



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL
DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

Magíster en Matemática

EN EL CAMPO DE: **Análisis Armónico**

TÍTULO DE LA TESIS:

**Desigualdades débiles mixtas con pares de pesos para la función maximal de
Hardy-Littlewood, operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores**

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Departamento de Matemática – FIQ – UNL



AUTOR:

Lic. María Rocío Arántzazu Ayala

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Gladis Pradolini

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. Fabio Berra

JURADO COMPUESTO POR:

Dr. Bruno Bongioanni

Dra. Raquel Crescimbeni

Dr. Sheldy Ombrosi

SANTA FE, ARGENTINA - 2025

Índice general

Resumen	III
Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$	1
1.2. Las clases de pesos $A_p(\mu)$ y $RH_s(\mu)$	7
1.3. Espacios de Orlicz	14
1.4. Operadores maximales	22
1.5. Operadores de Calderón-Zygmund y conmutadores	27
2. Resultados principales	31
2.1. Desigualdades débiles mixtas con pares de pesos	31
2.2. Aplicaciones: desigualdades débiles mixtas de tipo Fefferman-Stein	34
3. Demostraciones de los resultados del Capítulo 2	37
3.1. Resultados auxiliares	37
3.2. Demostración del Teorema 2.1.2	43
3.3. Demostración del Teorema 2.1.1	45
3.4. Demostración del Teorema 2.1.3	48
3.5. Demostración del Teorema 2.1.4	51
4. Desigualdades de tipo Fefferman-Stein: algunas consideraciones	61
4.1. Desigualdades mixtas de tipo Fefferman-Stein	61
4.2. Otra demostración del Teorema 2.2.1	62
4.3. Otra demostración del Teorema 2.2.2	65

Introducción	69
A. Apéndice	71
A.1. Operadores adjuntos	71
A.2. Un ejemplo de que $L^p \subsetneq L^{p,\infty}$	72
A.3. Convexidad de funciones de Young	72
A.4. Propiedades en espacios de Orlicz	73
A.5. Demostración del Teorema 1.3.7	75
A.6. Propiedades de las funciones de tipo $L \log L$	77
A.7. Sobre las clases de funciones	83
A.8. Sobre operadores de Calderón-Zygmund	84
Bibliografía	87

Resumen

En la presente tesis se obtienen desigualdades mixtas de tipo débil para distintos operadores del Análisis Armónico. Estudiadas originalmente por Eric Sawyer, este tipo de desigualdades surge de la búsqueda de una prueba alternativa de la acotación fuerte con un peso w en la clase A_p para el operador maximal de Hardy-Littlewood M . Sawyer probó que este problema es equivalente a la acotación del operador $Sf = M(fv)v^{-1}$ en el espacio $L^p(uv)$, donde los pesos $u, v \in A_1$ surgen de una aplicación del teorema de descomposición de Jones. Esta última propiedad de continuidad de S puede deducirse mediante técnicas de interpolación, siendo para ello suficiente la determinación de la siguiente desigualdad de tipo débil

$$uv(\{x \in \mathbb{R} : Sf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|u(x)v(x) dx,$$

que es la que se conoce como *desigualdad mixta de tipo débil*.

Posteriormente, otros autores extendieron las desigualdades estudiadas por Sawyer al contexto de $\mathbb{R}^n$ y para otros operadores. En todos estos casos, este tipo de desigualdades mixtas resultan estimaciones ya conocidas de la literatura cuando se considera $v = 1$.

El presente trabajo de tesis consiste en estudiar desigualdades débiles mixtas con pares de pesos desde un enfoque alternativo al de Sawyer, ya que se sabe que muchos operadores no satisfacen acotaciones de tipo fuerte (p, p) para pesos (u, w) en la clase A_p , $p > 1$. En particular, se buscan condiciones en los pares (u, w) de modo que sea válida la acotación

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|w(x)v(x) dx,$$

donde v es un peso con ciertas características y el operador $\mathcal{T}$ considerado es la función maximal de Hardy-Littlewood M o un operador de Calderón-Zygmund T . También se considera la desigualdad débil mixta asociada a $\mathcal{T} = T_b^m$, el conmutador de T con símbolo $b \in \text{BMO}$, la que involucra modificaciones propias inherentes al operador.

Como aplicación de los resultados principales con pares de pesos se obtienen desigualdades mixtas de tipo Fefferman-Stein para algunos de los operadores mencionados, que proveen mejores estimaciones que otras previas conocidas. Las desigualdades de tipo Fefferman-Stein no asumen condiciones previas sobre el peso u de modo que, en general, involucran pares de la forma $(u, \mathcal{M}u)$, donde $\mathcal{M}$ es un operador maximal apropiado.

Introducción

Es bien sabido que en la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales interesa conocer estimaciones del tamaño y la regularidad de la solución de una ecuación diferencial o de sus derivadas (estimaciones a priori), las cuales brindan una fuente importante de información acerca del comportamiento de dicha solución. Como consecuencia de las mismas, surgen muchos de los operadores del Análisis Armónico, cuyas propiedades de continuidad en los distintos espacios involucrados es necesario conocer. Entre estos podemos mencionar la función maximal de Hardy-Littlewood, los operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores con símbolo en BMO, con los cuales trabajaremos a lo largo de esta tesis.

Surge así la necesidad de conocer el tamaño de los operadores mencionados, es decir, su norma. Cabe destacar que muchas veces dicho tamaño domina, en cierto sentido, el de otros operadores. Por ejemplo, se sabe que el operador maximal de Hardy-Littlewood controla en norma L^p a los operadores de Calderón-Zygmund, de manera que estos últimos heredan las propiedades de continuidad del primero. Más aún, si $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx,$$

donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood y T un operador de Calderón-Zygmund (ver [8]). Una desigualdad similar se satisface para el conmutador de T con símbolo en BMO, el cual es controlado por el operador maximal iterado $M^2 = M \circ M$ (ver [29]).

En las últimas décadas ha habido un resurgimiento del estudio de las desigualdades débiles mixtas con pesos para diversos operadores. Estas desigualdades surgen, entre otras cuestiones, al buscar una prueba alternativa del problema de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood actuando entre espacios de Lebesgue con un peso en la clase A_p de Muckenhoupt. El trabajo original es debido a E. Sawyer ([31]) quien, inspirado en la técnica de cubos principales utilizada por Muckenhoupt-Wheeden ([24]), prueba una desigualdad débil mixta con pesos para

M en $\mathbb{R}$. La prueba de este resultado ha mantenido a muchos investigadores del área enfocados en encontrar demostraciones más simples que la realizada en [31], y que no solo involucren a M , sino también a otros operadores.

Concretamente, si $1 < p < \infty$, la acotación en $L^p(w)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood es equivalente a que w pertenezca a la clase de pesos A_p . Además, el teorema de factorización de Jones establece que todo peso $w \in A_p$ se puede factorizar como $w = uv^{1-p}$, con $u, v \in A_1$. En busca de la prueba alternativa mencionada anteriormente, Sawyer define el siguiente operador

$$Sf = M(fv)v^{-1}$$

y prueba que la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}} Mf(x)^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) dx$$

es equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}} S(fv^{-1})(x)^p u(x)v(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)v^{-1}(x)|^p u(x)v(x) dx. \quad (0.0.1)$$

Como conclusión, la acotación fuerte de M en $L^p(w)$ es equivalente a la acotación fuerte de S en $L^p(uv)$. Para probar (0.0.1) se procede mediante interpolación. Es directo ver que S es acotada en $L^\infty(uv) = L^\infty$. En efecto, como $v \in A_1$, tenemos que

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f|v \leq \|f\|_\infty \left(\frac{1}{|I|} \int_I v \right) \leq [v]_{A_1} v(x) \|f\|_\infty \quad c.t. x \in I,$$

para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$Sf(x) = M(fv)(x) v^{-1}(x) \leq [v]_{A_1} \|f\|_\infty \quad c.t. x, \quad (0.0.2)$$

de donde se sigue lo afirmado. Luego, una desigualdad de tipo débil $(1, 1)$ respecto de uv para S nos conduciría a (0.0.1) mediante la aplicación del teorema de interpolación de Marcinkiewicz. Esto es justamente el resultado probado por Sawyer y establece que

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|u(x)v(x) dx, \quad (0.0.3)$$

para $u, v \in A_1$ y todo λ positivo. La desigualdad en (0.0.3) también se conoce como desigualdad de tipo débil mixta. En el mismo artículo, Sawyer conjetura que una desigualdad similar

debería ser cierta para la transformada de Hilbert. Esto es resuelto posteriormente en [9], donde los autores prueban (0.0.3) para dimensiones mayores, tanto para M como para operadores de Calderón-Zygmund. No sólo consideran el caso $u, v \in A_1$, sino también una hipótesis alternativa sobre los pesos, la cual permite utilizar las técnicas clásicas de descomposición de Calderón-Zygmund respecto de una medida duplicante en la prueba de la desigualdad para el caso del operador maximal diádico. Luego, un argumento de extrapolación permite derivar el resultado para M y T .

Posteriormente, en [5], los autores dan una prueba alternativa del resultado obtenido en [9] para el caso del operador de Calderón-Zygmund, que evita el uso de las técnicas de extrapolación y está directamente relacionada con la descomposición de Calderón-Zygmund asociada al peso v . Más aún, se prueban las desigualdades correspondientes para los conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund de orden m con símbolo $b \in \text{BMO}$, T_b^m . Concretamente, si $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$, se obtiene que

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T_b^m(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{\|b\|_{\text{BMO}}^m |f(x)|}{\lambda} \right) u(x)v(x) dx,$$

donde $\Phi_m(t) = t(1 + \log^+ t)^m$.

Cabe destacar que todas las desigualdades débiles mixtas mencionadas generalizan los tipos débiles de los correspondientes operadores asociados cuando $u \in A_1$ y $v = 1$ (ver [23] y [27]).

En el artículo original de Sawyer también se sugiere el problema de obtener desigualdades débiles mixtas con pares de pesos para distintos operadores del Análisis Armónico. En esta tesis, abordaremos el problema de obtener condiciones suficientes sobre pares (u, w) de modo que, si v es un peso en una clase adecuada, el operador $Sf = \frac{\mathcal{T}(fv)}{v}$ satisfaga una desigualdad de tipo débil asociada a dicho par, donde $\mathcal{T}$ podrá ser M , un operador de Calderón-Zygmund o su conmutador con símbolo en BMO . Concretamente, si $v \in RH_\infty$ buscamos condiciones sobre el par (u, w) de modo que la desigualdad

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Psi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w(x)v(x) dx$$

sea válida para todo λ positivo, siendo Ψ una función de Young adecuada para cada operador. Para probar estos resultados en el caso de operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores, una herramienta fundamental resulta ser una desigualdad de tipo Fefferman-Stein fuerte respecto de una medida asociada al peso v , tanto para T como para T_b^m .

Como aplicación de los resultados obtenidos con pares de pesos se derivan desigualdades débiles mixtas de tipo Fefferman-Stein para operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores. Más precisamente, si $v \in RH_\infty$ y u es no negativo y localmente integrable, la desigualdad

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T_b^m(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{\|b\|_{\text{BMO}}^m |f(x)|}{\lambda} \right) \mathcal{M}_m u(x) v(x) dx$$

es válida para todo λ positivo y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $T_b^0 = T$ y $\mathcal{M}_m$ es un operador maximal adecuado asociado a una medida que depende de v . Estas desigualdades pueden ser vistas como una mejora de las correspondientes obtenidas en [6] y [7] para los operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores, respectivamente. Además, cuando $v = 1$, resultan ser generalizaciones de las desigualdades de tipo Fefferman-Stein probadas en [26] y [30].

En el Capítulo 1 damos las definiciones y preliminares necesarios para establecer los resultados principales, los cuales se encuentran en el Capítulo 2. En dicho capítulo se dan las desigualdades fuertes de tipo Fefferman-Stein, las débiles mixtas con dos pesos, algunas de las cuales involucran condiciones de tipo “bump” sobre los pares de pesos. Además, como aplicación de estas últimas, se presentan desigualdades débiles mixtas de tipo Fefferman-Stein. Las demostraciones de estos resultados se encuentran en el Capítulo 3. Finalmente, en el Capítulo 4 discutimos algunas consideraciones sobre las desigualdades de tipo Fefferman-Stein establecidas en esta tesis, abordándolas desde otra perspectiva.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos las definiciones y resultados preliminares necesarios para establecer los resultados principales.

1.1. Espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$

En lo que sigue consideraremos el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado con una medida μ duplicante. El supremo y el ínfimo esencial de una función medible f en un subconjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$ se definen mediante

$$\sup_E f = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : f(x) > \lambda\}) = 0\},$$

$$\inf_E f = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : f(x) < \lambda\}) = 0\}.$$

Además, dadas dos funciones f y g , denotaremos $f \approx g$ si existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1 g(x) \leq f(x) \leq C_2 g(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definimos el espacio $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, como el de las funciones μ -medibles $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

y $L^\infty(\mu)$ denotará la colección de funciones esencialmente acotadas, esto es, que verifican

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Podemos definir una norma en $L^p(\mu)$ mediante

$$\|f\|_{p,\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

y

$$\|f\|_{\infty,\mu} = \sup_{\mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Consideraremos cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados, con lado $\ell(Q)$ y centro x_Q . Si λ es positivo, λQ denotará al cubo con el mismo centro que Q y $\ell(\lambda Q) = \lambda \ell(Q)$. Asociado a un cubo Q , definimos los siguientes promedios

$$\|f\|_{p,Q,\mu} = \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

para $1 \leq p < \infty$.

En el caso en que μ sea la medida de Lebesgue, la omitiremos de la notación. Si w es una función positiva y localmente integrable consideraremos la medida $d\mu(x) = w(x) dx$ y denotaremos $L^p(\mu) = L^p(w)$. Además, escribiremos $\|\cdot\|_{p,w}$ y $\|\cdot\|_{p,Q,w}$ para indicar la norma en $L^p(w)$ y su promedio en un cubo Q , respectivamente.

Sea $p' = \frac{p}{p-1}$ el exponente conjugado de p , para $p \in (1, \infty)$, siendo $p' = \infty$ cuando $p = 1$. Un primer resultado importante sobre los espacios $L^p(\mu)$ es la desigualdad de Hölder. La misma establece que para $p \in [1, \infty]$ y f, g medibles, se cumple

$$\|fg\|_{1,\mu} \leq \|f\|_{p,\mu} \|g\|_{p',\mu}.$$

Aplicando esta desigualdad con f y χ_Q se puede ver que para $p \geq 1$ vale

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x)| d\mu(x) \right)^p \leq \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x)|^p d\mu(x),$$

que es un caso particular de la desigualdad de Jensen.

Otro hecho importante a destacar es que, para $1 \leq p < \infty$, el espacio dual a $L^p(\mu)$ es isomorfo al espacio $L^{p'}(\mu)$. Esto nos permite dar una definición equivalente a la de la norma $\|\cdot\|_{p,\mu}$ mediante

$$\|f\|_{p,\mu} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) d\mu(x) \right| : \|g\|_{p',\mu} = 1 \right\}. \quad (1.1.1)$$

Otro concepto que será de utilidad es el de función de distribución. Dada una función medible $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, se define la función distribución $d_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ de la siguiente manera

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}).$$

La relación entre la norma $\|\cdot\|_{p,\mu}$ y la función de distribución viene dada por

$$\|f\|_{p,\mu}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha$$

(ver [14]). En la Sección 1.3 se da una prueba muy sencilla de esta caracterización para espacios más generales.

El espacio débil $L^{p,\infty}(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, se define como el conjunto de funciones μ -medibles f tales que las cantidades

$$\|f\|_{p,\infty,\mu} = \inf \left\{ C > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p} \quad \text{para todo } \alpha > 0 \right\} = \sup \{ \gamma d_f(\gamma)^{1/p} : \gamma > 0 \}$$

sean finitas. Estas cantidades no resultan ser normas debido a que no cumplen la desigualdad triangular. Por otra parte, para $p = \infty$ el espacio débil coincide con el espacio $L^\infty(\mu)$. De la misma manera que antes, si μ es la medida de Lebesgue la omitiremos de la notación. Además, si w es una función positiva y localmente integrable podemos considerar los espacios débiles con medida $d\mu(x) = w(x) dx$, en cuyo caso denotaremos $\|\cdot\|_{p,\infty,w}$.

La desigualdad de Tchebyshev nos da una relación entre los espacios $L^p(\mu)$ y $L^{p,\infty}(\mu)$. La misma establece que si $f \in L^p(\mu)$, entonces para todo $\lambda > 0$,

$$\mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{\|f\|_{p,\mu}}{\lambda} \right)^p.$$

Si elevamos ambos miembros al exponente $1/p$, multiplicamos por λ y tomamos supremo sobre λ , obtenemos que la norma $\|\cdot\|_{p,\mu}$ es más grande que $\|\cdot\|_{p,\infty,\mu}$, lo cual implica que $L^p(\mu)$ está contenido en $L^{p,\infty}(\mu)$. De hecho, esta contención resulta ser estricta. En efecto, si consideramos $f(x) = |x|^{-n/p}$ tenemos que $f \in L^{p,\infty}$, pero $f \notin L^p$ (ver Apéndice A.2 para más detalles).

Decimos que un operador T es sub-lineal si

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$|T(\lambda f)(x)| = |\lambda| |Tf(x)|, \quad \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Un operador T satisface una desigualdad de tipo fuerte (p, q) , $1 \leq p, q \leq \infty$, respecto al par de medidas (μ, ν) si está acotado de $L^p(\nu)$ en $L^q(\mu)$, esto es, si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$\|Tf\|_{q,\mu} \leq C\|f\|_{p,\nu} \quad (1.1.2)$$

vale para toda $f \in L^p(\nu)$. En este caso, denotaremos $T : L^p(\nu) \hookrightarrow L^q(\mu)$. Por otro lado, decimos que T satisface una desigualdad de tipo débil (p, q) respecto al par de medidas (μ, ν) si T es acotado de $L^p(\nu)$ en $L^{q,\infty}(\mu)$, $1 \leq p, q < \infty$, esto es, si existe $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{q,\infty,\mu} \leq C\|f\|_{p,\nu} \quad (1.1.3)$$

vale para toda $f \in L^p(\nu)$. De la definición de $\|\cdot\|_{q,\infty,\mu}$ se deduce que la condición (1.1.3) es equivalente a que se cumpla la desigualdad

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\nu(x) \right)^{q/p} \quad (1.1.4)$$

para todo $\lambda > 0$.

Un hecho de importancia es que si un operador T es de tipo fuerte (p, q) con respecto a las medidas (μ, ν) , entonces también es de tipo débil (p, q) con respecto a dichas medidas. Esto se sigue aplicando la desigualdad de Tchebyshev y el tipo fuerte (p, q) del operador de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) &\leq \frac{C}{\lambda^q} \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^q d\mu(x) \\ &\leq \frac{C}{\lambda^q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\nu(x) \right)^{q/p}, \end{aligned}$$

lo cual es (1.1.4). Sin embargo, la recíproca de esta afirmación no es cierta. Un ejemplo de ello se menciona en la Sección 1.4.

En la línea de probar acotaciones débiles y fuertes para diversos operadores, existen herramientas conocidas en el Análisis Armónico que han sido utilizadas y adaptadas a diversos casos. La primera de ellas es un teorema de interpolación que nos permite deducir la acotación fuerte de un operador para un rango de valores de (p, q) a partir de la hipótesis de dos acotaciones débiles específicas, donde los espacios involucrados tienen medidas diferentes. El resultado original se debe a J. Marcinkiewicz y en esta tesis se utilizará la siguiente adaptación del mismo que puede encontrarse en [16].

Teorema 1.1.1 (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz). Sean (X, μ) e (Y, ν) dos espacios de medida. Sea T un operador sub-aditivo que lleva funciones de $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ en funciones ν -medibles, con $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$. Supongamos además que

I) T es de tipo débil (p_0, p_0) con respecto al par (μ, ν) ,

II) T es de tipo débil (p_1, p_1) con respecto al par (μ, ν) .

Entonces para todo p tal que $p_0 < p < p_1$, se tiene que T es de tipo fuerte (p, p) con respecto al par (μ, ν) .

Otra herramienta que vamos a utilizar en las demostraciones es la conocida descomposición de Calderón-Zygmund para medidas duplicantes. Una demostración puede encontrarse en [16]. Para $k \in \mathbb{Z}$, consideremos el conjunto $2^{-k}\mathbb{Z}^n$. A la colección D_k de cubos con estos vértices y de longitud de lado 2^{-k} se la conoce como cubos de nivel k y se verifica que $\bigcup_{Q \in D_k} Q = \mathbb{R}^n$. Definimos el conjunto de todos los cubos diádicos como $\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$. Entre sus propiedades, tenemos que dos cubos diádicos están incluidos uno dentro del otro o son disjuntos. Además, cada cubo de nivel k , es decir cada $Q \in D_k$, se puede descomponer en 2^n cubos diádicos pertenecientes al nivel $k+1$.

Teorema 1.1.2 (Descomposición de Calderón-Zygmund). Sea μ una medida duplicante, $f \in L^1(\mu)$ y $\lambda > 0$. Entonces existe una familia de cubos diádicos $\{Q_j\}_j$ no solapados y maximales respecto de la inclusión tales que cumplen

$$\text{I) } \lambda < \frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} |f(x)| d\mu(x) \leq C\lambda \quad \text{para todo } Q_j,$$

II) para casi todo $x \notin \bigcup Q_j$, se cumple que $|f(x)| \leq \lambda$.

Para finalizar esta sección, damos a continuación la definición de los espacios de oscilación media acotada introducidos por F. John y L. Nirenberg en [20], conocidos como espacios BMO (*Bounded Mean Oscillation*). Decimos que una función b localmente integrable pertenece a BMO si la cantidad

$$\|b\|_{\text{BMO}} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q| dx$$

es finita, donde $b_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q b(x) dx$ y el supremo se toma sobre todos los cubos Q con lados paralelos a los ejes de coordenadas. Si bien $\|\cdot\|_{\text{BMO}}$ no resulta una norma, si identificamos como equivalentes a aquellas funciones que difieren en una constante, entonces podemos tratarla como tal.

Por otra parte, para $1 < p < \infty$, podemos definir una norma equivalente a $\|\cdot\|_{\text{BMO}}$ mediante

$$\|b\|_{\text{BMO},p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q|^p dx \right)^{1/p}.$$

Ver, por ejemplo, [13] para más detalles.

Vemos a continuación algunas propiedades de las normas en espacios BMO. La siguiente desigualdad puede encontrarse en [20] y [13].

Teorema 1.1.3 (Desigualdad de John-Nirenberg). *Sea $b \in \text{BMO}$, entonces existen constantes C_1 y C_2 , dependientes solo de la dimensión, tales que para cada cubo Q y λ positivo se cumple*

$$|x \in Q : |b(x) - b_Q| > \lambda| \leq C_1 e^{-C_2 \lambda / \|b\|_{\text{BMO}}} |Q|.$$

En la prueba de los resultados principales será útil la siguiente estimación.

Proposición 1.1.4. *Dada $b \in \text{BMO}$, existe una constante positiva C tal que*

$$|b_Q - b_{2^k Q}| \leq Ck \|b\|_{\text{BMO}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo cubo Q .

Demostración. El resultado se sigue directamente, ya que

$$\begin{aligned} |b_Q - b_{2^k Q}| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |b_{2^j Q} - b_{2^{j+1} Q}| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|2^j Q|} \int_{2^j Q} |b(x) - b_{2^{j+1} Q}| dx \\ &\leq 2^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|2^{j+1} Q|} \int_{2^{j+1} Q} |b(x) - b_{2^{j+1} Q}| dx \\ &\leq Ck \|b\|_{\text{BMO}}. \end{aligned}$$

□

1.2. Las clases de pesos $A_p(\mu)$ y $RH_s(\mu)$

En esta sección trabajaremos con $(\mathbb{R}^n, \mu)$, donde μ es una medida duplicante. Denotaremos con $L^1_{\text{loc}}(\mu)$ al conjunto de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ respecto de la medida μ . Más específicamente, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$ si $\int_Q |f(x)| d\mu(x) < \infty$ para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Llamaremos peso a una función $w \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$ positiva y finita en casi todo punto. Un par de pesos (u, w) pertenece a la clase $A_1(\mu)$ si existe una constante positiva C tal que vale la desigualdad

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u(x) d\mu(x) \leq C \inf_Q w \quad (1.2.1)$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Si $1 < p < \infty$, la clase $A_p(\mu)$ consta de los pares de pesos (u, w) tales que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u(x) d\mu(x) \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{p-1} \leq C \quad (1.2.2)$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ y alguna constante positiva C .

