

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



DOCTORADO EN INGENIERÍA

# **Computación de alto desempeño para la resolución de problemas con interfases móviles y cuerpos inmersos**

Msc. Ing. Esteban Zamora Ramírez.

FICH

FACULTAD DE INGENIERÍA

Y CIENCIAS HÍDRICAS

INTEC

INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO

PARA LA INDUSTRIA QUÍMICA

CIMEC

CENTRO DE INVESTIGACIÓN

DE MÉTODOS COMPUTACIONALES

$\text{sinc}(i)$

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN SEÑALES,

SISTEMAS E INTELIGENCIA COMPUTACIONAL

Tesis de Doctorado **2024**

**Doctorado en Ingeniería**

**Mención mecánica computacional**

Título de la obra:

**Computación de alto desempeño  
para la resolución de problemas  
con interfases móviles y cuerpos inmersos**

Autor: Esteban Zamora Ramírez

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras Claves:

Multifísica, Computacion de alto rendimiento,  
Elementos Finitos, Volúmenes Finitos,  
Level set, Dominios Embebidos,  
Interacción Fluido-Estructura, Seguimiento de objetos,  
Formulación basada en penalización, Validación experimental.





UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

# **Computación de alto desempeño para la resolución de problemas con interfases móviles y cuerpos inmersos**

**Msc. Ing. Esteban Zamora Ramírez**

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado

como parte de los requisitos para la obtención

del grado de

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

Mención Mecánica Computacional

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

**2024**

Secretaría de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria,  
Paraje "El Pozo", S3000, Santa Fe, Argentina.





UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

## **Computación de alto desempeño para la resolución de problemas con interfases móviles y cuerpos inmersos**

**Msc. Ing. Esteban Zamora Ramírez**

### **Lugar de trabajo:**

CIMEC

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Universidad Nacional del Litoral

### **Director:**

Dra. Ing. Laura Battaglia

CIMEC

### **Co-director:**

Dra. Ing. Marcela A. Cruchaga

USACH

### **Jurado Evaluador:**

Dr. Gabriel Usera Universidad de la República Oriental del Uruguay, Uruguay.

Dr. Pablo Ortiz

Universidad de Granada, España.

Dr. Axel Larreteguy

Universidad Argentina de la Empresa, Argentina.

**2024**



# **Declaración legal del autor**

Esta Tesis ha sido remitida a la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, como parte de los requisitos para la obtención del grado de Doctor en Ingeniería.

Citaciones breves de esta disertación son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para una citación extendida o para la reproducción de este manuscrito en un todo o en parte serán exigidas por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la misma.

Esteban Zamora Ramírez



# Agradecimientos

Agradezco a las instituciones que me permitieron realizar mis estudios de doctorado, a mencionar; El Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), el cual me brindó soporte para realizar los trabajos de simulación numérica, así como al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), a la Universidad Nacional del Litoral (UNL), quienes proporcionaron el financiamiento a través de la la beca interna doctoral Marco unidad ejecutora y sus proyectos. Además, quiero agradecer al Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Santiago de Chile (DIMEC-USACH), donde llevé a cabo la mayor partes de los trabajos experimentales.



# Resumen

Esta tesis, titulada *Computación de alto desempeño para la resolución de problemas con interfaces móviles y cuerpos inmersos*, aborda el desarrollo de métodos numéricos eficientes y precisos aplicados a la dinámica de fluidos con cuerpos rígidos inmersos, un tema relevante en la ingeniería y abordado mediante la mecánica computacional. El trabajo se centra en la interacción fluido-estructura, con especial atención en problemas que involucran interfaces móviles, tales como el fenómeno de agitación o *sloshing* en tanques, así como el comportamiento de cuerpos rígidos que se desplazan en fluidos o son sometidos a movimientos oscilatorios. La motivación principal de esta tesis radica en la necesidad de resolver problemas de interacción fluido-estructura en escenarios donde los métodos analíticos resultan complejos o inadecuados. Para ello, se implementan técnicas numéricas avanzadas como volúmenes finitos y elementos finitos estabilizados, adecuadas para su ejecución en entornos de computación de alto rendimiento. También se utilizan métodos de penalización y formulaciones basadas en interfaces embebidas para describir la dinámica de los cuerpos inmersos en el fluido, facilitando la simulación en mallas fijas. El trabajo incluye una componente experimental significativa, donde se validan los resultados numéricos mediante la comparación con datos experimentales obtenidos en tanques sometidos a movimientos oscilatorios forzados. Se realizan simulaciones numéricas de esferas sumergidas, que se complementan con análisis espectrales y técnicas de procesamiento de imágenes para el seguimiento de objetos. Además, se profundiza el cálculo de fuerzas hidrodinámicas, como el arrastre y la sustentación, y la evaluación del comportamiento de coeficientes tales como el de masa agregada. La estructura de esta tesis cubre desde la formulación numérica y el desarrollo de los métodos experimentales, hasta la validación y aplicación de los resultados en problemas prácticos. El estudio ofrece un análisis detallado de la eficiencia computacional de las técnicas desarrolladas, mostrando su escalabilidad en plataformas de computación paralela. En conclusión, esta tesis contribuye significativamente al campo de la simulación numérica de flujos con cuerpos inmersos, proporcionando herramientas robustas y validadas para el estudio de fenómenos complejos en la dinámica de fluidos, con aplicaciones potenciales en la ingeniería de energía undimotriz, el diseño de tanques de combustible y la ingeniería naval.





# Abstract

This thesis, entitled *High performance computing for solving problems with moving interfaces and immersed bodies*, addresses the development of efficient and accurate numerical methods applied to fluid dynamics with immersed rigid bodies, a relevant topic in engineering and addressed through computational mechanics. The work focuses on fluid-structure interaction, with special attention to problems involving moving interfaces, such as the phenomenon of sloshing in tanks, as well as the behavior of rigid bodies moving in fluids or subjected to oscillatory motions. The main motivation of this thesis lies in the need to solve fluid-structure interaction problems in scenarios where analytical methods are complex or inadequate. For this purpose, advanced numerical techniques such as finite volumes and stabilized finite elements, suitable for execution in high performance computing environments, are implemented. Penalization methods and formulations based on embedded interfaces are also used to describe the dynamics of bodies immersed in the fluid, facilitating simulation on fixed meshes. The work includes a significant experimental component, where numerical results are validated by comparison with experimental data obtained in tanks subjected to forced oscillatory motions. Numerical simulations of submerged spheres are performed, which are complemented with spectral analysis and image processing techniques for object tracking. In addition, the calculation of hydrodynamic forces, such as drag and lift, and the evaluation of the behavior of coefficients such as the aggregate mass coefficient are further developed. The structure of this thesis covers from the numerical formulation and the development of the experimental methods, to the validation and application of the results in practical problems. The study provides a detailed analysis of the computational efficiency of the developed techniques, showing their scalability on parallel computing platforms. In conclusion, this thesis contributes significantly to the field of numerical simulation of immersed-body flows, providing robust and validated tools for the study of complex phenomena in fluid dynamics, with potential applications in wave power engineering, fuel tank design and naval engineering.



# Índice general

|                                                                                                                                            |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                                                                                                                     | <b>1</b>  |
| 1.1. Motivación . . . . .                                                                                                                  | 1         |
| 1.2. Objetivos . . . . .                                                                                                                   | 3         |
| 1.3. Estado del arte . . . . .                                                                                                             | 4         |
| 1.3.1. Problemas de sloshing en ingeniería . . . . .                                                                                       | 5         |
| 1.3.2. Tratamiento de condiciones de contorno . . . . .                                                                                    | 6         |
| 1.3.3. Contribuciones de la Tesis . . . . .                                                                                                | 8         |
| 1.4. Estructura de la Tesis . . . . .                                                                                                      | 9         |
| <b>2. Metodología</b>                                                                                                                      | <b>11</b> |
| 2.1. Formulación numérica . . . . .                                                                                                        | 11        |
| 2.1.1. Cómputo de fuerzas hidrodinámicas sobre un sólido tratado como partícula . . . . .                                                  | 11        |
| 2.1.2. Ecuaciones fluido-dinámicas y su aplicación a la técnica de sólidos embebidos . . . . .                                             | 13        |
| 2.1.3. Tratamiento de condiciones de contorno . . . . .                                                                                    | 15        |
| 2.1.4. Esquema de interacción de cuerpos con movimiento impuesto inmersos con acoplamiento<br>en una dirección . . . . .                   | 16        |
| 2.1.5. Cómputo de fuerzas hidrodinámicas sobre un sólido embebido . . . . .                                                                | 18        |
| 2.2. Desarrollo experimental . . . . .                                                                                                     | 19        |
| 2.2.1. Estanque dividido y objetos 3D impresos en PLA . . . . .                                                                            | 19        |
| 2.2.2. Procesamiento de Imágenes . . . . .                                                                                                 | 21        |
| <b>3. Validación y aplicaciones</b>                                                                                                        | <b>27</b> |
| 3.1. Primeras aproximaciones numéricas al comportamiento de una esfera sumergida en un estanque<br>dividido sometido a agitación . . . . . | 27        |
| 3.2. Método embebido para computación de alto rendimiento . . . . .                                                                        | 27        |
| 3.3. Condición de contorno embebida en flujo sobre cilindro 2-D . . . . .                                                                  | 29        |
| 3.4. Simulación de una esfera oscilante dentro de un dominio cúbico . . . . .                                                              | 35        |

|                                                                                                                                         |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.5. Vasos comunicantes bajo imposición de movimiento con <i>baffle</i> . . . . .                                                       | 37        |
| 3.6. Seguimiento de objetos mediante procesamiento de imágenes . . . . .                                                                | 40        |
| <b>4. Conclusiones</b> . . . . .                                                                                                        | <b>43</b> |
| 4.1. Conclusiones técnicas . . . . .                                                                                                    | 43        |
| 4.2. Problemas abiertos . . . . .                                                                                                       | 44        |
| 4.3. Contribuciones científicas derivadas del Doctorado . . . . .                                                                       | 47        |
| 4.3.1. Publicaciones en revistas indexadas . . . . .                                                                                    | 47        |
| 4.3.2. Presentaciones en congresos . . . . .                                                                                            | 47        |
| <b>Bibliografía</b> . . . . .                                                                                                           | <b>49</b> |
| <b>A. Numerical and experimental study of the motion of a sphere in a communicating vessel system<br/>subject to sloshing</b> . . . . . | <b>59</b> |
| A.1. INTRODUCTION . . . . .                                                                                                             | 60        |
| A.2. Experimental work . . . . .                                                                                                        | 61        |
| A.2.1. Experimental layout . . . . .                                                                                                    | 61        |
| A.2.2. Image capturing technique . . . . .                                                                                              | 62        |
| A.2.3. Experimental methodology . . . . .                                                                                               | 64        |
| A.3. Mathematical model . . . . .                                                                                                       | 65        |
| A.3.1. Fluid dynamics formulation and free surface description . . . . .                                                                | 65        |
| A.3.2. Solid-rigid dynamics . . . . .                                                                                                   | 66        |
| A.3.3. Solvers coupling . . . . .                                                                                                       | 68        |
| A.4. Numerical results . . . . .                                                                                                        | 69        |
| A.4.1. Settling of a single sphere . . . . .                                                                                            | 69        |
| A.4.2. Modeling the experiments . . . . .                                                                                               | 70        |
| A.5. Conclusions . . . . .                                                                                                              | 74        |
| <b>B. Embedded finite volume technique for fluid/rigid-body interaction problems</b> . . . . .                                          | <b>87</b> |
| B.1. Introduction . . . . .                                                                                                             | 88        |
| B.2. Governing equations . . . . .                                                                                                      | 89        |
| B.2.1. Fluid dynamic equations . . . . .                                                                                                | 89        |
| B.3. Numerical strategy . . . . .                                                                                                       | 90        |
| B.3.1. Fluid flow . . . . .                                                                                                             | 90        |
| B.3.2. Computation of the fluid forces acting on the body . . . . .                                                                     | 91        |
| B.4. Numerical tests . . . . .                                                                                                          | 93        |

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| B.4.1. Fixed wall conditions: Poiseuille flow . . . . .                    | 94  |
| B.4.2. Tangential moving wall boundaries: first Stokes problem . . . . .   | 94  |
| B.4.3. Tangential moving wall boundaries: second Stokes problems . . . . . | 95  |
| B.4.4. Internal moving walls: piston-type flow . . . . .                   | 97  |
| B.4.5. Immersed moving cylinder . . . . .                                  | 99  |
| B.5. Conclusions . . . . .                                                 | 101 |



# Índice de figuras

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Posición de la superficie para diferentes posiciones del estanque. El primer fotograma señala la posición más alejada del estanque hacia la izquierda, el segundo fotograma muestra la posición de referencia, y el tercer fotograma señala la posición más alejada del estanque hacia la derecha. . . . .                                                                                        | 2  |
| 1.2. Posición de la diferencia de altura máxima entre superficies libres cuando el estanque pasa por la posición de referencia. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                | 2  |
| 1.3. a) Descripción esquemática del caso de estudio. Dominios: $\Omega_{f1}$ , agua; $\Omega_{f2}$ , aire; $\Omega_s$ , esfera de polímero. Interfases: $\Gamma_{SL}$ , frontera móvil deformable; $\Gamma_{IB}$ , frontera móvil no deformable inmersa. b) Parámetros involucrados en la potencia hidráulica entregada por el movimiento externo de la caja al sistema de vasos comunicantes. . . . . | 3  |
| 1.4. Perfil de velocidad en la apertura inferior fija $h_A = 5cm$ obtenidas por simulación numérica mediante elementos finitos estabilizados. De izquierda a derecha y de arriba a abajo los instantes de tiempo corresponden a $t = 0\tau, 0.125\tau, 0.375\tau, 0.5\tau$ . . . . .                                                                                                                   | 3  |
| 2.1. Intercambio de datos entre la dinámica del fluido y el sólido involucrados en el algoritmo. . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 12 |
| 2.2. Dominio de análisis $\Omega$ , que incluye las regiones de fluido $\Omega_f$ y sólido $\Omega_s$ : continuo y discreto con identificación de celdas. . . . .                                                                                                                                                                                                                                      | 17 |
| 2.3. a) Recipiente para realizar experimentos de sincronización, y primeros seguimientos de objetos sumergidos. b) Recipiente para realizar experimentos de movimiento de múltiples objetos sumergidos, y estudio de sensibilidad de la superficie libre con respecto a la apertura de la compuerta que separa ambas cavidades. . . . .                                                                | 19 |
| 2.4. a) Distancia $\varepsilon$ que define el nivel de relleno del objeto de PLA impreso en 3D, b) Verificación de peso en gramos de esfera de PLA construida en impresora 3D. . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 20 |
| 2.5. Modelo de cámara estenopeica con marcador fiducial para resolver problema de estimación de posición. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 22 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.6. a) Calibración de cámaras mediante identificación de esquinas interiores de un patrón tipo tablero de ajedrez de tamaño 6x9. b) Marcador ArUco 18 de 50 marcadores diferentes disponibles en la biblioteca de marcadores 7x7 bits. Los 4 vértices del marcador están numerados, y tienen coordenadas perimétricas según el sistema de referencias $\xi$ . . . . .                                        | 23 |
| 2.7. Esquema resumen de la técnica de procesamiento de imágenes utilizada para obtener resultados experimentales comparables. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                         | 25 |
| 2.8. Medición de error medio en el plano 2D con patrón sumergido. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 26 |
| 3.1. a) Dominio y condiciones de contorno utilizadas para modelar el conocido caso de un flujo pasante sobre un cilindro. b) Representación del cilindro con técnica embebida, c) Perfil de velocidad a lo largo de una línea horizontal coincidente con el diámetro del cilindro. . . . .                                                                                                                    | 30 |
| 3.2. a) Evolución temporal del coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) para las dos metodologías consideradas, en el caso de $Re = 100$ . b) Convergencia de los coeficientes hidrodinámicos ( $C_L$ y $C_d$ ) comparados con la técnica <i>fitted</i> como referencia. . . . .                                                                                                                                 | 31 |
| 3.3. a) Evolución temporal del coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) para las dos metodologías consideradas, en el caso de $Re = 500$ . b) Convergencia de los coeficientes hidrodinámicos ( $C_L$ y $C_d$ ) comparados con la técnica <i>fitted</i> como referencia. . . . .                                                                                                                                 | 32 |
| 3.4. a) Evolución temporal del coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) para las dos metodologías consideradas, en el caso de $Re = 1000$ . b) Convergencia de los coeficientes hidrodinámicos ( $C_L$ y $C_d$ ) comparados con la técnica <i>fitted</i> como referencia. . . . .                                                                                                                                | 33 |
| 3.5. Estudio de sensibilidad del parámetro $\kappa$ en función del número de celdas por diámetro ( $\frac{N}{D}$ ), evaluando el error absoluto. También se muestra la inestabilidad de la fuerza en el tiempo para la metodología embebida, evidenciando el impacto de los diferentes valores de $\kappa$ y el nivel de refinamiento de la malla. . . . .                                                    | 34 |
| 3.6. a) Fotograma extraído del problema de la esfera móvil sumergida, resuelto con volúmenes finitos utilizando una técnica embebida para la representación del objeto sumergido. b) Speedup de la técnica embebida en un problema de boya esférica móvil 3D. Dominio computacional de 8 millones de celdas. . . . .                                                                                          | 36 |
| 3.7. Resultados experimentales y numéricos de la dinámica de la superficie libre. a) Diferencia de altura $h_{diff}$ entre los puntos de control CP1 y CP2, junto con el desplazamiento de la mesa $x_{box}$ para los resultados experimentales (puntos) y numéricos FEM/SUPG (líneas). b) Comparación de resultados experimentales y simulaciones numéricas de la superficie libre mediante FVM/VOF. . . . . | 38 |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.8. Figuras de Lissajous para el desplazamiento de la base a diferentes frecuencias de movimiento $f = 0.9, 1.0, 1.1$ Hz, con una amplitud $A = 20$ mm para dos niveles de llenado distintos: $H = 27.5$ cm y $H = 37.5$ cm. . . . .                                                                                        | 39 |
| 3.9. a) Esquema del problema de la esfera rodando sobre cilindro. b) Comparación analítica/numérica con datos experimentales obtenidos del procesamiento de imágenes. . . . .                                                                                                                                                | 41 |
| 3.10. Comparación de resultados analíticos y experimentales obtenidos mediante procesamiento de imágenes a) Posición angular acorde al modelo de 1 grado de libertad de la Ec.(3.3). b) Posición angular de la esfera. c) Velocidad angular de la esfera . . . . .                                                           | 42 |
| 4.1. Detección de múltiples esferas sumergidas en diferentes planos de profundidad. . . . .                                                                                                                                                                                                                                  | 47 |
| A.1. Geometry of the tank with dimensions in mm. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                     | 62 |
| A.2. Experimental set-up . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 62 |
| A.3. Classification of the frames by their position relative to the cycle. . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | 63 |
| A.4. Image capturing technique uncertainty assessment. Some random sphere positions, search zones and results obtained from the algorithm. . . . .                                                                                                                                                                           | 63 |
| A.5. Data exchange between the fluid and the solid dynamics involved in the algorithm. . . . .                                                                                                                                                                                                                               | 68 |
| A.6. Single particle settling in a rectangular box. Dimensions in mm. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                | 69 |
| A.7. Comparison of the experimental data (dots) and simulation results (continuous lines) in terms of (a) vertical position $h^* = \frac{z-r_p}{2r_p}$ and (b) velocity for different Reynolds numbers. . . . .                                                                                                              | 70 |
| A.8. Free surface experimental and simulation results. (a) Differences in height $h_{diff}$ between control points $CP_1$ and $CP_2$ and box displacements $x_{box}$ for the experimental (dots) and numerical (lines) results. (b) Lissajous pattern with the experimental (crosses) and simulation (line) results. . . . . | 72 |
| A.9. Some frames corresponding to a cycle during steady state periodic regime at the times shown: 0, 3, 5, 7 and 9 according to FIG A.3. Experiment (left column) and simulation (right column). . . . .                                                                                                                     | 76 |
| A.10. Four different types of trajectories of the sphere starting in i and finishing in j. (a) Trajectory 3-4. (b) Trajectory 2-3. (c) Trajectory 2-1. (d) Trajectory 4-3. . . . .                                                                                                                                           | 77 |
| A.11. Reynolds numbers for the 3 numerical results. Figure (a) shows the temporal evolution, and (b) shows the discrete Fourier analysis. . . . .                                                                                                                                                                            | 77 |
| A.12. Distributions: (a) Reynolds number and (b) drag coefficient from all the simulations for set 1 and set 2, (c) mean velocity of the sphere distribution found in the experiment and two simulation results. . . . .                                                                                                     | 78 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A.13. Comparison of the experimental and numerical results at different instants of the analysis after symmetry reflection. Probability distributions in the $x$ (left) and $y$ (right) directions for the left vessel. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 79  |
| 13 (Continued) Comparison of the experimental and numerical results at different instants of the analysis after symmetry reflection. Probability distributions in the $x$ (left) and $y$ (right) directions for the left vessel. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 80  |
| B.1. Domain of analysis $\Omega$ , including fluid $\Omega_f$ and solid $\Omega_s$ regions: (a) continuous and (b) discrete with cell identification. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 90  |
| B.2. Geometry. a) Poiseuille flow between parallel plates. b) First and second Stokes problems. c) Internal moving walls: piston-type flow. d) Immersed moving cylinder. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 93  |
| B.3. Numerical results for the Poiseuille flow. a) Velocity field in stationary regime; b) dimensionless velocity profile for discretizations M8, M32 y M128; c) velocity error $ e ^*$ variation with respect to $1/\kappa$ for different mesh sizes $M$ ; d) velocity error $ e ^*$ variation with respect to the mesh discretization for different $\kappa$ values. As a reference, first-order convergence is sketched. . . . .                                                                                                                                                              | 95  |
| B.4. Numerical results for the first Stokes problem. a) Velocity field; b) velocity profile in height at 10 s of simulation; c) error measurements as a function of $1/\kappa$ and an estimation of saturation limit for different mesh discretizations ; d) Mesh convergence for $\kappa = 10^5$ . As a reference, first-order convergence is sketched. . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | 96  |
| B.5. Numerical results for the second Stokes problem. a) Velocity field in time $t = 9.55$ s; b) velocity profile in $x = 0$ and $t = 9.55$ s, numerical result and reference solution [20]; Forces per unit area vs. velocity for Fourier number c) $Fo = 4$ and d) $Fo = 0.5$ ; e) Evolution of the forces per unit area using different meshes for $Fo = 0.5$ and $\kappa = 10^5$ ; f) RMSE for the normalized forces for unit area $\hat{\tau}$ and the velocity $\hat{u}$ , as a function of $Fo$ and the mesh size, first and second convergence lines are plotted as a reference. . . . . | 98  |
| B.6. Results for piston-type flow: a) pressure field at the time where maximum displacement is reached; b) pressure profile evolution for one period; c) convergence during the time for $Co = 1$ using different meshes and $\kappa$ values; d) convergence during the time for $Co = 0.1$ using different meshes and $\kappa$ values; e) convergence average on time (according to RMSE definition) for the different time and space discretizations, and $\kappa$ ; f) mesh size convergence analysis for a given $\kappa = 10^4$ for $Co = 0.1$ and $Co = 1$ . . . . .                       | 102 |
| B.7. Moving cylinder: pressure contours obtained with the present embedded technique at different instants of a period, grid M1, and for the different $\beta$ proposed. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 103 |
| B.8. Moving cylinder: vorticity contours obtained with the present embedded technique at different instants of a period, grid M1, and for the different $\beta$ proposed. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 103 |

B.9. Moving cylinder: forces exerted by the fluid on the solid obtained with the present formulation and the ALE/FVM strategy. . . . . 104

B.10. Moving cylinder. a) Power dissipated during the time and linear regression model (discontinuous lines); b) Drag coefficient computed using the present technique in comparison with experimental and numerical results reported in the literature. . . . . 104



# Índice de tablas

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. | Peso de esferas en función del nivel de relleno $\varepsilon$ . Se toma como referencia la construcción de una esfera de diámetro de 100 mm, volumen de una esfera perfecta $\forall_{Esfera} = 5.24 \times 10^{-4} m^3$ . Densidad relativa $\rho_r = \frac{\rho_a}{\rho_{ref}}$ . Densidad de referencia $\rho_{ref} = 1000 \frac{kg}{m^3}$ . El peso de la esfera es una estimación obtenida por el software de la impresora 3D. . . . .        | 20 |
| 2.2. | Sensibilidad de la masa de los marcadores en la esfera, análisis de variación de la densidad de los objetos neutros. Considera la masa promedio agregado por los marcadores 0.4 g y por saturación 0.3 g. Densidad relativa $\rho_r = \frac{\rho_a}{\rho_{ref}}$ , densidad de referencia $\rho_{ref} = 1000 \frac{kg}{m^3}$ . . .                                                                                                                 | 20 |
| 3.1. | Resumen de los parámetros utilizados en las simulaciones, donde $\Delta x$ es el tamaño de celda, $\frac{N}{D}$ es el número de celdas por diámetro, Ncell es el número total de celdas en la malla, $\Delta t$ es el paso de tiempo, $\frac{\Delta x}{\ u\ }$ es la relación entre el tamaño de la celda y la velocidad del flujo. Este último término es utilizado para calcular el número de Courant y evaluar la estabilidad numérica. . . . . | 29 |
| 3.2. | Resultados para $Re = 100$ mostrando los coeficientes de arrastre ( $\overline{C_D}$ ) y sustentación ( $\overline{C_L}$ ) junto con sus errores absolutos frente a los valores de referencia $\overline{C_D^*}$ y $\overline{C_L^*}$ obtenidos con la técnica <i>fitted</i> . También se incluye el número de Strouhal ( $\overline{S_t}$ ) y su error, evaluando la convergencia según el refinamiento de la malla ( $\Delta x$ ). . . . .       | 31 |
| 3.3. | Resultados para $Re = 500$ mostrando los coeficientes de arrastre ( $\overline{C_D}$ ) y sustentación ( $\overline{C_L}$ ) junto con sus errores absolutos frente a los valores de referencia $\overline{C_D^*}$ y $\overline{C_L^*}$ obtenidos con la técnica <i>fitted</i> . También se incluye el número de Strouhal ( $\overline{S_t}$ ) y su error, evaluando la convergencia según el refinamiento de la malla ( $\Delta x$ ). . . . .       | 32 |
| 3.4. | Resultados para $Re = 1000$ mostrando los coeficientes de arrastre ( $\overline{C_D}$ ) y sustentación ( $\overline{C_L}$ ) junto con sus errores absolutos frente a los valores de referencia $\overline{C_D^*}$ y $\overline{C_L^*}$ obtenidos con la técnica <i>fitted</i> . También se incluye el número de Strouhal ( $\overline{S_t}$ ) y su error, evaluando la convergencia según el refinamiento de la malla ( $\Delta x$ ). . . . .      | 32 |
| 3.5. | Eficiencia computacional para el caso de una esfera con movimiento impuesto en un dominio de fluidos 3D. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 35 |

|                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.6. Frecuencias naturales: comparación entre los resultados analíticos y las mediciones experimentales realizadas con sensores ultrasónicos. . . . .                                                                                 | 37  |
| 3.7. Comparación del error cuadrático medio (rms) considerando los últimos 5 periodos de los 30 periodos simulados. Resultados numéricos obtenidos mediante FVM/VOF y datos experimentales medidos con sensores ultrasónicos. . . . . | 38  |
| 3.8. Parámetros armónicos para la esfera oscilando en el interior del cilindro. . . . .                                                                                                                                               | 40  |
| 3.9. Error en el cálculo de rotaciones para la esfera rodando en el interior del cilindro ahuecado . . . . .                                                                                                                          | 41  |
| A.1. Fluid properties for three different Re numbers in the settling of a sphere . . . . .                                                                                                                                            | 70  |
| A.2. Near-wall settings and drag parameters for the settling of a sphere. Parameters $a, b$ are given for the drag law of Eq. (A.12). . . . .                                                                                         | 70  |
| A.3. Properties of the fluids involved in the case of sloshing with a submerged sphere. . . . .                                                                                                                                       | 71  |
| B.1. Drag and added mass coefficients computed using the present technique with $\kappa = 10^4$ , at the studied $Kc = 3.14$ and different discretizations. . . . .                                                                   | 101 |

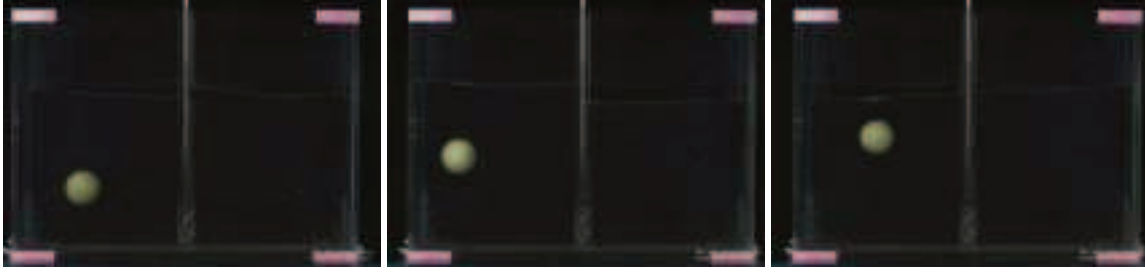
# Capítulo 1

## Introducción

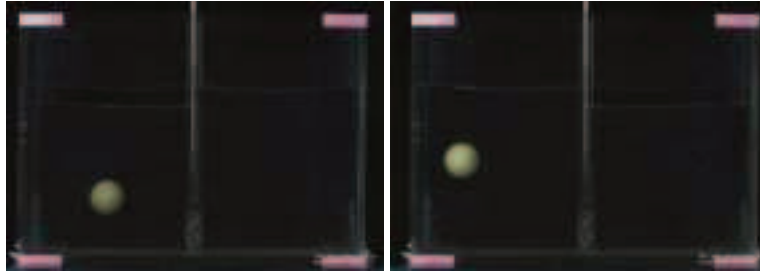
### 1.1. Motivación

Esta tesis se motiva por el interés en resolver casos de cuerpos rígidos en flujos incompresibles de una o dos fases con baja viscosidad, con posible interacción mecánica entre sí y con las paredes del recipiente que los contiene. Estos problemas de mecánica de fluidos son un campo activo de investigación, como el movimiento de embarcaciones, hundimiento de objetos sólidos o sedimentación de partículas, ya que la resolución analítica de problemas con interfases móviles es complicada o no existe, por lo que se recurre a simulaciones numéricas para obtener soluciones aproximadas. Como caso particular de investigación activa, pueden citarse los dispositivos que obtienen energía de las olas (*wave energy converters*, WEC), que requieren estudios tanto experimentales como numéricos para la cuantificación precisa del rendimiento energético, en sus distintas variantes: de columna de agua oscilante, tipo péndulo o como boya flotante.

Las interfases que se identifican en este tipo de fenómenos pueden ser entre fluidos inmiscibles, o entre fluido y sólido, como en el caso de cuerpos inmersos. El caso de estudio principal consiste en esferas sumergidas con flotabilidad neutra [6, 13, 27] en un estanque comunicado sujeto a vibración forzada en su base. La Fig. 1.1 señala tres fotogramas de grabaciones experimentales del caso de estudio principal, donde se muestra la posición relativa del estanque con respecto a la posición inicial de referencia en el centro de la amplitud total de movimiento; sin embargo, esta posición no necesariamente coincide con el desnivel máximo de las superficie libre de cada recipiente. La Fig. 1.2 muestra la amplitud máxima entre las superficies libres para el mismo lapso de tiempo, dentro de un mismo ciclo. Estos puntos corresponden al paso del estanque por la posición de referencia, para este caso.



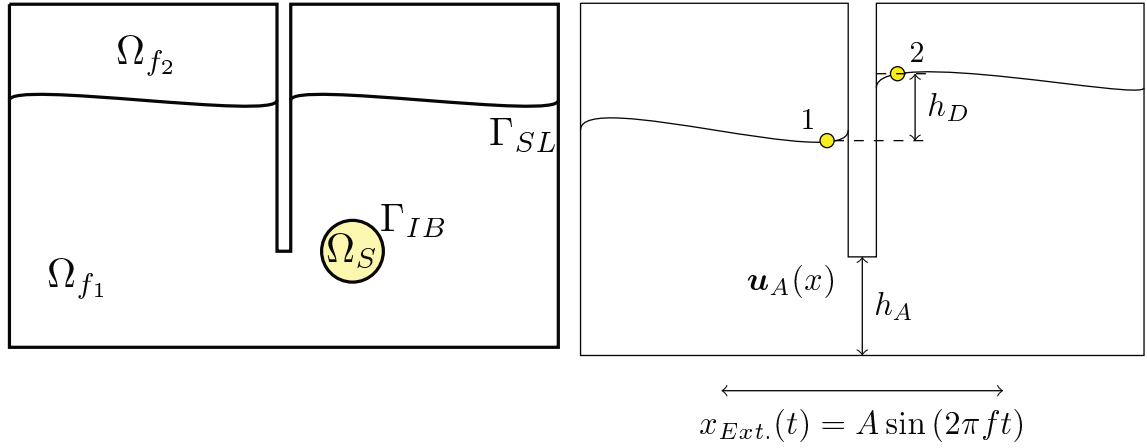
**Figura 1.1:** Posición de la superficie para diferentes posiciones del estanque. El primer fotograma señala la posición más alejada del estanque hacia la izquierda, el segundo fotograma muestra la posición de referencia, y el tercer fotograma señala la posición más alejada del estanque hacia la derecha.



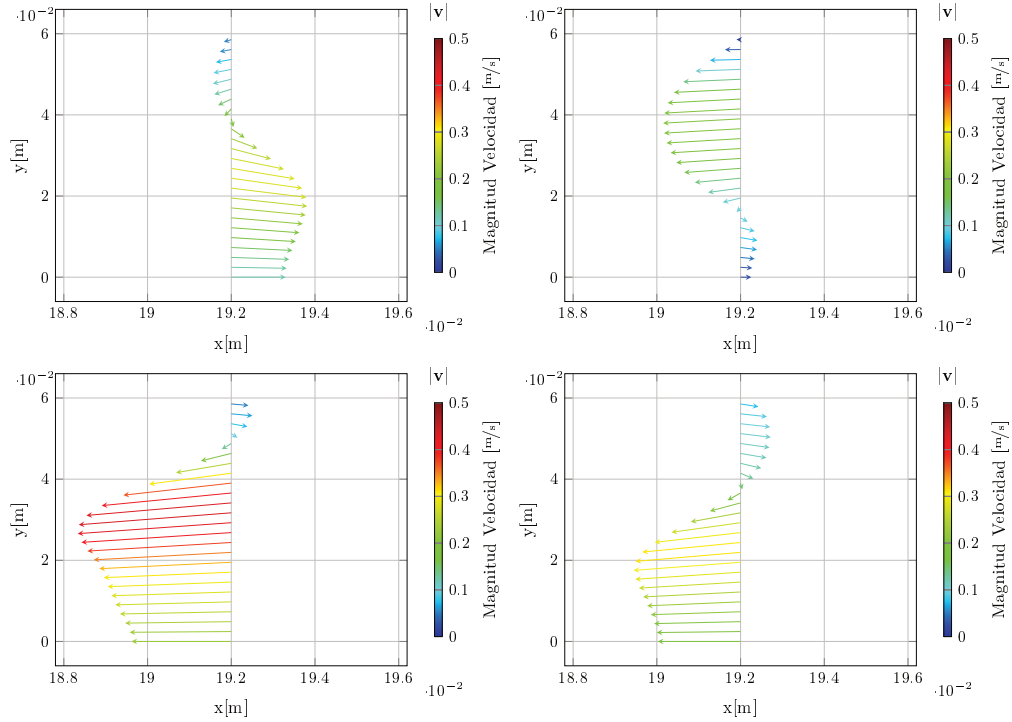
**Figura 1.2:** Posición de la diferencia de altura máxima entre superficies libres cuando el estanque pasa por la posición de referencia.

La representación de este caso de estanques comunicados se presenta en la Fig. 1.3 a), que indica los dominios  $\Omega = \Omega_{f1} + \Omega_{f2} + \Omega_s$  asociados a cada fase, y las interfases sólido-líquido ( $\Gamma_{IB} = \Omega_{f1} \cap \Omega_{IB}$ ) y líquido-líquido ( $\Gamma_{SL} = \Omega_{f1} \cap \Omega_{f2}$ ) involucradas, mientras que la Fig. 1.3 b) señala los parámetros asociados al potencial hidráulico  $P_h \propto Q\Delta p$  que permite, en buena medida, caracterizar este caso. La diferencia de presión  $\Delta p$  es proporcional a la diferencia entre superficies libres,  $\Delta p \propto h_D$ , y el caudal  $Q$  que fluye entre los estanques a través de la apertura es proporcional al área de la apertura,  $A_A \propto h_A$ , y la velocidad del flujo en esa región. La Fig. 1.4, muestra el perfil de velocidades justo en la apertura inferior del estanque para los instantes de tiempo  $0, \frac{1}{8}\tau, \frac{3}{8}\tau, \frac{1}{2}\tau$  con un periodo de movimiento de  $\tau = 1$  s. Es justamente la dinámica del fluido que transita de un estanque a otro la que produce el movimiento de la esfera sumergida, y constituye el disparador para estudiar los mecanismos de interacción fluido-estructura abordados en esta Tesis.





**Figura 1.3:** a) Descripción esquemática del caso de estudio. Dominios:  $\Omega_{f1}$ , agua;  $\Omega_{f2}$ , aire;  $\Omega_s$ , esfera de polímero. Interfases:  $\Gamma_{SL}$ , frontera móvil deformable;  $\Gamma_{IB}$ , frontera móvil no deformable inmersa. b) Parámetros involucrados en la potencia hidráulica entregada por el movimiento externo de la caja al sistema de vasos comunicantes.



**Figura 1.4:** Perfil de velocidad en la apertura inferior fija  $h_A = 5\text{cm}$  obtenidas por simulación numérica mediante elementos finitos estabilizados. De izquierda a derecha y de arriba a abajo los instantes de tiempo corresponden a  $t = 0\tau, 0.125\tau, 0.375\tau, 0.5\tau$ .

## 1.2. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es el desarrollo de algoritmos para el seguimiento de interfases móviles fluido-fluido y fluido-sólido con la finalidad de describir el comportamiento de sólidos rígidos inmersos utilizando métodos de volúmenes finitos y técnicas embebidas para la descripción de los cuerpos en un entorno de cálculo apropiado a la computación de alto desempeño.

## Objetivos Específicos

- Estudiar y comprender la dinámica de un cuerpo inmerso en un fluido.
- Desarrollar un algoritmo de resolución para interfaces móviles.
- Desarrollar un algoritmo de interacción fluido estructura que permita describir la dinámica de cuerpos rígidos inmersos.
- Implementar una técnica de malla fija con cuerpos embebidos en un entorno de programación adecuado para computación de alto desempeño.
- Verificar/validar los desarrollos en problemas conocidos, como ser el flujo alrededor de cilindros y esferas; y en otros más complejos de cuerpos sumergidos, como por ejemplo boyas de generación de energía o problemas con interacción de más de un cuerpo.

## 1.3. Estado del arte

En este apartado se presentan en forma sucinta algunos contenidos utilizados en el trabajo de tesis que complementan el análisis bibliográfico realizado en las publicaciones derivadas de esta investigación de doctorado.

Para representar interfaces móviles en un medio continuo existen dos aproximaciones ampliamente estudiadas basados en el método de marcha rápida (*fast marching method*), o basados en el métodos de conjunto de nivel. [77].

Bajo la teoría de campo, existen dos marcos de referencias para el describir el seguimiento de interfaces. En un enfoque euleriano el tratamiento de la interfase es extendido (*spread interface*) o fino (*thin interface*) dependiendo del método numérico a utilizar [69]. Estas técnicas necesitan métodos secundarios de regularización de interfaces. Mientras que en un enfoque lagrangiano el tratamiento de interfase es difundido (*diffused interface*) o aguda (*sharp interface*) dependiendo de que aproximación se utilice para satisfacer la condición de contorno sobre la superficie del sólido. Estas técnicas requieren algoritmos de interpolaciones sobre el contorno lagrangiano que define la interfase, ya que, la interfase sólido-fluido puede ser remplazada por un borde de partículas fluido-fluido [21]. Para tratar este tipo de problemas numéricamente deben cumplir que; el problema sea bien definido, bien condicionado y además satisfacer las condiciones de continuidad para desplazamiento, velocidad, como además cumplir con balanced de masa, equilibrio y energía.

Adicionalmente, la consideración de ambos medios dentro del dominio a resolver es de importancia. Esto repercute directamente en la resolución del problema, puede ser monolítico o particionado, o desde el punto de vista del dominio computacional utilizando mallas conformes o no conformes.

Otros métodos, que no usan multiplicadores de Lagrange como son los metodos de Nitsche, y sus derivados que utilizan funciones *ansatz*, discontinuas definidas a tramos como Galerkin Discontinuo requieren dividir

celdas o elementos. Desde el planteamiento del problema variacional el Métodos de Nitsche es una aproximación para imponer condición de contorno como fuerza de interacción, típicamente utilizado en cutFEM, Galerkin discontinuo y donde existen inconvenientes para implementar acoplamiento fuerte [67, 40].

### 1.3.1. Problemas de sloshing en ingeniería

Las fuerzas producidas por los fluidos sobre estanques son problemas complejos en ingeniería que requieren soluciones eficientes y precisas. Por ejemplo, las cargas sísmicas pueden causar que los fluidos en un estanque se desplacen de manera violenta, generando el fenómeno conocido como *sloshing*. Para abordar este problema, se han desarrollado técnicas de simulación computacional de alto rendimiento que permiten modelar y predecir el comportamiento del sloshing de manera más precisa y eficiente. Ya hace décadas, Abramson y otros [1] presentaron datos experimentales de la respuesta de fuerza total en tanques rígidos de diferentes geometrías al experimentar vibraciones laterales no lineales, destacando cómo la amplitud de la excitación afecta las frecuencias naturales del líquido y provoca fenómenos de salto. Además, se han propuesto modelos matemáticos y algoritmos numéricos para simular el comportamiento del flujo de fluidos con comprobación experimental. En esta dirección [18, 16, 25, 4, 10, 57] se han utilizado métodos como la resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes y el método de elementos finitos. Estos autores han desarrollado modelos numéricos para simular el comportamiento de flujo de superficie libre en diferentes condiciones, validándolos mediante experimentos y asegurando que las predicciones numéricas concuerden con los datos experimentales. Estos modelos y su validación son cruciales para comprender y predecir fenómenos físicos asociados con flujos de superficie libre en aplicaciones de ingeniería [16]. En [25] se estudia la dinámica del movimiento de líquidos dentro de un tanque rectangular con base escalonada a través de modelado numérico y experimentación, para comprender mejor los patrones de oleaje y mejorar la precisión de las simulaciones en comparación con datos experimentales reales. El propósito de [4] se centra en el modelado numérico y estudios experimentales de problemas de oleaje tridimensional en tanques rectangulares, utilizando una técnica de conjunto de nivel mejorada para capturar la superficie libre del líquido, y valida los resultados numéricos mediante comparación con datos experimentales. En [10] se presenta un análisis numérico del comportamiento del oleaje en un tanque cuadrado parcialmente lleno de aceite vegetal sometido a movimientos controlados, utilizando un método ALE de malla fija y comparando los resultados con datos experimentales para validar el modelo numérico, muestras que en [57] se investiga cómo el nivel de llenado en un tanque rectangular afecta los patrones de ondas de sloshing, empleando simulaciones y experimentos para entender las no linealidades y la evolución de la superficie libre en respuesta a movimientos externos controlados. Cruchaga y otros [18] presentan la validación experimental y cálculos por el método de elementos finitos del fenómeno de *sloshing* en tanques rectangulares, enfocándose en la evolución de la superficie libre en 2D y comparando resultados numéricos con datos experimentales

obtenidos mediante sensores ultrasónicos y una mesa agitadora, mientras que Caron et al. [9] analizaron un tanque cilíndrico vertical con diferentes niveles de llenado. Por su parte, [24] muestra una técnica numérica basada en diferencias finitas no lineales para flujo invíscido con comparación experimental.

Además del estudio del fenómeno en sí, los métodos numéricos permiten estudiar o proponer mecanismos para mitigar los efectos no deseados del fenómeno de *sloshing*. Por ejemplo, la presencia de espuma en la superficie libre de un líquido puede tener un efecto significativo en la amortiguación de la agitación, como reportan en [73]. La colocación de deflectores verticales porosos puede mitigar el movimiento oscilantes de la interfase en un tanque con dos líquidos de diferentes densidades cuando se mueve lateralmente [65].

