UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA DEL LITORAL "DRA. ELEONOR HARBOURE"

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de "Doctor/a en Matemática" en el campo de: **Análisis Real y Armónico**.

Operadores integrales con núcleos de decaimiento exponencial: teoría general y aplicaciones a operadores de Schrödinger generalizados

Autora
Gabriela Rocío Lezama
IMAL (CONICET-UNL)

Directora
Dra. Marisa Toschi
IMAL (CONICET-UNL)

Codirectora
Dra. Estefanía Dalmasso
IMAL (CONICET-UNL)

Institución donde se realizó
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral "Dra. Eleonor Harboure" (CONICET-UNL)
Facultad de Ingeniería Química (UNL)

Jurados de la tesis
Dr. Sheldy Ombrosi
INMABB (CONICET-UNS)

Dra. Irene Drelichman
CONICET - CMaLP (CIC-UNLP)

Dr. Anibal Chicco Ruiz
IMAL (CONICET-UNL)

Año de presentación
2026

Dedicado a
mis padres, Susana y Fabio

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas aquellas personas que me acompañaron, de una u otra forma, en este camino.

A mis directoras, por aceptar dirigirme. Gracias por el apoyo, el compromiso y el esfuerzo constante. Gracias por sus palabras y su guía, tanto ante los problemas matemáticos como ante aquellos que no lo eran. Aprendí muchísimo de ambas.

A mis padres, Fabio y Susana, por impulsarme siempre a estudiar y a ser cada día mejor, por confiar en mí y por esperarme en cada visita con un cálido abrazo que siempre fue refugio y motor.

A mis hermanos y a toda mi familia, por estar presentes, por acompañar cada proceso y por alegrarse de cada logro.

A Ismael, que desde el primer momento me motivó y me acompañó en el desafío de realizar el doctorado, incluso cuando eso implicaba distancia. Gracias por ser sostén, por todo el amor y la confianza.

A mis amigas de siempre —Antito, Judith, Anto, Mary, Ali, Mai y Flor— por esperarme con los brazos abiertos cada vez que volvía a Salta. Gracias por la amistad intacta a pesar del tiempo y la distancia.

A mis compañeros y compañeras becarios, por todos los momentos compartidos y los viajes a congresos. En especial, a Delfina. A las chicas de cerámica, que hicieron mi paso por Santa Fe mas agradable. También a los colegas que conocí en la docencia, con quienes crecí y aprendí.

Finalmente a cada uno los jurados, por su tiempo y sugerencias. A CONICET, por otorgarme la beca y brindarme los recursos necesarios para poder llevar adelante mi doctorado.

Índice general

Resumen

Este trabajo estudia una nueva familia de operadores asociados al operador de Schrödinger generalizado

$$\mathcal{L}_\mu = -\Delta + \mu,$$

donde μ es una medida de Radón no negativa en $\mathbb{R}^d$, con $d \geq 3$, que satisface ciertas condiciones de control sobre bolas. Entre los operadores considerados se destacan la transformada de Riesz y su adjunta asociadas a $\mathcal{L}_\mu$:

$$\mathcal{R}_\mu = \nabla \mathcal{L}_\mu^{-1/2} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_\mu^* = \mathcal{L}_\mu^{-1/2} \nabla.$$

Estos operadores se enmarcan en la teoría de operadores integrales singulares cuyos núcleos presentan decaimiento exponencial asociado a una función de radio crítico ρ. En este contexto, se obtienen resultados de acotación en espacios de Lebesgue pesados $L^p(w)$, para $1 < p < \infty$, mediante un teorema de extrapolación desde $p = \infty$, y desigualdades débiles para $p = 1$ a través del estudio de operadores adjuntos Se introducen y analizan clases de pesos adaptadas al decaimiento exponencial de los núcleos, estableciendo su relación con operadores maximales asociados y comparándolas con las clases clásicas de comportamiento polinomial, probando que las contienen estrictamente. Para los espacios de suavidad, se definen los espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ y se establece un criterio de tipo $T1$ que reduce la verificación de acotación a una condición sobre el operador aplicado a $f \equiv 1$. Finalmente, se clasifica una amplia gama de operadores estudiados en la literatura para $\mathcal{L}_V$ y $\mathcal{L}_\mu$ —incluyendo la transformada de Riesz y su adjunta, el maximal del semigrupo del calor $e^{-t\mathcal{L}_\mu}$, los operadores de Poisson generalizados $\mathcal{P}_t^\sigma$, la función g de Littlewood–Paley y los operadores $T_\gamma = \mathcal{L}_V^{-\gamma} V^\gamma$— deduciendo su continuidad en $L^p(w)$ y en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$. En el caso fraccionario se estudian los potenciales de Riesz y operadores $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma} \nabla$ con $1/2 < \gamma \leq 1$, obteniéndose resultados de acotación análogos al caso singular.

Este trabajo tiene por motivación el estudio de una nueva familia de operadores asociados al operador de Schrödinger generalizado

$$\mathcal{L}_\mu = -\Delta + \mu,$$

donde μ es una medida de Radón no negativa en $\mathbb{R}^d$, con $d \geq 3$, que satisface ciertas propiedades de control sobre bolas.

Estas familias incluyen varios operadores ampliamente estudiados en la literatura matemática, entre los que se destacan la transformada de Riesz y su adjunta asociada al operador $\mathcal{L}_\mu$, esto es,

$$\mathcal{R}_\mu = \nabla \mathcal{L}_\mu^{-1/2} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_\mu^* = \mathcal{L}_\mu^{-1/2} \nabla.$$

En el caso particular en que la medida μ sea absolutamente continua, es decir que satisfaga que $d\mu(x) = V(x)dx$, con V una función no negativa, no idénticamente nula, se recuperan las transformadas de Riesz asociadas al operador de Schrödinger con potencial $V \in RH_q$ dado por $\mathcal{L}_V = -\Delta + V$.

Encuadramos estos operadores en un contexto general de operadores integrales singulares con núcleos que presentan un decaimiento exponencial asociado a una función de radio crítico. En este marco, nos enfocamos en obtener resultados de acotación en espacios de Lebesgue pesados $L^p(w)$, para $1 < p < \infty$, a partir de un teorema de extrapolación desde el extremo $p = \infty$. El caso $p = 1$ se aborda a través de desigualdades débiles para operadores adjuntos de aquellos pertenecientes a esta familia. Por otro lado, se dan estimaciones en espacios BMO pesados apropiados mediante un teorema de tipo $T1$.

Comenzamos estudiando en detalle las clases de pesos adaptadas al comportamiento exponencial de los núcleos de la familia de operadores definida, estableciendo la relación entre dichas clases y los operadores maximales asociados con decaimiento exponencial. Este comportamiento resulta fundamental, al igual que los parámetros involucrados, ya que será de gran importancia cuando se pruebe la acotación en L^p con pesos para $1 < p < \infty$. Se comparan además estas clases de pesos con las conocidas previamente, donde el comportamiento es polinomial, probando que incluyen a las anteriores en sentido estricto.

Con respecto a los espacios de suavidad, se definen primero los espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$, donde ρ es una función de radio crítico y α es el orden de regularidad; para luego obtener un resultado de acotación para la familia de operadores objeto de estudio mediante un criterio de tipo $T1$. La principal ventaja radica en que la verificación de la acotación se reduce a comprobar una condición específica sobre el operador aplicado a la función $f = 1$, simplificando así el análisis de estos operadores.

Por otra parte, y en complemento con lo visto previamente, se estudian familias de operadores de tipo fraccionario que presentan núcleos con decaimiento exponencial. Varios de los resultados análogos al caso singular se prueban en este nuevo marco.

Finalmente se clasifica una amplia gama de operadores que han sido objeto de estudio por diversos autores en el contexto del operador de Schrödinger, tanto para $\mathcal{L}_V$ como para $\mathcal{L}_\mu$, permitiendo deducir resultados de continuidad en los espacios $L^p(w)$. Se comprueban además las hipótesis necesarias para que estos operadores sean acotados en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$. Entre los operadores singulares estudiados se incluyen la transformada de Riesz de primer orden y su adjunta, el operador maximal asociado al semigrupo de difusión del calor

$e^{-t\mathcal{L}_\mu}$, operadores de Poisson generalizados $\mathcal{P}_t^\sigma$, la función g de Littlewood–Paley asociada al semigrupo del calor y al semigrupo de Poisson, y operadores de la forma $T_\gamma = \mathcal{L}_V^{-\gamma} V^\gamma$ con $0 < \gamma < d/2$ asociados a un potencial V. En el caso de operadores de tipo fraccionarios estudiamos los potenciales de Riesz y operadores de la forma $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$, donde $1/2 < \gamma \leq 1$.

Introducción

El operador laplaciano está estrechamente vinculado con la teoría clásica de los pesos A_p de Muckenhoupt. Durante la década de 1970, varios trabajos fundamentales en el análisis armónico (ver [Muc72], [HMW73], [CF74]) establecieron que la mayoría de los operadores asociados al operador laplaciano, entre los que se destacan la transformada de Riesz

$$\mathcal{R}_0 f := \nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f,$$

y el operador maximal del calor

$$T_0^* f := \sup_{t>0} |e^{-t\Delta} f|,$$

son acotados en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$ si y sólo si $w \in A_p$. Estos resultados marcaron el inicio de una profunda relación entre los pesos de Muckenhoupt y la teoría de operadores singulares clásicos.

En las últimas décadas, el análisis armónico asociado a otros operadores diferenciales ha cobrado creciente interés ya que introduce nuevos desafíos y direcciones de investigación. Es natural preguntarse lo siguiente:

Si reemplazamos el laplaciano por otro operador diferencial de segundo orden, ¿es posible construir una clase de pesos de tipo Muckenhoupt adaptada al nuevo operador diferencial subyacente? Además, ¿cuándo esta clase puede caracterizarse en términos de la acotación de los operadores asociados, tales como la transformada de Riesz o los operadores maximales del calor o de Poisson?

Uno de los operadores diferenciales más relevantes desde el punto de vista tanto físico como matemático es el *operador de Schrödinger* con potencial no negativo y localmente integrable V, definido por

$$\mathcal{L}_V := -\Delta + V.$$

La transformada de Riesz y el operador maximal del calor asociados a $\mathcal{L}_V$ se definen, respectivamente, como

$$\mathcal{R}_V f := \nabla \mathcal{L}_V^{-\frac{1}{2}} f \qquad \text{y} \qquad T_V^* f := \sup_{t>0} |e^{-t\mathcal{L}_V} f|.$$

Dado que $\mathcal{L}_V$ puede verse como una perturbación del operador laplaciano, Z. Shen en [She95] introdujo la función de *radio crítico* ρ_V asociada al potencial V. Dicha función describe una escala local en la cual el operador $\mathcal{L}_V$ se comporta de manera análoga al operador laplaciano, y resulta esencial para comprender las propiedades de los operadores asociados a $\mathcal{L}_V$. Este enfoque permite descomponer el análisis en dos regiones: una *región local*, donde el operador presenta un comportamiento similar al caso clásico de $-\Delta$, y una *región global*, donde el núcleo de los operadores asociados exhibe un decaimiento más rápido que el del caso clásico.

Siguiendo esta idea, Bongioanni, Harboure y Salinas ([BHS11]) introdujeron una nueva clase de pesos adaptada al operador $\mathcal{L}_V$, denotada por $A_p^{V,\infty}$, con $1 \leq p < \infty$. Esta clase se comporta localmente como la clase A_p de Muckenhoupt, pero incorpora globalmente un factor de decaimiento que refleja el comportamiento polinomial de la solución fundamental de $\mathcal{L}_V$, mediante ρ_V. En dicho trabajo, los autores demostraron que los operadores $\mathcal{R}_V$ y T_V^* son acotados en $L^p(w)$ siempre que $w \in A_p^{V,\infty}$ con $1 < p < \infty$ y cuando V satisface una condición de reverse Hölder.

Sin embargo, esta clase de pesos no es, en general, necesaria para la acotación de dichos operadores. Bailey demostró en [Bai18] que, en el caso particular del oscilador armónico, esto es, cuando $V(x) = |x|^2$, existen pesos con crecimiento exponencial fuera de $A_p^{V,\infty}$ para los cuales la acotación aún se mantiene. Posteriormente, el mismo autor propuso en [Bai21] una nueva clase de pesos estrictamente más amplia que $A_p^{V,\infty}$, que permite incluir pesos con comportamiento exponencial.

En el último tiempo ha surgido un interés creciente por extender este marco teórico a contextos más generales, donde el potencial es reemplazado por una medida de Radón no negativa μ. En este contexto, se considera el operador

$$\mathcal{L}_\mu = -\Delta + \mu,$$

que incluye como caso particular al operador clásico $\mathcal{L}_V$ cuando $d\mu(x) = V(x)\,dx$. Bajo ciertas condiciones de crecimiento y duplicación sobre μ, que permiten recuperar las condiciones reverse Hölder del caso de potencial, Shen desarrolló en [She99] una teoría general que preserva la estructura esencial del caso $d\mu(x) = V(x)dx$.

Este tipo de generalización nos da la posibilidad de estudiar operadores integrales asociados a $\mathcal{L}_\mu$ cuyos núcleos no sólo satisfacen condiciones de tamaño y suavidad de tipo Hörmander, sino que además presentan un decaimiento exponencial asociado a una función de radio crítico denotada por ρ_μ.

En este contexto, el decaimiento exponencial de los núcleos y la introducción de las clases de pesos adaptadas de Bailey constituyeron el punto de partida para el desarrollo de esta tesis. En vista de ello, el objetivo central consiste en establecer un esquema unificado para el estudio de la acotación de familias de operadores asociados a $\mathcal{L}_\mu$, cuyos núcleos presentan decaimiento exponencial, en espacios $L^p(w)$ con pesos adaptados a dicho comportamiento. Este enfoque no sólo recupera como casos particulares los resultados clásicos correspondientes al operador laplaciano y al operador de Schrödinger con potencial V (ver [BCH13a, BCH13b]), sino que amplía el rango de pesos y de operadores para los cuales puede obtenerse acotación en espacios funcionales naturales. La estrategia utilizada se basa en un teorema de extrapolación formulado para una clase general de operadores asociados a una función de radio crítico ρ, que permite trasladar acotaciones en el extremo, del tipo L^∞–BMO a todo el rango $1 < p < \infty$ con pesos.

El desarrollo de esta teoría general sugiere la posibilidad de formular un teorema tipo $T1$ para operadores de tipo Schrödinger–Calderón–Zygmund con decaimiento exponencial. Esta idea constituye uno de los ejes principales de este trabajo, ya que extiende los criterios de tipo $T1$ de [MSTZ14], donde se obtienen resultados sin pesos, y de [BHQ19], donde se consideran pesos $A_\rho^{V,\infty}$, al nuevo marco en el que los operadores exhiben un decaimiento exponencial, y los pesos pertenecen a las clases introducidas en [Bai21].

La importancia de este nuevo criterio radica en que permite caracterizar la acotación en espacios de tipo BMO asociados a una función de radio crítico ρ exclusivamente en términos de la función $T1$ y del comportamiento del núcleo de T, unificando así el tratamiento de diversas familias de operadores que aparecen en el contexto de $\mathcal{L}_\mu$, tales como la transformada de Riesz generalizada $\mathcal{R}_\mu = \nabla\mathcal{L}_\mu^{-1/2}$, su adjunta y otros operadores asociados al semigrupo correspondiente. Los resultados desarrollados permiten describir con precisión la interacción entre el comportamiento más preciso de los núcleos asociados a $\mathcal{L}_\mu$, la estructura geométrica inducida por la función de radio crítico y las clases de pesos que describen la acotación de los operadores en espacios L^p y BMO. De este modo, la tesis contribuye a una comprensión más amplia del papel que desempeña el decaimiento exponencial en la teoría de operadores integrales singulares asociados a operadores diferenciales no clásicos.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se introducen las definiciones y resultados preliminares que establecen el marco teórico en el cual se va a trabajar. En particular, se describen los espacios de funciones utilizados, las nociones de solución débil y de solución fundamental asociadas al operador $\mathcal{L}_\mu$, la definición de función radio crítico, así como también algunas propiedades de la misma, y clases de pesos asociados a ella.

En el Capítulo 2 se estudian detalladamente las clases de pesos adaptadas al comportamiento exponencial de los operadores objeto de estudio, y se establece su relación con ciertos operadores maximales, completando la caracterización de los pesos iniciada en [Bai21].

En el Capítulo 3 se definen nuevas familias de operadores con núcleos de tamaño exponencial y se aborda su acotación tanto en espacios $L^p(w)$ como en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$, extendiendo los resultados clásicos de Calderón–Zygmund a este nuevo marco. En el caso

$L^p(w)$ los parámetros involucrados en las definiciones de los operadores maximales y de las clases de pesos no nos permiten aplicar los resultados de Bongionanni, Cabral y Harboure ([BCH13a]) para el caso $1 < p < \infty$, por lo que fue necesario reformular un teorema de extrapolación. Esto permite trasladar acotaciones en el extremo, del tipo L^∞–BMO_ρ con esta nueva clase de pesos. Se probaron además, mediante un argumento de dualidad, estimaciones para los operadores adjuntos a aquellos pertenecientes a la familia definida. Para $p = 1$, probamos resultados de tipo débil $(1,1)$ para dichos operadores adjuntos. Asimismo, para el caso de acotación en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ se logra demostrar un teorema $T1$ adaptado a estas nuevas familias generales de operadores con decaimiento exponencial. Se obtienen además desigualdades de tipo Coifman con pesos, las cuales permiten controlar a un operador perteneciente a la familia estudiada mediante un operador maximal adecuado. Los resultados obtenidos en este capítulo tienen su contraparte fraccionaria, la cual se desarrolla en el Capítulo 4.

Por último, una amplia variedad de operadores asociados a $\mathcal{L}_\mu$ y $\mathcal{L}_V$ son estudiados en el Capítulo 5. En cada caso se prueba que pertenecen a la nueva familia de operadores que se estudia en esta tesis, cumpliendo además las hipótesis necesarias para obtener su acotación en espacios $L^p(w)$ y $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$. Más precisamente, entre los operadores integrales singulares se incluyen la transformada de Riesz de primer orden y su adjunta, multiplicadores de tipo transformada de Laplace, el operador maximal asociado al semigrupo de difusión del calor $e^{-t\mathcal{L}_\mu}$ así como el operador maximal asociado a los operadores de Poisson generalizados $\mathcal{P}_t^\sigma$. También se estudia la función g de Littlewood–Paley asociada al semigrupo del calor y al semigrupo de Poisson, y operadores de la forma $T_\gamma = \mathcal{L}_V^{-\gamma} V^\gamma$ asociados a un potencial V con $0 < \gamma < d/2$. En el caso de operadores de tipo fraccionario, se analizan los potenciales de Riesz y operadores de la forma $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$, con $1/2 < \gamma \leq 1$.

Capítulo 1

Preliminares

El primer capítulo de esta tesis está dedicado a presentar el marco teórico en el que se obtienen los resultados presentados en los capítulos posteriores.

En la Sección 1.1 se establecen nociones básicas de espacios de funciones. En particular, se recuerdan las definiciones y propiedades fundamentales de los espacios de Lebesgue, que servirán como herramienta a lo largo de todo el trabajo. También se definen los espacios de Sobolev y algunas de sus variantes, que resultan útiles para el estudio de soluciones débiles del operador de Schrödinger generalizado. Los resultados y definiciones de esta sección son clásicos y pueden encontrarse en libros conocidos de análisis real (véase, por ejemplo, [Duo01], [Eva10], [Fol99] o [Gra04]).

En las Secciones 1.2 y 1.3, siguiendo el enfoque de Shen ([She99]), se introducen la función de radio crítico y la distancia de Agmon, respectivamente. Al final de esta sección se recopilan algunas propiedades esenciales de la función de radio crítico ρ, las cuales serán utilizadas de manera sistemática en el resto de la tesis.

En la Sección 1.4 se definen las clases de pesos asociadas a una función de radio crítico, que generalizan las clases clásicas de Muckenhoupt. Asimismo, se definen operadores maximales adaptados a los pesos mencionados y se enuncian resultados de acotación en espacios de Lebesgue con pesos.

La Sección 1.5 está dedicada a presentar los espacios BMO_ρ asociados a una función de radio crítico, junto con algunos resultados fundamentales de dichos espacios.

En la Sección 1.6 se define el operador de Schrödinger generalizado $\mathcal{L}_\mu$ y se presentan ciertas propiedades fundamentales que debe satisfacer la medida μ para que la teoría esté bien planteada. En dicha sección se establecen resultados análogos a los obtenidos en el caso particular en que $d\mu(x) = V(x)dx$ con $V \geq 0$.

Por último, la Sección 1.7 se dedica al estudio de las soluciones débiles del operador de Schrödinger generalizado y de la solución fundamental asociada. En particular, se presentan estimaciones que resultan clave para el análisis de operadores integrales y maximales relacionados con dicho operador.

Antes de continuar, fijamos algunas notaciones generales que se utilizarán a lo largo de toda la tesis.

Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible, denotamos por $|E|$ a la medida de Lebesgue de E y χ_E a la función característica de E. Por otra parte, denotamos por $B(x,r)$ a la bola euclidea abierta de centro $x \in \mathbb{R}^d$ y radio $r > 0$. Si c es una constante positiva, escribiremos $cB(x,r) = B(x,cr)$.

A lo largo de este trabajo, la letra C denotará una constante positiva que puede variar de una línea a otra. Escribiremos $a \lesssim b$ para indicar que existe una constante positiva C tal que $a \leq Cb$, y $a \gtrsim b$ tendrá el significado análogo. Cuando ambas desigualdades se satisfacen, escribiremos simplemente $a \sim b$.

Para una función f localmente integrable, (es decir, integrable sobre un conjunto de medida finita) y un conjunto medible E de medida positiva y finita, utilizaremos las siguientes notaciones equivalentes para el promedio de f sobre E:

$$\frac{1}{|E|}\int_E f(x)dx = \fint_E f(x)dx = f_E.$$

Por un **peso** w entenderemos una función no negativa y localmente integrable en $\mathbb{R}^d$. Dado un peso w y un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}^d$, la siguiente notación se utilizará con frecuencia:

$$w(E) := \int_E w(x)dx.$$

1.1. Algunos espacios de funciones

Sea $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\mathbb{R}^d)$ al espacio de todas las funciones medibles $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tales que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Para $p = \infty$, se define $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ como el espacio de todas las funciones medibles $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ para las cuales

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|,$$

es finita.

En algunas ocasiones abreviaremos $L^p(\mathbb{R}^d)$ por L^p, y la norma $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ por $\|f\|_p$.

Una herramienta fundamental en el estudio de estos espacios es la siguiente desigualdad.

Proposición 1.1 (**Desigualdad de Hölder**). *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea p' su exponente conjugado, definido por*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

con la convención $p' = 1$ cuando $p = \infty$. Si $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

De acuerdo con la definición de exponentes conjugados dada en la Proposición 1.1, es bien conocido que, para todo $1 < p < \infty$, el espacio dual de L^p puede identificarse con $L^{p'}$.

Definimos el espacio de Lebesgue local, $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, como el conjunto de todas las funciones medibles $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tales que $f \in L^p(E)$ para todo conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida finita.

Introducimos también los espacios de Lebesgue con pesos. Sea $1 \leq p < \infty$ y sea w un peso. Definimos el espacio $L^p(w)$ como el conjunto de todas las funciones medibles $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tales que $fw^{1/p} \in L^p(\mathbb{R}^d)$. En este caso, la norma en $L^p(w)$ está dada por

$$\|f\|_{L^p(w)} := \|fw^{1/p}\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, decimos que $f \in L^\infty(w)$ si y sólo si $fw \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, y escribimos

$$\|f\|_{L^\infty(w)} = \|fw\|_\infty,$$

donde esta cantidad denota, como es habitual, el supremo esencial de fw en $\mathbb{R}^d$.

Dados $1 \leq p, q \leq \infty$, y un peso w diremos que un operador T es acotado de $L^p(w)$ en $L^q(w)$ si existe una constante C tal que

$$\|Tf\|_{L^q(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)},$$

para toda $f \in L^p(w)$. En la literatura se suele referir a este tipo de estimaciones como **de tipo fuerte** (p, q) **con respecto a** w. Si $p = q$ diremos simplemente que T es acotado en $L^p(w)$.

Diremos que un operador es **de tipo débil** (p, q) **con respecto a** w si existe una constante C tal que, para todo $\lambda > 0$,

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |Tf(x)| > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^q} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{q/p} = \frac{C}{\lambda^q} \|f\|^q_{L^p(w)} \tag{1.1}$$

La desigualdad anterior equivale a decir que el operador T define una aplicación acotada desde $L^p(w)$ en el espacio de Lebesgue débil $L^{q,\infty}(w)$. En efecto, para $1 \leq q < \infty$ y un peso w, el espacio $L^{q,\infty}(w)$ está formado por todas las funciones medibles $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tales que

$$\|f\|_{L^{q,\infty}(w)} := \sup_{\lambda > 0} \lambda w\big(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \lambda\}\big)^{1/q} < \infty.$$

Reescribiendo (1.1), T será de tipo débil (p,q) con respecto a w si

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}.$$

A continuación recordamos dos desigualdades clásicas, la primera de ellas enunciada de manera general como en [dG81, Theorem 3.3.1].

Proposición 1.2 (**Desigualdad de Kolmogorov**). *Sea S un operador sublineal de tipo débil (p,q), para $1 \leq p, q \leq \infty$. Entonces existe una constante C tal que para todo conjunto E medible, con $0 < |E| < \infty$, y para todo $0 < \gamma < q$,*

$$\int_E |Sf(x)|^\gamma dx \leq C|E|^{1-\frac{\gamma}{q}}\|f\|_p^\gamma, \tag{1.2}$$

siempre que $f \in L^p$.

Proposición 1.3 (**Desigualdad de Chebyshev**). *Sea w un peso y $f \in L^p(w)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces, para todo $\lambda > 0$,*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{\|f\|_{L^p(w)}^p}{\lambda^p}. \tag{1.3}$$

Un marco fundamental en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales lo constituyen los espacios de Sobolev ya que permiten considerar soluciones que no poseen derivadas clásicas en todo punto, pero sí derivadas en el sentido débil. Estos espacios serán necesarios para describir las soluciones asociadas al operador $\mathcal{L}_\mu$, como se verá en la Sección 1.7. A continuación se introducen las definiciones correspondientes.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto. Para $1 \leq p \leq \infty$ y un entero $k \in \mathbb{N}_0$, el **espacio de Sobolev** $W^{k,p}(\Omega)$ se define como el conjunto de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ cuyas derivadas débiles $D^\alpha u$, de orden a lo sumo k, también pertenecen a $L^p(\Omega)$. Es decir,

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ con } |\alpha| \leq k\right\},$$

donde $D^\alpha u$ denota la derivada débil de orden α de u y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$.

Este espacio se dota de la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty, \end{cases}$$

la cual lo convierte en un espacio de Banach. Para una explicación detallada sobre la noción de derivada débil y las propiedades básicas de los espacios de Sobolev, remitimos al lector a [Eva10].

Denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$ al espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω, y por $W_0^{k,p}(\Omega)$ a la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en la norma de $W^{k,p}(\Omega)$. Además, la versión local del espacio de Sobolev se define como

$$W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega) : D^\alpha u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ con } |\alpha| \leq k\right\}.$$

1.2. Función de radio crítico

Aunque la noción de función de radio crítico fue originalmente asociada a un potencial V debido a su estrecha relación con el comportamiento de operadores asociados con el operador de Schrödinger (véase, por ejemplo, [She95, Zho93]), en este trabajo adoptamos una definición más general que aísla una propiedad fundamental de dicha noción y permite formularla de manera independiente del potencial. Este enfoque no es nuevo y ha sido desarrollado en los trabajos de Bongioanni, Cabral y Harboure (véase [BCH13a, BCH13b]).

Comenzamos entonces introduciendo el concepto de función de radio crítico, entendido como toda función que satisface la siguiente condición de comparabilidad puntual.

Definición 1.4. Una función $\rho : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ es una **función de radio crítico** si existen constantes $k_0, C_0 \geq 1$ tales que

$$C_0^{-1}\rho(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-k_0} \leq \rho(y) \leq C_0\rho(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} \tag{1.4}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Observación 1.5. De la definición anterior se tiene que, si $|x-y| \leq c\rho(x)$ para alguna constante c, entonces $\rho(x) \sim \rho(y)$. Más aún,

$$C_0^{-1}(1+c)^{-k_0}\rho(x) \leq \rho(y) \leq C_0(1+c)^{\frac{k_0}{k_0+1}}\rho(x). \tag{1.5}$$

Una bola de la forma $B(x, \rho(x))$ con $x \in \mathbb{R}^d$, se la denominará **crítica**, mientras que una bola $B(x, r)$ con $r \leq \rho(x)$ se llamará **sub-crítica**. Aquellas bolas con radio $r \geq \rho(x)$ las denominaremos **super-críticas**. Denotaremos con $\mathcal{B}_\rho$ a la familia de bolas sub-críticas, es decir,

$$\mathcal{B}_\rho = \left\{B(x,r) : x \in \mathbb{R}^d, r \leq \rho(x)\right\}.$$

La clasificación anterior permite precisar qué se entiende por comportamiento local y global en el contexto de operadores asociados al operador de Schrödinger, en función de la relación entre el radio de las bolas y el radio crítico. En general, el tratamiento será local cuando trabajemos sobre bolas en $\mathcal{B}_\rho$, y global, fuera de ellas.

Por otro lado, resulta particularmente útil disponer de cubrimientos por bolas críticas en el contexto de operadores de tipo Schrödinger. Un resultado en esa dirección fue obtenido en [DZ99] que es el que establecemos a continuación. Nótese que, si bien los autores lo hacen cuando ρ proviene de una función potencial V asociada al operador $\mathcal{L}_V = -\Delta + V$, la herramienta principal en la demostración es (1.4), que responde a la definición general de función de radio crítico.

Proposición 1.6 ([DZ99, Lemma 2.3])**.** *Existe una sucesión de puntos* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^d$ *tal que la familia de bolas críticas* $\{B(x_j, \rho(x_j))\}_{j\in\mathbb{N}}$ *satisface las siguientes condiciones:*

i) $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B(x_j, \rho(x_j))$*;*

ii) *existen constantes positivas* C_1, N_1 *tales que, para todo* $\sigma \geq 1$*,*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{B(x_j,\sigma\rho(x_j))} \;\leq\; C_1\sigma^{N_1}.$$

1.3. Distancia de Agmon

Muchos fenómenos relacionados con el operador de Schrödinger $\mathcal{L}_V = -\Delta + V$ pueden describirse de manera más precisa en términos de la distancia de Agmon (véase, por ejemplo, [Agm82] y [Hel88]). Esta distancia, aunque localmente comparable con la distancia euclídea, se comporta como una distancia Riemanniana. Se define mediante una deformación de la métrica euclídea, determinada por una forma cuadrática que involucra al potencial V.

En un contexto más general, la definición de **distancia de Agmon** asociada a cualquier función de radio crítico ρ, es la siguiente:

$$d_\rho(x, y) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \rho(\gamma(t))^{-1}|\gamma'(t)|dt, \tag{1.6}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las funciones absolutamente continuas $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ con $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

El siguiente lema enuncia la antes mencionada comparación a escala local de la distancia de Agmon y la distancia euclídea.

Lema 1.7 ([Bai21, Lemma 2.2])**.** *Sea* ρ *una función de radio crítico. Si* $|x - y| \leq 2\rho(x)$*, existe una constante* $D_0 > 1$ *tal que*

$$D_0{}^{-1}\frac{|x-y|}{\rho(x)} \leq d_\rho(x, y) \leq D_0\frac{|x-y|}{\rho(x)}.$$

La distancia Agmon d_ρ es comparable también con la cantidad $1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}$, tal como lo establece el siguiente lema.

Lema 1.8 ([Bai21, Lemma 2.3])**.** *Sea* ρ *una función de radio crítico. Entonces*

$$d_\rho(x, y) \leq C_0\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{k_0+1},$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$*.*

Más aún, cuando $|x - y| \geq \rho(x)$*, existe* $D_1 > 1$ *tal que*

$$d_\rho(x, y) \geq D_1{}^{-1}\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}} \tag{1.7}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$*.*

El siguiente lema técnico sobre la distancia de Agmon será una herramienta clave en el desarrollo posterior de ciertos resultados. Permite hacer uso de una desigualdad como (1.7) cuando no se conoce la relación entre $|x-y|$ y $\rho(x)$ y tener un control para funciones exponenciales decrecientes.

Lema 1.9. *Sea ρ una función de radio crítico. Entonces, existe una constante positiva C, que depende de las constantes D_0, D_1 y k_0, tal que*

$$d_\rho(x,y) \geq D_1^{-1}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}} + D_0^{-1}\left(1+\frac{\rho(x)}{|x-y|}\right)^{-1} - C \geq 0, \tag{1.8}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$.