En el caso en que el par considerado sea de la forma (u, u) , diremos simplemente que $u \in A_p(\mu)$ y llamaremos $A_\infty(\mu)$ a la unión de todas las clases para $1 \leq p < \infty$. Si además μ es la medida de Lebesgue, la omitiremos de la notación. En ese último caso, éstas son las conocidas clases de Muckenhoupt introducidas en [23], las cuales caracterizan la acotación en el espacio $L^p(u)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood, esto es

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u(x) dx.$$

Sin embargo, la desigualdad anterior no es cierta para $p = 1$. En el mismo artículo se prueba que la condición $u \in A_1$ caracteriza la acotación débil $(1, 1)$ pesada de dicho operador.

Dado $1 < s < \infty$, decimos que un peso $v \in RH_s(\mu)$, si cumple

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^s d\mu(x) \right)^{1/s} \leq \frac{C}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \quad (1.2.3)$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ y una constante positiva C . Decimos además que $v \in RH_\infty(\mu)$ si

$$\sup_Q v \leq \frac{C}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \quad (1.2.4)$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ y una constante positiva C . En particular, es conocido que si $v \in A_p(\mu)$ entonces $v \in RH_s(\mu)$ para algún $s > 1$ (ver, por ejemplo, [13]).

Si μ es la medida de Lebesgue simplemente escribiremos A_p y RH_s para denotar las clases definidas anteriormente. Además, si $v \in A_p$, la medida generada por v , $d\mu(x) = v(x) dx$, resulta duplicante (ver [17]). Denotaremos $A_p(v)$ a la clase de pesos $A_p(\mu)$ cuando μ es la medida generada por v .

A continuación vemos algunas propiedades útiles sobre las clases de pesos mencionadas. La siguiente caracterización para la clase $A_\infty(\mu)$ puede encontrarse en [13].

Proposición 1.2.1. *Sea v un peso, entonces $v \in A_\infty(\mu)$ si y solo si existen constantes positivas C y ε tales que*

$$\frac{v(E)}{v(Q)} \leq C \left(\frac{\mu(E)}{\mu(Q)} \right)^\varepsilon$$

para todo cubo Q y un subconjunto medible $E \subset Q$.

Proposición 1.2.2. *Las siguientes inclusiones entre clases se cumplen.*

- I) Si $v \in A_p(\mu)$, entonces $v \in A_q(\mu)$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
- II) $RH_\infty(\mu) \subset RH_s(\mu)$, $1 < s < \infty$.
- III) $RH_s(\mu) \subset A_\infty(\mu)$, $1 < s \leq \infty$.

Demostración. Para probar I), observemos primero que la inclusión es trivial si $q = \infty$ o si $q = p$. Consideramos el caso $q < \infty$ y $p = 1$. Si $v \in A_1(\mu)$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v^{1-q'} d\mu \right)^{q-1} &\leq \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v d\mu \right) \left(\sup_Q v^{-1} \right)^{(q'-1)(q-1)} \\ &= \left(\inf_Q v \right)^{-1} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v d\mu \right) \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Sean $1 < p < q < \infty$ y $v \in A_p(\mu)$. Observemos que $\frac{q-1}{p-1} > 1$ y por lo tanto por la desigualdad de Jensen tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v^{-\frac{1}{q-1}} d\mu \right)^{q-1} &\leq \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v^{-\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{p-1} \\ &= \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu} \int_Q v^{1-p'} d\mu \right)^{p-1} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Con esto hemos probado que $A_p(\mu) \subset A_q(\mu)$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Para ver [II](#)), sea $v \in RH_\infty(\mu)$ y $1 < s < \infty$, entonces

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^s d\mu(x) \right)^{1/s} \leq \left(\sup_Q v^s \right)^{1/s} = \sup_Q v \leq \frac{C}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x),$$

lo cual prueba que $v \in RH_s(\mu)$.

Para finalizar, probemos [III](#)). Por el ítem anterior solo hace falta ver que $RH_s(\mu) \subset A_\infty(\mu)$ con $1 < s < \infty$. Sea $v \in RH_s(\mu)$ y un conjunto medible $E \subset Q$. Aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned} v(E) &\leq \left(\int_E v(x)^s d\mu(x) \right)^{1/s} \mu(E)^{1/s'} \\ &\leq \mu(Q)^{1/s} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^s d\mu(x) \right)^{1/s} \mu(E)^{1/s'} \\ &\leq C \left(\frac{\mu(E)}{\mu(Q)} \right)^{1/s'} \int_Q v(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

y por la Proposición [1.2.1](#) obtenemos lo deseado. $\square$

Observación 1.2.3. En muchos de los resultados que vamos a presentar estaremos pidiendo un peso v perteneciente a la clase $RH_\infty(\mu) \cap A_p(\mu)$. La Proposición [1.2.2](#) nos permite deducir que si $v \in RH_\infty(\mu)$, la pertenencia a alguna clase $A_p(\mu)$ está garantizada. De hecho, por el ítem [I](#)), podemos concluir que $v \in A_p(\mu)$ para p suficientemente grande.

Proposición 1.2.4. *Los siguientes resultados son válidos.*

I) Si $v \in A_1(\mu)$, entonces $v^\delta \in A_1(\mu)$ para $0 < \delta < 1$.

II) Si $v \in A_p(\mu)$, $1 < p < \infty$, entonces $v^{1-p'} \in A_{p'}(\mu)$.

Demostración. Probemos [I](#)). Sea $0 < \delta < 1$, por la desigualdad de Jensen y considerando que $v \in A_1(\mu)$, obtenemos

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^\delta d\mu(x) \leq \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \right)^\delta \leq C \left(\inf_Q v \right)^\delta = C \inf_Q v^\delta.$$

Esto prueba que $v^\delta \in A_1(\mu)$.

Para probar [II](#)), sea $1 < p < \infty$ y $v \in A_p(\mu)$. Entonces, teniendo en cuenta que $(p')' = p$ y que $(1-p)(1-p') = 1$,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x) \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{(1-p')(1-p)} d\mu(x) \right)^{p'-1} \\ &= \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{p-1} \right)^{p'-1} \leq C \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado la hipótesis sobre v . $\square$

Es bien conocido que los recíprocos de pesos en la clase A_1 pertenecen a RH_∞ , pero la implicación contraria no es cierta. Una versión alternativa está dada por la siguiente proposición, cuya prueba puede encontrarse en [11].

Proposición 1.2.5. *Sea $p > 1$, si $v \in RH_\infty \cap A_p$, entonces $v^{1-p'} \in A_1$.*

Las siguientes dos proposiciones establecen relaciones conocidas entre las clases RH_s y las clases $A_p(\mu)$.

Proposición 1.2.6. *Dado $1 < s < \infty$, $v \in RH_s(\mu) \cap A_p(\mu)$ si y solo si $v^s \in A_q(\mu)$ con $q = 1 + s(p-1)$. Además $v \in RH_s(\mu)$ si y solo si $v^s \in A_\infty(\mu)$.*

Demostración. Notemos primero que, por la desigualdad de Hölder,

$$1 \leq \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{p-1}. \quad (1.2.5)$$

Consideremos $v \in RH_s(\mu) \cap A_p(\mu)$ y probemos que v^s pertenece a la clase $A_q(\mu)$. Por la elección de q tenemos que $s(1-q') = 1-p'$. Dado que $v \in RH_s(\mu) \cap A_p(\mu)$, se sigue que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^s d\mu(x) \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{s(1-q')} d\mu(x) \right)^{q-1} \\ & \leq C \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \right)^s \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{s(p-1)} \\ & = C \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{p-1} \right)^s \leq C. \end{aligned}$$

Esto prueba la primera implicación.

Supongamos ahora que $v^s \in A_q(\mu)$. Primero probemos que $v \in A_p(\mu)$. Por la desigualdad de Jensen y la elección de q , tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{p-1} \\ \leq \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^s d\mu(x) \right)^{1/s} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{s(1-q')} d\mu(x) \right)^{\frac{q-1}{s}} \leq C, \end{aligned}$$

lo cual prueba lo deseado.

Vemos ahora que $v \in RH_s(\mu)$. Dado que $v^s \in A_q(\mu)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v^s d\mu &= \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v^s d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v^{s(1-q')} d\mu \right)^{q-1} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v^{s(1-q')} d\mu \right)^{1-q} \\ &\leq C \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v^{s(1-q')} d\mu \right)^{1-q}. \end{aligned}$$

Luego, de la elección de q y por (1.2.5), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^s d\mu(x) &\leq C \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{s(1-p)} \\ &\leq C \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{s(1-p)+s(p-1)} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \right)^s \\ &= C \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \right)^s. \end{aligned}$$

Elevando el primer y último término al exponente $1/s$ obtenemos que $v \in RH_s(\mu)$. Por lo tanto, hemos probado que $v \in RH_s(\mu) \cap A_p(\mu)$, que es la segunda implicación. Con esto hemos terminado de probar la primera parte de la proposición.

Sea $1 < s < \infty$, probemos ahora que $v \in RH_s(\mu)$ si y solo si $v^s \in A_\infty(\mu)$. Por la Proposición 1.2.2, tenemos que $RH_s(\mu) \subset A_\infty(\mu)$. Esto significa que si $v \in RH_s(\mu)$, existe $p > 1$ tal que $v \in A_p(\mu)$ y por la primera equivalencia probada tenemos que $v^s \in A_q(\mu)$ con $q = 1 + s(p-1)$. Esto prueba que $v^s \in A_\infty(\mu)$.

Recíprocamente, supongamos que $v^s \in A_\infty(\mu)$. Luego, existe $q > 1$ tal que $v^s \in A_q(\mu)$ y tomando $p = 1 + (q-1)/s$ tenemos por la equivalencia anterior que $v \in A_p(\mu) \cap RH_s(\mu)$, lo que completa la prueba. $\square$

Proposición 1.2.7. Si $v \in RH_\infty(\mu)$, entonces $v^\varepsilon \in RH_\infty(\mu)$ para $\varepsilon > 0$ y $v^{1-q} \in A_q(\mu)$ para algún $1 < q < \infty$.

Demostración. Sea $v \in RH_\infty(\mu)$ y consideremos primero $\varepsilon > 1$. Por la desigualdad de Jensen tenemos que

$$\sup_Q v^\varepsilon = \left(\sup_Q v \right)^\varepsilon \leq C \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x) d\mu(x) \right)^\varepsilon \leq \frac{C}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^\varepsilon d\mu(x),$$

lo cual prueba que $v^\varepsilon \in RH_\infty(\mu)$ para $\varepsilon > 1$.

Consideremos ahora $0 < \varepsilon \leq 1$. Por la Proposición 1.2.2, $v \in A_\infty(\mu)$ y en consecuencia por Proposición 1.2.6, $v^\varepsilon \in RH_{1/\varepsilon}(\mu)$. Luego, como $v \in RH_\infty$,

$$\sup_Q v^\varepsilon = \left(\sup_Q v \right)^\varepsilon \leq C \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q (v(x)^\varepsilon)^{1/\varepsilon} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{1/\varepsilon}} \leq C \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^\varepsilon d\mu(x),$$

lo cual prueba que $v^\varepsilon \in RH_\infty(\mu)$ para $0 < \varepsilon \leq 1$.

Para finalizar, por la Proposición 1.2.2, tenemos que si $v \in RH_\infty(\mu)$, entonces pertenece a alguna clase $A_{q'}(\mu)$ con $q' > 1$. Luego, por Proposición 1.2.4, llegamos a que $v^{1-q} \in A_q(\mu)$. $\square$

En lo que sigue presentamos algunas relaciones entre las clases RH_∞ y A_p . Los siguientes resultados pueden encontrarse probados en [11].

Proposición 1.2.8. *Son válidas las siguientes afirmaciones.*

- I) $w \in A_\infty$ si y solo si existen $p, s > 1$ tales que $w = w_1 w_2$, donde $w_1 \in A_1 \cap RH_s$ y $w_2 \in RH_\infty \cap A_p$.
- II) Si $w \in A_1$, entonces $w^{-1} \in RH_\infty$.
- III) Si $u, v \in RH_\infty$, entonces $uv \in RH_\infty$.

La siguiente proposición plantea una relación entre las clases A_p y $A_p(u)$ cuando u está en A_1 . En particular, el ítem iv) establece una especie de dualidad entre las clases $A_1(v)$ y $A_\infty(u)$ para u y v adecuados. Se encuentra probado en [3].

Proposición 1.2.9. *Sea $u \in A_1$, entonces son válidos los siguientes resultados.*

- I) Si $v \in A_p(u)$, entonces $uv \in A_p$, $1 \leq p \leq \infty$.
- II) $v \in A_\infty(u)$ si y solo si $uv \in A_\infty$.
- III) si $v \in A_p(u)$, entonces $v \in A_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

IV) si $v \in A_\infty(u)$, entonces $u \in A_1(v)$.

Demostración. Probamos primero i). Para ello consideramos $1 < p < \infty$ y un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Utilizando que $\sup_Q u^{-1} = (\inf_Q u)^{-1}$, como $u \in A_1$ tenemos que

$$\sup_Q u^{-1} \leq \frac{|Q|}{u(Q)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q uv \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (uv)^{1-p'} \right)^{p-1} &\leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q uv \right) \left(\frac{\sup_Q u^{-p'}}{|Q|} \int_Q v^{1-p'} u \right)^{p-1} \\ &\leq C \left(\int_Q uv \right) \left(\frac{1}{u(Q)^{p'}} \int_Q v^{1-p'} u \right)^{p-1} \\ &= C \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q uv \right) \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q v^{1-p'} u \right)^{p-1} \leq C, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $uv \in A_p$.

Si $p = 1$, dado que $\inf_Q(uv) \geq (\inf_Q u)(\inf_Q v)$, tenemos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q uv = \frac{u(Q)}{|Q|} \frac{1}{u(Q)} \int_Q uv \leq C \inf_Q u \inf_Q v \leq C \inf_Q uv.$$

Por último, si $p = \infty$, tenemos por hipótesis que $v \in A_q(u)$ para algún $1 < q < \infty$. Por lo probado anteriormente, $uv \in A_q \subset A_\infty$.

Para demostrar ii), por el ítem i) solo hace falta ver que si $uv \in A_\infty$, entonces $v \in A_\infty(u)$.

Sea Q un cubo y $E \subset Q$ medible. Por la Proposición 1.2.1, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{uv(E)}{uv(Q)} &\leq C \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\varepsilon \\ &= C \left(\frac{u(E)}{u(Q)} \right)^\varepsilon \left(\frac{|E|}{u(E)} \frac{u(Q)}{|Q|} \right)^\varepsilon \\ &\leq C \left(\frac{u(E)}{u(Q)} \right)^\varepsilon \left((\inf_E u)^{-1} \inf_Q u \right)^\varepsilon \\ &\leq C \left(\frac{u(E)}{u(Q)} \right)^\varepsilon, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $u \in A_1$ y que $\inf_E u \geq \inf_Q u$. Luego, por la Proposición 1.2.1 se sigue que $v \in A_\infty(u)$.

Veamos iii). Sea $v \in A_p(u)$ y fijamos un cubo Q . Tenemos que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v^{1-p'} \right)^{p-1} \leq \left(\sup_Q u^{-1} \right)^p \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q vu \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v^{1-p'} u \right)^{p-1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left((\inf_Q u)^{-1} \frac{u(Q)}{|Q|} \right)^p \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q vu \right) \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q v^{1-p'} u \right)^{p-1} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado que $u \in A_1$ y la hipótesis sobre v . Esto prueba que $v \in A_p$.

Por último, probamos [iv](#)). Como $v \in A_\infty(u)$, por el ítem [ii](#)) tenemos que $uv \in A_\infty$ y, en virtud de la Proposición [1.2.8](#), existen $p, s > 1$ tales que $uv = w_1 w_2$, donde $w_1 \in A_1 \cap RH_s$ y $w_2 \in A_p \cap RH_\infty$. Además, por la Proposición [1.2.8](#) podemos concluir que $u^{-1} \in RH_\infty$ y $z = w_2 u^{-1} \in RH_\infty$, obteniendo

$$\begin{aligned}
\frac{uv(Q)}{v(Q)} &= \frac{w_1 w_2(Q)}{w_1 z(Q)} \\
&\leq \frac{w_1 w_2(Q)}{(\inf_Q w_1) z(Q)} \\
&\leq \frac{1}{(\inf_Q w_1) \sup_Q z} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_1^s \right)^{1/s} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_2^{s'} \right)^{1/s'} \\
&\leq \frac{C}{(\inf_Q w_1) \sup_Q z} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_1 \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_2 \right),
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado que $w_1 \in RH_s$ y $w_2 \in RH_\infty \subset RH_{s'}$. Como $u, w_1 \in A_1$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{uv(Q)}{v(Q)} &\leq \frac{C}{|Q| \sup_Q z} \int_Q zu \\
&\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q u \leq C \inf_Q u.
\end{aligned}$$

□

1.3. Espacios de Orlicz

Recordemos que una función $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ se dice convexa si para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ y $t, s \in [0, \infty)$ se verifica que

$$\Phi(\lambda t + (1 - \lambda)s) \leq \lambda \Phi(t) + (1 - \lambda)\Phi(s).$$

Esto puede interpretarse como aquellas funciones tales que el segmento que une dos puntos de su gráfica se encuentra por encima de la misma.

Una función $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es una función de Young si existe una función ϕ no trivial, no negativa, creciente, con $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s) = \infty$ y que satisface $\Phi(t) = \int_0^t \phi(u) du$ para todo $t \geq 0$.

Llamaremos a ϕ función de densidad de Φ . Se sigue de la definición que Φ resulta convexa (ver Apéndice A.3), $\Phi(0) = 0$ y que $\Phi(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, incluiremos a $\Phi(t) = t$ entre las funciones de Young.

Un ejemplo básico de funciones de Young son las potencias, $\Phi(t) = t^p$, $p > 1$. Otro ejemplo son las funciones de tipo $\Phi(t) = t^p(1 + \log^+ t)^\varepsilon$ con $p \geq 1$ y $\varepsilon \geq 0$ (ver Apéndice A.6 para más detalles).

Decimos que una función Φ es sub-multiplicativa si $\Phi(ab) \leq \Phi(a)\Phi(b)$ para a, b no negativos. Los ejemplos mencionados anteriormente resultan ser funciones sub-multiplicativas.

Presentamos ahora algunas propiedades de las funciones de Young.

Proposición 1.3.1. *Sean Φ una función de Young y $a > 0$. Entonces se cumplen*

I) Si $a < 1$, $\Phi(at) \leq a\Phi(t)$, para todo $t \geq 0$.

II) Si $a > 1$, $a\Phi(t) \leq \Phi(at)$, para todo $t \geq 0$.

Demostración. Sea ϕ la función de densidad de Φ . Primero consideramos el caso $a < 1$. Haciendo el cambio de variables $v = u/a$ y utilizando el crecimiento de ϕ , tenemos que

$$\Phi(at) = \int_0^{at} \phi(u) du = a \int_0^t \phi(av) dv \leq a \int_0^t \phi(v) dv = a\Phi(t),$$

lo cual prueba I).

Consideremos ahora $a > 1$, entonces, por el crecimiento de ϕ ,

$$a\Phi(t) = a \int_0^t \phi(v) dv \leq a \int_0^t \phi(av) dv = \int_0^{at} \phi(u) du = \Phi(at),$$

donde se ha utilizado el cambio de variables $u = av$. Esto completa la prueba de II). $\square$

Observemos que si Φ es una función de Young con densidad ϕ ,

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{1}{t} \int_{t/2}^t \phi(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \phi(s) ds = \frac{\Phi(t)}{t} \leq \phi(t),$$

esto es

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{\Phi(t)}{t} \leq \phi(t). \quad (1.3.1)$$

Definimos a continuación una noción de orden para este tipo de funciones. Sean Φ y Ψ funciones de Young, decimos que Φ domina a Ψ en el infinito, y denotamos $\Psi \prec_\infty \Phi$, si

existen constantes positivas a, b, t_0 tales que para todo $t \geq t_0$ se cumple que $\Psi(t) \leq b\Phi(at)$. Escribiremos $\Phi \approx_\infty \Psi$ si $\Psi \prec_\infty \Phi$ y $\Phi \prec_\infty \Psi$.

Dada Φ una función de Young con función de densidad ϕ , definimos

$$\Phi_0(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1, \\ \Phi(t) - \Phi(1) & t \geq 1. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Luego, Φ_0 es una función de Young y además $\Phi \approx_\infty \Phi_0$. En efecto, $\Phi_0(t) = \int_0^t \phi_0(u) du$, donde $\phi_0 = \phi$ para $t \geq 1$ y nula en caso contrario. Por otra parte, si $t \geq 1$, entonces $\Phi_0(t) + \Phi(1) = \Phi(t)$ y, por ser $\Phi(1)$ no negativa, se tiene que $\Phi_0(t) \leq \Phi(t)$, lo cual prueba que $\Phi_0 \prec_\infty \Phi$. Veamos ahora que $\Phi \prec_\infty \Phi_0$. En primera instancia, afirmamos que $\Phi(1) \leq \Phi_0(at)$ para $a > 1$ y $t > 2/a$. En efecto, por ser ϕ creciente, con un cambio de variables se llega a que

$$\Phi(1) = \int_0^1 \phi(v) dv \leq \int_0^1 \phi(v+1) dv \leq \int_1^2 \phi(u) du = \Phi(2) - \Phi(1) = \Phi_0(2).$$

Por otra parte, si $t > 2/a$, como Φ_0 es creciente, se tiene que $\Phi_0(2) \leq \Phi_0(at)$. Combinando ambas estimaciones se obtiene lo afirmado.

Volviendo a lo que queríamos probar, consideremos $a > 1$ y $t_0 = 2/a$. Entonces, por la Proposición 1.3.1 y la afirmación anterior, si $t > 2/a$, entonces se sigue que

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{a}\Phi(at) = \frac{1}{a}(\Phi_0(at) + \Phi(1)) \leq \frac{2}{a}\Phi_0(at),$$

lo cual prueba que $\Phi \prec_\infty \Phi_0$.

Por otra parte, toda función de Young Φ domina a la función identidad en el infinito. En efecto, si $t > 1$, por la Proposición 1.3.1, se sabe que $t\Phi(1) \leq \Phi(t)$. Por lo tanto, si $t_0 = 1$, se tiene que para todo $t > t_0$

$$t \leq \frac{1}{\Phi(1)}\Phi(t)$$

y la afirmación queda probada.

Dado $1 \leq p < \infty$, decimos que una función de Young Φ es una p -función de Young si $\Psi(t) = \Phi(t^{1/p})$ también lo es. Por ejemplo, $\Phi(t) = t^p$, $p > 1$, resulta ser una r -función de Young para todo $1 \leq r \leq p$ ya que $\Psi(t) = t^{p/r}$ es una función de Young. Otra función que resulta ser p -función de Young es $\Phi(t) = t^p(1 + \log^+ t)^\varepsilon$ para $p \geq 1$ y $\varepsilon \geq 0$ (ver Apéndice A.6).

La siguiente proposición nos permite tener una noción del tamaño de una p -función de Young mediante su comparación con funciones potencia.

Proposición 1.3.2. Si Φ es una p -función de Young y $\Theta(t) = t^p$, con $1 \leq p < \infty$, entonces $\Theta \prec_\infty \Phi$. Además, $\Phi(t)/\Theta(t)$ es una función no decreciente.

Demostración. Si Φ es una p -función de Young, por definición tenemos que $\Psi(t) = \Phi(t^{1/p})$ resulta ser de Young y entonces $\Psi(t) \geq Ct$ para $t \geq 1$, ya que Ψ domina a la identidad en el infinito. Luego, para $t \geq 1$, tenemos que

$$t^p \leq C\Psi(t^p) = C\Phi(t),$$

lo que significa que $\Theta \prec_\infty \Phi$.

Para ver que $\Phi(t)/\Theta(t)$ es no decreciente probemos que su derivada es no negativa. Si ψ es la función de densidad de Ψ , tenemos que

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\Theta(t)}\right)' = \left(\frac{\Psi(t^p)}{t^p}\right)' = \frac{\psi(t^p)pt^{p-1}t^p - \Psi(t^p)pt^{p-1}}{t^{2p}},$$

la cual es no negativa si su numerador lo es. Basta con probar que

$$\psi(t^p)t^p - \Psi(t^p) \geq 0.$$

En efecto, por la propiedad (1.3.1) tenemos

$$\frac{1}{t^p}\Psi(t^p) = \frac{1}{t^p} \int_0^{t^p} \psi(s) ds \leq \psi(t^p).$$

Por lo tanto, concluimos que Φ/Θ es no decreciente. $\square$

Sean Φ una función de Young y μ una medida. Decimos que f pertenece al espacio de Orlicz asociado a Φ y a μ , $L^\Phi(\mu)$, si para alguna constante positiva la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(C|f(x)|) d\mu(x)$ es finita. Podemos definir una norma para estos espacios, conocida como norma de tipo Luxemburgo, de la siguiente manera

$$\|f\|_{\Phi, \mu} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\}. \quad (1.3.3)$$

Estos espacios generalizan a los ya estudiados en el Capítulo 1. Si consideramos $\Phi(t) = t^p$ con $p \geq 1$, entonces $L^\Phi(\mu) = L^p(\mu)$. Las pruebas de esta última igualdad y de que $\|f\|_{\Phi, \mu}$ es una norma se encuentran en el Apéndice A.4.

