.

En cuarto lugar, se hallan los problemas con las demandas múltiples. A diferencia del grupo estudiantil de Cálculo, aquí se observa menor incidencia de ese aspecto en la procedencia de errores.

El mayor porcentaje de dificultades en la comprensión de consignas en esta población estudiantil se enmarca en el desconocimiento de las prácticas discursivas de la cultura académica. Estos alumnos son ingresantes que se encuentran en una situación de umbral respecto a la universidad y se sitúan en una etapa procesual donde, de manera gradual, van entrando a la comunidad discursiva universitaria, es decir, a sus modos de pensar, escribir, leer y hablar. Esta umbralidad, junto con otras problemáticas que traen los ingresantes, (como, por ejemplo, la formación en los niveles educativos anteriores), dificulta la comprensión de consignas y el significado de las demandas en la universidad. Si bien la cultura discursiva académica supone conocimientos que deben ser enseñados en la universidad, existen otros más básicos que no han sido aprendidos en las instancias educativas anteriores. En matemáticas podría ser comprender qué es justificar, cómo se define, la relación lógica entre los enunciados, entre otros.

Pregunta II (Estudiantes):

Las respuestas de los estudiantes más avanzados (Cálculo II) a esta pregunta fueron 28 de los 33 que participaron de la encuesta. Las respuestas son:



El porcentaje más alto de respuestas (20, un 71.4%) se asigna a la dificultad para relacionar lo solicitado en la consigna con el concepto trabajado en clases.

En segundo lugar (8 respuestas, 28.6%), se encuentran las dificultades originadas en la utilización de léxico técnico y alto grado de abstracción.

En tercer lugar (6 respuestas, 21.4%), los estudiantes hallan dificultades en la comprensión de lo que significa la consigna, es decir, qué solicitan realizar las diferentes demandas.

En cuarto lugar (3 respuestas, 10.7%), los estudiantes asignan a la presencia simultánea de varios registros semióticos el origen de algunas dificultades.

En quinto lugar (1 respuesta, 3.6 %), un estudiante señala dificultad a la presencia de demandas no claras.

Con relación a ejemplos de demandas no precisas, un alumno expresa: "(…) hay casos en los cuestionarios en los que las diferencias entre cada ítem (…) en una misma pregunta son mínimas y bastante confusas, lo cual hace que dude de lo que estudié porque me confunde que no haya una diferencia muy notable o justificable".

Se observa otra respuesta en comentarios adicionales:

"En general, cuando no entiendo una consigna es directamente por falta de estudio (es por esto por lo que no marqué ninguna opción). Una vez estudiados los conceptos para la resolución de algún tipo de ejercicio, solo queda aplicar estos conceptos para resolverlo".

A partir de las respuestas obtenidas en este punto, se puede inferir que la mayor dificultad señalada por los estudiantes concierne a los problemas para relacionar lo solicitado en la consigna con los conceptos aprendidos en clases. Este aspecto es el que más respuestas recibe y es sensiblemente mayor al porcentaje del resto de los ítems. Esto amerita varias lecturas e interpretaciones posibles.

En primer lugar, da cuenta de una fragilidad y superficialidad en los aprendizajes. Un aprendizaje profundo, reflexivo y rico, supone por parte del aprendiz, entre otras, la posibilidad de establecer diversas relaciones e inferencias en y entre los contenidos, además de poder ir sorteando diferentes obstáculos y desafíos cognitivos, en contextos educativos conocidos y nuevos. De este modo, los problemas no estarían asociados a la formulación en sí de la consigna, sino con la superficialidad de los aprendizajes que no permite responder correctamente y asociar lo demandado con lo aprendido.

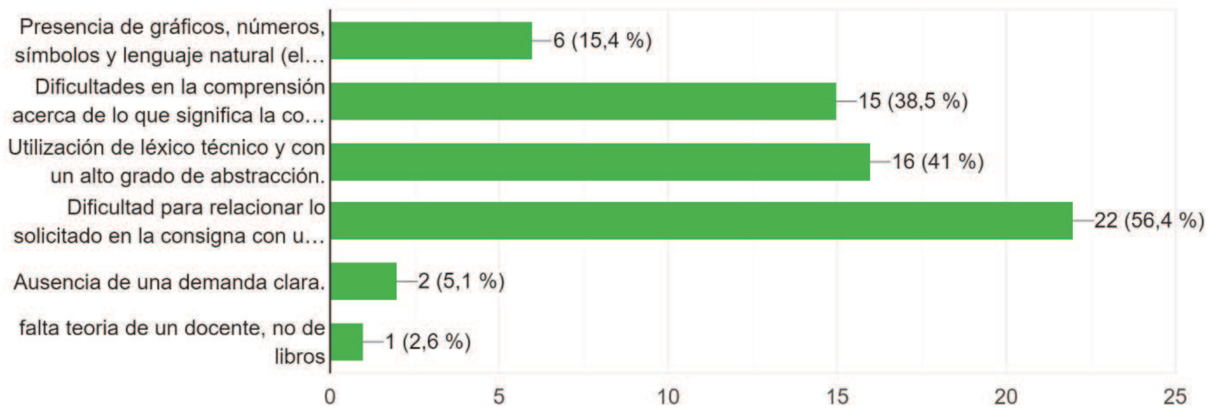
En segundo lugar, y en relación directa con lo manifestado anteriormente, se remarca la falta de estudio o con una metodología que promueva aprendizajes donde se aprecie un uso activo de conocimiento.

En tercer lugar, solo un estudiante eligió la opción de demandas poco claras. De acuerdo con la percepción de los estudiantes, y a partir de sus comentarios, parte de los problemas en los errores no estaría conectado con la formulación de las consignas, sino con la falta de estudio, en el modo de aprender los contenidos y en la fragilidad de estos: "En general, cuando no entiendo una consigna es directamente por falta de estudio (es por esto que no marqué ninguna opción)".

Sin embargo, un comentario alude a la complejidad de las consignas: "hay casos en los cuestionarios en los que las diferencias entre cada ítem que se enuncia en una misma pregunta son mínimas y bastante confusas (…)".

Es de destacar que el lenguaje técnico y abstracto representa un nivel de dificultad mayor, por ejemplo, a la de la concomitancia de varios registros semióticos. Esto está relacionado con las características del registro matemático en la utilización de lenguajes simbólicos.

Las respuestas de los estudiantes ingresantes a la pregunta fueron 39 de los 40 que participaron de esta encuesta. Las resultados son:



22 respuestas, un 56.4%, se asigna a la dificultad para relacionar lo solicitado en la consigna con el concepto trabajado en clases.

En segundo lugar (16 respuestas, 41%), se encuentran las dificultades originadas en la utilización de léxico técnico y alto grado de abstracción.

En tercer lugar (15 respuestas, 38.5%), los estudiantes señalan problemas en la comprensión de lo que significa la consigna, es decir, qué solicitan realizar las diferentes demandas.

En cuarto lugar (6 respuestas, 15.4%), aparece como inconveniente la presencia simultánea de varios registros semióticos.

En quinto lugar (2 respuesta, 2.6 %) un estudiante marca como dificultad la presencia de demandas no claras. Con relación a esto no se observan ejemplos ni explicación.

Una respuesta en comentarios adicionales expresa que “Normalmente los ejercicios trabajados en clases son "básicos" comparados con los de los parciales”.

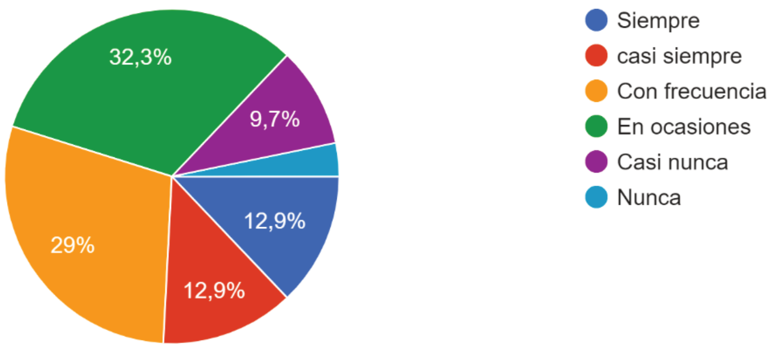
A partir de estas respuestas se infiere que los estudiantes asignan un mismo nivel de dificultad tanto en lo referente a los errores en los procedimientos como a aquellos provenientes de la interpretación en las demandas.

La ubicación de problemas que hallan los ingresantes a la hora de comprender una consigna es la misma que la de cálculo avanzado, lo que conduce a pensar qué dificultades persisten en diferentes tramos de la carrera.

Con respecto a los comentarios adicionales, se puede inferir que las consignas presentadas en los parciales son más elaboradas y difíciles que las trabajadas en clases y, de este modo, existiría un desfasaje en la complejidad entre las tareas abordadas en el cursado y lo que aparece en los exámenes.

Pregunta III (Estudiantes):

Las respuestas de los estudiantes avanzados (Cálculo II) fueron 31 de los 33 que participaron de esta encuesta. Ellas son:



El 32.3% señala que en ocasiones requiere que los docentes expliquen las consignas.

En segundo lugar (29%), se encuentran aquellos que necesitan con frecuencia que le expliquen las consignas.

En tercer lugar (12.9%), se ubican por igual los que siempre o casi siempre precisan que les expliquen la consigna.

En cuarto lugar (9.7%), aparecen los que casi nunca requieren de explicación.

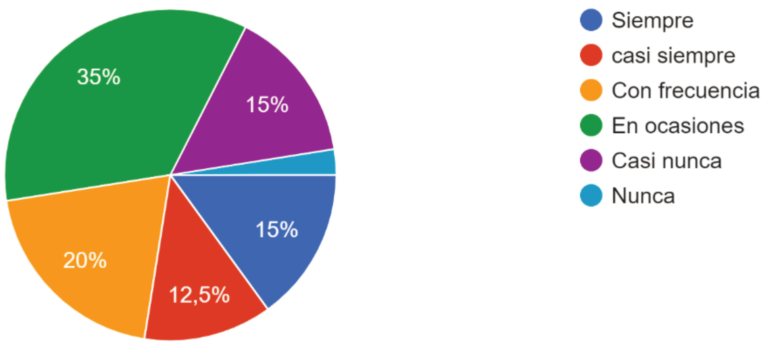
La opción nunca no fue seleccionada.

En cuanto a los comentarios adicionales, se observa uno: "Del manual de estudio SIEMPRE, por eso veo los videos de práctica que suben".

A partir de las respuestas obtenidas en este punto, se desprende que los estudiantes necesitan con frecuencia explicación de las consignas por parte de los docentes. Los porcentajes de los que "casi nunca" o "nunca" precisan de una explicación son los más bajos.

Como contrapartida, también es menor el porcentaje de los que casi siempre o siempre requieren de una explicación. El mayor número de respuestas se aprecia en los que "con frecuencia" o "en ocasiones" precisan de la ayuda del docente.

Las respuestas de los estudiantes ingresantes a esta pregunta fueron 40. Las respuestas son:



El porcentaje mayor de estudiantes (35%) manifiesta que" en ocasiones" necesita que los docentes expliquen las consignas.

En segundo lugar (20%), se encuentran aquellos que precisan "con frecuencia" que le expliquen las consignas.

En tercer lugar (15%), se ubican por igual los que "siempre" o "casi nunca" requieren de la explicación de la consigna.

En cuarto lugar (12.5%), se hallan los que "casi siempre" piden una explicación.

La opción nunca no fue seleccionada.

Se presenta una respuesta en comentarios adicionales: "Es necesario una constante explicación de lo que se trabaja, para comprender y afianzar conocimientos, como para no dejar nada a libre interpretación".

De lo obtenido se desprende que los estudiantes necesitan con frecuencia explicación de las consignas por parte de los docentes. Los porcentajes de los que "casi nunca" o "nunca" precisan de una explicación, son los más bajos, aunque los "casi nunca" es más alto que en los de cálculo II.

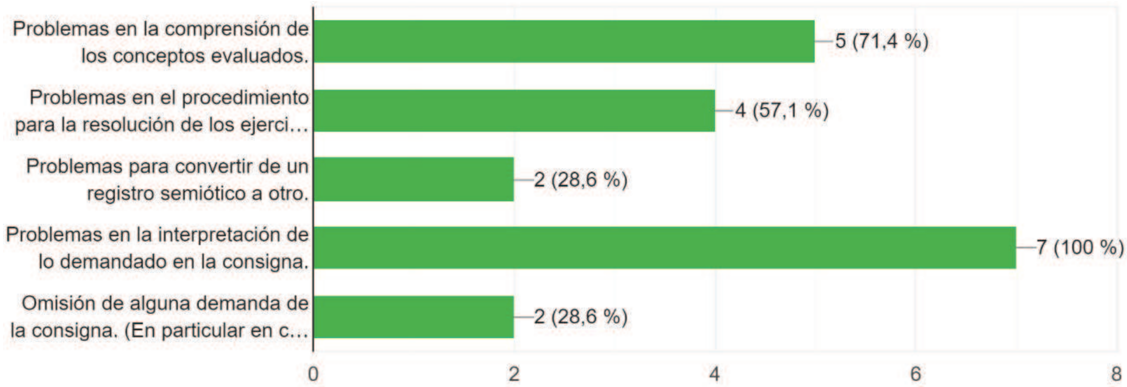
Como contrapartida, también es menor el porcentaje de los que "casi siempre" o "siempre" necesitan de una explicación.

El mayor número de respuestas se aprecia en los que "con frecuencia" o "en ocasiones" requieren de la ayuda del profesor. En este sentido, se observa, en consonancia con los resultados de los estudiantes de cálculo II, un alto porcentaje de explicación de los docentes para comprender las consignas.

En los comentarios, uno de los estudiantes señala que es preciso realizar explicaciones constantes por parte de los docentes con la finalidad de afianzar y profundizar los conocimientos. Sin embargo, la opinión del estudiante apunta más a la explicación de los contenidos que a la de la consigna en sí: “para comprender y afianzar conocimientos, como para no dejar nada a libre interpretación”.

Pregunta I (Docentes):

Las respuestas de los docentes a esta pregunta fueron 7. Las respuestas son:



Con 7 respuestas, un 100%, los docentes responden que los errores provenientes de problemas en la interpretación de las consignas se encuentran en primer lugar.

En segundo lugar (5 respuestas, 71.4%), los errores que los docentes señalan tienen que ver con la comprensión de los temas evaluados.

En tercer lugar (4 respuestas, 57.1%), los profesores marcan errores provenientes de problemas en el procedimiento para resolver las consignas.

En cuarto lugar (2 respuestas, 28.6%), se encuentran en la misma posición errores procedentes de dificultades para convertir de un registro semiótico a otro, como omisión de alguna demanda dentro de las consignas, en especial en las múltiples.

Se observa una respuesta en comentarios adicionales: “No es buena la internalización de los conceptos en sus esquemas cognitivos, muchas veces la misma no va acompañada de la necesaria reflexión”.

A partir de estas respuestas, se puede inferir que los docentes asignan o muestran mayores errores en problemas provenientes de dificultades en la comprensión de las consignas. Esto difiere con la percepción de los estudiantes de Cálculo II (más avanzados), aunque sí coincide con lo expresado por las respuestas de los ingresantes.

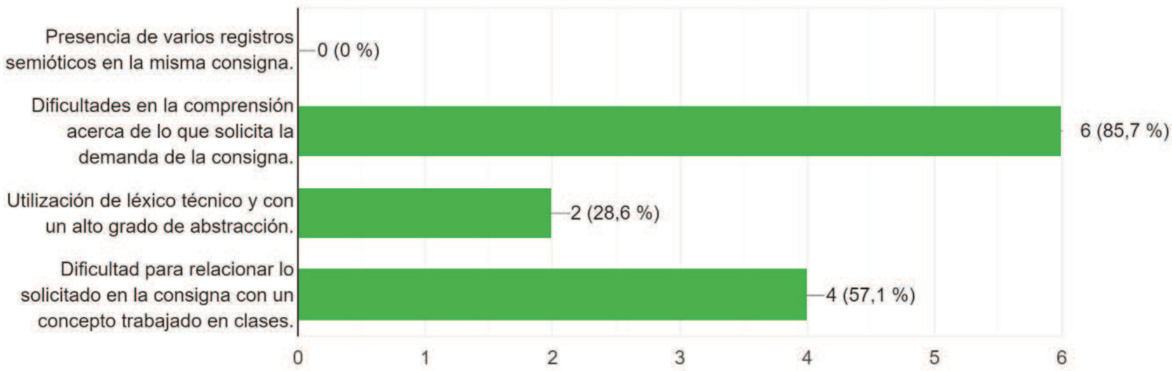
Mientras que, para los estudiantes ingresantes y avanzados, los errores originados en los problemas procedimentales son los más frecuentes, en opinión de los docentes se encuentran en un tercer rango. En un segundo lugar, los profesores señalan como recurrentes los errores vinculados con la comprensión de los conceptos evaluados.

Tanto para docentes como estudiantes, la omisión de demandas no es el error más frecuente en los exámenes. Sin embargo, el cambio de registro se observa en los ingresantes como el origen de errores más común, aunque los profesores no lo destacan como central.

En un comentario adicional, un docente expresa que no es buena la internalización de los conceptos en sus esquemas cognitivos. En este sentido, se hace alusión a la fragilidad en el conocimiento (aprendizaje superficial), al no poder ser internalizado y utilizado activamente en otras instancias.

Pregunta II (Docentes):

Las respuestas de los docentes fueron 7. Ellas son:



En primer término (6 respuestas, un 85.7%), los docentes responden que las dificultades de comprensión acerca de lo que solicita la consigna son las principales.

En segundo término (4 respuestas, 57.1%), los errores que los docentes señalan tienen que ver con la dificultad para relacionar lo solicitado en la consigna con conceptos trabajados en clases.

En tercer lugar (2 respuestas, 28.6%), los profesores indican dificultades provenientes de la utilización de lenguaje técnico y abstracción.

El punto sobre registros semióticos no recibe respuestas.

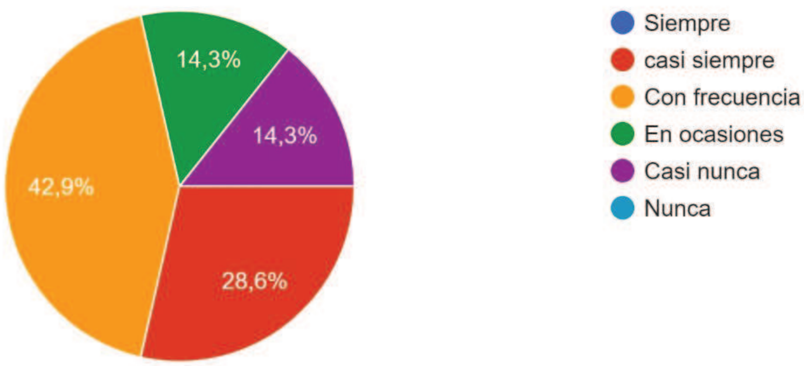
Se observan dos respuestas en comentarios adicionales: “En general (no sólo en esta disciplina) no muestran una comprensión cabal de lo que leen. Este problema se profundiza aún más en una disciplina como las mates, que tienen un vocabulario, simbología y nomenclatura propias”. “El último ítem marcado lo observo en la resolución de problemas contextualizados en la vida real o en otras ciencias”.

