



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Trabajo Final de Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudio relacional de lógicas modales no clásicas

Eros Pablo Girardi

Directora: Manuela Busaniche

Codirector: Miguel Marcos

2025



Eros Pablo Girardi

erospgirardi@gmail.com

Lic. Matemática Aplicada

Tema: Sistemas Lógicos

Modales

07/11/2025

Agradecimientos

Escribo estos agradecimientos tres meses después de la defensa de este trabajo. El tiempo da perspectiva y permite ver con mayor claridad algo que considero muy importante: las personas que me acompañaron.

A Manu y Migue, les agradezco profundamente la calidez y la paciencia con las que me acompañaron a lo largo de estos años. Fue un verdadero placer compartir con ustedes todo este proceso.

A mi familia, que me banca en todas. Ese apoyo incondicional es fundamental, y lo valoro con todo el corazón.

A Mati, con quien durante estos años tuvimos experiencias muy similares, lo que hizo que nos entiéramos especialmente en todo lo relacionado con la universidad. Este trabajo no podría haberlo terminado sin los innumerables momentos de catarsis que compartimos.

A Tomi, que nunca falten tu carisma y tu alegría, que tantas veces me hacen pensar que, de vez en cuando, las cosas no son tan malas como creo.

A Octa, Dami y Rolo, porque, aunque no lo crean, esos momentos de nada en Discord ayudan a seguir adelante.

A Marelli, que en la distancia nos seguimos encontrando.

A Gabi, sin vos mi paso por la universidad no hubiera sido lo mismo. Te lo digo seguido, pero... no hace falta repetirme acá.

A Naza, que siempre supiste ver en mí lo que me costaba a mí mismo ver.

A Cami, desde que salimos del concierto en 2023 y nos encontramos entre 70 mil personas, estábamos destinados a tener la amistad que tenemos.

A Angi, Vale y Yaz, espero que podamos seguir compartiendo mates y momentos durante mucho más tiempo.

A Mariana, estoy feliz que la universidad me haya dado el placer de ser tu amigo.

A Julia, nos entendemos lo suficiente para que sepas lo importante que sos para mí.

Y al resto de las personas que no mencioné, sepan que todas tienen un lugar especial para mí.

Espero que todos sigan acompañándome.

Con quienes estoy en cada momento, cuando todo sale bien y cuando no.

Con los que nos cruzamos y espero que volvamos a encontrarnos.

*Con ustedes, estoy seguro de que el futuro es **dorado**.*

DEUX VALSES

N^{os} 1 et 2

par

FRÉDÉRIC CHOPIN

Œuvres posthumes.

4^e Livraison.

(1856)

Lento

1^{re}
 VALSE

• 158

(1856)

Lento

1^a

VALSE

♩ = 158

p con espressione.

Ped

Ped

Ped

Ped

Ped

Ped

f

p

Ped

Ped

Ped

Ped

Ped

Ped

riten.

a tempo.

Ped

Ped

Ped

Ped

Ped

Ped

f

Ped

Ped

Ped

Ped

Ped

Ped

p

15

Ped

Ped

Ped

Ped

Ped

Paris, Impt. Basse, 14 rue St. Marc.

J. M. 5526.

Índice

Introducción	6
Estructura	7
1. Sistemas lógicos modales clásicos	8
1.1. Preliminares sobre relaciones binarias	8
1.2. El principio. Lenguaje y definiciones	12
1.3. Semántica del lenguaje modal	14
1.4. Correspondencias entre fórmulas y propiedades de la relación de accesibilidad	19
1.5. Lógicas modales normales	22
1.6. Los marcos <i>simplificados</i>	24
1.7. Comentarios	32
2. Sistemas lógicos modales multivaluados finitos	33
2.1. Retículos residuados	33
2.2. Los retículos $\mathbf{L}_n$ y $\mathbf{G}_n$	36
2.3. Marcos y modelos multivaluados	38
2.4. Relaciones binarias multivaluadas	40
2.5. Fórmulas (K) y (DUAL)	43
2.6. Correspondencias entre fórmulas y propiedades de R	46
2.6.1. Serialidad	46
2.6.2. Transitividad	48
2.6.3. Euclidianidad	51
2.6.4. Simetría	54
2.6.5. Reflexividad	57
2.7. La fórmula E5 y la propiedad J5	59
2.8. Comentarios	64
3. Marcos Semiuniversales Multivaluados	66
3.1. Conjuntos difusos y relaciones semiuniversales multivaluadas	66
3.2. Las clases Sim_N y $\mathcal{W}$	68

3.3. Comentarios	73
4. Epílogo	75
5. Anexo	76
Referencias	84

Introducción

La presente tesis de grado se desarrolla en el marco de la materia Trabajo Final de la Licenciatura en Matemática Aplicada con sede en la Facultad de Ingeniería Química en la Universidad Nacional del Litoral. Esta consiste en el estudio matemático de sistemas de lógicas, en particular, sistemas que son a la vez modales y multivaluados. Nuestro tratamiento de los temas se restringe a herramientas matemáticas involucradas en el análisis de los sistemas lógicos modales.

Las lógicas modales (ver [2, 12]) se introdujeron hace aproximadamente un siglo, con el objetivo de formalizar distintos razonamientos. Estas lógicas se obtienen incorporando a la lógica clásica operadores que se conocen como modalidades, cuya utilidad se encuentra en su expresividad. Usualmente modelan nociones de posibilidad, necesidad, conocimiento de información, entre otras. En general, se incorporan dos modalidades cuyas representaciones sintácticas suelen ser mediante los símbolos, $\Diamond$ y $\Box$; si se incluyen más modalidades, estas se suelen representar por símbolos genéricos indexados (por ejemplo, $\Delta_1, \Delta_2, \dots$). A mitad del siglo XX, Kripke introdujo una forma rigurosa de interpretar estos símbolos, mediante estructuras relacionales llamadas *marcos de Kripke* ([13]). Estos marcos cuentan con un universo de mundos y relaciones que determinaran las modalidades. Las lógicas determinadas (desde un enfoque puramente semántico, ver [2, 12]) por estos sistemas dependen directamente de estas relaciones y sus propiedades. Dicho esto, remarcamos que nosotros no consideramos las motivaciones filosóficas en ningún momento de este trabajo. El lector interesado puede consultar las siguientes referencias [11, 12, 15].

Por otro lado, los sistemas lógicos multivaluados aparecen como una generalización de la lógica clásica en presencia de enunciados que no son necesariamente falsos ni verdaderos. Generalmente se interpretan con valores de verdad distintos de 0 (falso) y 1 (verdadero) ([10]). La utilidad de esta extensión se encuentra, entre otras cuestiones, en el modelado de proposiciones que involucran imprecisiones o gradualidad. Ejemplos usuales en el lenguaje coloquial se encuentran en oraciones del estilo *El estudiante 1 es alto* cuyo grado de verdad querríamos comparar con otra oración similar como *El estudiante 2 es alto*.

Los sistemas modales multivaluados resultan de extender a la lógica clásica con la incorporación al lenguaje de modalidades e interpretando los enunciados con valores de verdad distintos del 0 y 1. Su importancia se debe a la fuerte capacidad expresiva que poseen (considerando que son dos instancias de generalización de la lógica clásica en conjunto). Distintos enfoques sobre como modelar estos sistemas se presentan en [7, 17, 18].

En este trabajo consideramos una sola relación binaria, conocida como *relación*

de accesibilidad, y las modalidades mencionadas $\Diamond$ y $\Box$. Nos proponemos extender algunos resultados de los sistemas lógicos modales clásicos a los multivaluados, considerando marcos de Kripke donde tanto la relación de accesibilidad como las evaluaciones tienen en cuenta distintos valores de verdad, siguiendo ideas ya presentadas en [3]. Nuestro primer objetivo es estudiar las correspondencias entre fórmulas modales y propiedades de la relación binaria. Por otro lado, estudiamos las clases de marcos *simplificados* para obtener resultados, en los dos tipos de sistemas, sobre las lógicas que ellas determinan. Estos marcos resultan interesantes pues nos permiten estudiar clases de marcos más generales mediante resultados de descomposición directa y es en lo que nos enfocaremos en los finales del Capítulo 1 y 3.

Para ambos objetivos nos basamos en [6], donde se desarrollan las ideas en el caso clásico; sin embargo, la metodología que desarrollamos es original, ya que la generalización al contexto multivaluado resulta inmediata de esta forma. Para estas metas adoptamos un enfoque puramente semántico. El uso de herramientas algebraicas dentro de este marco nos permitió alcanzar los resultados propuestos.

Nuestro último objetivo es que la exposición resulte en un compendio ordenado y autocontenido, útil para futuros lectores que deseen introducirse o profundizar en estos temas.

Organización

Esta tesis está organizada en tres capítulos, un epílogo y un anexo. Cada capítulo finaliza con una sección de comentarios que funciona como cierre y reflexión sobre los resultados presentados.

En el primer capítulo se introducen las nociones básicas sobre relaciones binarias y semánticas de sistemas lógicos modales clásicos. Estudiamos la correspondencia entre propiedades de las relaciones binarias y la validez de fórmulas en los marcos determinados por dichas relaciones. Por último presentamos semánticas simplificadas y su relación con clases particulares de marcos.

En el segundo capítulo se presentan las estructuras de retículos residuados y, sobre ellas, se desarrollan los sistemas lógicos modales multivaluados. En este contexto se generalizan resultados obtenidos en el primer capítulo y se incorpora una nueva fórmula asociada a una propiedad adicional de las relaciones binarias.

En el tercer capítulo se abordan preguntas planteadas sobre semánticas simplificadas en el primer capítulo generalizándolas a un contexto multivaluado, lo que permite un tratamiento unificado de los conceptos introducidos.

En el epílogo se comentan brevemente algunas problemáticas y líneas de trabajo que exceden el alcance de esta tesis pero resultan relevantes para continuar la investigación.

Finalmente, se incluye un anexo con las demostraciones técnicas de ciertos resultados que se decidió omitir del cuerpo principal para mantener la claridad expositiva y conservar un hilo argumental continuo.

1. Sistemas lógicos modales clásicos

1.1. Preliminares sobre relaciones binarias

En la introducción, mencionamos que trabajaremos con una *relación de accesibilidad* que es binaria. La expresividad de los sistemas lógicos modales depende fuertemente de esta relación. En general, pueden haber varias relaciones de cualquier aridad (para ejemplos recomendamos consultar [2]). Como en este trabajo tomamos solo una relación binaria, opinamos es pertinente incluir esta sección con resultados sobre este tipo de objetos matemáticos. Introduciremos ciertas nociones importantes sobre ellas previo a la presentación de los sistemas lógicos modales clásicos. Mostramos resultados y equivalencias que van a dar intuición sobre ciertas propiedades de las relaciones binarias.

Los elementos del conjunto base de la relación en el contexto de sistemas lógicos modales suelen tomar muchos nombres distintos. Algunos de ellos suelen ser mundos, puntos, etiquetas, entre otros. Con esto presente, vamos a en general llamarlos elementos, mundos o puntos indiferentemente a lo largo del trabajo.

Este trabajo tiene en su esencia el concepto de relación binaria.

Definición 1.1

Una relación binaria R en W es un subconjunto de $W \times W$.

Sea R una relación binaria en W . Esto es, $R \subseteq W \times W$. Podemos definir una función $\mathbf{R} : W \times W \rightarrow \{0, 1\}$ que asigna 1 a un par $(i, j) \in W \times W$ si y sólo si $(i, j) \in R$. Por otro lado, si tenemos una función $\mathbf{R}$ de $W \times W$ en $\{0, 1\}$ podemos definir una relación R en W donde (i, j) va a pertenecer a R si y sólo si $\mathbf{R}(i, j) = 1$. Con esto, afirmamos que hay una correspondencia biyectiva entre relaciones binarias en W y funciones de $W \times W$ en $\{0, 1\}$ ¹. Esto se resume en

$$(i, j) \in R \iff \mathbf{R}(i, j) = 1.$$

A lo largo de este trabajo interpretaremos una relación binaria R en W como una función $R : W \times W \rightarrow \{0, 1\}$ ² donde dos elementos $i, j \in W$ están relacionados si y sólo si $R(i, j) = 1$. Notemos que el orden es importante, pues $R(i, j)$ puede ser

¹Más precisamente, la correspondencia es entre relaciones y sus funciones características.

²Notamos que utilizamos la misma R en ambos casos. Desde este momento siempre nos referiremos por R a la función.

1 y $R(j, i)$ no³. Dicho esto, damos las primeras definiciones pertinentes bajo esta nueva interpretación.

Definición 1.2

Sea R una relación binaria en un conjunto de mundos W no vacío. Entonces R se llamará

- *Serial* si y sólo si para todo $i \in W$ existe $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$.
- *Reflexiva* si y sólo si para todo $i \in W$ se tiene que $R(i, i) = 1$.
- *Simétrica* si y sólo si para todo $i, j \in W$ se tiene que $R(i, j) = R(j, i)$.
- *Transitiva* si y sólo si para todo $i, j, k \in W$ se tiene que $R(i, j) = 1$ y $R(j, k) = 1$ implican que $R(i, k) = 1$.
- *Euclidiana* si y sólo si para todo $i, j, k \in W$ se tiene que $R(i, j) = 1$ y $R(i, k) = 1$ implican que $R(j, k) = 1$.
- *de Equivalencia* si y sólo si R es reflexiva, simétrica y transitiva.
- *Universal* si y sólo si para todo $i, j \in W$ se tiene que $R(i, j) = 1$.
- *Semiuniversal* si y sólo si existe un subconjunto $A \subseteq W$ tal que para todo $i, j \in W$

$$R(i, j) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } j \in A, \\ 0 & , \text{ si } j \notin A. \end{cases}$$

- *Vacía* si y sólo si para todo $i, j \in W$ se tiene que $R(i, j) = 0$.

Observación 1.1

Notemos que la condición para que una relación binaria R en W sea semiuniversal es equivalente a que exista un subconjunto $A \subseteq W$ tal que $R(i, j) = \chi_A(j)$ donde χ_A es la función característica del conjunto A definida como

$$\chi_A(j) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } j \in A, \\ 0 & , \text{ si } j \notin A. \end{cases}$$

Luego, observemos que si una relación R es semiuniversal entonces $R(i, j)$ solo depende de j .

³Traduciendo al contexto de pares en $W \times W$, el par (i, j) puede pertenecer a R y el par (j, i) no, lo cual puede resultarle más intuitivo al lector pensando en la propiedad de simetría.

Por último, notemos que una relación R universal o vacía es en particular semiuniversal con $A = W$ o $A = \emptyset$ respectivamente.

Diremos que una relación R es semiuniversal en/sobre A si $R(i, j) = \chi_A(j)$.

Estas definiciones nos serán útiles para presentar la generalización de manera más directa en el Capítulo 2. A continuación, desarrollamos algunos resultados iniciales.

Teorema 1.1

Sea R una relación binaria en un conjunto de mundos W no vacío. Entonces se satisfacen los siguientes enunciados:

1. Si R es reflexiva, entonces es serial.
2. Si R es simétrica, entonces es transitiva si y sólo si es euclidiana.

Demostración:

- 1** Sea R reflexiva. Para todo $i \in W$ tenemos que $R(i, i) = 1$. Esto es, para cada $i \in W$ existe un $j \in W$ (en particular $j = i$) tal que $R(i, j) = 1$. Esto significa que R es serial.
- 2** Sea R simétrica. Supongamos que R es transitiva, y sean $i, j, k \in W$ tales que $R(i, j) = R(i, k) = 1$. Por simetría $R(j, i) = 1$ y junto a $R(i, k) = 1$ por transitividad $R(j, k) = 1$. De esta forma, R es euclidiana. Para ver el recíproco, supongamos R euclidiana y sean $i, j, k \in W$ tales que $R(i, j) = R(j, k) = 1$. Por simetría $R(j, i) = 1$ y combinando con $R(j, k) = 1$ tenemos, por euclidianidad, $R(i, k) = 1$ que era lo que queríamos ver. □

Teorema 1.2

Sea R una relación binaria en un conjunto de mundos W no vacío. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. R es una equivalencia.
2. R es reflexiva y euclidiana.
3. R es serial, simétrica y euclidiana.
4. R es serial, simétrica y transitiva.

Demostración:

1 $\Rightarrow$ 2. Sea R una equivalencia. Entonces es reflexiva, simétrica y transitiva. Por el segundo punto del Teorema 1.1, es también euclidiana.

2 $\Rightarrow$ 3. Sea R reflexiva y euclidiana. Por el punto 1 del Teorema 1.1, es serial. Para ver que R es simétrica, sean $i, j \in W$ tales que $R(i, j) = 1$. Como R es reflexiva, tenemos que $R(i, i) = 1$. Como $R(i, j) = R(i, i) = 1$, por euclidianidad, tenemos que $R(j, i) = 1$, lo cual muestra que R es simétrica.

3 $\Rightarrow$ 4. Es consecuencia directa del segundo punto del Teorema 1.1 pues, bajo simetría, transitividad es equivalente a euclidianidad.

4 $\Rightarrow$ 1. Sea R serial, simétrica y transitiva. Para ver que R es una equivalencia, solo necesitamos ver que R es reflexiva. Sea $i \in W$. Por serialidad, existe $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$. Por simetría tenemos que $R(j, i) = 1$. Combinando $R(i, j) = R(j, i) = 1$, por transitividad tenemos que $R(i, i) = 1$ que era lo que queríamos ver pues i era arbitrario. $\square$

Teorema 1.3

Sea R una relación binaria en W , $A \subseteq W$ y R semiuniversal sobre A . Entonces se satisfacen los siguiente enunciados.

1. R es transitiva y euclidiana.
2. R es reflexiva si y sólo si R es universal.
3. R es simétrica si y sólo si R es universal o vacía.
4. R es serial si y sólo si R es semiuniversal no vacía.

Demostración:

- 1** Recordemos que una relación binaria R en W es semiuniversal en $A \subseteq W$ si $R(i, j) = \chi_A(j)$. Veamos que R es transitiva. Sean $i, j, k \in W$. Supongamos que $R(i, j) = R(j, k) = 1$. Esto quiere decir que $j, k \in A$. Como $k \in A$ tenemos que $R(i, k) = \chi_A(k) = 1$. Por otra parte, para ver que es euclidiano supongamos que $R(i, j) = R(i, k) = 1$. Esto significa que $j, k \in A$, lo que implica que $R(j, k) = \chi_A(k) = 1$ que era lo que queríamos demostrar.
- 2** Supongamos que R es reflexiva y semiuniversal. Por reflexividad de R tenemos que $R(i, i) = \chi_A(i) = 1$ para todo $i \in W$. Luego, para todo $i \in W$ tenemos que $i \in A$. Así para todo $i, j \in W$ tenemos que $R(i, j) = \chi_A(j) = 1$ y por lo tanto R es universal. El recíproco es trivial.
- 3** Sea R simétrica y semiuniversal. Como es semiuniversal, existe un $A \subseteq W$ tal que $R(i, j) = \chi_A(j)$. Supongamos que para algún $i \in W$ no existe $j \in A$ tal que $R(i, j) = 1$. Tenemos entonces que necesariamente $A = \emptyset$ pues $R(i, j) = R(j, i) = 0 = \chi_A(i) = \chi_A(j)$ para todo $i \in W$. Si existe un $j \in A$ tal que

$R(i, j) = 1$ tenemos que $i \in A$ por el mismo análisis. Luego $A = W$ y $R(i, j) = 1$ para todo $i, j \in W$. El recíproco es nuevamente trivial.

- 4 Sea R serial y semiuniversal. Por semiuniversalidad, siguiendo el razonamiento del punto anterior tenemos que $A \neq \emptyset$ por serialidad de R . Esto basta para concluir que $R(i, j) = \chi_A(j)$ con $\emptyset \subsetneq A \subseteq W$. El recíproco se obtiene de notar que si $R(i, j) = \chi_A(j)$ con A no vacío, y sea $j \in A$, entonces $R(i, j) = \chi_A(j) = 1$ para todo $i \in W$ y R es serial por definición. $\square$

Por último, veremos un teorema sobre relaciones de equivalencia con estas nuevas interpretaciones de R . La demostración está desarrollada en el anexo.

Teorema 1.4

Sea R una relación de equivalencia en W . Definimos para cada $i \in W$ su clase de equivalencia $[i] = \{j \in W : R(i, j) = 1\}$. Entonces

1. $i \in [i]$ para todo $i \in W$.
2. Las clases de equivalencia particionan W .
3. R es universal en $[i]$ para cada $i \in W$. Esto es, $R|_{[i] \times [i]} = 1$ para todo $(j, k) \in [i] \times [i]$.