Dado Q un cubo, definimos el promedio de tipo Luxemburgo de f en Q mediante

$$\|f\|_{\Phi, Q, \mu} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\}.$$

En particular, si $\Phi(t) = t^p$, con $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{\Phi, Q, \mu} = \|f\|_{p, Q, \mu} = \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Si μ es la medida de Lebesgue, omitiremos el subíndice y escribiremos simplemente $\|\cdot\|_{\Phi, Q}$. Si μ es la medida generada por un peso v , denotaremos $\|\cdot\|_{\Phi, Q, w}$.

Veamos un par de propiedades útiles de los promedios de tipo Luxemburgo.

Proposición 1.3.3. *Sean Φ una función de Young con función de densidad ϕ . Entonces para toda f medible se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) d\mu(x) = \int_0^\infty \phi(s) \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}) ds. \quad (1.3.4)$$

Demostración. La prueba resulta directa utilizando el teorema de Tonelli y el hecho de $\Phi(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \phi(s) \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}) ds &= \int_0^\infty \phi(s) \int_{\{x: |f(x)| > s\}} 1 d\mu(x) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} \phi(s) ds d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi(|f(x)|) - \Phi(0)) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

Observemos que si $\Phi(t) = t^p$, entonces $\phi(t) = pt^{p-1}$ y (1.3.4) generaliza la clásica fórmula para normas en $L^p(\mu)$,

$$\|f\|_{p, \mu}^p = p \int_0^\infty s^{p-1} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}) ds.$$

(Ver, por ejemplo, [14].)

Proposición 1.3.4. *Dada Φ una función de Young, entonces para todo $r > 0$ se cumple*

$$\|f^r\|_{\Phi, Q, \mu} = \|f\|_{\Psi, Q, \mu}^r,$$

donde $\Psi(t) = \Phi(t^r)$. En particular, si Φ es una p -función de Young, $p \geq 1$, entonces

$$\|f^{r/p}\|_{\Phi, Q, \mu} = \|f\|_{\Psi, Q, \mu}^{r/p},$$

donde $\Psi(t) = \Phi(t^{r/p})$ es una r -función de Young, $r \geq 1$.

Demostración. Para la primera igualdad, si consideramos $\alpha = \lambda^{1/r}$ en la definición del promedio Luxemburgo, tenemos que

$$\begin{aligned} \|f^r\|_{\Phi, Q, \mu} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|^r}{\lambda} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Phi \left(\left(\frac{|f(x)|}{\lambda^{1/r}} \right)^r \right) d\mu(x) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \alpha^r > 0 : \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Psi \left(\frac{|f(x)|}{\alpha} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\} \\ &= \|f\|_{\Psi, Q, \mu}^r. \end{aligned}$$

Por otra parte, si Φ es una p -función de Young, $p \geq 1$, es inmediato que $\Psi(t) = \Phi(t^{r/p})$ es una r -función de Young ya que

$$\Psi(t^{1/r}) = \Phi(t^{1/p})$$

es de Young. Utilizando la primera igualdad obtenida con exponente r/p , se sigue que

$$\|f^{r/p}\|_{\Phi, Q, \mu} = \|f\|_{\Psi, Q, \mu}^{r/p}. \quad \square$$

La siguiente proposición nos permite llevar la noción de orden entre funciones de Young a los promedios Luxemburgo.

Proposición 1.3.5. *Dadas Φ y Ψ funciones de Young tales que $\Phi \prec_\infty \Psi$, entonces existe $C > 0$, dependiente de Φ y Ψ , tal que para todo cubo Q y toda f se verifica que*

$$\|f\|_{\Phi, Q, \mu} \leq C \|f\|_{\Psi, Q, \mu}.$$

Demostración. Basta suponer que $\|f\|_{\Psi, Q, \mu} < \infty$, ya que en caso contrario el resultado es trivial. Por hipótesis, existen a, b y t_0 positivos tales que $\Phi(t) \leq b\Psi(at)$ para $t > t_0$.

Fijamos un cubo Q y consideramos el conjunto

$$I = \{x \in Q : |f(x)| \leq a\|f\|_{\Psi, Q, \mu} t_0\}.$$

Luego, por la hipótesis y la Proposición A.4.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{a\|f\|_{\Psi, Q, \mu}} \right) d\mu(x) &= \frac{1}{\mu(Q)} \int_{Q \cap I} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{a\|f\|_{\Psi, Q, \mu}} \right) d\mu(x) \\ &\quad + \frac{1}{\mu(Q)} \int_{Q \setminus I} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{a\|f\|_{\Psi, Q, \mu}} \right) d\mu(x) \\ &\leq \Phi(t_0) + \frac{b}{\mu(Q)} \int_{Q \setminus I} \Psi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Psi, Q, \mu}} \right) d\mu(x) \\ &\leq \Phi(t_0) + b. \end{aligned}$$

Si $\Phi(t_0) + b \leq 1$, se sigue directamente que

$$\|f\|_{\Phi, Q, \mu} \leq a \|f\|_{\Psi, Q, \mu}.$$

Si $\Phi(t_0) + b > 1$, entonces por la convexidad de Φ tenemos que

$$\|f\|_{\Phi, Q, \mu} \leq a(\Phi(t_0) + b) \|f\|_{\Psi, Q, \mu}.$$

□

Proposición 1.3.6. Sean $b \in BMO$, $\delta \geq 1$ y $\Psi(t) = e^{t^{1/\delta}} - 1$. Entonces existe una constante positiva C tal que

$$\|b - b_Q\|_{\Psi, Q} \leq C \|b\|_{BMO}$$

se cumple para todo cubo Q .

Demostración. Es suficiente demostrar que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{|b(x) - b_Q|}{C_0 \|b\|_{BMO}} \right) dx \leq A \quad (1.3.5)$$

para ciertas constantes $C_0 > 0$ y $A \geq 1$, pues por la convexidad de Ψ podemos deducir que

$$\|b - b_Q\|_{\Psi, Q} \leq C_0 A \|b\|_{BMO}.$$

Sea $\psi(t) = \frac{1}{\delta} e^{t^{1/\delta}} t^{1/\delta-1}$ la función densidad asociada a Ψ , por la Proposición 1.3.3 y la desigualdad de John-Nirenberg (Teorema 1.1.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{|b(x) - b_Q|}{C_0 \|b\|_{BMO}} \right) dx &= \frac{1}{|Q|} \int_0^\infty \psi(\lambda) |\{x \in Q : |b(x) - b_Q| > C_0 \lambda \|b\|_{BMO}\}| d\lambda \\ &\leq \frac{C_1}{\delta} \int_0^\infty \lambda^{1/\delta-1} e^{\lambda^{1/\delta}} e^{-C_2 C_0 \lambda} d\lambda, \end{aligned}$$

donde C_1 y C_2 son las constantes que aparecen en el Teorema 1.1.3. Si elegimos $C_0 > 2/C_2$, entonces para todo $\lambda \geq 1$ tenemos que

$$0 \leq C_2 C_0 \lambda - \lambda - \lambda^{1/\delta},$$

y por lo tanto

$$e^{-C_2 C_0 \lambda + \lambda^{1/\delta}} \leq e^{-\lambda}.$$

Utilizando esta desigualdad obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{|b(x) - b_Q|}{C_0 \|b\|_{\text{BMO}}} \right) dx &\leq \frac{C_1}{\delta} \int_0^1 \lambda^{1/\delta-1} e^{\lambda^{1/\delta}} e^{-C_2 C_0 \lambda} d\lambda + \frac{C_1}{\delta} \int_1^\infty \lambda^{1/\delta-1} e^{\lambda^{1/\delta}} e^{-C_2 C_0 \lambda} d\lambda \\ &\leq \frac{e C_1}{\delta} \int_0^1 \lambda^{1/\delta-1} d\lambda + \frac{C_1}{\delta} \int_1^\infty e^{-\lambda} d\lambda \leq A < \infty, \end{aligned}$$

donde A se puede tomar mayor que 1. Luego, utilizando la Proposición 1.3.1 se obtiene lo afirmado en (1.3.5). $\square$

Dada una función de Young Φ , definimos su función complementaria $\tilde{\Phi}$ mediante

$$\tilde{\Phi}(t) = \sup\{ts - \Phi(s) : s \geq 0\}$$

y su función inversa generalizada mediante

$$\Phi^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0 : \Phi(s) > t\}.$$

Es directo ver que si Φ es biyectiva y creciente, entonces su inversa generalizada coincide con su inversa usual. En efecto, por ser creciente,

$$\{s \geq 0 : \Phi(s) > \Phi(t)\} = \{s \geq 0 : s > t\}.$$

Tomando ínfimo sobre s a ambos lados obtenemos que

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) = t,$$

por lo que se sigue lo afirmado. En Apéndice A.5 se encuentran más propiedades de las inversas generalizadas.

La siguiente es una generalización de la desigualdad de Hölder en los espacios de Orlicz que involucra a las inversas de funciones de Young. Se puede encontrar una prueba en [25] y la incluimos en el Apéndice A.5.

Teorema 1.3.7. *Sean Φ, Ψ, Θ funciones de Young tales que*

$$\Phi^{-1}(t)\Psi^{-1}(t) \leq C\Theta^{-1}(t), \tag{1.3.6}$$

entonces

$$\|fg\|_{\Theta, Q, \mu} \leq C\|f\|_{\Phi, Q, \mu}\|g\|_{\Psi, Q, \mu}.$$

La clásica desigualdad de Hölder en los espacios $L^p(\mu)$ se puede obtener considerando las funciones $\Theta(t) = t$, $\Phi(t) = t^p$ y $\Psi(t) = t^{p'}$, con $1 < p < \infty$, las cuales satisfacen la condición (1.3.6). En general, si Φ y su complementaria son funciones de Young, se cumple la relación

$$\Phi^{-1}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t) \approx t \quad (1.3.7)$$

para todo t (ver [18]), de donde tenemos que la terna conformada por Φ , su complementaria y la función identidad cumple la hipótesis (1.3.6), por lo que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |fg| d\mu \leq C \|f\|_{\Phi, Q, \mu} \|g\|_{\tilde{\Phi}, Q, \mu}.$$

En particular, si $\Phi_m(t) = t(1 + \log^+ t)^m \approx t \log(e + t)^m$ y $\Psi_m(t) = (e^{t^{1/m}} - e)\chi_{(1, \infty)}(t)$, tenemos que $\tilde{\Phi}_m(t) \approx \Psi_m(t)$. Por otra parte, sus respectivas funciones inversas verifican las relaciones $\Phi_m^{-1}(t) \approx t(1 + \log^+ t)^{-m}$ y $\Psi_m^{-1}(t) \approx (1 + \log^+ t)^m$. Más aún, se cumple que

$$\Phi_k^{-1}(t)\Psi_{k-j}^{-1}(t) \approx \Phi_j^{-1}(t).$$

En el Apéndice A.6 se encuentran más detalles sobre estas funciones.

1.4. Operadores maximales

Dada una función de Young Φ y una medida μ , definimos el operador maximal generalizado asociado a Φ y a μ mediante

$$M_{\Phi, \mu} f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\Phi, Q, \mu},$$

donde el supremo se toma sobre los cubos Q tales que $x \in Q$. En el caso en que μ sea la medida de Lebesgue escribiremos $M_{\Phi, \mu} f = M_{\Phi} f$. Si $\Phi(t) = t$, $M_{\Phi, \mu} f = M_{\mu} f$, siendo $M_{\Phi, \mu} f = M f$ si además μ es la medida de Lebesgue. Por otra parte, si w es un peso y $d\mu(x) = w(x) dx$, denotaremos $M_{\Phi, w}$ y $\|\cdot\|_{\Phi, Q, w}$ al operador maximal y a los promedios Luxemburgo asociados a esta medida particular, respectivamente.

Como casos particulares, tenemos que cuando $\Phi(t) = t$ y w es un peso duplicante, entonces $M_{\Phi, \mu} = M_w$ es continua en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ (ver [16]). Se puede ver que si $f \in L^1(w)$ y es no idénticamente nula en casi todo punto, entonces $M_w f$ no pertenece a $L^1(w)$ (ver [13]). Sin embargo, estos operadores sí cumplen con acotaciones de tipo débil, es decir M_w es continua

de $L^1(w)$ en $L^{1,\infty}(w)$. Cuando $\Phi(t) = t^r$, $r > 1$, $M_{\Phi,\mu}f = M_{r,\mu}f = M_\mu(|f|^r)^{1/r}$. Por otra parte, dado $k \in \mathbb{N}$, M_μ^k denota a la maximal iterada de orden k , esto es $M_\mu \circ M_\mu \circ \dots \circ M_\mu$ k -veces. Si $\Phi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces $M_{\Phi_k} \approx M^{k+1}$ (ver [28] y [1]).

Observación 1.4.1. De la Proposición 1.3.5 se sigue que si $\Phi \prec_\infty \Psi$, entonces $M_{\Phi,\mu}f \leq CM_{\Psi,\mu}f$.

Una grilla diádica $\mathcal{D}$ es una familia de cubos Q en $\mathbb{R}^n$ que satisface

- I) $l(Q) = 2^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$,
- II) si $Q, P \in \mathcal{D}$ y $Q \cap P \neq \emptyset$, entonces $Q \subset P$ o $P \subset Q$,
- III) $D_k = \{Q \in \mathcal{D} : l(Q) = 2^{-k}\}$ es una partición de $\mathbb{R}^n$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

En particular, la grilla presentada antes del Teorema 1.1.2 es una grilla diádica.

Asociado a una grilla $\mathcal{D}$, el operador maximal diádico se define mediante

$$M_{\Phi,\mu}^{\mathcal{D}}f(x) = \sup_{\substack{Q \ni x \\ Q \in \mathcal{D}}} \|f\|_{\Phi,Q,\mu}.$$

Es inmediato de su definición que $M_{\Phi,\mu}^{\mathcal{D}}f(x) \leq M_{\Phi,\mu}f(x)$ en casi todo punto. En [19] se obtuvo el siguiente resultado para maximales diádicas cuando $\Phi(t) = t$.

Teorema 1.4.2. *Existen grillas diádicas $\mathcal{D}^k$, $1 \leq k \leq 3^n$, tales que*

$$Mf(x) \leq C \sum_{k=1}^{3^n} M^{\mathcal{D}^k}f(x).$$

Veamos a continuación una relación entre las funciones de Young y la acotación del operador maximal asociado. Dada una función de Young Φ y $1 < p < \infty$, decimos que $\Phi \in B_p$, o que satisface la condición B_p , si existe una constante positiva a tal que

$$\int_a^\infty \frac{\Phi(t)}{t^q} \frac{dt}{t} < \infty.$$

Por ejemplo, la función $\Phi(t) = t^q(1 + \log^+ t)^\varepsilon$ pertenece a la clase B_p si $p > q \geq 1$ y $\varepsilon > 0$ (ver Apéndice A.6 para más detalles). Además, si w es un peso duplicante, entonces la pertenencia de Φ a la clase B_p caracteriza la acotación de $M_{\Phi,w}$ en $L^p(w)$ (ver [21] y [28]). En particular, en [28] se prueba la siguiente caracterización.

Teorema 1.4.3. *Sean $1 < p < \infty$ y Φ una función de Young. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

I) $\Phi \in B_p$.

II) Existe una constante positiva C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_\Phi f(y)^p dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy,$$

para toda f no negativa.

En las demostraciones principales estaremos utilizando el siguiente resultado.

Proposición 1.4.4. Si $|f(x)| \leq |g(x)|$ en casi todo punto, entonces $M_{\Phi,\mu}f(x) \leq M_{\Phi,\mu}g(x)$ en casi todo punto.

Demostración. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, veremos que para un cubo fijo Q que contiene a x se cumple que $\|f\|_{\Phi,Q,\mu} \leq \|g\|_{\Phi,Q,\mu}$. Por ser Φ una función creciente, tenemos que

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|g\|_{\Phi,Q,\mu}} \right) d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Phi,Q,\mu}} \right) d\mu(x) \leq 1.$$

Esto implica que $\|f\|_{\Phi,Q,\mu} \leq \|g\|_{\Phi,Q,\mu} \leq M_{\Phi,\mu}g(x)$. Luego, tomando supremo sobre los cubos que contienen a x se sigue la tesis. $\square$

Observación 1.4.5. Es fácil ver que para toda $f \in L^\infty(\mu)$ se cumple

$$\|M_{\Phi,\mu}f\|_{\infty,\mu} \leq C_\Phi \|f\|_{\infty,\mu},$$

donde la constante depende solo de Φ .

Teorema 1.4.6. Sean Φ una función de Young y μ una medida duplicante. Entonces para todo cubo Q se tiene que

$$\mu(\{x \in Q : M_{\Phi,\mu}f(x) > \lambda\}) \leq C \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x)$$

para alguna constante positiva C y todo λ positivo. Más aún, se verifica que

$$\mu(\{x \in Q : M_{\Phi,\mu}f(x) > \lambda\}) \leq C \int_{\{x \in Q : |f(x)| > \lambda/(2C_\Phi)\}} \Phi \left(\frac{2|f(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x). \quad (1.4.1)$$

Demostración. Sean $\Omega = \{x \in Q : M_{\Phi,\mu}f(x) > \lambda\}$ y $x \in \Omega$. Si $\|f\|_{\Phi,Q,\mu} > \lambda$, entonces $M_{\Phi,Q,\mu}f(x) > \lambda$ y tenemos que $\Omega = Q$. Además, por la definición de promedio Luxemburgo,

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x) > 1.$$

Luego, tenemos que

$$\mu(\Omega) = \mu(Q) \leq \int_Q \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x).$$

Si $\|f\|_{\Phi, Q, \mu} \leq \lambda$, consideramos la descomposición de Q en sub-cubos diádicos disjuntos y tomamos una colección de cubos maximales disjuntos $\{Q_j\}_j$ que verifican que

$$\lambda < \|f\|_{\Phi, Q_j, \mu} \leq C_\Phi \lambda \quad \text{y} \quad \Omega = \bigcup_j Q_j.$$

Luego para cada j se cumple que

$$\frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x) > 1,$$

de donde se deduce que

$$\mu(\Omega) \leq \sum_j \mu(Q_j) \leq \sum_j \int_{Q_j} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x) \leq \int_Q \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x).$$

Esto prueba la primera parte.

Para probar (1.4.1), escribimos $f_1 = f\chi_{\{|f|>\lambda/(2C_\Phi)\}}$ y $f = f_1 + f_2$. Entonces por lo que probamos anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in Q : M_{\Phi, \mu} f(x) > \lambda\}) &\leq \mu(\{x \in Q : M_{\Phi, \mu} f_1(x) > \lambda/2\}) + \mu(\{x \in Q : M_{\Phi, \mu} f_2(x) > \lambda/2\}) \\ &\leq C \int_{\{x \in Q : |f(x)| > \lambda/(2C_\Phi)\}} \Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x), \end{aligned}$$

ya que el segundo sumando es nulo. En efecto, como $f_2 = f\chi_{\{|f| \leq \lambda/(2C_\Phi)\}}$, por la Observación 1.4.5 se tiene que

$$M_{\Phi, \mu} f_2(x) \leq C_\Phi \|f_2\|_{\infty, \mu} \leq \frac{\lambda}{2},$$

lo que nos conduce a

$$\{x \in Q : M_{\Phi, \mu} f_2(x) > \lambda/2\} = \emptyset$$

y su medida es nula. Esto completa la prueba. $\square$

El siguiente lema se encuentra probado en [6] en un contexto más general. También puede verse [2].

Lema 1.4.7. Sean Φ una función de Young, w un peso duplicante, f tal que $M_{\Phi,w}f(x) < \infty$ en casi todo punto, y Q un cubo fijo. Entonces existe una constante positiva C , dependiendo solo de la dimensión, tal que

$$M_{\Phi,w}(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ})(x) \approx M_{\Phi,w}(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ})(y),$$

para todo $x, y \in Q$, donde $S = 4\sqrt{n}$.

Demostración. Sean $x, y \in Q$ y sea Q_0 un cubo que contiene a x tal que $Q_0 \cap \mathbb{R}^n \setminus SQ \neq \emptyset$.

Sean x_0 y x_Q los centros de Q_0 y de Q respectivamente y consideramos $B_0 = B(x_0, \sqrt{n}l(Q_0)/2)$. Como $Q_0 \subset B_0$, se sigue que $B_0 \cap \mathbb{R}^n \setminus SQ \neq \emptyset$. Probemos que

$$\frac{3}{4}l(Q) \leq l(Q_0). \quad (1.4.2)$$

En efecto, si no fuera así, considerando $z \in B_0$ tendríamos que

$$|z - x_Q| \leq |z - x| + |x - x_Q| \leq \sqrt{n}l(Q_0) + \frac{\sqrt{n}}{2}l(Q) \leq \frac{3}{4}\sqrt{n}l(Q) + \frac{\sqrt{n}}{2}l(Q) < \frac{S}{2}l(Q),$$

lo que implica que $B_0 \subset SQ$ y contradice que $B_0 \cap \mathbb{R}^n \setminus SQ \neq \emptyset$. Por lo tanto, (1.4.2) se cumple.

Veamos ahora que $Q \subset SQ_0$. Sea $z \in Q$, entonces por (1.4.2),

$$\begin{aligned} |z - x_0| &\leq |z - x| + |x - x_0| \\ &\leq \sqrt{n}l(Q) + \frac{\sqrt{n}}{2}l(Q_0) \\ &\leq \frac{4}{3}\sqrt{n}l(Q_0) + \frac{\sqrt{n}}{2}l(Q_0) \\ &< \frac{S}{2}l(Q_0), \end{aligned}$$

lo cual implica que $Q \subset B(x_0, Sl(Q_0)/2) \subset SQ_0$.

Para finalizar, como w es duplicante, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(Q_0)} \int_{Q_0} \Phi \left(\frac{|f|\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ}}{\|f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ}\|_{\Phi, SQ_0, w}} \right) w &\leq \frac{w(SQ_0)}{w(Q_0)} \frac{1}{w(SQ_0)} \int_{SQ_0} \Phi \left(\frac{|f|\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ}}{\|f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ}\|_{\Phi, SQ_0, w}} \right) w \\ &\leq C, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\|f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ}\|_{\Phi, Q_0, w} \leq C\|f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ}\|_{\Phi, SQ_0, w} \leq CM_{\Phi,w}(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ})(y)$ para todo $y \in Q \subset SQ_0$ y para todo cubo Q_0 que contiene a x . Luego,

$$M_{\Phi,w}(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ})(x) \leq CM_{\Phi,w}(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus SQ})(y).$$

La otra desigualdad se sigue de manera análoga intercambiando los roles de x e y . $\square$

El siguiente lema también se encuentra probado en [6] y será útil para la prueba de los resultados principales.

Lema 1.4.8. Sean $w \in A_1$ y Φ una función de Young. Existe una constante positiva C tal que

$$\|f\|_{\Phi, Q} \leq C \|f\|_{\Phi, Q, w}$$

para toda f . Más aún, se tiene que

$$M_{\Phi} f(x) \leq C M_{\Phi, w} f(x).$$

Demostración. Sean $w \in A_1$ y Φ una función de Young. Fijamos x y sea Q un cubo que contiene a x . Entonces, para $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx &= \frac{w(Q)}{|Q|} \frac{1}{w(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \\ &\leq C \frac{1}{w(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) \inf_Q w dx \\ &\leq C \frac{1}{w(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w(x) dx. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = \|f\|_{\Phi, Q, w}$, obtenemos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi, Q, w}} \right) dx \leq C,$$

lo cual implica que $\|f\|_{\Phi, Q} \leq C \|f\|_{\Phi, Q, w} \leq C M_{\Phi, w} f(x)$. Por lo tanto, tomando supremo sobre los cubos que contienen a x tenemos que $M_{\Phi} f(x) \leq C M_{\Phi, w} f(x)$. $\square$

El siguiente resultado es una desigualdad de tipo Fefferman-Stein para el operador maximal de Hardy-Littlewood, M , y su demostración puede encontrarse en [16].

