



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA**

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL
GRADO ACADÉMICO DE

Magíster en Matemática

EN EL CAMPO DE: **Análisis Numérico**

TÍTULO DE LA TESIS:

**Refinamiento adaptativo
en espacios de splines jerárquicos**

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Litoral

AUTOR:

Gustavo Ariel Fernandez Lezcano (CONICET | FIQ - UNL)

DIRECTOR:

Dr. Eduardo M. Garau (CONICET | FIQ - UNL)

JURADO COMPUESTO POR:

Dra. Gabriela Armentano
Universidad de Buenos Aires - CONICET

Dr. Ariel Lombardi
Universidad Nacional de Rosario – CONICET

Dr. Rafael Vázquez Hernández
Universidad de Santiago de Compostela

Santa Fe - Argentina
Año de presentación: 2026

*Dedicado a todas las personas que me acompañan
y forman parte de lo que soy.*

*También a todas aquellas que contribuyen al conocimiento
y miran con esperanza hacia el futuro.*

Resumen

Esta tesis se centra en el análisis de las propiedades de aproximación local en espacios de splines jerárquicos. El estudio se aborda desde una doble perspectiva. Por un lado, se enfoca en el diseño, análisis e implementación de un algoritmo de refinamiento adaptativo robusto para estos espacios, cuyo objetivo es enriquecer el espacio funcional mediante la construcción de mallas localmente graduadas donde se requiera un mayor poder de aproximación. Por otro lado, se realiza un análisis matemático riguroso de las propiedades de estabilidad y aproximación que se obtienen a partir de la construcción de operadores de quasi-interpolación. Estos operadores resultan una herramienta indispensable no sólo para avanzar en la teoría, sino también a nivel práctico, debido a que construcciones explícitas y claras permiten una implementación computacionalmente eficiente y económica.

La contribución principal de esta investigación reside en el tratamiento de mallas jerárquicas que denominamos débilmente admisibles, en contraste con el concepto de mallas admisibles utilizado en trabajos previos, el cual restringe el número de niveles para las funciones de base jerárquica que no se anulan en un elemento. En nuestro enfoque, los conjuntos de celdas que definen la representación del espacio de polinomios producto tensor completo en cada nivel están estrictamente anidados, reflejando la propia estructura de la jerarquía. Los resultados obtenidos demuestran que esta estrategia alternativa no solo posee una construcción matemáticamente elegante e intuitiva, sino que en diversos casos de estudio supera en conveniencia a las estrategias de refinamiento adaptativo existentes.

Introducción

La teoría de aproximación mediante splines ocupa un rol central en el análisis numérico moderno. Por un lado, los espacios de splines permiten representar funciones suaves con bases localmente soportadas y estables; por otro, sus propiedades de aproximación pueden estudiarse con precisión dentro del marco de los espacios de Sobolev. En numerosas aplicaciones –particularmente en la formulación de métodos de elementos finitos– se requieren estimaciones de error locales explícitas para operadores lineales que proyectan o aproximan funciones en espacios de splines. Entre estos operadores, los quasi-interpolantes han emergido como una herramienta especialmente adecuada: son conceptualmente simples, preservan el espacio de splines, y sus funcionalidades son compatibles con implementaciones computacionalmente eficientes.

En el caso univariado, la teoría de quasi-interpolación está ampliamente desarrollada [Sch07,LMS18]. En particular, en [LLMr01] se presenta un método general para construir familias de quasi-interpolantes que preserven el espacio de splines. Por otro lado, en [CG23] se establecen condiciones suficientes para que operadores de quasi-interpolación P sobre un espacio de splines de grado menor o igual que p satisfagan estimaciones de error del siguiente tipo:

$$\|D^r(f - Pf)\|_{L^q(I)} \leq C|\tilde{I}|^{\ell+1-r} \|D^{\ell+1}f\|_{L^q(\tilde{I})},$$

donde $0 \leq r \leq \ell \leq p$, $1 \leq q \leq \infty$ y f pertenece a un espacio de Sobolev. Esto establece el poder de aproximación local en normas de orden superior sobre espacios de splines univariados. Una generalización de este resultado se presenta en [BGGS16] dentro de la teoría de espacios de splines producto tensor para quasi-intepolantes que cumplen propiedades básicas y mallas con una propiedad de quasi-uniformidad local. Sin embargo, en este caso solo se tiene una estimación local para normas L^q .

Al trabajar en el terreno de los espacios de splines jerárquicos, la teoría existente impone condiciones sobre la malla para lograr estimaciones de error a través de quasi-interpolantes [SM16,Spe17]. Una de estas condiciones es la noción estándar de admisibilidad [BG16]. Si bien esto limita el volumen de refinamiento permitido alrededor de una región de interés, también proporcionan propiedades de aproximación de manera eficiente. A continuación damos un recorrido sobre los trabajos que han desarrollado estos temas y sus principales

aportes.

En [BG16] se define por primera vez el concepto de mallas admisibles de clase m , que controla, con independencia de la profundidad de la malla, la cantidad de niveles diferentes a los cuales pueden pertenecer las funciones de base THB-splines que no se anulan en una celda dada. El mismo concepto fue introducido en el artículo [GHP17] para HB-splines limitando el número de niveles a dos. En ambos se presenta una condición más fuerte de la malla, llamada estrictamente admisible, la cual les permite trabajar con la estructura de la malla (subdominios jerárquicos) y no involucrar directamente a las funciones THB-splines o HB-splines.

En [BGV18] se establecen resultados que relacionan las mallas admisibles y estrictamente admisibles de clase m tanto para THB-splines y HB-splines. Además, se presenta un algoritmo de refinamiento adaptativo que tiene como entrada una malla con la propiedad estrictamente admisible de clase m y un conjunto de elementos marcados de interés, y como salida otra malla con esta misma propiedad donde los elementos marcados fueron refinados. Adicionalmente, en [BGMP16] se obtiene un resultado de complejidad del refinamiento para este algoritmo que establece que

$$\#\mathbb{Q}_J - \#\mathbb{Q}_0 \leq C \sum_{j=0}^{J-1} \#\mathbb{M}_j,$$

donde $\#\mathbb{Q}_0$ y $\#\mathbb{Q}_J$ representan la cantidad de celdas activas de la malla inicial y la malla de la iteración J , respectivamente; y $\#\mathbb{M}_j$ representa la cantidad de celdas marcadas en cada iteración con $j = 0, \dots, J - 1$. Esto indica que en el proceso iterativo se puede controlar el número de celdas nuevas respecto al número de celdas marcadas por una constante que solo depende del grado polinomial en cada dirección y de la dimensión del dominio.

Este trabajo se organiza en tres capítulos esenciales que se describen a continuación.

En el Capítulo 1 se presentan conceptos básicos como los espacios de splines y operadores quasi-interpolantes univariados; y algunas herramientas y resultados en \mathbb{R}^d como los espacios de Sobolev y la expansiones de Taylor promediadas que serán de gran utilidad en los resultados de aproximación local.

El Capítulo 2 presenta los espacios de splines producto tensor y construcciones de quasi-interpolantes con el fin de extender el resultado de estimación local presentado en [BGS16] para normas de orden superior. La prueba sigue las líneas de la estimación univariada presentada en [CG23], para la cual es necesaria una desigualdad inversa para polinomios y la estimación de error de orden superior para el polinomio de Taylor.

En el Capítulo 3 se trabaja con espacios de splines jerárquicos donde se estudia el diseño e implementación de un algoritmo de refinamiento adaptativo con el objetivo de construir mallas de manera eficiente. Las mallas débilmente

admisibles fueron consideradas por primera vez en [Kra97, Kra98] para probar propiedades de aproximación puntuales a través de la construcción de un quasi-interpolante. Luego, fueron retomadas en [BG17] donde se establecieron propiedades de aproximación local en L^q . En la Sección 3.7 se extienden estos resultados a normas de Sobolev, mostrando que esta nueva clase de mallas permite una estructura jerárquica mucho más flexible y mantiene suficiente control para desarrollar teoría de aproximación local.

Para lograr el objetivo del párrafo anterior, en las primeras secciones del Capítulo 3 se revisan las nociones básicas de espacios de splines jerárquicos y el concepto de refinamiento. Las Secciones 3.3 y 3.4 presentan el aporte más importante de esta tesis. En la primera se introduce y analiza el concepto de mallas débilmente admisibles. En la segunda, se estudia con detalle el diseño e implementación de un algoritmo de refinamiento que permite conservar la estructura de la malla. Adicionalmente, en la Sección 3.5 se presenta un resultado de complejidad análogo al establecido en [BGMP16] para este algoritmo que controla el número de celdas nuevas respecto al número de celdas marcadas. Antes de concluir este capítulo, en la Sección 3.6, se realiza un análisis experimental de estrategias de refinamiento a partir de algunos tests numéricos.

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
1. Preliminares	1
1.1. Espacios de splines univariados	1
1.2. Quasi-interpolantes univariados	4
1.3. Polinomios multivariados y expansión de Taylor promediada	9
2. Quasi-interpolación en espacios producto tensor	13
2.1. Espacio de splines producto tensor	14
2.2. Operadores de quasi-interpolación en espacios de splines producto tensor	16
2.3. Aproximación local en normas de Sobolev	18
3. Adaptatividad y aproximación en espacios jerárquicos	21
3.1. Espacios de splines jerárquicos	22
3.2. Refinamiento adaptativo	31
3.3. Mallas débilmente admisibles	33
3.3.1. Propiedades de mallas en \mathbb{R}^d	35
3.3.2. Caracterización de mallas débilmente admisibles	41
3.4. Algoritmo adaptativo para mallas débilmente admisibles	47
3.4.1. Diseño y descripción del algoritmo	51
3.4.2. Implementación del algoritmo	58
3.5. Complejidad del refinamiento	61
3.6. Análisis experimental de estrategias de refinamiento	71
3.6.1. Aproximación de funciones (P1)	72
3.6.2. Problema de Poisson (P2)	76
3.7. Quasi-interpolación en espacios jerárquicos	79
3.7.1. Un operador de quasi-interpolación multinivel	80
3.7.2. Propiedad de aproximación local	82

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen los conceptos y herramientas básicas que servirán de fundamento para el desarrollo del trabajo. Comenzamos con una breve descripción de los espacios de splines y de los operadores de quasi-interpolación en el contexto univariado, los cuales constituyen el punto de partida para construcciones y el análisis más general.

Asimismo, se fija la notación de multi-índices y se repasan resultados básicos sobre espacios de polinomios multivariados, necesarios para describir derivadas parciales de orden superior y estimaciones en normas de Sobolev. Finalmente, se establecen conceptos fundamentales relacionados con los polinomios de Taylor multivariados, que permitirán establecer resultados de aproximación local.

El objetivo de este capítulo no es desarrollar exhaustivamente estos temas, sino proporcionar un marco teórico y notacional común que facilite la comprensión de los resultados presentados en los capítulos posteriores.

1.1. Espacios de splines univariados

A continuación, se presentan brevemente las nociones básicas de los espacios de splines univariados, que constituyen el punto de partida para las construcciones más generales consideradas a lo largo de este trabajo. Remitimos al lector a la bibliografía [Sch07, LMS18] para una exposición más detallada y exhaustiva de estos conceptos.

Sea $[a, b]$ un intervalo acotado cerrado y consideramos un conjunto de *break-points*

$$\Delta = \{x_i\}_{i=0}^k \quad \text{con } a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b,$$

el cual determina una partición con k subintervalos

$$I_i = [x_i, x_{i+1}) \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, k-2 \quad \text{y } I_{k-1} = [x_{k-1}, x_k],$$

1.1. Espacios de splines univariados

donde cada uno de ellos se denomina *knot interval*.

Consideremos también un grado polinomial $p \in \mathbb{N}$ fijo. Luego, para cada *breakpoint* interior x_i , $i = 1, \dots, k-1$, se elige un número entero r_i , llamado regularidad, tal que $-1 \leq r_i \leq p-1$, y además $r_0 = r_k = -1$, así $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_k)$ es el vector de regularidad.

A partir de esta información, construimos un espacio de funciones que son polinomiales en cada intervalo I_i (para $i = 0, \dots, k-1$) y en el *breakpoint* x_i tienen regularidad r_i (para $i = 0, \dots, k$). Más precisamente, damos la siguiente definición.

Definición 1.1 (Espacio de splines univariados). Llamamos al conjunto de funciones

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(p, \mathbf{r}, \Delta) = \{s \mid & \text{existen polinomios } s_0, \dots, s_k, \text{ de grado a lo sumo } p \\ & \text{tales que } s(x) = s_i(x) \text{ para } x \in I_i, i = 0, \dots, k-1, \quad (1.1) \\ & \text{y } D^j s_{i-1}(x_i) = D^j s_i(x_i) \text{ para } j = 0, \dots, r_i\}, \end{aligned}$$

espacio de polinomios splines de grado p con nodos x_0, \dots, x_k de regularidad r_0, \dots, r_k .

Es sabido que $\mathcal{S}(p, \mathbf{r}, \Delta)$ es un espacio vectorial de dimensión finita $n := \sum_{i=0}^{k-1} m_i$, donde $m_i = p - r_i$ para cada $i = 0, \dots, k$, que indica la multiplicidad en el *breakpoint* x_i .

Sea $\Xi_{p,n} := \{\xi_j\}_{j=1}^{n+p+1}$ un $(p+1)$ -*open knot vector*, es decir, una sucesión tal que:

$$a = \xi_1 = \dots = \xi_{p+1} < \xi_{p+2} \leq \dots \leq \xi_n < \xi_{n+1} = \dots = \xi_{n+p+1} = b,$$

donde los enteros positivos p y n denotan un grado polinomial dado y la dimensión del espacio spline $\mathcal{S}(p, \mathbf{r}, \Delta)$, respectivamente (ver [Sch07]).

Notar que los parámetros p , \mathbf{r} , y Δ en $\mathcal{S}(p, \mathbf{r}, \Delta)$ y el $(p+1)$ -*open knot vector* $\Xi_{p,n}$ se relacionan de la siguiente forma,

$$\Xi_{p,n} = \underbrace{\{x_0, \dots, x_0\}}_{m_0 \text{ veces}}, \underbrace{\{x_1, \dots, x_1\}}_{m_1 \text{ veces}}, \dots, \underbrace{\{x_k, \dots, x_k\}}_{m_k \text{ veces}}.$$

De esta manera, podemos generar una a partir de la otra y decimos que $\Xi_{p,n}$ está asociado a $\mathcal{S}(p, \mathbf{r}, \Delta)$. Además, $\sum_{i=0}^k m_i = n + p + 1$, donde los nodos extremos se repiten $p+1$ veces, es decir, $m_0 = m_k = p+1$, y los nodos internos pueden repetirse como máximo $p+1$ veces, es decir, $1 \leq m_i \leq p+1$ para $i = 1, \dots, k-1$.

El siguiente resultado, que presentamos sin demostración, establece la existencia y las propiedades de una base muy importante del espacio de splines [Sch07, Theorem 4.9].

Teorema 1.2 (Base de B-splines). *Sea $\Xi_{p,n}$ un $(p+1)$ -open knot vector asociado a $\mathcal{S}(p, \mathbf{r}, \Delta)$. Para cada $j = 1, \dots, n$, tomamos¹*

$$B_j(x) := (-1)^{p+1}(\xi_{j+p+1} - \xi_j)[\xi_j, \dots, \xi_{j+p+1}](x - \xi)_+^p, \quad a \leq x \leq b. \quad (1.2)$$

Entonces $\mathcal{B}(\Xi_{p,n}) = \{B_j\}_{j=1}^n$ forma una base de $\mathcal{S}(p, \mathbf{r}, \Delta)$ que satisface

$$B_j(x) = 0 \quad \text{para } x \notin [\xi_j, \xi_{j+p+1}], \quad (1.3)$$

y

$$B_j(x) > 0 \quad \text{para } x \in (\xi_j, \xi_{j+p+1}). \quad (1.4)$$

Además,

$$\sum_{j=1}^n B_j(x) = 1 \quad \text{para todo } a \leq x \leq b. \quad (1.5)$$

De esta manera, se puede representar el espacio de splines univariados $\mathcal{S}(p, \mathbf{r}, \Delta)$ como

$$\mathcal{S}_p(\Xi_{p,n}) = \text{span}(\mathcal{B}(\Xi_{p,n})).$$

Observación 1.3. Sea $\mathcal{B}(\Xi_{p,n}) = \{B_j\}_{j=1}^n$ la base de B-splines asociada al vector de nodos $\Xi_{p,n}$. El vector de nodos de B_j se define como

$$\Xi_{B_j} = \{\xi_j, \dots, \xi_{j+p+1}\},$$

el cual es una subsucesión de $p+2$ nodos consecutivos de $\Xi_{p,n}$. Además, se tiene que $\text{supp } B_j = [\xi_j, \xi_{j+p+1}]$.

Para concluir esta sección, definimos la *mallá unidimensional* $\mathcal{I}(\Xi_{p,n})$ asociada al espacio de splines $\mathcal{S}_p(\Xi_{p,n})$ como

$$\mathcal{I}(\Xi_{p,n}) = \{I_i \mid \text{para } i = 0, \dots, k-1\}. \quad (1.6)$$

Para cada $I = [x_i, x_{i+1}]$ existe un único $t = \sum_{j=0}^i m_j$ tal que $I = [\xi_t, \xi_{t+1}]$ y $\xi_t \neq \xi_{t+1}$. Además, la unión de los soportes de las funciones B-splines de la base que no se anulan sobre I la denotamos con \tilde{I} y se denomina soporte extendido de I , es decir,

$$\tilde{I} = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}(\Xi_{p,n}) \\ I \subset \text{supp}(B)}} \text{supp}(B), \quad (1.7)$$

o bien,

$$\tilde{I} = [\xi_{t-p}, \xi_{t+p+1}]. \quad (1.8)$$

¹Aquí $[\xi_j, \dots, \xi_{j+p+1}](x - \xi)_+^p$ denota la diferencia dividida de orden $p+1$ de la función $f_x(\xi) := (x - \xi)_+^p$ en los puntos $\xi_j, \dots, \xi_{j+p+1}$.

1.2. Quasi-interpolantes univariados

En muchas de las aplicaciones de los splines se utiliza algún método de aproximación para producir una función spline a partir de datos discretos, o bien, generar una aproximación razonable de una función f que pertenece a un espacio más grande, como los espacios de Sobolev. Para el primer caso, son conocidos los métodos de interpolación y aproximación por mínimos cuadrados.

En esta sección vamos a exponer una forma de construir estos operadores desarrollada en [LLMr01].

Suponemos que f está definida en un intervalo $[a, b]$, y que hemos seleccionado un espacio de splines $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p(\Xi_{p,n})$ definido en $[a, b]$, con $\Xi_{p,n} = \{\xi_j\}_{j=1}^{n+p+1}$. El problema principal de la aproximación por splines es el siguiente: Dada una función f , determinar los coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^n$ de las funciones de base B-splines tales que

$$Pf := \sum_{k=1}^n c_k B_k, \quad (1.9)$$

sea una aproximación razonable a f . El desafío es diseñar un procedimiento para determinar los coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^n$ de las B-splines.

Método 1.4. Fijando k , se procede de la siguiente manera para determinar el coeficiente c_k .

Paso 1: Elige un intervalo local $I = [\xi_\mu, \xi_\nu]$ con la propiedad de que I interseca el (interior del) soporte de B_k :

$$I \cap (\xi_k, \xi_{k+p+1}) \neq \emptyset.$$

Denotamos la restricción del espacio \mathcal{S}_p al intervalo I como $\mathcal{S}_{p,I}$, es decir,

$$\mathcal{S}_{p,I} = \text{span}\{B_{\mu-p}, \dots, B_{\nu-1}\}.$$

Paso 2: Elige algún método de aproximación local P_I con la propiedad de que

$$P_I g = g \quad \text{para todo } g \in \mathcal{S}_{p,I}. \quad (1.10)$$

Paso 3: Sea f_I la restricción de f al intervalo I . Entonces existen coeficientes $(b_i)_{i=\mu-p}^{\nu-1}$ tales que $P_I f_I = \sum_{i=\mu-p}^{\nu-1} b_i B_i$. Nótese que $\mu - p \leq k \leq \nu - 1$, ya que el soporte de B_k interseca I .

Paso 4: Establece $c_k = b_k$.

Notar que este procedimiento se realiza para cada k y por tanto en cada uno se debe tener un método de aproximación local P_I que preserve el espacio restringido $\mathcal{S}_{p,I}$.

Algunas de las ventajas de este procedimiento son:

- reducir la complejidad del problema al elegir un subintervalo local $I = [t_\mu, t_\nu]$;
- la libertad en la elección del método de aproximación local P_I . Las alternativas típicas son interpolación, aproximación por mínimos cuadrados o un spline suavizado.

En el siguiente lema veremos que la condición local (1.10) asegura que, si f es un spline en \mathcal{S}_p , entonces $Pf = f$. Los operadores P que cumplen esta propiedad decimos que son una proyección (o bien proyector).

Lema 1.5. *Si los coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^n$ que definen Pf en (1.9) se determinan usando el Método 1.4, entonces se cumple que $Pf = f$ para toda $f \in \mathcal{S}_p$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}_p$, entonces podemos escribir $f = \sum_{k=1}^n \hat{c}_k B_k$ para ciertos coeficientes $\{\hat{c}_k\}_{k=1}^n$, los cuales son únicos. Luego, si $Pf = \sum_{k=1}^n c_k B_k$, debemos probar que $c_k = \hat{c}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$.

Notar que al restringir f al intervalo $I = [\xi_\mu, \xi_\nu]$ se tiene que $f_I = \sum_{i=\mu-p}^{\nu-1} \hat{c}_i B_i$, por lo que f_I pertenece claramente a $\mathcal{S}_{p,I}$. Por (1.10), tenemos

$$\sum_{i=\mu-p}^{\nu-1} b_i B_i = P_I f_I = f_I = \sum_{i=\mu-p}^{\nu-1} \hat{c}_i B_i,$$

por lo que $b_i = \hat{c}_i$ para $i = \mu - p, \dots, \nu - 1$, y en particular $b_k = \hat{c}_k$. Pero recordemos que c_k se elige igual a b_k , por lo tanto tenemos $c_k = \hat{c}_k$, como se requería. \square

Un operador lineal P de la forma (1.9) que es un proyector se llama quasi-interpolante. Una manera de obtener un quasi-interpolante P es a partir del Método 1.4. En este caso, para enfatizar la dependencia de f en los coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^n$ escribimos $c_k = \lambda_k f$, para cada $k = 1, \dots, n$, donde $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ es un conjunto de funcionales lineales. Con lo cual tenemos que

$$Pf := \sum_{k=1}^n \lambda_k f B_k. \tag{1.11}$$

El siguiente teorema establece una caracterización de la propiedad $Pf = f$ para todo $f \in \mathcal{S}_p$ con respecto a los funcionales $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$.

Teorema 1.6. *Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y sea \mathcal{S} un subespacio de dimensión finita n . Sea $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ una base de \mathcal{S} . Todo operador lineal $P : \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{S}$ tiene la forma*

$$Pf = \sum_{k=1}^n \lambda_k f B_k,$$

1.2. Quasi-interpolantes univariados

para toda $f \in \mathbb{V}$, donde $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ son funcionales lineales dados. Entonces, $\lambda_i B_j = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$ si y solo si $Pf = f$, para todo $f \in \mathcal{S}$.²

Demostración. Supongamos que $\lambda_i B_j = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$ y consideremos $f \in \mathcal{S}$. Luego, podemos escribir

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_j,$$

por ser \mathcal{B} una base de \mathcal{S} . Ahora bien,

$$Pf = \sum_{k=1}^n \lambda_k f B_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j B_j \right) B_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_k B_j \right) B_k.$$

Utilizando la hipótesis, resulta que

$$Pf = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_k B_j \right) B_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k B_k = f.$$

Para completar la prueba del teorema, consideremos ahora que $Pf = f$, para todo $f \in \mathcal{S}$. En particular, resulta que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k B_j B_k = P B_j = B_j, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n.$$

Como \mathcal{B} es un conjunto linealmente independiente de funciones, se tiene que $\lambda_k B_j = \delta_{kj}$ para todo $k, j = 1, \dots, n$. □

El siguiente lema corresponde al [LLMr01, Lemma 2], el cual establece una fórmula explícita para el coeficiente $c_k = \lambda_k f$ en el caso de que λ_k sea una combinación lineal de funcionales lineales dados $\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,\nu-\mu+p}$. Esta idea proporciona una alternativa de construcción para los operadores locales P_I utilizados en el Paso 2 del Método 1.4 y finalmente se obtiene que el operador P es un proyector haciendo uso del Lema 1.5.

Lema 1.7. *Supongamos que cada coeficiente c_k de Pf se elige como*

$$c_k = \frac{\det(\lambda B_{\mu-p}, \dots, \lambda B_{k-1}, \lambda f, \lambda B_{k+1}, \dots, \lambda B_{\nu-1})}{\det(\lambda B_{\mu-p}, \dots, \lambda B_{\nu-1})}, \quad (1.12)$$

donde λB_j denota el vector columna

$$\lambda B_j = (\lambda_{k,1} B_j, \dots, \lambda_{k,\nu-\mu+p} B_j)^T \quad (1.13)$$

²Aquí, δ_{ij} es la delta de Kronecker, que vale 1 cuando $i = j$, y 0 en otro caso.

y $\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,\nu-\mu+p}$ son funcionales lineales definidos en \mathcal{S}_p tales que el denominador en (1.12) es distinto de cero (para cada $k = 1, \dots, n$). Entonces $Pf = f$ para todo f en \mathcal{S}_p .

Demostración. Elegimos un operador de aproximación local P_I como aquel que mapea f_I al spline que resuelve el problema de interpolación:

$$\lambda_{k,i}(P_I f_I) = \lambda_{k,i} f_I, \quad \text{para } i = 1, \dots, \nu - \mu + p. \quad (1.14)$$

Expresando $P_I f_I$ en términos de B-splines como $P_I f_I = \sum_{j=\mu-p}^{\nu-1} b_j B_j$ e insertando en (1.14) obtenemos el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\sum_{j=\mu-p}^{\nu-1} \lambda_{k,i} B_j b_j = \lambda_{k,i} f_I, \quad i = 1, \dots, \nu - \mu + p. \quad (1.15)$$

Utilizando la notación de (1.13) podemos escribir el sistema (1.15) en forma matricial como

$$(\lambda B_{\mu-p}, \dots, \lambda B_{\nu-1}) \mathbf{b} = \lambda f_I, \quad (1.16)$$

donde $\mathbf{b} = (b_{\mu-p}, \dots, b_{\nu-1})^T$. Como el denominador en (1.12) es distinto de cero, la solución de este sistema es única y podemos obtener b_j mediante la regla de Cramer para todo $j = \mu - p, \dots, \nu - 1$, como

$$b_j = \frac{\det(\lambda B_{\mu-p}, \dots, \lambda B_{j-1}, \lambda f_I, \lambda B_{j+1}, \dots, \lambda B_{\nu-1})}{\det(\lambda B_{\mu-p}, \dots, \lambda B_{\nu-1})}. \quad (1.17)$$

Notar que al considerar b_j como funcionales resulta que $b_j(B_i) = \delta_{ji}$. Utilizando el Teorema 1.6, resulta que $P_I f_I = f_I$ para todo $f_I \in \mathcal{S}_{p,I}$. Teniendo en cuenta el Lema 1.5 se obtiene que $Pf = f$ para todo f en \mathcal{S}_p . \square

Teorema 1.8. *Sea \mathbb{V} un espacio vectorial normado tal que $\mathcal{S}_p \subset \mathbb{V}$. Sea $P : \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{S}_p$ un operador lineal acotado y supongamos que $Pg = g$, para toda $g \in \mathcal{S}_p$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|f - Pf\| \leq C \text{dist}(f, \mathcal{S}_p),$$

para toda $f \in \mathbb{V}$, donde $\text{dist}(f, \mathcal{S}_p) = \inf_{g \in \mathcal{S}_p} \|f - g\|$.

Demostración. Sea $f \in \mathbb{V}$ fijo y cualquier $g \in \mathcal{S}_p$, entonces,

$$\|f - Pf\| \leq \|f - g\| + \|P(f - g)\|.$$

Como P es acotado, tenemos que

$$\|f - Pf\| \leq (1 + C)\|f - g\|,$$

para alguna constante $C > 0$. Ahora bien, como \mathcal{S}_p es un espacio vectorial de dimensión finita, es cerrado. Resulta entonces que

$$\|f - Pf\| \leq (1 + C) \text{dist}(f, \mathcal{S}_p).$$

\square

1.2. Quasi-interpolantes univariados

Observación 1.9. El resultado anterior establece que cualquier operador lineal acotado que preserve splines provee una aproximación equivalente a la mejor aproximación para toda función del espacio.

Antes de terminar esta sección presentamos un ejemplo de un quasi-interpolante P donde los nodos y el espacio de splines están dados.

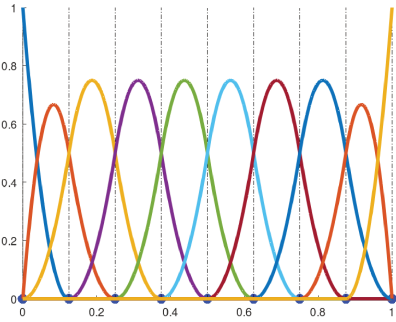
Ejemplo 1.10 (Quasi-interpolación para splines cuadráticos). Consideremos $p = 2$, el dominio $[0, 1]$ y los *breakpoints* como 9 puntos equidistantes. Luego, tomamos \mathcal{S} como el espacio de splines cuadráticos con máxima suavidad. También consideramos su correspondiente *open knot vector* $\{\xi_j\}_{j=1}^{13}$.

Tomemos la base B-splines $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{10}$ asociada a este espacio de splines (ver Figura 1.1a). Vamos a proponer un quasi-interpolante P dado por

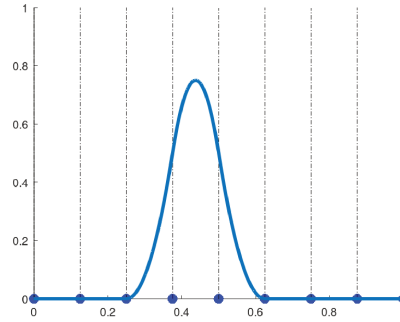
$$Pf = \sum_{k=1}^{10} c_k B_k,$$

a partir de la construcción de proyectores locales P_I .

Sea B_k una B-spline de la base \mathcal{B} cualquiera, en particular podemos elegir B_5 (ver Figura 1.1b). Tomemos $I = [\xi_6, \xi_7]$, ya que $I \cap \text{supp } B_5 \neq \emptyset$.



(a) Base de B-splines de grado 2.



(b) B-spline B_5 .

Figura 1.1: B-splines cuadráticas

La restricción del espacio \mathcal{S} al intervalo I es

$$\mathcal{S}_I = \text{span}\{B_4, B_5, B_6\}.$$

Para elegir una aproximación local P_I dada por

$$P_I f = \sum_{j=4}^6 b_j f B_j,$$

con la propiedad (1.10) se deben elegir los funcionales $\lambda_{5,1}, \lambda_{5,2}, \lambda_{5,3}$ tales que la matriz

$$(\lambda B_4, \lambda B_5, \lambda B_6)$$

sea invertible (con determinante distinto de cero). Por lo tanto como vimos en la demostración del Lema 1.7 al tomar,

$$b_4 f = \frac{\det(\lambda f, \lambda B_5, \lambda B_6)}{\det(\lambda B_4, \lambda B_5, \lambda B_6)},$$

$$b_5 f = \frac{\det(\lambda B_4, \lambda f, \lambda B_6)}{\det(\lambda B_4, \lambda B_5, \lambda B_6)},$$

y

$$b_6 f = \frac{\det(\lambda B_4, \lambda B_5, \lambda f)}{\det(\lambda B_4, \lambda B_5, \lambda B_6)},$$

resulta que P_I cumple (1.10). De esta manera al elegir $c_5 = b_5 f$ como la constante correspondiente a la B-spline B_5 en la definición de Pf y realizando el mismo proceso para todos los $k = 1, \dots, 10$, obtenemos un quasi-interpolante que preserva el espacio de splines \mathcal{S} .

1.3. Polinomios multivariados y expansión de Taylor promediada

Antes de concluir este capítulo, introducimos algunos elementos fundamentales que serán utilizados en el estudio de los espacios de splines producto tensor, así como en la obtención de resultados de aproximación local en espacios de Sobolev.

Multi-índices. Comenzamos estableciendo la notación de los multi-índices, la cual resulta esencial para describir de manera compacta derivadas parciales, espacios polinomiales y desarrollos de Taylor en dimensión arbitraria. Dado un entero positivo d , consideramos los conjuntos:

$$\mathbb{R}^d := \{x = (x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, d\},$$

y

$$\mathbb{Z}_+^d := \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) : \alpha_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, d\}.$$

Este último conjunto se denomina conjunto de *multi-índices* y sus elementos tienen las siguientes operaciones y relación de orden.

- Módulo de un multi-índice: $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$.

1.3. Polinomios multivariados y expansión de Taylor promediada

- Potencia de un vector por un escalar: $x^\theta = x_1^\theta \dots x_d^\theta$, para $x \in \mathbb{R}^d, \theta \in \mathbb{R}$.
- Potencia de un vector por un multi-índice: $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$, para $x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{Z}_+^d$.
- Derivada de orden alpha: $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_d}^{\alpha_d}$, para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$.
- Relación de orden: Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$, diremos que $\alpha \leq \beta$ si y solo si $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i = 1, \dots, d$. Por otro lado, $\alpha < \beta$ si y solo si $\alpha \leq \beta$ y $\alpha_k < \beta_k$ para algún k .