Dentro de la interacción con objetos sumergidos, [92] se centra en la comprensión y la simulación de la dinámica de una esfera rígida en un entorno fluido sometido a movimientos de oscilación. La idea principal del trabajo es presentar una estrategia computacional avanzada que permite simular la dinámica de una esfera rígida durante el fenómeno de *sloshing* en fluidos. Este fenómeno es de especial interés en muchas aplicaciones de ingeniería, como la minería de minerales, la procesamiento de alimentos, y la ingeniería naval y oceánica. La simulación de cuerpos inmersos en fluidos es una tarea compleja que implica el manejo de la interacción entre el cuerpo sólido y el fluido circundante. En este documento se desarrolla y valida un modelo numérico que acopla un solucionador de fluidos Navier-Stokes para dos fases con un solucionador de la dinámica de cuerpos sólidos rígidos basado en un esquema de Newton. La validación se realiza mediante la comparación del modelo numérico con datos experimentales originales, que son adquiridos a través de técnicas de procesamiento de imágenes y trato estadístico para extraer información cuantitativa de la dinámica de la esfera. El trabajo toma en consideración diferentes modelos clásicos para describir fenómenos como el coeficiente de arrastre, la masa añadida, y los efectos de la pared. A través de un análisis meticuloso, los autores evalúan cómo cada uno de estos factores influye en los resultados de la simulación. El modelo numérico propuesto proporciona resultados coherentes con los datos físicos experimentales, evidenciando no solo la robustez del modelo sino también la relevancia de considerar dichos efectos para una simulación precisa. Estos estudios son de ayuda para el diseño de sistemas de control y estructuras, especialmente en aplicaciones como los tanques de combustible de cohetes, donde las no linealidades pueden tener consecuencias significativas.

### 1.3.2. Tratamiento de condiciones de contorno

La interfase entre dos medios continuos genera una interacción, el tratamiento de condiciones de contorno es la piedra angular para el desarrollo consistente de técnicas que permitan la resolución de las dinámicas involucradas. Por ejemplo, en el contexto de problemas fluido-estructura, se han desarrollado técnicas basadas en el tratamiento del esfuerzo de Cauchy, principalmente en el tratamiento del esfuerzo de corte [5, 68] y normal en la interfaz entre los dominios, y modelos que permitan caracterizar el comportamiento hiperelástico

de los materiales involucrados considerando la disipación de energía en la zona de contacto entre los medios [52].

Algunas técnicas para el tratamiento de fronteras difusas se basan en penalizadores que permiten definir condiciones de contorno en la interfaz [2, 30]. Este tipo de enfoques permiten una descripción euleriana [61], evitando la necesidad de realizar remallados frecuentes asociados a otros métodos. Por otro lado, para interfases móviles de geometría compleja y de gradiente de densidad alto, existen técnicas mixtas como *level set immersed boundary method* [8].

Los problemas de interfases entre fluidos dependen de la naturaleza del flujo en la interfase y la amplitud de movimiento de esta misma. Pueden ser abordados con diferentes técnicas que dependen con que método se discretiza el continuo [48, 16], ya sean basados en malla o en partículas, o bien mediante actualización dinámica de las condiciones de borde [82].

Para simular fronteras libres en dinámica de fluidos, el método de volumen de fluido (*volume of fluid*, VOF) [59] es una técnica numérica, que permite el seguimiento eficiente de las interfaces fluidas sin suavizado excesivo. El método utiliza advección de celdas, mostrando efectividad en la resolución de la inestabilidad Rayleigh-Taylor y cambios complejos en superficies libres [99]. Se destaca su capacidad para simular transiciones turbulentas y formación de capas sin consideraciones especiales gracias a la técnica automática VOF. La eficacia del método se evidencia en simulaciones y comparaciones con valores teóricos experimentales [36]. El tratamiento de los cuerpos rígidos inmersos es generalmente abordado mediante técnicas embebidas [48], identificadas mediante valores en centros de elementos, nodos o caras. Existen otras alternativas sobre mallas fijas donde se utilizan contornos inmersos, como es el *Immersed Boundary Method (IBM)*, que utiliza una malla lagrangiana para representar la frontera embebida en cuerpos sumergidos [63, 53, 15]. En ambas técnicas, para sólidos rígidos se necesita obtener una fuerza resultante del fluido actuando como fuerza hidrodinámicas sobre los objetos. En algunos casos, la integral de superficies es difícil de obtener, por lo que se utilizan aproximaciones sobre la integral de la divergencia del tensor de tensiones. En términos de eficiencia computacional, los métodos inmersos evitan las complicaciones de generar una malla que se adapta a la frontera o superficie móvil y permite un tratamiento uniforme de esta.

Otras técnicas embebidas sobre mallas fijas muy difundidas son los denominados *Finite Cell Methods* (FCM) [45, 7, 58], en tanto que en entornos de elementos finitos suelen emplearse resolvidores multigrilla, por ejemplo, con *Fictitious Boundary Method* (FBM) [86, 87].

En el caso de múltiples objetos inmersos, existen técnicas de búsqueda basadas en bins [48]. Sin embargo, el desafío está en que la interfase satisfaga la condición de contorno adecuadamente, para casos de esferas u objetos sumergidas que se muevan a una velocidad alta. En casos donde la densidad de los cuerpos sumergidos es similar a la del medio fluido, el acoplamiento de las dos dinámicas puede abordarse mediante un *immersed boundary projection method* [45].

Sobre mallas fijas estructuradas existen técnicas basadas en discretización de los operadores basados en estencil adecuadas para arquitecturas multicores como son las GPUs [14].

### 1.3.3. Contribuciones de la Tesis

Durante el desarrollo de la Tesis se propusieron dos métodos numéricos para resolver la interacción fluido-estructura.

El primero consiste en la representación de cuerpos esféricos en el seno de un fluido, tal que cada esfera es movida por la dinámica del fluido, pero no influye en la circulación del líquido. Esta técnica, apta para cuerpos esféricos con boyancia neutra o cuasi-neutra, resulta económica por cuanto la dinámica del fluido, resuelta numéricamente mediante un método de elementos finitos (MEF) estabilizado con streamline-upwind/Péetrov Galerkin (SUPG) se encuentra desacoplada de la dinámica del cuerpo rígido. De esta manera, pueden resolverse problemas a una y a dos fases, a los cuales se integra el movimiento de la esfera inmersa.

El segundo método es apto para resolver la interacción fluido-estructura también con cuerpos rígidos, pero de formas generales, tal que la geometría del objeto se representa mediante una máscara binaria en el seno del dominio del fluido, sin afectar la topología de la solución numérica, en este caso mediante volúmenes finitos (MVF). Esto se logra mediante la inclusión de un término de Darcy de muy baja permeabilidad, representado como una penalidad, en las ecuaciones a resolver. Esta representación resulta dependiente del tamaño de la grilla, ya que requiere refinamiento para una representación apropiada del cuerpo; sin embargo, la formulación en volúmenes finitos en un código de multifísica computacional apto para computación de alto desempeño y altamente escalable hace que las soluciones se obtengan en tiempos de cálculo razonables. Esta aproximación se inscribe en los denominados métodos de contorno inmerso [53], específicamente entre los métodos embebidos [60, 56].

El primer método, basado en MEF, provee resultados para objetos que no perturban sensiblemente la dinámica del fluido, esto es, esféricos y de tamaño relativamente pequeño con respecto al dominio del fluido, mientras que el segundo permite considerar los efectos del cuerpo en el flujo, para formas generales y tamaños relativos sin restricciones. La metodología MEF no requiere la definición de parámetros adicionales, en tanto que para la desarrollada con MVF es preciso proponer un coeficiente de penalidad, definido en un rango asociado a la física del caso. La formulación MVF permite resolver problemas con geometrías complejas sin necesidad de remallado, mientras que el MEF proporciona mayor estabilidad numérica en ciertas configuraciones.

En el ámbito experimental, se presentan metodologías innovadoras para la validación de modelos numéricos a través de procesamiento de imágenes, lo que fortalece la correlación entre los resultados simulados y los datos experimentales. Estos métodos resultan del registro fotográfico del desplazamiento de marcadores adheridos a los cuerpos y elementos móviles intervinientes, con el propósito de obtener no sólo las posiciones instantáneas de los cuerpos sino también las rotaciones a los que se ven sometidos, de manera automática. Esta tecnología es habitualmente empleada en aplicaciones de robótica [75] y de visión computacional [100],

aunque no se han encontrado antecedentes de su aplicación a mediciones experimentales como las de esta Tesis.

Las metodologías propuestas en esta Tesis son validadas a través de la comparación de los resultados obtenidos con los derivados de aproximaciones analíticas en problemas clásicos de dinámica de fluidos, también con los resultados experimentales derivados de la misma tesis y a través de los resultados numéricos obtenidos con otras técnicas estabilizadas de simulación para algunos de los casos estudiados.

## 1.4. Estructura de la Tesis

Esta tesis, presentada en formato de compilación, aborda el desarrollo de técnicas numéricas para la resolución de problemas con interfases móviles y cuerpos inmersos, aplicando métodos de volúmenes finitos y elementos finitos estabilizados. Los diferentes estudios aquí presentados permiten validar y optimizar el uso de estas técnicas en simulaciones numéricas de alta precisión, apoyándose en comparaciones experimentales.

El Capítulo 1 ofrece una introducción al campo de estudio, describiendo la motivación para resolver problemas de interacción fluido-estructura en contextos donde las interfases móviles juegan un papel crucial, como en el fenómeno de *sloshing*. Se revisan los fundamentos teóricos y se plantean los objetivos principales de la tesis, orientados al desarrollo de algoritmos numéricos y a la validación experimental de los modelos.

El Capítulo 2 en su sección 2.1 describe la formulación numérica utilizada en el desarrollo de esta tesis, basada en las ecuaciones de gobierno que rigen la dinámica de fluidos y sólidos. En este capítulo se introducen los métodos de penalización y técnicas embebidas, que permiten una descripción precisa de los cuerpos inmersos en un fluido utilizando mallas fijas. Los estudios presentados en [4] y [57] forman la base metodológica para el tratamiento de interfases móviles y la interacción fluido-estructura, como se detalla en esta sección. El Capítulo 2 en su sección 2.2 contiene una descripción detallada de los experimentos llevados a cabo para validar los modelos numéricos. En particular, se incluyen los resultados relacionados con la medición de la posición y rotación de objetos sumergidos, utilizando marcadores fiduciales y técnicas de procesamiento de imágenes presentadas en [97]. También se presenta un análisis sobre la influencia de la apertura del tanque y los niveles de llenado en el comportamiento dinámico de los sistemas, lo que permite validar el potencial hidráulico formado por las diferencias en las alturas de las superficies libres.

En el Capítulo 3, se presentan los resultados numéricos obtenidos a partir de simulaciones de problemas clásicos, como el flujo sobre cilindros y esferas sumergidas. Los métodos de validación experimental de los resultados simulados se abordan mediante el uso de procesamiento de imágenes y seguimiento de objetos, descritos en [94, 92]. Este capítulo también incluye comparaciones con soluciones analíticas y estudios previos de convergencia de los coeficientes hidrodinámicos. Además, se analiza la eficiencia computacional de las técnicas numéricas implementadas, con énfasis en la escalabilidad en entornos de computación de alto rendimiento. Se evalúa el comportamiento de las simulaciones cuando se incrementa el número de núcleos

y la resolución de la malla, mostrando resultados obtenidos en clústers de alto rendimiento.

En el Capítulo 4, se resumen las conclusiones obtenidas del trabajo de Tesis, así como también se precisan los problemas abiertos que surgieron de éste y se detallan las contribuciones científicas documentadas derivadas del doctorado. Por último, en concordancia con el formato de compilación propuesto para la Tesis, en los Anexos A y B se incorporan los artículos publicados en revistas internacionales indexadas que han surgido del trabajo de Tesis y presentan con detalle las metodologías referidas en el Capítulo 3, así como los casos de validación y aplicación correspondientes.



## Capítulo 2

# Metodología

En este Capítulo se exponen las formulaciones numéricas desarrolladas y utilizadas metodológicamente en el análisis de los problemas propuestos y, seguidamente se presenta la metodología experimental propuesta para el seguimiento de objetos.

### 2.1. Formulación numérica

Esta sección describe las formulaciones numéricas desarrolladas en los trabajos publicados. En primer instancia se presenta una formulación de partículas inmersas donde el acoplamiento entre el fluido y el sólido es unidireccional. En las sub-secciones siguientes se presentan los diferentes aspectos de la formulación embebida propuesta como mejora a la que se desarrolló primeramente.

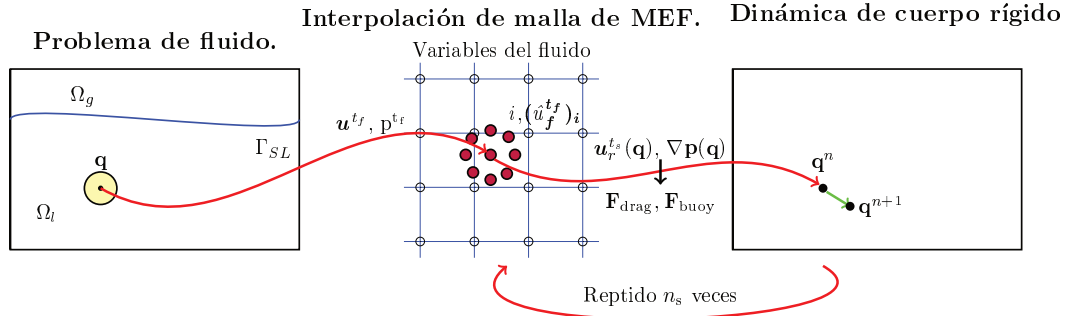
#### 2.1.1. Cómputo de fuerzas hidrodinámicas sobre un sólido tratado como partícula

Una primera estrategia numérica, preliminar, en la cual el acoplamiento es unidireccional, se esquematiza en la Fig. 2.1, donde las fuerzas del fluido sobre la esfera se modelan tomando como datos el estado del fluido y las fuerzas debidas al fenómeno de masa agregada. Esta primera aproximación se basó en soluciones del flujo de fluido con superficie libre mediante *level set* con elementos finitos, y la representación del sólido como elemento discreto [92].

El procedimiento se esquematiza en la Fig. 2.1. La velocidad  $\mathbf{u}^{t_f}$  y la presión  $p^{t_f}$  se conocen a partir del estado del fluido en el tiempo  $t_f$  en cada nodo de la malla correspondiente. Luego, la velocidad en el centro de la esfera, y en ciertos casos en otros puntos a lo largo de la circunferencia, se calcula mediante interpolación por elementos finitos, dando la velocidad media  $\mathbf{u}_f^{t_f}$  para el cuerpo. La velocidad relativa del sólido  $\mathbf{u}_r^{t_s}$  en el paso de tiempo del sólido  $t_s$  se determina como:

$$\mathbf{u}_r^{t_s} = \dot{\mathbf{q}}^{t_s} - \mathbf{u}_f^{t_f}. \quad (2.1)$$

Donde  $\dot{\mathbf{q}}^{ts}$  es el vector velocidad del cuerpo, dado que  $\mathbf{q}$  es el vector de desplazamientos.



**Figura 2.1:** Intercambio de datos entre la dinámica del fluido y el sólido involucrados en el algoritmo.

La velocidad relativa de la esfera con respecto al fluido se utiliza para determinar la fuerza de arrastre  $\mathbf{F}_{\text{drag}}$ , mientras que el gradiente de presión se considera en la fuerza de flotación  $\mathbf{F}_{\text{buoy}}$ . Notar que el paso de tiempo del sólido es varias veces más pequeño que el paso de tiempo del fluido. Luego, la interpolación de la velocidad y la presión se repite  $n_s$  veces por cada paso de tiempo del fluido, con  $n_s = \Delta t_f / \Delta t_s$ .

La expresión de la dinámica del sólido rígido corresponde a la aplicación de la segunda ley de Newton para el desplazamiento,

$$\mathbf{m}_{\text{sph}} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{\text{ine}} + \mathbf{F}_{\text{fl}} \quad (2.2)$$

donde el primer término corresponde a las fuerzas de inercia,  $\mathbf{m}_{\text{sph}}$  es la matriz de masa correspondiente al cuerpo,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de desplazamiento en  $n$  coordenadas y  $\ddot{\mathbf{q}}$  es el vector de aceleración correspondiente. El segundo término,  $\mathbf{F}_c$ , incluye las fuerzas internas que representan las restricciones de contacto rígido, y el miembro derecho cuantifica las fuerzas externas que actúan sobre el centro del sólido, considerado como una partícula. Las fuerzas externas consideradas en el presente trabajo se deben a las aceleraciones aplicadas al sistema y a las fuerzas del fluido sobre la esfera. La fuerza de contacto rígido que aparece en la esfera debido a las paredes del recipiente se modela mediante un método de penalización. La fuerza de contacto es  $\mathbf{F}_c = k_c d \mathbf{n} + \langle \beta_c \dot{\mathbf{q}} \mathbf{n} \rangle_\delta$ , donde el primer término representa las fuerzas de contacto de acuerdo a la función de distancia con signo  $d = d(\mathbf{q})$  entre la esfera y las paredes del recipiente, de modo que cuando  $d \geq 0$ , la esfera no entra en contacto con la pared y no hay fuerzas de contacto que actúen sobre ella. Cuando  $d < 0$ , hay penetración y, en consecuencia, la magnitud de la fuerza de contacto se determina como  $k_c d$ , donde  $k_c$  es el coeficiente de penalización y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la interfaz.  $\mathbf{n} \approx \frac{\nabla d}{\|\nabla d\|}$ . El segundo término considera el efecto de aproximación cerca de las paredes [83, 74]; esta fuerza se activa a una distancia igual a  $\delta$  del radio de la esfera, expresada como un porcentaje del radio de la esfera, donde  $\beta_c$  es un coeficiente constante. Las fuerzas de inercia debidas a las aceleraciones no gravitacionales  $\mathbf{g}_{\text{box}}$  aplicadas sobre el marco de referencia no inercial se determinan como  $\mathbf{F}_{\text{ine}} = \mathbf{m}_{\text{sph}} \mathbf{g}_{\text{box}}$ . Además, las fuerzas del fluido comprenden las fuerzas de empuje  $\mathbf{F}_{\text{drag}}$ , las fuerzas de arrastre  $\mathbf{F}_{\text{add}}$  y las fuerzas de

masa añadida  $\mathbf{F}_{\text{add}}$ , es decir,  $\mathbf{F}_{\text{fl}} = \mathbf{F}_{\text{buoy}} + \mathbf{F}_{\text{add}} + \mathbf{F}_{\text{drag}}$ . El término de empuje es  $\mathbf{F}_{\text{buoy}} = -V \nabla p$ , donde  $V$  es el volumen de la esfera. Tenga en cuenta que este término considera las fuerzas de sustentación completas debido al gradiente de presión del estado del fluido. La fuerza de masa añadida se define como  $\mathbf{F}_{\text{add}} = -m_{\text{add}} (\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_{\text{box}})$ , donde el coeficiente de arrastre se determina como función de  $Re$ , la velocidad relativa entre la esfera y el flujo es  $\mathbf{u}_r = \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{u}$ ,  $D_s$  es el diámetro de la esfera y  $A_s$  es el área de referencia, en este caso, el área proyectada de la esfera. La masa añadida es  $m_{\text{add}} = k_{\text{add}} \rho V$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido. El coeficiente de masa añadida se determina en función del número de Reynolds ( $Re = \rho |\mathbf{u}_r| D_s \mu^{-1}$ ) [55, 43],  $k_{\text{add}} = \{8.591 Re^{-0.5835}$  si  $Re \leq 100, 15 Re^{-1.125} + 0.5$  si  $Re > 100\}$ . Las fuerzas de arrastre se modelan como  $\mathbf{F}_{\text{drag}} = -\frac{1}{2} C_D A_s Re \frac{\mu}{D_s} \mathbf{u}_r$ , donde el coeficiente de arrastre se determina como una función de  $Re$ , la velocidad relativa entre la esfera y el flujo es  $\mathbf{u}_r = \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{u}$ , siendo  $D_s$  el diámetro de la esfera, y  $A_s$  el área de referencia, en este caso, el área proyectada de la esfera.

### 2.1.2. Ecuaciones fluido-dinámicas y su aplicación a la técnica de sólidos embebidos

El principio de conservación de la masa, enuncia que la masa no se crea ni destruye dentro de un Volumen Material (V.M.), por lo que la tasa de cambio en el tiempo es nula, bajo una descripción lagrangiana es  $\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{V.M.}} = 0$ . Equivalentemente, utilizando el teorema de transporte de Reynolds en una descripción euleriana y para un volumen de control (V.C.), arbitrario, que se mueve con una velocidad relativa  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s$ , se tiene:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{V.M.}} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\text{V.C.}} \rho dV \right) + \int_{\text{S.C.}} \rho \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (2.3)$$

Utilizando la integral de Leibniz sobre el primer término de la Ec. (2.3). La tasa de cambio de la propiedad masa dentro del V.C. en el tiempo queda de la forma  $\frac{d}{dt} \left( \int_{\text{V.C.}} \rho dV \right) = \int_{\text{V.C.}} \frac{d\rho}{dt} dV + \int_{\text{S.C.}} \rho (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}) dA$ . Además, utilizando el teorema de la divergencia sobre el segundo término de la Ec. 2.3, la integral sobre la superficie de control (S.C.) queda de la forma,  $\int_{\text{S.C.}} \rho \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\text{V.C.}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_r) dV$ . De igual manera, usando el teorema de la divergencia sobre el segundo término de la integral de Leibniz queda de la forma,  $\int_{\text{S.C.}} \rho \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\text{V.C.}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_s) dV$ , es decir, la suma de ambas integrales de superficie quedan resumida en la expresión  $\int_{\text{V.C.}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV$ . Por lo tanto la Ec. (2.3) queda:

$$\int_{\text{V.C.}} \left( \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0 \quad (2.4)$$

De la definición de la derivada material de la densidad con respecto al tiempo, la expresión  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{D\rho}{Dt} - \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ , y expandiendo el termino  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ , por lo que la Ec. (2.4) queda expresada como:

$$\int_{\text{V.C.}} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} dV = 0 \quad (2.5)$$

La Ec. (2.5), es válida para cualquier volumen de control arbitrario. En particular, cuando la densidad no

cambia con el flujo  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , la conservación de masa se reduce a resolver la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

El principio de conservación de momentum lineal enuncia que en ausencia de fuerzas externas, bajo un sistema de referencias lagrangiano se conserva, es decir, la tasa de cambio con respecto al tiempo de la masa por su velocidad lineal es igual a las fuerzas externas aplicado a un volumen material, esto es,  $\left(\frac{d(m\mathbf{u})}{dt}\right)_{\text{V.M.}} = \left(\int_V \mathbf{f} dV\right)_{\text{V.M.}}$ . Esta expresión se puede escribir bajo un sistema de referencia euleriano como:

$$\left(\frac{d(m\mathbf{u})}{dt}\right)_{\text{V.M.}} = \frac{d}{dt} \left(\int_{V.C.} \rho \mathbf{u} dV\right) + \int_{S.C.} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n}) dA = \left(\int_V \mathbf{f} dV\right)_{\text{V.M.}} \quad (2.7)$$

En la Ec (2.7), el término derecho es una integral de volumen ocupado instantáneamente por el fluido en movimiento, que equivale a escribir,  $\left(\int_V \mathbf{f} dV\right)_{\text{V.M.}} = \int_V \mathbf{f} dV$ . Utilizando la integral de Leibniz sobre el primer término de la Ec. (2.7), la tasa de cambio del momentum lineal dentro del V.C. en el tiempo queda de la forma  $\frac{d}{dt} \left(\int_{V.C.} \rho \mathbf{u} dV\right) = \int_{V.C.} \frac{d\rho \mathbf{u}}{dt} dV + \int_{S.C.} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}) dA$ . Además, utilizando el teorema de la divergencia sobre el segundo término de la Ec. (2.7), la integral sobre la superficie de control (S.C.) queda de la forma,  $\int_{S.C.} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n}) dA = \int_{V.C.} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}_r) dV$ . Luego, usando el teorema de la divergencia sobre el segundo término de la integral de Leibniz, resulta  $\int_{S.C.} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}) dA = \int_{V.C.} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}_s) dV$ . Expandiendo los términos  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}_r) = \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r \cdot \nabla \rho \mathbf{u}$  y  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}_s) = \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \rho \mathbf{u}$ , la suma de ambos queda reducida a  $\rho \mathbf{u} \nabla \cdot (\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_s) + \mathbf{u}_r \cdot \nabla \rho \mathbf{u} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \rho \mathbf{u}$ . Como  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s$ , la Ec. (2.7) queda:

$$\int_{V.C.} \frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \nabla \rho \mathbf{u} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \rho \mathbf{u} dV = \int_V \mathbf{f} dV \quad (2.8)$$

El término del lado izquierdo de la Ec. (2.8), para un volumen de control fijo, es decir  $\mathbf{u}_s = 0$ , queda como,  $\frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \mathbf{u}$ . Además, considerando la expansión de  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u})$ , la Ec. (2.8) queda expresada como:

$$\int_{V.C.} \frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \mathbf{f} dV = 0 \quad (2.9)$$

La derivada local del momento lineal de la Ec. (2.9) se puede expandir como  $\frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \frac{d\rho}{dt}$ . Reagrupando y considerando que la derivada material de la densidad es  $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ , y si se cumple el principio de conservación de masa, la Ec. (2.9) es válida para un volumen de control arbitrario, considerando que la densidad del fluido no cambia con el flujo, se resume a resolver:

$$\rho \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \mathbf{f} = 0 \quad (2.10)$$

Por otro lado, la Ec. (2.8) es válida para un volumen de control móvil; si además se considera que el flujo

dentro del volumen de control móvil, se mueve con la velocidad  $\mathbf{u}_s$ , la derivada material del momentum lineal con respecto al tiempo queda  $\frac{D(\rho\mathbf{u})}{Dt} = \frac{d(\rho\mathbf{u})}{dt} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla(\rho\mathbf{u})$ , expandiendo los términos  $\mathbf{u}_s \cdot \nabla(\rho\mathbf{u}) = \mathbf{u}_s \cdot \rho \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u} \nabla \rho$  y  $\mathbf{u}_r \cdot \nabla(\rho\mathbf{u}) = \mathbf{u}_r \cdot \rho \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u} \nabla \rho$ , y reagrupando, la Ec. (2.8) queda,  $\rho \left( \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}_r \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \mathbf{u} \left( \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) - \mathbf{f}$ . Por la condición de incompresibilidad del flujo  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , y la condición de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , la Ec. (2.8) finalmente queda:

$$\int_{V.C.} \frac{D(\rho\mathbf{u})}{Dt} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \nabla \rho \mathbf{u} - \mathbf{f} dV = 0 \quad (2.11)$$

La Ec. (2.11) es válida para la región dentro de un volumen de control arbitrario, que se mueva con una velocidad  $\mathbf{u}_s$  y que cumple con el principio de conservación de masa para un fluido cuya densidad no cambia con el flujo y para que sea un sólido rígido el término  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \nabla \rho \mathbf{u}$ , debería ser nulo.

$$\rho \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \nabla \rho \mathbf{u} - \mathbf{f} = 0 \quad (2.12)$$

La Ec. 2.12 presenta una forma general de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para un fluido en un volumen de control que se desplaza con una velocidad relativa  $\mathbf{u}_s$ . Esta ecuación incluye tanto los efectos de aceleración local del fluido, representados por el término  $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ , como los efectos de transporte convectivo derivados del movimiento relativo del volumen de control, reflejados en el término  $\mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u}$ . Además, se introduce el término  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \nabla \rho \mathbf{u}$ , que se anula bajo la condición de incompresibilidad del fluido y en el caso de un sólido rígido. Por último, el término de fuerza externa  $\mathbf{f}$  garantiza que se incluyan todas las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control. Esta ecuación es fundamental para la formulación numérica del comportamiento de sólidos rígidos inmersos en flujos, ya que describe la dinámica del fluido desde un marco de referencia que se mueve junto al sólido o volumen de control.

### 2.1.3. Tratamiento de condiciones de contorno

Dado un dominio  $\Omega$ , parte del cual corresponde a un medio fluido  $\Omega_f$  y el resto a un cuerpo sólido  $\Omega_s$ , como se esquematiza en la Fig. 2.2a, se asume  $\Omega = \Omega_f + \Omega_s$ . Además, se define la superficie cerrada como  $S : S(\mathbf{x}, t)$  que denota la superficie  $\Gamma_s = \partial\Omega_s$  cuando  $S(\mathbf{x}, t) = 0$ , y  $\mathbf{n}$  es la normal que apunta hacia afuera del sólido, definida como  $\mathbf{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|}$ .

La condición de contorno interna impuesta, Dirichlet, en los puntos sobre  $\Gamma_s$  es:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad (2.13)$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad del fluido en una referencia Euleriana y  $\mathbf{u}_d$  es la velocidad impuesta en el instante de tiempo  $t$ , sobre el sólido, rígido. Esta cantidad, en rigor, está definida en un marco de referencia Lagrangiano.

Esta condición Dirichlet es sustituida por la condición de Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d) \quad (2.14)$$

donde  $\varepsilon > 0$  es un parámetro pequeño.

La distribución de esfuerzos sobre el dominio  $\Omega$  es:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f & \mathbf{x} \in \Omega_f \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + [\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}] \delta(S) & \mathbf{x} \in \Gamma_s \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega_s \end{cases} \quad (2.15)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}$ . Por otra parte,  $[\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}] \delta(S)$ , representa la fuerza ejercida por el cuerpo sobre el fluido en  $\Gamma_s$ , mientras que  $\delta(S)$  es la función delta, que tiene la siguiente propiedad:

$$\int_{\Omega} \Phi \delta(S) d\mathbf{x} = \int_S \Phi dS \quad (2.16)$$

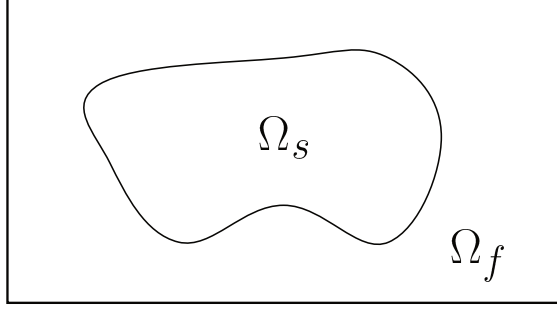
El término  $[\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}] \delta(S)$ , de la Ec.2.15, es aproximado por  $\rho\kappa(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d)$ , con  $\kappa = \frac{\phi_{BLS}(x)}{\varepsilon}$ , mediante la inclusión de la condición de contorno Ec. (2.14) y la propiedad Ec. (2.16) de la función  $\delta$ , [80, 72, 81, 31]. Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se obtienen los métodos de penalización, que son una aproximación a los métodos de Nitsche, cuando  $\varepsilon = 0$ . En estas formulaciones existen problemas de no-conformidad ante el tamaño de malla, y mal condicionamiento para valores muy pequeños de  $\varepsilon$ . Además, presentan problemas de estabilidad y requieren la determinación de un  $\varepsilon$  óptimo, y que en este caso se evaluará en el problema numérico del flujo pasante sobre un cilindro, y en el problema de cilindro oscilante con imposición de movimiento, e interacción fluido-sólido rígido, desarrollados en [95] y en [92], respectivamente.

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \underbrace{-\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}}_{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{g} - \rho \kappa (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \quad \text{en } \Omega, \quad (2.17)$$

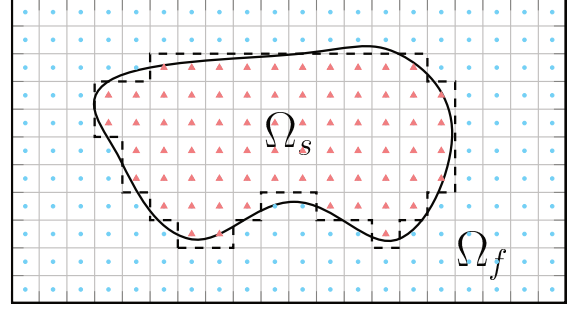
La Ec.(2.17) se resuelve sobre todo el dominio  $\Omega$ , que comprende la región fluida  $\Omega_f$  y la región sólida  $\Omega_s$ , que se esquematiza en la Figura 2.2a.

#### 2.1.4. Esquema de interacción de cuerpos con movimiento impuesto inmersos con acoplamiento en una dirección

El término tipo Darcy en la Ec. (2.17) modela sólidos inmersos como una fuerza externa que puede calcularse como:



(a) Dominio de análisis  $\Omega$ , que incluye las regiones de fluido  $\Omega_f$  y sólido  $\Omega_s$ : identificación de celdas continuas.



(b) Dominio de análisis  $\Omega$ , incluyendo las regiones de fluido  $\Omega_f$  y sólido  $\Omega_s$ : discreto con identificación de celdas.

**Figura 2.2:** Dominio de análisis  $\Omega$ , que incluye las regiones de fluido  $\Omega_f$  y sólido  $\Omega_s$ : continuo y discreto con identificación de celdas.

$$\mathbf{f}_b = -\kappa(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \quad (2.18)$$

donde  $\kappa$  es un parámetro de penalización que identifica las regiones sólidas o fluidas según  $\kappa(\mathbf{x}) \equiv \{\forall \mathbf{x} \in \Omega \mid \kappa \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega_s \wedge 0 \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega_f\}$ . Nótese que  $\kappa$  está relacionado con la permeabilidad del medio poroso ficticio. La velocidad del sólido rígido es  $\mathbf{u}_s$ , que puede calcularse como  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_c + \omega \times (\mathbf{x}_c - \mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega_s$ , donde  $\mathbf{u}_c$  y  $\omega$  son las velocidades de traslación y angular en el centro de masa del sólido, respectivamente.

Las ecuaciones se discretizan mediante un método de volúmenes finitos en *Code Saturne* [3], un código científico paralelo multifísico, donde se ha implementado el término de Darcy. El esquema de solución es el Método Semi-Implícito para Ecuaciones Acopladas de Presión (SIMPLE) con un esquema de integración temporal de primer orden para simulaciones transitorias. El sólido inmerso se identifica con un parámetro de penalización positivo en cada celda, tal como se muestra en el esquema de la Fig. 2.2b. La condición de fluido o sólido de cada celda depende de la posición del centro de la celda con respecto al contorno  $\Gamma$  del dominio, dando una representación escalonada de la interfaz.

La posición del cuerpo rígido se calcula en cada paso de tiempo de acuerdo a la velocidad del sólido  $\mathbf{u}_s$ , y el campo de penalización para las celdas dentro del cuerpo se actualiza mediante la identificación de las celdas como sólidas o fluidas mediante una clasificación geométrica. Para geometrías simples, la identificación de celdas se realiza utilizando la ecuación paramétrica que define al cuerpo correspondiente. Las geometrías más complejas requieren técnicas como el algoritmo de punto-en-polígono [37] o level-set [11], como ejemplo. El término de Darcy se trata de forma implícita en el tiempo para evitar inestabilidades cuando se consideran valores grandes de  $\kappa$ , lo que lleva a un término diagonal positivo adicional en la ecuación del sistema de cantidad de movimiento para las celdas sólidas y nulo para las celdas fluidas.

### 2.1.5. Cómputo de fuerzas hidrodinámicas sobre un sólido embebido

Esta sección describe el cálculo de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido. En lugar de calcular las fuerzas hidrodinámicas usando el tensor de tensiones sobre la superficie del cuerpo, aquí se recuperan a partir del término de penalización. El cálculo se realiza integrando la Ec. (2.17) sobre  $\Omega_s$ , a partir de considerar el teorema de la divergencia,

$$\int_{\Omega_s(t)} \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \kappa(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_{Int}(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (2.19)$$

La fuerza sobre el cuerpo sumergido es  $\mathbf{F} = \int_{\Gamma_{Int}(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ . Para encontrar la derivada material en el dominio sólido, el término  $\mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u}$  se agrega y se resta en la Ec.(B.3), lo que lleva a:

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_s(t)} \rho \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \nabla \mathbf{u} + \kappa(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \right] d\Omega \quad (2.20)$$

La superficie del cuerpo es *material* con respecto a la velocidad del cuerpo  $\mathbf{u}_s$ , de modo que, de acuerdo con el teorema de transporte de Reynolds,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s(t)} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u} \right) d\Omega &= \int_{\Omega_s(t)} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\Omega, \\ &= \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_s(t)} \rho \mathbf{u} d\Omega \right) \\ &= \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $D/Dt$  denota la derivada material, y  $\mathbf{M}$  es el momento lineal total del cuerpo. El segundo término dentro de la Ec. (2.20) tiende a cero cuando  $\mathbf{u}$  dentro del sólido tiende a  $\mathbf{u}_s$ . Luego, en un dominio discreto de volumen finito, las fuerzas del fluido sobre el sólido pueden calcularse como,

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{M}^{n+1} - \mathbf{M}^n}{\Delta t} + \sum_{\Omega_j \in \Omega_s(t^{n+1})} \rho \kappa (\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_{sj}^{n+1}) \Omega_j, \quad (2.22)$$

donde,

$$\mathbf{M}^n = \sum_{\Omega_j \in \Omega_s(t^n)} \rho \mathbf{u}_j^n \Omega_j. \quad (2.23)$$

y  $j$  identifica la celda sólida. Debe tenerse en cuenta que el primer término en la Ec. (B.7) representa la inercia del fluido ficticio dentro del sólido, es decir, la masa embebida. Este término solo está activo cuando el sólido se acelera. Cuando se consideran rotaciones en el sólido, también se debe considerar una inercia



rotacional integrada al calcular el par. El segundo término en la ecuación es la fuerza derivada del término de penalización/Darcy en el fluido.

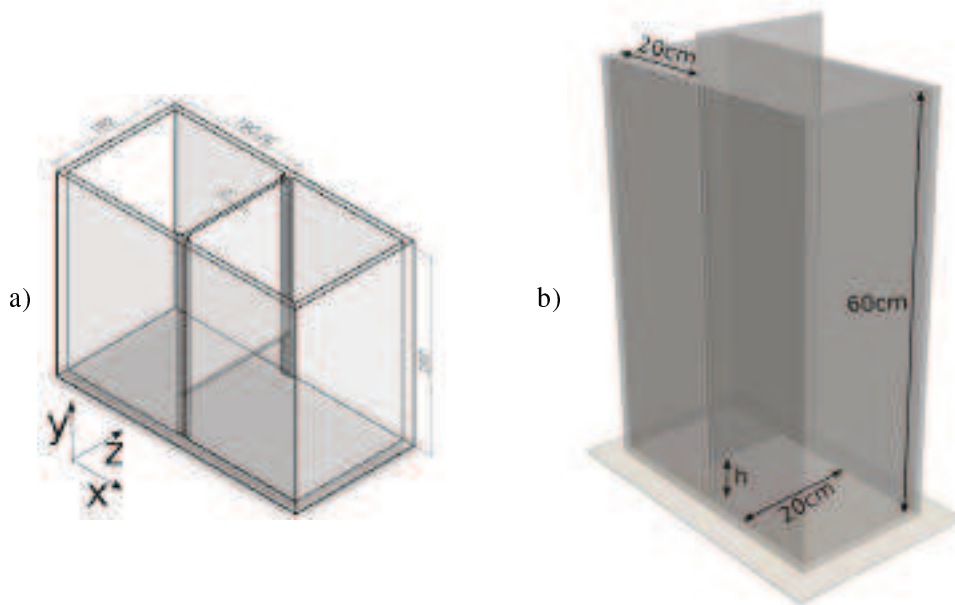
$$\int_{\Omega_s(t)} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) d\Omega = \underbrace{\int_{\Omega_s(t)} \rho [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \nabla \mathbf{u}] d\Omega}_{F_{Err} \approx 0, \text{ si } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_s} + \underbrace{\int_{\Omega_s(t)} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u} \right) d\Omega}_{F_{Emb} = \frac{D}{Dt} \left( \int_{\Omega_s(t)} \rho \mathbf{u} \right) d\Omega}$$

Las fuerzas ejercidas por el fluido sobre el sólido quedan definidas como,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{Pen} + \mathbf{F}_{Emb} + \mathbf{F}_{Err}$ . De forma discretizada,  $F_i = \sum_j^{\# \Omega} \left[ \rho_j \kappa(\phi_j) (\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_{s_j}^n) + \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\Delta t} \right] \Omega_j$ . Notar que el error en el cálculo de esta fuerza es nulo cuando  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_s$ .

## 2.2. Desarrollo experimental

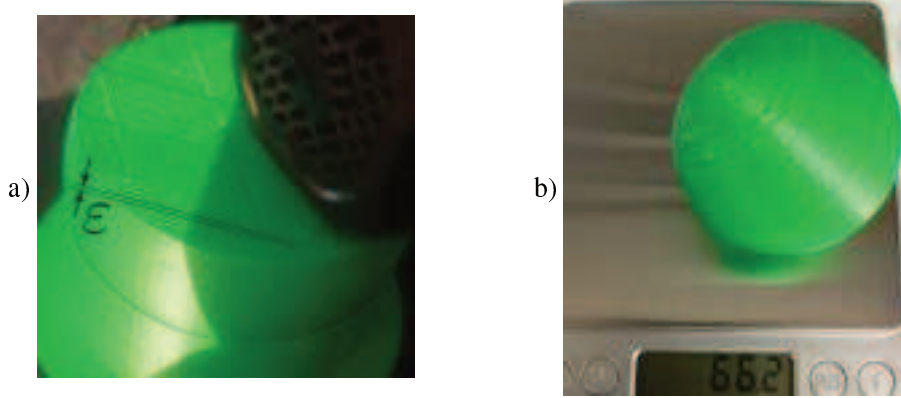
### 2.2.1. Estanque dividido y objetos 3D impresos en PLA

Los estanques utilizados durante el desarrollo de este trabajo se muestran en la Fig. 2.3a, y 2.3b. Estos estanques fueron montada sobre una mesa vibratoria capaz de moverse bajo un control de movimiento horizontal. La posición de la superficie libre fue medida mediante sensores ultrasónicos. Las instalaciones del laboratorio en el que se realizaron los ensayos vibratorios son similares a las reportadas en [18, 19]. Ambos estanques están contruidos de acrílico. Además los recipientes son estancos y poseen una pared móvil en su interior que separa las dos cavidades. El estanque de la Fig. 2.3a fue utilizado en [39, 23, 92], mientras que el estanque Fig. 2.3b ha sido utilizado en [97].



**Figura 2.3:** a) Recipiente para realizar experimentos de sincronización, y primeros seguimientos de objetos sumergidos. b) Recipiente para realizar experimentos de movimiento de múltiples objetos sumergidos, y estudio de sensibilidad de la superficie libre con respecto a la apertura de la compuerta que separa ambas cavidades.

Los objetos utilizados son fabricados en ácido poliláctico, habitualmente identificado como PLA, con impresión 3D de diferentes tamaños y formas. Para un mismo objeto se realizaron pruebas antes de determinar el nivel de relleno,  $\varepsilon$ . La Tabla 2.1 resume la sensibilidad del peso de la esfera con respecto a la distancia de relleno,  $\varepsilon$ , señalada en la Fig. 2.4 a).



**Figura 2.4:** a) Distancia  $\varepsilon$  que define el nivel de relleno del objeto de PLA impreso en 3D, b) Verificación de peso en gramos de esfera de PLA construida en impresora 3D.

| $\varepsilon$ [mm] | Peso Esfera [g] | $\rho_a$ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ | $\rho_r$ |
|--------------------|-----------------|----------------------------------------|----------|
| 1,4                | 510,5           | 938,3                                  | 0,938    |
| 1,35               | 529,2           | 971,9                                  | 0,972    |
| 1,3                | 547,8           | 1005,6                                 | 1,006    |
| 1,25               | 566,4           | 1039,2                                 | 1,039    |

**Tabla 2.1:** Peso de esferas en función del nivel de relleno  $\varepsilon$ . Se toma como referencia la construcción de una esfera de diámetro de 100 mm, volumen de una esfera perfecta  $\forall_{Esfera} = 5.24 \times 10^{-4} m^3$ . Densidad relativa  $\rho_r = \frac{\rho_a}{\rho_{ref}}$ . Densidad de referencia  $\rho_{ref} = 1000 \frac{kg}{m^3}$ . El peso de la esfera es una estimación obtenida por el software de la impresora 3D.