A diferencia de lo que establecen los estudiantes como primera dificultad en las consignas que es relacionar lo solicitado con los conceptos estudiados, los docentes enfatizan en que los alumnos no comprenden el significado de las demandas y solamente, en segundo lugar, marcan los problemas derivados de la relación entre demandas y conceptos. Sobre este último aspecto hay coincidencia.

Aunque con un porcentaje menor que en estudiantes, los docentes reconocen una incidencia de los problemas de comprensión a partir de la utilización de lenguaje técnico y niveles de abstracción. No obstante, no marcan dificultades referidas a la resolución de consignas por la concomitancia de diferentes registros matemáticos.

Por último, uno de los profesores enmarca los inconvenientes de la comprensión lectora en un contexto más amplio, no solo en las matemáticas. Agrega que los registros propios de la matemática complejizan la comprensión. Si bien el docente destaca esta problemática, no se halla en las respuestas ninguna referencia a dificultades originadas por la utilización de diferentes registros matemáticos.

Pregunta III (Docentes):



En primer término, (42%) de los docentes, expresan que los estudiantes necesitan con frecuencia la explicación de las consignas.

En segundo lugar (28%), señalan que deben explicar las consignas casi siempre.

En tercer lugar (14.3%), aparece el mismo porcentaje de “casi nunca” o “en ocasiones”.

Se observan tres respuestas en comentarios adicionales: “Considero que si el alumno (casi adulto) tiene una duda de comprensión va a preguntarla. No coincido con leer el examen e ir explicando porque deja entrever que la redacción que hicimos del examen no es clara”. “Depende del tipo de consigna: las que son referidas a la aplicación directa de procesos o algoritmos mecánicos, no suelen ofrecer dificultad. Sí las de relacionar distintos conceptos entre sí y que son de elaboración de estrategia”. "Con frecuencia" se necesita hacerlo en alumnos de 1er. año, pero "en ocasiones" para alumnos de 2do. año., particularmente Ecuaciones Diferenciales”.

A partir de estas respuestas se desprende que los estudiantes necesitan con frecuencia explicación de las consignas por parte de los docentes. A diferencia de las respuestas de los estudiantes, los profesores indican, en primer lugar, que deben explicar con frecuencia (los estudiantes lo colocaron en segundo término) las consignas y, en segundo término, aparece el “casi siempre” (los alumnos lo asignaron en los últimos lugares).

En los comentarios adicionales, los docentes amplían y precisan qué tipo de consignas y demandas requieren de mayor explicación por parte de ellos. En primer término, las que exigen procesos de relación entre los conceptos, es decir, actividades que promueven mayor desafío cognitivo y aquellas que se vinculan a desarrollar estrategias cognitivas para la resolución de problemas. En segundo término, se señala el tema de “ecuaciones diferenciales” que requiere mayor explicación en estudiantes de segundo año de las carreras. En cambio, las consignas que incluyen tareas de menor impacto cognitivo, más relacionadas con la reproducción o aplicación “las que implican aplicación de procesos o algoritmos mecánicos”, según las palabras de uno de los profesores, generan menor necesidad de aclaración.

Por último, se señala que para los ingresantes la explicación se debe realizar con frecuencia, hecho que también es reseñado por los estudiantes, aunque no solo de primer año. Al respecto, desde la “percepción” de los estudiantes, todavía a lo largo de los años precisan con frecuencia explicación por parte de los docentes y no sólo en el ingreso.

7.1. A Modo De Cierre

Estas encuestas presentan percepciones sobre diversos aspectos referidos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en estudiantes y profesores. Las preguntas se centraron en los problemas de comprensión, el origen de los errores y el lugar que tienen las consignas en todo ello. Muchas de esas respuestas fueron empleadas como insumos en el análisis del corpus para comprender en profundidad las potencialidades y problemas de las consignas en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Si bien la población de estudiantes ingresantes indica mayor dificultad a la hora de comprender las demandas de una consigna que sus compañeros de Cálculo II, en general se observa uniformidad en las respuestas que se asignan a los problemas y errores en la resolución de los ejercicios matemáticos. En esta misma línea, ambos grupos señalan que la falta de estudio o los problemas derivados de relacionar los conceptos y los conocimientos previos con la práctica, son los principales inconvenientes que se le presentan a la hora de dar respuesta a una tarea académica. Esa percepción difiere en el caso de los docentes.

Los profesores remarcan que, tanto las principales dificultades en la resolución de las consignas, como los errores cometidos en ellas, son producto de la falta de comprensión de lo que se solicita. Estas respuestas divergen de la opinión de los estudiantes quienes asignan problemas en la relación entre conceptos. Si bien también los docentes reconocen estos aspectos señalados por los alumnos, lo ubican en un lugar secundario.

En función de estas observaciones y reflexiones de estudiantes y profesores, se fue construyendo el análisis de las consignas con la finalidad de hallar líneas de pensamiento sobre su impacto en la construcción del aprendizaje matemático.

CONCLUSIONES

A lo largo de esta tesis se procedió a describir y analizar un corpus de consignas del área de matemática (Matemática básica y Cálculo II) con la finalidad de poder comprender de qué manera sus configuraciones discursivas, léxico-gramaticales, semánticas y cognitivas impactan en los procesos de enseñanza, aprendizaje y comprensión por parte de estudiantes y docentes. Como todo recorte que implica la selección de un corpus, quedaron aspectos que no fueron incluidos, pero que podrán ser fuente de futuras investigaciones.

En la primera parte de este apartado, se realizará una síntesis reflexiva sobre lo analizado en el corpus elegido. En una segunda etapa, se avanzará en la formulación de algunas líneas de trabajo para pensar una propuesta didáctica a partir de los resultados de esta investigación.

Cabe señalar que esta tesis no se construyó como una investigación especulativa, sino que se sostuvo en el análisis de recursos didácticos genuinos empleados por las cátedras de matemática (consignas de exámenes, trabajos prácticos y un manual). Esta dimensión es central, puesto que el objetivo de la investigación es aportar un conocimiento reflexivo que derive en la potenciación y resignificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el nivel superior.

La singularidad que aportó este trabajo consistió no solo en reflexionar acerca de la dimensión cognitiva y didáctica de las consignas de matemática, sino también en el lugar del lenguaje en la construcción del conocimiento. Si bien es sabido que el lenguaje tiene un papel activo en el aprendizaje en general, como lo sostienen lingüistas y diferentes teóricos cognitivistas, en el discurso matemático, en tanto constructo multimodal, presenta particularidades que complejizan su lectura y comprensión.

El análisis efectuado sobre el género consignas, las demandas y el análisis semántico-cognitivo de estas se efectuó desde un enfoque tripartito: disciplinar-didáctico- y lingüístico-discursivo.

En primer lugar, se analizó el género consignas. En esta instancia se describieron sus etapas y fases, de qué manera se organiza el texto, las estructuras recurrentes, sus particularidades dentro de los problemas matemáticos, como también de qué manera todos estos aspectos se vinculan con los procesos de enseñanza y aprendizaje, en especial, aquellos relacionados con la comprensión.

En segundo lugar, se abordó la dimensión de la interacción en las consignas, atendiendo, principalmente, a la configuración de la demanda desde la metafunción interpersonal. Así, se analizó la realización de la demanda tanto en el estrato semántico, como en el léxico-gramatical. También aquí se señalaron los vínculos que estos aspectos poseen con la comprensión, el aprendizaje y la enseñanza disciplinar. Cabe recordar la centralidad que adquiere la demanda de la consigna, ya que ella es la que indica al estudiante qué tarea, qué acción específica debe llevar a cabo para resolver los ejercicios. Además, en la demanda se concentran muchas de las dificultades relacionadas con la resolución de las consignas de manera satisfactoria.

En tercer lugar, se realizó una descripción y análisis de las demandas desde una perspectiva semántico-disciplinar y cognitiva. Asimismo, se estableció una comparación entre el tipo y frecuencia de demandas en los exámenes y trabajos prácticos, como las que aparecen en el manual de Cálculo.

Por último, se dedicó un apartado para analizar el resultado de las encuestas llevadas a cabo a estudiantes y docentes. Aquí se examinaron las respuestas obtenidas y fueron explicadas y "leídas" en relación con el corpus de consignas estudiado.

En lo que concierne al género, específicamente en lo que respecta a sus etapas y fases, se advierte que estas no siempre se manifiestan en su totalidad ni siguen un orden fijo; no obstante, la etapa correspondiente a la expresión de la tarea académica está presente en todos los casos. Las fases de la demanda y el objeto se hallan en todos los casos, aunque no así las circunstancias. El objeto, por ejemplo, puede manifestarse de manera explícita, de forma elidida o a través de un pronombre. La primera, es la más frecuente. Esto permite afirmar que la etapa de la expresión académica y sus dos primeras fases son fundamentales para el funcionamiento del género consignas de matemática; no puede haber consignas sin que se exprese la orden y lo que se busca alcanzar por medio de ella.

Otra característica que emerge de la descripción es la concomitancia funcional de algunas etapas y fases. En este sentido, se observa que, por caso, las circunstancias pueden operar como tales, pero al mismo tiempo ser parte del objeto y del andamiaje cognitivo. También, la información para la resolución de la actividad que puede funcionar como andamio cognitivo al mismo tiempo. Esto conduce a afirmar que, si bien existen etapas y fases del género elementales/estructurales, estas pueden variar de acuerdo con el contexto comunicativo en que se producen. En otras palabras, atender a quiénes se destinan las consignas, cuál es el contenido a enseñar, dentro de qué campo específico se enmarca, cuál es el propósito de la clase, qué canal se empleará (consignas orales o escritas), qué concepción teórica de aprendizaje y enseñanza se adopta, entre muchas otras, puede incidir en la conformación de las etapas y fases.

Las características señaladas pueden constituirse en fuente de dificultad por parte de los estudiantes si esta organización y funcionamiento del género no es enseñado de manera explícita, más aún cuando sus etapas y fases son flexibles y presentan multifuncionalidad. A esto se suman otros aspectos de la organización de las demandas en el género, como son las macro y microconsignas, compuestas por una profusión de tareas en un mismo enunciado y formuladas, además, en una diversidad de formas gramaticales. Asimismo, la presencia de diferentes registros semióticos dentro del texto de la consigna puede conducir a cierto tipo de confusiones y, por eso, deberá ser tarea de la enseñanza "orientar la mirada" para profundizar sobre el funcionamiento de los registros matemáticos en este tipo de tareas académicas, es decir, cómo se articulan, qué se resuelve primero, cuáles son los supuestos, sobre qué se debe focalizar, qué tipos de registros se espera en las respuestas, entre otros.

Las diferencias composicionales genéricas entre el manual y los exámenes no son tan marcadas, aunque es posible identificar algunas. En el primer caso, se incorporan los paratextos, las circunstancias orientadoras del ejercicio, como también la presencia frecuente de la etapa del andamiaje cognitivo. Por ser el manual un género de divulgación escrito, destinado a un público con escasos conocimientos sobre los contenidos abordados y al ser el mismo texto el que media la enseñanza con una propuesta didáctica autogestionada y autónoma, precisa de instancias de andamiaje que puedan reemplazar las orientaciones o explicaciones que un docente puede brindar en las clases presenciales. En esta misma línea, otra etapa que se evidencia con frecuencia es la de información para la resolución de la actividad. El andamiaje contribuye con la comprensión de las consignas, puesto que direccionalizan la acción, la ordena, la especifica; en otras palabras, les traza a los estudiantes un camino de lectura e interpretación. Este tipo de recurso didáctico es significativo en áreas disciplinarias que poseen un discurso más abstracto, lógico y multimodal como la matemática.

Los problemas analizados, por su parte, presentan etapas y fases propias que se condicen con sus características textuales. En general, se expresan como enunciados descriptivos o narrativos que parten de la exposición de una situación inicial para luego precisar la problemática a resolver. La etapa de la expresión de la tarea académica, en tanto, se configura por preguntas de búsqueda de información o mediante otras realizaciones léxico-gramaticales entre las que sobresalen las de imperativo e infinitivo.

Tanto los problemas como otras actividades prácticas de investigación, de síntesis, de experimentación, de lectura de artículos o de escritura de una explicación, proponen y promueven un tipo de aprendizaje diferente basado en el uso activo del conocimiento. Dicho de otro modo, buscan no solo la reproducción o la aplicación de los saberes, sino una utilización de los conocimientos para resolver problemas y casos de la vida real o de problemáticas que se pueden vincular con la especificidad disciplinar de las carreras de la facultad.

Los problemas plantean, además, una complejidad que puede convertirse al mismo tiempo en desafíos cognitivos potentes, ya que, para alcanzar una resolución, el estudiante debe articular diferentes registros, debe activar estrategias de comprensión lectora y también poner en juego estrategias variadas de pensamiento.

La descripción del género permitió, asimismo, identificar particularidades funcionales del lenguaje que fueron analizadas a nivel de su realización en el estrato semántico-discursivo y que poseen proyecciones en torno a la comprensión y a la didáctica. En cuanto a la perspectiva semántico-discursiva, las conjunciones externas y relaciones léxicas (metafunción ideacional) y la identificación (metafunción textual) dieron cuenta acerca de cómo se construye el significado y la experiencia matemática en el lenguaje.

Desde una perspectiva lógica, las conjunciones externas mostraron de qué manera se conectan y se organizan las actividades a partir de marcadores como ‘y’ y ‘después’. Esta forma de disponer y conectar las actividades, que indican temporalidad, adición y causa-consecuencia, se vincula con los modos en que el campo de matemática organiza el lenguaje para evidenciar ordenamiento y secuenciación de las ideas. En el segundo caso, las relaciones léxicas, funcionan en la construcción del campo semántico del texto y revelan cómo se organiza y clasifican personas, cosas, procesos, lugares y cualidades. Todo esto demuestra la forma en que el campo matemático ha diseñado la disciplina.

La identificación, que se observa en la etapa de andamiaje cognitivo del género, fue analizada principalmente para entender las huellas de los participantes e identificar a quién refieren ciertas expresiones o componentes del lenguaje. En el caso descrito, para que el andamiaje cognitivo funcione es preciso que se pueda rastrear, a nivel del lenguaje, quién es la 'figura' a la que se alude. Este ejemplo suma, además, una dificultad propia de las matemáticas relacionada con la configuración multimodal puesto que la figura es una ilustración.

En lo que respecta a las proyecciones didácticas y de comprensión, el análisis o explicitación de estos elementos puede transponerse didácticamente como pistas de lectura que colaboren con la recuperación del tema global de un problema, pero también que ayuden a comprender el texto y a visualizar cómo el discurso matemático elabora la experiencia disciplinar. Es de destacar que el propósito no es que los estudiantes efectúen un análisis discursivo exhaustivo de las consignas, sino que empleen algunos conocimientos lingüísticos a los fines de poder construir los significados textuales. La focalización sobre los recursos discursivos y sus respectivos campos semánticos favorece la interpretación del estudiante a través de una mirada dirigida y centrada en la construcción del significado del texto/problema.

El análisis interpersonal de las demandas en matemática brindó información significativa en relación con el modo en que se construye la negociación y la interacción en las consignas tanto desde una perspectiva sistémico-funcional, como desde la configuración didáctica de la enseñanza de la matemática. En lo que respecta al primer punto, se amplía la descripción del sistema de opciones del español, particularmente desde el sistema de modo, a través del análisis de un corpus de enunciados matemáticos, específicamente dentro del género de consignas; en cuanto a la enseñanza, se pone de relieve cómo las decisiones acerca de las maneras lingüística de elaborar consignas y elegir una forma de demanda sobre otra, impactan directamente en los procesos mismos de enseñanza, configurando no solo la instancia evaluativa del quehacer matemático, sino también las maneras de concebir la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina.

A nivel de la interacción, las consignas y las demandas en particular, se construyen entre un enunciador profesor/autor del manual en posición de poder que ordena a un enunciatario/estudiante cumplir con la resolución de la consigna. Este poder aparece tematizado de dos maneras: a través de la modulación o modalidad deóntica y por medio de la despersonalización de las huellas enunciativas.

La primera se observa en realizaciones léxico-gramaticales que refuerzan y duplican el valor exhortativo de las órdenes a través de formas como las perífrasis verbales o construcciones impersonales. Entre "Realice un gráfico" y "Debe realizar un gráfico" no existe una diferencia en términos de alcance semántico de la demanda, sin embargo, en el segundo caso, desde una dimensión interpersonal, se establece con mayor claridad quién está en posición de poder y de conocimiento y quién debe responder a él. No es de suponer que el estudiante le diga al docente qué debe hacer. Estas construcciones sociales sobre el rol de los sujetos en la educación son transparentadas en el lenguaje a través de dichas selecciones gramaticales.

Asimismo, son recursos léxico-gramaticales que direccionan y organizan con mayor intensidad las demandas y ofrecen menor posibilidad para que el estudiante pueda llevar a cabo una acción que no es solicitada. En ese sentido, funcionan también como una forma de andamiaje cognitivo, ya que orienta al alumno y le indica por cuál camino debe iniciar o resolver la tarea académica.

La segunda, refiere a la construcción de una interacción objetiva que tiende a la despersonalización y la elisión de las huellas tanto del enunciador como del destinatario como ocurre con las cláusulas de proceso no finito a través de infinitivo, las frases preposicionales, las construcciones impersonales, las demandas nominalizadas, entre otras. También el empleo de pronombres como 'usted' contribuye con el distanciamiento y la formalidad enunciativa. Por último, la presencia de símbolos y diferentes registros matemáticos refuerza este poder.

La despersonalización de las huellas enunciativas se corresponde y se enmarca con las características generales del discurso matemático que busca la precisión y se focaliza en el contenido más que en los sujetos de los procesos. Estas formas establecen una distancia entre el sujeto en posición del saber, el docente, y el sujeto aprendiz, el estudiante. El saber es lo que media entre ambos. El conocimiento matemático busca la objetividad y la racionalidad para alcanzar un discurso fáctico. En este sentido, se evitan las construcciones discursivas que introducen matices subjetivos, por caso, las modalizaciones o algunas metáforas léxicas. Así, se busca que los enunciados se presenten como correctos y fácticos.

No obstante, las huellas enunciativas emergen en muchos casos: a través de la flexión del grupo verbal, por medio de modalizaciones o mediante metáforas léxicas.

En cuanto al primero, el destinatario se manifiesta en la flexión del grupo verbal que funciona como predicador en el negociador a través del modo imperativo y, el enunciador, a través de las modalizaciones (en preguntas y otras construcciones con verbos como 'poder', 'necesitar', entre otros) y las metáforas léxicas.