En este trabajo serán importantes los siguientes subconjuntos de multi-índices:

$$\Lambda = \{\alpha : |\alpha| < m\}, \quad (1.18)$$

Si $d = 2$ y $m = 2$ tenemos

$$\Lambda = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}.$$

Por otro lado tenemos el subconjunto de multi-índice,

$$\Lambda = \{\alpha : \alpha \leq \mathbf{m}\}. \quad (1.19)$$

Si consideramos $d = 2$ y $\mathbf{m} = (2, 2)$ tenemos en (1.19)

$$\Lambda = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 0), (0, 2)\}.$$

Espacios de polinomios. A partir de los subconjuntos de multi-índices es posible introducir los espacios de polinomios multivariados, y esta misma notación permitirá definir posteriormente los espacios de Sobolev asociados. Comenzamos presentando los espacios de polinomios multivariados y, tras establecer algunas observaciones y resultados preliminares, introducimos la definición de los espacios de Sobolev.

Definición 1.11. Sea $d \in \mathbb{N}$ y dado Λ asociamos un conjunto de polinomios definido por $\mathbf{P}_\Lambda^d = \text{span}\{x^\alpha : x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \Lambda\}$.

En particular, dado $m \in \mathbb{N}$ y Λ dado por (1.18), si $p = m - 1$, entonces \mathcal{P}_p denota el espacio de polinomios d -variados de grado a lo sumo p , es decir,

$$\mathcal{P}_p = \text{span}\{x^\alpha \mid x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{Z}_+^d : |\alpha| \leq p\}.$$

Por otro lado, dado $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$ un multi-índice y Λ dado por (1.19), $\mathbf{p} = (m_1 - 1, \dots, m_d - 1)$, entonces $\mathbf{P}_\mathbf{p}$ es el espacio de polinomios producto tensor de grado menor o igual a p_i en la i -ésima dirección, es decir

$$\mathbf{P}_\mathbf{p} = \text{span}\{x^\alpha \mid x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{Z}_+^d : \alpha \leq \mathbf{p}\}.$$

Observación 1.12. Notar que $\mathcal{P}_p \subset \mathbf{P}_\mathbf{p}$ siempre que $p \leq p_i$ para todo $i = 1, \dots, d$. También tenemos que, $\mathbf{P}_\mathbf{p} \subset \mathcal{P}_s$ si $\sum_{i=1}^d p_i \leq s$.

Espacios de Sobolev. A continuación, presentamos la definición de los espacios de Sobolev los cuales se pueden leer con mayor detalle en [Eva10, Sch07].

Definición 1.13. Dado un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, definimos el *Espacio de Sobolev* $W_q^m(\Omega)$ para $1 \leq q \leq \infty$ y $m \in \mathbb{N}$, como

$$W_q^m(\Omega) := \{f \in L^q(\Omega) : \|f\|_{W_q^m(\Omega)} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{W_q^m(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{1/q} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \text{ess sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha f| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Además se define la seminorma

$$|f|_{m, L^q(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{1/q},$$

la cual se utiliza en muchos de los resultados de este trabajo.

El siguiente lema nos proporciona una desigualdad inversa para el espacio de polinomios d -variados y la prueba se puede encontrar en [Spe17, Lemma 1]. Este resultado será importante en el siguiente capítulo para obtener un resultado de aproximación local para quasi-interpolantes sobre espacios de splines producto tensor que veremos más adelante.

Lema 1.14. *Sea K un subconjunto convexo de \mathbb{R}^d , y sea d_K el diámetro de la bola más grande contenida en K . Para cualquier $g \in \mathcal{P}_p$ y $1 \leq q \leq \infty$ se tiene que:*

$$\|D^\alpha g\|_{L^q(K)} \leq C d_K^{-|\alpha|} \|g\|_{L^q(K)}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq p, \quad (1.20)$$

donde C es una constante independiente de g y K .

Polinomios de Taylor. Para finalizar este capítulo y con el fin de establecer estimaciones de error en espacios de Sobolev en el Capítulo 2, introducimos un operador T de aproximación polinomial de orden p para funciones en dichos espacios, el cual satisface una desigualdad del tipo

$$\|D^\alpha(f - Tf)\|_{L^q(\Omega)} \leq C \text{diam}(\Omega)^{p+1-|\alpha|} \|D^{p+1}f\|_{L^q(\Omega)}, \quad (1.21)$$

donde $0 \leq |\alpha| \leq p$ y el $\text{diam}(\Omega)$ es el diámetro del conjunto Ω .

Consideramos a continuación la expansión de Taylor promediada siguiendo las líneas de [BS02, Chapter 4] y [Sch07, Chapter 13].

1.3. Polinomios multivariados y expansión de Taylor promediada

Definición 1.15 (Expansión de Taylor). Consideramos Λ un subconjunto de multi-índices y cualquier función u tal que las derivadas requeridas existan en y . Se define el operador

$$T_y^\Lambda u(x) := \sum_{\alpha \in \Lambda} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha u(y), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.22)$$

donde $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$.

Si u está en un espacio de Sobolev, en general, $D^\alpha u$ no existe en el sentido puntual. Con lo cual vamos a considerar el promedio de $T_y^\Lambda u(x)$ sobre y .

Para definir la expansión de Taylor promediada tomamos $B = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| < \rho\}$ y una función $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ que cumple que $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx = 1$ y que $\text{supp}(\phi) = \bar{B}$ la cual llamaremos *función cut-off*.

Definición 1.16. La expansión de *Taylor promediada* respecto a ϕ y Λ se define como

$$T_\phi^\Lambda u(x) := \int_B T_y^\Lambda u(x) \phi(y) dy, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.23)$$

donde $T_y^\Lambda u(x)$ está dado por (1.22), y ϕ es una *función cut-off* soportada en \bar{B} .

Para nuestro trabajo tomaremos la expansión de *Taylor promediada clásica* que está dada por el subconjunto de multi-índices (1.18) la cual denotaremos con T^m para $m \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.17. $T^m u \in \mathcal{P}_m$, es decir, $T^m u$ es un polinomio de grado a lo sumo m .

Para entrar en detalles sobre la prueba y más propiedades de este operador puede consultar [BS02, Section 4.1].

Lema 1.18. Sea K un subconjunto convexo de \mathbb{R}^d y la expansión de Taylor promediada clásica T^p sobre K . Sea B_K la bola más grande contenida en K de radio r_K . Entonces, para cualquier $f \in W_q^{p+1}(K)$ y $1 \leq q \leq \infty$ se cumple:

$$\|D^\alpha(f - T^p f)\|_{L^q(K)} \leq C \text{diam}(K)^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(K)}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq p, \quad (1.24)$$

donde C es una constante independiente de f y $\text{diam}(K)$, pero depende de $\text{chunk}(K) := \frac{\text{diam}(K)}{r_K}$.

Este resultado, importante para el trabajo con los quasi-interpolantes en espacios de splines, describe el poder de aproximación que tiene la expansión de Taylor promediada clásica.

Capítulo 2

Quasi-interpolación en espacios de splines producto tensor

Los espacios de splines son ampliamente utilizados en los métodos de elementos finitos (FEM) para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales. En este contexto, las normas de Sobolev proporcionan una forma natural de medir el error de discretización. Además, la teoría de quasi-interpolación constituye una herramienta fundamental tanto desde el punto de vista teórico –ya que permite comprender el poder de aproximación de los espacios discretos y derivar estimaciones de error– como desde el punto de vista práctico, dado que desempeña un papel esencial en la implementación computacional del FEM.

En este capítulo presentamos los espacios de splines producto tensor junto con los operadores de quasi-interpolación P asociados. Consideramos como punto de partida el resultado de poder de aproximación local en normas de orden superior obtenido en [CG23] para el caso univariado, el cual establece que

$$\|D^r(f - Pf)\|_{L^q(I)} \leq C|\tilde{I}|^{\ell+1-r} \|D^{\ell+1}f\|_{L^q(\tilde{I})}, \quad (2.1)$$

donde I es un *knot interval*, \tilde{I} es su soporte extendido, $0 \leq r \leq \ell \leq p$, $1 \leq q \leq \infty$ y f pertenece a un espacio de Sobolev adecuado. Uno de los objetivos principales de este capítulo es extender este tipo de estimaciones al contexto de los espacios de splines producto tensor.

Cabe señalar que la validez de la desigualdad (2.1) depende de ciertas hipótesis tanto sobre la malla como sobre el operador de quasi-interpolación P . En este sentido, establecemos una generalización de dicha estimación para quasi-interpolantes definidos en espacios de splines producto tensor que satisfacen propiedades básicas, en la línea de [BGG16]. Para ello, seguimos la estrategia de demostración desarrollada en el caso univariado en [CG23] y la adaptamos cuidadosamente al marco tensorial.

2.1. Espacio de splines producto tensor

Para definir el espacio de splines producto tensor $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}(\Xi)$ sobre $\Omega := [0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$, procedemos de la siguiente manera. Sean $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$ y $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ multi-índices que representan los grados polinómicos y la dimensión de los espacios splines univariados en cada dirección, respectivamente. Para cada $i = 1, \dots, d$, consideramos un $(p_i + 1)$ -*open knot vector* $\Xi_i = \{\xi_j^{(i)}\}_{j=1}^{n_i+p_i+1}$, y definimos el espacio de splines univariado

$$\mathcal{S}_{p_i}(\Xi_i) := \text{span}\{B_j^i : j = 1, \dots, n_i\},$$

donde B_j^i es la función B-spline de grado p_i asociado al vector de nodos local $\{\xi_j^{(i)}, \dots, \xi_{j+p_i+1}^{(i)}\}$ vista en la Observación 1.3 de la Sección 1.1, también consultar [Sch07, Chapter 12]. Definimos entonces el conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbf{p}, \mathbf{n}}$ de las funciones *B-splines producto tensor* como el producto de B-splines univariadas en cada dirección:

$$B_{i_1, \dots, i_d}(x) := B_{i_1}^1(x_1) B_{i_2}^2(x_2) \dots B_{i_d}^d(x_d),$$

con $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. Estas funciones tienen propiedades importantes las cuales nombramos a continuación y pueden encontrarse en [LMS18].

- (I) Localmente soportadas: Una B-spline producto tensor está localmente soportada en el rectángulo d -dimensional dado por los nodos extremos de sus B-splines unidimensionales en cada dirección.
- (II) No negatividad: Una B-spline producto tensor es no negativa en todas partes y positiva en el interior de su soporte.
- (III) El conjunto de todas las B-splines producto tensor es linealmente independiente y cumple la propiedad de la partición de la unidad.

Definimos el espacio de splines producto tensor como

$$\mathcal{S}_{\mathbf{p}}(\Xi) := \otimes_{i=1}^d \mathcal{S}_{p_i}(\Xi_i) = \text{span}\{B_{i_1, i_2, \dots, i_d}(x)\}_{i_1=1, \dots, n_1}^{n_1, \dots, n_d},$$

con $\Xi := \Xi_1 \times \dots \times \Xi_d$. Como el conjunto de las B-splines producto tensor es linealmente independiente, la dimensión de este espacio es $n := \prod_{i=1}^d n_i$.

Por otro lado, se define *la malla producto tensor* \mathcal{Q} que está constituida por las celdas (o elementos) $Q = I_1 \times \dots \times I_d$, donde I_i es un *knot interval* de la malla unidimensional correspondiente a la i -ésima dirección, para $i = 1, \dots, d$. También se define el soporte extendido de una celda Q como la unión de los soportes de las B-splines producto tensor que no se anulan en la celda Q , es decir,

$$\tilde{Q} := \bigcup_{\substack{\beta \in \mathcal{B} \\ Q \subset \text{supp } \beta}} \text{supp } \beta$$

o bien,

$$\tilde{Q} = \tilde{I}_1 \times \cdots \times \tilde{I}_d,$$

donde \tilde{I}_i es el soporte extendido del *knot interval* definido en (1.8) para cada $i = 1, \dots, d$.

Observación 2.1. El conjunto \tilde{Q} para $Q \in \mathcal{Q}$ es unión de celdas de la malla producto tensor \mathcal{Q} .

A continuación, presentamos la definición de mallas quasi-uniformes cuya estructura nos permitirá obtener estimaciones de error en espacios de Sobolev estándar. El análisis de mallas anisotrópicas requiere un tipo diferente de espacios de Sobolev y escapa al objetivo de este trabajo.

Definición 2.2 (Mallas quasi-uniformes). Sea \mathcal{Q} una malla tensorial. Decimos que la malla es *quasi-uniforme* si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{\text{diam}(Q)}{l_Q} \leq C, \quad \text{para todo } Q \in \mathcal{Q}, \quad (2.2)$$

donde $l_Q = \min\{|I_i| : Q = I_1 \times \cdots \times I_d\}$. En otras palabras, una malla \mathcal{Q} es quasi-uniforme si en cada celda, el diámetro es equivalente a la longitud de cualquiera de sus lados.

Observación 2.3. En una malla \mathcal{Q} quasi-uniforme se tienen los siguientes resultados.

- (I) Para cualquier par de celdas $Q, Q' \in \mathcal{Q}$ que compartan un lado, se tiene que $\text{diam}(Q)$ es equivalente a $\text{diam}(Q')$. En efecto, como la malla es quasi-uniforme y las celdas Q y Q' comparten el *knot interval* I , resulta

$$\text{diam}(Q) \leq C l_Q \leq C |I| \leq C \text{diam}(Q').$$

De manera análoga se prueba que $\text{diam}(Q') \leq C \text{diam}(Q)$.

- (II) Para toda celda $Q \in \mathcal{Q}$, se tiene que $\text{diam}(Q)$ es equivalente a $\text{diam}(\tilde{Q})$. La desigualdad $\text{diam}(Q) \leq \text{diam}(\tilde{Q})$ es trivial, ya que $Q \subset \tilde{Q}$. Para la otra desigualdad, daremos una explicación apoyados en la Figura 2.1 para el caso $d = 2$ y $\mathbf{p} = (p_1, p_2) = (2, 1)$.

Como \tilde{Q} está formado por celdas de \mathcal{Q} (ver la Observación 2.1), entonces consideramos un conjunto de celdas $Q_j \in \mathcal{Q}$ incluidas en \tilde{Q} que recorren el borde de \tilde{Q} desde el extremo inferior izquierdo al extremo superior derecho. Como se puede ver en la Figura 2.1, este recorrido no nos proporciona la menor cota, pero para estos fines es suficiente. Entonces, para este ejemplo el recorrido toma $2p + 1 = 7$ celdas donde $p = p_1 + p_2$.

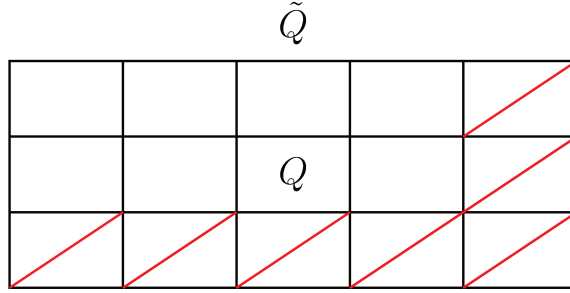


Figura 2.1: Esta gráfica muestra una celda Q y su extensión \tilde{Q} para el caso $\mathbf{p} = (2, 1)$ donde los nodos son simples. Además, se muestra el conjunto de celdas que recorren el borde de \tilde{Q} uniendo el extremo inferior izquierdo con el extremo superior derecho.

Siguiendo la Figura 2.1, vemos que el $\text{diam}(\tilde{Q})$ se puede acotar por la suma de los diámetros de elementos $\{Q_j\}_{j=1}^{2p+1}$. Como el conjunto de las celdas $\{Q_j\}_{j=1}^{2p+1}$ es finito, podemos elegir al elemento Q_k como aquel que tenga mayor diámetro. De esta manera obtenemos,

$$\text{diam}(\tilde{Q}) \leq \sum_{j=1}^{2p+1} \text{diam}(Q_j) \leq (2p + 1) \text{diam}(Q_k).$$

Ahora bien, como $Q_k \subset \tilde{Q}$ y $Q \subset \tilde{Q}$, consideremos el conjunto $\{Q'_j\}_{j=1}^l$ de celdas incluidas en \tilde{Q} que conectan Q_k y Q como se muestra en la Figura 2.2. Utilizando (i) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{diam}(\tilde{Q}) &\leq (2p + 1)C^{p_1} \text{diam}(Q'_k) \\ &\leq (2p + 1)C^{p_1}C^{p_2} \text{diam}(Q) \\ &\leq C_{\mathbf{p}} \text{diam}(Q), \end{aligned}$$

donde $C_{\mathbf{p}} = (2p + 1)C^p$. Con lo cual, $\text{diam}(Q)$ es equivalente a $\text{diam}(\tilde{Q})$. Para el caso d -dimensional tenemos que la constante $C_{\mathbf{p}} = (2p + 1)C^p$ con $p = \sum_{i=1}^d p_i$.

2.2. Operadores de quasi-interpolación en espacios de splines producto tensor

En esta sección se presentan los operadores quasi-interpolantes P en espacios producto tensor y se analizan las propiedades que estos deben cumplir para extender la estimación de error local dada en (2.1). Las bases de estas construcciones y propuestas extienden los resultados de los artículos [BGG16, CG23].

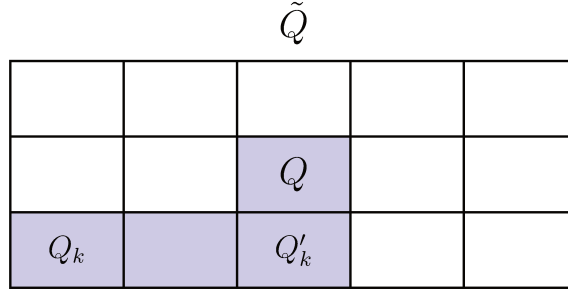


Figura 2.2: Esta gráfica muestra un conjunto $\{Q'_j\}_{j=1}^l$ de celdas incluidas en \tilde{Q} que conectan Q_k y Q .

Sea P un operador lineal que aplica $L^q(\Omega)$ en $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}(\Xi)$. Para cada $f \in L^q(\Omega)$ se puede escribir Pf como

$$Pf = \sum \lambda_{i_1, \dots, i_d}(f) B_{i_1}^1 \dots B_{i_d}^d, \quad (2.3)$$

donde $\{\lambda_{i_1, \dots, i_d}\}$ es un conjunto de funcionales lineales.

Nos interesa estudiar los operadores P que satisfacen las siguientes propiedades:

- (P1) P es una proyección en $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}(\Xi)$, es decir, si $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}}(\Xi)$ entonces $Pf = f$.
- (P2) P es localmente estable: Dado $1 \leq q \leq \infty$, existe una constante $C > 0$, que solo depende de \mathbf{p} , tal que

$$\|Pf\|_{L^q(Q)} \leq C \|f\|_{L^q(\tilde{Q})}, \quad \text{para todo } Q \in \mathcal{Q} \text{ y } f \in L^q(\Omega).$$

Las siguientes condiciones aseguran que (P1) y (P2) se cumplen (cf. [BGG16, Theorem 2]):

- (C1) El conjunto $\{\lambda_{i_1, \dots, i_d}\}$ constituye una base dual de la base de B-splines $\{B_{i_1}^1 \dots B_{i_d}^d\}$.
- (C2) Los funcionales $\{\lambda_{i_1, \dots, i_d}\}$ son acotados, es decir, satisfacen

$$|\lambda_{i_1, \dots, i_d}(f)| \leq C |\text{supp}(B_{i_1}^1 \dots B_{i_d}^d)|^{-1/q} \|f\|_{L^q(\text{supp}(B_{i_1}^1 \dots B_{i_d}^d))},$$

para todo $f \in L^q(\Omega)$.

Observación 2.4. Para todo $Q \in \mathcal{Q}$ se cumple que $Pf|_Q \in \mathbf{P}_{\mathbf{p}}$, para toda función f . Teniendo en cuenta la Observación 1.12 al tomar $s = \sum_{i=1}^d p_i$, se tiene que $Pf|_Q \in \mathcal{P}_s$ para toda f .

2.3. Aproximación local en normas de Sobolev

Con las siguientes construcciones se pueden obtener quasi-interpolantes que cumplen estas propiedades.

- En el primer caso se plantea una construcción del operador quasi-interpolante P dado en (2.3), eligiendo los funcionales $\{\lambda_{i_1, \dots, i_d}\}$ mediante el método descrito en [LLMr01] y que mencionamos en el Capítulo 1. También, en el artículo [BGGs16] se establece un operador de proyección local L^2 que cumple con estas propiedades.
- En el segundo caso se puede obtener P a partir de quasi-interpolantes univariados. Siguiendo [BadVBSV14], para cada $k = 1, \dots, d$, se considera un operador quasi-interpolante Π_k en el espacio de splines $\mathcal{S}_{p_k}(\Xi_k)$. Luego, se define $P = \Pi_1 \otimes \dots \otimes \Pi_d$, donde la operación producto tensorial se puede leer con mayor detalle en ese artículo. Además, se establece que si los operadores univariados cumplen las propiedades (P1) y (P2), entonces el operador P también las cumple.

2.3. Aproximación local en normas de Sobolev

Para finalizar este capítulo presentamos el resultado principal, el cual exhibe el poder de aproximación local de los espacios de splines producto tensor para funciones en espacios de Sobolev en normas de orden superior.

Teorema 2.5 (Aproximación local en normas de orden superior). *Consideremos el espacio producto tensor $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}(\Xi)$, donde la malla producto tensor \mathcal{Q} satisface la ecuación (2.2), y sea $P : L^q(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{p}}(\Xi)$ un quasi-interpolante que cumple las condiciones (C1) y (C2) establecidas anteriormente. Entonces, existe una constante $C > 0$, que depende únicamente de $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$, tal que para todo $Q \in \mathcal{Q}$ y $1 \leq q \leq \infty$ se verifica que*

$$\|D^{\alpha}(f - Pf)\|_{L^q(Q)} \leq C \operatorname{diam}(\tilde{Q})^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(\tilde{Q})}, \quad (2.4)$$

para toda $f \in W_q^{p+1}(\Omega)$ y $0 \leq |\alpha| \leq p$, donde $p = \min_{i=1, \dots, d} p_i$.

Demostración. Sea $f \in W_q^{p+1}(\Omega)$, donde $p \leq p_i$ para todo $i = 1, \dots, d$ y sea $Q = I_1 \times \dots \times I_d \in \mathcal{Q}$. Como $\mathcal{P}_p \subset \mathbf{P}_{\mathbf{p}}$, la condición (C1) implica que para cualquier polinomio $g \in \mathcal{P}_p$, se cumple

$$\|D^{\alpha}(f - Pf)\|_{L^q(Q)} \leq \|D^{\alpha}(f - g)\|_{L^q(Q)} + \|D^{\alpha}P(f - g)\|_{L^q(Q)}.$$

Considerando $s = \sum_{i=1}^d p_i$ se tiene que $\mathbf{P}_{\mathbf{p}} \subset \mathcal{P}_s$ (ver Observación 1.12) y usando que $Q \subset \tilde{Q}$ y Lema 1.14 se obtiene

$$\|D^{\alpha}(f - Pf)\|_{L^q(Q)} \leq \|D^{\alpha}(f - g)\|_{L^q(\tilde{Q})} + Cd_Q^{-|\alpha|} \|P(f - g)\|_{L^q(Q)},$$

donde $0 \leq |\alpha| \leq s$. La constante C que aparece en esta estimación y en las siguientes puede variar en cada ocasión.

Notar que $d_Q = \min\{|I_i| : i = 1, \dots, d\}$, es decir, d_Q es la medida de uno de los lados de Q . Aquí, el hecho de que la malla producto tensor cumpla (2.2) implica que $|I_i|$ es equivalente a $\text{diam}(Q)$ para todo $i = 1, \dots, d$. Por lo tanto,

$$\|D^\alpha(f - Pf)\|_{L^q(Q)} \leq \|D^\alpha(f - g)\|_{L^q(\tilde{Q})} + C \text{diam}(Q)^{-|\alpha|} \|P(f - g)\|_{L^q(Q)}.$$

Se elige $g = T_\phi^p f$ como la expansión de Taylor promedida clásica de grado p de f sobre \tilde{Q} (ver Definición 1.16). Luego, por la estabilidad local del quasi-interpolante P (ver (P2)) y por Lema 1.18, se cumple que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(f - Pf)\|_{L^q(Q)} &\leq C \text{diam}(\tilde{Q})^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(\tilde{Q})} \\ &\quad + C \text{diam}(Q)^{-|\alpha|} \text{diam}(\tilde{Q})^{p+1} |f|_{p+1, L^q(\tilde{Q})}, \end{aligned}$$

donde $0 \leq |\alpha| \leq p$. Finalmente, teniendo en cuenta el ítem (ii) de la Observación 2.3, se concluye (2.4). □

Este teorema generaliza a espacios producto tensor el resultado presentado en [CG23, Theorem 3.5] para el caso univariado. Por otro lado, el análisis en normas de orden superior puede considerarse como una extensión del [BGG16, Theorem 2] donde se presenta la estimación de error para $|\alpha| = 0$.

A partir del Teorema 2.5 podemos concluir con la estimación de error global:

$$\|D^\alpha(f - Pf)\|_{L^q(\Omega)} \leq C h^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(\Omega)}, \quad \text{para toda } f \in W_q^{p+1}(\Omega), \quad (2.5)$$

donde $p = \min_{i=1, \dots, d} p_i$, $0 \leq |\alpha| \leq p$ y $h = \max_{Q \in \mathcal{Q}} \text{diam}(Q)$.

Para finalizar consideremos el siguiente análisis: Dado que la desigualdad (2.4) se cumple para $f \in W_q^{p+1}(\Omega)$ con $p \leq p_i$ (para todo $i = 1, \dots, d$), resulta natural emplear esta estimación cuando las componentes del multi-índice \mathbf{p} del espacio de splines producto tensor sean iguales. Esto se debe a que el lado derecho de la desigualdad (2.4) depende únicamente de $p = \min_{i=1, \dots, d} p_i$, y en consecuencia, la posible ventaja de aumentar el grado polinomial en una sola dirección no queda cuantificada a través de esta estimación.

Capítulo 3

Adaptatividad y aproximación en espacios jerárquicos

Los operadores de quasi-interpolación son ampliamente reconocidos como herramientas de aproximación efectivas y eficientes. Al mismo tiempo, los B-splines jerárquicos, construidos a partir de una jerarquía de mallas graduadas, que representan distintos niveles de refinamiento, proporcionan una estructura que permite realizar aproximaciones locales. En este contexto, los quasi-interpolantes ofrecen ventajas significativas al combinar simplicidad en su construcción con flexibilidad para adaptarse a datos singulares, convirtiéndose así en una herramienta poderosa para diversas aplicaciones computacionales.

En la Sección 3.1 comenzamos el capítulo presentando los espacios de splines jerárquicos, partiendo de las construcciones univariadas y producto tensor. Luego, en la Sección 3.2, con el objetivo de analizar métodos adaptativos, introducimos un proceso de refinamiento que actualiza tanto la malla como el espacio jerárquico asociado.

Como etapa intermedia, en la Sección 3.3 proponemos una familia de mallas jerárquicas que denominamos *mallas débilmente admisibles*, cuya condición es más débil que las conocidas *mallas estrictamente admisibles de clase 2* presentadas en [BG16]. Estas nuevas mallas permiten establecer estimaciones locales del error en normas de Sobolev que extienden los resultados para normas L^q presentados en [BG17] mediante el uso de los operadores de quasi-interpolación introducidos en [Kra98] (ver Sección 3.7).

En la Sección 3.4 presentamos un algoritmo de refinamiento adaptativo que utiliza las mallas débilmente admisibles como punto de partida con la intención de mejorar en algún aspecto el procedimiento de refinamiento con mallas estrictamente admisibles conocido [BGV18].

Pensando en un proceso de refinamiento iterativo, en la Sección 3.5 se prueba un resultado fundamental para la estimación del crecimiento del número de celdas de la malla con respecto al número de elementos marcados para

3.1. Espacios de splines jerárquicos

el refinamiento. Luego, siguiendo estos resultados teóricos, en la Sección 3.6 hacemos la implementación de nuestro algoritmo de refinamiento y un análisis comparativo con respecto al algoritmo de [BGV18]. Presentamos algunos ejemplos resolviendo problemas como la aproximación de una función $f \in L^2(\Omega)$ mediante la proyección L^2 sobre un espacio de splines jerárquico dado y la resolución de la ecuación de Poisson.

3.1. Espacios de splines jerárquicos

En esta sección se introducen los espacios de splines jerárquicos, los cuales son adecuados para el diseño de métodos isogeométricos adaptativos, ya que permiten realizar un refinamiento local de la malla como se verá más adelante en este capítulo.

Aquí se analizan algunas propiedades básicas que facilitan su comprensión mediante el uso de los espacios de splines univariados y producto tensor estudiados previamente. Para una exposición más detallada, pueden consultarse [BG17, GJS14, VGJS11].

Caso splines univariados. Siguiendo lo presentado en la Sección 1.1, consideramos un espacio de splines univariado $\mathcal{S}_p(\Xi_{p,n})$ dado por el $(p+1)$ -*open knot vector* $\Xi_{p,n} = \{\xi_j\}_{j=1}^{n+p+1}$:

$$0 = \xi_1 = \cdots = \xi_{p+1} < \xi_{p+2} \leq \cdots \leq \xi_n < \xi_{n+1} = \cdots = \xi_{n+p+1} = 1,$$

donde los enteros positivos p y n denotan un grado polinomial dado y el número de funciones B-splines de la base $\mathcal{B}(\Xi_{p,n})$ asociada a $\Xi_{p,n}$, respectivamente.

Tomamos $\Xi_0 := \Xi_{p,n}$ y una sucesión $\{\Xi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $(p+1)$ -*open knot vectors* (donde ℓ será considerado como el nivel) de modo que

$$\Xi_0 \subset \Xi_1 \subset \dots$$

Esto produce de forma sucesiva refinamientos de Ξ_0 , ya que, $\Xi_\ell \subset \Xi_{\ell+1}$, para $\ell \in \mathbb{N}$. Denotamos con \mathcal{B}_ℓ a la base B-splines asociada al $(p+1)$ -*open knot vector* Ξ_ℓ para $\ell \in \mathbb{N}_0$. El anidamiento de los $(p+1)$ -*open knot vectors* induce una relación natural entre las funciones de base de los niveles ℓ y $\ell+1$, que se describe a continuación.

Definición 3.1. Sea $\beta_\ell \in \mathcal{B}_\ell$ y Ξ_{β_ℓ} su correspondiente vector de nodos como se menciona en la Observación 1.3. Sea $\Xi_{\beta_\ell}^{(\ell+1)} \subset \Xi_{\ell+1}$ el vector de nodos obtenido de Ξ_{β_ℓ} al insertar los nodos de $\Xi_{\ell+1}$ que están en el interior del $\text{supp } \beta_\ell$. Decimos que $\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}$ es una hija de β_ℓ si $\Xi_{\beta_{\ell+1}} \subset \Xi_{\beta_\ell}^{(\ell+1)}$. Definimos así el conjunto de las hijas de β_ℓ como

$$\mathcal{C}(\beta_\ell) := \{\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1} \mid \beta_{\ell+1} \text{ es una hija de } \beta_\ell\}.$$

Consecuentemente, se define el conjunto de los padres de $\beta_{\ell+1}$:

$$\mathcal{P}(\beta_{\ell+1}) := \{\beta_\ell \in \mathcal{B}_\ell \mid \beta_{\ell+1} \text{ es una hija de } \beta_\ell\}.$$

Puesto que $\Xi_\ell \subset \Xi_{\ell+1}$, podemos escribir cualquier B-spline de nivel ℓ como combinación lineal de las B-splines de nivel $\ell+1$. Más aún, utilizando la fórmula de inserción de nodos (ver [Boe80, CLR80, LMS18]) se obtiene que

$$\beta_\ell = \sum_{\beta_{\ell+1} \in \mathcal{C}(\beta_\ell)} c_{\beta_{\ell+1}}(\beta_\ell) \beta_{\ell+1}, \quad (3.1)$$

donde los coeficientes $c_{\beta_{\ell+1}}(\beta_\ell)$ son todos positivos y las únicas funciones B-splines que intervienen en la combinación lineal son las hijas de β_ℓ .

Antes de definir el espacio jerárquico, consideremos esta misma construcción para el caso multivariado, donde será necesario trabajar con espacios producto tensor.

Caso splines multivariados. Para cada nivel $\ell \in \mathbb{N}_0$, consideramos $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ y $\mathbf{n} = (n_1^\ell, n_2^\ell, \dots, n_d^\ell)$ fijos. Siguiendo la Sección 2.1 definimos $\mathcal{S}_{\mathbf{p}, \mathbf{n}_\ell}$, el espacio producto tensor de nivel ℓ sobre el mismo dominio $\Omega = [0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$, al cual denotamos con \mathcal{S}_ℓ , y sea además $\mathcal{B}_\ell = \mathcal{B}_{\mathbf{p}, \mathbf{n}_\ell}$ su correspondiente base de B-splines. También denotamos con \mathcal{Q}_ℓ a la malla producto tensor y a cada elemento $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ lo llamaremos celda de nivel ℓ .