Se concluye que para obtener una flotabilidad neutra, es decir  $\rho_r \approx 1.0$ , la distancia de relleno necesario por aporte de PLA en impresión 3D, varía entre 1.3 mm y 1.4 mm. La tabla 2.1 muestra el resumen de los parámetros de construcción de 4 esferas de diámetro 50 mm y su respectiva densidad relativa.

| $\varepsilon$ [mm] | $m_0$ [g]      | $m_f^{(+)} [g]$ | $\forall [m^3](\times 10^{-6})$ | $\rho_a$ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ | $\rho_r$ |
|--------------------|----------------|-----------------|---------------------------------|----------------------------------------|----------|
| 1.40               | $64.4 \pm 0.1$ | $65.1 \pm 0.1$  | $64.9 \pm 0.8$                  | $1003.1 \pm 1.5$                       | 1.00     |
| 1.39               | $65.5 \pm 0.1$ | $66.2 \pm 0.1$  | $66.3 \pm 0.8$                  | $998.5 \pm 1.5$                        | 0.99     |
| 1.38               | $66.2 \pm 0.1$ | $67.2 \pm 0.1$  | $65.3 \pm 0.8$                  | $1029.1 \pm 1.5$                       | 1.02     |
| 1.37               | $68.1 \pm 0.1$ | $68.7 \pm 0.1$  | $65.9 \pm 0.8$                  | $1042.5 \pm 1.5$                       | 1.04     |

**Tabla 2.2:** Sensibilidad de la masa de los marcadores en la esfera, análisis de variación de la densidad de los objetos neutros. Considera la masa promedio agregado por los marcadores 0.4 g y por saturación 0.3 g. Densidad relativa  $\rho_r = \frac{\rho_a}{\rho_{ref}}$ , densidad de referencia  $\rho_{ref} = 1000 \frac{kg}{m^3}$

### 2.2.2. Procesamiento de Imágenes

La obtención de datos experimentales sobre la dinámica de objetos sumergidos se realiza mediante procesamiento de imágenes. La validación de esta técnica de obtención de datos fue realizada con pruebas exploratorias con tecnología accesible para luego utilizar la cámara AOS-QPRI de alta velocidad de obturación y alta resolución.

#### Modelo de transformación proyectiva con marcadores fiduciales

La transformación proyectiva entre el plano del modelo en el mundo real y el plano de la imagen, que se ilustra en la Fig. 2.5, se realiza mediante la siguiente expresión:

$$\alpha \tilde{\mathbf{p}}_c = \mathbf{K} [\mathbf{R} | \mathbf{t}] \tilde{\mathbf{p}}_w \quad (2.24)$$

donde  $\tilde{\mathbf{p}}_c$  y  $\tilde{\mathbf{p}}_w$  corresponden al vector de coordenadas homogéneas de un punto en el plano de la imagen 2D,  $\tilde{\mathbf{p}}_c = [u, v, 1]^T$  y al vector de coordenadas homogéneas de un punto en el plano del modelo 3D,  $\tilde{\mathbf{p}}_w = [X, Y, Z, 1]^T$ , respectivamente. El factor de escala  $\alpha$ , es obtenido mediante puntos conocidos, por ejemplo, conociendo  $\tilde{\mathbf{p}}_w$  y  $\tilde{\mathbf{p}}_c$  para el centro del marcador. La matriz  $\mathbf{K}$  corresponde a parámetros intrínsecos de la cámara y  $[\mathbf{R} | \mathbf{t}]$  es una matriz de rotación, ambas definidas más abajo.

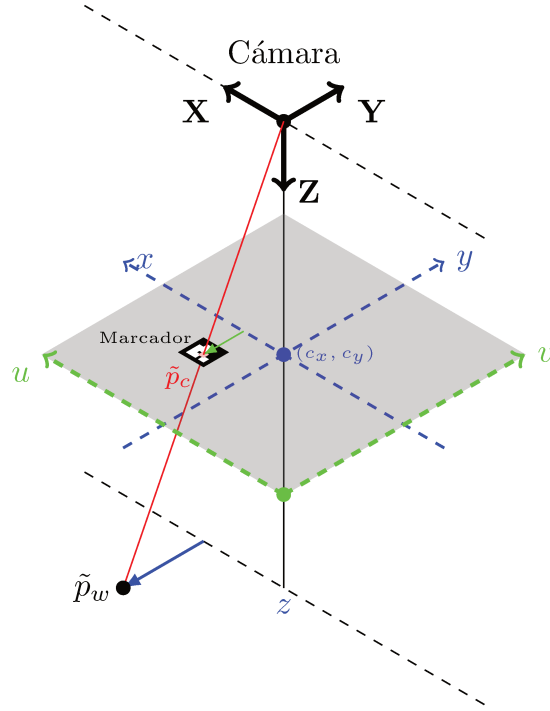
Este modelo requiere de dos etapas principales para obtener los parámetros de la transformación proyectiva de la Ec.(2.24). La primera de ellas es la calibración de la cámara para obtener los parámetros intrínsecos del modelo,  $\mathbf{K}$ , y la segunda es resolver el problema de posicionamiento utilizando los marcadores fiduciales para obtener los parámetros extrínsecos de la cámara,  $[\mathbf{R} | \mathbf{t}]$ .

El proceso de calibración utilizado en este trabajo es conocido y utilizado en modelos de proyección que refieren al cambio de coordenadas de reales a las de la imagen, como ser la calibración mediante sistema global-local utilizando un modelo de proyección pinhole camera [75].

La matriz  $\mathbf{K}$  depende de parámetros intrínsecos de la cámara, esto es, contiene información sobre la distancia focal en ambas direcciones del plano de la imagen  $f_x$  y  $f_y$ , las coordenadas del punto principal  $[c_x, c_y]$  en píxeles y la desviación del eje  $s$ , que causa distorsión de corte en la imagen proyectada (usualmente tiende a cero),

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & s & c_x \\ s & f_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Esta matriz se obtiene durante el proceso de calibración y se realiza mediante un método basado en la detección de las esquinas interiores de un patrón tipo tablero de ajedrez de tamaño 6x9, como el de la



**Figura 2.5:** Modelo de cámara estenopeica con marcador fiducial para resolver problema de estimación de posición.

Fig. 2.6.a), utilizando las funciones disponibles en la librería de código abierto openCV. Se realizan  $N = 30$  mediciones del patrón de calibración para obtener un promedio de la desviación estándar media ( $\bar{\sigma}$ ), de todas las esquinas interiores detectadas del patrón tipo tablero de ajedrez  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}$ .

Por otro lado,  $[\mathbf{R}|\mathbf{t}]$  es la matriz extrínseca y corresponde a la transformación lineal entre las coordenadas del mundo real y el sistema coordenado de la cámara. Esta matriz ampliada se compone de la matriz de rotación  $\mathbf{R}$  y el vector de traslación  $\mathbf{t}$ .

La matriz extrínseca se obtiene mediante la estimación de la posición de la cámara mediante un conjunto de puntos de coordenadas conocidas, correspondiente a resolver el problema *Perspective N-Points* (PnP), con metodologías conocidas [35, 100]. En el presente trabajo se utiliza una basada en la detección de marcadores tipo ArUcos, donde la distancia de la cámara hasta el plano de la imagen es el factor de escalamiento  $\alpha$ . Además, para mejorar la precisión se utiliza el optimizador no lineal Levenberg-Marquardt para refinar la solución del problema PnP, mediante rutinas de la librería openCV.

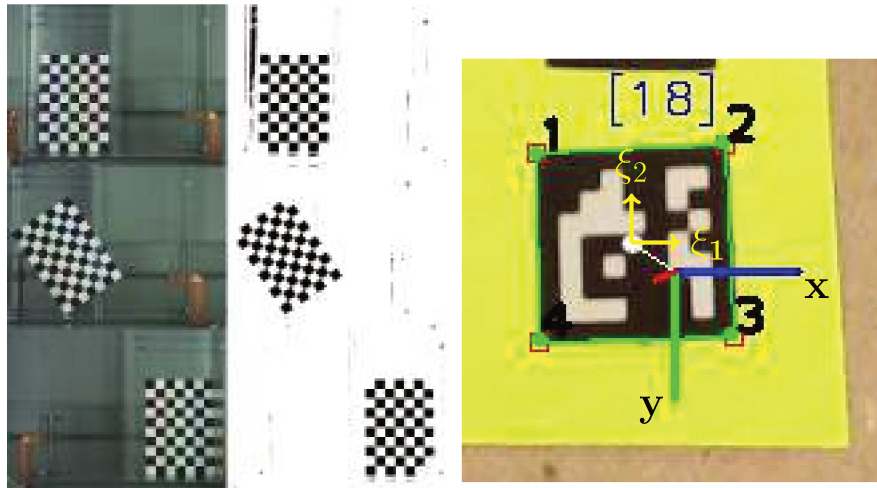
Para la comprobación del proceso de calibración y estimación de posicionamiento de la cámara se desarrolla un patrón de calibración de dimensiones conocidas y con puntos de calibración prefijados. Las coordenadas de los puntos de calibración son proyectados a las coordenadas del plano de la imagen conociendo la matriz de rotación ( $\mathbf{R}$ ) y el vector de traslación global  $\mathbf{t}$ , obtenida con la resolución del problema PnP. Esta comprobación es independiente de la posición de los marcadores ArUcos de referencia; sin embargo en este trabajo coinciden con los puntos de calibración.

Finalmente para el seguimiento de objetos se resuelve la Ec. (2.24) para  $\tilde{\mathbf{p}}_w$ , es decir:

$$\tilde{\mathbf{p}}_w = \left( \alpha \tilde{\mathbf{p}}_c \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{t} \right) \mathbf{R}^{-1} \quad (2.26)$$

Los marcadores fiduciales permiten utilizar diferentes tamaños de los mismos de acuerdo a la cantidad de bits por lado y dentro de ellos hay disponibilidad de elección de diferentes patrones. Por ejemplo, la Fig. 2.6.b) muestra el marcador 18 de tamaño  $\beta = 2cm$  (MARKER\_SIZE). Las coordenadas de las esquinas sobre un marcador quedan definidas de forma global  $\mathbf{x}_{global}$  mediante la transformación lineal rígida conociendo la matriz de rotación local  $\mathbf{R}_{local}$ , el vector traslación local  $\mathbf{t}_{local}$  y el tamaño del marcador  $\beta$ , resultando:

$$\mathbf{x}_{global} = \mathbf{t}_{local} + \beta \mathbf{R}_{local} \xi \quad (2.27)$$



**Figura 2.6:** a) Calibración de cámaras mediante identificación de esquinas interiores de un patrón tipo tablero de ajedrez de tamaño 6x9. b) Marcador ArUco 18 de 50 marcadores diferentes disponibles en la biblioteca de marcadores 7x7 bits. Los 4 vértices del marcador están numerados, y tienen coordenadas perimétricas según el sistema de referencias  $\xi$ .

El refinamiento de la pose consiste en estimar la rotación y traslación que minimiza el error de reproyección utilizando un método de minimización no lineal y partiendo de una estimación inicial de la solución.

### Medición de rotación y desplazamiento con marcadores fiduciales

Para cada marcador hay desplazamientos y rotaciones, por ejemplo, como se muestra en la Fig. 2.6.b). Cada marcador tiene un eje local con origen en el centro del marcador más las cuatro coordenadas de las esquinas. Con respecto a un sistema de ejes globales  $\mathbf{O}$ , fijo y conocido para todo el análisis, dado por resolver el

problema PnP desde estimación de la pose, entonces

$$\mathbf{x}_O = \frac{1}{n} \sum^n \mathbf{x}_j \quad n \geq 3 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{x}_{cm} = \frac{1}{n} \sum^n \mathbf{x}_i \quad n \geq 1 \quad (2.29)$$

Se utiliza una aproximación mediante mínimos cuadrados para obtener la matriz de rotación y el vector de translación de un objeto rígido, es decir,

$$\mathbf{x}'_{4 \times n} = \mathbf{H}_{4 \times 4} \mathbf{x}_{4 \times n} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{x} \mathbf{x}^T (\mathbf{x}' \mathbf{x}^T)^{-1} \quad (2.31)$$

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{H} \mathbf{x}\| \approx 0 \quad (2.32)$$

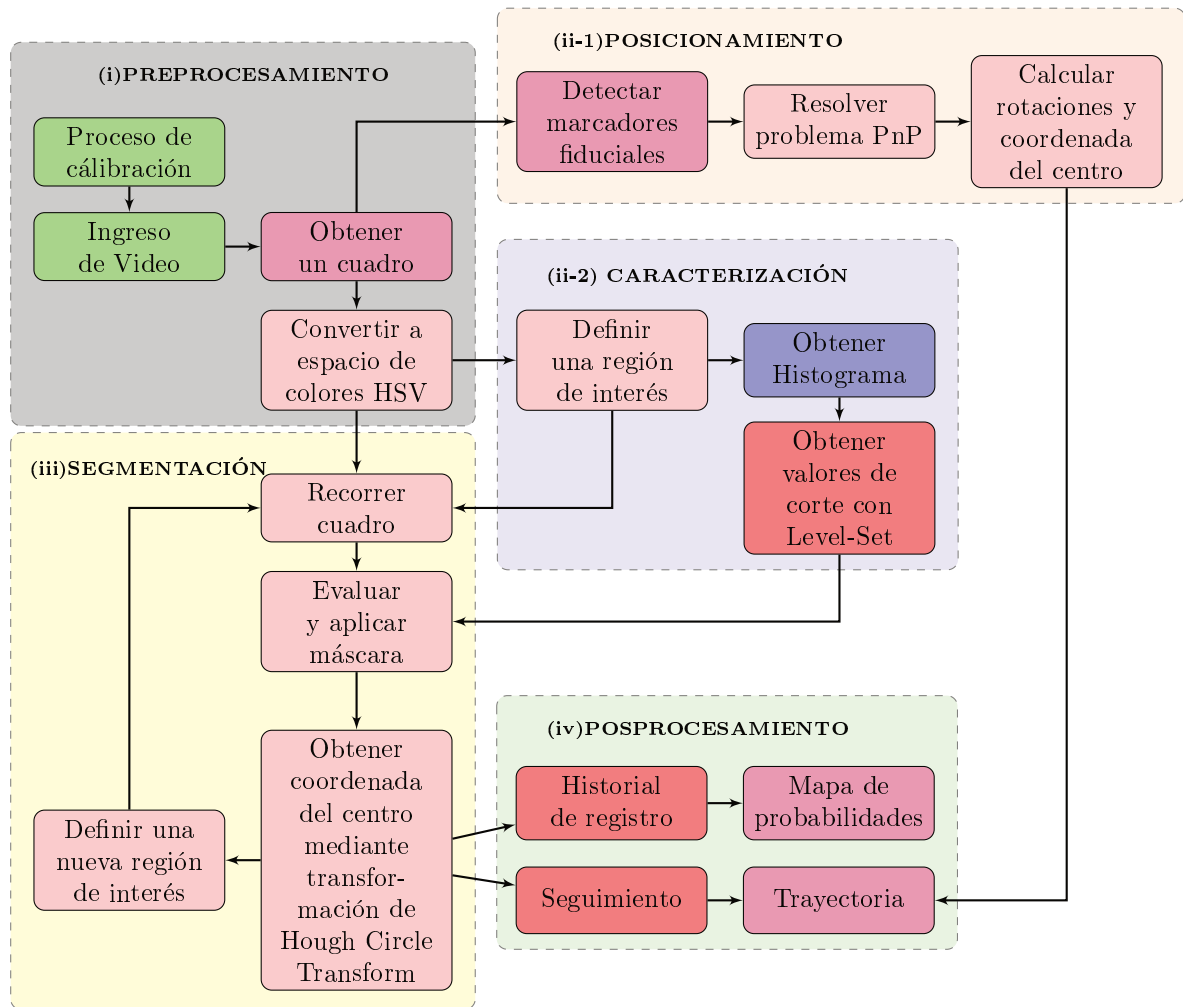
donde  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  corresponden a la coordenada homogénea del centro de  $n$ -marcadores fiduciales. La matriz de transformación lineal homogéneas está compuesta por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{t}_{1 \times 3} \\ 1_{3 \times 1} & 1 \end{bmatrix}_{Global} \quad (2.33)$$

La sub-matrix  $\mathbf{R}_{Global} \in \mathbf{SO}(3)$  se utiliza para inicializar el cuaternión para calcular posteriormente el eje y el ángulo de rotación con ayuda de la librería Quaternion de python.

Para el cálculo de rotaciones se utiliza la metodología descrita en la Sec. 2.2.2 por cada objeto presente en el plano de la cámara. En primer lugar, se identifican los objetos según el id de los marcadores asociados al objeto. Posteriormente, la coordenada  $\tilde{\mathbf{p}}_w$  de cada marcador es guardado en un diccionario de conectividad por cada paso de tiempo. Para el cálculo de rotaciones es necesario armar la matriz  $\mathbf{H}$  de la Eq. (2.33) para cada objeto, para lo cual se comparan los dos últimos diccionarios.

El diagrama de la Fig. 2.7 señala un resume la técnica de procesamiento de imágenes desarrollada. En ella, se aprecian las diferentes etapas seguidas en cada iteración.



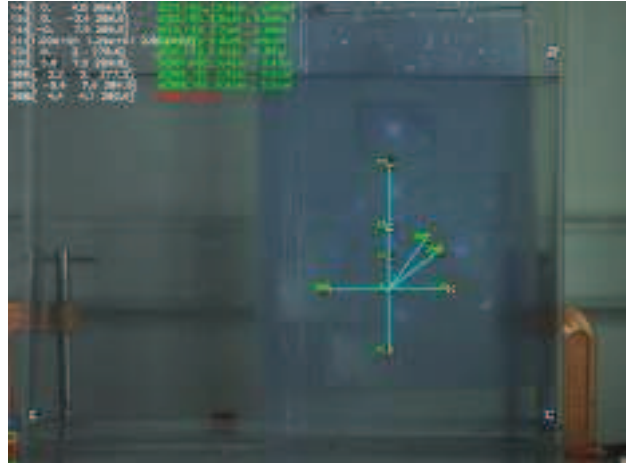
**Figura 2.7:** Esquema resumen de la técnica de procesamiento de imágenes utilizada para obtener resultados experimentales comparables.

### Error del procesamiento de imágenes

Para obtener una medida de error en distancias de esta técnica experimental se realizaron mediciones sobre un patrón conocido. La Fig. 2.8 muestra el resultado de la identificación de marcadores fiduciales y las mediciones realizadas por el algoritmo desarrollado. El error medio en el plano 2-D es de aproximadamente 0.5 *cm*, mientras que el error máximo en profundidad es de aproximadamente 0.2 *cm*, magnitudes coincidentes con lo reportado por [66].

La precisión en la determinación de las rotaciones se minimiza aumentando el número de marcadores sobre el objeto y aumentando el número de marcadores identificados por imagen.

Para validar el algoritmo, identificar fuentes de errores y cuantificar la sensibilidad, se realizaron pruebas experimentales para obtener la sensibilidad ante rotaciones, según el tamaño del marcador, de 20 a 100 píxeles, y el grado de rotación del marcador, de 1 a 90 grados, utilizando una cámara ideal o ficticia, es decir, de parámetros intrínsecos conocidos, sin distorsión y generada dentro de un entorno del código, utilizando



**Figura 2.8:** Medición de error medio en el plano 2D con patrón sumergido.

un marcador y una rotación simple. Estas pruebas se realizaron con dos tipos de marcadores diferentes, 4x4 y 7x7 campos.

Estas pruebas permiten concluir que entre más píxeles se registren por marcador, menor es el error de identificación, lo cual concuerda con lo reportado por [66, 41],[51].

Los resultados arrojan que la tasa de detección es mayor para los marcadores de 4x4 en 100 frames; sin embargo, arroja falsos positivos, es decir, el marcador no coincide con el número de identificación o no es un marcador. Por otro lado, los marcadores de 7x7 presentaron una alta tasa de fiabilidad pero baja tasa de detección.

Por un lado, para eliminar los datos atípicos, como falsos positivos debido a identificaciones falsas de marcadores, se utiliza una medida robusta de dispersión de datos basada en la desviación absoluta mediana (aMAD) [71]. Por otro lado, para aumentar la tasa de detección de marcadores sobre una esfera, se implementa una búsqueda lineal de los parámetros óptimos de brillo y contraste. Se utiliza como máscara binaria un umbral tipo gaussiano en el espacio de escala de grises de la imagen original. Bajo estas condiciones, el algoritmo no fue capaz de detectar ningún marcador solamente en 19 frames de 941, es decir, en el 98 % de los fotogramas analizados, el algoritmo fue capaz de detectar al menos 3 marcadores. Como desventaja, cabe aclarar que esta búsqueda lineal de parámetros aumenta el tiempo de ejecución del algoritmo por cada imagen.

En el modelo proyectivo propuesto por [38], la proyección corrige el efecto de reflexión cuando el objeto está sumergido (bajo agua), es decir, se realiza una corrección por en el plano focal de la reflexión producida por el medio. Otras comparaciones entre marcadores bajo oclusión son realizados en [28],[62]. Efectos de la velocidad relativa en la detección de los marcadores son reportados en [42, 84, 89], mientras que estudios con cámara en movimiento y marcadores fijos son descriptos en [70].



## Capítulo 3

# Validación y aplicaciones

En esta sección se describen los casos numéricos relevantes que se utilizaron para validar técnicas y metodologías empleadas en las simulaciones numéricas desarrolladas en el marco de esta Tesis. Los casos de las Secs. 3.1 y 3.2 se encuentran reportados apropiadamente en los Anexos A y B, respectivamente, mientras que los restantes no han sido incluidos en artículos completos, y por eso se los reporta de manera completa.

### 3.1. Primeras aproximaciones numéricas al comportamiento de una esfera sumergida en un estanque dividido sometido a agitación

Las primeras aproximaciones numéricas al comportamiento de una esfera sumergida bajo movimiento impuesto en un estanque dividido, introducido en la motivación de este trabajo y publicado en [92], presentaron el desafío de obtener comparaciones representativas con datos experimentales previos. Para abordar este problema, se utilizó una aproximación cíclica estacionaria en la cuantificación de las fuerzas hidrodinámicas sobre una esfera de densidad neutra, permitiendo evaluar estas fuerzas a lo largo del tiempo. Esta metodología, implementada mediante simulaciones independientes en un entorno de computación de alto rendimiento, facilitó la distribución de las simulaciones en múltiples núcleos de procesamiento, lo que a su vez permitió realizar un análisis estadístico exhaustivo de los datos. Como resultado, se logró una caracterización precisa de las fuerzas a largo plazo, así como la evaluación de la sensibilidad de los parámetros asociados a los modelos de fuerzas involucradas, tales como la fuerza de masa agregada, la fuerza de arrastre y las fuerzas de interacción con las paredes del recipiente.

### 3.2. Método embebido para computación de alto rendimiento

El método embebido para la consideración sólidos rígidos sumergidos, apto para computación de alto rendimiento, se estudia en fronteras móviles bajo diferentes condiciones. Además, la comparación de coeficientes

de arrastre obtenidos en trabajos relacionados y el estudio de convergencia fueron reportados en [96]. A continuación, se presenta un análisis detallado de los casos relevantes de esta publicación:

- **Flujo entre placas planas paralelas con condición de borde periódica.** Este caso de estudio busca evaluar la precisión del método en un escenario con solución analítica conocida: el flujo de Poiseuille. La simulación numérica se realiza considerando un flujo entre dos placas planas paralelas, imponiendo una condición de borde periódica en la dirección del flujo. Los resultados obtenidos muestran una excelente concordancia con la solución analítica del flujo de Poiseuille, lo que evidencia la capacidad del método para replicar con precisión este tipo de flujo.
- **Primer problema de Stokes.** Con el objetivo de evaluar la correcta implementación de la condición de no deslizamiento en las paredes, se analiza el primer problema de Stokes. Este problema describe el flujo generado por una placa plana que se acelera infinitamente desde el reposo en un fluido inicialmente en reposo. La evolución temporal del campo de velocidad obtenida numéricamente se compara con la solución analítica, observándose una convergencia de primer orden en el tiempo. Esta concordancia con la solución analítica valida la correcta imposición de la condición de no deslizamiento en la interfaz fluido-sólido.
- **Segundo problema de Stokes.** Para evaluar la capacidad del método para simular movimientos de la pared dependientes del tiempo, se analiza el segundo problema de Stokes. En este caso, se simula el flujo generado por una placa plana oscilante en un fluido en reposo. Se consideran diferentes números de Fourier para el análisis de la oscilación. Los resultados muestran una convergencia satisfactoria a la solución analítica para las fuerzas por unidad de área, lo que demuestra la capacidad del método para manejar movimientos de pared complejos.
- **Flujo tipo pistón.** Este caso de estudio evalúa la capacidad del método para manejar paredes móviles internas, simulando un flujo tipo pistón. Se analiza la precisión en la representación del movimiento del fluido generado por la pared móvil y su influencia en la presión. Los resultados numéricos se comparan con la solución analítica para validar la precisión del método en la captura de las características del flujo, como la distribución de velocidad y presión, en este escenario específico.
- **Boya cilíndrica 2-D.** Con el fin de validar la técnica numérica en un escenario más complejo y compararla con resultados reportados en la literatura, se simula el movimiento de una boya cilíndrica en un fluido viscoso bajo la acción de la gravedad. Se analiza la evolución temporal de la velocidad y la posición de la boya, comparando los resultados con estudios previos. Se observa un buen acuerdo con los resultados de referencia, lo que valida la capacidad del método para simular la interacción fluido-estructura en casos más realistas y complejos. Se estudió la eficiencia computacional utilizando

de 20 a 80 núcleos y mallas de 0.6 a 2.5 millones de celdas, obteniendo un promedio de 12,000 celdas por núcleo por segundo en nodos Intel Xeon del clúster *Pirayú*.

### 3.3. Condición de contorno embebida en flujo sobre cilindro 2-D

El conocido caso de un flujo sobre un cilindro infinito es utilizado para validar la representación de un sólido rígido estático. Debido a la bifurcación de Hopf [47, 22], el sistema a Reynolds crítico no presenta solución analítica en base a la teoría de flujo potencial. Para representación del cilindro inmersos en el fluido se utiliza la incorporación de un término de Darcy,  $\kappa \propto \varepsilon^{-1}$ , a la formulación numérica del problema del fluido newtoniano. Este estudio considera el comportamiento del flujo alrededor de un cilindro fijo a diferentes números de Reynolds [32, 34, 33, 22], específicamente 100, 500 y 1000. La dinámica de fluidos se resuelve mediante volúmenes finitos, utilizando la plataforma de código abierto *Code-Saturne*, sobre el dominio y las condiciones de contorno señaladas en la Fig. 3.1 a). Se utilizó como referencia el diámetro del cilindro para definir la relación de aspecto. Con la finalidad de normalizar las variables en la simulación numérica se utiliza una velocidad de entrada unitaria  $u_\infty = 1$  y un diámetro del cilindro de  $D = 1$ . Las propiedades del fluido newtoniano son la densidad  $\rho = 1$ , y la viscosidad determinada a partir de  $\text{Re} \propto \mu^{-1}$ , es decir,  $\text{Re} = \frac{\rho u_\infty D}{\mu}$ . La condición Inicial en el dominio es  $\mathbf{u}|_{t_0} = (u_\infty + c(y - y_0))\mathbf{i}$  y la relación de aspecto (*blockage*)  $b_r = \frac{D}{H} = 0.05$   $b_{r_{ref}} = [0.1 - 0.071]$ . [76, 64]. Los parámetros de discretización espaciales y temporales utilizados en las simulaciones numéricas, incluyendo el nivel de refinamiento, el número de celdas y el paso de tiempo, se resumen en la Tabla 3.1:

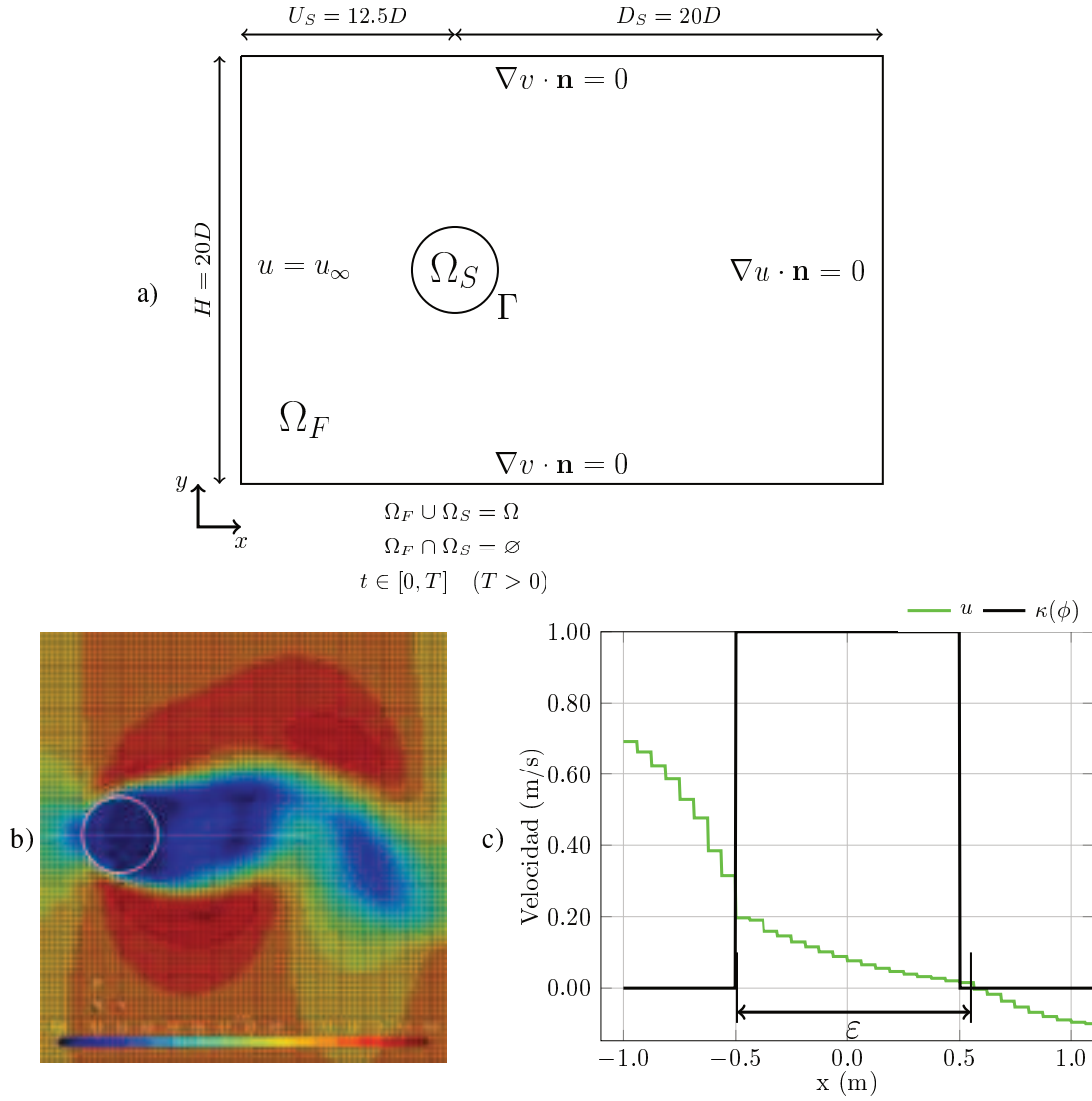
| $\Delta x$ | $\frac{N}{D}$ | Ncell   | $\Delta t$ | $\frac{\Delta x}{\ \mathbf{u}\ }$ |
|------------|---------------|---------|------------|-----------------------------------|
| 0.125      | 8             | 131072  | 0.01       | 0.0625                            |
| 0.0625     | 16            | 524288  | 0.005      | 0.03125                           |
| 0.03125    | 32            | 2097152 | 0.002      | 0.015625                          |
| 0.015625   | 64            | 8388608 | 0.001      | 0.0078125                         |

**Tabla 3.1:** Resumen de los parámetros utilizados en las simulaciones, donde  $\Delta x$  es el tamaño de celda,  $\frac{N}{D}$  es el número de celdas por diámetro, Ncell es el número total de celdas en la malla,  $\Delta t$  es el paso de tiempo,  $\frac{\Delta x}{\|\mathbf{u}\|}$  es la relación entre el tamaño de la celda y la velocidad del flujo. Este último término es utilizado para calcular el número de Courant y evaluar la estabilidad numérica.

La Fig. 3.1 b) muestra la representación del cilindro infinito sumergido en el fluido, donde el término de Darcy actúa dentro del dominio  $\Omega_S$ , mientras que la Fig. 3.1 c) representa el perfil de velocidades  $u$  y la función  $\kappa(\phi)$  para representar el sólido embebido a lo largo de una línea horizontal.

Las fuerzas hidrodinámicas sobre el cilindro se obtienen integrando sobre todo el dominio  $\Omega = \Omega_F \cup \Omega_S$  representado en la Fig.3.1a) con la siguiente expresión:

$$F_i = \int_{\Omega} \kappa u_i d\Omega \approx \sum_j^{ncell} \{\kappa u_i\}_j V_j \quad \text{con} \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$



**Figura 3.1:** a) Dominio y condiciones de contorno utilizadas para modelar el conocido caso de un flujo pasante sobre un cilindro. b) Representación del cilindro con técnica embebida, c) Perfil de velocidad a lo largo de una línea horizontal coincidente con el diámetro del cilindro.

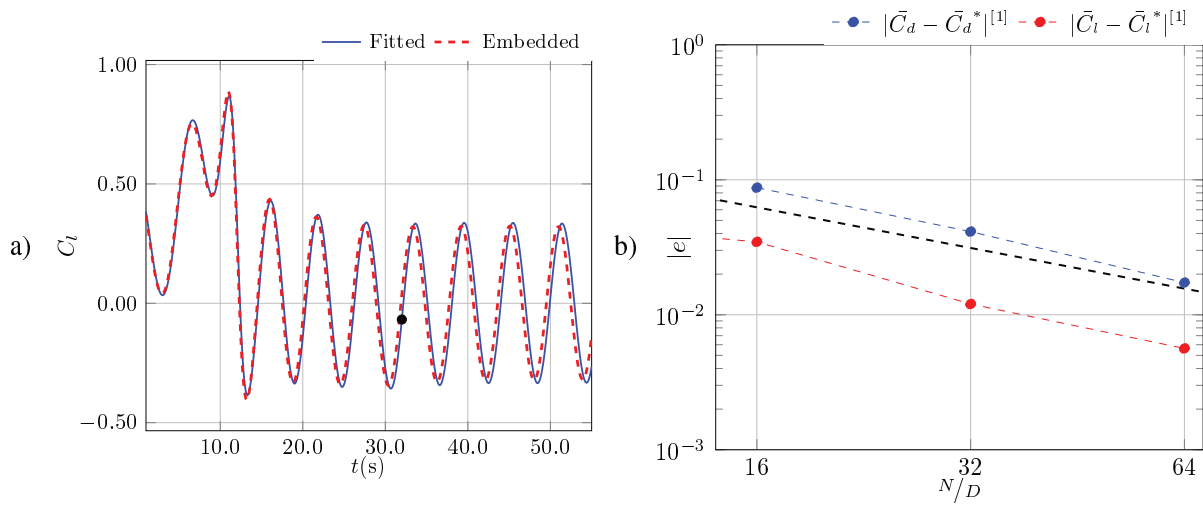
Por otro lado, los coeficientes hidrodinámicos, para los parámetros utilizados en este caso, se obtienen como:

$$C_i = \frac{F_i}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 A} \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (3.2)$$

El número de Strouhal se calcula como  $S_t = f_s \frac{d}{u_\infty}$ , donde mediante un análisis espectral basado en la transformada rápida de fourier (FFT) se obtiene la frecuencia de desprendimiento,  $f_s$ . El objetivo de este estudio es analizar la convergencia de la técnica embebida frente a la solución entregada con una técnica *fitted*, comparando los coeficientes hidrodinámicos. Para la solución con la condición de contorno Dirichlet se reconstruye la fuerza hidrodinámica con la solución del campo de velocidad y presión en cada cara que conforma el contorno del cilindro. Luego, se obtienen los coeficientes hidrodinámicos mediante la Ec. (3.2).

Como medida para cuantificar la similitud entre los coeficientes hidrodinámicos de ambas metodologías se utiliza el error absoluto, definido por,  $e_i = |\bar{C}_d - \bar{C}_d^*|$  con  $i = 1, 2$ . Donde  $\bar{C}_d$ , es el coeficiente de arrastre promedio en un periodo  $\tau$  para la metodología embebida, y  $\bar{C}_d^*$ , es el valor de referencia de la solución numérica con la condición de contorno Dirichlet (fitted) de nivel de refinamiento de  $\Delta x = \frac{1}{64}$ .

La Fig. 3.2 muestra los resultados obtenidos para  $Re = 100$ , comparando las dos metodologías implementadas en este estudio. En el gráfico se observa la evolución temporal del coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) para ambas técnicas. La Tabla 3.2 resume los parámetros calculados para las diferentes discretizaciones del presente caso, incluyendo el coeficiente de arrastre, el de sustentación y el número de Strouhal, con los correspondientes errores.



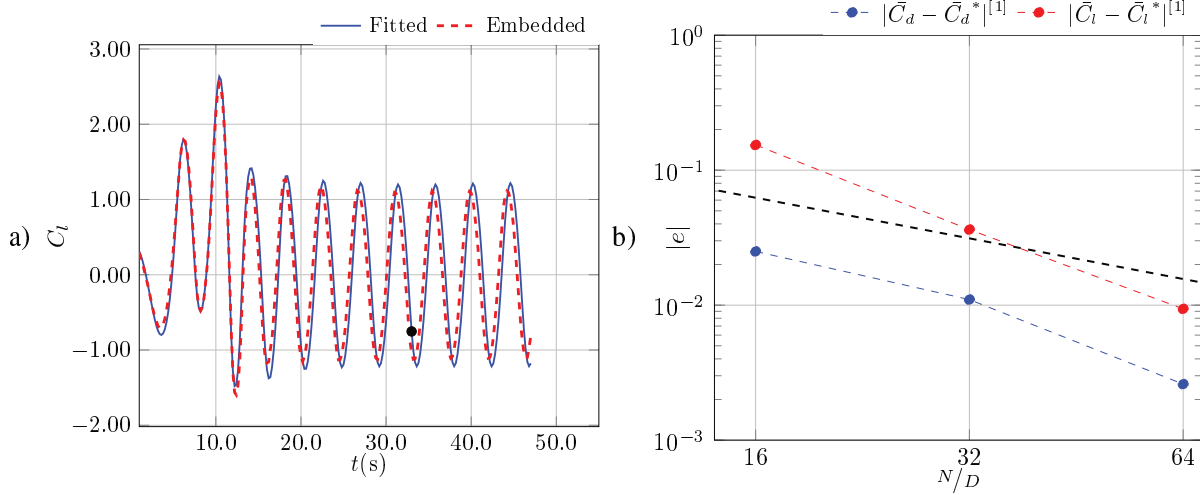
**Figura 3.2:** a) Evolución temporal del coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) para las dos metodologías consideradas, en el caso de  $Re = 100$ . b) Convergencia de los coeficientes hidrodinámicos ( $C_L$  y  $C_d$ ) comparados con la técnica *fitted* como referencia.

| $\Delta x$ | $N/D$ | $\bar{C}_D$ | $\bar{C}_D^*$ | $ e_{Drag} $ | $\bar{C}_L$ | $\bar{C}_L^*$ | $ e_{Lift} $ | $\bar{S}_t$ | $\bar{S}_t^*$ | $ e_{Strouhal} $ |
|------------|-------|-------------|---------------|--------------|-------------|---------------|--------------|-------------|---------------|------------------|
| 0.0625     | 16    | 1.3313      | -             | 0.0474       | 0.19652     | -             | 0.03468      | 0.15998     | -             | 0.00002          |
| 0.03125    | 32    | 1.3479      | -             | 0.0308       | 0.21919     | -             | 0.01201      | 0.16801     | -             | 0.0199           |
| 0.015625   | 64    | 1.3614      | 1.3787        | 0.0173       | 0.22557     | 0.2312        | 0.00563      | 0.16804     | 0.16          | 0.008            |

**Tabla 3.2:** Resultados para  $Re = 100$  mostrando los coeficientes de arrastre ( $\bar{C}_D$ ) y sustentación ( $\bar{C}_L$ ) junto con sus errores absolutos frente a los valores de referencia  $\bar{C}_D^*$  y  $\bar{C}_L^*$  obtenidos con la técnica *fitted*. También se incluye el número de Strouhal ( $\bar{S}_t$ ) y su error, evaluando la convergencia según el refinamiento de la malla ( $\Delta x$ ).

La Fig. 3.3 muestra los resultados obtenidos para  $Re = 500$ , comparando las dos metodologías implementadas en este estudio. En el gráfico, se observa la evolución temporal del coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) para ambas técnicas. En la Tabla 3.3 se resumen los parámetros analizados para el caso de  $Re = 500$ .

La Fig. 3.4 muestra los resultados obtenidos para  $Re = 1000$ , comparando las dos metodologías implementadas en este estudio. En el gráfico, se observa la evolución temporal del coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) para ambas técnicas. En relación a los casos de  $Re = 100$  y  $Re = 500$ , se aprecian mayores diferencias en la fase y en la amplitud. Al igual que en los casos anteriores, los coeficientes de arrastre y sustentación, así como el



**Figura 3.3:** a) Evolución temporal del coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) para las dos metodologías consideradas, en el caso de  $Re = 500$ . b) Convergencia de los coeficientes hidrodinámicos ( $C_L$  y  $C_D$ ) comparados con la técnica *fitted* como referencia.

| $\Delta x$ | $N/D$ | $\overline{C_D}$ | $\overline{C_D^*}$ | $ e_{Drag} $ | $\overline{C_L}$ | $\overline{C_L^*}$ | $ e_{Lift} $ | $\overline{S_t}$ | $\overline{S_t^*}$ | $ e_{Strouhal} $ |
|------------|-------|------------------|--------------------|--------------|------------------|--------------------|--------------|------------------|--------------------|------------------|
| 0.0625     | 16    | 1.4365           | -                  | 0.025        | 0.67829          | -                  | 0.15374      | 0.22214          | -                  | 3.34e-3          |
| 0.03125    | 32    | 1.4504           | -                  | 0.0111       | 0.79572          | -                  | 0.03631      | 0.22908          | -                  | 3.6e-3           |
| 0.015625   | 64    | 1.4589           | 1.4615             | 2.6e-3       | 0.82264          | 0.83203            | 9.39e-3      | 0.22813          | 0.22548            | 2.65e-3          |

**Tabla 3.3:** Resultados para  $Re = 500$  mostrando los coeficientes de arrastre ( $\overline{C_D}$ ) y sustentación ( $\overline{C_L}$ ) junto con sus errores absolutos frente a los valores de referencia  $\overline{C_D^*}$  y  $\overline{C_L^*}$  obtenidos con la técnica *fitted*. También se incluye el número de Strouhal ( $\overline{S_t}$ ) y su error, evaluando la convergencia según el refinamiento de la malla ( $\Delta x$ ).