Con respecto a las modalizaciones, se enfatiza el valor de interacción con el enunciatario, una interacción de cercanía que invita a su destinatario, el estudiante, a pensar. Estas modalizaciones encabezan cláusulas interrogativas elementales que se destacan por la búsqueda de información. Se configuran en demandas indirectas que promueven respuestas que buscan generar operaciones cognitivas como la deducción, la hipótesis, la evaluación. La direccionalidad de la acción resolutiva típica de la orden en imperativo se diluye en favor de una demanda más general en la cual es el estudiante quien debe decidir y determinar qué realizar. Esta apertura al razonamiento y a la toma de decisiones está favorecida por el empleo de las modalizaciones. Aquí se observa cómo el estudio del lenguaje ayuda a comprender los procesos de pensamiento y aprendizaje.

Las metáforas léxicas, que pueden ser ubicadas en el sistema interpersonal de valoración, funcionan como un recurso lingüístico que suele provocar algún tipo de reacción emocional en el destinatario a través de significados construidos, en este caso, en el contexto de la clase de matemática de cálculo. Así, estas formas rompen con las expectativas del género "consignas matemáticas". Los estudiantes están habituados a leer e interpretar consignas con realizaciones léxico-gramaticales que buscan la objetividad y la impersonalidad. Esto último se materializa, entre otros, por ejemplo, en la preponderancia del uso de la forma pronominal "usted" por sobre el pronombre "vos". La introducción de expresiones como "no sufra" o "para coronar su obra" en instancias de exámenes parciales y finales puede producir una situación de extrañamiento o desconcierto, pero, al mismo tiempo, una empatía discursiva entre el evaluador y el evaluado. Como se expresó en el análisis, las consignas aparecen en instancias de enseñanza, donde el saber se coloca a examen por parte de un experto que acredita la apropiación o no de esos conocimientos. Esta situación genera una asimetría pedagógica en la cual el que enuncia las consignas se coloca discursivamente en una posición dominante, posibilitada esta por las opciones del simbolismo matemático que se observan en las consignas. La incorporación de este tipo de metáforas impacta en la construcción de un vínculo pedagógico de cercanía diferente al "esperable" en una situación evaluativa. Además de lo afectivo, estas metáforas léxicas pueden funcionar como formas de andamiaje cognitivo puesto que, en los casos analizados, señalan qué no debe hacerse o qué estrategias matemáticas es conveniente evitar o recordar.

Con relación a la realización de la orden en español en el estrato léxico-gramatical, se observa que existen diferentes formas de configurarse. Si bien, las órdenes y las preguntas se realizan de manera congruente en cláusulas imperativas e interrogativas respectivamente, los ofrecimientos pueden interactuar con patrones clausales que no son propios. Las formas frecuentes de realización gramatical de la orden en el corpus relevado son: modo imperativo, usted y vos; cláusulas no finitas con verboides: infinitivos y gerundios; preguntas; perífrasis verbales; frases preposicionales en cláusulas no finitas de realce; frases negativas; demandas negativas; cláusulas impersonales y cláusulas incrustadas.

Esta variedad de realizaciones léxico-gramaticales muestra que las demandas matemáticas en español se pueden construir de manera más directa y "convencional" y, otras, de modo más indirecto. Las demandas indirectas son aquellas que no utilizan un proceso finito (verbo conjugado en modo imperativo), que emplean formas verbales impersonales o que solicitan tareas cognitivas por medio de construcciones gramaticales menos frecuentes en la configuración de la orden (por ejemplo: cláusulas no finitas con verboides; perífrasis verbales; frases preposicionales en cláusulas no finitas de realce, entre otras).

A nivel semántico, estas demandas indirectas, que se realizan léxico-gramaticalmente en patrones clausales que no se corresponden con los propios, se configuran como órdenes, aunque se muestran de manera enmascarada. Esto último significa que su valor perlocutivo se encuentra activo, aunque no se presentan a modo de demandas reales. Continúan siendo demandas, pero se muestran como si no lo fueran; son acciones "enmascaradas", es decir, que no son sencillas de reconocer a partir de una primera vista o lectura. Aparecen con una "máscara" de complemento, circunstancial instrumento o andamiaje cognitivo, aun cuando allí se habilita una tarea, algunas de ellas de tipo cognitivas. Aquí se incluyen ciertas construcciones incrustadas, demandas nominalizadas, frases preposicionales y gerundios y, en menor medida, los infinitivos. Esto posee proyecciones relevantes en el campo de la enseñanza porque el enmascaramiento necesita ser trabajado y "develado" para comprender con precisión el valor perlocutivo y semántico de la orden. Exige por parte de los profesores desarmar en clases el género consignas, haciendo énfasis en los supuestos implicados en este tipo de tareas y explicitar cómo abordar la resolución de una actividad cuando aparecen consignas con estas particularidades gramaticales.

Del relevamiento llevado a cabo surge que la configuración de la demanda en las consignas es la prototípica, es decir, a través del empleo del modo imperativo, el infinitivo y las preguntas, en ese orden. Asimismo, en el caso del modo imperativo, la flexión verbal predominante es la del pronombre "usted" por sobre el "vos". Si bien la elección entre un tipo u otro de pronombre puede responder más a una cuestión de estilo y no afecta la comprensión de la consigna, sí da cuenta de una variedad lingüística más asociada a la formalidad del discurso matemático donde, como se explicó, intenta prescindir de toda modalización o inscripción subjetiva enunciativa. Esta situación contrasta con lo que podría ser esperable en términos de variedades lingüísticas, al ser el pronombre "vos" el que se usa mayormente en la región rioplatense donde se ubica la facultad.

Estos hallazgos que surgen de la realización léxico gramatical de las demandas aportan información que puede ser leída e interpretada en clave didáctica. En primer lugar, interpela al docente a reflexionar sobre el diseño de las consignas en cuanto a la claridad, precisión y focalización acerca de lo que le solicita hacer al estudiante. ¿Una demanda estructurada con una frase preposicional en cláusulas no finitas de realce es clara para el alumno? ¿Dónde se ubica la orden principal cuando es más de una? Si el profesor desea que su estudiante realice una representación gráfica a través de una calculadora graficadora, ¿elegirá focalizar de manera más directa la representación gráfica y de forma más indirecta el instrumento? Por ejemplo, ¿es lo mismo en términos de impacto interpretativo "Utilice una calculadora graficadora para realizar la representación gráfica de la función" que "Represente gráficamente la función utilizando una calculadora gráfica"?). En ocasiones las órdenes indirectas pueden presentar mayor dificultad en la comprensión de la consigna. Esto no significa que se deban descartar estas maneras de enunciar las demandas, pero sí que a la hora de su diseño se reflexione de forma explícita sobre las proyecciones lingüísticas y cognitivas en los procesos de aprendizaje de los estudiantes. En segundo lugar, si estas formas menos canónicas e indirectas de configurar la orden son constitutivas del discurso matemático, entonces junto con los contenidos disciplinarios, el docente deberá enseñar cómo leerlas, dónde colocar el foco, por dónde comenzar y por dónde seguir, etc. Los problemas de comprensión que se observan en el ingreso a la universidad y en el ciclo básico de formación demuestran que la tarea del profesor no puede circunscribirse solo a garantizar la apropiación de los contenidos disciplinares. Junto a estos últimos, tendrá que enseñar habilidades del pensamiento, acompañadas de una reflexión metalingüística sobre la construcción del campo discursivo del cual es experto.

Dentro de las demandas indirectas o con valor perlocutivo de orden enmascarada, se destacan los gerundios y las frases preposicionales. Las realizaciones con gerundios, por ejemplo, suman 19, mientras que las de frases preposicionales con función de finalidad o propósito alcanzan 33, es decir, que su uso es frecuente en el corpus analizado. Desde una perspectiva léxico-gramatical, estos funcionan como cláusulas de realce de modo y finalidad, desde la metafunción ideacional, o como adjuntos modales en el caso de la cláusula descrita por la metafunción interpersonal. En ambos, forman parte de los elementos mínimos y necesarios para la configuración de la cláusula (un proceso finito). No obstante, además de circunstancias o realce, funcionan como demandas instrumentales o cognitivas.

Las demandas instrumentales son aquellas que solicitan acciones que no poseen un impacto cognitivo profundo, sino que se limitan a andamiar la orden a través de la especificación de qué instrumento conceptual o qué herramienta debe utilizarse para llevar a cabo la demanda cognitiva o disciplinar propiamente dicha. En el corpus relevado, aparecen con mucha frecuencia, en especial por medio de los verbos "usar" y "utilizar", que son los más empleados para este tipo de tareas. Se observan en procesos finitos en modo imperativo, como también en cláusulas no finitas con gerundio. Cabe señalar que en algunos casos el empleo de este último no siempre remite a instrumentalidad, sino que instaura un valor de simultaneidad y duración. Tal situación se produce cuando se presentan dos órdenes cuya ejecución requiere de realización simultánea. No obstante, aunque ambas acciones deben cumplirse, una de ellas se presenta siempre como la principal. El ejemplo sería el de "Complete la tabla estimando gráficamente".

La ubicación de este tipo de demandas dentro de la cláusula es un aspecto central para tener en cuenta en lo que respecta a las decisiones didácticas vinculadas con el aprendizaje. Cuando el realce es de modo, mediante un gerundio, este se constituye en una demanda instrumental y la cognitiva se ubica en el verbo flexionado. En cambio, cuando el realce es de finalidad, por medio de una frase preposicional, esta funciona como una demanda cognitiva y la cláusula principal se convierte en instrumental. Estos análisis que toman en consideración aspectos vinculados con las realizaciones léxico-gramaticales y con la dimensión semántica (el enmascaramiento del valor asociado a la orden), contribuyen en la reflexión sobre el impacto didáctico que poseen estos elementos en la configuración de la clase. Decidir en qué lugar ubicar las demandas cognitivas disciplinares, y qué selección léxico-gramatical del sistema del español elegir para realizar la orden no es una actividad azarosa, sino que exige por parte del docente una reflexión consciente. Esta última refiere a pensar el diseño de la consigna en términos de comprensión, es decir, qué formas del lenguaje pueden ser más claras y accesibles a los estudiantes y que, al mismo tiempo, promuevan un aprendizaje reflexivo, activo y rico.

Desde una dimensión del aprendizaje, este tipo de demandas desafían a los estudiantes a la hora de comprender adecuadamente lo que se les está solicitando, ya sea porque dentro del mismo enunciado aparecen dos demandas, una instrumental y otra cognitiva, o por el valor de simultaneidad que se genera entre ellas. ¿Qué valor tiene un gerundio de simultaneidad a la hora de resolver un ejercicio? ¿Cómo se ubica una demanda instrumental? Estas observaciones cobran relevancia, si se pone en consideración la percepción de estudiantes y docentes sobre las dificultades que ofrecen las consignas para resolver pertinentemente los ejercicios. Por ejemplo, el 85% de los profesores encuestados expresa que uno de los principales obstáculos de los estudiantes a la hora de comprender lo solicitado en las consignas de matemática, se relaciona con lo que pide la demanda. En cuanto a los alumnos, hay visiones diferentes que en ocasiones difiere con la de los profesores. Entre ellas, incluyen la falta de estudio o la complejidad disciplinar. Otros, sí asignan a la formulación de las consignas la fuente de algunas complicaciones en la compresión. Un estudiante de Cálculo II, escribe: “Dudar mucho de a qué apunta la consigna, ya que los enunciados suelen ser bastante dudosos y entreverados, de manera que muchas veces se interpreta algo incorrecto a pesar de haber estudiado y practicado mucho y entender el tema”. “enunciados dudosos y entreverados”, es decir, demandas y consignas que generan dudas por la poca claridad de estas en lo que hace a su formulación y también por lo “entreverado”, o sea, debido a que se mezclan una cosa entre otras o varias entre sí. La inclusión de este comentario por parte del estudiante no busca generar un juicio de valor sobre el desempeño de los profesores; los factores por los cuales un alumno no comprende una consigna son múltiples y algunos de ellos provienen de estadios anteriores de su formación escolar, no obstante, puede tomarse como un elemento a tener en cuenta para resignificar las clases en la universidad.

La ubicación de las demandas dentro de la cláusula, por caso, puede provocar esa confusión de aspectos mezclados que señala el estudiante. Esto sucede tanto en la ubicación de las formas finitas en el caso de las demandas instrumentales (en los gerundios, en la demanda cognitiva y con las frases preposicionales, en la demanda instrumental) como con la jerarquía de la demanda en gerundios con matiz de simultaneidad. En estos últimos casos, la orden en posición inicial tiene más fuerza perlocutiva que la que se encuentra en la cláusula no finita.

Además de la ubicación de las demandas en la cláusula, la presencia de consignas múltiples con más de una demanda en su interior puede generar dudas o dificultades a la hora de resolver un ejercicio por parte del estudiante en particular, para comprender correctamente sobre qué focalizar o jerarquizar. A esta complejidad se le suma la distinción entre realizaciones léxico-gramaticales y pedidos diferentes, ya sean estos instrumentales o cognitivos propiamente dichos.

Si se ayuda a los estudiantes con el reconocimiento funcional y semántico entre distintos tipos de demandas, lo que es un obstáculo, puede convertirse en una estrategia de comprensión potente. Por ejemplo, las demandas instrumentales, resaltan el valor de andamiaje que poseen y su importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las mismas median entre el conocimiento disciplinar y el aprendizaje por parte de los alumnos. Asimismo, sirven para orientar, guiar, acompañar a los estudiantes en una resolución satisfactoria de los ejercicios a través de indicaciones instrumentales o por medio de adjuntos con función de circunstanciales que señalan el modo o la finalidad de la consigna. En este sentido, la presencia de ellas redunda en facilitar el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes.

En suma, estos aspectos interpelan al docente a reflexionar sobre el diseño de las consignas en lo que atañe a la claridad, precisión y focalización de la demanda que se solicita al estudiante. Lo invitan a encontrar estrategias que faciliten la comprensión y orienten la actividad cognitiva. Se pueden potenciar aquellas que son significativas en términos de aprendizaje, como, por ejemplo, la inclusión de más demandas instrumentales en los exámenes y trabajos prácticos, o la explicitación en clases sobre cómo abordar aquellas con matiz de realce, o sea, que funcionan como circunstancial, en especial si la matemática se encuentra en el primer año de la carrera.

Por otra parte, las formas indirectas y enmascaradas pueden incidir en la comprensión del enunciado, puesto que no aparece con precisión cuál es la acción cognitiva que se le está pidiendo al alumno. La “solución” a esto no implica reemplazar estas realizaciones por otras más “canónicas”; por el contrario, es esperable que la construcción del conocimiento en el nivel superior genere desafíos cognitivos complejos y variados. Sin embargo, interpretar una consigna no se aprende de manera casual o "mágica"; es la enseñanza explícita de este género lo que contribuirá con el andamiaje de los aprendizajes y reducir la brecha de las dificultades de comprensión. Por esta razón, la elaboración de consignas implica también una elección consciente y reflexiva de las opciones del español para configurar gramaticalmente la orden en función del contexto de situación áulico. Este último incluye a los estudiantes y docentes mediados por los contenidos, junto con los objetivos y propósitos de clases.

En lo que respecta a la clasificación de las demandas de acuerdo con su significado y su impacto cognitivo, se relevaron aquellas presentes en exámenes, trabajos prácticos y manuales y se las organizó según la frecuencia de aparición, para luego agruparlas en categorías más generales y abarcativas denominadas macroprocesos. Cada uno de estos últimos incluye demandas que, aunque con nombres diferentes, guardan una cercanía semántica, disciplinar y perlocutiva.

En lo que concierne a la frecuencia de las demandas, las más recurrentes son aquellas incluidas en los macropocesos relacionados con el cálculo (Hallar, determinar, encontrar, calcular), la argumentación (demostrar y justificar), el uso instrumental (usar), la definición, la explicación, los procesos mentales (considerar), la representación gráfica, las preguntas y la enunciación (Por ejemplo, enunciar un teorema). Con menor frecuencia se presentan demandas asociadas con la comparación (comparar-contrastar-relacionar), el análisis e interpretación o la modelización (una sola vez).

El tipo y frecuencia con que aparecen estas demandas se debe principalmente a su vinculación con el cálculo. Sin embargo, hay otras que son comunes al discurso matemático como las que pertenecen a la argumentación (demostrar, justificar, etc.). Desde una perspectiva cognitiva, cada una de ellas supone complejidades diferentes, aunque las incluidas en la argumentación, la explicación y la representación gráfica son las que mayores desafíos presentan a los estudiantes en términos de conocimiento. Otras demandas como el análisis, la interpretación, la comparación y la modelización, que son apuntadas por los diferentes autores trabajados como actividades que colaboran con el desarrollo de un pensamiento crítico y un uso activo y reflexivo del conocimiento, se utilizan de manera menos recurrente en el corpus estudiado. No obstante, hay otras que implican, como se explicó oportunamente, un uso activo del conocimiento; estas son las que se encuentran en los macroprocesos de argumentación, explicación, representación gráfica, entre otros.

Gran parte de las demandas empleadas en los exámenes y en el manual resulta similar en ambos corpus (encontrar, determinar, demostrar, explicar, definir, etc.). La variación se debe tanto a la frecuencia con la que estas demandas se presentan en uno y otro corpus, como al hecho de que algunas de ellas aparecen únicamente en el manual o en los exámenes. Esto último sucede dado que, en ocasiones, los temas abordados no siempre son los mismos en el manual que en los exámenes-trabajos prácticos. Por ejemplo, la demanda "encontrar", aunque es más solicitada en el manual, es la más recurrente en ambos casos. Esto podría relacionarse con la centralidad asignada al cálculo en las cátedras.

Otras demandas, como la demostración, se observan más en los exámenes que en el manual, si bien en este último se usan recurrentemente. Esto resalta la significatividad de la demostración en la ejercitación matemática. Lo mismo ocurre con el "determinar". Las preguntas, por su parte, tienen un porcentaje similar en ambos corpus.

La explicación es más frecuente en el manual que en los exámenes, pero como contrapartida, la justificación se encuentra ausente en el manual.

Una consideración particular merece la demanda de definición. Ella se utiliza con más regularidad en los exámenes que en el manual y está asociada a la recuperación de saberes teóricos. Las instancias evaluativas constituyen el contexto de situación en el cual se presentan estas tareas. Esto podría explicar la razón de por qué se emplean más en los parciales que en el manual. La definición suele funcionar como un indicador de evaluación de conocimientos aprendidos. Además, como se señaló en el desarrollo del análisis, la elaboración de definiciones es una de las actividades cognitivas que más problemas les genera a los estudiantes al momento de resolver un ejercicio. En este sentido, evaluar una definición correcta por parte de los docentes no es sólo verificar que los alumnos la estructuren de manera correcta, es decir, que no sea una paráfrasis, sino que puedan comprender al mismo tiempo qué lugar ocupa el lenguaje en la comunidad discursiva académica (precisión, objetividad, claridad, etc.).

Desde una perspectiva semántica, y en cuanto a su alcance perlocutivo, algunas demandas pueden presentar dificultades de comprensión a la hora de resolver adecuadamente una consigna. Como toda disciplina científica, los procesos matemáticos entrañan términos, conceptos y actividades cognitivas que son propios de ese campo y que, al no pertenecer inicialmente a él, en especial los estudiantes del ciclo básico de las carreras, producen confusión y extrañeza, en particular en lo que respecta a los diferentes alcances perlocutivos de las operaciones matemáticas.