Al considerar una sucesión $\{\mathcal{S}_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ de espacios producto tensor tal que

$$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \dots,$$

al igual que el caso univariado, se obtiene que cada función B-spline β_ℓ de nivel ℓ se puede obtener como combinación lineal única de funciones B-splines de nivel $\ell+1$. Es decir,

$$\beta_\ell = \sum_{\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}} c_{\beta_{\ell+1}}(\beta_\ell) \beta_{\ell+1}, \quad (3.2)$$

donde los coeficientes son todos no negativos. Al tomar solo los coeficientes $c_{\beta_{\ell+1}}(\beta_\ell)$ no nulos, se tiene la siguiente definición para las hijas de β_ℓ :

$$\mathcal{C}(\beta_\ell) := \{\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1} \mid c_{\beta_{\ell+1}}(\beta_\ell) > 0\}, \quad (3.3)$$

la cual es equivalente a la Definición 3.1 para el caso producto tensor. De manera análoga, para $\beta_{\ell+1}$ se define el conjunto de los padres como

$$\mathcal{P}(\beta_{\ell+1}) := \{\beta_\ell \in \mathcal{B}_\ell \mid \beta_{\ell+1} \text{ es una hija de } \beta_\ell\}.$$

Entonces, podemos reescribir la combinación lineal para β_ℓ en (3.2) dejando solo sus funciones hijas,

$$\beta_\ell = \sum_{\beta_{\ell+1} \in \mathcal{C}(\beta_\ell)} c_{\beta_{\ell+1}}(\beta_\ell) \beta_{\ell+1}. \quad (3.4)$$

Aquí todos los coeficientes son positivos.

3.1. Espacios de splines jerárquicos

Observación 3.2. Notar que para cualquier $\beta_\ell \in \mathcal{B}_\ell$ se cumple que

$$\mathcal{C}(\beta_\ell) \subset \{\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1} \mid \text{supp } \beta_{\ell+1} \subset \text{supp } \beta_\ell\}. \quad (3.5)$$

Con el anidamiento de los espacios producto tensor, estamos en condiciones de introducir la construcción jerárquica. El objetivo central de esta sección es describir cómo estos espacios se combinan para generar espacios jerárquicos, preservando propiedades locales.

Definición 3.3 (Jerarquía de Subdominios). Para $n \in \mathbb{N}$, decimos que el conjunto $\Omega_n := \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ es una jerarquía de subdominios de profundidad n si

$$\Omega = \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \dots \supset \Omega_{n-1} \supset \Omega_n = \emptyset, \quad (3.6)$$

y cada subdominio Ω_ℓ es unión de celdas de nivel $\ell - 1$.

Definición 3.4 (Base jerárquica). Definimos la base jerárquica $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\Omega_n)$ tomando $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{n-1}$ en el siguiente algoritmo recursivo:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 & := \mathcal{B}_0, \\ \mathcal{H}_{\ell+1} & := \{\beta \in \mathcal{H}_\ell \mid \text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}\} \cup \\ & \quad \{\beta \in \mathcal{B}_{\ell+1} \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\}, \quad \ell = 0, \dots, n-2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Llamamos *espacio de splines jerárquicos* al espacio generado por \mathcal{H} , y HB-splines a las funciones de \mathcal{H} , que son en efecto, un conjunto linealmente independiente de funciones, como se verá en la Proposición 3.6. Además, podemos asociar una *malla jerárquica* subyacente $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{Q}(\Omega_n)$, dada por

$$\mathbb{Q} := \bigcup_{\ell=0}^{n-1} \{Q \in \mathcal{Q}_\ell \mid Q \subset \Omega_\ell \wedge Q \not\subset \Omega_{\ell+1}\}.$$

En lo siguiente decimos que Q es una *celda activa* (o *elemento activo*) si $Q \in \mathbb{Q}$, y es una *celda activa de nivel ℓ* si $Q \in \mathcal{Q}_\ell \cap \mathbb{Q}$. También decimos que Q es una *celda desactivada de nivel ℓ* si $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ y $Q \subset \Omega_{\ell+1}$.

A continuación presentamos una observación donde se realiza un análisis de la construcción de la Definición 3.4. Este análisis nos proporciona herramientas para entender cómo se enriquece el espacio generado por \mathcal{H}_ℓ , de manera local, en cada iteración hasta alcanzar el espacio de splines jerárquico.

Antes de iniciar, veamos que la siguiente igualdad se cumple para todo $\ell = 0, \dots, n-1$.

$$\{\beta \in \mathcal{H}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\} = \{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\}. \quad (3.8)$$

Primero, consideramos $\beta \in \mathcal{H}_\ell$ tal que $\text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}$. Como $\Omega_{\ell+1} \subset \Omega_\ell$, entonces por la definición de \mathcal{H}_ℓ , tenemos

$$\{\beta \in \mathcal{H}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\} \subset \{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\}.$$

Por otro lado, si $\beta \in \mathcal{B}_\ell$ tal que $\text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}$, utilizando de nuevo que $\Omega_{\ell+1} \subset \Omega_\ell$ y la definición de \mathcal{H}_ℓ , tenemos la otra inclusión:

$$\{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\} \subset \{\beta \in \mathcal{H}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\}.$$

Observación 3.5. Para iniciar tomamos $\mathcal{H}_0 := \mathcal{B}_0$, que contiene a las funciones B-splines de nivel 0 cuyo soporte está incluido en Ω_0 . Como $\Omega_1 \subset \Omega_0$, queremos agregar funciones B-spline de nivel 1 para tener mayor resolución en esta región. Entonces, consideremos la descomposición

$$\mathcal{H}_0 = \{\beta \in \mathcal{H}_0 \mid \text{supp } \beta \not\subset \Omega_1\} \cup \{\beta \in \mathcal{H}_0 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_1\}.$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.8) podemos escribir

$$\{\beta \in \mathcal{H}_0 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_1\} = \{\beta \in \mathcal{B}_0 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_1\}$$

y todas las funciones de este conjunto pueden escribirse como combinación lineal de las funciones de $\{\beta \in \mathcal{B}_1 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_1\}$. De esta manera, al considerar el conjunto:

$$\mathcal{H}_1 := \{\beta \in \mathcal{H}_0 \mid \text{supp } \beta \not\subset \Omega_1\} \cup \{\beta \in \mathcal{B}_1 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_1\},$$

no perdemos ninguna función generada por \mathcal{H}_0 en el espacio generado por \mathcal{H}_1 . Ahora descomponemos el conjunto \mathcal{H}_1 en

$$\mathcal{H}_1 = \{\beta \in \mathcal{H}_1 \mid \text{supp } \beta \not\subset \Omega_2\} \cup \{\beta \in \mathcal{H}_1 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_2\},$$

donde $\{\beta \in \mathcal{H}_1 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_2\} = \{\beta \in \mathcal{B}_1 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_2\}$ por la ecuación (3.8). Al igual que en el caso anterior, reemplazamos este conjunto por $\{\beta \in \mathcal{B}_2 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_2\}$ para generar funciones nuevas y no perder la información del espacio generado por \mathcal{H}_1 . De esta manera se define

$$\mathcal{H}_2 := \{\beta \in \mathcal{H}_1 \mid \text{supp } \beta \not\subset \Omega_2\} \cup \{\beta \in \mathcal{B}_2 \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_2\}.$$

Siguiendo con este procedimiento para \mathcal{H}_ℓ con $\ell = 2, \dots, n-2$, obtenemos el conjunto $\mathcal{H}_{\ell+1}$ al reemplazar el conjunto $\{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\}$, con $\{\beta \in \mathcal{B}_{\ell+1} \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\}$ y definiendo así

$$\mathcal{H}_{\ell+1} := \{\beta \in \mathcal{H}_\ell \mid \text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}\} \cup \{\beta \in \mathcal{B}_{\ell+1} \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\}.$$

De esta manera, el espacio generado por \mathcal{H}_ℓ se enriquece con el espacio generado por $\mathcal{H}_{\ell+1}$ en $\Omega_{\ell+1}$.

Esta observación nos proporciona un primer acercamiento a la propiedad:

$$\text{span } \mathcal{H}_\ell \subset \text{span } \mathcal{H}_{\ell+1}, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-2,$$

que probamos formalmente más adelante.

3.1. Espacios de splines jerárquicos

De la Definición 3.4 y la Observación 3.5, para cada ℓ , podemos definir dos conjuntos que son de suma importancia. Primero, definimos el conjunto de B-splines de nivel ℓ desactivadas en \mathcal{H} ,

$$\mathcal{D}_\ell := \mathcal{H}_\ell \setminus \mathcal{H}_{\ell+1} = \{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}\}.$$

Segundo, notemos que el conjunto de las B-splines de nivel ℓ que están activas en \mathcal{H} , está dado por

$$\mathcal{H} \cap \mathcal{B}_\ell = \{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_\ell \text{ y } \text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}\}.$$

En consecuencia, el conjunto de todas las B-splines activas puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\ell=0}^{n-1} \{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_\ell \text{ y } \text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}\}.$$

Proposición 3.6. *Para cada $\ell = 0, \dots, n-1$, el conjunto \mathcal{H}_ℓ es linealmente independiente.*

Demostración. Consideremos $\sum_{\beta \in \mathcal{H}_\ell} a_\beta \beta = 0$, y veamos que $a_\beta = 0$ para todo $\beta \in \mathcal{H}_\ell$. Podemos escribir

$$0 = \sum_{\beta \in \mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_0} a_\beta \beta + \sum_{\beta \in \mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_1} a_\beta \beta + \dots + \sum_{\beta \in \mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_\ell} a_\beta \beta. \quad (3.9)$$

Como todas las B-splines en $\mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_j$ se anulan en $\Omega_0 \setminus \Omega_1$, siempre que $j > 0$, y en vista de que el conjunto de funciones $\mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_0$ es linealmente independiente por estar contenido en \mathcal{B}_0 . Concluimos que $a_\beta = 0$ para todo $\beta \in \mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_0$. Supongamos ahora que en la suma (3.9) se cumple que $a_\beta = 0$ para todo $\beta \in \mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_j$ para $j < k$. Notar que todas las B-splines en $\mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_j$ se anulan en $\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}$, siempre que $j > k$, y que $\mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_k$ es linealmente independiente. Esto implica que $a_\beta = 0$ para todo $\beta \in \mathcal{H}_\ell \cap \mathcal{B}_k$. El razonamiento inductivo anterior permite concluir que entonces $a_\beta = 0$ para todo $\beta \in \mathcal{H}_\ell$. \square

Notar que en particular, \mathcal{H} es linealmente independiente.

Proposición 3.7. *Sean $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{n-1}$ los conjuntos que se definen en (3.7). Entonces,*

$$\text{span } \mathcal{H}_\ell \subset \text{span } \mathcal{H}_{\ell+1}, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-2.$$

Demostración. Sea $\ell = 0, 1, \dots, n-2$ y $f \in \text{span } \mathcal{H}_\ell$. Podemos escribir

$$f = \sum_{\beta \in \mathcal{H}_\ell} a_\beta \beta = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{H}_\ell, \\ \text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta \beta + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_\ell, \\ \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta \beta. \quad (3.10)$$

Notar que la primera sumatoria es una combinación lineal de funciones que están en $\mathcal{H}_{\ell+1}$. Por otro lado, como los espacios de splines $\{\mathcal{S}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ están anidados, podemos escribir cada función $\beta \in \mathcal{B}_\ell$ tal que $\text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}$ de la segunda sumatoria como combinación lineal de las funciones de $\mathcal{B}_{\ell+1}$. De las ecuaciones (3.2), (3.4) y la Observación 3.2, se tiene que

$$\beta = \sum_{\substack{\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}, \\ \text{supp } \beta_{\ell+1} \subset \text{supp } \beta}} c_{\beta_{\ell+1}}(\beta) \beta_{\ell+1},$$

para toda $\beta \in \mathcal{B}_\ell$ tal que $\text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}$. Sustituyendo esta expresión en (3.10) tenemos que $f \in \text{span } \mathcal{H}_{\ell+1}$. \square

Un resultado que se desprende de esta proposición es el siguiente.

Corolario 3.8. *El espacio producto tensor inicial $\mathcal{S}_0 = \text{span } \mathcal{B}_0$ está incluido en $\text{span } \mathcal{H}_\ell$ para todo $\ell = 1, \dots, n-1$.*

Demostración. Como $\mathcal{B}_0 = \mathcal{H}_0$, y por el resultado anterior $\text{span } \mathcal{H}_0 \subset \text{span } \mathcal{H}_1 \subset \dots \subset \text{span } \mathcal{H}_{n-1}$, se tiene que $\mathcal{S}_0 \subset \text{span } \mathcal{H}_\ell$ para todo $\ell = 1, \dots, n-1$. \square

A diferencia de las bases B-spline asociadas a espacios de splines producto tensor, la base de HB-splines no constituye una partición de la unidad. No obstante, como se establece en [VGJS11, Lemma 5] es posible recuperar una partición de la unidad mediante una ponderación adecuada de las funciones de la base. A continuación, presentamos una observación que permite entender la construcción de esta propiedad.

Observación 3.9. Consideremos $f \equiv 1$ expresada como una combinación lineal de las funciones de \mathcal{H}_ℓ . Podemos descomponer dicha combinación separando las funciones $\beta \in \mathcal{H}_\ell$ según satisfagan $\text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}$ ó $\text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}$.

$$1 = \sum_{\beta \in \mathcal{H}_\ell} a_\beta \beta = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{H}_\ell, \\ \text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta \beta + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{H}_\ell, \\ \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta \beta.$$

Utilizando la ecuación (3.8) tenemos,

$$1 = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{H}_\ell, \\ \text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta \beta + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_\ell, \\ \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta \beta.$$

Ahora bien, escribiendo cada función de la segunda sumatoria como combinación lineal de las funciones $\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}$, las cuales cumplen que $\text{supp } \beta_{\ell+1} \subset \Omega_{\ell+1}$, y mediante un cambio en el orden de los sumandos obtenemos que

$$1 = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{H}_\ell, \\ \text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta \beta + \sum_{\substack{\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}, \\ \text{supp } \beta_{\ell+1} \subset \Omega_{\ell+1}}} \left[\sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_\ell, \\ \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta c_{\beta_{\ell+1}}(\beta) \right] \beta_{\ell+1}.$$

3.1. Espacios de splines jerárquicos

Tomando $a_{\beta_{\ell+1}} = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_\ell, \\ \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta c_{\beta_{\ell+1}}(\beta)$ logramos escribir a la función constante 1 como

$$1 = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{H}_\ell, \\ \text{supp } \beta \not\subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta \beta + \sum_{\substack{\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}, \\ \text{supp } \beta_{\ell+1} \subset \Omega_{\ell+1}}} a_{\beta_{\ell+1}} \beta_{\ell+1}. \quad (3.11)$$

Definimos los coeficientes $a_{\beta_{\ell+1}}$ que están asociados a las funciones $\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}$ con $\text{supp } \beta_{\ell+1} \subset \Omega_{\ell+1}$ como

$$a_{\beta_{\ell+1}} := \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_\ell, \\ \text{supp } \beta \subset \Omega_{\ell+1}}} a_\beta c_{\beta_{\ell+1}}(\beta), \quad (3.12)$$

y notemos que por la independencia lineal de los conjuntos \mathcal{H}_ℓ y $\mathcal{B}_{\ell+1}$ estos coeficientes son únicos.

El objetivo de esta observación es escribir la función 1 como combinación lineal de las funciones en $\mathcal{H}_{\ell+1}$ donde sus coeficientes quedan determinados de forma única en función de los coeficientes que se utilizan para escribir la función 1 en términos de \mathcal{H}_ℓ . Además vemos en (3.11) que los coeficientes de las funciones que están en $\mathcal{H}_{\ell+1} \cap \mathcal{H}_\ell$ se mantienen, mientras que los coeficientes de las funciones que están en $\mathcal{H}_{\ell+1} \setminus \mathcal{H}_\ell$ se modifican usando la relación de dos escalas de las B-splines producto tensor.

Con este hecho en mente, podemos enunciar la siguiente proposición donde se muestra la partición de la unidad para la base de HB-splines mediante una ponderación dada por los coeficientes de la forma (3.12).

Proposición 3.10 (Partición de la unidad). *Sea \mathcal{H} la base de HB-splines. Sea $a_{\beta_0} := 1$ para todo $\beta_0 \in \mathcal{B}_0$ y para $\ell = 0, 1, \dots, n-2$,*

$$a_{\beta_{\ell+1}} := \sum_{\substack{\beta_\ell \in \mathcal{B}_\ell, \\ \text{supp } \beta_\ell \subset \Omega_{\ell+1}}} a_{\beta_\ell} c_{\beta_{\ell+1}}(\beta_\ell), \quad \text{para todo } \beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}, \text{supp } \beta_{\ell+1} \subset \Omega_{\ell+1}, \quad (3.13)$$

donde esta combinación es la que se obtuvo en (3.12). Entonces,

$$\sum_{\beta \in \mathcal{H}} a_\beta \beta \equiv 1, \quad \text{en } \Omega.$$

En el artículo [BG17] se presenta una demostración de esta propiedad. Sin embargo, aquí daremos detalles de cómo surgen estas ponderaciones en la combinación lineal de la identidad utilizando la ecuación (3.11) de la Observación 3.9.

Demostración. Como $f \equiv 1 \in \text{span } \mathcal{B}_0$, de la ecuación (3.11) para el caso $\ell = 0$ tenemos que

$$1 = \sum_{\substack{\beta_0 \in \mathcal{H}_0, \\ \text{supp } \beta_0 \not\subset \Omega_1}} a_{\beta_0} \beta_0 + \sum_{\substack{\beta_1 \in \mathcal{B}_1, \\ \text{supp } \beta_1 \subset \Omega_1}} a_{\beta_1} \beta_1, \quad (3.14)$$

donde a_{β_1} está dado por la ecuación (3.12) como

$$a_{\beta_1} = \sum_{\substack{\beta_0 \in \mathcal{B}_0, \\ \text{supp } \beta_0 \subset \Omega_1}} a_{\beta_0} c_{\beta_1}(\beta_0), \quad \text{para todo } \beta_1 \in \mathcal{B}_1, \text{supp } \beta_1 \subset \Omega_1, \quad (3.15)$$

y además, por la partición de la unidad,

$$a_{\beta_0} = 1, \quad \text{para todo } \beta_0 \in \mathcal{B}_0, \text{supp } \beta_0 \not\subset \Omega_1. \quad (3.16)$$

De la descomposición (3.14) vemos que la función 1 es combinación lineal de las funciones en \mathcal{H}_1 :

$$1 = \sum_{\beta \in \mathcal{H}_1} a_{\beta} \beta, \quad (3.17)$$

donde los coeficientes están dados por (3.15) y (3.16).

Descomponiendo el lado derecho de (3.17) obtenemos

$$1 = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{H}_1, \\ \text{supp } \beta \not\subset \Omega_2}} a_{\beta} \beta + \sum_{\substack{\beta_1 \in \mathcal{H}_1, \\ \text{supp } \beta_1 \subset \Omega_2}} a_{\beta_1} \beta_1 = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{H}_1, \\ \text{supp } \beta \not\subset \Omega_2}} a_{\beta} \beta + \sum_{\substack{\beta_1 \in \mathcal{B}_1, \\ \text{supp } \beta_1 \subset \Omega_2}} a_{\beta_1} \beta_1. \quad (3.18)$$

Además, por la Observación 3.9 y la ecuación (3.11) tenemos que

$$1 = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{H}_1, \\ \text{supp } \beta \not\subset \Omega_2}} a_{\beta} \beta + \sum_{\substack{\beta_2 \in \mathcal{B}_2, \\ \text{supp } \beta_2 \subset \Omega_2}} a_{\beta_2} \beta_2,$$

donde a_{β_2} está dado por (3.12) y los coeficientes a_{β} para $\beta \in \mathcal{H}_1$ tal que $\text{supp } \beta \not\subset \Omega_2$, fueron determinados en el paso anterior. Esta es una combinación lineal única como funciones de \mathcal{H}_2 .

Siguiendo este proceso, obtenemos

$$1 = \sum_{\substack{\beta_0 \in \mathcal{B}_0, \\ \text{supp } \beta_0 \not\subset \Omega_1}} a_{\beta_0} \beta_0 + \sum_{\substack{\beta_1 \in \mathcal{B}_1, \\ \text{supp } \beta_1 \subset \Omega_1, \\ \text{supp } \beta_1 \not\subset \Omega_2}} a_{\beta_1} \beta_1 + \cdots + \sum_{\substack{\beta_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1}, \\ \text{supp } \beta_{n-1} \subset \Omega_{n-1}, \\ \text{supp } \beta_{n-1} \not\subset \Omega_n}} a_{\beta_{n-1}} \beta_{n-1},$$

donde para cada $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ los coeficientes $a_{\beta_{\ell+1}}$ están dados por

$$a_{\beta_{\ell+1}} = \sum_{\substack{\beta_{\ell} \in \mathcal{B}_{\ell}, \\ \text{supp } \beta_{\ell} \subset \Omega_{\ell+1}}} a_{\beta_{\ell}} c_{\beta_{\ell+1}}(\beta_{\ell}), \quad \text{para todo } \beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}, \text{supp } \beta_{\ell+1} \subset \Omega_{\ell+1}.$$

Hemos probado así, la propiedad de partición de la unidad para \mathcal{H} utilizando una ponderación en los coeficientes. □

3.1. Espacios de splines jerárquicos

En lo que sigue se presenta una caracterización de las funciones $\beta \in \mathcal{H}$ cuyos coeficientes a_β en la partición de la unidad son iguales a cero (ver [BG17, Theorem 3.4]).

Teorema 3.11. *Sea $\beta_{\ell+1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}$ tal que $\text{supp } \beta_{\ell+1} \subset \Omega_{\ell+1}$, para algún $\ell = 0, \dots, n-2$. Entonces, son equivalentes:*

a) $a_{\beta_{\ell+1}} = 0$.

b) *Para todo $\beta_\ell \in \mathcal{P}(\beta_{\ell+1})$, $(a_{\beta_\ell} > 0 \wedge \text{supp } \beta_\ell \subset \Omega_\ell \implies \text{supp } \beta_\ell \not\subset \Omega_{\ell+1})$.*

Demostración. $a_{\beta_{\ell+1}} = 0$ si y solo si para todo $\beta_\ell \in \mathcal{B}_\ell$ con $\text{supp } \beta_\ell \subset \Omega_{\ell+1}$ se cumple que, $a_{\beta_\ell} = 0$ o $c_{\beta_{\ell+1}}(\beta_\ell) = 0$. Esta última afirmación es equivalente a que para todo $\beta_\ell \in \mathcal{P}(\beta_{\ell+1})$ con $a_{\beta_\ell} > 0$ se cumple que $\text{supp } \beta_\ell \not\subset \Omega_{\ell+1}$. \square

Observación 3.12. Notar que si $a_{\beta_{\ell+1}} > 0$, esto significa que existe un padre β_ℓ de $\beta_{\ell+1}$ que cumple $a_{\beta_\ell} > 0$ y es una función desactivada de nivel ℓ . Otra manera de ver esto es que $a_{\beta_{\ell+1}} = 0$ si existen celdas de nivel ℓ de la malla jerárquica “muy cercanas” al soporte de $\beta_{\ell+1}$ (ver [BG17, Figure 2]).

En lo que sigue, se probará que las B-splines de nivel ℓ desactivadas pueden escribirse como combinación lineal de funciones en la base jerárquica de nivel superior.

Lema 3.13. *Sea \mathcal{H} la base HB-spline asociada con la jerarquía de subdominios de profundidad n , $\Omega_n := \{\Omega_0, \dots, \Omega_n\}$. Entonces,*

$$\mathcal{D}_\ell \subset \text{span} \left(\mathcal{H} \cap \bigcup_{k=\ell+1}^{n-1} \mathcal{B}_k \right), \quad (3.19)$$

para $\ell = 0, \dots, n-2$.

Demostración. Notar que (3.19) vale para $\ell = n-2$ por (3.2). Ahora asumir que (3.19) vale para algún ℓ y se prueba para $\ell-1$. Sea $\beta_{\ell-1} \in \mathcal{D}_{\ell-1}$. Como $\beta_{\ell-1} \in \mathcal{B}_{\ell-1}$ y $\text{supp } \beta_{\ell-1} \subset \Omega_\ell$, tenemos que,

$$\beta_{\ell-1} = \sum_{\substack{\beta_\ell \in \mathcal{B}_\ell, \\ \text{supp } \beta_\ell \subset \Omega_\ell}} c_{\beta_\ell}(\beta_{\ell-1})\beta_\ell = \sum_{\substack{\beta_\ell \in \mathcal{B}_\ell, \\ \text{supp } \beta_\ell \subset \Omega_{\ell+1}}} c_{\beta_\ell}(\beta_{\ell-1})\beta_\ell + \sum_{\beta_\ell \in \mathcal{H} \cap \mathcal{B}_\ell} c_{\beta_\ell}(\beta_{\ell-1})\beta_\ell.$$

La primera sumatoria, por la hipótesis inductiva, pertenece al espacio generado por $\mathcal{H} \cap \bigcup_{k=\ell+1}^{n-1} \mathcal{B}_k$ y la segunda suma pertenece a $\text{span}(\mathcal{H} \cap \mathcal{B}_\ell)$. Por tanto, $\beta_{\ell-1} \in \text{span} \left(\mathcal{H} \cap \bigcup_{k=\ell}^{n-1} \mathcal{B}_k \right)$. \square

Para finalizar introducimos una familia de subdominios asociados a la jerarquía de subdominios, que jugarán un rol esencial en el análisis de las secciones siguientes. Para $\ell = 0, 1, \dots, n-1$, definimos ω_ℓ como la unión de los elementos de nivel ℓ cuyo soporte extendido está contenido en Ω_ℓ , es decir,

$$\omega_\ell := \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\ell \\ \tilde{Q} \subset \Omega_\ell}} Q, \quad (3.20)$$

donde \tilde{Q} denota el soporte extendido de Q , dado por $\tilde{Q} = \bigcup_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_\ell \\ \text{supp } \beta \supset Q}} \text{supp } \beta$.

También se establece que $\omega_n := \emptyset$. Esta definición nos indica que ω_ℓ es el subconjunto más grande de Ω_ℓ tal que las funciones en $\{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_\ell\}$ generan todos los elementos del espacio producto tensor \mathcal{S}_ℓ restringidas a ω_ℓ (ver [GJS12, Pág. 488]).

Antes de terminar esta sección presentamos una observación importante sobre la estructura que presentan los subdominios $\{\omega_\ell\}_{\ell=0}^n$, que es trivial por definición.

Observación 3.14. Para cada $\ell = 0, \dots, n$, el conjunto ω_ℓ está formado por celdas de nivel ℓ .

3.2. Refinamiento adaptativo

Para poder desarrollar métodos adaptativos utilizando espacios jerárquicos necesitamos introducir un procedimiento de refinamiento. En esta sección presentamos la definición y el proceso de refinamiento que utilizaremos, siguiendo el enfoque propuesto en [GV18]. Asimismo, presentamos una serie de propiedades que permiten relacionar el espacio jerárquico original con el espacio resultante luego del refinamiento.

Definición 3.15 (Refinamiento de un espacio jerárquico). Consideremos los subdominios jerárquicos $\Omega_n := \{\Omega_0, \dots, \Omega_n\}$ y $\Omega_{n^*} := \{\Omega_0^*, \dots, \Omega_{n^*}^*\}$ de Ω con profundidad n y n^* , respectivamente, donde $n \leq n^*$. Decimos que $\Omega_{n^*}^*$ es un *refinamiento* de Ω_n , si se cumple que

$$\Omega_\ell \subset \Omega_\ell^*, \quad \text{para } \ell = 1, \dots, n.$$

Notar que los espacios jerárquicos generados por las bases jerárquicas \mathcal{H} y \mathcal{H}^* , asociadas a los subdominios jerárquicos Ω_n y $\Omega_{n^*}^*$, respectivamente, cumplen que

$$\text{span } \mathcal{H} \subset \text{span } \mathcal{H}^*. \quad (3.21)$$

La demostración completa de este resultado puede encontrarse en [VGJS11, Proposition 4]. Aquí se presenta el enunciarlo de la siguiente manera.

3.2. Refinamiento adaptativo

Lema 3.16. $\text{span } \mathcal{H}_\ell \subset \text{span } \mathcal{H}_\ell^*$, para $\ell = 0, \dots, n$.

Notar que la Definición 3.15 es lo suficientemente general pues permite que con un solo refinamiento se pueda alcanzar una profundidad alta en una zona en celdas de nivel bajo. Es decir, una celda de nivel 0 de la malla inicial puede desactivarse permitiendo celdas de nivel más alto en esa región (ver Figura 3.1).

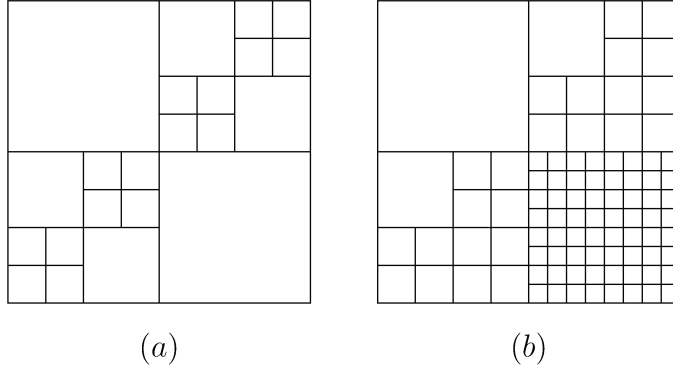


Figura 3.1: Refinamiento jerárquico dado por la Definición 3.15 donde se ejemplifica la flexibilidad de la misma. La configuración inicial (a) muestra una malla jerárquica con una celda de nivel 0 que se desactiva y da lugar, en un único paso, a celdas del nivel más alto como se ve en la malla refinada (b).

Nuestro trabajo se centra en refinamientos jerárquicos donde cada celda nueva en la malla refinada, proviene de una celda activa de la malla inicial. En otras palabras, el proceso consiste en identificar aquellas celdas activas de la malla jerárquica donde se requiere una mejor capacidad de aproximación y proceder a refinarlas. A continuación, presentamos la definición formal de este tipo de refinamiento jerárquico utilizado también en [GV18].

Definición 3.17. Sea $\Omega_n := \{\Omega_0, \dots, \Omega_n\}$ una jerarquía de subdominios y $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{Q}(\Omega_n)$ la malla jerárquica asociada. Consideramos $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$, donde $\mathcal{M}_\ell \subset \mathbb{Q} \cap \mathcal{Q}_\ell$ es el conjunto de celdas marcadas de nivel ℓ , para $\ell = 0, \dots, n-1$. Con esta selección de elementos, definimos $\Omega_{n+1}^* := \{\Omega_0^*, \dots, \Omega_{n+1}^*\}$ por

$$\begin{cases} \Omega_0^* := \Omega_0, \\ \Omega_\ell^* := \Omega_\ell \cup \{Q \mid Q \in \mathcal{M}_{\ell-1}\}, & \ell = 1, \dots, n, \\ \Omega_{n+1}^* = \emptyset. \end{cases} \quad (3.22)$$

Es decir, Ω_ℓ^* se obtiene de Ω_ℓ añadiendo las celdas marcadas de nivel $\ell - 1$.

Teorema 3.18. Sean Ω_n una jerarquía de subdominios, $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ tal que $\mathcal{M}_\ell \subset \mathbb{Q} \cap \mathcal{Q}_\ell$, y Ω_{n+1}^* construido a partir de (3.22). Entonces:

- (I) Para todo $\ell = 1, \dots, n + 1$, se cumple $\Omega_\ell^* \subset \Omega_{\ell-1}$.

(II) Para todo $\ell = 0, \dots, n$, se cumple $\Omega_\ell \subset \Omega_\ell^*$.

(III) Ω_{n+1}^* es una jerarquía de subdominios. Es decir, para todo $\ell = 0, \dots, n+1$, se cumple $\Omega_\ell^* \subset \Omega_{\ell-1}^*$.

Demostración. (I) Primero, notemos que, $\Omega_{n+1}^* = \emptyset$, por tanto $\Omega_{n+1}^* \subset \Omega_n$.

Luego para $\ell = 1, \dots, n$, tenemos por definición $\Omega_\ell^* := \Omega_\ell \cup \{Q \mid Q \in \mathcal{M}_{\ell-1}\}$. Como $\mathcal{M}_{\ell-1}$ es un conjunto con celdas activas de nivel $\ell-1$, entonces, $Q \subset \Omega_{\ell-1}$ para todo $Q \in \mathcal{M}_{\ell-1}$. Además, se cumple que $\Omega_\ell \subset \Omega_{\ell-1}$, por ser Ω_n una jerarquía de subdominios. En conclusión, $\Omega_\ell^* \subset \Omega_{\ell-1}$, para todo $\ell = 1, \dots, n+1$.

(II) De la definición de Ω_ℓ^* se tiene de inmediato que $\Omega_\ell \subset \Omega_\ell^*$ para todo $\ell = 0, \dots, n$.

(III) Resta ver que Ω_{n+1}^* es una jerarquía de subdominios. Utilizando los ítems (I) y (II), obtenemos para todo $\ell = 1, \dots, n+1$ que $\Omega_\ell^* \subset \Omega_{\ell-1}$ y $\Omega_{\ell-1} \subset \Omega_{\ell-1}^*$. Con lo cual, $\Omega_\ell^* \subset \Omega_{\ell-1}^*$ se cumple para todo $\ell = 1, \dots, n+1$. \square

Este teorema nos indica que la familia Ω_{n+1}^* obtenida por la Definición 3.17 a partir de la jerarquía de subdominios Ω_n y un subconjunto $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ de celdas activas, cumple la Definición 3.15 y por tanto es un refinamiento jerárquico.