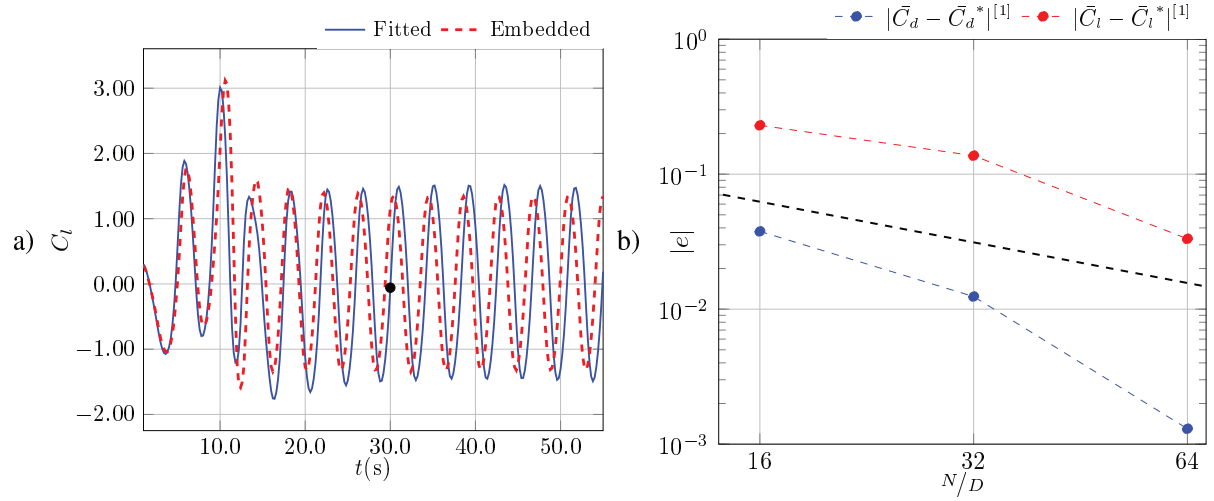
número de Strouhal y los correspondientes errores, son resumidos en la Tabla 3.4.

| $\Delta x$ | $N/D$ | $\overline{C_D}$ | $\overline{C_D^*}$ | $ e_{Drag} $ | $\overline{C_L}$ | $\overline{C_L^*}$ | $ e_{Lift} $ | $\overline{S_t}$ | $\overline{S_t^*}$ | $ e_{Strouhal} $ |
|------------|-------|------------------|--------------------|--------------|------------------|--------------------|--------------|------------------|--------------------|------------------|
| 0.0625     | 16    | 1.5370           | -                  | 0.0377       | 0.82979          | -                  | 0.23021      | 0.23337          | -                  | 4.67e-3          |
| 0.03125    | 32    | 1.5871           | -                  | 0.0124       | 0.92287          | -                  | 0.13713      | 0.24315          | -                  | 5.11e-3          |
| 0.015625   | 64    | 1.5760           | 1.5747             | 1.3e-3       | 1.0268           | 1.06               | 0.0332       | 0.23723          | 0.23804            | 8.1e-4           |

**Tabla 3.4:** Resultados para  $Re = 1000$  mostrando los coeficientes de arrastre ( $\overline{C_D}$ ) y sustentación ( $\overline{C_L}$ ) junto con sus errores absolutos frente a los valores de referencia  $\overline{C_D^*}$  y  $\overline{C_L^*}$  obtenidos con la técnica *fitted*. También se incluye el número de Strouhal ( $\overline{S_t}$ ) y su error, evaluando la convergencia según el refinamiento de la malla ( $\Delta x$ ).

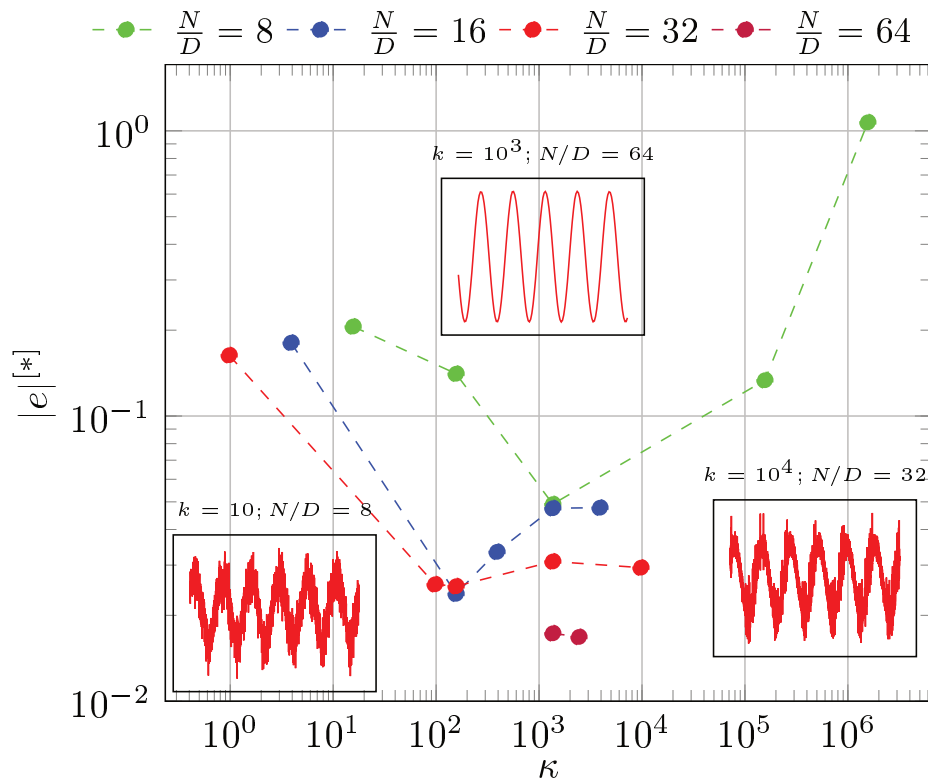
Este caso de estudio permite evaluar la consistencia y estabilidad de las soluciones numéricas. Además, se aprecia la tendencia convergente de los coeficientes hidrodinámicos conforme se refina la malla y se comparan con los resultados de la técnica *fitted*, que sirve como referencia de alta precisión. Este análisis demuestra la capacidad de la técnica embebida para aproximarse a los resultados obtenidos con metodologías tradicionales, resaltando su eficacia en la resolución de problemas de interacción fluido-estructura.

En lo referido a la sensibilidad del parámetro  $\kappa$  en el término de Darcy de la técnica embebida, se realiza un análisis variando el número de celdas por diámetro ( $\frac{N}{D}$ ) y evaluando el error absoluto con respecto a la solución de referencia. Los resultados son representados en la Fig. 3.5. Asimismo, en la figura se muestra la inestabilidad de la fuerza hidrodinámica en el tiempo para algunos casos seleccionados. En la gráfica se aprecia una región de error absoluto mínimo en un rango de valores de  $\kappa$ , tal que valores mayores o menores



**Figura 3.4:** a) Evolución temporal del coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) para las dos metodologías consideradas, en el caso de  $Re = 1000$ . b) Convergencia de los coeficientes hidrodinámicos ( $C_L$  y  $C_d$ ) comparados con la técnica *fitted* como referencia.

producen pérdida de precisión y, en algunos casos, inestabilidad de la solución.



**Figura 3.5:** Estudio de sensibilidad del parámetro  $\kappa$  en función del número de celdas por diámetro ( $\frac{N}{D}$ ), evaluando el error absoluto. También se muestra la inestabilidad de la fuerza en el tiempo para la metodología embebida, evidenciando el impacto de los diferentes valores de  $\kappa$  y el nivel de refinamiento de la malla.



### 3.4. Simulación de una esfera oscilante dentro de un dominio cúbico

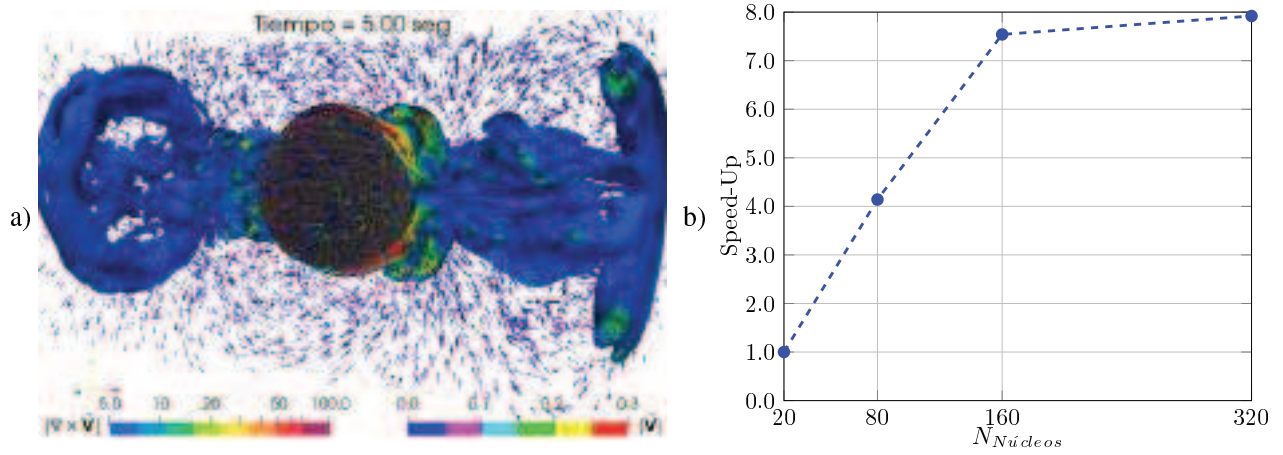
Se evaluó la condición de contorno embebida mediante la simulación de una esfera oscilante con movimiento impuesto en el software *Code Saturne*. El dominio cúbico de  $L = 0.38$  m se discretizó con una malla estructurada de 8 millones de celdas ( $\Delta x = 0.0019$  m), resultando en  $N_{\text{Celdas}} = 200$  celdas por lado. El movimiento de la esfera, con un diámetro  $D = 0.1$  m, fue impuesto de forma oscilante con una amplitud  $A = 0.05$  m y una frecuencia  $f = 0.9$  Hz. Se utiliza un coeficiente de penalización  $k = 10^5$  para representar la esfera sumergida. El fluido newtoniano tiene densidad  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> y una viscosidad dinámica  $\mu = 0.001$  Pa · s. Se empleó un paso de tiempo  $\Delta t = 0.001$  s. El campo de presión fue preconditionado y resuelto con un método multigrid (k-cycle), mientras que el campo de velocidades se resolvió con BiCG estabilizado preconditionado con Jacobi.

El speedup,  $S_p = \frac{T_1}{T_p}$ , mide la mejora del rendimiento en función del número de nodos  $P = 1, 4, 8, 16$  (20 a 320 núcleos). Los nodos de cómputo están equipados con procesadores Intel Xeon E5-2650 v3, que cuentan con 2 CPU de 10 núcleos cada una. La eficiencia paralela se define como  $E_p = \frac{S_p}{P}$  y el rendimiento por núcleo como  $\eta_{\text{Núcleo}} = \frac{N_{\text{Celdas}}}{N_{\text{Núcleo}} \cdot \bar{T}}$ , donde  $\bar{T}$  es el tiempo promedio para la resolución de sistemas lineales, reconstrucción de gradientes y cálculo de fuerzas.

La Tabla 3.5 presenta los resultados del análisis de eficiencia computacional, y la Figura 3.6b) muestra el speedup del caso. En ambas representaciones se aprecia que el método tiene buena escalabilidad al menos hasta 50,000 celdas por núcleo, y que destinar menor cantidad de celdas por núcleo no constituye una ventaja en términos de tiempos de ejecución.

| $P$ | $N_{\text{Núcleo}}$ | $\bar{T}$ (s) | $S_p$ | $E_p$ | $\frac{N_{\text{Celdas}}}{N_{\text{Núcleo}}}$ | $\eta_{\text{Núcleo}} \left( \frac{\text{Celdas}}{\text{Núcleo} \cdot \text{s}} \right)$ |
|-----|---------------------|---------------|-------|-------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | 20                  | 11.65         | 1.00  | 1.00  | 400,000                                       | 34,325                                                                                   |
| 4   | 80                  | 2.81          | 4.14  | 1.04  | 100,000                                       | 35,538                                                                                   |
| 8   | 160                 | 1.55          | 7.54  | 0.94  | 50,000                                        | 32,359                                                                                   |
| 16  | 320                 | 1.47          | 7.92  | 0.49  | 25,000                                        | 16,986                                                                                   |

**Tabla 3.5:** Eficiencia computacional para el caso de una esfera con movimiento impuesto en un dominio de fluidos 3D.



**Figura 3.6:** a) Fotograma extraído del problema de la esfera móvil sumergida, resuelto con volúmenes finitos utilizando una técnica embebida para la representación del objeto sumergido. b) Speedup de la técnica embebida en un problema de boya esférica móvil 3D. Dominio computacional de 8 millones de celdas.

### 3.5. Vasos comunicantes bajo imposición de movimiento con *baffle*

Se utiliza un tanque de acrílico dividido en dos compartimentos internos por una pared vertical central, representado en la Fig.2.3, el cual es montado sobre una mesa vibratoria y sometido a un movimiento oscilatorio controlado, con una amplitud de  $A = 10$  mm y una frecuencia de  $f = 1$  Hz. Los compartimentos están conectados mediante una apertura inferior,  $h_A$ , la cual varía entre 0 mm y 20 mm. Un esquema representativo del caso se encuentra en la Fig. 1.3.

En este estudio numérico, se analiza la agitación de un estanque dividido en su base bajo un movimiento impuesto de tipo sinusoidal [93, 92]. Los resultados de la simulación se comparan con observaciones experimentales previas [94]. Mediante un análisis espectral, utilizando la transformada discreta de Fourier, se determina la frecuencia natural del sistema, descrita en [94, 92]. Las frecuencias que se corresponden con los primeros modos de cada estanque se presentan en la Tabla 3.6 y se ajustan a la expresión:

$$\omega_{ij}^2 = gk_{ij} \tanh \left( \pi \sqrt{\frac{i^2}{L_x^2} + \frac{j^2}{L_y^2}} H_{Fill} \right),$$

utilizada en [4, 57, 25]. Para el caso de una pared divisoria completamente cerrada, la frecuencia natural es de 1.98 Hz, lo que corresponde a un recipiente cuadrado de 20 cm  $\times$  20 cm con un nivel de llenado de 27.5 cm. Sin la pared divisoria, la frecuencia natural es de 1.37 Hz, correspondiente a un recipiente cuadrado de 40.5 cm  $\times$  20 cm con el mismo nivel de llenado.

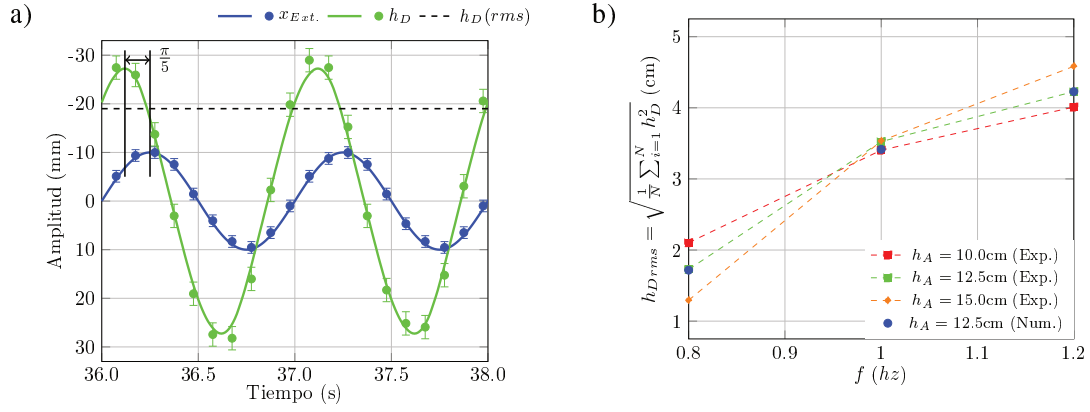
| Cavidad | Analítica | Experimental |
|---------|-----------|--------------|
| 20x20   | 1.98      | 2.0          |
| 40.5x20 | 1.37      | -            |

**Tabla 3.6:** Frecuencias naturales: comparación entre los resultados analíticos y las mediciones experimentales realizadas con sensores ultrasónicos.

En una primera aproximación, se estudia la dinámica de la superficie libre sin la presencia de cuerpos sumergidos, utilizando técnicas numéricas basadas en elementos finitos estabilizados (FEM/SUPG). La Fig. 3.7a) muestra la diferencia en la altura de la superficie libre entre las dos cavidades y el movimiento de la mesa para dos períodos, una vez que el sistema se encuentra en régimen, es decir, habiendo superado el transitorio inicial. Adicionalmente, se analiza la dinámica de la superficie libre mediante el método de volúmenes finitos (FVM/VOF). La Fig. 3.7b) presenta la diferencia de altura  $h_D$  entre las cavidades para distintas frecuencias, comparando los resultados experimentales con las simulaciones numéricas. La Tabla 3.7 muestra el error entre ambas metodologías.

Los resultados experimentales previos, que muestran la relación entre  $h_D$  y  $h_A$  a diferentes niveles de llenado y frecuencias de agitación de la base normalizada  $x^* = \frac{h_D}{A}$ , se presentan en la Fig. 3.8.

En [17] se realizó un análisis de la eficiencia computacional para el problema de agitación en un estanque

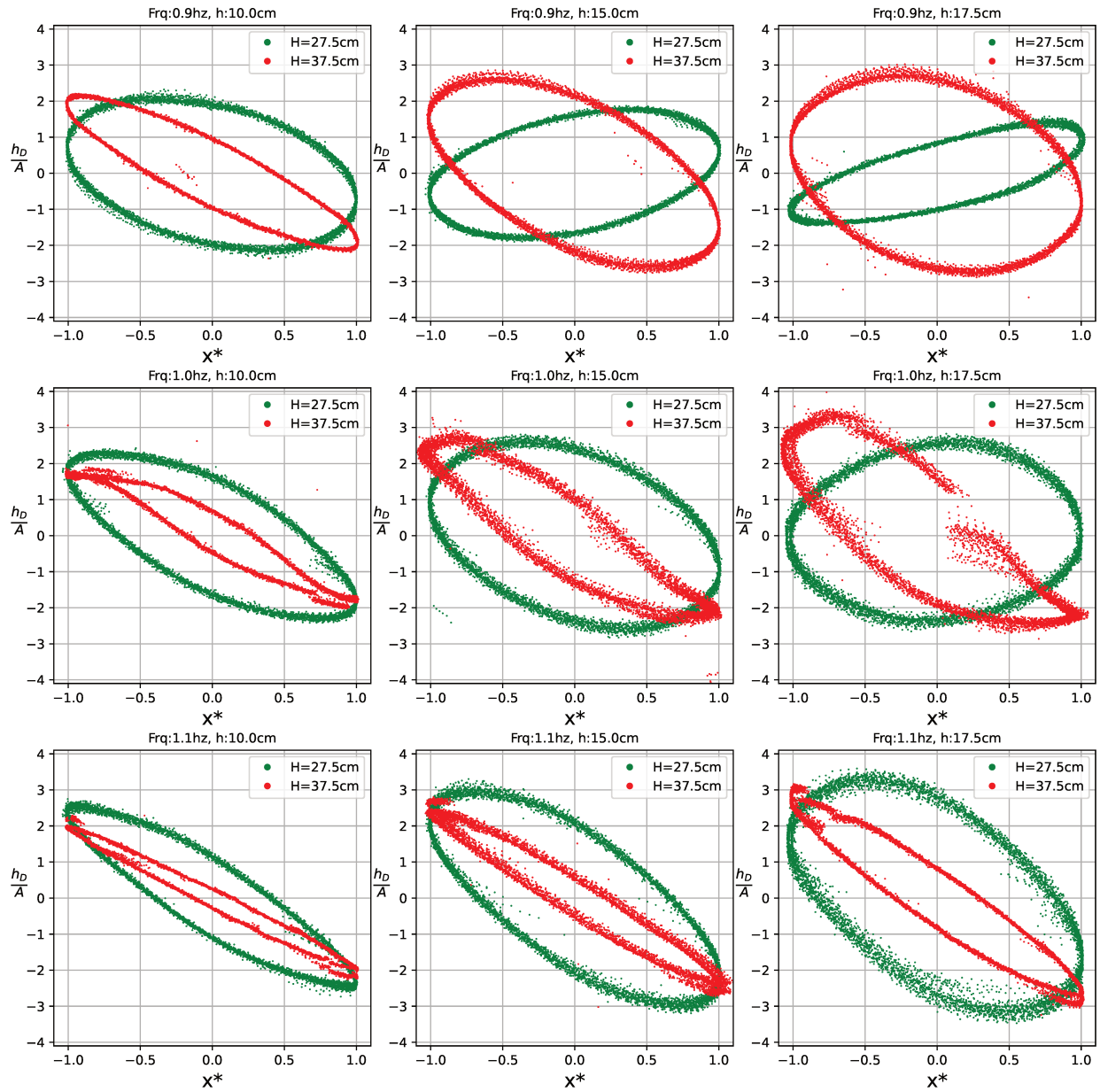


**Figura 3.7:** Resultados experimentales y numéricos de la dinámica de la superficie libre. a) Diferencia de altura  $h_{diff}$  entre los puntos de control CP1 y CP2, junto con el desplazamiento de la mesa  $x_{box}$  para los resultados experimentales (puntos) y numéricos FEM/SUPG (líneas). b) Comparación de resultados experimentales y simulaciones numéricas de la superficie libre mediante FVM/VOF.

| $f$ [Hz] | $h_D^{num}$ [cm] | $h_D^{exp}$ [cm] | $  \mathbf{e}_r  $ |
|----------|------------------|------------------|--------------------|
| 0.8      | 1.717            | 1.727            | 0.55 %             |
| 1.0      | 3.416            | 3.525            | 3.10 %             |
| 1.2      | 4.228            | 4.323            | 2.20 %             |

**Tabla 3.7:** Comparación del error cuadrático medio (rms) considerando los últimos 5 periodos de los 30 periodos simulados. Resultados numéricos obtenidos mediante FVM/VOF y datos experimentales medidos con sensores ultrasónicos.

rectangular en 3D, utilizando entre 20 y 320 núcleos de procesamiento y mallas de entre 1.5 y 23 millones de celdas. Se alcanzó un límite inferior de 22,000 celdas por núcleo por segundo en los nodos Intel Xeon del clúster *Pirayú*.



**Figura 3.8:** Figuras de Lissajous para el desplazamiento de la base a diferentes frecuencias de movimiento  $f = 0.9, 1.0, 1.1$  Hz, con una amplitud  $A = 20$  mm para dos niveles de llenado distintos:  $H = 27.5$  cm y  $H = 37.5$  cm.

### 3.6. Seguimiento de objetos mediante procesamiento de imágenes: determinación del momento de inercia de esferas

Con el objetivo de validar la técnica de observación utilizada mediante marcadores fiduciales y procesamiento de imágenes, y conocer además el momento de inercia de las esferas presentadas en la Tabla 2.2, se analiza el caso de una esfera rodando por el interior de un cilindro ahuecado [46].

El diámetro del cilindro exterior es de  $D = 304.8mm$  y largo  $L \rightarrow \infty$ , el diámetro de la esfera es de  $d = 50mm$ , el radio de la esfera es  $r = \frac{d}{2}$ , y la masa de la esfera es  $m = 68.8g$  con los marcadores incluidos. Se posicionan 26 marcadores sobre la superficie de la esfera del tipo ArUco  $4 \times 4$ ; por otra parte, se posicionan 6 marcadores sobre el perímetro circunferencial del cilindro de tipo ArUco  $7 \times 7$ . Ambos conjuntos de marcadores son cuadrados de lado  $10mm$ . La ecuación que describe el movimiento de una esfera rodando en el interior de un cilindro para pequeñas oscilaciones y condición de no deslizamiento permanente es

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) (R - r)^2 \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mg(R - r)\theta = 0 \quad (3.3)$$

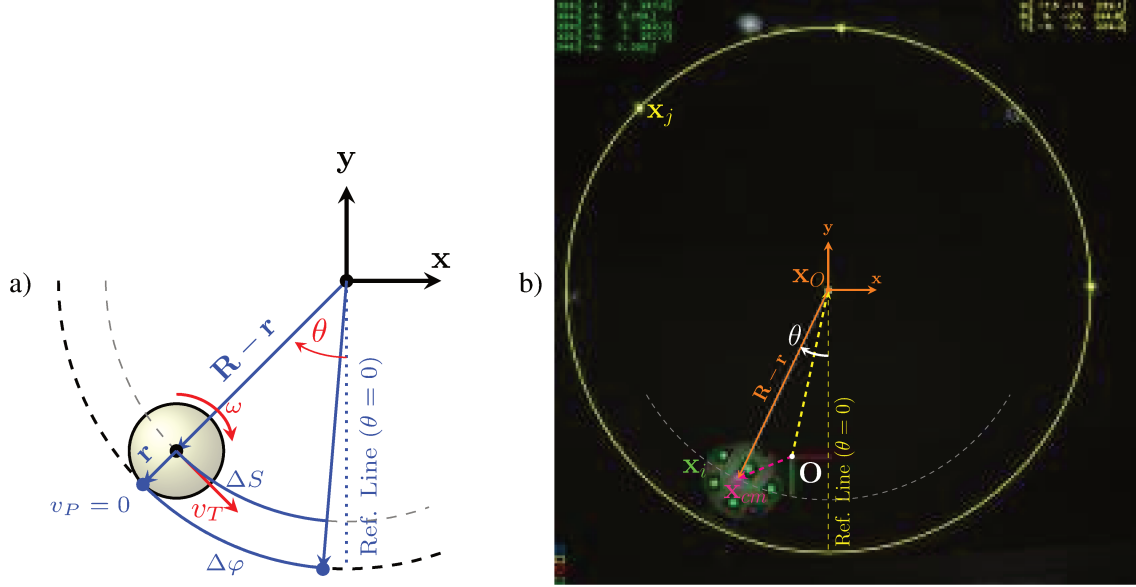
donde el momento de inercia de la esfera es  $I = \alpha I_o$ , con  $I_o$  el momento de inercia para una esfera maciza,  $I_o = \frac{2}{5}mr^2$  y  $\alpha$  es una constante de corrección entre  $[0, 1]$ .

La masa del sistema está dada por  $M = \left(m + \frac{I}{r^2}\right) (R - r)^2$ , mientras que la rigidez del sistema es  $K = mg(R - r)$ . Los parámetros armónicos son la frecuencia natural  $\omega_o = \sqrt{\frac{K}{M}}$ , el coeficiente de amortiguamiento  $\beta = \frac{b}{M}$ , y la relación de amortiguamiento  $\xi = \frac{b}{b_c}$ , con  $B_c = 2M\omega_o$ . La frecuencia amortiguada  $\omega_d$ , se obtiene a partir de la relación  $\omega_d = \omega_o\sqrt{1 - \xi^2}$ , en tanto que la constante de amortiguamiento  $b = 0.0011 \frac{Ns}{rad}$  es obtenida mediante ajuste con los datos experimentales. La solución de la Ec. 3.3 corresponde a un oscilador armónico amortiguado  $Ae^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \phi)$  se obtiene numéricamente utilizando un método de Runge-Kutta (RK44). Esta solución se utiliza como referencia para un posterior análisis. La Tabla 3.8 señala la comparación de los parámetros armónicos ajustados.

| Parametro                      | Símbolo                                 | Unidad | Ec. (3.3) | $\theta$ Ajuste | $\omega$ Ajuste |
|--------------------------------|-----------------------------------------|--------|-----------|-----------------|-----------------|
| Coef. momento de inercia       | $\alpha = \frac{I}{I_o}$                | -      | 0.955     | -               | -               |
| Frecuencia Natural             | $\omega_o = \sqrt{\frac{K}{M}}$         | Hz     | 1.188     | -               | -               |
| Coeficiente de amortiguamiento | $\beta = \frac{B}{2M}$                  | Ns     | 0.356     | 0.348           | 0.436           |
| Relación de amortiguamiento    | $\xi = \frac{B}{B_c}, B_c = 2M\omega_o$ | -      | 0.048     | -               | -               |
| Frecuencia amortiguada         | $\omega_d = \omega_o\sqrt{1 - \xi^2}$   | Hz     | 1.186     | 1.181           | 1.168           |

**Tabla 3.8:** Parámetros armónicos para la esfera oscilando en el interior del cilindro.

Acorde al esquema de la Fig. 3.9a), El arco recorrido que describe el punto de contacto entre la esfera y el cilindro exterior es  $\Delta\varphi = r\Delta\omega = R\Delta\theta$ , para pequeños desplazamientos, por lo que entre dos instantes de



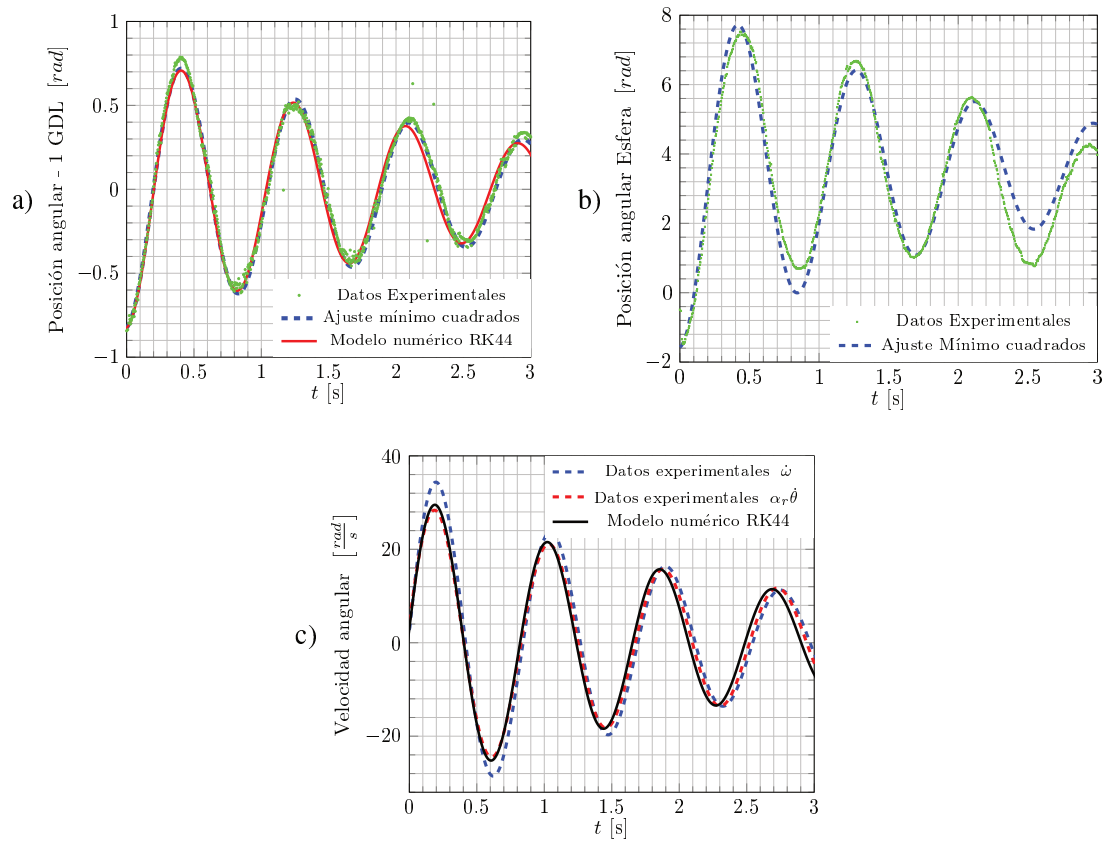
**Figura 3.9:** a) Esquema del problema de la esfera rodando sobre cilindro. b) Comparación analítica/numérica con datos experimentales obtenidos del procesamiento de imágenes.

tiempo es  $\alpha_{r_1} = \frac{R}{r}$ , y  $\hat{\alpha}_{r_1} = \frac{\Delta\omega_{exp.}}{\Delta\theta_{exp.}}$ . La velocidad tangencial en el centro de la esfera, en el plano y para un modelo de un grado de libertad, se puede aproximar como  $v_T = \dot{\theta}(R - r)$ . Además, asumiendo que la esfera rueda sin deslizar, la condición cinemática es  $v_p = \dot{\theta}(R - r) + \dot{\omega}r = 0$ , y por lo tanto  $\dot{\omega} = -\alpha_{r_2}\dot{\theta}$  con  $\alpha_{r_2} = \left(\frac{R}{r} - 1\right)$ . En estas expresiones,  $\dot{\theta}$  se obtiene mediante diferencias finitas centradas del ajuste por mínimos cuadrados basado en el algoritmo de Levenberg-Marquardt (LS-LM) sobre los datos experimentales en conjunto con la solución analítica de la Eq. (3.3). Los resultados se muestran en la Fig. 3.10 c). La Tabla 3.9 resume un análisis de error del coeficiente  $\hat{\alpha}_{r_2} = -\frac{\dot{\omega}_{exp.}}{\dot{\theta}_{exp.}}$  para dos conjuntos de datos experimentales, en estado estacionario. Del procesamiento de imágenes, utilizando información de los marcadores del contorno

|                                    | Set | MAE  | MSE  | NRMSE ( % ) |
|------------------------------------|-----|------|------|-------------|
| $\alpha_{r_1}, \hat{\alpha}_{r_1}$ | 1   | 0.34 | 0.11 | -           |
|                                    | 2   | 0.36 | 0.13 | -           |
| $\alpha_{r_2}, \hat{\alpha}_{r_2}$ | 1   | 0.87 | 0.80 | 4.59        |
|                                    | 2   | 0.69 | 0.51 | 4.87        |

**Tabla 3.9:** Error en el cálculo de rotaciones para la esfera rodando en el interior del cilindro ahuecado

del cilindro exterior, se determinó un 3 % de error en el radio con respecto al de referencia. Se atribuye este error a que se utiliza una aproximación de mínimos cuadrados con 3 o 4 marcadores del cilindro exterior a una circunferencia, que no incluye la deformación o aplastamiento del cilindro por su propio peso. La Fig. 3.9b) muestra un fotograma de los 1050 fotogramas analizados junto con la solución analítica/numérica, donde el grado de libertad es el ángulo  $\theta$  entre el sistema de referencia y la coordenada del centro del cilindro. El centro de la esfera se estima con el centroide de todos los marcadores sobre la esfera encontrados en cada fotograma. El centro del sistema de referencia corresponde al centro del cilindro.



**Figura 3.10:** Comparación de resultados analíticos y experimentales obtenidos mediante procesamiento de imágenes a) Posición angular acorde al modelo de 1 grado de libertad de la Ec.(3.3). b) Posición angular de la esfera. c) Velocidad angular de la esfera .



## Capítulo 4

# Conclusiones

### 4.1. Conclusiones técnicas

Esta Tesis presenta métodos computacionales para la simulación de cuerpos rígidos inmersos en fluidos viscosos e incompresibles, en régimen isotérmico. Las conclusiones que se exponen brevemente en esta sección resumen los hallazgos presentados en los trabajos publicados.

En primer término, se presentó un modelo numérico robusto y preciso para simular la dinámica de una esfera rígida en un sistema de vasos comunicantes sujeto a sloshing. Este modelo se basa en el acoplamiento de un solver de Navier-Stokes para dos fases y un solver de dinámica de sólidos rígidos, el cual fue validado utilizando datos experimentales originales. El flujo con superficie libre fue resuelto empleando un método de elementos finitos con estabilización tipo SUPG, en el cual la superficie libre se representa mediante el valor nulo de una función de conjunto de niveles, apto para computación de alto desempeño. La técnica provee el estado del fluido en términos de velocidad y de presión en los puntos del dominio, de manera tal de que las fuerzas del fluido sobre un cuerpo esférico en movimiento pueden estimarse a partir de ellas. Específicamente, se evaluó el impacto de diferentes modelos clásicos utilizados para describir el coeficiente de arrastre, la masa añadida y los efectos de pared en la precisión de la simulación. Conocidas las fuerzas del fluido sobre la esfera, se empleó un método numérico para resolver la dinámica de ese cuerpo rígido, al que se incorporaron reglas para la consideración del contacto con las paredes del recipiente. Este acoplamiento facilitó la solución de el problema de caída de una esfera en un medio fluido como caso de validación. Luego, esta estrategia de acoplamiento en una única dirección permitió el análisis del movimiento de una esfera sumergida en un sistema de vasos comunicantes bajo agitación armónica, y compararla con el análisis estadístico del estudio experimental realizado con anterioridad. Además, se presentó un nuevo conjunto de datos experimentales sobre el movimiento de una esfera en el sistema de vasos comunicantes bajo agitación en el cual el comportamiento de la esfera es relevado mediante técnicas de procesamiento de imágenes. Adicionalmente, se propuso una metodología estadística para sistematizar los resultados experimentales,

dando lugar a un análisis más profundo y una comparación más precisa con las simulaciones numéricas y la comprensión de la física del problema. Los resultados fueron publicados en [92].

En una segunda etapa, se trabajó en una formulación de sólido embebido con el propósito de establecer una interacción fluido-estructura en dos direcciones, esto es, que la dinámica del cuerpo rígido sumergido influya en el campo del fluido. Para ello, se incorporó un término equivalente al del flujo en un medio permeable en las ecuaciones de Navier-Stokes, que se activa únicamente en la región ocupada por el sólido dentro del dominio, dando lugar a una representación escalonada del cuerpo. Esta técnica es robusta y eficiente, y se resuelve numéricamente mediante un método de volúmenes finitos en tres dimensiones espaciales. La determinación de las fuerzas hidrodinámicas sobre el cuerpo sumergido se realiza mediante la integración del término de Darcy, activo únicamente en la región ocupada por el sólido gracias a la máscara binaria, dentro del resolutor de Navier-Stokes. Esta formulación permite simular la interacción fluido-estructura sin necesidad de recurrir a mallas móviles o métodos de interfaz complejos, lo que simplifica la implementación y reduce el costo computacional, siendo apta para geometrías generales del cuerpo inmerso. La metodología es validada presentando diversos casos de estudio con soluciones analíticas conocidas, como el flujo de Poiseuille y los problemas de Stokes, para verificar la precisión y convergencia del método [96]. Se analizó la convergencia en malla de la técnica, así como también el rango de valores apropiado para el parámetro de permeabilidad. La escalabilidad del método fue estudiada para grillas de hasta 8 millones de celdas en un cluster de HPC, para el caso del movimiento de una esfera en el interior de un dominio cúbico.

Paralelamente, se trabajó en una técnica de seguimiento de objetos con el propósito de relevar datos experimentales del movimiento de cuerpos, sumergidos o no, con el propósito de proveer datos precisos apropiados para validar los métodos numéricos de interés. Esta estrategia consiste en la detección de marcadores tipo ArUco, cuya posición y orientación se relevan mediante el análisis de fotogramas, previa calibración del algoritmo con los parámetros de la cámara y de los marcadores identificados. El procesamiento de imágenes para la detección del movimiento fue aplicado al caso de oscilación de una esfera en el interior de un cilindro hueco, en rodadura, sometida únicamente a la acción de la gravedad, y permitió estimar un rango de error esperado para el desplazamiento y rotación de una esfera.

## **4.2. Problemas abiertos: perspectivas, líneas de investigación a futuro.**

En esta sección se exponen las observaciones que surgieron durante el desarrollo presente trabajo de tesis y que no fueron publicadas ni exploradas extensivamente. Este conjunto de problemas abiertos no configuraron la hipótesis inicial del trabajo.

### **Caracterización del oleaje y efectos de la apertura en la dinámica de la superficie en un estanque dividido.**

La caracterización del oleaje y la dinámica de la superficie libre ha permitido avanzar en la comprensión

de los fenómenos asociados al movimiento de fluidos confinados y sus aplicaciones en diferentes contextos, como los *Wave Energy Converters* (WECs) y los *Tuned Liquid Dampers* (TLDs). No obstante, es necesario extender el estudio presentado en la Fig. 3.8, incluyendo validaciones adicionales como las abordadas en el Cap.A.4.2, donde se analizan los efectos de la apertura inferior y el nivel de llenado sobre la dinámica de la superficie libre en un estanque dividido. En este contexto, es relevante estudiar la independencia del nivel de llenado, así como los efectos tridimensionales en la superficie libre, para contribuir a los trabajos de [18, 99, 4, 57].

Otra línea de investigación relevante es el análisis más profundo de la interacción fluido-estructura en sistemas tridimensionales [54, 61], donde el comportamiento de la superficie libre se ve afectado por la complejidad geométrica del tanque [25] y las propiedades del fluido [10]. Los efectos tridimensionales y la influencia de la apertura en la distribución de presiones y velocidades requieren un estudio para su mejor comprensión, especialmente en aplicaciones donde el control de la resonancia y el amortiguamiento es crítico, como en los TLDs. Además, las técnicas numéricas desarrolladas en esta tesis pueden aplicarse para investigar la optimización de convertidores de energía de onda oscilante (*Oscillating Wave Converters*, OWC), mejorando su capacidad de absorción de energía a través de un diseño más eficiente de la cavidad resonante y la geometría de apertura. Este enfoque permitiría evaluar el impacto de la forma y el tamaño de las aperturas en la captura de energía, contribuyendo a un diseño más robusto de WECs. Por último, se plantea como línea de investigación futura la implementación de simulaciones en escenarios reales con efectos no lineales y condiciones de borde más complejas. En particular, la validación experimental en sistemas a mayor escala, con la inclusión de parámetros como la interacción con las paredes laterales y la presencia de múltiples aperturas o múltiples objetos sumergidos. En resumen, las líneas de investigación futuras se centran en la extensión de los estudios actuales hacia problemas tridimensionales más complejos, la optimización de dispositivos WECs y TLDs, y la validación de los modelos numéricos en entornos reales.

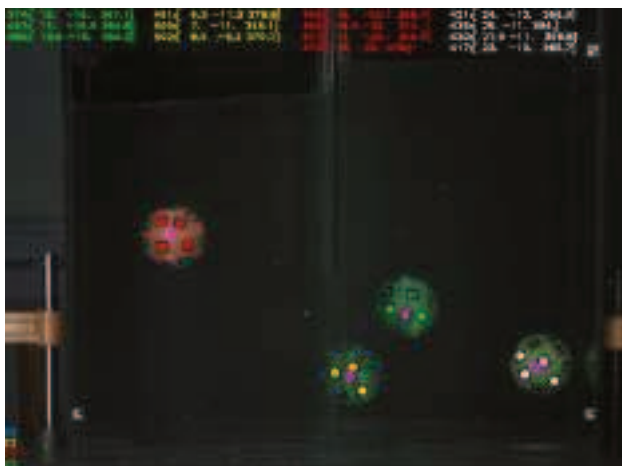
**Influencia de la capa límite y el efecto de la pared en la dinámica de una esfera con densidad neutra sumergida en agua: desafíos en la representación de penalización para fuerzas de elevación inducidas por corte y simulaciones en computación de alto rendimiento.**

El estudio presentado en [92] propone una expresión para considerar los efectos de la pared y la distribución del campo de velocidades sobre la dinámica de la esfera. La metodología desarrollada incluye el uso de técnicas embebidas para capturar la interacción entre la esfera y el fluido, haciendo posible simular efectos complejos como el gradiente de velocidad y la proximidad a las paredes. Sin embargo, es necesario extender este estudio a la metodología propuesta en [96]. El análisis de las fuerzas de sustentación, como se aborda en el estudio de [12], sigue siendo un campo activo de investigación, especialmente cuando se consideran flujos de cizallamiento lineal. Este análisis proporciona una comprensión más profunda de las fuerzas de sustentación inerciales y su impacto en la migración de partículas cercanas a superficies sólidas. Por otro

lado, el trabajo de [29] introduce una herramienta computacional que simula interacciones entre sólidos y flujos multifásicos. Utiliza métodos como el dominio ficticio y técnicas de reconstrucción de interfaces para capturar la interacción de cuerpos rígidos con dos fluidos. Este enfoque es particularmente relevante para modelar las fuerzas de sustentación inducidas por corte en flujos con gradientes de velocidad, y puede ser adaptado para investigar los efectos de la capa límite en la dinámica de partículas. En el estudio de [61], se desarrolla una técnica embebida en un contexto Euleriano utilizando un método de Volumen de Fluido para capturar de manera eficiente la interacción entre dos fluidos y cuerpos rígidos en movimiento. Este método computacional puede ser integrado en futuros estudios para representar de manera más detallada las fuerzas hidrodinámicas en mallas estructuradas [79, 49, 101]. Estas técnicas son utilizadas para resolver, el conocido proceso *Drafting-Kissing-Tumbling* (DKT) entre dos esferas en caída libre, observado por [85], como caso principal de estudio en trabajos actuales [88, 20, 78, 90]. Estas validaciones permiten simular numéricamente casos de múltiples cuerpos sumergidos. [98, 61] o modulación de turbulencia [91].

**Seguimiento y estimación de la pose de sólidos rígidos mediante visión artificial y marcadores fiduciales: Avances y desafíos en condiciones desfavorables.**

El desarrollo de modelos avanzados para el seguimiento y la estimación de la orientación de sólidos rígidos presentados en la Sec. 2.2.2 y validado en la Sec. 3.6, son técnicas que se pueden ampliar y mejorar mediante visión artificial y marcadores fiduciales para abordar escenarios complejos. Entre estos desafíos se incluyen la oclusión total, la diferenciación precisa de la profundidad, y la distorsión causada por la refracción en medios como el agua, donde los objetos sumergidos presentan complicaciones adicionales. Los marcadores fiduciales, adosados a los objetos, deben mantener consistencia en resolución, tamaño y orientación para garantizar una detección robusta. Sin embargo, la refracción del agua introduce distorsiones ópticas [38] que afectan la percepción de estos marcadores, dificultando el seguimiento. La investigación se centra en la implementación de sistemas de cámaras duales y técnicas de visión estereoscópica [50, 44], que permiten una reconstrucción tridimensional precisa mediante la utilización de la geometría epipolar y la restricción de coplanaridad [26]. Estos enfoques buscan mejorar la precisión y robustez del seguimiento, incluso en condiciones adversas, mediante el uso de modelos proyectivos avanzados, capaces de corregir las distorsiones inducidas por la refracción en entornos acuáticos.