Desde una perspectiva vinculada con la comprensión, hay demandas que son más claras y accesibles a los estudiantes y otras que presentan problemas en su interpretación. Las metáforas de transparencia y opacidad sirven para describir estos aspectos. De este modo, existen demandas que, por su cercanía semántica con la realidad extra-matemática, con otras disciplinas y con el registro coloquial son más "transparentes" para los estudiantes; mientras que aquellas que forman parte del discurso intra-matemático, resultan más "opacas" en términos de comprensión.

"Encontrar", "hallar", "definir", "completar", "trazar", entre otras, son más transparentes para los estudiantes, puesto que comparten significados operacionales básicos que han aprendido en otras disciplinas y a lo largo de su trayectoria escolar.

Sin embargo, existen demandas que presentan menos transparencia y sí mayor nivel de opacidad y son aquellas cuyas denominaciones son conocidas por el estudiante, pero que en el discurso matemático adquieren otros significados operacionales. "Estimar", "aproximar", "desarrollar", entre otras, poseen una cercanía semántica con la realidad extra-matemática o de disciplinas diferentes (desarrollar una idea, acercar un resultado a otro, por ejemplo), que pueden provocar confusiones al momento de transpolar o traducir un significado de un contexto discursivo particular a otro. Estos términos heterosemánticos pueden conducir a los estudiantes a problemas en la interpretación y en la consiguiente resolución errónea de los ejercicios.

Otras demandas, ya sea por su cercanía con el mundo intra-matematico o por derivar del discurso lógico-filosófico, se presentan con un grado mayor de opacidad. Así, "modelar", "dar la expresión analítica", "demostrar" o "justificar", entre otros, precisan de un trabajo de trasposición didáctica que contemple a los sujetos aprendientes que son los estudiantes del ciclo básico. En el caso de las dos primeras, al no contar el alumno con una cercanía semántica con otros términos conocidos, es necesario el andamiaje cognitivo del docente para explicitar y "transparentar" el significado. En cuanto a las dos últimas, si bien pueden ser conocidas por los estudiantes, ya que se las puede observar en otras disciplinas, muestran un alto nivel de abstracción que, junto con los alcances disciplinares particulares que adquieren en el discurso matemático, hacen indispensable una explicitación didáctica de sus presupuestos y significados.

"Determinar", "verificar", "escribir", o "explicar" presentan también un cierto grado de opacidad, producto de la variación tanto semántica como perlocutiva que se manifiesta en sus usos a lo largo de las distintas consignas. La falta de uniformidad en el significado puede provocar problemas en la comprensión si el estudiante no atiende con precisión al contexto en que se enuncia. Por ejemplo, explicar en algunos casos significa comunicar un saber teórico, o desde una perspectiva metacognitiva, informar qué estrategias cognitivas y herramientas conceptuales-matemáticas se emplearon en la resolución de una actividad. En otras situaciones, explicar se asocia a "dar razones" o "justificar" en un sentido argumentativo. Lo mismo, con escribir. Esta acción puede significar tanto registrar, redactar o proceder a un análisis geométrico.

Por último, muchas demandas funcionan como sinónimos: "hallar"- "encontrar"- "calcular"- "determinar"; "demostrar"- "probar"; "graficar"- "representar gráficamente"- "dar la representación gráfica", entre otras.

Estas consideraciones no solo invitan a reflexionar acerca del impacto cognitivo de las demandas, sino también sobre la transparencia, opacidad o variación del significado que presentan. Si bien los estudiantes ingresan a las carreras con un conocimiento básico de matemáticas, en el nivel universitario el conocimiento de la disciplina se complejiza y, junto con la enseñanza de los contenidos de la materia, se hace indispensable que los docentes expliciten los alcances semánticos de las demandas. Este tipo de decisiones didácticas en torno al lenguaje contribuyen en el andamiaje de los conocimientos matemáticos específicos y en la comprensión de lo que los profesores les piden a los alumnos en las consignas.

La información relevada de las encuestas sirvió para refrendar o ampliar los análisis de las consignas, puesto que presentan percepciones e información sobre los problemas del aprendizaje y la enseñanza de la matemática en estudiantes y profesores. Las preguntas se centraron en los problemas de comprensión, el origen de los errores y el lugar que tienen las consignas en todo ello. Si bien la población de estudiantes ingresantes indica mayor dificultad a la hora de comprender las demandas de una consigna que sus compañeros de Cálculo II, (estos últimos han atravesado ya la etapa de umbral del ingreso y, por lo tanto, se encuentran más inmersos en la cultura académica) en general se observa uniformidad en las respuestas que se asignan a los problemas y errores en la resolución de los ejercicios matemáticos. Por su parte, los profesores remarcan que tanto las principales dificultades en la resolución de las consignas, como los errores cometidos en ellas son producto de la falta de comprensión de lo que se solicita. Estas respuestas divergen de la opinión de los estudiantes, quienes asignan problemas de comprensión en los contenidos y en la relación entre conceptos.

A lo largo de esta conclusión, junto con la recuperación de los principales hallazgos de esta investigación y algunas interpretaciones, se fueron desplegando diferentes sugerencias y puntas de trabajo para pensar la enseñanza de las consignas de matemática en el aula. Al respecto es necesario efectuar algunas precisiones sobre qué implica-se espera-se propone en relación con el abordaje de las consignas de matemática en el nivel superior, específicamente en la FICH.

En primer lugar, esta investigación no busca enseñar a escribir consignas. En todo caso, sugiere una apertura a la reflexión metacognitiva para revisar las prácticas docentes, entre ellas la escritura de consignas. Este re-vis-ar, volver a ver, no se instala desde un "deber ser", sino como una invitación al análisis, al pensamiento y, en la medida que el docente lo crea didácticamente relevante, producir cambios que sean significativos para mejorar su práctica.

Si bien existen en Argentina experiencias de profesorados o carreras profesionales que enseñan a escribir consignas, no son las que más abundan. El docente sale al ejercicio del rol docente y formula consignas de las maneras que considera mejor o reproduce aquellas con las cuales fue formado y cree que funcionan, porque así ocurrió con él en su trayectoria académica. Este hecho produce en ocasiones una brecha entre las expectativas, muchas veces, no explicitadas por parte de los docentes y lo que los estudiantes efectivamente resuelven en las consignas. Algunas respuestas de los alumnos en las encuestas refieren a esto.

En segundo lugar, como se fue mostrando a lo largo del trabajo, cada disciplina, por sus características discursivas y disciplinares, tiene sus propias formas de pensar y plantear la matemática. En este sentido, proponer un curso o un manual sobre cómo escribir consignas en general no sería productivo. Tal como señalan diferentes autores vinculados a la escritura académica, son los mismos profesores de las materias los que más conocen sobre su área disciplinar y son ellos los que mejor pueden, a través del aporte teórico de otros espacios del conocimiento académico, diseñar consignas adecuadas y potentes para promover aprendizajes ricos y reflexivos.

La premisa de cualquier propuesta en relación con las consignas es la inclusión de este tema en los programas de estudio y su enseñanza explícita en el aula. Podrá ser parte de los contenidos de materias como existe en FICH de Comunicación Oral y Escrita y también de los de Matemáticas. Desde hace varios años, COE viene trabajando el tema de consignas, pero a partir de una perspectiva más general. Así, sería conveniente pensar la comprensión lectora como habilidad a desarrollar, pero a través de la lectura comprensiva de las consignas, en este caso de matemáticas. Sin embargo, no sería una actividad productiva si solo formara parte de los contenidos de lengua.

El abordaje debe ser interdisciplinar con el área de matemáticas, en un diálogo permanente entre expertos disciplinares de la matemática y la lingüística. En un trabajo en conjunto inter-cátedra, se puede pensar de manera anual cuáles son aquellas consignas modelos que se trabajarán de forma colegiada y que presenten desafíos en torno a su comprensión. Asimismo, se pueden plantear instancias de co-clases entre docentes de ambas disciplinas para analizar y desmontar las consignas. Por otra parte, y siguiendo el mismo espíritu de trabajo inter-cátedra, se pueden diseñar o modificar en conjunto algunas consignas que presenten mayor claridad y precisión enunciativa para los estudiantes.

En cualquiera de los casos, lo que subyace a estas propuestas es el enfoque didáctico sistémico-funcional de trabajo con el género. En este sentido, y retomando a Christie (2008), se busca aprender a través de la lengua, es decir, atender a las maneras lingüística en que se expresa la experiencia humana y a la función que cumple el lenguaje en la construcción del conocimiento, como también, aprender acerca de la lengua, o sea, colocar a la lengua como objeto de estudio y enseñar los aspectos léxico-gramaticales que se encuentran presentes en los diferentes discursos. La enseñanza de las consignas de matemática se articulará, entonces, entre estas dos perspectivas, a través y acerca de la lengua, que es la línea que se sostuvo a lo largo de esta investigación.

Todo este análisis contribuyó a pensar cómo las decisiones en relación con las maneras lingüísticas de elaborar consignas y elegir una forma de realización léxico-gramatical de una demanda sobre otra, impactan directamente en los procesos mismos de enseñanza. Asimismo, configuran no solo la instancia evaluativa del quehacer matemático, sino también las maneras de concebir la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina.

BIBLIOGRAFÍA

Achilli, E. L. (2015). *Investigar en antropología social: los desafíos de transmitir un oficio*. Rosario: Laborde.

Alfaro Carvajal, C. et.al. (2019). “La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas”. En: *Uniciencia*. Vol. 33. N°2. Disponible: https://www.scielo.sa.cr/pdf/uniciencia/v33n2/2215-3470-Uniciencia-33-02-55.pdf

Alvarado, M (2013). Escritura e invención en la escuela. En*:* Setton, Y (ed.). *Escritura e invención en la escuela*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Álvarez Alfonso, I. et.al. (2014). “Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar”. En *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*. N°85. Colombia. Disponible:http://funes.uniandes.edu.co/3681/2/A%CC%81lvarez2014ActividadesNumeros85.pdf

Anijovich, R. et.al. (2007). *Una introducción a la enseñanza para la diversidad: aprender en aulas heterogéneas*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Anijovich, R., González, C. (2011). *Evaluar para aprender. Conceptos e instrumentos*. Buenos Aires: Aique.

Arancibia Carvajal, S. et.al. (2022). “Creación de un instrumento de medición del pensamiento crítico a través de la matemática: Una aplicación a estudiantes de ingeniería de primer año.” En *Revista de Estudios y Experiencias en Educación REXE*. N° 46. Disponible: https://revistas.ucsc.cl/index.php/rexe/article/view/1133/1040

Arnal, J. et.al. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Arnoux, E. (2002). *La lectura y la escritura en la Universidad*. Buenos Aires: EUDEBA.

Arús, J. (2006). “Perspectiva sistémico-funcional de los usos de 'se' en español”. En: *Revista Signos*. vol. 39, núm. 61, *Estudios de Lingüística*. Valparaíso, CL, 55(110). Disponible: https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-09342006000200001

Atorresi, A. (2005). “Construcción y evaluación de consignas para evaluar la escritura como competencia para la vida”. En: *Enunciación* Vol. 10. N°1. Disponible: https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/enunc/article/view/447/678

Austin, J. L (1990). *Cómo hacer cosas con palabras. Palabras y acciones*. Barcelona: Paidos.

Ausubel, D.P. et.al. (1998). *Psicología evolutiva. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Bajtin, M.M. (1999). *Estética de la creación verbal*. México: Siglo XXI.

Baquero, R. (1997). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique.

Barreiro, P.; Rodríguez, M. (2014). “Análisis del potencial matemático de consignas para clases de Matemática”. En: *V Jornadas de educación matemática y II Jornadas investigación Matemática*. Universidad Nacional del Litoral.

Vásquez Bustos, V. (2024). “El funcionamiento valorativo de la metáfora léxica en la prensa digital sobre las protestas en Chile desde 2019”. En: *Literatura y lingüística*. 50. Disponible: https://ediciones.ucsh.cl/index.php/lyl/article/view/3563/3029

Calsamiglia Blancfort, H., Tusón Valls, A. (2008). *Las cosas del decir. Manual de análisis del discurso*. Ariel: Barcelona.

Camelo González. M. J. (2010). “Las consignas como enunciados orientadores de los procesos de escritura en el aula”. Enunciación Vol.15. Nº2. Disponible: https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/enunc/article/view/3159/4544

Carlino, P. (2006). *Escribir, leer y escribir en la Universidad: una introducción a la alfabetización académica*. Argentina: Fondo de Cultura Económica.

Chevallard, Y. (1998). *La trasposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Christie, F. (2008). La lingüística sistémico funcional y una teoría del lenguaje en la educación. En: Guio, E.; Fernández, M.D. (2008). *Manual de lingüística sistémico funcional. Aplicaciones a la lengua españo*la. Santa Fe: Ediciones UNL.

Coronado, M. (2022). *Claves didácticas para renovar la enseñanza*. Buenos Aires: Novedades educativas.

Crespo, C. (2005). "La importancia de la argumentación matemática en el aula". En: *Premisa*, N°24. Disponible: http://funes.uniandes.edu.co/23130/1/Crespo2005La.pdf

Cubo de Severino, L. (2014). Escritura de formación en la universidad. En Navarro, F. (Coord.). *Manual de escritura para carreras de Humanidades*. Buenos Aires: UBA.

Duval, R. (2000). "Basic issues for research in mathematics education. En: 24ª *Conferencia Internacional del Grupo de Psicología en Educación Matemática*. Disponible: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466737.pdf

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). "Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación". En: *La gaceta de la RSME*. Vol. 9. Disponible: https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

Duval, R. et.al. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Edelstein, G. (2011). *Formar y formarse en la enseñanza.* Buenos Aires: Paidós.

Eggins, S. (2002). *Introducción a la lingüística sistémica*. España: Universidad de La Rioja, servicio de publicaciones.

Eggins, S. y Martin, J. R. (2003). *El contexto como género*: *Una perspectiva lingüística funcional*. Revista Signos, 36(54). Disponible:

https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-09342003005400005

Facione, P. (2007). "Pensamiento Crítico: ¿Qué es y por qué es importante?" En *Insight Assesment*. Disponible: https://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/PensamientoCriticoFacione.pdf

Fajre, C.; Arancibia, V. (2000). "La consigna: un manual de instrucciones para leer en la escuela". En: *Revista Didáctica* (Lengua y Literatura) N°1. Disponible: https://core.ac.uk/download/pdf/38833692.pdf

Fernández, M. D. (1998). *Las construcciones endocéntricas verbales en español*. Santa Fe: FAFODOC- UNL.

Font, V. (2005). “Reflexión en la clase de Didáctica de las Matemáticas sobre una ‘situación rica’”. En *Unidades didácticas en Ciencias y Matemáticas.* Badillo, E. et.al (eds). Bogotá: Magisterio.

Font, V., Godino, J. (2006). “La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores”. En *Educaçao Matemática Pesquisa*. N°8 (1).

Font, V. (2008). “Enseñanza de las Matemáticas. Tendencias y perspectivas”. En: Gaita, C. (Ed.). *Coloquio internacional sobre enseñanza de las matemáticas*. *Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas.* N°3. Disponible: https://core.ac.uk/download/pdf/323492829.pdf

Gee, J.P (2004). Oralidad y literacidad: de El pensamiento salvaje a Ways with Words. En: Zavala, V. et.al. (eds.), *Escritura y sociedad. Nuevas perspectivas teóricas y etnográficas*. Lima: Red para el Desarrollo de las Ciencias Sociales en el Perú.

Giammatteo, M. et.al. (2005). "Lectura y comprensión de consignas”. En Charrier et. al. *Congreso de Promoción de la Lectura y el Libro, Bs. As., Fundación El Libro*. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

Grigüelo, L. (2010). El parcial universitario. En: Nogueyra, S. (Coord.). *Manual de lectura y escritura universitarias*. Buenos Aires: Biblos.

Guio, E., Fernández, M.D. (2008). *Manual de lingüística sistémico funcional. Aplicaciones a la lengua español*a. Santa Fe: Ediciones UNL.

Halliday, M.A.K (1993). “Towards a Language-Based Theory of Learning”. En: *Linguistics and education*. N°5. Disponible: https://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/JuneJuly05/HallidayLangBased.pdf

Halliday, M.A.K (2001). *El lenguaje como semiótica social*. Buenos Aires: FCE.

Halliday, M.A.K (2017). *Obras esenciales de M.A.K Halliday*. Ghio, E., Navarro, F. D., Lukin, A. (Comp.). Santa Fe: Ediciones UNL.

Halliday, M.; Matthiessen, C. M. (2014). *Halliday's Introduction to Functional Grammar*. London: Taylor & Francis.

Jakobson, R. (1981). *Lingüística y poética*. España: Cátedra.

Jorba, J. et. al. (2000). *Hablar y escribir para aprender*. España: Síntesis.

Lemke, J. (1998). Multiplying meaning: visual and verbal semiotics in scientific text. En: Martin, J.R.; Veel, R. (Eds.). *Reading Science functional perspectives on discourses of science.* London: Routledge.

Larson, R. (2010). *Cálculo esencial*. México: Cengage.

Leiva Salum, N. (2022). "Conexiones implícitas a través de cláusulas de gerundio en español: una aproximación sistémico-funcional para su identificación". En: *Revista Signos. Estudios de Lingüística*. Valparaíso, CL, 55(110). Disponible:

https://revistasignos.cl/index.php/signos/article/view/630

Litwin, E. (2000). *Las configuraciones didácticas*. Buenos Aires: Paidós.

Litwin, E. (2016). *El oficio de enseñar*. Buenos Aires: Paidós.

Manghi, D. (2009). *Co-utilización de recursos semióticos para la regulación del conocimiento disciplinar. Multimodalidad e intersemiosis en el Discurso Pedagógico de Matemática en 1° año de Enseñanza Media*. [Tesis doctoral]. PUCV.

Martin, J.R. (1999). "Mentoring semogenesis: 'Genre-based' literacy pedagogy". En F. Christie. (eds). *Pedagogy and the shaping of consciousness: Linguistic and social processes*. London: Continuum.

Martin, J. R.; Rose, D. (2007). *Working with Discourse. Meaning beyond the clause*. London: Continuum.

Martin, J. R.; Rose, D. (2008). *Genre relations, mapping culture*. Londres: Equinox.

Moyano, E. I. (2011). "Deconstrucción y edición conjuntas en la enseñanza de la escritura: La reflexión sobre género y discurso en la formación académica y profesional". En *Anais VI Simpósio Internacional de Estudos de Gêneros Textuais (SIGET).*

Moyano, E. I. (Coord.) (2013). *Aprender ciencias y humanidades: una cuestión de lectura y escritura. Aportes para la construcción de un programa de inclusión social a través de la educación lingüística*. Los polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Moyano, E. I. (2021). Metodología para la descripción de géneros en el marco de la lingüística sistémico-funcional: su adaptación al español. Organon, 36, (71). Disponible: https://seer.ufrgs.br/organon/article/view/113374

Muñoz, N.; Musci, M. (2014). "Escritura de géneros profesionales en la carrera de Ingeniería en Recursos Naturales Renovables (IRNR) de la UNPA: El plan de Manejo de Fauna". En: *Actas Congreso Nacional Subsede Cátedra Unesco*. UNR. Disponible: https://core.ac.uk/download/pdf/61704531.pdf

Natale, L. (coord.) (2013). *El semillero de la escritura: las tareas escritas a lo largo de tres carreras de la UNGS*. Buenos Aires: UNGS.