3.3. Mallas débilmente admisibles

Para poder trabajar con métodos adaptativos establecemos un concepto de mallas jerárquicas que debilita la condición de las estrictamente admisibles definidas en [BGV18, Definition 3]. Este tipo de mallas se dieron por primera vez en [BG16], donde se trabaja con las funciones THB-splines de la base jerárquica truncada \mathcal{T}^1 .

A continuación presentamos las definiciones de las mallas admisibles y estrictamente admisibles que han sido ampliamente estudiadas.

Definición 3.19 (Malla jerárquica admisible). Una malla \mathbb{Q} es *admisible de clase m* , con $m \geq 2$, si las funciones de base en \mathcal{T} que toman valores distintos de cero sobre cualquier elemento $Q \in \mathbb{Q}$ pertenecen a un máximo de m niveles sucesivos.

Definición 3.20 (Malla jerárquica estrictamente admisible). Una malla \mathbb{Q} es *estrictamente admisible de clase m* , con $m \geq 2$, si se cumple

$$\Omega_\ell \subset \omega_{\ell-m+1}, \quad (3.23)$$

para $\ell = m, m+1, \dots, n-1$.

¹ \mathcal{T} es un conjunto de funciones que representa una base alternativa a la base \mathcal{H} de funciones HB-splines para el espacio de splines jerárquicos (ver [GJS12]).

3.3. Mallas débilmente admisibles

Observación 3.21. Si una malla \mathbb{Q} es estrictamente admisible de clase m , entonces es admisible de clase m . La prueba de esta afirmación se puede encontrar en [BGV18, Proposition 1].

Introducimos un nuevo tipo de mallas, denominadas débilmente admisibles, basadas en los conjuntos ω_ℓ de cada nivel (ver la ecuación(3.20)). Como mencionamos en la Sección 3.1, el conjunto ω_ℓ es el mayor subconjunto de Ω_ℓ tal que $\{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \text{supp } \beta \subset \Omega_\ell\}$ genera todas las funciones del espacio producto tensor de nivel ℓ restringidas a ω_ℓ .

Debilitando la restricción de las mallas estrictamente admisibles de clase 2, se obtiene la siguiente familia de mallas.

Definición 3.22 (Malla jerárquica débilmente admisible). Una malla \mathbb{Q} es *débilmente admisible*, si se cumple

$$\omega_\ell \subset \omega_{\ell-1}, \quad (3.24)$$

para $\ell = 1, \dots, n - 1$.

Observación 3.23. Si una malla \mathbb{Q} es estrictamente admisible de clase 2, entonces es débilmente admisible. En efecto, como $\omega_\ell \subset \Omega_\ell$ y $\Omega_\ell \subset \omega_{\ell-1}$, entonces $\omega_\ell \subset \omega_{\ell-1}$ para todo $\ell = 1, \dots, n$.

No obstante, la recíproca no se cumple. Existen mallas débilmente admisibles que no son estrictamente admisible de clase 2, y por tanto, no son admisibles de clase 2 como se muestra en la Figura 3.2.

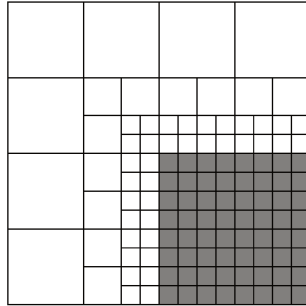


Figura 3.2: Malla jerárquica \mathbb{Q} para splines bicuadráticos. Notar que la malla es débilmente admisible ($\omega_1 = \omega_2$ región sombreada). Sin embargo, no es estrictamente admisible ni admisible de clase 2 ($\Omega_2 \not\subset \omega_1$).

Las mallas jerárquicas admisibles —o estrictamente admisibles— buscan controlar la cantidad de funciones de base que no se anulan sobre cada celda activa. Mientras que las mallas débilmente admisibles por lo general no tienen esta propiedad. En la Figura 3.2 podemos notar que la malla es débilmente admisible, pero no es admisible de clase 2. Sin embargo, estas mallas

fueron consideradas en [Kra97], aunque sin darles este nombre, para probar propiedades de aproximación en L^∞ sobre espacios de splines jerárquicos a través de la construcción de un quasi-interpolante. Luego, fueron retomadas en [BG17] donde se establecen propiedades de aproximación local en L^q . En la Sección 3.7 se avanza sobre esta teoría obteniendo resultados en el contexto de mallas débilmente admisibles.

3.3.1. Propiedades de mallas en \mathbb{R}^d

Con el fin de obtener una caracterización de las mallas débilmente admisibles se presenta en esta sección el estudio de una familia de mallas producto tensor, las cuales denotamos con $\{\mathcal{Q}_\ell^\infty\}_{\ell \in \mathbb{N}}$. Aquí se establecen propiedades que involucran distintos entornos para una misma celda $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$.

A continuación se introduce una notación análoga a la realizada en la Sección 3.1 para construir el espacio de splines producto tensor asociado a la malla \mathcal{Q}_ℓ^∞ para cada nivel $\ell \in \mathbb{N}$.

- \mathcal{Q}_ℓ^∞ tiene celdas cuyos nodos son $2^{-\ell}\mathbb{Z}^d$ donde $\ell \in \mathbb{N}$ y $d \in \mathbb{N}$. Además, diremos que ℓ es el nivel de la malla.
- $\mathbf{p} = (p, \dots, p)$ vector de grado polinomial en cada dirección y se considera máxima suavidad en cada nodo.
- Para cada $i = 1, \dots, d$, se denota por B_i a la B-spline cardinal univariada de grado p . Definimos la B-spline producto tensor de grado \mathbf{p} en el punto $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ por,

$$B_{\mathbf{k}}^\ell(x) = B_{k_1, \dots, k_d}^\ell(x_1, \dots, x_d) = B_1(2^\ell x_1 - k_1) \dots B_d(2^\ell x_d - k_d), \quad (3.25)$$

cuyo soporte es,

$$\text{supp } B_{\mathbf{k}}^\ell = [k_1/2^\ell, (k_1 + p + 1)/2^\ell] \times \dots \times [k_d/2^\ell, (k_d + p + 1)/2^\ell]. \quad (3.26)$$

- $\mathcal{B}_{\mathbf{p}, \ell}^\infty = \{B_{\mathbf{k}}^\ell \mid \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ es el conjunto de todas las funciones B-splines de nivel ℓ .
- $\mathbf{B}_{\mathbf{p}, \ell}^\infty = \{\text{supp } \beta \mid \beta \in \mathcal{B}_{\mathbf{p}, \ell}^\infty\}$ el conjunto de los soportes de todas las funciones B-splines de nivel ℓ .
- \widehat{Q} denota el soporte extendido de $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$ respecto de $\mathcal{B}_{\mathbf{p}, \ell}^\infty$, y se define como

$$\widehat{Q} = \bigcup_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_{\mathbf{p}, \ell}^\infty \\ Q \subset \text{supp } \beta}} \text{supp } \beta. \quad (3.27)$$

3.3. Mallas débilmente admisibles

Observación 3.24. Por (3.26) tenemos que los elementos de $\mathbf{B}_{\mathbf{p},\ell}^\infty$ son cubos d dimensionales formados por $(p+1) \times (p+1) \times \cdots \times (p+1)$ celdas de nivel ℓ (ver Figura 3.3).

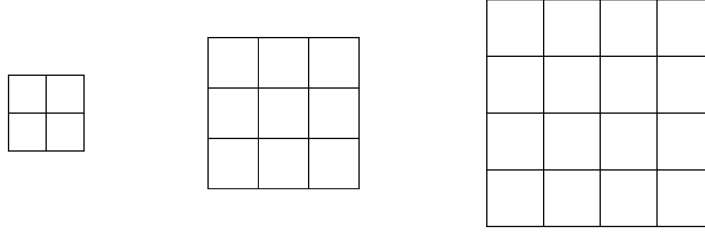


Figura 3.3: En estas gráficas vemos, de izquierda a derecha, la representación de soporte de funciones B-spline bivariadas para los grados polinomiales $\mathbf{p} = (1, 1)$, $\mathbf{p} = (2, 2)$ y $\mathbf{p} = (3, 3)$ respectivamente.

Para poder obtener resultados importantes sobre las mallas jerárquicas serán necesarias algunas definiciones que permiten relacionar las celdas de un nivel con respecto a los otros.

Definición 3.25 (Padre de una celda). Sea $\ell \in \mathbb{N}$ y $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$ definimos $\text{parent}_k(Q)$, para $0 \leq k < \ell$, como la única celda en \mathcal{Q}_k^∞ que cumple $Q \subset \text{parent}_k(Q)$. En el caso particular de $k = \ell - 1$, denotamos $\text{parent}_{\ell-1}(Q) = \text{parent}(Q)$.

Definición 3.26 (Hijas de una celda). Sea $\ell \in \mathbb{N}$ y $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$ definimos $\text{children}_k(Q)$, para $k > \ell$, como el conjunto de celdas $Q' \in \mathcal{Q}_k^\infty$ que cumplen $Q' \subset Q$. En el caso particular $k = \ell + 1$, $\text{children}_{\ell+1}(Q) = \text{children}(Q)$.

Definición 3.27 (Forma \mathbf{p} de nivel ℓ). Dado Ω_0 un subconjunto de \mathbb{R}^d , formado por celdas de \mathcal{Q}_0^∞ , llamamos *forma \mathbf{p} de nivel ℓ* a los elementos del siguiente conjunto

$$\mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell}^\infty(\Omega_0) = \{C \in \mathbf{B}_{\mathbf{p},\ell}^\infty \mid \exists Q \in \mathcal{Q}_{\ell+1}^\infty \text{ tal que } Q \subset \Omega_0, \widehat{Q} \subset C\}, \quad (3.28)$$

donde \widehat{Q} está dado por (3.27). Para simplificar la notación, escribimos al conjunto $\mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell}^\infty(\Omega_0)$ como $\mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell}^\infty$.

Observación 3.28. Notar que no todos los soportes de las funciones en $\mathbf{B}_{\mathbf{p},\ell}^\infty$ constituyen una forma \mathbf{p} . En algún sentido, para que un soporte de una función B-spline sea una forma \mathbf{p} , el mismo debe contener cierta cantidad de celdas que están en Ω_0 (ver Figura 3.4).

Todos los resultados que daremos a continuación se harán para $d = 2$ y $\mathbf{p} = (p, p)$. El caso general donde $d \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{p} = (p, \dots, p)$ se siguen de estos razonamientos.

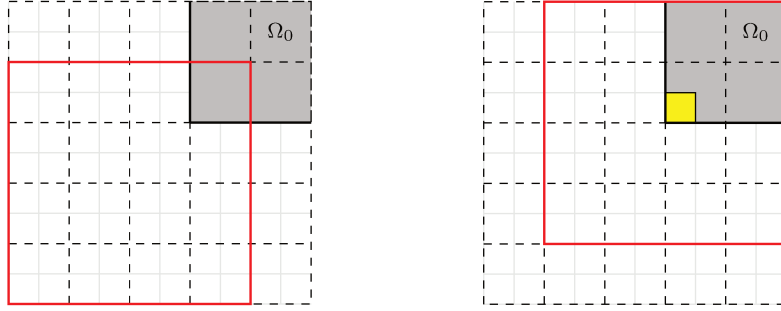


Figura 3.4: En estas figuras se representa una sección del dominio Ω_0 en color gris y se consideran B-splines bicúbicos de nivel ℓ . En la figura de la izquierda se muestra en color rojo el soporte de una B-spline el cual está en $\mathbf{B}_{\mathbf{p},\ell}^\infty \setminus \mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell}^\infty$. A la derecha tenemos en color rojo el soporte de otra función B-spline, este conjunto pertenece a $\mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell}^\infty$ ya que incluye al soporte extendido de una celda de nivel siguiente (celda amarilla).

Definición 3.29. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$, definimos el conjunto,

$$C_Q = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty, \\ Q^* \subset \widehat{Q}}} \text{parent}(Q^*). \quad (3.29)$$

Notar que si Q es una celda de nivel ℓ , entonces C_Q es unión de celdas de nivel $\ell - 1$. Más aún, el siguiente resultado establece que si Q está en Ω_0 entonces C_Q es una forma \mathbf{p} .

Proposición 3.30. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$, si $Q \subset \Omega_0$ entonces el conjunto $C_Q \in \mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell-1}^\infty$.

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$ tal que $Q \subset \Omega_0$. Consideremos su extensión \widehat{Q} , el cual es un conjunto formado por $(2p+1) \times (2p+1)$ celdas de nivel ℓ centrado en Q . Luego, como \mathcal{Q}_ℓ^∞ se obtiene de $\mathcal{Q}_{\ell-1}^\infty$ por refinamiento diádico, entonces C_Q está formado por $(2p+2) \times (2p+2)$ celdas de nivel ℓ , o bien $(p+1) \times (p+1)$ celdas de nivel $\ell - 1$, ver Figura 3.5. Por tanto, C_Q es un elemento de $\mathbf{B}_{\mathbf{p},\ell-1}^\infty$ para el cual $\widehat{Q} \subset C_Q$ y por Definición 3.27 se tiene que $C_Q \in \mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell-1}^\infty$. \square

El conjunto C_Q para una celda $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ fue ya considerado en la [BGV18, Definition 5]. Este entorno de Q será de gran utilidad en las secciones siguientes y sus propiedades son fundamentales para los resultados que obtenemos en esta tesis.

Observación 3.31.

- (i) En general, si sólo tenemos que $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$, entonces el conjunto $C_Q \in \mathbf{B}_{\mathbf{p},\ell-1}^\infty$.

3.3. Mallas débilmente admisibles

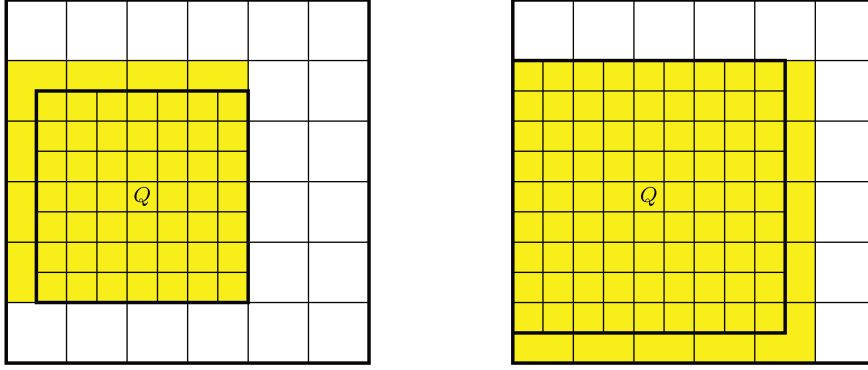


Figura 3.5: En estas figuras se representan celdas de nivel $\ell - 1$ y ℓ , donde a partir de una celda Q de nivel ℓ se construye el entorno C_Q . Primero se considera el soporte extendido de Q para $\mathbf{p} = (3, 3)$ (izquierda) y $\mathbf{p} = (4, 4)$ (derecha), y luego C_Q , el conjunto amarillo, es igual la unión de los $\text{parent}(Q')$ para toda $Q' \subset Q$.

- (II) Para todo $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$, el conjunto \widehat{Q} está incluido en C_Q .
- (III) Si $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$, entonces C_Q es un conjunto formado por la unión de $(p + 1) \times (p + 1)$ celdas de nivel $\ell - 1$ (ver Figura 3.5).

Proposición 3.32. Si $C \in \mathbf{B}_{\mathbf{p}, \ell-1}^\infty$, entonces existe y son únicas las celdas $\text{core}(C) = \{Q_i\}_{i=1}^4 \subset \mathcal{Q}_\ell^\infty$ tal que:

- (I) $C = C_{Q_i}$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
- (II) $C = \bigcup_{i=1}^4 \widehat{Q}_i$.
- (III) Si además, $C \in \mathbf{F}_{\mathbf{p}, \ell-1}^\infty$, entonces

$$C \cap \Omega_0 = \bigcup_{\substack{Q_i \in A, \\ Q_i \subset \Omega_0}} \widehat{Q}_i \cap \Omega_0. \quad (3.30)$$

Demostración. Sea $C \in \mathbf{B}_{\mathbf{p}, \ell-1}^\infty$, por la Observación 3.24 sabemos que C es un conjunto formado por $(p + 1) \times (p + 1)$ celdas de nivel $\ell - 1$. Luego, por refinamiento diádico, tenemos que C es un conjunto formado por $(2p + 2) \times (2p + 2)$, o bien, $(p + 2 + p) \times (p + 2 + p)$ celdas de nivel ℓ (ver Figura 3.6). Esto nos indica que existen cuatro celdas únicas $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$ tales que $C = C_{Q_i}$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Más aún,

$$C = \bigcup_{i=1}^4 \widehat{Q}_i. \quad (3.31)$$

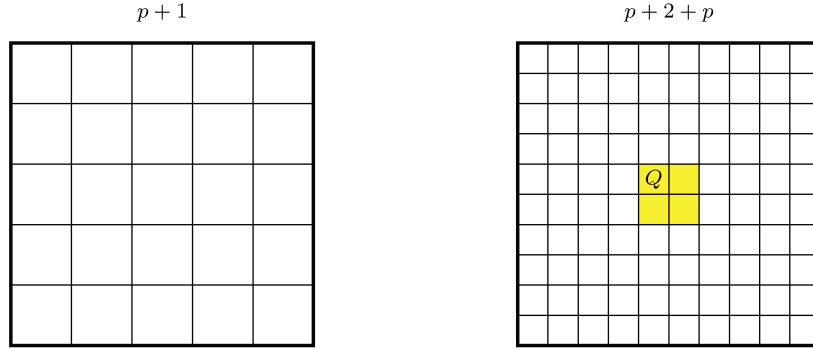


Figura 3.6: En ambas figuras se representa el conjunto $C \in \mathbf{B}_{\mathbf{p},\ell-1}^\infty$, a la izquierda como unión de celdas de nivel $\ell - 1$ y a la derecha como unión de celdas de nivel ℓ (luego de un refinamiento diádico). Nota que las celdas de color amarillo de nivel ℓ tienen el mismo C_Q que coincide con el conjunto C y además la unión de sus soportes extendidos es igual C .

Para probar (III) supongamos que $C \in \mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell-1}^\infty$. Si $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \subset \Omega_0$, entonces por (II) el resultado es trivial. En caso contrario, podemos escribir,

$$C \cap \Omega_0 = \left[\bigcup_{Q_i \subset \Omega_0} \widehat{Q}_i \cap \Omega_0 \right] \cup \left[\bigcup_{Q_i \not\subset \Omega_0} \widehat{Q}_i \cap \Omega_0 \right] =: A \cup B.$$

Es suficiente con probar que $B \subset A$. Esta situación se puede separar en tres únicos casos que se muestran en la Figura 3.7.

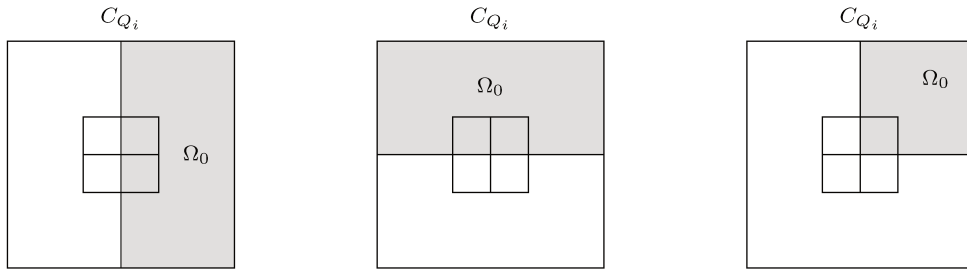


Figura 3.7: Las posibles configuraciones para las celdas $\text{core}(C) = \{Q_i\}_{i=1}^4 \subset \mathcal{Q}_\ell^\infty$ que cumplen (II) en la Proposición 3.32 donde alguna celda Q_i no está contenida en Ω_0 .

□

Proposición 3.33. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$, entonces se verifica que

$$\widehat{\text{parent}}(Q) = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty, \\ Q^* \subset \widehat{Q}}} C_{Q^*}. \quad (3.32)$$

3.3. Mallas débilmente admisibles

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$. Notar primero que $\widehat{\text{parent}}(Q)$ es el único conjunto que está formado por $(2p+1) \times (2p+1)$ celdas de nivel $\ell-1$ centrado en la celda $\text{parent}(Q)$.

Por otro lado, considerando \widehat{Q} podemos tomar el conjunto

$$A = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty, \\ Q^* \subset \widehat{Q}}} \widehat{Q}^*.$$

Un conjunto formado por $(4p+1) \times (4p+1)$ celdas de nivel ℓ centrado en Q (este es el conjunto de color gris oscuro en la Figura 3.8 de la derecha).

$$A = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty \\ Q^* \subset \widehat{Q}}} \widehat{Q}^* = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty \\ Q^* \subset \widehat{Q}}} \left(\bigcup_{\substack{Q^{**} \in \mathcal{Q}_\ell^\infty \\ Q^{**} \subset \widehat{Q}^*}} Q^{**} \right).$$

Teniendo en cuenta la Definición 3.29, al considerar el **parent** para cada celda de nivel ℓ incluida en A se obtiene,

$$\bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty \\ Q^* \subset \widehat{Q}}} \left(\bigcup_{\substack{Q^{**} \in \mathcal{Q}_\ell^\infty \\ Q^{**} \subset \widehat{Q}^*}} \text{parent}(Q^{**}) \right) = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty, \\ Q^* \subset \widehat{Q}}} C_{Q^*}.$$

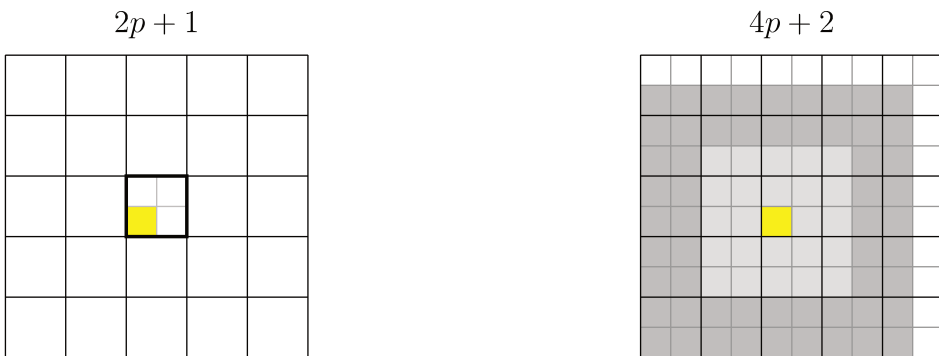


Figura 3.8: Se representa el conjunto $\widehat{\text{parent}}(Q)$ como unión de celdas de nivel $\ell-1$ (izquierda) y nivel ℓ (derecha) donde Q es la celda de nivel ℓ de color amarillo. En la figura de la derecha se representa en gris claro al conjunto \widehat{Q} y en gris oscuro al conjunto A igual a la unión de todos los conjuntos \widehat{Q}^* tal que Q^* es de nivel ℓ y $Q^* \subset \widehat{Q}$.

Este conjunto está formado por $(4p + 2) \times (4p + 2)$ celdas de nivel ℓ o bien $(2p + 1) \times (2p + 1)$ celdas de nivel $\ell - 1$ centrado en $\text{parent}(Q)$ y por tanto,

$$\widehat{\text{parent}(Q)} = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty, \\ Q^* \subset \widehat{Q}}} C_{Q^*}.$$

□

Como hemos visto a lo largo de esta sección, existen diferentes entornos de una celda $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$. Gracias a este último resultado vemos que C_Q representa un entorno de Q que contiene al soporte extendido de Q y que está contenido en el soporte extendido de $\text{parent}(Q)$ como lo vemos en la Figura 3.9.

Observación 3.34. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$, entonces

$$\widehat{Q} \subset C_Q \subset \widehat{\text{parent}(Q)}. \quad (3.33)$$

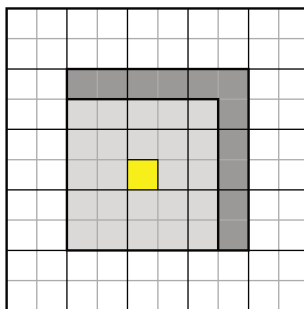


Figura 3.9: Considerando $\mathbf{p} = (2, 2)$, dada una celda $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$ (color amarillo) se representa $\widehat{\text{parent}(Q)}$ como el conjunto más grande formado por celdas de nivel $\ell - 1$. Luego, \widehat{Q} el conjunto en color gris claro, y C_Q el conjunto en gris oscuro.

3.3.2. Caracterización de mallas débilmente admisibles

En este trabajo las mallas jerárquicas se construyen a partir de subdominios jerárquicos dados por la Definición 3.3, donde se considera un conjunto inicial Ω_0 . En esta sección se establecen condiciones para que los subconjuntos ω_ℓ sean no vacíos y a partir de esto poder caracterizar las mallas \mathbb{Q} débilmente admisibles.

Consideremos un espacio de splines jerárquicos de máxima suavidad sobre $\Omega_0 = [0, 1]^d$ construido a partir de mallas uniformes en cada nivel, compuestas por hipercubos de longitud de arista $h_\ell = 2^{-\ell}$, y los espacios anidados se obtienen mediante refinamiento diádico; es decir, \mathcal{S}_ℓ se obtiene a partir de $\mathcal{S}_{\ell-1}$

3.3. Mallas débilmente admisibles

agregando una línea nodal exactamente en el punto medio de cada arista del conjunto de hipercubos que conforman la malla del nivel $\ell - 1$. En consecuencia, para todo $\ell = 0, \dots, n - 1$, se cumple $h_\ell = \frac{h_{\ell-1}}{2}$. Al mismo tiempo, a partir de aquí se considera un mismo grado polinomial p en cada dirección para los espacios producto tensor, es decir, $\mathbf{p} = (p, p, \dots, p)$.

Antes de establecer los resultados se presentan algunos ejemplos de mallas que son débilmente admisibles teniendo en cuenta la Definición 3.22.

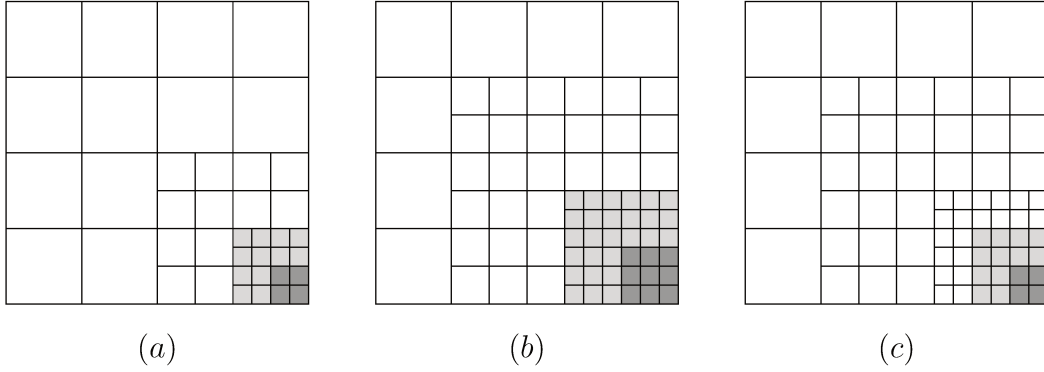


Figura 3.10: Mallas débilmente admisibles con respecto a diferentes grados polinomiales conservando el mismo subconjunto de celdas de nivel 2, (a) $\mathbf{p} = (2, 2)$, (b) $\mathbf{p} = (3, 3)$, (c) $\mathbf{p} = (4, 4)$.

Teniendo en cuenta que cada ω_ℓ está formado por unión de celdas de nivel ℓ , podemos dar la siguiente observación.

Observación 3.35. Sea \mathbb{Q} una malla jerárquica débilmente admisible. Entonces, si $Q \in \mathcal{Q}_k$ y $Q \subset \omega_k$ entonces

$$\text{parent}_\ell(Q) \subset \omega_\ell, \quad \text{para } 0 \leq \ell < k.$$

En otras palabras, en una malla débilmente admisible, si una celda de nivel k está en ω_k , entonces su ancestro de nivel ℓ está en ω_ℓ , donde $\ell < k$.

Como consecuencia de la observación anterior y de la definición de ω_ℓ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.36. Si la malla \mathbb{Q} es débilmente admisible. Para todo ℓ y todo $Q \in \mathcal{Q}_\ell$, $Q \subset \omega_\ell$ se cumple que,

$$\widetilde{\text{parent}}(Q) \subset \Omega_{\ell-1}. \quad (3.34)$$

o equivalentemente,

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_\ell, Q \subset \omega_\ell} \widetilde{\text{parent}}(Q) \subset \Omega_{\ell-1}.$$

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell$, $Q \subset \omega_\ell$, como la malla es débilmente admisible, $\text{parent}(Q) \subset \omega_{\ell-1}$, de aquí resulta la tesis. \square

A continuación presentamos una observación que nos permitirá relacionar la familia de mallas $\{\mathcal{Q}_\ell^\infty\}$ con $\{\mathcal{Q}_\ell\}$ que se obtienen a partir de los subdominios jerárquicos definidos en la Sección 3.1.

Observación 3.37. Para $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$ tal que $Q \subset \Omega_0$, se cumple que,

$$\tilde{Q} = \widehat{Q} \cap \Omega_0.$$

En efecto, notar que para cada $\beta \in \mathcal{B}_\ell$ existe una función B-spline β' que surge de considerar el vector de nodos extendido, en lugar del *open knot vector*. Esta función β' verifica,

$$\text{supp } \beta = \text{supp } \beta' \cap \Omega_0.$$

Resulta así,

$$\widehat{Q} \cap \Omega_0 = \bigcup_{\substack{\beta' \in \mathcal{B}_{p,\ell}^\infty \\ \text{supp } \beta' \supset Q}} \text{supp } \beta' \cap \Omega_0 = \bigcup_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_\ell \\ \text{supp } \beta \supset Q}} \text{supp } \beta = \tilde{Q}.$$

Esta observación nos permite utilizar los resultados de la sección anterior y lograr caracterizaciones de las mallas débilmente admisibles.

El siguiente resultado establece una caracterización para las celdas Q de nivel ℓ que están contenidas en ω_ℓ .

Teorema 3.38. *Consideremos una jerarquía de subdominios Ω_n . Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell$, entonces $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell$ si y solo si $Q \subset \omega_\ell$.*

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ y supongamos que $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell$. Como $\widehat{Q} \subset C_Q$, usando la Observación 3.37 resulta,

$$\tilde{Q} = \widehat{Q} \cap \Omega_0 \subset C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell,$$

se sigue entonces que $Q \subset \omega_\ell$.

Por otro lado, si $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ tal que $Q \subset \omega_\ell$, entonces $\tilde{Q} = \widehat{Q} \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell$. Como Ω_ℓ está formado por celdas de nivel $\ell - 1$, resulta que $\text{parent}(Q^*) \subset \Omega_\ell$ para todo $Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$ tal que $Q^* \subset \widehat{Q} \cap \Omega_0$. Por lo tanto, $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell$. \square

A continuación presentamos una primera caracterización de las mallas débilmente admisibles.

Teorema 3.39. *Una malla jerárquica \mathcal{Q} es débilmente admisible si y sólo si para todo ℓ y todo $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ tal que $Q \subset \omega_\ell$ se cumple $C_{\text{parent}(Q)} \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell-1}$.*

3.3. Mallas débilmente admisibles

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ tal que $Q \subset \omega_\ell$, luego $\text{parent}(Q) \subset \omega_{\ell-1}$ por la Observación 3.35. Con lo cual, por el Teorema 3.38 tenemos que $C_{\text{parent}(Q)} \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell-1}$.

Supongamos ahora que la malla no es débilmente admisible, es decir, para algún ℓ existe $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ tal que $Q \subset \omega_\ell$ y $Q \not\subset \omega_{\ell-1}$, con lo cual $\text{parent}(Q) \in \mathcal{Q}_{\ell-1}$ y $\text{parent}(Q) \not\subset \omega_{\ell-1}$. Por el Teorema 3.38, tenemos que $C_{\text{parent}(Q)} \cap \Omega_0 \not\subset \Omega_{\ell-1}$. \square

Otra equivalencia, aún más importante que ésta, consiste en sólo observar los elementos de Ω_ℓ respecto de $\Omega_{\ell-1}$. Más precisamente, queremos ver que la malla \mathcal{Q} es débilmente admisible si y solo si para todo ℓ y todo $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ tal que $Q \subset \Omega_\ell$ se verifica que $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell-1}$. Sin embargo, en general esta afirmación no se cumple, ya que se impone que el conjunto Ω_ℓ no tengan celdas desactivadas sueltas (ver Figura 3.11). Para solucionar este problema eliminamos esta posibilidad.

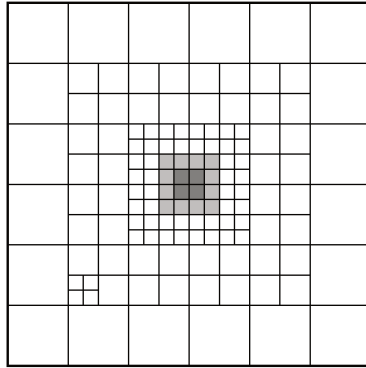


Figura 3.11: Ejemplo de una malla jerárquica débilmente admisible de tres niveles con B-splines bicúbicos que tiene una celda de nivel 1 desactivada cerca de la frontera de Ω_1 . Esto produce celdas activas de nivel 2 cerca de celdas activas de nivel 0.