Demostración:

Ver Anexo 5.1. $\square$

1.2. El principio. Lenguaje y definiciones

Para formalizar los sistemas lógicos, el primer paso suele ser la definición de un lenguaje proposicional. El lector familiarizado con la lógica proposicional clásica puede notar ciertas diferencias respecto de las definiciones habituales (como la distinción entre vocabulario y lenguaje). Sin embargo, dadas las necesidades y el enfoque de este trabajo, adoptamos el lenguaje modal básico presentado en [6], que resulta suficiente para nuestro desarrollo. Para una exposición más completa del lenguaje proposicional, recomendamos consultar [14].

Definición 1.3

El lenguaje modal básico consiste en:

- Las variables proposicionales $p_0, p_1, \dots$
- Las constantes proposicionales

- 0 ,
- 1 .
- Los conectivos proposicionales
 - $\neg$ (negación),
 - $\wedge$ (conjunción),
 - $\vee$ (disyunción),
 - $\rightarrow$ (condicional),
 - $\leftrightarrow$ (bicondicional).
- Los operadores modales
 - $\Box$,
 - $\Diamond$.
- Símbolos auxiliares (,)

Como en los sistemas lógicos clásicos, en los sistemas lógicos modales las fórmulas también se construyen de manera recursiva como mostramos a continuación.

Definición 1.4

Las fórmulas del lenguaje modal básico se definen mediante reglas de formación de la siguiente forma:

1. Toda variable proposicional p_i es una fórmula.
2. 0 y 1 son fórmulas.
3. Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ es una fórmula.
4. Si $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ φ y ψ son fórmulas, entonces $(\varphi * \psi)$ es una fórmula.
5. Si φ es una fórmula, entonces $\Box\varphi$ y $\Diamond\varphi$ son fórmulas.
6. Cualquier otra expresión que no se haya construido mediante una aplicación de un número finito de veces de las reglas anteriores no es una fórmula.

Denotaremos por Var al conjunto de variables proposicionales y por $Form^4$ al

⁴Según la literatura consultada, es posible encontrarse con una diferencia respecto a que es el conjunto $Form$. Ciertos autores denotan por $Form$ al conjunto de fórmulas clásicas y diferencian al conjunto de fórmulas modales agregando un subíndice que puede ser cualquier operador modale como $\Box$ y $\Diamond$, $Form_{\Box}$.

conjunto de fórmulas modales.

Algunas fórmulas modales que aparecerán en el desarrollo de este trabajo tienen nombres específicos con los cuales nos referiremos a ellas. Las mencionamos a continuación.

- Fórmula (K) (Normalidad):

$$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$$

- Fórmula (D):

$$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$$

- Fórmula (T):

$$\Box\varphi \rightarrow \varphi$$

- Fórmula (B):

$$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$$

- Fórmula (4):

$$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$$

- Fórmula (5):

$$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$$

- Fórmula (DUAL):

$$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$$

Estos nombres son estándar en la literatura. Aún así, la fórmula en sí puede variar pues en los sistemas clásicos siempre *vale* (según la Definición 1.10) la fórmula (DUAL). Considerando esto, la fórmula puede reescribirse en términos del operador dual. Por ejemplo $\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ es la fórmula dual de (4). Retomaremos más adelante estas fórmulas.

1.3. Semántica del lenguaje modal

La semántica mediante la que interpretamos el lenguaje del sistema lógico está basada en una relación binaria sobre un conjunto de mundos no vacío, que llamaremos *relación de accesibilidad*. Esta va a ser la herramienta que nos va a permitir definir los valores de verdad de los operadores modales. Así, introducimos a continuación las nociones de marcos y modelos de Kripke presentadas en [13].

Definición 1.5

Un **marco de Kripke** para el lenguaje modal básico es un par $F = \langle W, R \rangle$ donde

- W es un conjunto no vacío de *mundos*.
- R es una relación de *accesibilidad* binaria en W .

Dados dos mundos $i, j \in W$ y $F = \langle W, R \rangle$, diremos que j es **accesible** desde i si y sólo si $R(i, j) = 1$.

Es importante notar que a partir de ahora la relación R que antes era evaluada en un conjunto $\{0, 1\}$ sin estructura ahora va a ser evaluada sobre

$\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, 0, 1)$, el álgebra de Boole de dos elementos.

Si $x, y \in \mathbf{2}$, interpretamos a los conectivos $x \vee y$ y $x \wedge y$ como máximo y mínimo respectivamente y a $\neg x$ como la operación de $1 - x$. $A \rightarrow y$ y $A \leftrightarrow y$ las interpretamos como las abreviaciones usuales. Sin embargo, hay otras formas de definir los operadores tomando como primitivos, por ejemplo, a la implicación y la negación. Durante este capítulo es posible que tomemos como primitivos (es decir, conectivos mediante los cual definamos el resto) a los que resulten convenientes para cada demostración. Para más profundidad sobre álgebras de Boole recomendamos leer [4].

Definición 1.6

Un **modelo de Kripke** para el lenguaje modal básico es una terna $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ donde

- $\langle W, R \rangle$ es un marco de Kripke.
- $\hat{e} : Var \times W \rightarrow \mathbf{2}$ es una función que asigna a cada par de variable proposicional y mundo un valor de verdad. Esta función la llamaremos **evaluación**.

La función evaluación no está restringida a evaluar las variables solamente. Por resultados del álgebra universal, como $Form$ (sin considerar las fórmulas modales) es un álgebra libre generada por Var , la evaluación puede extenderse por inducción de manera única como morfismo al dominio $Form \times W$ interpretando a los símbolos lógicos como los correspondientes conectivos en el álgebra $\mathbf{2}$ y a las constantes tal que $\hat{e}(0, i) = 0$ y $\hat{e}(1, i) = 1$ para todo $i \in W$. Parte de la expresividad de los sistemas lógicos modales se encuentra en como se definen las evaluaciones de los operadores caja $\Box$ y diamante $\Diamond$. Para las fórmulas con conectivo principal una modalidad extendemos la función evaluación a fórmulas modales de la siguiente forma.

Definición 1.7

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo de Kripke. Sean $i \in W$ y $\varphi \in Form$. Entonces las evaluaciones de $\Box\varphi$ y $\Diamond\varphi$ en i se definen como

$$\hat{e}(\Box\varphi, i) = 1 \iff \text{para todo } j \in W \text{ con } R(i, j) = 1 \text{ se tiene que } \hat{e}(\varphi, j) = 1$$

y

$$\hat{e}(\Diamond\varphi, i) = 1 \iff \text{existe un } j \in W \text{ con } R(i, j) = 1 \text{ tal que } \hat{e}(\varphi, j) = 1.$$

Observación 1.2

Comentamos, respecto a las definiciones de las evaluaciones de las modalidades $\Box$ y $\Diamond$, que hay formas de definirlas que generalizan a las dadas en la Definición 1.7 y usaremos en otros capítulos.

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo de Kripke. Entonces se pueden definir las evaluaciones de $\Box\varphi$ y $\Diamond\varphi$ para $\varphi \in Form$ en el mundo i como

$$\hat{e}(\Box\varphi, i) = \bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(\varphi, j))$$

y

$$\hat{e}(\Diamond\varphi, i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) \wedge \hat{e}(\varphi, j)).$$

Notemos que estas definiciones coinciden con las dadas en la Definición 1.7. En el caso de $\Box$, para $j \in W$, si $R(i, j) = 0$, como $0 \rightarrow x = 1$ y $1 \rightarrow x = x$ siempre en el álgebra $\mathbf{2}$, podemos reescribir

$$\bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(\varphi, j)) = \bigwedge_{\substack{j \in W \\ R(i, j) = 1}} \hat{e}(\varphi, j)$$

que evalúa como 1 si y sólo si $\hat{e}(\varphi, j) = 1$ para todo $j \in W$ con $R(i, j) = 1$ que es la definición usual.

Para el caso de $\Diamond$, si $R(i, j) = 0$ como $0 \wedge x = 0$ y $1 \wedge x = x$ siempre en $\mathbf{2}$, tenemos que podemos reescribir

$$\bigvee_{j \in W} (R(i, j) \wedge \hat{e}(\varphi, j)) = \bigvee_{\substack{j \in W \\ R(i, j) = 1}} \hat{e}(\varphi, j)$$

que es 1 si y sólo si existe algún $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$ y $\hat{e}(\varphi, j) = 1$.

De la definición de modelos de Kripke que tenemos la siguiente convención: si $F = \langle W, R \rangle$ es un marco de Kripke, entonces dada una evaluación $\hat{e}$ para ese marco, escribiremos indiferentemente $\langle F, \hat{e} \rangle = \langle \langle W, R \rangle, \hat{e} \rangle = \langle W, R, \hat{e} \rangle$. Nos referiremos

indiferentemente a $\hat{e}$ ya sea la función definida en $Var \times W$ o su extensión única.

A continuación, definimos cuando una fórmula φ es verdadera en un punto en un modelo de Kripke.

Definición 1.8

Sea un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ e $i \in W$. La fórmula φ es **verdadera** en i si

$$\mathcal{M}, i \Vdash \varphi \iff \hat{e}(\varphi, i) = 1$$

y denotaremos $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi$.

Resaltamos otras observaciones relevantes al hecho que a partir de ahora trabajaremos con el álgebra de Boole de dos elementos. Por un lado, notemos que la negación es involutiva. Esto es, $\neg\neg x = x$ para cualquier x en el álgebra. Por otro lado, se satisface el Teorema de la deducción. Este afirma en nuestro contexto, dadas dos fórmulas φ, ψ , un modelo de Kripke $\mathcal{M}$ y un mundo i en el modelo, que probar

$\mathcal{M}, i \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ es equivalente a probar que $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi$ implica que $\mathcal{M}, i \Vdash \psi$.

En términos de las evaluaciones, probar que $\hat{e}(\varphi \rightarrow \psi, i) = \hat{e}(\varphi, i) \rightarrow \hat{e}(\psi, i) = 1$ es equivalente a probar que $\hat{e}(\varphi, i) = 1$ implica $\hat{e}(\psi, i) = 1$. Estas observaciones aparecerán de manera recurrente en demostraciones durante este capítulo pues simplifican el trabajo.

Puede suceder que fijemos nuestra atención en el marco subyacente de un modelo de Kripke. Esto es, enfocarnos en el marco de Kripke que lo compone. En estos casos diremos que un modelo $\mathcal{M}$ está **basado** en el marco $F = \langle W, R \rangle$ si y sólo si $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ para alguna evaluación $\hat{e}$. Esto es, el marco **subyacente** del modelo $\mathcal{M}$ es F .

Tenemos aparte un teorema que expresa la dualidad entre los dos operadores modales.

Teorema 1.5

Sea $\varphi \in Form$ y un modelo de Kripke $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$. Entonces para todo $i \in W$ valen

- $\mathcal{M}, i \Vdash \Box\varphi \iff \mathcal{M}, i \Vdash \neg\Diamond\neg\varphi$
- $\mathcal{M}, i \Vdash \Diamond\varphi \iff \mathcal{M}, i \Vdash \neg\Box\neg\varphi$

Demostración:Ver Anexo 5.2. □

Comentamos algunos hechos que surgen de estas definiciones que pueden parecer poco intuitivos pero son importantes.

Observación 1.3

Dada una fórmula φ , un modelo de Kripke $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ e $i \in W$, entonces se satisfacen los siguientes:

1. Si no existe $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$ entonces la fórmula $\Box\varphi$ es vacuamente verdadera en i para cualquiera φ . Esto se debe a que la definición del operador $\Box$ utiliza un cuantificador universal: si no hay mundos accesibles desde i , la condición “para todo j ” queda satisfecha automáticamente. Además, debido a esto, puede suceder que $\Box\varphi$ sea verdadera en i mientras que φ no.
2. Si no existe $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$ entonces la fórmula $\Diamond\varphi$ no es verdadera en i para ninguna φ en consecuencia de la definición de verdad del operador $\Diamond$. Razonando similarmente a la observación anterior, la verdad de φ en i no asegura la verdad de $\Diamond\varphi$ en el mismo punto.

Ahora, vamos a generalizar estas nociones de verdad a modelos y clases de modelos.

Definición 1.9

Una fórmula φ se dice **verdadera en un modelo de Kripke** $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$, que denotaremos como $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ si y sólo si para todo $i \in W$ se satisface que $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi$.

Definición 1.10

Una fórmula φ es **válida** en una clase de modelos $\mathcal{C}$ si es verdadera en cada modelo perteneciente a la clase. Escribiremos:

- $\mathcal{C} \models \varphi$ si φ es válida en $\mathcal{C}$.
- $\models \varphi$ si φ es válida en la clase de todos los modelos.

La noción de validez puede extenderse a marcos, pensando en los modelos que los tienen como marcos subyacentes.

Definición 1.11

Si F es un marco, decimos que una fórmula φ es **válida** en F , lo cual denotaremos por $F \models \varphi$ si para todo modelo $\mathcal{M}$ basado en F tenemos que $\mathcal{M} \models \varphi$.

Por otra parte, si $\mathcal{F}$ es una clase de marcos, decimos que la fórmula φ es **válida** en $\mathcal{F}$ lo cual denotaremos como $\mathcal{F} \models \varphi$ si para todo $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $F \models \varphi$.

1.4. Correspondencias entre fórmulas y propiedades de la relación de accesibilidad

En esta sección fijamos nuestra atención en clases de marcos que validan ciertas fórmulas particulares. A continuación, presentamos fórmulas particulares que mencionamos al principio del capítulo.

Teorema 1.6

Sean $F = \langle W, R \rangle$ un marco y $\varphi \in Form$. Entonces:

1. La fórmula (D) $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R es serial.
2. La fórmula (T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ es válida en F si y sólo si R es reflexiva.
3. La fórmula (B) $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R es simétrica.
4. La fórmula (4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ es válida en F si y sólo si R es transitiva.
5. La fórmula (5) $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R es euclidiana.

Demostración:

- 1** Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo basado en F . Sea $i \in W$. Supongamos que

$$\mathcal{M}, i \models \Box\varphi. \tag{1}$$

Esto sucede si y sólo si para todo $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$ se tiene que $\mathcal{M}, j \models \varphi$. Por serialidad de R existe al menos un k tal que $R(i, k) = 1$, y por (1) sabemos que $\mathcal{M}, k \models \varphi$. Por lo tanto $\mathcal{M}, i \models \Diamond\varphi$.

Por otro lado, por contrarrecíproco sea R no serial y $\mathcal{M}$ algún modelo basado en F . Como R no es serial, existe algún $i \in W$ tal que $R(i, j) = 0$ para todo $j \in W$. Por la Observación 1.3 que dice que $\Box\varphi$ es verdadera en un punto si a este no accede ningún otro punto, tenemos que $\mathcal{M}, i \models \Box\varphi$ pero $\mathcal{M}, i \not\models \Diamond\varphi$. Luego tenemos entonces que (D) no es verdadera en $\mathcal{M}$ y por lo tanto $F \not\models \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ que era lo que queríamos demostrar.

2 Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ algún modelo basado en F y sea $i \in W$. Supongamos que

$$\mathcal{M}, i \Vdash \Box\varphi \quad (2)$$

lo cual sucede si y sólo si para todo $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$ se tiene que $\mathcal{M}, j \Vdash \varphi$. Por reflexividad de R tenemos que $R(i, i) = 1$, y combinando esto con (2) tenemos que $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi$ que era lo que queríamos ver.

Sea R no reflexiva. Entonces existe un $j \in W$ tal que $R(j, j) = 0$. Sea p una variable. Consideremos la evaluación $\hat{e}$ particular tal que $\hat{e}(p, j) = 0$ y para todo $i \neq j$ en W , $\hat{e}(p, i) = 1$. Ahora, consideremos el marco equipado con esta evaluación $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$. En este modelo tenemos que $\mathcal{M}, j \Vdash \Box p$ pues $\mathcal{M}, i \Vdash p$ para todo $i \neq j$. Sin embargo, también $\mathcal{M}, j \nVdash p$ y por lo tanto en j obtenemos que $\mathcal{M}, j \nVdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$. De esto último concluimos que $F \nVdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$ que era lo que queríamos probar. Notemos que si $W = \{j\}$ entonces la condición $\mathcal{M}, j \Vdash \Box p$ se cumple por la Observación 1.3 y la conclusión se mantiene.

3 Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo basado en F , e $i \in W$. Supongamos que

$$\mathcal{M}, i \Vdash \varphi. \quad (3)$$

Aquí pueden suceder dos casos. Si no existe $j \in W$ tal que cumpla que $R(i, j) = 1$, por vacuidad tenemos que

$$\mathcal{M}, i \Vdash \Box\Diamond\varphi \quad (4)$$

con lo cual finaliza la prueba para ese caso. Supongamos entonces que existe un mundo $k \in W$ tal que $R(i, k) = 1$. Por simetría $R(k, i) = 1$. Veamos que sucede entonces con (4). Por definición del operador modal $\Box$, tenemos que (4) se satisface si y sólo si para todo l tal que $R(i, l) = 1$ se cumple que $\mathcal{M}, l \Vdash \Diamond\varphi$, y esto ocurre si y sólo si existe algún j con $R(l, j) = 1$ tal que $\mathcal{M}, j \Vdash \varphi$. Pero notemos que aquí j puede ser i por simetría de la relación. Luego $\mathcal{M}, i \Vdash \Box\Diamond\varphi$.

Supongamos R no simétrica. Esto es, existen $i, j \in W$ tal que $R(i, j) \neq R(j, i)$. Sin pérdida de generalidad suponemos $R(i, j) = 1$. Consideremos alguna variable p . Ahora, vamos a construir un modelo con la siguiente evaluación $\hat{e}$: $\hat{e}(p, i) = 1$, $\hat{e}(p, j) = 0$ y para todo $l \in W$ tal que $R(j, l) = 1$ fijamos $\hat{e}(p, l) = 0$.⁵ Si $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$, entonces $\mathcal{M}, i \Vdash p$ y además $\mathcal{M}, i \nVdash \Box\Diamond p$ pues existe j tal que $R(i, j) = 1$ y $\mathcal{M}, j \nVdash \Diamond p$ porque para todo $l \in W$ accesible desde j se tiene que $\mathcal{M}, l \nVdash p$. Concluimos entonces que en general $F \nVdash \varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$.

⁵No es necesario fijar la evaluación en el resto de puntos de W .

4 Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo basado en F e $i \in W$. Supongamos que

$$\mathcal{M}, i \Vdash \Box\varphi \quad (5)$$

Veamos que sucede con la fórmula $\Box\Box\varphi$ en i . Esta fórmula es cierta en i si y sólo si para todo j tal que $R(i, j) = 1$ se tiene que $\mathcal{M}, j \Vdash \Box\varphi$, y esto es si y sólo si para todo k tal que $R(j, k) = 1$ se cumple que $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi$. Ahora, para los j de la primera condición y k (que dependen de los j) de la segunda, tenemos que $R(i, j) = R(j, k) = 1$. Por transitividad, los k deben satisfacer $R(i, k) = 1$. Luego, las dos condiciones en conjunto son equivalentes a que los k tales que $R(i, k) = 1$ satisfagan $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi$. Por (5) lo hacen. Luego $\mathcal{M}, i \Vdash \Box\Box\varphi$.

Pero por transitividad de R tendríamos que esto se resume en que para todo k tal que $R(i, k) = 1$ se cumple que $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi$ lo cual era la hipótesis que asumimos en (5).

Sea R no transitiva. Esto significa que existen $i, j, k \in W$ tal que $R(i, j) = R(j, k) = 1$ pero $R(i, k) = 0$. Tomemos la variable p . Ahora, consideremos la evaluación $\hat{e}$ que consiste en, para todos los $l \in W$ tal que $R(i, l) = 1$, la fijamos en $\hat{e}(p, l) = 1$. Aparte, también fijamos $\hat{e}(p, k) = 0$. En el modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$, tenemos que $\mathcal{M}, i \Vdash \Box p$ pero $\mathcal{M}, i \nVdash \Box\Box p$ pues existe el mundo j tal que $R(i, j) = 1$ y $\mathcal{M}, j \nVdash \Box p$. Esto es porque existe k tal que $R(j, k) = 1$ y $\mathcal{M}, k \nVdash p$. Luego, en general $F \nVdash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$.

5 Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ basado en F e $i \in W$. Supongamos que

$$\mathcal{M}, i \Vdash \Diamond\varphi \quad (6)$$

Analicemos que sucede con la fórmula $\Box\Diamond\varphi$. $\mathcal{M}, i \Vdash \Box\Diamond\varphi$ si y sólo si para todo j tal que $R(i, j) = 1$ se cumpla que $\mathcal{M}, j \Vdash \Diamond\varphi$. Sin embargo, esta condición siempre va a suceder. Por euclidianidad, si algún j está relacionado con i , tendríamos que $R(i, j) = R(j, j) = 1$ y esto implica que $R(j, j) = 1$. Así, se garantiza que siempre exista un mundo en W accesible desde cualquier j accesible desde i que cumpla $\mathcal{M}, j \Vdash \varphi$.