En consecuencia, existe una constante C tal que

$$e^{-d_\rho(x,y)} \leq Ce^{-\frac{1}{D_1}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}} \tag{1.9}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. Consideremos dos casos. Si $|x-y| \leq 2\rho(x)$, por el Lema 1.7 tenemos que

$$d_\rho(x,y) \geq D_0^{-1}\frac{|x-y|}{\rho(x)}.$$

Puesto que

$$\frac{|x-y|}{\rho(x)} \geq \frac{|x-y|}{\rho(x)+|x-y|} = \left(1+\frac{\rho(x)}{|x-y|}\right)^{-1},$$

obtenemos, para $|x-y| \leq 2\rho(x)$,

$$d_\rho(x,y) \geq D_0^{-1}\left(1+\frac{\rho(x)}{|x-y|}\right)^{-1}.$$

Como $1+\frac{|x-y|}{\rho(x)} \leq 3$, podemos tomar $C \geq D_1^{-1}3^{\frac{1}{k_0+1}}$ obteniendo la desigualdad deseada en este caso.

Por otro lado, si $|x-y| > 2\rho(x)$ podemos aplicar el Lema 1.8 y obtener

$$d_\rho(x,y) \geq D_1^{-1}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}.$$

Trivialmente se cumple que $1+\frac{\rho(x)}{|x-y|} \geq 1$. Por lo tanto, tomando $C \geq D_0^{-1}$ se tiene (1.8) para $|x-y| > 2\rho(x)$. Finalmente, escogiendo $C = \max\left\{D_1^{-1}3^{\frac{1}{k_0+1}}, D_0^{-1}\right\}$, se concluye la demostración de (1.8).

La desigualdad (1.9) se sigue de la anterior, pues

$$e^{-d_\rho(x,y)} \leq e^{-\frac{1}{D_1}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}} e^{-\frac{1}{D_0}\left(1+\frac{\rho(x)}{|x-y|}\right)^{-1}} e^{C} \leq Ce^{-\frac{1}{D_1}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}},$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$. $\square$

Dado que a toda función de radio crítico ρ se le asocia una distancia, es natural considerar bolas con esta nueva métrica. Se definen las bolas $B_\rho(x,r)$ como las bolas abiertas en la métrica d_ρ, centradas en $x \in \mathbb{R}^d$ y de radio $r > 0$, esto es,

$$B_\rho(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^d : d_\rho(x,y) < r\}.$$

Para comprender el comportamiento de estas bolas, se cuenta con resultados de comparación entre las bolas definidas con respecto a la métrica euclídea y las bolas B_ρ. Dichas relaciones permiten transferir propiedades geométricas y analíticas entre ambos tipos de bolas, y resultan fundamentales en el estudio de operadores adaptados a una función de radio crítico.

Para ello, definimos la constante

$$\beta := \text{máx}\{C_0, D_0, D_1, 2\}, \tag{1.10}$$

y remitimos al artículo de Bailey ([Bai21]) para las demostraciones de los siguientes lemas técnicos.

Lema 1.10 ([Bai21, Lemma 2.4]). *Sea ρ una función de radio crítico. Sean $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces, si $r \leq 2$,*

$$B\left(x, r\rho(x)\right) \subseteq B_\rho\left(x, \beta r\right).$$

Mientras que, si $r > 2$, entonces

$$B\left(x, r\rho(x)\right) \subseteq B_\rho\Big(x, \beta\left(1+r\right)^{k_0+1}\Big).$$

Lema 1.11 ([Bai21, Lemma 2.5]). *Sea ρ una función de radio crítico. Existe una constante $A_0 > 1$, que depende de ρ sólo a través de C_0 y k_0, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r \leq \beta$ se cumple*

$$B_\rho(x,r) \subseteq B\left(x, A_0 r\rho(x)\right).$$

En cambio, para $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > \beta$ se tiene

$$B_\rho(x,r) \subseteq B\left(x, \left((r\beta)^{k_0+1} - 1\right)\rho(x)\right).$$

Las relaciones anteriores resultarán de utilidad para caracterizar la clase de pesos adaptados $S^\rho_{p,c}$ que se definen en el Capítulo 2 mediante un operador maximal apropiado (Sección 2.3).

1.4. Clases de pesos asociadas a una función de radio crítico

En [BHS11], los autores introducen la definición de las clases de pesos A^ρ_p, inspiradas en los pesos clásicos de Muckenhoupt. Dichas clases resultan ser más generales y se adaptan naturalmente al contexto del operador de Schrödinger $\mathcal{L}_V$.

Se definen de la siguiente manera. Para $1 < p < \infty$, se denotan por $A_p^\rho = \bigcup_{\theta\geq 0} A_p^{\rho,\theta}$, donde $w \in A_p^{\rho,\theta}$ significa que existe una constante C tal que

$$\left(\int_B w\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq C|B| \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta,$$

para toda bola $B = B(x, r)$.

De manera similar al caso clásico, cuando $p = 1$, se denotará por $A_1^\rho = \bigcup_{\theta\geq 0} A_1^{\rho,\theta}$, donde $A_1^{\rho,\theta}$ es la clase de pesos w tales que existe una constante C de modo que

$$\int_B w \leq C|B| \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta \inf_B w,$$

para toda bola $B = B(x, r)$.

Es habitual decir que $w \in A_\infty^\rho$ para considerar a un peso en cualquiera de las clases anteriores, es decir,

$$A_\infty^\rho = \bigcup_{p\geq 1} A_p^\rho.$$

Estas clases de pesos satisfacen propiedades análogas a las que satisfacen los pesos A_p de Muckenhoupt. Una referencia donde pueden encontrarse de manera detallada es [BCH13a].

Para esta clase de pesos, en [BCH19] se definen las siguientes **clases de duplicación** que se verifican naturalmente. Para $\kappa \geq 0$ se define $D_\kappa^\rho = \bigcup_{\theta\geq 1} D_\kappa^{\rho,\theta}$, donde $D_\kappa^{\rho,\theta}$ es la clase de pesos w para los cuales existe una constante C tal que

$$w(B(x, R)) \leq Cw(B(x, r)) \left(\frac{R}{r}\right)^{d\kappa} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)}\right)^\theta,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y todo $0 < r \leq R$.

También es posible definir las clases de pesos que satisfacen una **desigualdad de tipo reverse Hölder** adaptada a este contexto.

Dado $\eta > 1$, definimos $RH_\eta^\rho = \bigcup_{\theta\geq 0} RH_\eta^{\rho,\theta}$, donde $RH_\eta^{\rho,\theta}$ es la clase de pesos w que satisfacen

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^\eta\right)^{1/\eta} \leq C \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right) \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d, r > 0$, y cierta constante C, independiente de x y r.

Una relación entre las clases A_ρ^p y RH_η^ρ es la que se enuncia en el siguiente lema.

Lema 1.12 ([BHS11, Lemma 5])**.** *Si $w \in A_p^\rho$ para algún $1 < p < \infty$, entonces existen constantes positivas δ, η y C tales que*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right) \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\eta,$$

para toda bola $B = B(x, r)$ en $\mathbb{R}^d$. Es decir, $w \in RH_{1+\delta}^{\rho,\eta}$.

Con el fin de caracterizar las clases A_p^ρ introducimos a continuación operadores maximales adecuados a este contexto.

Definición 1.13. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Para cada $\theta \geq 0$, el operador maximal M_ρ^θ se define por

$$M_\rho^\theta f(x) = \sup_{B(x_0,r)\ni x} \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\theta} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

La importancia de este operador radica en el siguiente resultado de caracterización, que establece una equivalencia entre la pertenencia de un peso w a la clase A_p^ρ y la acotación del operador maximal M_ρ^θ en espacios $L^p(w)$.

Teorema 1.14 ([BCH13a, Proposition 3])**.** *Sea $1 < p < \infty$. Entonces, $w \in A_p^\rho$ si y sólo si existe $\theta \geq 0$ tal que el operador M_ρ^θ es acotado en $L^p(w)$.*

Es importante señalar que, para un valor fijo de θ, las clases de pesos que caracterizan la acotación de $M_\rho^\theta f$ no coinciden con las clases $A_p^{\rho,\theta}$. Esta diferencia es precisamente la que modifica el panorama de la acotación de operadores maximales en espacios con pesos pertenecientes a la clase $H_{p,c}^{\rho;m}$, que se definirá en el Capítulo 2.

Por otro lado, nótese que, si bien el operador maximal ha sido definido en su versión no centrada, también se puede considerar la versión centrada correspondiente. Ambas son equivalentes puntualmente, y a nivel de acotación en $L^p(w)$, y es esta última la que se utiliza en la demostración de la caracterización precedente.

Clase de pesos locales

Recordemos que, para una función de radio crítico ρ, denotamos por $\mathcal{B}_\rho$ a la familia de bolas $B(x,r)$ con $r \leq \rho(x)$, es decir, las bolas sub-críticas. Siguiendo las definiciones y propiedades de [BHS11] diremos que, para $1 < p < \infty$, un peso w pertenece a la clase $A_p^{\rho,\text{loc}}$ si existe una constante C tal que

$$\left(\int_B w\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq C|B|,$$

para toda bola $B \in \mathcal{B}_\rho$; y para $p = 1$ si

$$\int_B w \leq C|B| \inf_B w,$$

se cumple para toda $B \in \mathcal{B}_\rho$.

Denotaremos por $A^{\rho,\text{loc}} = \bigcup_{p\geq 1} A_p^{\rho,\text{loc}}$.

Observación 1.15. Es inmediato de las definiciones que, para todo $p \geq 1$ estas clases locales son, en principio, más grandes que las clases A_p^ρ. Más aún,

$$A_p \subsetneq A_p^\rho \subsetneq A_p^{\rho,\text{loc}}.$$

En efecto, si tomamos, por ejemplo, $\rho \equiv 1$ y $w(x) = 1+|x|^\gamma$, entonces, para $\gamma > d(p-1)$, el peso w pertenece a A_p^ρ, pero no a A_p. Además, considerando $\rho(x) = \min\left\{1, \frac{1}{|x|}\right\}$ y $\omega(x) = e^{|x|}$, se verifica que $\omega \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}} \setminus A_\rho^p$, lo que probaremos en el Capítulo 2 Proposición 2.4.

A continuación presentaremos una versión local de la maximal de Hardy-Littlewood, a la que denotaremos por M_ρ^{loc}, que está relacionada de manera natural con los pesos $A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$.

Definición 1.16. Sea ρ una función de radio crítico y una función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Definimos el operador maximal ρ-local del siguiente modo

$$M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}_\rho} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy.$$

Observación 1.17. Es fácil ver que $M_\rho^{\mathrm{loc}} f(x) \leq C_\theta M_\rho^\theta f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, todo $\theta \geq 0$ y toda $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

El siguiente teorema relaciona de forma unívoca la maximal M_ρ^{loc} y los pesos $A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$.

Teorema 1.18 ([BHS11, Theorem 1 and Remark 1])**.** *Sea $1 < p < \infty$. Un peso w pertenece a $A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$ si y sólo si M_ρ^{loc} es acotada en $L^p(w)$. Además, si w pertenece a $A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$, el operador M_ρ^{loc} es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w.*

1.5. Espacios BMO asociados a una función de radio crítico

En [DGM+05] se introducen los **espacios BMO$_\rho$** de funciones de variación media acotada asociadas a una función de radio crítico. Más precisamente, se define BMO_ρ como el conjunto de funciones $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ para las cuales existe una constante C tal que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C, \qquad \text{para toda bola } B \subseteq \mathbb{R}^d \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq C, \qquad \text{para toda bola } B = B(x,r),\ r \geq \rho(x). \tag{1.12}$$

Puede definirse una norma en este espacio como el ínfimo sobre las constantes C que satisfacen (1.11) y (1.12), la cual denotamos por $\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho}$.

Notemos que la condición (1.11) coincide con la condición de oscilación media que caracteriza al espacio BMO clásico de John y Nirenberg ([Duo01]), mientras que la condición adicional (1.12) impone un control sobre los promedios en bolas grandes, es decir, en aquellas cuyo radio es mayor que el radio crítico. En consecuencia, el espacio BMO_ρ asociado a ρ resulta ser un subespacio propio de BMO.

Las estimaciones que obtendremos en la Sección 3.3 están dadas en espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ los cuales fueron introducidos en [BHS08] y son extensiones de BMO_ρ en dos direcciones: por un lado, incluyen el parámetro α que indica el grado de suavidad de la función f y, por otro lado, incluye un peso w que interviene tanto en la condición de tamaño como en la condición asociada a la oscilación. Este espacio se define de la siguiente manera: dada una función de radio crítico ρ y un peso w, el **espacio** $\mathbf{BMO}_\rho^\alpha(w)$, con $0 \leq \alpha < 1$, como el conjunto de las funciones f localmente integrables para las cuales existe una constante C tal que se verifica

$$\frac{1}{w(B)} \int_B |f - f_B| \leq C\, |B|^{\alpha/d}, \qquad \text{para toda bola } B \subseteq \mathbb{R}^d, \tag{1.13}$$

y

$$\frac{1}{w(B)} \int_B |f| \leq C\, |B|^{\alpha/d}, \qquad \text{para toda bola } B = B(x,r), r \geq \rho(x). \tag{1.14}$$

Del mismo modo que para BMO_ρ, la norma $\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}$ puede definirse como el ínfimo de las constantes C que satisfacen (1.13) y (1.14) al mismo tiempo. Observar, ademas que si $w \equiv 1$ y $\alpha = 0$, $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ coincide con BMO_ρ.

Nótese que si una función f satisface (1.14) para cierta bola B entonces también satisface (1.13) para la misma bola. Luego es suficiente pedir (1.13) para bolas $B(x,r)$ con $r < \rho(x)$.

A continuación daremos algunas propiedades de estos espacios que serán útiles más adelante. La primera nos indica que es suficiente verificar la condición (1.14) sobre bolas críticas cuando $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$.

Lema 1.19 ([BCH19, Proposition 3.2])**.** *Sea $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$ para algún $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Si*

$$A := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{w(B(x,\rho(x)))\rho(x)^\alpha} \int_{B(x,\rho(x))} |f| < \infty,$$

entonces existe una constante C tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d,\ r\geq\rho(x)} \frac{1}{w(B(x,r))r^\alpha} \int_{B(x,r)} |f| < CA.$$

El segundo resultado proporciona una condición suficiente para verificar que $f \in \mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ cuando se consideran pesos en $A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$.

Lema 1.20 ([BCH19, Lemma 4])**.** *Sea $1 \leq p < \infty$. Sea $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$, $1 < q \leq p'$, $0 \leq \alpha < 1$ y $f \in \mathrm{BMO}_p^\alpha(w)$. Entonces, existe una constante C tal que*

$$\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{d}}} \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |f|^q\, w^{1-q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)},$$

para toda bola $B = B(x,r)$ *con* $r \geq \rho(x)$, *y*

$$\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{d}}}\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f - f_B|^q \, w^{1-q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)},$$

para toda bola $B = B(x,r)$.

1.6. Operador de Schrödinger generalizado $\mathcal{L}_\mu$ asociado a una medida de Radón

Sea $d \geq 3$ la dimensión del espacio $\mathbb{R}^d$. Consideremos el operador de Schrödinger clásico

$$\mathcal{L}_V := -\Delta + V,$$

donde $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ es una función no negativa, comúnmente llamada potencial, que pertenece a la clase de reverse Hölder RH_q para algún $q > d/2$. Es decir, existe una constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(y)^q \, dy\right)^{1/q} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B V(y)\, dy,$$

para toda bola $B = B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^d$.

El estudio de este tipo de operadores fue y es un tema de interés en el análisis armónico asociado a operadores diferenciales distintos del operador laplaciano clásico. Un precursor en el desarrollo de esta teoría fue Shen ([She95]), quien obtuvo resultados fundamentales de acotación en espacios L^p para operadores asociados a $\mathcal{L}_V$ bajo la hipótesis $V \in RH_q$, con $q > d/2$.

Posteriormente, diversos autores ampliaron y profundizaron este enfoque, extendiendo los resultados a contextos más generales.

Por un lado, en [DZ99], Dziubański y Zienkiewicz desarrollaron una teoría de espacios de Hardy asociados al operador de Schrödinger, proporcionando caracterizaciones mediante atómos y mediante transformadas de Riesz asociadas a $\mathcal{L}_V$.

Podemos mencionar también a Guo, Li y Peng ([GLP08]) quienes estudiaron la acotación en espacios de Lebesgue de conmutadores de transformadas de Riesz asociadas al operador de Schrödinger $\mathcal{L}_V$.

Por su parte, Bongioanni, Harboure y Salinas ([BHS11]) obtuvieron resultados de acotación en espacios de Lebesgue con pesos para diversos operadores asociados a $\mathcal{L}_V$, entre ellos, las transformadas de Riesz y los operadores integrales fraccionarios. Para ello, introdujeron nuevas clases de pesos, las A^ρ_p, definidas anteriormente, que se comportan localmente como los pesos de Muckenhoupt y que los contienen.

Una de las herramientas fundamentales introducidas por Shen en [She95] es la noción de función de radio crítico asociada al potencial V. Dicha función, denotada por ρ_V, se define para cada $x \in \mathbb{R}^d$ mediante

$$\rho_V(x) := \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V(y)\, dy \leq 1 \right\}.$$

Esta función mide la escala espacial a partir de la cual la influencia del potencial V se vuelve significativa y desempeña un rol central en el análisis profundo de los operadores de Schrödinger.

Una de las propiedades de V que se muestra en [She95, Lemma 1.2] es una desigualdad de crecimiento que relaciona las integrales del potencial V sobre bolas concéntricas de distinto radio. Más precisamente, si $V \geq 0$ pertenece a RH_q con $q > d/2$, entonces existe una constante C tal que

$$\int_{B(x,r)} V(y)\, dy \leq C \left(\frac{R}{r}\right)^{d-\frac{d}{q}} \int_{B(x,R)} V(y)\, dy, \tag{1.15}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y todo $0 < r < R$.

Si consideramos una medida de la forma $d\mu(x) = V(x)dx$, con $V \geq 0$ un potencial como antes, a partir de (1.15), nos encontramos ante un punto de partida natural para extender la teoría a operadores de Schrödinger con una medida μ.

Esta generalización, que constituye uno de los ejes centrales de esta tesis, fue introducida por Shen en [She99]. En dicho trabajo se propone el estudio del **operador de Schrödinger generalizado**, definido formalmente por

$$\mathcal{L}_\mu := -\Delta + \mu,$$

donde μ es una medida de Radón no negativa que verifica las siguientes condiciones sobre bolas:

$$\mu(B(x,r)) \leq C_\mu \left(\frac{r}{R}\right)^{d-2+\delta_\mu} \mu(B(x,R)), \tag{1.16}$$

$$\mu(B(x,2r)) \leq D_\mu \left(\mu(B(x,r)) + r^{d-2}\right), \tag{1.17}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r < R$, donde las constantes δ_μ, C_μ, D_μ dependen de la medida μ y satisfacen $\delta_\mu > 0$ y $C_\mu, D_\mu > 1$.

La primera propiedad proporciona un control del crecimiento de bolas concéntricas en función del cociente de radios, y la segunda propiedad nos indica que μ es una medida duplicante en aquellas bolas que satisfacen $\mu(B(x,r)) \geq cr^{d-2}$.

Nótese que si $d\mu(x) = V(x)dx$, con $V \geq 0$ una función potencial tal que $V \in RH_q$ con $q > d/2$, entonces μ satisface las propiedades (1.16) y (1.17). En efecto, sea $0 < r < R$.

De acuerdo a (1.15), se tiene que

$$\begin{aligned}\mu\left(B(x,r)\right) &= \int_{B(x,r)} V(y)\ dy \\ &\leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{2-d/q}\left(\frac{r}{R}\right)^{d-2}\int_{B(x,R)} V(y)\ dy \\ &= C\left(\frac{r}{R}\right)^{d-2+\delta_\mu}\mu\left(B(x,R)\right),\end{aligned}$$

de donde se obtiene (1.16) tomando $\delta_\mu = 2-d/q > 0$.

En cuanto a la segunda propiedad, aplicando la condición de duplicación de V, heredada por pertenecer a la clase RH_q ([She95, p. 518]),

$$\mu\left(B(x,2r)\right) = \int_{B(x,2r)} V(y)\ dy \leq C\int_{B(x,r)} V(y)\ dy \leq C\int_{B(x,r)} V(y)\ dy + Cr^{d-2},$$

para todo $x\in\mathbb{R}^d$ y $r>0$, y se deduce así (1.17), con $C = D_\mu$ la constante de duplicación de V.

Observación 1.21. Las condiciones (1.16) y (1.17) no requieren que la medida μ sea absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. El marco desarrollado en [She99] incluye también medidas asociadas a grafos Lipschitz o medidas producto con componentes duplicantes, que no vienen dadas por un potencial V (véase [She99, p. 523]).

El autor también presenta una generalización de la función de radio crítico para una medida μ de Radón no negativa en $\mathbb{R}^d$ que satisface las propiedades (1.16) y (1.17). La misma está inspirada en ρ_V y se define como la función no negativa dada por

$$\rho_\mu(x) := \sup\left\{r>0 : \frac{\mu(B(x,r))}{r^{d-2}} \leq 1\right\}, \qquad x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.18}$$

Notemos que si $d\mu(x) = V(x)dx$ con $V\geq 0$, se recupera ρ_V.

Esta función tiene un papel importante en la estimación de operadores asociados a $\mathcal{L}_\mu$ y también en la descripción de los espacios de suavidad relacionados. En particular, de manera informal, podemos decir que establece que los operadores asociados a $\mathcal{L}_\mu$ guardan una estrecha semejanza con los operadores clásicos, siempre que se miren de manera local según ρ_μ y, fuera de esa localía, poseen un comportamiento mejor.

En lo que resta de la sección, presentaremos algunas propiedades de ρ_μ. Muchos de estos resultados ya se conocían en el caso potencial (véase [She95, Lemma 1.4]).

Proposición 1.22 ([She99, Proposition 1.8]). *Sea μ una medida de Radón no negativa que satisface* (1.16) *y* (1.17)*. Entonces*

(i) $0<\rho_\mu(x)<\infty$ *para todo* $x\in\mathbb{R}^d$.

(ii) *Existe una constante C tal que $\rho_\mu(x)^{d-2} \leq \mu(B(x,\rho_\mu(x))) \leq C\rho_\mu(x)^{d-2}$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$.*

Se desprende directamente que

$$\frac{\mu(B(x,\rho_\mu(x)))}{\rho_\mu(x)^{d-2}} \sim 1, \tag{1.19}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

(iii) *ρ_μ es una función de radio crítico y, por lo tanto, verifica (1.4) y (1.5) para ciertas constantes $k_0, C_0 > 1$, que dependen de las constantes C_μ, D_μ y δ_μ.*

Algunas propiedades relacionadas con la medida μ que resultarán útiles a lo largo de esta tesis son las enunciadas en los siguientes lemas, las cuales se siguen de las condiciones (1.16) y (1.17).

Lema 1.23 ([Bai21, Lemma 4.1])**.** *Sea μ una medida de Radón no negativa sobre $\mathbb{R}^d$ que satisface (1.16) y (1.17). Existe una constante C tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$,*

$$\int_{B(x,r)} \frac{d\mu(y)}{|y-x|^{d-2}} \leq C\frac{\mu(B(x,r))}{r^{d-2}}. \tag{1.20}$$

Si $\delta_\mu > 1$, entonces se tiene además que

$$\int_{B(x,r)} \frac{d\mu(y)}{|y-x|^{d-1}} \leq C\frac{\mu(B(x,r))}{r^{d-1}}. \tag{1.21}$$

Además, para toda medida μ que verifique (1.16) y (1.17) se puede obtener mediante un argumento recursivo, la siguiente desigualdad que será útil en los capítulos posteriores: para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ y $j \in \mathbb{N}$,

$$\mu\big(B(x,2^j r)\big) \leq D_\mu^j \mu(B(x,r)) + D_\mu^j 2^{(d-2)(j-1)} r^{d-2}. \tag{1.22}$$

La propiedad adicional de la medida μ que se presenta a continuación será de gran utilidad en el estudio posterior de las transformadas de Riesz y de otros operadores asociados a $\mathcal{L}_\mu$. Asimismo, constituye una generalización de un resultado previamente conocido en el caso particular $d\mu(x) = V(x)dx$, establecido en [GLP08, Lemma 1].

Lema 1.24. *Sea μ una medida de Radón no negativa que satisface (1.16) y (1.17). Existe una constante C tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ y $N \geq \log_2 D_\mu$ se tiene*

$$\mu\left(B(x,r)\right) \leq C r^{d-2}\left(1 + \frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^N,$$

donde D_μ es la constante en (1.17).

Demostración. Consideremos primero el caso $r \le \rho_\mu(x)$. Por (1.16) y (1.19),

$$
\begin{aligned}
\mu\left(B(x,r)\right) &\le C_\mu \left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^{d-2+\delta_\mu} \mu\left(B(x,\rho_\mu(x))\right) \\
&\le C_\mu r^{d-2}\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^{\delta_\mu} \frac{\mu(B(x,\rho_\mu(x)))}{\rho_\mu(x)^{d-2}} \\
&\le C_\mu r^{d-2} \\
&\le C_\mu r^{d-2}\left(1+\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^N,
\end{aligned}
$$

para todo $N \ge \log_2 D_\mu$.

Por otro lado, si $r > \rho_\mu(x)$, sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{j_0-1}\rho_\mu(x) < r \le 2^{j_0}\rho_\mu(x)$. Nuevamente por (1.16), (1.22) y (1.19), se sigue que

$$
\begin{aligned}
\mu\left(B(x,r)\right) &\le C_\mu \left(\frac{r}{2^{j_0}\rho_\mu(x)}\right)^{d-2+\delta_\mu} \mu\left(B(x,2^{j_0}\rho_\mu(x))\right) \\
&\le C_\mu \left(\frac{r}{2^{j_0}\rho_\mu(x)}\right)^{d-2+\delta_\mu} \left(D_\mu^{j_0}\mu\left(B(x,\rho_\mu(x))\right) + D_\mu^{j_0}2^{(j_0-1)(d-2)}\rho_\mu(x)^{d-2}\right) \\
&\le C_\mu r^{d-2}\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^{\delta_\mu}\left(\frac{D_\mu}{2^{d-2+\delta_\mu}}\right)^{j_0} + C_\mu 2^{-(d-2)} r^{d-2}\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^{\delta_\mu}\left(\frac{D_\mu}{2^{\delta_\mu}}\right)^{j_0} \\
&\le C_\mu r^{d-2}\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^{\delta_\mu}\left(\frac{D_\mu}{2^{\delta_\mu}}\right)^{j_0}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, como $\log_2\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right) \le j_0 \le 1 + \log_2\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{D_\mu}{2^{\delta_\mu}}\right)^{j_0} = D_\mu^{j_0}2^{-\delta_\mu j_0} &\le D_\mu^{1+\log_2\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)} 2^{-\delta_\mu \log_2\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)} \\
&\le D_\mu D_\mu^{\log_2\left(1+\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)}\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^{-\delta_\mu} \\
&\le D_\mu\left(1+\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^{\log_2 D_\mu}\left(\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^{-\delta_\mu}.
\end{aligned}
$$

Esto implica que $\mu\left(B(x,r)\right) \le C_\mu D_\mu r^{d-2}\left(1+\frac{r}{\rho_\mu(x)}\right)^N$, para todo $N \ge \log_2 D_\mu$. En ambos casos se obtiene la estimación deseada. □

1.7. Soluciones débiles y solución fundamental de $\mathcal{L}_\mu$

Dado que la medida μ puede presentar concentraciones o singularidades que impiden una formulación puntual de las ecuaciones diferenciales, el enfoque natural para estudiar el operador $\mathcal{L}_\mu = -\Delta + \mu$ es en el marco de las *soluciones débiles.*

Supondremos, como siempre, que μ es una medida de Radón no negativa que satisface las propiedades (1.16) y (1.17). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un dominio abierto y $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Diremos que una función $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ es una **solución débil** de la ecuación

$$\mathcal{L}_\mu u = f \quad \text{en } \Omega,$$

si para toda función de prueba $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se cumple la identidad de integración por partes

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx,$$

donde el término $\int_\Omega u\varphi d\mu$ se interpreta en el sentido de integrales con respecto a una medida de Radón, lo cual exige que u sea μ-integrable localmente.

Un resultado básico en este contexto es la existencia y unicidad de soluciones débiles para la ecuación asociada al operador $\mathcal{L}_\mu$, bajo hipótesis adecuadas sobre la función f.

Proposición 1.25 ([She99, Proposition 2.3])**.** *Sea $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Supongamos que $\rho_\mu(\cdot)\ f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces la ecuación $\mathcal{L}_\mu u = f$ en $\mathbb{R}^d$ admite una única solución débil $u_f \in \mathscr{H}$, donde $\mathscr{H}$ es el espacio definido por*

$$\mathscr{H} = \left\{ u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d) \ y \ \rho_\mu(\cdot)|u| \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Además en [She99, Proposition 2.3] se mostró que, para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto, existe una única función Γ_μ tal que la solución u_f de la proposición anterior tiene la siguiente representación integral

$$u_f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_\mu(x,y) f(y) dy. \tag{1.23}$$

Llamaremos a Γ_μ la **solución fundamental** de $\mathcal{L}_\mu$ en $\mathbb{R}^d$.

Inicialmente, para el operador clásico $\mathcal{L}_V$, se establecieron estimaciones que relacionaban el comportamiento del núcleo fundamental $\Gamma_V(x,y)$ con la función de radio crítico $\rho_V(x)$. Para $V \in RH_q$, $q > d/2$, se obtuvieron estimaciones del tipo

$$|\Gamma_V(x,y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho_V(x)}\right)^N} \cdot \frac{1}{|x-y|^{d-2}}, \quad x \neq y,$$

para todo $N > 0$, con C_N una constante que varía con N. Similarmente, para la derivada en la primera variable,

$$|\nabla_1 \Gamma_V(x,y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho_V(x)}\right)^N} \cdot \frac{1}{|x-y|^{d-1}}, \quad x \neq y,$$

para todo $N > 0$.

Estas estimaciones reflejan un decaimiento polinomial controlado por ρ_V, que describe el efecto local del potencial. Aunque muy útiles, estas cotas no capturan completamente el fenómeno de decrecimiento inducido por el potencial, el cual se manifiesta de manera más natural mediante un decaimiento exponencial, como observó Shen posteriormente en el caso del operador de Schrödinger generalizado $\mathcal{L}_\mu$ ([She99]). Este mejor decaimiento viene dado por la distancia de Agmon, como se establece en la siguiente proposición.

Proposición 1.26 ([She99, Theorem 0.8 and 0.17]). *Sea μ una medida de Radón no negativa en $\mathbb{R}^d$, que satisface las propiedades (1.16) y (1.17). Entonces*

$$\frac{ce^{-\epsilon_1 d_\mu(x,y)}}{|x-y|^{d-2}} \leq \Gamma_\mu(x,y) \leq \frac{Ce^{-\epsilon_2 d_\mu(x,y)}}{|x-y|^{d-2}}, \qquad \textit{para todo } x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y, \tag{1.24}$$

con c, C, ϵ_1 y ϵ_2 constantes positivas que dependen sólo de la dimensión del espacio y de las constantes de la medida μ.

Por otra parte, existen constantes positivas C y ϵ_3 tales que

$$|\nabla_1 \Gamma_\mu(x,y)| \leq \frac{Ce^{-\epsilon_3 d_\mu(x,y)}}{|x-y|^{d-2}} \left(\int_{B\left(x, \frac{|y-x|}{2}\right)} \frac{d\mu(z)}{|z-x|^{d-1}} + \frac{1}{|x-y|} \right), \tag{1.25}$$

para $x \neq y$. Más aún, para $\delta_\mu > 1$ existen constantes positivas C, ϵ tales que

$$|\nabla_1 \Gamma_\mu(x,y)| \leq \frac{Ce^{-\epsilon d_\mu(x,y)}}{|x-y|^{d-1}}, \quad x \neq y. \tag{1.26}$$

Observamos que la estimación (1.25) no se encuentra explícitamente en [She99], pero está esencialmente contenida en la demostración de [She99, Theorem 0.19]. Esto fue observado por Bailey (véase [Bai21, Theorem 4.2] y comentario posterior), quien fue el primero en aprovechar el decaimiento exponencial para obtener propiedades de acotación en $L^p(w)$ con una clase de pesos más amplia que la clase A_p^ρ de [BHS11].

Como veremos en los próximos capítulos, esto conduce, a su vez, a deducir acotaciones en $L^p(w)$ para operadores asociados a $\mathcal{L}_V$ que extienden las ya conocidas al considerar una clase más amplia de pesos w. En algunos casos, las obtendremos como consecuencia de los resultados para el caso con medida μ, pero, en otros casos, será necesario realizar estimaciones más precisas trabajando directamente con las cotas dadas en la Proposición 1.26 cuando $d\mu(x) = V(x)dx$.

Capítulo 2

Clases $H^{\rho,m}_{p,c}$ y $S^{\rho}_{p,c}$ de pesos exponenciales

En este capítulo introducimos las clases de pesos $S^{\rho}_{p,c}$ y $H^{\rho,m}_{p,c}$, definidas en [Bai21]. Estas clases extienden la teoría de los pesos A^{ρ}_{p} desarrollada en [BHS11] y resultan adecuadas para el estudio de operadores asociados al marco introducido en el capítulo anterior.

La definición de estas clases incorpora el radio crítico ρ a través de un factor de crecimiento exponencial que depende del cociente $r/\rho(x)$.