Natale, L.; Stagnaro, D. (2014). El parcial presencial. En Navarro, F. (Coord.). *Manual de escritura para carreras de humanidades*. Buenos Aires: UBA.

Navarro, F. (2012). "Alfabetización avanzada en la Argentina. Puntos de contacto con la enseñanza-aprendizaje de español académico como L2". En: Revista *Nebrija de Lingüística*. Vol. 6. N°3. Disponible: https://revistas.nebrija.com/revista-linguistica/article/view/189/160

Navarro, F., Stagnaro, D. (2012). "Procesos en consignas de escritura universitaria: el caso de la carrera de ingeniería industrial". En *Del género a la cláusula: los aportes de la LSF al estudio del lenguaje en sociedad: Actas del VII Congreso Internacional de la Asociación de Lingüística Sistémico Funcional de América Latina -ALSFAL*. Santa Fe. UNL.

Navarro, F.; Revel Chion, A. (2013). *Escribir para aprender. Disciplinas y escritura en la escuela secundaria*. Buenos Aires: Paidós.

O' Halloran, K. (2000). "Classroom discourse in mathematics: a multisemiotic analysis". En: *Linguistics and education*. N° 10.

O' Halloran, K. (2005). *Mathematical discourse language, symbolism and visual images*. New York: Continuum.

Oviedo, L. et.al. (2013). "Los registros semióticos de representación en matemática". En: Revista aula universitaria. N°13. Disponible: https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/publicaciones/index.php/AulaUniversitaria/article/view/4112/6207

Palachi, C. (2012). Conocimientos para "pilotear" la lectura. En: Falchini, A.; Palachi, C. (Comp). *Pensar la lectura y la escritura*. Santa Fe: Ediciones UNL.

Perkins, D. (2001). *La escuela inteligente*. Barcelona: Gedisa.

Quiroz Olivares, B. (2015). “La cláusula como movimiento interactivo: una perspectiva semántico-discursiva de la gramática interpersonal del español”. En: *Delta*, N°31(1).

Quiroz Olivares, B. (2017). “Gramática interpersonal básica del español: una caracterización sistémico-funcional del sistema de modo”. En: *Lenguas Modernas*, (49), Disponible: https://lenguasmodernas.uchile.cl/index.php/LM/article/view/49231

Quiroz Olivares, B (2023). “Procesos, participantes y circunstancias: una aproximación sistémico-funcional a la estructura experiencial de la cláusula española”. En: *Boletín De Filología*, 58(1). Disponible:

https://boletinfilologia.uchile.cl/index.php/BDF/article/view/71296

Rodríguez, M. et.al. (2016). “Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas”. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 19 (1). Disponible:https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v19n1/2007-6819-relime-19-01-00071.pdf

Riestra, D. (2004). *Las consignas de trabajo en el espacio socio-discursivo de la enseñanza de la lengua* [Tesis doctoral]. Université de Genève.

Riestra, D. (2008). *Las consignas de enseñanzas de la lengua: Un análisis desde el interaccionsimo socio-discursivo*. Buenos Aires: Miño y Dávila.

Riestra, D. (2010). “Lectura y escritura en la universidad: las consignas de tareas en la planificación de la reenseñanza de la lengua”. En: Enunciación Vol. 15. N°1. Disponible: https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/enunc/article/view/3114/4473

Rodríguez Gómez, D.; Valldeoriola Roquet, J. (2009). *Metodología de la investigación*.Cataluña: Universitat Oberta de Cataluña.

Rodríguez, M. (coord.) (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Buenos Aires: UNGS.

Searle, J. (1994). *Actos de habla. Ensayo de filosofía del lenguaje*. Barcelona: Planeta-Agostini.

Silvestri, A. (1995). *El discurso instruccional*. Buenos Aires: EUDEBA.

Solé, I.; Castells, N. (2004). "Aprender mediante la lectura y la escritura. ¿Existen diferencias en función del dominio disciplinar?". En: *Lectura y Vida*. N°25(4). Disponible: http://www.lecturayvida.fahce.unlp.edu.ar/numeros/a25n4/25_04_Sole.pdf

Toulmin, S. (2003). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Península.

Vázquez, A. et.al. (2006). "Consignas de escritura y procesos cognitivo - lingüísticos implicados. Un estudio en la universidad". En *Primer Congreso de Nacional Leer, Escribir y Hablar Hoy*. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Vázquez, A. (2007). "Consignas de escritura: Entre la palabra del docente y los significados de los estudiantes". En: Colección de Cuadernillos de actualización para pensar la Enseñanza Universitaria. Año 2. Nº7. Disponible: https://www.unrc.edu.ar/unrc/academica/docs/publicaciones/vazquez-set07.pdf

Vázquez, A. et.al. (2008). "Consignas de escritura en carreras de Ciencias Sociales: Homogeneidad y diferencia". En: *Memorias de XV Jornadas de Investigación, Facultad de Psicología*. Tomo I. Disponible: https://www.aacademica.org/000-032/375

Vigotski, L. (2007). *Pensamiento y habla*. Buenos Aires: Colihue.

Vigotski, L. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

Wood, D. et. al. (1976). "The role of tutoring in problem solving". En: *Journal of Child Psychology and Psychiatry*. N° 17(2).

Zamudio, B., Atorresi, A. (2000). *La explicación*. Buenos Aires: EUDEBA

ANEXO

EXÁMENES, TRABAJOS PRÁCTICOS Y CAPÍTULOS DEL MANUAL

Examen 4/2

Cálculo I

Examen Final – 4 de febrero

Teoría.

1) Enunciar el Teorema de Fermat.

2) Enunciar el criterio de la primera derivada para la monotonicidad de una función f *en* un intervalo I.

3) Responder *Verdadero* o *Falso*. Si responde verdadero, justifique en qué herramienta teórica se apoya. Si responde falso, exhiba y desarrolle un contraejemplo de manera analítica y gráfica.

   a) Sea $x = c =$ un punto del dominio del dominio de una función $f(x)$ en el cual la misma es continua pero no derivable. Entonces $x = c$ no puede ser un extremo relativo de $f(x)$.

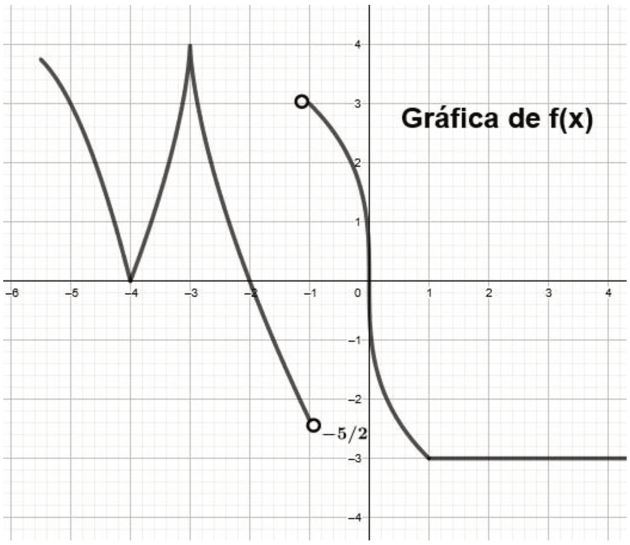
   b) Supongamos que $f(x)$ es una función definida en un intervalo I. Sea $x = c \in$ I.
   Si $f(x) > 0 \; \forall \; x \in$ I, $x < c$ y $f'(x) < 0 \; \forall \; x \in$ I, $x > c$, entonces $x = c$ es un máximo relativo de $f(x)$ en I.

4) Enunciar y demostrar las alternativas de convergencia para las integrales impropias *tipo p* en el intervalo [0,1].

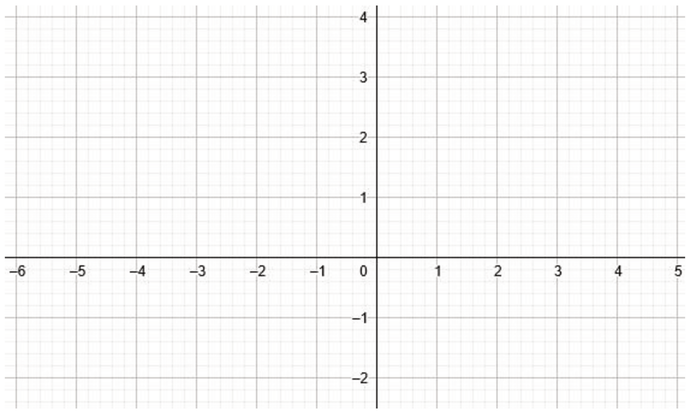
5) Enunciar y demostrar las alternativas de convergencia de una serie geométrica en términos de su razón.

6) Enunciar y demostrar la propiedad que explicita la forma de una serie de Taylor convergente.

Ejercicio 1. Dada la gráfica de la siguiente función $f(x)$, se pide esbozar una gráfica posible para su derivada $f'(x)$. Justificar detalladamente los aspectos referidos a derivabilidad, monotonicidad, concavidad, extremos, inflexiones.

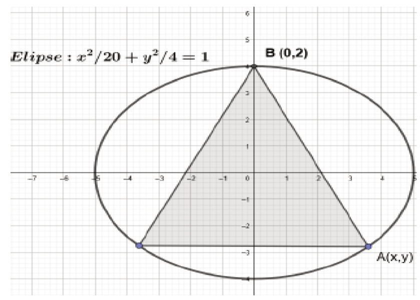


Gráfica posible para $f'(x)$



Ayuda: en $x = -4$ la gráfica de $f(x)$ tiene un ángulo, mientras que en $x = -3$, una cúspide

Ejercicio 2. Se considera la elipse de ecuación $x^2/20 + y^2/4 = 1$ que se muestra en la figura. Se pide determinar las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse, que tiene un vértice en el punto B (0, 2) y base paralela al eje de abscisas.



Ejercicio 3. Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real.

Ayuda: inicialmente, demostrar existencia. Luego, unicidad.

Ejercicio 4.

a) Mediante la derivación implícita, demuestre que cualquier recta tangente T en un punto $P\ (x_0, y_0)$, $(x_0 \neq 0 \neq y_0)$ a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio *r*, $x^2 + y^2 = r^2$, es perpendicular al radio OP.

Ayuda: Relacione las pendientes de las rectas T y el radio OP.

b) Demostrar que la sucesión $\left\{ \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right\}$ es convergente.

Ayuda: Utilice una condición suficiente de convergencia. No sufra pretendiendo calcular el límite.

Ejercicio 5. Determinar el carácter de cada una de las siguientes series numéricas, justificando detalladamente los criterios utilizados.

$$a)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k \cdot (lnk)^2} \qquad b)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \sqrt{lnk}}$$

Ejercicio 6. Dada la función $f(x)= ln(2 + x)$, se pide:

a) Encontrar un desarrollo en series de Taylor alrededor de c=2.

b) Encontrar el radio R de convergencia y el dominio de convergencia, que incluya, de ser necesario, el análisis de convergencia en fronteras.

c) Encontrar la serie derivada de la hallada el apartado anterior, con su radio y dominio de convergencia correspondientes.

d) Encontrar la suma de la serie derivada.

e) Contrastar coherencia de sus resultados.

FIN DEL EXAMEN

Examen 18/2

Cálculo I

Examen Final – 18 de febrero

Teoría.

1) Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I. ¿Qué condiciones suficientes sobre $f(x)$ y/o sobre I aseguran la presencia de extremos absolutos de $f(x)$ en I?

2) Exhibir y desarrollar, analítica y gráficamente, contraejemplos que pongan de manifiesto que las condiciones enunciadas en el apartado anterior son, precisamente, suficientes, pero no necesarias (un ejemplo de cada una).

3) Responder *Verdadero* o *Falso*. Si responde verdadero, justifique en qué herramienta teórica se apoya. Si responde falso, exhiba y desarrolle un contraejemplo de manera analítica y grafica.

Supongamos que $f(x)$ es una función definida en un intervalo I. Si $f(x)$ es creciente en I, entonces $f'(x) > 0\ \forall x \in I$.

4) Enunciar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

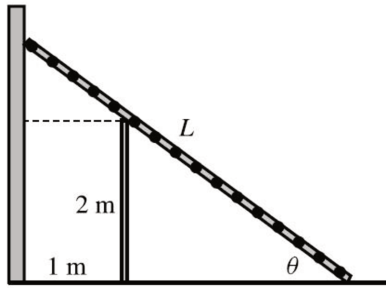
5) Enunciar el Teorema del Valor Medio para Integrales e interpretar geométricamente. (*Sólo exponer un gráfico no alcanza... debe escribir su interpretación*)

6) Si en el Teorema del Valor Medio para Integrales se suprime la condición de continuidad en I, ¿qué puede decirse del promedio de $f(x)$ en I?

Ejercicio 1. Utilizando el Teorema del Valor Medio (Lagrange), demostrar que $\forall x > 0$: $sin(x) < x$

Ayuda: Considerar, por separado, los casos $0 < x \leq 2\pi$ *y* $x > 2\pi$.

Ejercicio 2. Calcular la longitud de la escalera más corta que se pueda desplegar desde una pared vertical, sobre una valla de 2 m de altura situada a 1 m de distancia de la pared, hasta un punto en el suelo fuera de la valla.



Ejercicio 3. Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real.

Ayuda: inicialmente, demostrar existencia. Luego, unicidad.

Ejercicio 4.

a) Mediante la derivación implícita, demuestre que cualquier recta tangente T en un punto $P(x_0, y_0)$ a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas, es perpendicular al radio OP.

Ayuda: Encuentre las ecuaciones de las rectas T y el radio OP y luego pruebe lo solicitado.

b) Demostrar que la sucesión $\left\{ \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right\}$ es convergente.

Ayuda: Utilice una condición suficiente de convergencia. No sufra pretendiendo calcular el límite.

Ejercicio 5. Determinar el carácter de cada una de las siguientes series numéricas, justificando detalladamente los criterios utilizados.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{10}{k \cdot (lnk)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{10}{k \cdot \sqrt{lnk}}$

Ejercicio 6. Dada la función $f(x) = ln(2 + x)$, se pide:

a) Encontrar un desarrollo en series de Taylor alrededor de c=2.

b) Encontrar el radio R de convergencia y el dominio de convergencia, que incluya, de ser necesario, el análisis de convergencia en fronteras.

c) Encontrar la serie derivada de la hallada el apartado anterior, con su radio y dominio de convergencia correspondientes.

d) Encontrar la suma de la serie derivada.

e) Encontrar un desarrollo en series de Taylor para la función $f'(x)$ alrededor de c=2.

f) Contrastar coherencia de sus resultados.

Cálculo I

Examen Final – 25 de febrero

Teoría.

1) R Sea $f(x)$ una función derivable en un cierto intervalo abierto I que contiene a un punto x_0. Definir el diferencial $df\ (x_0)$ e interpretar geométricamente. (*Sólo exponer un gráfico no alcanza... debe escribir su interpretación*).
2) Sea una sucesión $\{a_n\}$ y $f(x)$ una función / $f(n) = a_n$. ¿Qué relación existe entre la convergencia en el infinito de $f(x)$ y la convergencia secuencial de $\{a_n\}$?
3) Responder *Verdadero* o *Falso*. Si responde verdadero, justifique en qué herramienta teórica se apoya. Si responde falso, exhiba y desarrolle un contraejemplo de manera analítica y gráfica.
   a) Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo I que contiene al punto c. Si $f(x)$ es cóncava hacia abajo $\forall x < c$ y cóncava hacia arriba $\forall x > c$, entonces $x = c$ es un punto de inflexión de $f(x)$.
   b) En su intervalo de convergencia I, la serie $\sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(x)$ para todo $x \in$ I.
   c) Sea $f(x)$ una función tal que $f''(c) = 0$. Entonces $x = c$ es punto de inflexión de $f(x)$.
4) Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos. ¿Qué se puede decir del carácter de la serie $\sum \frac{1}{a_n}$. Justificar detalladamente.

Ejercicio 1. Dada la gráfica de la siguiente función $f(x)$, se pide esbozar una gráfica posible para su derivada $f'(x)$. Justificar detalladamente los aspectos referidos a derivabilidad, monotonicidad, concavidad, extremos, inflexiones.

Gráfica posible para $f'(x)$

Ayuda: en $x = -4$ la gráfica de $f(x)$ tiene un ángulo, mientras que en $x = -3$, una cúspide

Ejercicio 2. Se considera la elipse de ecuación $x^2/20 + y^2/4 = 1$ que se muestra en la figura. Se pide determinar las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse, que tiene un vértice en el punto B(0, 2) y base paralela al eje de abscisas.

Ejercicio 3. Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real.

Ayuda: inicialmente, demostrar existencia. Luego, unicidad.

Ejercicio 4.

a) Mediante la derivación implícita, demuestre que cualquier recta tangente T en un punto $P(x_0,y_0)$ a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas, es perpendicular al radio OP.
Ayuda: Encuentre las ecuaciones de las rectas T y el radio OP y luego pruebe lo solicitado.

b) Demostrar que la sucesión $\left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right\}$ es convergente.
Ayuda: Utilice una condición suficiente de convergencia. No sufra pretendiendo calcular el límite.

Ejercicio 5. Determinar el carácter de cada una de las siguientes series numéricas, justificando detalladamente los criterios utilizados.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10}{k\cdot(lnk)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10}{k\cdot\sqrt{lnk}}$

Ejercicio 6. Dada la función $f(x) = ln(2 + x)$, se pide:

g) Encontrar un desarrollo en series de Taylor alrededor de c=2.

h) Encontrar el radio R de convergencia y el dominio de convergencia, que incluya, de ser necesario, el análisis de convergencia en fronteras.

i) Encontrar la serie derivada de la hallada el apartado anterior, con su radio y dominio de convergencia correspondientes.

j) Encontrar la suma de la serie derivada.

k) Encontrar un desarrollo en series de Taylor para la función $f'(x)$ alrededor de c=2.

l) Contrastar coherencia de sus resultados.

FIN DEL EXAMEN

Examen 8/4

Cálculo I

Examen Final –8 de abril

Ejercicio 1.

1.1) Sean a y b dos números reales. Se define la media aritmética de a y b como $\frac{1}{2}(a+b)$. Usando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, se pide probar que: dados dos números reales a y b, $a<b$, entonces la media aritmética de los dos números, $\frac{1}{2}(a+b)$, está en el intervalo abierto (a,b).

Sugerencia: sea $f(x) = x^2$

1.2) Definir sucesión numérica convergente, en términos de entornos.