Sea R no euclidiana. Esto es, existen $i, j, k \in W$ tales que $R(i, j) = R(i, k) = 1$ pero $R(j, k) = 0$. Consideremos la fórmula que consiste en la variable p y la siguiente evaluación $\hat{e}$ donde $\hat{e}(p, j) = 1$ y para $l \in W, l \neq j$, fijamos $\hat{e}(p, l) = 0$. Si consideramos el punto i en el modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$, tenemos que $\mathcal{M}, i \Vdash \Diamond p$ vale pues existe j tal que $R(i, j) = 1$ y $\mathcal{M}, j \Vdash p$. Sin embargo, $\mathcal{M}, i \nVdash \Box\Diamond p$ porque existe k con $R(i, k) = 1$ y $\mathcal{M}, k \nVdash \Diamond p$, y esto sucede ya que no existe ningún punto accesible desde k donde la evaluación de p sea 1 por la definición de la evaluación y la hipótesis de R no euclidiana. Así, tenemos que en general

$$F \not\models \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi.$$

□

1.5. Lógicas modales normales

Para el lector que no tenga presentes conceptos básicos del cálculo proposicional clásico (como lo que significa que un conjunto de fórmulas sea cerrado por sustituciones o modus ponens), recomendamos [14].

La siguiente definición es puramente semántica, y este modo de abordar las lógicas se desarrolla en [2]. En [12] se analizan con mayor detalle las consecuencias de esta perspectiva y su relación con las definiciones sintácticas tradicionales. Para los objetivos y el enfoque de este trabajo, trabajar únicamente en el plano semántico resulta suficiente.

Definición 1.12

Un conjunto $\Lambda \subseteq \text{Form}$ de fórmulas modales se llama **una lógica modal determinada por una clase de marcos** si existe una clase de marcos $\mathcal{C}_\Lambda$ tal que

$$\Lambda = \{\varphi \in \text{Form} : \mathcal{M} \models \varphi \text{ para todo } \mathcal{M} \text{ con marco subyacente } F, F \in \mathcal{C}_\Lambda\}.$$

En particular una lógica modal Λ cumple que

1. Λ contiene todas las tautologías de la lógica clásica.
2. Λ es cerrado por sustituciones.
3. Λ es cerrado por modus ponens.

Notamos que hay otras definiciones de lógica modal tanto del punto de vista semántico como sintáctico que no serán abordados en este trabajo. Para leer sobre alguna de ellas sugerimos consultar [2].

Definimos también un tipo particular de lógica modal, las normales⁶.

Definición 1.13

Una lógica modal Λ se llama **lógica modal normal** si

1. Λ contiene a (K).
2. Λ contiene a (DUAL).
3. Λ es cerrada por necesidad: si $\varphi \in \Lambda$ entonces $\Box\varphi \in \Lambda$.

⁶El nombre viene del hecho que la fórmula (K) suele llamarse fórmula de normalidad.

Denotamos a la menor lógica modal normal en el sentido de la inclusión por K . La menor lógica modal normal que contiene a las fórmulas extra $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ la denotamos por $K\varphi_1 \dots \varphi_n$.

Recordando las fórmulas con las que trabajamos en la sección anterior (en el Teorema 1.6), presentamos en el siguiente ejemplo algunas lógicas modales normales recurrentes en la literatura (para más detalles sobre estos ejemplos consultar [2, 11]).

Ejemplo 1.1

Veamos algunas de las lógicas modales normales más importantes.

- **K5** es la menor lógica modal normal que contiene a (5).
- **K45** es la menor lógica modal normal que contiene a (4) y (5).
- **KB4** (= **KB5**) es la menor lógica modal normal que contiene a (B) y (4).
- **KD45** es la menor lógica modal normal que contiene a (D), (4) y (5).
- **KT5** es la menor lógica modal normal que contiene a (T) y (5).
- **S5** := **KT5** = **KTB4** = **KDB4** = **KDB5**.

Cuando escribimos **KB4=KB5** o **KT5 = KTB4 = KDB4 = KDB5** justificamos esto fuertemente en el Teorema 1.6 y las equivalencias dadas por el Teorema 1.1 sobre marcos simétricos transitivos y marcos simétricos euclidianos y por el Teorema 1.2 sobre relaciones de equivalencia, las que en conjunto nos permiten trabajar indiferentemente con las lógicas.

Observación 1.4

Notemos que en todas las lógicas modales normales (K) es válido. Es más, (K) vale en todos los marcos de Kripke (ver Anexo 5.3). Este no es un hecho menor. Esto sucede porque las evaluaciones se hacen en **2**, en otros casos la fórmula podría no satisfacerse. Algunos de estos casos serán objeto de estudio del Capítulo 2.

Decimos que una lógica modal normal está **determinada** por un modelo, clase de modelos, marco o clase de marcos si y sólo si todas y solamente las fórmulas de esa lógica son válidas allí. Otra cuestión terminológica que adoptamos es la siguiente: cuando hablemos, por ejemplo, de la clase de marcos reflexivos (o de cualquier propiedad de relaciones binarias), nos estaremos refiriendo a la clase de marcos cuya relación de accesibilidad posee dicha propiedad. Con estas nociones, junto con el

ejemplo anterior y recordando el Teorema 1.6, podemos enunciar lo siguiente.

Ejemplo 1.2

Como corolario de las definiciones y del ejemplo anterior tenemos lo siguiente.

- **K** está determinada por la clase de todos los marcos de Kripke.
- **K5** está determinada por la clase de todos los marcos euclidianos.
- **K45** está determinada por la clase de todos los marcos transitivos y euclidianos.
- **KB4** (= **KB5**) está determinada por la clase de todos los marcos simétricos y transitivos (o simétricos y euclidianos).
- **KD45** está determinada por la clase de todos los marcos seriales, transitivos y euclidianos.
- **S5** está determinada por la clase de todos los marcos reflexivos y euclidianos.

1.6. Los marcos *simplificados*

En esta sección vamos a presentar los marcos simplificados. La idea con esta clase de marcos es ver que en algún sentido son bloques de construcción de marcos con propiedades más generales. El objetivo es intentar conseguir una representación de clases de marcos particulares mediante una descomposición a través de marcos simplificados. Para ello utilizaremos técnicas que generalizaremos en el capítulo 3.

Definición 1.14

Un **marco simplificado** es un marco $F = \langle W, R \rangle$ donde R es semiuniversal en $A \subseteq W$.

Notemos que la definición admite como marcos simplificados a los universales y vacíos. Denotaremos a estos marcos como $F = \langle W, A \rangle$, donde A es el subconjunto sobre el cual son semiuniversales.

Similar al caso general, en el caso de marcos simplificados también podemos construir modelos simplificados basados en estos.

Definición 1.15

Para un marco simplificado $F = \langle W, A \rangle$ un **modelo simplificado** es una terna $\mathcal{M} = \langle W, A, \hat{e} \rangle$ con una evaluación definida de la misma forma que para modelos en general.

Naturalmente, simplificar los marcos determina de manera más sencilla las evaluaciones de los operadores modales.

Observación 1.5

Para un modelo simplificado $\mathcal{M} = \langle W, A, \hat{e} \rangle$ las definiciones de verdad de operadores modales quedan determinadas de la siguiente forma:

- $\mathcal{M}, i \Vdash \Box \varphi \iff \forall j \in A \text{ se tiene que } \mathcal{M}, j \Vdash \varphi.$
- $\mathcal{M}, i \Vdash \Diamond \varphi \iff \exists j \in A \text{ tal que } \mathcal{M}, j \Vdash \varphi.$

Notemos que en la observación anterior las definiciones de verdad no dependen del punto i lo cual muestra en cierta medida nuevamente como todo depende solo de la segunda coordenada de la relación de accesibilidad $R(i, j)$.

En nuestro objetivo de descomponer marcos generales ⁷(no todos los marcos, si no clases particulares), definimos algunas clases de marcos simplificados que aparecerán a lo largo de la sección.

Definición 1.16

Denotaremos a los siguientes clases como se detalla:

- $Sim = \{ \langle W, A \rangle \mid W, A \subseteq W \text{ son conjuntos de mundos} \}.$
- $Univ = \{ \langle W, W \rangle \mid W \text{ es un conjunto de mundos} \}.$
- $Emp = \{ \langle W, \emptyset \rangle \mid W \text{ es un conjunto de mundos} \}.$

Definición 1.17

Un marco simplificado $F = \langle W, A \rangle$ se dice **normalizado** si existe un $j \in W$ tal que $\chi_A(j) = 1$ (o equivalentemente $A \neq \emptyset$). Esto es, la relación semiuniversal es en particular serial.

⁷trabajaremos en general con algunas de las clases presentadas en el Ejemplo 1.1.

Para empezar a estudiar estos marcos, comencemos con el siguiente teorema que afirma propiedades de los marcos simplificados. Esto es consecuencia del Teorema 1.3 que muestra que las relaciones semiuniversales son transitivas y euclidianas. Sin embargo, el siguiente teorema también muestra que la clase *Sim* es propia respecto a la clase de marcos transitivos y euclidianos.

Teorema 1.7

Todos los marcos simplificados son transitivos y euclidianos. Sin embargo, no siempre un marco transitivo y euclidiano es semiuniversal.

Demostración:

Para ver que no todo marco transitivo y euclidiano es simplificado, consideremos el siguiente marco $W = \{i, j\}$ con $R(i, i) = R(j, j) = 1$ y $R(i, j) = R(j, i) = 0$.



Claramente no es semiuniversal pues $R(i, j) = 0 \neq 1 = R(j, j)$. Sin embargo, es transitivo y euclidiano.

□

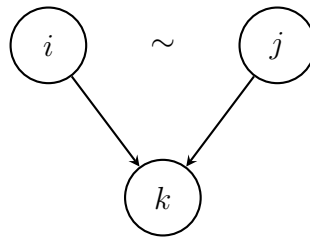
A continuación, introducimos una relación de utilidad a lo largo del trabajo.

Definición 1.18

Sean $i, j \in W$ y $F = \langle W, R \rangle$ un marco de Kripke. Diremos que

$i \sim j$ en W si y sólo si existe $k \in W$ tal que $R(i, k) = R(j, k) = 1$.

Gráficamente, podemos pensar en el siguiente esquema



donde dos puntos están relacionados si acceden a un mismo mundo.

Si queremos particionar W con el objetivo de descomponer el marco F y que cada parte sea un marco simplificado, necesitamos que $\sim$ sea de equivalencia (por el Teorema 1.4). Sin embargo, nos encontramos con un problema inmediatamente. Si la relación R no es serial (como podría ser si el marco fuese solo transitivo y euclidiano) puede suceder que $\sim$ no sea una equivalencia. Pero vamos a circunnavegar el problema de la siguiente forma. Notemos lo siguiente.

Definición 1.19

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco de Kripke. Sea $i \in W$. Si para todo $j \in W$ se tiene que $R(i, j) = R(j, i) = 0$ diremos entonces que i es un **punto aislado** de F .

Observación 1.6

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco euclidiano. Sea $i \in W$ fijo. Si $R(i, u) = 0$ para todo $u \in W$ entonces $R(u, i) = 0$ para todo $u \in W$. Esto implica que i es un punto aislado del marco.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco transitivo y euclidiano. Sea $i \in W$ tal que $R(i, u) = 0$ para todo $u \in W$ y supongamos por el absurdo que $R(u, i) = 1$. Por euclidianidad tendríamos que como $R(u, i) = R(u, i) = 1$ entonces $R(i, i) = 1$ lo cual es falso. Luego debe ser que $R(u, i) = 0$ para todo $u \in W$ e i es un punto aislado de F . $\square$

Consideremos ahora el conjunto $Isol(F)$ de puntos aislados de un marco F transitivo y euclidiano

$$Isol(F) = \{i \in W : i \text{ es un punto aislado de } F\}.$$

Si excluimos a este conjunto del universo W tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 1.8

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco de Kripke transitivo y euclidiano y sea $\sim$ la relación dada en la Definición 1.18. Entonces la restricción de $\sim$ a $W \setminus Isol(F)$ es de equivalencia.

Las siguientes observaciones deberían dar luz a algunas cuestiones relacionadas a $\sim$ antes de demostrar el teorema principal.

Observación 1.7

Notar que si el marco F es serial tenemos que $Isol(F) = \emptyset$ y por lo tanto $\sim$ es una equivalencia sobre todo W .

Esta observación permite un análisis más sencillo de los marcos transitivos y euclidianos que en particular sean seriales.

Observación 1.8

Sean $i, j \in W \setminus Isol(F)$, donde F es un marco transitivo y euclidiano,

- si $i \approx j$ entonces necesariamente $R(i, j) = 0$.
- si $i \sim j$ entonces para todo $u \in W$ tenemos que $R(i, u) = R(j, u)$.

En el Capítulo 3 presentaremos una versión más general de esta observación, cuya demostración posponemos por el momento debido a su similitud con la actual.

Veamos que $\sim$ es una equivalencia sobre $W \setminus Isol(F)$.

Demostración Teorema 1.8:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco transitivo y euclidiano. Sea $i \in W \setminus Isol(F)$. Claramente $i \sim i$ por la definición de $\sim$, pues si no debe ser que $R(i, u) = 0$ para todo $u \in W$ y por la Observación 1.6 tendríamos que $R(u, i) = 0$ lo cual a su vez implica que $i \in Isol(F)$. Absurdo, luego $i \sim i$.

Sean $i, j \in W \setminus Isol(F)$ tales que $i \sim j$. Como la condición de la relación es simétrica tenemos que $j \sim i$.

Por último, para ver que es transitiva, sean $i, j, k \in W \setminus Isol(F)$ tales que $i \sim j$ y $j \sim k$. Sea $v \in W$ tal que $R(j, v) = R(k, v) = 1$. Por la Observación 1.8 tenemos que como $i \sim j$ y $j \sim k$

$$R(i, u) = R(j, u) = R(k, u) \text{ para todo } u \in W.$$

De esto se sigue que $i \sim k$ y $\sim$ es transitiva. Luego $\sim$ es una equivalencia. $\square$

Observación 1.9

Si el marco F transitivo y euclidiano es además simétrico, tenemos que la condición de $\sim$ se reduce a que $i \sim j$ si y sólo si $R(i, j) = 1$. Esto implica que R restringida a una clase de equivalencia es universal.

Lo que resulta importante de la partición inducida por esta equivalencia es que podemos expresar a la relación dentro de cada clase de equivalencia como función de la segunda coordenada. Esto es

Teorema 1.9

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco transitivo y euclidiano, y sea W_i la clase de equivalencia de $i \in W \setminus Isol(F)$ en $\sim$. Entonces el marco dado por $F_i = \langle W_i, R|_{W_i \times W_i} \rangle$ es semiuniversal normalizado. Esto es, existe un conjunto $A_i \subseteq W_i$ tal que

$$R|_{W_i \times W_i}(j, k) = \chi_{A_i}(k)$$

y un $u \in W$ tal que $\chi_{A_i}(u) = 1$.

Previo a demostrar el teorema, observamos que la condición $W \neq Isol(F)$ es importante si bien no está contemplada en el teorema. Si $W = Isol(F)$ entonces no hay ningún punto donde $\sim$ sea una equivalencia y el teorema no tiene sentido. Sin embargo decimos que R es semiuniversal vacía en ese caso.

Demostración:

Este teorema es principalmente consecuencia de la Observación 1.8. Esto es, si $j, k \in W_i$ tenemos que $R(j, u) = R(k, u)$ para todo $u \in W$. Es razonable entonces definir A_i como

$$A_i = \{k \in W_i : R(l, k) = 1 \text{ para todo } l \in W_i\}.$$

Así, obtenemos que

$$R|_{W_i \times W_i}(l, k) = \chi_{A_i}(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in A_i, \\ 0, & \text{si } k \notin A_i. \end{cases}$$

La Observación 1.8 garantiza la buena definición (esto es, la independencia del representante de clase, pues A_i no depende del i . Si tomáramos otro representante j de W_i la definición de A_j es la misma que la de A_i). Esto muestra que $R|_{W_i \times W_i}$ es semiuniversal. Es además normalizado pues como $\sim$ es reflexiva, existe un $u \in W_i$ tal que $R|_{W_i \times W_i}(i, u) = \chi_{A_i}(u) = 1$. $\square$

Este proceso expuesto en la demostración del Teorema 1.9 de armar una función para cada clase de equivalencia lo podemos hacer para todas las clases. Para resolver que sucede con $Isol(F)$, simplemente forzamos que el marco $F_{Isol(F)} = \langle Isol(F), R_{Isol(F)} \rangle$ cumpla que $R_{Isol(F)}(i, j) = 0$ para todo $i, j \in Isol(F)$. Por lo tanto, podemos afirmar directamente el siguiente resultado como corolario de la construcción hecha.

Teorema 1.10

Con la notación del Teorema 1.9, sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco transitivo y euclidiano. Entonces

$$W = Isol(F) \cup \left(\bigcup_{k \in I} W_k \right)$$

donde I es un conjunto de representantes de las clases de equivalencia inducidas por $\sim$, y

$$R(i, j) = \begin{cases} \chi_{A_i}(j) & \text{si } j \sim i, \\ 0 & \text{si } j \notin Isol(F), j \approx i, \\ 0 & \text{si } j \in Isol(F). \end{cases}$$

Esto es, el marco F admite una representación en términos de marcos semiuniversales normalizados y uno vacío.

La representación dada es la herramienta principal necesaria para llegar a los resultados principales de la sección.

Teorema 1.11

Los siguientes enunciados se satisfacen.

- Las lógicas determinadas por Sim y la clase de marcos transitivos y euclidianos son las mismas.
- Las lógicas determinadas por $Univ \cup Emp$ y la clase de marcos simétricos y transitivos son las mismas.
- Las lógicas determinadas por $Sim \setminus Emp$ y la clase de marcos transitivos, euclidianos y seriales son las mismas.

Antes de comenzar, aclaramos que la equivalencia de lógicas determinadas entre $Sim \setminus Emp$ y la clase de marcos transitivos, euclidianos y seriales (el tercer ítem del teorema) se estudiará con más generalidad en el tercer capítulo y se pospone hasta ese momento.

Demostración:

Para empezar, si una fórmula φ vale en un marco transitivo y euclidiano (esto es, que pertenece a **K45**), tenemos por el Teorema 1.7 que vale también en Sim . En el Teorema 1.3 se muestra que si un marco es semiuniversal simétrico entonces es universal o vacío. De allí, tenemos que las fórmulas válidas en la clase de marcos simétricos transitivos (pertenecientes a **KB4**) también pertenecen a la lógica

determinada por la clase $Univ \cup Emp$.

Por otro lado, sea ψ una fórmula que vale en Sim . Esto es, para cualquier marco $F \in Sim$, en cualquier modelo que tenga a F como marco subyacente se tiene que vale ψ . Veamos que entonces ψ debe valer en cualquier marco transitivo y euclidiano F . Por el Teorema 1.10 sabemos que el marco F admite una descomposición en base a marcos semiuniversales normalizados F_i donde i indexa esos marcos y uno vacío $F_{Isol(F)}$. Pero por hipótesis la fórmula ψ vale en cada uno de ellos pues para todo i se cumple que $F_i \in Sim$ y $F_{Isol(F)} \in Sim$. Con esto podemos concluir que ψ vale en F donde F era un marco cualquiera transitivo y euclidiano. Luego ψ vale en la clase de marcos transitivos y euclidianos. Similarmente, si ψ vale en $Univ \cup Emp$ entonces vale en la clase de marcos simétricos y transitivos (y pertenece a **KB4**). Esto puede verse utilizando la misma técnica anterior, remarcando el hecho que los $F_i \in Univ$ por la Observación 1.9 y $F_{Isol(F)} \in Emp$.

Como vimos que ψ vale en $Sim (Univ \cup Emp)$ si y sólo si vale en la clase de marcos transitivos y euclidianos (simétricos y transitivos), concluimos que determinan las mismas lógicas. $\square$

Observación 1.10

Es importante notar que la validez de una fórmula no se ve afectada por los ceros de la relación de accesibilidad fuera de los bloques de descomposición. En efecto, en el caso de fórmulas no modales, la validez no depende de la relación de accesibilidad, si no que resulta ser una propiedad puntual.

Para el caso de fórmulas modales, utilizando la Observación 1.2 es directo que los ceros de R fuera de los bloques no afectan a las evaluaciones pues si dos elementos no están relacionados vimos que las evaluaciones se reescriben en términos de los puntos del modelo accesibles (que en este caso son exactamente los de una misma clase de equivalencia).

El Teorema 1.11 nos brinda el siguiente corolario enfocándonos en que si a un marco transitivo y simétrico le exigimos que también sea reflexivo el conjunto de puntos aislados es vacío. Con ello presente obtenemos

Teorema 1.12

Las lógicas determinadas por $Univ$ y la clase de marcos reflexivos, simétricos y transitivos son las mismas.