Cuando Ω_ℓ tiene zonas de celdas *aisladas* que no llegan a cubrir el soporte de al menos una B-spline de nivel $\ell - 1$, el espacio jerárquico asociado no dispone de funciones activas de ese nivel en dichas regiones, lo que a efectos prácticos, resulta equivalente a considerar el espacio asociado a un subdominio Ω_ℓ sin las celdas mencionadas. Si bien en [VGJS11, GJS12] se proponen jerarquías de subdominios más arbitrarias, en el trabajo original de Kraft [Kra97] se consideran solamente jerarquías donde cada subdominio se conforma con unión de soportes de B-splines del nivel anterior, evitando así regiones refinadas de manera excesivamente local en donde el espacio no tiene un poder de representación acorde al nivel de refinamiento.

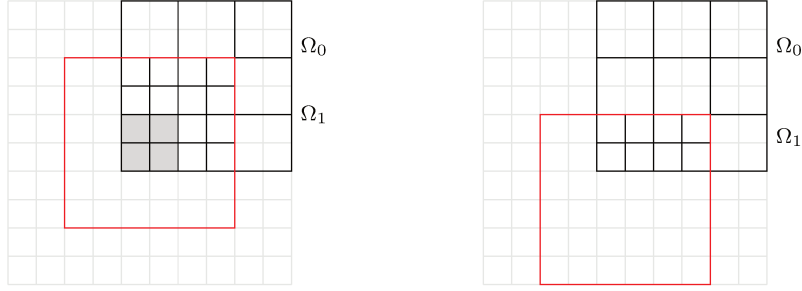


Figura 3.12: En estas figuras se considera $\mathbf{p} = (2, 2)$ y el mismo dominio Ω_0 formado por celdas de nivel 0. A la izquierda Ω_1 está formado por el soporte de una B-spline la cual pertenece a $\mathbf{F}_{\mathbf{p},0}^\infty(\Omega_0)$, esto genera el conjunto $\omega_1 \neq \emptyset$ (región gris). En la figura de la derecha Ω_1 está formado por el soporte de una B-spline que pertenece a $\mathbf{B}_{\mathbf{p},0}^\infty \setminus \mathbf{F}_{\mathbf{p},0}^\infty(\Omega_0)$ y por tanto $\omega_1 = \emptyset$.

Definición 3.40. Diremos que una jerarquía de subdominios Ω_n se llama *agrupada* si para todo ℓ se cumple,

$$\Omega_\ell = \bigcup_{\substack{C_i \in \mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell-1}^\infty \\ i \in J}} C_i \cap \Omega_0, \quad \text{para algún conjunto de índices } J. \quad (3.35)$$

Notar que la definición anterior equivale a definir Ω_ℓ como unión de soportes de B-splines de nivel $\ell - 1$ al igual que lo hizo Kraft en [Kra97]. Puesto que en su trabajo se consideran mallas bi-infinitas de \mathbb{R}^2 , en este caso tenemos que tomar la intersección de los soportes de las B-splines con el dominio de interés Ω_0 y solo considerar aquellas B-splines que pertenecen a $\mathbf{F}_{\mathbf{p},\ell-1}^\infty(\Omega_0)$, para evitar los subdominios Ω_ℓ formados por soportes de B-splines que no generen celdas en ω_ℓ (ver Figura 3.12).

Para las jerarquías de subdominios agrupados se obtienen, a partir de la condición (3.35) otras formas de representar los subdominios Ω_ℓ .

Teorema 3.41. Si Ω_n es una jerarquía de subdominios agrupada, entonces para todo $\ell = 1, \dots, n - 1$ se cumple

$$\Omega_\ell = \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\ell \\ Q \subset \omega_\ell}} C_Q \cap \Omega_0, \quad \text{para todo } \ell = 1, \dots, n - 1, \quad (3.36)$$

y

$$\Omega_\ell = \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\ell \\ Q \subset \omega_\ell}} \tilde{Q}, \quad \text{para todo } \ell = 1, \dots, n - 1. \quad (3.37)$$

Demostración. Primero notemos que para cualquier $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ tenemos por la Observación 3.37 que $\tilde{Q} = \widehat{Q} \cap \Omega_0$ y por la Observación 3.34, resulta $\tilde{Q} =$

3.3. Mallas débilmente admisibles

$\widehat{Q} \cap \Omega_0 \subset C_Q \cap \Omega_0$. Si además se cumple que $Q \subset \omega_\ell$, por el Teorema 3.38 resulta que $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell$. Se sigue que,

$$\bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\ell, \\ Q \subset \omega_\ell}} C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell, \quad \text{para todo } \ell = 1, \dots, n-1,$$

y

$$\bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\ell, \\ Q \subset \omega_\ell}} \widetilde{Q} \subset \Omega_\ell, \quad \text{para todo } \ell = 1, \dots, n-1.$$

Por otro lado, para cada $i \in J$ tenemos que $C_i \in \mathbf{F}_{\mathbf{p}, \ell-1}^\infty$, por la Proposición 3.32, existen y son únicos $\text{core}(C_i) = \{Q_k^i\}_{k=1}^4 \subset \mathcal{Q}_\ell^\infty$ tal que,

$$C_i = C_{Q_k^i}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, 4,$$

y

$$C_i \cap \Omega_0 = \bigcup_{\substack{Q_k^i \in \text{core}(C_i), \\ Q_k^i \subset \Omega_0}} \widehat{Q}_k^i \cap \Omega_0 = \bigcup_{\substack{Q_k^i \in \text{core}(C_i), \\ Q_k^i \subset \Omega_0}} \widetilde{Q}_k^i.$$

Por el Teorema 3.38 como $Q_k^i \subset \Omega_0$ y $C_{Q_k^i} \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell$ resulta que $Q_k^i \subset \omega_\ell$. Así resulta la otra inclusión.

$$\Omega_\ell \subset \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\ell, \\ Q \subset \omega_\ell}} C_Q \cap \Omega_0, \quad \text{para todo } \ell = 1, \dots, n-1,$$

y

$$\Omega_\ell \subset \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\ell, \\ Q \subset \omega_\ell}} \widetilde{Q}, \quad \text{para todo } \ell = 1, \dots, n-1.$$

□

Teorema 3.42. *Consideremos una malla jerárquica \mathcal{Q} construida a partir de una jerarquía de subdominios agrupada. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (I) *La malla jerárquica \mathcal{Q} es débilmente admisible.*
- (II) *Para todo $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ tal que $Q \subset \Omega_\ell$ se cumple que $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell-1}$.*

Antes de la demostración de este teorema presentamos una representación del conjunto $\text{parent}(Q)$ utilizando la ecuación (3.32) de la Observación 3.34.

Dado $Q \in \mathcal{Q}_\ell$, entonces $\text{parent}(Q) = \text{parent}(Q) \cap \Omega_0$. Por la Proposición 3.33 tenemos que,

$$\widetilde{\text{parent}}(Q) = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty, \\ Q^* \subset \tilde{Q}}} C_{Q^*} \cap \Omega_0.$$

Luego,

$$\widetilde{\text{parent}}(Q) = \left(\bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell, \\ Q^* \subset \tilde{Q}}} C_{Q^*} \cap \Omega_0 \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell^\infty, \\ Q^* \subset \tilde{Q} \setminus \tilde{Q}}} C_{Q^*} \cap \Omega_0 \right) = A \cup B.$$

Siguiendo un razonamiento análogo al que hicimos en la demostración del (III) de la Proposición 3.32 se tiene que $B \subset A$. Por tanto,

$$\widetilde{\text{parent}}(Q) = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell, \\ Q^* \subset \tilde{Q}}} C_{Q^*} \cap \Omega_0. \quad (3.38)$$

Demostración del Teorema 3.42. Sea $Q^* \in \mathcal{Q}_\ell$ tal que $Q^* \subset \Omega_\ell$, entonces por (3.37) existe $Q \in \mathcal{Q}_\ell$, $Q \subset \omega_\ell$ tal que $Q^* \subset \tilde{Q}$. Por la ecuación (3.38), se tiene que

$$C_{Q^*} \cap \Omega_0 \subset \widetilde{\text{parent}}(Q).$$

Como la malla es débilmente admisible, $\widetilde{\text{parent}}(Q) \subset \Omega_{\ell-1}$. Por tanto, $C_{Q^*} \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell-1}$ para todo $Q^* \in \mathcal{Q}_\ell$ y todo ℓ .

Supongamos ahora que la malla no es débilmente admisible, es decir, para algún ℓ existe $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ tal que, $Q \subset \omega_\ell$ y $Q \not\subset \omega_{\ell-1}$. Por tanto, $\widetilde{\text{parent}}(Q) \not\subset \Omega_{\ell-1}$. De nuevo, usando la ecuación (3.38),

$$\widetilde{\text{parent}}(Q) = \bigcup_{\substack{Q^* \in \mathcal{Q}_\ell, \\ Q^* \subset \tilde{Q}}} C_{Q^*} \cap \Omega_0.$$

Tenemos que existe una celda $Q^* \in \mathcal{Q}_\ell$ y $Q^* \subset \tilde{Q}$ tal que $C_{Q^*} \cap \Omega_0 \not\subset \Omega_{\ell-1}$. \square

3.4. Algoritmo adaptativo para mallas débilmente admisibles

En esta sección presentamos un algoritmo de refinamiento adaptativo que se aplica a una malla \mathcal{Q} débilmente admisible construida a partir de una jerarquía de subdominios agrupados siguiendo la Definición 3.17. Durante el resto de este capítulo vamos a considerar las mallas débilmente admisibles como aquellas construidas a partir de una jerarquía de subdominios agrupados.

3.4. Algoritmo adaptativo para mallas débilmente admisibles

Ahora bien, el algoritmo que proponemos nos permite conservar ciertas propiedades de la malla inicial, de manera similar al que presentan [BGV18] con las mallas estrictamente admisibles de clase m .

El proceso consiste en considerar, mediante una estrategia de marcado como las estudiadas en [Ver13, Chapter 2], un subconjunto de celdas marcadas \mathbb{M} , las cuales son activas en \mathbb{Q} . Luego, antes de proceder con el refinamiento usual, generamos una rutina que reordena y cambia (de ser necesario) las celdas del subconjunto \mathbb{M} siguiendo una propiedad que depende de la celda marcada y la malla \mathbb{Q} . Esta característica de la celda permite cuantificar la capacidad de aproximación que ofrece el espacio jerárquico sobre la misma. Una vez que reescribimos el conjunto \mathbb{M} , se selecciona un conjunto de celdas más grande que nos permite obtener en la nueva malla \mathbb{Q}^* , la cual conserva algunas propiedades esenciales de \mathbb{Q} .

La siguiente definición resulta fundamental en el diseño del algoritmo adaptativo, ya que nos permite medir para cada celda, cuánto se enriquece localmente el espacio jerárquico.

Definición 3.43 (Poder de aproximación de una celda). Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ tal que $Q \subset \Omega_\ell$, para $\ell = 0, 1, \dots, n-1$. Decimos que Q tiene poder de aproximación k en \mathbb{Q} , y escribimos $Q \in \mathcal{A}_k(\mathbb{Q})$, si k es el índice más grande tal que

$$Q \subset \omega_k \quad \text{y} \quad Q \not\subset \omega_{k+1}.$$

Diremos que una celda $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ es óptima o tiene poder de aproximación óptimo si $Q \in \mathcal{A}_\ell(\mathbb{Q})$ y diremos que es subóptima o tiene poder de aproximación subóptimo si $Q \in \mathcal{A}_{\ell-1}(\mathbb{Q})$.

Observación 3.44. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ una celda activa, entonces $Q \in \mathcal{A}_k(\mathbb{Q})$ para algún $k \leq \ell$. En efecto, como Q es una celda activa de nivel ℓ , tenemos que $Q \not\subset \Omega_j$ para algún $j > \ell$. Consecuentemente, $Q \not\subset \omega_j$ para todo $j > \ell$. Por lo tanto, el poder de aproximación de Q es a lo sumo ℓ .

Observación 3.45. Para $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ y cualquier $k \leq \ell$ se cumple

$$Q \subset \omega_k \quad \Leftrightarrow \quad \text{parent}_k(Q) \subset \omega_k.$$

En efecto, si $Q \subset \omega_k$, sabemos por la Observación 3.14 que ω_k está formado por celdas de nivel k , entonces $\text{parent}_k(Q) \subset \omega_k$. Ahora bien, si $\text{parent}_k(Q) \subset \omega_k$, entonces ω_k contiene a todas las hijas de $\text{parent}_k(Q)$ de niveles superior. En particular, $Q \subset \omega_k$.

Consideremos una malla jerárquica \mathbb{Q} débilmente admisible, $\Omega_n = \{\Omega_\ell\}_{\ell=0}^n$ la jerarquía de subdominios asociada, y un subconjunto $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ de celdas activas en \mathbb{Q} dadas por

$$\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{Q}_\ell \cap \mathbb{Q}, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1,$$

donde queremos obtener mayor poder de aproximación.

El objetivo es refinar la malla \mathbb{Q} lo menos posible para obtener una nueva malla \mathbb{Q}^* que verifique:

- la jerarquía de subdominios $\Omega_{n+1}^* = \{\Omega_\ell^*\}_{i=0}^{n+1}$ correspondiente a la malla \mathbb{Q}^* es agrupada;
- todas las celdas en \mathbb{M} aumentaron en uno su poder de aproximación respecto de la malla \mathbb{Q} ;
- la malla \mathbb{Q}^* es débilmente admisible.

Antes que nada, aplicamos una rutina, descrita en el Algoritmo 1, al conjunto de celdas marcadas \mathbb{M} para quedarnos con celdas que tengan poder de aproximación óptimo y subóptimo.

Algorithm 1 update_marked_elements

Input: $\{\mathbb{Q}, \mathbb{M}\}$

- 1: **for** $\ell = n - 1, \dots, 1$ **do**
 - 2: Split \mathcal{M}_ℓ into three parts:
 - $\mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}} := \{Q \in \mathcal{M}_\ell \mid Q \subset \omega_\ell\}$.
 - $\mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}} := \{Q \in \mathcal{M}_\ell \mid Q \not\subset \omega_\ell \wedge \text{parent}(Q) \subset \omega_{\ell-1}\}$.
 - $\mathcal{M}_\ell^{\text{AUX}} := \{Q \in \mathcal{M}_\ell \mid Q \not\subset \omega_\ell \wedge \text{parent}(Q) \not\subset \omega_{\ell-1}\}$.
 - 3: $\mathcal{M}_{\ell-1} \leftarrow \mathcal{M}_{\ell-1} \cup \{\text{parent}(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_\ell^{\text{AUX}}\}$
 - 4: **end for**
 - 5: $\mathcal{M}_0^{\text{OPT}} \leftarrow \mathcal{M}_0$
 - 6: $\mathcal{M}_0^{\text{SUBOPT}} \leftarrow \emptyset$
- Output:** $\mathbb{M}^{\text{OPT}} = \{\mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}\}_{\ell=0}^{n-1}$, $\mathbb{M}^{\text{SUBOPT}} = \{\mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}\}_{\ell=0}^{n-1}$
-

Observación 3.46. Notar que la cantidad inicial de celdas marcadas en \mathbb{M} y la cantidad de celdas que obtenemos del Algoritmo 1 cumplen que

$$\#(\mathbb{M}^{\text{OPT}} \cup \mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}) \leq \#\mathbb{M}. \quad (3.39)$$

Esto se debe a la posibilidad de marcar dos celdas activas que tengan un mismo padre de nivel más bajo k y por tanto el Algoritmo 1 las reemplace por una misma celda.

La salida de este algoritmo produce los conjuntos \mathbb{M}^{OPT} y $\mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}$, donde el primero tiene a todas las celdas de \mathbb{M} que tienen poder de aproximación óptimo y el segundo todas las celdas de \mathbb{M} o algún padre de nivel más bajo k que tenga poder de aproximación subóptimo.

A continuación, probamos estas propiedades.

3.4. Algoritmo adaptativo para mallas débilmente admisibles

Proposición 3.47. Sea $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ un conjunto de celdas activas en \mathbb{Q} y $\mathbb{M}^{\text{OPT}} = \{\mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}\}_{\ell=0}^{n-1}$, $\mathbb{M}^{\text{SUBOPT}} = \{\mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}\}_{\ell=0}^{n-1}$ las salidas del Algoritmo 1, entonces:

- (I) Las celdas en $\mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}$ son celdas activas de nivel ℓ y tienen poder de aproximación ℓ .
- (II) Las celdas en $\mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}$ son celdas activas o desactivadas de nivel ℓ y tienen poder de aproximación $\ell - 1$.

Demostración. Realizamos la prueba de (I) y (II) juntas. Tomamos $\ell = n - 1$, entonces los conjuntos $\mathcal{M}_{n-1}^{\text{OPT}}$, $\mathcal{M}_{n-1}^{\text{SUBOPT}}$ son subconjuntos de \mathcal{M}_{n-1} . Por tanto son celdas activas de nivel $n - 1$. Además, si $Q \in \mathcal{M}_{n-1}^{\text{OPT}}$ entonces $Q \subset \omega_{n-1}$ con lo cual, $Q \in \mathcal{A}_{n-1}$. Por otro lado, si $Q \in \mathcal{M}_{n-1}^{\text{SUBOPT}}$ entonces $Q \not\subset \omega_{n-1}$ y $\text{parent}(Q) \subset \omega_{n-2}$ con lo cual, $Q \in \mathcal{A}_{n-2}$.

Para los casos $\ell = n - 2, \dots, 0$ notemos que el conjunto \mathcal{M}_ℓ se redefine como,

$$\mathcal{M}'_\ell = \mathcal{M}_\ell \cup \{\text{parent}(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_{\ell+1}^{\text{AUX}}\},$$

donde $\mathcal{M}_{\ell+1}^{\text{AUX}} := \{Q \in \mathcal{M}'_{\ell+1} \mid Q \not\subset \omega_{\ell+1} \wedge \text{parent}(Q) \not\subset \omega_\ell\}$. En el algoritmo este conjunto no cambia de nombre, pero para esta demostración tomaremos:

- $\mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}} := \{Q \in \mathcal{M}'_\ell \mid Q \subset \omega_\ell\}$.
- $\mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}} := \{Q \in \mathcal{M}'_\ell \mid Q \not\subset \omega_\ell \wedge \text{parent}(Q) \subset \omega_{\ell-1}\}$.
- $\mathcal{M}_\ell^{\text{AUX}} := \{Q \in \mathcal{M}'_\ell \mid Q \not\subset \omega_\ell \wedge \text{parent}(Q) \not\subset \omega_{\ell-1}\}$.

Ahora bien, si $Q \in \mathcal{M}_{\ell+1}^{\text{AUX}}$, entonces $Q \not\subset \omega_{\ell+1}$ y $\text{parent}(Q) \not\subset \omega_\ell$. Esto nos dice que $\text{parent}(Q) \notin \mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}$ para todo $Q \in \mathcal{M}_{\ell+1}^{\text{AUX}}$. Por tanto, las celdas de $\mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}$ son celdas con poder de aproximación ℓ que solo provienen de \mathcal{M}_ℓ , es decir, que son celdas activas.

Por otro lado, si $Q \in \mathcal{M}_{\ell+1}^{\text{AUX}}$, sabemos que $Q \not\subset \omega_{\ell+1}$ y $\text{parent}(Q) \not\subset \omega_\ell$, pero puede suceder que $\text{parent}(\text{parent}(Q)) \subset \omega_{\ell-1}$ ó $\text{parent}(\text{parent}(Q)) \not\subset \omega_{\ell-1}$.

- Si $\text{parent}(\text{parent}(Q)) \subset \omega_{\ell-1}$, entonces $\text{parent}(Q) \in \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}$ esta celda es una celda desactivada de nivel ℓ con poder de aproximación $\ell - 1$.
- Si $\text{parent}(\text{parent}(Q)) \not\subset \omega_{\ell-1}$, entonces $\text{parent}(Q) \in \mathcal{M}_\ell^{\text{AUX}}$.

Esto prueba la proposición. □

3.4.1. Diseño y descripción del algoritmo

El objetivo ahora es diseñar el método de refinamiento que garantice que las celdas que estén en \mathbb{M} aumenten su poder de aproximación. Para cada $\ell = 0, 1, \dots, n-1$, será necesario refinar todas las celdas de $\mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}$ (y algunas más) de modo que sus hijas tengan poder de aproximación $\ell + 1$ (ver Figura 3.13).

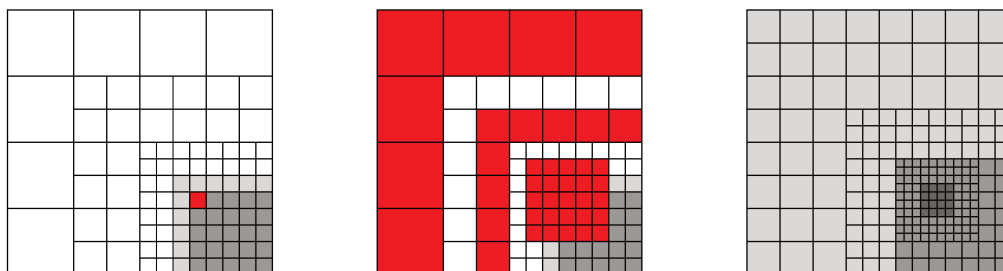


Figura 3.13: Se muestra un ejemplo para $\mathbf{p} = (3, 3)$. La malla jerárquica inicial, representada a la izquierda, es débilmente admisible y contiene una celda marcada con poder de aproximación óptimo. En la figura central se indican las celdas que deben refinarse para que la celda inicialmente marcada aumente su poder de aproximación en la nueva malla y, al mismo tiempo, garantizar que dicha malla continúe siendo débilmente admisible. Finalmente, la figura de la derecha muestra la malla resultante tras este proceso de refinamiento.

También debemos refinar las celdas de nivel $\ell - 1$ que se encuentran *alrededor* de las celdas de $\mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}$ para que al finalizar aumenten su poder de aproximación. Notar que marcar una celda no garantiza que esta sea refinada en el proceso. Este es el caso de las celdas en $\mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}$ (ver Figura 3.14). Sin embargo, pueden ser refinadas en el proceso de otra celda marcada.

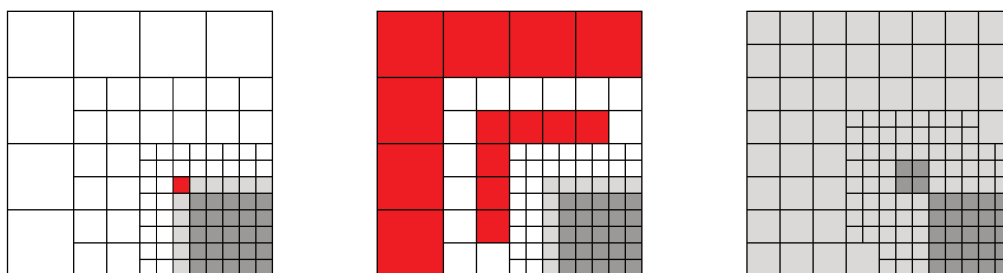


Figura 3.14: A diferencia del ejemplo previo —donde la celda marcada era óptima— en este caso la malla inicial (izquierda) contiene una celda con poder de aproximación subóptimo. La figura central muestra las celdas que deben refinarse para aumentar el poder de aproximación en la celda marcada y preservar la propiedad débilmente admisible en la nueva malla. La figura de la derecha presenta la malla obtenida tras este refinamiento.

3.4. Algoritmo adaptativo para mallas débilmente admisibles

A continuación presentamos un método que nos permite encontrar de manera iterada las celdas de $\hat{\mathcal{M}}_\ell$ para $\ell = 0, 1, \dots, n-1$, que garanticen las propiedades antes mencionadas.

Método 3.48 (Procedimiento de refinamiento adaptativo).

Inicializar: Sea \mathbb{Q} una **mallla jerárquica débilmente admisible** construida a partir de una **jerarquía de subdominios agrupados** $\Omega_n = \{\Omega_\ell\}_{\ell=0}^n$ y sea \mathbb{M} un subconjunto de celdas activas de la mallla. Consideramos también los subconjuntos $\mathbb{M}^{\text{OPT}} = \{\mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}\}_{\ell=0}^{n-1}$ y $\mathbb{M}^{\text{SUBOPT}} = \{\mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}\}_{\ell=0}^{n-1}$ que se obtienen de aplicar el Algoritmo 1 a \mathbb{M} .

Paso 1: Definimos $\Omega_{n+1}^* := \emptyset$.

Paso 2: Considerando $W_n^* := \{Q \mid Q \in \text{children}(Q') \text{ para algún } Q' \in \mathcal{M}_{n-1}^{\text{OPT}}\}$, definimos

$$\Omega_n^* := \Omega_n \cup \bigcup_{Q \in W_n^*} C_Q \cap \Omega_0,$$

donde C_Q es el conjunto definido en (3.29).

Paso 3: Para $\ell = n-1, \dots, 1$, hacemos lo siguiente. Tomamos $\mathcal{M}_\ell^{\text{ADM}} := \{\text{parent}(Q) \mid Q \in \mathcal{Q}_{\ell+1}, Q \subset \omega_{\ell+1}^* \setminus \omega_\ell\}$, y consideramos ahora

$$W_\ell^* := \{Q \mid Q \in \text{children}(\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}) \cup \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}} \cup \mathcal{M}_\ell^{\text{ADM}}\}.$$

Luego, definimos

$$\Omega_\ell^* := \Omega_\ell \cup \bigcup_{Q \in W_\ell^*} C_Q \cap \Omega_0.$$

Paso 4: Definimos $\Omega_0^* := \Omega_0$.

A continuación describimos en detalle los pasos claves del método anterior.

El Paso 2 considera el nivel $\ell = n$ de la mallla. Para construir Ω_n^* , primero observamos que $\mathcal{M}_{n-1}^{\text{OPT}}$ tiene solo celdas activas de nivel $n-1$ con poder de aproximación óptimo (Proposición 3.47). Para lograr que estas celdas tengan poder de aproximación n definimos,

$$W_n^* := \{Q \mid Q \in \text{children}(Q') \text{ para algún } Q' \in \mathcal{M}_{n-1}^{\text{OPT}}\}. \quad (3.40)$$

Estas celdas son las que queremos que tengan poder de aproximación n . Por tanto, construimos el conjunto Z_{n-1}^* de celdas de nivel $n-1$ que deberíamos refinar para que todas las celdas de W_n^* estén incluidas en ω_n^* . Más precisamente,

$$Z_{n-1}^* := \{Q' \in \mathcal{Q}_{n-1} \mid Q' \subset C_Q \cap \Omega_0, \text{ para algún } Q \in W_n^*\}. \quad (3.41)$$

Con lo cual, al definir Ω_n^* como la unión de Ω_n con las celdas de Z_{n-1}^* , obtenemos que las celdas en $\mathcal{M}_{n-1}^{\text{OPT}}$ están incluidas en ω_n^* y por tanto su poder de aproximación respecto de la nueva malla, es n (ver Figura 3.15).

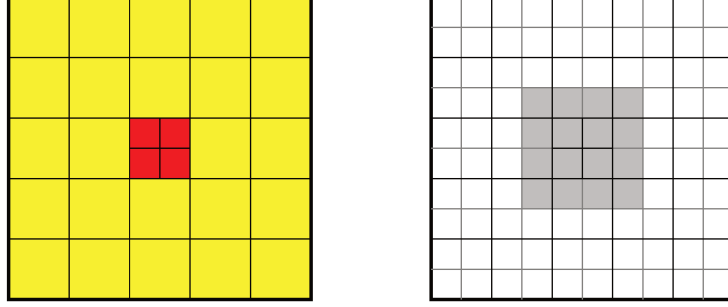


Figura 3.15: Estas figuras representan un recorte de la malla para $\mathbf{p} = (3, 3)$ en el nivel $n - 1$. A la izquierda se muestra una celda Q' de nivel $n - 1$ marcada con poder de aproximación óptimo (en color rojo), y el conjunto W_n^* que contiene a las celdas Q hijas de Q' (que coincide con Q' en este ejemplo). También se representa el conjunto Z_{n-1}^* (región amarilla), formado por las celdas de nivel $n - 1$ contenidas en $C_Q \cap \Omega_0$ para cada $Q \in W_n^*$. En la figura de la derecha se observa que, tras el refinamiento del conjunto Z_{n-1}^* , las celdas de W_n^* quedan incluidas en ω_n^* (región gris).

Siguiendo este razonamiento definimos,

$$\Omega_n^* := \Omega_n \cup \bigcup_{Q \in W_n^*} C_Q \cap \Omega_0, \quad (3.42)$$

y por tanto queda definido ω_n^* como

$$\omega_n^* := \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_n, \\ \tilde{Q} \subset \Omega_n^*}} Q. \quad (3.43)$$

Notar que para que esto sea un refinamiento en la forma establecida por (3.22) necesitamos que $\Omega_n^* \subset \Omega_{n-1}$, como veremos en el Lema 3.50.

En el Paso 3, para $\ell = n - 1, \dots, 1$, necesitamos tener en cuenta tres diferentes tipos de celdas. En primer lugar, las celdas provenientes de los conjuntos $\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}$ y $\mathcal{M}_{\ell}^{\text{SUBOPT}}$ y por otro lado los padres de las celdas de $\omega_{\ell+1}^*$.

Consideremos los siguientes conjuntos.

$$\text{children}(\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}) = \{Q' \mid Q' \in \text{children}(Q) \text{ para algún } Q \in \mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}\}, \quad (3.44)$$

3.4. Algoritmo adaptativo para mallas débilmente admisibles

y

$$\mathcal{M}_\ell^{\text{ADM}} := \{\text{parent}(Q) \mid Q \in \mathcal{Q}_{\ell+1}, Q \subset \omega_{\ell+1}^* \setminus \omega_\ell\}. \quad (3.45)$$

El primero es el conjunto de las hijas de todas las celdas $Q \in \mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}$, que junto con $\mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}$ queremos que sus celdas aumenten su poder de aproximación a ℓ .

El segundo conjunto, es de suma importancia para conservar la propiedad de la malla de ser débilmente admisible. Tengamos en cuenta la siguiente información:

- como $\Omega_{\ell+1} \subset \Omega_{\ell+1}^*$ resulta $\omega_{\ell+1} \subset \omega_{\ell+1}^*$;
- por ser la malla inicial débilmente admisible, $\omega_{\ell+1} \subset \omega_\ell$;
- Al definir Ω_ℓ^* como un conjunto que contiene a Ω_ℓ , se obtendrá $\omega_\ell \subset \omega_\ell^*$ en este paso del método.

La propiedad que queremos preservar es $\omega_{\ell+1}^* \subset \omega_\ell^*$. Por lo tanto, basta con garantizar que $\omega_{\ell+1}^* \setminus \omega_\ell \subset \omega_\ell^*$. En efecto, llamando $A = \omega_{\ell+1}^*$, $B = \omega_\ell$ y $C = \omega_\ell^*$, queremos probar que, si $B \subset C$ y $A \setminus B \subset C$, entonces $A \subset C$. Esta afirmación se sigue de,

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \subset C \cup (A \cap C) \subset C.$$

Ahora bien, para garantizar que $\omega_{\ell+1}^* \setminus \omega_\ell \subset \omega_\ell^*$ es suficiente con incluir a $\mathcal{M}_\ell^{\text{ADM}}$ en el conjunto W_ℓ^* . Definimos así,

$$W_\ell^* := \{Q \mid Q \in \text{children}(\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}) \cup \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}} \cup \mathcal{M}_\ell^{\text{ADM}}\}. \quad (3.46)$$

Como antes, construimos el conjunto $Z_{\ell-1}^*$ de celdas de nivel $\ell - 1$ que deberíamos refinar para obtener que $Q \subset \omega_\ell^*$ para todo $Q \in W_\ell^*$.

$$Z_{\ell-1}^* := \{Q' \in \mathcal{Q}_{\ell-1} \mid Q' \subset C_Q \cap \Omega_0, \text{ para algún } Q \in W_\ell^*\}. \quad (3.47)$$

Definimos el conjunto Ω_ℓ^* como,

$$\Omega_\ell^* := \Omega_\ell \cup \bigcup_{Q \in W_\ell^*} C_Q \cap \Omega_0, \quad (3.48)$$

y por tanto queda definido ω_ℓ^* como

$$\omega_\ell^* := \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_\ell, \\ Q \subset \Omega_\ell^*}} Q. \quad (3.49)$$

Observación 3.49. Utilizando el Método 3.48 para el refinamiento tenemos que:

- (I) $\Omega_\ell \subset \Omega_\ell^*$ para $\ell = 0, 1, \dots, n$.
- (II) $\omega_\ell \subset \omega_\ell^*$ para $\ell = 0, 1, \dots, n$.
- (III) Si $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ y $Q \subset \omega_\ell^* \setminus \omega_{\ell-1}$, entonces $Q \in W_{\ell-1}^*$ para $\ell = 1, 2, \dots, n$. Esto se debe a la definición del conjunto $\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{ADM}}$ y de $W_{\ell-1}^*$ dadas en las ecuaciones (3.45) y (3.46) respectivamente.

A continuación presentamos un lema para garantizar que la construcción de Ω_{n+1}^* dado por el Método 3.48, proporcione un refinamiento jerárquico siguiendo (3.22).