1.3) Definir serie numérica condicionalmente convergente. Exhibir y desarrollar un ejemplo de este tipo de serie.

1.4) Demostrar que la convergencia absoluta de una serie numérica es suficiente para que la misma converja

1.5) Enunciar y demostrar la condición necesaria y suficiente para que una serie de potencias convergente en un intervalo I, y cuyos coeficientes son los de Taylor correspondientes a una cierta función *f*, converja, precisamente a *f*

Ejercicio 2.

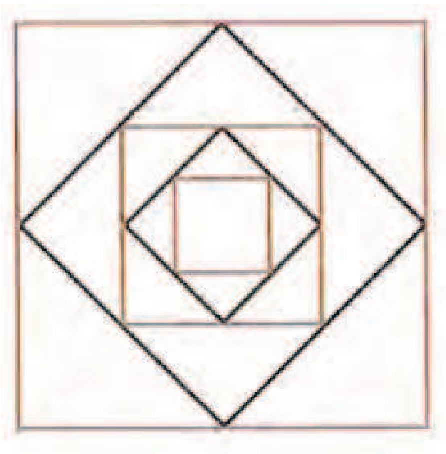
2.1) Sea f una función continua en todo $\Re$. Además, se cumple que: $f(3) = 2$, $f'(x) < 0 \;\; si \;\; x < 3$, $f'(x) > 0 \;\; si \;\; x > 3$. Se pide dibujar una gráfica posible de f para cada caso, de modo que se satisfaga la condición adicional

2.1.1) f' continua en 3.

2.1.2) $f'(x) = -1 \;\; si \;\; x < 3$ y $f'(x) = 1 \;\; si \;\; x > 3$. Dar la expresión analítica para esta función.

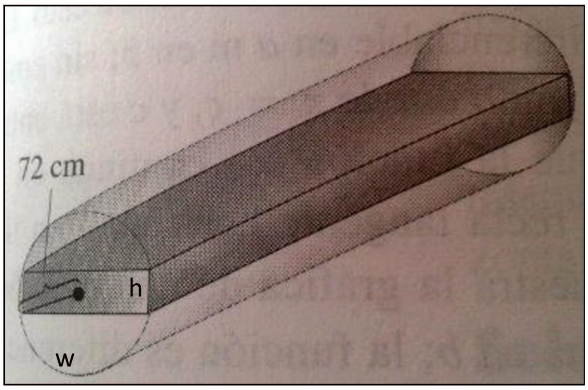
2.2) Encuentre los valores de *a*, *b* y *c* tales que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un valor máximo relativo de 7 en x=1 y la gráfica de la función pase por el punto (2, -2)

Ejercicio 3.



La figura muestra los cinco primeros cuadrados de una sucesión. El cuadrado exterior tiene 4m^2 de área. Cada uno de los cuadrados interiores se obtiene al unir los puntos medios de todos los lados de los cuadrados anteriores. El proceso continúa de manera indefinida.
Modelar el problema y calcular la suma de las áreas de todos los cuadrados.

Ejercicio 4.



La resistencia de una viga rectangular es conjuntamente proporcional a su anchura y al cuadrado de su espesor. Determinar las dimensiones de la viga de mayor resistencia que pueda cortarse de un tronco con forma de cilindro circular recto cuyo radio es de 72 cms.

Ayuda: $R = k.h^2.w$, donde *R* representa la resistencia, *h* el espesor y *w* el ancho.

Ejercicio 5.

5.1) Determinar el carácter de cada una de las siguientes integrales. En caso de convergencia, determinar el valor de la integral. Justificar detalladamente.

5.1.1) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 5.1.2) $\int_0^\infty \frac{sen\, x}{e^x}dx$

5.2) Sin calcular los coeficientes de Taylor, encontrar un desarrollo en Maclaurin para $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Encontrar el dominio de convergencia de la serie. Justificar detalladamente.

Examen 14/6

Matemática Básica

Examen parcial –14 de junio

EJERCICIO 1

a) Defina función par e impar.

b) Considere la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

i) Calcule el dominio de la función.

ii) Determine si la función es par, impar o ninguna.

iii) Si la función tiene algún tipo de simetría descríbala.

iv) Considere la función $g(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)}$. Es cierto que f(x)=g(x)? Justifique

c) Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ y $g(x) = x^3$. Calcule $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$.

EJERCICIO 2.

a) Determine los siguientes límites, si existen.

i) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin 3t}{2t}$ ii)$\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

b) i) Defina continuidad de una función en un punto.

ii) Defina continuidad de una función en un intervalo (a,b].

iii) Defina discontinuidad evitable en un punto.

c) i) Encuentre los valores de a y b tal que la función sea continua en toda la recta real.

ii) Con los valores hallados en i) es cierto que la función es derivable en todo punto? Justifique.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -1 \\ ax + b & -1 < x < 3 \\ -2 & x \geq 3 \end{cases}$$

iii) Grafique la función obtenida.

EJERCICIO 3

Indique, justificando sus respuestas, si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:

i) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = 1.$ ii) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x} = 1.$ iii)Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

EJERCICIO 4

a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \left(\frac{3x^2-1}{2x+5}\right)^3$ ii) $g(x) = 3x - 5(\cos 2x)^2$

b) Determine, si existen, los puntos en los cuáles la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal.

$$h(x) = e^x \sin x \qquad D_h = [0, \pi]$$

EJERCICIO 5

a) Si F(x) es una primitiva de f(x) y G(x) también es una primitiva de la misma función f(x), ¿qué tipo de función será F(x) - G(x)? Justifique.

b) Resuelva las siguientes integrales indefinidas

$$I_1 = \int \ln(e^{2x-1})dx \qquad I_2 = \int e^x \cos(2x)dx$$

EVALUACIÓN DE LOS TRABAJOS PRÁCTICOS

Un grupo de biólogos marinos recomienda una serie de medidas de conservación que se llevarán a cabo durante la próxima década para salvar de la extinción a ciertas especies de ballenas. Después de implementar las medidas de conservación, la población de esta especie se espera que sea:

$$N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600 \qquad 0 \leq t \leq 10$$

Donde N(t) denota la población al final del año t.

a) Determine la tasa de crecimiento de la población de ballenas cuando t = 2 y t = 6.

b) Qué tan grande será la población de ballenas 8 años después de implementar las medidas de conservación?

Examen 22/7

Cálculo I

Examen Final –27 de julio

Ejercicio 1.

¿Para qué valores de *a, m* y *b* la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 & si\ x = 0 \\ -x^2 + 3x + a & si\ 0 < x < 1 \\ mx + b & si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 2]?

Ejercicio 2:

2.1) Enuncie y demuestre una condición necesaria y suficiente para que una función tenga derivada nula en un intervalo abierto I

2.2) Determine el carácter de cada una de las siguientes integrales

a) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ b) $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$

2.3) Calcular $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

Ejercicio 3: Realice el estudio completo de la función $y = x e^{\frac{1}{x}}$ con los ítems a considerar que se sugieren abajo, para coronar su obra con un esbozo de la gráfica.

Los ítems a tener en cuenta: dominio – intersecciones con ejes – continuidad y derivabilidad – clasificación de los puntos de no derivabilidad – situación en $\pm\infty$ - situación cerca de los puntos que no están en el dominio - monotonicidad y extremos (locales y absolutos) – concavidades y puntos de inflexión – asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

Ejercicio 4:

a) Encontrar el área de la región comprendida por las gráficas de $y = senx$ e $y = sen2x$ para $0 \le x \le \pi$. Graficar.

b) Encontrar la pendiente de la curva $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ en el punto P(-2, 1).

Ejercicio 5:

5.1) Determinar el dominio de convergencia (intervalo y fronteras, si fuera el caso) de la serie $\sum_0^{\infty} \frac{\left(x^2-1\right)^n}{2^n}$.

5.2) Proponga y desarrolle un ejemplo de serie de potencias que converja en un intervalo acotado, y en cuyas fronteras sea *condicionalmente convergente*. Justifique detalladamente.

5.3) Proponga y desarrolle un ejemplo de serie de potencias que converja exactamente en el intervalo (1, 5)

Ejercicio 6:

Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado. El material para los costados cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Encuentre las dimensiones del recipiente más barato.

Examen 05/8

Cálculo I

Examen Final –5 de agosto

Ejercicio 1.

a) Enunciar y demostrar el Teorema de Rolle.

b) En el segmento de la parábola $y = x^2$ que está comprendido entre los puntos $A(2,4)$ y $B(5,25)$, encontrar un punto en el cual la tangente sea paralela a la cuerda AB. Justificar con teoría la existencia de tal punto. Explicitar la ecuación de la tangente.

c) Determinar la convergencia o divergencia de $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$.

Ejercicio 2.

a) Enunciar y demostrar el criterio de la primera derivada para la determinación de la monotonicidad de una función en un intervalo abierto I.

b) Dada la función $f(x) = x.\sqrt{1-x}$, se pide:

i) Determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento. Justificar.

ii) Encontrar los extremos locales y absolutos (si existieran) de la función. Justificar.

Ejercicio 3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + y^2 = 72$ que sea perpendicular a la recta $2y + x + 3 = 0$.

Ejercicio 4.

a) Definir sucesión convergente (o sea, cuándo una sucesión tiene límite finito).

b) Determinar la convergencia o divergencia de cada una de las sucesiones dadas. En caso convergente, encontrar el límite. Justificar.

$$b \cdot 1)\ a_n = \frac{3^n}{1+3^{2n}} \qquad\qquad b \cdot 2)\ b_n = \ln\left(\frac{2n}{1+2n}\right)$$

c) Determinar, justificando sus afirmaciones, la monotonicidad o no de la sucesión dada en 4.b.1).

d) Mostrar dos sucesiones divergentes tales que su suma sea convergente. Desarrollar.

Ejercicio 5. Determinar el área de la figura limitada por las curvas $x-y^2+3=0$ y $x-2y=0$. Graficar.

Ejercicio 6.

a) Definir serie numérica convergente de números reales.

b) Enunciar y demostrar la condición necesaria de convergencia de una serie numérica.

Ejercicio 7. Considerar la serie $f(x)$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Hallar los intervalos de convergencia de: $f(x)\,;\ \int f(x)$

¿Qué conclusiones pueden extraerse acerca de la comparación de los dominios de convergencia de ellas?

FIN DEL EXAMEN

Examen 09/9

Cálculo I

Examen Final –9 de septiembre

Ejercicio 1.

(*) a) Utilizando series de potencias de Maclaurin (Y SIN USAR L'HÔSPITAL), se pide encontrar

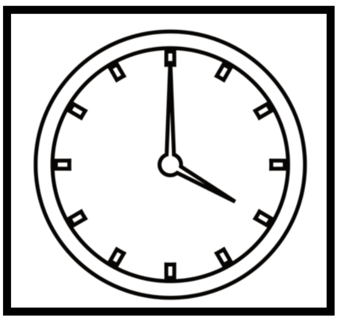
$$\lim_{x\to 0} \frac{ln\sqrt[3]{1+x} - sen\, x}{x}$$

b) Dado el número 0.0389898989… se pide:

b.1) Encontrar la serie numérica que lo representa.

b.2) A partir del inciso anterior, escribir el número dado en forma fraccionaria

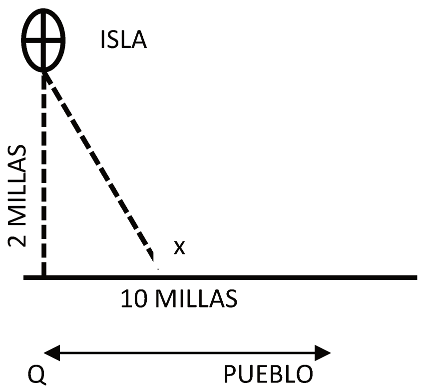
Ejercicio 2.



a) ¿A qué hora precisa entre las 4 y las 5 coincidirán las agujas *horarias* y del *minutero* del reloj?
Ayudín: la aguja horaria se mueve 12 veces más lenta que la aguja del minutero (para convencerte de este hecho, tené en cuenta que cada 1 avance de la horaria (por ejemplo, para pasar de las 2 a las 3), el minutero avanzó 12 veces (recorriendo así los 60 minutos para el cambio de hora)

b) Utilizando una serie conocida, encontrar un desarrollo en Maclaurin para $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$. Encontrar el dominio de convergencia (que incluya análisis en fronteras, si fuera el caso).

Ejercicio 3.



Una pequeña isla está a 2 millas del punto más cercano Q de una playa rectilínea de un gran lago. Una persona puede remar en un bote a 3 millas por hora y caminar a 4 millas por hora. ¿En dónde deberá desembarcar en el bote para llegar, en el menor tiempo posible, a un pueblo que está a 10 millas, medidas sobre la playa, del punto Q?

Ayudín: tené en cuenta que: veloc = dist / tiempo

Ejercicio 4.

a) Dada la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$, se pide determinar: dominio – intersecciones con ejes - análisis de continuidad y derivabilidad (clasificación de los puntos de discontinuidad y de no derivabilidad) – situación en $\pm\infty$ - situación en proximidad a discontinuidades – asíntotas – crecimiento y/o decrecimiento – concavidades – extremos locales y absolutos – puntos de inflexión – esbozo de gráfica.

b) Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$, se pide:

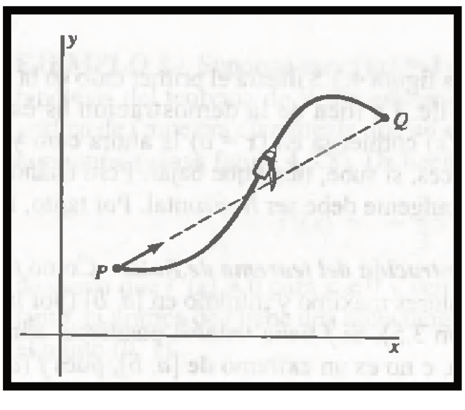
b.1) Determinar *a, b,* y *c* si se sabe que ambas funciones se cortan en los puntos P(-2, -3) y Q(1, 0).

b.2) Hallar la ecuación de la recta tangente T a g(x) en el punto R(0, 1).

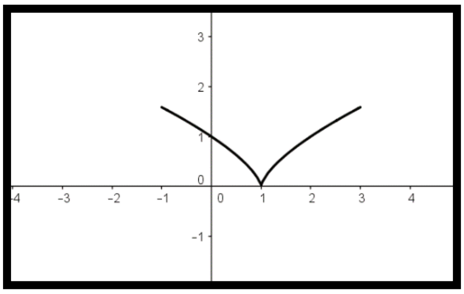
b.3) Calcular el área de la región limitada inferiormente por las gráficas de *f(x)* y *g(x)* y superiormente por T.

b.4) Graficar.

Ejercicio 5.



a) Suponga que P y Q son dos puntos sobre la superficie del mar, con Q ligeramente al este de P tal como se muestra en la figura. ¿Es posible llevar un bote de P a Q navegando casi hacia el este *sin nunca (*ni siquiera por un instante) navegar en la dirección exacta de P a Q? Justificar minuciosamente su respuesta.



b) La gráfica de la izquierda corresponde a la función $f(x) = (x-1)^{2/3}$.

¿Se puede calcular la longitud total del arco comprendido en el intervalo [-1; 3] aplicando el modelo $L = \int_{-1}^{3} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$? Si su respuesta es afirmativa, calcularla. Si su respuesta es negativa, explicar detalladamente por qué no es posible.

Ejercicio 6.

a) Enunciar y demostrar una condición necesaria para la convergencia de una serie numérica.

b) Definir punto de inflexión de una función.

c) Enunciar (*) y demostrar las alternativas de convergencia para $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, para los distintos valores de *p*.

d) Definir valor medio de una función en un intervalo.

e) Demostrar que el valor promedio de la suma de dos funciones en un intervalo [a, b] es igual a la suma de los valores promedio de las mismas en el [a, b]

Trabajo práctico sobre integrales impropias

Cálculo I

6. Actividad final propuesta.

Para pensar…¿Puede una región no acotada tener área finita? ¿cómo es posible?

Hacé el siguiente experimento. Dibujá una cuadrado grande de lado 1, pintá la mitad inferior del cuadrado. Obtendrás un rectángulo de área ½, llamalo *rectángulo número 1*.

Al rectángulo superior, el que no está pintado, dividilo en dos mitades, igual que antes: una superior y una inferior. Al rectángulo de abajo, que tendrá área ¼, llamalo *rectángulo número 2*.

Volvé a hacer el mismo experimento con el rectángulo que no está pintado: dividilo en dos mitades, una superior y otra inferior, pintá la de abajo y ponele *rectángulo número 3*. Repetí este proceso cuantas veces puedas, cuanto más grande hagas el cuadrado inicial más rectángulos podrás obtener.

Ahora hacete las siguientes preguntas:

¿Cúantos rectángulos creés que podés obtener ejecutando este proceso?

¿Qué pasaría si los ponés uno al lado del otro y considerás la **UNIÓN** de todos ellos? ¿Es acotada la región? Observá que la base de cada rectángulo vale 1.

Y por último, ¿cómo es el área pintada? ¿Finita o infinita?

Ejercicio 3

Cálculo I

EJERCICIO 3:

(*) a) Defina integral definida de una función continua f en un intervalo [a , b]

b) Dar de manera analítica y gráfica una función f(x) que, en un intervalo [0 ,2], tenga una discontinuidad esencial en algún punto interior y que sin embargo sea integrable en él.

(*) c) Definir convergencia de una serie numérica

d) Definir, en términos de entornos, sucesión convergente de números reales.

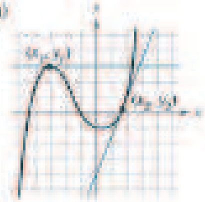
e) Enunciar y demostrar la condición necesaria de convergencia de una serie numérica.

Larson, Ron: Cálculo esencial. Capítulo 2.1

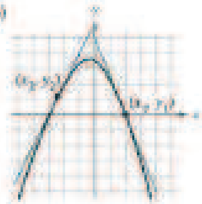
Ejercicios de la sección 2.1

En los ejercicios 1 y 2, estime la pendiente de la gráfica en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

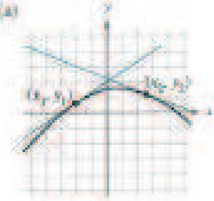
1. (a)



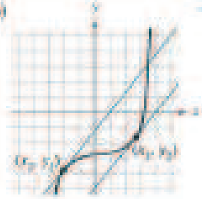
(b)



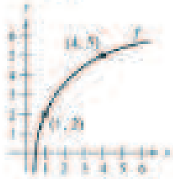
2. (a)



(b)



En los ejercicios 3 y 4, use la gráfica que se muestra en la figura. Para imprimir una amplificación de esta gráfica, visitar www.mathgraphs.com.