Demostración:

En el Teorema 1.11 obtuvimos que las lógicas determinadas por marcos simétricos y transitivos es la misma que la determinada por la clase $Univ \cup Emp$. Sin embargo,

si aparte consideramos que los marcos sean también reflexivos, es inmediato que el conjunto de puntos aislados es vacío. Luego en la descomposición del Teorema 1.10 solo tenemos los F_i que pertenecen por la Observación 1.9 a $Univ$. El resto del análisis es el mismo. $\square$

Recordemos que **S5** es la lógica determinada por la clase de marcos reflexivos y euclidianos. Por el Teorema 1.2 tenemos que es equivalente a la clase de marcos con relación subyacente de equivalencia. Con ello, podemos decir que lo que hicimos en el Teorema 1.11 fue analizar que sucedía con la lógica determinada por la clase de marcos con relación subyacente de equivalencia, **S5**. Como cierre general de lo visto, tenemos el siguiente teorema a modo de resumen.

Teorema 1.13

En el contexto de marcos simplificados tenemos que:

- **K45** está determinada por Sim .
- **KB4** está determinada por $Univ \cup Emp$.
- **KD45** está determinada por $Sim \setminus Emp$.
- **S5** está determinada por $Univ$.

1.7. Comentarios

En este capítulo se expuso todo lo relacionado a sistemas lógicos modales clásicos.

Presentamos primero las relaciones binarias como funciones. Esto nos permitió al momento de definir marcos y modelos de Kripke exhibirlos en términos que son inmediatos para una generalización en los siguientes capítulos. Así, mostramos con ellos resultados clásicos relacionados a fórmulas importantes. Luego, introdujimos el concepto de marcos simplificados. Nuevamente, la interpretación de las relaciones como funciones nos permite posicionar todo en un marco de estudio perfecto para generalizar en los siguientes capítulos. Con estos marcos simplificados mostramos resultados sobre descomposiciones de algunas clases de marcos particulares y sobre lógicas determinadas por ellas.

La idea fue introducir de manera razonable y sistemática conceptos que van a reaparecer a lo largo de los dos capítulos que vienen. Para gran parte de los resultados que vimos hasta ahora, si bien nos inspiramos en el trabajo de [6] notamos que adoptamos nuestra propia metodología (basada en [5]) con el objetivo de que el pasaje al momento de generalizar sea natural.

2. Sistemas lógicos modales multivaluados finitos

El objetivo de este capítulo es generalizar el Teorema 1.6 del capítulo anterior a un contexto multivaluado, añadiendo una nueva fórmula y su correspondiente propiedad asociada a la relación de accesibilidad. Aquí pueden distinguirse dos posibles⁸ vías de generalización del caso clásico. La primera consiste en reemplazar el álgebra **2** por un álgebra multivaluada en el codominio de la relación de accesibilidad; la segunda, en hacerlo en el codominio de la evaluación. En este trabajo seguimos ambos caminos de manera simultánea, con el objetivo de obtener una generalización conjunta.

Cuando analicemos los sistemas lógicos multivaluados finitos, comenzaremos por aquellos que toman sus grados de verdad en estas dos álgebras e interpretaremos en ellas tanto los valores como los operadores (para una exposición más detallada recomendamos [10]). Al inicio de este capítulo presentamos las álgebras $\mathbf{L}_n$ y $\mathbf{G}_n$, es decir, la MV-álgebra totalmente ordenada de n elementos y el álgebra de Heyting totalmente ordenada de n elementos.

En este marco de estudio, vamos a analizar nuevamente las relaciones entre fórmulas y propiedades de R .

2.1. Retículos residuados

La estructura algebraica principal mediante la cual generalizaremos los sistemas lógicos modales a un contexto multivaluado son los retículos residuados. No profundizaremos respecto a este tipo de estructura, si no que simplemente damos su definición y algunas propiedades relevantes a lo largo del trabajo (para más profundización recomendamos [9]).

Definición 2.1

Un álgebra $(A, *, 1)$ de tipo $(2, 0)$ es un **monoide conmutativo** si satisface que $*$ es asociativo, conmutativo y 1 es elemento neutro.

Definición 2.2

Un álgebra $(A, \wedge, \vee, 1, 0)$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ es un **retículo acotado** si $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo y 1 y 0 son los respectivos máximo y mínimo del mismo.

⁸Nosotros consideraremos sólo estas dos; pueden existir otras formas de generalizar.

Definición 2.3

Un álgebra $(A, *, \rightarrow, \wedge, \vee, 1, 0)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ es un **retículo residuado** si

- $(A, *, 1)$ es un monoide conmutativo,
- $(A, \wedge, \vee, 1, 0)$ es un retículo acotado y
- para todo $x, y, z \in A$ se satisface la propiedad de **residuación**. Esto es

$$x * y \leq z \iff x \leq y \rightarrow z$$

con el orden $\leq$ dado por el retículo.

En general estos retículos se llaman *conmutativos*, *integrales* y *acotados*, pero durante este trabajo los llamaremos simplemente residuados⁹ ([9] para más detalles).

Notemos que si $\mathbf{A}$ es un retículo residuado entonces la subálgebra de $\mathbf{A}$ con universo $\{0, 1\}$ es isomorfa a $\mathbf{2}$, lo cual permite considerar todo el análisis del caso clásico como un caso particular de nuestra generalización.

Algunos ejemplos de retículos residuados son la MV-álgebra de 3 elementos ($\mathbf{L}_3$) y el álgebra de Heyting totalmente ordenada de 3 elementos ($\mathbf{G}_3$) que detallamos a continuación.

Ejemplo 2.1

$\mathbf{L}_3 = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, *_{\mathbf{L}_3}, \rightarrow_{\mathbf{L}_3}, \wedge, \vee, 1, 0)$ es un retículo residuado con las operaciones dadas por las siguientes tablas

$*_{\mathbf{L}_3}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\rightarrow_{\mathbf{L}_3}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0	0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1

y con $\wedge = \min$ y $\vee = \max$, con el orden usual de los números reales.

A continuación presentamos otro ejemplo que nos será de utilidad a lo largo del capítulo por su carácter no involutivo.

⁹En estos retículos la operación $\wedge$ pasa a llamarse *conjunción débil* y $*$ *conjunción fuerte*. En algunos ejemplos se da que estas dos operaciones coinciden, pero en general no.

Ejemplo 2.2

$\mathbf{G}_3 = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, *_{\mathbf{G}_3}, \rightarrow_{\mathbf{G}_3}, \wedge, \vee, 1, 0)$ es un retículo residuado con $*_{\mathbf{G}_3} = \wedge = \text{mín}$ y $\vee = \text{máx}$, y la tabla de la implicación dada por

$\rightarrow_{\mathbf{G}_3}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

En los retículos residuados se define la negación como

$$\neg x = x \rightarrow 0.$$

La negación puede o no resultar involutiva lo cual trae consecuencias que estudiaremos en otras secciones. Considerando los ejemplos anteriores, es inmediato que en $\mathbf{L}_3$ la negación resulta involutiva y en $\mathbf{G}_3$ no, solo por la diferencia en que en la primera $\frac{1}{2} \rightarrow 0 = \frac{1}{2}$ y en la segunda $\frac{1}{2} \rightarrow 0 = 0$.

Los retículos residuados tienen propiedades estructurales que utilizaremos a lo largo del capítulo. Las presentamos a continuación.

Teorema 2.1

Sea $(A, *, \rightarrow, \wedge, \vee, 1, 0)$ un retículo residuado, y sean $x, y, z \in A$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades.

1. $x \rightarrow x = 1$,
2. $x \leq y$ si y sólo si $x \rightarrow y = 1$,
3. $x * (x \rightarrow y) \leq y$,
4. $(x * y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$,
5. $1 \rightarrow x = x$,
6. $x \rightarrow 1 = 1$,
7. $x \leq y$ implica que $x * z \leq y * z$,
8. $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$,

$$9. (x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z),$$

$$10. x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z).$$

Las propiedades 8, 9 y 10 se pueden generalizar a familias arbitrarias $\{y_i\}_{i \in I}$ de elementos de A como sigue

$$8^*. x * \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x * y_i),$$

$$9^*. \bigvee_{i \in I} y_i \rightarrow x = \bigwedge_{i \in I} (y_i \rightarrow x),$$

$$10^*. x \rightarrow \bigwedge_{i \in I} y_i = \bigwedge_{i \in I} (x \rightarrow y_i).$$

Demostración:

Ver Anexo 5.4. □

Mencionamos algunas otras propiedades que serán útiles más adelante que son consecuencia de que las implicaciones en retículos residuados decrecen en el antecedente y crecen en el consecuente. Es decir, son consecuencia de las propiedades 9 y 10 del Teorema 2.1.

Teorema 2.2

Sea $(A, *, \rightarrow, \wedge, \vee, 1, 0)$ un retículo residuado, y sean $x, y, z \in A$ con $x \leq y$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades.

$$1. y \rightarrow z \leq x \rightarrow z,$$

$$2. z \rightarrow x \leq z \rightarrow y.$$

2.2. Los retículos $\mathbf{L}_n$ y $\mathbf{G}_n$

En la sección anterior, los Ejemplos 2.1 y 2.2 eran las versiones más sencillas¹⁰ de una estructura general que utilizamos. Desde este momento en adelante vamos a tener un enfoque principalmente en $\mathbf{L}_n$ y en $\mathbf{G}_n$, que son generalizaciones de $\mathbf{L}_3$ y $\mathbf{G}_3$ a cualquier $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, $n \geq 2$. Esto es, trabajaremos con algunos retículos residuados *finitos*. Sin embargo, esto no quita el hecho de que muchos resultados a

¹⁰Omitimos mencionar los retículos $\mathbf{L}_2$ y $\mathbf{G}_2$ pues son (esencialmente) **2**.

los que llegaremos serán ciertos para retículos residuados arbitrarios¹¹.

Si consideramos el siguiente conjunto

$$A_n = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\},$$

entonces

Ejemplo 2.3

$\mathbf{L}_n = (A_n, *_{\mathbf{L}_n}, \rightarrow_{\mathbf{L}_n}, \wedge, \vee, 1, 0)$ es un retículo residuado. Sean $x, y \in A$. Las operaciones se definen como

$$x *_{\mathbf{L}_n} y = \max(0, x + y - 1)$$

y

$$x \rightarrow_{\mathbf{L}_n} y = \min(1, 1 - x + y).$$

Ejemplo 2.4

$\mathbf{G}_n = (A_n, *_{\mathbf{G}_n}, \rightarrow_{\mathbf{G}_n}, \wedge, \vee, 1, 0)$ es un retículo residuado. Sean $x, y \in A$. Las operaciones se definen como

$$x *_{\mathbf{G}_n} y = x \wedge y$$

y

$$x \rightarrow_{\mathbf{G}_n} y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ y, & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Estos retículos son subálgebras de otras más generales con universo $[0, 1]$. Se denotan por $\mathbf{L}_{[0,1]}$ y $\mathbf{G}_{[0,1]}$ ¹².

Notemos que en el caso que $n = 2$, $\mathbf{L}_n$ y $\mathbf{G}_n$ recuperan el álgebra de Boole de dos elementos (**2**) en donde el producto y el ínfimo coinciden. En el caso $n = 3$ se obtienen los Ejemplos 2.1 y 2.2.

Esta sección es un compendio de herramientas necesarias para generalizar nociones a sistemas lógicos modales *multivaluados*. Esto es, extender las definiciones a otras álgebras que no sean **2**. Durante el primer capítulo nos enfocamos en que tanto las evaluaciones de un modelo como la relación binaria subyacente podían pensarse como funciones con codominio en **2**. Esto fue para que la generalización en sí resul-

¹¹Posiblemente infinitos arbitrarios.

¹²Aclaremos nuevamente, a riesgo de reiterar, que no son nuestro enfoque estos retículos infinitos. Si bien muchos resultados son ciertos también, esta es una cuestión accesoria al trabajo y no es el punto central.

tara lo más natural posible. ¿Qué sucede estructuralmente cuando cambiamos **2** por algún álgebra **A** (vamos a entender a **A** por algún retículo residuado ya mencionado en los ejemplos)?

2.3. Marcos y modelos multivaluados

Las herramientas que permiten generalizar las nociones de marcos de Kripke a un contexto multivaluado ya fueron expuestas.

En los sistemas lógicos modales multivaluados, el lenguaje modal básico es el mismo que el presentado en la Definición 1.3 vista en el primer capítulo con la salvedad que incorporamos el nuevo símbolo $*$. El conjunto de fórmulas $Form$ se construye de la misma forma en términos generales. Esto es

Definición 2.4

Las fórmulas en $Form$ se definen recursivamente de la siguiente forma:

1. Toda variable proposicional p_i es una fórmula.
2. 0 y 1 son fórmulas.
3. Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ es una fórmula.
4. Si $\bullet \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, *\}$ φ y ψ son fórmulas, entonces $\varphi \bullet \psi$ es una fórmula.
5. Si φ es una fórmula, entonces $\Box\varphi$ y $\Diamond\varphi$ son fórmulas.
6. Cualquier otra expresión que no se haya construido mediante la aplicación una cantidad finita de veces de las reglas anteriores no es una fórmula.

Comenzamos entonces con las definiciones en este nuevo enfoque.

Definición 2.5

Sea **A** un retículo residuado. Un **marco de Kripke A-valuado** es un par $\langle W, R \rangle$ donde W es un conjunto de mundos no vacío y $R : W \times W \rightarrow \mathbf{A}$.

Esto es, R asigna a cada par de mundos un nivel de accesibilidad $R(i, j)$ en **A** para $i, j \in W$ donde **A** puede ser la MV-álgebra de n elementos o el álgebra de Heyting totalmente ordenada de n elementos¹³. Para modelos tenemos lo siguiente.

¹³O cualquier otro retículo residuado, ver [3].

Definición 2.6

Un **modelo de Kripke $\mathbf{A}$ -multivaluado** es una terna $\langle W, R, \hat{e} \rangle$ donde $\langle W, R \rangle$ es un marco $\mathbf{A}$ -multivaluado y $\hat{e}$ es una función de evaluación $\hat{e} : Var \times W \rightarrow \mathbf{A}$. Esto es, $\hat{e}$ asigna a cada par de variable y mundo un valor sobre $\mathbf{A}$.

Nuevamente la evaluación puede extenderse como morfismo al conjunto $Form$ interpretando los conectivos no modales como las operaciones en $\mathbf{A}$ y para las modalidades como presentaremos en la Definición 2.7.

Es interesante notar que al momento de generalizar podríamos haber tomado el camino de únicamente cambiar el álgebra de la evaluación, y no de la relación. Sin embargo, vamos a considerar como multivaluadas ambas. Esto nos permite extender aún más el nivel de generalización para modelar razonamientos todavía menos absolutos. Esto se ve en [3].

A continuación, presentamos lo que ya mencionamos en la Observación 1.2 respecto a definiciones generales de las evaluaciones de $\Box$ y $\Diamond$.

Definición 2.7

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo de Kripke $\mathbf{A}$ -valuado. Sea $i \in W$, $\varphi \in Form$. Entonces las evaluaciones de las modalidades se definen como sigue.

$$\hat{e}(\Box\varphi, i) = \bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(\varphi, j))$$

y

$$\hat{e}(\Diamond\varphi, i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{e}(\varphi, j)).$$

Tenemos también una generalización de las nociones de verdad, satisfacibilidad y validez de una fórmula tanto en un modelo, en una clase de modelos y en una clase de marcos. Las definiciones no cambian demasiado.

Observación 2.1

Una cuestión interesante de mencionar, pero en la cual no profundizaremos, es que estas generalizaciones de las evaluaciones de $\Box$ y $\Diamond$ hacen que la relación R pase a intervenir directamente en el cálculo del valor de verdad, asignándole en cierto sentido un “peso” dentro de la evaluación. Más adelante, cuando generalicemos las propiedades de R y abordemos el problema central del capítulo, veremos que esta forma de extender la semántica resulta especialmente adecuada para preservar una serie de resultados presentados en el Capítulo 1.

Definición 2.8

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo sobre un retículo residuado A . Una fórmula φ es **verdadera** en un mundo i en un modelo $\mathcal{M}$, y será denotada por $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi$, si

$$\mathcal{M}, i \Vdash \varphi \iff \hat{e}(\varphi, i) = 1.$$

Como últimas definiciones, presentamos por un lado las nociones de validez de una fórmula modal (tanto en un modelo, como una clase de modelos, y en una clase de marcos), que es exactamente la misma que en los sistemas clásicos. Por otro, definimos que es una lógica determinada por una clase de modelos.

Definición 2.9

Una fórmula φ es **válida en un modelo multivaluado** $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ si se satisface (es verdadera) en todo $i \in W$. Esto es, para todo $i \in W$ se tiene que $\hat{e}(\varphi, i) = 1$.

Por otro lado, φ es **válida en una clase de modelos** $\mathcal{M}$ si es válida en cualquier modelo $M \in \mathcal{M}$.

Por último, es **válida en una clase de marcos** $\mathcal{F}$ si es válida en la clase de modelos $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ donde todo $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ es de la forma $M = \langle F, \hat{e} \rangle$ con $F \in \mathcal{F}$.

Definición 2.10

Sea $\mathcal{F}$ una clase de marcos. Llamamos a un conjunto de fórmulas Λ una **lógica modal determinada** por $\mathcal{F}$ si es el conjunto de fórmulas válidas en la clase $\mathcal{F}$.

Notemos que otra vez, como en la Definición 1.12, definimos el concepto de lógica modal (multivaluada) de manera semántica¹⁴.

2.4. Relaciones binarias multivaluadas

Cuando consideramos a la relación binaria como una función $R : W \times W \rightarrow \mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ es alguno de los retículos que ya mencionamos, las propiedades se definen de maneras más generales como mostramos a continuación¹⁵.

Definición 2.11

Sea $\mathbf{A}$ un retículo residuado y R una relación binaria en W multivaluada sobre $\mathbf{A}$. La relación R se dice

- **serial** si $\bigvee_{j \in W} R(i, j)^2 = \bigvee_{j \in W} R(i, j) * R(i, j) = 1$ para todo $i \in W$.

¹⁴Nuevamente, podrían consultarse otras definiciones tanto semánticas como sintácticas. Sin embargo, escapan a los objetivos de esta tesis.

¹⁵No son las únicas maneras de generalizarlas. Las que usamos son estándar en la literatura.

- **fuertemente serial** si para todo $i \in W$ existe un $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$.
- **reflexiva** si $R(i, i) = 1$ para todo $i \in W$.
- **simétrica** si $R(i, j) = R(j, i)$ para todo $i, j \in W$.
- **transitiva** si $R(i, j) * R(j, k) \leq R(i, k)$ para todo $i, j, k \in W$.
- **euclidiana** si $R(i, j) * R(i, k) \leq R(j, k)$ para todo $i, j, k \in W$.
- **de equivalencia** si y sólo si R es reflexiva, simétrica y transitiva.
- **booleana (crisp)** si $R(i, j) = 1$ ó 0 para todo $i, j \in W$.
- **débilmente booleana (weakly crisp)** si $R(i, j) = 1$ implica que $R(k, j)$ es 0 o 1 para todo $k \in W$.

Notemos que estas propiedades del caso multivaluado generalizan las del caso clásico. Esto se resume en las siguientes tres observaciones.

Observación 2.2

La serialidad, transitividad, simetría y euclidianidad del caso multivaluado generalizan a las del caso clásico.

En efecto, supongamos $R : W \times W \rightarrow \mathbf{2}$. Si la relación R es serial como en la definición anterior, y sea $i \in W$, entonces $\bigvee_{j \in W} R(i, j)^2 = 1$ implica que hay al menos un $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$.

Por otro lado, si la relación es transitiva, entonces para todo $i, j, k \in W$ si $R(i, j) = R(j, k) = 1$ entonces $1 = R(i, j) * R(j, k) \leq R(i, k)$ lo que implica que $R(i, k) = 1$. De la misma forma también vemos que euclidianidad es una correcta generalización del caso clásico.

Por último, para el caso de la simetría, es directo que generaliza a la versión clásica, pues $R(i, j) = R(j, i)$ por definición en ambos casos.

Como evidencia de que estas definiciones son una buena generalización, tenemos los siguientes resultados que son versiones adaptadas de propiedades que se satisfacen en el caso clásico para relaciones binarias.

Teorema 2.3

Sea $\mathbf{A}$ un retículo residuado y R una relación binaria multivaluada sobre $\mathbf{A}$. Entonces las siguientes afirmaciones valen:

1. Si R es reflexiva, entonces es serial.
2. Si R es simétrica, entonces es transitiva si y sólo si es euclidiana.

Demostración:

1. Sea $i \in W$. Si R es reflexiva entonces $R(i, i) = 1$. Luego

$$\bigvee_{j \in W} R(i, j)^2 \geq R(i, i)^2 = 1 * 1 = 1.$$

Por lo tanto $\bigvee_{j \in W} R(i, j)^2 = 1$ que era lo que queríamos ver.