En el caso de $H^{\rho,m}_{p,c}$, la definición se formula en términos de bolas euclídeas $B(x,r)$, sobre las cuales se consideran promedios e integrales locales del peso.

Por otro lado, la clase $S^{\rho}_{p,c}$ se define utilizando bolas B_{ρ} asociadas a la distancia de Agmon d_{ρ}. Este enfoque permite describir con mayor precisión el decaimiento exponencial natural de los núcleos de los operadores vinculados a $\mathcal{L}_{\mu}$, que se mide mediante un factor de la forma $e^{-c\,d_{\rho}(x,y)}$. Aunque esta construcción es geométricamente más natural, su manejo resulta técnicamente más complejo.

Este capítulo tiene una doble finalidad. En primer lugar, analizaremos con detalle las propiedades básicas de las clases de pesos adaptadas $S^{\rho}_{p,c}$ y $H^{\rho,m}_{p,c}$. En segundo lugar, estudiaremos los operadores maximales asociados a cada una de ellas, sentando caracterizaciones clave para el desarrollo posterior de esta tesis. Los mismos se aplicarán para obtener resultados de acotación de operadores singulares y fraccionarios en espacios con pesos.

La clase $H^{\rho,m}_{p,c}$ puede interpretarse como una adaptación de los pesos de tipo A^{ρ}_{p}, pero con un crecimiento global más que polinomial. La misma se define de la siguiente manera.

Definición 2.1. Para $1 < p < \infty$ y $c \geq 0$, denotaremos por

$$H^{\rho}_{p,c} := \bigcup_{m \geq 0} H^{\rho,m}_{p,c},$$

donde $H_{p,c}^{\rho,m}$ es la familia de pesos w para los cuales existe una constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p'}}\leq C\exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^m\right),$$

para toda bola $B=B(x,r)$.

Cuando $p=1$, para $c\geq 0$ denotamos por

$$H_{1,c}^{\rho}:=\bigcup_{m\geq 0}H_{1,c}^{\rho,m},$$

donde $w\in H_{1,c}^{\rho,m}$ cumple que

$$\frac{1}{|B|}\int_B w\leq C\exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^m\right)\inf_B w,$$

para toda bola $B=B(x,r)$, con constante C independiente de la bola.

Otra clase de pesos adaptada, introducida en [Bai21], es la clase $S_{p,c}^{\rho}$, la cual se define, como dijimos, a partir de bolas B_ρ inducidas por la distancia de Agmon, como se describe a continuación.

Definición 2.2. Para $1<p<\infty$ y $c\geq 0$, denotamos por $S_{p,c}^{\rho}$ a la clase de pesos w para los cuales existe una constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|B_\rho|}\int_{B_\rho} w\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|B_\rho|}\int_{B_\rho} w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p'}}\leq C\exp(cr),$$

para toda bola $B_\rho=B_\rho(x,r)$, con constante C independiente de la bola.

La siguiente proposición muestra que existe una relación entre ambas clases.

Proposición 2.3 ([Bai21, Proposition 3.2])**.** *Sea $1<p<\infty$. Para todo $c_1,c_2,c_3>0$, $m_1\leq 2m_0$ y $m_2\geq(2m_0)^{-1}$ con $m_0=\frac{1}{2(k_0+1)}$, se tiene*

$$H_{p,c_1}^{\rho,m_1}\subseteq S_{p,c_2}^{\rho}\subseteq H_{p,c_3}^{\rho,m_2}. \tag{2.1}$$

Además, cuando $c=0$ se recuperan las clases clásicas de Muckenhoupt A_p.

Cabe destacar que, si bien la clase $S_{p,c}^{\rho}$ posee una formulación geométricamente más natural, al estar construida a partir de la distancia de Agmon, la clase $H_{p,c}^{\rho,m}$ presenta ciertas ventajas técnicas. En efecto, esta última permite preservar la estructura euclídea de las bolas y facilita el tratamiento de desigualdades con pesos mediante herramientas clásicas del análisis armónico.

Por este motivo, en las secciones y capítulos siguientes optaremos por trabajar principalmente con la clase $H_{p,c}^{\rho,m}$. No obstante, la clase $S_{p,c}^{\rho}$ desempeña un papel complementario y esencial en este marco. En particular, se retomará en la Sección 2.2 el operador maximal asociado a los pesos de la clase $S_{p,c}^{\rho}$ y obtendremos una condición suficiente que completa la caracterización iniciada en [Bai21].

La importancia del siguiente resultado radica en que la clase $H^{\rho,m}_{p,c}$ contiene a los pesos A^{ρ}_p, introducidos en [BHS11]. Además, la segunda inclusión permite transferir a $H^{\rho,m}_{p,c}$ algunas herramientas establecidas para $A^{\rho,\mathrm{loc}}_p$. Si bien esta inclusión se obtuvo originalmente en [Bai21] a través de las clases $S^{\rho}_{p,c}$, proporcionamos una prueba directa que evita la necesidad de clases de peso intermedias y elimina ciertas restricciones de parámetros.

Proposición 2.4. *Sea $1 \leq p < \infty$. Para toda $c > 0$ y todo $m \geq 0$ se tiene*

$$A^{\rho}_p \subsetneq H^{\rho,m}_{p,c} \subseteq A^{\rho,\mathrm{loc}}_p. \tag{2.2}$$

Demostración. La primera inclusión la podemos ver en [Bai21, Proposition 3.2]. Para la segunda, consideremos $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$ para algún $c > 0$ y $m \geq 0$, y fijemos una bola $B = B(x,r) \in \mathcal{B}_\rho$. Si $p > 1$, se tiene

$$\left(\int_B w\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C|B| \exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^m\right) \leq C|B|\exp\left(c2^m\right) \leq C|B|,$$

donde la constante es independiente de B. Por lo tanto, $w \in A^{\rho,\mathrm{loc}}_p$.

Si $p = 1$, se puede obtener la inclusión correspondiente de manera similar, con lo cual se tienen las dos inclusiones.

Veamos que la primera inclusión es propia, consideramos la función de radio crítico $\rho(x) = \min\left\{1, \frac{1}{|x|}\right\}$, que surge al tratar con el oscilador armónico cuyo potencial es $V(x) = |x|^2$, veremos que, para todo $1 \leq p < \infty$, $\omega(x) = e^{|x|}$ pertenece a $H^{\rho,m}_{p,c}$ para algunos $c > 0$ y $m \geq 0$, pero $\omega \notin A^{\rho}_p$.

Sea $B = B(y,r)$ una bola con $y \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ y consideremos $p > 1$. Entonces, como $|y| - r \leq |x| \leq |y| + r$ para todo $x \in B$,

$$\left(\int_B e^{|x|}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq |B|^{\frac{1}{p}} e^{\frac{|y|+r}{p}} \tag{2.3}$$

y

$$\left(\int_B e^{-\frac{|x|}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq |B|^{1-\frac{1}{p}} e^{-\frac{|y|-r}{p}},$$

lo que nos da

$$\left(\int_B e^{|x|}dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B e^{-\frac{|x|}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq |B| e^{\frac{2}{p}r}.$$

Ahora, notemos que $r \leq \frac{r}{\rho(y)}$ para todo $y \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$, ya que $r = \frac{r}{\rho(y)}$ cuando $|y| \leq 1$ y $r \leq r|y| = \frac{r}{\rho(y)}$ cuando $|y| > 1$. Por lo tanto,

$$\left(\int_B e^{|x|}dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B e^{-\frac{|x|}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq |B| \exp\left(\frac{2}{p}\left(1+\frac{r}{\rho(y)}\right)\right),$$

se concluye que $\omega \in H^{\rho}_{p,\frac{2}{p}}$. Cuando $p = 1$, notar que (2.3) se cumple. Ademas,

$$\inf_B e^{|x|} \geq e^{|y|-r},$$

lo que nos da, como antes

$$\int_B e^{|x|}dx \leq |B|e^{2r} \inf_B e^{|x|} \leq |B| \exp\left(2\left(1+\frac{r}{\rho(y)}\right)\right) \inf_B e^{|x|},$$

y $\omega \in H^{\rho,1}_{1,2}$. Por lo tanto, $\omega \in H^{\rho,1}_{p,\frac{2}{p}}$, para todo $1 \leq p < \infty$.

Para ver que $\omega \notin A^{\rho}_p$, para ningún $1 \leq p < \infty$, seguiremos las ideas dadas en [Bai18, p. 367]. Sea $p > 1$ y consideremos las bolas $B_\ell = B(0,\ell)$ para $\ell > 1$. Por un lado, podemos obtener que

$$\left(\int_{B_{2\ell}} e^{|x|}dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{B_{2\ell}\setminus B_\ell} e^{|x|}dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\ell^{2\ell} e^t t^{d-1}dt\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(e^{2\ell}-e^{\ell}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por otro lado,

$$\left(\int_{B_{2\ell}} e^{-\frac{|x|}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \geq \left(\int_{B_{2\ell}\setminus B_\ell} e^{-\frac{|x|}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \gtrsim \left(e^{-\frac{\ell}{p-1}}-e^{-\frac{2\ell}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \gtrsim e^{-\frac{\ell}{p}}.$$

Esto da como resultado

$$\left(\fint_{B_{2\ell}} e^{|x|}dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\fint_{B_{2\ell}} e^{-\frac{|x|}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \gtrsim \ell^{-d}(e^{\ell}-1)^{\frac{1}{p}},$$

y ya que esta estimación se cumple para todo $\ell > 1$, el lado izquierdo no puede estar acotado por ningún polinomio en ℓ. Es decir, $\omega \notin A^{\rho,\theta}_p$ para ningún $\theta \geq 0$, con lo cual $\omega \notin A^{\rho}_p$ como afirmábamos.

En el caso $p = 1$,

$$\int_{B_{2\ell}} e^{|x|}dx \geq e^{2\ell}-e^{\ell} \geq e^{\ell}, \qquad \inf_{B_{2\ell}} e^{|x|} = 1,$$

por lo tanto, para todo $\ell > 1$,

$$\fint_{B_{2\ell}} e^{|x|}dx \left(\inf_{B_{2\ell}} e^{|x|}\right)^{-1} \geq \ell^{-d}e^{\ell}.$$

Como antes, no podemos encontrar ningún polinomio que acote superiormente el lado izquierdo, lo que implica que $\omega \notin A^{\rho,\theta}_1$ para todo $\theta \geq 0$. Así, $\omega \notin A^{\rho}_p$, para ningún $1 \leq p < \infty$. □

2.1. Propiedades de la clase $H^{\rho,m}_{p,c}$

Así como las clases A^{ρ}_p conservan las propiedades favorables de los pesos A_p (véase [BCH13a, Proposition 2]), esta nueva clases de pesos exponenciales $H^{\rho,m}_{p,c}$ también lo hace. El siguiente lema enumera algunas de ellas.

Lema 2.5. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *$H^{\rho,m}_{p,c} \subseteq H^{\rho,m}_{q,\frac{cp}{q}}$ por cada $1 \le p < q < \infty$ y $c, m \ge 0$. En consecuencia, $H^{\rho,m}_{p,c} \subseteq H^{\rho,m}_{q,c}$.*

(ii) *Dados $1 < p < \infty$ y $c, m \ge 0$, $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$ si y sólo si $\sigma := w^{1-p'} \in H^{\rho,m}_{p',c}$.*

(iii) *Si $w_1 \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$ y $w_2 \in H^{\rho,m_2}_{1,c_2}$ para algunos $m_1, m_2, c_1, c_2 \ge 0$, entonces para cada $1 \le p < \infty$ existen $c, m \ge 0$ tales que $w_1 w_2^{1-p} \in H^{\rho,m}_{p,c}$.*

(iv) *Para $1 \le p < \infty$, $H^{\rho,m_1}_{p,c_1} \subseteq H^{\rho,m_2}_{p,c_2}$ siempre que $c_1 \le c_2$ y $m_1 \le m_2$.*

Demostración. Para probar la propiedad (i), consideremos primero $p = 1$. Entonces, si $B = B(x, r)$ es una bola, $w \in H^{\rho,m}_{1,c}$, y $q > p = 1$,

$$\left(\fint_B w^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} \le \sup_B w^{-1} = \left(\inf_B w \right)^{-1} \le C \left(\fint_B w \right)^{-1} \exp\left(c \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^m \right).$$

Luego,

$$\left(\fint_B w \right)^{\frac{1}{q}} \left(\fint_B w^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{\frac{1}{q'}} \le C \exp\left(\frac{c}{q} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^m \right),$$

es decir, $w \in H^{\rho,m}_{q,\frac{c}{q}}$.

Para el caso más general, sea $1 < p < q < \infty$ y sea $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$. Fijamos $B = B(x, r)$ una bola.

Como $p, q > 1$, escribimos $\frac{1}{q-1} = \frac{1}{p-1}\frac{p-1}{q-1}$, y definimos $r = \frac{q-1}{p-1} \ge 1$, pues $p \le q$. Aplicando la desigualdad de Jensen con exponente r,

$$\left(\fint_B w^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} = \left(\fint_B w^{-\frac{1}{p-1}\frac{1}{r}} \right)^{r(p-1)} \le \left(\fint_B w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1}.$$

Usando la hipótesis de que $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$, se concluye que

$$\left(\fint_B w \right)^{\frac{1}{q}} \left(\fint_B w^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \le \left[\left(\fint_B w \right)^{\frac{1}{p}} \left(\fint_B w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right]^{\frac{p}{q}} \le C \exp\left(\frac{cp}{q} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^m \right),$$

lo que prueba que $w \in H^{\rho,m}_{q,\frac{cp}{q}}$.

Para probar (ii), sea $1 < p < \infty$. Notemos que como $(p' - 1)(p - 1) = 1$,

$$1 - p' = -\frac{1}{p-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{p'-1} = p - 1.$$

Así, $\sigma := w^{1-p'} = w^{-\frac{1}{p-1}}$ verifica que

$$\fint_B \sigma = \fint_B w^{-\frac{1}{p-1}} \qquad \text{y} \qquad \fint_B \sigma^{-\frac{1}{p'-1}} = \fint_B w.$$

Por lo tanto, el lado izquierdo de la condición que define $H^{\rho,m}_{p',c}$ aplicada a σ coincide exactamente con el lado izquierdo de la condición que define $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$. Es decir,

$$\left(\fint_B \sigma \right)^{1/p'} \left(\fint_B \sigma^{-\frac{1}{p'-1}} \right)^{1/p} = \left(\fint_B w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{1/p'} \left(\fint_B w \right)^{1/p}.$$

Luego, $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$ equivale a decir que $\sigma \in H^{\rho,m}_{p',c}$, con los mismos parámetros c y m.

Veamos ahora que vale (iii). De acuerdo a la condición $w \in H^{\rho,m_i}_{1,c_i}$, $i = 1,2$, dada una bola $B = B(x,r)$ tenemos que

$$\left(\inf_B w_i\right)^{-1} \leq C_i \left(\fint_B w_i\right)^{-1} \exp\left(c_i\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_i}\right). \tag{2.4}$$

Sea $w = w_1 w_2^{1-p}$. Entonces,

$$\fint_B w = \fint_B w_1 w_2^{1-p} \leq \left(\fint_B w_1\right)\left(\inf_B w_2\right)^{1-p},$$

donde hemos usado que $1-p \leq 0$.

Análogamente, como $w^{-\frac{1}{p-1}} = w_1^{-\frac{1}{p-1}} w_2$.

$$\begin{aligned}\fint_B w^{-\frac{1}{p-1}} &= \fint_B w_1^{-\frac{1}{p-1}} w_2 \leq \left(\sup_B w_1^{-\frac{1}{p-1}}\right)\left(\fint_B w_2\right)\\ &= \left(\inf_B w_1\right)^{-\frac{1}{p-1}}\left(\fint_B w_2\right).\end{aligned}$$

A partir de las estimaciones anteriores, y usando (2.4),

$$\begin{aligned}\left(\fint_B w\right)^{\frac{1}{p}}\left(\fint_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} &\leq \left(\fint_B w_1\right)^{\frac{1}{p}}\left(\fint_B w_2\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\inf_B w_1\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\inf_B w_2\right)^{\frac{1-p}{p}}\\ &\leq C_1^{\frac{1}{p}} C_2^{\frac{p-1}{p}} \exp\left(\frac{c_1}{p}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_1} + \frac{c_2}{p'}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_2}\right)\\ &\leq C\exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m}\right),\end{aligned}$$

donde $m = \max\{m_1, m_2\}$, $c = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p'}$, y C una constante que depende solo de C_1, C_2 y p. Esto prueba que $w = w_1 w_2^{1-p} \in H^{\rho,m}_{p,c}$.

Por último, la inclusión en (iv) es inmediata, ya que si $c_1 \leq c_2$ y $m_1 \leq m_2$, entonces

$$\exp\left(c_1\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right) \leq \exp\left(c_2\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_2}\right),$$

para toda bola $B(x,r)$, por lo que la desigualdad que define la clase H^{ρ,m_1}_{p,c_1} implica la correspondiente para H^{ρ,m_2}_{p,c_2}. □

Clases de duplicación y reverse Hölder asociadas a $H^{\rho,m}_{p,c}$

De manera análoga a lo considerado en [BHS11] para las clases A^{ρ}_p, se puede definir una clase de duplicación asociada a $H^{\rho,m}_{p,c}$ con crecimiento exponencial.

Definición 2.6. Sean $\kappa \geq 1$ y $c \geq 0$. Definimos $D^{\rho}_{\kappa,c} = \bigcup_{m\geq 0} D^{\rho,m}_{\kappa,c}$, donde $D^{\rho,m}_{\kappa,c}$ es la clase de todos los pesos w para los cuales existe una constante C tal que

$$w(B(x,R)) \leq C\left(\frac{R}{r}\right)^{d\kappa} \exp\left(c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{m}\right) w(B(x,r)), \tag{2.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, y todo $0 < r < R$.

Observación 2.7. Notar que si $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$ con $c, m \geq 0$, se tiene que $w \in D^{\rho,m}_{p,cp}$. En efecto, si $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$ y $1 < p < \infty$,

$$(w(B(x,R)))^{\frac{1}{p}} \left(w^{-\frac{1}{p-1}}(B(x,R))\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C|B(x,R)| \exp\left(c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right).$$

Puesto que $|B(x,r)| \leq w(B(x,r))^{\frac{1}{p}} w^{-\frac{1}{p-1}}(B(x,R))^{\frac{1}{p'}}$ para todo $r < R$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{(w(B(x,R)))^{\frac{1}{p}}}{w(B(x,r))^{\frac{1}{p}}} &\leq C\frac{|B(x,R)| \exp\left(c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right)}{w^{-\frac{1}{p-1}}(B(x,R))^{\frac{1}{p'}} w(B(x,r))^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq C\left(\frac{R}{r}\right)^d \exp\left(c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right).\end{aligned}$$

Luego

$$w(B(x,R)) \leq C\left(\frac{R}{r}\right)^{dp} \exp\left(cp\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right) w(B(x,r)),$$

por lo que $w \in D^{\rho,m}_{p,cp}$.

Para $p = 1$, si $w \in H^{\rho,m}_{1,c}$ se tiene que para toda bola $B(x,R)$,

$$w(B(x,R)) \leq C|B(x,R)| \exp\left(c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right) \inf_{B(x,R)} w.$$

Como para cualquier $r < R$,

$$w(B(x,r)) = \int_{B(x,r)} w(y)dy \geq |B(x,r)| \inf_{B(x,r)} w \geq |B(x,r)| \inf_{B(x,R)} w,$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{w(B(x,R))}{w(B(x,r))} &\leq C\frac{|B(x,R)|}{|B(x,r)|} \exp\left(c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right) \\ &= C\left(\frac{R}{r}\right)^d \exp\left(c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right).\end{aligned}$$

Esto equivale a

$$w(B(x,R)) \leq C\left(\frac{R}{r}\right)^d \exp\left(c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right) w(B(x,r)),$$

y por lo tanto $w \in D^{\rho,m}_{1,c}$.

Observación 2.8. La condición $w \in D^{\rho,m}_{\kappa,c}$ nos indica, en particular, que w es una medida duplicante en bolas críticas. En efecto, para alguna constante $C = C(d, \kappa, c, m)$, se tiene que

$$w(B(x, 2\rho(x))) \leq Cw(B(x, \rho(x))),$$

y, más generalmente, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $j \in \mathbb{N}$, existe $C > 0$ tal que

$$w(B(x, 2^j\rho(x))) \leq C2^{d\kappa j} \exp\left(c(1+2^j)^m\right) w(B(x, \rho(x))).$$

Definimos a continuación una clase reverse Hölder para este contexto.

Definición 2.9. Sean $\eta > 1$ y $c \geq 0$. Definimos $RH^{\rho}_{\eta,c} = \bigcup_{m\geq 0} RH^{\rho,m}_{\eta,c}$, donde $RH^{\rho,m}_{\eta,c}$ es la clase de pesos w que satisfacen

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^\eta\right)^{\frac{1}{\eta}} \leq C\exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^m\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right), \tag{2.6}$$

para toda bola $B = B(x,r)$ con constante C independiente de B.

Ambas clases definidas anteriormente se reducen a las clases clásicas de duplicación y reverse Hölder dadas en la Sección 1.4, tomando $m = 0$.

Uno de los objetivos principales de esta sección es demostrar que los pesos $H^{\rho,m}_{p,c}$ satisfacen una desigualdad de tipo reverse Hölder RH^{ρ,m^*}_{η,c^*} para ciertos parámetros $\eta > 1$ y $c^*, m^* > 0$.

La estrategia consistirá en reducir el problema a verificar que la clase local $A^{\rho,\mathrm{loc}}_p$ cumple una desigualdad de tipo reverse Hölder sobre la familia de bolas críticas $\mathcal{B}_\rho$. Aunque este hecho se menciona en [BHS11, p. 574], y se sigue como en la prueba clásica para pesos de Muckenhoupt, lo incluimos aquí dando algunos detalles de los cambios necesarios en la misma. Este lema será utilizado para probar el Lema 2.11, y posteriormente en la Sección 3.2.

Lema 2.10. *Sea $1 \leq p < \infty$. Si $w \in A^{\rho,\mathrm{loc}}_p$, existen constantes $\delta > 0$ y $C \geq 1$ tales que*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B w$$

para toda bola $B \in \mathcal{B}_\rho$.

Demostración. La prueba puede hacerse siguiendo los lineamientos de la demostración del resultado para las clases A_p de Muckenhoupt dada en [Duo01, Theorem 7.4], adaptándolos a nuestro contexto. Debido a las técnicas utilizadas, resulta conveniente reescribir la condición en w sobre cubos en lugar de bolas.

Recordemos que para todo cubo $Q(x,r)$ de centro x y lado $2r$ (con lados paralelos a los ejes coordenados), se cumple que $B(x,r) \subseteq Q(x,r) \subseteq B(x,\sqrt{d}r)$. Luego, si $B(x,r) \in \mathcal{B}_\rho$, $B(x,\sqrt{d}r) \in \mathcal{B}_{\sqrt{d}\rho}$. Como $A^{\rho,\mathrm{loc}}_p = A^{\gamma\rho,\mathrm{loc}}_p$ para todo $\gamma > 1$ y todo $1 \leq p < \infty$ ([BHS11, Corollary 1]), tenemos que $w \in A^{\sqrt{d}\rho,\mathrm{loc}}_p$.

Luego, si $p > 1$, para todo cubo $Q = Q(x,r)$ con $r \leq \rho(x)$, se tiene que

$$\left(\fint_Q w\right)^{\frac{1}{p}}\left(\fint_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{|B(x,\sqrt{d}r)|}{|Q(x,r)|}\left(\fint_{B(x,\sqrt{d}r)} w\right)^{\frac{1}{p}}\left(\fint_{B(x,\sqrt{d}r)} w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C. \tag{2.7}$$

Similarmente se sigue en el caso $p = 1$.

Lo anterior indica que w satisface una condición de tipo $A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$ sobre cubos $Q(x,r)$ con $r \leq \rho(x)$. Para simplificar la notación, denotaremos por $\mathcal{Q}_\rho$ a la familia de cubos con radios $r \leq \rho(x)$.

Será suficiente probar, entonces, que existen constantes $\delta > 0$ y $C \geq 1$ tales que

$$\left(\fint_Q w^{1+\delta} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C \fint_Q w \tag{2.8}$$

vale para todo cubo $Q \in \mathcal{Q}_\rho$.

En efecto, si esto vale, entonces dada $B = B(x,r) \in \mathcal{B}_\rho$,

$$\left(\fint_B w^{1+\delta} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \left(\frac{|Q(x,r)|}{|B(x,r)|} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \left(\fint_{Q(x,r)} w^{1+\delta} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C \fint_{Q(x,r)} w \leq C \frac{w(B(x,\sqrt{d}r))}{|B(x,r)|}.$$

Como $w \in D_\rho = D_{\sqrt{d}\rho}$, es decir, w duplica sobre la familia de bolas dilatadas en la constante fija $\sqrt{d} > 1$ (véase [BHS11, Proposition 3]), se seguirá que

$$\left(\fint_B w^{1+\delta} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C \fint_B w$$

para toda bola $B \in \mathcal{B}_\rho$, y el mismo $\delta > 0$ hallado en (2.8).

La prueba de (2.8) se obtiene siguiendo el esquema de [Duo01, Theorem 7.4], teniendo previamente un resultado análogo a [Duo01, Lemma 7.5]. Al examinar la demostración de dicho lema, el argumento depende únicamente de la condición A_p sobre el cubo considerado y no requiere aplicar dicha condición a cubos de mayor tamaño. En consecuencia, podemos comprobar que si $1 \leq p < \infty$ y w satisface la condición $A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$ sobre cubos, entonces dado $\alpha \in (0,1)$ existe $\beta \in (0,1)$ tal que para todo cubo $Q \in \mathcal{Q}_\rho$ y todo subconjunto medible $S \subseteq Q$ con $|S| \leq \alpha |Q|$ se cumple $w(S) \leq \beta\, w(Q)$.

Fijado ahora un cubo $Q \in \mathcal{Q}_\rho$, se realiza la descomposición de Calderón–Zygmund de w sobre Q. Los subcubos obtenidos están contenidos en el cubo inicial y, por lo tanto, pertenecen nuevamente a $\mathcal{Q}_\rho$. Esto permite aplicar la condición $A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$ y la propiedad anterior sobre las medidas de subconjuntos, concluyendo la demostración al igual que en [Duo01, Theorem 7.4]. □

Estamos ahora en condiciones de demostrar el resultado principal de esta sección. La demostración sigue las líneas de [BHS11, Lemma 5], con las adaptaciones necesarias a nuestro contexto.

Lema 2.11. *Sea $1 \leq p < \infty$, $c > 0$ y $m \geq 0$. Dado un peso $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$, existen constantes $\eta > 1$, $c^* = c^*(d,p,k_0,c) > 0$ y $m^* = m\left(1 + \frac{k_0}{k_0+1}\right)$ tales que $w \in RH^{\rho,m^*}_{\eta,c^*}$.*

Demostración. Sea $w \in H^{\rho,m}_{p,c}$ para ciertos $1 \leq p < \infty$, $c > 0$ y $m \geq 0$. Por la Proposición 2.4, $w \in A_p^{\rho,\mathrm{loc}}$. Entonces, de acuerdo al Lema 2.10, existe $\eta > 1$ tal que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^\eta \right)^{1/\eta} \lesssim \frac{1}{|B|} \int_B w, \tag{2.9}$$

para toda bola $B \in \mathcal{B}_\rho$.

Por lo tanto, vale la estimación deseada para cualquier bola $B = B(x,r)$, con $r \leq \rho(x)$, y para cualesquiera $c^*, m^* \geq 0$. La elección de estos últimos dos parámetros se realizará en el siguiente caso.

Haciendo uso del cubrimiento dado en la Proposición 1.6, podemos estimar la integral de w^η sobre $B(x,r)$ para $r > \rho(x)$, siguiendo los mismos argumentos dados en la prueba de [BHS11, Lemma 5]. En efecto, sea $B = B(x,r)$ con $r > \rho(x)$ y $\mathcal{F} = \{j \in \mathbb{N} : B_j \cap B \neq \emptyset\}$ donde $B_j = B(x_j, \rho(x_j))$ son las bolas del cubrimiento. Para $j \in \mathcal{F}$, de la Observación 1.5 y como existe $y \in B_j \cap B$, se tiene

$$\rho(x_j) \leq C_0 2^{k_0} \rho(y) \leq C_0^2 2^{k_0} \rho(x) \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} \leq C_0^2 2^{k_0} r \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}},$$

en virtud de (1.4). Luego,

$$\bigcup_{j\in\mathcal{F}} B_j \subseteq c_r B(x,r), \text{ con } c_r = 2^{k_0+2} C_0^2 \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}}.$$

En efecto, sea $x_0 \in \bigcup_{j\in\mathcal{F}} B_j$. Entonces existe $j \in \mathcal{F}$ tal que $x_0 \in B_j$. Así

$$|x_j - x_0| \leq \rho(x_j) \leq C_0^2 2^{k_0} r \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}}.$$

Por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
|x - x_0| &\leq |x_0 - x_j| + |x_j - y| + |x - y| \\
&\leq 2^{k_0} C_0^2 r \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} + \rho(x_j) + r \\
&\leq 2^{k_0} C_0^2 r \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} + 2^{k_0} C_0^2 r \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} + r \\
&\leq 2^{k_0} C_0^2 r \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} + 2^{k_0} C_0^2 r \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} + 2^{k_0} C_0^2 r \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} \\
&\leq 2^{k_0+2} C_0^2 r \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} = c_r r.
\end{aligned}$$

De la Observación 1.5 también tenemos que

$$\rho(x_j) \geq C_0^{-1} 2^{-\frac{k_0}{k_0+1}} \rho(y) \geq C_0^{-2} 2^{-\frac{k_0}{k_0+1}} \rho(x) \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-k_0} \geq C_0^{-2} 2^{-\frac{k_0}{k_0+1}} \rho(x) \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{-k_0},$$

para todo $j \in \mathcal{F}$.

Tomando η como en (2.9) para $m = 0$, como $\frac{1}{\eta} < 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\left(\int_B w^\eta\right)^{\frac{1}{\eta}} &\le \sum_{j\in\mathcal{F}}\left(\int_{B_j} w^\eta\right)^{\frac{1}{\eta}}\\ &\lesssim \sum_{j\in\mathcal{F}} w(B_j)\rho(x_j)^{-\frac{d(\eta-1)}{\eta}}\\ &\lesssim \rho(x)^{-\frac{d(\eta-1)}{\eta}}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{dk_0(\eta-1)}{\eta}}\sum_{j\in\mathcal{F}} w(B_j).\end{aligned}$$

Por la propiedad de solapamiento acotado del cubrimiento, como $\bigcup_{j\in\mathcal{F}} B_j \subseteq c_r B$, se tiene $\sum_{j\in F} w(B_j) \le w(c_r B)$, con lo cual

$$\left(\int_B w^\eta\right)^{\frac{1}{\eta}} \lesssim w(c_r B)\rho(x)^{-\frac{d(\eta-1)}{\eta}}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{dk_0(\eta-1)}{\eta}}. \tag{2.10}$$

Por otro lado, de acuerdo a la duplicación heredada de w (véase Observación 2.7), y teniendo en cuenta que $\log(1+t) \le \frac{1}{q}t^q$ para todo $q > 0$ junto con la definición de c_r, resulta que

$$\begin{aligned}&w(c_r B)\\ &\lesssim (c_r)^{dp}\exp\left(c\left(1+\frac{c_r r}{\rho(x)}\right)^m\right) w(B)\\ &\lesssim \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{dp\frac{k_0}{k_0+1}}\exp\left(cp\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^m c_r^m\right) w(B)\\ &\lesssim \exp\left(dp\frac{k_0}{k_0+1}\log\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)\right)\exp\left(cp(4C_0^2)^m 2^{k_0 m}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m\left(1+\frac{k_0}{k_0+1}\right)}\right) w(B)\\ &\lesssim \exp\left(\frac{dp}{m^*}\frac{k_0}{k_0+1}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right)\exp\left(cp(4C_0^2)^m 2^{k_0 m}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m\left(1+\frac{k_0}{k_0+1}\right)}\right) w(B)\\ &\lesssim \exp\left(\tilde{c}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right) w(B),\end{aligned} \tag{2.11}$$

donde se consideró $m^* = m(1+\frac{k_0}{k_0+1}) > m$ y $\tilde{c} = \frac{dp}{m^*}\frac{k_0}{k_0+1} + cp(4C_0^2)^m 2^{k_0 m}$.

De (2.10), (2.11), y usando nuevamente que las potencias pueden absorberse en el término exponencial,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^\eta\right)^{\frac{1}{\eta}} &\lesssim \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\exp\left(\tilde{c}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right)\left(\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{d}{\eta'}}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{dk_0}{\eta'}}\\ &\lesssim \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\exp\left(\tilde{c}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right)\exp\left(\frac{d(k_0+1)}{\eta' m^*}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right)\\ &\lesssim \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\exp\left(c^*\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right),\end{aligned}$$

donde c^* depende de las constantes d, p, k_0, c. Por lo tanto, $w \in RH^{\rho,m^*}_{\eta,c^*}$ como queríamos probar. $\square$

Observación 2.12. La modificación del parámetro m en el resultado anterior es consecuencia de la geometría inducida por la función radio crítico ρ. El paso de una bola $B(x,r)$ con $r > \rho(x)$ a un cubrimiento por bolas críticas introduce un factor dependiente de $r/\rho(x)$, proveniente de la comparación entre $\rho(x)$ y $\rho(x_j)$. La no homogeneidad de ρ es la que determina la aparición de los nuevos parámetros c^* y m^*.