3. En la figura, identifique o trace cada una de las cantidades siguientes.

(a) $f(1)$ y $f(4)$ (b) $f(4) - f(1)$

(c) $y = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) + f(1)$

4. Entre las cantidades dadas a continuación, inserte el símbolo de desigualdad adecuado (< o >).

(a) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \;\square\; \dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$

(b) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \;\square\; f'(1)$

En los ejercicios 5–10, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

5. $f(x) = 3 - 2x, \quad (-1, 5)$ **6.** $g(x) = \frac{3}{2}x + 1, \quad (-2, -2)$

7. $g(x) = x^2 - 4, \quad (1, -3)$ **8.** $g(x) = 5 - x^2, \quad (2, 1)$

9. $f(t) = 3t - t^2, \quad (0, 0)$ **10.** $h(t) = t^2 + 3, \quad (-2, 7)$

En los ejercicios 11–18, obtenga la derivada por medio del proceso de límite.

11. $f(x) = 3$ **12.** $f(x) = 3x + 2$

13. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$ **14.** $f(x) = 9 - \frac{1}{2}x$

15. $f(x) = 2x^2 + x - 1$ **16.** $f(x) = x^3 + x^2$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ **18.** $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

En los ejercicios 19–24, (a) halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado, (b) use una calculadora graficadora para representar la función y su recta tangente en el punto indicado, y (c) use la función *derivative* de la calculadora para confirmar sus resultados.

19. $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$ **20.** $f(x) = x^3 + 1, \quad (1, 2)$

21. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (1, 1)$ **22.** $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad (5, 2)$

23. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}, \quad (4, 5)$ **24.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, \quad (0, 1)$

En los ejercicios 25 y 26, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f y paralela a la recta dada.

	Función	*Recta*
25.	$f(x) = x^3$	$3x - y + 1 = 0$
26.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$	$x + 2y + 7 = 0$

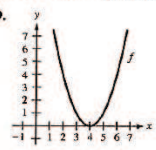
27. La recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en el punto $(5, 2)$ pasa por el punto $(9, 0)$. Calcule $g(5)$ y $g'(5)$.

28. La recta tangente a la gráfica de $y = h(x)$ en el punto $(-1, 4)$ pasa a través del punto $(3, 6)$. Calcule $h(-1)$ y $h'(-1)$.

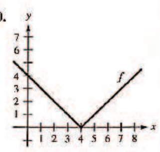
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 29 y 30, trace la gráfica de f'. Explique cómo encontró la respuesta.

29.



30.



31. Trace la gráfica de una función cuya derivada sea siempre negativa.

32. Trace la gráfica de una función cuya derivada sea siempre positiva.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 33–36, dada una función f y un número c, el límite representa $f'(c)$. Encuentre f y c.

33. $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5 - 3(1 + \Delta x)] - 2}{\Delta x}$ **34.** $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2 + \Delta x)^3 + 8}{\Delta x}$

35. $\displaystyle\lim_{x \to 6} \frac{-x^2 + 36}{x - 6}$ **36.** $\displaystyle\lim_{x \to 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$

En los ejercicios 37–39, identifique una función f que tenga las características que se indican. Después trace la función.

37. $f(0) = 2;$ $f'(x) = -3, -\infty < x < \infty$

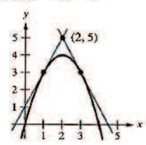
38. $f(0) = 4; f'(0) = 0;$ $f'(x) < 0$ para $x < 0;$ $f'(x) > 0$ para $x > 0$

39. $f(0) = 0; f'(0) = 0; f'(x) > 0$ si $x \neq 0$

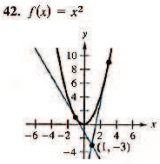
40. Suponga que $f'(c) = 3$. Encuentre $f'(-c)$ si (a) f es una función impar y (b) f es una función par.

En los ejercicios 41 y 42, halle las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasa por el punto indicado.

41. $f(x) = 4x - x^2$



42. $f(x) = x^2$



Análisis gráfico, numérico, y analítico **En los ejercicios 43 y 44, utilice una calculadora graficadora para representar gráficamente f en el intervalo $[-2, 2]$. Complete la tabla estimando gráficamente la pendiente de la gráfica en los puntos indicados. Después evalúe analíticamente las pendientes y compare sus resultados con los obtenidos gráficamente.**

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$									
$f'(x)$									

43. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ **44.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 45 y 46, utilice una calculadora graficadora para representar gráficamente las funciones f y g en una misma ventana donde**

$$g(x) = \frac{f(x + 0.01) - f(x)}{0.01}.$$

Nombre las gráficas y describa la relación que hay entre ellas.

45. $f(x) = 2x - x^2$ **46.** $f(x) = 3\sqrt{x}$

En los ejercicios 47 y 48, evalúe $f(2)$ y $f(2.1)$ y use los resultados para aproximar $f'(2)$.

47. $f(x) = x(4 - x)$

48. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 49 y 50, use una calculadora graficadora para representar gráficamente la función y su derivada en una misma ventana. Clasifique las gráficas y describa la relación que existe entre ellas.**

49. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

50. $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - 3x$

Redacción **En los ejercicios 51 y 52, considere las funciones f y $S_{\Delta x}$ donde**

$$S_{\Delta x}(x) = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}(x - 2) + f(2).$$

(a) Use una calculadora graficadora para representar gráficamente f y $S_{\Delta x}$ para $\Delta x = 1$, 0.5 y 0.1 en una misma ventana.

(b) Haga una descripción de las gráficas de S para los diferentes valores de Δx del inciso (a).

51. $f(x) = 4 - (x - 3)^2$

52. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

En los ejercicios 53–58, use la forma alternativa de la derivada para hallar la derivada en $x = c$ (si existe).

53. $f(x) = x^2 - 1, \quad c = 2$

54. $f(x) = x^3 + 2x, \quad c = 1$

55. $g(x) = \sqrt{|x|}, \quad c = 0$

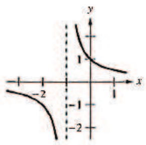
56. $g(x) = (x + 3)^{1/3}, \quad c = -3$

57. $h(x) = |x + 5|, \quad c = -5$

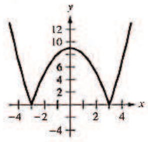
58. $f(x) = |x - 4|, \quad c = 4$

En los ejercicios 59–62, describa los valores de x en los cuales f es derivable.

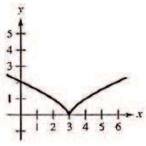
59. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$



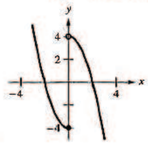
60. $f(x) = |x^2 - 9|$



61. $f(x) = (x - 3)^{2/3}$



62. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \le 0 \\ 4 - x^2, & x > 0 \end{cases}$



Análisis gráfico **En los ejercicios 63–66, use una calculadora graficadora para hallar los valores de x en los cuales f es derivable.**

63. $f(x) = |x + 3|$

64. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

65. $f(x) = x^{2/5}$

66. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x, & x \le 1 \\ x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 67–70, obtenga derivadas por la izquierda y por la derecha en $x = 1$ (si existen). ¿Es derivable la función en $x = 1$?

67. $f(x) = |x - 1|$

68. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

69. $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3, & x \le 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$

70. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 71 y 72, determine si la función es derivable en $x = 2$.

71. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 2 \\ 4x - 3, & x > 2 \end{cases}$

72. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \ge 2 \end{cases}$

73. ***Razonamiento gráfico*** Una recta cuya pendiente es m pasa por el punto $(0, 4)$ y su ecuación es $y = mx + 4$.

(a) Exprese la distancia d, en función de m, que hay entre la recta y el punto $(3, 1)$.

(b) Use una calculadora graficadora para representar la función d del inciso (a). Basándose en la gráfica, ¿es derivable esta función en todos los valores de m? Si no es así, ¿dónde no es derivable?

74. ***Conjetura*** Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

(a) Represente gráficamente f y f' en un mismo conjunto de ejes.

(b) Represente gráficamente g y g' en un mismo conjunto de ejes.

(c) Identifique algún patrón entre f y g y sus derivadas respectivas. Use este patrón para obtener conclusiones acerca de $h'(x)$ si $h(x) = x^n$, donde n es un entero y $n \ge 2$.

(d) Obtenga $f'(x)$ si $f(x) = x^4$. Compare el resultado con la conclusión obtenida en el inciso (c). ¿Es ésta una prueba de la conjetura? Explique.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 75 y 76, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa explique por qué o proporcione un ejemplo que muestre que es falsa.**

75. Si en un punto una función tiene derivadas tanto por la derecha como por la izquierda, entonces la función es derivable en ese punto.

76. Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto.

77. Sea $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Demuestre que en $x = 0$, f es continua, pero no derivable.

Demuestre que g es derivable en 0 y encuentre $g'(0)$.

Larson, Ron: Cálculo esencial. Capítulo 5.4

Ejercicios de la sección 5.4

Vea www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

En los ejercicios 1 y 2, encuentre la distancia entre los puntos usando (a) la fórmula para la distancia, (b) integración.

1. $(0, 0), \quad (5, 12)$ **2.** $(1, 2), \quad (7, 10)$

En los ejercicios 3–14, encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

3. $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1, \quad [0, 1]$ **4.** $y = 2x^{3/2} + 3, \quad [0, 9]$

5. $y = \frac{3}{2}x^{2/3}, \quad [1, 8]$ **6.** $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}, \quad [1, 2]$

7. $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}, \quad [1, 2]$ **8.** $y = \frac{3}{2}x^{2/3} + 4, \quad [1, 27]$

9. $y = \ln(\operatorname{sen} x), \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ **10.** $y = \ln(\cos x), \quad \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

11. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad [0, 2]$

12. $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right), \quad [\ln 2, \ln 3]$

13. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}, \quad 0 \le y \le 4$

14. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y - 3), \quad 1 \le y \le 4$

En los ejercicios 15–22, (a) represente gráficamente la función, resaltando la parte correspondiente al intervalo dado, (b) encuentre una integral definida que represente la longitud de arco de la curva en el intervalo indicado y, observe que esta integral no puede ser evaluada con las técnicas estudiadas hasta ahora, (c) aproxime la longitud de arco usando las capacidades para integración de una aplicación gráfica.

15. $y = 4 - x^2, \quad 0 \le x \le 2$ **16.** $y = \frac{1}{x + 1}, \quad 0 \le x \le 1$

17. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi$ **18.** $y = \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

19. $x = e^{-y}, \quad 0 \le y \le 2$ **20.** $y = \ln x, \quad 1 \le x \le 5$

21. $y = 2 \arctan x, \quad 0 \le x \le 1$

22. $x = \sqrt{36 - y^2}, \quad 0 \le y \le 3$

Aproximación **En los ejercicios 23 y 24, determine qué valor se aproxima más a la longitud del arco representado por la integral. (Decida con base en un dibujo del arco y *no* realizando cálculos.)**

23. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right)\right]^2}\, dx$

(a) 25 (b) 5 (c) 2 (d) −4 (e) 3

24. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}(\tan x)\right]^2}\, dx$

(a) 3 (b) −2 (c) 4 (d) $\frac{4\pi}{3}$ (e) 1

Aproximación **En los ejercicios 25 y 26, aproxime la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo [0, 4], de cuatro maneras diferentes. (a) Usando la fórmula para la distancia para hallar la distancia entre los puntos extremos del arco. (b) Usando la fórmula para la distancia para hallar las longitudes de los cuatros segmentos de recta que unen los puntos $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$ sobre el arco. Encuentre la suma de estas cuatro longitudes. (c) Usando la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral con la que se obtiene la longitud de arco indicada. (d) Usando las funciones para integración de una aplicación gráfica para aproximar la integral que da la longitud de arco indicada.**

25. $f(x) = x^3$ **26.** $f(x) = (x^2 - 4)^2$

27. (a) Use una aplicación gráfica para representar gráficamente la función $f(x) = x^{2/3}$.

(b) ¿Puede integrarse respecto a x para hallar la longitud de arco de la gráfica de f en el intervalo $[-1, 8]$? Explique.

(c) Encuentre la longitud de arco de la gráfica de f en el intervalo $[-1, 8]$.

28. ***Astroide*** Encuentre la longitud total de la gráfica del astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

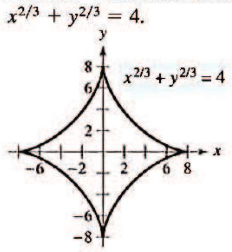


Figura para 28

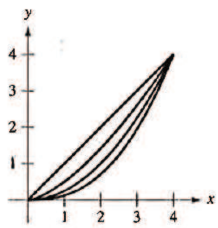


Figura para 29

29. ***Para pensar*** En la figura se muestra la gráfica de las funciones $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{2}x^{3/2}$, $y_3 = \frac{1}{4}x^2$, y $y_4 = \frac{1}{8}x^{5/2}$ en el intervalo $[0, 4]$. Para imprimir una amplificación de la gráfica visite *www.mathgraphs.com*.

(a) Identifique las funciones.

(b) Enumere las funciones en orden de la longitud creciente de sus arcos.

(c) Verifique la respuesta del inciso (b) aproximando cada longitud de arco con una exactitud de tres posiciones decimales.

30. ***Para pensar*** Explique por qué estas dos integrales son iguales.

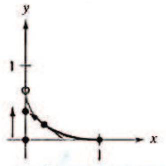
$$\int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

Use las capacidades para integración de una aplicación gráfica para comprobar que estas integrales son iguales.

31. ***Longitud de persecución*** Un objeto parte del origen y se mueve hacia arriba por el eje y (vea la figura en la página siguiente). Al mismo tiempo, un persecutor parte del punto $(1, 0)$ moviéndose constantemente hacia el objeto. La velocidad del persecutor es el doble de la del objeto. La ecuación de la trayectoria es

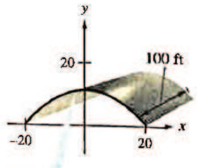
$$y = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2).$$

¿Qué distancia ha recorrido el objeto cuando es alcanzado? Demuestre que el persecutor recorre el doble de distancia.



$y = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2)$

Figura para 31



$y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$

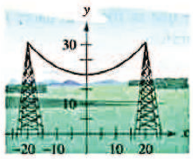
Figura para 32

32. ***Área de un techado*** Un granero tiene 100 pies de largo y 40 pies de ancho (vea la figura). Una sección transversal del techado es la catenaria $y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$. Encuentre la cantidad en pies cuadrados del techado del granero.

33. ***Longitud de una catenaria*** Un cable de electricidad suspendido entre dos torres forma una catenaria (vea la figura), que es modelada por la ecuación

$$y = 20 \cosh \frac{x}{20}, \quad -20 \le x \le 20$$

donde x y y se dan en metros. Las torres se encuentran a una distancia de 40 metros una de la otra. Encuentre la longitud del cable suspendido.



34. Encuentre la longitud de arco desde $(-3, 4)$, en contra de las manecillas del reloj, hasta $(4, 3)$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Demuestre que el resultado es un cuarto de la circunferencia del círculo.

En los ejercicios 35–38 dé y evalúe la integral definida para el área de la superficie generada por revolución de la curva dada en torno al eje *x*.

35. $y = \frac{1}{3}x^3, \quad 0 \le x \le 3$

36. $y = 2\sqrt{x}, \quad 4 \le x \le 9$

37. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad 1 \le x \le 2$

38. $y = \frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 6$

En los ejercicios 39 y 40, dé y evalúe la integral definida para el área de la superficie generada por revolución de la curva dada, en torno al eje *y*.

39. $y = \sqrt[3]{x} + 2, \quad 1 \le x \le 8$

40. $y = 9 - x^2, \quad 0 \le x \le 3$

En los ejercicios 41 y 42, para aproximar la superficie del área del sólido de revolución use las funciones para integración de una aplicación gráfica.

	Función	*Intervalo*
41.	$y = \operatorname{sen} x$ gira en torno al eje x	$[0, \pi]$
42.	$y = \ln x$ gira en torno al eje y	$[1, e]$

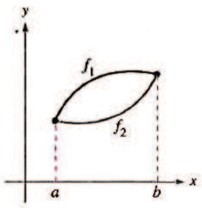
Desarrollo de conceptos

43. Defina curva rectificable.

44. ¿Qué fórmulas y elementos representativos ya conocidos antes de este curso de cálculo se usan para desarrollar la fórmula de integración para la longitud de arco?

45. ¿Qué fórmulas y elementos representativos ya conocidos antes de este curso de cálculo se usan para desarrollar la fórmula de integración para el área de una superficie de revolución?

46. En la figura se muestran las gráficas de las funciones f_1 y f_2 en el intervalo $[a, b]$. La gráfica de cada una de estas funciones se hace girar en torno al eje x. ¿Cuál de estas superficies de revolución tiene mayor área? Explique.



47. Por revolución en torno al eje y de la región limitada por $y = hx/r$, $y = h$, y $x = 0$ se genera un cono circular recto. Compruebe que el área de la superficie lateral de este cono es $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

48. Por revolución en torno al eje x de la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $x = 0$ se genera una esfera de radio r. Compruebe que el área de la superficie de esta esfera es $4\pi r^2$.

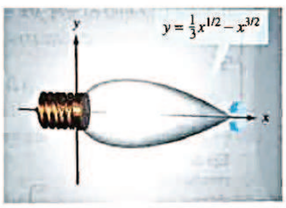
49. Encuentre el área de la zona de una esfera formada por revolución, en torno al eje y, de la gráfica de $y = \sqrt{9 - x^2}$, $0 \le x \le 2$.

50. Encuentre el área de la zona de una esfera formada por revolución, en torno al eje y, de la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \le x \le a$. Suponga que $a < r$.

51. ***Diseño de una bombilla eléctrica*** Se diseña una bombilla eléctrica ornamental mediante revolución de la gráfica de

$$y = \tfrac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}, \quad 0 \le x \le \tfrac{1}{3}$$

en torno al eje x, donde x y y se dan en pies (vea la figura). Encuentre el área de la superficie de la bombilla y use el resultado para dar una aproximación de la cantidad de vidrio que se necesita para hacer la bombilla. (Suponga que el espesor del vidrio es 0.015 pulgadas.)



52. ***Para pensar*** Considere la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(a) Use una aplicación gráfica para representar gráficamente esta ecuación.

(b) Dé una integral definida para hallar la longitud del arco en el primer cuadrante de la gráfica del inciso (a).

(c) Compare el intervalo de integración del inciso (b) con el dominio del integrando. ¿Es posible evaluar esta integral definida? ¿Es posible usar la regla de Simpson para evaluar esta integral definida? Explique. (En la sección 6.7 se verá cómo evaluar este tipo de integrales.)

53. Sea R la región limitada por $y = 1/x$, el eje x, $x = 1$ y $x = b$, donde $b > 1$. Sea D el sólido formado al hacer girar R en torno al eje x.

(a) Encuentre el volumen V de D.

(b) Exprese el área S de la superficie como una integral.

(c) Demuestre que V tiende a un límite finito cuando $b \to \infty$.

(d) Demuestre que $S \to \infty$ cuando $b \to \infty$.

54. (a) Dado un sector circular de radio L y ángulo central θ (vea la figura), demuestre que el área de este sector es

$$S = \frac{1}{2}L^2\theta.$$

(b) Uniendo los bordes rectos del sector del inciso (a), se forma un cono circular recto (vea la figura) y el área de la superficie lateral del cono es igual al área del sector. Demuestre que esta área es $S = \pi rL$, donde r es el radio de la base del cono. (*Sugerencia:* la longitud de arco del sector es igual a la circunferencia de la base del cono.)