2. Sean $i, j, k \in W$. Si R es simétrica y transitiva entonces se cumple que

$$R(i, j) * R(i, k) = R(j, i) * R(i, k) \leq R(j, k)$$

lo que muestra que es euclidiana.

Para ver la otra implicación la demostración es idéntica. Si R es simétrica y euclidiana entonces

$$R(i, j) * R(j, k) = R(j, i) * R(j, k) \leq R(i, k)$$

lo cual muestra que es transitiva. □

Teorema 2.4

Sea R una relación binaria multivaluada en un conjunto de mundos W . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. R es una equivalencia.
2. R es reflexiva y euclidiana.
3. R es serial, simétrica y euclidiana.
4. R es serial, simétrica y transitiva.

Demostración:

1 $\Rightarrow$ 2. Si R es una equivalencia, entonces es reflexiva por definición y además como es simétrica y transitiva por el Teorema 2.3 es euclidiana.

2 $\Rightarrow$ 3. Si R es reflexiva y euclidiana, entonces por el Teorema 2.3 es serial. Queda ver que es simétrica. Para ello, como es euclidiana, para cualquier selección

de i, j tenemos que

$$R(i, j) * R(i, k) \leq R(j, k) \text{ para todo } k \in W. \quad (7)$$

Como es reflexiva, tomando $k = i$

$$R(i, j) = R(i, j) * R(i, i) \leq R(j, i).$$

Análogamente,

$$R(j, i) * R(j, j) = R(j, i) \leq R(i, j).$$

Luego tenemos que $R(i, j) = R(j, i)$ para todo i, j lo que muestra que es simétrica.

3 $\Rightarrow$ **4**. Es consecuencia nuevamente del Teorema 2.3.

4 $\Rightarrow$ **1**. Queremos ver que R es reflexiva pues es simétrica y transitiva por hipótesis. Por transitividad, para cualquier i

$$\bigvee_j R(i, j) * R(j, k) \leq R(i, k) \text{ para todo } k \in W.$$

Seleccionando $k = i$, y como $R(j, i) = R(i, j)$ por simetría, obtenemos por serialidad

$$1 = \bigvee_j R(i, j)^2 = \bigvee_j R(i, j) * R(j, i) \leq R(i, i).$$

Luego, $R(i, i) = 1$ para todo i lo que muestra que R es reflexiva y por lo tanto una equivalencia. $\square$

2.5. Fórmulas (K) y (DUAL)

Las fórmulas más usuales en los sistemas lógicos modales son las fórmulas (K) y (DUAL) que mostramos en la tabla.

Nombre	Fórmula
(K)	$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
(DUAL)	$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$

Cuadro 1: Fórmulas K y DUAL

En el caso multivaluado estas fórmulas no son necesariamente válidas como en los sistemas clásicos. Esto queda evidenciado con los siguientes dos teoremas.

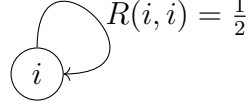
Teorema 2.5

(K) no es válida en los marcos de Kripke sobre retículos residuados en $\mathbf{L}_3$.

El ejemplo de este teorema se presenta en [3].

Demostración:

Consideremos el siguiente modelo dado por $W = \{i\}$ y R y $\hat{e}$ definidos como sigue: sean p y q variables, $\hat{e}(p, i) = \frac{1}{2}$, $\hat{e}(q, i) = 0$ y



Analicemos la validez de (K) en el modelo. Esto es, ver que $\hat{e}((K), i)$ sea 1 o no. Por un lado

$$\hat{e}(\Box(p \rightarrow_{\mathbf{L}_3} q), i) = \bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow_{\mathbf{L}_3} \hat{e}(p \rightarrow_{\mathbf{L}_3} q, j))$$

Sin embargo, el único j posible es el mismo i . Entonces

$$R(i, i) \rightarrow_{\mathbf{L}_3} \hat{e}(p \rightarrow_{\mathbf{L}_3} q, i) = \frac{1}{2} \rightarrow_{\mathbf{L}_3} \frac{1}{2} = 1.$$

Luego

$$\hat{e}(\Box(p \rightarrow_{\mathbf{L}_3} q), i) \rightarrow_{\mathbf{L}_3} \hat{e}(\Box p \rightarrow_{\mathbf{L}_3} \Box q, i) = 1 \rightarrow_{\mathbf{L}_3} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$$

lo que muestra que no vale (K). □

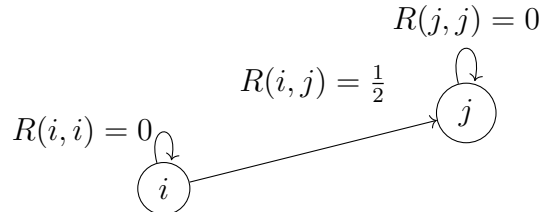
Por otra parte, el segundo teorema de esta sección muestra que (DUAL) también puede fallar, y el modelo que lo refuta es uno de simpleza similar al recién visto.

Teorema 2.6

(DUAL) no es válido en los marcos de Kripke sobre retículos residuados en $\mathbf{G}_3$.

Demostración:

Consideremos el modelo donde $W = \{i, j\}$, con $R(i, j) = \frac{1}{2}$, $R(i, i) = R(j, j) = 0$, p una variable tal que $\hat{e}(p, i) = 1$ y $\hat{e}(p, j) = \frac{1}{2}$ y



Queremos ver que

$$\hat{e}(\Diamond p, i) \neq \hat{e}(\neg \Box \neg p, i).$$

Por un lado

$$\hat{e}(\Diamond p, i) = \bigvee_{k \in W} (R(i, k) *_{\mathbf{G}_3} \hat{e}(p, k)) = R(i, j) *_{\mathbf{G}_3} \hat{e}(p, j) = \frac{1}{2}.$$

Pero

$$\hat{e}(\neg p, i) = 0 \text{ y } \hat{e}(\neg p, j) = 0$$

y

$$\hat{e}(\Box \neg p, i) = (R(i, i) \rightarrow_{\mathbf{G}_3} \hat{e}(\neg p, i)) \wedge (R(i, j) \rightarrow_{\mathbf{G}_3} \hat{e}(\neg p, j))$$

que es igual a

$$(0 \rightarrow_{\mathbf{G}_3} 0) \wedge \left(\frac{1}{2} \rightarrow_{\mathbf{G}_3} 0 \right) = 1 \wedge 0 = 0.$$

Luego

$$\hat{e}(\neg \Box \neg p, i) = 0 \rightarrow_{\mathbf{G}_3} 0 = 1.$$

Como $\hat{e}(\Diamond p, i) \neq \hat{e}(\neg \Box \neg p, i)$ tenemos que (DUAL) no vale en $\mathbf{G}_3$ que era lo que queríamos ver. $\square$

Observación 2.3

Hay otras cuestiones relacionadas a estas fórmulas. Sean $\varphi, \psi \in Form$.

Por un lado, en el caso clásico (K) es equivalente (ver [10]) a la fórmula

$$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi.$$

Sin embargo, notamos que en el caso multivaluado esta última fórmula siempre vale (ver [3]), mientras que (K) como vimos no.

Por otra parte, de manera análoga, la fórmula

$$\neg \Box \varphi \leftrightarrow \Diamond \neg \varphi$$

y en particular, al tomar $\varphi = \neg \psi$,

$$\neg \Box \neg \psi \leftrightarrow \Diamond \neg \neg \psi,$$

resulta siempre válida en el contexto multivaluado. No obstante, dado que $\neg$ deja de ser involutiva en general, esta equivalencia *no coincide* con la fórmula (DUAL), a diferencia de lo que ocurre en el caso clásico, donde ambas expresiones sí son equivalentes.

2.6. Correspondencias entre fórmulas y propiedades de R

Fórmulas	1	2
(D)	$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	$\Diamond 1$
(T)	$\Box\varphi \rightarrow \varphi$	$\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
(B)	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$	$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
(4)	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	$\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
(5)	$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$

Cuadro 2: Fórmulas y sus variaciones.

La tabla presenta las fórmulas usuales y sus versiones duales que mencionamos en el primer capítulo (a excepción de (D)2, que es simplemente una versión menos restrictiva que (D)1)¹⁶. Esto es porque como (DUAL) puede fallar, no tenemos la dualidad dada por la involución de $\neg$ entre fórmulas¹⁷. Presentamos entonces, de manera sistemática, las correspondencias. En todos los teoremas que presentamos siempre consideraremos al marco $F = \langle W, R \rangle$ sobre el retículo residuado $\mathbf{A}$. Así, también consideramos los modelos $\mathcal{M} = \langle F, \hat{\mathbf{e}} \rangle$ también sobre el retículo residuado $\mathbf{A}$. En general no explicitamos cual es el retículo $\mathbf{A}$ a menos que sea necesario para las demostraciones.

2.6.1. Serialidad

Recordemos que dado $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado, una fórmula ψ es válida en F si y sólo si es válida en todo modelo $\mathbf{A}$ -valuado de la forma $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{\mathbf{e}} \rangle$.

Teorema 2.7

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R es serial multivaluada.

Demostración:

Sea R serial multivaluada y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{\mathbf{e}} \rangle$ un modelo de Kripke $\mathbf{A}$ -valuado con F

¹⁶si bien en el caso clásico coinciden.

¹⁷Es usual leer en la literatura la distinción entre una fórmula y su dual con un subíndice $\Diamond$ o $\Box$ según cual fórmula es. Nosotros seguiremos la notación especificada en el cuadro 2.

su marco subyacente. Dado $i \in W$ arbitrario, notemos que

$$\hat{e}(\Box\varphi, i) = \bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(\varphi, j)) \leq R(i, j) \rightarrow \hat{e}(\varphi, j)$$

es equivalente, por residuación, a

$$R(i, j) * \hat{e}(\Box\varphi, i) \leq \hat{e}(\varphi, j) \text{ para todo } j \in W$$

Entonces

$$R(i, j)^2 * \hat{e}(\Box\varphi, i) \leq R(i, j) * 1 * \hat{e}(\Box\varphi, i) \leq \bigvee_{k \in W} (R(i, k) * \hat{e}(\varphi, k)) = \hat{e}(\Diamond\varphi, i)$$

lo cual, aplicando nuevamente residuación, equivale a

$$R(i, j)^2 \leq \hat{e}(\Box\varphi, i) \rightarrow \hat{e}(\Diamond\varphi, i) = \hat{e}(\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi, i).$$

Luego, (D)1 vale si

$$\bigvee_{j \in W} R(i, j)^2 = 1 \text{ para todo } i.$$

Por otro lado, veamos que si (D)1 es válida sobre todo modelo basado en F entonces R es serial. Si la fórmula vale en todo modelo basado en F , en particular vale en el siguiente modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ donde $\hat{e}$ satisface que $\hat{e}(p, j) = R(i, j)$ con $p \in Var$ fijo, $i \in W$ fijo y $j \in W$ arbitrario. Como (D)1 es válida en el modelo tenemos que

$$\hat{e}(\Box p, i) \rightarrow \hat{e}(\Diamond p, i) = 1$$

que por residuación es equivalente a

$$\hat{e}(\Box p, i) \leq \hat{e}(\Diamond p, i).$$

Por las definiciones de las evaluaciones tenemos

$$\bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(p, j)) = \hat{e}(\Box p, i) \leq \hat{e}(\Diamond p, i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{e}(p, i)).$$

Como $\hat{e}(p, j) = R(i, j)$ para todo $j \in W$, esto se simplifica a

$$1 = \bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow R(i, j)) \leq \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * R(i, j)) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j)^2).$$

Por lo tanto se sigue que

$$\bigvee_{j \in W} R(i, j)^2 = 1$$

para todo $i \in W$ que era lo que queríamos demostrar.

Con ello queda probada la correspondencia. $\square$

Por otro lado, para (D)2 la correspondencia surge con una condición menos restrictiva pues $R(i, j)^2 = R(i, j) * R(i, j) \leq 1 * R(i, j)$.

Teorema 2.8

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\Diamond 1$ es válida en F si y sólo si $\bigvee_{j \in W} R(i, j) = 1$ para todo i .

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco multivaluado y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{\mathbf{e}} \rangle$ un modelo de Kripke multivaluado. Dado $i \in W$ arbitrario, si evaluamos directamente $\Diamond 1$ obtenemos

$$\hat{\mathbf{e}}(\Diamond 1, i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(1, i)) = \bigvee_{j \in W} R(i, j).$$

Entonces tenemos que la fórmula vale si y sólo si $\bigvee_{j \in W} R(i, j) = 1$ para todo i . $\square$

2.6.2. Transitividad

Veamos ahora las correspondencias entre la transitividad del caso multivaluado y las fórmulas (4)1 y (4)2.

Teorema 2.9

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$ es válida en F si y sólo si R es transitiva multivaluada.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco transitivo multivaluado y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{\mathbf{e}} \rangle$ un modelo de Kripke multivaluado. Sea $i \in W$. Veamos que la fórmula es válida en el modelo. Para ello, explicitemos primero la evaluación del consecuente. Esto es

$$\hat{\mathbf{e}}(\Box \Box \varphi, i) = \bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow (\bigwedge_{k \in W} R(j, k) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)))$$

pero por el punto 10* del Teorema 2.1 tenemos que

$$\bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow (\bigwedge_{k \in W} R(j, k) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k))) = \bigwedge_{j, k \in W} (R(i, j) \rightarrow (R(j, k) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k))).$$

Además, esto último, por el ítem 4 del Teorema 2.1, es igual a

$$\bigwedge_{j,k \in W} (R(i, j) \rightarrow (R(j, k) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k))) = \bigwedge_{j,k \in W} (R(i, j) * R(j, k) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k)).$$

Sin embargo, si aplicamos la transitividad, y el Teorema 2.2, tenemos que

$$\bigwedge_{j,k \in W} (R(i, j) * R(j, k) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k)) \geq \bigwedge_{k \in W} (R(i, k) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k)) = \hat{e}(\Box \varphi, i).$$

Por lo tanto, por residuación esto es equivalente a

$$1 \leq \hat{e}(\Box \varphi, i) \rightarrow \hat{e}(\Box \Box \varphi, i) = \hat{e}(\Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi, i)$$

lo que muestra que la fórmula vale como queríamos ver.

Para ver la otra implicación, utilizamos un modelo particular que nos permite despejar la propiedad de transitividad. Consideremos el modelo donde p es una variable, $i, k \in W$ fijos, y $\hat{e}$ tal que

$$\hat{e}(p, j) = \begin{cases} R(i, k), & \text{si } j = k, \\ 1, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Tenemos por un lado que la evaluación de $\Box p$ en i nos da

$$\begin{aligned} \hat{e}(\Box p, i) &= \bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(p, j)) \\ &= R(i, k) \rightarrow R(i, k) = 1. \end{aligned}$$

y por otro lado si evaluamos $\Box \Box p$ en i obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{e}(\Box \Box p, i) &= \bigwedge_{j,l \in W} (R(i, j) * R(j, l) \rightarrow \hat{e}(p, l)) \\ &= \bigwedge_{j \in W} R(i, j) * R(j, k) \rightarrow R(i, k) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da por el ítem 6 del Teorema 2.1, pues los términos que colapsan a 1 no afectan al ínfimo (por la definición de la evaluación). Como vale $\Box p \rightarrow \Box \Box p$, tenemos que

$$\bigwedge_{j \in W} R(i, j) * R(j, k) \rightarrow R(i, k) = 1$$

o equivalentemente, para todo $j \in W$

$$R(i, j) * R(j, k) \leq R(i, k).$$

Con esto queda probada la correspondencia. $\square$

Teorema 2.10

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R es transitiva multivaluada.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco transitivo multivaluado y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{\mathbf{e}} \rangle$ un modelo de Kripke multivaluado. Sea $i \in W$. Veamos las evaluaciones de $\Diamond\Diamond\varphi$ y $\Diamond\varphi$ en i . Por un lado,

$$\hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, j)).$$

Entonces

$$\hat{\mathbf{e}}(\Diamond\Diamond\varphi, i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, j)) = \bigvee_{j \in W} \left(R(i, j) * \left(\bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)) \right) \right).$$

Notemos que podemos fusionar estos supremos por la propiedad 8* del Teorema 2.1, esto es

$$\bigvee_{j \in W} \left(R(i, j) * \left(\bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)) \right) \right) = \bigvee_{j, k \in W} (R(i, j) * ((R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)))).$$

Ahora, por transitividad tenemos

$$\bigvee_{j, k \in W} (R(i, j) * ((R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)))) \leq \bigvee_{k \in W} (R(i, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)) = \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, i).$$

Esto es

$$\hat{\mathbf{e}}(\Diamond\Diamond\varphi, i) = \bigvee_{j, k \in W} (R(i, j) * ((R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)))) \leq \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, i)$$

lo cual por residuación es equivalente a

$$1 \leq \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\Diamond\varphi, i) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, i) = \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi, i)$$

y por lo tanto vale la fórmula como queríamos ver.

Para el recíproco consideremos el siguiente modelo donde p es una variable y sean i, k en W fijos, con la siguiente evaluación $\hat{\mathbf{e}}$ definida como

$$\hat{\mathbf{e}}(p, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

En este modelo

$$\hat{e}(\Diamond\Diamond p, i) \rightarrow \hat{e}(\Diamond p, i) = 1$$

o equivalentemente

$$\hat{e}(\Diamond\Diamond p, i) \leq \hat{e}(\Diamond p, i).$$

Antes calculamos las evaluaciones, entonces tenemos

$$\hat{e}(\Diamond\Diamond p, i) = \bigvee_{j,l \in W} (R(i, j) * (R(j, l) * \hat{e}(p, l))) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * R(j, k))$$

y

$$\hat{e}(\Diamond p, i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{e}(p, j)) = R(i, k)$$

Como los supremos se toman en k porque en cualquier otro lado las evaluaciones son cero, obtenemos para todo $j \in W$

$$R(i, j) * R(j, k) = \hat{e}(\Diamond\Diamond p, i) \leq \hat{e}(\Diamond p, i) = R(i, k)$$

que era lo que queríamos ver. $\square$

2.6.3. Euclidianidad

Continuamos con las correspondencias entre la euclidianidad con las fórmulas (5)1 y (5)2.

Teorema 2.11

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$ es válida en F si y sólo si R es euclidiana multivaluada.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco euclidiano multivaluado y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo de Kripke multivaluado. Sea $i \in W$. Primero queremos ver que vale $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$. Por un lado

$$\hat{e}(\Diamond\Box\varphi, i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{e}(\Box\varphi, j))$$

y

$$\begin{aligned} \hat{e}(\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi, i) &= \bigvee_{j \in W} \left(R(i, j) * \hat{e}(\Box\varphi, j) \right) \rightarrow \bigwedge_{k \in W} (R(i, k) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k)) \\ &= \bigwedge_{j, k \in W} \left((R(i, j) * \hat{e}(\Box\varphi, j)) \rightarrow (R(i, k) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k)) \right) \end{aligned}$$

por 9* y 10* del Teorema 2.1. Por el Teorema 2.2 esto último es igual a

$$\begin{aligned}
 & \bigwedge_{j,k \in W} ((R(i, j) * R(i, k) * \hat{e}(\Box\varphi, j)) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k)) \\
 & \geq \bigwedge_{j,k \in W} (R(j, k) * \hat{e}(\Box\varphi, j) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k)) \\
 & = \bigwedge_{j,k \in W} (\hat{e}(\Box\varphi, j) \rightarrow (R(j, k) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k))) \\
 & = \bigwedge_{j \in W} (\hat{e}(\Box\varphi, j) \rightarrow \hat{e}(\Box\varphi, j)) = 1
 \end{aligned}$$

donde en el primer paso aplicamos euclidianidad, en el segundo el ítem 4 del Teorema 2.1 y en el tercero la definición de la evaluación de $\Box$ en j . Por lo tanto, obtuvimos

$$\hat{e}(\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi, i) \geq \bigwedge_{j \in W} (\hat{e}(\Box\varphi, j) \rightarrow \hat{e}(\Box\varphi, j)) = 1$$

que era lo que queríamos demostrar.