Teorema 1.4.9. Sea $1 < p < \infty$, entonces existe una constante positiva C tal que para toda f y toda función no negativa w se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^n} M f(x)^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M w(x) dx.$$

1.5. Operadores de Calderón-Zygmund y conmutadores

En esta sección definiremos otros operadores con los que trabajaremos a lo largo de esta monografía. El primero de ellos es el operador de Calderón-Zygmund que introduciremos a continuación.

Sea T un operador lineal, acotado en L^2 , que satisface

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y) dy \quad \text{para } x \notin \text{sop } f,$$

donde $K: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible que llamaremos núcleo. Decimos que T es un operador de Calderón-Zygmund (OCZ) si K es un núcleo estándar, es decir, si satisface la condición de tamaño

$$|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.5.1)$$

y la condición de suavidad

$$|K(x-y) - K(x-z)| \leq C \frac{|x-z|}{|x-y|^{n+1}}, \quad \text{si } |x-y| > 2|y-z|. \quad (1.5.2)$$

Es bien sabido que si $w \in A_p$, entonces $T: L^p(w) \hookrightarrow L^p(w)$, es decir, es de tipo fuerte (p, p) con respecto al peso w , para $1 < p < \infty$. También se sabe que si $w \in A_1$, entonces $T: L^1(w) \hookrightarrow L^{1,\infty}(w)$. Para más detalles consultar [13] y [17].

La siguiente desigualdad establece un control sobre los operadores de Calderón-Zygmund mediante el operador maximal de Hardy-Littlewood e involucra pesos en la clase A_∞ . La prueba se debe a Coifman ([8]).

Teorema 1.5.1. *Sea $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$. Entonces existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx$$

se cumple para cada f tal que el lado izquierdo de la desigualdad sea finito.

Por otra parte, asociado a un operador de Calderón-Zygmund T y a una función b en BMO, definimos formalmente el conmutador de primer orden de T mediante

$$T_b^1 f = [b, T]f = bTf - T(bf)$$

y el conmutador de orden superior m , $m > 1$, como

$$T_b^m f = [b, T_b^{m-1}]f,$$

entendiendo que $T_b^0 = T$.

Se puede probar que si T es un OCZ y $m \in \mathbb{N}$, se satisface

$$T_b^m f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K(x, y) f(y) dy$$

para $x \notin \text{sop} f$.

El siguiente resultado es un análogo de la desigualdad de Coifman para el caso de los conmutadores y se encuentra probado en [22] (ver también [29]).

Teorema 1.5.2. *Sean $1 < p < \infty$, $b \in BMO$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y un peso $w \in A_\infty$. Entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m f(x)|^p w(x) dx \leq C \|b\|_{BMO}^{mp} \int_{\mathbb{R}^n} M^{m+1} f(x)^p w(x) dx$$

para toda f tal que el lado izquierdo sea finito.

Observación 1.5.3. En [22] se prueba concretamente que para T un operador de Calderón-Zygmund, b un símbolo en BMO y todo peso w en A_∞ , el lado izquierdo de esta desigualdad resulta finito.

Del teorema anterior se deduce que los conmutadores de orden superior están acotados en $L^p(w)$ para $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, ya que lo mismo ocurre para el operador maximal de Hardy-Littlewood y sus iteraciones.

Capítulo 2

Resultados principales

En este capítulo enunciaremos los resultados principales de esta tesis que involucran desigualdades mixtas con pares de pesos para distintos operadores, como así también una desigualdad de tipo Fefferman-Stein.

2.1. Desigualdades débiles mixtas con pares de pesos

Inspirados en los resultados obtenidos en [9] y [5], relacionados con desigualdades débiles mixtas para M y T_b^m , buscamos condiciones sobre pares de pesos (u, w) de modo que, si v es un peso en una clase adecuada, la siguiente desigualdad

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|w(x)v(x) dx$$

se satisfaga para todo λ positivo. Aquí, $\mathcal{T}$ será el operador maximal de Hardy-Littlewood o un operador de Calderón-Zygmund. Se estudia también un problema similar para el caso de conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund con símbolo perteneciente a la clase BMO, obteniendo una desigualdad mixta asociada a estos operadores.

La motivación de Sawyer para obtener desigualdades mixtas para el operador maximal de Hardy-Littlewood está ligada al teorema de factorización de Jones de un peso en la clase A_p . Para el caso de pares de pesos, no es claro que este enfoque sea de utilidad. Más aún, se sabe que muchos de los operadores del Análisis Armónico no satisfacen desigualdades de tipo (p, p) fuerte con (u, w) en A_p . Es así que la búsqueda se centrará en obtener desigualdades débiles mixtas con pares de pesos, de manera que las mismas sean generalizaciones de las correspondientes

desigualdades de tipo débil para dichos operadores.

En todos los teoremas principales consideraremos f acotada y de soporte compacto.

El primer resultado establece una desigualdad débil mixta con pares de pesos para M , el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 2.1.1. *Sean $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$ y $(u, w) \in A_1(v^{1-q})$ para algún $1 < q < \infty$. Entonces existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|w(x)v(x) dx$$

se cumple para todo λ positivo.

La demostración de este resultado se encuentra en la Sección 3.3.

Observemos que si $u = w$, se obtiene la desigualdad débil mixta probada en [9] para M , aunque bajo condiciones diferentes en los pesos. En [9] dichas condiciones están dadas por $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$. En particular, esta última implica que $v \in A_{q'}(u)$ para algún $q > 1$ y, en consecuencia, $v^{1-q} \in A_q(u) \subset A_\infty(u)$. Luego, una aplicación de la Proposición 1.2.9 nos dice que con las condiciones dadas en [9] implican que $u \in A_1(v^{1-q})$, que es la condición del Teorema 2.1.1 cuando $u = w$. En cierto sentido, nuestra condición es más general.

Por otra parte, si consideramos $v = 1$, el Teorema 2.1.1 nos devuelve la desigualdad de tipo débil con dos pesos para M probada en [23].

Una herramienta clave para obtener desigualdades débiles mixtas para operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores consiste en una desigualdad fuerte de tipo Fefferman-Stein respecto de un peso particular para los operadores mencionados. Concretamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.2. *Sean $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\varepsilon > 0$, $q > 1$ y $\Phi_{m+\varepsilon}(t) = t(1 + \log t)^{m+\varepsilon}$. Sean T un operador de Calderón-Zygmund y $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$. Si $1 < p < \min\{q, 1 + \frac{\varepsilon}{m+1}\}$, entonces la desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m f(x)|^p w(x) v^{1-p}(x) dx \leq C \|b\|_{BMO}^{mp} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} w(x) v^{1-p}(x) dx \quad (2.1.1)$$

vale para w no negativa y localmente integrable.

La demostración de este resultado se encuentra en la Sección 3.2.

En el caso en que $v = 1$, un análogo del teorema anterior puede encontrarse en [29].

A continuación definimos las clases de pares de pesos involucrados en los Teoremas 2.1.3 y 2.1.4.

Dada una función de Young Ψ y una medida μ , decimos que el par $(u, w) \in A_\Psi(\mu)$ si

$$\sup_Q \|u\|_{\Psi, Q, \mu} \|w^{-1} \chi_Q\|_\infty < \infty.$$

Cuando $\Psi(t) = t$ tenemos que $A_\Psi(\mu) = A_1(\mu)$. En particular, si $\Psi(t) = \Phi_\delta(t) = t(1 + \log^+ t)^\delta$, $\delta > 0$, la clase $A_\Psi(\mu)$ es un refortalecimiento de la clase $A_1(\mu)$, ya que $A_\Psi(\mu) \subset A_1(\mu)$. Estas serán precisamente las clases de pares de pesos involucradas en las condiciones de los Teoremas 2.1.3 y 2.1.4 cuando $d\mu(x) = v(x)^{1-q} dx$.

El siguiente resultado nos da una desigualdad débil mixta con pares de pesos para operadores de Calderón-Zygmund.

Teorema 2.1.3. *Sean $\varepsilon > 0$, $q > 1$, $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$ y $(u, w) \in A_{\Phi_\varepsilon}(v^{1-q})$. Si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces la desigualdad*

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) v(x) dx$$

se cumple para todo λ positivo.

Si $v = 1$, el teorema anterior nos provee de una estimación de tipo débil $(1, 1)$ con pares de pesos para operadores de Calderón-Zygmund. Más aún, la condición $(u, w) \in A_{\Phi_\varepsilon}$ es de tipo “bump” en la escala de espacios de Orlicz y se puede interpretar como el caso límite de la obtenida en [12] para $p > 1$. Además, si $u = w$, entonces la condición $u \in A_{\Phi_\varepsilon}$ implica que $u \in A_1$, la cual es suficiente para la acotación débil $(1, 1)$ con peso u del operador (ver [13]).

Por último, obtenemos una estimación débil mixta para conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund con símbolo en BMO.

Teorema 2.1.4. *Sean $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$ y $(u, w) \in A_{\Phi_{m+\varepsilon}}(v^{1-q})$. Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$, entonces la desigualdad*

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T_b^m(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{\|b\|_{BMO}^m |f(x)|}{\lambda} \right) w(x) v(x) dx$$

se cumple para todo λ positivo.

Si $v = 1$, el resultado anterior nos provee de una acotación de tipo débil con pares de pesos que, hasta donde sabemos, no se encuentra en la literatura clásica. Si además $u = w$, como en el caso de los operadores de Calderón-Zygmund, el resultado anterior implica el correspondiente probado en [27]. Por otra parte, los Teoremas 2.1.3 y 2.1.4 constituyen versiones de desigualdades débiles mixtas con pares de pesos de las correspondientes probadas en [9] y [5].

Las demostraciones de los últimos dos resultados mencionados aquí se encuentran en las secciones 3.4 y 3.5.

2.2. Aplicaciones: desigualdades débiles mixtas de tipo Fefferman-Stein

Como aplicación de los teoremas de la sección anterior se obtienen desigualdades débiles mixtas de tipo Fefferman-Stein para operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores con símbolo en BMO. Para ello exhibiremos ejemplos de pares de pesos en las clases correspondientes.

Dados $\varepsilon > 0$, $q > 1$ y $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$, veamos que el par $(u, M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u)$ satisface las hipótesis del Teorema 2.1.3 cuando $m = 0$ y del Teorema 2.1.4 cuando $m \geq 1$. En efecto, para todo cubo Q y casi todo $x \in Q$ se tiene que

$$\|u\|_{\Phi_{m+\varepsilon}, Q, v^{1-q}} \leq M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x).$$

Esto implica que

$$\|u\|_{\Phi_{m+\varepsilon}, Q, v^{1-q}} \leq \inf_Q M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u,$$

o, equivalentemente,

$$\|u\|_{\Phi_{m+\varepsilon}, Q, v^{1-q}} \|(M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u)^{-1} \chi_Q\|_\infty \leq C,$$

lo cual establece que $(u, M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u) \in A_{\Phi_{m+\varepsilon}}(v^{1-q})$.

Luego, como consecuencia de los teoremas mencionados, obtenemos las siguientes desigualdades débiles mixtas de tipo Fefferman-Stein para T y T_b^m , $m \in \mathbb{N}$, respectivamente.

Teorema 2.2.1. *Sean $\varepsilon > 0$, $q > 1$ y $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$. Si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces la desigualdad*

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u(x) v(x) dx$$

se cumple para toda función no negativa y localmente integrable u y todo λ positivo.

Teorema 2.2.2. Sean $\varepsilon > 0$, $q > 1$, $m \in \mathbb{N}$, $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$ y $b \in BMO$. Si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces la desigualdad

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T_b^m(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\|b\|_{BMO}^m \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx$$

se cumple para toda función no negativa y localmente integrable u y todo λ positivo.

Los últimos dos teoremas constituyen mejoras de las correspondientes estimaciones probadas en [6] y [7], respectivamente. Veamos dichas mejoras en relación a [6]. Algo similar puede hacerse para el caso del conmutador establecido en [7].

En [6] se demuestra que si $q > 1$ y $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$, entonces vale

$$uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u(x) M(\Psi(v))(x) dx,$$

donde $p > \max\{q', 1 + 1/\varepsilon\}$ y $\Psi(t) = t^{p'+1-q} \chi_{[0,1]}(t) + t^{p'} \chi_{[1,\infty)}(t)$. De las hipótesis sobre p y q es directo deducir que $\Psi(t) \geq t$, de donde resulta que $v \leq M(\Psi(v))$. Luego, en este sentido la desigualdad mencionada en el Teorema 2.2.1 es una mejora respecto de la probada en [6].

También es importante notar que, cuando tomamos $v = 1$ en los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2, se obtienen las desigualdades débiles de tipo Fefferman-Stein probadas en [26] y [30], respectivamente, las que establecen que

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M_{\Phi_\varepsilon} u(x) dx$$

y

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^m f(x)| > \lambda\}) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\|b\|_{BMO}^m \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{m+\varepsilon}} u(x) dx$$

para todo λ y ε positivos.

Capítulo 3

Demostraciones de los resultados del Capítulo 2

En este capítulo daremos las demostraciones de los teoremas expuestos en el Capítulo 2 y los resultados auxiliares que usaremos en las mismas.

3.1. Resultados auxiliares

Esta sección estableceremos y probaremos los resultados auxiliares necesarios para demostrar los teoremas enunciados en el Capítulo 2. Comenzamos por una desigualdad puntual entre operadores maximales generalizados asociados a una medida μ duplicante, que es una adaptación de un resultado probado en [2].

Teorema 3.1.1. *Sean μ una medida duplicante, Φ y Ψ funciones de Young y*

$$\Theta(t) = \int_1^t \Psi'_0(u) \Phi(t/u) du,$$

donde Ψ_0 es la función definida en la Observación 1.3.2. Entonces Θ resulta una función de Young y si $\tilde{\Theta}$ es una función de Young tal que $\Theta \prec_\infty \tilde{\Theta}$ se cumple que

$$M_{\Psi,\mu}(M_{\Phi,\mu}f)(x) \leq CM_{\tilde{\Theta},\mu}f(x) \tag{3.1.1}$$

para casi todo punto, donde la constante C depende de las funciones de Young involucradas.

Demostración. Probaremos primero que Θ es una función de Young. Sea ϕ la función de densidad de Φ . Luego, por un cambio de variables se puede ver que

$$\Phi(t/u) = \frac{1}{u} \int_0^t \phi(v/u) dv.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \int_1^t \Psi'_0(u) \left(\frac{1}{u} \int_0^t \phi(v/u) dv \right) du \\ &= \int_0^t \int_1^t \Psi'_0(u) \frac{1}{u} \phi(v/u) du dv \\ &= \int_0^t \theta(v) dv, \end{aligned}$$

donde $\theta(v) = \int_1^t \Psi'_0(u) \phi(v/u) u^{-1} du$. Las funciones Ψ'_0 y ϕ son no negativas, de modo que θ también lo es. Por otra parte, dado que ϕ es creciente, se sigue que θ es creciente y entonces Θ resulta una función de Young.

Para demostrar la segunda parte, observemos primero que si $\Theta \prec_\infty \tilde{\Theta}$, entonces, por la Observación 1.4.1, tenemos $M_{\Theta,\mu}f(x) \leq CM_{\tilde{\Theta},\mu}f(x)$ en casi todo punto. Por otro lado, como $\Psi \approx_\infty \Psi_0$, se sigue que $M_{\Psi,\mu}f(x) \approx M_{\Psi_0,\mu}f(x)$ en casi todo punto. Luego, basta probar que

$$M_{\Psi_0,\mu}(M_{\Phi,\mu}f)(x) \leq CM_{\Theta,\mu}f(x). \quad (3.1.2)$$

En efecto, si esto es cierto, entonces por las desigualdades mencionadas obtenemos

$$M_{\Psi,\mu}(M_{\Phi,\mu}f)(x) \leq CM_{\Psi_0,\mu}(M_{\Phi,\mu}f)(x) \leq CM_{\Theta,\mu}f(x) \leq CM_{\tilde{\Theta},\mu}f(x),$$

lo cual es lo deseado.

Probemos entonces (3.1.2). Para ello veamos que $\|M_{\Phi,\mu}f\|_{\Psi_0,Q,\mu} \leq C\|f\|_{\Theta,Q,\mu}$ para todo cubo Q que contenga a x . Fijamos Q que contiene a x y podemos suponer $\|f\|_{\Theta,Q,\mu} = 1/2$, de donde se sigue que

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Theta(2|f(x)|) d\mu(x) \leq 1. \quad (3.1.3)$$

En efecto, si

$$M_{\Psi_0,\mu}(M_{\Phi,\mu}g)(x) \leq CM_{\Theta,\mu}g(x)$$

es cierta para $\|g\|_{\Theta,Q,\mu} = 1/2$, dada f cualquiera tenemos que

$$\left\| M_{\Phi,\mu} \left(\frac{f}{2\|f\|_{\Theta,Q,\mu}} \right) \right\|_{\Psi_0,Q,\mu} \leq C \left\| \frac{f}{2\|f\|_{\Theta,Q,\mu}} \right\|_{\Theta,Q,\mu} = C$$

y entonces

$$\|M_{\Phi,\mu}f\|_{\Psi_0,Q,\mu} \leq C\|f\|_{\Theta,Q,\mu}.$$

Por Proposición 1.3.3 y la definición de Ψ'_0 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_Q \Psi_0(M_{\Phi,\mu}f(x)) d\mu(x) &= \int_0^\infty \Psi'_0(s) \mu(\{x \in Q : M_{\Phi,\mu}f(x) > s\}) ds \\ &= \int_1^\infty \Psi'_0(s) \mu(\{x \in Q : M_{\Phi,\mu}f(x) > s\}) ds, \end{aligned}$$

dato que $\Psi_0(t) = 0$ en $[0, 1]$. Utilizando la desigualdad (1.4.1) del Teorema 1.4.6 y (3.1.3), se sigue que

$$\begin{aligned} \int_Q \Psi_0(M_{\Phi,\mu}f(x)) d\mu(x) &\leq C \int_1^\infty \Psi'_0(s) \int_{\{x \in Q : |f(x)| > s/2\}} \Phi(2|f(x)|/s) d\mu(x) ds \\ &= C \int_Q \int_1^{2|f(x)|} \Psi'_0(s) \Phi(2|f(x)|/s) ds d\mu(x) \\ &= C \int_Q \Theta(2|f(x)|) d\mu(x) \leq C\mu(Q). \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtuvimos que

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Psi_0(M_{\Phi,\mu}f(x)) d\mu(x) \leq C$$

y podemos considerar $C > 1$. Luego, por la Proposición 1.3.1 tenemos que

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Psi_0\left(\frac{M_{\Phi,\mu}f(x)}{C}\right) d\mu(x) \leq \frac{1}{C} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Psi_0(M_{\Phi,\mu}f(x)) d\mu(x) \leq 1.$$

De esto último se sigue que

$$\|M_{\Phi,\mu}f\|_{\Psi_0,Q,\mu} \leq C = 2C\|f\|_{\Theta,Q,\mu}$$

y con ello finaliza la prueba. $\square$

El siguiente lema es una versión generalizada del conocido resultado que permite obtener pesos en la clase A_1 a partir de ciertas potencias del operador maximal de Hardy-Littlewood (ver, por ejemplo [13]). La generalización se entiende no solo en relación a la función de Young involucrada en la definición del operador maximal sino también a la medida μ . El caso donde μ sea la medida de Lebesgue fue probado en [10].

Lema 3.1.2. *Sean $0 \leq \delta < 1$, Φ una función de Young y f tal que $M_{\Phi,\mu}f(x) < \infty$ en casi todo punto. Entonces $(M_{\Phi,\mu}f)^\delta \in A_1(\mu)$.*

Demostración. Probaremos el resultado para $0 < \delta < 1$ dado que el caso $\delta = 0$ es trivial.

Supongamos primero que Φ es una r -función de Young con $r > 1$, de donde se sigue por Proposición 1.3.2 que $\Phi(t)/t^r$ es no decreciente. Consideramos $\Psi(t) = t^s$, con $1 \leq s < r$. Utilizando la definición de Θ del Teorema 3.1.1 obtenemos que

$$\Theta(t) = s \int_1^t \Phi(t/u) u^{s-1} du = s \int_1^t \frac{\Phi(t/u)}{(t/u)^r} u^{s-1} (t/u)^r du \leq r \Phi(t) \int_1^t u^{s-r-1} du \leq C \Phi(t).$$

Es decir que $\Theta \prec_\infty \Phi$, con una constante C dependiente de r , y entonces, por el Teorema 3.1.1, se tiene que

$$M_{\Psi,\mu}(M_{\Phi,\mu}f)(x) \leq C M_{\Phi,\mu}f(x)$$

en casi todo punto. Recordando que para $\Psi(t) = t^s$ se tiene $M_{\Psi,\mu}f = M_{s,\mu}f$, se sigue que

$$M_\mu((M_{\Phi,\mu}f)^s) = M_{\Psi,\mu}(M_{\Phi,\mu}f)^s \leq C M_{\Phi,\mu}f(x)^s.$$

Esta última desigualdad prueba que $(M_{\Phi,\mu}f)^s \in A_1(\mu)$ para $1 \leq s < r$. Luego por el ítem 1) de la Proposición 1.2.4, tenemos que $(M_{\Phi,\mu}f)^s \in A_1(\mu)$ para todo $0 < s < r$, donde hemos asumido que Φ es una r -función de Young.

Supongamos ahora que Φ es una función de Young, y sean $r = 1/\delta > 1$ y $\Psi(t) = \Phi(t^r)$, la cual resulta ser una r -función de Young. Notemos primero que, por la Proposición 1.3.4, $(M_{\Phi,\mu}f)^\delta = M_{\Psi,\mu}(f^\delta)$ y, por lo probado anteriormente, tenemos que $M_{\Psi,\mu}(f^\delta) \in A_1(\mu)$. De aquí se sigue que

$$M_\mu((M_{\Phi,\mu}f)^\delta) = M_\mu M_{\Psi,\mu}(f^\delta) \leq C M_{\Psi,\mu}(f^\delta) = C(M_{\Phi,\mu}f)^\delta,$$

donde la constante depende de δ y de Φ , lo cual prueba que $(M_{\Phi,\mu}f)^\delta \in A_1(\mu)$. $\square$

El siguiente lema se encuentra probado en [4].

Lema 3.1.3. Sean $r \geq 1$, $\varepsilon \geq 0$ y $\Phi(t) = t^r(1 + \log^+ t)^\varepsilon$. Entonces para $t \geq 1$ y $\delta > 0$ tenemos que

$$\Phi(t) \leq C t^{r+\delta},$$

con $C = \max\{(\varepsilon/\delta)^\varepsilon, 1\}$.

Probamos ahora una desigualdad puntual que involucra operadores maximales generalizados.

Lema 3.1.4. Sean $\varepsilon \geq 0$, $q > 1$ y $\Phi_\varepsilon(t) = t(1 + \log^+ t)^\varepsilon$. Si $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$ y $1 < p < q$, entonces existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$M_{\Phi_\varepsilon}(wv^{1-p})(x) \leq CM_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}}w(x) v^{1-p}(x)$$

se cumple para toda función no negativa y localmente integrable w .

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y Q un cubo que contiene a x . Probaremos que

$$\|wv^{1-p}\|_{\Phi_\varepsilon, Q} \leq C\|w\|_{\Phi_\varepsilon, Q, \nu} v^{1-p}(x),$$

donde $\nu = v^{1-q}$. Luego, tomando supremo en los cubos que contienen a x obtenemos lo deseado.

Sea $\lambda_0 = \|w\|_{\Phi_\varepsilon, Q, \nu} v(x)^{1-p}$. Por ser Φ_ε sub-multiplicativa, el Lema 3.1.3 nos permite obtener que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi_\varepsilon \left(\frac{w(y)v(y)^{1-p}}{\lambda_0} \right) dy &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi_\varepsilon \left(\frac{w(y)}{\|w\|_{\Phi_\varepsilon, Q, \nu}} \right) \Phi_\varepsilon \left(\frac{v(y)^{1-p}}{\inf_Q v^{1-p}} \right) dy \\ &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q \Phi_\varepsilon \left(\frac{w(y)}{\|w\|_{\Phi_\varepsilon, Q, \nu}} \right) \left(\frac{v(y)^{1-p}}{\inf_Q v^{1-p}} \right)^{1+\delta} dy \end{aligned}$$

para $\delta > 0$. Por la hipótesis y Proposición 1.2.5 se tiene que $v^{1-q} \in A_1$. Tomando δ tal que $\delta = \frac{q-1}{p-1} - 1 > 0$, se sigue que $(1-p)(1+\delta) = 1-q$, de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi_\varepsilon \left(\frac{w(y)v(y)^{1-p}}{\lambda_0} \right) dy &\leq C \frac{v^{1-q}(Q)}{|Q|} \frac{1}{v^{1-q}(Q)} \int_Q \Phi_\varepsilon \left(\frac{w(y)}{\|w\|_{\Phi_\varepsilon, Q, \nu}} \right) v(y)^{1-q} dy \frac{1}{\inf_Q v^{1-q}} \\ &\leq C \inf_Q v^{1-q} \frac{1}{\inf_Q v^{1-q}} = C, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la Proposición A.4.1. Un razonamiento análogo al realizado al final de la prueba del Teorema 3.1.1 nos conduce al resultado deseado. $\square$

Lema 3.1.5. Sean $\varepsilon \geq 0$, $\Phi_\varepsilon = t(1 + \log t)^\varepsilon$, $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$ y w no negativa y localmente integrable. Entonces para todo $1 < p < q$ se tiene que $(M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}}w)^{1-p'}v \in A_\infty$.