**Figura 4.1:** Detección de múltiples esferas sumergidas en diferentes planos de profundidad.

### 4.3. Contribuciones científicas derivadas del Doctorado

A continuación se listan las contribuciones científicas derivadas del desarrollo del presente Doctorado. Se separan aquellas publicaciones que derivan directamente del desarrollo de la Tesis, como las que surgieron de otras actividades de investigación durante el Doctorado.

#### 4.3.1. Publicaciones en revistas indexadas

- *Numerical and experimental study of the motion of a sphere in a communicating vessel system subject to sloshing.* Zamora, E., Battaglia, L., Storti, M., Cruchaga, M., Ortega, R. (2019). *Physics of Fluids*, 31(8), 087106. .
- *A plausible extension of standard penalty, streamline upwind and immersed boundary techniques to the improved element-free Galerkin-based solution of incompressible Navier–Stokes equations.* Hostos, Juan C Álvarez; Cruchaga, Marcela A; Fachinotti, Víctor D; Carrillo, Javier A Zambrano; Zamora, Esteban. (2020). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 372, 113380..
- *Embedded finite volume technique for fluid/rigid-body interaction problems.* Zamora, E., Battaglia, L., Cruchaga, M., Storti, M. (2023). *Computers and Mathematics with Applications*..

#### 4.3.2. Presentaciones en congresos

- *Numerical simulation of fluid-structure interaction with many rigid bodies.* Mario Storti, Julián Medina, Esteban Zamora, Facundo Inzeo, Laura Battaglia, Marcela Cruchaga. 16th World Congress on Computational Mechanics and 4th Pan American Congress on Computational Mechanics (WCCM-PANACM), Julio de 2024, British Columbia, Canada.

- *Detección de objetos sumergidos mediante procesamiento de imágenes y simulación numérica con método embebido en computación de alto rendimiento.* Esteban Zamora, Marcela Cruchaga, Laura Battaglia, Mario Storti. 39° Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM XXXIX), Noviembre de 2023, Concordia-Salto, Argentina-Uruguay.
- *Numerical Modelling of Fluid Structure Interaction with Many Rigid Bodies.* Mario Storti, Facundo Inzeo, Julián Medina, Esteban Zamora, Laura Battaglia, Marcela Cruchaga. 39° Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM XXXIX), Noviembre de 2023, Concordia-Salto, Argentina-Uruguay.
- *Numerical Simulation of the Fluid-Structure interaction of Rigid Bodies using an Embedded Strategy.* Storti, M.; Medina, J.; Zamora Ramírez, E.; Battaglia, L.; Cruchaga, M. A.; 34th Parallel Computational Fluid Dynamics ParCFD. Mayo de 2023, Cuenca, Ecuador.
- *Análisis de un método embebido en volúmenes finitos para contornos inmersos.* Zamora Ramírez, E.; Battaglia, L.; Cruchaga, M. A.; Storti, M. 19th Jornadas de mecánica computacional (JMC XIX), 2021, Santiago, Chile.
- *Estudio de estabilidad del flujo alrededor de un cilindro a diferentes números de Reynolds mediante un método embebido.* Zamora Ramírez, E.; Storti, B.; Battaglia, L.; Cruchaga, M. A.; Storti, M. 24th Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF XXIV), Noviembre de 2019, Santa Fe, Argentina.
- *Numerical Simulation of Spheres Immersed in Viscous One- and Two-fluid Flows,* Battaglia, L., Zamora, E.A., Storti, M.A., Cruchaga, M.A., Ortega, R., 13th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XIII), 2nd Pan American Congress on Computational Mechanics (PANACM II), 2018, New York, Estados Unidos.
- *Simulación Numérica de un cuerpo rígido inmerso en un flujo con superficie libre.* Zamora Ramírez, E.; Battaglia, L.; Cruchaga, M. A.; Storti, M. 12th Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM XII), Noviembre de 2018, San Miguel de Tucumán, Argentina.
- *Simulación numérica de agitación con level set aplicado a un caso de estudio.* Zamora Ramírez, E.; Cruchaga, M. A.; Battaglia, L.; Storti, M. 23rd Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF XXIII), Noviembre de 2017, La Plata, Argentina.

# Bibliografía

- [1] H Norman Abramson, W-H Chu y Daniel D Kana. *Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers*. Inf. téc. 1966.
- [2] Philippe Angot, Charles-Henri Bruneau y Pierre Fabrie. “A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows”. En: *Numerische Mathematik* 81.4 (feb. de 1999), págs. 497-520. ISSN: 0945-3245. DOI: <https://doi.org/10.1007/s002110050401>.
- [3] Frédéric Archambeau, Namane Méchitoua y Marc Sakiz. “Code Saturne: A Finite Volume Code for the computation of turbulent incompressible flows - Industrial Applications”. En: *International Journal on Finite Volumes* 1.1 (feb. de 2004), <http://www.lap.univ-mrs.fr/IJFV/spip.php?article3>. URL: <https://hal.science/hal-01115371>.
- [4] L. Battaglia et al. “Numerical modelling of 3D sloshing experiments in rectangular tanks”. En: *Applied Mathematical Modelling* 59 (jul. de 2018), págs. 357-378. DOI: [10.1016/j.apm.2018.01.033](https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.01.033).
- [5] M Behr y T Tezduyar. “The shear-slip mesh update method”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 174.3-4 (1999), págs. 261-274.
- [6] Rachel D. Brown, Z. Warhaft y Greg A. Voth. “Acceleration Statistics of Neutrally Buoyant Spherical Particles in Intense Turbulence”. En: *Phys. Rev. Lett.* 103 (19 nov. de 2009), pág. 194501. DOI: [10.1103/PhysRevLett.103.194501](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.194501). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.194501>.
- [7] S-G Cai et al. “Moving immersed boundary method”. En: *Int J Numer Meth Fluids* 85 (2017), págs. 288-323. DOI: [10.1002/flid.4382](https://doi.org/10.1002/flid.4382).
- [8] Antoni Calderer, Seokkoo Kang y Fotis Sotiropoulos. “Level set immersed boundary method for coupled simulation of air/water interaction with complex floating structures”. En: *Journal of Computational Physics* 277 (2014), págs. 201-227. DOI: [10.1016/j.jcp.2014.08.010](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.08.010).

- [9] PA Caron, MA Cruchaga y AE Larreteguy. “Study of 3D sloshing in a vertical cylindrical tank”. En: *Physics of Fluids* 30.8 (2018), pág. 82112. ISSN: 10897666. DOI: [10.1063/1.5043366](https://doi.org/10.1063/1.5043366). URL: <https://doi.org/10.1063/1.5043366>.
- [10] Ernesto Castillo et al. “An oil sloshing study: adaptive fixed-mesh ALE analysis and comparison with experiments”. En: *Computational Mechanics* 63 (2019), págs. 985-998.
- [11] Guoliang Chai et al. “Improving the accuracy of fictitious domain method using indicator function from volume intersection”. En: *Advances in Mathematical Physics* 2019 (2019), págs. 1-18. DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/5450313>.
- [12] Pradeep Cherukat, John B McLaughlin y David S Dandy. “A computational study of the inertial lift on a sphere in a linear shear flow field”. En: *International Journal of Multiphase Flow* 25.1 (1999), págs. 15-33.
- [13] Choeng Ryul Choi y Chang Nyung Kim. “Inertial migration and multiple equilibrium positions of a neutrally buoyant spherical particle in Poiseuille flow”. En: *Korean Journal of Chemical Engineering* 27 (2010), págs. 1076-1086.
- [14] Santiago D. Costarelli et al. “An embedded strategy for the analysis of fluid structure interaction problems”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 300 (2016), págs. 106-128. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.11.001>.
- [15] SD Costarelli et al. “An embedded strategy for the analysis of fluid structure interaction problems”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 300 (2016), págs. 106-128. ISSN: 00457825. DOI: [10.1016/j.cma.2015.11.001](https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.11.001). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2015.11.001>.
- [16] MA Cruchaga et al. “Numerical Modeling and Experimental Validation of Free Surface Flow Problems”. En: *Archives of Computational Methods in Engineering* 23.1 (2016), págs. 139-169. ISSN: 1886-1784. DOI: [10.1007/s11831-014-9138-4](https://doi.org/10.1007/s11831-014-9138-4).
- [17] Marcela Cruchaga et al. “Three-dimensional long term sloshing simulations”. Parallel Computational Fluid Dynamics, ParCFD. 2023.
- [18] Marcela A Cruchaga et al. “Finite element computation and experimental validation of sloshing in rectangular tanks”. En: *Computational Mechanics* 52.6 (2013), págs. 1301-1312. DOI: [10.1007/s00466-013-0877-0](https://doi.org/10.1007/s00466-013-0877-0).
- [19] Marcela A. Cruchaga et al. “Modeling the sloshing problem in a rectangular tank with submerged incomplete baffles”. En: *INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW* 26.3-4 (2016), págs. 722-744. ISSN: 0961-5539. DOI: [10.1108/HFF-08-2015-0315](https://doi.org/10.1108/HFF-08-2015-0315).



- [20] SM Dash y TS Lee. “Two spheres sedimentation dynamics in a viscous liquid column”. En: *Computers & Fluids* 123 (2015), págs. 218-234. DOI: [10.1016/j.compfluid.2015.10.003](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.10.003).
- [21] Arnab Kr De. “A diffuse interface immersed boundary method for complex moving boundary problems”. En: *Journal of Computational Physics* 366 (2018), págs. 226-251.
- [22] Nan Deng et al. “Low-order model for successive bifurcations of the fluidic pinball”. En: *Journal of fluid mechanics* 884 (2020), A37.
- [23] José G. Etse et al., eds. (San Miguel de Tucuman, Argentina). AMCA, nov. de 2018. ISBN: 2591-3522.
- [24] Jannette B Frandsen. “Sloshing motions in excited tanks”. En: *Journal of Computational Physics* 196.1 (2004), págs. 53-87. DOI: [10.1016/j.jcp.2003.10.031](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.10.031).
- [25] Tomás Gándara et al. “Experimental and numerical modeling of a sloshing problem in a stepped based rectangular tank”. En: *Physics of Fluids* 33.3 (mar. de 2021), pág. 033111. ISSN: 1070-6631. DOI: [10.1063/5.0044682](https://doi.org/10.1063/5.0044682). eprint: [https://pubs.aip.org/aip/pof/article-pdf/doi/10.1063/5.0044682/14139561/033111\\_1\\_online.pdf](https://pubs.aip.org/aip/pof/article-pdf/doi/10.1063/5.0044682/14139561/033111_1_online.pdf). URL: <https://doi.org/10.1063/5.0044682>.
- [26] Mercedes Garcia-Salguero y Javier Gonzalez-Jimenez. “Certifiable planar relative pose estimation with gravity prior”. En: *Computer Vision and Image Understanding* 239 (2024), pág. 103887.
- [27] Manuel Garcia-Villalba et al. “An efficient method for particle-resolved simulations of neutrally buoyant spheres”. En: *Computers & Fluids* 263 (2023), pág. 105936.
- [28] Sergio Garrido-Jurado et al. “Automatic generation and detection of highly reliable fiducial markers under occlusion”. En: *Pattern Recognition* 47.6 (2014), págs. 2280-2292.
- [29] Amirmahdi Ghasemi, Ashish Pathak y Mehdi Raessi. “Computational simulation of the interactions between moving rigid bodies and incompressible two-fluid flows”. En: *Computers & Fluids* 94 (2014), págs. 1-13. DOI: [10.1016/j.compfluid.2014.01.027](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.01.027).
- [30] Roland Glowinski et al. “A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows”. En: *International Journal of Multiphase Flow* 25.5 (1999), págs. 755-794.
- [31] D. Goldstein, R. Handler y L. Sirovich. “Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field”. En: *Journal of Computational Physics* 105.2 (1993). ISSN: 10902716. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1081>.
- [32] FA González, MA Cruchaga y DJ Celentano. “Analysis of flow past oscillatory cylinders using a finite element fixed mesh formulation”. En: *Journal of Fluids Engineering* 139.8 (2017), pág. 081202.
- [33] FA González et al. “Numerical study of flow past oscillatory square cylinders at low Reynolds number”. En: *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 75 (2019), págs. 286-299.

- [34] FA González Cornejo, MA Cruchaga y DJ Celentano. “Modelling low Reynolds number vortex-induced vibration problems with a fixed mesh fluid-solid interaction formulation”. En: *Physics of Fluids* 29.11 (2017), pág. 113601.
- [35] Bert M Haralick et al. “Review and analysis of solutions of the three point perspective pose estimation problem”. En: *International journal of computer vision* 13.3 (1994), págs. 331-356.
- [36] Cyril W Hirt y Billy D Nichols. “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”. En: *Journal of computational physics* 39.1 (1981), págs. 201-225. DOI: [10.1016/0021-9991\(81\)90145-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5).
- [37] Kai Hormann y Alexander Agathos. “The point in polygon problem for arbitrary polygons”. En: *Computational Geometry* 20.3 (2001), págs. 131-144. ISSN: 0925-7721. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0925-7721\(01\)00012-8](https://doi.org/10.1016/S0925-7721(01)00012-8).
- [38] Xiao Hu, François Lauze y Kim Steenstrup Pedersen. “Refractive Pose Refinement: Generalising the Geometric Relation between Camera and Refractive Interface”. En: *International Journal of Computer Vision* 131.6 (2023), págs. 1448-1476.
- [39] MI Idiart, AE Scarabino y MA Storti, eds. *ENIEF* (La Plata, Argentina). AMCA, nov. de 2017. ISBN: 2591-3522.
- [40] Mika Juntunen y Rolf Stenberg. “Nitsche’s method for general boundary conditions”. En: *Mathematics of computation* 78.267 (2009), págs. 1353-1374.
- [41] Michail Kalaitzakis et al. “Experimental Comparison of Fiducial Markers for Pose Estimation”. En: *2020 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. 2020, págs. 781-789. DOI: [10.1109/ICUAS48674.2020.9213977](https://doi.org/10.1109/ICUAS48674.2020.9213977).
- [42] Ho Chuen Kam, Ying Yu y Kin-hong Wong. “An Improvement on ArUco Marker for Pose Tracking Using Kalman Filter”. En: jun. de 2018, págs. 65-69. DOI: [10.1109/SNPD.2018.8441049](https://doi.org/10.1109/SNPD.2018.8441049).
- [43] Abdullah Abbas Kendoush, Abbas H. Sulaymon y Sawsan A.M. Mohammed. “Experimental evaluation of the virtual mass of two solid spheres accelerating in fluids”. En: *Exp. Therm. Fluid Sci.* 31.7 (2007), págs. 813-823. ISSN: 08941777. DOI: [10.1016/j.expthermflusci.2006.08.007](https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2006.08.007).
- [44] Hyunsuk Ko et al. “Robust uncalibrated stereo rectification with constrained geometric distortions (USR-CGD)”. En: *Image and Vision Computing* 60 (2017), págs. 98-114.
- [45] U Lacis, K Taira y S Bagheri. “A stable fluid-structure-interaction solver for low-density rigid bodies using the immersed boundary projection method”. En: *J. Comput. Physics* 305 (2016), págs. 300-318.

- [46] L.D. Landau, E.M. Lifshitz y J.B. Sykes. *Mechanics: Volume 1*. Course of theoretical physics. Elsevier Science, 1976. ISBN: 9780750628969. URL: <https://books.google.cl/books?id=e-xASAehg1sC>.
- [47] J Li et al. “Numerical study of laminar flow past one and two circular cylinders”. En: *Computers & fluids* 19.2 (1991), págs. 155-170.
- [48] R Löhner et al. “Adaptive embedded and immersed unstructured grid techniques”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.25-28 (2008), págs. 2173-2197.
- [49] Jacques Magnaudet y Micheline Abbas. “Near-wall forces on a neutrally buoyant spherical particle in an axisymmetric stagnation-point flow”. En: *Journal of Fluid Mechanics* 914 (2021), A18.
- [50] John Mallon y Paul F Whelan. “Projective rectification from the fundamental matrix”. En: *Image and Vision Computing* 23.7 (2005), págs. 643-650.
- [51] Kalaitzakis Michail et al. “Fiducial Markers for Pose Estimation”. En: *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 101.4 (2021).
- [52] Shahab Mirjalili et al. “Inverse asymptotic treatment: capturing discontinuities in fluid flows via equation modification”. En: *Journal of Computational Science* 73 (2023), pág. 102141.
- [53] R Mittal y G Iaccarino. “Immersed Boundary Methods”. En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 37.1 (2005), págs. 239-261. ISSN: 0066-4189. DOI: [10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743). arXiv: 1007.1228. URL: <http://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>.
- [54] Nikita Naik et al. “Wave energy extraction by an OWC device in the presence of a porous bottom”. En: *Energy Reports* 11 (2024), págs. 5602-5618. ISSN: 2352-4847. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.egy.2024.05.017>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352484724002968>.
- [55] D Neill, D Livelybrooks y R J Donnelly. “A pendulum experiment on added mass and the principle of equivalence”. En: *Am. J. Phys.* 75.3 (2007), págs. 226-229. ISSN: 00029505. DOI: [10.1119/1.2360993](https://doi.org/10.1119/1.2360993).
- [56] Giang T. Nguyen et al. “Resolved CFD–DEM coupling simulation using Volume Penalisation method”. En: *Advanced Powder Technology* 32.1 (2021), págs. 225-236. ISSN: 0921-8831. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ap.2020.12.004>.
- [57] Jonathan Núñez Aedo, Marcela Cruchaga y Ernesto Castillo del Barrio. “Study on the dependence with the filling level of the sloshing wave pattern in a rectangular tank”. En: *Physics of Fluids* 32.1 (2020).

- [58] H Park et al. “A pre-conditioned implicit direct forcing based immersed boundary method for incompressible viscous flows”. En: *J. Comput. Physics* 314 (2016), págs. 774-799.
- [59] IR Park et al. “A volume-of-fluid method for incompressible free surface flows”. En: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 61.12 (2009), págs. 1331-1362.
- [60] Jitendra Kumar Patel y Ganesh Natarajan. “Diffuse interface immersed boundary method for multi-fluid flows with arbitrarily moving rigid bodies”. En: *Journal of Computational Physics* 360 (2018), págs. 202-228. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.01.024>.
- [61] Ashish Pathak y Mehdi Raessi. “A 3D, fully Eulerian, VOF-based solver to study the interaction between two fluids and moving rigid bodies using the fictitious domain method”. En: *Journal of Computational Physics* 311 (2016), págs. 87-113. DOI: [10.1016/j.jcp.2016.01.025](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.01.025).
- [62] George-Cristian Patru et al. “FIDUCIAL MARKER SYSTEMS OVERVIEW AND EMPIRICAL ANALYSIS OF ARUCO, APRILTAG AND CCTAG”. En: *UNIVERSITY POLITEHNICA OF BUCHAREST SCIENTIFIC BULLETIN SERIES C-ELECTRICAL ENGINEERING AND COMPUTER SCIENCE* 85.2 (2023), págs. 49-62. ISSN: 2286-3540.
- [63] CS Peskin. “The immersed boundary method”. En: *Acta Numerica* 11 (2002), págs. 479-517.
- [64] Antoine Placzek, Jean-François Sigrist y Aziz Hamdouni. “Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low Reynolds number: Forced and free oscillations”. En: *Computers & Fluids* 38.1 (2009), págs. 80-100.
- [65] Sunny Kumar Poguluri e Il Hyoung Cho. “Effect of vertical porous baffle on sloshing mitigation of two-layered liquid in a swaying tank”. En: *Ocean Engineering* 289 (2023), pág. 115952.
- [66] Anton Poroykov et al. “Modeling ArUco markers images for accuracy analysis of their 3D pose estimation”. En: *30th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision (GraphiCon 2020). Part. Vol. 2.* 2020.
- [67] Frits de Prenter, Christoph Lehrenfeld y André Massing. “A note on the stability parameter in Nitsche’s method for unfitted boundary value problems”. En: *Computers and Mathematics with Applications* 75.12 (2018). ISSN: 08981221. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.03.032>.
- [68] Kun Qu, Feng Xie y Jinsheng Cai. “Extending slide-slip mesh update method to finite volume method”. En: *Aerospace Science and Technology* 77 (2018), págs. 50-57.
- [69] Isabelle Ramière, Philippe Angot y Michel Belliard. “Fictitious domain methods to solve convection-diffusion problems with general boundary conditions”. En: *17th AIAA computational fluid dynamics conference.* 2005, pág. 4709.

- [70] Francisco J Romero-Ramirez, Rafael Muñoz-Salinas y Rafael Medina-Carnicer. “Tracking fiducial markers with discriminative correlation filters”. En: *Image and Vision Computing* 107 (2021), pág. 104094.
- [71] Peter J Rousseeuw y Christophe Croux. “Alternatives to the median absolute deviation”. En: *Journal of the American Statistical association* 88.424 (1993), págs. 1273-1283.
- [72] Eric P Salathé y Lawrence Sirovich. “Boundary-Value Problems in Compressible Magnetohydrodynamics”. En: *The Physics of Fluids* 10.7 (1967), págs. 1477-1491.
- [73] Alban Sauret et al. “Damping of liquid sloshing by foams”. En: *Physics of Fluids* 27.2 (2015).
- [74] Hermann Schlichting y Klaus Gersten. *Boundary-layer theory*. Springer, 2016. DOI: [10.1007/978-3-662-52919-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5).
- [75] Bernard Schmidt y Lihui Wang. “Automatic work objects calibration via a global–local camera system”. En: *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 30.6 (2014), págs. 678-683. ISSN: 0736-5845. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2013.11.004>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0736584513001014>.
- [76] N Senthil Kumar y G Biswas. “A finite element study of the onset of vortex shedding in a flow past two-dimensional circular cylinder”. En: *Progress in Computational Fluid Dynamics, an International Journal* 8.5 (2008), págs. 288-298.
- [77] J Sethian. “Fast marching methods and level set methods for propagating interfaces”. En: *Computational Fluid Dynamics, Annual Lecture Series, 29 th, Rhode-Saint-Genese, Belgium* (1998).
- [78] Zhihao Shen et al. “A resolved CFD-DEM coupling model for modeling two-phase fluids interaction with irregularly shaped particles”. En: *Journal of Computational Physics* 448 (2022), pág. 110695. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110695>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999121005908>.
- [79] Pengyu Shi y Roland Rzehak. “Lift forces on solid spherical particles in wall-bounded flows”. En: *Chemical Engineering Science* 211 (2020), pág. 115264.
- [80] Lawrence Sirovich. “Initial and boundary value problems in dissipative gas dynamics”. En: *The Physics of Fluids* 10.1 (1967), págs. 24-34.
- [81] Lawrence Sirovich. “Steady gasdynamic flows”. En: *Physics of Fluids* 11.7 (1968). ISSN: 10706631. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1692125>.
- [82] MA Storti et al. “Dynamic boundary conditions in computational fluid dynamics”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.13-16 (2008), págs. 1219-1232.

- [83] Jaroslav Strnadel, Miloslav Simon e Ivan Machač. “Wall effects on terminal falling velocity of spherical particles moving in a Carreau model fluid”. En: *Chemical Papers* 65.2 (2011), págs. 177-184. DOI: [10.2478/s11696-011-0005-6](https://doi.org/10.2478/s11696-011-0005-6).
- [84] Tommaso Tocci, Lorenzo Capponi y Gianluca Rossi. “ArUco marker-based displacement measurement technique: uncertainty analysis”. En: *Engineering Research Express* 3.3 (ago. de 2021), pág. 035032. DOI: [10.1088/2631-8695/ac1fc7](https://doi.org/10.1088/2631-8695/ac1fc7). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/2631-8695/ac1fc7>.
- [85] Yutaka Tsuji, Yoshinobu Morikawa y Kozo Terashima. “Fluid-dynamic interaction between two spheres”. En: *International Journal of Multiphase Flow* 8.1 (1982), págs. 71-82. ISSN: 0301-9322. DOI: [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(82\)90008-8](https://doi.org/10.1016/0301-9322(82)90008-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0301932282900088>.
- [86] S Turek, D Wan y LS Rivkind. “The Fictitious Boundary Method for the implicit treatment of Dirichlet boundary conditions with applications to incompressible flow simulations”. En: *Challenges in Scientific Computing-CISC 2002*. Springer, 2003, págs. 37-68.
- [87] D-C Wan. “Multigrid fictitious boundary method for incompressible viscous flows around moving airfoils”. En: *Journal of Marine Science and Application* 6.2 (2007), págs. 51-58.
- [88] L. Wang, Z.L. Guo y J.C. Mi. “Drafting, kissing and tumbling process of two particles with different sizes”. En: *Computers Fluids* 96 (2014), págs. 20-34. ISSN: 0045-7930. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.03.005>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793014001042>.
- [89] Bartosz Wiecezorek et al. “The effects of ArUco marker velocity and size on motion capture detection and accuracy in the context of human body kinematics analysis”. En: *Technical Transactions* (dic. de 2020). DOI: [10.37705/TechTrans/e2020036](https://doi.org/10.37705/TechTrans/e2020036).
- [90] Yefeng Yang y Yin Wang. “Enhanced fully resolved CFD-DEM-PBFM simulation of non-spherical particle–fluid interactions during hydraulic collection”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 426 (2024), pág. 116994. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.116994>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782524002500>.
- [91] Sagar Zade, Fredrik Lundell y Luca Brandt. “Turbulence modulation by finite-size spherical particles in Newtonian and viscoelastic fluids”. En: *International Journal of Multiphase Flow* 112 (2019), págs. 116-129.

- [92] E Zamora et al. “Numerical and experimental study of the motion of a sphere in a communicating vessel system subject to sloshing”. En: *Physics of Fluids* (2019). DOI: [10.13140/RG.2.2.23954.40649](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.23954.40649).
- [93] E. Zamora et al. “Simulación numérica de agitación con level set aplicado a un caso de estudio”. En: *ENIEF* (La Plata, Argentina). Ed. por MI Idiart, AE Scarabino y MA Storti. AMCA, nov. de 2017, págs. 1593-1593. ISBN: 2591-3522.
- [94] Esteban Zamora. “Estudio experimental de la interacción fluido-esfera en un sistema de vasos comunicantes bajo condición de vibración forzada”. Tesis de mtría. Santiago: Universidad de Santiago de Chile, abr. de 2016.
- [95] Esteban A Zamora et al. “Estudio de Estabilidad del Flujo Alrededor de un Cilindro a Diferentes Números de Reynolds Mediante un Método Embebido”. En: *Mecánica Computacional* (2019).
- [96] Esteban A. Zamora et al. “Embedded finite volume technique for fluid/rigid-body interaction problems”. En: *Computers & Mathematics with Applications* 156 (2024), págs. 157-166. ISSN: 0898-1221. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.12.036>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122123005989>.
- [97] Esteban Alonso Zamora et al. “DETECCIÓN DE OBJETOS SUMERGIDOS MEDIANTE PROCESAMIENTO DE IMÁGENES Y SIMULACIÓN NUMÉRICA CON MÉTODO EMBEBIDO EN COMPUTACIÓN DE ALTO RENDIMIENTO.” En: *XXXIX Congreso Argentino de Mecánica Computacional y I Congreso Argentino Uruguayo de Mecánica Computacional*. 2023.
- [98] Lanhao Zhao, Yingtang Di y Jia Mao. “A coupled FDEM-IBM-level set method for water entry of multiple flexible objects”. En: *Journal of Computational Physics* 516 (2024), pág. 113290.
- [99] Yucheng Zhao y Hamn-Ching Chen. “Numerical simulation of 3D sloshing flow in partially filled LNG tank using a coupled level-set and volume-of-fluid method”. En: *Ocean Engineering* 104 (2015), págs. 10-30.
- [100] Kai Zhou et al. “Complete Initial Solutions for Iterative Pose Estimation From Planar Objects”. En: *IEEE Access* 6 (2018), págs. 22257-22266. DOI: [10.1109/ACCESS.2018.2827565](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2827565).
- [101] He Zou, Qi Kun Wang y Zhuang Zhuang Xue. “Characteristics of lift and resistance of spherical wall in semi-unbounded flow field”. En: *Advances in Mechanical Engineering* 14.3 (2022), pág. 16878132221082769.





## **Anexo A**

# **Numerical and experimental study of the motion of a sphere in a communicating vessel system subject to sloshing**

Esteban A. Zamora<sup>1</sup>, Laura Battaglia<sup>1</sup>, Mario Storti<sup>1</sup>, Marcela Cruchaga<sup>2</sup>,  
Roberto Ortega<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), UNL-CONICET, Predio CONICET Santa Fe "Dr. Alberto Cassano", Colectora Ruta Nac. Nro 168, Km 0, Paraje El Pozo, Santa Fe, Argentina

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Santiago de Chile (USACH), Av. Bdo. O'Higgins 3363, Santiago de Chile, Chile.

### **Abstract**

The purpose of this work is twofold: to present a computational strategy to simulate the dynamics of a rigid sphere during water sloshing and to validate the model with original experimental data. The numerical solution is obtained through the coupling between a two-fluid Navier-Stokes solver, and a rigid solid dynamics solver, based on a Newton scheme. A settling sphere case reported in the literature is firstly analyzed to validate the numerical strategy by ascertaining the settling velocity. In addition, an experiment is carried out based on a sphere submerged into a communicating vessel subjected to sloshing. Experimental data is captured using image processing and statistically treated to provide sphere dynamics quantitative information. The effects of different classical models used to describe drag coefficients, added mass and wall effects are considered in the study to evaluate their influence on the results. The numerical model provides results that are consistent with the physical data and the trajectory analysis shows good agreement between the simulations and the experiments.

## A.1. INTRODUCTION

Interactions between fluids and rigid solids occur in many engineering applications at different scales, such as in the processing of mineral ores, food processing [42], ocean and naval engineering [57, 10], and renewable energy generators [20].

The simulation of single or multiple bodies immersed in fluids can be performed via different numerical approaches, where a major issue is how to represent the interface between the body and the surrounding fluid, and their interactions. Some of the following approaches are commonly used: body-fitted and embedded / immersed techniques. Body-fitted schemes, such as the arbitrary Lagrangian-Eulerian techniques [28, 51], involve discretizing the fluid surrounding the object such that the contour of the body is perfectly represented; however, these methods are not well suited for large displacements because of grid distortion. The embedded and immersed methods represent the contours of objects as non-conforming geometric entities inside the fluid discretization, i.e., the body boundaries cross the faces of the grid [34, 39]. Embedded strategies can be combined with different numerical methods for solving the fluid flow, e.g., lattice Boltzmann methods [53, 18, 54] and Navier-Stokes classic solvers [19, 16, 13, 14]. When a fluid-fluid interface or a free surface appears, the flow solver has to be extended, e.g., via a level-set method [57, 10] or a volume-of-fluid approach [44].

With respect to the sloshing phenomena, different approaches have been developed to predict the interface behavior. Some solutions derived from potential flow theory, where the fluid is assumed to be incompressible and inviscid, have been obtained and applied to particular tank shapes, filling levels and excitation directions [23, 24, 22]. Other approaches are based on numerical methods for solving viscous free surface and two-fluid flow numerical methods [21, 15] and have been successfully applied to sloshing simulations in two- and three-dimensional problems, as supported by the validations performed with analytical and experimental reference values [17, 26, 6, 11].

In the present work, a physical experiment that involves a sphere with slightly negative buoyancy immersed in a two communicating vessels submitted to sloshing is presented. Furthermore, a numerical strategy is developed to reproduce the experiment, taking into account the fluid flow simulation and the rigid body motion as separate stages.

For the fluid problem, the Navier-Stokes equations for incompressible and viscous fluids are solved within a level set approach for capturing the movement of interface between two fluids, i.e., water and air, via the Finite Element Method (FEM). Moreover, the rigid solid dynamics is solved with a Newton scheme. One-way coupling is applied to solve these two linked dynamics, i.e., the velocity and pressure fields from the fluid flow are used to compute the forces acting on the body, which are used in the rigid solid equations. The effects of different classical models used to describe drag coefficients, added mass and wall effects are considered in the study to evaluate their influence on the results.

The main aspects of this work can be summarized as follows: the report of a new experiment with a sphere submerged inside a sloshing system; the proposal of a strategy to systematize the experimental results from image processing; the development of a numerical method with the ability to reproduce the behavior of a sphere immersed in a viscous fluid in motion; and a statistical treatment of the numerical and experimental results.

The remainder of this work is organized as follows. In Section A.2, the physical experiment and the description of the post-processing of the results are described. Section A.3 summarizes the computational approach for solving the fluid flow and the motion of the rigid solid. The results are presented in A.4, which includes an initial validation of the numerical model with a well-known test of a settling sphere and a comparison between the experimental and numerical results of the sphere under sloshing. Finally, concluding remarks are presented.

## A.2. Experimental work

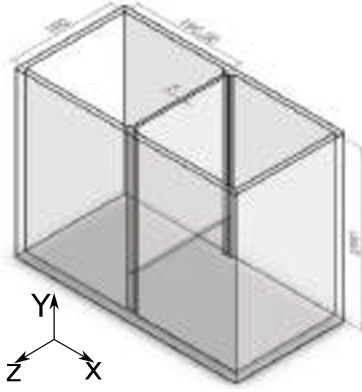
The present experiment is designed to validate the proposed methodology to simulate complex phenomena involving free surface, and fluid and rigid body interaction problems.

### A.2.1. Experimental layout

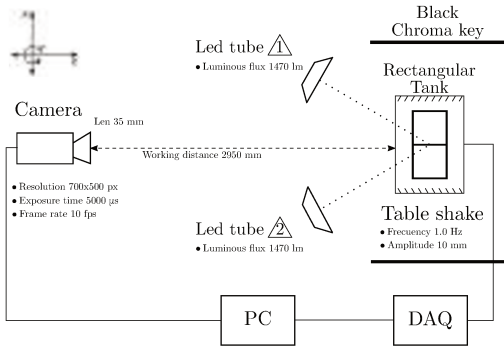
An acrylic tank, divided by a vertical middle wall into two internal vessels, is mounted onto a shake table and subjected to controlled oscillating motion with an amplitude of  $A = 10$  mm and frequency  $f = 1$  Hz in  $x$ -direction. The tank geometry is shown in Figure A.1. The internal vessels are communicating via a lower opening of 60 mm. A hollow sphere with an external diameter  $40.5 \pm 0.5$  mm and wall thickness  $9.5 \pm 0.5$  mm is made of a polymer, commercially named PLA, with a density  $\rho_{PLA} \approx 1250$  kg/m<sup>3</sup>. The sphere weighs  $w_s = 35.93 \pm 0.01$  g (experimentally determined), resulting in a density  $\rho_s = 1033 \pm 21$  kg/m<sup>3</sup>. The sphere is submerged into distilled water inside the tank, i.e., the sphere has nearly 1.01–1.06 relative density ( $\rho_s/\rho_f$ ) with respect to the water promoting a slightly negative buoyancy effect. The experiments are performed for a filling depth of 200 mm.

The experiments are recorded using a camera with a resolution of  $700 \times 500$  px at 10 fps. The free surface evolution and sphere position are measured via post processing the videos. The shake table motion and the camera are synchronized. The experimental set-up is shown in Figure A.2.

Figure A.3 plots a cycle of the shake table motion, including the instants where the frames are taken, i.e., there are 10 frames per cycle. The position of the shake table at the instant labeled as 0 corresponds to the origin of the table displacement; at that moment the table has null displacement and maximum velocity and is moving from left to right. Instant 5 corresponds to the tank being centered and moving to the left. By symmetry, instant 5 is completely equivalent to instant 0, with symmetry reflection about  $x$ -axis ( $x \rightarrow -x$ ).



**Figura A.1:** Geometry of the tank with dimensions in mm.



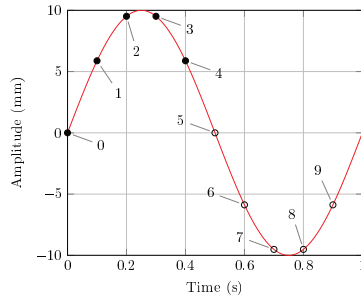
**Figura A.2:** Experimental set-up

In the following, when the statistical results are presented for instant 0, they also include the results for instant 5 after applying the appropriate symmetry. This symmetry is kinematically valid only for the time periodic regime. On the basis of this property the number of relevant frames is reduced by one-half and the data is increased twofold. In the same way, instant 1 is equivalent to instant 6, and so on.

### A.2.2. Image capturing technique

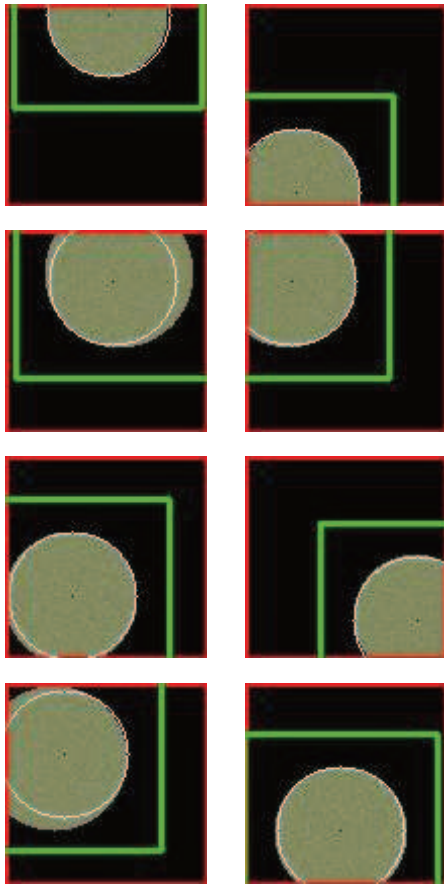
The instantaneous positions of the sphere are obtained via an image processing technique. To this end, in-house code was developed in C++ using OpenCV [29, 9] and Armadillo [48, 49] as a library for sparse matrix linear algebra.

The center of the sphere is determined by means of image processing. The procedure is based on histogram and thresholding techniques [47, 33], where a region of interest (ROI) is defined, i.e., the green rectangle centered at the spheres shown in Figures A.4 and A.9. Initially, the ROI is characterized by a histogram in HSV color space (represented by channels: Hue, Saturation, Value). To identify the sphere, the variation in color in the hue channel is considered because the sphere has only one color, i.e., the saturation does not significantly change, and the lighting is sufficient to maintain a uniform value, i.e., the hue values remain constant under slight variation in light. Then, to separate the sphere from the background, a binary mask is applied to the search zone identified by the red rectangle in Figures A.4 and A.9, where the range



**Figura A.3:** Classification of the frames by their position relative to the cycle.

of hue values is used as belonging criteria. Finally, to obtain the coordinates of the center of the sphere, the Hough circle transform function implemented in the OpenCV library is applied. This function uses the Hough gradient method and the gradient information of the contours from binary mask, for each frame. The next searching zone in the following frame is defined as a square, where the side length is equal to twice the diameter of the sphere and center is coincident with the current coordinates of center of the sphere. The results are saved in a tracking table that contains all the positions for each frame, and a history map is constructed to store the number of times that the center of the sphere passed through a certain pixel of the domain.



**Figura A.4:** Image capturing technique uncertainty assessment. Some random sphere positions, search zones and results obtained from the algorithm.

The main uncertainties in the sphere location come from the diameter measure due to the distance to the focal plane. In order to assess the precision of the algorithm used in this work, a simple test was carried out. For this, 1000 random spheres have been generated inside a bitmap of  $100 \times 100$  px, where the diameter is randomly disturbed to emulate the uncertainty to the focal plane in the experiments. The diameter used in this analysis was of 67px. Figure A.4 shows some samples of the random positions and sizes of the sphere in an unfavorable situation, where the white circle is the detected sphere. Note that, for a fixed diameter, smaller or larger gray zones represents a sphere behind or ahead of the focal plane, respectively. From this analysis, the precision of the algorithm to determine the center of a sphere is  $\pm 2$ px. This error represents 1.2mm in the experiment.

### A.2.3. Experimental methodology

The experimental data are obtained from 18 experiments conducted during 766.26 min of the free surface time periodic regime (equivalent to 459770 frames). The data are presented in Section A.4 together with the results computed from the simulations.

The sphere is randomly released at the bottom of a vessel. To evaluate the results of the sphere position over time obtained from the image capturing technique, parameters of the sphere (trajectories) are measured, and statistically reproducible quantities, such as the location and velocity, are calculated.

A classification based on where the sphere is initially located is used to describe trajectories. The left vessel is divided into 4 regions, numbered clockwise from the top right. The right vessel is also divided into 4 regions, numbered counterclockwise from top left (specular counterpart of the left vessel).

Regarding the spatial distribution,  $x$ - (or  $y$ -) axis is divided into 6 bins and, the number of times that the sphere is in each bin is computed.

The mean velocity of the sphere is computed on the basis of the difference in positions at subsequent frames and the time steps between these frames. This velocity is taken as a reference for comparison with the numerical results in Sec. A.4.2, particularly with the average velocity and a histogram.

Moreover, the free surface is tracked over time at certain control points by means of image processing, and these measurements are considered to contrast the fluid dynamics results.

Some overall remarks can be noted from the videos. The sphere seldom impacts the vessels walls, the sphere never emerges from the water, and the sphere rarely crosses from one vessel to the other through the opening. These facts are confirmed in the simulations.

It is also remarkable that not high rotation has been observed during the analysis of this highly transient problem. Due to this fact, only translation motion was considered in the present study. To confirm this assumption, the sphere rotation has been estimated from the images, and a value of 1.1 rad/s has been found with a low recurrence. This rotation was used to compute lift Magnus forces and they are small enough to

not take rotation into account as will be declared in Sec. A.3 and Sec. A.4.2.

### A.3. Mathematical model

#### A.3.1. Fluid dynamics formulation and free surface description

The two-fluid flow is described by the Navier-Stokes equations for viscous incompressible flow,

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0 & \text{in } \Omega ; \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 & \text{in } \Omega ; \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

where  $\rho$  is the density,  $\mathbf{v}$  is the fluid velocity, and  $\mathbf{f}$  represents the external body forces per unit mass, over the spatial domain  $\Omega$  in time  $t \in [0, T]$ . Furthermore, the stress tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  in Eq. (A.1) is defined as  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ , where the first term is the isotropic part, with pressure  $p$  and identity tensor  $\mathbf{I}$ . The second term is the deviatoric part, i.e., the viscous stress tensor for a Newtonian fluid, where  $\mu$  is the dynamic viscosity of the fluid. The fluid properties are distributed in the domain according to the free surface presence, as indicated below.

The system of Eqs. (A.1) is solved by a finite element strategy with finite elements of equal order for velocity and pressure [45], stabilized with Streamline upwind / Petrov - Galerkin (SUPG) [8] and pressure - stabilizing / Petrov - Galerkin (PSPG) [55].

Several works conclude that turbulent dissipation is an important damping factor in the sloshing physics [36], as well as in other free surface flows [12]. Hence, a simple turbulence model is used to consider some viscous dissipative effects such that the dynamic viscosity is replaced by  $\mu_t = \min(\mu + C_s^2 h_s^2 \rho \sqrt{2\epsilon} : \epsilon, \mu_{\max})$ , where  $C_s$  is the Smagorinsky coefficient,  $\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$  is the strain rate,  $h_s$  is the characteristic length of an element, and  $\mu_{\max}$  is a cutoff value. This model has been applied before for solving more challenging sloshing cases, as in [15, 6].

The free surface is modeled by an interface capturing technique that rely in a continuous and smooth level set like function  $\phi$ . The level set transport, represented by

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = 0 \quad \text{in } \Omega ; \quad (\text{A.2})$$

requires the velocity field  $\mathbf{v}$  from Eq. (A.1) to advance in time. This equations are also solved by SUPG stabilized finite elements, over the same mesh as the fluid flow problem [5].