Para el recíproco, consideremos el modelo donde $p \in Var$, $i, j, k \in W$ fijos, y $\hat{e}$ tal que

$$\hat{e}(p, l) = \begin{cases} R(j, k), & \text{si } l = k, \\ 1, & \text{si } l \neq k. \end{cases}$$

Con este modelo, notemos las siguientes evaluaciones

$$\hat{e}(\Box p, i) = \bigwedge_{l \in W} (R(i, l) \rightarrow \hat{e}(p, l)) = R(i, k) \rightarrow R(j, k) \quad (8)$$

En particular, si evaluamos en j tenemos

$$\hat{e}(\Box p, j) = R(j, k) \rightarrow R(j, k) = 1.$$

Por otro lado, notemos que como vale la fórmula y por 8

$$R(i, j) = R(i, j) * \hat{e}(\Box p, j) \leq \bigvee_{l \in W} (R(i, l) * (\hat{e}(\Box p, l))) = \hat{e}(\Diamond\Box p, i).$$

Luego, para el j fijado antes tenemos que

$$R(i, j) \leq \hat{e}(\Diamond\Box p, i) \leq \hat{e}(\Box p, i) = R(i, k) \rightarrow R(j, k).$$

Entonces por residuación

$$R(i, j) * R(i, k) \leq R(j, k)$$

para todo $i, j, k \in W$, con lo que obtenemos lo que queríamos demostrar. $\square$

Teorema 2.12

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R es euclidiana multivaluada.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco euclidiano multivaluado y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{\mathbf{e}} \rangle$ un modelo de Kripke multivaluado. Sea $i \in W$. Veamos primero que si R es euclidiana vale la fórmula. Para ello notemos que

$$\hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, j))$$

y que

$$\hat{\mathbf{e}}(\Box\Diamond\varphi, i) = \bigwedge_{j \in W} \left(R(i, j) \rightarrow \bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)) \right).$$

Entonces, si evaluamos la fórmula obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi, i) &= \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, j)) \rightarrow \left(\bigwedge_{l \in W} (R(i, l) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, l)) \right) \\ &= \bigwedge_{l \in W} \left[\left(\bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, j)) \right) \rightarrow (R(i, l) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, l)) \right] \\ &= \bigwedge_{l \in W} \left[\left(\bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, j)) \right) * R(i, l) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, l) \right] \\ &= \bigwedge_{l \in W} \left[\left(\bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, j)) * R(i, l) \right) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, l) \right] \\ &\geq \bigwedge_{l \in W} \left[\left(\bigvee_{j \in W} (R(l, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, j)) \right) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, l) \right] \\ &= \bigwedge_{l \in W} (\hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, l) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\varphi, l)) = 1 \end{aligned}$$

donde en el primer paso aplicamos la propiedad 10* del Teorema 2.1, en el segundo la propiedad 4, en el tercero simplemente introdujimos dentro del supremo al término $R(i, l)$ que no dependía de j , en el cuarto aplicamos euclidianidad y la propiedad 8* y por último la definición de la evaluación de $\Diamond\varphi$.

Para el recíproco, consideremos el modelo con $j, k \in W$ fijos y p una variable fija

con la siguiente evaluación

$$\hat{e}(p, l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l = j, \\ 0, & \text{si } l \neq j. \end{cases}$$

Como vale la fórmula $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$, y sea $i \in W$, tenemos la siguiente desigualdad

$$\bigvee_{u \in W} (R(i, u) * \hat{e}(p, u)) \rightarrow \left(\bigwedge_{v \in W} (R(i, v) \rightarrow \bigvee_{l \in W} (R(v, l) * \hat{e}(p, l))) \right) \geq 1.$$

Por residuación

$$\left(\bigwedge_{v \in W} (R(i, v) \rightarrow \bigvee_{l \in W} (R(v, l) * \hat{e}(p, l))) \right) \geq \bigvee_{u \in W} (R(i, u) * \hat{e}(p, u)) = R(i, j).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} R(i, k) \rightarrow R(k, j) &= R(i, k) \rightarrow \bigvee_{l \in W} (R(k, l) * \hat{e}(p, l)) \\ &\geq \left(\bigwedge_{w \in W} \left(R(i, w) \rightarrow \bigvee_{l \in W} (R(w, l) * \hat{e}(p, l)) \right) \right) \end{aligned}$$

con lo que tenemos

$$R(i, k) \rightarrow R(k, j) \geq R(i, j)$$

y por residuación para todo $i, j, k \in W$ que era lo que queríamos ver. $\square$

2.6.4. Simetría

Teorema 2.13

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$ es válida en F si y sólo si R simétrica multivaluada.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco simétrico multivaluado y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo de Kripke multivaluado. Sea $i \in W$. Notemos que

$$\hat{e}(\Diamond\Box\varphi, i) = \bigvee_{j \in W} \left(R(i, j) * \left(\bigwedge_{k \in W} (R(j, k) \rightarrow \hat{e}(\varphi, k)) \right) \right).$$

Sin embargo, en el segundo término en el producto podemos acotar por alguno en

particular pues es un ínfimo. Entonces

$$\hat{e}(\Diamond \Box \varphi, i) \leq \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * (R(j, i) \rightarrow \hat{e}(\varphi, i))).$$

Pero como estamos en un retículo residuado, por el ítem 3 del Teorema 2.1 y notando que por simetría $R(i, j) = R(j, i)$ para todo $j \in W$, tenemos que

$$\bigvee_{j \in W} (R(i, j) * (R(j, i) \rightarrow \hat{e}(\varphi, i))) \leq (\bigvee_{j \in W} \hat{e}(\varphi, i)) = \hat{e}(\varphi, i)$$

por lo que

$$\hat{e}(\Diamond \Box \varphi, i) \leq \hat{e}(\varphi, i) \iff 1 \leq \hat{e}(\Diamond \Box \varphi, i) \rightarrow \hat{e}(\varphi, i) = \hat{e}(\Diamond \Box \varphi \rightarrow \varphi, i)$$

lo que muestra que vale la fórmula.

Para el recíproco, consideremos el siguiente modelo. Sean i, j fijos y sea p una variable tal que su evaluación está dada por

$$\hat{e}(p, k) = \begin{cases} R(j, i) & \text{si } k = i, \\ 1 & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

Tenemos por hipótesis que

$$\hat{e}(\Diamond \Box p, i) \leq \hat{e}(p, i) = R(j, i).$$

Ahora, notemos que

$$\hat{e}(\Box p, j) = \bigwedge_{k \in W} (R(j, k) \rightarrow \hat{e}(p, k)) = R(j, i) \rightarrow R(j, i) = 1$$

pues en cualquier otro caso tenemos algo de la forma $R(j, l) \rightarrow 1 = 1$. Por lo tanto

$$\hat{e}(\Diamond \Box p \rightarrow p, i) = \bigvee_{u \in W} (R(i, u) * \hat{e}(\Box p, u)) \geq R(i, j) * \hat{e}(\Box p, j) = R(i, j).$$

Luego, combinando obtenemos

$$R(i, j) \leq \hat{e}(\Diamond \Box p \rightarrow p, i) \leq \hat{e}(p, i) = R(j, i)$$

lo que implica $R(i, j) \leq R(j, i)$. Si ahora tomamos un modelo donde la evaluación $\hat{e}'$ cambia por $R(i, j)$ y evaluamos en j , razonando de manera análoga obtenemos $R(j, i) \leq R(i, j)$. Luego concluimos que $R(i, j) = R(j, i)$ lo que muestra que R es simétrica como queríamos ver. $\square$

Teorema 2.14

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$ es válida en F si y sólo si R simétrica multivaluada.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco simétrico multivaluado y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{\mathbf{e}} \rangle$ un modelo de Kripke multivaluado. Sea $i \in W$. Explicitemos la evaluación de la fórmula. Esto es

$$\hat{\mathbf{e}}(\varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi, i) = \hat{\mathbf{e}}(\varphi, i) \rightarrow \left(\bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \left(\bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)) \right)) \right).$$

Lo primero que hacemos es trabajar un poco la expresión, aplicando la propiedad 10* del Teorema 2.1, y así obtenemos

$$\hat{\mathbf{e}}(\varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi, i) = \left(\bigwedge_{j \in W} (\hat{\mathbf{e}}(\varphi, i) \rightarrow (R(i, j) \rightarrow \left(\bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)) \right))) \right).$$

Por el ítem 3 del Teorema 2.1 tenemos que

$$\hat{\mathbf{e}}(\varphi, i) \rightarrow (R(i, j) \rightarrow \left(\bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)) \right)) = \hat{\mathbf{e}}(\varphi, i) * R(i, j) \rightarrow \left(\bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)) \right).$$

Acá es donde usamos la simetría de R , y reemplazamos $R(i, j)$ por $R(j, i)$. Al hacer esto notamos que

$$\left(\hat{\mathbf{e}}(\varphi, i) * R(j, i) \rightarrow \left(\bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k)) \right) \right) = 1$$

si y sólo si

$$\hat{\mathbf{e}}(\varphi, i) * R(j, i) \leq \bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, k))$$

lo cual sucede siempre por ser un supremo. Luego obtuvimos que

$$\hat{\mathbf{e}}(\varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi, i) = 1.$$

Para el recíproco, consideremos el siguiente modelo. Sean i, j fijos y sea p una variable tal que su evaluación está dada por

$$\hat{\mathbf{e}}(p, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

Tenemos que como vale la fórmula

$$\hat{e}(p, i) = 1 \leq \hat{e}(\Box \Diamond p, i) = \bigwedge_{l \in W} \left(R(i, l) \rightarrow \left(\bigvee_{k \in W} (R(l, k) * \hat{e}(p, k)) \right) \right).$$

Pero esto último, por la evaluación, se reduce a

$$\bigwedge_{l \in W} \left(R(i, l) \rightarrow \left(\bigvee_{k \in W} (R(l, k) * \hat{e}(p, k)) \right) \right) = \bigwedge_{l \in W} (R(i, l) \rightarrow R(l, i))$$

que por ser ínfimo

$$\bigwedge_{l \in W} (R(i, l) \rightarrow R(l, i)) \leq R(i, j) \rightarrow R(j, i)$$

lo cual por residuación equivale a

$$R(i, j) \leq R(j, i).$$

Si tomamos un modelo donde la evaluación de p en k esté dada por 1 si $k = j$ y 0 en cualquier otro caso, análogamente llegamos a que

$$R(j, i) \leq R(i, j)$$

lo cual combinando ambas desigualdades obtenemos

$$R(i, j) = R(j, i)$$

lo cual muestra que R es simétrica. □

2.6.5. Reflexividad

Teorema 2.15

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\Box \varphi \rightarrow \varphi$ es válida en F si y sólo si R reflexiva multivaluada.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco reflexivo multivaluado y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo de Kripke multivaluado. Sea $i \in W$. Calculemos primero la evaluación de $\hat{e}(\Box \varphi \rightarrow \varphi, i)$. Esto es, considerando que $\hat{e}$ es un morfismo,

$$\hat{e}(\Box \varphi \rightarrow \varphi, i) = \bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(\varphi, j)) \rightarrow \hat{e}(\varphi, i).$$

Pero, como $R(i, i) = 1$, tenemos que

$$\bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(\varphi, j)) \leq (R(i, i) \rightarrow \hat{e}(\varphi, i)) = (1 \rightarrow \hat{e}(\varphi, i)) = \hat{e}(\varphi, i)$$

y entonces por residuación se concluye que vale la fórmula.

Por otro lado, para ver el recíproco consideremos el siguiente modelo con i fijo donde la evaluación de la variable p está dada por

$$\hat{e}(p, j) = \begin{cases} R(i, i), & \text{si } j = i, \\ 1, & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Sabemos que $\hat{e}(\Box\varphi \rightarrow \varphi, i) \geq 1$. Además, como $\hat{e}(p, i) \rightarrow 1 = 1$ siempre, tenemos que en el modelo

$$\bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(p, j)) = R(i, i) \rightarrow R(i, i) = 1.$$

Considerando esto, y como por hipótesis

$$\bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(p, j)) \rightarrow R(i, i) = 1$$

y por residuación obtenemos

$$R(i, i) \geq \bigwedge_{j \in W} (R(i, j) \rightarrow \hat{e}(\varphi, j)) * 1 = 1 * 1 = 1$$

que implica $R(i, i) = 1$. □

Teorema 2.16

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R reflexiva multivaluada.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco reflexivo multivaluado y $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo de Kripke multivaluado. Sea $i \in W$. Como R es reflexiva, notemos que

$$\bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{e}(\varphi, j)) \geq R(i, i) * \hat{e}(\varphi, i) = \hat{e}(\varphi, i).$$

El término de la izquierda es exactamente la evaluación de $\Diamond\varphi$ en i . Por lo tanto tenemos que

$$\hat{e}(\Diamond\varphi, i) \geq \hat{e}(\varphi, i)$$

lo cual por residuación es equivalente a

$$\hat{e}(\varphi, i) \rightarrow \hat{e}(\Diamond \varphi, i) \geq 1$$

lo cual muestra que vale la fórmula si R es reflexiva.

Para el recíproco, consideremos el siguiente modelo donde sea i fijo con la siguiente evaluación

$$\hat{e}(p, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i, \\ 0, & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Queremos ver que si vale la fórmula entonces $R(i, i) = 1$ para todo i . Si evaluamos la fórmula obtenemos

$$\hat{e}(p \rightarrow \Diamond p, i) = \hat{e}(p, i) \rightarrow \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{e}(p, j)) \geq 1$$

lo cual por residuación es equivalente a

$$\bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{e}(p, j)) \geq \hat{e}(p, i) = 1.$$

Sin embargo, notemos que este supremo sobrevive solo cuando $j = i$. Entonces

$$1 \leq \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{e}(p, j)) = R(i, i) * \hat{e}(p, i) = R(i, i)$$

y entonces $R(i, i) = 1$ que era lo que queríamos ver. $\square$

2.7. La fórmula E5 y la propiedad J5

En esta sección presentamos la fórmula E5 y una nueva propiedad de las relaciones binarias, J5, que caracterizará a los marcos que satisfacen E5. Además, veremos como se relaciona J5 con algunas otras propiedades de las relaciones multivaluadas. Algunas de estas ideas están basadas en [5, 8]. Todo lo que trabajemos alrededor de E5 y J5 es considerado siempre en el álgebra $\mathbf{L}_n$.

Definición 2.12

Sean $\varphi, \psi \in \text{Form}$. Denotamos por E5 a la siguiente fórmula

$$(E5) \quad \Diamond \varphi * \Diamond \psi \leftrightarrow \Diamond (\varphi * \Diamond \psi).$$

Observación 2.4

Esta fórmula, de manera similar a lo presentado anteriormente, tiene expresión dual (ver por ejemplo [16])

$$\Box(\varphi \rightarrow \Box\psi) \leftrightarrow \Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi.$$

Otra cuestión notable es que en el caso clásico la fórmula (E5) se simplifica a (ver [1])

$$\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi = \Diamond(\varphi \wedge \Diamond\psi)$$

pues en ese caso $*$ = $\wedge$.

Definición 2.13

Denotamos por J5 a la siguiente propiedad de una relación binaria multivaluada.

$$(J5) \quad R(i, j) * R(i, k) = R(i, j) * R(j, k)$$

para todo i, j, k en el universo correspondiente al retículo donde se evalúa R (en este caso $\mathbf{L}_n$).

La relación entre E5 y J5 es lo esperable en vista de lo que estuvimos haciendo en la sección anterior.

Teorema 2.17

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado.

La fórmula E5 es válida en F si y sólo si R satisface J5.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{L}_n$ -valuado y $\mathcal{M}$ un modelo con F como marco subyacente. Sea $i \in W$. Para empezar probemos que E5 es válida en F si R satisface J5. Notemos lo siguiente

$$\hat{\mathbf{e}}(\Diamond(\varphi * \Diamond\psi), i) = \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi * \Diamond\psi)).$$

Aplicando la definición de la evaluación del diamante y por ser la evaluación un morfismo tenemos

$$\begin{aligned} \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi * \Diamond\psi)) &= \bigvee_{j \in W} (R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, j) * \hat{\mathbf{e}}(\Diamond\psi, j)) \\ &= \bigvee_{j \in W} \left(R(i, j) * \hat{\mathbf{e}}(\varphi, j) * \left(\bigvee_{k \in W} (R(j, k) * \hat{\mathbf{e}}(\psi, k)) \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \bigvee_{j,k \in W} (R(i, j) * \hat{e}(\varphi, j) * R(j, k) * \hat{e}(\psi, k)).$$

En este último término, recordando que $*$ conmuta, podemos aplicar la propiedad J5 y obtenemos

$$\begin{aligned} \bigvee_{j,k \in W} (\hat{e}(\varphi, j) * R(i, j) * R(j, k) * \hat{e}(\psi, k)) &= \bigvee_{j,k \in W} (\hat{e}(\varphi, j) * R(i, j) * R(i, k) * \hat{e}(\psi, k)) \\ &= \left(\bigvee_{j \in W} R(i, j) * \hat{e}(\varphi, j) \right) * \left(\bigvee_{k \in W} R(i, k) * \hat{e}(\psi, k) \right) \\ &= \hat{e}(\Diamond \varphi, i) * \hat{e}(\Diamond \psi, i) \end{aligned}$$

Resumiendo, obtuvimos que

$$\hat{e}(\Diamond(\varphi * \Diamond \psi), i) = \hat{e}(\Diamond \varphi, i) * \hat{e}(\Diamond \psi, i)$$

lo que muestra que el E5 vale.

Para el recíproco, consideremos el siguiente modelo con j, k fijos y la siguiente evaluación para las variables p y q .

$$\hat{e}(p, l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l = j, \\ 0, & \text{si } l \neq j \end{cases}$$

y

$$\hat{e}(q, l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l = k, \\ 0, & \text{si } l \neq k. \end{cases}$$

Tomemos un i , entonces estudiemos las evaluaciones de $\Diamond p * \Diamond q$ y $\Diamond(p * \Diamond q)$. Para empezar

$$\hat{e}(\Diamond p, i) = \bigvee_{l \in W} (R(i, l) * \hat{e}(p, l)) = R(i, j).$$

Similarmente, $\hat{e}(\Diamond q, i) = R(i, k)$. Entonces porque la evaluación es morfismo

$$\hat{e}(\Diamond p * \Diamond q, i) = R(i, j) * R(i, k).$$

Por otra parte

$$\hat{e}(p * \Diamond q, l) = \hat{e}(p, l) * R(l, k)$$

donde esto es 0 si $l \neq j$ ó $R(j, k)$ si $l = j$. Si evaluamos el diamante de esta fórmula obtenemos

$$\hat{e}(\Diamond(p * \Diamond q), i) = \bigvee_{l \in W} (R(i, l) * \hat{e}(p * \Diamond q, l)) = R(i, j) * R(j, k).$$

Como la fórmula vale, tenemos que estas dos evaluaciones coinciden en todo i , esto es

$$R(i, j) * R(i, k) = R(i, j) * R(j, k)$$

que era lo que queríamos ver. Luego queda probada la correspondencia entre E5 y J5. $\square$

Notemos algunos resultados vinculados con esta propiedad, los cuales anticipan parte de lo que desarrollaremos en el próximo capítulo.

Un aspecto adicional a destacar es la conexión de J5 con las propiedades de transitividad y euclidianidad de la relación de accesibilidad.

Teorema 2.18

Sea $F = \langle W, R \rangle$ es un marco $\mathbf{L}_n$ -valuado. Si R satisface J5 entonces R es transitiva, euclidiana y débilmente booleana.

Demostración:

Sea $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{L}_n$ -valuado. Recordemos que en la Definición 2.11 mencionamos que R es débilmente booleana si y sólo si $R(i, j) = 1$ implica que $R(k, j)$ es 0 o 1 siempre. Este teorema surge de notar que si vale J5 entonces

$$R(i, j) * R(j, k) = R(i, j) * R(i, k) \leq R(i, k)$$

y que

$$R(i, j) * R(i, k) = R(i, j) * R(j, k) \leq R(j, k)$$

que son exactamente las definiciones de transitividad y euclidianidad en el caso multivaluado.

Para ver que implica débilmente booleana, notemos que si $R(i, j) = 1$

$$R(j, j) = R(i, j) * R(j, j) = R(i, j) * R(i, j) = 1$$

por J5. Ahora, si aplicamos nuevamente J5 de la siguiente manera

$$R(k, j) = R(k, j) * R(j, j) = R(k, j) * R(k, j) = R(k, j)^2$$

lo cual es en resumen

$$R(k, j)^2 = R(k, j)$$

lo cual en $\mathbf{L}_n$ sucede si y sólo si $R(k, j) = 1$ ó 0 que era lo que queríamos demostrar $\square$

Por otra parte, requiriendo que R sea fuertemente serial, obtenemos el siguiente

resultado.

Teorema 2.19

Sea $F = \langle W, R \rangle$ es un marco $\mathbf{L}_n$ -valuado. Si R es transitiva, euclidiana, fuertemente serial y débilmente booleana entonces R satisface J5.