Demostración. Veamos que $(M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}}w)^{1-p'}v$ pertenece a A_t , con $t > p'$.

Comenzamos acotando la expresión

$$I = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}}w(x)^{(1-p')(1-t')} v(x)^{1-t'} dx \right)^{t-1}. \quad (3.1.4)$$

Como $t > p'$, se tiene que $0 < (1 - p')(1 - t') < 1$ y $t' < p < q$, con lo cual $q - t' > 0$. Sea $\delta = (1 - p')(1 - t')$, por el Lema 3.1.2, $(M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} w)^\delta \in A_1(v^{1-q})$, y, por la Proposición 1.2.5, tenemos que $v^{1-q} \in A_1$. Luego, se sigue que

$$\begin{aligned} I &\leq \left(\frac{1}{v^{1-q}(Q)} \int_Q (M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} w)^\delta(x) v(x)^{1-q} dx \right)^{t-1} \sup_Q v^{(q-t')(t-1)} \left(\frac{v^{1-q}(Q)}{|Q|} \right)^{t-1} \\ &\leq C \left(\inf_Q (M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} w)^\delta \right)^{t-1} \sup_Q v^{(q-t')(t-1)} \left(\inf_Q v^{1-q} \right)^{t-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} w)^{1-p'} v \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} w)^{(1-p')(1-t')} v^{1-t'} \right)^{t-1} \\ &\leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} w)^{1-p'} \right) \left(\inf_Q (M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} w)^\delta \right)^{t-1} \sup_Q v^{(q-t')(t-1)+1} \left(\inf_Q v^{1-q} \right)^{t-1} \\ &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q (M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} w)^{(1-p')+\delta(t-1)} \leq C, \end{aligned}$$

donde se ha usado que $\inf_Q v^{-1} = (\sup_Q v)^{-1}$ y que

$$\delta(t-1) - p' + 1 = 0 \quad \text{y} \quad (q-t')(t-1) + 1 = (q-1)(t-1).$$

Con esto se probó que para $t > p'$, $(M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} w)^{1-p'} v \in A_t \subset A_\infty$. $\square$

En lo siguiente probaremos un lema que será útil para la demostración del Teorema 2.1.1, el cual es una extensión del probado en [16] para la medida de Lebesgue. Para ello primero necesitaremos el siguiente resultado que puede encontrarse demostrado de manera más general en [15].

Teorema 3.1.6. *Sean u y v un par de pesos, los siguientes enunciados son equivalentes.*

I) $(u, v) \in A_1(\mu)$.

II) $M_\mu : L(v) \hookrightarrow L^{1,\infty}(u)$, es decir, para todo $\lambda > 0$ se cumple que

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| v(x) d\mu(x).$$

El siguiente resultado es una desigualdad fuerte (p, p) para M_μ con pesos $(w, M_\mu w)$.

Lema 3.1.7. *Sean $1 < p < \infty$, w una función no negativa y μ una medida duplicante. Entonces se verifica que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M_\mu w(x) d\mu(x).$$

Demostración. Consideramos el par de medidas $(w d\mu(x), M_\mu w d\mu(x))$ y utilizamos el Teorema de interpolación 1.1.1.

Es directo ver que M_μ es acotada de $L^\infty(M_\mu w d\mu(x))$ en $L^\infty(w d\mu(x))$. En efecto, si $M_\mu w = 0$ para algún x , entonces $w = 0$ μ -c.t.p. y el resultado es trivial. Si $M_\mu w > 0$ para todo x , tomando $\lambda > \|f\|_{\infty, M_\mu w}$, tenemos que

$$\int_{\{x: |f(x)| > \lambda\}} M_\mu w(x) d\mu(x) = 0.$$

Esto es cierto por la elección de λ , dado que el conjunto sobre el que se está integrando tiene $M_\mu w$ -medida nula. Además, como $M_\mu w(x) > 0$ μ -c.t.p., entonces $\mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}) = 0$. Luego, $|f(x)| < \lambda$ μ -c.t.p., de donde se sigue que $M_\mu f \leq \lambda$, para todo $\lambda > \|f\|_{\infty, M_\mu w}$, y entonces $M_\mu f \leq \|f\|_{\infty, M_\mu w}$. Por lo tanto,

$$\|M_\mu f\|_{\infty, w} \leq \|f\|_{\infty, M_\mu w}.$$

Por otra parte, la acotación débil $(1, 1)$ se deriva de aplicar del Teorema 3.1.6, con el par $(w, M_\mu w)$, el cual pertenece a $A_1(\mu)$.

Para finalizar, aplicamos el Teorema 1.1.1 con medidas $d\mu(x) = M_\mu w d\mu(x)$ y $d\nu = w d\mu(x)$ y obtenemos lo deseado. $\square$

Observación 3.1.8. El resultado anterior también es válido para la maximal diádica M_μ^D con las mismas hipótesis sobre los pesos. En efecto, como $M_\mu^D f(x) \leq M_\mu f(x)$ en c.t.p., por el Teorema 3.1.6 tenemos que

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^D f(x) > \lambda\}) \leq u(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) d\mu(x),$$

lo cual es la acotación débil $(1, 1)$ para M_μ^D . Por otra parte, la acotación de $L^\infty(M_\mu^D w d\mu(x))$ en $L^\infty(w d\mu(x))$ se sigue de manera análoga a lo probado para M_μ .

3.2. Demostración del Teorema 2.1.2

Demostración del Teorema 2.1.2. Sean $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, p y $\Phi_{m+\varepsilon}$ como en la hipótesis. Basta considerar que $\|b\|_{\text{BMO}} = 1$. Utilizando el Teorema A.1.1, lo deseado es equivalente a probar que

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} |T_b^{m,*} f(x)|^{p'} M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} w(x)^{1-p'} v(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'} w(x)^{1-p'} v(x) dx.$$

Primero usamos el Teorema 1.5.2 (ver Observación 1.5.3) y los Lemas 3.1.5 y 3.1.4 para obtener

$$\begin{aligned} A &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} M^{m+1} f(x)^{p'} M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-p}} w(x)^{1-p'} v(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} M^{m+1} f(x)^{p'} M_{\Phi_{m+\varepsilon}} (wv^{1-p})(x)^{1-p'} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto debemos probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} M^{m+1} f(x)^{p'} M_{\Phi_{m+\varepsilon}} (wv^{1-p})(x)^{1-p'} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'} w(x)^{1-p'} v(x) dx.$$

Dado que $M^{m+1} f \approx M_{\Phi_m} f$, la desigualdad anterior es equivalente a probar que

$$B = \int_{\mathbb{R}^n} M_{\Phi_m} (fw^{1/p}v^{-1/p'})(x)^{p'} M_{\Phi_{m+\varepsilon}} (wv^{1-p})(x)^{1-p'} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'} dx.$$

Como $\Phi_m^{-1}(t) \approx \frac{t}{(\log t)^m}$, para valores de t suficientemente grandes y para $\delta > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_m^{-1}(t) &\approx \frac{t}{(1 + \log t)^m} \approx \frac{t^{1/p}}{(1 + \log t)^{m + \frac{p-1+\delta}{p}}} t^{1/p'} (1 + \log t)^{\frac{p-1+\delta}{p}} \\ &= \Psi^{-1}(t) \Theta^{-1}(t), \end{aligned}$$

donde $\Psi(t) = t^p (1 + \log t)^{(m+1)p-1+\delta}$ y $\Theta(t) = t^{p'} (1 + \log t)^{-(1+(p'-1)\delta)}$.

Por la desigualdad de Hölder generalizada (Teorema 1.3.7) tenemos que

$$M_{\Phi_m} (fw^{1/p}v^{-1/p'}) \leq C M_{\Theta} f M_{\Psi} (w^{1/p}v^{-1/p'}) \approx M_{\Theta} f (M_{\Phi_{(m+1)p-1+\delta}} (wv^{-p/p'}))^{1/p}.$$

Sea $\delta = m + \varepsilon - (m + 1)p + 1$, el cual resulta positivo ya que $p < 1 + \frac{\varepsilon}{m+1}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} B &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} M_{\Theta} f(x)^{p'} M_{\Phi_{m+\varepsilon}} (wv^{-p/p'})(x)^{p'/p} M_{\Phi_{m+\varepsilon}} (wv^{1-p})(x)^{1-p'} dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} M_{\Theta} f(x)^{p'} dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'} dx, \end{aligned}$$

por el Teorema 1.4.3, siempre y cuando $\Theta \in B_{p'}$. Veamos que esto es así. Consideramos $c = e$, y como $1 + \log t \leq C \log t$ y $(p' - 1)\delta > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_e^\infty \frac{t^{p'} (1 + \log t)^{-1+(1-p')\delta}}{t^{p'}} \frac{dt}{t} &\leq C \int_e^\infty \frac{(\log t)^{-1+(1-p')\delta}}{t} dt \\ &= \int_1^\infty u^{-1+(1-p')\delta} du < \infty, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el cambio de variables $u = \log t$. Esto finaliza la prueba. $\square$

3.3. Demostración del Teorema 2.1.1

Demostración del Teorema 2.1.1. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir f no negativa, ya que $Mf = M(|f|)$. Además, por el Teorema 1.4.2, basta probar este resultado con la maximal diádica $M^{\mathcal{D}}$, con $\mathcal{D}$ una grilla diádica.

Notemos primero que el hecho de que $v \in RH_{\infty}$ implica que v pertenece a alguna clase A_p , para algún $p > 1$, y por ende $d\mu(x) = v(x)dx$ define una medida duplicante en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, podemos realizar la descomposición de Calderón-Zygmund (Teorema 1.1.2) de la función f a nivel $\lambda > 0$ respecto de esta medida y obtener una familia de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_j$ que cumplen

$$\text{I) } f(x) \leq \lambda \text{ para casi todo } x \notin \Omega = \bigcup_j Q_j,$$

$$\text{II) } \lambda < \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x) dx < C\lambda.$$

Sean $f_Q^v = \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x) dx$, $Q_j^* = RQ_j$, con $R > 1$, y $\Omega^* = \bigcup_j Q_j^*$. Además, escribimos $f(x) = g(x) + h(x)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin \Omega \\ f_{Q_j}^v & x \in Q_j \end{cases}$$

y

$$h(x) = \sum_j \left(f(x) - f_{Q_j}^v \right) \chi_{Q_j}(x) = \sum_j h_j(x).$$

Se sigue que $g(x) \leq C\lambda$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y que $\int_{Q_j} h_j(x)v(x) dx = 0$ para todo j .

Dado x y un cubo Q diádico de $\mathcal{D}$ que lo contiene, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)v(y) dy &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q g(y)v(y) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q h(y)v(y) dx \\ &\leq M^{\mathcal{D}}(gv)(x) + \sup_{Q \ni x} \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q h(y)v(y) dy \right|. \end{aligned}$$

Luego, tomando supremo en el lado izquierdo sobre los cubos diádicos $Q \in \mathcal{D}$ que contienen a x , se obtiene que

$$M^{\mathcal{D}}(fv)(x) \leq M^{\mathcal{D}}(gv)(x) + \sup_{Q \ni x} \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q h(y)v(y) dy \right|.$$

Sea

$$\tilde{M}^{\mathcal{D}} f(x) = \sup_{Q \ni x} \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right|,$$

entonces

$$\begin{aligned} uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{M^{\mathcal{D}}(fv)(x)}{v(x)} > \lambda \right\} \right) &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{M^{\mathcal{D}}(gv)(x)}{v(x)} > \lambda/2 \right\} \right) + uv(\Omega^*) \\ &\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{\tilde{M}^{\mathcal{D}}(hv)(x)}{v(x)} > \lambda/2 \right\} \right) \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Para estimar el término I_1 , observemos primero que el Lema 1.2.5 y el Lema 1.4.8 implican que

$$M^{\mathcal{D}} f(x) \leq M_{v^{1-q}}^{\mathcal{D}} f(x). \quad (3.3.1)$$

Además, por la observación 3.1.8, podemos aplicar el Lema 3.1.7 con la maximal diádica. Utilizando la desigualdad de Tchebyshev, (3.3.1) y el Lema 3.1.7 obtenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{1}{\lambda^q} \int_{\mathbb{R}^n} M^{\mathcal{D}}(gv)(x)^q u^*(x) v(x)^{1-q} dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda^q} \int_{\mathbb{R}^n} M_{v^{1-q}}^{\mathcal{D}}(gv)(x)^q u^*(x) v(x)^{1-q} dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda^q} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q M_{v^{1-q}}^{\mathcal{D}} u^*(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $v^{1-q} \in A_1$ y $u^* = u \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*}$. Luego, por propiedades de g , se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| M_{v^{1-q}}^{\mathcal{D}} u^*(x) v(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x) M_{v^{1-q}}^{\mathcal{D}} u^*(x) v(x) dx + \sum_j \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x) v(x) dx \int_{Q_j} M_{v^{1-q}}^{\mathcal{D}} u^*(x) v(x) dx \right). \end{aligned}$$

Como $(u, w) \in A_1(v^{1-q})$, se sigue que $M_{v^{1-q}}^{\mathcal{D}} u^*(x) \leq M_{v^{1-q}} u^*(x) \leq M_{v^{1-q}} u(x) \leq C \inf_Q w$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, lo cual nos permite estimar el primer sumando de la derecha por lo

deseado. Por otra parte, por el Lema 1.4.7 y la hipótesis sobre los pares de pesos, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x) dx \int_{Q_j} M_{v^{1-q}}^{\mathcal{D}} u^*(x)v(x) dx &\leq \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x) dx \int_{Q_j} M_{v^{1-q}} u^*(x)v(x) dx \\
&\leq C \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x) dx v(Q_j) \inf_{Q_j} M_{v^{1-q}} u^* \\
&\leq C \int_{Q_j} f(x)v(x) M_{v^{1-q}} u^*(x) dx \\
&\leq C \int_{Q_j} f(x)w(x)v(x) dx.
\end{aligned}$$

Como los cubos Q_j son disjuntos, finalmente se obtiene que

$$I_1 \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)w(x)v(x) dx.$$

Veamos ahora la estimación de I_2 . Por Proposición 1.2.7 y 1.2.5, tenemos que $v^q \in RH_\infty$ y $v^{1-q} \in A_1$, respectivamente. Aplicando la condición sobre el par de pesos, obtenemos

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \sum_j uv^{1-q}v^q(Q_j^*) \\
&\leq \sum_j v^{1-q}(Q_j^*) \sup_{Q_j^*} v^q \frac{1}{v^{1-q}(Q_j^*)} \int_{Q_j^*} u(x)v(x)^{1-q} dx \\
&\leq C \sum_j v^{1-q}(Q_j^*) \sup_{Q_j^*} v^q \inf_{Q_j^*} w \\
&\leq C \sum_j \frac{v^{1-q}(Q_j^*)}{|Q_j^*|} \int_{Q_j^*} v(x)^q dx \inf_{Q_j^*} w \\
&\leq C \sum_j \inf_{Q_j^*} v^{1-q} \int_{Q_j^*} v(x)^q dx \inf_{Q_j^*} w \\
&\leq C \sum_j \int_{Q_j^*} v(x) dx \inf_{Q_j^*} w \leq C \sum_j \int_{Q_j} v(x) dx \inf_{Q_j^*} w
\end{aligned}$$

y, por la descomposición de Calderón-Zygmund, llegamos a que

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f(x)v(x) dx \inf_{Q_j^*} w \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f(x)w(x)v(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)w(x)v(x) dx,
\end{aligned}$$

lo cual es lo que buscábamos.

Para finalizar, vamos a probar que $I_3 = 0$. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$ y sea Q un cubo diádico que contenga a x e interseque a Ω , entonces tenemos que o bien $Q_j \subset Q$, o $Q_j \cap Q = \emptyset$. Luego, por la propiedad de h , se tiene que el promedio

$$\left| \frac{1}{|Q|} \int_Q h(y)v(y) dy \right| = \frac{1}{|Q|} \left| \sum_{j: Q_j \subset Q} \int_{Q_j \cap Q} h(y)v(y) dy \right| = 0.$$

Por lo tanto, $\tilde{M}^{\mathcal{D}}(hv)(x) = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$, de donde se sigue que $I_3 = 0$. Con esto concluye la prueba. $\square$

3.4. Demostración del Teorema 2.1.3

Demostración del Teorema 2.1.3. Sin pérdida de generalidad, asumimos f no negativa. Para f general, ver Apéndice A.7.

Consideramos la descomposición de Calderón-Zygmund de la función f a nivel $\lambda > 0$ respecto a la medida duplicante $d\mu(x) = v(x) dx$ y obtenemos cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_j$ que cumplen

$$\text{I) } f(x) \leq \lambda \text{ para casi todo } x \notin \Omega = \bigcup_j Q_j,$$

$$\text{II) } \lambda < \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x) dx < C\lambda.$$

Llamamos $f_Q^v = \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f v$, $Q_j^* = 4\sqrt{n} Q_j$, $\Omega^* = \bigcup_j Q_j^*$, x_j al centro de Q_j y l_j la longitud de su lado. Escribimos $f(x) = g(x) + h(x)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin \Omega \\ f_{Q_j}^v & x \in Q_j \end{cases}$$

y

$$h(x) = \sum_j \left(f(x) - f_{Q_j}^v \right) \chi_{Q_j}(x) = \sum_j h_j(x).$$

Se cumple que $g(x) \leq C\lambda$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y que

$$\int_{Q_j} h_j(x)v(x) dx = 0 \tag{3.4.1}$$

para todo Q_j .

Tenemos que

$$\begin{aligned} uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T(gv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) + uv(\Omega^*) \\ &\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T(hv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Primero estimamos el término I_1 . Sea $u^* = u\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*}$, aplicando la desigualdad de Tchebyshev y el Teorema 2.1.2 con $1 < s < \min\{q, 1 + \varepsilon\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C}{\lambda^s} \int_{\mathbb{R}^n} |T(gv)(x)|^s u^*(x) v(x)^{1-s} dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda^s} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^s M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

De la definición de g se sigue que

$$I_1 \leq \frac{C}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx + \sum_j f_{Q_j}^v \int_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \right).$$

Como u^* tiene soporte en el complemento de Ω^* , por el Lema 1.4.7 tenemos que si $y \in Q_j$,

$$M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(y) \approx \inf_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*.$$

Luego, estimando cada término de la sumatoria, obtenemos

$$\begin{aligned} f_{Q_j}^v \int_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx &\leq C f_{Q_j}^v v(Q_j) \inf_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^* \\ &\leq C \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx + \sum_j \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \right) \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u(x) v(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) w(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la hipótesis sobre el par de pesos. Eso prueba lo deseado para I_1 .

Veamos ahora el término I_2 . Dado que $t \leq \Phi_\varepsilon(t)$, las hipótesis sobre los pesos implican que $(u, w) \in A_1(v^{1-q})$, que es la condición del Teorema 2.1.1 y siguiendo la cuenta realizada en la página 47 para el término I_2 se llega a la acotación deseada.

Por último, estimamos I_3 . Como cada h_j tiene soporte en Q_j , si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$, entonces $T(h_j v)(x)$ admite representación integral. Utilizando lo desarrollado en el Apéndice A.8 y la desigualdad de Tchebyshev, obtenemos

$$\begin{aligned} I_3 &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T(\sum_j h_j v)(x)|}{v(x)} > \lambda/2 \right\} \right) \\ &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{\sum_j |T(h_j v)(x)|}{v(x)} > \lambda/2 \right\} \right) \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} \sum_j |T(h_j v)(x)| u(x) dx \\ &= \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} \sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-x_j)| |h_j(y)| v(y) dy u(x) dx. \end{aligned}$$

Considerando que $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$ e $y \in Q_j$, se tiene que $|x - x_j| > 2\sqrt{n}l_j \geq 2|x_j - y|$. Utilizando la condición (1.5.2) del núcleo y el teorema de Tonelli, obtenemos que

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \int_{Q_j} \frac{|y - x_j|}{|x - x_j|^{n+1}} |h_j(y)| v(y) dy u(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |y - x_j| |h_j(y)| v(y) dy \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |x - x_j|^{-n-1} u(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} l_j |h_j(y)| v(y) dy \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |x - x_j|^{-n-1} u(x) dx. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^n \setminus Q_j^* \subset \mathbb{R}^n \setminus B(x_j, 2\sqrt{n}l_j)$, considerando los conjuntos

$$A_{j,k} = \{x : \sqrt{n}l_j 2^k < |x - x_j| \leq \sqrt{n}l_j 2^{k+1}\}, \quad (3.4.2)$$

se sigue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |x - x_j|^{-n-1} u(x) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_j, 2\sqrt{n}l_j)} \frac{1}{|x - x_j|^{n+1}} u(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{j,k}} \frac{1}{|x - x_j|^{n+1}} u(x) dx \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}l_j 2^{k-1})^{n+1}} \int_{B(x_j, 2^k \sqrt{n}l_j)} u(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Cl_j^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{(\sqrt{n}l_j 2^k)^n} \int_{B(x_j, 2^k \sqrt{n}l_j)} u(x) dx \\
&\leq Cl_j^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|u\|_{\Phi_\varepsilon, 2^{k+1} \sqrt{n}Q_j} \\
&\leq Cl_j^{-1} \|u\|_{\Phi_\varepsilon, 2^{k+1} \sqrt{n}Q_j, v^{1-q}} \\
&\leq Cl_j^{-1} \inf_{Q_j} w,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las Proposiciones 1.3.5 y 1.4.8 y la condición sobre el par de pesos (u, w) .

Volviendo a la estimación de I_3 , por la definición de h_j obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} w \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) dy \\
&= \frac{C}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} w \int_{Q_j} |f(y) - f_{Q_j}^v| v(y) dy \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \left(\sum_j \inf_{Q_j} w \int_{Q_j} f(y) v(y) dy + \sum_j \inf_{Q_j} w \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(y) v(y) dy v(Q_j) \right) \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \left(\sum_j \int_{Q_j} f(y) v(y) w(y) dy + \sum_j \int_{Q_j} f(y) v(y) w(y) dy \right) \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) w(y) v(y) dy,
\end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. $\square$

3.5. Demostración del Teorema 2.1.4

Demostración del Teorema 2.1.4. Veamos primero el caso $m = 1$. Nuevamente, consideramos f no negativa y $b \in BMO$ tal que $\|b\|_{BMO} = 1$, ya que $T_{b/\|b\|_{BMO}} f = T_b(f/\|b\|_{BMO})$. Como en el Teorema 2.1.3, consideramos la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel $\lambda > 0$ respecto de la medida $d\mu(x) = v(x) dx$, y obtenemos

$$\begin{aligned}
uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T_b(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T_b(gv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) + uv(\Omega^*) \\
&\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T_b(hv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \\
&= I_1^1 + I_2^1 + I_3^1,
\end{aligned}$$

donde g , h y Ω^* son los definidos en la prueba del Teorema 2.1.3.

Comenzamos estimando el término I_1^1 . Llamando $u^* = u \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*}$, por la desigualdad de Tchebyshev con $1 < p < \min\{q, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\}$ y el Teorema 2.1.2, obtenemos que

$$\begin{aligned} I_1^1 &\leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |T_b(gv)(x)|^p u^*(x) v(x)^{1-p} dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Procediendo de la misma manera que en la acotación del término correspondiente de la prueba del Teorema 2.1.3, de la definición de g se sigue que

$$I_1^1 \leq \frac{C}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x) M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx + \sum_j f_{Q_j}^v \int_{Q_j} M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \right).$$

Como u^* tiene soporte en el complemento de Ω^* , por el Lema 1.4.7 se tiene que para $y \in Q_j$

$$M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(y) \approx \inf_{Q_j} M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*$$

y sobre cada cubo Q_j se cumple que

$$\begin{aligned} f_{Q_j}^v \int_{Q_j} M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx &\leq C f_{Q_j}^v v(Q_j) \inf_{Q_j} M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^* \\ &\leq \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} I_1^1 &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x) M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx + \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\lambda} M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos utilizado que $t \leq \Phi_1(t)$ y la hipótesis sobre el par (u, w) .