La siguiente proposición establece una propiedad de apertura para $H^{\rho,m}_{1,c}$, que tendremos en cuenta en la Sección 3.2.

Proposición 2.13. *Si $w \in H^{\rho,m}_{1,c}$ con $c, m \geq 0$, entonces existe $\eta > 1$ tal que $w^\eta \in H^{\rho,m^*}_{1,c'}$ donde $m^* = m\left(1 + \frac{k_0}{k_0+1}\right)$ y c' depende de c, m, C_0, k_0 y η.*

Demostración. Como $w \in H^{\rho,m}_{1,c}$, se tiene

$$\frac{1}{|B|}\int_B w \lesssim \exp\left(c\left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^m\right) \inf_B w, \tag{2.12}$$

para toda bola $B = B(x,r)$.

Por el Lema 2.11, existen $\eta > 1$, y constantes positivas c^* y $m^* = m\left(1 + \frac{k_0}{k_0+1}\right)$ tales que, para toda bola $B = B(x,r)$,

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^\eta\right)^{\frac{1}{\eta}} \lesssim \exp\left(c^*\left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right). \tag{2.13}$$

Elevando (2.13) a la potencia η y usando (2.12), se obtiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^\eta\right) &\lesssim \exp\left(c^*\eta\left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^\eta \\
&\lesssim \exp\left(c^*\eta\left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right)\exp\left(c\eta\left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{m}\right)\left(\inf_B w\right)^\eta \\
&\lesssim \exp\left((c^* + c)\eta\left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{m^*}\right)\inf_B w^\eta,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $m^* \geq m$. Por lo tanto, $w^\eta \in H^{\rho,m^*}_{1,c'}$ con $c' = (c^* + c)\eta$. $\square$

2.2. Operador maximal asociado a las clases $H^{\rho,m}_{p,c}$

Las clases de pesos $H^{\rho,m}_{p,c}$ están relacionadas con la acotación de ciertos operadores maximales que capturan el crecimiento exponencial. Estos operadores fueron considerados por J. Bailey en [Bai21] y los definimos a continuación.

Definición 2.14. Sean $c, m \geq 0$ y sea ρ una función de radio crítico. Para $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y $x \in \mathbb{R}^d$ consideramos el operador maximal dado por

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m} f(x) := \sup_{B(x',r)\ni x} \frac{1}{\exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x')}\right)^m\right)} \fint_{B(x',r)} |f(y)|dy, \tag{2.14}$$

y su versión centrada

$$\widetilde{M}^{\rho}_{m,c} f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^m\right)} \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy. \tag{2.15}$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, la desigualdad $\widetilde{M}^m_{\rho,c} f \leq \widetilde{\mathcal{M}}^m_{\rho,c} f$ se cumple trivialmente. La siguiente proposición establece que la desigualdad contraria también se cumple, con constante, bajo ciertas restricciones sobre los parámetros.

Proposición 2.15 ([Bai21, Proposition 3.5])**.** *Sea ρ una función de radio crítico. Dados $c_1, c_2 > 0$, $m_1, m_2 \geq 0$ con $m_2 \leq \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c_2 \leq c_1(2C_0)^{-m_2}$, se tiene que*

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1} f(x) \lesssim \widetilde{M}^{\rho}_{c_2,m_2} f(x), \tag{2.16}$$

para toda función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y todo $x \in \mathbb{R}^d$.

El siguiente teorema es relevante por sí mismo, ya que permite caracterizar las clases de pesos $H^{\rho,m}_{p,c}$ como aquellas que garantizan la acotación del operador maximal $\widetilde{M}^{\rho}_{c,m}$. Además, este resultado será útil para proporcionar una herramienta de extrapolación en el Capítulo 3.

Aquí también se observa un comportamiento similar al mencionado para M^{θ}_{ρ} (véase [BCH13a]), ya que la caracterización no preserva los mismos parámetros. Haciendo uso de la Proposición 2.15 se podrán obtener las propiedades correspondientes para $\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m}$, por lo que estableceremos la caracterización para la versión centrada.

Teorema 2.16. *Sea $1 < p < \infty$.*

(i) *Si $\widetilde{M}^{\rho}_{c_2,m_2}$ es acotado en $L^p(w)$ para algunos $c_2, m_2 > 0$, entonces $w \in H^{\rho,m_1}_{p,c_1}$ para todo $m_1 \geq (k_0+1)m_2$ y $c_1 \geq c_2(2C_0)^{m_2}$.*

(ii) *Si $w \in H^{\rho,m_1}_{p,c_1}$ para algunos $c_1, m_1 > 0$, entonces $\widetilde{M}^{\rho}_{c_2,m_1}$ es acotado en $L^p(w)$ para todo $c_2 > c_1(8C_0)^{m_1}$.*

Demostración. La necesidad de la clase H^{ρ,m_1}_{p,c_1} ya fue establecida en [Bai21, Proposition 3.6] usando (2.16). Probemos la suficiencia.

Fijamos $c_1, m_1 > 0$ tales que $w \in H^{\rho,m_1}_{p,c_1}$, y tomamos $c_2 > 0$ a elegir más adelante.

Podemos descomponer el operador maximal de la siguiente forma,

$$\widetilde{M}^{\rho}_{c_2,m_1} f(x) \leq \widetilde{M}^{\rho,(1)}_{c_2,m_1} f(x) + \widetilde{M}^{\rho,(2)}_{c_2,m_1} f(x),$$

donde

$$\widetilde{M}^{\rho,(1)}_{c_2,m_1}f(x)=\sup_{r\leq\rho(x)}\frac{1}{\exp\left(c_2\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)}\fint_{B(x,r)}|f(y)|dy$$

y

$$\widetilde{M}^{\rho,(2)}_{c_2,m_1}f(x)=\sup_{r>\rho(x)}\frac{1}{\exp\left(c_2\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)}\fint_{B(x,r)}|f(y)|dy.$$

Por la Proposición 2.4, $H^{\rho,m_1}_{p,c_1}\subseteq A^{\rho,\text{loc}}_p$, y como $\widetilde{M}^{\rho,(1)}_{c_2,m_1}f(x)\leq M^{\text{loc}}_\rho f(x)$ para todo $c_2>0$, se deduce que $\widetilde{M}^{\rho,(1)}_{c_2,m_1}$ es acotado en $L^p(w)$ para todo $c_2>0$ y $w\in H^{\rho,m_1}_{p,c_1}$.

Ahora trataremos el caso de $\widetilde{M}^{\rho,(2)}_{c_2,m_1}$. Sea $\{B_k\}_{k\geq1}$, el cubrimiento dado en la Proposición 1.6 por bolas $B_k=B(x_k,\rho(x_k))$. Fijemos $x\in\mathbb{R}^d$ y definamos, para cada $j\in\mathbb{N}$, el conjunto $R_j=\{r:2^{j-1}\rho(x)<r\leq2^j\rho(x)\}$. Entonces, para todo $x\in B_k$, de la Observación 1.5 se sigue que $\rho(x_k)\leq C_02^{k_0}\rho(x)$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{M}^{\rho,(2)}_{c_2,m_1}f(x)&=\sup_{r>\rho(x)}\frac{1}{\exp\left(c_2\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)}\fint_{B(x,r)}|f(y)|dy\\&\lesssim\sup_{j\geq1}\sup_{r\in R_j}\frac{1}{\exp\left(c_2\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)r^d}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy\\&\lesssim\sup_{j\geq1}\frac{1}{\exp\left(c_2\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)}\frac{1}{\left(2^{j-1}\rho(x)\right)^d}\int_{B(x,2^j\rho(x))}|f(y)|dy\\&\lesssim\sup_{j\geq1}\frac{2^{-jd}}{\exp\left(c_2\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)\rho(x_k)^d}\int_{C_jB_k}|f(y)|dy,\end{aligned}\tag{2.17}$$

donde $C_j=2^{j+2}C_0$, ya que $y\in B(x,2^j\rho(x))$, entonces $|y-x_k|\leq|y-x|+|x-x_k|\leq 2^j\rho(x)+\rho(x_k)\leq2^jC_02^{\frac{k_0}{k_0+1}}\rho(x_k)+\rho(x_k)\leq C_02^{j+2}\rho(x_k)$.

Finalmente, descomponiendo a $\mathbb{R}^d$ utilizando el cubrimiento de la Proposición 1.6, usando la desigualdad de Hölder y la hipótesis sobre w obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\left|\widetilde{M}^{\rho,(2)}_{c_2,m_1}f\right|^pw\\&\lesssim\sum_{k\geq1}\sup_{j\geq1}\frac{2^{-jdp}}{\exp\left(c_2p\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)\rho(x_k)^{dp}}\left(\int_{C_jB_k}|f|\right)^p\left(\int_{B_k}w\right)\\&\leq\sum_{k\geq1}\sup_{j\geq1}\frac{2^{-jdp}}{\exp\left(c_2p\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)\rho(x_k)^{dp}}\left(\int_{C_jB_k}|f|^pw\right)\left(\int_{C_jB_k}w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p/p'}\int_{C_jB_k}w\\&\leq\sum_{k\geq1}\sup_{j\geq1}\frac{2^{-jdp}\left(C_j\rho(x_k)\right)^{dp}\exp\left(c_1p\left(1+\frac{C_j\rho(x_k)}{\rho(x_k)}\right)^{m_1}\right)}{\exp\left(c_2p\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)\rho(x_k)^{dp}}\int_{C_jB_k}|f|^pw\\&\lesssim\sum_{k\geq1}\sup_{j\geq1}\frac{\exp\left(c_1p(8C_0)^{m_1}\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)}{\exp\left(c_2p\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)}\int_{C_jB_k}|f|^pw\\&\lesssim\sum_{j\geq1}\exp\left(\tilde{c}\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)\sum_{k\geq1}\int_{C_jB_k}|f|^pw,\end{aligned}$$

donde $\tilde{c} = c_1 p(8C_0)^{m_1} - c_2 p$.

Como $\sum_{k\geq 1} \chi_{C_j B_k} \leq C_1 C_j^{N_1} \sim C_1 2^{jN_1}$ por las propiedades del cubrimiento (véase Proposición 1.6),

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|\widetilde{M}_{c_2,m_1}^{\rho,(2)} f\right|^p w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w \sum_{j\geq 1} \exp\left(\tilde{c}\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right) 2^{jN_1} \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w,$$

siempre que se elija $c_2 > c_1(8C_0)^{m_1}$. □

Observación 2.17. Para $p = 1$ tenemos que si w es un peso que verifica $\widetilde{\mathcal{M}}_{c,m}^{\rho} w \lesssim w$ en casi todo punto, entonces $w \in H_{1,c}^{\rho,m}$. Nótese que los parámetros m y c se preservan. Esto puede deducirse adaptando el argumento clásico para el operador maximal de Hardy-Littlewood y los pesos A_1 (que puede verse, por ejemplo, en [Duo01, Theorem 7.3] y [Gra14, Theorem 9.1.9]).

Hasta ahora hemos obtenido estimaciones en L^p con pesos para la función maximal $\widetilde{M}_{c,m}^{\rho}$ siempre que $1 < p < \infty$. Siguiendo las técnicas de la proposición anterior, no es difícil mostrar la acotación débil de la maximal adaptada centrada, para $p = 1$.

Proposición 2.18. *Si $w \in H_{1,c_1}^{\rho,m_1}$, la función maximal $\widetilde{M}_{c_2,m_1}^{\rho}$ es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w para $c_2 > c_1(8C_0)^{m_1}$.*

Demostración. Sea $w \in H_{1,c_1}^{\rho,m_1}$ para algunos $c_1, m_1 > 0$ y tomemos $c_2 > c_1(8C_0)^{m_1}$. Podemos escribir la maximal de la siguiente manera

$$\widetilde{M}_{c_2,m_1}^{\rho} f(x) \leq \widetilde{M}_{c_2,m_1}^{\rho,(1)} f(x) + \widetilde{M}_{c_2,m_1}^{\rho,(2)} f(x), \tag{2.18}$$

donde

$$\widetilde{M}_{c_2,m_1}^{\rho,(1)} f(x) = \sup_{r\leq\rho(x)} \frac{1}{\exp\left(c_2\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)} \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

y

$$\widetilde{M}_{c_2,m_1}^{\rho,(2)} f(x) = \sup_{r>\rho(x)} \frac{1}{\exp\left(c_2\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)} \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

De acuerdo a [BHS11, Theorem 1], M_{ρ}^{loc} es de tipo débil $(1,1)$ para pesos en $A_1^{\rho,\text{loc}}$, y como $H_{1,c}^{\rho,m_1} \subseteq A_1^{\rho,\text{loc}}$ obtenemos la acotación deseada para $\widetilde{M}_{c_2,m_1}^{\rho,(1)}$. Por lo tanto, es suficiente probar que $\widetilde{M}_{c_2,m_1}^{\rho,(2)}$ es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w.

A partir de la estimación puntual (2.17), y usando que $w \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$, podemos estimar, para cada $x \in B_k$,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{M}^{\rho,(2)}_{c_2,m_1} f(x) &\lesssim \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-jd}}{\exp\left(c_2\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)\rho(x_k)^d} \int_{C_jB_k} |f(y)|dy \\
&\lesssim \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-jd}}{\exp\left(c_2\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)\rho(x_k)^d} \left(\operatorname{ínf}_{C_jB_k} w\right)^{-1} \int_{C_jB_k} |f(y)|w(y)dy \\
&\lesssim \sup_{j\geq 1} \frac{2^{-jd}\exp\left(c_1\left(1+C_j\right)^{m_1}\right)}{\exp\left(c_2\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right)\rho(x_k)^d} \frac{|C_jB_k|}{w(C_jB_k)} \int_{C_jB_k} |f(y)|w(y)dy \\
&\lesssim \frac{1}{w(B_k)} \sup_{j\geq 1} \exp\left(\tilde{c}\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right) \int_{C_jB_k} |f(y)|w(y)dy \\
&\lesssim \frac{1}{w(B_k)} \sum_{j\geq 1} \exp\left(\tilde{c}\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right) \int_{C_jB_k} |f(y)|w(y)dy \\
&:= \frac{S_k}{w(B_k)},
\end{aligned}
$$

para $C_j = 2^{j+2}C_0$ y $\tilde{c} = c_1(8C_0)^{m_1} - c_2$.

Usando la propiedad de solapamiento acotado del cubrimiento, si $c_2 > c_1(8C_0)^{m_1}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}^{\rho,(2)}_{c_2,m_1} f(x) > \lambda\right\}\right) &\leq \sum_{k\geq 1} w\left(\left\{x \in B_k : \frac{S_k}{w(B_k)} > \lambda\right\}\right) \\
&= \sum_{k\geq 1} \int_{\left\{x\in B_k : \frac{S_k}{w(B_k)} > \lambda\right\}} w(x)dx \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda} \sum_{j\geq 1} \exp\left(-\tilde{c}\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right) \sum_{k\geq 1} \int_{B^j_k} |f(y)|w(y)dy \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|w(y)dy \sum_{j\geq 1} 2^{jN_1} \exp\left(-\tilde{c}\left(1+2^{j-1}\right)^{m_1}\right) \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(w)},
\end{aligned}
$$

Con esto se concluye la demostración. □

2.3. Operador maximal asociada a las clases $S^{\rho}_{p,c}$

De manera análoga a las clases $H^{\rho,m}_{p,c}$, los pesos pertenecientes a la clase $S^{\rho}_{p,c}$ están vinculados a la acotación de ciertos operadores maximales que reflejan un crecimiento de tipo exponencial. Dichos operadores fueron introducidos y estudiados en [Bai21]; no obstante, los incluimos a continuación para mayor claridad y con el fin de mantener un desarrollo autocontenido.

Definición 2.19. Sea $c \geq 0$ y sea ρ una función de radio crítico. Para $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y $x \in \mathbb{R}^d$ consideramos el operador maximal dado por

$$\mathcal{M}_{\rho,c} f(x) := \sup_{B_\rho \ni x} \frac{1}{\exp(cr)} \fint_{B_\rho} |f(y)| dy, \tag{2.19}$$

donde el supremo se toma sobre las bolas $B_\rho = B_\rho(x', r) \subseteq \mathbb{R}^d$ en la métrica d_ρ que contienen a x.

Su versión centrada está dada por

$$M_{\rho,c} f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\exp(cr)} \fint_{B_\rho(x,r)} |f(y)| dy. \tag{2.20}$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, una desigualdad $M_{\rho,c} f(x) \leq \mathcal{M}_{\rho,c} f(x)$ es trivial. La proposición que sigue establece la desigualdad inversa, bajo ciertas restricciones en el parámetro c.

Proposición 2.20 ([Bai21, Proposition 3.3])**.** *Sea ρ una función de radio crítico. Dados $c_1, c_2 > 0$ con $c_1 > 2c_2$, se tiene que*

$$\mathcal{M}_{\rho,c_1} f(x) \lesssim M_{\rho,c_2} f(x), \tag{2.21}$$

para toda función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y todo $x \in \mathbb{R}^d$.

A continuación enunciamos un resultado de acotación para el operador maximal centrado asociado a los pesos $S^{\rho}_{p,c}$. Si bien la necesidad de esta condición es un resultado ya conocido, dado en ([Bai21]), desarrollamos aquí la suficiencia con el fin de completar la caracterización de esta clase de pesos mediante $M_{\rho,c}$.

Proposición 2.21. *Sea $1 < p < \infty$.*

- ***(i)*** *Si $M_{\rho,c_2} f$ es acotado en $L^p(w)$ para $c_2 > 0$, entonces $w \in S^{\rho}_{p,c_1}$ para todo $c_1 > 2c_2$.*
- ***(ii)*** *Si $w \in S^{\rho}_{p,c_1}$ para $c_1 > 0$, entonces $M_{\rho,c_2} f$ es acotado en $L^p(w)$ para todo $c_2 > c_1(\beta A_0 + 1)$, donde β es la constante definida en (1.10) y $A_0 > 1$ es la constante dada en el Lema 1.11.*

Demostración. La necesidad de la clase S^{ρ}_{p,c_1} ya fue establecida en [Bai21, Proposition 3.4] usando (2.21). Probemos la suficiencia.

Sea $c_1 > 0$ tal que $w \in S^{\rho}_{p,c_1}$ y tomemos $c_2 > 0$ a determinar más adelante. Sea $f \in L^p(w)$. Para el operador maximal centrado, escribimos

$$M_{\rho,c_2} f(x) \leq M^{\mathrm{loc}}_{\rho,c_2} f(x) + M^{\mathrm{glob}}_{\rho,c_2} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

donde

$$M^{\mathrm{loc}}_{\rho,c_2} f(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{\exp(c_2 t)} \fint_{B_\rho(x,t)} |f(y)| \chi_{B(x,\rho(x))}(y) dy,$$

y

$$M^{\text{glob}}_{\rho,c_2} f(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{\exp{(c_2 t)}} \fint_{B_\rho(x,t)} |f(y)| \chi_{B(x,\rho(x))^c}(y) dy.$$

Comencemos estimando la maximal del primer término. Consideremos $A_0 > 1$ la constante del Lema 1.11 y β como en (1.10). Como $A_0^{-1} < 1 \leq \beta < 2\beta$, separamos al operador como sigue

$$\begin{aligned} M^{\text{loc}}_{\rho,c_2} f(x) \leq & \sup_{0<t\leq A_0^{-1}} \frac{1}{\exp{(c_2 t)}} \frac{1}{|B_\rho(x,t)|} \int_{B_\rho(x,t)} |f(y)| \chi_{B(x,\rho(x))} dy \\ & + \sup_{A_0^{-1}<t\leq 2\beta} \frac{1}{\exp{(c_2 t)}} \frac{1}{|B_\rho(x,t)|} \int_{B_\rho(x,t)} |f(y)| \chi_{B(x,\rho(x))} dy \\ & + \sup_{t>2\beta} \frac{1}{\exp{(c_2 t)}} \frac{1}{|B_\rho(x,t)|} \int_{B_\rho(x,t)} |f(y)| \chi_{B(x,\rho(x))} dy. \end{aligned}$$

Observemos que, si $0 < t \leq A_0^{-1}$, entonces $t \leq \beta \leq 2\beta$, y de acuerdo al Lema 1.10, $B_\rho(x,t) = B_\rho(x, \beta\frac{t}{\beta}) \supseteq B(x, \frac{t}{\beta}\rho(x))$. Además, por el Lema 1.11, $B_\rho(x,t) \subseteq B(x, A_0 t\rho(x))$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sup_{0<t\leq A_0^{-1}} & \frac{1}{\exp{(c_2 t)}} \frac{1}{|B_\rho(x,t)|} \int_{B_\rho(x,t)} |f(y)| \chi_{B(x,\rho(x))} dy \\ & \leq \sup_{0<t\leq A_0^{-1}} \frac{1}{|B(x, \frac{t}{\beta}\rho(x))|} \int_{B(x,A_0 t\rho(x))} |f(y)| dy \\ & \leq (A_0\beta)^d \sup_{0<t\leq A_0^{-1}} \frac{1}{|B(x, A_0 t\rho(x))|} \int_{B(x,A_0 t\rho(x))} |f(y)| dy \\ & \leq (A_0\beta)^d \sup_{r\leq\rho(x)} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \\ & \leq (A_0\beta)^d M^{\text{loc}}_\rho f(x). \end{aligned}$$

En un segundo caso, si $A_0^{-1} < t \leq 2\beta$, aún tenemos que $B_\rho(x,t) \supseteq B(x, \frac{t}{\beta}\rho(x))$. Luego

$$\begin{aligned} \sup_{A_0^{-1}<t<2\beta} & \frac{1}{\exp{(c_2 t)}} \frac{1}{|B_\rho(x,t)|} \int_{B_\rho(x,t)} |f(y)| \chi_{B(x,\rho(x))} dy \\ & \leq \sup_{A_0^{-1}<t<2\beta} \frac{1}{|B_\rho(x, \frac{t}{\beta}\rho(x))|} \int_{B(x,\rho(x))} |f(y)| dy \\ & \leq \sup_{A_0^{-1}<t<2\beta} \left(\frac{\beta}{A_0^{-1}}\right)^d \frac{1}{|B(x,\rho(x))|} \int_{B(x,\rho(x))} |f(y)| dy \\ & \leq (A_0\beta)^d M^{\text{loc}}_\rho f(x). \end{aligned}$$

Por último, del Lema 1.10, tomando $r = 2$, se puede ver que $B(x, 2\rho(x)) \subseteq B_\rho(x, 2\beta)$. Por lo tanto, si $t > 2\beta$, $B_\rho(x,t) \supseteq B_\rho(x, 2\beta) \supseteq B(x, 2\rho(x))$. Así, tenemos que

$$\sup_{t>2\beta} \frac{1}{\exp{(c_2 t)}} \frac{1}{|B_\rho(x,t)|} \int_{B_\rho(x,t)} |f(y)| \chi_{B(x,\rho(x))} dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t>2\beta} \frac{1}{2^d|B(x,\rho(x))|}\int_{B(x,\rho(x))}|f(y)|dy\\
&\leq \frac{1}{2^d}M^{\text{loc}}_{\rho}f(x).
\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.18 se sabe que M^{loc}_{ρ} es acotada en $L^p(w)$ con $w \in A^{\rho,\text{loc}}_p$. Además, como $S^{\rho}_{p,c_1} \subseteq A^{\rho,\text{loc}}_p$, para todo $c_1 \geq 0$ (véanse Proposiciones 2.3 y 2.4) se obtiene el resultado para $M^{\text{loc}}_{\rho,c_2}$ cualquiera sea $c_2 > 0$.

Con respecto a la parte global, tomando $r = A_0^{-1} \leq \beta$, del Lema 1.11 se obtiene

$$B_\rho(x, A_0^{-1}) \subseteq B(x,\rho(x)),$$

y, por lo tanto,

$$B(x,\rho(x))^c \subseteq B_\rho(x, A_0^{-1})^c.$$

En consecuencia, la integral que participa en $M^{\text{glob}}_{\rho,c_2}f(x)$ se controla por

$$\int_{B_\rho(x,t)}|f(y)|\chi_{B(x,\rho(x))^c}(y)dy \leq \int_{B_\rho(x,t)\cap B_\rho(x,A_0^{-1})^c}|f(y)|dy.$$

Sea $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ el cubrimiento dado en la Proposición 1.6, luego

$$\begin{aligned}
\|M^{\text{glob}}_{\rho,c_2}f\|^p_{L^p(w)} &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{Q_j}\left(\sup_{t>0}\frac{1}{\exp(c_2t)}\frac{1}{|B_\rho(x,t)|}\int_{B_\rho(x,t)}|f(y)|\chi_{B(x,\rho(x))^c}(y)dy\right)^p w(x)dx\\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{Q_j}\left(\sup_{t>A_0^{-1}}\frac{1}{\exp(c_2t)}\frac{1}{|B_\rho(x,t)|}\int_{B_\rho(x,t)\cap B_\rho(x,A_0^{-1})^c}|f(y)|dy\right)^p w(x)dx\\
&\lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{Q_j}\left(\sup_{A_0^{-1}<t\leq 2\beta}\frac{1}{|B_\rho(x,t)|}\int_{B_\rho(x,A_0^{-1})^c}e^{-c_2d_\mu(x,y)}|f(y)|dy\right.\\
&\qquad\left.+\sup_{t>2\beta}\frac{1}{|B_\rho(x,t)|}\int_{B_\rho(x,A_0^{-1})^c}e^{-c_2d_\mu(x,y)}|f(y)|dy\right)^p w(x)dx, \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

donde se usó que para cada $y \in B_\rho(x,t)$, $\exp(-c_2t) \leq \exp(-c_2d_\mu(x,y))$.

Para el caso $A_0^{-1} < t \leq 2\beta$, se tiene que $B_\rho(x,t) \supseteq B(x, \frac{t}{\beta}\rho(x)) \supseteq B(x, \frac{A_0^{-1}}{\beta}\rho(x))$, por lo que

$$\begin{aligned}
&\sup_{A_0^{-1}<t\leq 2\beta}\frac{1}{|B_\rho(x,t)|}\int_{B_\rho(x,A_0^{-1})^c}e^{-c_2d_\mu(x,y)}|f(y)|dy\\
&\lesssim \frac{1}{\rho(x)^d}\int_{B_\rho(x,A_0^{-1})^c}e^{-c_2d_\mu(x,y)}|f(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

Nuevamente descomponemos en anillos, pero ahora con respecto a d_ρ, es decir, $B_\rho(x,A_0^{-1})^c = \bigcup_{k\geq 1}((k+1)B_{\rho,x}\setminus kB_{\rho,x})$, donde $kB_{\rho,x} := B_\rho(x, kA_0^{-1})$. Usando que para $y \in (k+1)B_{\rho,x}\setminus kB_{\rho,x}$ se cumple $d_\mu(x,y) \geq kA_0^{-1}$, obtenemos que

$$\int_{B_\rho(x,A_0^{-1})^c}e^{-c_2d_\mu(x,y)}|f(y)|dy \leq \sum_{k\geq 1}e^{-c_2kA_0^{-1}}\int_{(k+1)B_{\rho,x}\setminus kB_{\rho,x}}|f(y)|dy.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\sup_{A_0^{-1}<t\leq 2\beta} \frac{1}{|B_\rho(x,t)|}\int_{B_\rho(x,A_0^{-1})^c} e^{-c_2 d_\mu(x,y)}|f(y)|dy \\
&\lesssim \frac{1}{\rho(x)^d}\sum_{k\geq 1} e^{-c_2 k A_0^{-1}}\int_{(k+1)B_{\rho,x}\setminus kB_{\rho,x}} |f(y)|dy. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Para el caso $t>2\beta$, $|B_\rho(x,t)|\geq |B(x,2\rho(x))|\sim 2^d\rho(x)^d$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>2\beta}\frac{1}{|B_\rho(x,t)|}\int_{B_\rho(x,A_0^{-1})^c} e^{-c_2 d_\mu(x,y)}|f(y)|dy \\
&\lesssim \frac{1}{\rho(x)^d}\int_{B_\rho(x,A_0^{-1})^c} e^{-c_2 d_\mu(x,y)}|f(y)|dy.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al igual que en el caso anterior,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>2\beta}\frac{1}{|B_\rho(x,t)|}\int_{B_\rho(x,A_0^{-1})^c} e^{c_2 d_\mu(x,y)}|f(y)|dy \\
&\lesssim \frac{1}{\rho(x)^d}\sum_{k\geq 1} e^{-c_2 k A_0^{-1}}\int_{(k+1)B_{\rho,x}\setminus kB_{\rho,x}} |f(y)|dy. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

De (2.23) y (2.24), (2.22) queda controlado como sigue

$$\|M^{\mathrm{glob}}_{\rho,c_2}f\|^p_{L^p(w)} \lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{Q_j}\left(\frac{1}{\rho(x)^d}\sum_{k\geq 1} e^{-c_2 k A_0^{-1}}\int_{(k+1)B_{\rho,x}\setminus kB_{\rho,x}}|f(y)|dy\right)^p w(x)dx.$$

Sea $x\in Q_j = B(x_j,\rho(x_j))$, de acuerdo a (1.5), $\rho(x)^{-d}\leq (C_0^{-1}2^{-k_0})^d\rho(x_j)^{-d}$ y llamando $\delta = c_2 A_0^{-1}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|M^{\mathrm{glob}}_{\rho,c_2}f\|^p_{L^p(w)} &\lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{Q_j}\left(\frac{1}{\rho(x_j)^d}\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\delta k}\int_{(k+1)B_{\rho,x}\setminus kB_{\rho,x}} f(y)dy\right)^p w(x)dx \\
&\lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{Q_j}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\rho(x_j)^d} e^{-\delta k}\int_{(k+1)B_{\rho,x}\setminus kB_{\rho,x}} f(y)dy\right)^p w(x)dx.
\end{aligned}$$

Desde aquí, la demostración puede continuarse siguiendo paso a paso las líneas desarrolladas en [Bai21, Eq. (28)]. No obstante, con el fin de mantener una demostración autocontenida, reescribiremos los pasos principales de manera detallada.

Sea $B_{\rho,j} := B_\rho(x_j,\beta + A_0^{-1})$ para $j\in\mathbb{N}$. Nótese que, para $x\in Q_j$, el Lema 1.7 implica que $d_\mu(x,x_j)\leq\beta$. Por lo tanto, para $k\geq 1$ y $y\in(k+1)Q_{\mu,x}$, se cumple que

$$d_\rho(x_j,y)\leq d_\rho(x,x_j)+d_\rho(x,y)\leq \beta + A_0^{-1}(k+1),$$

lo cual implica que $(k+1)Q_{\rho,x}\subseteq (k+1)B_{\rho,j}$. Ademas se cumple la inclusión $B_j\subseteq B_{\rho,j}$ dada por el Lema 1.10. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|M^{\mathrm{glob}}_{\rho,c_2}f\|^p_{L^p(w)} &\lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{Q_j}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\exp(-\delta k)\,\rho(x_j)^{-d}\int_{(k+1)B_{\rho,x}}|f(y)|dy\right)^p w(x)dx \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{B_{\rho,j}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\exp(-\delta k)\,\rho(x_j)^{-d}\int_{(k+1)B_{\rho,j}}|f(y)|dy\right)^p w(x)dx.
\end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
&\|M^{\mathrm{glob}}_{\rho,c_2} f\|^p_{L^p(w)}\\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{B_{\rho,j}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \exp\left(-\delta k\right) \rho(x_j)^{-d} \|f\|_{L^p((k+1)B_{\rho,j},w)} w^{-\frac{1}{p-1}}((k+1)B_{\rho,j})^{\frac{p-1}{p}} \right)^p w(x)dx\\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \exp\left(-\delta k\right) \rho(x_j)^{-d} \|f\|_{L^p((k+1)B_{\rho,j},w)} w^{-\frac{1}{p-1}}((k+1)B_{\rho,j})^{\frac{p-1}{p}} w(B_{\rho,j})^{\frac{1}{p}} \right)^p .
\end{aligned}$$

Como $w \in S^{\rho}_{p,c_1}$, tenemos la estimación

$$\begin{aligned}
w^{-\frac{1}{p-1}}\left((k+1)B_{\rho,j}\right)^{\frac{p-1}{p}} w(B_{\rho,j})^{\frac{1}{p}} &\leq w^{-\frac{1}{p-1}}\left((k+1)B_{\rho,j}\right)^{\frac{p-1}{p}} w\left((k+1)B_{\rho,j}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim |(k+1)B_{\rho,j}| \exp\left(c'(k+1)\right),
\end{aligned}$$

donde $c' := c_1(\beta + A_0^{-1})$. Para $j,k \in \mathbb{N}$, sea $B_{j,k}$ la bola definida por

$$B_{j,k} := B\big(x_j, \beta(k+1)(\beta + A_0^{-1})^{k_0+1} \rho(x_j)\big).$$

Entonces, el Lema 1.11 se puede aplicar para obtener

$$(k+1)B_{\rho,j} \subseteq B_{j,k},$$

y por lo tanto

$$|(k+1)B_{\rho,j}| \lesssim (k+1)^{d(k_0+1)} \rho(x_j)^d.$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\|M^{\mathrm{glob}}_{\rho,c_2} f\|^p_{L^p(w)}\\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} \exp\left(-\delta k\right) \rho(x_j)^{-d} \|f\|_{L^p((k+1)B_{\rho,j},w)} (k+1)^{d(k_0+1)} \rho(x_j)^d \exp\left(c'k\right) \right)^p .\\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{d(k_0+1)} \exp\left((c'-\delta)k\right) \|f\|_{L^p(B_{j,k},w)} \right)^p .
\end{aligned}$$

Por la propiedad de solapamiento acotado de las bolas Q_j dada en la Proporción 1.6,

$$\begin{aligned}
\|M^{\mathrm{glob}}_{\rho,c_2} f\|_{L^p(w)} &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} k^{d(k_0+1)} \exp\left((c'-\delta)k\right) \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \|f\|^p_{L^p(B_{j,k},w)} \right)^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim \left(\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left((c'-\delta)k\right)\, k^{(\frac{N_1}{p}+d)(k_0+1)} \right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d,w)}\\
&\lesssim \|f\|_{L^p(w)}.
\end{aligned}$$

Esto se cumple siempre que elijamos $c' = c_1(\beta + A_0^{-1}) < \delta$, es decir, $c_2 > c_1(\beta A_0 + 1)$. $\square$

Capítulo 3

Integrales singulares con decaimiento exponencial

El propósito de este capítulo es establecer acotaciones en espacios de Lebesgue y en BMO con pesos para operadores integrales que satisfacen una condición de tamaño con decaimiento exponencial, definidos en un sentido general.