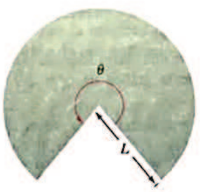


Figura para 54(a)

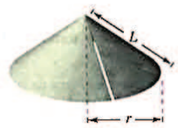
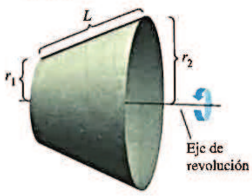


Figura para 54(b)

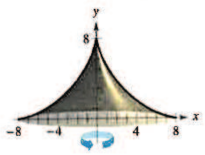
(c) Use el resultado del inciso (b) para verificar que la fórmula para el área de la superficie lateral del tronco de un cono de lado L y de radios r_1 y r_2 (vea la figura) es $S = \pi(r_1 + r_2)L$. (*Nota:* esta fórmula se usó para desarrollar la integral para hallar el área de la superficie de una superficie de revolución.)

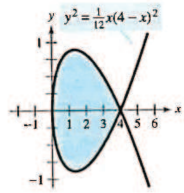


55. ***Proyecto individual*** Tome un sólido de revolución de la vida diaria. Mida el radio de este sólido en por lo menos siete puntos a lo largo de su eje. Use estos datos para aproximar el volumen del sólido y el área la superficie de los lados laterales del sólido.

56. ***Redacción*** Lea el artículo "Arc Length, Area and the Arcsine Function" de Andrew M. Rockett en *Mathematics Magazine.* Después redacte un párrafo en el que explique cómo puede definirse la función arcoseno en términos de la longitud de arco. (Para ver este artículo visite *www.matharticles.com.*)

57. ***Astroide*** Encuentre el área de la superficie que se forma al hacer rotar, en torno al eje y la porción en el primer cuadrante de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $0 \le y \le 8$

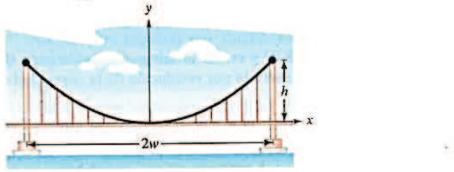




58. Considere la gráfica de $y^2 = \frac{1}{12}x(4 - x)^2$ (vea la figura). Encuentre el área de la superficie que se forma al hacer rotar, en torno al eje x, el lazo de esta gráfica.

59. ***Puente suspendido*** Un cable para un puente suspendido tiene la forma de una parábola cuya ecuación es $y = kx^2$. Sea h la altura del cable desde su punto más bajo hasta su punto más alto y sea $2w$ el largo total del puente (vea la figura). Demuestre que la longitud C del cable es

$$C = 2\int_0^w \sqrt{1 + \frac{4h^2}{w^4}x^2}\, dx.$$



60. ***Puente suspendido*** El puente Humber, que se encuentra en el Reino Unido y que fue inaugurado en 1981, tiene una longitud de aproximadamente 1400 metros. Cada una de sus torres tiene una altura de aproximadamente 155 metros. Utilizando estas dimensiones, la integral del ejercicio 59 y las funciones para integración de una aplicación gráfica, aproxime la longitud de un cable parabólico a lo largo de toda la longitud.

Examen Putnam

61. Encuentre la longitud de la curva $y^2 = x^3$ desde el origen hasta el punto en el que la tangente forma un ángulo de 45° con el eje x.

Este problema fue elaborado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

Larson, Ron: Cálculo esencial. Capítulo 7.2

Ejercicios de la sección 7.2

Vea www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares

En los ejercicios 1–6, encuentre los cinco primeros términos de la sucesión de sumas parciales.

1. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$

2. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 7} + \cdots$

3. $3 - \frac{9}{2} + \frac{27}{4} - \frac{81}{8} + \frac{243}{16} - \cdots$

4. $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

En los ejercicios 7–14, verifique que la serie infinita diverge.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} 1000(1.055)^n$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1.03)^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

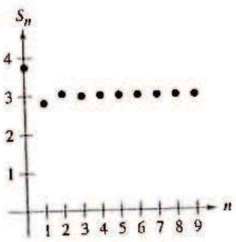
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

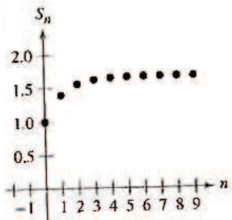
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

En los ejercicios 15–18, haga coincidir la gráfica con su sucesión de sumas parciales. [Las gráficas se han marcado con las letras (a), (b), (c) y (d).] Use la gráfica para estimar la suma de la serie. Confirme la respuesta analíticamente.

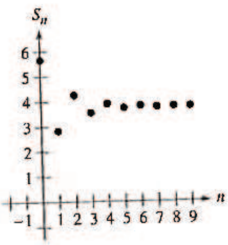
(a)



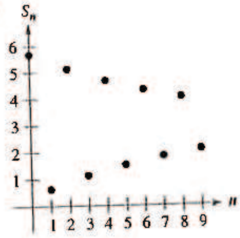
(b)



(c)



(d)



15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{8}{9}\right)^n$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

En los ejercicios 19–24, verifique que la serie infinita converge.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (Use fracciones parciales.)

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (Use fracciones parciales.)

21. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n = 1 + 0.9 + 0.81 + 0.729 + \cdots$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} (-0.6)^n = 1 - 0.6 + 0.36 - 0.216 + \cdots$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 25–30, (a) encuentre la suma de la serie, (b) use una aplicación gráfica para hallar la suma parcial S_n indicada y complete la tabla, (c) use una aplicación gráfica para representar gráficamente los 10 primeros términos de la sucesión de sumas parciales y una recta horizontal que represente la suma y (d) explique la relación entre las magnitudes de los términos de las series y la velocidad a la que la sucesión de sumas parciales se aproxima a la suma de las series.**

n	5	10	20	50	100
S_n					

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+3)}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} 2(0.9)^{n-1}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} 3(0.85)^{n-1}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} 10(0.25)^{n-1}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

En los ejercicios 31–46, encuentre la suma de la serie convergente.

31. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n+1)(n+2)}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

36. $\sum_{n=0}^{\infty} 6\left(\frac{4}{5}\right)^n$

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

38. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

39. $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$

40. $8 + 6 + \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \cdots$

41. $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots$

42. $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \cdots$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} [(0.7)^n + (0.9)^n]$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen } 1)^n$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}$

En los ejercicios 47–52, (a) escriba el decimal periódico en forma de una serie geométrica y (b) escriba su suma como cociente de dos enteros.

47. $0.\overline{4}$
48. $0.\overline{9}$
49. $0.\overline{81}$
50. $0.\overline{01}$
51. $0.0\overline{75}$
52. $0.2\overline{15}$

En los ejercicios 53–68, determine la convergencia o divergencia de la serie.

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{10n+1}$
54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}$
55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$
56. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$
57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+1}$
58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$
59. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n}$
60. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$
61. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1.075)^n$
62. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{100}$
63. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$
64. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n}$
65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$
66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$
67. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$
68. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Desarrollo de conceptos

69. Dé las definiciones de serie convergente y serie divergente.
70. Describa la diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5.$
71. Defina una serie geométrica, diga cuándo converge y dé la fórmula para la suma de una serie geométrica convergente.
72. Dé el criterio del n-ésimo término para la divergencia.
73. Sea $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Analice la convergencia de $\{a_n\}$ y de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
74. Explique algunas diferencias entre las series siguientes.
(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_k$

En los ejercicios 75–82, encuentre todos los valores de x para los que la serie converge. Para estos valores de x, escriba la suma de la serie en función de x.

75. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$
76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$
77. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$
78. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{x-3}{4}\right)^n$
79. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$
80. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$
81. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$
82. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)^n$

83. (a) Se elimina un número finito de términos de una serie divergente, ¿divergerá la nueva serie? Explique su razonamiento
(b) Se agrega un número finito de términos a una serie convergente, ¿convergirá la nueva serie? Explique su razonamiento.

84. ***Para pensar*** Considere la fórmula

$$\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Dados $x = -1$ y $x = 2$, ¿puede concluirse si los enunciados siguientes son verdaderos o no? Explique su razonamiento.

(a) $\dfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

(b) $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$

En los ejercicios 85 y 86, (a) encuentre el cociente común de la serie geométrica, (b) proporcione la función que da la suma de la serie y (c) utilice una aplicación gráfica para representar gráficamente la función y las sumas parciales S_3 y S_5. ¿Qué observa?

85. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
86. $1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{8} + \cdots$

En los ejercicios 87 y 88, use una aplicación gráfica para representar gráficamente la función. Halle la asíntota horizontal de la gráfica e indique su relación con la suma de la serie.

	Función	*Serie*
87.	$f(x) = 3\left[\dfrac{1-(0.5)^x}{1-0.5}\right]$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$
88.	$f(x) = 2\left[\dfrac{1-(0.8)^x}{1-0.8}\right]$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{4}{5}\right)^n$

Redacción **En los ejercicios 89 y 90, emplee una aplicación gráfica para hallar el primer término menor a 0.0001 de cada una de las series convergentes. Observe que las respuestas son muy diferentes. Explique cómo afectará esto la rapidez con que cada serie converge.**

89. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n$
90. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (0.01)^n$

91. ***Marketing*** Un fabricante de juegos electrónicos elabora un nuevo producto que estima tendrá ventas anuales de 8000 unidades. Cada año, el 10% de las unidades vendidas se volverán inoperativas. Por lo tanto, después de 1 año habrá 8000 unidades, después de 2 años [8000 + 0.9(8000)] unidades, y así sucesivamente. ¿Cuántas unidades estarán en uso después de n años?

92. ***Depreciación*** Una empresa compra una máquina de \$ 225,000 que se deprecia a una tasa de 30% anual. Encuentre una fórmula que dé el valor de la máquina después de n años. ¿Cuál es el valor de la máquina después de 5 años?

93. *Efecto multiplicador* En una ciudad turística los turistas gastan \$100 millones. De esta ganancia, aproximadamente el 75% se vuelve a gastar en esta ciudad turística y de esta cantidad, aproximadamente el 75% se vuelve a gastar en la misma ciudad, y así sucesivamente. Dé una serie geométrica que proporcione la cantidad total de gasto generado por los \$100 millones y encuentre la suma de la serie.

94. *Efecto multiplicador* Repita el ejercicio 93 si el porcentaje del ingreso que vuelve a gastarse en la ciudad disminuye a 60%.

95. *Distancia* Se deja caer una pelota desde una altura de 16 pies. Por cada h pies que desciende, rebota $0.81h$ pies. Encuentre la distancia total que recorre la pelota.

96. *Tiempo* El tiempo que necesita la pelota del ejercicio 95 en cada rebote es

$$\begin{array}{ll} s_1 = -16t^2 + 16, & s_1 = 0 \text{ si } t = 1 \\ s_2 = -16t^2 + 16(0.81), & s_2 = 0 \text{ si } t = 0.9 \\ s_3 = -16t^2 + 16(0.81)^2, & s_3 = 0 \text{ si } t = (0.9)^2 \\ s_4 = -16t^2 + 16(0.81)^3, & s_4 = 0 \text{ si } t = (0.9)^3 \\ \vdots & \vdots \\ s_n = -16t^2 + 16(0.81)^{n-1}, & s_n = 0 \text{ si } t = (0.9)^{n-1} \end{array}$$

A partir de s_2 la pelota, en cada rebote, necesita la misma cantidad de tiempo para subir que para bajar y por lo tanto el total de tiempo que transcurre antes de que llegue al reposo es

$$t = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(0.9)^n.$$

Encuentre este tiempo total.

Probabilidad **En los ejercicios 97 y 98, la variable aleatoria n representa la cantidad de unidades de un producto que se venden por día en un almacén. La distribución de probabilidad de n es la dada por $P(n)$. Encuentre la probabilidad de que en un día determinado se vendan dos unidades [$P(2)$] y muestre que $P(1) + P(2) + P(3) + \cdots = 1$.**

97. $P(n) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **98.** $P(n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

99. *Probabilidad* Una moneda no cargada se lanza varias veces. La probabilidad de que la primera cara se dé en el n-ésimo lanzamiento es $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donde $n \geq 1$.

(a) Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$

(b) La cantidad de lanzamientos esperada hasta que se obtenga la primera cara es

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

¿Es ésta una serie geométrica?

(c) Use un sistema computarizado de álgebra para hallar la suma en el inciso (b).

100. *Probabilidad* En un experimento, lanzan, tres personas, una tras otra, una moneda no cargada hasta que una de ellas obtiene cara. Encuentre la probabilidad de cada persona de ser la primera que obtenga cara. Verifique que la suma de las tres probabilidades es 1.

101. *Área* Los lados de un cuadrado miden 16 pulgadas. Uniendo los puntos medios de los lados de este cuadrado original se forma un nuevo cuadrado y se sombrean dos de los triángulos que quedan fuera del segundo cuadrado (ver figura). Encuentre el área de la región sombreada (a) si se continúa con este proceso otras cinco veces más (b) si este patrón de sombreado se continúa infinitamente.

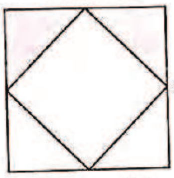


Figura para 101

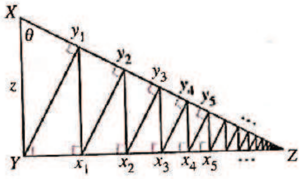


Figura para 102

102. *Longitud* Arriba se muestra un triángulo rectángulo XYZ, en el que $|XY| = z$ y $\angle X = \theta$. Se han dibujado segmentos de recta continuos perpendiculares al triángulo, como se muestra en la figura.

(a) Encuentre la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares $|Yy_1| + |x_1y_1| + |x_1y_2| + \cdots$ en términos de z y θ.

(b) Si $z = 1$ y $\theta = \pi/6$, encuentre la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares.

En los ejercicios 103–106, emplee la fórmula para la n-ésima suma parcial de la serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

103. *Valor presente* Al ganador de un premio de \$1,000,000 de la lotería se le pagarán \$50,000 por año durante 20 años. Este dinero gana un interés anual de 6%. El valor presente del premio es

$$\sum_{n=1}^{20} 50{,}000\left(\frac{1}{1.06}\right)^n.$$

Calcule el valor presente e interprete su significado.

104. *Copo esférico* El copo esférico que se muestra abajo es un fractal generado por computadora y creado por Eric Haines. El radio de la esfera más grande es 1. A la esfera más grande se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{3}$. A cada una de éstas se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{9}$. Este proceso continúa *ad infinitum*. Pruebe que el copo de esferas tiene un área de superficie infinita.

Eric Haines

105. ***Salario*** A un empleado de una empresa le pagan \$ 0.01 el primer día, \$ 0.02 el segundo día, \$0.04 el tercer día y así sucesivamente. Si su sueldo se sigue duplicando, ¿cuál será su ingreso total después de trabajar (a) 29 días, (b) 30 días y (c) 31 días?

106. ***Anualidades*** Al final del mes a un empleado se le invierten P dólares de su pago en una cuenta para el retiro. Estos depósitos se hacen mensualmente durante t años y la cuenta obtiene una tasa de interés r anual. Si el interés es compuesto mensualmente, la cantidad A en la cuenta después de t años es

$$A = P + P\left(1 + \frac{r}{12}\right) + \cdots + P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t-1}$$
$$= P\left(\frac{12}{r}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t} - 1\right].$$

Si el interés es compuesto continuamente, la cantidad A en la cuenta después de t años es

$$A = P + Pe^{r/12} + Pe^{2r/12} + Pe^{(12t-1)r/12}$$
$$= \frac{P(e^{rt} - 1)}{e^{r/12} - 1}.$$

Verifique las fórmulas de las sumas dadas arriba.

Anualidades **En los ejercicios 107 y 108, considere depósitos mensuales de *P* dólares en una cuenta de ahorros a una tasa *r* de interés anual. Use el resultado del ejercicio 106 para hallar el saldo *A* después de *t* años si el interés es compuesto (a) mensualmente y (b) continuamente.**

107. $P = \$100,\ r = 4\%,\ t = 40$ años

108. $P = \$75,\ r = 5\%,\ t = 25$ años

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 109–114 diga si los enunciados son verdaderos o falsos. Si son falsos explique por qué o dé un ejemplo que muestre que son falsos.**

109. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

110. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L + a_0$.

111. Si $|r| < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{(1-r)}$.

112. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000(n+1)}$ diverge.

113. $0.75 = 0.749999\ldots$.

114. Todo decimal que tenga dígitos que se repiten es un número racional.

115. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede escribirse en la forma telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(c - S_{n-1}) - (c - S_n)]$$

donde $S_0 = 0$ y S_n es la n-ésima suma parcial.

116. Sea $\Sigma\, a_n$ una serie convergente y sea

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

el residuo de la serie después de los primeros N términos. Demuestre que $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$.

117. Encuentre dos series divergentes $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ tales que $\Sigma\,(a_n + b_n)$ converja.

118. Dadas dos series infinitas $\Sigma\, a$ y $\Sigma\, b$ tales que $\Sigma\, a_n$ converja y $\Sigma\, b_n$ diverja, demuestre que $\Sigma(a_n + b_n)$ diverge.

119. La sucesión de Fibonacci se define recursivamente mediante $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

(a) Demuestre que $\frac{1}{a_{n+1}\, a_{n+3}} = \frac{1}{a_{n+1}\, a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+2}\, a_{n+3}}$.

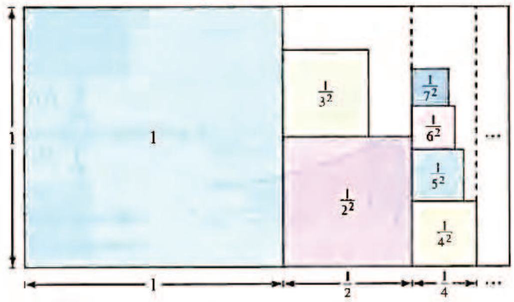
(b) Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}\, a_{n+3}} = 1$.

120. Encuentre los valores de x para los que la serie infinita

$1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + \cdots$ converge. ¿Cuál es la suma cuando la serie converge?

121. Demuestre que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots = \frac{1}{r-1}$ para $|r| > 1$.

122. ***Redacción*** La figura que se presenta abajo es una manera informal de demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$. Explique cómo esta figura implica esta conclusión.



PARA MÁS INFORMACIÓN Más acerca de este ejercicio puede verse en el artículo "Convergence with Pictures" de P. J. Rippon en *American Mathematical Monthly.*

123. ***Redacción*** Lea el artículo "The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages" de Gerald M. Armtrong y Calvin P. Midgley en *Mathematics Teacher.* (Este artículo puede verlo en *www.matharticles.com.*) Escriba después un párrafo sobre cómo puede usarse una sucesión geométrica para hallar la cantidad total de un medicamento que permanece en el cuerpo del paciente después de la administración de n dosis iguales (a los mismos intervalos de tiempo).

Examen Putnam

124. Exprese $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)}$ en forma de número racional.