La estimación del término I_2^1 se sigue de la misma manera que lo realizado en la página 47, notando que la hipótesis sobre los pesos implica que $(u, w) \in A_1(v^{1-q})$.

Estimamos ahora el término I_3^1 . Como

$$T_b(hv)(x) = \sum_j (b(x) - b_{Q_j}) T(h_j v)(x) - \sum_j T((b(x) - b_{Q_j}) h_j v)(x),$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
I_3^1 &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \left| \sum_j \frac{(b - b_{Q_j})T(h_j v)(x)}{v(x)} \right| > \frac{\lambda}{4} \right\} \right) \\
&\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \left| \sum_j \frac{T((b - b_{Q_j})h_j v)(x)}{v(x)} \right| > \frac{\lambda}{4} \right\} \right) \\
&= I_{3,1}^1 + I_{3,2}^1.
\end{aligned}$$

Para estimar $I_{3,1}^1$, de la desigualdad de Tchebyshev y la representación integral de T se sigue que

$$\begin{aligned}
I_{3,1}^1 &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |b(x) - b_{Q_j}| T(h_j v)(x) u_j^*(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |b(x) - b_{Q_j}| \left| \int_{Q_j} h_j(y) v(y) (K(x - y) - K(x - x_j)) dy \right| u_j^*(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |b(x) - b_{Q_j}| |K(x - y) - K(x - x_j)| u_j^*(x) dx dy,
\end{aligned}$$

donde $u_j^* = u \chi_{Q_j^*}$.

Definimos los conjuntos $A_{j,k}$ como en (3.4.2), entonces por la condición (1.5.2), podemos acotar la integral interior por

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |b(x) - b_{Q_j}| |K(x - y) - K(x - x_j)| u_j^*(x) dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{j,k}} |b(x) - b_{Q_j}| |K(x - y) - K(x - x_j)| u_j^*(x) dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{j,k}} |b(x) - b_{Q_j}| \frac{|y - x_j|}{|x - x_j|^{n+1}} u_j^*(x) dx \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_j}{\sqrt{n} l_j 2^k} \frac{1}{(\sqrt{n} l_j 2^{k+1})^n} \int_{B(x_j, \sqrt{n} l_j 2^{k+1})} |b(x) - b_{Q_j}| u_j^*(x) dx \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{|\sqrt{n} 2^{k+2} Q_j|} \int_{\sqrt{n} 2^{k+2} Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| u_j^*(x) dx.
\end{aligned}$$

Sea k_0 el único entero tal que $2^{k_0-1} \leq \sqrt{n} < 2^{k_0}$. Aplicando la Proposición 1.1.4, la desigualdad de Hölder generalizada, la Proposición 1.3.6 y recordando que $\|b\|_{\text{BMO}} = 1$, tenemos

que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\sqrt{n}2^{k+2}Q_j|} \int_{\sqrt{n}2^{k+2}Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| u_j^*(x) dx \\
& \leq \frac{C}{|2^{k+k_0+2}Q_j|} \int_{2^{k+k_0+2}Q_j} |b(x) - b_{2^{k+k_0+2}Q_j}| u_j^*(x) dx \\
& \quad + C(k + k_0 + 2) M u_j^*(y) \\
& \leq C \|b - b_{2^{k+k_0+2}Q_j}\|_{\tilde{\Phi}_{1+\varepsilon}, \sqrt{n}2^{k+k_0+2}Q_j} \|u_j^*\|_{\Phi_{1+\varepsilon}, \sqrt{n}2^{k+k_0+2}Q_j} \\
& \quad + C(k + k_0 + 2) M u_j^*(y) \\
& \leq C M_{\Phi_{1+\varepsilon}} u_j^*(y).
\end{aligned}$$

Así, utilizando el Lema 1.4.7 y la hipótesis sobre el par (u, w) obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_{3,1}^1 & \leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| M_{\Phi_{1+\varepsilon}} u_j^*(y) v(y) dy \\
& \leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} M_{\Phi_{1+\varepsilon}} u_j^* \int_{Q_j} f v + C \sum_j \inf_{Q_j} M_{\Phi_{1+\varepsilon}} u_j^* \int_{Q_j} f_{Q_j}^v v \\
& \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_{\Phi_{1+\varepsilon}} u(x) v(x) dx + \frac{C}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} M_{\Phi_{1+\varepsilon}} u_j^* \int_{Q_j} f v \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\lambda} w(x) v(x) dx \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w(x) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Para finalizar, nos queda por estimar el término $I_{3,2}^1$. Aplicando el Teorema 2.1.3 con el par $(u^*, M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*)$ y el Lema 1.4.7, obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_{3,2}^1 & = u^* v \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \sum_j \frac{T((b - b_{Q_j}) h_j v)(x)}{v(x)} \right| > \frac{\lambda}{4} \right\} \right) \\
& \leq u^* v \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{T \left(\sum_j (b - b_{Q_j}) h_j v \right) (x)}{v(x)} \right| > \frac{\lambda}{4} \right\} \right) \\
& \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_j (b(x) - b_{Q_j}) h_j(x) \right| M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\
& \leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| |h_j(x)| M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\
& \leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^* \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| |h_j(x)| v(x) dx.
\end{aligned}$$

Para la justificación de la primera desigualdad, ver Apéndice A.8.

Observemos que, por la definición de h_j ,

$$\int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| |h_j(x)| v(x) dx \leq \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| f(x) v(x) dx + f_{Q_j}^v \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| v(x) dx$$

y como $v \in RH_\infty$, se sigue que

$$\begin{aligned} f_{Q_j}^v \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| v(x) dx &\leq C \frac{v(Q_j)}{|Q_j|} \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x) v(x) dx \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| dx \\ &\leq C \int_{Q_j} f(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, por la desigualdad de Hölder generalizada (Teorema 1.3.7) con Φ_1 y $\tilde{\Phi}_1$ y medida $d\mu(x) = v(x) dx$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| f(x) v(x) dx &\leq C v(Q_j) \|b - b_{Q_j}\|_{\tilde{\Phi}_1, Q_j, v} \|f\|_{\Phi_1, Q_j, v} \\ &\leq C v(Q_j) \|f\|_{\Phi_1, Q_j, v} \\ &\leq C v(Q_j) \left(\lambda + \frac{\lambda}{v(Q_j)} \int_{Q_j} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx \right) \\ &\leq C \lambda v(Q_j) + \lambda \int_{Q_j} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx \\ &\leq C \int_{Q_j} f v + \lambda \int_{Q_j} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx. \end{aligned}$$

Volviendo a la acotación de $I_{3,2}^1$, llegamos a que

$$\begin{aligned} I_{3,2}^1 &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^* \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}| v(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^* \left(2 \int_{Q_j} f(x) v(x) dx + \lambda \int_{Q_j} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx \right) \\ &\leq C \sum_j \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx + C \sum_j \int_{Q_j} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Como $t \leq \Phi_1(t)$ y $M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^* \leq C M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u \leq w(x)$, tenemos que $I_{3,2}^1$ se acota por

$$I_{3,2}^1 \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w(x) v(x) dx.$$

Esto prueba el caso $m = 1$.

Probaremos el caso de orden superior por inducción. Fijamos $m > 1$ y asumimos que la hipótesis se cumple para T_b^k para todo $1 \leq k \leq m - 1$. Consideramos la misma descomposición

de Calderón-Zygmund que utilizamos en el caso $m = 1$ y obtenemos

$$\begin{aligned} uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T_b^m(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T_b^m(gv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) + uv(\Omega^*) \\ &\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T_b^m(hv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \\ &= I_1^m + I_2^m + I_3^m. \end{aligned}$$

Para estimar el término I_1^m procedemos de la misma manera que en el caso $m = 1$ para obtener que

$$I_1^m \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m(gv)(x)|^p u^*(x) v(x)^{1-p} dx \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx,$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Tchebyshev y el Teorema 2.1.2, siendo $u^* = u \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*}$.

De manera similar a lo ya hecho para el caso $m = 1$, obtenemos que

$$I_1^m \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{f(x)}{\lambda} \right) w(x) v(x) dx,$$

donde hemos utilizado la hipótesis sobre el par (u, w) .

La estimación de I_2^m se obtiene de como en el caso $m = 1$.

Por último, veamos el término I_3^m . Tenemos la igualdad

$$T_b^m(hv) = \sum_j (b - b_{Q_j})^m T(h_j v) - \sum_j T((b - b_{Q_j})^m h_j v) - \sum_j \sum_{i=1}^{m-1} C_{m,i} T_b^i((b - b_{Q_j})^{m-i} h_j v)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} I_3^m &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \left| \frac{\sum_j (b - b_{Q_j})^m T(h_j v)}{v} \right| > \frac{\lambda}{6} \right\} \right) \\ &\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \left| \frac{\sum_j T((b - b_{Q_j})^m h_j v)}{v} \right| > \frac{\lambda}{6} \right\} \right) \\ &\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \left| \frac{\sum_j \sum_{i=1}^{m-1} T_b^i((b - b_{Q_j})^{m-i} h_j v)}{v} \right| > \frac{\lambda}{6C_0} \right\} \right) \\ &= I_{3,1}^m + I_{3,2}^m + I_{3,3}^m, \end{aligned}$$

donde $C_0 = \max_{i=1}^{m-1} C_{m,i}$. A continuación estimaremos cada uno de esos términos.

Por la desigualdad de Tchebyshev, el teorema de Tonelli y la condición (1.5.2) obtenemos

$$\begin{aligned} I_{3,1}^m &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} \left| \sum_j (b(x) - b_{Q_j})^m T(h_j v)(x) \right| u^*(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |b(x) - b_{Q_j}|^m |K(x - y) - K(x - x_{Q_j})| u_j^*(x) dx dy \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{j,k}} |b(x) - b_{Q_j}|^m \frac{|y - x_{Q_j}|}{|x - x_{Q_j}|^{n+1}} u_j^*(x) dx dy, \end{aligned}$$

donde los conjuntos $A_{j,k}$ y u_j^* son los mismos que definimos en la primera parte de la prueba.

Sea k_0 el único entero que cumple que $2^{k_0-1} \leq \sqrt{n} < 2^{k_0}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{j,k}} |b(x) - b_{Q_j}|^m \frac{|y - x_j|}{|x - x_j|^{n+1}} u_j^*(x) dx &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{(\sqrt{n} l_j 2^k)^n} \int_{B(x_j, 2^{k+1} \sqrt{n} l_j)} |b(x) - b_{Q_j}|^m u_j^*(x) dx \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{|2^{k+k_0+2} Q_j|} \int_{2^{k+k_0+2} Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m u_j^*(x) dx. \end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 1.1.4, la desigualdad de Hölder generalizada, la Proposición 1.3.4 y la Proposición 1.3.6, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|2^{k+k_0+2} Q_j|} \int_{2^{k+k_0+2} Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m u_j^*(x) dx &\leq \frac{C}{|2^{k+k_0+2} Q_j|} \int_{2^{k+k_0+2} Q_j} |b(x) - b_{2^{k+k_0+2} Q_j}|^m u_j^*(x) dx \\ &\quad + C(k + k_0 + 2)^m M u_j^*(y) \\ &\leq C \|b - b_{2^{k+k_0+2} Q_j}\|_{\tilde{\Phi}_m, 2^{k+k_0+2} Q_j}^m \|u_j^*\|_{\Phi_m, 2^{k+k_0+2} Q_j} \\ &\quad + C(k + k_0 + 2)^m M u_j^*(y) \\ &\leq C \|b - b_{2^{k+k_0+2} Q_j}\|_{\tilde{\Phi}_1, 2^{k+k_0+2} Q_j}^m \|u_j^*\|_{\Phi_m, 2^{k+k_0+2} Q_j} \\ &\quad + C(k + k_0 + 2)^m M u_j^*(y) \\ &\leq C M_{\Phi_m} u_j^*(y). \end{aligned}$$

Por lo ya visto y el hecho de que $M_{\Phi_m} u_j^* \leq M_{\Phi_{m+\varepsilon}} u_j^*$, se sigue que

$$I_{3,1}^m \leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| M_{\Phi_{m+\varepsilon}} u_j^*(y) v(y) dy$$

y de manera similar a lo hecho con $I_{3,1}^1$ en el caso $m = 1$ obtenemos lo deseado.

Para estimar el término $I_{3,2}^m$ utilizaremos el Teorema 2.1.3 con el par $(u^*, M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*)$, obteniendo que

$$\begin{aligned} I_{3,2}^m &\leq u^* v \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{T \left(\sum_j (b - b_{Q_j})^m h_j v \right) (x)}{v(x)} \right| > \frac{\lambda}{4} \right\} \right) \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_j (b(x) - b_{Q_j})^m h_j(x) \right| M_{\Phi_{\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \left(\inf_{Q_j} M_{\Phi_{\varepsilon}, v^{1-q}} u^* \right) \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m f(x) v(x) dx \\ &\quad + \frac{C}{\lambda} \sum_j \left(\inf_{Q_j} M_{\Phi_{\varepsilon}, v^{1-q}} u^* \right) f_Q^v \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m v(x) dx. \end{aligned}$$

Como $v \in RH_\infty$, por la equivalencia entre $\|\cdot\|_{\text{BMO}}$ y $\|\cdot\|_{\text{BMO},m}$ se sigue que

$$\begin{aligned} f_{Q_j}^v \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m v(x) dx &\leq C \frac{v(Q_j)}{|Q_j|} \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x) v(x) dx \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m dx \\ &\leq C \int_{Q_j} f(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Para el otro sumando, por la desigualdad de Hölder generalizada, la Proposición 1.3.4 y la Proposición 1.3.6 obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m f(x) v(x) dx &\leq v(Q_j) \|(b - b_{Q_j})^m\|_{\Phi_m, Q_j, v} \|f\|_{\Phi_m, Q_j, v} \\ &\leq C v(Q_j) \|f\|_{\Phi_m, Q_j, v} \\ &\leq v(Q_j) \left(\lambda + \frac{\lambda}{v(Q_j)} \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx \right) \\ &\leq C \lambda v(Q_j) + \lambda \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx \\ &\leq C \lambda \int_{Q_j} \frac{f(x)}{\lambda} v(x) dx + \lambda \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx \\ &\leq C \lambda \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_{3,2}^m &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \left(\inf_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^* \right) \int_{Q_j} |b(x) - b_{Q_j}|^m v(x) dx \\ &\leq C \sum_j \left(\inf_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^* \right) \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx \\ &\leq C \sum_j \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Por último, para la acotación del término $I_{3,3}^m$ aplicamos la hipótesis inductiva y llegamos a que

$$\begin{aligned} I_{3,3}^m &\leq \sum_{i=1}^{m-1} u^* v \left(\left\{ \frac{|T_b^i(\sum_j (b - b_{Q_j})^{m-i} h_j v)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{6C_0} \right\} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_i \left(\frac{\sum_j |b(x) - b_{Q_j}|^{m-i} |h_j(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q'}} u^*(x) v(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} \sum_j \int_{Q_j} \Phi_i \left(\frac{|b(x) - b_{Q_j}|^{m-i} |h_j(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q} u_j^*}(x) v(x) dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} \sum_j \left(\inf_{Q_j} M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q} u_j^*} \right) \int_{Q_j} \Phi_i \left(\frac{|b(x) - b_{Q_j}|^{m-i} |h_j(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Denotando $\Psi_i(t) \approx (e^{t^{1/i}} - e)\chi_{(1,\infty)}(t)$, tenemos que Φ_m , Ψ_{m-i} y Φ_i cumplen la condición (1.3.6) (ver Apéndice A.6), es decir

$$\Phi_m^{-1}(t) \Psi_{m-i}^{-1}(t) \leq C \Phi_i^{-1}(t).$$

Luego, por (A.5.1), si C_1 es la constante de la Proposición 1.3.6, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{Q_j} \Phi_i \left(\frac{|b(x) - b_{Q_j}|^{m-i} |h_j(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx &\leq \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{C_1 |h_j(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx \\
&\quad + \int_{Q_j} \Psi_{m-i} \left(\frac{|b(x) - b_{Q_j}|^{m-i}}{C_1} \right) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Para la primera integral, como Φ_m es convexa y sub-multiplicativa y $v \in RH_\infty$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{C_1 |h_j(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx &\leq C \left(\int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx + \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{f_{Q_j}^v}{\lambda} \right) v(x) dx \right) \\
&\leq C \left(\int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx + \Phi_m \left(\frac{f_{Q_j}^v}{\lambda} \right) v(Q_j) \right) \\
&\leq C \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Para la segunda integral, por la Proposición 1.3.6 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{Q_j} \Psi_{m-i} \left(\frac{|b(x) - b_{Q_j}|^{m-i}}{C_1} \right) v(x) dx &= \int_{Q_j} \Psi \left(\frac{|b(x) - b_{Q_j}|^{m-i}}{C_1} \right) v(x) dx \\
&\leq \int_{Q_j} \Psi \left(\frac{|b(x) - b_{Q_j}|}{\|b - b_{Q_j}\|_{\Psi, Q_j, v}} \right) v(x) dx \\
&\leq v(Q_j) \leq C \int_{Q_j} \frac{f(x)}{\lambda} v(x) dx.
\end{aligned}$$

Juntando las dos últimas estimaciones, obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_{3,3}^m &\leq C \sum_{i=1}^{m-1} \sum_j \left(\inf_{Q_j} M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q} u_j^*} \right) \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) v(x) dx \\
&\quad + C \sum_{i=1}^{m-1} \sum_j \left(\inf_{Q_j} M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q} u_j^*} \right) \int_{Q_j} \frac{f(x)}{\lambda} v(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{i=1}^{m-1} \sum_j \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q}} u_j^*(x) v(x) dx \\
&\quad + C \sum_{i=1}^{m-1} \sum_j \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q}} u_j^*(x) v(x) dx \\
&\leq C \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Como $\Phi_{i+\varepsilon} \prec_\infty \Phi_{m+\varepsilon}$ para $1 \leq i \leq m-1$, se sigue por la hipótesis sobre el par de pesos que $M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) \leq C M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) \leq C w(x)$, de donde

$$I_{3,3}^m \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w(x) v(x) dx,$$

lo cual concluye la prueba. □

Capítulo 4

Desigualdades de tipo Fefferman-Stein: algunas consideraciones

En el Capítulo 2 se dieron condiciones suficientes sobre pares de pesos para obtener desigualdades débiles mixtas asociadas a dichos pares. Como aplicación se obtuvieron los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2, los cuales corresponden a desigualdades débiles mixtas de tipo Fefferman-Stein. En este capítulo, a modo de anécdota, describiremos cómo fue el desarrollo original de este trabajo.

4.1. Desigualdades mixtas de tipo Fefferman-Stein

En el Capítulo 2 se obtuvieron los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2 como aplicación de las desigualdades débiles mixtas con pares de pesos allí establecidas. Sin embargo, en una primera instancia, el trabajo de esta tesis se orientó a la búsqueda de pruebas directas de los mencionados teoremas, que a su vez resulten sustitutos más adecuados a las correspondientes desigualdades mixtas de tipo Fefferman-Stein probadas en [6] y [7], y que fueron efectivamente obtenidas.

Paralelamente, el estudio de las desigualdades débiles mixtas asociadas a pares de pesos dio origen a los Teoremas 2.1.3 y 2.1.4, los cuales dieron indicios de que las estimaciones de tipo Fefferman-Stein obtenidas anteriormente en forma directa eran apropiadas. En las dos secciones siguientes se incluirán las demostraciones originales de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2 a modo de completitud.

4.2. Otra demostración del Teorema 2.2.1

Demostración del Teorema 2.2.1. Es suficiente probar el resultado para f no negativa (ver Apéndice A.7). Consideramos la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel λ con respecto a la medida duplicante $d\mu(x) = v(x) dx$, obteniendo una familia de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_j$ tales que

$$\text{I)} \quad f(x) \leq \lambda \text{ para casi todo } x \notin \Omega = \bigcup_j Q_j,$$

$$\text{II)} \quad \lambda < f_{Q_j}^v < C\lambda,$$

siendo $f_{Q_j}^v = \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x) dx$. Escribimos $f(x) = g(x) + h(x)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \Omega \\ f_{Q_j}^v & \text{si } x \in Q_j \end{cases}$$

y

$$h(x) = \sum_j \left(f(x) - f_{Q_j}^v \right) \chi_{Q_j}(x) = \sum_j h_j(x).$$

Es fácil ver que $g(x) \leq C\lambda$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y que $\int_{Q_j} h_j(x)v(x) dx = 0$, para todo j . Por otra parte, llamamos x_j y l_j al centro y longitud de lado de cada Q_j , respectivamente. Además, vamos a considerar $Q_j^* = 4\sqrt{n} Q_j$ y $\Omega^* = \bigcup_j Q_j^*$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T(gv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) + uv(\Omega^*) \\ &\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T(hv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Comenzamos estimando el término I_1 . Sea $1 < p < \min\{q, 1 + \varepsilon\}$, por la desigualdad de Tchebyshev y el Teorema 2.1.2, obtenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |T(gv)(x)|^p u^*(x) v(x)^{1-p} dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\
&\quad + \frac{C}{\lambda} \sum_j f_{Q_j}^v \int_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx,
\end{aligned}$$

donde $u^* = u \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*}$ tiene soporte en el complemento de Ω^* . Luego, si $y \in Q_j$, por el Lema 1.4.7 tenemos que

$$M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(y) \cong \inf_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*.$$

Utilizamos esto para estimar cada término de la sumatoria, obteniendo que

$$\begin{aligned}
f_{Q_j}^v \int_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx &\leq C f_{Q_j}^v v(Q_j) \inf_{Q_j} M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^* \\
&\leq C \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{C}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx + \sum_j \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \right) \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u(x) v(x) dx,
\end{aligned}$$

lo cual es el resultado deseado para I_1 .

Procedemos ahora con la estimación de I_2 . Por Proposición 1.2.7 se tiene que $v^q \in RH_\infty$.

Además, como $t \leq \Phi_\varepsilon(t)$, para todo $t \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
uv(Q_j^*) &= \int_{Q_j^*} u(x) v(x) dx \\
&= \int_{Q_j^*} u(x) v(x)^{1-q} v(x)^q dx \\
&\leq \left(\sup_{Q_j^*} v^q \right) uv^{1-q}(Q_j^*) \\
&\leq C \|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}} \frac{v^q(Q_j^*)}{|Q_j^*|} \int_{Q_j^*} \frac{u(x)}{\|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}}} v(x)^{1-q} dx \\
&\leq C \|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}} \frac{v^q(Q_j^*)}{|Q_j^*|} \int_{Q_j^*} \Phi_\varepsilon \left(\frac{u(x)}{\|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}}} \right) v(x)^{1-q} dx.
\end{aligned}$$

De la definición de $\|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}}$, la integral en la última expresión se acota por $v^{1-q}(Q_j^*)$. Por otro lado, como $v \in RH_\infty \cap A_{q'}$, tanto v^q como v^{1-q} son duplicantes y además $v^{1-q} \in A_1$. Luego,

$$\begin{aligned}
uv(Q_j^*) &\leq C \frac{v^q(Q_j^*)}{|Q_j^*|} v^{1-q}(Q_j^*) \|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}} \\
&\leq C v^q(Q_j) \|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}} \frac{v^{1-q}(Q_j)}{|Q_j|} \\
&\leq C \|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}} \inf_{Q_j} v^{1-q} \int_{Q_j} v(x)^q dx \\
&\leq C \|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}} \int_{Q_j} v(x) dx \\
&\leq C \|u\|_{\Phi_\varepsilon, Q_j^*, v^{1-q}} \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} f(x) v(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u(x) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Esto prueba la acotación del término I_2 .