Luego de introducir esta familia de operadores, cada una de las secciones siguientes estará dedicada a probar dichas acotaciones en los distintos espacios de funciones considerados.

Las estimaciones en el espacio $L^p(w)$, con $1 < p < \infty$, se obtendrán mediante un resultado de extrapolación demostrado recientemente en [DLT26]. El caso extremo $p = 1$ se analizará en la Sección 3.2, donde se probarán resultados de tipo débil $(1, 1)$ para los operadores adjuntos a los considerados al comienzo del capítulo.

En la Sección 3.3 se demostrará un teorema de tipo $T1$ que proporciona condiciones equivalentes para la acotación de los operadores mencionados, en el espacio de oscilaciones BMO pesado adaptado a este contexto.

Finalmente, daremos en la Sección 3.4 algunas desigualdades de tipo Coifman con pesos que permiten controlar a la familia de operadores tratada en este capítulo mediante variantes de los operadores maximales $\tilde{\mathcal{M}}^m_{\rho,c}$ definidos en el Capítulo 1. Antecedentes en este sentido pueden encontrarse en [BCH13b] para operadores integrales singulares con núcleos con decaimiento polinomial asociado a ρ.

En lo que sigue consideraremos un operador T con núcleo asociado $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, entendido en el sentido de que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)f(y)dy, \quad x \notin \operatorname{sop}(f),$$

para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

La terminología adoptada para definir las clases de operadores sigue a [BHQ19] (véase también [MSTZ14]), donde se estudian operadores bajo una condición de tamaño con decaimiento polinomial asociado a una función de radio crítico. Previamente, operadores con tamaño polinomial habían sido considerados en [BCH13a], aunque sin una denominación explícita.

Definición 3.1. Sean $1 < s < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$. Diremos que T es un **operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo** (s, δ) si se verifican las siguientes condiciones:

(i) T es acotado de $L^{s'}(\mathbb{R}^d)$ en $L^{s',\infty}(\mathbb{R}^d)$;

(ii) T posee un núcleo asociado K que satisface:

(a) existen constantes positivas c, m y C tales que, para todo $R > 0$,

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K(x,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq \frac{C}{R^d}\exp\left(-c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right), \qquad (3.1)$$

siempre que $|x - x_0| < R/2$;

(b) existe una constante C tal que, para todo $R > 0$,

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K(x,y) - K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq \frac{C}{R^d}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta \qquad (3.2)$$

siempre que $|x - x_0| < r \leq \rho(x_0)$ y $r < R/2$.

La condición (3.1) es una condición de tamaño integral con decaimiento exponencial mientras que la condición (3.2) da una condición de suavidad en la primera variable. A estas condiciones se las considera de tipo Hörmander.

Observación 3.2. Notar que si un núcleo K satisface (3.1) y (3.2) para algún $s > 1$ también satisface estas condiciones para cualquier $1 \leq s_1 < s$.

Por otro lado, si la condición (3.1) se cumple para algún $0 < \delta \leq 1$, entonces también es válida para todo $\delta' \in (0, \delta)$.

Definiremos el caso $s = \infty$ a través de estimaciones puntuales del núcleo de la siguiente manera.

Definición 3.3. Sea $0 < \delta \leq 1$. Diremos que T es un **operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo** (∞, δ) si se verifican las siguientes condiciones:

(i) T es acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $p > 1$;

(ii) T posee un núcleo asociado K que satisface:

(a) existen constantes c, m y C tal que

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d} \exp\left(-c\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^m\right), \qquad \text{para todo } x \neq y; \quad (3.3)$$

(b) existe una constante C tal que

$$|K(x,y) - K(x_0,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^\delta, \qquad (3.4)$$

para todo $|x-y| > 2|x-x_0|$.

Observación 3.4. Es fácil ver que si un núcleo K satisface (3.3) y (3.4), entonces satisface (3.1) y (3.2) para todo $1 < s < \infty$, con los mismos parámetros c, m y δ.

El siguiente lema es un resultado auxiliar, el cual muestra que si un núcleo verifica las condiciones (3.1) y (3.2), entonces se puede deducir un decaimiento exponencial extra en la condición de suavidad. Si bien este resultado es análogo al planteado en [BHQ19, Lemma 4] para operadores con condición de tamaño de tipo polinomial, escribimos su demostración para una mejor comprensión del nuevo contexto de trabajo.

Lema 3.5. *Sea $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función que verifica las condiciones* (3.1) *y* (3.2) *para ciertos parámetros $1 < s < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, y $c, m > 0$. Entonces, existe una constante C tal que, para todo $\delta' \in (0,\delta)$ y todo $R > 0$,*

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K(x,y)-K(x_0,y)|^s\, dy\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{R^d}\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta'} \exp\left(-c\sigma\left(1+\frac{R}{2C_0\rho(x_0)}\right)^m\right),$$

siempre que $|x-x_0| < r \leq \rho(x_0)$, $r < R/2$ y $\sigma = 1 - \frac{\delta'}{\delta}$.

Demostración. Sea $\delta' \in (0,\delta)$. Definimos $\sigma \in (0,1)$ tal que $(1-\sigma)\delta = \delta'$. Sean $x_0, x \in \mathbb{R}^d$ y $r, R > 0$ tales que $|x-x_0| < r \leq \rho(x_0)$ y $r < R/2$.

Si llamamos

$$A = \left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K(x,y)-K(x_0,y)|^s\, dy\right)^{\frac{1}{s}},$$

aplicando (3.1) y (1.5) obtenemos que, para cierta constante C

$$\begin{aligned} A^\sigma &\leq \left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K(x,y)|^s + |K(x_0,y)|^s dy\right)^{\sigma/s} \\ &\leq \frac{C}{R^{d\sigma}}\exp\left(-c\sigma\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right) + \frac{C}{R^{d\sigma}}\exp\left(-c\sigma\left(1+\frac{R}{\rho(x_0)}\right)^m\right) \\ &\leq \frac{C}{R^{d\sigma}}\exp\left(-c\sigma\left(1+\frac{R}{2C_0\rho(x_0)}\right)^m\right) \end{aligned}$$

Por otro lado, de la Observación 3.2, se tiene

$$A^{1-\sigma} \leq \frac{C}{R^{d(1-\sigma)}}\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta(1-\sigma)} = \frac{C}{R^{d(1-\sigma)}}\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta'}.$$

Dado que $A = A^\sigma A^{1-\sigma}$, se sigue inmediatamente el resultado buscado. $\square$

3.1. Estimaciones en $L^p(w)$ para $1 < p \leq \infty$

Los resultados principales de acotación en espacios de Lebesgue pesados para los operadores definidos previamente, cuando $1 < p < \infty$, están dados por el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Sea T un operador Schrödinger-Calderón-Zygmund exponencial de tipo (s,δ), con $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$ y constantes c_1 y m_1 en la condición de tamaño.*

(i) *Si $s = \infty$, entonces T es acotado en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y todo peso $w \in H^{\rho,m^*}_{p,c'}$, con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c' < c_1\left(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$.*

(ii) *Si $1 < s < \infty$, entonces T está acotado en $L^p(w)$ para todo $s' < p < \infty$ y todo peso $w \in H^{\rho,m^*}_{p/s',c'}$, con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c' < c_1 s'\left(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$.*

La demostración del Teorema 3.6 se obtiene mediante un argumento de extrapolación a partir del comportamiento del operador en el extremo $p = \infty$. Este enfoque sigue el esquema desarrollado en [BCH13a]. Sin embargo, en nuestro contexto la presencia de los parámetros c y m en la familia de pesos $H^{\rho,m}_{p,c}$ impide aplicar directamente los resultados allí obtenidos, por lo que será necesario adaptar dicha teoría y proporcionar detalles adicionales cuando corresponda.

Muchos de los operadores que surgen en el contexto de Schrödinger no son acotados en $L^\infty(w)$. No obstante, pueden incluirse en el marco de extrapolación estableciendo su continuidad de $L^\infty(w)$ a un espacio de tipo BMO_ρ pesado para ciertos pesos w.

Para ello, introducimos la versión pesada del espacio BMO_ρ definido en el Capítulo 1. Dada una función de radio crítico ρ y un peso w, decimos que una función localmente integrable f pertenece a $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ si satisface

$$\frac{\|\chi_B w\|_\infty}{|B|}\int_B |f - f_B| \leq C, \quad \text{para toda bola } B = B(x,r) \text{ con } r < \rho(x), \tag{3.5}$$

y

$$\frac{\|\chi_B w\|_\infty}{|B|}\int_B |f| \leq C, \qquad \text{para toda bola } B = B(x,r) \text{ con } r = \rho(x). \tag{3.6}$$

Definimos la norma $\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho(w)}$ como el mínimo de las constantes C que aparecen en (3.5) y (3.6).

Es un hecho clásico que

$$\sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| \sim \sup_B \inf_{a\in\mathbb{R}} \frac{1}{|B|}\int_B |f - a|, \tag{3.7}$$

lo que permite verificar (3.5) para alguna constante $a \in \mathbb{R}$, no necesariamente el promedio f_B.

Con esta definición, podemos enunciar el siguiente resultado, correspondiente al caso extremo $p = \infty$ para los operadores integrales estudiados en este capítulo, el cual es de interés independiente y constituye el principal aporte técnico de esta sección.

Teorema 3.7. *Sea T un operador Schrödinger-Calderón-Zygmund exponencial de tipo (s,δ), con $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$ y constantes c_1 y m_1 en la condición de tamaño.*

(i) *Si $s = \infty$, entonces T es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-1} \in H_{1,c}^{\rho,m_1}$ con $c < c_1(8C_0)^{-m_1}$.*

(ii) *Si $1 < s < \infty$, entonces, T es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-s'} \in H_{1,c}^{\rho,m_1}$ con $c < c_1 s' (4C_0)^{-m_1}$.*

El primer resultado de extrapolación que presentamos en esta sección se obtiene a partir del extremo $p = \infty$, en un contexto general e independiente de operadores.

Teorema 3.8. *Sea $q > 0$ y sea (f,g) un par de funciones medibles y no negativas tal que*

$$\|fw\|_{L^\infty} \leq C\|gw\|_{L^\infty} \tag{3.8}$$

se verifica que para todo peso w tal que $w^{-q} \in H_{1,c_1}^{\rho,m_1}$ con $c_1, m_1 \geq 0$, siempre que el lado izquierdo sea finito, con una constante C que depende de w únicamente a través de la constante de la clase H_{1,c_1}^{ρ,m_1}.

Entonces, para todo $q < p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p(w)} \leq C\|g\|_{L^p(w)}$$

para todo $w \in H_{p/q,c}^{\rho,m}$ con $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1(4C_0)^{-2m}$, siempre que el lado izquierdo sea finito, con una constante C que depende de w únicamente a través de la constante de la clase $H_{p/q,c}^{\rho,m}$.

Demostración. Fijemos $1 < p < \infty$ y supongamos primero que $q = 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $f, g \in L^p(w)$. Entonces, por [BCH13a, Lemma 1] (véase también [HMS88]), existen funciones positivas $F, G \in L^p(w^{-1/(p-1)})$ tales que

$$\|F\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})} \leq 2, \tag{3.9}$$

$$\|f\|_{L^p(w)} = \|fw^{1/(p-1)}F^{-1}\|_{L^\infty} \tag{3.10}$$

$$\|G\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})} \leq 2, \tag{3.11}$$

y

$$\|g\|_{L^p(w)} = \|gw^{1/(p-1)}G^{-1}\|_{L^\infty}. \tag{3.12}$$

Sea $w \in H_{p,c}^{\rho,m}$ con $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1(4C_0)^{-2m}$. Procederemos de manera similar a la prueba de [BCH13a, Theorem 3], pero daremos los cambios esenciales. Sea $h = F + G$ y definamos

$$\mathscr{R}h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{T}_{c_1,m_1}^k h(x)}{2^k \|\widetilde{T}_{c_1,m_1}\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})}^k},$$

donde

$$\widetilde{T}_{c_1,m_1} f = \widetilde{\mathcal{M}}^{m_1}_{\rho,c_1}(f w^{-1/(p-1)}) w^{1/(p-1)},$$

el cual es un operador acotado en $L^p(w^{-1/(p-1)})$ ya que $\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1}$ es acotada en $L^p(w)$, para el peso dado. En efecto, como $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ y tomando $c_2 = c_1(2C_0)^{-m}$, se tiene que $\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1} \lesssim \widetilde{M}^{\rho}_{c_2,m}$ por la Proposición 2.15. Y, observando que $c_2 > c(8C_0)^m$ por la hipótesis sobre c, el Teorema 2.16(ii) da la acotación en $L^p(w)$ deseada de $\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1}$.

Debido a la acotación mencionada, la función $\mathscr{R}h$ verifica que

$$h \leq \mathscr{R}h, \tag{3.13}$$

$$\|\mathscr{R}h\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})} \leq 2\|h\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})}, \tag{3.14}$$

y

$$\widetilde{T}_{c_1,m_1}(\mathscr{R}h) \leq 2\|\widetilde{T}_{c_1,m_1}\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})} \mathscr{R}h,$$

donde esta última desigualdad implica que $(\mathscr{R}h)w^{-1/(p-1)}$ es un peso en H^{ρ,m_1}_{1,c_1} por la Observación 2.17, más aún, la constante $2\|\widetilde{T}_{c_1,m_1}\|_{L^p(w^{-1/(p-1)})}$ es mayor que la constante de $(\mathscr{R}h)w^{-1/(p-1)}$ en la clase correspondiente de pesos.

Por lo tanto de (3.12), (3.13) y del hecho que, por hipótesis, $\|fw\|_{L^\infty} \leq C\|gw\|_{L^\infty}$, se tiene

$$\|g\|_{L^p(w)} = \|g w^{\frac{1}{p-1}} G^{-1}\|_{L^\infty} \geq \|g w^{\frac{1}{p-1}} (\mathscr{R}h)^{-1}\|_{L^\infty} \geq C\|f w^{\frac{1}{p-1}} (\mathscr{R}h)^{-1}\|_{L^\infty} \tag{3.15}$$

puesto que $\|f w^{\frac{1}{p-1}} (\mathscr{R}h)^{-1}\|_{L^\infty} < \infty$. En efecto,

$$\|f w^{\frac{1}{p-1}} (Rh)^{-1}\|_{L^\infty} \leq \|f w^{\frac{1}{p-1}} F^{-1}\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^p(w)} < \infty.$$

Finalmente, de (3.15), (3.14), (3.9) y (3.11) se obtiene

$$\|f\|^p_{L^p(w)} \leq \|f\, w^{\frac{1}{p-1}} (\mathscr{R}h)^{-1}\|^p_{L^\infty} \|\mathscr{R}h\|^p_{L^p\left(w^{-1/(p-1)}\right)} \leq C\|g\|^p_{L^p(w)}.$$

Sea $q > 0$. Consideremos los pares (f^q, g^q) de funciones medibles no negativas y sea v un peso tal que $v^{-1} \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$. Notemos que $v^{1/q}$ verifica $(v^{1/q})^{-q} \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$, por lo que podemos usar la hipótesis para obtener que

$$\|f^q v\|_\infty = \|f v^{1/q}\|^q_\infty \leq C\|g v^{1/q}\|^q_\infty = C\|g^q v\|_\infty.$$

Es decir, se cumple (3.8) con los pares (f^q, g^q) y todo peso $v^{-1} \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$, por lo que podemos aplicar el resultado del caso anterior con exponente $1 < \frac{p}{q} < \infty$. Resulta que

$$\|f\|_{L^p(w)} = \|f^q\|^{1/q}_{L^{p/q}(w)} \leq C\|g^q\|^{1/q}_{L^{p/q}(w)} = \|g\|_{L^p(w)}$$

para todo $q < p < \infty$ y todo peso $w \in H^{\rho,m}_{p/q,c}$ con $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1(4C_0)^{-2m}$. $\square$

Para aplicar el Teorema 3.8 en el contexto de operadores, necesitamos reformular la acotación $L^\infty(w)$-$\mathrm{BMO}_\rho(w)$ en términos de una desigualdad del tipo (3.8).

Esto se logra mediante la caracterización del espacio $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ en términos de una maximal sharp localizada en bolas de la familia $\mathcal{B}_\rho$, lo que permite reducir la estimación en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ a una desigualdad puntual en $L^\infty(w)$. Enunciamos a continuación esta caracterización y una consecuencia que será utilizada posteriormente.

Lema 3.9 ([BCH13a, Lemma 2]). *Para todo peso w y toda función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, se tiene que $\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho(w)} \sim \|M^\sharp_{\mathrm{loc}}(f)w\|_\infty$, donde*

$$M^\sharp_{\mathrm{loc}}(f)(x) := \sup_{x\in B\in\mathcal{B}_\rho} \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| + \sup_{x\in B=B(y,\rho(y))} \frac{1}{|B|}\int_B |f|.$$

Proposición 3.10 ([BCH13a, Corollary 5]). *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A^{\rho,\mathrm{loc}}$. Si $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, entonces existe una constante C tal que*

$$\|g\|_{L^p(w)} \leq C\|M^\sharp_{\mathrm{loc}} g\|_{L^p(w)}.$$

Estamos en condiciones de enunciar el segundo teorema de extrapolación para operadores acotados de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$.

Teorema 3.11. *Sea $q > 0$ y sea T un operador acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-q} \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$ para ciertos $c_1, m_1 \geq 0$, con constante de acotación que depende de w a través de la constante de la condición $w^{-q} \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$.*

Entonces, T es acotado en $L^p(w)$ para todo $q < p < \infty$ y todo $w \in H^{\rho,m}_{p/q,c}$, donde $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1(4C_0)^{-2m}$.

Demostración. Observemos primero que, por el Lema 3.9 y la hipótesis sobre T, para toda $f \in L^\infty(w)$ se tiene

$$\|M^\sharp_{\mathrm{loc}}(Tf)w\|_{L^\infty} \lesssim \|Tf\|_{\mathrm{BMO}_\rho(w)} \lesssim \|f\|_{L^\infty(w)} = C\|fw\|_{L^\infty},$$

siempre que w sea un peso tal que $w^{-q} \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$. Notar que el lado izquierdo es finito, y que esta desigualdad significa que el par $(M^\sharp_{\mathrm{loc}}(Tf), f)$ verifica (3.8) para todo $w^{-q} \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$.

Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.8,

$$\|M^\sharp_{\mathrm{loc}}(Tf)\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)},$$

para todo $w \in H^{\rho,m}_{p/q,c}$ con $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1(4C_0)^{-2m}$, donde la constante C depende únicamente de la constante del peso en su clase.

Finalmente, la Proposición 2.4 nos permite aplicar la Proposición 3.10, de donde resulta que

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq C\|M^\sharp_{\mathrm{loc}}(Tf)\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}.$$ □

Probaremos ahora el Teorema 3.7, para luego deducir la acotación en $L^p(w)$ establecida en el Teorema 3.6 mediante el resultado de extrapolación anterior.

Demostración del Teorema 3.7. Para demostrar el ítem (i), sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r \leq \rho(x_0)$ y $B = B(x_0, r)$. Consideremos

$$f = f\chi_{2B} + f\chi_{B(x_0,2\rho(x_0))\setminus 2B} + f\chi_{B(x_0,2\rho(x_0))^c} =: f_1 + f_2 + f_3. \tag{3.16}$$

Notemos que como $w^{-1} \in H_{1,c}^{\rho,m_1} \subseteq A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$ (ver Proposición 2.4), de acuerdo al Lema 2.10 existe $\gamma > 1$ tal que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-\gamma}\right)^{1/\gamma} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B w^{-1},$$

ya que $B \in \mathcal{B}_\rho$.

Como T es acotado en $L^\gamma(\mathbb{R}^d)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(x)|dx &\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(x)|^\gamma dx\right)^{1/\gamma} \\
&\leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_{2B} |f(x)|^\gamma dx\right)^{1/\gamma} \\
&\leq C\|fw\|_\infty \left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B} w^{-\gamma}(x)dx\right)^{1/\gamma} \\
&\leq C\|fw\|_\infty \left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B} w^{-1}(x)dx\right) \\
&\leq C\|fw\|_\infty \operatorname*{ínf}_{2B} w^{-1} \\
&\leq C\|fw\|_\infty \operatorname*{ínf}_{B} w^{-1} \\
&= C\frac{\|fw\|_\infty}{\|w\chi_B\|_\infty}.
\end{aligned}$$

Para $⨍_B |Tf_3(x)|$ estimaremos $|Tf_3(x)|$ con $x \in B$, puntualmente. Denotaremos por $B_0 = B(x_0, \rho(x_0))$ y $B_0^k = 2^k B_0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\int_{B_0^{k+1}} |f| \leq \|fw\|_\infty \int_{B_0^{k+1}} w^{-1} \leq C\exp\left(c\left(1+2^{k+1}\right)^{m_1}\right)|B_0^{k+1}|\frac{\|fw\|_\infty}{\|w\chi_{B_0^{k+1}}\|_\infty}, \tag{3.17}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, por la condición de tamaño (3.3) del núcleo K con constantes c_1 y m_1, aplicando la desigualdad anterior, y de acuerdo a la Observación 1.5 obtenemos, para cada $x \in B$, que

$$\begin{aligned}
|Tf_3(x)| &\leq \sum_{k\geq 2}\int_{B_0^{k+1}\setminus B_0^k} |K(x,y)||f(y)|dy \\
&\leq C\sum_{k\geq 2}\int_{B_0^{k+1}\setminus B_0^k} \frac{1}{|B_0^{k-1}|}\exp\left(-c_1\left(1+\frac{2^{k-1}\rho(x_0)}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)|f(y)|dy
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\sum_{k\geq 2}\exp\left(-c_1(1+2^{k-2}C_0^{-1})^{m_1}\right)\left(\frac{1}{|B_0^{k+1}|}\int_{B_0^{k+1}}|f(y)|dy\right)\\
&\leq C\sum_{k\geq 2}\frac{\|fw\|_\infty}{\|w\chi_{B_0^{k+1}}\|_\infty}\exp\left(-c_1(8C_0)^{-m_1}(1+2^{k+1})^{m_1}\right)\exp\left(c\left(1+2^{k+1}\right)^{m_1}\right)\\
&\leq C\frac{\|fw\|_\infty}{\|w\chi_B\|_\infty}\sum_{k\geq 2}\exp\left((-c_1(8C_0)^{-m_1}+c)(1+2^{k+1})^{m_1}\right),
\end{aligned}$$

donde la serie converge ya que $c < c_1(8C_0)^{-m_1}$.

La acotación de Tf_2 se sigue como en la demostración de [BCH13a, Proposition 5], ya que sólo se requiere la condición de suavidad, y el operador T que consideramos satisface [BCH13a, (41)], que es precisamente la condición de suavidad (3.4).

Para demostrar el ítem (ii), sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r \leq \rho(x_0)$ y $B = B(x_0, r)$. Consideremos f_1, f_2 y f_3 como en (3.16).

Aquí, notemos que como $w^{-s'} \in H_{1,c}^{\rho,m}$ y $r \leq \rho(x_0)$, la estimación sobre los promedios $\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1|dx$ se obtiene aplicando la desigualdad de Kolmogorov (ver Proposición 1.2) y la hipótesis de w, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B|Tf_1(x)|dx &\leq C\frac{|B|^{1-1/s'}}{|B|}\left(\int_B|f_1(x)|^{s'}dx\right)^{1/s'}\\
&\leq C\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|f(x)|^{s'}dx\right)^{1/s'}\\
&\leq \|fw\|_{L^\infty}\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}w(x)^{-s'}dx\right)^{1/s'}\\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_{2B}\|_{L^\infty}}\exp\left(\frac{c}{s'}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{m}\right)\\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^\infty}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}.
\end{aligned}$$

Para estimar $|Tf_3(x)|$ con $x \in B$, consideramos B_0 y B_0^k como antes. $B_0 = B(x_0, \rho(x_0))$ y $B_0^k = 2^k B_0$ para $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. De la condición sobre los pesos se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_0^{k+1}}|f|^{s'}\right)^{1/s'} &\leq \|fw\|_\infty\left(\int_{B_0^{k+1}}w^{-s'}\right)^{1/s'}\\
&\leq C\exp\left(\frac{c}{s'}\left(1+2^{k+1}\right)^{m_1}\right)|B_0^{k+1}|^{1/s'}\frac{\|fw\|_\infty}{\|w\chi_{B_0^{k+1}}\|_\infty}.
\end{aligned}$$

Por esta desigualdad y la condición de tamaño (3.2) con $c_1, m_1 > 0$, tenemos la siguiente estimación al aplicar la desigualdad de Hölder con s y s'

$$\begin{aligned}
|Tf_3(x)| &\leq \sum_{k\geq 2}\int_{B_0^{k+1}\setminus B_0^k}|K(x,y)||f(y)|dy\\
&\leq \sum_{k\geq 2}\left(\int_{B_0^{k+1}\setminus B_0^k}|K(x,y)|^s dy\right)^{1/s}\left(\int_{B_0^{k+1}}|f(y)|^{s'}dy\right)^{1/s'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{k\geq 2} \frac{(2^k\rho(x_0))^{d/s}}{(2^k\rho(x_0))^d} \exp\left(-c_1\left(1+\frac{2^k\rho(x_0)}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)\left(\int_{B_0^{k+1}} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'} \qquad (3.19)\\
&\lesssim \sum_{k\geq 2} \frac{\|fw\|_\infty}{\|w\chi_{B_0^{k+1}}\|_\infty} \exp\left(-c_1\left(1+2^{k-1}C_0^{-1}\right)^{m_1}\right)\exp\left(\frac{c}{s'}\left(1+2^{k+1}\right)^{m_1}\right)\\
&\lesssim \frac{\|fw\|_\infty}{\|w\chi_{B_0}\|_\infty} \sum_{k\geq 2} \exp\left(\left(-c_1C_0^{-m_1}+\frac{4^{m_1}c}{s'}\right)(1+2^{k-1})^{m_1}\right)
\end{aligned}
$$

donde la serie converge por ser $c < c_1 s' \left(4C_0\right)^{-m_1}$.

La acotación para Tf_2 se puede obtener como en la prueba de [BCH13a, Proposition 6] ya que (3.2) implica [BCH13a, (45)]. $\square$

Demostración del Teorema 3.6. Para demostrar el ítem (i), notar que del Teorema 3.7(i) se tiene que el operador T es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-1} \in H_{1,c}^{\rho,m_1}$ con $c < c_1(8C_0)^{-m_1}$. Luego, podemos aplicar el Teorema 3.11 para obtener así que T es acotado en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$ y para $w \in H_{p,c'}^{\rho,m^*}$, con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c' < c_1(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.

La demostración del ítem (ii) se sigue de la misma manera que el ítem (i) utilizando el Teorema 3.7(ii) para obtener que el operador T es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-s'} \in H_{1,c}^{\rho,m_1}$ con $c < c_1 s' \left(4C_0\right)^{-m_1}$ y luego por Teorema 3.11, se tiene que T es acotado en $L^p(w)$ para $s' < p < \infty$ y para $w \in H_{p/s',c'}^{\rho,m^*}$ con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c' < c_1 s' \left(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$, como queríamos probar. $\square$

Cerramos la sección estableciendo un resultado para operadores adjuntos a los presentados al inicio del capítulo, esto es, para operadores T^* de la forma

$$
T^*f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K^*(x,y)f(y)dy, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ y } x \notin \operatorname{sop}(f),
$$

donde $K^*(x,y) = K(y,x)$ y K es el núcleo de un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (s,δ) para algún $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$. Mediante un argumento de dualidad y el Teorema 3.6, resultan también acotados en espacios $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$, con pesos en una clase $H_{p,c}^{\rho,m}$ adecuada.

Teorema 3.12. *Sea T un operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (s,δ) con $1 < s \leq \infty$, $0 < \delta \leq 1$ y constantes c_1 y m_1 en la condición de tamaño.*

(i) *Si $s = \infty$, entonces el operador adjunto T^* es acotado en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y todo peso $w \in H_{p,c^*}^{\rho,m^*}$ con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c^* < c_1\left(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$.*

(ii) *Si $1 < s < \infty$, entonces T^* es acotado en $L^p(w)$ para todo $1 < p < s$ y todo peso w tal que $w^{-\frac{1}{p-1}} \in H_{p'/s',c^*}^{\rho,m^*}$ con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c^* < c_1 s' \left(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$.*

Demostración. Comencemos probando (ii). Dado que $L^{p'}(\sigma)$ se identifica con el espacio dual de $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$, donde $\sigma = w^{-\frac{1}{p-1}}$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|T^*f\|_{L^p(w)} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\sigma)}=1} \int_{\mathbb{R}^d} T^*f(x)g(x)dx \\
&= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\sigma)}=1} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)Tg(x)dx \\
&= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\sigma)}=1} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)Tg(x)w^{1/p}(x)w^{-1/p}(x)dx \\
&\leq \|f\|_{L^p(w)} \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\sigma)}=1} \|Tg\|_{L^{p'}(\sigma)} \\
&\leq C\|f\|_{L^p(w)},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se utilizó el Teorema 3.6(ii) puesto que, por hipótesis, $\sigma = w^{-\frac{1}{p-1}} \in H^{\rho,m^*}_{p'/s',c^*}$ con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c^* < c_1 s' \left(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$, lo que implica la acotación de T en $L^{p'}(\sigma)$.

La demostración del ítem (i) se obtiene de manera análoga al caso anterior. El Teorema 3.6(i) garantiza la acotación de T en $L^{p'}(\sigma)$ cuando $\sigma = w^{-\frac{1}{p-1}} \in H^{\rho,m^*}_{p',c^*}$ con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c^* < c_1 \left(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$. Como, por el Lema 2.5(ii), la condición $w^{-\frac{1}{p-1}} \in H^{\rho,m^*}_{p',c^*}$ es equivalente a $w \in H^{\rho,m^*}_{p,c^*}$ con los mismos parámetros c^* y m^*, se obtiene la acotación deseada en el caso $s = \infty$. □

Observación 3.13. Entre los operadores asociados al semigrupo de Schrödinger generalizado que nos interesan estudiar, existen algunos, como los operadores maximales o las funciones de Littlewood-Paley, que no son lineales, pero pueden entenderse como operadores lineales en espacios de Banach apropiados. Así, podemos considerar, en lugar de los valores absolutos en (3.3) y (3.4), las normas correspondientes a dicho espacio, de donde se sigue que los resultados de los Teoremas 3.7(i), 3.6(i) y 3.12 siguen siendo válidos. Describiremos con más detalle este enfoque en el Capítulo 5 con el fin de obtener resultados de acotación para este tipo de operadores.

3.2. Estimaciones en $L^1(w)$

En esta sección nos centraremos en el estudio de desigualdades con pesos en el caso extremo $p = 1$. En particular, obtendremos resultados de acotación débil de tipo $(1, 1)$ con respecto a pesos en una clase adecuada, para operadores que sean adjuntos de operadores de tipo (s, δ), con $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$.

Recordemos que dado un operador T con núcleo asociado $K:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, entendido en el sentido que

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}K(x,y)f(y)dy,\quad f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ y } x\notin \operatorname{sop} f;$$

se tiene que su operador adjunto T^* satisface

$$T^*f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}K^*(x,y)f(y)dy,\quad f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ y } x\notin \operatorname{sop}(f),$$

donde $K^*(x,y)=K(y,x)$.

Más aún, si el núcleo K satisface las condiciones (a) y (b) de la Definición 3.1 con parámetros c y m, entonces T^* tiene núcleo asociado K^* verifica que

(i) existe una constante C tal que para todo $R>0$,

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x-y_0|\le 2R}|K^*(x,y)|^s dx\right)^{1/s}\le \frac{C}{R^d}\exp\left(-c\left(1+\frac{R}{\rho(y)}\right)^m\right),$$

siempre que $|y-y_0|<R/2$;

(ii) existe una constante C tal que para todo $R>0$,

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x-y_0|\le 2R}|K^*(x,y)-K^*(x,y_0)|^s\,dx\right)^{1/s}\le \frac{C}{R^d}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta,$$

siempre que $|y-y_0|<r\le\rho(y_0)$ y $r<R/2$.