As Eq. (A.2) does not preserve certain properties of the  $\phi$  field, such as the transition profile from one to

another fluid, a numerical procedure is applied to regularize the field, that consists of solving

$$\phi (\phi^2 - \phi_{\text{ref}}^2) - \kappa \Delta \phi + M \left( \hat{H}(\phi) - \hat{H}(\phi_0) \right) = 0 \quad \text{in } \Omega ; \quad (\text{A.3})$$

over the whole domain  $\Omega$ , where  $\phi_0$  is obtained from Eq. (A.2), the reference value is  $\phi_{\text{ref}} = 1$ ,  $\kappa$  is a diffusivity,  $M$  a penalty coefficient and the expression for the penalizing term is  $\hat{H}(\phi) = \tanh(2\pi\phi)$ . This third problem is also solved with a finite element method, that is steady in each time step [4] and can be complemented with a global explicit volume preservation stage [6].

Hence, the properties of the fluids are distributed in the whole domain according to the marker function  $\phi(\mathbf{x}, t)$  that is positive in the liquid part of the domain,  $\Omega_l$ , negative in the gaseous phase,  $\Omega_g$ , and is null specifically over the free surface  $\Gamma_{\text{FS}}$ , such that  $\Omega = \Omega_l \cup \Omega_g$  and  $\Omega_l \cap \Omega_g = \emptyset$ . Particularly, and due to the renormalization stage applied, it is  $-1 < \phi < 1$  [4]. Then, the density and the viscosity are given as functions of  $\phi$ , with

$$\eta(\phi) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \tilde{H}(\phi) \right) \eta_l + \left( 1 - \tilde{H}(\phi) \right) \eta_g \right]; \quad (\text{A.4})$$

where  $\eta(\phi)$  represents either  $\rho(\phi)$  or  $\mu(\phi)$ , and subscripts  $l$  and  $g$  indicate the liquid or the gaseous phase, respectively. In the present work,  $\tilde{H}(\phi) = \tanh\left(\frac{\pi\phi}{\tilde{\epsilon}}\right)$ , such that is a smooth sign function, where the parameter  $\tilde{\epsilon}$  calibrates the width of the transition of the properties between the fluids.

### A.3.2. Solid-rigid dynamics

The expression for the solid-rigid dynamics corresponds to the application of Newton's second law for displacement,

$$\mathbf{m}_{\text{sph}} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{\text{ine}} + \mathbf{F}_{\text{fl}} \quad (\text{A.5})$$

where the first term corresponds to inertial forces,  $\mathbf{m}_{\text{sph}}$  is the mass matrix corresponding to the body,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  is the displacement vector in  $n$  coordinates, and  $\ddot{\mathbf{q}}$  is the corresponding acceleration vector. The second term,  $\mathbf{F}_c$  includes the internal forces representing the rigid contact constraints, and the right-hand side quantifies the external forces acting on the center of the solid, considered as a particle. The external forces considered in the present work are due to the accelerations applied to the system and the fluid forces over the sphere.

The rigid-contact force that appears on the sphere due to the vessel walls, is modeled by a penalty method. The contact forces are

$$\mathbf{F}_c = k_c d \mathbf{n} + \langle \beta_c \dot{\mathbf{q}} \mathbf{n} \rangle_\delta \quad (\text{A.6})$$

where the first term accounts for the contact forces as a function of is the signed distance function  $d = d(\mathbf{q})$  between the sphere and the vessel walls, such that when  $d \geq 0$ , the sphere does not contact the wall and there are no contact forces acting over the sphere. When  $d < 0$ , there is penetration and, consequently, the



contact force magnitude is determined as  $k_c d$ , where  $k_c$  is the penalty coefficient and  $\mathbf{n}$  is the unit vector normal to the interface,  $\mathbf{n} \approx \frac{\nabla d}{\|\nabla d\|}$ . The second term considers the approximation effect near the walls [52, 50]; this force is activated at a distance equal to  $\delta$  of the radius of the sphere, expressed as a percentage of the radius of the sphere, where  $\beta_c$  is a constant coefficient. A more sophisticated mechanism in order to consider the lubrication effects when the sphere is very close to the wall could be developed. These models require a proper correlation with Re and wall distance [7, 35]. Other authors quantify the wall influence as a correction on the settling velocity [3, 16] or wall influence at low Re number [25, 41], as examples.

The inertial forces due to non-gravitational accelerations  $\mathbf{g}_{\text{box}}$  applied over the non-inertial reference frame are determined as  $\mathbf{F}_{\text{ine}} = m_{\text{sph}} \mathbf{g}_{\text{box}}$ .

Furthermore, the fluid forces comprise the buoyancy forces  $\mathbf{F}_{\text{buoy}}$ , the drag forces  $\mathbf{F}_{\text{drag}}$ , and the added mass forces  $\mathbf{F}_{\text{add}}$ , i.e.,  $\mathbf{F}_{\text{fl}} = \mathbf{F}_{\text{buoy}} + \mathbf{F}_{\text{add}} + \mathbf{F}_{\text{drag}}$ .

The buoyancy term is  $\mathbf{F}_{\text{buoy}} = -V \nabla p$ , where  $V$  is the volume of the sphere. Note that this term considers the full lift forces due to the pressure gradient from the fluid state. Other lift forces, like Magnus and Saffman forces, are not included in the model. Magnus force evolves during imposed rotation in the rigid body [37, 32]. Saffman forces [38, 27] are developed under high velocity gradients and are commonly applied to small to nano-particle analyses. In the present analysis, as it will be shown in section A.4.2, these forces are negligible in comparison to the lift due to pressure gradient.

The added mass force is defined as

$$\mathbf{F}_{\text{add}} = -m_{\text{add}} (\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_{\text{box}}), \quad (\text{A.7})$$

with the added mass  $m_{\text{add}} = k_{\text{add}} \rho V$ , where  $\rho$  is the fluid density. The added mass coefficient is determined as a function of the Reynolds number ( $\text{Re} = \rho |\mathbf{v}_r| D_s \mu^{-1}$ ) [40, 30],

$$k_{\text{add}} = \begin{cases} 8.591 \text{Re}^{-0.5835} & \text{if } \text{Re} \leq 100 \\ 15 \text{Re}^{-1.125} + 0.5 & \text{if } \text{Re} > 100 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

The drag forces are modeled as

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} = -\frac{1}{2} C_D A_s \text{Re} \frac{\mu}{D_s} \mathbf{v}_r, \quad (\text{A.9})$$

where the drag coefficient  $C_D$  is determined as a function of Re, the relative velocity between the sphere and the flow is  $\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{v}$ ,  $D_s$  is the sphere diameter, and  $A_s$  is the reference area, in this case, the projected area of the sphere. Different expressions for the drag coefficient can be found in the literature based on a sphere immersed in flows at constant relative velocities, i.e., the sphere moves with constant velocity with

respect to the fluid. An empirical relationship covering a wide range of  $Re$  is proposed in [2], from which the following expression is adopted,

$$C_D = (\varphi_1 + \varphi_2)^{1/10} \quad (\text{A.10})$$

This equation is valid for the  $Re$  range of the analyses presented in this work, i.e.,  $Re < 2 \times 10^5$ , where  $\varphi_1 = \left(\frac{24}{Re}\right)^{10} + \left(\frac{21}{Re^{0.67}}\right)^{10} + \left(\frac{4}{Re^{0.33}}\right)^{10} + (0.4)^{10}$  and,  $\varphi_2 = \left[(0.148Re^{0.11})^{-10} + 0.5^{-10}\right]^{-1}$ . A heuristic relation is proposed in [1] based on boundary layer theory:

$$C_D = \frac{24}{(9.06)^2} \left[1 + \frac{9.06}{\sqrt{Re}}\right]^2 \quad (\text{A.11})$$

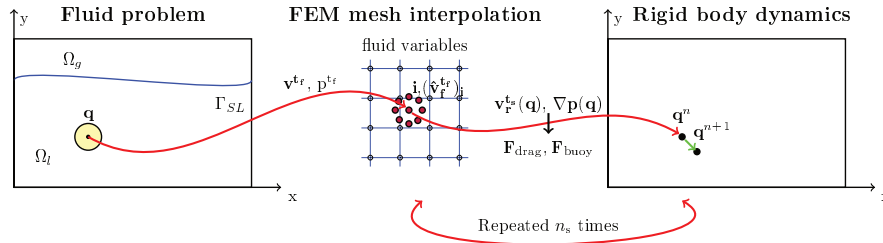
Furthermore, the following expression used in [16] is also applied,

$$C_D = aRe^{-b} \quad (\text{A.12})$$

where  $a$  and  $b$  are adjusted by fitting experimental drag values reported in literature [2, 56].

### A.3.3. Solvers coupling

The numerical strategy is proposed as a one-way coupling, where the fluid forces over the sphere are modeled by taking as data the fluid state, determined from Eq. (A.1), and the forces due to the added mass phenomenon.



**Figure A.5:** Data exchange between the fluid and the solid dynamics involved in the algorithm.

The procedure is sketched in Figure A.5. The velocity  $\mathbf{v}^{tf}$  and the pressure  $p^{tf}$  are known from the fluid state at time  $t_f$  in every node of the corresponding mesh. Then, the velocity at the center of the sphere, and in certain cases at other points over the circumference, is calculated via FEM interpolation, giving the mean velocity  $\mathbf{v}_f^{t_f}$  for the body. The relative velocity of the solid  $\mathbf{v}_r^{ts}$  at the solid time step  $t_s$  is determined as

$$\mathbf{v}_r^{ts} = \dot{\mathbf{q}}^{ts} - \mathbf{v}_f^{t_f}. \quad (\text{A.13})$$

The relative velocity of the sphere with respect to the fluid is employed to determine  $\mathbf{F}_{\text{drag}}$ , while the pressure gradient is considered in  $\mathbf{F}_{\text{buoy}}$ . Note that the time step of the solid is several times smaller than the fluid

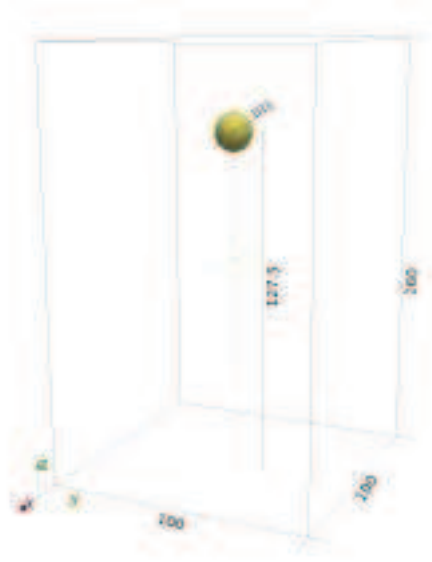
time step. Then, the interpolation of the velocity and the pressure is repeated  $n_s$  times for each fluid time step, with  $n_s = \Delta t_f / \Delta t_s$ .

## A.4. Numerical results

Two cases are studied to further validate the reliability of the the model. The first case corresponds to the settling of a single sphere, and the other corresponds to sloshing in a communicating vessel problem described in Section A.2.

### A.4.1. Settling of a single sphere

Several authors appeal to the settling of a sphere as an initial validation for their fluid-structure interaction numerical schemes [54, 31, 53, 18, 16, 46]. Following the analysis presented by [54], the settling of a spherical particle of radius 7.5 mm ( $r_p$ ) and density  $\rho_s = 1250 \text{ kg/m}^3$  is studied. Initially, both the fluid and the particle are at rest, and the particle is freely released under gravity from an initial position of (0.0, 0.0, 127.5) mm in a rectangular container of size  $[-50, 50] \times [-50, 50] \times [0, 160]$  mm. A schematic diagram of the settling case is depicted in Figure A.6. The motion is induced by gravity and is developed due to the hydrostatic pressure gradient. Three different cases are considered by varying the properties of the fluid, as shown in Table A.1.



**Figure A.6:** Single particle settling in a rectangular box. Dimensions in mm.

Table A.2 summarizes the time step  $\Delta t_s$  for the solid stage, the parameters  $\beta_c$  and  $\delta$  for the contact forces in Eq. (A.6), the drag law and parameters  $a, b$  used for the corresponding drag law in each case, if needed.

Figure A.7(a) shows the evolution of the vertical position of the sphere until it reaches the bottom, and Figure A.7(b) plots the velocity of the sphere. Three stages are observed during the settling of a sphere: when

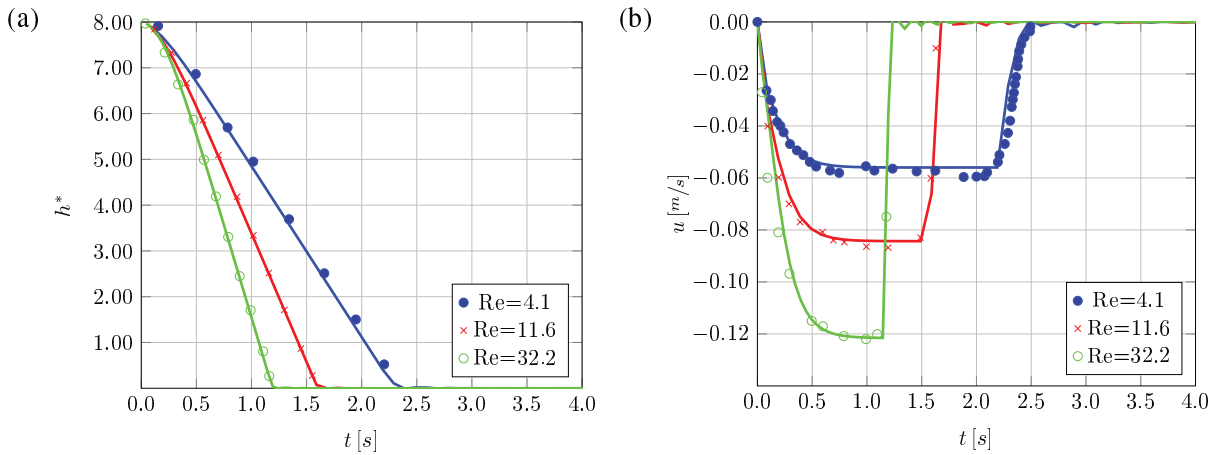
| Case | $\rho_f$ (kg m <sup>-3</sup> ) | $\mu_f$ (N s m <sup>-2</sup> ) | Re   |
|------|--------------------------------|--------------------------------|------|
| 1    | 965                            | 212                            | 4.1  |
| 2    | 962                            | 113                            | 11.6 |
| 3    | 960                            | 58                             | 32.2 |

**Tabla A.1:** Fluid properties for three different Re numbers in the settling of a sphere

| Re   | $\Delta t_s$ (s) | $\beta_c$ (N s m <sup>-1</sup> ) | $\delta$ (%) | Drag Law   | $a; b$        |
|------|------------------|----------------------------------|--------------|------------|---------------|
| 4.1  | 0.01             | 160                              | 45           | Eq. (A.12) | 28.01;0.7641  |
| 11.6 | 0.01             | 250                              | 20           | Eq. (A.12) | 27.327;0.7641 |
| 32.2 | 0.005            | 250                              | 20           | Eq. (A.10) | -             |

**Tabla A.2:** Near-wall settings and drag parameters for the settling of a sphere. Parameters  $a, b$  are given for the drag law of Eq. (A.12).

the sphere is free falling (acceleration stage), when the sphere reaches terminal velocity (constant velocity stage) and, finally, when the sphere approaches the bottom (deceleration stage). The present model agrees with the experimental data in these three stages. The experimental absolute error reported by the reference is lower than 0.1 in the relative position  $h^*$ . The added mass effect has a greater influence in the first stage because  $k_{add}$  is inversely proportional to Re. The drag force given via Eq. (A.12) fits better for Re 4.1 and 11.6, while for Re 32.2, Eq. (A.10) fits better. The approximation effects near the bottom of the rectangular container are clearly appreciated in the low Re case (Re 4.1). Parameter  $\beta_c$  and its activating zone  $\delta$  are chosen to reproduce the deceleration stage. Particularly, both parameters have been increased to obtain a better approximation for the lower Re case.



**Figura A.7:** Comparison of the experimental data (dots) and simulation results (continuous lines) in terms of (a) vertical position  $h^* = \frac{z-r_p}{2r_p}$  and (b) velocity for different Reynolds numbers.

#### A.4.2. Modeling the experiments

This section reports the numerical results for the simulation of the experiment described in Section A.2 using the methodology reported in Section A.3 in comparison with the experimental data. The fluid field is simulated for a certain number of cycles of the imposed shake table motion until the periodic regime is

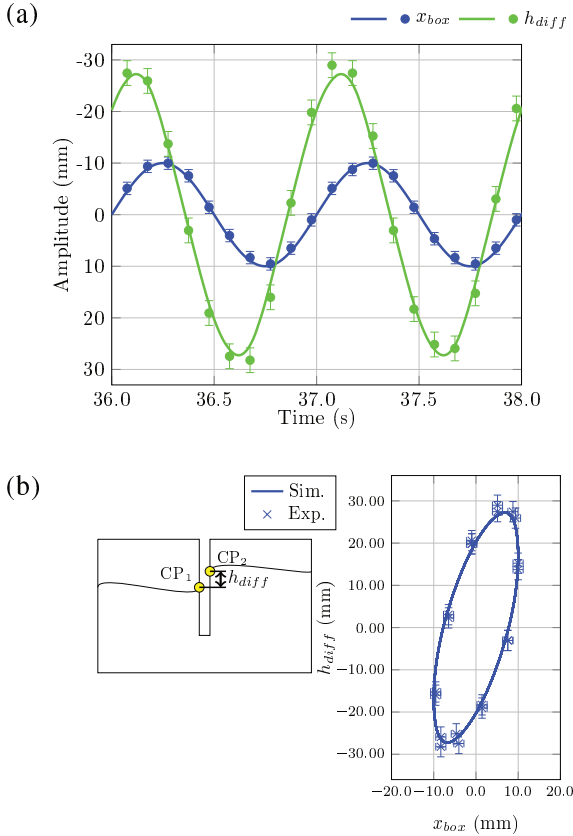
reached. The sphere is injected at a random position and time at instant 0 of the cycle, with the instantaneous fluid velocity at that point and instant. Then, the sphere is tracked using the solid rigid dynamic equations described in Section A.3. For a fair comparison of the results, the statistical analysis requires an amount of sphere position data similar to that obtained from the experiments, i.e., a total of 200 simulations of 100 seconds were performed. These data represent 43.5 % of the experimentally obtained sphere position information. The sphere density ( $\rho_s$ ) used in the simulations is  $1014.92 \text{ kgm}^{-3}$ . A sensitivity analysis (not shown) of the numerical results with respect to the sphere density was also conducted to evaluate the effect of the density variation. Notice that, as the relative density of the sphere with respect to the distilled water is  $\approx 1.02$ , the sphere has a nearly unit buoyancy and the system is highly sensitive to any slight change in such property. From the referred analysis, the reported density, chosen within the experimental range, provides the best adjustment between the experimental and numerical results. The contact stiffness coefficient ( $k_c$ ) is  $142950 \text{ Nm}^{-1}$ , which was validated by a mass point contacting plane test, as reported in [43]. The effects of the vicinity to the walls is considered with  $\beta_c = 0.75 \text{ N s m}^{-1}$  and  $\delta = 20 \%$ . Different runs were analyzed to evaluate the sensitivity of the results to the model parameters. From such numerical tests (not shown), minimal maximum error was found in the analysis of the results with the reported values. Focusing the analysis on  $\beta_c$ , two overall aspects could be remarked. When a sphere approaches a wall at low velocity (i.e, low Reynolds number), not only the wall effect is observed a larger distances from the wall but also the  $\beta_c$  parameter has to be increased with respect to high Reynolds numbers (see Sec. A.4.1). Moreover, the results of this section present small changes for  $\beta_c$  values varying in the range  $[0, 1] \text{ N s m}^{-1}$ . To complete the sensitivity analysis of the parameters involved in the model present in Section A.3, two different drag laws given by Eq. (A.10) and Eq. (A.11), are used, and the models are named set 1 and set 2, respectively. The time steps for the fluid ( $\Delta t_f$ ) and the solid solver ( $\Delta t_s$ ) are set to  $0.01 \text{ s}$  and  $0.0004 \text{ s}$ , respectively, and the sloshing problem was solved with 4-node finite elements for the three instances: fluid flow, level set advection and renormalization [5]. The properties of the fluids used in this case are shown in Table A.3, while the parameters for the turbulence model are  $C_s = 1$  and  $\mu_{\max} = 0.1 \text{ kg (ms)}^{-1}$ , set from previous numerical analyses in sloshing problems [15, 6].

| Property        | Symbol                             | Value    |
|-----------------|------------------------------------|----------|
| Water Density   | $\rho_f \text{ (kgm}^{-3}\text{)}$ | 998.2    |
| Water Viscosity | $\mu_f \text{ (Nsm}^{-2}\text{)}$  | 0.001    |
| Air Density     | $\rho_l \text{ (kgm}^{-3}\text{)}$ | 1.225    |
| Air Viscosity   | $\mu_l \text{ (Nsm}^{-2}\text{)}$  | 0.000018 |

**Table A.3:** Properties of the fluids involved in the case of sloshing with a submerged sphere.

Figure A.9 presents snapshots from the video and a simulation at different instants of the free surface periodic regime, in which the center of the sphere follows trajectory 3-4 in Figure A.10(a). The snapshots from the simulations also show the velocity vectors and the free surface position. The free surface evolution is

verified first. The free surface displacement, measured as the difference  $h_{diff}$  between the interface measured at CP1 and CP2, is presented in Figure A.8(a), together with the box displacement  $x_{box}$  when the time periodic steady stage is reached, see Figure A.8(b) as reference. The maximum free surface difference is  $A_{h_{diff}} \approx 30$  mm, while the imposed maximum displacement is  $A_{box} = 10$  mm. Good agreement is observed between the experimental (dots) and numerical results (line), in terms of both amplitude and phase. Furthermore, this agreement is verified by the Lissajous pattern in Figure A.8(b), which compares the experimental (crosses) and numerical (line) measurements.



**Figure A.8:** Free surface experimental and simulation results. (a) Differences in height  $h_{diff}$  between control points CP<sub>1</sub> and CP<sub>2</sub> and box displacements  $x_{box}$  for the experimental (dots) and numerical (lines) results. (b) Lissajous pattern with the experimental (crosses) and simulation (line) results.

Figure A.10 shows different trajectories observed in the experimental and numerical results. The trajectories correspond to an elapsed time of 3 seconds. In each figure, the trajectories start in one of the four regions of the left vessel and cross from the left to the right vessel. The continuous lines are numerical trajectories and the dots are the experimental trajectories. Each dot corresponds to a frame. In each figure, the trajectories start in similar initial positions and at equivalent instants relative to the cycle as presented in Figure A.3. As the behavior of the sphere is chaotic and the initial positions and velocities are not equal, the trajectories should not necessarily match; nevertheless, the trajectories are very similar.

Figure A.11(a) shows the temporal evolution of the Reynolds number  $Re(t)$ , based on the relative velocity of the sphere with respect to the fluid. Three randomly chosen independent simulations (of a total of

200) are shown, labeled as S1, S2, and S3. For each simulation, the trajectory of the sphere is computed for 200 seconds, but only the central interval from 50 to 150 seconds is analyzed. The average Re for each of the simulations is  $\bar{Re}_{S1} = 3783.3$ ,  $\bar{Re}_{S2} = 3834.4$ ,  $\bar{Re}_{S3} = 3584.1$ . Figure A.11(b) shows the spectral analysis (discrete Fourier transform) of the  $Re(t)$ . The behavior of the three evolutions is similar. In all cases, large amplitudes are observed in the ranges 0.25 Hz to 0.5 Hz and 1 Hz to 1.5 Hz.

In the following, all the histograms show the probability  $P[\%]$  of the determined number of successes over the total number of observations, e.g., in Figure A.12 the number of times that the Re, the  $C_D$  or the mean velocity of the sphere  $V_s$  is found in a certain range of values over the total number of recorded observations. Figure A.12(a) shows the statistical distribution of the Re number found in all simulations for data set 1 and set 2 corresponding to the drag law described in Eq. (A.10) and Eq. (A.11), respectively. The histogram is built by dividing the interval between the minimum and the maximum observed Reynolds into ten bins. According to the numerical results, the Reynolds number ranges from 7.5 to 17527, and 37 % of the time, it is in the range of 1760 to 3512, centered at 2636. This fact modified the drag coefficient accordingly. Figure A.12(b) shows the statistical distribution of drag coefficient  $C_D$  using ten bins from 0.36 (min 0.352) to 0.441, including in the last bin values that exceed the corresponding range, with a very low occurrence (max 5.44).

Finally, Figure A.12(c) shows the experimental and numerical, statistical distributions of the absolute (not relative to the fluid) velocity of the sphere. The experimental values are computed based on the difference of sphere positions in successive frames. The difference between the positions of the sphere at time steps corresponding to the experimental frames is used to obtain an equivalent value for the numerical simulations. The numerical values are shown for both data sets 1 and 2, corresponding to the two drag laws described in Section A.3 Eqs. (A.10) and (A.11), respectively. The velocity statistical distributions are qualitatively similar and the difference between the mean velocities with respect to the experimental value is 17 % for set 1 and 24 % for set 2. As previously mentioned, both sets differ only in the drag law used in the model, while the approximation effects near the walls are treated in the same manner.

Figure A.13 shows the statistical distributions in space for both the  $x$ - and  $y$ -axis. For instance, figure A.13(a) shows the probability that the sphere is at a certain position  $x$  of the left vessel for time instant 0 and time instant 5, by symmetry (see Figure A.3). The  $x$  coordinate of the left vessel has been divided into 6 bins. The probabilities for the right vessel are not shown since they are equivalent to those of the left vessel via appropriate reflection symmetry. The results for time instants 3-4 are shown in Figure 13 (Cont.); the total number of time instants ( $n_t$ ) is 5. Similarly, the statistical distributions for a certain position on the  $y$ -axis is shown in Figure A.13(b). In all cases, the probabilities for both experimental and numerical models (see Section A.3) are shown. To quantitatively compare the two numerical drag law models with respect to the experimental values, the average absolute deviations, defined as  $\|e\| = \sum_t \left( \frac{\sum_i |P(X_i)_s - P(X_i)_e|_x}{\text{Bins}_x} + \frac{\sum_i |P(X_i)_s - P(X_i)_e|_y}{\text{Bins}_y} \right) /$

were computed for two different drag laws, resulting in 3.4 % and 4.14 % for sets 1 and 2, respectively. Although the treatment of the fluid sphere is simplified in the present model, the average absolute deviation is below 5 %, which indicates an acceptable error.

Magnus and Saffman forces has been computed to evaluate their influence in the present analysis. Regarding the highly transient behavior of the problem, the forces are computed using a rotation with low recurrence of 1.1 rad/s estimated from the images. According to [37], Magnus coefficient is taken as 0.04, hence the resulting Magnus forces are bounded to 1 % relative to the lift due to gradient pressure. Saffman forces evaluated as into [27] are negligible. These bounds justified not to include such forces in the present model.

## A.5. Conclusions

The present work provides a numerical formulation to couple the fluid dynamics analysis of a sloshing problem with the rigid body motion of an immersed sphere. In the proposed fluid solid-rigid analyses, the fluid dynamics affect the rigid body motion; nevertheless, the sphere has no influence on the fluid dynamics. The numerical strategy involves the evaluation of the added mass, drag, lift and wall contact forces, including boundary layer effects developed by proximity of the sphere to the wall. All these facts affect the sphere dynamics.

The proposed numerical model is tested for the settling of a single particle problem for low Reynolds numbers, and the computed results are satisfactory compared to those reported in the literature.

An experiment is proposed to validate the model in a problem with more complex dynamics. A tank, divided into two internal vessels communicated at the bottom, is mounted onto a shake table and subjected to controlled oscillating motions. The tank is filled with water, and a sphere is released inside it. The objective is to determine the position of the sphere during sloshing. The experiments are video recorded and the sphere position is determined via motion capturing technique.

The free surface evolution computed during the time periodic regime reproduces the experiments and provides an initial confirmation that the fluid dynamic behavior is well captured. In the present experiment, the sphere has no influence on the free surface.

The sphere dynamics are not deterministic; hence, a statistical analysis is used to evaluate the experimental and numerical data for the trajectories and velocities.

The trajectory of the sphere and its location at certain instants of the analysis are well described by the model and validated via the experiments.

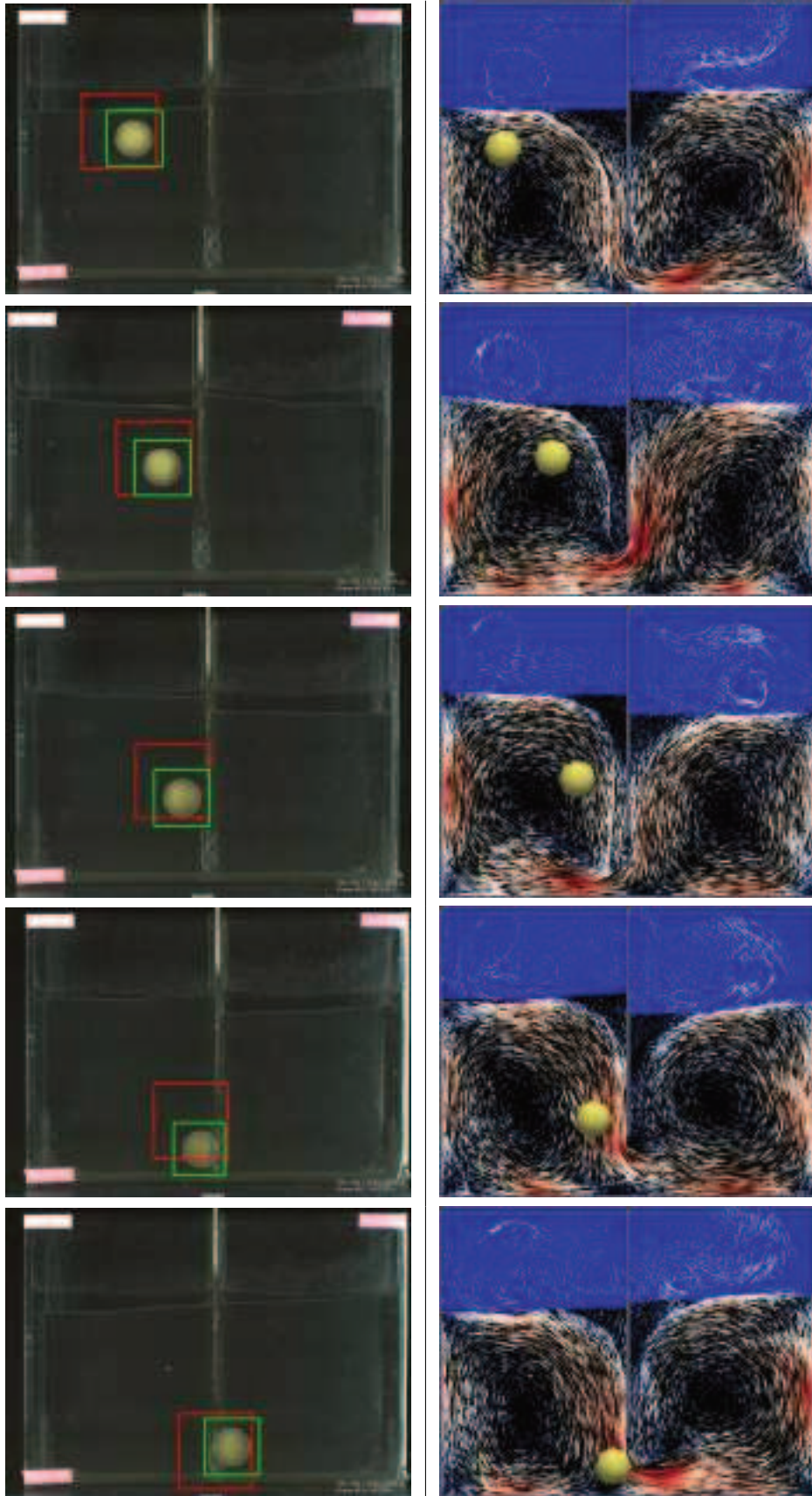
The computed mean velocity of the sphere statistically approaches the experimental values.

The statistical distribution of the sphere location in space is slightly affected by the drag laws, i.e., the model satisfactorily describes the motion of the sphere. The wall effect model is described using two

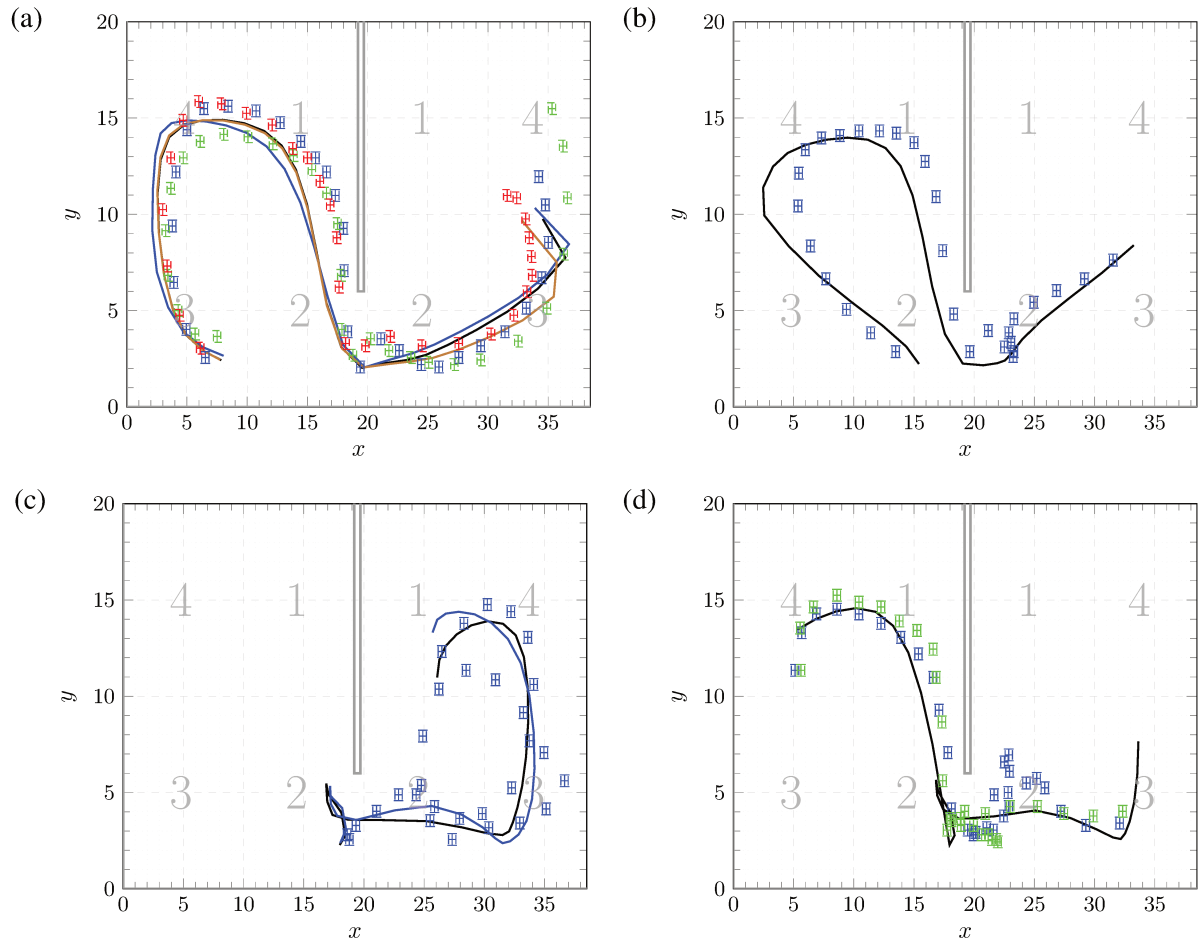


parameters. They could be correlated to Reynolds number and distance to the wall to properly fit lubrication theories. This aspect was not explored in the present research and could be included in future works. Finally, the remaining discrepancies may be attributable to other facts not studied in the present analysis, e.g, strong coupling using body fitted techniques or other procedures that are out of the scope of the present analysis.

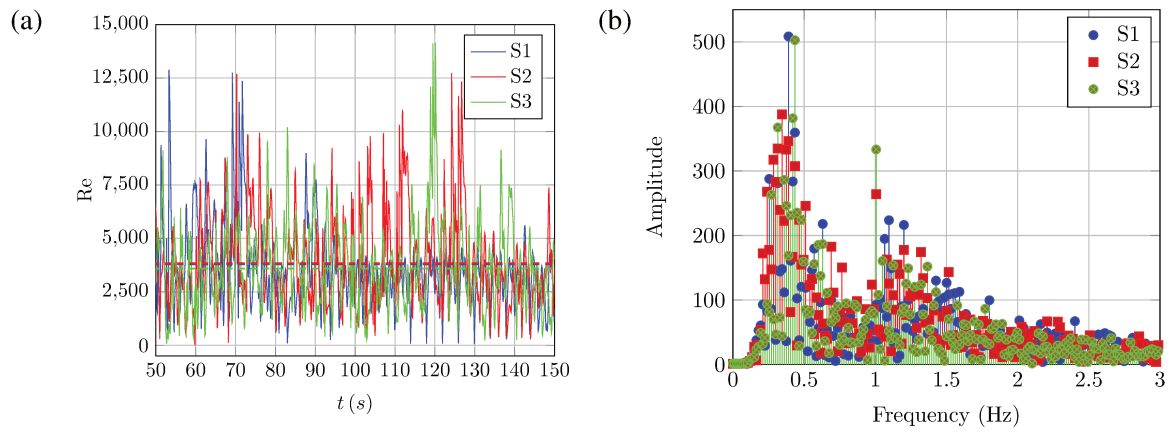
This methodology allows to estimate the behavior of particles immersed in a viscous fluid with large displacements, and is able to detect solid boundaries, in such a way that long term analyses are performed in a less costly way in comparison with immersed or embedded methods. The strategy is able to reproduce the sphere dynamics with and without fluid interfaces.



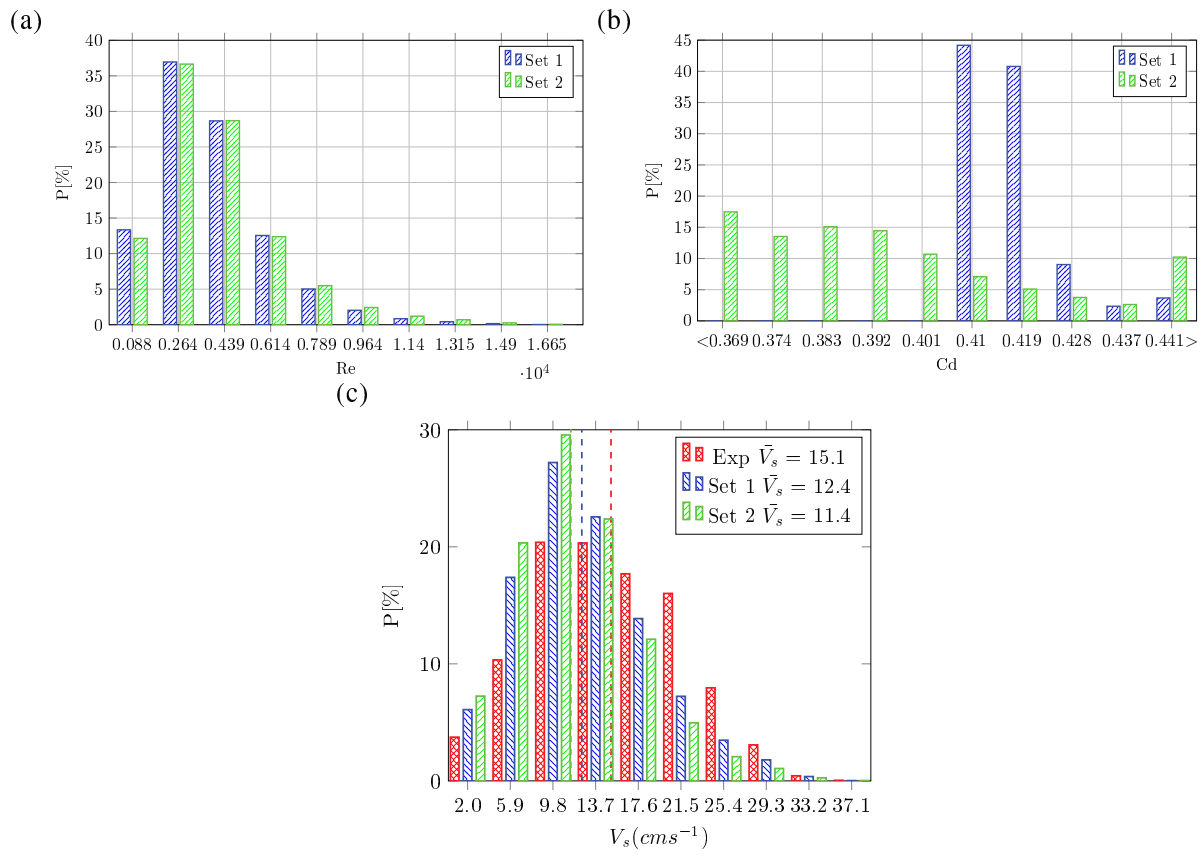
**Figura A.9:** Some frames corresponding to a cycle during steady state periodic regime at the times shown: 0, 3, 5, 7 and 9 according to FIG A.3. Experiment (left column) and simulation (right column).



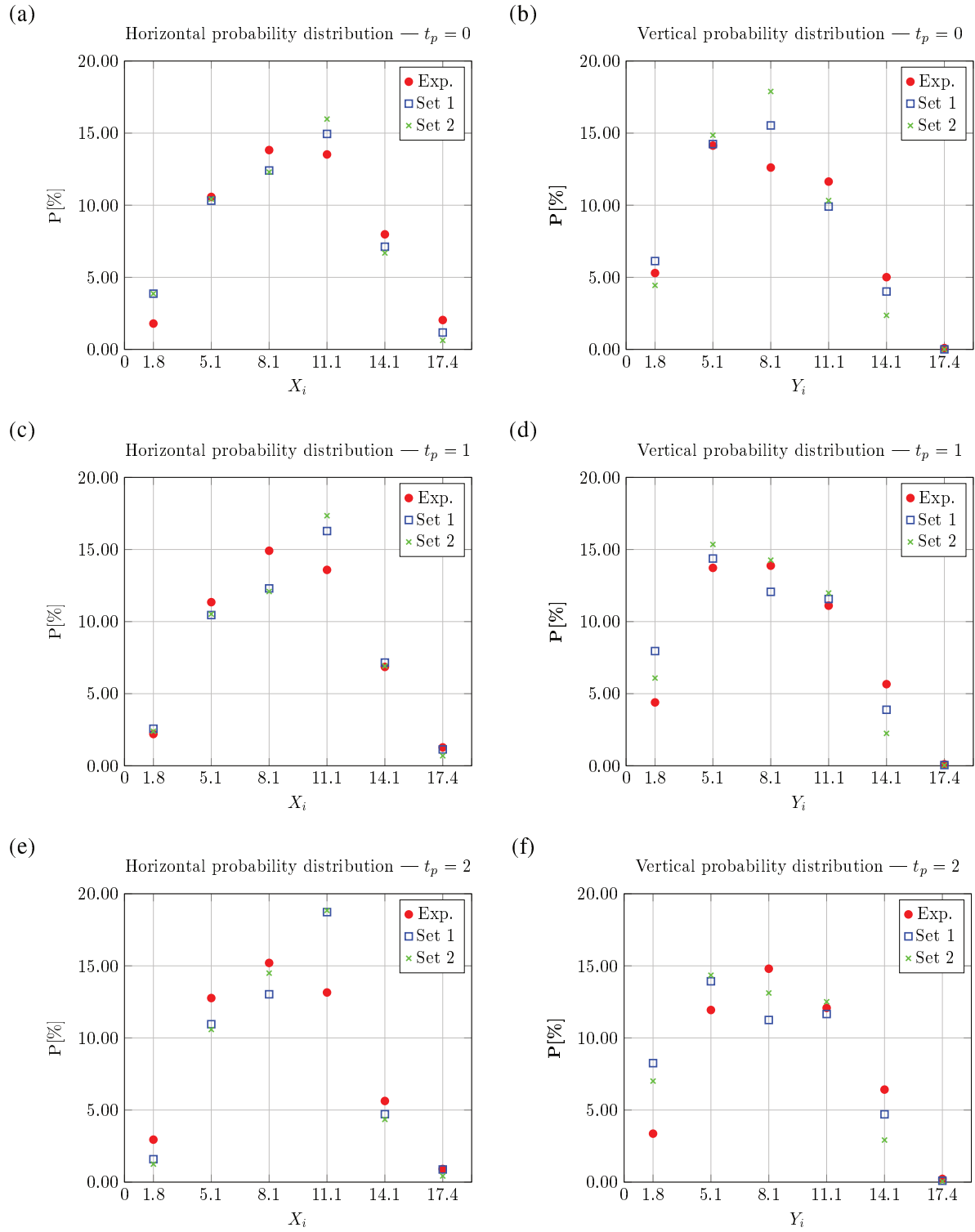
**Figure A.10:** Four different types of trajectories of the sphere starting in  $i$  and finishing in  $j$ . (a) Trajectory 3-4. (b) Trajectory 2-3. (c) Trajectory 2-1. (d) Trajectory 4-3.