Por último, estimamos I_3 . Debido a que cada h_j tiene soporte en el respectivo Q_j , tenemos la representación integral de $T(h_j v)(x)$ para $x \notin Q_j^*$. Utilizando la desigualdad de Tchebyshev y el teorema de Tonelli obtenemos

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \sum_j uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T(h_j v)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \\
&\leq \sum_j \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |T(h_j v)(x)| u_j^*(x) dx \\
&= \sum_j \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \left(\int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-x_j)| |h_j(y)| v(y) dy \right) u_j^*(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |K(x-y) - K(x-x_j)| u_j^*(x) dx dy \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \frac{|y-x_j|}{|x-x_j|^{n+1}} u_j^*(x) dx dy,
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos (1.5.2), dado que $|x-x_j| > 2\sqrt{n}l_j \geq 2|x_j-y|$. Sean $A_{j,k}$ como los definidos en (3.4.2). Teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^n \setminus Q_j^* \subset \mathbb{R}^n \setminus B(x_j, 2\sqrt{n}l_j)$, podemos acotar la integral interior por la suma de las integrales sobre los conjuntos $A_{j,k}$, obteniendo

$$I_3 \leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |y-x_j| |h_j(y)| v(y) dy \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{j,k}} \frac{1}{|x-x_j|^{n+1}} u_j^*(x) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |y - x_j| |h_j(y)| v(y) dy \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{j,k}} \frac{1}{|x - x_j|^{n+1}} u_j^*(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |y - x_j| |h_j(y)| v(y) dy \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n} l_j 2^k)^{n+1}} \int_{B(x_j, 2^{k+1} \sqrt{n} l_j)} u_j^*(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j l_j^{-1} \int_{Q_j} |y - x_j| |h_j(y)| v(y) dy \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{(\sqrt{n} l_j 2^{k+1})^n} \int_{B(x_j, 2^{k+1} \sqrt{n} l_j)} u_j^*(x) dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j l_j^{-1} \int_{Q_j} |y - x_j| |h_j(y)| v(y) dy \inf_{Q_j} M u_j^* \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| v(y) dy \inf_{Q_j} M u_j^*,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que dado que $|y - x_j| < \sqrt{n} l_j / 2$ para $y \in Q_j$. Por la definición de h_j y Lemas 1.4.7 y 1.4.8,

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \left(\int_{Q_j} f(x) M u(x) v(x) dx + f_{Q_j}^v \int_{Q_j} v(x) dx \inf_{Q_j} M u_j^* \right) \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \left(\sum_j \int_{Q_j} f(x) M u(x) v(x) dx + \sum_j \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u(x) v(x) dx \right) \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u(x) v(x) dx,
\end{aligned}$$

lo cual finaliza la prueba. $\square$

4.3. Otra demostración del Teorema 2.2.2

Demostración del Teorema 2.2.2. Primero veamos el caso $m = 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer f no negativa y $b \in \text{BMO}$ tal que $\|b\|_{\text{BMO}} = 1$, ya que $T_{b/\|b\|_{\text{BMO}}} f = T_b(f/\|b\|_{\text{BMO}})$. Consideramos la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel λ respecto de la medida $v(x) dx$ y escribimos $f = g + h$ de la misma manera que en la prueba del Teorema 2.2.1.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T_b(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T_b(gv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) + uv(\Omega^*) \\
&\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{|T_b(hv)(x)|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \\
&= I_1^1 + I_2^1 + I_3^1,
\end{aligned}$$

donde Ω y Ω^* se consideran también como en la prueba del Teorema 2.2.1.

Para estimar de I_1^1 procedemos de manera similar a lo realizado en la página 62 y llegamos a que

$$I_1^1 \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx.$$

Por otra parte, para la estimación de I_2^1 procedemos también como en el Teorema 2.2.1 para obtener que

$$\begin{aligned} I_2^1 &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\lambda} M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Para finalizar, estimamos el término I_3^1 . Teniendo en cuenta que

$$T_b(hv)(x) = \sum_j (b(x) - b_{Q_j}) T(h_j v)(x) - \sum_j T((b(x) - b_{Q_j}) h_j v)(x),$$

se sigue que

$$\begin{aligned} I_3^1 &\leq uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \left| \sum_j \frac{(b - b_{Q_j}) T(h_j v)(x)}{v(x)} \right| > \frac{\lambda}{4} \right\} \right) \\ &\quad + uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \left| \sum_j \frac{T((b - b_{Q_j}) h_j v)(x)}{v(x)} \right| > \frac{\lambda}{4} \right\} \right) \\ &= I_{3,1}^1 + I_{3,2}^1. \end{aligned}$$

Para estimar el término $I_{3,1}^1$, procedemos como en la prueba del Teorema 2.1.4 en la página 54 y llegamos a que

$$\begin{aligned} I_{3,1}^1 &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_{\Phi_{1+\varepsilon}} u(x) v(x) dx + \frac{C}{\lambda} \sum_j \inf_{Q_j} M_{\Phi_{1+\varepsilon}} u_j^* \int_{Q_j} f(x) v(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $t \leq \Phi_1(t)$ y el Lema 1.4.8.

Para estimar $I_{3,2}^1$, de manera similar a lo hecho en el Teorema 2.1.4 se llega a que

$$\begin{aligned} I_{3,2}^1 &\leq C \sum_j \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} f(x) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx + C \sum_j \int_{Q_j} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $t \leq \Phi_1(t)$ y $M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) \leq M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u(x) \leq CM_{\Phi_{1+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x)$. Esto termina de probar la acotación de I_3^1 y el caso $m = 1$.

Probamos por inducción el caso $m > 1$. Sea $m > 1$ y supongamos que el resultado es válido para todo T_b^k , $1 \leq k \leq m-1$. Consideramos la misma descomposición de Calderón-Zygmund de f que tomamos en el caso $m = 1$ y definimos los conjuntos I_1^m , I_2^m y I_3^m como en la prueba del Teorema 2.1.4.

Las estimaciones de I_1^m e I_2^m se siguen de manera análoga a I_1^1 e I_1^2 del caso $m = 1$, obteniendo que

$$I_1^m + I_2^m \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx.$$

Para estimar el término I_3^m , procedemos como en la página 56 y acotamos los conjuntos $I_{3,1}^m$, $I_{3,2}^m$ e $I_{3,3}^m$. Siguiendo las cuentas para el término $I_{3,1}^m$ realizadas en la demostración del Teorema 2.1.4, se llega a que

$$I_{3,1}^m \leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| M_{\Phi_{m+\varepsilon}} u_j^*(y) v(y) dy$$

y, por la definición de h_j y el hecho de que $t \leq \Phi_m(t)$, se llega a lo deseado.

En la estimación del término $I_{3,2}^m$ también procedemos como en el Teorema 2.1.4, donde en la página 58 se llega a que

$$\begin{aligned} I_{3,2}^m &\leq C \sum_j \int_{Q_j} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_\varepsilon, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u^*(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Notemos que en este paso se ha utilizado el Teorema 2.1.3.

Para la estimación de $I_{3,3}^m$, utilizamos la hipótesis inductiva y, como en la demostración del Teorema 2.1.4, llegamos a que

$$I_{3,3}^m \leq C \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx.$$

Como $\Phi_{i+\varepsilon} \prec_\infty \Phi_{m+\varepsilon}$, tenemos que $M_{\Phi_{i+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) \leq CM_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x)$, para todo $1 \leq i \leq m-1$. Luego, obtenemos que

$$I_{3,3}^m \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) M_{\Phi_{m+\varepsilon}, v^{1-q}} u(x) v(x) dx,$$

lo cual finaliza la prueba. $\square$

Conclusiones

En esta tesis se han obtenido desigualdades débiles mixtas para diferentes operadores del Análisis Armónico. Estas mismas generalizan acotaciones débiles con dos pesos conocidas ya en la literatura clásica. En todos los resultados de este estilo aquí obtenidos ha sido clave una descomposición de Calderón-Zygmund respecto de una medida adecuada.

En el caso del operador maximal de Hardy-Littlewood M se obtiene una desigualdad débil mixta con pares de pesos (u, w) en una clase A_1 que depende del peso v . En el caso en que $v = 1$, esta misma devuelve la acotación débil con un par de pesos para M .

Por otra parte, para los operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores con símbolo en BMO, T_b^m , las desigualdades obtenidas tienen como condición que el par de pesos (u, w) se encuentre en una clase que depende de la función de Young $\Phi_{m+\varepsilon}(t) = t(1 + \log^+ t)^{m+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, y del peso v . Estas condiciones son reforzamientos de la clase A_1 , ya que las implican. En el caso $v = 1$, nuestros resultados extienden desigualdades débiles con pares de pesos (u, w) para los operadores mencionados. La prueba de los mismos necesitó, además de la descomposición de Calderón-Zygmund mencionada, de una desigualdad de tipo Fefferman-Stein fuerte.

En la Sección 2.2, como aplicación de los resultados principales con pares de pesos adecuados se obtienen desigualdades mixtas de tipo Fefferman-Stein para operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores. Estas resultan ser una mejora de las desigualdades similares obtenidas en [6] y [7], en el sentido de que del lado derecho se obtiene un operador maximal puntualmente menor. En el Capítulo 4 se hace un comentario sobre el desarrollo de estos resultados. En particular, las desigualdades de tipo Fefferman-Stein que se obtuvieron en esta tesis para T_b^m , $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pueden probarse de manera independiente.

Otras desigualdades débiles mixtas ya han sido estudiadas en [9] y [5]. Estas, cuando $v = 1$, devuelven desigualdades débiles con un peso para los operadores que ya mencionamos. Si bien las condiciones para las acotaciones obtenidas en esta tesis cuando $u = w$ difieren de las allí

obtenidas, resultan ser más generales, como se ha expuesto en el Capítulo 2.

Originalmente, E. Sawyer comienza buscando una prueba alternativa de la acotación fuerte para M con un peso y la descomposición de Jones le permite arribar a las desigualdades mixtas probadas en [31]. En el caso de pares de pesos, no está claro que las desigualdades mixtas estudiadas se puedan derivar de la misma manera. Notando que las desigualdades fuertes conocidas para los operadores aquí mencionados tienen condiciones de tipo “bump”, sería interesante estudiar a futuro si se pueden derivar desigualdades mixtas por algún otro método que no sea el utilizado por Sawyer.

Capítulo A

Apéndice

A.1. Operadores adjuntos

Dado un operador lineal T , el operador adjunto T^* se define como el que verifica que

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en L^2 .

A continuación vemos una equivalencia entre T y T^* .

Teorema A.1.1. *Dado $1 < p < \infty$, T un operador lineal y (u, v) un par de pesos, entonces son equivalentes*

$$T : L^p(v) \hookrightarrow L^p(u) \tag{A.1.1}$$

y

$$T^* : L^{p'}(u^{1-p'}) \hookrightarrow L^{p'}(v^{1-p'}). \tag{A.1.2}$$

Demostración. Probamos que (A.1.1) implica (A.1.2). La otra implicación es análoga.

En efecto, por (1.1.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T^*f(x)|^{p'} v(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} &= \|T^*f v^{-1/p}\|_{p'} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} T^*f(x) v(x)^{-1/p} h(x) dx \right| : \|h\|_p \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Dado que T^* es el adjunto de T , por la desigualdad de Hölder y la hipótesis (A.1.1) se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} T^* f(x) v(x)^{-1/p} h(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) T(v^{-1/p} h)(x)| u(x)^{-1/p} u(x)^{1/p} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'} u(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T(v^{-1/p} h)(x)|^p u(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'} u(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Luego, tomando supremo sobre las funciones h con $\|h\|_p \leq 1$ se obtiene lo que queríamos. $\square$

A.2. Un ejemplo de que $L^p \subsetneq L^{p,\infty}$

Sea $f(x) = |x|^{-n/p}$. Veamos primero que $f \in L^{p,\infty}$. Observemos que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^{-n/p} > \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \lambda^{-p/n}\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \lambda^{-p/n}\}| = \lambda^{-p} |B(0, 1)|.$$

Luego,

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^p |\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^{-n/p} > \lambda\}| = \sup_{\lambda > 0} \lambda^p \lambda^{-p} |B(0, 1)| = |B(0, 1)| < \infty,$$

lo cual prueba que $f \in L^{p,\infty}$.

Ahora veamos que $f \notin L^p$. Haciendo el cambio a coordenadas polares obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{n}{p}p} dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^{-n} r^{n-1} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^{-1} dr d\theta,$$

lo cual no es finito ya que la integral

$$\int_0^\infty r^{-1} dr$$

diverge. Es decir que $f \notin L^p$.

A.3. Convexidad de funciones de Young

Proposición A.3.1. *Toda función de Young Φ es convexa.*

Demostración. Sean ϕ la función de densidad de Φ , $0 < c < d$ y L el segmento de recta que une $(c, \Phi(c))$ y $(d, \Phi(d))$,

$$L(x) = \Phi(c) + \frac{\Phi(d) - \Phi(c)}{d - c}(x - c), \quad c \leq x \leq d.$$

Para probar la convexidad, debemos ver que $L(x) \geq \Phi(x)$ para todo $x \in (c, d)$, lo cual es equivalente a ver que

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(c)}{x - c} \leq \frac{\Phi(d) - \Phi(c)}{d - c}. \quad (\text{A.3.1})$$

Por el crecimiento de ϕ , para $c < x < d$ se sigue que

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(c)}{x - c} = \frac{1}{x - c} \int_c^x \phi(t) dt \leq \phi(x) \leq \frac{1}{d - x} \int_x^d \phi(t) dt.$$

Por otra parte, el lado derecho de (A.3.1) puede expresarse como

$$\frac{\Phi(d) - \Phi(c)}{d - c} = \frac{\int_c^d \phi(t) dt}{d - c} = \frac{\int_c^x \phi(t) dt + \int_x^d \phi(t) dt}{d - x + x - c}.$$

Teniendo en cuenta que para números positivos a_1, a_2, b_1, b_2 se cumple la relación

$$\min \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right\} \leq \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2},$$

obtenemos que

$$\frac{\Phi(d) - \Phi(c)}{d - c} \geq \min \left\{ \frac{1}{x - c} \int_c^x \phi(t) dt, \frac{1}{d - x} \int_x^d \phi(t) dt \right\} = \frac{1}{x - c} \int_c^x \phi(t) dt = \frac{\Phi(x) - \Phi(c)}{x - c}.$$

□

A.4. Propiedades en espacios de Orlicz

Proposición A.4.1. *Sea Φ una función de Young. Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- I) $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi, \mu}} \right) d\mu(x) \leq 1 \quad y \quad \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi, Q, \mu}} \right) d\mu(x) \leq 1.$
- II) Si μ es una medida no atómica, la cantidad definida en (1.3.3) es una norma.
- III) Si $\Phi(t) = t^p$, entonces $L^\Phi(\mu) = L^p(\mu)$.

En relación al ítem II), en esta tesis solo consideraremos la medida de Lebesgue o la medida $d\mu(x) = w(x) dx$, donde w es un peso, las cuales son no atómicas.

Demostración. Veamos primero que [I](#)) se cumple. Basta con probar la primera parte, ya que la segunda se sigue de manera análoga.

Por la propiedad del ínfimo, existe $\{\lambda_k\}_k \subset \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\}$, $\lambda_k \searrow \|f\|_{\Phi, \mu}$ y tal que $\|f\|_{\Phi, \mu} \leq \lambda_k < \|f\|_{\Phi, \mu} + 1/k$. Luego, como Φ es creciente, tenemos que

$$\Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda_k} \right) \nearrow \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi, \mu}} \right)$$

cuando $k \rightarrow \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por el teorema de convergencia monótona y el hecho de que $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda_k} \right) d\mu(x) \leq 1$, se obtiene lo deseado.

Procedemos a probar [II](#)).

a) Veamos que $\|f\|_{\Phi, \mu} \geq 0$ y $\|f\|_{\Phi, \mu} = 0$ si y sólo si $f = 0$ en casi todo punto.

La no negatividad es directa por la definición [\(1.3.3\)](#). Por otra parte, es inmediato que si $f(x) = 0$ y μ es no atómica, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x) = 0$$

para todo $\lambda > 0$, de donde se sigue que $\|f\|_{\Phi, \mu} = 0$.

Supongamos ahora que $\|f\|_{\Phi, \mu} = 0$ y que existe un conjunto E de medida positiva tal que $|f(x)| > c > 0$. Por definición, existe una sucesión $\{\lambda_k\}_k$ tal que $\lambda_k \searrow 0$ y tal que

$$1 \geq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda_k} \right) d\mu(x) = \int_E \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda_k} \right) d\mu(x) \geq \Phi \left(\frac{c}{\lambda_k} \right) \mu(E).$$

Como Φ es creciente, si $\lambda \rightarrow \infty$, entonces $\Phi \left(\frac{c}{\lambda_k} \right) \rightarrow \infty$ en casi todo punto, lo cual contradice que $\Phi \left(\frac{c}{\lambda_k} \right) \leq \mu(E)$. Por lo tanto, f es nula en casi todo punto.

b) Ahora vemos que $\|\alpha f\|_{\Phi, \mu} = |\alpha| \|f\|_{\Phi, \mu}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha = 0$, la desigualdad es trivial. Sea $\alpha \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{\Phi, \mu} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|\alpha f(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \gamma |\alpha| > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\gamma} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \inf \left\{ \gamma > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\gamma} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\} = |\alpha| \|f\|_{\Phi, \mu}. \end{aligned}$$

c) Para finalizar probemos la desigualdad triangular.

Por la convexidad de la función Φ tenemos que

$$\Phi\left(\frac{|f(x) + g(x)|}{\|f\|_{\Phi,\mu} + \|g\|_{\Phi,\mu}}\right) \leq \frac{\|f\|_{\Phi,\mu}}{\|f\|_{\Phi,\mu} + \|g\|_{\Phi,\mu}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,\mu}}\right) + \frac{\|g\|_{\Phi,\mu}}{\|f\|_{\Phi,\mu} + \|g\|_{\Phi,\mu}} \Phi\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Phi,\mu}}\right).$$

En virtud del ítem I), si integramos sobre $\mathbb{R}^n$ miembro a miembro, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x) + g(x)|}{\|f\|_{\Phi,\mu} + \|g\|_{\Phi,\mu}}\right) d\mu(x) &\leq \frac{\|f\|_{\Phi,\mu}}{\|f\|_{\Phi,\mu} + \|g\|_{\Phi,\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,\mu}}\right) d\mu(x) \\ &\quad + \frac{\|g\|_{\Phi,\mu}}{\|f\|_{\Phi,\mu} + \|g\|_{\Phi,\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Phi,\mu}}\right) d\mu(x) \\ &\leq \frac{\|f\|_{\Phi,\mu}}{\|f\|_{\Phi,\mu} + \|g\|_{\Phi,\mu}} + \frac{\|g\|_{\Phi,\mu}}{\|f\|_{\Phi,\mu} + \|g\|_{\Phi,\mu}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

de donde, por definición de la norma $\|f + g\|_{\Phi,\mu}$, resulta que $\|f + g\|_{\Phi,\mu} \leq \|f\|_{\Phi,\mu} + \|g\|_{\Phi,\mu}$.

Ahora veamos III). En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{\lambda^p} d\mu(x) \leq 1$$

es equivalente a que

$$\|f\|_{p,\mu}^p \leq \lambda^p,$$

de donde se sigue que $\|f\|_{p,\mu} = \|f\|_{\Phi,\mu}$. □

A.5. Demostración del Teorema 1.3.7

Primero presentamos un resultado previo.

Lema A.5.1. *Dada $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ no decreciente y continua por izquierda, son válidos los siguientes resultados.*

I) Φ^{-1} es creciente.

II) $\Phi^{-1}(\Phi(t)) \geq t$ para todo $t \geq 0$.

III) $\Phi(\Phi^{-1}(t)) \leq t$ para todo $t \geq 0$.

Demostración. Para ver [i\)](#), consideramos $t < s$, entonces

$$\{z \geq 0 : \Phi(z) > s\} \subset \{z \geq 0 : \Phi(z) > t\},$$

de donde se concluye que $\Phi^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(s)$.

Probamos [ii\)](#). En efecto, como Φ es no decreciente, si $\Phi(s) > \Phi(t)$, entonces $s > t$. Luego, por la definición de Φ^{-1} se tiene

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) = \inf\{s > 0 : \Phi(s) > \Phi(t)\} \geq t.$$

Para ver [iii\)](#), supongamos que $\Phi(\Phi^{-1}(t)) > t$. Como Φ es continua por izquierda, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $\Phi(\Phi^{-1}(t) - \varepsilon) > t$. Eso implica que $\Phi^{-1}(t) - \varepsilon$ pertenece al conjunto

$$\{s > 0 : \Phi(s) > t\},$$

de donde se sigue que $\Phi^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(t) - \varepsilon$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\Phi(\Phi^{-1}(t)) \leq t$. $\square$

Demostración del Teorema 1.3.7. Sean $t, s \in \mathbb{R}$, entonces $\Phi(t) \leq \Psi(s)$ ó $\Phi(t) > \Psi(s)$. En el primer caso, por los ítems [ii\)](#) y [i\)](#) del Lema [A.5.1](#) tenemos que

$$ts \leq \Phi^{-1}(\Phi(t))\Psi^{-1}(\Psi(s)) \leq \Phi^{-1}(\Psi(s))\Psi^{-1}(\Psi(s)) \leq \Theta^{-1}(\Psi(s)),$$

donde hemos utilizado la hipótesis [\(1.3.6\)](#) sobre Φ, Ψ y Θ . Luego, por el ítem [iii\)](#) del Lema [A.5.1](#) se sigue que

$$\Theta(ts) \leq \Theta(\Theta^{-1}(\Psi(s))) \leq \Psi(s).$$

De manera similar, si $\Phi(t) > \Psi(s)$, entonces se llega a que

$$\Theta(ts) \leq \Phi(t),$$

por lo que hemos obtenido que

$$\Theta(ts) \leq \Phi(t) + \Psi(s). \tag{A.5.1}$$

Para terminar con la prueba de la desigualdad de Hölder, suponemos, sin pérdida de generalidad, que $\|f\|_{\Phi, Q, \mu} = \|g\|_{\Psi, Q, \mu} = 1$. Por la desigualdad [\(A.5.1\)](#) y la convexidad y crecimiento

de las funciones de Young, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \Theta \left(\frac{|f(x)g(x)|}{2} \right) d\mu(x) &\leq \frac{1}{2\mu(Q)} \int_Q \Phi(|f(x)|) d\mu(x) \\
&\quad + \frac{1}{2\mu(Q)} \int_Q \Psi(|g(x)|) d\mu(x) \\
&\leq \frac{1}{2\mu(Q)} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi, Q, \mu}} \right) d\mu(x) \\
&\quad + \frac{1}{2\mu(Q)} \int_Q \Psi \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Psi, Q, \mu}} \right) d\mu(x) \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\|fg\|_{\Theta, Q, \mu} \leq 2 = 2\|f\|_{\Phi, Q, \mu}\|g\|_{\Psi, Q, \mu}$. Para f y g generales se consideran las funciones $f/\|f\|_{\Phi, Q, \mu}$ y $g/\|g\|_{\Psi, Q, \mu}$ en el razonamiento anterior. $\square$

A.6. Propiedades de las funciones de tipo $L \log L$

En esta sección estudiamos la función $\Phi(t) = t^p(1 + \log^+ t)^\varepsilon$, $p \geq 1$ y $\varepsilon \geq 0$. Comenzamos probando los siguientes lemas.

Lema A.6.1. *Sean C_1 y C_2 dos constantes positivas tales que $C_1 < 1$ y $C_2 > 1$. Entonces se cumple que*

$$C_1(1 + \log^+ t) \leq 1 + \log^+(C_1 t) \leq 1 + \log^+ t \quad (\text{A.6.1})$$

y

$$1 + \log^+ t \leq 1 + \log^+(C_2 t) \leq C_2(1 + \log^+ t) \quad (\text{A.6.2})$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Probemos primero (A.6.1). Observemos que la segunda desigualdad de (A.6.1) es válida para todo $t \geq 0$ debido al crecimiento de la función $1 + \log^+ t$. Por otra parte, si $0 \leq t \leq 1$, entonces la primera desigualdad también es cierta trivialmente ya que $C_1 < 1$. Para el caso que falta, sea $t > 1$ y $C_1 t \leq 1$, entonces debemos ver que

$$(1 + \log t) - C_1 \geq 0,$$

lo cual se cumple por ser $C_1 \leq 1$. Si $C_1 t > 1$, sea $f(t)$ la función definida por

$$f(t) = \frac{1 + \log^+(C_1 t)}{C_1(1 + \log t)},$$

de donde tenemos que $f(1) = 1/C_1 > 1$. Veamos que f es creciente para $t > 1$. En efecto, dado que

$$f'(t) = \frac{\log t - \log(C_1 t)}{tC_1(1 + \log t)^2},$$

esta resulta no negativa por el crecimiento de la función logaritmo y el hecho de que $C_1 < 1$. Por lo tanto, f es creciente para $t > 1$ y entonces $f(t) \geq f(1) > 1$.

Ahora probemos (A.6.2). Observemos que, por el crecimiento de la función logaritmo y el hecho de que $C_2 > 1$, la primera desigualdad es inmediata. Veamos que se cumple la segunda. Si $0 \leq t \leq 1$ y $C_2 t \leq 1$, el resultado es trivial. Por otra parte, si $0 \leq t \leq 1$ y $C_2 t > 1$, dado que $1 + \log x < x$ para todo $x \geq 1$, tenemos que

$$1 + \log(C_2 t) \leq C_2 t \leq C_2,$$

lo cual prueba la segunda desigualdad en este caso.