De manera análoga si K satisface las condiciones (a) y (b) de la Definición 3.3 con parámetros c y m, entonces T^* tiene núcleo asociado K^* que verifica

(i) existe una constante C tal que

$$|K^*(x,y)|\le\frac{C}{|x-y|^d}\exp\left(-c\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^m\right),\qquad \text{para todo } x\neq y;$$

(ii) existe una constante C tal que

$$|K^*(x,y)-K^*(y,y_0)|\le\frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|y-y_0|}{|x-y|}\right)^\delta,$$

para todo $|x-y|>2|y-y_0|$.

Dado que probamos que los operadores adjuntos de operadores Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (s,δ), con $1<s\le\infty$ y $0<\delta\le 1$ son acotados para todo $1<p<s$, es natural preguntarse qué ocurre en el extremo $p=1$. Teniendo en cuenta los resultados de tipo débil con pesos obtenidos en [BCH13b] en este sentido para operadores adjuntos con núcleos de tamaño polinomial y pesos en las clases A_p^ρ, podemos establecer el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.14. *Sea T un operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (s,δ), con $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$ y constantes c_1, m_1 en la condición de tamaño.*

(i) *Si $s = \infty$, sea $\nu > 1$ tal que $w^\nu \in H^{\rho,m^*}_{1,c^*}$, con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c^* < c_1\left(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$. Entonces T^* es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w.*

(ii) *Si $1 < s < \infty$, sea $\nu > 1$ tal que $w^{s'\nu} \in H^{\rho,m^*}_{1,c^*}$, con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c^* < c_1 s'\left(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$. Entonces T^* es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w.*

Observación 3.15. Para enunciar el resultado anterior se consideró más conveniente formular directamente las hipótesis en términos de una potencia del peso que pertenezca a una clase $H^{\rho,m}_{1,c}$ con parámetros adecuados. Si bien la Proposición 2.13 garantiza la existencia de tales potencias bajo hipótesis más generales, explicitar las constantes resultantes complicaría innecesariamente el enunciado.

Para poder demostrar el Teorema 3.14 necesitaremos probar una versión del Lema de descomposición de Calderón-Zygmund adaptada a este contexto, la cual se enuncia más abajo. Recordemos que con $Q(x,r)$ denotamos al cubo de centro x y lado $2r$.

Observación 3.16. Debido a (1.4), no es difícil ver que en las definiciones de las clases de pesos $H^{\rho,m}_{p,c}$ pueden utilizarse cubos en lugar de bolas. En este caso, la constante c de la clase se ve modificada por una constante dimensional. Más precisamente, si $p = 1$ y $w \in H^{\rho,m}_{1,c}$, como $Q(x,r) \subseteq B(x,\sqrt{d}r)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$, entonces

$$\fint_{Q(x,r)} w \leq C_d \fint_{B(x,\sqrt{d}r)} w \leq C\exp\left(c\left(1+\frac{\sqrt{d}r}{\rho(x)}\right)\right)^m \leq C\exp\left(c(\sqrt{d})^m\left(1+\frac{\sqrt{d}r}{\rho(x)}\right)\right)^m.$$

Lema 3.17. *Sea ρ una función de radio crítico. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y constantes $c, m \geq 0$ fijos. Entonces, para todo $\lambda > 0$ existe una familia, a lo sumo numerable, de cubos $Q_j = Q(x_j, r_j)$ tales que*

$$\exp\left(c\left(1+\frac{r_j}{\rho(x_j)}\right)^m\right)\lambda \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f| \leq 2^d\lambda\exp\left(c_1\left(1+\frac{r_j}{\rho(x_j)}\right)^{m(k_0+1)}\right), \tag{3.20}$$

donde la constante c_1 depende de las constantes de (1.4) y de c y m. Además,

$$|f(x)| \leq \lambda, \qquad \textit{para casi todo } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_j Q_j.$$

Demostración. Dado que, para cualquier cubo $Q = Q(x,r)$,

$$\exp\left(-c\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^m\right)\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \leq \frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^d}|f|,$$

y que el término del lado derecho tiende a cero cuando $r \to \infty$ pues $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, existe una partición de $\mathbb{R}^d$ en cubos diádicos, con lados paralelos a los ejes coordenados, tal que

$$\exp\left(-c\left(1+\frac{r_0}{\rho(z)}\right)^m\right)\frac{1}{|Q(z,r_0)|}\int_{Q(z,r_0)}|f| \leq \lambda,$$

para cada cubo $Q = Q(z, r_0)$ de la partición.

Particionamos cada cubo Q en 2^d cubos diádicos y seleccionamos aquellos cubos $Q_j = Q(x_j, r_j)$ para los cuales

$$\exp\left(-c\left(1+\frac{r_j}{\rho(x_j)}\right)^m\right)\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f| > \lambda.$$

Repitiendo este procedimiento con los cubos no seleccionados, obtenemos una familia de cubos maximales y disjuntos $Q_j = Q(x_j, r_j)$ que satisfacen

$$\exp\left(c\left(1+\frac{r_j}{\rho(x_j)}\right)^m\right)\lambda \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f|,$$

lo cual corresponde a la primera desigualdad de (3.20).

Por otro lado, si Q_j fue seleccionado, está contenido en un cubo de la división anterior $Q(z, 2r_j)$ que cumple

$$\exp\left(-c\left(1+\frac{2r_j}{\rho(z)}\right)^m\right)\frac{1}{|Q(z,2r_j)|}\int_{Q(z,2r_j)}|f| \leq \lambda.$$

Entonces, de acuerdo a (1.4) se obtiene

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f| \leq 2^d\lambda\,\exp\left(c(2C_0)^m\left(1+\frac{r_j}{\rho(x_j)}\right)^{(k_0+1)m}\right),$$

lo cual prueba la cota superior de (3.20).

Si $x \notin \bigcup_j Q_j$, entonces existe una sucesión de cubos $Q_n = Q(x_n, r_n)$ que contienen a x, con radios tendiendo a cero, y que no fueron seleccionados. Para cada uno de ellos se cumple

$$\exp\left(-c\left(1+\frac{r_n}{\rho(x_n)}\right)^m\right)\frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n}|f| \leq \lambda.$$

Por la continuidad y positividad de ρ, y aplicando el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, se concluye que $|f(x)| \leq \lambda$ para casi todo $x \notin \bigcup_j Q_j$. □

Demostración del Teorema 3.14. Comencemos probando el ítem (ii). Sea $\lambda > 0$, $f \in L^1(w)$ y $w^{s'\nu} \in H_{1,c^*}^{\rho,m^*}$. Queremos demostrar que

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^d : |T^*f(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|f|w,$$

con C independiente de f y λ.

Consideremos los cubos de Calderón–Zygmund del Lema 3.17, $Q_j = Q(x_j, r_j)$, con constantes $\frac{c^*(2d)^{m^*}}{s'\nu}$ y m^*. Definimos los siguientes conjuntos de índices

$$J_1 = \{j : r_j \leq \rho(x_j)\}, \qquad J_2 = \{j : r_j > \rho(x_j)\},$$

y también los conjuntos

$$\Omega_1 = \bigcup_{j\in J_1} Q_j, \qquad \Omega_2 = \bigcup_{j\in J_2} Q_j, \qquad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Escribimos $f = g + h$, donde

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} f, & \text{si } x \in Q_j,\ j \in J_1, \\ 0, & \text{si } x \in Q_j,\ j \in J_2, \\ f(x), & \text{si } x \notin \Omega, \end{cases}$$

y

$$h(x) = \begin{cases} f(x) - \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} f, & \text{si } x \in Q_j,\ j \in J_1, \\ f(x), & \text{si } x \in Q_j,\ j \in J_2 \\ 0, & \text{en otro caso }. \end{cases}$$

Consideramos los cubos dilatados $\widetilde{Q_j} = Q_j(x_j, 2\sqrt{d}r_j)$, $\widetilde{\Omega} = \bigcup_j \widetilde{Q_j}$, y escribimos

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^d : &|T^*f(x)| > \lambda\}) \\ &= w\left(\{\widetilde{\Omega} : |T^*f(x)| > \lambda\}\right) + w\left(\{x \notin \widetilde{\Omega} : |T^*f(x)| > \lambda\}\right). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Para el primer término, escribimos

$$w\left(\{x \in \widetilde{\Omega} : |T^*f(x)| > \lambda\}\right) \leq w(\tilde{\Omega}) \leq \sum_j w(\widetilde{Q_j}) \lesssim \sum_j \frac{w(\widetilde{Q_j})}{|\widetilde{Q_j}|}|Q_j|.$$

Notemos que, como $w^{s'\nu} \in H^{\rho,m^*}_{1,c^*}$, se deduce fácilmente que $w \in H^{\rho,m^*}_{1,\frac{c^*}{s'\nu}}$. Además, a partir de las propiedades de los cubos Q_j, y teniendo en cuenta la Observación 3.16, se tiene que

$$\begin{aligned} &w\left(\{x \in \widetilde{\Omega} : Tf(x) > \lambda\}\right) \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda}\sum_j \exp\left(\frac{c^*}{s'\nu}\left(1 + \frac{2dr_j}{\rho(x_j)}\right)^{m^*}\right) \exp\left(-\frac{c^*(2d)^{m^*}}{s'\nu}\left(1 + \frac{r_j}{\rho(x_j)}\right)^{m^*}\right)\left(\inf_{\widetilde{Q_j}} w\right)\int_{Q_j}|f| \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda}\sum_j \left(\inf_{Q_j} w\right)\int_{Q_j}|f| \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j}|f|w \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|f|w. \end{aligned}$$

Para el segundo término de (3.21), según como hemos escrito a f, dividimos el mismo en dos contribuciones,

$$w\left(\{x \notin \widetilde{\Omega} : |T^*f(x)| > \lambda\}\right) \leq I + II,$$

donde

$$I = w\left(\{x \in \mathbb{R}^d : |T^*g(x)| > \lambda\}\right), \quad \text{y} \quad II = w\left(\{x \notin \widetilde{\Omega} : |T^*h(x)| > \lambda\}\right).$$

Para estimar I, notemos que $|g(x)| \lesssim \lambda$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. En efecto, si $x \notin \Omega$, $g(x) = f(x)$ y para casi todo $x \notin \Omega$ se cumple $|f(x)| \leq \lambda$ por el Lema 3.17. Si $x \in Q_j$ con $j \in J_2$, $g(x) = 0$ y se cumple trivialmente, mientras que si $x \in Q_j$ con $j \in J_1$, entonces nuevamente del Lema 3.17, $|g(x)| \leq 2^d \lambda \exp\left(c2^{m_1}\right) \lesssim \lambda$.

Por otro lado, usando que $w^{s'\nu} \in H_{1,c^*}^{\rho,m^*}$, y eligiendo p tal que $p - s'(p-1) = \frac{1}{\nu}$ y $q = \frac{p'}{s'}$ se puede verificar fácilmente que $1 < p < s$ y que $\left(w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{-\frac{1}{q-1}} = w^{s'\nu} \in H_{1,c^*}^{\rho,m^*}$. Luego, como $H_{1,c^*}^{\rho,m^*} \subseteq H_{q',c^*}^{\rho,m^*}$, por dualidad se tiene $w^{-\frac{1}{p-1}} \in H_{q,c^*}^{\rho,m^*}$ (ver Lema 2.5(i) y (ii)). Teniendo en cuenta las restricciones sobre c^*, por el Teorema 3.12(ii) se sigue que T^* es acotado en $L^p(w)$. En consecuencia, es de tipo débil (p,p) con respecto a w, de donde tenemos que

$$\begin{aligned}
I &\leq w(\{x : |T^*g(x)| > \lambda\}) \\
&\lesssim \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^p w(x)dx \\
&\lesssim \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| w(x)dx \\
&\lesssim \frac{C}{\lambda} \left(\sum_{j \in J_1} \frac{w(Q_j)}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f| + \int_{\Omega^c} |f|w \right).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $w \in H_{1,c^*/s'\nu}^{\rho,m^*}$, de la Observación 3.16, y teniendo en cuenta que $j \in J_1$, se tiene que

$$\frac{w(Q_j)}{|Q_j|} \lesssim \inf_{B(x_j, \sqrt{d}r_j)} w \lesssim \inf_{Q_j} w.$$

Por lo tanto (3.22) puede acotarse por $\dfrac{C}{\lambda} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f|w$.

Para estimar II, como $\operatorname{sop}(h) \subseteq \Omega$ se tiene

$$\begin{aligned}
w\left(\{x \in \widetilde{\Omega}^c : |T^*h(x)| > \lambda\}\right) &\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\widetilde{\Omega}^c} \left(\int_{\Omega} |K^*(x,y)||h(y)|dy \right) w(x)dx \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{j \geq 1} \int_{Q_j} \left(\int_{\widetilde{\Omega}^c} |K(y,x)| w(x)dx \right) |h(y)|dy \right] \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{j \geq 1} \int_{Q_j} \left(\int_{(\widetilde{Q_j})^c} |K(y,x)| w(x)dx \right) |h(y)|dy \right].
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Sea $y \in Q_j$. Como $B(x_j, 2\sqrt{d}r_j) \subseteq \widetilde{Q_j}$ entonces $(\widetilde{Q_j})^c \subseteq B(x_j, 2\sqrt{d}r_j)^c$. Llamando $B_j = B(x_j, 2\sqrt{d}r_j)$, $B_j^k = 2^k B_j$, dividimos la integral en coronas y aplicamos la desigualdad de Hölder para obtener

$$
\begin{aligned}
\int_{(\widetilde{Q_j})^c} & |K(y,x)|w(x)dx \\
&\leq \int_{{B_j}^c} |K(y,x)|w(x)dx \\
&\leq \sum_{k\geq 1} \int_{B_j^{k+1}\setminus B_j^k} |K(y,x)|w(x)dx \qquad (3.24)\\
&\leq \sum_{k\geq 1} \left(\int_{2^k\sqrt{d}r_j<|x-x_j|<2^{k+1}\sqrt{d}r_j} |K(y,x)|^s dx \right)^{1/s} \left(\int_{B_j^{k+1}} w^{s'}(x)dx \right)^{1/s'} \\
&\leq C \sum_{k\geq 1} (2^{k+1}\sqrt{d}r_j)^{-d/s'} \exp\left(-c_1 \left(1+\frac{2^{k+1}\sqrt{d}r_j}{\rho(y)}\right)^{m_1} \right) \left(\int_{B_j^{k+1}} w^{s'}(x)dx \right)^{1/s'} \\
&= C \sum_{k\geq 1} \exp\left(-c_1 \left(1+\frac{2^{k+1}\sqrt{d}r_j}{\rho(y)}\right)^{m_1} \right) \left(\fint_{B_j^{k+1}} w^{s'}(x)dx \right)^{1/s'},
\end{aligned}
$$

donde en el primer factor hemos aplicado la condición de tamaño para K.

Por un lado, utilizando (1.4), reescribimos el término que involucra $\rho(y)$ en función de $\rho(x_j)$. En efecto, $\rho(y) \leq C_0\rho(x_j)\left(1+\frac{r_j}{\rho(x_j)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}}$ pues $y \in Q_j$. Por lo tanto,

$$
1+\frac{2^{k+1}\sqrt{d}\,r_j}{\rho(y)} \geq 1+\frac{2^{k+2}\sqrt{d}\,r_j}{2C_0\rho(x_j)}\left(1+\frac{\sqrt{d}r_j}{\rho(x_j)}\right)^{-\frac{k_0}{k_0+1}} \geq \frac{1}{2C_0}\left(1+\frac{2^{k+2}\sqrt{d}r_j}{\rho(x_j)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}.
$$

En consecuencia,

$$
\exp\left(-c_1 \left(1+\frac{2^{k+1}\sqrt{d}r_j}{\rho(y)}\right)^{m_1} \right) \leq C\exp\left(-\frac{c_1}{(2C_0)^{m_1}} \left(1+\frac{2^{k+2}\sqrt{d}r_j}{\rho(x_j)}\right)^{m^*} \right). \qquad (3.25)
$$

Por otra parte, para el factor que involucra al peso, por la desigualdad de Jensen con $\nu > 1$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\left(\fint_{B_j^{k+1}} w^{s'}dx \right)^{1/s'} &\leq \left(\fint_{B_j^{k+1}} w^{s'\nu}dx \right)^{1/(s'\nu)} \\
&\lesssim \exp\left(\frac{c^*}{s'\nu}\left(1+\frac{2^{k+2}\sqrt{d}r_j}{\rho(x_j)}\right)^{m^*} \right) \inf_{B_j^{k+1}} w \\
&\lesssim \exp\left(\frac{c^*}{s'\nu}\left(1+\frac{2^{k+2}\sqrt{d}r_j}{\rho(x_j)}\right)^{m^*} \right) \inf_{Q_j} w, \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que $Q_j \subseteq \tilde{Q}_j \subseteq B_j \subseteq B_j^{k+1}$ para todo $k \geq 1$.

Sea $\tilde{c} = -\frac{c^*}{s'\nu} + \frac{c_1}{(2C_0)^{m_1}}$. Luego, resulta que $\tilde{c} > 0$ por ser

$$
c^* < c_1 s'\left(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*} \leq c_1 s'\nu\left(2^{k_0+1}C_0^{k_0+1}\right)^{-m^*} = c_1 s'\nu(2C_0)^{-m_1}.
$$

Así, de (3.25) y (3.26), obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{Q_j}^c} |K(y,x)|w(x)dx &\lesssim \operatorname*{ínf}_{Q_j} w \sum_{k\geq 1} \exp\left(-\tilde{c}\left(1+\frac{2^{k+2}\sqrt{d}r_j}{\rho(x_j)}\right)^{m^*}\right)\\ &\lesssim \operatorname*{ínf}_{Q_j} w \exp\left(-\tilde{c}\left(1+\frac{8\sqrt{d}r_j}{\rho(x_j)}\right)^{m^*}\right) \lesssim \operatorname*{ínf}_{Q_j} w,\end{aligned}$$

donde tenemos que la serie converge y su suma está controla por el primer término, el cual está acotado uniformemente en j.

Reemplazando en (3.23), y usando la definición de h, se sigue que

$$\begin{aligned}& w\left(\{x\in\widetilde{\Omega}^c : |T^*h(x)|>\lambda\}\right)\\ &\lesssim \frac{1}{\lambda}\sum_{j\geq 1}\operatorname*{ínf}_{Q_j} w\int_{Q_j}|h(y)|dy\\ &\lesssim \frac{1}{\lambda}\sum_{j\geq 1}\int_{Q_j}|h(y)|w(y)dy\\ &\sim \frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J_1}\int_{Q_j}\left|f(y)-\fint_{Q_j} f\right|w(y)dy+\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J_2}\int_{Q_j}|f(y)|w(y)dy\\ &\lesssim \frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J_1}\int_{Q_j}|f(y)|w(y)dy+\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J_2}\int_{Q_j}|f(y)|w(y)dy\\ &\lesssim \frac{1}{\lambda}\sum_{j}\int_{Q_j}|f(y)|w(y)dy\\ &\lesssim \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|w(y)dy.\end{aligned}$$

La prueba del ítem (i) se obtiene de manera análoga a la del ítem (ii). En efecto, en el primer término de (3.21) se utiliza la hipótesis sobre el peso w, esto es, $w^\nu \in H_{1,c^*}^{\rho,m^*}$, donde $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c^* < c_1\left(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3}\right)^{-m^*}$. En el segundo término se aplica nuevamente la hipótesis sobre w y, además, en (3.24) se utiliza la condición de tamaño (3.3) en lugar de (3.1).

□

3.3. Estimaciones en espacios de tipo BMO

En esta sección abordaremos el problema de acotar los operadores de tipo Schrödinger-Calderón-Zygmund exponenciales, de tipo (s,δ), con $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$, en los espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$, definidos en la Sección 1.5, para ciertos pesos w.

Antes de dar el enunciado del resultado principal, necesitamos hacer algunas consideraciones sobre el sentido que le daremos a Tf cuando f sea una función en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$, con $0 \leq \alpha < 1$. Recordemos que esto nos dice que $f \in \mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ verifica las condiciones

$$\frac{1}{w(B)} \int_B |f - f_B| \leq C\,|B|^{\alpha/d}, \qquad \text{para toda bola } B \subseteq \mathbb{R}^d$$

y

$$\frac{1}{w(B)} \int_B |f| \leq C\,|B|^{\alpha/d}, \qquad \text{para toda bola } B = B(x,r), r \geq \rho(x),$$

para alguna constante C.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $R \geq \rho(x_0)$. Definimos para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$Tf(x) = T(f\chi_{B(x_0,2R)})(x) + \int_{B(x_0,2R)^c} K(x,y)f(y)dy, \quad x \in B(x_0,R). \tag{3.27}$$

Esta definición puede encontrarse también en [BHQ19], artículo en el cual nos basamos en esta sección. En este trabajo los autores obtienen estimaciones en espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$, en el contexto de operadores con condición de tamaño con decaimiento polinomial y, por consiguiente, la familia de pesos que surge naturalmente en sus resultados es A_p^ρ en lugar de $H_{p,c}^{\rho,m}$. El hecho de que esta definición tenga sentido para $f \in \mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ se sigue de la misma manera que allí, al igual que la buena definición en el sentido que la ecuación (3.27) es independiente de R (ver [BHQ19, p.603]).

El teorema principal de esta sección proporciona un criterio de tipo $T1$, es decir, se evalúa el operador T en la función constante $f = 1$. Por lo tanto, es importante verificar que la definición (3.27) tenga sentido para $f = 1$.

En efecto, $\chi_{B(x_0,2R)} \in L^{s'}(\mathbb{R}^d)$, lo que da la finitud del primer término, y además, usando la condición de tamaño del núcleo dada por (3.1), obtenemos para $x \in B(x_0, R)$

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,2R)^c} |K(x,y)|\,dy &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{2^jR\leq|x_0-y|<2^{j+1}R} |K(x,y)|\,dy \\
&\leq \sum_{j\geq 1} \left(\int_{2^jR\leq|x_0-y|<2^{j+1}R} |K(x,y)|^s\,dy\right)^{1/s} \left|B(x_0, 2^{j+1}R)\right|^{1/s'} \\
&\leq C \sum_{j\geq 1} \exp\left(-c\left(1 + \frac{2^jR}{\rho(x)}\right)^m\right) \\
&\leq C < \sum_{j\geq 1} \exp\left(-c\left(1+2^j\right)^m\right) < \infty,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\rho(x) \leq C\rho(x_0) \leq Cr$, por Observación 1.5. Aquí la constante $C > 0$ es independiente de $R > 0$ y de $x \in \mathbb{R}^d$.

Para simplificar la notación, escribiremos $E_{s,c_1,c_2}^{\rho,m}$ para designar a la clase de pesos dada por

$$E_{s,c_1,c_2}^{\rho,m} = \bigcup_{\eta > s'} H_{s/\eta',c_1}^{\rho,m} \cap RH_{\eta,c_2}^{\rho,m},$$

donde $1 < s < \infty$ y $c_1, c_2, m \geq 0$. Además, consideramos

$$E^{\rho,m}_{\infty,c_1,c_2} = \bigcup_{s>1} E^{\rho,m}_{s,c_1,c_2}.$$

Estamos ahora preparados para presentar el teorema central de esta sección.

Teorema 3.18. *Sea T un operador exponencial de Schrödinger–Calderón–Zygmund de tipo (s,δ) para ciertos $1 < s < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$, y constantes positivas c y m que aparecen en (3.1). Sean $0 \leq \alpha < \delta$ y $1 \leq \kappa < 1 + \frac{\delta-\alpha}{d}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *Existe una constante C tal que, para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0)$, la función $T1$ satisface*

$$\frac{1}{|B|}\int_B |T1(y) - (T1)_B|\, dy \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha+d(\kappa-1)}, \tag{3.28}$$

cuando $\alpha > 0$ o $\kappa > 1$, o bien

$$\frac{1}{|B|}\int_B |T1(y) - (T1)_B|\, dy \leq C\, \log^{-1}\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right), \tag{3.29}$$

cuando $\alpha = 0$ y $\kappa = 1$.

(ii) *El operador T es acotado de $\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)$ en $\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)$ para todo peso*

$$w \in E^{\rho,m}_{s,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3},$$

con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$. La norma del operador depende de w únicamente a través de los parámetros de las clases $E^{\rho,m}_{s,c_1,c_2}$ y $D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$.

(iii) *El operador T es acotado de $\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)$ en $\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)$ para todo peso de la forma $w(x) = |x - x_0|^{d(\kappa-1)}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, con norma del operador independiente de x_0.*

Observación 3.19. Es sencillo ver que si (3.28) vale para algún $\alpha > 0$ o $\kappa > 1$, entonces también se verifica (3.29) y se tiene la acotación del operador de $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ en sí mismo (es decir, cuando $\alpha = 0$). Sin embargo, la importancia de la condición (3.29) cuando $\alpha = 0$ y $\kappa = 1$ es que permite obtener también acotaciones de $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ en sí mismo para operadores que verifiquen (3.29) pero no necesariamente (3.28).

El caso $s = \infty$ se sigue como una consecuencia del teorema anterior y la Observación 3.4.

Corolario 3.20. *Sea T un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund exponencial de tipo (∞, δ) para algún $0 < \delta \leq 1$, y sean $c, m > 0$ las constantes que aparecen en (3.3) (para todo $1 < s < \infty$). Entonces, la acotación de T de $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ es equivalente a las condiciones (i) y (iii) del Teorema 3.18, siempre que $w \in E^{\rho,m}_{\infty,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$ con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$.*

Observación 3.21. Con la misma motivación planteada en la Observación 3.13, esto es, el estudio posterior de operadores asociados con el semigrupo de Schrödinger generalizado que no son lineales, pero pueden entenderse como operadores lineales en espacios de Banach apropiados, consideramos las normas correspondientes a dicho espacio en las hipótesis del Teorema 3.18 y el Corolario 3.20. Así obtenemos una versión de los mismos a valores vectoriales y los resultados siguen siendo válidos.

Antes de presentar la demostración del Teorema 3.18, enunciaremos y probaremos algunos resultados auxiliares.

Las demostraciones de los siguientes lemas son análogas a las dadas en [BHQ19], donde se trabaja en el contexto de operadores de Schrödinger–Calderón–Zygmund con decrecimiento polinomial y pesos en la clase A_p^ρ. No obstante, las incluimos aquí con el fin de facilitar la comprensión de los tecnicismos propios del contexto de los pesos $H^{\rho,m}_{p,c}$.

Lema 3.22. *Sea $f \in \mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ con $0 \leq \alpha < 1$, $w \in D^{\rho,m}_{\kappa,c}$, $c, m \geq 0$ y $B = B(x_0, r)$ con $r < \rho(x_0)$. Si $\kappa > 1$ o $\alpha > 0$, existe una constante positiva $C = C(c, m, d)$ tal que*

$$|f_B| \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} r^\alpha \frac{w(B)}{|B|}\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)^{d(\kappa-1)+\alpha}. \tag{3.30}$$

Si $\kappa = 1$ y $\alpha = 0$, existe una constante C tal que

$$|f_B| \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} \frac{w(B)}{|B|}\left(1 + \log_2 \frac{\rho(x_0)}{r}\right). \tag{3.31}$$

Demostración. Sea $f \in \mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ y $B = B(x_0, r)$ con $r < \rho(x_0)$. Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{j_0-1} r < \rho(x_0) \leq 2^{j_0} r$ y denotemos por $B_j = 2^j B$ para todo $j = 0, \ldots, j_0 - 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
|f_B| &\leq \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| + \sum_{j=1}^{j_0-1} \left|f_{B_{j-1}} - f_{B_j}\right| + \left|f_{B_{j_0-1}}\right| \\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| + \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{2^d}{|B_j|}\int_{B_j} \left|f - f_{B_j}\right| + \frac{2^d}{|B_{j_0}|}\int_{B_{j_0}} |f| \\
&\leq \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{2^d}{|B_j|}\int_{B_j} \left|f - f_{B_j}\right| + \frac{2^d}{|B_{j_0}|}\int_{B_{j_0}} |f| \\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} \sum_{j=0}^{j_0} \frac{w(B_j)}{|B_j|} |B_j|^{\frac{\alpha}{d}},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtuvo utilizando (1.13) y (1.14) ya que $2^{j_0-1}r < \rho(x_0) \leq 2^{j_0}r$. Aplicando la propiedad de duplicación de w se tiene

$$\begin{aligned}
|f_B| &\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}\frac{w(B)}{|B|}|B|^{\frac{\alpha}{d}}\sum_{j=0}^{j_0}2^{(d\kappa+\alpha-d)j}\exp\left(c\left(1+\frac{2^jr}{\rho(x_0)}\right)^m\right)\\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}\frac{w(B)}{|B|}r^\alpha\sum_{j=0}^{j_0}2^{(d\kappa+\alpha-d)j}\\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}\frac{w(B)}{|B|}r^\alpha\left(\frac{2^2\rho(x_0)}{r}\right)^{d(\kappa-1)+\alpha}\\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}\frac{w(B)}{|B|}r^\alpha\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)^{d(\kappa-1)+\alpha},
\end{aligned}$$

siempre que $\kappa > 1$ o $\alpha > 0$, donde C depende de los parámetros de la condición de duplicación y de la dimensión del espacio. Si $\kappa = 1$ y $\alpha = 0$, la suma anterior es igual a $j_0 + 1$. Así, tenemos

$$|f_B| \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}\frac{w(B)}{|B|}r^\alpha(j_0+1) \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho(w)}\frac{w(B)}{|B|}r^\alpha\left(1+\log_2\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)\right),$$

donde C es la misma constante del caso anterior, que depende de c, m y d. □

Lema 3.23. *Sea $f \in \mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ con $0 \leq \alpha < 1$, y sea w un peso tal que $w \in H_{\sigma',c_1}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$ para ciertos $\sigma > 1$, $\kappa \geq 1$, $c_1, c_3 \geq 0$ y $m \geq 0$. Entonces, cuando $\kappa > 1$ o $\alpha > 0$, existe una constante C tal que*

$$\begin{aligned}
&w(2^jB)^{1/\sigma'}\left(\int_{2^jB}|f-f_B|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma}\\
&\qquad\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}w(B)r^\alpha 2^{j(\alpha+d\kappa)}\exp\left((c_1+c_3)\left(1+\frac{2^jr}{\rho(x_0)}\right)^m\right),
\end{aligned}\tag{3.32}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ y toda bola $B = B(x_0, r)$.

Cuando $\kappa = 1$ y $\alpha = 0$, existe una constante C tal que

$$\begin{aligned}
&w(2^jB)^{1/\sigma'}\left(\int_{2^jB}|f-f_B|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma}\\
&\qquad\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}w(B)j2^{jd}\exp\left((c_1+c_3)\left(1+\frac{2^jr}{\rho(x_0)}\right)^m\right),
\end{aligned}\tag{3.33}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ y toda bola $B = B(x_0, r)$.

Demostración. Podemos escribir, para $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&w(2^jB)^{1/\sigma'}\left(\int_{2^jB}|f-f_B|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma}\\
&\leq w(2^jB)^{1/\sigma'}\left[\left(\int_{2^jB}|f-f_{2^jB}|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma}+\left(w^{1-\sigma}(2^jB)\right)^{1/\sigma}\sum_{i=1}^{j}|f_{2^iB}-f_{2^{i-1}B}|\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq w(2^jB)\left(\frac{1}{w(2^jB)}\int_{2^jB}|f-f_{2^jB}|^\sigma w^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma}\\
&\quad + w(2^jB)^{1/\sigma'}\left(w^{-\frac{1}{\sigma'-1}}(2^jB)\right)^{1/\sigma}\sum_{i=1}^{j}\frac{2^d}{|2^iB|}\int_{2^iB}|f-f_{2^iB}|\\
&:= I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

Para estimar I_1, podemos aplicar el Lema 1.19 con $q=p'=\sigma'$, dado que $w\in A_{\sigma'}^{\rho,\mathrm{loc}}$ (por Proposición 2.4), junto con la condición de duplicación de w, para obtener

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}w(2^jB)|2^jB|^{\alpha/d}\\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}w(B)r^\alpha 2^{j(d\kappa+\alpha)}\exp\left(c_3\left(1+\frac{2^jr}{\rho(x_0)}\right)^m\right).
\end{aligned}
$$

Para I_2, notemos que

$$
w(2^jB)^{1/\sigma'}\left(w^{-\frac{1}{\sigma'-1}}(2^jB)\right)^{1/\sigma}\leq C2^{jd}r^d\exp\left(c_1\left(1+\frac{2^jr}{\rho(x_0)}\right)^m\right),
$$

ya que $w\in H_{\sigma',c_1}^{\rho,m}$.