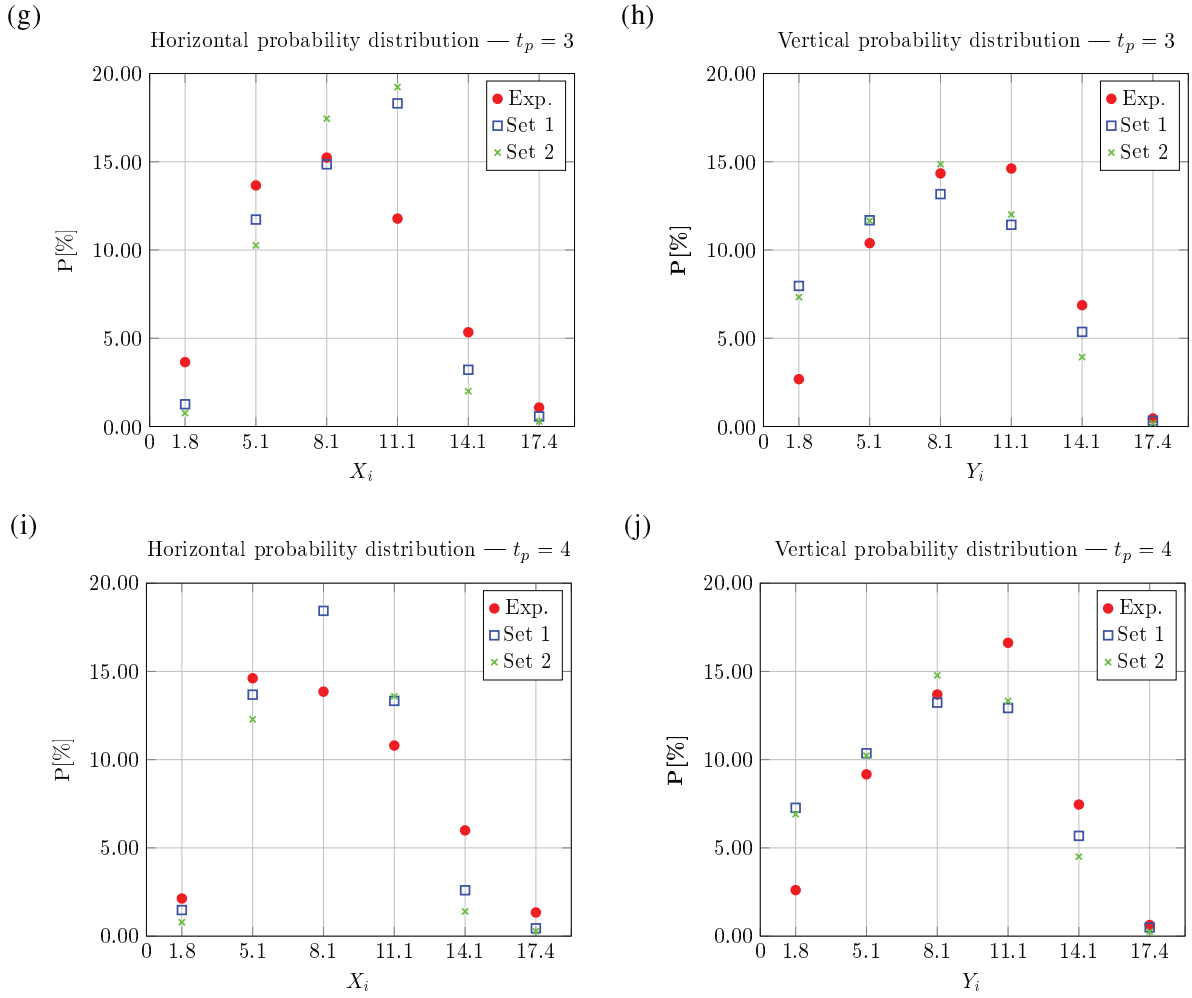
**Figure A.11:** Reynolds numbers for the 3 numerical results. Figure (a) shows the temporal evolution, and (b) shows the discrete Fourier analysis.



**Figura A.12:** Distributions: (a) Reynolds number and (b) drag coefficient from all the simulations for set 1 and set 2, (c) mean velocity of the sphere distribution found in the experiment and two simulation results.



**Figure A.13:** Comparison of the experimental and numerical results at different instants of the analysis after symmetry reflection. Probability distributions in the  $x$  (left) and  $y$  (right) directions for the left vessel.



**Figure 13 (Cont.):** Comparison of the experimental and numerical results at different instants of the analysis after symmetry reflection. Probability distributions in the  $x$  (left) and  $y$  (right) directions for the left vessel.

# Bibliografía

- [1] Farid F Abraham. “Functional dependence of drag coefficient of a sphere on Reynolds number”. En: *The Physics of Fluids* 13.8 (1970), págs. 2194-2195. DOI: [10.1063/1.1693218](https://doi.org/10.1063/1.1693218).
- [2] Jaber Almedeij. “Drag coefficient of flow around a sphere: Matching asymptotically the wide trend”. En: *Powder Technol.* 186.3 (2008), págs. 218-223. ISSN: 00325910. DOI: [10.1016/j.powtec.2007.12.006](https://doi.org/10.1016/j.powtec.2007.12.006).
- [3] C. H. Ataide, F. A. R. Pereira y M. A. S. Barrozo. “Wall effects on the terminal velocity of spherical particles in Newtonian and non-Newtonian fluids”. En: *Brazilian Journal of Chemical Engineering* 16 (dic. de 1999), págs. 387-394. ISSN: 0104-6632. DOI: [10.1590/S0104-66321999000400007](https://doi.org/10.1590/S0104-66321999000400007).
- [4] L. Battaglia, M. A. Storti y J. D’Elia. “Bounded renormalization with continuous penalization for level set interface-capturing methods”. En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84.7 (2010), págs. 830-848. ISSN: 1097-0207. DOI: [10.1002/nme.2925](https://doi.org/10.1002/nme.2925).
- [5] L. Battaglia, M. A. Storti y J. D’Elia. “Simulation of free surface flows by a finite element interface capturing technique”. En: *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 24.3 (2010), págs. 121-133. DOI: [10.1080/10618562.2010.495695](https://doi.org/10.1080/10618562.2010.495695).
- [6] L. Battaglia et al. “Numerical modelling of 3D sloshing experiments in rectangular tanks”. En: *Applied Mathematical Modelling* 59 (jul. de 2018), págs. 357-378. DOI: [10.1016/j.apm.2018.01.033](https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.01.033).
- [7] Howard Brenner. “The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface”. En: *Chemical Engineering Science* 16.3 (1961), págs. 242-251.
- [8] Alexander N. Brooks y Thomas J.R. Hughes. “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 32.1-3 (1982), págs. 199-259. ISSN: 0045-7825. DOI: [10.1016/0045-7825\(82\)90071-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90071-8).
- [9] Gloria Bueno Garcia et al. *Learning image processing with OpenCV*. Packt Publishing Ltd, 2015. ISBN: 9781783287659.

- [10] Antoni Calderer, Seokkoo Kang y Fotis Sotiropoulos. "Level set immersed boundary method for coupled simulation of air/water interaction with complex floating structures". En: *Journal of Computational Physics* 277 (2014), págs. 201-227. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.08.010.
- [11] P A Caron, M A Cruchaga y A E Larreteguy. "Study of 3D sloshing in a vertical cylindrical tank". En: *Physics of Fluids* 30.8 (2018), pág. 82112. ISSN: 10897666. DOI: 10.1063/1.5043366. URL: <https://doi.org/10.1063/1.5043366>.
- [12] P.A. Caron, M.A. Cruchaga y A.E. Larreteguy. "Sensitivity analysis of finite volume simulations of a breaking dam problem". En: *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 25.7 (2015), págs. 1718-1745. DOI: 10.1108/HFF-10-2014-0308.
- [13] Changyoung Choi, Hyun Sik Yoon y Man Yeong Ha. "Flow structure around a square cylinder impacting a wall". En: *Physics of Fluids* 26.1 (2014), pág. 013602. DOI: 10.1063/1.4863450.
- [14] SD Costarelli et al. "An embedded strategy for the analysis of fluid structure interaction problems". En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 300 (2016), págs. 106-128. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2015.11.001. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2015.11.001>.
- [15] MA Cruchaga et al. "Numerical Modeling and Experimental Validation of Free Surface Flow Problems". En: *Archives of Computational Methods in Engineering* 23.1 (2016), págs. 139-169. ISSN: 1886-1784. DOI: 10.1007/s11831-014-9138-4.
- [16] Marcela A Cruchaga, Christian M Muñoz y Diego J Celentano. "Simulation and experimental validation of the motion of immersed rigid bodies in viscous flows". En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.33-40 (2008), págs. 2823-2835. DOI: 10.1016/j.cma.2008.01.014.
- [17] Marcela A Cruchaga et al. "Finite element computation and experimental validation of sloshing in rectangular tanks". En: *Computational Mechanics* 52.6 (2013), págs. 1301-1312. DOI: 10.1007/s00466-013-0877-0.
- [18] SM Dash y TS Lee. "Two spheres sedimentation dynamics in a viscous liquid column". En: *Computers & Fluids* 123 (2015), págs. 218-234. DOI: 10.1016/j.compfluid.2015.10.003.
- [19] C. Diaz-Goano, P.D. Minev y K. Nandakumar. "A fictitious domain/finite element method for particulate flows". En: *Journal of Computational Physics* 192.1 (2003), págs. 105-123. ISSN: 0021-9991. DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00349-8.
- [20] B Ducassou et al. "A fictitious domain approach based on a viscosity penalty method to simulate wave/structure interaction". En: *Journal of Hydraulic Research* 55.6 (2017), págs. 847-862. DOI: 10.1080/00221686.2017.1289257.



- [21] S. Elgeti y H. Sauerland. “Deforming Fluid Domains Within the Finite Element Method: Five Mesh-Based dktng Methods in Comparison”. En: *Archives of Computational Methods in Engineering* 23.2 (2016), págs. 323-361. DOI: [10.1007/s11831-015-9143-2](https://doi.org/10.1007/s11831-015-9143-2).
- [22] O M Faltinsen, R Firoozkoobi y A N Timokha. “Steady-state liquid sloshing in a rectangular tank with a slat-type screen in the middle: Quasilinear modal analysis and experiments”. En: *Physics of Fluids* 23.4 (2011), pág. 42101. ISSN: 10706631. DOI: [10.1063/1.3562310](https://doi.org/10.1063/1.3562310). URL: <https://doi.org/10.1063/1.3562310>.
- [23] O M Faltinsen, O F Rognesbakke y A N Timokha. “Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth”. En: *Physics of Fluids* 18.1 (2006), pág. 12103. ISSN: 10706631. DOI: [10.1063/1.2160522](https://doi.org/10.1063/1.2160522). URL: <https://doi.org/10.1063/1.2160522>.
- [24] Jannette B Frandsen. “Sloshing motions in excited tanks”. En: *Journal of Computational Physics* 196.1 (2004), págs. 53-87. DOI: [10.1016/j.jcp.2003.10.031](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.10.031).
- [25] AJ Goldman, RG Cox y H Brenner. “Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall—II Couette flow”. En: *Chemical Engineering Science* 22.4 (1967), págs. 653-660.
- [26] Erlend Liavåg Grotle, Hans Bihs y Vilmar Æsøy. “Experimental and numerical investigation of sloshing under roll excitation at shallow liquid depths”. En: *Ocean Engineering* 138, Supplement C (2017), págs. 73-85. ISSN: 0029-8018. DOI: [10.1016/j.oceaneng.2017.04.021](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.04.021).
- [27] Allison R. Harris y Cliff I. Davidson. “Particle Resuspension in Turbulent Flow: A Stochastic Model for Individual Soil Grains”. En: *Aerosol Science and Technology* 42.8 (2008), págs. 613-628. DOI: [10.1080/02786820802227337](https://doi.org/10.1080/02786820802227337).
- [28] Howard H. Hu, N.A. Patankar y M.Y. Zhu. “Direct Numerical Simulations of Fluid–Solid Systems Using the Arbitrary Lagrangian–Eulerian Technique”. En: *Journal of Computational Physics* 169.2 (2001), págs. 427-462. ISSN: 0021-9991. DOI: [10.1006/jcph.2000.6592](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6592).
- [29] Prateek Joshi, David Millán Escrivá y Vinicius Godoy. *OpenCV By Example*. Packt Publishing Ltd., 2016. ISBN: 9781785280948.
- [30] Abdullah Abbas Kendoush, Abbas H. Sulaymon y Sawsan A.M. Mohammed. “Experimental evaluation of the virtual mass of two solid spheres accelerating in fluids”. En: *Exp. Therm. Fluid Sci.* 31.7 (2007), págs. 813-823. ISSN: 08941777. DOI: [10.1016/j.expthermflusci.2006.08.007](https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2006.08.007).
- [31] Yongsam Kim y Charles S. Peskin. “A penalty immersed boundary method for a rigid body in fluid”. En: *Physics of Fluids* 28.3 (2016), pág. 033603. DOI: [10.1063/1.4944565](https://doi.org/10.1063/1.4944565).

- [32] Thorsten Kray, Jörg Franke y Wolfram Frank. “Magnus effect on a rotating sphere at high Reynolds numbers”. En: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 110 (2012), págs. 1-9. ISSN: 0167-6105. DOI: [10.1016/j.jweia.2012.07.005](https://doi.org/10.1016/j.jweia.2012.07.005).
- [33] Fatih Kurugollu, Bülent Sankur y A Emre Harmanci. “Color image segmentation using histogram multithresholding and fusion”. En: *Image and vision computing* 19.13 (2001), págs. 915-928. DOI: [10.1016/S0262-8856\(01\)00052-X](https://doi.org/10.1016/S0262-8856(01)00052-X).
- [34] Adrián J. Lew y Gustavo C. Buscaglia. “A discontinuous-Galerkin-based immersed boundary method”. En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76.4 (2008), págs. 427-454. DOI: [10.1002/nme.2312](https://doi.org/10.1002/nme.2312). URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2312>.
- [35] San-Yih Lin y Jeng-Feng Lin. “Numerical investigation of lubrication force on a spherical particle moving to a plane wall at finite Reynolds numbers”. En: *International Journal of Multiphase Flow* 53 (2013), págs. 40-53.
- [36] D. Liu et al. “Comparison of laminar model, RANS, LES and VLES for simulation of liquid sloshing”. En: *Applied Ocean Research* 59.C (2016), págs. 638-649. DOI: [10.1016/j.apor.2016.07.012](https://doi.org/10.1016/j.apor.2016.07.012).
- [37] N. Lukerchenko et al. “Drag Force, Drag Torque, and Magnus Force Coefficients of Rotating Spherical Particle Moving in Fluid”. En: *Particulate Science and Technology* 30.1 (2012), págs. 55-67. DOI: [10.1080/02726351.2010.544377](https://doi.org/10.1080/02726351.2010.544377).
- [38] Renwei Mei y J.F. Klausner. “Shear lift force on spherical bubbles”. En: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 15.1 (1994), págs. 62-65. ISSN: 0142-727X. DOI: [10.1016/0142-727X\(94\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0142-727X(94)90031-0).
- [39] R Mittal y G Iaccarino. “Immersed Boundary Methods”. En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 37.1 (2005), págs. 239-261. ISSN: 0066-4189. DOI: [10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743). arXiv: 1007.1228. URL: <http://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>.
- [40] D Neill, D Livelybrooks y R J Donnelly. “A pendulum experiment on added mass and the principle of equivalence”. En: *Am. J. Phys.* 75.3 (2007), págs. 226-229. ISSN: 00029505. DOI: [10.1119/1.2360993](https://doi.org/10.1119/1.2360993).
- [41] ME O’Neill. “A sphere in contact with a plane wall in a slow linear shear flow”. En: *Chemical Engineering Science* 23.11 (1968), págs. 1293-1298.

- [42] J.D. Orona, S.E. Zorrilla y J.M. Peralta. “Sensitivity analysis using a model based on computational fluid dynamics, discrete element method and discrete phase model to study a food hydrofluidization system”. En: *Journal of Food Engineering* 237 (2018), págs. 183-193. ISSN: 0260-8774. DOI: [10.1016/j.jfoodeng.2018.05.019](https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2018.05.019).
- [43] Roberto Ortega et al. “Energy-consistent simulation of frictional contact in rigid multibody systems using implicit surfaces and penalty method”. En: *Multibody System Dynamics* 41.3 (nov. de 2017), págs. 275-295. ISSN: 1573-272X. DOI: [10.1007/s11044-017-9565-8](https://doi.org/10.1007/s11044-017-9565-8).
- [44] Ashish Pathak y Mehdi Raessi. “A 3D, fully Eulerian, VOF-based solver to study the interaction between two fluids and moving rigid bodies using the fictitious domain method”. En: *Journal of Computational Physics* 311 (2016), págs. 87-113. DOI: [10.1016/j.jcp.2016.01.025](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.01.025).
- [45] PETSc-FEM. *A General Purpose, Parallel, Multi-Physics FEM Program*. <http://www.cimec.org.ar/petscfem>. 2019.
- [46] M. Rahmani y A. Wachs. “Free falling and rising of spherical and angular particles”. En: *Physics of Fluids* 26.8 (2014), pág. 083301. DOI: [10.1063/1.4892840](https://doi.org/10.1063/1.4892840).
- [47] John C Russ. *The image processing handbook*. CRC Press, 2016.
- [48] Conrad Sanderson y Ryan Curtin. “A User-Friendly Hybrid Sparse Matrix Class in C++”. En: *Mathematical Software – ICMS 2018*. Ed. por James H. Davenport et al. Springer International Publishing, 2018, págs. 422-430. ISBN: 978-3-319-96418-8. DOI: [10.1007/978-3-319-96418-8\\_50](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96418-8_50).
- [49] Conrad Sanderson y Ryan Curtin. “Armadillo: a template-based C++ library for linear algebra”. En: *Journal of Open Source Software* 1.2 (2016), págs. 26-27. DOI: [10.21105/joss.00026](https://doi.org/10.21105/joss.00026).
- [50] Hermann Schlichting y Klaus Gersten. *Boundary-layer theory*. Springer, 2016. DOI: [10.1007/978-3-662-52919-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5).
- [51] Mario A. Storti, Luciano Garelli y Rodrigo R. Paz. “A finite element formulation satisfying the discrete geometric conservation law based on averaged Jacobians”. En: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 69.12 (2012), págs. 1872-1890. DOI: [10.1002/flid.2669](https://doi.org/10.1002/flid.2669).
- [52] Jaroslav Strnadel, Miloslav Simon e Ivan Machač. “Wall effects on terminal falling velocity of spherical particles moving in a Carreau model fluid”. En: *Chemical Papers* 65.2 (2011), págs. 177-184. DOI: [10.2478/s11696-011-0005-6](https://doi.org/10.2478/s11696-011-0005-6).
- [53] Shi Tao, Zhaoli Guo y Lian-Ping Wang. “Numerical study on the sedimentation of single and multiple slippery particles in a Newtonian fluid”. En: *Powder Technology* 315 (2017), págs. 126-138. DOI: [10.1016/j.powtec.2017.03.039](https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.03.039).

- [54] A. Ten Cate et al. “Particle imaging velocimetry experiments and lattice-Boltzmann simulations on a single sphere settling under gravity”. En: *Phys. Fluids* 14.11 (2002), págs. 4012-4025. ISSN: 10706631. DOI: [10.1063/1.1512918](https://doi.org/10.1063/1.1512918).
- [55] Tayfun E Tezduyar. “Finite elements in fluids: stabilized formulations and moving boundaries and interfaces”. En: *Computers & Fluids* 36.2 (2007), págs. 191-206. DOI: [10.1016/j.compfluid.2005.02.011](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2005.02.011).
- [56] Frank M. White. *Viscous Fluid Flow*. Mc.Graw-Hill, 1991.
- [57] Jianming Yang y Frederick Stern. “Sharp interface immersed-boundary/level-set method for wave–body interactions”. En: *Journal of Computational Physics* 228.17 (2009), págs. 6590-6616. DOI: [10.1016/j.jcp.2009.05.047](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.05.047).

## Anexo B

# Embedded finite volume technique for fluid/rigid-body interaction problems

Esteban A. Zamora<sup>1</sup>, Laura Battaglia<sup>1,3</sup>, Marcela Cruchaga<sup>2</sup>, Mario Storti<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), UNL-CONICET, Predio CONICET Santa Fe "Dr. Alberto Cassano", Colectora Ruta Nac. Nro 168, Km 0, Paraje El Pozo, Santa Fe, Argentina

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Santiago de Chile (USACH), Av. Bdo. O'Higgins 3363, Santiago de Chile, Chile.

<sup>3</sup> Grupo de Investigación de Métodos Numéricos en Ingeniería (GIMNI), Univ. Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe, Lavaise 610, Santa Fe, Argentina.

## Abstract

This work describes a formulation for the treatment of submerged rigid solids within the framework of the finite volume method. The proposal consists in considering the solid as a porous region and the hydrodynamic forces that arise from the Darcy terms. The methodology is implemented in an open code that allows large-scale calculations. In the present work, we present the methodology and its verification using cases of study, to demonstrate spatio-temporal numerical convergence and the accuracy of the imposition of boundary conditions. For this purpose, cases that have an analytical solution are analyzed, such as the Pouiseuille flow, the first and second Stokes problems, and immersed walls that move with imposed movement generating different pressures between both faces. A moving cylinder analysis is shown to validate the numerical technique in comparison with cases reported in the literature. The analysis leads to stability conditions against external parameters such as permeability. The ability of the method to represent moving walls and immersed bodies with imposed movement is established.

## Highlights

- An embedded finite volume formulation is proposed for rigid solids interacting with fluids.
- Boundary conditions varying in space and time are easily imposed.
- Simple and precise calculation of the hydrodynamic forces.
- Satisfactory validation of the hydrodynamic coefficients.
- Optimal relation between model parameter and time step and mesh size to obtain convergence.

### B.1. Introduction

The forces acting on rigid objects immersed in fluids are present in a broad range of engineering problems, e.g., hydraulic structures or offshore structural elements [23], free fall of one or several bodies or particles [9, 32], submerged fixed or moving objects [6, 10, 19], among others.

Several numerical techniques have been developed to study the interaction between fluids and solids, considered here as rigid bodies. Regarding specifically the numerical discretization for solving specially the fluid dynamics, the most popular are the finite element method [7, 14, 27] and the finite volume method [24, 2, 25]. Nevertheless, other strategies are also applied, as the lattice-Boltzmann method, [9, 4], or particle methods [18].

Beyond the numerical discretization, there are several approaches to identify the position of a solid immersed in a fluid. A first classification can be made in body fitted and immersed boundary (IB) methods [22].

On the one side, body fitted techniques study the fluid flow representing the body as an internal boundary defined with specific entities, such as nodes or faces of a grid, as in arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) methods [14, 7] or other mesh-deforming methods [31]. Then, the interface is precisely followed and the forces on the body are determined by integration over the grid entities. Difficulties arise when the mesh or grid has to be strongly modified because of the body displacement, either by mesh-moving techniques [21] or by re-meshing the new shape of the fluid domain [27, 5], being these strategies usually challenging and expensive from the computational point of view. Furthermore, collisions of solids with walls, or between particles could make the strategy fail due to the substantial change required by the fluid domain discretization.

On the other side, IB methods rely on fixed discretizations for the fluid flow solution, including the space occupied by the solid. Then, these strategies require some additional definition for the position of the body and its effects on the fluid flow, that can be given by an immersed boundary [28, 25, 10], or by identifying the set of cells occupied by the body [26, 24], as in embedded techniques. On the first ones, the solid effects are transmitted to the flow by modifications introduced in the equations of the fluid specifically at

the vicinity of the contour [16, 15, 10]. In embedded techniques, the equations applied to the cells occupied by the body are solved as fluid ones with a different set of certain properties [12, 26]. In other cases, a Darcy term is considered in Navier-Stokes momentum equations, where the distinguishing parameter is the permeability [1], treated as a penalization term, as in the so-called volume penalization methods [6, 19, 4] or fictitious domain methods [8]. Then, the effect of the body movement is directly included in the fluid representation by means of a force term.

Regarding the evolution of the mask function that identifies the solid phase, some approaches are typically applied. In [8] a level set-based function is used to identify the intersection of cells near the edge of the solid boundary to improve the accuracy of the fictitious domain methods, while in [32] the cell labelling is performed with a volume-of-fluid technique. Other techniques, oriented to pure IB methods, are based on using methods that cut cells [28], or use curvilinear coordinates [25].

Here, a finite volume method (FVM) is applied to solve the incompressible and viscous fluid flow. With the aim of representing an immersed rigid body inside a fluid media, the solid is identified as an embedded region where an extra penalty (permeability) term is activated in the fluid flow equations, so that it is classified as a volume penalization method. Then, the body is properly considered inside the fluid media, and the forces over the rigid are determined by integrating the penalty term. The numerical examples cover cases where the displacements of the solid are imposed, and the corresponding forces have to be recovered.

Numerical experiments with imposed and numerical motion are presented to assess whether a solid object can be modeled by the proposed formulation. Two groups of cases are proposed. The first group, where one of the boundaries is represented with the solid-like cells, counts on a Pouiseuille flow with embedded regions as fixed boundaries, and the first Stokes problem [30] and the second Stokes problem [13] as moving boundary tests. The second group shows the performance of the algorithm for two moving immersed objects: a piston-like flow and an oscillating cylinder.

The proposed formulation is presented in Section B.2, while the numerical strategy is developed in Section B.3. The numerical tests are reported in Section B.4. Finally, concluding remarks are made in Section B.5.

## B.2. Governing equations

### B.2.1. Fluid dynamic equations

The fluid flow is mathematically modeled as Newtonian and incompressible, using the Navier-Stokes system of equations:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f}_b \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

where  $\mathbf{u}$  is the flow velocity,  $\rho$  is the fluid density,  $\mathbf{f}_b$  represents volumetric external forces per unit mass, i.e., standardly represents the gravity acceleration  $g$ . Moreover, the stress tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  is defined as  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ , where  $p$  is the pressure,  $\mathbf{I}$  the identity tensor and  $\mu$  is the fluid viscosity. These equations are solved over the whole domain  $\Omega$ , which comprises the fluid region  $\Omega_f$  and the solid region  $\Omega_s$ , sketched in Figure 2.2a.

**Figure B.1:** Domain of analysis  $\Omega$ , including fluid  $\Omega_f$  and solid  $\Omega_s$  regions: (a) continuous and (b) discrete with cell identification.

In particular, we propose as the key feature of the present work to model immersed solids as an external force described by a Darcy-type term  $\mathbf{f}_p$ , that is added to  $\mathbf{f}_b$ , defined as:

$$\mathbf{f}_p = -\kappa(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \quad (\text{B.2})$$

where  $\kappa$  is a penalization parameter that identifies solid or fluid regions according to  $\kappa(\mathbf{x}) \equiv \{\forall \mathbf{x} \in \Omega \mid \kappa \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega_s \wedge 0 \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega_f\}$ . Note that  $\kappa$  is related to the permeability of the fictitious porous media. The identification of solid regions during time is made according to the algorithm reported in subsection B.3. The velocity of the rigid solid is  $\mathbf{u}_s$  that can be computed as  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_c + \omega \times (\mathbf{x}_c - \mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega_s$ , where  $\mathbf{u}_c$  and  $\omega$  are the translation and angular velocities at the center of mass of the solid ( $\mathbf{x}_c$ ).

### B.3. Numerical strategy

In this Section, the strategies used to solve fluid and solid dynamics are presented. We will describe only imposed translation motions to verify the proposed strategy.

#### B.3.1. Fluid flow

Equations (B.1), including the Darcy term of Equation (B.2), is discretized with a finite volume method (FVM) in *Code\_Saturne* [2], a multiphysics parallel scientific code, where the Darcy term has been implemented. The solution scheme is Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent (SIMPLE-C) with a first-order time integration scheme for transient simulations.

The embedded solid is identified with a positive penalization parameter in each cell, as sketched in Figure 2.2b. The fluid or solid condition of each cell depends on the position of the cell center with respect



to the contour  $\Gamma$  of the domain, giving a staircase representation of the interface. Such representation has the advantage of using regular grids, which are easy to obtain and computationally efficient, independently of the body shape. However, higher precision in the solutions would require finer grids, principally in the neighborhood of the bodies, increasing the computational costs, mostly in moving body cases.

The rigid body is tracked at each time step according to the solid velocity  $\mathbf{u}_s$  and the penalty field for the cells inside the body is updated by identification of the cells as a solid or a fluid one performing a geometric classification. For simple geometries, cell identification is made by using the corresponding body-defining parametric equation (e.g., circles, spheres, ellipsoids, blocks, etc). More complex geometries require techniques like the point-in-polygon algorithm [17] or level-set [8], as an example.

Note that the distribution of  $\kappa$  is a non-continuous function defined as a fixed value in cells whose center is identified as solid and null in other cases. The distribution of this parameter is not smoothed in the discrete representation. Using a too high value for  $\kappa$  in the solid can produce numerical instabilities, so that it has to be chosen with care. From the dimensional point of view  $\kappa$  has dimensions of  $s^{-1}$ , and so it should be chosen as  $\kappa \propto \nu/h^2$  (being  $\nu$  a kinematic viscosity and  $h$  the mesh size), consistently with the diagonal terms of the diffusive discrete operator. The Darcy term in Equation (B.2) is implicitly treated in time to avoid instabilities when large  $\kappa$  values are considered, leading to an additional positive diagonal term in the momentum system equation for the solid cells and null for fluid cells.

Notice that the body shape is represented using a staircase function. In summary, the approach  $\kappa(\mathbf{x})$  used to identify solid regions can be easily applied to rigid solids with well-determined shapes represented on regular fixed meshes that can be efficiently managed from a computational point of view. The main advantage is that no additional equation is required to track the solid-liquid interface. Moreover, the time implicit scheme used to solve the Darcy term warrants the stability of the term including  $\kappa$  for the range of values numerically tested. On the other hand, mesh refinement is needed to obtain a good representation of the body shape and accurate results near the interface.

### B.3.2. Computation of the fluid forces acting on the body

This Section describes the computation of the forces acting on the rigid body. Instead of computing the hydrodynamic forces using the stress tensor over the body surface, here it is recovered from the penalization term. This procedure avoids the complex reconstruction of the fluid-stress tensor along the body surface.

The computation is performed by integrating Equation (B.1) on  $\Omega_s$ , and considering the divergence theorem, it is

$$\int_{\Omega_s(t)} \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{g} + \kappa(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_{Int}(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (\text{B.3})$$

The total forces exerted by the fluid on the body are  $\mathbf{F} = \int_{\Gamma_{Int}(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$ , where  $\Gamma_{Int}(t)$  is the body countour and  $\hat{\mathbf{n}}$  is the outward unit normal vector corresponding to the body surface. To find the material derivative on the solid domain, the term  $\mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u}$  is added and substracted in Equation (B.3), leading to

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_s(t)} \rho \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{g} + \kappa(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \right] d\Omega \quad (\text{B.4})$$

The surface of the body is *material* with respect to the body velocity  $\mathbf{u}_s$ , so that, according to the Reynolds transport theorem,

$$\int_{\Omega_s(t)} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \mathbf{u} \right) d\Omega = \int_{\Omega_s(t)} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\Omega, \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_s(t)} \rho \mathbf{u} d\Omega \right) = \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \quad (\text{B.6})$$

where  $D/Dt$  denotes the material derivative, and  $\mathbf{M}$  is the total linear momentum of the embedded fluid.

The second term inside Equation (B.4) tends to zero when  $\mathbf{u}$  inside the solid tends to  $\mathbf{u}_s$ . Then, in a finite volume discrete domain, the fluid forces over the solid can be computed as,

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{M}^{n+1} - \mathbf{M}^n}{\Delta t} - \sum_{\Omega_j \in \Omega_s(t^{n+1})} \rho \mathbf{g} \Omega_j + \sum_{\Omega_j \in \Omega_s(t^{n+1})} \rho \kappa (\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_{sj}^{n+1}) \Omega_j, \quad (\text{B.7})$$

where,

$$\mathbf{M}^n = \sum_{\Omega_j \in \Omega_s(t^n)} \rho \mathbf{u}_j^n \Omega_j. \quad (\text{B.8})$$

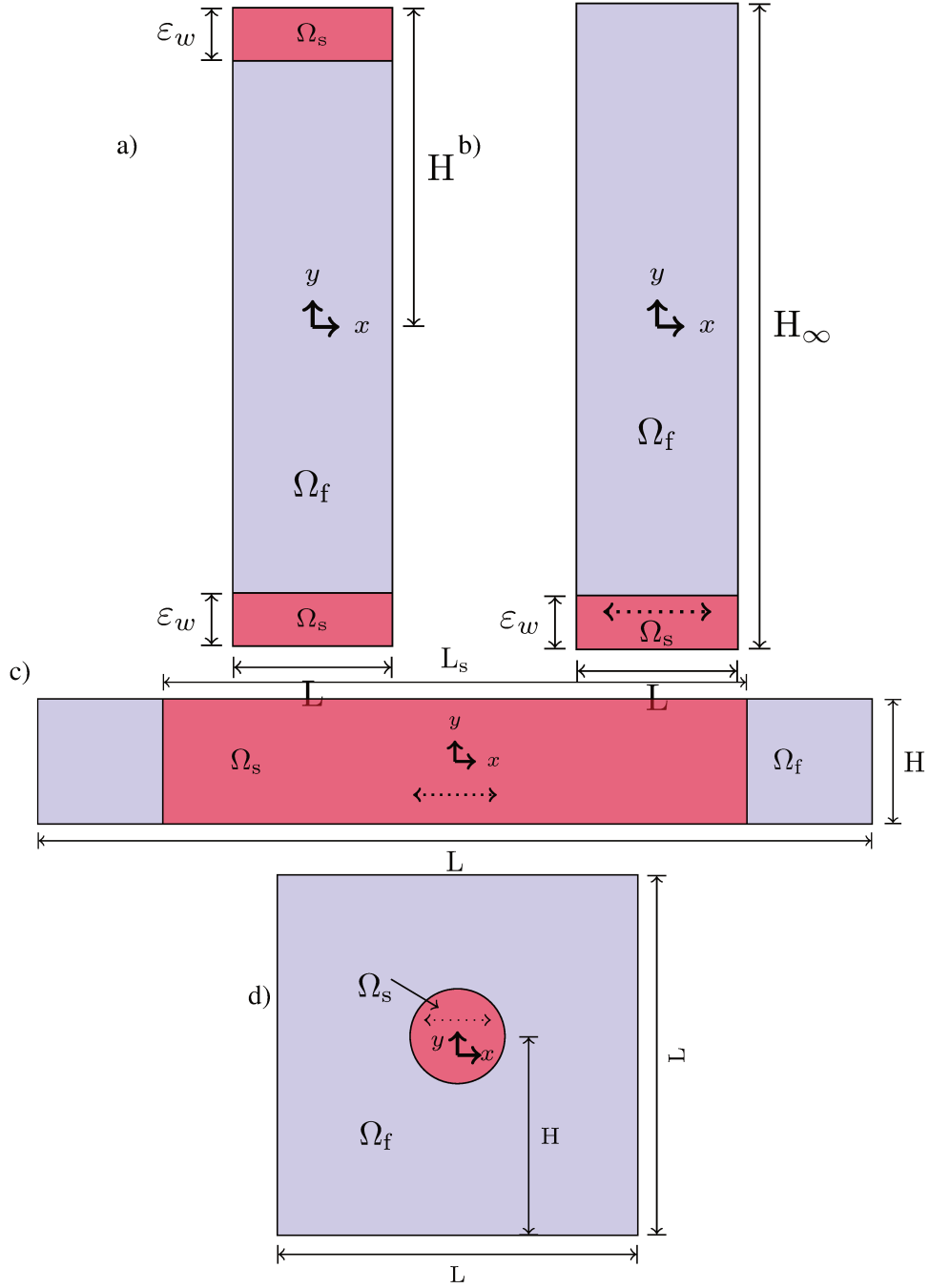
and  $j$  identifies the solid cell.

Note that the first term in Equation (B.7) represents the inertia of the fictitious fluid inside the solid, i.e., the embedded mass (not to be confused with the added mass). This term is only active when the solid is accelerated. When rotations in the solid are considered, there is also an embedded rotational inertia that should be considered when computing the torque. The second term in Equation (B.7) is the force derived from the penalization/Darcy term on the fluid.

An additional equation for solving the rigid body dynamics is required where the forces on the body are  $\mathbf{F}$  and the body weight or any other external force on the solid. In the present work, this equation is not solved because only imposed motion cases are studied.

## B.4. Numerical tests

This section reports a numerical convergence analysis of the proposed formulation. To this end, the effects when varying  $\kappa$  and, mesh and time-step sizes are evaluated. A set of problems has been chosen to assess such effects and the accuracy of the computed variables (i.e., velocity, pressure, and body forces) by contrasting the numerical responses with analytical solutions. In spite of the cases being 2D, all runs are performed using a 3D domain with one cell depth  $L_z$  and symmetry conditions in the front and the back faces of each domain.



**Figura B.2:** Geometry. a) Poiseuille flow between parallel plates. b) First and second Stokes problems. c) Internal moving walls: piston-type flow. d) Immersed moving cylinder.

### B.4.1. Fixed wall conditions: Poiseuille flow

The well-known Poiseuille flow between parallel plates is the first run. The aim of this analysis is to verify that wall boundary conditions are satisfactorily taken into account when using the proposed embedded methodology to represent walls.

Figure B.2a sketch the numerical domain, where  $L = 1$  m is the length,  $H = (1 + \varepsilon_w)$  m is the half-height,  $\varepsilon_w = 0.5$  m is the thickness of the wall and  $L_z = 1$  m. The cell  $h$  is taken from 0.125 m to 0.0078125 m, given meshes as M8, M32, and M128 in the figures. In the wall regions, the velocity is imposed as  $u_s = 0$ . Fluid properties are  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup> and  $\mu = 1$  Pa.s. In this case, the flow motion is induced by a unit pressure drop  $\Delta p = 1$  Pa along  $x$ , periodic velocity in  $x = \pm L/2$  are used and slip conditions are considered on the top and bottom boundary of the whole domain.

Figure B.3 shows the results obtained when using the proposed technique for Dirichlet boundary conditions. Figure B.3.a is a color map of the velocity field confirming the analytical velocity profile  $u = \frac{\nabla p}{2\mu}(y^2 - 1)$ . Dimensionless velocity and distances are plotted in Figure B.3.b showing the satisfactory profile when using different meshes. The error in velocity (normalized infinity norm with respect to the analytical velocity) regarding the variation of the mesh and  $1/\kappa$  are shown in Figures B.3.c and B.3.d, respectively.

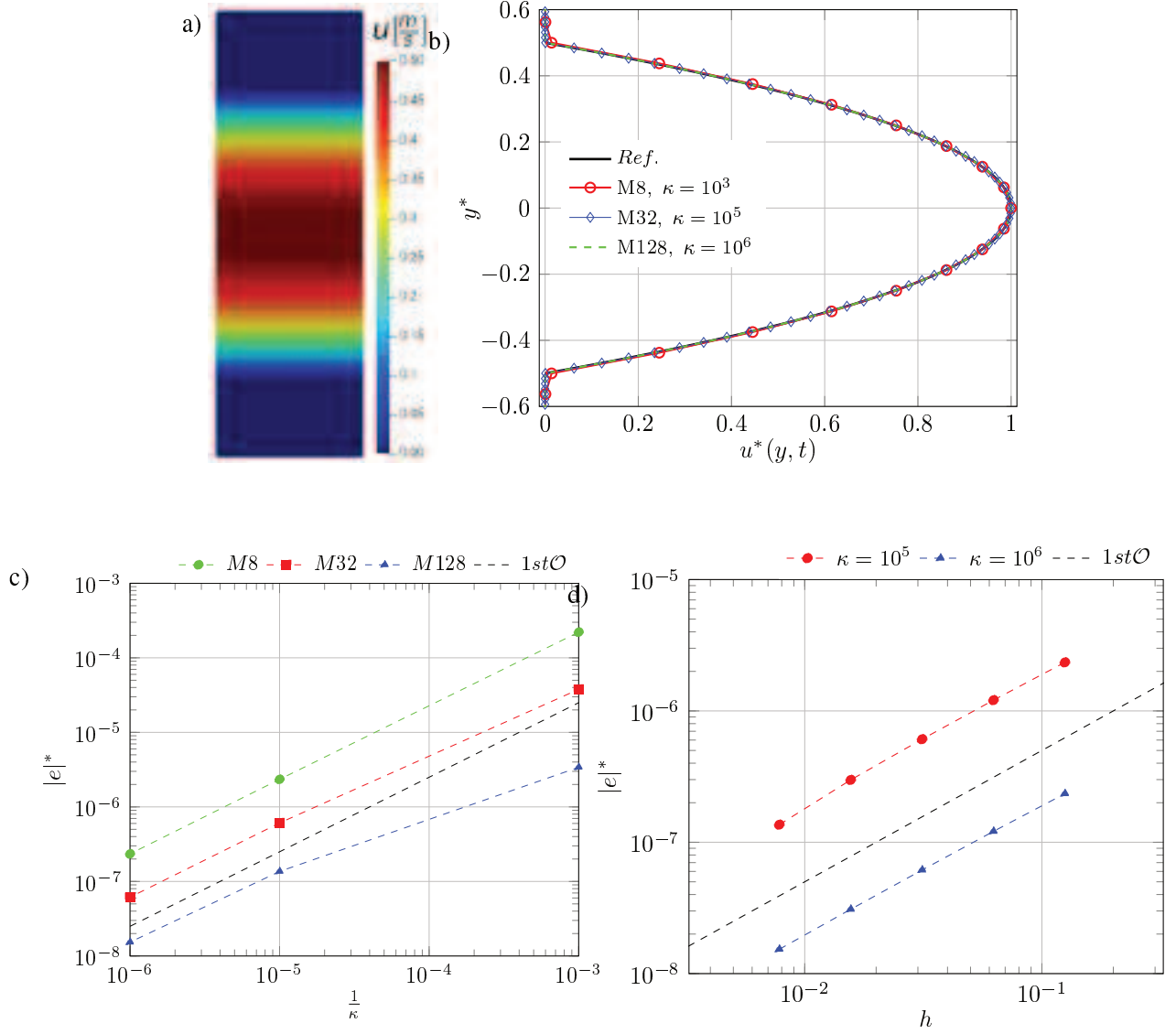
### B.4.2. Tangential moving wall boundaries: first Stokes problem

To demonstrate the capability to describe wall motion, the first Stokes problem is studied. The domain used is shown in Figure B.2b, where  $L = 1$  m is the length,  $H = 30$  m is the height used to fulfill the infinite length condition, i.e.,  $\nabla u = 0$  for  $y \rightarrow \infty$ ,  $L_z = 1$  m,  $\varepsilon_w = 4h$  is the thickness of the bottom moving block and  $h = 1/M$  is the cell size, where  $M$  is taken as 8, 16, 32, and 64 cells per unit length. The imposed velocity at the bottom moving block of width  $\varepsilon_w$  is  $u(t) = U_0 = 1$  m/s. Fluid properties are  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup> and  $\mu = 1$  Pa.s. The case is a steady-state problem; nevertheless, a transient analysis is made with a time step size of 0.001 s. On lateral walls, boundary conditions are periodic velocity in  $x = \pm L/2$ , and a slip condition is applied in  $y = 0$  and  $y = H$ .

The numerical results obtained for the first Stokes problem are reported in Figure B.4. The velocity field map color is shown in Figure B.4.a and Figure B.4.b sketches the velocity along  $y$  at time 10 s.

Figures B.4.c and B.4.d show the convergence analyses performed using different mesh sizes and  $1/\kappa$ . In such figures, the plotted error is the norm  $|e|_{L_1} = \frac{\sum_i |e_i|_{L_1}}{n}$  based on the velocity results.