Si $t > 1$, entonces $C_2 t > 1$, y definimos

$$g(t) = \frac{C_2(1 + \log t)}{1 + \log(C_2 t)},$$

donde tenemos que $g(1) = \frac{C_2}{1 + \log C_2} > 1$. Veamos que g es creciente en el intervalo $(1, \infty)$. Dado que

$$g'(t) = \frac{C_2(\log(C_2 t) - \log t)}{t(1 + \log C_2 t)^2},$$

basta ver que

$$\log(C_2 t) - \log t \geq 0,$$

y esto se cumple por ser $C_2 > 1$. Luego, con un argumento similar al caso anterior se obtiene lo deseado. $\square$

Lema A.6.2. *Dado $0 < \alpha < 1$, se verifica que*

$$1 + \log t \leq \frac{t^\alpha}{\alpha}$$

para todo $t \geq 1$.

Demostración. Dado $0 < \alpha < 1$, consideremos la función auxiliar

$$f(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha} - 1 - \log t,$$

entonces $f(1) = 1/\alpha - 1 > 0$. Veamos que f es creciente. En efecto,

$$f'(t) = t^{\alpha-1} - t^{-1}$$

y como $0 < 1 - \alpha < 1$, tenemos que $t^{1-\alpha} < t$ para $t \geq 1$, de donde resulta que $f'(t) \geq 0$. Luego, $f(t) \geq f(1) > 0$ y se obtiene lo deseado. $\square$

Proposición A.6.3. Dado $p \geq 1$ y $\varepsilon > 0$, sea $\Phi(t) = t^p(1 + \log^+ t)^\varepsilon$. Las siguientes afirmaciones son válidas.

- I) Φ es sub-multiplicativa.
- II) Φ es una función de Young.
- III) Φ es una función p -Young.
- IV) $\Phi^{-1}(t) \approx t^{1/p}(1 + \log^+ t)^{-\varepsilon/p}$.
- V) Sea $t \geq 1$ y $\Psi(t) = e^{t^{1/\varepsilon}} - e$, entonces $\Psi^{-1}(t) \approx (1 + \log^+ t)^\varepsilon$.
- VI) Si $p = 1$, entonces $\tilde{\Phi} \approx \Psi$, donde $\tilde{\Phi}$ es la función conjugada definida en la Sección 1.3.
- VII) Si $\Phi_k = t(1 + \log^+ t)^k$ y $\Psi_k(t) = (e^{t^{1/k}} - e)\chi_{(1,\infty)}(t)$, entonces $\Phi_k^{-1}(t)\Psi_{k-j}^{-1}(t) \approx \Phi_j^{-1}(t)$.
- VIII) Si $p < q$, entonces Φ pertenece a la clase B_q definida en la Sección 1.4.

Demostración. Para probar I), sean $a, b > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(ab) &= a^p b^p (1 + \log^+(ab))^\varepsilon \\ &\leq a^p b^p (1 + \log^+ a + \log^+ b)^\varepsilon \\ &\leq a^p b^p (1 + \log^+ a + \log^+ b + (\log^+ a)(\log^+ b))^\varepsilon \\ &= a^p b^p (1 + \log^+ a)^\varepsilon (1 + \log^+ b)^\varepsilon = \Phi(a)\Phi(b). \end{aligned}$$

Probamos II) y III). Para ello vemos que la función $\Gamma(t) = t^q(1 + \alpha \log^+ t)^\varepsilon$ es de Young, con $\varepsilon > 0$, $q \geq 1$ y $0 < \alpha \leq 1$. Consideramos $\gamma = \Gamma'$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} qt^{q-1} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t^{q-1}(1 + \alpha \log t)^{\varepsilon-1}(q(1 + \alpha \log t) + \varepsilon\alpha) & \text{si } 1 < t. \end{cases}$$

Como γ es continua a trozos, $\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(s) ds$. Es inmediato que γ es no negativa. Si probamos que γ es creciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$, entonces Γ resulta ser una función de Young.

Veamos que γ es creciente. Si $t \in [0, 1]$, esto es directo. Sea $t > 1$, si, además, $\varepsilon > 1$, entonces γ es el producto de funciones crecientes y, por lo tanto, es creciente. Consideremos primero el caso $0 < \varepsilon < 1$. Como $1 + \log t \geq 1$, se sigue que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \alpha t^{q-2} (1 + \alpha \log t)^{\varepsilon-2} \left(\left(\frac{q-1}{\alpha} (1 + \alpha \log t) + \varepsilon - 1 \right) (q(1 + \alpha \log t) + \varepsilon \alpha) + q(1 + \alpha \log t) \right) \\ &> \alpha t^{q-2} (1 + \alpha \log t)^{\varepsilon-2} \left(\left(\frac{q-1}{\alpha} + \varepsilon - 1 \right) (q + \varepsilon \alpha) + q \right). \end{aligned}$$

En este último término, los primeros dos factores son siempre positivos. Como $q \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$ y $0 < \varepsilon < 1$, en el último factor se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\frac{q-1}{\alpha} + \varepsilon - 1 \right) (q + \varepsilon \alpha) + q &= \frac{q(q-1)}{\alpha} + (q-1)\varepsilon + \varepsilon q - q + (\varepsilon-1)\varepsilon \alpha + q \\ &= \frac{q(q-1)}{\alpha} + \varepsilon(2q-1 + (\varepsilon-1)\alpha), \end{aligned}$$

lo cual resulta no negativo ya que $2q-1 \geq 1 \geq \alpha(1-\varepsilon)$.

Esto prueba que $\gamma'(t) > 0$ y, por lo tanto, resulta creciente en los intervalos $[0, 1]$ y $(1, \infty)$. Observemos además que $\lim_{t \rightarrow 1^+} \gamma(t) = q + \varepsilon \alpha > \gamma(1)$, de donde se concluye que γ es creciente en $[0, \infty)$.

Para finalizar, probemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$. Como en el caso anterior, si $\varepsilon > 1$, entonces todas las funciones involucradas en la definición de γ tienden a infinito y se cumple lo deseado. Consideramos $0 < \varepsilon < 1$ y, como t tiende a infinito, podemos tomar $t > 1$. Luego, como $0 < 1 - \varepsilon < 1$, evaluando el límite se obtiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{q-1} (q(1 + \alpha \log t) + \varepsilon \alpha)}{(1 + \alpha \log t)^{1-\varepsilon}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{q-1} \left(q + \frac{\varepsilon \alpha}{(1 + \alpha \log t)} \right) (1 + \alpha \log t)^\varepsilon = \infty.$$

De esto se desprende que Φ es una función de Young, considerando $q = p$ y $\alpha = 1$. Para probar [III](#)), debemos ver que $\Psi(t) = \Phi(t^{1/p}) = t(1 + \log^+ t^{1/p})^\varepsilon$ es de Young, lo cual se sigue considerando $q = 1$ y $\alpha = 1/p$ en la definición de Γ .

Probemos [IV](#)). Dada $\Phi(t) = t^p(1 + \log^+ t)^\varepsilon$, veamos que

$$\Phi^{-1}(t) \approx \gamma(t) = \frac{t^{1/p}}{(1 + \log^+ t)^{\varepsilon/p}}. \quad (\text{A.6.3})$$

Observemos que Φ es biyectiva, por lo que Φ^{-1} es su inversa en el sentido usual. Luego, basta ver que existen C_1 y C_2 tales que

$$\Phi(C_1\gamma(t)) \leq t \leq \Phi(C_2\gamma(t)), \quad (\text{A.6.4})$$

lo cual prueba (A.6.3).

Probemos primero que $\Phi(\gamma(t)) \leq t$, de donde basta tomar $C_1 = 1$ en (A.6.4). En efecto, como $p \leq 1$ y $\varepsilon \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \gamma)(t) &= \frac{t}{(1 + \log^+ t)^\varepsilon} \left(1 + \log^+ \left(\frac{t^{1/p}}{(1 + \log^+ t)^{\varepsilon/p}} \right) \right)^\varepsilon \\ &\leq \frac{t}{(1 + \log^+ t)^\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{p} \log^+ t \right)^\varepsilon \\ &\leq \frac{t}{(1 + \log^+ t)^\varepsilon} (1 + \log^+ t)^\varepsilon \\ &= t. \end{aligned}$$

Para probar la otra desigualdad, consideramos $C_2 = \max\{1, (\frac{p}{1+\alpha\varepsilon})^{1/p}\}$. Luego, si $t \in (0, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\Phi \circ C_2\gamma)(t) &= C_2^p t (1 + \log^+ (C_2 t^{1/p}))^\varepsilon \\ &\geq t(1 + \log^+ (t^{1/p}))^\varepsilon \\ &= t. \end{aligned}$$

Si $t \geq 1$, observemos que, por el Lema A.6.2, $(1 + \log t)^{-\varepsilon/p} \geq \alpha^{\varepsilon/p} t^{-\alpha\varepsilon/p}$ para $0 < \alpha < 1$. Dado que $C_2 \alpha^{-\varepsilon/p} > 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} (\Phi \circ C_2\gamma)(t) &= \frac{C_2^p t}{(1 + \log t)^\varepsilon} \left(1 + \log^+ \left(\frac{C_2 t^{1/p}}{(1 + \log t)^{\varepsilon/p}} \right) \right)^\varepsilon \\ &\geq \frac{t}{(1 + \log t)^\varepsilon} (C_2^p + C_2^p \log^+ (C_2 \alpha^{-\varepsilon/p} t^{1/p + \alpha\varepsilon/p}))^\varepsilon \\ &\geq \frac{t}{(1 + \log t)^\varepsilon} \left(1 + C_2^p \left(\frac{1 + \alpha\varepsilon}{p} \right) \log t \right)^\varepsilon \\ &\geq \frac{t}{(1 + \log t)^\varepsilon} (1 + \log t)^\varepsilon \\ &\geq t. \end{aligned}$$

Veamos ahora Ψ . Si $t \geq 1$, $\Psi(t) = (e^{t^{1/\varepsilon}} - e)$ es biyectiva y $\Psi^{-1}(t) = (\log(e+t))^\varepsilon$. En efecto,

$$\Psi \circ \Psi^{-1}(t) = e^{((\log(e+t))^\varepsilon)^{1/\varepsilon}} - e = t$$

y

$$\Psi_\varepsilon^{-1} \circ \Psi_\varepsilon(t) = (\log(e + e^{t^{1/\varepsilon}} - e))^\varepsilon = t$$

Falta probar que $\Psi^{-1}(t) \approx (1 + \log^+ t)^\varepsilon$. Veamos que si $t \geq 1$, entonces $1 + \log t \approx \log(e + t)$. Por propiedades de la función logaritmo, tenemos que

$$1 + \log t = \log e + \log t \leq \log(e + t) + \log(e + t) = 2 \log(e + t).$$

Por otra parte, observemos que $e + t \leq (e + 1)t$ para todo $t \geq 1$. Luego, utilizando el Lema [A.6.1](#), tenemos que

$$\begin{aligned} 1 + \log t &\geq \frac{e}{e+1} \left(\log e + \log \frac{t(e+1)}{e} \right) \\ &= \frac{e}{e+1} \log \left(\frac{et(e+1)}{e} \right) \\ &= \frac{e}{e+1} \log(t(e+1)) \\ &\geq \frac{e}{e+1} \log(e+t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\log(e + t) \approx 1 + \log t$ si $t \geq 1$ y se sigue que $\Psi^{-1}(t) \approx (1 + \log t)^\varepsilon$.

A continuación probamos [VI](#)), es decir que si $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)^\varepsilon$, entonces $\tilde{\Phi}(t) \approx \Psi(t)$, donde $\Psi(t) = (e^{t^{1/\varepsilon}} - e)\chi_{(1,\infty)}(t)$. Si $t \in [0, 1]$, entonces $\tilde{\Phi}(t) = 0$. En efecto, si $s > 1$, tenemos que

$$st - \Phi(s) = st - s(1 + \log s)^\varepsilon = s(t - (1 + \log s)^\varepsilon) \leq s(t - 1) \leq 0.$$

Si $0 \leq s \leq 1$, entonces

$$st - \Phi(s) = st - s = s(t - 1) \leq 0.$$

Por lo tanto, por definición de conjugada se sigue que $\tilde{\Phi}(t) = 0$ para $t \in [0, 1]$. Si $t \geq 1$, dado que, por [\(1.3.7\)](#),

$$\Phi^{-1}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t) \approx t,$$

obtenemos que

$$\tilde{\Phi}^{-1}(t) \approx \frac{t}{t(1 + \log^+ t)^{-\varepsilon}} = (1 + \log^+ t)^\varepsilon \approx \Psi^{-1}(t).$$

Luego, por ser funciones biyectivas en $[1, \infty)$ se cumple que

$$\tilde{\Phi}(t) = \left(\tilde{\Phi}^{-1}\right)^{-1}(t) \approx \Psi(t).$$

De lo probado anteriormente, es directo ver que se cumple [vii](#)). En efecto,

$$\Phi_k^{-1}(t)\Psi_{k-j}^{-1}(t) \approx \frac{t}{(1 + \log^+ t)^k} (1 + \log^+ t)^{k-j} = t(1 + \log^+ t)^{-j} = \Phi_j^{-1}(t).$$

Para finalizar probamos [viii](#)). Sea $0 < \alpha < \min\{\frac{q-p}{2\varepsilon}; 1\}$, por Lema [A.6.2](#) se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_1^\infty \frac{t^p(1 + \log t)^\varepsilon}{t^q} \frac{dt}{t} \leq \int_1^\infty t^{p-q-1} \frac{t^{\alpha\varepsilon}}{\alpha} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_1^\infty t^{p-q+\alpha\varepsilon-1} dt \\ &= \frac{1}{\alpha(p-q+\alpha\varepsilon)} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} b^{p-q+\alpha\varepsilon} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\alpha(q-p-\alpha\varepsilon)} \left(1 - \lim_{b \rightarrow \infty} b^{p-q+\alpha\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Por la elección de α tenemos que

$$p + \alpha\varepsilon < p + \frac{q-p}{2} < q,$$

de donde $p - q + \alpha\varepsilon < 0$ y el límite anterior se anula. Esto prueba lo deseado. $\square$

A.7. Sobre las clases de funciones

En lo que sigue vamos a justificar lo afirmado en la prueba de los teoremas principales respecto de las funciones allí consideradas no negativas. Las siguientes observaciones están basadas en lo desarrollado en [\[3\]](#).

Con $\mathcal{T}$ denotaremos a la maximal de Hardy-Littlewood, un OCZ o un conmutador de OCZ. Las estimaciones que debemos probar son de la forma

$$u_0 \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w_0(x) dx, \quad (\text{A.7.1})$$

donde u_0 y w_0 son funciones que dependen de los pesos considerados en el problema y la función $\Phi_m(t) = t(1 + \log^+ t)^m$, donde $m = 0$ si $\mathcal{T} = M$ o $\mathcal{T} = T$.

Dada f medible general, $f = f^+ - f^-$, donde $f^+ = \max\{0, f\}$ y $f^- = -\min\{0, f\}$. Por la sub-linealidad de $\mathcal{T}$ tenemos que $|\mathcal{T}(fv)| \leq |\mathcal{T}(f^+v)| + |\mathcal{T}(f^-v)|$. Como f^+ y f^- son no negativas, suponiendo que (A.7.1) se cumple para este tipo de funciones, se sigue que

$$\begin{aligned} u_0 \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(fv)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) &\leq u_0 \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(f^+v)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \\ &\quad + u_0 \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\mathcal{T}(f^-v)(x)|}{v(x)} > \lambda \right\} \right) \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f^+(x)|}{\lambda} \right) w_0(x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f^-(x)|}{\lambda} \right) w_0(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w_0(x) dx, \end{aligned}$$

donde a lo último se utiliza que $f^+, f^- \leq |f|$ y que Φ_m es creciente. Con esto se concluye que f puede considerarse no negativa.

A.8. Sobre operadores de Calderón-Zygmund

En las demostraciones de los Teoremas 2.2.1, 2.2.2, 2.1.3 y 2.1.4 se ha utilizado la igualdad entre los conjuntos A y B , donde

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{\left| T \left(\sum_j (b - b_{Q_j}) h_j v \right) (x) \right|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^* : \frac{\left| \sum_j T \left((b - b_{Q_j}) h_j v \right) (x) \right|}{v(x)} > \frac{\lambda}{2} \right\}$$

y Ω^* es la unión de cubos $Q_j^* = 4\sqrt{n}Q_j$. Probaremos que se cumple dicha igualdad. Para ello, notemos que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$, entonces $T \left(\sum_j (b - b_{Q_j}) h_j v \right) (x)$ y $\sum_j T \left((b - b_{Q_j}) h_j v \right) (x)$ admiten representación integral por tener cada h_j soporte en el respectivo Q_j .

Sean

$$g_m(y) = \sum_{j=1}^m (b(y) - b_{Q_j}) h_j(y) v(y) K(x - y),$$

$$g(y) = \sum_j (b(y) - b_{Q_j}) h_j(y) v(y) K(x - y),$$

luego $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(y) = g(y)$ en c.t.p. Observemos que

$$T \left(\sum_j (b - b_{Q_j}) h_j v \right) (x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_j (b(y) - b_{Q_j}) h_j(y) v(y) K(x - y) dy$$

y

$$\sum_j T((b - b_{Q_j}) h_j v)(x) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b_{Q_j}) h_j(y) v(y) K(x - y) dy.$$

Nos basta probar que para x fijo estas cantidades son iguales.

Afirmamos que existe $\gamma \in L^1$ tal que $|g_m(y)| \leq \gamma(y)$ para todo m , luego, por el Teorema de Convergencia Dominada, se sigue que

$$\begin{aligned} T \left(\sum_j (b - b_{Q_j}) h_j v \right) (x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(y) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_m(y) dy \\ &= \sum_j T((b - b_{Q_j}) h_j v)(x), \end{aligned}$$

que es lo deseado.

Veamos que es cierto que existe $\gamma \in L^1$ tal que $|g_m(y)| \leq \gamma(y)$. Por un argumento de aproximación, podemos suponer b y v acotados. Veamos que $\Omega \subset B_{(x_0, R)}$. Si Q es un cubo tal que $Q \cap \text{sop} f = \emptyset$, entonces se sigue que $f_Q^v = 0$. Luego, como $f_{Q_j}^v > \lambda$, tenemos que todo Q_j debe intersectar al soporte de f . Además, como el soporte de f es compacto, existe un cubo Q_0 que lo contiene.

Por ser $v \in RH_\infty \subset RH_s$, con $s > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} v(Q_j) &< \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} f(x) v(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(\int_{Q_j} f(x)^{s'} dx \right)^{1/s'} \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} v(x)^s dx \right)^{1/s} |Q_j|^{1/s} \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \left(\sup_{Q_j} f^{s'-1} \right)^{1/s'} \left(\int_{Q_j} f(x) dx \right)^{1/s'} \frac{v(Q_j)}{|Q_j|} |Q_j|^{1/s}. \end{aligned}$$

Luego,

$$|Q_j| \leq \frac{C}{\lambda^{s'}} \|f\|_\infty^{s'/s} \|f\|_1 = M,$$

y, como todo Q_j interseca a $\text{sop}(f) \subset Q_0$, considerando $R = \frac{\text{diam}(Q_0)}{2} + \sqrt{n}M^{1/n}$ se cumple que $\Omega \subset B(x_0, R)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |b(y) - b_{Q_j}| |h_j(y)| v(y) |K(x - y)| &= \left| b(y) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} b(z) dz \right| |h_j(y)| v(y) |K(x - y)| \\ &\leq 2 \|b\|_\infty \left(|f(y)| + |f_{Q_j}^v| \right) v(y) |K(x - y)| \chi_{Q_j}(y) \\ &\leq 4 \|b\|_\infty \|f\|_\infty \|v\|_\infty |K(x - y)| \chi_{Q_j}(y) \\ &= C_0 |K(x - y)| \chi_{Q_j}(y). \end{aligned}$$

De esto último, se sigue que

$$|g_m(y)| \leq \sum_{j=1}^m C_0 |K(x - y)| \chi_{Q_j}(y) \leq C_0 |K(x - y)| \chi_\Omega(y).$$

Como $y \in Q_j$ y $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$, se cumple la condición (1.5.1) y, además, $|x - y| > \delta$ para algún δ positivo, por lo que

$$\int_{\Omega} C_0 |K(x - y)| dy \leq C_0 \int_{\Omega} |x - y|^{-n} dy \leq C_0 \delta^{-n} |B(x_0, R)| < \infty,$$

lo cual implica que $\gamma(y) = C_0 |K(x - y)| \chi_\Omega(y)$ pertenece a L^1 y es la función buscada.

Bibliografía

- [1] A. Bernardis, S. Hartzstein, and G. Pradolini, *Weighted inequalities for commutators of fractional integrals on spaces of homogeneous type*, J. Math. Anal. Appl. **322** (2006), no. 2, 825–846. MR 2250620
- [2] A.L. Bernardis, G. Pradolini, M. Lorente, and Riveros M.S., *Composition of fractional Orlicz maximal operators and A_1 -weights on spaces of homogeneous type*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **26** (2010), no. 8, 1509–1518. MR 2661130
- [3] F. Berra, *Desigualdades mixtas para operadores del análisis armónico*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional del Litoral, 2019.
- [4] F. Berra, *Mixed weak estimates of Sawyer type for generalized maximal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), no. 10, 4259–4273. MR 4002540
- [5] F. Berra, M. Carena, and G. Pradolini, *Mixed weak estimates of Sawyer type for commutators of generalized singular integrals and related operators*, Michigan Math. J. **68** (2019), no. 3, 527–564. MR 3990170
- [6] ———, *Mixed inequalities of Fefferman-Stein type for singular integral operators*, J. Math. Sci. (N.Y.) **266** (2022), no. 3, 461–475. MR 4533037
- [7] F. Berra, G. Pradolini, and J. Recchi, *Weighted mixed endpoint estimates of Fefferman-Stein type for commutators of singular integral operators*, J. Math. Anal. Appl. **541** (2025), no. 2, Paper No. 128734, 28. MR 4782152
- [8] R. R. Coifman, *Distribution function inequalities for singular integrals*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **69** (1972), 2838–2839. MR 303226

- [9] D. Cruz-Uribe, J.M. Martell, and C. Pérez, *Weighted weak-type inequalities and a conjecture of Sawyer*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 30, 1849–1871. MR 2172941
- [10] ———, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 215, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. MR 2797562
- [11] D. Cruz-Uribe and C. J. Neugebauer, *The structure of the reverse Hölder classes*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 8, 2941–2960. MR 1308005
- [12] D. Cruz-Uribe and C. Pérez, *Sharp two-weight, weak-type norm inequalities for singular integral operators*, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 3-4, 417–427. MR 1713140
- [13] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe. MR 1800316
- [14] G. B. Folland, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. MR 1681462
- [15] J. García-Cuerva and J. M. Martell, *Two-weight norm inequalities for maximal operators and fractional integrals on non-homogeneous spaces*, Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), no. 3, 1241–1280. MR 1871355
- [16] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104. MR 807149
- [17] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2014. MR 3243734
- [18] P. Harjulehto and P. Hästö, *Orlicz spaces and generalized Orlicz spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2236, Springer, Cham, 2019. MR 3931352
- [19] T. Hytönen and C. Pérez, *Sharp weighted bounds involving A_∞* , Anal. PDE **6** (2013), no. 4, 777–818. MR 3092729

-
- [20] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426. MR 131498
- [21] A. M. Kanashiro, G. Pradolini, and O. Salinas, *Weighted modular estimates for a generalized maximal operator on spaces of homogeneous type*, Collect. Math. **63** (2012), no. 2, 147–164. MR 2909822
- [22] M. Lorente, J. M. Martell, M. S. Riveros, and A. de la Torre, *Generalized Hörmander’s conditions, commutators and weights*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), no. 2, 1399–1425. MR 2445285
- [23] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226. MR 293384
- [24] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden, *Some weighted weak-type inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), no. 5, 801–816. MR 447956
- [25] R. O’Neil, *Fractional integration in Orlicz spaces. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 300–328. MR 194881
- [26] C. Pérez, *Weighted norm inequalities for singular integral operators*, J. London Math. Soc. (2) **49** (1994), no. 2, 296–308.
- [27] ———, *Endpoint estimates for commutators of singular integral operators*, J. Funct. Anal. **128** (1995), no. 1, 163–185. MR 1317714
- [28] ———, *On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p -spaces with different weights*, Proc. London Math. Soc. (3) **71** (1995), no. 1, 135–157. MR 1327936
- [29] ———, *Sharp estimates for commutators of singular integrals via iterations of the Hardy-Littlewood maximal function*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), no. 6, 743–756. MR 1481632
- [30] C. Pérez and G. Pradolini, *Sharp weighted endpoint estimates for commutators of singular integrals*, Michigan Math. J. **49** (2001), no. 1, 23–37. MR 1827073

- [31] E. Sawyer, *A weighted weak type inequality for the maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), no. 4, 610–614. MR 776188