Demostración:

Sea i un punto en W . Como R es fuertemente serial existe un $l \in W$ tal que $R(i, l) = 1$. Notemos que como R es euclidiana, tenemos que

$$R(i, l) * R(i, l) \leq R(l, l)$$

y por lo tanto $R(l, l) = 1$. Por otro lado, sea $j \in W$. Como R es débilmente booleana tenemos dos posibilidades para $R(j, l)$. Si $R(j, l) = 0$, por euclidianidad

$$R(i, j) = R(i, j) * R(i, l) \leq R(j, l) = 0$$

lo que implica que $R(i, j) = 0$. Luego, obtenemos que

$$R(i, j) * R(j, k) = 0 * R(j, k) = 0 * R(i, k) = R(i, j) * R(i, k)$$

Consideremos ahora si $R(j, l) = 1$. En este caso, nos hace faltar notar que si para cualesquiera mundos i, i', j, k en W , si

$$R(i, j) = R(i', j) = 1$$

entonces

$$R(i, k) = R(i', k).$$

Esto es porque

$$R(i, k) = R(i, j) * R(i, k) \leq R(j, k) = R(i', j) * R(j, k) \leq R(i', k).$$

Similarmente, cambiando las posiciones de i e i' obtenemos que $R(i', k) \leq R(i, k)$ y por lo tanto $R(i, k) = R(i', k)$. Ahora, como $R(i, l) = R(j, l) = 1$, por toda esta observación, para cualquier otro k en W tenemos que $R(i, k) = R(j, k)$. Luego

$$R(i, j) * R(j, k) = R(i, j) * R(i, k)$$

que era lo que queríamos demostrar.

□

Lamentablemente un recíproco del Teorema 2.18 no es alcanzable, como lo muestra

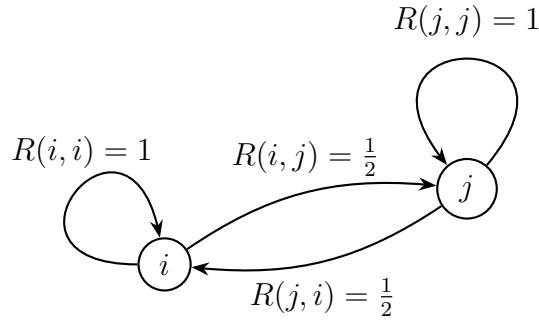
el siguiente resultado.

Teorema 2.20

Sea $F = \langle W, R \rangle$ es un marco $\mathbf{L}_n$ -valuado. Si R es transitiva, euclidiana y fuertemente serial esto no implica que R satisface J5.

Demostración:

Consideremos el siguiente modelo con dos puntos $\{i, j\}$ donde $R(i, j) = R(j, i) = \frac{1}{2}$ y $R(i, i) = R(j, j) = 1$. Claramente este marco es transitivo, euclidiano y serial.



Pero

$$R(i, j) * R(i, j) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0 \neq R(i, j) * R(j, j) = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}.$$

□

2.8. Comentarios

En este capítulo introdujimos los conceptos de retículos residuados, presentamos sus propiedades y algunos ejemplos relevantes. Luego expusimos los sistemas lógicos modales multivaluados sobre estos retículos con el fin de generalizar los resultados del Teorema 1.6. En el siguiente teorema resumimos todos esos resultados.

Teorema 2.21

Si $\mathbf{A}$ es un retículo residuado finito y $F = \langle W, R \rangle$ un marco $\mathbf{A}$ -valuado, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

- La fórmula $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R es serial multivaluada.
- La fórmula $\Diamond 1$ es válida en F si y sólo si $\bigvee_{j \in W} R(i, j) = 1$ para todo i .
- La fórmula $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ es válida en F si y sólo si R es transitiva multivaluada.

- La fórmula $\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R es transitiva multivaluada.
- La fórmula $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$ es válida en F si y sólo si R es euclidiana multivaluada.
- La fórmula $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R es euclidiana multivaluada.
- La fórmula $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$ es válida en F si y sólo si R simétrica multivaluada.
- La fórmula $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R simétrica multivaluada.
- La fórmula $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ es válida en F si y sólo si R reflexiva multivaluada.
- La fórmula $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ es válida en F si y sólo si R reflexiva multivaluada.

Por último presentamos la propiedad J5 y la fórmula E5 junto con algunas propiedades motivacionales que tendrán más sentido en el capítulo que viene. Si bien tratamos los resultados de la Sección 2.7. en $\mathbf{L}_n$, la demostración del Teorema 2.17 de correspondencia, del Teorema 2.19 y del Teorema 2.20 son admisibles sobre cualquier retículo residuado $\mathbf{A}$. A los efectos de nuestros objetivos esto no resultaba particularmente relevante. Sobre las propiedades motivacionales, es importante reiterar que su análisis solo es válido en $\mathbf{L}_n$ pues en $\mathbf{G}_n$ no son necesariamente ciertas.

3. Marcos Semiuniversales Multivaluados

En este capítulo nos concentramos en estudiar una posible generalización de la idea de marcos simplificados presentada en el primer capítulo y del resultado enunciado en el Teorema 1.11, donde pospusimos la demostración de la equivalencia entre las lógicas determinadas por $Sim \setminus Emp$ y los marcos transitivos, euclidianos y seriales¹⁸. Primero introdujimos algunos conceptos preliminares sobre conjuntos difusos (que pueden profundizarse en [10]). Toda esta sección la desarrollamos considerando únicamente el álgebra $\mathbf{L}_n$. Luego, el análisis resultó muy similar al realizado en la Sección 1.6.

3.1. Conjuntos difusos y relaciones semiuniversales multivaluadas

En esta sección introduciremos un concepto de utilidad, los *conjuntos difusos* (ver [10]).

Definición 3.1

Un **conjunto difuso** es un par (W, π) donde W es un conjunto no vacío y $\pi : W \rightarrow \mathbf{L}_n$ para algún n natural.

Para $x \in W$, decimos que $\pi(x)$ es **grado de posibilidad** de x .

Este concepto de conjunto difuso nos será de relevancia para generalizar los conceptos de relación semiuniversal y universal al caso multivaluado. Observemos que si bien el álgebra donde evaluamos es $\mathbf{L}_n$, en general podrían considerarse otras álgebras.

Definición 3.2

Diremos que una relación binaria multivaluada $R : W \times W \rightarrow \mathbf{L}_n$ es **semiuniversal** si cumple que

$$R(i, j) = \pi(j)$$

para todo $i, j \in W$ donde (W, π) es un conjunto difuso.

Notemos que si una relación R es semiuniversal entonces depende solo de la segunda coordenada.

Damos ahora algunas definiciones complementarias al concepto de conjunto difuso.

¹⁸En nuestro contexto multivaluado, recordemos que la serialidad clásica corresponde a la serialidad fuerte.

Definición 3.3

Si (W, π) es un conjunto difuso, definimos el siguiente conjunto (no difuso): para $\alpha \in \mathbb{L}_n$ denotamos

$$W^{=\alpha} = \{x \in W : \pi(x) = \alpha\}.$$

Es decir, es el conjunto de elementos en W con grado de posibilidad α .

Veamos ahora una variación del Teorema 1.3.

Teorema 3.1

Sea R una relación binaria multivaluada semiuniversal en un conjunto difuso (W, π) . Entonces se cumple que

1. R es transitiva y euclidiana.
2. R es reflexiva si y sólo si $W^{=1} = W$.
3. R es simétrica si y sólo si $W^{=\alpha} = W$ para algún $\alpha \in \mathbb{L}_n$.
4. R es fuertemente serial si y sólo si $W^{=1} \neq \emptyset$.

Demostración:

1. Sea R una relación binaria multivaluada semiuniversal en W . Esto es,

$$R(i, j) = \pi(j)$$

para todo $i, j \in W$. Entonces, la propiedad de transitividad se reescribe como

$$\bigvee_{j \in W} R(i, j) * R(j, k) = \bigvee_{j \in W} \pi(j) * \pi(k) = \bigvee_{j \in W} (\pi(j)) * \pi(k) \leq \pi(k) = R(i, k)$$

lo cual muestra que R es transitiva pues esto se cumple siempre.

Similarmente para la euclidianidad

$$\bigvee_{j \in W} R(i, j) * R(i, k) = \bigvee_{j \in W} \pi(j) * \pi(k) \leq \pi(k) = R(j, k).$$

2. Sea R una relación binaria multivaluada reflexiva y semiuniversal en W . Esto es, para todo $i \in W$ se cumple que

$$R(i, i) = 1 = \pi(i).$$

Luego $\pi(i) = 1$ para todo $i \in W$ lo que implica que $i \in W^{=1}$. Luego $W^{=1} = W$ pues

$$W^{=1} \subseteq W.$$

Por otra parte, si $W^{=1} = W$ entonces para todo $i, j \in W$ tenemos que

$$R(i, j) = \pi(j) = 1.$$

Tomando $j = i$ obtenemos que R es reflexiva.

3. Sea R una relación binaria multivaluada simétrica y semiuniversal en W . Esto es, para todo $i, j \in W$ se cumple que

$$R(i, j) = \pi(j) = \pi(i) = R(j, i).$$

Luego, $\pi(x) = \alpha \in X$ para todo $x \in W$. Así $W^{=\alpha} = W$. Por otro lado, si $W^{=\alpha} = W$ para algún α , y sean $i, j \in W$, obtenemos que

$$R(i, j) = \pi(j) = \alpha = \pi(i) = R(j, i)$$

lo que muestra que R es simétrica.

4. Sea R una relación binaria multivaluada fuertemente serial y semiuniversal. Esto es, para todo $i \in W$ existe un $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$. Pero entonces

$$R(i, j) = \pi(j) = 1.$$

Esto quiere decir que existe al menos un $j \in W^{=1}$ y por lo tanto $W^{=1} \neq \emptyset$. Si $W^{=1} \neq \emptyset$, y sea $j \in W^{=1}$. Entonces para todo $i \in W$

$$R(i, j) = \pi(j) = 1.$$

Luego R es fuertemente serial.

□

3.2. Las clases Sim_N y $\mathcal{W}$

Con el objetivo de generar un resultado análogo al del Teorema 1.13, presentamos la definición de las siguientes clases de marcos. A partir de este punto W siempre toma el rol de un conjunto difuso con su correspondiente función de grados de posibilidad asociada π .

Definición 3.4

Un marco multivaluado $F = \langle W, R \rangle$ se dice **semiuniversal** si su relación es semiuniversal. En tal caso escribiremos $F = \langle W, \pi \rangle$. Diremos que un marco

semiuniversal $F = \langle W, \pi \rangle$ es **normalizado** si existe $j \in W$ tal que $\pi(j) = 1$.

Denotamos por Sim_N a la clase de marcos multivaluados semiuniversales normalizados y denotamos por $\mathcal{W}$ a la clase de marcos multivaluados transitivos, euclidianos, fuertemente seriales, débilmente booleanos.

Aparece nuevamente en un resultado relativamente trivial sobre la propiedad J5 alrededor de los marcos semiuniversales.

Teorema 3.2

Todos los marcos semiuniversales $\langle W, R \rangle$ cumplen que R satisface J5.

Demostración:

Recordemos que un marco semiuniversal es uno donde $R(i, j) = \pi(j)$. Por lo tanto, es directo de la definición que

$$R(i, j) * R(i, k) = \pi(j) * \pi(k) = R(i, j) * R(j, k)$$

para todo i, j, k . □

Para empezar a estudiar estos marcos, comencemos con el siguiente teorema.

Teorema 3.3

Sim_N es una clase propia de $\mathcal{W}$.

Demostración:

Por un lado veamos que cualquier marco en Sim_N cumple todas las propiedades de los marcos en $\mathcal{W}$. Sea F un marco semiuniversal normalizado. En el teorema 3.1 mostramos que estos marcos son transitivos y euclidianos. Además, si es normalizado, tenemos que existe $j \in W$ tal que

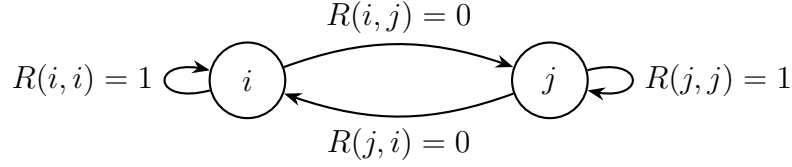
$$R(i, j) = \pi(j) = 1$$

para todo $i \in W$ lo cual muestra que es fuertemente serial. Por último, si para algún $k \in W$ tenemos que $\pi(k) = 1$, entonces

$$R(i, k) = \pi(k) = 1$$

para todo i lo cual muestra que si $R(i, k) = 1$ entonces $R(j, k)$ toma valores booleanos (es siempre 1) para todo j . Con esto concluimos que $Sim_N \subset \mathcal{W}$.

Veamos que es una clase propia con un contraejemplo. Consideremos el siguiente marco $W = \{i, j\}$ con $R(i, i) = R(j, j) = 1$ y $R(i, j) = R(j, i) = 0$.



Claramente no es semiuniversal pues $R(i, j) = 0 \neq 1 = R(j, j)$. Sin embargo, es transitivo pues $R(i, j) * R(j, i) = R(j, i) * R(i, j) \leq R(i, i) = R(j, j)$. Similarmente se ve que es euclidiano. Es fuertemente serial pues $R(i, i) = 1$ y $R(j, j) = 1$ y es trivialmente débilmente booleana pues la relación es booleana. Por lo tanto, tenemos que $Sim_N \subsetneq \mathcal{W}$ que era lo que queríamos ver. □

A pesar de que las clases de marcos en cuestión no coinciden exactamente, como vimos anteriormente, mostraremos que, sin embargo, determinan las mismas lógicas. Para establecer este hecho, nuestra estrategia será particionar los marcos de $\mathcal{W}$ de modo tal que cada una de las partes pueda representarse mediante un marco semiuniversal normalizado en Sim_N . Con este fin, consideremos la siguiente relación entre puntos de un marco en $\mathcal{W}$.

Definición 3.5

Sean $i, j \in W$, $F = \langle W, R \rangle \in \mathcal{W}$. Diremos que

$$i \sim j \text{ en } W \text{ si y sólo si existe } k \in W \text{ tal que } R(i, k) = R(j, k) = 1.$$

Claramente si queremos particionar el marco F , necesitamos que $\sim$ sea de equivalencia. Esto es el siguiente teorema.

Teorema 3.4

Sea $F = \langle W, R \rangle \in \mathcal{W}$. Entonces $\sim$ en W es de equivalencia.

Antes de demostrar este teorema, vale la pena hacer las siguientes observaciones.

Observación 3.1

Sea $F = \langle W, R \rangle \in \mathcal{W}$ y sean $i, j \in W$,

- si $i \approx j$ entonces $R(i, j) = 0$.
- si $i \sim j$ entonces para todo $u \in W$ tenemos que $R(i, u) = R(j, u)$.

Demostremos estas afirmaciones antes de pasar al teorema.

Demostración:

Por un lado, queremos ver qué sucede si dos elementos no están relacionados por $\sim$. Sean $i, j \in W$ tales que $i \not\sim j$. Supongamos además que $R(i, j) \neq 0$. Por serialidad de los marcos en $\mathcal{W}$, existe $u \in W$ tal que $R(i, u) = 1$. Como estos marcos son débilmente booleanos, esto implica que $R(j, u) = 1$ o 0 . Si $R(j, u) = 0$, tendríamos

$$0 < R(i, j) = R(i, j) * R(i, u) = R(i, j) * R(j, u) \leq R(j, u) = 0,$$

lo cual constituye un absurdo. Por lo tanto, debe ser $R(j, u) = 1$ y entonces $i \sim j$, lo que contradice nuestra hipótesis inicial. Concluimos entonces que necesariamente $R(i, j) = 0$ si $i \not\sim j$.

Por otro lado, veamos qué sucede si $i \sim j$. Sea $k \in W$ tal que $R(i, k) = R(j, k) = 1$, y sea $u \in W$. Entonces,

$$R(i, u) = R(i, k) * R(k, u) \leq R(j, k) * R(k, u) \leq R(j, u),$$

y, de manera análoga,

$$R(j, u) = R(j, k) * R(k, u) \leq R(i, k) * R(k, u) \leq R(i, u).$$

Por lo tanto, concluimos que $R(i, u) = R(j, u)$ para todo $u \in W$.

□

Probemos ahora que $\sim$ es efectivamente una equivalencia.

Demostración Teorema 3.4.:

Claramente $i \sim i$ pues por serialidad $R(i, u) = 1$ para algún $u \in W$. Por otro lado, la condición es trivialmente simétrica pues está basada en una igualdad. Por último, para ver que es transitiva, sean $i, j, k \in W$ tal que $i \sim j$ y $j \sim k$. Sea $v \in W$ tal que $R(j, v) = R(k, v) = 1$. Por la observación anterior tenemos que como $i \sim j$

$$R(i, v) = R(j, v) \text{ para todo } v \in W.$$

Como $R(j, v) = 1$ tenemos que $R(i, v) = 1$ y por lo tanto existe $v \in W$ tal que

$$R(i, v) = R(k, v) = 1 \iff i \sim k$$

que era lo que queríamos ver. Luego $\sim$ es una equivalencia.

□

Lo que nos interesa de esta equivalencia, es que de su definición podemos ver

que dentro de las clases de equivalencia podemos restringir a R en términos de una función que depende solo de la segunda coordenada. Esto queda expresado en el siguiente resultado.

Teorema 3.5

Sea $F = \langle W, R \rangle \in \mathcal{W}$ y sea W_i la clase de equivalencia de $i \in W$ en $\sim$. Entonces el marco dado por $F_i = \langle W_i, R|_{W_i \times W_i} \rangle$ es semiuniversal normalizado. Esto es, existe $\pi_{F_i} : W_i \rightarrow \mathbf{L}_n$ tal que

$$R|_{W_i \times W_i}(i, j) = \pi_{F_i}(j)$$

y un $u \in W$ tal que $\pi_{F_i}(u) = 1$.

Demostración:

Este teorema es principalmente consecuencia de la Observación 3.1. Esto es, dentro de una clase de equivalencia tenemos que $R(i, u) = R(j, u)$ para todo $u \in W$ e $i, j \in W_i$. Por otro lado, $R(i, j) = 0$ para todo $j \notin W_i$. Es razonable entonces definir π_{F_i} de la siguiente forma. Sea $i \in W_i$ fijo. Definimos

$$\pi_{F_i}(j) = R(i, j)$$

La observación 3.1 garantiza la buena definición de π_{F_i} . Esto muestra que es $R|_{W_i \times W_i}$ es semiuniversal pues si $k \in W_i$, como $R(k, u) = R(i, u)$ para todo $u \in W$, tenemos que $R(k, u) = R(i, u) = \pi_{F_i}(u)$. Es además normalizada pues como $\sim$ es reflexiva, existe un $u \in W$ tal que $R|_{W_i \times W_i}(i, u) = \pi_{F_i}(u) = 1$. $\square$

Este proceso desarrollado en la demostración del Teorema 3.5 de armar una función para cada clase de equivalencia lo podemos hacer para todas las clases. Por lo tanto, podemos afirmar directamente el siguiente resultado como corolario de la construcción hecha.

Teorema 3.6

Con la notación del teorema 3.5 y sea un marco $F = \langle W, R \rangle \in \mathcal{W}$. Entonces

$$W = \bigcup_{k \in I} W_k$$

donde I es un conjunto de representantes de las clases de equivalencias inducidas por $\sim$, y

$$R(i, j) = \begin{cases} \pi_{F_i}(j) & \text{si } j \in W_i, \\ 0 & \text{si } j \notin W_i. \end{cases}$$

Esto es, el marco F admite una representación en términos de marcos semiuniversales normalizados.

Este último teorema es la herramienta que necesitábamos para llegar al resultado principal de esta sección.

Teorema 3.7

Las lógicas determinadas por las clases de marcos Sim_N y $\mathcal{W}$ son las mismas.

Demostración:

Para empezar, si una fórmula φ vale en $\mathcal{W}$ tenemos por el Teorema 3.3 que vale también en Sim_N .

Por otro lado, sea ψ una fórmula que vale en Sim_N . Esto es, para cualquier marco $F \in Sim_N$, en cualquier modelo que tenga a F como marco subyacente se tiene que vale ψ . Veamos que entonces ψ debe valer en la clase $\mathcal{W}$. Para ver esto, sea F un marco en $\mathcal{W}$. Por el Teorema 3.6 sabemos que el marco F admite una descomposición en base a marcos semiuniversales normalizados F_i donde i indexa esos marcos. Pero por hipótesis la fórmula ψ vale cada uno de ellos pues para todo i se cumple que $F_i \in Sim_N$. Sin embargo, todavía no podemos concluir pues falta analizar que sucede fuera de los bloques de la descomposición. En el caso de fórmulas no modales, la validez no depende de la relación de accesibilidad, pues es una propiedad puntual.