The velocity field is well reproduced by the numerical method for the three cases represented in B.4.b. Figure B.4.c shows the error measurement as a function of  $1/\kappa$  for different mesh sizes, where it is apparent that higher  $\kappa$  values do not improve the solution, and that these limits depend on the mesh size. As established in Sec. B.3.1, it is  $\kappa \propto 1/h^2$ . By defining the parameter  $C_\kappa = \frac{\kappa h^2}{\nu}$ , limiting values  $\kappa_l$  can be found for each of the discretizations considered, adopting  $C_\kappa = 100$ . These saturation limits are plotted in Figure B.4.c., for



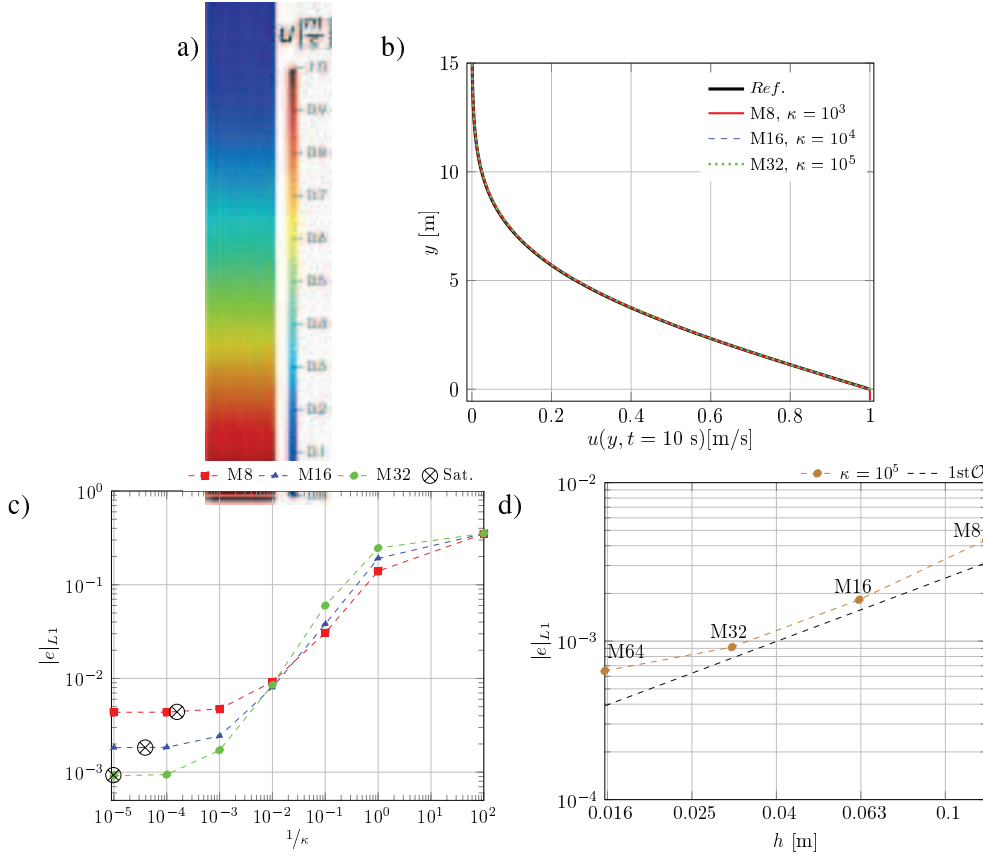
**Figure B.3:** Numerical results for the Poiseuille flow. a) Velocity field in stationary regime; b) dimensionless velocity profile for discretizations M8, M32 y M128; c) velocity error  $|e|^*$  variation with respect to  $1/\kappa$  for different mesh sizes  $M$ ; d) velocity error  $|e|^*$  variation with respect to the mesh discretization for different  $\kappa$  values. As a reference, first-order convergence is sketched.

$1/\kappa$  and intersecting the corresponding convergence curves for each  $M$ .

Furthermore, Figure B.4.d presents an extended mesh convergence analysis for  $\kappa = 10^5$  compared to a first order convergence tendency, showing the correlation for certain range, and a saturation for such permeability for  $h < 0.0315$  m (M32).

### B.4.3. Tangential moving wall boundaries: second Stokes problems

To demonstrate the capability to describe wall motion varying in time, the second Stokes problem is studied. The domain, fluid properties, and discretizations are the same used above. The imposed velocity at the bottom moving block is  $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$  with  $U_0 = 2\pi$  m/s and  $\omega = 2\pi$  rad/s. The time-depending wall velocity implies adding difficulties into the formulation, i.e, the acceleration needs to be considered and the inertial



**Figura B.4:** Numerical results for the first Stokes problem. a) Velocity field; b) velocity profile in height at 10 s of simulation; c) error measurements as a function of  $1/\kappa$  and an estimation of saturation limit for different mesh discretizations ; d) Mesh convergence for  $\kappa = 10^5$ . As a reference, first-order convergence is sketched.

forces of the fictitious fluid play a role (see Equation B.7). The used time step is fixed to fulfill two different Fourier numbers ( $Fo = \Delta t \mu / h^2$ ),  $Fo = 4$  and  $Fo = 0.5$ .

The results for the second Stokes problem are presented in Figure B.5. The map color of the velocity field is shown in Figure B.5.a and Figure B.5.b sketches the velocity along  $y$  at time 9.55 s. For the present case, the forces per unit area are chosen to evaluate the results. The analytical solution is taken from [20]. Figure B.5.c (obtained for  $Fo = 4$ ) and Figure B.5.d (computed for  $Fo = 0.5$ ) present the forces (using Equation B.7) per unit area computed using different discretizations. Dimensionless values for stress ( $\hat{\tau} = \tau / \tau_{max}$ , with  $\tau_{max} = \sqrt{\rho \omega \mu} U_0$  analytically found) and velocities ( $\hat{u} = u / U_0$ ) are used in such figures. A satisfactory convergence to the analytical result is observed. Figure B.5.e shows the time evolution for the forces per unit area. To determine the convergence of the method, the root mean square  $RMSE = \sqrt{\sum_n (\zeta - \zeta_p)^2 / N_T}$  is plotted in Figure B.5.f, with  $N_T$  the number of time step evaluated along a period, and  $\zeta$  is either the normalized force per unit area  $\hat{\tau}$  or the velocity  $\hat{u}$ .

As the second Stokes problem is transient, the time step influence has to be evaluated. Here, the already defined  $Fo$  number is chosen to identify the presented cases. Figures B.5.c and B.5.d show simultaneously  $\hat{\tau}$  and  $\hat{u}$  for one period of oscillation for  $Fo = 0.5$  and  $Fo = 4$ , respectively, where a better adjustment is

apparent for  $Fo = 0.5$ . As expected, lower time steps ( $Fo = 0.5$ ) provide better results. In Figure B.5.f, where convergence is separately studied for  $u$  and  $\tau$ , an almost second order convergence is shown for the velocity, while stresses follow a first order-like tendency. The higher convergence order for  $u$  is given by the position of the liquid-solid interface, that in this case it is defined exactly at the center of the first solid cell.

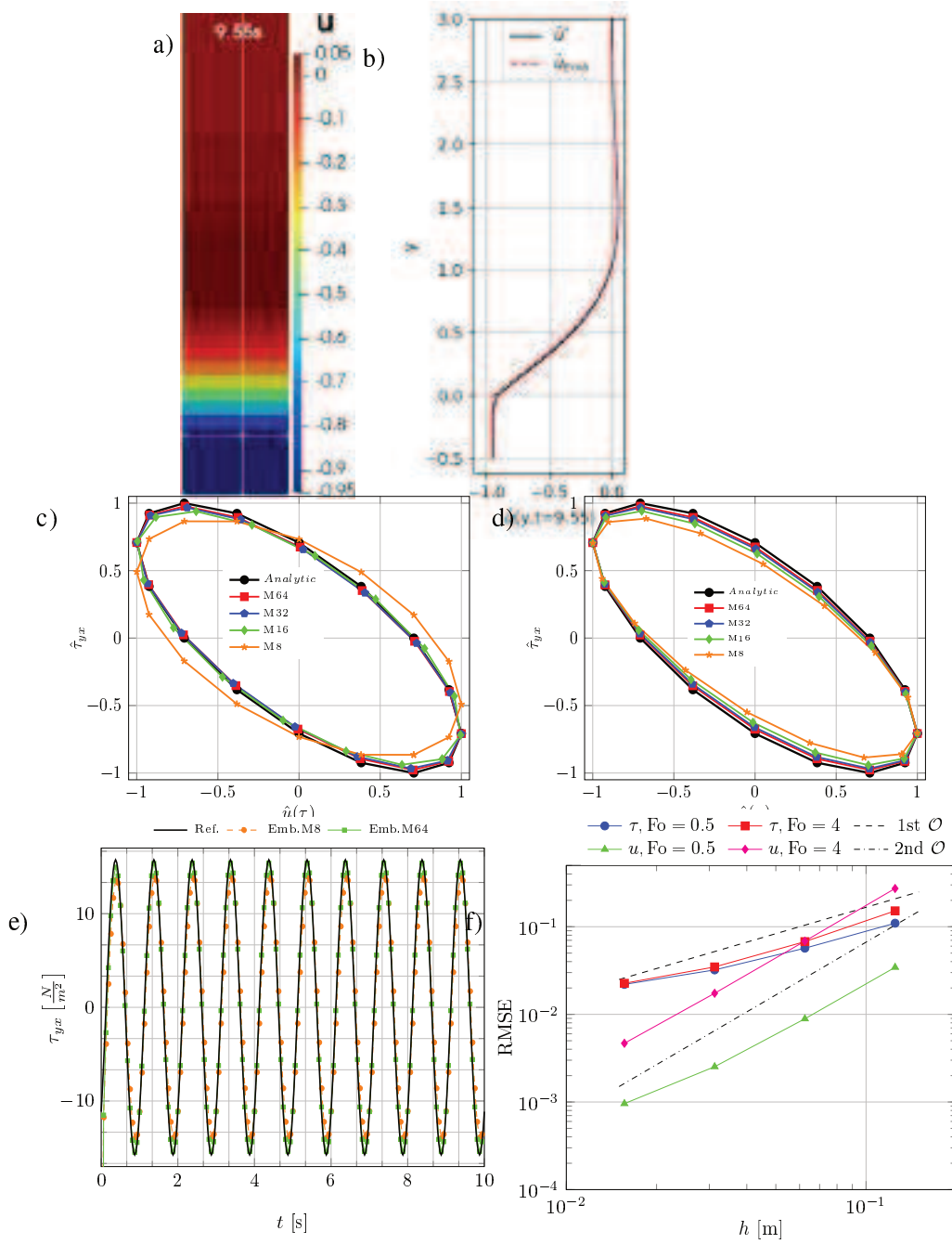
#### B.4.4. Internal moving walls: piston-type flow

We consider a domain of length  $L$  and width  $H$ , shown in Figure B.2.c, where a solid block of length  $L_s$  initially centered at  $x = 0$  horizontally describes a motion  $x_s(t) = A_s \sin(\omega t)$ , where  $A_s$  is the amplitude of the imposed motion and  $\omega$  is the frequency of oscillation. The problem is periodic in the  $x$  direction so that it represents infinite plates of length  $L_s$  separated by strips of fluid length  $L - L_s$ .

As the wall blocks the fluid in the  $x$  direction, the solution is trivial: the fluid moves with the same velocity as the solid, i.e.  $u_s(t) = \omega A_s \cos(\omega t)$ , and acceleration  $a_s(t) = -\omega^2 A_s \sin(\omega t)$  resulting in a pressure field into the fluid region defined by  $p_f = c - \rho a_s x$ , where  $c$  is a constant. As the flow is periodic, the pressure gradient in the fluid must be compensated by a gradient on the solid given a pressure field  $p_s = d + \rho a_s x \frac{L_s}{L - L_s}$ , where  $d$  is a constant. Then, the pressure exhibits a profile with a saw-tooth wave shape.

This problem was solved for  $L = 1$  m,  $L_s = 0.6$  m,  $L_z = h$ ,  $\rho = 1060$  kg/m<sup>3</sup>,  $A_s = 0.125$  m and  $\omega = 4\pi$  rad/s. The viscosity  $\mu$  is not relevant in the present case because there is no viscous stress.

Figure B.6 plots the results obtained for the piston-type flow. The pressure field is shown in Figure B.6.a. The pressure profiles at different instants of a period of the imposed motion are plotted in Figure B.6.b. The convergence analysis is reported using different meshes, permeability parameters, and Courant number  $Co = U_{max} \Delta t / h$ ,  $U_{max} = \omega A_s$ . The mesh sizes are  $\Delta x = \Delta y = h = L/M$ , with  $M = 50, 100, 200$ , and  $400$ . The permeability parameter defined as previously,  $1/\kappa$  with  $\kappa = 10^n$ ,  $n = 3, 4$ , and  $5$ . Two  $Co$  are considered, taken values  $1$  and  $0.1$ . In the present case of analysis, the fluid force exerted on the solid  $\mathbf{F}$  described by Equation B.7 can be also computed from the pressure drop in the fluid  $\mathbf{F}_p = A_t \Delta p_f = A_t \nabla p_f L_f$ , with  $A_t = H L_z$  the transversal area of the domain. Figures B.6.c and B.6.d, report the comparison of the instantaneous values (computed during the periodic regime) of such forces normalized with the maximum inertial fluid force  $\mathbf{F}_{if} = \rho_f A_{max} L_f A_t$ ,  $A_{max} = \omega^2 A_s$ , and obtained for  $Co = 1$  and  $Co = 0.1$  respectively. The results consistently adjust a 45 degree straight line as better they fulfill convergence. The results improve when reducing the  $Co$  and the mesh size. The effect of mesh and time step sizes on the  $\kappa$  parameter is also apparent, for a given mesh size the results provided increasing  $\kappa$  can deteriorate the convergence, but this fact can be improved by decreasing the time step according to B.6.d. The convergence during time can be summarized using the root mean square  $RMSE = \sqrt{\sum_n (\mathbf{F} - \mathbf{F}_p)^2 / N_T} / \mathbf{F}_{if}$ , where  $N_T$  is the number of time steps evaluated (taken between 10



**Figura B.5:** Numerical results for the second Stokes problem. a) Velocity field in time  $t = 9.55$  s; b) velocity profile in  $x = 0$  and  $t = 9.55$  s, numerical result and reference solution [20]; Forces per unit area vs. velocity for Fourier number c)  $Fo = 4$  and d)  $Fo = 0.5$ ; e) Evolution of the forces per unit area using different meshes for  $Fo = 0.5$  and  $\kappa = 10^5$ ; f) RMSE for the normalized forces for unit area  $\hat{\tau}$  and the velocity  $\hat{u}$ , as a function of  $Fo$  and the mesh size, first and second convergence lines are plotted as a reference.



periods of the analysis) as it is presented in Figure B.6.e. A good convergence rate is observed also when increasing  $\kappa$  (decreasing the permeability parameter  $1/\kappa$ ) up to a limiting value. High  $\kappa$  values degrade the quality of the solution. Moreover, note that too low  $\kappa$  values are not able to properly represent a rigid solid, limiting the lower value to adopt. Nevertheless, the convergence rate is more dependent on mesh and time step sizes at lower  $\kappa$  values. As an example, Figure B.6.f shows a good mesh size convergence rate obtained for a fixed  $\kappa = 10^4$  and  $Co = 0.1$ .

#### B.4.5. Immersed moving cylinder

The present technique is applied to assess the computation of the forces exerted by the fluid on a moving cylinder, previously studied by Costarelli et al. [10] by means of an immersed boundary finite volume method (IB/FVM) and an Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method (ALE/FEM). This example helps to assess the computation of the fluid forces on the body using different numerical techniques. The computational domain is a square cavity of side  $L = 0.38$  m, as sketched in Figure B.2.d, with  $L_z = L$ , the diameter of the cylinder is  $D = 0.1$  m and its center is placed at  $y_c = 0.21$  m from the bottom of the box. The imposed movement is harmonic  $x_s(t) = A_s \sin(2\pi f_s t)$ , with amplitude  $A_s = 0.05$  m in  $x$ -direction and frequency  $f_s = 0.9$  Hz.

The fluid properties are the density  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, and different dynamic viscosities are used to produce different dimensional numbers,  $\mu_1 = 0.05$  kg/(m s),  $\mu_2 = 0.009$  kg/(m s) and  $\mu_3 = 0.001$  kg/(m s).

The mesh size is  $\Delta x = \Delta y = h = L/M$ , i.e. it depends on the selected discretizations,  $M1$ ,  $M2$  or  $M3$ , with  $M1 = 400$ ,  $M2 = 800$ ,  $M3 = 1600$  and the corresponding time steps  $\Delta t_1 = 0.0004$  s,  $\Delta t_2 = 0.0002$  s and  $\Delta t_3 = 0.0001$  s, in such a way that  $\Delta t/\Delta x$  is kept constant.

This problem can be characterized using the non-dimensional numbers, taken from the literature [3]: (i) the Keulegan-Carpenter number  $K = U_{\max}/(f_s D) = 2\pi A_s/D$ , where  $U_{\max}$  is the maximum body velocity, (ii) the Stokes number  $\beta = D^2 \rho f_s / \mu$ , and (iii) the Reynolds number, considering the maximum velocity  $Re = U_{\max} D \rho / \mu = K \beta$ . According to these definitions, here the Keulegan-Carpenter number is adopted constant  $K = 3.14$ ; the Stokes number takes the values  $\beta_1 = 180$ ,  $\beta_2 = 1000$  and  $\beta_3 = 9000$ ; and the Reynolds numbers are  $Re_1 = 565.5$ ,  $Re_2 = 3141.6$  and  $Re_3 = 28274$ .

The immersed moving cylinder was solved with an ALE technique, discretized with a FVM in *Code\_Saturne* [2], i.e. the same solver as the embedded method presented here. All the three cases have been solved by both methods, and results are taken as a reference to compare the convergence and performance of the embedded strategy. The mesh is designed to follow the shape of the cylinder, being the mean mesh size  $h_m = L/M$ , with  $M = 400$  and triangular cells. The time step is  $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  s, and the mesh-movement is performed by a Laplacian operator once the contour displacements are known, within the standard ALE method implemented in *Code\_Saturne* [11].

The obtained pressure and vorticity fields are reported in Figures B.7 and B.8, respectively, for discretization  $M1$ . These figures show fluid dynamics increasing with the  $\beta$ .

The  $x$  component of the forces exerted by the fluid on the solid computed using Equation B.7 are plotted in B.9 using  $M1$ , together with the forces determined for the ALE computation for a non-structured discretization of mesh size  $h \approx 0.00095$ , i.e. of the same order as for  $M = 400$  of the present technique, showing good agreement between methods, mostly for the lower  $\beta$ .

The drag coefficients  $C_D = 2F_D/(\rho D|u_s|^2)$  derived from them are summarized in Table B.1 together with the added mass coefficient  $C_a = 4F_a/(\rho\pi D^2|a_s|)$ . To compute such coefficients, we need to define average drag and mass-added forces, i.e.,  $F_D$  and  $F_a$ . To this end, we assume that the instantaneous drag and added-mass forces are proportional to the velocity and acceleration of the solid, i.e., the forces reported in Figure B.9 can be approximated by least squares to a linear combination of cosine and sine and the resulting coefficients are taken as mean values for the drag  $F_D$  and mass-added  $F_a$  forces used in the computation of the referred coefficients. In addition, the drag coefficient can be computed from the average of the power dissipated by the fluid in a period ( $\bar{P}$ ) as it was reported in [10, 3]. Following such authors,  $C_D^{\bar{P}} = 3\pi\bar{P}/(2|u_s|^3 D\rho) = 3\pi/4F_D/(\rho D|u_s|^2)$ . The power dissipated during time is plotted in Figure B.10.a, for all  $\beta$  examined in this study and solved with  $M1$  including a linear regression to determine the  $\bar{P}$  as their slopes. The average power dissipated,  $\bar{P}$ , was determined by the slope of these lines. These trends confirm those reported in [10].

The  $C_D^{\bar{P}}$  curve is plotted in Figure B.10.b, choosing the values determined with  $M1$  for  $\beta = 180$ ,  $M2$  for  $\beta = 1000$  and  $M3$  for  $\beta = 9000$ . Notice that  $C_\kappa$ , introduced in Sec. B.4.2, provide a reference to estimate whether the parameter  $\kappa$  is properly chosen for each example. Specifically, when  $\kappa$  is chosen such that  $C_\kappa$  is  $\mathcal{O}(100)$ , the best fit in  $C_D^{\bar{P}}$  are obtained. To perform a validation of the present model, a comparison with experimental [3, 29] and numerical [10] drag coefficients  $C_D$  reported in the literature is made in Figure B.10.b, obtaining a good match within them. Notice that  $C_D^{\bar{P}}$  was represented in such a figure because it is the value referred in references [10, 3].

Regarding the computational efficiency, the problem was solved on Intel Xeon nodes of 20 cores of the *Pirayu* (<http://cimec.org.ar/c3/pirayu>) cluster, both for the embedded technique and the ALE method. The embedded runs were performed on sets of 20 to 80 cores, and grids from 600Kcells to 2.5Mcells, giving a mean of 12000 cells per core per second. This performance is of the same order as the one registered with the ALE method, which is about 14000 cells per core per second. The difference between techniques could be attributable to the effect of the penalization term in the convergence of the fluid flow solver.

| $\beta$ | $Re$   | $C_D^{\bar{P}}$ | $C_D$ | $C_a$ |
|---------|--------|-----------------|-------|-------|
| 180     | 565.49 | 1.43            | 1.18  | 1.18  |
| 1000    | 3141.6 | 1.00            | 0.83  | 1.06  |
| 9000    | 28274  | 0.55            | 0.45  | 1.10  |

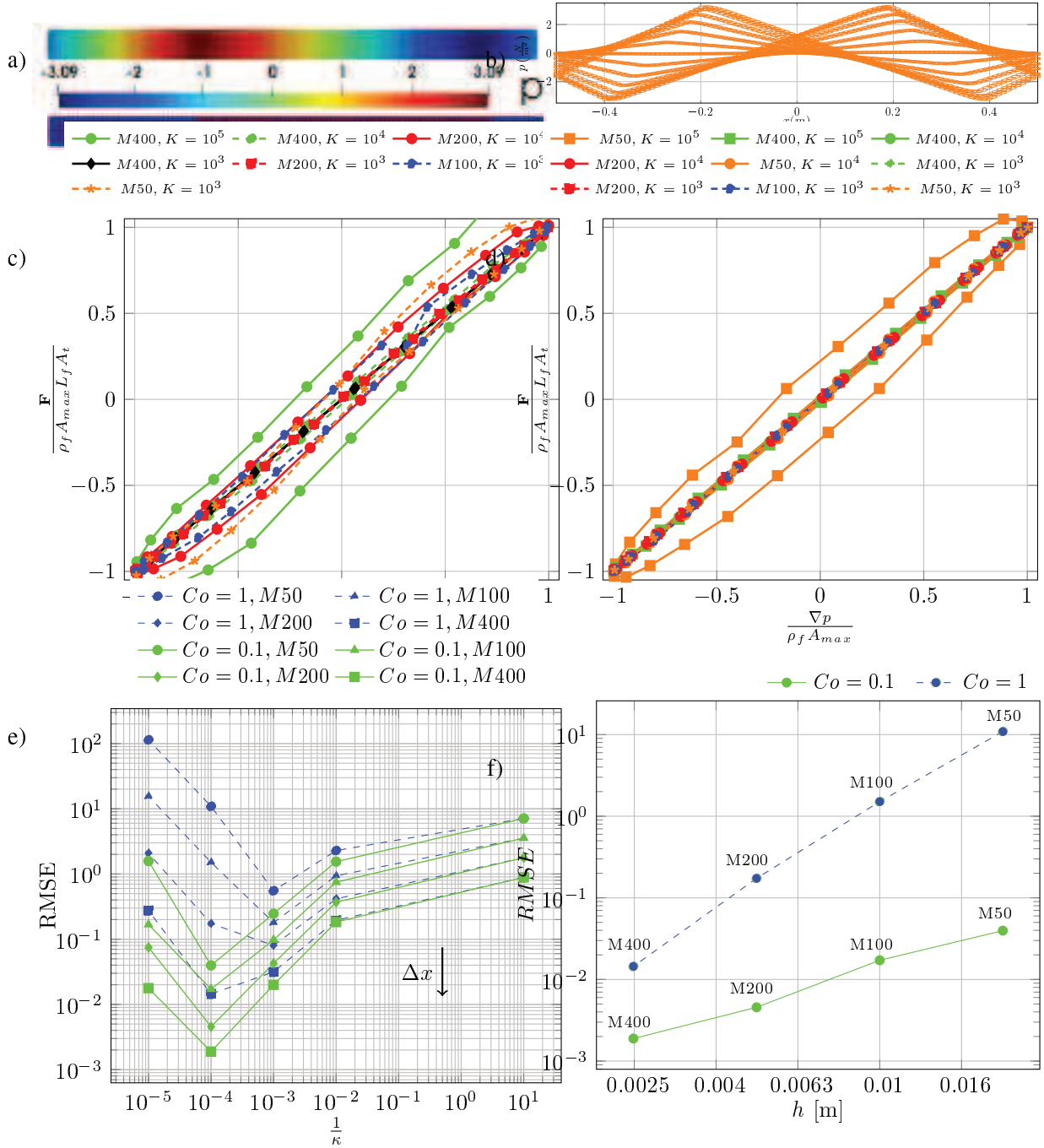
**Tabla B.1:** Drag and added mass coefficients computed using the present technique with  $\kappa = 10^4$ , at the studied  $Kc = 3.14$  and different discretizations.

## B.5. Conclusions

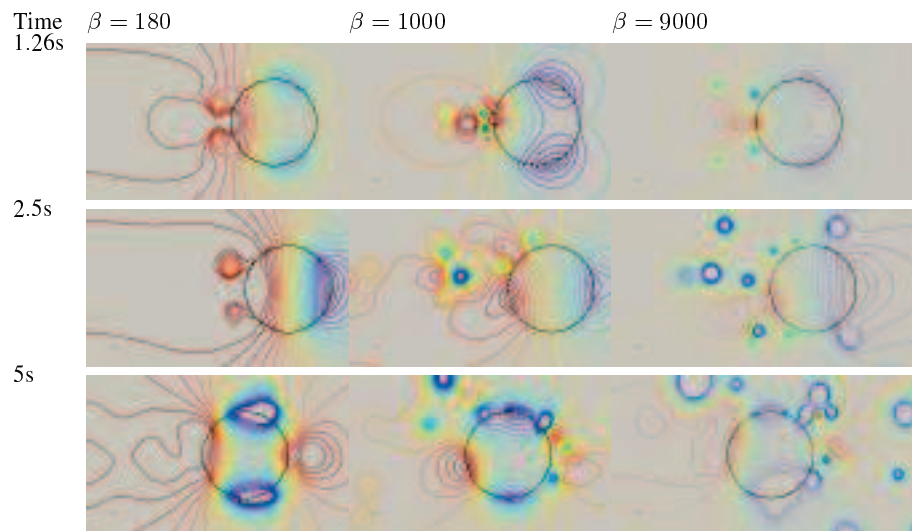
In the present work, we propose an embedded finite volume formulation to describe rigid solids interacting with fluids. Boundary conditions either constant or variable in space and time are easily imposed. From the numerical tests, the hydrodynamic coefficients show a satisfactory agreement with experimental, analytical, and numerical values reported in the literature. The  $\kappa$  coefficient, which defines the behavior in the solid region, depends on the mesh and time step sizes but an optimal relationship can be found to obtain convergence when such coefficient increases. This technique easily handles rigid bodies inside fluid and can be applied to three-dimensional bodies. Potentially, multiple bodies could be studied if algorithms for contacting forces are added, and it also can be combined with techniques to describe free-surface motions or other studies. The analysis of such aspects is an ongoing task.

## Acknowledgments

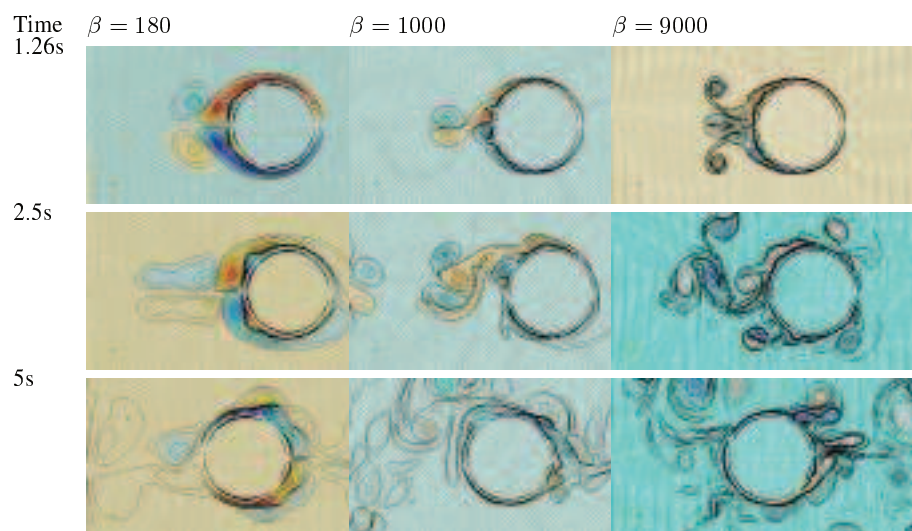
The authors thank the support given by: ANID-Fondecyt 1210228, Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación (VRIDEI), Departamento de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (DICYT), Universidad de Santiago de Chile (USACH) Proyecto Ayudante Código 052216C; PICT-2018- 01607 and PICT-2018-02920, Agencia I+D+i, Argentina; PIP 1220200100819CO, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina; PID-UTN-8132, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina; and CAI+D 506-201901-00110-LI, Universidad Nacional del Litoral, Argentina.



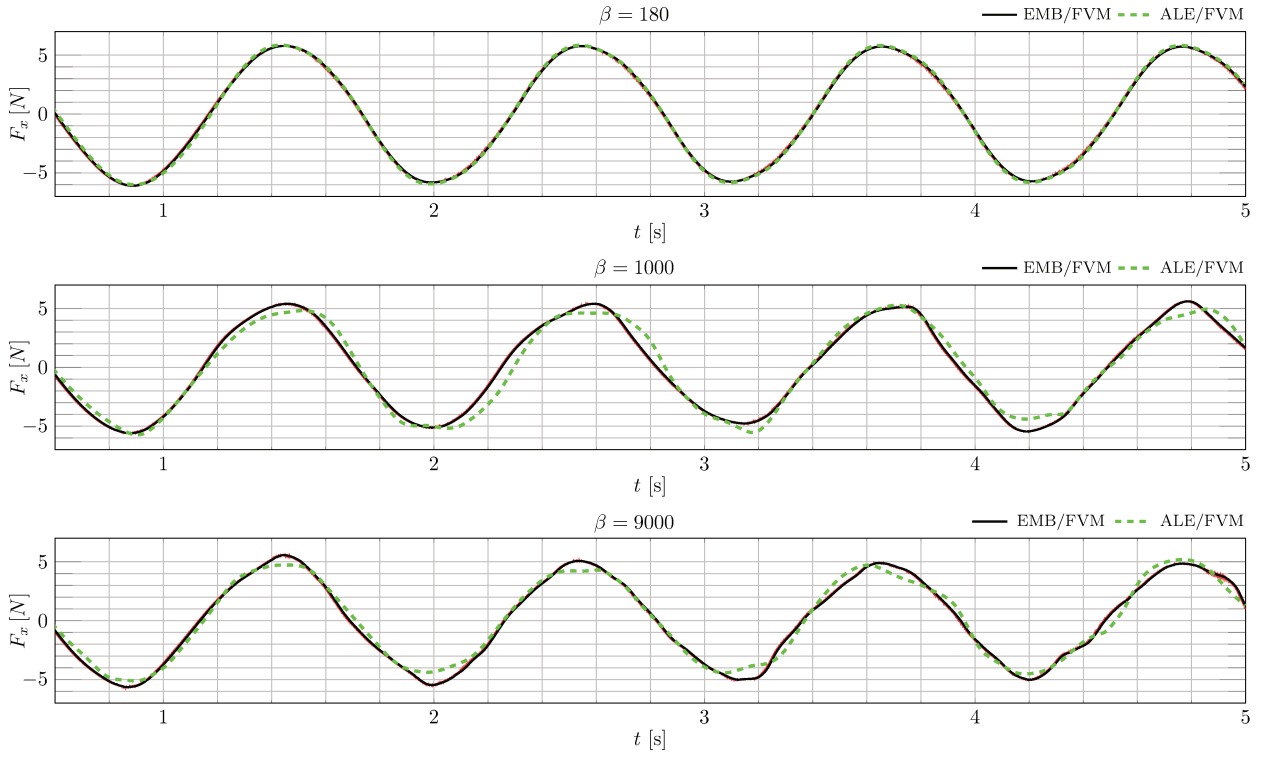
**Figura B.6:** Results for piston-type flow: a) pressure field at the time where maximum displacement is reached; b) pressure profile evolution for one period; c) convergence during the time for  $Co = 1$  using different meshes and  $\kappa$  values; d) convergence during the time for  $Co = 0.1$  using different meshes and  $\kappa$  values; e) convergence average on time (according to RMSE definition) for the different time and space discretizations, and  $\kappa$ ; f) mesh size convergence analysis for a given  $\kappa = 10^4$  for  $Co = 0.1$  and  $Co = 1$ .



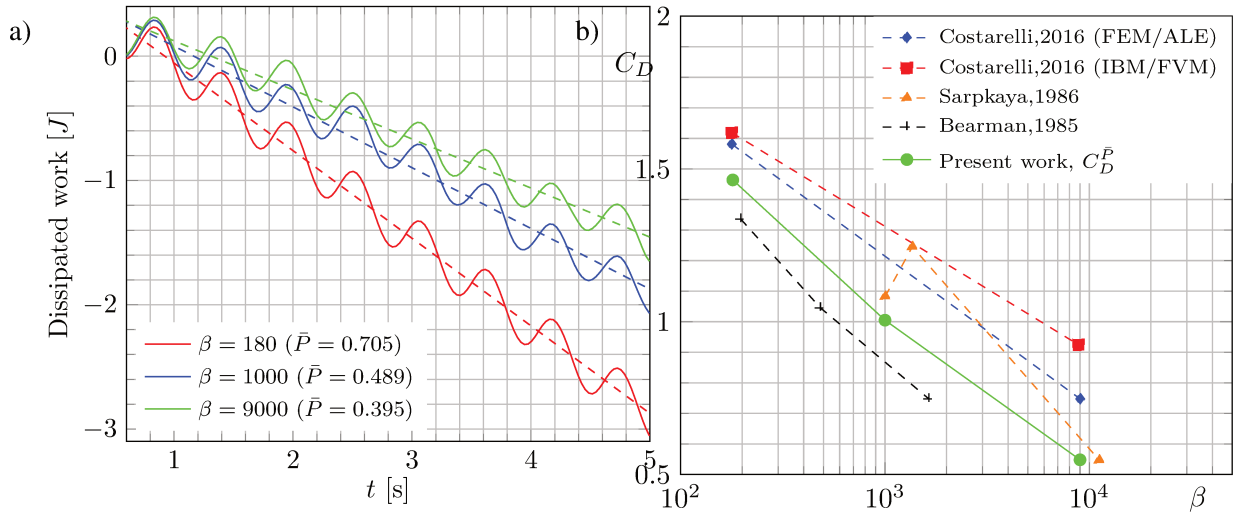
**Figura B.7:** Moving cylinder: pressure contours obtained with the present embedded technique at different instants of a period, grid  $M1$ , and for the different  $\beta$  proposed.



**Figura B.8:** Moving cylinder: vorticity contours obtained with the present embedded technique at different instants of a period, grid  $M1$ , and for the different  $\beta$  proposed.



**Figure B.9:** Moving cylinder: forces exerted by the fluid on the solid obtained with the present formulation and the ALE/FVM strategy.



**Figure B.10:** Moving cylinder. a) Power dissipated during the time and linear regression model (discontinuous lines); b) Drag coefficient computed using the present technique in comparison with experimental and numerical results reported in the literature.

# Bibliografía

- [1] Philippe Angot, Charles-Henri Bruneau y Pierre Fabrie. “A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows”. En: *Numerische Mathematik* 81.4 (feb. de 1999), págs. 497-520. ISSN: 0945-3245. DOI: <https://doi.org/10.1007/s002110050401>.
- [2] Frédéric Archambeau, Namane Méchitoua y Marc Sakiz. “Code Saturne: A Finite Volume Code for the computation of turbulent incompressible flows - Industrial Applications”. En: *International Journal on Finite Volumes* 1.1 (feb. de 2004), <http://www.latp.univ-mrs.fr/IJFV/spip.php?article3>. URL: <https://hal.science/hal-01115371>.
- [3] P. W. Bearman et al. “Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers”. En: *Journal of Fluid Mechanics* 154 (1985), págs. 337-356. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112085001562>.
- [4] M. Benamour, E. Liberge y C. Béghein. “A volume penalization lattice Boltzmann method for simulating flows in the presence of obstacles”. En: *Journal of Computational Science* 39 (2020), pág. 101050. ISSN: 1877-7503. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2019.101050>.
- [5] Luca Berti et al. “Fluid-rigid body interaction using the finite element method and ALE formulation: framework, implementation and benchmarking”. working paper or preprint. Oct. de 2022. URL: <https://hal.science/hal-03835136>.
- [6] Eric Brown-Dymkoski, Nurlybek Kasimov y Oleg V. Vasilyev. “A characteristic based volume penalization method for general evolution problems applied to compressible viscous flows”. En: *Journal of Computational Physics* 262 (2014), págs. 344-357. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.12.060>.
- [7] Alessio Castorrini et al. “A stabilized ALE method for computational fluid-structure interaction analysis of passive morphing in turbomachinery”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.5 (2019), págs. 967-994. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218202519410057>.

- [8] Guoliang Chai et al. “Improving the accuracy of fictitious domain method using indicator function from volume intersection”. En: *Advances in Mathematical Physics* 2019 (2019), págs. 1-18. DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/5450313>.
- [9] Hongsheng Chen et al. “A numerical study on the sedimentation of adhesive particles in viscous fluids using LBM-LES-DEM”. En: *Powder Technology* 391 (2021), págs. 467-478. ISSN: 0032-5910. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.06.031>.
- [10] Santiago D. Costarelli et al. “An embedded strategy for the analysis of fluid structure interaction problems”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 300 (2016), págs. 106-128. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.11.001>.
- [11] Olivier Cozzi. “Free Surface Flow Simulation: Correcting and Benchmarking the ALE Method in Code\_Saturne”. Master’s thesis. Manchester, UK: University of Manchester, 2010.
- [12] B. Ducassou et al. “A fictitious domain approach based on a viscosity penalty method to simulate wave/structure interaction”. En: *Journal of Hydraulic Research* 55.6 (2017), págs. 847-862. DOI: <https://doi.org/10.1080/00221686.2017.1289257>.
- [13] Corina Fetecau, D. Vieru y Constantin Fetecau. “A note on the second problem of Stokes for Newtonian fluids”. En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 43.5 (2008), págs. 451-457. ISSN: 0020-7462. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.12.022>.
- [14] Luciano Garelli et al. “Evaluation of a coupling interface for solving fluid–structure interaction problems”. En: *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 58 (2016), págs. 117-126. ISSN: 0997-7546. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2016.04.001>.
- [15] Felipe A. González, Marcela A. Cruchaga y Diego J. Celentano. “Analysis of Flow Past Oscillatory Cylinders Using a Finite Element Fixed Mesh Formulation”. En: *Journal of Fluids Engineering* 139.8 (mayo de 2017). ISSN: 0098-2202. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4036247>.
- [16] Felipe A. González et al. “Numerical study of flow past oscillatory square cylinders at low Reynolds number”. En: *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 75 (2019), págs. 286-299. ISSN: 0997-7546. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.10.017>.
- [17] Kai Hormann y Alexander Agathos. “The point in polygon problem for arbitrary polygons”. En: *Computational Geometry* 20.3 (2001), págs. 131-144. ISSN: 0925-7721. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0925-7721\(01\)00012-8](https://doi.org/10.1016/S0925-7721(01)00012-8).
- [18] S.R. Idelsohn et al. “Unified Lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids: Application to fluid–structure interaction problems via the PFEM”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.19 (2008), págs. 1762-1776. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.06.004>.



- [19] Dmitry Kolomenskiy y Kai Schneider. “A Fourier spectral method for the Navier–Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles”. En: *Journal of Computational Physics* 228.16 (2009), págs. 5687-5709. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.04.026>.
- [20] L.D. Landau y E.M. Lifshitz. “CHAPTER II - VISCOUS FLUIDS”. En: *Fluid Mechanics*. Ed. por L.D. Landau y E.M. Lifshitz. Second Edition. Pergamon, 1987, págs. 44-94. ISBN: 978-0-08-033933-7. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-033933-7.50010-6>.
- [21] Ezequiel J. López, Norberto M. Nigro y Mario A. Storti. “Simultaneous untangling and smoothing of moving grids”. En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76.7 (2008), págs. 994-1019. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2347>.
- [22] R Mittal y G Iaccarino. “Immersed Boundary Methods”. En: *Annual Review of Fluid Mechanics* 37.1 (2005), págs. 239-261. ISSN: 0066-4189. DOI: [10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743). arXiv: 1007.1228. URL: <http://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>.
- [23] Rameeza Moideen et al. “Numerical Simulation and Analysis of Phase-Focused Breaking and Non-Breaking Wave Impact on a Fixed Offshore Platform Deck”. En: *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering* 142.5 (mar. de 2020). ISSN: 0892-7219. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4046285>.
- [24] Giang T. Nguyen et al. “Resolved CFD–DEM coupling simulation using Volume Penalisation method”. En: *Advanced Powder Technology* 32.1 (2021), págs. 225-236. ISSN: 0921-8831. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.appt.2020.12.004>.
- [25] L. Nicolaou, S.Y. Jung y T.A. Zaki. “A robust direct-forcing immersed boundary method with enhanced stability for moving body problems in curvilinear coordinates”. En: *Computers & Fluids* 119 (2015), págs. 101-114. ISSN: 0045-7930. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.06.030>.
- [26] Jitendra Kumar Patel y Ganesh Natarajan. “Diffuse interface immersed boundary method for multi-fluid flows with arbitrarily moving rigid bodies”. En: *Journal of Computational Physics* 360 (2018), págs. 202-228. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.01.024>.
- [27] P. H. Saksono, W. G. Dettmer y D. Perić. “An adaptive remeshing strategy for flows with moving boundaries and fluid–structure interaction”. En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 71.9 (2007), págs. 1009-1050. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1971>.

- [28] Sinan Q. Salih et al. “Thin and sharp edges bodies-fluid interaction simulation using cut-cell immersed boundary method”. En: *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics* 13.1 (2019), págs. 860-877. DOI: <https://doi.org/10.1080/19942060.2019.1652209>.
- [29] Turgut Sarpkaya. “Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan—Carpenter numbers”. En: *Journal of Fluid Mechanics* 165 (1986), págs. 61-71. ISSN: 14697645. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112086002999>.
- [30] Wenchang Tan y Takashi Masuoka. “Stokes’ first problem for a second grade fluid in a porous half-space with heated boundary”. En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40.4 (2005), págs. 515-522. ISSN: 0020-7462. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.07.016>.
- [31] Tayfun E. Tezduyar. “Finite elements in fluids: Stabilized formulations and moving boundaries and interfaces”. En: *Computers & Fluids* 36.2 (2007), págs. 191-206. DOI: [10.1016/j.compfluid.2005.02.011](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2005.02.011).
- [32] Stéphane Vincent et al. “A Lagrangian VOF tensorial penalty method for the DNS of resolved particle-laden flows”. En: *Journal of Computational Physics* 256 (2014), págs. 582-614. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.08.023>.

**Doctorado en Ingeniería**

**Mención mecánica computacional**

Título de la obra:

**Computación de alto desempeño  
para la resolución de problemas  
con interfases móviles y cuerpos inmersos**

Autor: Esteban Zamora Ramírez

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras Claves:

Multifísica, Computacion de alto rendimiento,  
Elementos Finitos, Volúmenes Finitos,  
Level set, Dominios Embebidos,  
Interacción Fluido-Estructura, Seguimiento de objetos,  
Formulación basada en penalización, Validación experimental.