Por otro lado, dado que $f\in \mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ y $w\in D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$, si primero asumimos que $\kappa>1$ o $\alpha>0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{|2^iB|}\int_{2^iB}|f-f_{2^iB}| &\leq \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}\sum_{i=1}^{j}|2^iB|^{\alpha/d-1}w(2^iB)\\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}r^{\alpha-d}w(B)\sum_{i=1}^{j}2^{i(\alpha-d)}2^{id\kappa}\exp\left(c_3\left(1+\frac{2^ir}{\rho(x_0)}\right)^m\right)\\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}r^{\alpha-d}w(B)\exp\left(c_3\left(1+\frac{2^jr}{\rho(x_0)}\right)^m\right)2^{j(d(\kappa-1)+\alpha)},
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que $d(\kappa-1)+\alpha>0$ para acotar la suma en este caso.

Combinando las estimaciones anteriores, obtenemos, para $k>1$ o $\alpha>0$,

$$
I_1+I_2\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}w(B)r^\alpha 2^{j(d\kappa+\alpha)}\exp\left((c_1+c_3)\left(1+\frac{2^jr}{\rho(x_0)}\right)^m\right).
$$

Si $\kappa=1$ y $\alpha=0$, obtenemos, en cambio,

$$
\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{|2^iB|}\int_{2^iB}|f-f_{2^iB}|\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}jr^{-d}w(B)\exp\left(c_3\left(1+\frac{2^jr}{\rho(x_0)}\right)^m\right),
$$

lo cual, combinado con la estimación para I_1, conduce a (3.33).

En cualquiera de los casos, la constante C es independiente de j y de B. $\square$

El siguiente lema también es una gran herramienta técnica en sí misma pues nos facilitará conseguir las estimaciones que se dan de manera repetida en la demostración del teorema principal de está sección.

Lema 3.24. *Sea $f \in \mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)$ con $0 \leq \alpha < 1$, y $w \in E^{\rho,m}_{s,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$ para algún $s > 1$, $c_1, c_2, c_3 \geq 0$, $\kappa \geq 1$ y $m \geq 0$. Dada una bola $B = B(x_0, r)$, consideremos la función*

$$g = \begin{cases} f\chi_{2B} & si \;\; r \geq \rho(x_0); \\ (f - f_B)\chi_{2B} & si \; r < \rho(x_0). \end{cases}$$

Entonces, existe una constante C tal que para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\left(\int_{2^j B} |g|^{s'} \right)^{\frac{1}{s'}} \leq C \|f\|_{\mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)} 2^{j\left(d\left(\kappa - \frac{1}{s}\right) + \alpha\right)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d} - \frac{1}{s}} \exp\left((c_2 + c_3) \left(1 + \frac{2^j r}{\rho(x_0)} \right)^m \right).$$

Demostración. Fijemos $\eta > s'$ tal que $w \in H^{\rho,m}_{s/\eta',c_1} \cap RH^{\rho,m}_{\eta,c_2}$. Sea $\zeta = \frac{s-1}{s-\eta'} > 1$ y apliquemos la desigualdad de Hölder con este exponente para obtener

$$\begin{aligned} \left(\int_{2^j B} |g|^{s'} \right)^{\frac{1}{s'}} &= \left(\int_{2^j B} |g|^{s'} w^{\frac{1}{\zeta} - s'} w^{s' - \frac{1}{\zeta}} \right)^{\frac{1}{s'}} \\ &\leq \left(\int_{2^j B} |g|^{s'\zeta} w^{1 - s'\zeta} \right)^{\frac{1}{s'\zeta}} \left(\int_{2^j B} w^{\left(s' - \frac{1}{\zeta}\right)\zeta'} \right)^{\frac{1}{s'\zeta'}}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Dado que $w \in A^{\rho,\mathrm{loc}}_{s/\eta'}$ (por Proposición (2.4)) y notando que $s'\zeta = \left(\frac{s}{\eta'}\right)'$, podemos usar el Lema 1.20 para obtener

$$\begin{aligned} \left(\int_{2^j B} |g|^{s'\zeta} w^{1 - s'\zeta} \right)^{\frac{1}{s'\zeta}} &\leq C \|f\|_{\mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)} w(2^j B)^{\frac{1}{\left(\frac{s}{\eta'}\right)'}} |2^j B|^{\frac{\alpha}{d}} \\ &= C \|f\|_{\mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)} w(2^j B)^{\frac{1}{\left(\frac{s}{\eta'}\right)'}} |B|^{\frac{\alpha}{d}} 2^{j\alpha}, \end{aligned}$$

para los casos correspondientes de g, ya que el lema se aplica de igual manera en cada situación.

Para estimar el segundo factor en (3.34), observamos que $\left(s' - \frac{1}{\zeta}\right)\zeta' = \eta$ y $s'\zeta' = \frac{s\eta}{\eta'}$, por lo que podemos usar que $w \in RH^{\rho,m}_{\eta,c_2}$ y obtener

$$\begin{aligned} \left(\int_{2^j B} w^{\left(s' - \frac{1}{\zeta}\right)\zeta'} \right)^{\frac{1}{s'\zeta'}} = \left(\int_{2^j B} w^{\eta} \right)^{\frac{1}{\eta}\frac{\eta'}{s}} &\lesssim \left(|2^j B|^{-\frac{1}{\eta'}} w(2^j B) \exp\left(c_2 \left(1 + \frac{2^j r}{\rho(x_0)} \right)^m \right) \right)^{\frac{\eta'}{s}} \\ &\lesssim 2^{-j\frac{d}{s}} |B|^{-\frac{1}{s}} w(2^j B)^{\frac{1}{\frac{s}{\eta'}}} \exp\left(c_2 \left(1 + \frac{2^j r}{\rho(x_0)} \right)^m \right). \end{aligned}$$

Combinando ambas estimaciones anteriores, obtenemos

$$\left(\int_{2^j B} |g|^{s'} \right)^{\frac{1}{s'}} \leq C \|f\|_{\mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)} 2^{j\left(\alpha - \frac{d}{s}\right)} w(2^j B)|B|^{\frac{\alpha}{d} - \frac{1}{s}} \exp\left(c_2 \left(1 + \frac{2^j r}{\rho(x_0)} \right)^m \right).$$

Finalmente, dado que $w \in D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$, por el Remark 2.8 se tiene

$$\left(\int_{2^j B} |g|^{s'} \right)^{\frac{1}{s'}} \leq C \|f\|_{\mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)} 2^{j\left(d\left(\kappa - \frac{1}{s}\right) + \alpha\right)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d} - \frac{1}{s}} \exp\left((c_2 + c_3) \left(1 + \frac{2^j r}{\rho(x_0)} \right)^m \right),$$

como se quería demostrar. $\square$

Ahora estamos en posición de probar el Teorema 3.18.

Demostración del Teorema 3.18. Para ver que (i)⇒(ii), sea $f \in \mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ y

$$w \in E_{s,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m} = \left(\bigcup_{\eta > s'} H_{s/\eta',c_1}^{\rho,m} \cap RH_{\eta,c_2}^{\rho,m} \right) \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m},$$

con $(c_2 + c_3) < c(4C_0)^{-m}$.

Para verificar la condición (1.14), por Proposición 2.4 y el Lema 1.19, basta considerar bolas críticas. Sea $B_0 = B(x_0, \rho(x_0))$ con $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Según la definición de Tf, descomponemos la función de la forma

$$f = f_1 + f_2 = f\chi_{2B_0} + f\chi_{(2B_0)^c}.$$

Esto nos permite acotar

$$\int_{B_0} |Tf(x)|dx \leq \int_{B_0} |Tf_1(x)|dx + \int_{B_0} |Tf_2(x)|dx.$$

Comenzamos controlando el primer término. Dado que T es de tipo débil (s', s') con $s' \geq 1$, de la Desigualdad de Kolmogorov (ver Proposición 1.2) para $\gamma = 1$, obtenemos que

$$\int_{B_0} |Tf_1(x)|dx \lesssim |B_0|^{1-\frac{1}{s'}} \left(\int_{2B_0} |f|^{s'} \right)^{\frac{1}{s'}}.$$

A partir de la hipótesis sobre w, podemos usar el Lema 3.24 con $j = 1$ y $r = \rho(x_0)$ para obtener

$$\begin{aligned} \left(\int_{2B_0} |f|^{s'} \right)^{\frac{1}{s'}} &\leq C 2^{d\left(\kappa - \frac{1}{s}\right) + \alpha} \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} |B_0|^{\frac{\alpha}{d} - \frac{1}{s}} w(B_0) \exp\left((c_2 + c_3)3^m\right) \\ &\leq C \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} |B_0|^{\frac{\alpha}{d} - \frac{1}{s}} w(B_0), \end{aligned}$$

donde la constante C depende de los parámetros de las clases de pesos. Por lo tanto, deducimos que

$$\int_{B_0} |Tf_1(x)|dx \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} |B_0|^{\frac{\alpha}{d}} w(B_0).$$

A continuación estimamos la integral que involucra a Tf_2, para la cual podemos utilizar la representación de T con núcleo K. Fijamos $x \in B_0$ y realizamos la descomposición estándar en anillos, llamando $2^j B_0 = B(x_0, 2^j \rho(x_0))$ para $j \geq 1$. Así, de la desigualdad de Hölder con s y s',

$$\begin{aligned} |Tf_2(x)| &\leq \int_{(2B_0)^c} |K(x,y)||f(y)|dy \\ &\leq \sum_{j \geq 1} \int_{2^{j+1}B_0 \setminus 2^j B_0} |K(x,y)||f(y)|dy \\ &\leq \sum_{j \geq 1} \left(\int_{2^{j+1}B_0 \setminus 2^j B_0} |K(x,y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{2^{j+1}B_0} |f|^{s'} \right)^{\frac{1}{s'}}. \end{aligned}$$

Como el núcleo satisface la condición de tamaño (3.1), de (1.5) se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\int_{2^{j+1}B_0\setminus 2^jB_0}|K(x,y)|^s dy\right)^{1/s} &\leq C\left(2^j\rho(x_0)\right)^{d/s-d}\exp\left(-c\left(1+\frac{2^j\rho(x_0)}{\rho(x)}\right)^m\right)\\ &\leq C\left(2^j\rho(x_0)\right)^{d/s-d}\exp\left(-\frac{c}{(4C_0)^m}\left(1+2^{j+1}\right)^m\right).\end{aligned}$$

Además, aplicando nuevamente el Lema 3.24 en cada término,

$$\left(\int_{2^{j+1}B_0}|f|^{s'}\right)^{\frac{1}{s'}}\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}2^{(j+1)\left(d\left(\kappa-\frac{1}{s}\right)+\alpha\right)}w(B_0)|B_0|^{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{s}}\exp\left((c_2+c_3)\left(1+2^{j+1}\right)^m\right).$$

Por lo tanto, de acuerdo a ambas estimaciones, podemos ver que para todo $x\in B_0$,

$$\begin{aligned}|Tf_2(x)| &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}w(B_0)|B_0|^{\frac{\alpha}{d}-1}\\ &\quad\times\sum_{j\geq 1}\exp\left(\left(c_2+c_3-\frac{c}{(4C_0)^m}\right)(1+2^{j+1})^m\right)2^{j(d(\kappa-1)+\alpha)}\\ &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)}w(B_0)|B_0|^{\frac{\alpha}{d}-1},\end{aligned}\tag{3.35}$$

donde la serie converge ya que, por hipótesis, $(c_2+c_3)<c(4C_0)^{-m}$. Finalmente, al integrar sobre B_0, tenemos que Tf_2 satisface la condición de promedios (1.14) sobre bolas críticas. Esto concluye la demostración de (1.14) para Tf.

Ahora, veremos que la condición (1.13) se cumple para Tf, para toda bola $B = B(x_0,r)$ con $r<\rho(x_0)$, ya que como hemos observado, es suficiente verificarla en este tipo de bolas.

Fijemos $x_0\in\mathbb{R}^d$, $r<\rho(x_0)$ y sea $B=B(x_0,r)$. Descomponemos f de la siguiente manera,

$$f=(f-f_B)\chi_{2B}+(f-f_B)\chi_{(2B)^c}+f_B=f_1+f_2+f_3.\tag{3.36}$$

Elegimos $R\geq \text{máx}\{\rho(x_0),2r\}$, lo que implica que $\tilde{B}:=B(x_0,R)\supset 2B$. Aplicando la definición de T dada en (3.27) a la descomposición anterior de f, y sumando y restando f_B en la integral sobre $\tilde{B}^c$, se sigue que, para casi todo $x\in 2B$

$$\begin{aligned}Tf(x) &= T(f\chi_{\tilde{B}})(x)+\int_{\tilde{B}^c}K(x,y)f(y)dy\\ &= T((f-f_B)\chi_{2B})+T((f-f_B)\chi_{\tilde{B}\setminus 2B})(x)+f_BT(\chi_{\tilde{B}})(x)\\ &\quad+\int_{\tilde{B}^c}K(x,y)(f-f_B)+f_B\int_{\tilde{B}^c}K(x,y)dy\\ &= T((f-f_B)\chi_{2B})(x)+\int_{(2B)^c}K(x,y)(f(y)-f_B)dy+f_BT1(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo a (3.36) escribimos

$$\begin{aligned}\int_B|Tf(x)-(Tf)_B|dx &\leq \frac{1}{|B|}\int_B\int_B|Tf_1(x)-Tf_1(z)|dzdx\\ &\quad+\frac{1}{|B|}\int_B\int_B\int_{(2B)^c}|K(x,y)-K(z,y)||f(y)-f_B|dydzdx\\ &\quad+\int_B|Tf_3(x)-(Tf_3)_B|dx.\end{aligned}$$

Para el primer término, observemos que, nuevamente aplicando la Desigualdad de Kolmogorov y el Lema 3.24 a $f_1 = (f - f_B)\chi_{2B}$, obtenemos la estimación deseada:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B\int_B |Tf_1(x) - Tf_1(z)|dzdx &\leq 2\int_B |Tf_1(x)|dx\\ &\lesssim |B|^{1-\frac{1}{s'}}\left(\int_{2B}|f|^{s'}\right)^{\frac{1}{s'}}\\ &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d}}.\end{aligned}$$

Para el segundo término, si $x, z \in B$,

$$\begin{aligned}&\int_{(2B)^c} |K(x,y) - K(z,y)||f(y) - f_B|dy\\ &\quad\leq \int_{(2B)^c} \left(|K(x,y) - K(x_0,y)| + |K(x_0,y) - K(z,y)|\right)|f(y) - f_B|dy\\ &\quad\leq \int_{(2B)^c} |K(x,y) - K(x_0,y)||f(y) - f_B|dy + \int_{(2B)^c} |K(x_0,y) - K(z,y)||f(y) - f_B|dy.\end{aligned}$$

Nos enfocaremos solo en la primera integral de la desigualdad anterior, ya que como $x, z \in B$, el tratamiento de la segunda integral se puede realizar de manera análoga.

En este caso, procedemos igual que antes, realizando una descomposición en anillos, llamando $2^jB = B(x_0, 2^jr)$ y aplicando la desigualdad de Hölder. Para el primer factor de la suma utilizamos la condición de suavidad obtenida en el Lema 3.5 para $\delta' < \delta$, a elegir, y para el segundo factor, el Lema 3.24. Entonces

$$\begin{aligned}&\int_{(2B)^c} |K(x,y) - K(x_0,y)||f(y) - f_B|dy\\ &\leq \sum_{j\geq 1}\left(\int_{2^{j+1}B\setminus 2^jB} |K(x,y) - K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s}\left(\int_{2^{j+1}B}|f - f_B|^{s'}\right)^{1/s'}\\ &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d}-1}\\ &\quad\times\sum_{j\geq 1} 2^{j(d(\kappa-1)+\alpha-\delta')}\exp\left(-c\sigma\left(1 + \frac{2^jr}{2C_0\rho(x_0)}\right)^m + (c_2 + c_3)(1 + \frac{2^{j+1}r}{\rho(x_0)})^m\right)\\ &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d}-1}\sum_{j\geq 1} 2^{j(d(\kappa-1)+\alpha-\delta')}\exp\left(-c\sigma\left(1 + \frac{2^{j+1}}{4C_0}\right)^m + (c_2 + c_3)\left(1 + \frac{2^{j+1}r}{\rho(x_0)}\right)^m\right)\\ &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d}-1}\sum_{j\geq 1} 2^{j(d(\kappa-1)+\alpha-\delta')}\exp\left(\left(c_2 + c_3 - \frac{c\sigma}{(4C_0)^m}\right)\left(1 + \frac{2^{j+1}r}{\rho(x_0)}\right)^m\right).\end{aligned}$$

Con respecto a la serie, notemos que por hipótesis $c_2 + c_3 < c\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$. Luego, podemos elegir $\sigma \in (0,1)$ tal que $\sigma < 1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}$ y $c_2 + c_3 < c\sigma(4C_0)^{-m}$. A su vez, de la elección de σ se deduce que $d(\kappa-1) + \alpha < (1-\sigma)\delta =: \delta'$. De ambas condiciones se concluye su convergencia.

Por lo tanto

$$\int_{(2B)^c} |K(x,y) - K(x_0,y)||f(y) - f_B|dy \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d}-1}.$$

Finalmente, para estimar el término de Tf_3 utilizamos el Lema 3.22 y la condición $T1$. En el caso $\kappa > 1$ o $\alpha > 0$, usamos (3.30) y (3.28) para obtener

$$\begin{aligned}
\int_B |Tf_3(x) - (Tf_3)_B|dx &= \int_B \left| f_B T1(x) - \frac{1}{|B|}\int_B |f_B T1(z)|dz \right| dx \\
&\leq |f_B| \int_B |T1(x) - (T1)_B|dx \\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)} \frac{w(B)}{|B|} r^\alpha \left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)^{d(\kappa-1)+\alpha} \int_B |T1(x) - (T1)_B|dx \\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d}} \left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)^{d(\kappa-1)+\alpha} \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha+d(\kappa-1)} \\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d}}.
\end{aligned}$$

Si $\kappa = 1$ y $\alpha = 0$, usamos (3.31) y (3.29) para obtener

$$\begin{aligned}
\int_B |Tf_3(x) - (Tf_3)_B|dx &\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)} |B|^{\frac{\alpha}{d}} w(B) \left(1 + \log_2\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)\right) \log^{-1}\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right) \\
&\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha}{d}},
\end{aligned}$$

ya que $\frac{\rho(x_0)}{r} \geq 2$. La demostración de la primera implicación está ahora completa.

Para ver que (ii)$\Rightarrow$(iii), sea $w_{x_0}(x) = |x - x_0|^{d(\kappa-1)}$, que es el mismo tipo de peso considerado en [BHQ19, Theorem 2(c)]. A partir de esa demostración, sabemos que $w_{x_0} \in D_\kappa \cap A_{s/\eta'} \cap RH_\eta$ para todo $\eta \geq 1$ y $s > \eta'\kappa$, siendo $\kappa \geq 1$. Es decir, w_{x_0} pertenece a $E^{\rho,m}_{s,0,0} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,0}$, con lo cual se verifica trivialmente que $(c_2 + c_3)(4C_0)^m = 0 < c$, y por lo tanto la implicación queda demostrada.

Finalmente, la demostración de (iii)$\Rightarrow$ (i) es análoga a la correspondiente dada en [BHQ19, Theorem 2]. Aquí utilizamos que $w_{x_0} \in E^{\rho,m}_{s,0,0} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,0}$ y la primera parte de la demostración, donde la condición sobre los parámetros se satisface trivialmente. □

3.4. Desigualdades de comparación con pesos

El objetivo de esta sección es dar desigualdades de comparación de tipo Coifman, es decir, de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)dx \tag{3.37}$$

donde $0 < p < \infty$, S y T son operadores, w pertenece a una familia adecuada de pesos y C es una constante independiente de f.

Las desigualdades de comparación de tipo Coifman constituyen una herramienta fundamental en teoría de pesos, ya que permiten reducir el estudio del operador T a través de cierto control por otro operador S para el cual ya se conocen estimaciones o es más sencillo de tratar, como ocurre, por ejemplo, con un operador de tipo maximal.

En el contexto clásico, este tipo de desigualdades fueron introducidas en [Coi72, CF74], cuando T es un operador de Calderón–Zygmund clásico y $S = M$, el operador maximal de Hardy-Littlewood, usando técnicas de comparación de conjuntos de nivel. Posteriormente, diversos autores (véase, por ejemplo, [CUMP11]) dieron pruebas que utilizan desigualdades con pesos que involucran al operador maximal sharp clásico y al operador maximal M, llamadas desigualdades de tipo Lerner (véase [Ler04, Theorem 1]), junto con argumentos de extrapolación. En estos casos, los pesos considerados pertenecen a la clase A_∞ de Muckenhoupt.

En el marco asociado a operadores de Schrödinger resulta natural establecer una versión adaptada de estas desigualdades, donde un operador singular pueda compararse con un operador maximal que incorpore el decaimiento correspondiente de los núcleos. En este sentido, para el caso de operadores singulares con núcleos que verifican un decaimiento polinomial, podemos citar el trabajo [BCH13b]. Allí se establece una desigualdad de tipo Lerner que veremos en breve, para luego obtener desigualdades de tipo Coifman para algunos operadores asociados $\mathcal{L}_V$, con pesos en la clase $A^{\rho,\mathrm{loc}}$.

Teniendo en cuenta que muchos operadores singulares asociados a $\mathcal{L}_\mu$, y a $\mathcal{L}_V$ en particular, presentan núcleos con un mejor decaimiento, nos centraremos en probar una desigualdad de tipo Coifman cuando T es un operador perteneciente a la familia Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (s,δ), con $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$ y, en el rol de S, consideraremos el siguiente operador maximal

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s}_{c,m} f(x) := \sup_{B(x',r)\ni x} \frac{1}{\exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x')}\right)^m\right)} \left(\fint_{B(x',r)} |f(y)|^s dy\right)^{1/s}.$$

Observar que este operador, si bien no fue definido en el Capítulo 1, coincide con el operador maximal asociado a la clase de pesos $H^{\rho,m}_{p,c}$ cuando se considera $s = 1$.

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 3.25. *Sea $0 < p < \infty$ y $w \in A^{\rho,\mathrm{loc}}$. Sea T un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (s,δ), con $1 < s \leq \infty$, $0 < \delta \leq 1$, y constantes c_1 y m_1 en la condición de tamaño.*

(i) *Si $s = \infty$, entonces para todo $c < c_1(8C_0)^{-m_1}$ existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1} f(x)|^p w(x)dx,$$

para toda $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) *Si* $1 < s < \infty$, *entonces para todo* $c < c_1(4C_0)^{-m_1}$ *existe una constante* C *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x)|^p w(x)dx,$$

para toda $f \in L^{s'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Para poder obtener el control deseado, seguiremos la línea de prueba de [BCH13b]. Por un lado, tendremos en cuenta el siguiente resultado de extrapolación que reduce la prueba del teorema anterior a tener la desigualdad de tipo Coifman probada para algún rango de exponentes p y cierta familia de pesos. Allí los autores trabajan con bases de Muckenhoupt, pero presentaremos el resultado en la forma en que lo usaremos en esta tesis, teniendo en cuenta que los pesos $A_p^{\rho,\text{loc}}$, $1 \leq p < \infty$, se encuentran en este marco (véase [BCH13b, p. 39] y Teorema 1.18).

Proposición 3.26 ([BCH13b, Theorem 3])**.** *Dados dos operadores* T *y* S, *supongamos que existe* $p_0 > 0$ *tal que* (4.3) *vale para toda* f *tal que* Tf *y* Sf *son finitos en casi todo punto, y para todo peso* $w \in A_1^{\rho,\text{loc}}$. *Entonces, la misma desigualdad* (4.3) *vale para toda* f *tal que* Tf *y* Sf *son finitos en casi todo punto, para todo* $0 < p < \infty$ *y todo peso* $w \in A^{\rho,\text{loc}}$.

En el mismo artículo, los autores demuestran la siguiente versión ρ-local de la desigualdad de Lerner, en la que aparecen involucradas la función maximal $M^\sharp_{\text{loc}}$ definida en el Lema 3.9 y la función maximal M^{loc}_ρ dada en la Definición 1.16. Este resultado es fundamental para obtener el Teorema 3.25.

Teorema 3.27 ([BCH13b, Theorem 1])**.** *Si* f *y* u *son funciones no negativas pertenecientes a* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, *entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)u(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} M^\sharp_{\text{loc}} f(x)\, M^{\text{loc}}_\rho u(x)dx,$$

donde la constante C *es independiente de* f *y* u.

Asimismo, necesitaremos la siguiente proposición que provee de una estimación puntual para la función maximal $M^\sharp_{\text{loc}}$ aplicada a un operador T perteneciente a alguna de las familias de operadores en estudio.

Proposición 3.28. *Sea* T *un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo* (s,δ), *con* $1 < s \leq \infty$, $0 < \delta \leq 1$, *y constantes* c_1 *y* m_1 *en la condición de tamaño.*

(i) *Si* $s = \infty$, *entonces dado* $0 < \gamma \leq 1$, *existe una constante* C *tal que*

$$\left[M^\sharp_{\text{loc}}\left(|Tf|^\gamma\right)(x)\right]^{1/\gamma} \leq C\, \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

para toda $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, *y todo* $c < c_1(8C_0)^{-m_1}$.

(ii) *Si* $1 < s < \infty$, *entonces, dado* $0 < \gamma \leq 1$, *existe una constante* C_γ *tal que*

$$\left[M^\sharp_{\text{loc}}\left(|Tf|^\gamma\right)(x)\right]^{1/\gamma} \leq C_\gamma \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

para toda $f \in L^{s'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *y todo* $c < c_1(4C_0)^{-m_1}$.

Demostración. Sea $f \in L^{s'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ para $1 < s \leq \infty$. Consideremos una bola $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \rho(x_0)$ y sea $x \in B$. Se procede dividiendo la función $f = f_1 + f_2 + f_3$, donde

$$f_1 = f\chi_{2B}, \quad f_2 = f\chi_{B(x_0,2\rho(x_0))\setminus 2B}, \quad f_3 = f\chi_{B(x_0,2\rho(x_0))^c}.$$

Dado $0 < \gamma \leq 1$, se tiene que $|Tf|^\gamma = |Tf - c_B + c_B|^\gamma \leq |Tf - c_B|^\gamma + |c_B|^\gamma$, para todo $c_B \in \mathbb{R}^d$. Luego

$$\left||Tf|^\gamma - |c_B|^\gamma\right| \leq |Tf - c_B|^\gamma \leq |Tf_1|^\gamma + |Tf_2 - c_B|^\gamma + |Tf_3|^\gamma. \tag{3.38}$$

De acuerdo a la definición de $M^\sharp_{\text{loc}}$ y en vistas de (3.7), será suficiente estimar los promedios de Tf_1 y Tf_3 sobre B, y la oscilación de Tf_2 cuando $r \leq \rho(x_0)$ para una constante c_B adecuada. Esto último se debe a que, en el caso $r = \rho(x_0)$, la función f_2 es idénticamente cero.

Tomaremos $c_B = Tf_2(x_0)$, para lo cual debemos asegurarnos de que $Tf_2(x_0)$ esté bien definido, es decir, que no dependa del x_0 dado, y que sea un valor finito. En efecto, como T es de tipo débil (s', s') (en el caso en que $s' = 1$, se tiene por ser T un operador de Calderón–Zygmund clásico), es decir,

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |Tf(x)| > \lambda\right\}\right| \leq \frac{C}{\lambda^{s'}}\|f\|^{s'}_{L^{s'}},$$

para todo $\lambda \geq 0$, esto implica que $Tf(x)$ es finito en casi todo $x \in \mathbb{R}^d$; en particular, en algún punto $x_1 \in B$. Entonces si $Tf_2(x_1)$ es finito para algún $x_1 \in B$, $Tf_2(x_0)$ también lo es, ya que

$$Tf_2(x_0) = Tf_2(x_1) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(K(x_0, y) - K(x_1, y)\right) f_2(y)dy,$$

donde la integral de la diferencia de núcleos por f_2, cuando x_0 y x_1 están dentro de una misma bola B con $r \leq \rho(x_0)$, es absolutamente convergente gracias a las condiciones de suavidad del núcleo. Luego, c_B está bien definido.

Comencemos probando (i). Para el término correspondiente a Tf_1, usamos que T es de tipo débil $(1,1)$. Así, para todo $0 < \gamma \leq 1$, por la desigualdad de Kolmogorov (Proposición 1.2)

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(y)|^\gamma\, dy\right)^{1/\gamma} \leq C\frac{1}{|B|}\left(\int_{2B} |f(y)|dy\right) \leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1} f(x),$$

para todo $c \geq 0$, pues $r \leq \rho(x_0)$.

Para probar que $Tf_3(y) \leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1}f(x)$ para todo $y \in B$, definimos $B_0 = B(x_0, \rho(x_0))$ y B_0^j como $B_0^j = 2^j B_0$ con $j \in \mathbb{N}$. Entonces, a partir de la condición de tamaño (3.3), y procediendo como en (3.18) tenemos

$$\begin{aligned}
|Tf_3(y)| &\lesssim \sum_{j\geq 2} \exp\left(-c_1(8C_0)^{-m_1}\left(1+2^{j+1}\right)^{m_1}\right)\left(\fint_{B_0^{j+1}} |f(y)|dy\right)\\
&\lesssim \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1}f(x)\sum_{j\geq 2} \exp\left(-c_1(8C_0)^{-m_1}\left(1+2^{j+1}\right)^{m_1}\right)\exp\left(c\left(1+2^{j+1}\right)^{m_1}\right)\\
&\lesssim \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1}f(x),
\end{aligned}$$

donde la serie converge ya que $c < c_1(8C_0)^{-m_1}$.

Por último, probemos que $|Tf_2(y) - Tf_2(x_0)| \leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1}f(x)$ para todo $y \in B$, de donde se seguirá que el promedio también lo cumple.

Llamemos $B^j = 2^j B$ con $j \in \mathbb{N}$ y consideremos $j_0 = \max\{j : 2^j r < 2\rho(x_0)\}$. Realizando una descomposición en coronas y aplicando la condición de suavidad (3.4), para cada $y \in B$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|Tf_2(y) - Tf_2(x_0)| &\leq \int_{2B_0\setminus 2B} |K(y,z) - K(x_0,z)||f(z)|dz\\
&\leq \sum_{j=1}^{j_0}\int_{B^{j+1}\setminus B^j} |K(y,z) - K(x_0,z)||f(z)|dz\\
&\leq C\sum_{j=1}^{j_0}\int_{B^{j+1}\setminus B^j} \frac{1}{|y-z|^d}\left(\frac{|y-x_0|}{|y-z|}\right)^{\delta}|f(z)|dz\\
&\leq C\sum_{j=1}^{j_0}\frac{1}{(2^j r)^d}\left(\frac{r}{2^j r}\right)^{\delta}\int_{B^{j+1}\setminus B^j}|f(z)|dz\\
&\leq C\sum_{j=1}^{j_0}2^{-j\delta}\fint_{B^{j+1}}|f(z)|dz\\
&\leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1}f(x)\sum_{j=1}^{j_0}2^{-j\delta}\exp\left(c\left(1+\frac{2^{j+1}r}{\rho(x_0)}\right)^{m_1}\right)\\
&\leq Ce^{c5^{m_1}}\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1}f(x)\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j\delta}\\
&\leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c,m_1}f(x),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $1+\frac{2^{j+1}r}{\rho(x_0)} \leq 5$ para todo $1 \leq j \leq j_0$ y que $\delta > 0$ para la convergencia de la serie. Aquí, la estimación vale para cualquier $c > 0$.

Para comprobar el ítem (ii), consideramos $f \in L^{s'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. El promedio correspondiente a f_1 se estima como en el caso anterior, usando que T es de tipo débil (s', s') para aplicar la desigualdad de Kolmogorov (1.2). Así, como $0 < \gamma \leq 1 < s'$, para todo $c \geq 0$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(y)|^\gamma \, dy\right)^{1/\gamma} \leq C\frac{|B|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{s'}}}{|B|^{\frac{1}{\gamma}}}\left(\int_{2B} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'} \leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x),$$

ya que $r \leq \rho(x_0)$.

Veamos ahora el promedio con respecto a Tf_3, para lo cual procedemos como en el caso anterior, estimando puntualmente $|Tf_3(y)|$ para todo $y \in B$.

Nuevamente, hacemos la descomposición en coronas como en (3.19), y usamos la condición de tamaño (3.1) para obtener que, si $y \in B$,

$$\begin{aligned}
|Tf_3(y)| &\lesssim \sum_{j\geq 2} \exp\left(-c_1(4C_0)^{-m_1}\left(1+2^{j+1}\right)^{m_1}\right)\left(\fint_{B_0^{j+1}} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'} \\
&\lesssim \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x) \sum_{j\geq 2} \exp\left(-c_1(4C_0)^{-m_1}\left(1+2^{j+1}\right)^{m_1}\right)\exp\left(c\left(1+2^{j+1}\right)^{m_1}\right) \\
&\lesssim \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x),
\end{aligned}$$

donde la serie converge ya que $c < c_1(4C_0)^{-m_1}$.

Por último, probaremos que $|Tf_2(y) - Tf_2(x_0)| \leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x)$ para todo $y \in B$ y cualquier $c > 0$.