En el caso de fórmulas modales, el análisis es sencillo observando las definiciones de las evaluaciones del diamante y la caja. Si tenemos una fórmula del tipo $\varphi = \Diamond\psi$, entonces su evaluación en un punto i depende de un supremo de términos $R(i, j) * \hat{e}(\psi, j)$ y como para todo $j \notin W_i$ tenemos que $R(i, j) = 0$, colapsan a cero y dependen de la evaluación dentro del bloque $W_i \times W_i$. Similarmente si $\varphi = \Box\psi$ como tenemos un ínfimo de términos del estilo $R(i, j) \rightarrow \hat{e}(\psi, j)$, en todos los casos que $R(i, j) = 0$ los términos se reducen a $0 \rightarrow \hat{e}(\psi, j) = 1$ y no aportan al ínfimo. Con ello nuevamente la evaluación depende solo del bloque de la clase de i .

Con esto podemos concluir que ψ vale en F donde F era un marco cualquiera en $\mathcal{W}$. Luego ψ vale en $\mathcal{W}$.

Como vimos que ψ vale en Sim_N si y sólo si vale en $\mathcal{W}$, concluimos que determinan las mismas lógicas. □

3.3. Comentarios

Este último teorema es efectivamente una generalización del enunciado del Teorema 1.11 pues las relaciones binarias clásicas son trivialmente débilmente booleanas. Además, como en el contexto clásico (K) es siempre válido y J5 es una generalización

de las propiedades de transitividad y euclidianidad, podemos también concluir que **KD45** está definida por los marcos de Sim_N .

4. Epílogo

Este trabajo podría decirse es un primer acercamiento al estudio mediante semánticas de Kripke de sistemas lógicos modales multivaluados. Más allá de los resultados que presentamos, lo desarrollado invita a reflexionar sobre problemas de índole similar o cuestiones que no zanjamos aquí.

En el primer y segundo capítulo estudiamos equivalencias entre fórmulas y propiedades de la relación de accesibilidad. Una primera pregunta puede ser respecto a otras fórmulas que tengan correspondencia con propiedades de la relación R . Algunas que advertimos pero no abordamos durante el desarrollo de este trabajo fueron

$$(\text{Teheux, [17]}) \quad \Diamond\varphi * \Diamond\psi = \Diamond(\varphi * \psi)$$

$$(\text{Castaño et al., [7]}) \quad \Diamond\varphi * \Diamond\varphi = \Diamond(\varphi * \varphi).$$

$$(\text{Castaño et al., [7]}) \quad \Box(\varphi \vee \Box\psi) = \Box\varphi \vee \Box\psi$$

Una cuestión en la que no profundizamos pero podría ser interesante es ver la extensión de un análisis similar a sistemas con otras modalidades (no necesariamente binarias). Muchos ejemplos hay en la literatura (ver [2]) de modelos que incluyen más que el $\Diamond$ o $\Box$.

En el último capítulo estudiamos la clase $\mathcal{W}$ y una pregunta que surge es qué sucede con la axiomatización de $\mathcal{W}$. Esta tiene una respuesta (parcial, pues es en algunos casos particulares de retículos residuados) y es que si está axiomatizada en [5] pero se requiere un conocimiento profundo de álgebra universal, especialmente cuasivariiedades y cuasiecuaciones (que no estudiamos en el marco de este trabajo). Estas herramientas son las estándar para estudiar las semánticas algebraicas del tipo de sistemas lógicos vistos.

En resumen, lo desarrollado termina más bien a las puertas de un problema de alcance mucho más amplio. Las cuestiones mencionadas en estas reflexiones sugieren una agenda de investigación con la expectativa de que la interacción entre lo algebraico y las semánticas de Kripke contribuyan a una mejor comprensión de las lógicas no clásicas.

5. Anexo

Anexo 5.1

Demostración del Teorema 1.4.

Sea R una relación de equivalencia en W . Definimos para cada $i \in W$ el conjunto $[i] = \{j \in W : R(i, j) = 1\}$.

Demostración:

- 1** $i \in [i]$.

Sea $i \in W$. Como R es reflexiva tenemos que $R(i, i) = 1$ y por lo tanto $i \in [i]$ por definición.

- 2** Las clases de equivalencia particionan W .

Sea $i \in W$. Por el punto anterior $i \in [i]$ y por lo tanto $W \subseteq \bigcup_{i \in W} [i]$.

Sean $j, k \in W$ tales que $[j] \cap [k] \neq \emptyset$ y sea $l \in [j] \cap [k]$. Sea $s \in [j]$. Como $R(j, s) = 1$ y $R(j, l) = 1$, por simetría y transitividad $R(l, s) = 1$. Como $R(k, l) = 1$, por transitividad $R(k, s) = 1$ y $s \in [k]$. Entonces $[j] \subseteq [k]$. Análogamente se puede ver que $[k] \subseteq [j]$ y por lo tanto $[j] = [k]$.

- 3** R es universal en $[i]$ para cada $i \in W$. Esto es, $R|_{[i] \times [i]} = 1$ para todo $j, k \in [i] \times [i]$.

Sea $i \in W$ y sean $j, k \in [i]$. Como $R(i, j) = R(i, k) = 1$. Por simetría y transitividad $R(j, k) = 1$. Esto muestra que R en $[i] \times [i]$ es idénticamente 1. $\square$

Anexo 5.2

Demostración del Teorema 1.5. Sean $\varphi \in \text{Form}$, $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo de Kripke e $i \in W$.

Demostración:

- 1** $\mathcal{M}, i \Vdash \Box \varphi \iff \mathcal{M}, i \Vdash \neg \Diamond \neg \varphi$.

Supongamos que $\mathcal{M}, i \Vdash \Box \varphi$. Esto es, para todo $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$ se cumple que $\mathcal{M}, j \Vdash \varphi$. Procedamos por absurdo suponiendo que $\mathcal{M}, i \Vdash \Diamond \neg \varphi$. Entonces existe un $j \in W$ tal que $R(i, j) = 1$ y $\mathcal{M}, j \Vdash \neg \varphi$. Esto contradice a la hipótesis de que en i es cierta la fórmula $\Box \varphi$. Por lo tanto tenemos que $\mathcal{M}, i \Vdash \neg \Diamond \neg \varphi$.

Para el recíproco supongamos que $\mathcal{M}, i \Vdash \neg \Diamond \neg \varphi$. Esto implica que no existe $j \in W$ accesible desde i tal que se satisfaga $\neg \varphi$, o lo que es igual, para todo $j \in W$ accesible desde i sea cierta φ . Esto es, se satisface $\Box \varphi$.

$$\boxed{2} \quad \mathcal{M}, i \Vdash \Diamond \varphi \iff \mathcal{M}, i \Vdash \neg \Box \neg \varphi.$$

Las demostraciones son análogas a las del punto anterior.

Si suponemos que $\mathcal{M}, i \Vdash \Diamond \varphi$ y por el absurdo suponemos que $\mathcal{M}, i \Vdash \Box \neg \varphi$ tendríamos que para todo $k \in W$ accesible desde i se satisface $\neg \varphi$ lo cual es absurdo.

Para el recíproco, suponiendo que $\mathcal{M}, i \Vdash \neg \Box \neg \varphi$ entonces existe un j accesible desde i tal que se satisface φ . Esto es, $\mathcal{M}, i \Vdash \Diamond \varphi$. $\square$

Anexo 5.3

Demostración de la Observación 1.4.

$\models (K)$

Esto es, la fórmula (K) vale en cualquier modelo.

Demostración:

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \hat{e} \rangle$ un modelo, y $i \in W$. Sean $\psi, \varphi \in Form$. Supongamos

$$\mathcal{M}, i \Vdash \Box(\psi \rightarrow \varphi) \tag{9}$$

y

$$\mathcal{M}, i \Vdash \Box \psi. \tag{10}$$

Queremos ver entonces que en i se satisface $\Box \varphi$. Por (9) que $\hat{e}(\psi \rightarrow \varphi, j) = 1$ para todo j tal que $R(i, j) = 1$ y por (10) que $\hat{e}(\psi, j) = 1$. Luego,

$$1 = 1 \wedge 1 = \hat{e}(\psi \rightarrow \varphi, j) \wedge \hat{e}(\psi, j) \leq \hat{e}(\varphi, j).$$

Luego $\hat{e}(\varphi, j) = 1$ para todo j accesible desde i y por lo tanto $\hat{e}(\Box \varphi, i) = 1$ por definición de la evaluación de $\Box$ en i . $\square$

Anexo 5.4

Demostración del Teorema 2.1.

Sea $(A, *, \rightarrow, \wedge, \vee, 1, 0)$ un retículo residuado, y sean $x, y, z \in A$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades.

Demostración:

$$\boxed{1} \quad x \rightarrow x = 1.$$

Como estamos en un retículo residuado

$$x = 1 * x \leq x \text{ entonces } 1 \leq x \rightarrow x$$

y por ser 1 el máximo $x \rightarrow x = 1$

2 $x \leq y$ si y sólo si $x \rightarrow y = 1$.

Por residuación

$$x = 1 * x \leq y \text{ entonces } 1 \leq x \rightarrow y$$

y por ser 1 el máximo $x \rightarrow y = 1$. Como observación, el ítem anterior es un caso particular de este reemplazando $y = x$.

3 $x * (x \rightarrow y) \leq y$.

Esta propiedad es consecuencia inmediata de la residuación.

$$x \rightarrow y \leq x \rightarrow y \text{ entonces } x * (x \rightarrow y) \leq y.$$

4 $(x * y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$.

Para ver esta propiedad, vamos a usar una técnica usual que es simplemente probar que cada término de la ecuación es menor o igual que el otro. Luego concluimos que son iguales.

Primero veamos que

$$(x * y) \rightarrow z \leq x \rightarrow (y \rightarrow z).$$

Para ello, consideremos la propiedad anterior de la siguiente forma

$$(x * y) * ((x * y) \rightarrow z) \leq z.$$

Si aplicamos residuación una vez obtenemos equivalentemente

$$x * ((x * y) \rightarrow z) \leq y \rightarrow z.$$

Si repetimos esto obtenemos equivalentemente una de las desigualdades que buscábamos. Esto es,

$$(x * y) \rightarrow z \leq x \rightarrow (y \rightarrow z).$$

Para la otra desigualdad, notemos que

$$\begin{aligned} (x * y) * (x \rightarrow (y \rightarrow z)) &= x * y * (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \\ &= y * x * (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq y * (y \rightarrow z) \leq z, \end{aligned}$$

donde en la última línea aplicamos dos veces la propiedad del ítem anterior.

Aplicando residuación obtenemos

$$(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (x * y) \rightarrow z.$$

Con las dos desigualdades queda demostrado el ítem.

5 $1 \rightarrow x = x.$

Sea $y \leq x$, por residuación tenemos que

$$y = y * 1 \leq x \text{ entonces } y \leq 1 \rightarrow x.$$

Tomando $y = x$ e $y = 1 \rightarrow x$ obtenemos la igualdad que queríamos.

6 $x \rightarrow 1 = 1.$ Es consecuencia directa del ítem 2 porque $x \leq 1.$

7 $x \leq y$ implica que $x * z \leq y * z.$

La propiedad es equivalente, por residuación, a probar que

$$x \leq z \rightarrow (y * z).$$

Supongamos $x \leq y$. Notemos que

$$y * z \leq y * z \text{ entonces } y \leq z \rightarrow (y * z).$$

Luego

$$x \leq y \leq z \rightarrow (y * z) \text{ entonces } x * z \leq y * z$$

que era lo que queríamos demostrar.

8 $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z).$

Notemos las siguientes desigualdades. Por un lado

$$x * y \leq (x * y) \vee (x * z) \text{ entonces } y \leq x \rightarrow ((x * y) \vee (x * z)).$$

Similarmente

$$x * z \leq (x * y) \vee (x * z) \text{ entonces } z \leq x \rightarrow ((x * y) \vee (x * z)).$$

Luego

$$y \vee z \leq x \rightarrow ((x * y) \vee (x * z)) \text{ entonces } x * (y \vee z) \leq ((x * y) \vee (x * z))$$

lo cual muestra una desigualdad. Para ver la recíproca observemos que

$$x * y \leq x * (y \vee z) \text{ y } x * z \leq x * (y \vee z).$$

Esto es, $x * (y \vee z)$ es cota superior de $x * y$ y $x * z$. Entonces

$$(x * y) \vee (x * z) \leq x * (y \vee z)$$

por ser supremo. Luego queda demostrada la propiedad.

8* Sea $\{y_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de elementos del retículo. Entonces

$$x * \bigvee_i y_i = \bigvee_i (x * y_i).$$

Por un lado, como $x * y_i \leq x * \bigvee_j y_j$ para todo i , tenemos que

$$\bigvee_i (x * y_i) \leq x * \bigvee_j y_j.$$

Para obtener la otra desigualdad, como para cada i tenemos que $x * y_i \leq \bigvee_j (x * y_j)$ y por residuación

$$y_i \leq x \rightarrow \left(\bigvee_j (x * y_j) \right)$$

y por el mismo argumento anterior

$$\bigvee_i y_i \leq x \rightarrow \left(\bigvee_j (x * y_j) \right)$$

y por lo tanto

$$x * \bigvee_i y_i \leq \bigvee_j (x * y_j).$$

9 $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z).$

Por residuación

$$(x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z) \leq (x \vee y) \rightarrow z \text{ entonces } (x \vee y) * ((x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)) \leq z.$$

Si desarrollamos el término que queda en la izquierda de la última desigualdad obtenemos utilizando el ítem 8

$$(x * ((x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z))) \vee (y * ((x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z))).$$

Notemos que

$$x * ((x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)) \leq x * (x \rightarrow z) \leq z$$

y similarmente

$$y * ((x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)) \leq y * (y \rightarrow z) \leq z.$$

Luego como ambos elementos son menores que z su supremo lo es y queda demostrada esa desigualdad. Para ver la recíproca, vamos a ver que

$$(x \vee y) \rightarrow z \leq x \rightarrow z \quad \text{y que} \quad (x \vee y) \rightarrow z \leq y \rightarrow z.$$

De ello va a seguir que es menor o igual que su ínfimo. Con este fin, notemos que por residuación estas desigualdades son equivalentes a ver que

$$x * ((x \vee y) \rightarrow z) \leq z \quad \text{y que} \quad y * ((x \vee y) \rightarrow z) \leq z.$$

Para ver la primera (la segunda es exactamente la misma prueba), notemos que por los ítems 7 y 8

$$x * ((x \vee y) \rightarrow z) \leq (x \vee y) * ((x \vee y) \rightarrow z) \leq z.$$

Con esto queda probada la desigualdad y sigue la igualdad que queríamos demostrar.

9* Sea $\{y_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de elementos del retículo. Entonces

$$\bigvee_{i \in I} y_i \rightarrow x = \bigwedge_{i \in I} (y_i \rightarrow x).$$

Por un lado, para cada i , como $y_i \leq \bigvee_j y_j$ entonces

$$y_i * \left(\bigvee_j y_j \rightarrow x \right) \leq \bigvee_j y_j * \left(\bigvee_j y_j \rightarrow x \right) \leq x$$

y por lo tanto

$$\bigvee_j y_j \rightarrow x \leq y_i \rightarrow x \quad \text{para todo } i$$

con lo que

$$\bigvee_i y_i \rightarrow x \leq \bigwedge_i (y_i \rightarrow x).$$

Por el ítem 7 tenemos que

$$y_i * \left(\bigwedge_j (y_j \rightarrow x) \right) \leq y_i * (y_i \rightarrow x) \leq x.$$

Por otra parte, por 8*

$$\left(\bigvee_i y_i \right) * \left(\bigwedge_j (y_j \rightarrow x) \right) = \bigvee_i \left(y_i * \left(\bigwedge_j (y_j \rightarrow x) \right) \right) \leq x.$$

Luego, por residuación

$$\bigwedge_j (y_j \rightarrow x) \leq \left(\bigvee_i y_i \rightarrow x \right).$$

10 $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z).$

Primero probaremos que

$$x \rightarrow (y \wedge z) \leq (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z).$$

Para ello veremos que el término de la izquierda es menor a cada uno de los de la derecha a los cuales se les está tomando el ínfimo. Por residuación tenemos que esto sería equivalente a probar que

$$x * (x \rightarrow (y \wedge z)) \leq y \text{ y que } x * (x \rightarrow (y \wedge z)) \leq z.$$

Si tomamos la primera desigualdad vemos que

$$x * (x \rightarrow (y \wedge z)) \leq y \wedge z \leq y.$$

Similarmente obtenemos que $x * (x \rightarrow (y \wedge z)) \leq z$. De esta forma queda demostrada la desigualdad.

Para ver la recíproca, tenemos para empezar que por residuación esto es equivalente a ver que

$$(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z) \leq x \rightarrow (y \wedge z) \text{ entonces } x * ((x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)) \leq y \wedge z.$$

Si vemos que el término de la izquierda es menor por separado que y y z , obtendríamos la desigualdad completa. Para ello, basta notar que por el ítem 7

$$x * ((x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)) \leq x * (x \rightarrow y) \leq y$$

y similarmente

$$x * ((x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)) \leq x * (x \rightarrow z) \leq z.$$

Luego queda demostrada la desigualdad y sigue la propiedad.

10* Sea $\{y_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de elementos del retículo. Entonces

$$x \rightarrow \bigwedge_{i \in I} y_i = \bigwedge_{i \in I} (x \rightarrow y_i).$$

Para cada i por residuación

$$x * (x \rightarrow y_i) \leq \bigwedge_j y_j \leq y_i.$$

Luego $x \rightarrow \bigwedge_j y_j \leq x \rightarrow y_i$ y por lo tanto

$$x \rightarrow \bigwedge_j y_j \leq \bigwedge_i (x \rightarrow y_i).$$

Por otro lado, también para cada i se cumple que

$$x * (\bigwedge_j (x \rightarrow y_j)) \leq x * (x \rightarrow y_i) \leq y_i.$$

Así, $x * (\bigwedge_j (x \rightarrow y_j)) \leq \bigwedge_i y_i$. Entonces por residuación

$$\bigwedge_j (x \rightarrow y_j) \leq x \rightarrow (\bigwedge_i y_i).$$

□

Referencias

- [1] Bezhanishvili, N. Pseudomonadic Algebras as Algebraic Models of Doxastic Modal Logic, *Mathematical Logic Quarterly* 48. 2002.
- [2] Blackburn, P., Rijke, M., Venema, Y. (2001). *Modal Logic* (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science). Cambridge University Press.
- [3] Bou F., Esteva, F., Godo, L., Rodriguez, R. On the minimum many-valued modal logic over a finite residuated lattice, *Journal of Logic and Computation*, Volume 21 (5), 2011.
- [4] Burris, S., Sankappanavar, H.P. (1981). *A course in universal algebra*, Graduate texts in Mathematics. Springer.
- [5] Busaniche, M., Cordero, P., Marcos, M., Rodriguez, R. An algebraic semantics for possibilistic finite-valued Łukasiewicz logic. *International Journal of Approximate Reasoning*, Volume 159. 2023.
- [6] Calarco, V. On Simplified Semantics and Translation Problems for Euclidean Modal Logics. Master thesis. University of Bern, Schweizerische Eidgenossenschaft, 2023.
- [7] Castaño, D., Cimadamore, C., Díaz Varela, P., Rueda, L. Monadic BL-algebras: the equivalent algebraic semantics of Hájek's monadic fuzzy logic, *Fuzzy Sets Syst*, Volume 320. 2017.
- [8] Cordero, P., Estudio lógico algebraico de BL-álgebras Pseudomonádicas. PhD thesis. Universidad Nacional del Litoral, Argentina, 2019.
- [9] Galatos, N., Jipsen, P., Kowalski, T., Ono, H. (2007). *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*, *Studies in Logics and the Foundations of Mathematics*, Volume 151. Elsevier.
- [10] Hájek, P. (1998). *Metamathematics of Fuzzy Logic*, *Trends in Logic*, 4. Kluwer.
- [11] Huges, G., Creswell, M. (1968). *An Introduction to Modal Logic*. Methuen.
- [12] Jansana, R. (1990). *Una Introducción a la Lógica Modal*. Tecnos.
- [13] Kripke, S., Semantical considerations on modal logic, *Acta Philos Fenn. Fasc.* 16. 1963.
- [14] Mendelson, E. (2009). *Introduction to Mathematical Logic*, 5ta Edición (Discrete Mathematics and Its Applications). Chapman and Hall/CRC.

- [15] Priest, G. (2008). An introduction to non-classical logic: from if to is. Cambrige University Press.
- [16] Rodriguez, R.O., Tuyt, O.F., Esteva, F., Godo Ll. Simplified Kripke Semantics for K45-Like Gödel Modal Logics and Its Axiomatic Extensions, Stud Logica 110. 2022.
- [17] Teheux, B. Algebraic approach to modal extensions of Łukasiewicz logics. PhD thesis. Université de Liège, Belgique, 2009.
- [18] Vidal, A. On modal expansions of t-norm based logics with rational constants. PhD thesis. Univesitat de Barcelona, España, 2015.