Lema 3.50 (Buena definición de Ω_{n+1}^*). *Sea \mathbb{Q} una malla jerárquica débilmente admisible asociada a una jerarquía de subdominios agrupada $\Omega_n = \{\Omega_\ell\}_{\ell=0}^n$ y sea \mathbb{M} un subconjunto de celdas activas de \mathbb{Q} . Si $\Omega_{n+1}^* = \{\Omega_\ell^*\}_{\ell=0}^{n+1}$ es la jerarquía de subdominios que se obtiene con el Método 3.48, entonces, para $\ell = n+1, \dots, 1$, se cumple que*

$$\Omega_\ell^* \subset \Omega_{\ell-1}.$$

Demostración. Notar primero que $\Omega_n^* \subset \Omega_{n-1}$. En efecto, si $Q \in W_n^*$, entonces $\text{parent}(Q) \in \mathcal{M}_{n-1}^{\text{OPT}}$ y por la Observación 3.34 tenemos que,

$$C_Q \cap \Omega_0 \subset \overline{\text{parent}(Q)} \cap \Omega_0 = \overline{\text{parent}(Q)}.$$

Además, como $\text{parent}(Q) \in \mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{Q})$, tenemos que $\text{parent}(Q) \subset \omega_{n-1}$, es decir, $\overline{\text{parent}(Q)} \subset \Omega_{n-1}$. Con lo cual, $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_{n-1}$. Esto se cumple para todo $Q \in W_n^*$ y por ello se sigue que $\Omega_n^* \subset \Omega_{n-1}$.

Supongamos ahora que para algún ℓ se cumple $\Omega_{\ell+1}^* \subset \Omega_\ell$ y probemos entonces la siguiente inclusión $\Omega_\ell^* \subset \Omega_{\ell-1}$.

Por la ecuación (3.48) tenemos que

$$\Omega_\ell^* = \Omega_\ell \cup \bigcup_{Q \in W_\ell^*} C_Q \cap \Omega_0,$$

donde por la definición de Ω_n se tiene que $\Omega_\ell \subset \Omega_{\ell-1}$. Por tanto, resta probar que $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell-1}$ para todo $Q \in W_\ell^*$.

Ahora, como la malla \mathbb{Q} es débilmente admisible, tenemos por el Teorema 3.42 que,

$$C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell-1}, \quad \text{para todo } Q \in \mathcal{Q}_\ell, Q \subset \Omega_\ell.$$

Utilizando el hecho de que $\Omega_{\ell+1}^* \subset \Omega_\ell$, tenemos por la definición de $\mathcal{M}_\ell^{\text{ADM}}$ que $\mathcal{M}_\ell^{\text{ADM}} \subset \Omega_\ell$. Además, por la Proposición 3.47 tenemos que $\mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}} \subset \Omega_\ell$. Resulta entonces,

$$C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell-1}, \quad \text{para todo } Q \in \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}} \cup \mathcal{M}_\ell^{\text{ADM}}.$$

3.4. Algoritmo adaptativo para mallas débilmente admisibles

Por último, para toda $Q' \in \mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}$, tenemos que $\tilde{Q}' \subset \Omega_{\ell-1}$, y teniendo en cuenta la Observación 3.34 obtenemos que para todo $Q \in \text{children}(Q')$,

$$C_Q \cap \Omega_0 \subset \tilde{Q}' \subset \Omega_{\ell-1}.$$

Por lo tanto, $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell-1}$ para toda $Q \in \text{children}(\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}})$.

Esto prueba que $\Omega_\ell^* \subset \Omega_{\ell-1}$ para $\ell = n, n-1, \dots, 1$. \square

Nuestro algoritmo requiere que la jerarquía de subdominios sea agrupada y que la malla sea débilmente admisible. Por esta razón, al obtener la malla \mathbb{Q}^* asociada a la jerarquía de subdominio $\Omega_{n+1}^* = \{\Omega_\ell^*\}_{\ell=0}^{n+1}$ es fundamental garantizar que dicha malla preserve estas propiedades. Solo así podremos asegurar que el refinamiento resultante mantenga la estructura necesaria para aplicar el procedimiento adaptativo de manera reiterada.

Por otro lado, la construcción del Método 3.48 tiene como objetivo incrementar el poder de aproximación, con respecto a \mathbb{Q}^* , de las celdas marcadas \mathbb{M} inicialmente.

Esto queda formalizado en el siguiente teorema, que resume todas las propiedades estructurales y de refinamiento obtenidas mediante el Método 3.48.

Teorema 3.51. *Sea \mathbb{Q} una malla jerárquica débilmente admisible construida a partir de una jerarquía de subdominios agrupados $\Omega_n = \{\Omega_\ell\}_{\ell=0}^n$ y sea $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ un subconjunto de celdas activas de la malla. Si \mathbb{Q}^* es la malla dada por $\Omega_{n+1}^* = \{\Omega_\ell^*\}_{\ell=0}^{n+1}$ la jerarquía de subdominios que se obtiene de aplicar el Método 3.48 a Ω_n , entonces se cumplen:*

- (I) Ω_{n+1}^* es una jerarquía de subdominios es agrupada.
- (II) Para $\ell = n-1, \dots, 0$, si $Q \in \mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}$, entonces $Q \in \mathcal{A}_{\ell+1}(\mathbb{Q}^*)$.
- (III) Para $\ell = n-1, \dots, 0$, si $Q \in \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}$, entonces $Q \in \mathcal{A}_\ell(\mathbb{Q}^*)$.
- (IV) Si $Q \in \mathbb{M}$ y $Q \in \mathcal{A}_k(\mathbb{Q})$, entonces $Q \in \mathcal{A}_{k+1}(\mathbb{Q}^*)$.
- (V) \mathbb{Q}^* es débilmente admisible.

Para probar este teorema, necesitamos conocer una relación importante entre el conjunto W_ℓ^* y ω_ℓ para todo $\ell = 1, \dots, n$. Esto se formaliza en la siguiente observación.

Observación 3.52. Para $\ell = 1, 2, \dots, n$, se cumple que si $Q \in W_\ell^*$ entonces $Q \subset \omega_\ell^*$. En efecto, como Ω_{n+1}^* es una jerarquía de subdominios, podemos aplicar el Teorema 3.38 y como $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell^*$ para todo $Q \in W_\ell^*$ entonces $Q \subset \omega_\ell^*$.

Demostración del Teorema 3.51. (I) Por la definición de Ω_ℓ^* (3.48) tenemos que,

$$\Omega_\ell^* = \Omega_\ell \cup \bigcup_{Q \in W_\ell^*} C_Q \cap \Omega_0, \quad \text{para } \ell = 1, \dots, n+1.$$

Como Ω_n es una jerarquía de subdominio agrupada, por la ecuación (3.36) del Teorema 3.41 obtenemos,

$$\Omega_\ell^* = \bigcup_{Q \in A} C_Q \cap \Omega_0, \quad \text{para } \ell = 1, \dots, n+1,$$

donde $A = \{Q \mid Q \in \mathcal{Q}_\ell, Q \subset \omega_\ell \vee Q \in W_\ell^*\}$. Por la Proposición 3.30, tenemos que $C_Q \in \mathbf{F}_{\mathbf{p}, \ell-1}^\infty$ para todo $Q \in A$. Se sigue entonces de la Definición 3.40 que Ω_{n+1}^* es una jerarquía de subdominio es agrupada.

(II) Sea $Q \in \mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}$, entonces para todo $Q' \in \text{children}(Q)$ se cumple que $Q' \in W_{\ell+1}^*$ y por definición de $\Omega_{\ell+1}^*$ resulta que $C_{Q'} \cap \Omega_0 \subset \Omega_{\ell+1}^*$. Por el Teorema 3.38, se tiene $Q' \subset \omega_{\ell+1}^*$ para todo $Q' \in \text{children}(Q)$, entonces resulta que $Q \subset \omega_{\ell+1}^*$.

(III) Sea $Q \in \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}$, se cumple que $Q \in W_\ell^*$ entonces por definición Ω_ℓ^* , tenemos que $C_Q \cap \Omega_0 \subset \Omega_\ell^*$. Utilizando de nuevo el Teorema 3.38, se cumple $Q \subset \omega_\ell^*$.

(IV) Sea $\ell = 0, \dots, n-1$ y tomemos $Q \in \mathcal{M}_\ell$. Es decir, Q es una celda activa de \mathbb{Q} de nivel ℓ . Entonces, $Q \subset \Omega_\ell \setminus \Omega_{\ell+1}$, con lo cual, el poder de aproximación de Q es a lo sumo ℓ . Esto es,

$$Q \in \mathcal{A}_k(\mathbb{Q}) \quad \text{para algún } k \leq \ell.$$

Ahora bien, como la malla es débilmente admisible, descomponemos el conjunto \mathcal{M}_ℓ en subconjuntos disjuntos de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_\ell = \mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}} \cup \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}} \cup \bigcup_{m=2}^{\ell} \{Q \in \mathcal{M}_\ell \mid \text{parent}_{\ell-m}(Q) \subset \omega_{\ell-m} \\ \wedge \text{parent}_{\ell-m+1}(Q) \not\subset \omega_{\ell-m+1}\},$$

donde $\text{parent}_\ell(Q)$ lo interpretamos como Q . O bien, utilizando la Observación 3.45 como

$$\mathcal{M}_\ell = \mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}} \cup \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}} \cup \bigcup_{m=2}^{\ell} \{Q \in \mathcal{M}_\ell \mid Q \subset \omega_{\ell-m} \wedge Q \not\subset \omega_{\ell-m+1}\}.$$

Como $Q \in \mathcal{A}_k$ para algún $k \leq \ell$, analizamos las siguientes situaciones. Si $k = \ell$, entonces $Q \in \mathcal{M}_\ell^{\text{OPT}}$ y utilizando el ítem (II) de este teorema, resulta que $Q \in \mathcal{A}_{\ell+1}(\mathbb{Q}^*)$.

3.4. Algoritmo adaptativo para mallas débilmente admisibles

Si $k = \ell - 1$, entonces $Q \in \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}$ y utilizando el ítem (III) de este teorema, resulta que $Q \in \mathcal{A}_\ell(\mathbb{Q}^*)$.

Por último, si $k < \ell - 1$, entonces $Q \in \{Q \in \mathcal{M}_\ell \mid \text{parent}_k(Q) \subset \omega_k \wedge \text{parent}_{k+1}(Q) \not\subset \omega_{k+1}\}$. Con lo cual $\text{parent}_{k+1}(Q) \in \mathcal{M}_{k+1}^{\text{SUBOPT}}$ y por el (II) de la Proposición 3.47, $\text{parent}_{k+1}(Q)$ tiene poder de aproximación k respecto de \mathbb{Q} . Utilizando el ítem (III) de este teorema, resulta $\text{parent}_{k+1}(Q) \in \mathcal{A}_{k+1}(\mathbb{Q}^*)$. Por último, como $Q \subset \text{parent}_{k+1}(Q)$, entonces Q aumentó su poder de aproximación a $k + 1$ respecto de la malla \mathbb{Q}^* .

(v) Por último, veamos que la malla \mathbb{Q}^* es débilmente admisible.

Sea $\ell = 1, 2, \dots, n + 1$, si $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ y $Q \subset \omega_\ell^* \setminus \omega_{\ell-1}$, entonces $Q \in W_{\ell-1}^*$. Además por la Observación 3.52, se cumple que si $Q \in W_{\ell-1}^*$ entonces $Q \subset \omega_{\ell-1}^*$. Por tanto, resulta que $\omega_\ell^* \setminus \omega_{\ell-1} \subset \omega_{\ell-1}^*$. Ahora bien, utilizando el (II) de la Observación 3.49 tenemos $\omega_{\ell-1} \subset \omega_{\ell-1}^*$. Por lo tanto,

$$\omega_\ell^* = \omega_\ell^* \setminus \omega_{\ell-1} \cup \omega_{\ell-1} \subset \omega_{\ell-1}^*.$$

□

3.4.2. Implementación del algoritmo

En esta sección describimos en detalle la implementación del procedimiento adaptativo presentado anteriormente. En primer lugar, se especifica la estrategia de marcado utilizada para seleccionar las celdas que requieren refinamiento; una vez finalizada esta selección, utilizamos la Definición 3.17 para generar una nueva jerarquía de subdominios y, por tanto, la nueva malla y espacio jerárquico.

Partimos de una malla jerárquica \mathbb{Q} débilmente admisible, $\Omega_n = \{\Omega_\ell\}_{\ell=0}^n$ la jerarquía de subdominios asociada, y un subconjunto $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ de celdas activas en \mathbb{Q} . Para obtener el conjunto de celdas $\hat{\mathbb{M}} = \{\hat{\mathcal{M}}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ siguiendo el Método 3.48, proponemos el siguiente algoritmo,

$$\hat{\mathbb{M}} = \text{weakly_admissible_marking}(\mathbb{Q}, \mathbb{M}),$$

el cual lo describiremos más adelante. Antes de esto, serán necesarias algunas rutinas elementales que mencionamos a continuación.

- (I) **Cálculo del entorno C_Q de una celda Q .** Dada una celda $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ consideremos la siguiente rutina:

$$\mathcal{M}_{\ell-1}^Q = \text{mark_for_increasing_order_on}(Q),$$

que selecciona las celdas de nivel $\ell - 1$ que forman al conjunto $C_Q \cap \Omega_0$. En particular, estas son las celdas de nivel $\ell - 1$ que se deberían refinar para

garantizar que Q esté contenido en ω_ℓ^* . Las mismas se pueden calcular usando las siguientes rutinas básicas de GeoPDEs [Vá16]:

$$\mathcal{M}_{\ell-1}^Q = \text{get_parent_of_cell}(\text{get_cells}(\text{get_basis_functions}(Q))).$$

Notar que aquí se realiza una composición de rutinas internas del paquete de GeoPDEs. Primero, se calculan las funciones B-splines del espacio producto tensor de nivel ℓ que no se anulan en Q , para luego quedarse con las celdas de nivel ℓ incluidas en sus soportes. Finalmente, se toman los padres de nivel $\ell - 1$ de cada una de estas celdas. Esta es la lista de todas las celdas de nivel $\ell - 1$ que forman al conjunto $C_Q \cap \Omega_0$.

- (II) **Cálculo de las celdas con mayor poder aproximación de un conjunto B .** Esta rutina está motivada por el subconjunto ω_ℓ que se obtiene del conjunto Ω_ℓ . Si consideramos un conjunto B cualquiera que esté formado por celdas de nivel ℓ , podemos obtener un subconjunto $\omega_\ell(B)$. La siguiente rutina, nos proporciona la lista de todas las celdas que forman al conjunto $\omega_\ell(B)$. Dependiendo del contexto, entenderemos este conjunto ya sea como una lista de celdas o como un subconjunto de \mathbb{R}^d , con el fin de no introducir una notación excesiva. Entonces,

$$\omega_\ell(B) = \text{compute_cells_with_full_approximation}(B),$$

calcula las celdas de B cuyo soporte extendido este contenido en B .

Por lo tanto, dada una celda $Q \in \mathcal{Q}_\ell$, $Q \in \omega_\ell(B)$ sí y sólo si todas las celdas del soporte extendido de Q están incluidas en B . Con lo cual, para calcular el soporte extendido de una celda Q se aplica la rutina

$$\mathcal{E}_\ell^Q = \text{get_cells}(\text{get_basis_functions}(Q)).$$

En particular, tenemos que $\omega_\ell(\Omega_\ell)$ está formado por todas las celdas de nivel ℓ contenidas en ω_ℓ , para $\ell = 0, 1, \dots, n - 1$. También, si $Q \in \mathcal{Q}_\ell$, entonces $\omega_\ell(C_Q) = A_Q$ donde el conjunto A_Q esta formado por las celdas $\{Q_i\}_{i=1}^4 \subset \mathcal{Q}_\ell^\infty$ presentado en la Proposición 3.32.

Concluimos esta sección describiendo **weakly_admissible_marking**, el algoritmo que implementa el Método 3.48.

El algoritmo **weakly_admissible_marking** recibe como entrada la información de la malla \mathbb{Q} y el conjunto de celdas marcadas \mathbb{M} . En la línea 1, se clasifica \mathbb{M} utilizando la rutina **update_marked_elements** descrita en el Algoritmo 1, obteniendo los conjuntos $\mathbb{M}^{\overline{\text{OPT}}}$ y $\mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}$.

Luego, en la línea 5, utilizamos la rutina **compute_cells_to_refine_in_level** para calcular $\hat{\mathcal{M}}_{\ell-1}$, el conjunto de celdas activas de nivel $\ell - 1$, de modo que $\Omega_\ell^* := \Omega_\ell \cup \hat{\mathcal{M}}_{\ell-1}$ sea el subdominio dado en el Método 3.48. Para ello, aplicamos la rutina (I),

$$\mathcal{M}_{\ell-1}^Q = \text{mark_for_increasing_order_on}(Q),$$

3.4. Algoritmo adaptativo para mallas débilmente admisibles

Algorithm 2 weakly_admissible_marking

Input: $\{\mathbb{Q}, \mathbb{M}\}$
 1: $\{\mathbb{M}^{\text{OPT}}, \mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}\} \leftarrow \text{update_marked_elements}(\mathbb{Q}, \mathbb{M}) \triangleright$ Rearrange \mathbb{M} using Algorithm 1
 2: $\mathcal{M}_n^{\text{SUBOPT}} = \emptyset;$
 3: $\mathcal{M}_n^{\text{ADM}} = \emptyset;$
 4: **for** $\ell = n, \dots, 2, 1$ **do**
 5: $\{\hat{\mathcal{M}}_{\ell-1}, \mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{ADM}}\} \leftarrow \text{compute_cells_to_refine_in_level}(\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}, \mathcal{M}_{\ell}^{\text{SUBOPT}}, \mathcal{M}_{\ell}^{\text{ADM}})$
 6: **end for**
Output: $\hat{\mathbb{M}} = \{\hat{\mathcal{M}}_{\ell}\}_{\ell=0}^n.$

a todas las celdas $Q \in W_{\ell}^* := \{Q \mid Q \in \text{children}(\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}) \cup \mathcal{M}_{\ell}^{\text{SUBOPT}} \cup \mathcal{M}_{\ell}^{\text{ADM}}\}$. Definimos así,

$$\hat{\mathcal{M}}_{\ell-1} := \left(\bigcup_{Q \in W_{\ell}^*} \mathcal{M}_{\ell-1}^Q \right) \cap \mathbb{Q},$$

el conjunto de celdas activas de nivel $\ell - 1$ que tenemos que refinar.

Con la misma rutina de la línea 5 calculamos también las celdas de $\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{ADM}}$ que contiene a los padres de las celdas de $\omega_{\ell}^* \setminus \omega_{\ell-1}$ como lo vimos en el Método 3.48,

$$\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{ADM}} = \{\text{parent}(Q) \mid Q \in \mathcal{Q}_{\ell}, Q \subset \omega_{\ell}^* \setminus \omega_{\ell-1}\},$$

donde ω_{ℓ}^* se calcula como

$$\omega_{\ell}^* = \text{compute_cells_with_full_approximation}(\Omega_{\ell}^*).$$

Si bien esta forma de obtener $\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{ADM}}$ es correcta, se puede notar que precisa de conocer el conjunto Ω_{ℓ}^* (el cual se calcula con la información que hasta ese paso se tiene). En la implementación del Algoritmo 4, que veremos más adelante, el conjunto $\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{ADM}}$ se obtiene de una manera más eficiente.

Una vez que el Algoritmo 2 finalice, obtenemos como salida el conjunto $\hat{\mathbb{M}} = \{\hat{\mathcal{M}}_{\ell}\}_{\ell=0}^{n-1}$ de celdas activas de \mathbb{Q} . Finalmente, aplicamos la Definición 3.17 a este conjunto de celdas marcadas en \mathbb{Q} . De aquí se obtiene la jerarquía de subdominios $\Omega_{n+1}^* = \{\Omega_{\ell}^*\}_{\ell=0}^{n+1}$ de la cual obtenemos la malla jerárquico \mathbb{Q}^* y la base asociada \mathcal{H}^* . Llamaremos a este proceso **refine_hierarchical_mesh** y lo aplicamos de la siguiente manera,

$$\mathbb{Q}^* = \text{refine_hierarchical_mesh}(\mathbb{Q}, \hat{\mathbb{M}}).$$

3.5. Complejidad del refinamiento

Consideramos una sucesión de mallas jerárquicas $\mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_J, \dots$ generadas por la iteración:

$$\hat{\mathbb{M}}_{j-1} = \text{weakly_admissible_marking}(\mathbb{Q}_{j-1}, \mathbb{M}_{j-1}),$$

$$\mathbb{Q}_j = \text{refine_hierarchical_mesh}(\mathbb{Q}_{j-1}, \hat{\mathbb{M}}_{j-1}),$$

donde $\mathbb{M}_{j-1} \subset \mathbb{Q}_{j-1}$, para $j \in \{1, \dots, J\}$.

Probaremos una estimación de complejidad, es decir, estimación del crecimiento del número de celdas de la malla con respecto al número de elementos marcados para el refinamiento

$$\#\mathbb{Q}_J - \#\mathbb{Q}_0 \leq C \sum_{j=0}^{J-1} \#\mathbb{M}_j,$$

donde $\#\mathbb{Q}_0, \#\mathbb{Q}_J$ representan la cantidad de celdas activas de la malla inicial y la malla de la iteración J respectivamente, y $\#\mathbb{M}_j$ representa la cantidad de celdas marcadas en cada iteración (utilizando algún proceso de marcado), con $j = 0, \dots, J - 1$. Y además, la constante solamente depende de la dimensión d y el grado polinomial $\mathbf{p} = (p, p, \dots, p)$.

Los resultados principales de esta sección siguen las ideas en el contexto de los métodos adaptativos de elementos finitos presentadas por [NSV09, Theorem 4.3], [NV12], y [BGMP16, Lemma 12, Teorema 13] donde se utilizan mallas estrictamente admisibles de clase m .

Primero notemos que controlar la cantidad de elementos nuevos para cada iteración $\#\mathbb{Q}_{j+1} - \#\mathbb{Q}_j \leq \tilde{C}\#\mathbb{M}_j$ parece razonable. Sin embargo, el problema de la propagación del refinamiento de una malla para mantener la admisibilidad es delicado. En particular, la estimación anterior no es válida con una constante \tilde{C} independiente de j como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.53. Consideremos $\mathbf{p} = (3, 3)$, $d = 2$ y una familia de mallas jerárquicas débilmente admisibles donde se ha marcado un solo elemento. Entonces para cada una de estas mallas tenemos que, al aplicar el Algoritmo 2, obtenemos un conjunto de celdas marcadas a refinar que se propagan hasta el nivel 0 (ver Figura 3.16). De esta manera, vemos que no podemos obtener una constante \tilde{C} que solo dependa de \mathbf{p} y d .

Para poder trabajar en esta sección será necesario presentar el Algoritmo 2 de forma recursiva y veremos que el siguiente algoritmo implementa la misma estrategia de marcado.

3.5. Complejidad del refinamiento

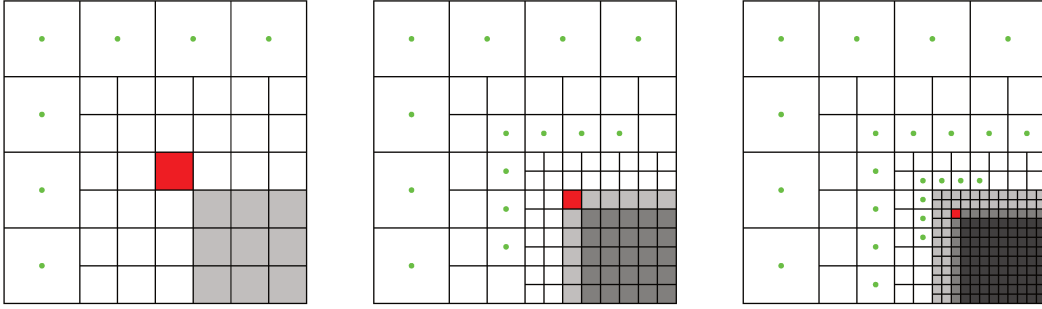


Figura 3.16: Presentamos una familia de mallas débilmente admisibles para B-splines bicúbicos donde se ha marcado una celda del último nivel con poder de aproximación subóptimo que se encuentra en la esquina superior izquierda del subdominio ω_{n-1} . Para la siguiente malla en esta sucesión, refinamos todas las celdas del último nivel cuya frontera intersectan a ω_{n-1} o a su frontera.

Algorithm 3 weakly_admissible_marking_recursive

Input: $\{\mathbb{Q}, \mathbb{M}\}$

- 1: $\{\mathbb{M}^{\text{OPT}}, \mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}\} \leftarrow \text{update_marked_elements}(\mathbb{M}) \triangleright$ Rearrange \mathbb{M} using Algorithm 1
- 2: $\mathcal{M}_n^{\text{SUBOPT}} = \emptyset$
- 3: $\hat{\mathbb{M}} = \{\hat{\mathcal{M}}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1} = \emptyset;$
- 4: **for** $\ell = n, \dots, 2, 1$ **do**
- 5: **for** $Q \in \text{children}(\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}) \cup \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}$ **do**
- 6: $\hat{\mathbb{M}} \leftarrow \text{mark_recursive}(\mathbb{Q}, Q, \hat{\mathbb{M}})$
- 7: **end for**
- 8: **end for**

Output: $\{\hat{\mathbb{M}}\}$

El Algoritmo 3 recibe como entradas el conjunto de celdas de la malla \mathbb{Q} y el conjunto de celdas marcadas $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$.

En la línea 1, se clasifican las celdas de \mathbb{M} , utilizando el Algoritmo 1, obteniendo los conjuntos \mathbb{M}^{OPT} y $\mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}$. Ahora bien, para todas las celdas Q que están en \mathbb{M}^{OPT} aplicamos la rutina **mark_recursive** a todas las celdas $Q_i \in \text{children}(Q)$. Mientras que, para las celdas de $\mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}$ aplicamos directamente **mark_recursive**. Este algoritmo se aplica a cada celda $Q \in \text{children}(\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{OPT}}) \cup \mathcal{M}_\ell^{\text{SUBOPT}}$ y cada nivel ℓ y nos permite obtener todas las celdas de $\hat{\mathbb{M}}$ mediante un proceso recursivo. A continuación, presentamos el algoritmo describiendo en detalle el procedimiento.

Algorithm 4 mark_recursive

Input: $\{\mathbb{Q}, Q, \hat{\mathbb{M}}\}$ $\triangleright Q \in \mathcal{Q}_\ell$
1: **for** $Q_i \in \omega_\ell(C_Q \cap \Omega_0)$ **do**
2: **if** $Q_i \notin \omega_{\ell-1}$ **then**
3: $\hat{\mathbb{M}} \leftarrow \text{mark_recursive}(Q, \text{parent}(Q_i), \hat{\mathbb{M}})$
4: **end if**
5: **end for**
6: Add all $Q' \in \mathcal{Q}_{\ell-1}$ such that $Q' \subset C_Q$ and $Q' \in \mathbb{Q}$ to $\hat{\mathcal{M}}_{\ell-1}$.
Output: $\{\hat{\mathbb{M}}\}$

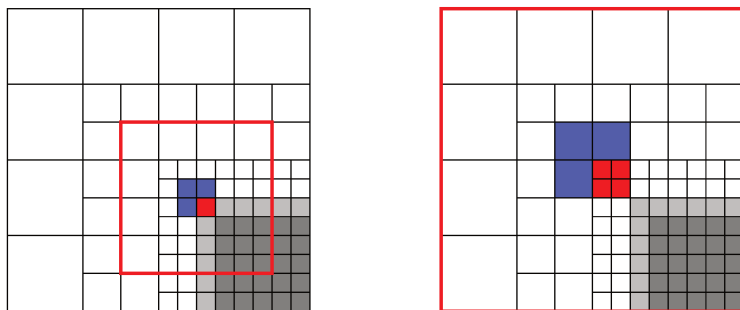
El Algoritmo 4 recibe como entrada la información de la malla \mathbb{Q} , una celda $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ para algún $\ell = 0, 1, \dots, n$ y $\hat{\mathbb{M}}$ es un conjunto inicialmente vacío donde iremos cargando todas las celdas activas que deberemos refinar.

En la línea 1, utilizamos el conjunto $\omega_\ell(C_Q \cap \Omega_0)$ de celdas de nivel ℓ cuyo soporte extendido está contenido en $C_Q \cap \Omega_0$, descrito también en la rutina (II). Luego, para $Q_i \in \omega_\ell(C_Q \cap \Omega_0)$ se presentan dos situaciones:

- Si $Q_i \notin \omega_{\ell-1}$, entonces $Q_i \in \omega_\ell^* \setminus \omega_{\ell-1}$, es decir, que debemos garantizar que esta celda pertenezca a $\omega_{\ell-1}^*$ y por tanto aplicamos la rutina **mark_recursive** a $\text{parent}(Q_i)$, esta parte es la encargada de reemplazar el cálculo de $\mathcal{M}_{\ell-1}^{\text{ADM}}$ en el Algoritmo 2.
- En caso contrario, si cumple $Q_i \subset \omega_{\ell-1}$, entonces guardamos todas las celdas $Q' \in \mathbb{Q}$ de nivel $\ell - 1$ tales que $Q' \subset C_Q$. Aquí estamos guardando las celdas de $\hat{\mathcal{M}}_{\ell-1}$ calculadas en el Algoritmo 2.

A continuación daremos un ejemplo de este proceso para una malla jerárquica y una celda con poder de aproximación subóptimo.

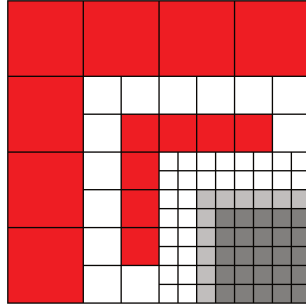
Ejemplo 3.54. En este ejemplo partimos de una malla jerárquica \mathbb{Q} para B-splines bicúbicos donde aplicamos la rutina **mark_recursive** a una celda Q de nivel 2 que tiene poder de aproximación subóptimo.



En la imagen de la izquierda vemos que hay tres celdas Q_1, Q_2, Q_3 que pertenecen a $\omega_2(C_Q \cap \Omega_0)$ y que no están contenidas en ω_1 (celdas azules en

3.5. Complejidad del refinamiento

la imagen de la izquierda). Ahora bien, se debe aplicar **mark_recursive** a la celda $\text{parent}(Q_1)$ (celda roja en la imagen de la derecha). Como todas las celdas de $\omega_1(C_{\text{parent}(Q_1)} \cap \Omega_0)$ están contenidas en ω_0 celdas azules en la imagen de la derecha), entonces guardamos todas las celdas activas de nivel 0 que están contenidas en $C_{\text{parent}(Q_1)}$. De manera análoga aplicamos **mark_recursive** a $\text{parent}(Q_2)$, y $\text{parent}(Q_3)$ guardando las celdas activas de nivel 0 que están incluidas en $C_{\text{parent}(Q_2)}$ y $C_{\text{parent}(Q_3)}$, respectivamente. Una vez recorridas todas las celdas de $\omega_2(C_Q \cap \Omega_0)$, guardamos las celdas activas de nivel 1 que están contenidas en C_Q como vemos a continuación:



Como en [BGV18] necesitamos algunos resultados auxiliares que nos proporcionen información sobre las nuevas celdas que surgen del refinamiento de aquellas marcadas en \mathbb{M} mediante el Algoritmo 4.

Para ello, consideramos la distancia entre pares de celdas (Q, Q') como la distancia euclidiana entre los puntos medios de Q y Q' y lo denotamos por $\text{dist}(Q, Q')$. También, llamaremos $\text{lev}(Q)$ al nivel de una celda Q .

Observación 3.55. Consideremos el conjunto $\hat{\mathbb{M}}$ como vacío y Q una celda de nivel ℓ . Sea $\hat{\mathbb{M}}_Q = \mathbf{mark_recursive}(Q, Q, \hat{\mathbb{M}})$ el conjunto de celdas a refinar que se obtiene de haber marcado Q , y sea \mathbb{Q}^* la malla que se obtiene al refinar las celdas de $\hat{\mathbb{M}}_Q$ en la malla \mathbb{Q} , es decir,

$$\mathbb{Q}^* = \mathbf{refine_hierarchical_mesh}(Q, \hat{\mathbb{M}}_Q).$$

Entonces, cualquier celda $Q' \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}$ cumple

$$\text{lev}(Q') \leq \text{lev}(Q). \quad (3.50)$$

En efecto, la recursión se aplica a celdas de niveles menores que ℓ y se guardan celdas de niveles $\ell - 1$ para ser refinadas. Por tanto, $Q' \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}$ tendrá un nivel menor o igual a ℓ .

Observación 3.56. Dada una celda $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$, si $Q' \in \mathcal{Q}_{\ell-1}^\infty$ tal que $Q' \subset C_Q$ se cumple que

$$\text{dist}(Q, Q') \leq \frac{\text{diam}(\hat{Q})}{2} = \sqrt{d} (2p + 1) 2^{-\text{lev}(Q)-1}.$$

Para entender esta desigualdad hacemos uso de la Figura 3.17 la cual muestra esta relación de distancia entre Q y Q' para el caso $d = 2$. De esta manera tenemos que

$$\text{dist}(Q, Q') \leq \sqrt{d} (2p + 1) 2^{-\text{lev}(Q)-1}, \quad (3.51)$$

para $Q \in \mathcal{Q}_\ell^\infty$, y todo $Q' \in \mathcal{Q}_{\ell-1}^\infty$ tal que $Q' \subset C_Q$.

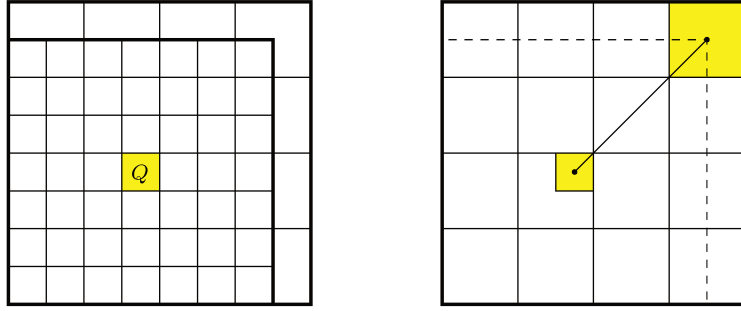


Figura 3.17: Considerando $\mathbf{p} = (3, 3)$ vemos, en la figura del lado izquierdo, una celda Q de nivel ℓ y sus entornos \widehat{Q} y C_Q . Luego, en la figura de la derecha, vemos la mayor distancia $\text{dist}(Q, Q')$ que se puede tener para una celda Q' de nivel $\ell - 1$ incluida en C_Q , la cual mide exactamente $\text{diam}(\widehat{Q})/2$.

A continuación presentamos un lema análogo al [BGMP16, Lemma 12] con los cambios adecuados para utilizar nuestro algoritmo de refinamiento el cual no sigue la propiedad estrictamente admisible de clase 2, sino una propiedad más débil. Esto será necesario para lograr el teorema de complejidad en nuestro algoritmo.

Lema 3.57. *Sea \mathbb{Q} una malla débilmente admisible, sea \mathbb{M} el conjunto de celdas activas marcadas y \mathbb{M}^{OPT} , $\mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}$ los conjuntos que surgen de aplicar el Algoritmo 1 a \mathbb{M} y $\widehat{\mathbb{M}}$ un conjunto vacío.*

(I) Si $Q \in \mathbb{M}^{\text{OPT}}$ y $Q' \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}$ es una celda que se obtuvo de

$$\widehat{\mathbb{M}}_{Q_{ch}} = \text{mark_recursive}(\mathbb{Q}, Q_{ch}, \widehat{\mathbb{M}})$$

$$\mathbb{Q}^* = \text{refine_hierarchical_mesh}(\mathbb{Q}, \widehat{\mathbb{M}}_{Q_{ch}}),$$

para alguna celda $Q_{ch} \in \text{children}(Q)$.

(II) Si $Q \in \mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}$ y $Q' \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}$ es una celda que se obtuvo de

$$\widehat{\mathbb{M}}_Q = \text{mark_recursive}(\mathbb{Q}, Q, \widehat{\mathbb{M}})$$

$$\mathbb{Q}^* = \text{refine_hierarchical_mesh}(\mathbb{Q}, \widehat{\mathbb{M}}_Q).$$

3.5. Complejidad del refinamiento

Entonces, para (I) e (II) se tiene que,

$$\text{dist}(Q', Q) \leq 2^{-\text{lev}(Q')} \tilde{C}, \quad (3.52)$$

donde $\tilde{C} := \frac{3}{2}\sqrt{d}(2p+1)$.

Demostración. (I) Sea $Q \in \mathbb{M}^{\text{OPT}}$. Consideramos entonces,

$$\hat{\mathbb{M}}_{Q_{ch}} = \mathbf{mark_recursive}(\mathbb{Q}, Q_{ch}, \hat{\mathbb{M}})$$

para alguna $Q_{ch} \in \mathbf{children}(Q)$ y la malla jerárquica \mathbb{Q}^* dada por

$$\mathbb{Q}^* = \mathbf{refine_hierarchical_mesh}(\mathbb{Q}, \hat{\mathbb{M}}_{Q_{ch}}).$$

La existencia de $Q' \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}$ significa que existe una celda $Q_0 \in \hat{\mathbb{M}}_{Q_{ch}}$ tal que $Q' \in \mathbf{children}(Q_0)$. Además que $Q_0 \in \hat{\mathbb{M}}_{Q_{ch}}$, significa que existe una sucesión de celdas $\{Q_1, \dots, Q_k = Q_{ch}\}$ a las cuales se les aplicó $\mathbf{mark_recursive}(\mathbb{Q}, Q_j, \hat{\mathbb{M}})$. Con lo cual tenemos que,

$$Q_{j-1} \subset C_{Q_j} \cap \Omega_0, \quad \text{y} \quad \text{lev}(Q_{j-1}) = \text{lev}(Q_j) - 1 \quad \text{para } j = 1, \dots, k.$$

Ahora bien, por la ecuación (3.51) de la Observación 3.56, resulta que

$$\text{dist}(Q_j, Q_{j-1}) \leq \sqrt{d} (2p+1) 2^{-\text{lev}(Q_j)-1}. \quad (3.53)$$

En lo que sigue acotamos $\text{dist}(Q', Q)$ de manera que podamos controlar las celdas nuevas que surgen de refinar las celdas en $\hat{\mathbb{M}}_{Q_{ch}}$. Iniciamos utilizando desigualdad triangular, recorriendo todas las celdas de la sucesión $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_k\}$,

$$\begin{aligned} \text{dist}(Q', Q) &\leq \text{dist}(Q', Q_k) + \text{dist}(Q_k, Q) \\ &\leq \text{dist}(Q', Q_0) + \sum_{j=1}^k \text{dist}(Q_{j-1}, Q_j) + \text{dist}(Q_k, Q). \end{aligned}$$

Luego, utilizando que $Q' \in \mathbf{children}(Q_0)$, (3.53), y que $Q_k \in \mathbf{children}(Q)$, obtenemos

$$\text{dist}(Q', Q) \leq \sqrt{d} 2^{-\text{lev}(Q')-1} + \sum_{j=1}^k \sqrt{d} (2p+1) 2^{-\text{lev}(Q_j)-1} + \sqrt{d} 2^{-\text{lev}(Q_k)-1}.$$

Además, como $\text{lev}(Q_j) = \text{lev}(Q') + j - 1$ para $j = 1, \dots, k$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{dist}(Q', Q) &\leq \sqrt{d} (2p+1) 2^{-\text{lev}(Q')-1} \left(1 + \sum_{j=1}^k 2^{-j+1} + 2^{-k+1} \right) \\ &= 3\sqrt{d} (2p+1) 2^{-\text{lev}(Q')-1} = 2^{-\text{lev}(Q')} \tilde{C}. \end{aligned}$$

(II) Sea $Q \in \mathbb{M}^{\text{SUBOPT}}$. Consideramos entonces

$$\hat{\mathbb{M}}_Q = \mathbf{mark_recursive}(Q, Q, \hat{\mathbb{M}}),$$

y la malla jerárquica Q^* dada por

$$Q^* = \mathbf{refine_hierarchical_mesh}(Q, \hat{\mathbb{M}}_Q).$$

La existencia de $Q' \in Q^* \setminus Q$ significa que existe una celda $Q_0 \in \hat{\mathbb{M}}_Q$ tal que $Q' \in \mathbf{children}(Q_0)$. Además que $Q_0 \in \hat{\mathbb{M}}_Q$, significa que existe una sucesión de celdas $\{Q_1, \dots, Q_k = Q\}$ a las cuales se les aplicó $\mathbf{mark_recursive}(Q, Q_j, \hat{\mathbb{M}})$. De manera análoga al (I) acotamos $\text{dist}(Q', Q)$ como sigue,

$$\begin{aligned} \text{dist}(Q', Q) &\leq \text{dist}(Q', Q_0) + \text{dist}(Q_0, Q_k) \\ &\leq \text{dist}(Q', Q_0) + \sum_{j=1}^k \text{dist}(Q_{j-1}, Q_j) \\ \sqrt{d} &\leq 2^{-\text{lev}(Q')-1} + \sum_{j=1}^k \sqrt{d} (2p+1) 2^{-\text{lev}(Q_j)-1} \\ &= \sqrt{d} 2^{-\text{lev}(Q')-1} + \sum_{j=1}^k \sqrt{d} (2p+1) 2^{-\text{lev}(Q')-j} \\ &\leq \sqrt{d} (2p+1) 2^{-\text{lev}(Q')-1} \left(1 + \sum_{j=1}^k 2^{-j+1} \right) \\ &\leq 3\sqrt{d} (2p+1) 2^{-\text{lev}(Q')-1} = 2^{-\text{lev}(Q')} \tilde{C}. \end{aligned}$$

□

Complejidad del refinamiento. Ahora estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de esta sección que enunciamos a continuación.

Teorema 3.58 (Complejidad del refinamiento). *Sea $Q_0 = Q_0$ y sea $J \in \mathbb{N}$. Para $j = 1, \dots, J$ consideramos:*

- $\mathbb{M}_{j-1} \subset Q_{j-1}$ arbitrario.
- $\hat{\mathbb{M}}_{j-1} = \mathbf{weakly_admissible_marking_recursive}(Q_{j-1}, \mathbb{M}_{j-1})$.
- $Q_j = \mathbf{refine_hierarchical_mesh}(Q_{j-1}, \hat{\mathbb{M}}_{j-1})$.

Entonces,

$$\#Q_J - \#Q_0 \leq C \sum_{j=0}^{J-1} \#\mathbb{M}_j, \quad (3.54)$$

donde C es una constante que depende sólo de la dimensión d y del grado polinomial p que satisface $C \leq 4(4\tilde{C} + 1)^d$ donde \tilde{C} está dado en el Lema 3.57.

3.5. Complejidad del refinamiento

Demostración. Sean $\mathbb{M} := \cup_{j=0}^{J-1} \mathbb{M}_j$ y $\mathbb{M}' := \cup_{j=0}^{J-1} (\mathbb{M}_j^{\text{OPT}} \cup \mathbb{M}_j^{\text{SUBOPT}})$. Notar que, por la Observación 3.46 tenemos que $\#(\mathbb{M}_j^{\text{OPT}} \cup \mathbb{M}_j^{\text{SUBOPT}}) \leq \#\mathbb{M}_j$ para todo j . Entonces, resulta que $\#\mathbb{M}' \leq \#\mathbb{M}$.

Por otra parte, denotemos con $\mathbb{G} = \cup \mathbb{Q}_j$ al conjunto de todas las celdas de todas las mallas producto tensor. Sea $Q \in \mathbb{G}$ y $Q' \in \mathbb{M}'$, definimos

$$\lambda(Q, Q') = \begin{cases} 2^{\text{lev}(Q) - \text{lev}(Q')}, & \text{si } \text{lev}(Q) \leq \text{lev}(Q') + 1 \text{ y } \text{dist}(Q, Q') \leq 2^{1 - \text{lev}(Q)} \tilde{C}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.55)$$

donde $\tilde{C} := \frac{3}{2} \sqrt{d}(2p + 1)$. La prueba consiste en los dos principales pasos desarrollados a continuación:

(I) Para cada $Q \in \mathbb{Q}_J \setminus \mathbb{Q}_0$ se cumple

$$\sum_{Q' \in \mathbb{M}'} \lambda(Q, Q') \geq 1; \quad (3.56)$$

(II) Para cada $Q' \in \mathbb{M}'$ se cumple

$$\sum_{Q \in \mathbb{Q}_J \setminus \mathbb{Q}_0} \lambda(Q, Q') \leq C. \quad (3.57)$$

Si se cumplen (3.56) y (3.57) para una cierta constante C , entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \#\mathbb{Q}_J - \#\mathbb{Q}_0 &\leq \sum_{Q \in \mathbb{Q}_J \setminus \mathbb{Q}_0} 1 \leq \sum_{Q \in \mathbb{Q}_J \setminus \mathbb{Q}_0} \sum_{Q' \in \mathbb{M}'} \lambda(Q, Q') \\ &\leq \sum_{Q' \in \mathbb{M}'} C \leq C \#\mathbb{M}' \leq C \#\mathbb{M}, \end{aligned}$$

y la prueba del teorema se cumple. Pasamos ahora a probar (I) y (II).

(I) Sea $Q \in \mathbb{Q}_J \setminus \mathbb{Q}_0$, existe $j_1 < J$ tal que $Q \in \mathbb{Q}_{j_1+1} \setminus \mathbb{Q}_{j_1}$. Por el Lema 3.57 existe $Q_1 \in \mathbb{M}_{j_1}^{\text{OPT}} \cup \mathbb{M}_{j_1}^{\text{SUBOPT}}$ tal que,

$$\text{dist}(Q, Q_1) < 2^{-\text{lev}(Q)} \tilde{C},$$

y además como $\text{lev}(Q) \leq \text{lev}(Q_1)$ se cumple por la Observación 3.55, tenemos que $\text{lev}(Q) \leq \text{lev}(Q_1) + 1$, en consecuencia $\lambda(Q, Q_1) > 0$.

Podemos aplicar el Lema 3.57 reiteradas veces obteniendo una sucesión de celdas $\{Q_2, Q_3, \dots\}$ con $Q_{i-1} \in \mathbb{Q}_{j_{i-1}} \setminus \mathbb{Q}_{j_i}$ para $j_1 > j_2 > j_3 > \dots$, y $Q_i \in \mathbb{M}_{j_i}^{\text{OPT}} \cup \mathbb{M}_{j_i}^{\text{SUBOPT}}$ tal que

$$\text{dist}(Q_{i-1}, Q_i) < 2^{-\text{lev}(Q_{i-1})} \tilde{C} \quad \text{y} \quad \text{lev}(Q_{i-1}) \leq \text{lev}(Q_i) + 1,$$

Aplicamos el Lema 3.57 mientras

$$\lambda(Q, Q_i) > 0 \quad \text{y} \quad \text{lev}(Q_i) > 0,$$

hasta conseguir el primer índice L con $\lambda(Q, Q_L) = 0$ ó $\text{lev}(Q_L) = 0$. Considerando los tres casos de antes, la desigualdad (3.56) se puede probar como sigue.

- Si $\text{lev}(Q_L) = 0$ y $\lambda(Q, Q_L) > 0$, entonces

$$\sum_{Q' \in \mathbb{M}'} \lambda(Q, Q') \geq \lambda(Q, Q_L) = 2^{\text{lev}(Q) - \text{lev}(Q_L)} \geq 1,$$

ya que $\text{lev}(Q) > \text{lev}(Q_L) = 0$.

- Si $\lambda(Q, Q_L) = 0$ por ser $\text{lev}(Q) > \text{lev}(Q_L) + 1$, entonces por construcción tenemos $\text{lev}(Q_{L-1}) \leq \text{lev}(Q_L) + 1 < \text{lev}(Q)$ y por tanto,

$$\sum_{Q' \in \mathbb{M}'} \lambda(Q, Q') \geq \lambda(Q, Q_{L-1}) = 2^{\text{lev}(Q) - \text{lev}(Q_{L-1})} \geq 1.$$

- Si $\lambda(Q, Q_L) = 0$ por ser $\text{dist}(Q, Q_L) > 2^{1 - \text{lev}(Q)} \tilde{C}$, entonces por desigualdad triangular combinado con el Lema 3.57 tenemos que,

$$\begin{aligned} 2^{1 - \text{lev}(Q)} \tilde{C} &< \text{dist}(Q, Q_1) + \sum_{i=1}^{L-1} \text{dist}(Q_i, Q_{i+1}) \\ &\leq 2^{-\text{lev}(Q)} \tilde{C} + \sum_{i=1}^{L-1} 2^{-\text{lev}(Q_i)} \tilde{C}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, $2^{-\text{lev}(Q)} \tilde{C} \leq \sum_{i=1}^{L-1} 2^{-\text{lev}(Q_i)} \tilde{C}$, y obtenemos

$$1 \leq \sum_{i=1}^{L-1} 2^{\text{lev}(Q) - \text{lev}(Q_i)} = \sum_{i=1}^{L-1} \lambda(Q, Q_i) \leq \sum_{Q' \in \mathbb{M}'} \lambda(Q, Q').$$

(II) Para probar esta desigualdad consideramos $Q' \in \mathbb{M}'$ y cualquier $0 \leq j \leq J - 1$. Definimos el conjunto de celdas de nivel j cuya distancia a Q' es menor que $2^{1-j} \tilde{C}$ definido por

$$B(Q', j) := \{Q \in \mathcal{Q}_j \mid \text{dist}(Q, Q') < 2^{1-j} \tilde{C}\}.$$

Como Q' y j están fijos, si $j \leq \text{lev}(Q') + 1$, por la definición de λ , todas las celdas Q en $B(Q', j)$ cumplen $\lambda(Q, Q') > 0$. Por otro lado, si $j > \text{lev}(Q') + 1$, entonces todas las celdas de $B(Q', j)$ cumplen $\lambda(Q, Q') = 0$. Por tanto tenemos,

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}_J \setminus \mathbb{Q}_0} \lambda(Q, Q') \leq \sum_{Q \in \mathbb{G} \setminus \mathbb{Q}_0} \lambda(Q, Q') \leq \sum_{j=1}^{\text{lev}(Q') + 1} 2^{j - \text{lev}(Q')} \#B(Q', j).$$

3.5. Complejidad del refinamiento

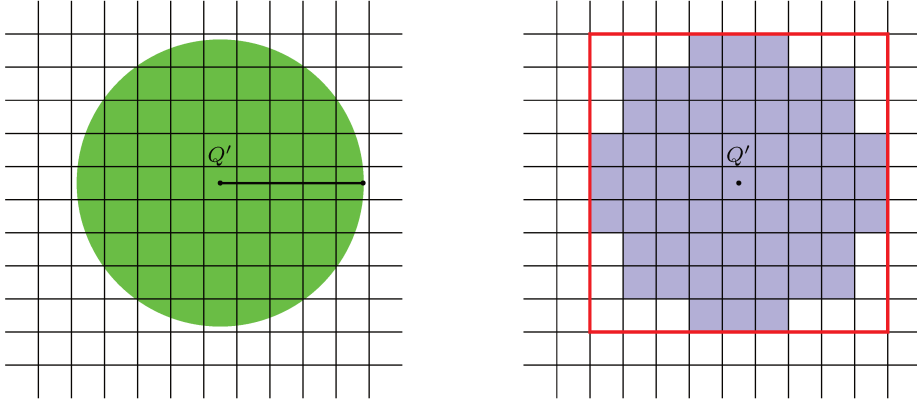


Figura 3.18: En la figura de la derecha se tiene el círculo verde cuyo radio $2^{1-j}\tilde{C}$ es la constante que define al conjunto $B(Q', j)$. En la figura de la derecha se tienen todas las celdas Q de nivel j que cumplen $\text{dist}(Q', Q) < 2^{1-j}C$ (región azul). Por último, vemos el cubo d -dimensional (cuadrado rojo) que contiene a $B(Q', j)$ en su interior.

Ahora vamos a acotar $\#B(Q', j)$ para cada j por una constante que sólo dependa de la dimensión d y el grado polinomial p . Teniendo en cuenta la definición de $B(Q', j)$ podemos deducir que este conjunto está incluido en un cubo d -dimensional cuyo lado está acotado inferiormente por $2 \cdot 2^{1-j}\tilde{C}$ y superiormente por $2 \cdot 2^{1-j}\tilde{C} + 2^{-j}$. Esta situación para el caso $d = 2$ lo podemos visualizar en la Figura 3.18. Entonces, $\#B(Q', j)$ está acotada por la cantidad de celdas de nivel j que están contenidas en el cubo d -dimensional.

Como el área del cubo es,

$$\left[2 \cdot 2^{1-j}\tilde{C} + 2^{-j}\right]^d = \left[2^{-j}(4\tilde{C} + 1)\right]^d,$$

donde $C = \sqrt{d} C'$. Además el área de una celda de nivel j es $[2^{-j}]^d$. Entonces tenemos que, $\#B(Q', j) \leq [(4C' + 1)]^d$. Considerando esta última desigualdad y la sustitución $k = 1 - j + \text{lev}(Q')$, resulta (3.57) ya que

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in \mathbb{Q}_j \setminus \mathbb{Q}_0} \lambda(Q, Q') &\leq \sum_{j=1}^{\text{lev}(Q')+1} 2^{j-\text{lev}(Q')} (4\tilde{C} + 1)^d \\ &= \sum_{k=0}^{\text{lev}(Q')} 2^{1-k} (4\tilde{C} + 1)^d \\ &\leq 2 (4\tilde{C} + 1)^d \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = C, \end{aligned}$$

con $C = C(d, p) = 4 (4\tilde{C} + 1)^d$. □

3.6. Análisis experimental de estrategias de refinamiento

En esta sección ilustramos la performance de nuestro algoritmo de refinamiento adaptativo a través de algunas simulaciones y realizamos comparaciones con el método presentado en [BGV18] de refinamiento adaptativo que preserva las mallas estrictamente admisibles de clase 2.

Los tests que presentaremos son en dos dimensiones ya que permiten una visualización más clara y concuerdan con la estructura trabajada en las secciones anteriores. En particular, nuestro análisis aborda la resolución numérica de los siguientes problemas.

- (P1) Aproximar una función $f \in L^2(\Omega)$ mediante la proyección L^2 sobre un espacio de splines jerárquico dado.
- (P2) Resolución de la ecuación de Poisson usando una discretización de Galerkin en espacios de splines jerárquicos.

Lazo adaptativo. En ambos problemas, utilizamos un lazo adaptativo de la forma:



Figura 3.19: Diagrama de flujo de un proceso adaptativo.

Explicamos a continuación cada módulo.

- SOLVE: Se calcula la solución discreta del problema (P1) o (P2), según corresponda, en el espacio jerárquico definido sobre la malla actual.
- ESTIMATE: Dependiente del problema considerado (P1) o (P2), y en base a la solución discreta obtenida se calculan estimadores de error por elementos que denotamos con \mathcal{E}_Q .
- MARK: Seleccionamos las celdas activas de la malla jerárquica actual en donde los estimadores tienen mayor magnitud utilizando alguna estrategia de marcado. Para nuestros ejemplos se utiliza la estrategia del máximo (MS) con parámetro θ , la cual consiste en marcar los elementos activos $Q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\mathcal{E}_Q \geq \theta \max_{Q' \in \mathbb{Q}} \mathcal{E}_{Q'}. \quad (3.58)$$

- UPDATE MARK: Actualizamos el conjunto de celdas marcadas utilizando el método DA o EA2 como se detalla a continuación.
 - DA: Aplica el Algoritmo 3 (o equivalentemente, el Algoritmo 2) presentado en este trabajo, que redefine el conjunto de celdas marcadas para preservar la estructura de la malla débilmente admisible.
 - EA2: Aplica el algoritmo de marcado recursivo presentado dentro del [BGV18, Algorithm 5], el cual determina las celdas que se deben marcar para preservar la estructura de la malla estrictamente admisible de clase 2.
- REFINE: Se refina la malla jerárquica actual mediante el proceso que se describe en la Definición 3.17, utilizando las celdas activas que se marcaron en el paso anterior.

3.6.1. Aproximación de funciones (P1)

Describimos el problema (P1) de aproximar una función $f \in L^2(\Omega)$ mediante la proyección L^2 sobre un espacio de splines jerárquico dado.

Sea $f \in L^2(\Omega)$, queremos hallar $s \in \text{span } \mathcal{H}$ tal que

$$s := \arg \min_{g \in \text{span } \mathcal{H}} \|f - g\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.59)$$

donde \mathcal{H} es la base de HB-splines de un espacio de splines jerárquicos sobre Ω . Sabemos que $s \in \text{span } \mathcal{H}$ es única y satisface que

$$\int_{\Omega} (s - f)g dx = 0, \quad \text{para todo } g \in \text{span } \mathcal{H}. \quad (3.60)$$

De esta manera, si consideramos que $\mathcal{H} = \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$, donde $N = \dim(\text{span } \mathcal{H})$, la solución s del problema, que se puede representar como

$$s = \sum_{i=1}^N c_i \beta_i, \quad (3.61)$$

se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones $Ac = F$ donde la incógnita $c = (c_i) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ es el vector de coeficientes de s en (3.61), y donde la matriz de masa $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y el vector de carga $F = (F_i) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ están dados por

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \beta_i \beta_j dx \quad \text{y} \quad F_i = \int_{\Omega} f \beta_i dx.$$

En este problema, los estimadores de error por elementos que vamos a considerar están dados por

$$\mathcal{E}_Q = \|f - s\|_{L^2(Q)}, \quad (3.62)$$

para toda celda activa Q de la malla jerárquica.

Índices de eficiencia y de reducción del error. Para poder comparar los métodos DA y EA2 tendremos en cuenta dos índices que utilizan el error cometido en la región M que conforman las celdas seleccionadas inicialmente por la estrategia clásica de marcado, es decir,

$$M := \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{M}_\ell, \\ \ell=0, \dots, n-1}} Q.$$

El índice de reducción del error I_{err} viene dado por

$$I_{\text{err}} := \log \left(\frac{e_0}{e_1} \right), \quad (3.63)$$

donde $e_0 = \|f - f_0\|_{L^2(M)}$ es el error inicial y $e_1 = \|f - f_1\|_{L^2(M)}$ es el error final donde f_1 se obtuvo a partir de un paso con el método DA, o bien EA2. Este índice nos indica aproximadamente cuántos dígitos se ganan en el error de la región M al refinar mediante el algoritmo seleccionado.

Por otro lado, tenemos el índice de eficiencia I_{eff} , que nos da la magnitud de la tasa de decrecimiento del error respecto a los grados de libertad (DOFs) que se agregaron. Más precisamente,

$$I_{\text{eff}} := \frac{I_{\text{err}}}{\log \left(\frac{\#\mathcal{H}_1}{\#\mathcal{H}_0} \right)}. \quad (3.64)$$

Análisis experimental en un paso de refinamiento. A continuación, presentamos algunos ejemplos concretos del problema (P1) de la proyección L^2 . En cada caso, comenzamos con un espacio inicial de splines bicúbicos de máxima suavidad asociado a una malla estrictamente admisible de clase 2 donde los subdominios jerárquicos Ω_ℓ son agrupados (ver la Definición 3.40). Aplicamos un paso del lazo de la Figura 3.19 empezando en MARK y terminando en ESTIMATE, actualizando las celdas marcadas con el método DA por un lado, y con EA2 por el otro. Para ambos procedimientos, reportamos la malla refinada que se obtuvo y los índices de eficiencia y de decrecimiento del error.

Ejemplo 3.59. Consideramos $f(x, y) = \arctan(25(x - y))$ sobre $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. En la Figura 3.20 se muestra la gráfica de f y la zona marcada M que se obtuvo utilizando $\theta = 0,7$ en la estrategia del máximo sobre la malla inicial. Notar que en este ejemplo dicha estrategia ha marcado una región M de celdas óptimas del último nivel. En la parte inferior de la Figura 3.20 se muestran las mallas obtenidas utilizando las dos propuestas para el módulo UPDATE MARK. Con el método DA se obtiene un nuevo espacio jerárquico en el cual se agregaron todas las funciones B-splines del último nivel necesarias para que

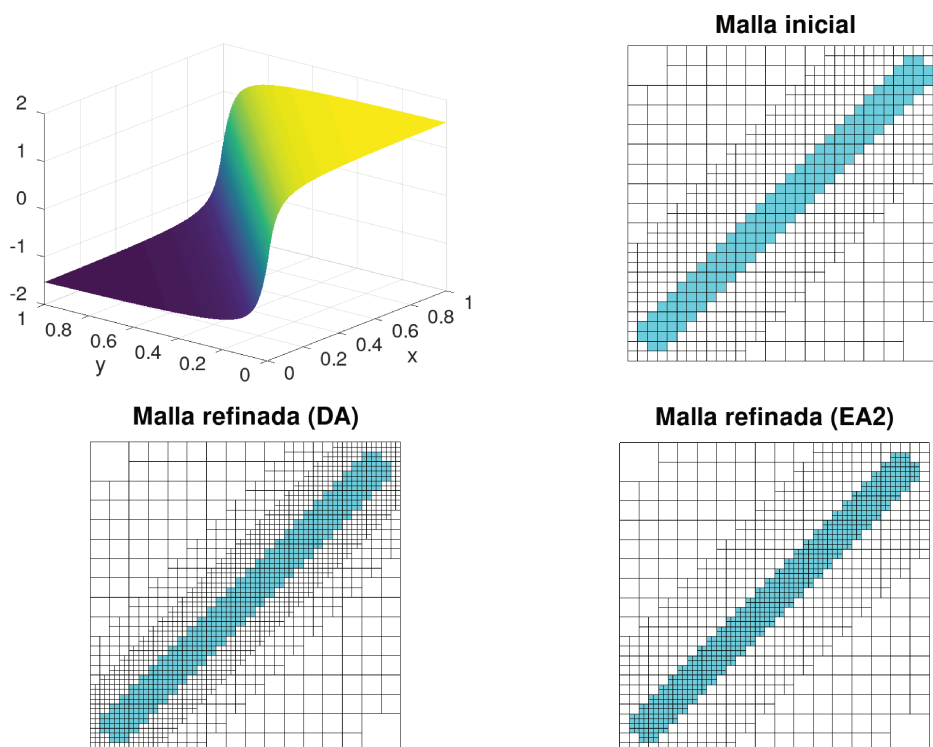


Figura 3.20: Para el Ejemplo 3.59 se tiene la gráfica de la función f (superior izquierdo) y la malla jerárquica inicial (superior derecho) donde la región sombreada indica los elementos marcados inicialmente en los cuales se busca mejorar la aproximación. Las figuras inferiores muestran las mallas jerárquicas obtenidas mediante los métodos DA y EA2.

la región M esté contenida en ω_3 . Con el método EA2 se refinaron solo las celdas marcadas ya que esto es suficiente para mantener la estructura de la malla como estrictamente admisible de clase 2.

En la primera línea de la Tabla 3.1 se muestra la cantidad de grados de libertad (DOFs) de la malla inicial y el error L^2 en la zona marcada. En la segunda y tercera líneas se reporta la información después del refinamiento con los métodos DA y EA2, respectivamente. De acuerdo a los índices de error obtenidos concluimos que en este caso DA reduce el error en la zona de interés en mayor medida que EA2 (una cifra decimal adicional), a pesar de presentar índices de eficiencia comparables.

Ejemplo 3.60. Consideramos $f(x, y) = \exp\left(\frac{-((x-0,5)^2+(y-0,5)^2)}{(2(0,1)^2)}\right)$ sobre $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y la malla jerárquica inicial que se muestra en la Figura 3.21. En este caso la estrategia de marcado con parámetro $\theta = 0, 5$ nos muestra, al igual que en ejemplo anterior, que predominan las celdas óptimas.

Método	DOFs	Error $L^2(M)$	Índ. eficiencia	Índ. decrecimiento del error
–	757	$1,68 \times 10^{-3}$	–	–
DA	1771	$5,75 \times 10^{-5}$	3.97	1.47
EA2	974	$6,73 \times 10^{-4}$	3.63	0.40

Tabla 3.1: Comparación de índices de eficiencia y de decrecimiento del error entre el método propuesto (DA) y el refinamiento estrictamente admisible (EA2) para el Ejemplo 3.59.

De nuevo aquí, como vemos en la Tabla 3.2, el índice de error muestra que DA reduce el error en la zona de interés en mayor medida que EA2.

Método	DOFs	Error $L^2(M)$	Índ. eficiencia	Índ. decrecimiento del error
–	457	$1,47 \times 10^{-5}$	–	–
DA	853	$7,77 \times 10^{-7}$	4.71	1.27
EA2	529	$4,56 \times 10^{-6}$	7.99	0.50

Tabla 3.2: Comparación de índices de eficiencia y de decrecimiento del error entre el método propuesto (DA) y el refinamiento estrictamente admisible (EA2) para el Ejemplo 3.60 y disposición de la malla que muestra la Figura 3.21.

Por otro lado, al considerar otra disposición de celdas activas en la malla inicial como se muestra en la Figura 3.22), utilizando $\theta = 0,5$ vemos que hay más celdas subóptimas en la región de celdas marcadas. Aún así, en vistas de los resultados de la Tabla 3.3, el método DA presenta una mejora en la reducción del error frente al método EA2.

Método	DOFs	Error	Índ. eficiencia	Índ. decrecimiento del error
–	253	$4,80 \times 10^{-5}$	–	–
DA	601	$5,40 \times 10^{-6}$	2.52	0.94
EA2	513	$1,08 \times 10^{-5}$	2.10	0.64

Tabla 3.3: Comparación de índices de eficiencia y de decrecimiento del error entre el método propuesto (DA) y el refinamiento estrictamente admisible (EA2) para el Ejemplo 3.60 y disposición de la malla que muestra la Figura 3.22.

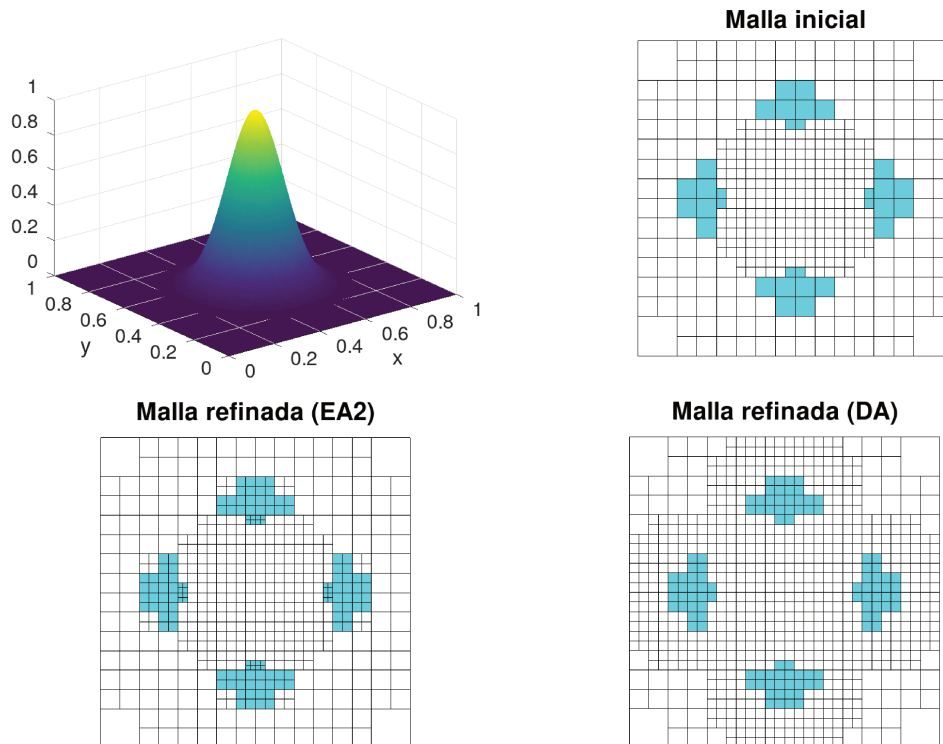


Figura 3.21: Para el Ejemplo 3.60 se tiene la gráfica de la función f (superior izquierdo) y la malla jerárquica inicial (superior derecho) donde la región sombreada indica los elementos marcados inicialmente en los cuales se busca mejorar la aproximación. Las figuras inferiores muestran las mallas jerárquicas obtenidas mediante los métodos DA y EA2.

3.6.2. Problema de Poisson (P2)

Consideremos la ecuación de Poisson con condiciones de borde Dirichlet dada por

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.65)$$

donde f y g están dadas y Ω es el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$. El problema (P2) consiste en resolver una discretización de Galerkin en un espacio de splines jerárquico para aproximar la solución débil u de (3.65). Una vez calculada la solución discreta, utilizamos los estimadores de error residuales por elementos \mathcal{E}_Q introducidos en [BG16].

Análisis experimental en un proceso de refinamiento iterativo. A continuación presentaremos un análisis comparativo de la performance del lazo adaptativo de la Figura 3.19 para un ejemplo del problema (P2) cuando en el

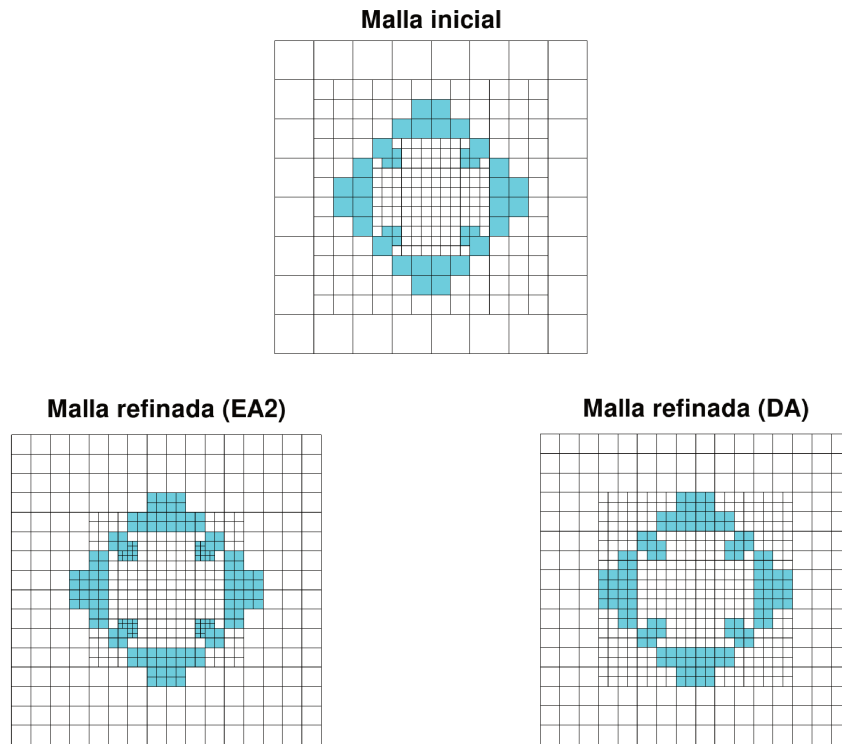


Figura 3.22: Malla jerárquica inicial y mallas refinadas obtenidas mediante los métodos EA2 y DA para el Ejemplo 3.60. La región sombreada indica los elementos inicialmente marcados donde se busca mejorar la aproximación.

módulo UPDATE MARK se considera el método DA por un lado, y EA2 por el otro.

Ejemplo 3.61. Tomemos f y g de tal manera que $u(x, y) = \arctan(25(x - y))$ sea la solución del problema (3.65).

Como punto de partida, consideramos un espacio de splines producto tensor bicúbicos con máxima regularidad cuya malla \mathbb{Q}_0 está formada por una disposición de 8×8 celdas. Consideramos además el parámetro $\theta = 0,5$ en la estrategia del máximo.

Para ambos métodos (EA2 y DA), de manera independiente, se realizaron 8 iteraciones y se obtuvo un orden experimental de convergencia óptimo. En la Figura 3.23 se muestra un gráfico comparativo del error en la norma energía en términos de los grados de libertad. Notemos que para alcanzar un error de alrededor de 2×10^{-3} , en ambos casos se necesitaron una cantidad similar de grados de libertad (entre 3000-4000 DOFs). Sin embargo, con el algoritmo de refinamiento adaptativo que usa DA sólo fueron necesarias 5 iteraciones.

En la Figura 3.24 se muestran las mallas obtenidas con los dos procedimientos en el momento en que ambos alcanzan un error similar, la iteración 5 de

3.6. Análisis experimental de estrategias de refinamiento

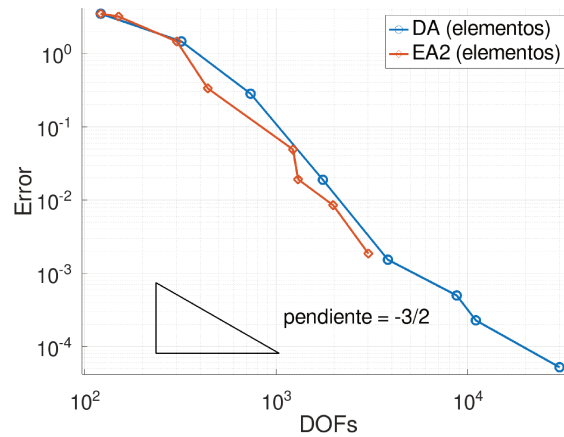


Figura 3.23: Decrecimiento del error en norma energía vs. grados de libertad, con los métodos DA y EA2, utilizando en ambos casos estimadores de error por elementos.

DA y la iteración 8 de EA2. Podemos observar que en la malla del espacio de splines jerárquico que se obtuvo con el método EA2 existen celdas del último nivel que están de alguna forma aisladas y que en realidad no enriquecen el espacio. Por el contrario, con el método DA todos los subdominios jerárquicos Ω_ℓ son unión de soportes de B-splines de nivel anterior. Esto se debe a que el método DA garantiza que al refinar la malla el nuevo espacio jerárquico está formado por subdominios jerárquicos agrupados (ver la Definición 3.40).

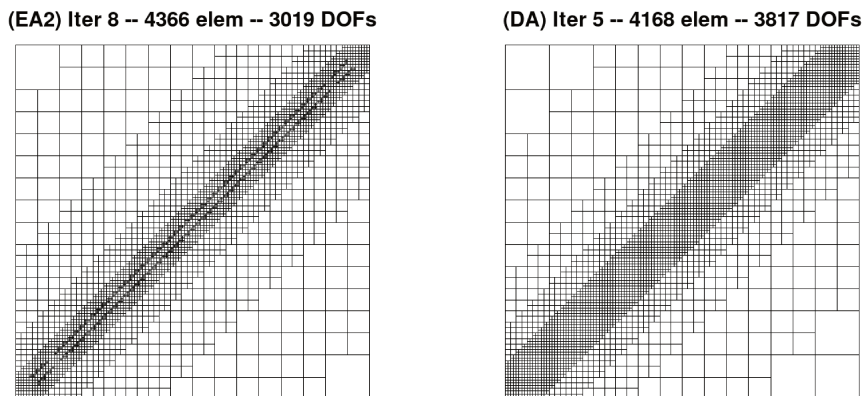


Figura 3.24: Mallas jerárquicas para la solución del Ejemplo 3.61. A la izquierda la iteración 8 del método EA2 y a la derecha la iteración 5 del método DA. En ambos casos se alcanza un error, cantidad de elementos y de grados de libertad similares.

Teniendo en cuenta esta situación, vamos a explorar una alternativa para

lograr que las mallas estrictamente admisibles de clase 2 sean agrupadas en cada iteración del método EA2. Proponemos utilizar los estimadores de error por funciones que se presentan en [BG18]. Estos estimadores ayudan a que el conjunto de celdas marcadas sea unión de soportes de B-splines en cada nivel.

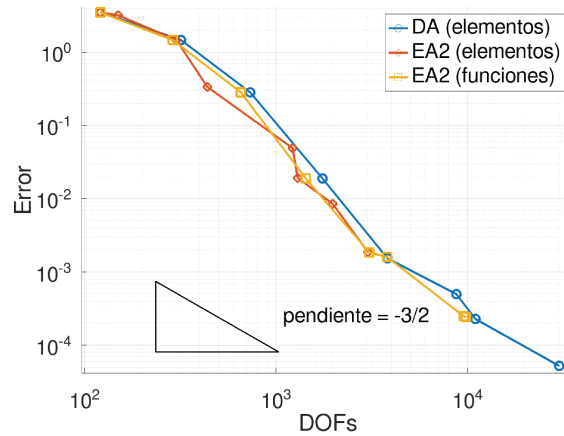


Figura 3.25: Decrecimiento del error en norma energía vs. grados de libertad, con los métodos DA y EA2 con estimadores de error por elementos y con el método EA2 con estimadores de error por funciones.

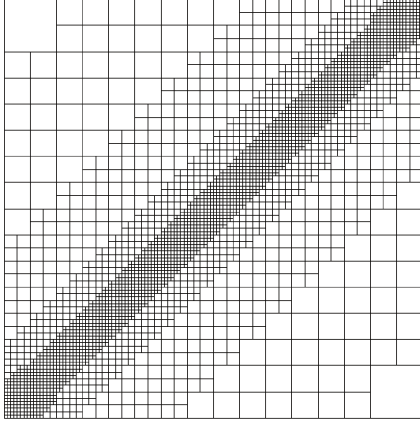
En la Figura 3.25 podemos ver la mejora del método EA2 al tomar los estimadores de error por funciones. Notamos que realizando 8 iteraciones, ahora el método EA2 (utilizando estimadores por funciones) permite alcanzar un error de casi un orden de magnitud menor que lo que se obtiene con EA2 utilizando estimadores por elementos.

Adicionalmente, es interesante remarcar que en la iteración 5, tanto EA2 utilizando estimadores por funciones como DA alcanzan un error y grados de libertad similares. Sin embargo, en la iteración 6, DA logra avanzar en la reducción del error mientras que EA2 refina muy poco y en consecuencia no se logra una reducción significativa del error. Para concluir, mostramos en la Figura 3.26 las mallas de las iteraciones 5 y 6 del método EA2 utilizando estimadores por funciones.

3.7. Quasi-interpolación en espacios jerárquicos

En esta sección presentamos la construcción de un operador de quasi-interpolación en espacios de splines jerárquicos. Este operador fue introducido por primera vez en [Kra98] para espacios de splines bivariados definidos sobre vectores de nodos uniformes infinitos, donde se estudiaron propiedades de aproximación puntual. Posteriormente, estos resultados fueron extendidos

(EA2) Iter 5 -- 3418 elem -- 3067 DOFs



(EA2) Iter 6 -- 4102 elem -- 3799 DOFs

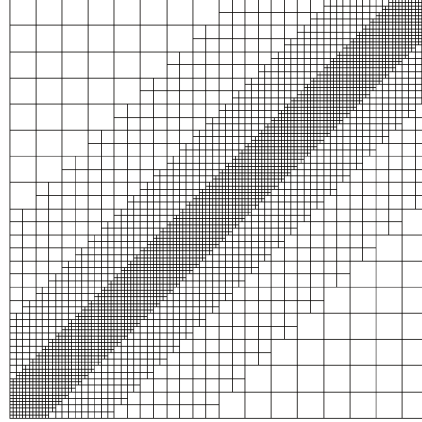


Figura 3.26: Mallas jerárquicas para la solución del Ejemplo 3.61. Se muestran las mallas correspondientes a las iteraciones 5 y 6 del método EA2 utilizando estimadores de error por funciones.

en [BG17] a *open knot vectors*, permitiendo nodos múltiples internos, en dominios de dimensión $d \geq 1$. Además, se establecieron estimaciones de aproximación local en normas L_q , para $1 \leq q \leq \infty$.

Retomamos las consideraciones que hicimos en la Subsección 3.3.2 sobre los espacios de splines jerárquicos y que utilizamos aquí. El espacio es construido a partir de un vector de grado polinomial $\mathbf{p} = (p, p, \dots, p)$, mallas uniformes en cada nivel compuestas por hipercubos de longitud de arista h_ℓ , y los espacios anidados se obtienen mediante un refinamiento diádico. Además, para todo $\ell = 0, \dots, n - 1$, se cumple $h_\ell = \frac{h_{\ell-1}}{2}$.

3.7.1. Un operador de quasi-interpolación multinivel

Para definir un operador en el espacio jerárquico, es necesario combinar operadores de quasi-interpolación locales P_ℓ , definidos en cada nivel $\ell = 0, 1, \dots, n - 1$, los cuales satisfacen ciertas propiedades. Siguiendo las ideas y técnicas de [LLMr01] presentadas en las Secciones 1.2 y 2.2, definimos P_ℓ mediante una proyección local en L^2 . Para cada ℓ , consideramos un subconjunto de la base \mathcal{B}_ℓ definido por

$$\mathcal{B}_{\ell, \omega_\ell} := \{\beta \in \mathcal{B}_\ell \mid \exists Q \in \mathcal{Q}_\ell : Q \subset \text{supp}(\beta) \cap \omega_\ell\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\omega_\ell} := \text{span}(\mathcal{B}_{\ell, \omega_\ell}).$$

Se define $P_\ell : L^q(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_{\omega_\ell} \subset \mathcal{S}_\ell$, para $\ell = 0, \dots, n - 1$ tal que

$$P_\ell(f) := \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\ell, \omega_\ell}} \lambda_\beta(f) \beta, \quad \forall f \in L^q(\Omega), \quad (3.66)$$

donde $\{\lambda_\beta\}$ son funcionales lineales que satisfacen las siguientes propiedades: poseen soporte local, forman una base dual de $\mathcal{B}_{\ell, \omega_\ell}$ y son L^q -estables como se establece en [BG17, Proposition 4.3]).

El siguiente resultado proporciona una versión local de [BG17, Theorem 4.4], que resume las propiedades de P_ℓ ; y su demostración sigue los mismos argumentos.

Teorema 3.62. *Sean $\{P_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ un conjunto de operadores definidos en (3.66). Para $\ell = 0, 1, \dots, n-1$, C unión de celdas de nivel ℓ , y el entorno $V_C^\ell := \bigcup\{\tilde{Q} \mid Q \in \mathcal{Q}_\ell, Q \subset C\}$ resulta:*

- (I) P_ℓ preserva los splines en $\mathcal{S}_{\omega_\ell}$, es decir, $P_\ell s = s$, para todo $s \in \mathcal{S}_{\omega_\ell}$.
- (II) P_ℓ está soportado en ω_ℓ , esto es, si $f|_{\omega_\ell} \equiv 0$, entonces $P_\ell f = 0$.
- (III) Para todo $s \in \mathcal{S}_\ell$, $P_\ell s \equiv s$ en ω_ℓ .
- (IV) (Estabilidad) Para todo $f \in L^q(\omega_\ell)$ y $C \subset \Omega_\ell$, P_ℓ se cumple

$$\|P_\ell f\|_{L^q(C)} \leq C_S \|f\|_{L^q(V_C^\ell \cap \omega_\ell)},$$

donde la constante $C_S > 0$ solo depende de p .

- (V) (Aproximación) Para todo $f \in W_q^{p+1}(\Omega)$ y $C \subset \omega_\ell$, se cumple que

$$\|f - P_\ell f\|_{L^q(C)} \leq C_A h_\ell^{p+1} |f|_{p+1, L^q(V_C^\ell)},$$

donde la constante $C_A > 0$ depende solo de p and d .

Definición 3.63 (Operador de quasi-interpolación jerárquico). Dado el conjunto de operadores de quasi-interpolación definidos en (3.66) para cada nivel de la jerarquía, definimos $\Pi : L^q(\Omega) \rightarrow \text{span } \mathcal{H}$ mediante

$$\begin{cases} \Pi_0 := P_0, \\ \Pi_{\ell+1} := \Pi_\ell + P_{\ell+1}(\text{Id} - \Pi_\ell), & \ell = 0, \dots, n-2, \\ \Pi := \Pi_{n-1}. \end{cases} \quad (3.67)$$

Observación 3.64. Notar que el ítem (I) del Teorema 3.62 implica que $P_0 s = s$ para todo $s \in \mathcal{S}_0$. Entonces, a partir de la definición del operador Π , se tiene que

$$\Pi s = s, \quad \forall s \in \mathcal{S}_0.$$

En efecto, si consideramos $s \in \mathcal{S}_0$ se tiene

$$\Pi_1 s = \Pi_0 s + P_1(s - \Pi_0 s) = s + P_1(0) = s,$$

con lo cual $\Pi_1 s = s$ para todo $s \in \mathcal{S}_0$. De manera análoga podemos probar que $\Pi_\ell s = s$ para todo $s \in \mathcal{S}_0$ para $\ell = 2, \dots, n-1$.

En consecuencia, el operador Π preserva los splines del nivel inicial, y en particular, el espacio polinomial producto tensor $\mathbf{P}_\mathbf{p}$.

Observación 3.65. Por la definición de Π y P_ℓ , tenemos que

$$\Pi : L^q(\Omega) \rightarrow \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathcal{S}_{\omega_\ell} = \left\{ \sum_{\ell=0}^{n-1} s_\ell \mid s_\ell \in \mathcal{S}_{\omega_\ell}, \ell = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

El siguiente resultado puede encontrarse en [BG17, Lemma 4.8] y sigue las ideas de [Kra98, Lemma 2.2.1.d].

Lema 3.66. *Para todo $f \in L^q(\Omega)$ se cumple que*

$$\Pi_\ell f = P_\ell f \quad \text{en } \omega_\ell, \quad (\ell = 0, \dots, n-1).$$

El operador Π puede expresarse en términos de los operadores P_k cuando se restringe a los subdominios ω_ℓ (ver [BG17, Theorem 4.7]).

Lema 3.67. *Si la malla jerárquica \mathbb{Q} es débilmente admisible, es decir,*

$$\omega_{n-1} \subset \omega_{n-2} \subset \dots \subset \omega_2 \subset \omega_1 \subset \omega_0,$$

entonces, para toda $f \in L^q(\Omega)$, se cumple que

$$\Pi f = P_\ell f + \sum_{k=\ell+1}^{n-1} P_k(f - P_{k-1}f) \quad \text{en } \omega_\ell, \quad (\ell = 0, \dots, n-1).$$

3.7.2. Propiedad de aproximación local

En esta sección presentamos una extensión de [BG17, Theorem 4.9], donde se establecen estimaciones en normas L^q , obteniendo ahora estimaciones óptimas en normas de orden superior.

Teorema 3.68 (Estimaciones locales de aproximación). *Sea \mathcal{H} el conjunto de HB-splines asociados a una jerarquía de subdominios Ω_n de profundidad n . Sea $\Pi : L^q(\Omega) \rightarrow \text{span } \mathcal{H}$ el quasi-interpolante multinivel definido en (3.67). Si la malla jerárquica es débilmente admisible, entonces, para cualquier celda de nivel ℓ , $Q \subset \omega_\ell$ ($\ell = 0, 1, \dots, n-1$) y para toda función $f \in W_q^{p+1}(\Omega)$ ($1 \leq q \leq \infty$), se cumple que*

$$\|D^\alpha(f - \Pi f)\|_{L^q(Q)} \leq C h_\ell^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(N(Q))}, \quad (3.68)$$

para todo $0 \leq |\alpha| \leq p$, donde el entorno $N(Q)$ es definido como $N(Q) := \tilde{Q}$ si Q es una celda activa, y $N(Q) := \widetilde{\text{parent}(Q)}$ si Q es una celda desactivada. La constante $C > 0$ depende del grado polinomial p y de la dimensión d , pero no de f .

Demostración. Sea $f \in W_q^{p+1}(\Omega)$ y $Q \subset \omega_\ell$. Sea $T^p f$ el polinomio de Taylor promedio de grado p de f sobre \tilde{Q} (ver la Definición 1.16). Por la desigualdad triangular, y como $\Pi g = g$ para cualquier $g \in \mathbb{P}_p$, tenemos

$$\|D^\alpha(f - \Pi f)\|_{L^q(Q)} \leq \|D^\alpha(f - T^p f)\|_{L^q(Q)} + \|D^\alpha \Pi(T^p f - f)\|_{L^q(Q)}. \quad (3.69)$$

Llamamos a los términos de derecha $[A]$ y $[B]$, respectivamente, y observamos que la constante C que aparece en las siguientes estimaciones puede variar en cada aparición. El término $[A]$ se acota superiormente utilizando estimaciones de error estándar para el polinomio de Taylor (ver el Lema 1.18):

$$\begin{aligned} [A] &\leq \|D^\alpha(f - T^p f)\|_{L^q(\tilde{Q})} \\ &\leq C \operatorname{diam}(\tilde{Q})^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(\tilde{Q})} \\ &\leq C h_\ell^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(\tilde{Q})}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

En la última desigualdad, usamos el hecho que \tilde{Q} consiste de $(p+1)^d$ cells of level ℓ , que implica que $\operatorname{diam}(\tilde{Q}) \leq C h_\ell$. Para $[B]$, como $(\Pi(T^p f - f))|_Q \in \mathbb{P}_p \subset \mathcal{P}_s$ con $s = dp$, aplicamos Lema 1.14 para obtener:

$$[B] \leq \frac{C}{h_\ell^{|\alpha|}} \|\Pi(T^p f - f)\|_{L^q(Q)}, \quad \text{para } 0 \leq |\alpha| \leq p. \quad (3.71)$$

Ahora analizamos los dos posibles casos para Q . Si $Q \subset \Omega_\ell \setminus \Omega_{\ell+1}$, es decir, una celda activa, entonces $\Pi f|_Q = P_\ell f|_Q$. Usando la estabilidad de P_ℓ (Teorema 3.62 (iv)) y la estimación del polinomio de Taylor, en (3.71) resulta:

$$[B] \leq \frac{C}{h_\ell^{|\alpha|}} \|T^p f - f\|_{L^q(\tilde{Q} \cap \omega_\ell)} \leq C h_\ell^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(\tilde{Q})},$$

que conbinado con (3.70), prueba el resultado para $N(Q) = \tilde{Q}$.

Por otro lado, si $Q \subset \Omega_{\ell+1}$, es decir una celda desactivada, utilizamos el Lema 3.67 y la estabilidad de P_ℓ para obtener:

$$\begin{aligned} [B] &\leq \frac{C}{h_\ell^{|\alpha|}} \left\| P_\ell(T^p f - f) + \sum_{k=\ell+1}^{n-1} P_k(T^p f - f - P_{k-1}(T^p f - f)) \right\|_{L^q(Q)} \\ &\leq \frac{C}{h_\ell^{|\alpha|}} \left(\|T^p f - f\|_{L^q(\tilde{Q})} + \sum_{k=\ell+1}^{n-1} \|P_k(T^p f - f - P_{k-1}(T^p f - f))\|_{L^q(Q)} \right) \\ &\leq C h_\ell^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(Q)} + \frac{C}{h_\ell^{|\alpha|}} [I]. \end{aligned}$$

3.7. Quasi-interpolación en espacios jerárquicos

Estimamos la suma $[I]$ expresando a Q como unión de celdas de nivel k y aplicando reiteradas veces la estabilidad:

$$\begin{aligned}
[I] &\leq \sum_{k=\ell+1}^{n-1} \|Tf - f - P_{k-1}(Tf - f)\|_{L^q(V_Q^k \cap \omega_k)} \\
&\leq \sum_{k=\ell+1}^{n-1} \left(\|Tf - P_{k-1}(Tf)\|_{L^q(V_Q^k \cap \omega_k)} + \|P_{k-1}f - f\|_{L^q(V_Q^k \cap \omega_k)} \right) \\
&\leq \sum_{k=\ell+1}^{n-1} \|P_{k-1}f - f\|_{L^q(V_Q^k \cap \omega_{k-1})},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad resulta de $Tf - P_{k-1}(Tf) = 0$ en ω_{k-1} (ver Teorema 3.62 (III)). Como $V_Q^k \subset \tilde{Q}$ para todo $k \geq \ell + 1$, el Teorema 3.62 (v) implica:

$$\begin{aligned}
[I] &\leq \sum_{k=\ell+1}^{n-1} \|P_{k-1}f - f\|_{L^q(\tilde{Q} \cap \omega_{k-1})} \\
&\leq \sum_{k=\ell+1}^{n-1} Ch_{k-1}^{p+1} |f|_{p+1, L^q(V_{\tilde{Q} \cap \omega_{k-1}}^{k-1})} \\
&\leq Ch_\ell^{p+1} |f|_{p+1, L^q(V_{\tilde{Q}}^\ell)},
\end{aligned}$$

donde utilizamos que $\omega_k \subset \omega_\ell$ para todo $k > \ell$ y acotamos la suma geométrica usando que $h_k = h_{k-1}/2$. Finalmente, como $V_Q^\ell \subset \widetilde{\text{parent}(Q)}$, concluimos que

$$[B] \leq Ch_\ell^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(\widetilde{\text{parent}(Q)})},$$

completando la prueba para $N(Q) = \widetilde{\text{parent}(Q)}$. \square

Enfatizamos que la constante C en Teorema 3.68 no depende del nivel de disparidad de la malla, en contraste con [Spe17, Theorem 4]. En consecuencia, se obtienen estimaciones locales de aproximación robustas incluso cuando la malla no es estrictamente admisible (cf. [Spe17, Corollary 1]), requiriendo únicamente la hipótesis más débil (3.24).

Corolario 3.69. *Sea $Q \in \mathcal{Q}_\ell$ una celda activa. Entonces,*

$$\|D^\alpha(f - \Pi f)\|_{q,Q} \leq Ch_Q^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, q, N(Q)}, \quad \forall \alpha, 0 \leq |\alpha| \leq p,$$

donde el tamaño local de la malla h_Q y el entorno $N(Q)$ están definidos como $h_Q := h_\ell$ y $N(Q) := \tilde{Q}$ si $Q \in \mathcal{A}_\ell(\mathbb{Q})$, y $h_Q := h_k$ y $N(Q) := \widetilde{\text{parent}_{k-1}(Q)}$ si $Q \in \mathcal{A}_k(\mathbb{Q})$ para algún $k < \ell$. La constante $C > 0$ depende de p y d , pero es independiente de f .

Demostración. La primera estimación es directa del Teorema 3.68 ya que $Q \subset \omega_\ell$. Para el segundo caso, debido a que $Q \in \mathcal{A}_k(\mathbb{Q})$ para algún $k < \ell$, utilizamos la Definición 3.43 y la Observación 3.44 para garantizar que $Q' = \text{parent}_k(Q) \subset \omega_k$ la cual es una celda desactivada de nivel k . Aplicando (3.68) para Q' se tiene:

$$\|D^\alpha(f - \Pi f)\|_{L^q(Q)} \leq \|D^\alpha(f - \Pi f)\|_{L^q(Q')} \leq C h_k^{p+1-|\alpha|} |f|_{p+1, L^q(\overline{\text{parent}(Q')})},$$

donde $\text{parent}(Q') = \text{parent}_{k-1}(Q)$. □

En conclusión, este resultado proporciona la base teórica de nuestro algoritmo, ya que muestra que el error de aproximación local de una celda activa está determinado por su poder de aproximación (Definición 3.43). Es decir, que al redefinir las celdas marcadas de acuerdo con su poder de aproximación, distinguimos explícitamente aquellas que ya satisfacen la cota óptima en su nivel de aquellas cuyo error está dominado por un h_k más grueso para algún $k < \ell$.

Bibliografía

- [BadVBSV14] L. Beirão da Veiga, A. Buffa, G. Sangalli, and R. Vázquez. Mathematical analysis of variational isogeometric methods. *Acta Numer.*, 23:157–287, 2014.
- [BG16] Annalisa Buffa and Carlotta Giannelli. Adaptive isogeometric methods with hierarchical splines: error estimator and convergence. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(1):1–25, 2016.
- [BG17] Annalisa Buffa and Eduardo M. Garau. Refinable spaces and local approximation estimates for hierarchical splines. *IMA J. Numer. Anal.*, 37(3):1125–1149, 2017.
- [BG18] Annalisa Buffa and Eduardo M. Garau. *A posteriori* error estimators for hierarchical B-spline discretizations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 28(8):1453–1480, 2018.
- [BGG16] Annalisa Buffa, Eduardo M. Garau, Carlotta Giannelli, and Giancarlo Sangalli. On quasi-interpolation operators in spline spaces. In *Building bridges: connections and challenges in modern approaches to numerical partial differential equations*, volume 114 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 73–91. Springer, [Cham], 2016.
- [BGMP16] Annalisa Buffa, Carlotta Giannelli, Philipp Morgenstern, and Daniel Peterseim. Complexity of hierarchical refinement for a class of admissible mesh configurations. *Comput. Aided Geom. Design*, 47:83–92, 2016.
- [BGV18] Cesare Bracco, Carlotta Giannelli, and Rafael Vázquez. Refinement algorithms for adaptive isogeometric methods with hierarchical splines. *Axioms*, 7(3):43, 2018.
- [Boe80] Wolfgang Boehm. Inserting new knots into B-spline curves. *Computer-Aided Design*, 12:199–201, 1980.

- [BS02] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.
- [CG23] M. E. Castillo and E. M. Garau. Quasi-interpolation in spline spaces: local stability and approximation properties. *Trends Comput. Appl. Math.*, 24(1):9–18, 2023.
- [CLR80] Elaine Cohen, Tom Lyche, and Richard Riesenfeld. Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics. *Computer Graphics and Image Processing*, 14(2):87–111, 1980.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [GHP17] Gregor Gantner, Daniel Haberlik, and Dirk Praetorius. Adaptive IGAFEM with optimal convergence rates: hierarchical B-splines. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 27(14):2631–2674, 2017.
- [GJS12] Carlotta Giannelli, Bert Jüttler, and Hendrik Speleers. THB-splines: the truncated basis for hierarchical splines. *Comput. Aided Geom. Design*, 29(7):485–498, 2012.
- [GJS14] Carlotta Giannelli, Bert Jüttler, and Hendrik Speleers. Strongly stable bases for adaptively refined multilevel spline spaces. *Adv. Comput. Math.*, 40(2):459–490, 2014.
- [GV18] Eduardo M. Garau and Rafael Vázquez. Algorithms for the implementation of adaptive isogeometric methods using hierarchical B-splines. *Appl. Numer. Math.*, 123:58–87, 2018.
- [Kra97] Rainer Kraft. Adaptive and linearly independent multilevel B-splines. In *Surface fitting and multiresolution methods (Chamonix–Mont-Blanc, 1996)*, pages 209–218. Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1997.
- [Kra98] Rainer Kraft. *Adaptive und linear unabhängige multilevel B-Splines und ihre Anwendungen*. Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart, Stuttgart, 1998. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1998.

-
- [LLMr01] Byung-Gook Lee, Tom Lyche, and Knut Mørken. Some examples of quasi-interpolants constructed from local spline projectors. In *Mathematical methods for curves and surfaces (Oslo, 2000)*, Innov. Appl. Math., pages 243–252. Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2001.
- [LMS18] Tom Lyche, Carla Manni, and Hendrik Speleers. Foundations of spline theory: B-splines, spline approximation, and hierarchical refinement. In *Splines and PDEs: from approximation theory to numerical linear algebra*, volume 2219 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–76. Springer, Cham, 2018.
- [NSV09] Ricardo H. Nochetto, Kunibert G. Siebert, and Andreas Veerer. Theory of adaptive finite element methods: an introduction. In *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation*, pages 409–542. Springer, Berlin, 2009.
- [NV12] Ricardo H. Nochetto and Andreas Veerer. Primer of adaptive finite element methods. In *Multiscale and adaptivity: modeling, numerics and applications*, volume 2040 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–225. Springer, Heidelberg, 2012.
- [Sch07] Larry L. Schumaker. *Spline functions: basic theory*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2007.
- [SM16] Hendrik Speleers and Carla Manni. Effortless quasi-interpolation in hierarchical spaces. *Numer. Math.*, 132(1):155–184, 2016.
- [Spe17] Hendrik Speleers. Hierarchical spline spaces: quasi-interpolants and local approximation estimates. *Adv. Comput. Math.*, 43(2):235–255, 2017.
- [Ver13] Rüdiger Verfürth. *A posteriori error estimation techniques for finite element methods*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2013.
- [VGJS11] A.-V. Vuong, C. Giannelli, B. Jüttler, and B. Simeon. A hierarchical approach to adaptive local refinement in isogeometric analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200(49-52):3554–3567, 2011.
- [Vá16] R. Vázquez. A new design for the implementation of isogeometric analysis in Octave and Matlab: GeoPDEs 3.0. *Comput. Math. Appl.*, 72(3):523–554, 2016.