De manera análoga al caso anterior, llamamos $B^j = 2^j B$ y $j_0 = \max\{j : 2^j r < 2\rho(x_0)\}$. Considerando una descomposición en coronas y aplicando la desigualdad de Hölder junto con la condición de suavidad (3.2), para $R = 2^j r$ con $j \geq 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&|Tf_2(y) - Tf_2(x_0)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{j_0}\left(\int_{B^{j+1}\setminus B^j} |K(y,z)-K(x_0,z)|^s dz\right)^{1/s}\left(\int_{B^{j+1}\setminus B^j} |f(z)|^{s'} dz\right)^{1/s'} \\
&\leq Ce^{c5^{m_1}}\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x)\sum_{j=1}^{j_0}\left(\int_{2^j r<|z-y|\leq 2^{j+1}r} |K(y,z)-K(x_0,z)|^s dz\right)^{1/s} |B^{j+1}|^{1/s'} \\
&\leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(2^j r\right)^{d/s}}{\left(2^j r\right)^d}\left(\frac{r}{2^j r}\right)^\delta \left(2^j r\right)^{d/s'} \\
&\leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x)\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\delta} \\
&\leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x),
\end{aligned}$$

donde la serie converge ya que $\delta > 0$, y podemos tomar cualquier valor de $c > 0$. □

Demostración de la Teorema 3.25. Para probar el ítem (ii), consideremos $f \in L^{s'}_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^d\right)$ y $w \in A_1^{\rho,\mathrm{loc}}$. Por el Teorema 1.18, $M_\rho^{\mathrm{loc}} w \lesssim w$ en casi todo punto.

Luego, tomando $|Tf|$ y w en lugar de f y u en la desigualdad del Teorema 3.27, podemos aplicar la estimación puntual dada en la Proposición 3.28(ii) con $\gamma = 1$ para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|w(x)dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} M^{\sharp}_{\mathrm{loc}}(|Tf|)(x) M^{\mathrm{loc}}_{\rho} w(x)dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x)|w(x)dx, \quad (3.39)$$

siempre que $c < c_1(4C_0)^{-m_1}$.

Luego, estamos en las hipótesis de la Proposición 3.26 con $p_0 = 1$, y podemos concluir que para todo $0 < p < \infty$, para toda $f \in L^{s'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y todo peso $w \in A^{\rho,\mathrm{loc}}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s'}_{c,m_1} f(x)|^p w(x)dx,$$

siempre que $c < c_1(4C_0)^{-m_1}$.

La prueba de (i) es similar a la prueba de (ii), usando el ítem (i) de la Proposición 3.28 en lugar del ítem (ii). □

Observación 3.29. A través de las desigualdades del Teorema 3.25 podemos obtener, mediante un argumento alternativo, la acotación en $L^p(w)$ presentada en el Teorema 3.6 en la Sección 3.1 para T un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (s, δ), $1 < s \leq \infty$, $0 < \delta \leq 1$. En efecto, una vez aplicado el Teorema 3.25 al operador T, de la Proposición 2.15 y de la Proposición 2.16(ii) se recupera el resultado con los mismos pesos y restricciones en los parámetros.

Capítulo 4

Integrales fraccionarias con decaimiento exponencial

En este capítulo consideraremos operadores de tipo fraccionario, que presenten una condición de tamaño con decaimiento exponencial. Estableceremos resultados de acotación en espacios de Lebesgue pesados con exponente $1 < p \leq \infty$ y en espacios de tipo BMO, análogos a los establecidos para el caso de las integrales singulares en el Capítulo 3. Las técnicas empleadas son esencialmente las mismas que en dicho contexto, pero debido a que existen varias sutilezas técnicas, hemos decidido realizar este análisis en un capítulo separado con el fin de evitar posibles confusiones respecto a los parámetros involucrados. La estructura del capítulo será como el anterior, esto es, una vez presentada la familia de operadores de tipo fraccionario con los cuales trabajaremos, las secciones siguientes están dedicadas a probar las acotaciones en cada uno de los espacios correspondientes.

Las acotaciones en espacios de Lebesgue con pesos serán abordadas mediante un resultado de extrapolación en la Sección 4.1 que se ajusta al comportamiento de operadores de tipo fraccionario, mientras que en la Sección 4.2 probaremos la acotación en el espacio de oscilaciones $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$. En ambos casos, los resultados se obtendrán para pesos en las clases de crecimiento exponencial $H_{p,c}^{\rho,m}$.

Consideraremos un operador T con núcleo asociado K en el mismo sentido que lo hicimos en el Capítulo 3, esto es,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy, \quad x \notin \mathrm{sop}(f).$$

En este capítulo, mantendremos la terminología empleada previamente, incorporando un parámetro que refiere a la fraccionalidad del operador. En esta dirección, los trabajos de [BCH13b], [MSTZ14] obtuvieron resultados de acotación para operadores fraccionarios con decaimiento polinomial y estimaciones puntuales para el núcleo. En [BCH13b] se obtienen estimaciones en espacios de Lebesgue pesados, mientras que en [MSTZ14] se prueban acotaciones en espacios de tipo BMO.

Definición 4.1. Para $0 < \nu < d, 1 < s < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$, diremos que T es un **operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo** (ν, s, δ) si

(i) T es acotado de $L^{s'}(\mathbb{R}^d)$ en $L^{\frac{s'd}{d-s'\nu},\infty}(\mathbb{R}^d)$;

(ii) T tiene un núcleo asociado K que verifica las siguientes condiciones:

(a) existen constantes positivas c, m y C tales que, para todo $R > 0$,

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K(x,y)|^s\,dy\right)^{1/s} \leq \frac{C}{R^{d-\nu}} \exp\left(-c\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right), \tag{4.1}$$

para todo $|x - x_0| < R/2$.

(b) existe una constante C tal que para todo $R > 0$,

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K(x,y) - K(x_0,y)|^s\,dy\right)^{1/s} \leq \frac{C}{R^{d-\nu}}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta \tag{4.2}$$

para $|x - x_0| < r \leq \rho(x_0)$ y $r < R/2$.

El caso límite $s = \infty$ se define mediante estimaciones puntuales, como veremos a continuación.

Definición 4.2. Para $0 < \nu < d$ y $0 < \delta \leq 1$, diremos que T es un **operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo** (ν, ∞, δ) si

(i) T es acotado de $L^1(\mathbb{R}^d)$ en $L^{\frac{d}{d-\nu},\infty}(\mathbb{R}^d)$;

(ii) T tiene un núcleo asociado K que verifica las siguientes condiciones:

(a) existen constantes positivas c, m y C tales que

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{d-\nu}} \exp\left(-c\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^m\right), \tag{4.3}$$

para todo $x \neq y$;

(b) existe una constante C tal que

$$|K(x,y) - K(x_0,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{d-\nu}}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^\delta, \tag{4.4}$$

para $|x - y| > 2|x - x_0|$.

Observación 4.3. Notemos que si K verifica (4.3) y (4.4), entonces también verifica (4.1) y (4.2) para todo $1 < s < \infty$, con los mismos parámetros c, m y δ.

El siguiente lema, al igual que en el caso singular, nos provee un decaimiento exponencial extra en la condición de suavidad para operadores como los dados en la Definición 4.1. La demostración es análoga a la del Lema 3.5 por lo que la omitiremos.

Lema 4.4. *Sea $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función que verifica las condiciones (4.1) y (4.2) para ciertos parámetros $0 < \nu < d$, $1 < s < \infty$, $0 < \delta \leq 1$ y $c, m \geq 0$. Entonces, existe una constante C tal que para todo $\delta' \in (0, \delta)$,*

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K(x,y) - K(x_0,y)|^s\, dy\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{R^{d-\nu}}\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta'} \exp\left(-c\sigma\left(1+\frac{R}{2C_0\rho(x_0)}\right)^m\right), \tag{4.5}$$

donde $|x - x_0| < r \leq \rho(x_0)$, $r < R/2$ y $\sigma = 1 - \frac{\delta'}{\delta}$.

El siguiente resultado muestra que todo operador integral cuyo núcleo satisface la condición (4.1), es decir una condición de tamaño de tipo Hörmander fraccionario con decaimiento exponencial, puede ser dominado por un operador maximal adecuado. Este resultado será una herramienta para obtener la acotación de ciertos ejemplos de operadores en el Capítulo 5.

Proposición 4.5. *Sea $0 < \nu < d$ y $1 < s < \frac{d}{d-\nu}$. Si T es un operador de Schrodinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (ν, s, δ) con constantes c_1, m_1 en la condición de tamaño, entonces existe una constante C tal que*

$$|Tf(x)| \leq C\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m_1} f(x),$$

con $c < c_1(4C_0)^{-m_1}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Aquí, $\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s,\nu}_{c,m}$ es el operador maximal definido por

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m} f(x) := \sup_{B(x',r)\ni x} \frac{1}{\exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x')}\right)^m\right)} |B(x',r)|^{\nu/d}\left(\fint_{B(x',r)} |f(y)|^{s'}\, dy\right)^{1/s'}.$$

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^d$, $B_0 = B(x_0, \rho(x_0))$ tal que $x \in B_0$. Escribimos

$$|Tf(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy\right| \leq \int_{B_0} |K(x,y)||f(y)|dy + \int_{B_0^c} |K(x,y)||f(y)|dy.$$

Comenzamos acotando la integral sobre la bola B_0. Aplicando la desigualdad de Hölder y luego dividiendo en anillos donde consideramos, como es habitual, $B_0^k = B(x_0, 2^k\rho(x_0))$ para $k \in \mathbb{Z}$, por la condición de tamaño (4.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_0} |K(x,y)||f(y)|dy \\
&\quad\leq \left(\int_{B_0} |K(x,y)|^s dy\right)^{1/s}\left(\int_{B_0} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'} \\
&\quad\lesssim \left(\sum_{k\geq 0}\int_{B_0^{-k}\setminus B_0^{-(k+1)}} |K(x,y)|^s dy\right)^{1/s}\left(\int_{B_0} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'} \\
&\quad\lesssim \left(\sum_{k\geq 0}\frac{(2^{-k}\rho(x_0))^d}{(2^{-k}\rho(x_0))^{(d-\nu)s}} \exp\left(-c_1\left(1+\frac{2^{-k}\rho(x_0)}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)\right)^{1/s}\left(\int_{B_0} |f(y)|^{s'} dy\right)^{1/s'}
\end{aligned}$$

$$\lesssim \rho(x_0)^{d/s-d+\nu} \left(\int_{B_0} |f(y)|^{s'} dy \right)^{1/s'} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(d-ds+\nu s)} \right)^{1/s}$$
$$\lesssim |B_0|^{\nu/d} \left(\frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} |f(y)|^{s'} dy \right)^{1/s'}$$
$$\lesssim \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m_1} f(x),$$

donde la serie converge dado que $s < \frac{d}{d-\nu}$, y hemos usado que el término exponencial en el operador maximal es constante sobre la bola B_0.

Siguiendo con la integral sobre B_0^c, dividiendo en anillos, usando la desigualdad de Hölder y la condición (4.1), y de manera análoga a la estimación (3.19), se obtiene

$$\int_{B_0^c} |K(x,y)||f(y)|dy$$
$$\leq \sum_{k\geq 1} \left(\int_{B_0^{k+1}\setminus B_0^k} |K(x,y)|^s dy \right)^{1/s} \left(\int_{B_0^{k+1}} |f(y)|^{s'} dy \right)^{1/s'}$$
$$\lesssim \sum_{k\geq 2} \frac{(2^k\rho(x_0))^{d/s}}{(2^k\rho(x_0))^d} \exp\left(-c_1 \left(1 + \frac{2^k\rho(x_0)}{\rho(x)} \right)^{m_1} \right) \left(\int_{B_0^{k+1}} |f(y)|^{s'} dy \right)^{1/s'}$$
$$\lesssim \sum_{k\geq 2} \exp\left(-c_1 \left(1 + 2^{k-1}C_0^{-1} \right)^{m_1} \right) |2^{k+1}B_0|^{\nu/d} \left(\frac{1}{|B_0^{k+1}|} \int_{B_0^{k+1}} |f(y)|^{s'} dy \right)^{1/s'}$$
$$\lesssim \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m_1} f(x) \sum_{k\geq 2} \exp\left(-c_1(4C_0)^{-m_1}(1+2^{k+1})^{m_1} \right) \exp\left(c(1+2^{k+1})^{m_1} \right)$$
$$\leq \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m_1} f(x),$$

donde la serie converge ya que $c < c_1(4C_0)^{-m_1}$. □

4.1. Estimaciones en $L^p(w)$ para $1 < p \leq \infty$

Los resultados principales de acotación en espacios de Lebesgue pesados están dados por el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Sea T un operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (ν, s, δ) con $0 < \nu < d$, $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$, con constantes c_1, m_1 en la condición de tamaño. Sean $1 < p < \frac{d}{\nu}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\nu}{d}$.*

(i) *Si $s = \infty$, T es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ para todo peso w tal que $w^{-p'} \in H^{\rho,m^*}_{1+\frac{p'}{q},c}$ con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1\frac{d}{d-\nu}(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

(ii) *Si $1 < s < \infty$, T es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ para todo peso w tal que $w^{-p'} \in H^{\rho,m^*}_{1+\frac{p'}{q},c}$ con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1\frac{s'd}{d-s'\nu}(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

De la misma manera que sucede en el caso singular estudiado en el capítulo anterior, nos encontramos con la necesidad de crear herramientas adecuadas a este contexto para demostrar el resultado, las cuales son relevantes en sí mismas. Para ello, obtendremos resultados de extrapolación que permitirán probar el teorema anterior mediante la siguiente propiedad de acotación en el extremo $L^{d/\nu}$–BMO_ρ con pesos, para operadores Schrödinger–Calderón–Zygmund exponenciales de tipo (ν, s, δ) con $0 < \nu < d$, $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$.

Teorema 4.7. *Sea T un operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (ν, s, δ) con $0 < \nu < d$, $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$, con constantes c_1, m_1 en la condición de tamaño.*

(i) *Si $s = \infty$, T es acotado de $L^{d/\nu}(w^{d/\nu})$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-\frac{d}{d-\nu}} \in H_{1,c}^{\rho,m_1}$ con $c < c_1\frac{d}{d-\nu}(8C_0)^{-m_1}$.*

(ii) *Si $1 < s < \infty$, T es acotado de $L^{d/\nu}(w^{d/\nu})$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-\frac{s'd}{d-s'\nu}} \in H_{1,c}^{\rho,m_1}$ con $c < c_1\frac{s'd}{d-\nu s'}(4C_0)^{-m_1}$.*

Para lograr nuestros objetivos, estableceremos primero un resultado de extrapolación desde el extremo $L^s(w)$–$L^\infty(w)$, para $1 < s < \infty$ y pesos en las clases $H_{1,c}^{\rho,m}$. Una versión del mismo, para pesos en A_1^ρ, puede encontrarse en [BCH13a, Theorem 4]. Si bien seguiremos los lineamientos de este último, tal y como se desarrolló en el Teorema 3.8, será necesario hacer algunas modificaciones debido a las restricciones en los parámetros que surgen de la acotación del operador maximal asociado a los pesos en nuestro contexto. Posteriormente, daremos un resultado de extrapolación para operadores que resultan acotados de $L^s(w^s)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para algún $1 < s < \infty$.

Como era de esperar, las demostraciones son análogas al caso singular expuesto en la Sección 3.1, pero hemos decidido incluir los detalles esenciales para un mejor seguimiento de los parámetros involucrados y una lectura más fluida de los resultados.

Presentamos a continuación el primer resultado de extrapolación.

Teorema 4.8. *Sea $1 < s < \infty$ y sea (f, g) un par de funciones medibles y no negativas tal que*

$$\|f\|_{L^\infty(w)} \leq C\|g\|_{L^s(w^s)}, \tag{4.6}$$

se verifica para todo peso w tal que $w^{-s'} \in H_{1,c_1}^{\rho,m_1}$ para ciertos $c_1, m_1 \geq 0$, siempre que el lado izquierdo sea finito, con constante C dependiendo de w sólo a través de las constantes de la clase H_{1,c_1}^{ρ,m_1}.

Entonces, para todo par de exponentes p y q con $1 < p < s$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$

$$\|f\|_{L^q(w^q)} \leq C\|g\|_{L^p(w^p)}, \tag{4.7}$$

para todo $w^{-p'} \in H^{\rho,m}_{1+\frac{p'}{q},c}$ *con* $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ *y* $c < c_1(4C_0)^{-2m}$. *Aquí, la constante* C *depende sólo del peso a través de las constantes de la clase* $H^{\rho,m}_{1+\frac{p'}{q},c}$.

Demostración. Sean $1 < p < s$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$ y $w^{-p'} \in H^{\rho,m}_{1+\frac{p'}{q},c}$ con $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1(4C_0)^{-2m}$. Sean $f \in L^q(w^q)$ y $g \in L^p(w^p)$. Escribimos

$$\|g\|_{L^p(w^p)} = \|(gw^{p'})^s\|^{1/s}_{L^{p/s}(w^{-p'})}.$$

Tomando $G = \dfrac{|g|^{s-p}w^{(s-p)p'}}{\|g\|^{s-p}_{L^p(w^p)}} \geq 0$, se puede ver que

$$\|G\|_{L^{\frac{p}{s-p}}(w^{-p'})} = 1$$

y

$$\|g\|_{L^p(w^p)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^s w(x)^{p's} G^{-1}(x) w^{-p'}(x)dx\right)^{1/s}.$$

Por otro lado, de [HMS88, Lemma 1], existe $F \geq 0$, $F \in L^q(w^{-q'})$ tal que $\|F\|_{L^q(w^{-q'})} \leq 2$ y $\|f\|_{L^q(w^q)} = \|fw^{q'}F^{-1}\|_{L^\infty}$. Llamaremos $v = w^{-p'}$, el cual sabemos, por hipótesis, que pertenece a la clase $H^{\rho,m}_{1+\frac{p'}{q},c}$. Denotamos $r = 1 + \frac{p'}{q}$. De la relación entre q y p se puede obtener que $r' = \frac{q}{s'}$. Así,

$$\begin{aligned}
\|G^{s'/s}\|_{L^{p'}(v)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} G^{\frac{s'}{s}r'}(x)v(x)dx\right)^{1/r'} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} G^{\frac{q}{s}}(x)w(x)^{-p'}dx\right)^{1/r'} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} G^{\frac{p}{s-p}}(x)w(x)^{-p'}dx\right)^{1/r'} \\
&= \|G\|^{\frac{p}{s-p}\frac{1}{r'}}_{L^{\frac{p}{s-p}}(w^{-p'})} = 1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|F^{s'}w^{p'-q's'}\|_{L^{r'}(v)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} F^{s'r'}(x)w^{(p'-q'r')r'}(x)w(x)^{-p'}dx\right)^{1/r'} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} F^q(x)w^{p'(r'-1)-q'r's'}(x)dx\right)^{1/r'} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} F^q(x)w^{-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}\frac{q}{r'}} \\
&= \|F\|^{q/r'}_{L^q(v^{-q'})} = \|F\|^{s'}_{L^{q'}(w^{-q'})} \leq 2^{s'}.
\end{aligned}$$

Notar que $w^{-p'} \in H^{\rho,m}_{1+\frac{p'}{q},c}$ implica que $\widetilde{T}_{c_1,m_1}$, definido por

$$\widetilde{T}_{c_1,m_1}f = \frac{\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1}(fw^{-p'})}{w^{-p'}},$$

es un operador acotado de $L^{r'}(w^{-p'})$ en $L^{r'}(w^{-p'})$. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}_{c_1,m_1}f\|_{L^{r'}(w^{-p'})} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1}(fw^{-p'})(x)}{w^{-p'}(x)}\right)^{r'} w^{-p'}(x)dx\right)^{1/r'}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1}(fw^{-p'})(x)\right)^{r'}(w(x)dx)^{p'(r'-1)}\,dx\right)^{1/r'}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1}(fw^{-p'})(x)\right)^{r'} w^{q}(x)dx\right)^{1/r'}\\ &= \|\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1}(fw^{-p'})\|_{L^{r'}(w^q)}.\end{aligned}$$

Como $m=\frac{m_1}{k_0+1}$, tomando $c_2=c_1(2C_0)^{-m}$ se tiene que $\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1}(fw^{-p'})\lesssim \widetilde{M}^{\rho}_{c_2,m}(fw^{-p'})$ por la Proposición 2.15. Del Teorema 2.16(ii) sabemos que esta última está acotada en $L^{r'}(w^q)$ por ser $w^q\in H^{\rho,m}_{r',c}$ (por el Lema 2.5(ii) y el hecho de que $-p'(1-r')=q$), con $c_2>c(8C_0)^m$ teniendo en cuenta la condición establecida para c. Luego,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}_{c_1,m_1}f\|_{L^{r'}(w^{-p'})} &\leq C\|fw^{-p'}\|_{L'(w^q)}\\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{r'}w^{-p'r'+q}\right)^{1/r'}\\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{r'}w^{-p'}\right)^{1/r'} = \|f\|_{L^{r'}(w^{-p'})}.\end{aligned}$$

La demostración puede concluirse de manera análoga a la de [BCH13a, Theorem 4]. No obstante, con el fin de que el argumento sea autocontenido, a continuación detallamos explícitamente lo que resta de la prueba.

Consideremos $h=G^{s'/s}+F^{s'}w^{p'-q's'}\in L^{r'}(v)$. Definimos

$$\mathscr{R}'h(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{T}^k_{c_1,m_1}h(x)}{2^k\|\widetilde{T}_{c_1,m_1}\|^k_{L^{r'}(v)}}.$$

Es inmediato que $\mathscr{R}'h$ satisface las siguiente propiedades:

$$h\leq \mathscr{R}'h,\quad \|\mathscr{R}'h\|_{L^{r'}p(v)}\leq 2\|h\|_{L^{r'}(v)}$$

y

$$\widetilde{T}_{c_1,m_1}(\mathscr{R}'h)\leq 2\|\widetilde{T}_{c_1,m_1}\|_{L^{r'}(v)}\mathscr{R}'h,$$

donde la última condición se reescribe como

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho}_{c_1,m_1}(\mathscr{R}'h)v\leq 2\|\widetilde{T}_{c_1,m_1}\|_{L^{r'}(v)}(\mathscr{R}'h)v.$$

Por la Observación 2.17, esto significa que $(\mathscr{R}'h)\,v=(\mathscr{R}'h)\,w^{p'}\in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$ y la constante del peso es menor que $2\|\widetilde{T}_{c_1,m_1}\|_{L^{r'}(w^{-p'})}$. Luego, $(\mathscr{R}'h)\,w^{-p'}=\left((\mathscr{R}'h)^{-1/s'}\,w^{p'/s'}\right)^{-s'}\in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$. Así, el peso $u=(\mathscr{R}'h)^{-1/s'}\,w^{p'/s'}$ se encuentra en las hipótesis del teorema, por lo que

$$\|f\|_{L^{\infty}(u)}\leq C\|g\|_{L^s(u^s)},$$

donde la constante C sólo depende de los parámetros de la clase H^{ρ,m_1}_{1,c_1}.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\|fu\|_{L^\infty} &= \|f\|_{L^\infty(u)} \\
&\leq C\|g\|_{L^s(u^s)} \\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^s \left(\mathscr{R}'h(x)\right)^{-s'/s} w^{(p's)/s'}(x)dx\right)^{1/s} \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^s G^{-1} w^{(p'(s'-1)}(x)dx\right)^{1/s} \\
&= \|g\|_{L^p(w^p)}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $F^{s'}w^{p'-q's'} \leq h \leq \mathscr{R}'h$, se tiene que $(\mathscr{R}'h)^{-1/s'} \leq F^{-1}w^{\frac{-p'}{s'}+q'}$ y, así,

$$\begin{aligned}
\|fu\|_{L^\infty} &= \|f\left(\mathscr{R}'h\right)^{-1/s'} w^{p'/s'}\|_{L^\infty} \leq \|fF^{-1}w^{\frac{-p'}{s'}+q'}w^{p'/s'}\|_{L^\infty} \\
&= \|fF^{-1}w^{q'}\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^q(v^q)} < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, recordando que $r' = \frac{q}{s'}$, notando que $q\left(1 - \frac{p'}{s'}\right) = -p'$, y teniendo en cuenta las estimaciones para F y G, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(w^q)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^q w^q(x)dx\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^q \left(\mathscr{R}'h\right)^{-q/s'} \left(\mathscr{R}'h\right)^{q/s'} w^{p'q/s'}(x) w^{q-p'q/s'}(x)dx\right)^{1/q} \\
&\leq \|f\left(\mathscr{R}'h\right)^{-1/s'} w^{p'/s}\|_{L^\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\mathscr{R}'h\right)^{r'}(x) w^{q(1-p'/s')}(x)dx\right)^{1/q} \\
&\leq \|fu\|_{L^\infty}\|\mathscr{R}'h\|_{L^{r'}(v)} \\
&\leq C\|g\|_{L^q(w^q)} 2\|h\|_{L^{r'}(v)} \\
&\leq 2C(1+2^{s'})\|g\|_{L^q(w^q)},
\end{aligned}$$

donde la constante C sólo depende del peso a través de la clase $H^{\rho,m}_{r,c}$. Con esto concluye la demostración. □

El siguiente resultado considera operadores acotados de $L^s(w^s)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$, para ciertos pesos w adecuados, como punto de partida para un resultado de extrapolación.

Teorema 4.9. *Sean $1 < s < \infty$ y sea T un operador acotado de $L^s(w^s)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-s'} \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$ para ciertos $c_1, m_1 \geq 0$, donde la constante de acotación depende de w sólo a través de las constantes de la condición $w^{-s'} \in H^{\rho,m_1}_{1,c_1}$. Entonces T está acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ para todo $1 < p < s$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$, y para todo $w^{-p'} \in H^{\rho,m}_{1+\frac{p'}{q},c}$ con $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1\left(4C_0\right)^{-2m}$.*

Demostración. A partir del Lema 3.9, la acotación conocida sobre T implica que, para toda $f \in L^s(w^s)$ y todo peso w tal que $w^{-s'} \in H_{1,c_1}^{\rho,m_1}$, se tiene

$$\|M^\sharp_{\mathrm{loc}}(Tf)\, w\|_{L^\infty} \lesssim \|Tf\|_{\mathrm{BMO}_\rho(w)} \leq C\|f\|_{L^s(w^s)}.$$

Luego, el par de funciones $(M^\sharp_{\mathrm{loc}}(Tf), f)$ verifica las hipótesis del Teorema 4.8. Por lo tanto,

$$\|M^\sharp_{\mathrm{loc}}(Tf)\|_{L^q(w^q)} \leq C\|f\|_{L^p(w^p)},$$

para todo par de exponentes p y q con $1 < p < s$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$, y para todo peso que cumple $w^{-p'} \in H^{\rho,m}_{1+\frac{p'}{q},c}$ con $m = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1\,(4C_0)^{-2m}$.

Finalmente, como $w^{-p'} \in H^{\rho,m}_{1+\frac{p'}{q},c}$ es equivalente a $w^q \in H^{\rho,m}_{1+\frac{q}{s'},c}$, por la Proposición 2.5(ii), y $H^{\rho,m}_{1+\frac{q}{s'},c} \subseteq A^{\rho,\mathrm{loc}}_{1+\frac{q}{s'}}$ por la Proposición 2.4, se sigue que

$$\|Tf\|_{L^q(w^q)} \lesssim \|M^\sharp_{\mathrm{loc}}(Tf)\|_{L^q(w^q)} \leq C\|f\|_{L^p(w^p)},$$

de la Proposición 3.10, para todo p, q y w como antes. $\square$

Demostración del Teorema 4.7. Para demostrar el ítem (i) sean $B = B(x_0, r)$ con $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $r \leq \rho(x_0)$ y $B_0 = B(x_0, \rho(x_0))$. Escribimos

$$f = f\chi_{2B} + f\chi_{B(x_0,2\rho(x_0))\setminus 2B} + f\chi_{B(x_0,2\rho(x_0))^c} =: f_1 + f_2 + f_3.$$

Sea $0 < \nu < d$. Comencemos estimando el término asociado a f_1. Para ello, notemos que de acuerdo al tipo débil $(1, \frac{d}{d-\nu})$ de T podemos aplicar la desigualdad de Kolmogorov (ver (1.2)), que junto con la desigualdad de Hölder con exponente d/ν implican

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(x)|dx &\leq C\frac{|B|^{1-(d-\nu)/d}}{|B|}\int_{2B}|f| \\
&\leq C\frac{1}{|B|^{1-\nu/d}}\int_{2B}|f| \\
&\leq C\frac{1}{|B|^{1-\nu/d}}\left(\int_{2B}|f|^{d/\nu}w^{d/\nu}\right)^{\nu/d}\left(\int_{2B}w^{-(d/\nu)'}\right)^{1/(d/\nu)'} \\
&\leq C\|fw\|_{L^{d/\nu}}\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}w^{-d/(d-\nu)}\right)^{(d-\nu)/d} \\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^{d/\nu}}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado la condición de que $w^{-\frac{d}{d-\nu}} \in H^{\rho,m_1}_{1,c}$, teniendo en cuenta que el término exponencial se puede controlar por una constante dado que $r \leq \rho(x_0)$.

Para estimar $\fint_B |Tf_3(x)|\,dx$, comenzamos obteniendo una cota puntual de $|Tf_3(x)|$ para $x \in B$. Denotamos, como en pruebas anteriores, $B_0^k = 2^k B_0$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Realizando una descomposición en coronas como en (3.18), y utilizando la condición de tamaño (4.1), junto con la desigualdad de Hölder con exponente d/ν y la hipótesis sobre w, se obtiene que

$$\begin{aligned}
|Tf_3(x)| &\lesssim \sum_{k\geq 2} \exp\left(-c_1(1+2^{k-2}C_0^{-1})^{m_1}\right)\left(\frac{1}{|B_0^{k+1}|}\int_{B_0^{k+1}}|f(y)|dy\right)\\
&\lesssim \|fw\|_{L^{d/\nu}}\sum_{k\geq 2}\exp\left(-c_1(8C_0)^{-m_1}(1+2^{k+1})^{m_1}\right)\left(\frac{1}{|B_0^{k+1}|}\int_{B_0^{k+1}} w^{-\frac{d}{d-\nu}}\right)^{\frac{d-\nu}{d}}\\
&\lesssim \frac{\|fw\|_{L^{d/\nu}}}{\|w\chi_B\|_\infty}\sum_{k\geq 2}\exp\left(-c_1(8C_0)^{-m_1}(1+2^{k+1})^{m_1}\right)\exp\left(\frac{c(d-\nu)}{d}\left(1+2^{k+1}\right)^{m_1}\right),
\end{aligned}$$

donde la serie converge ya que $c < c_1\frac{d}{(d-\nu)}(8C_0)^{-m_1}$.

La acotación de f_2 se sigue como en la demostración de [BCH13a, Proposición 5], ya que solo se requiere la condición de suavidad, y el operador T que consideramos satisface [BCH13a, (41)], que es precisamente (3.4).

Para demostrar el ítem (ii), sea $B = B(x_0, r)$ y $B_0 = B(x_0, \rho(x_0))$ con $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $r \leq \rho(x_0)$. Consideremos f_1, f_2 y f_3 como en la prueba del ítem anterior.

Sea $0 < \nu < d$. Como T es de tipo débil $(s', \frac{ds'}{d-s'\nu})$ y de acuerdo a la desigualdad de Kolmogorov (1.2), para Tf_1 se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(x)|dx &\leq C\frac{|B|^{1-(d-s'\nu)/ds'}}{|B|}\left(\int_{2B}|f|\right)^{1/s'}\\
&\leq C\frac{1}{|B|^{1/s'-\nu/d}}\left(\int_{2B}|f|^{s'}\right)^{1/s'}\\
&\leq C\frac{1}{|B|^{1/s'-\nu/d}}\left(\int_{2B}|f(x)|^{d/\nu}w^{d/\nu}\right)^{\nu/d}\left(\int_{2B}w^{-q}\right)^{1/q}\\
&\leq C\|fw\|_{L^{d/\nu}}\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}w^{-q}\right)^{1/q}\\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^{d/\nu}}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}},
\end{aligned}$$

debido a la condición sobre w.

Con respecto al término $|Tf_3(x)|$ para $x \in B$, procedemos como en el caso $1 < s < \infty$ del Teorema 3.7.

En virtud de la hipótesis sobre f, y utilizando la condición de tamaño (4.1), junto con la desigualdad de Hölder con exponente determinado por $\frac{1}{q} = \frac{d-\nu s'}{s'd}$, y la condición asumida sobre el peso w, se obtiene que

$$|Tf_3(x)| \leq \sum_{k\geq 1}\left(\int_{B_0^{k+1}\setminus B_0^k}|K(x,y)|^s dy\right)^{1/s}\left(\int_{B_0^{k+1}}|f(y)|^{s'}dy\right)^{1/s'}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{k\geq 1} \frac{(2^k\rho(x_0))^{d/s}}{(2^k\rho(x_0))^{(d-\nu)}} \exp\left(-c_1\left(1+\frac{2^k\rho(x_0)}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)\left(\int_{B_0^{k+1}} |f(y)|^{s'}dy\right)^{1/s'} \\
&\lesssim \|fw\|_{L^{d/\nu}} \sum_{k\geq 1} \exp\left(-c_1\left(1+2^{k-1}C_0^{-1}\right)^{m_1}\right)\left(\frac{1}{|B_0^{k+1}|}\int_{B_0^{k+1}} w^{-q}\right)^{1/q} \\
&\lesssim \frac{\|fw\|_{L^{d/\nu}}}{\|w\chi_{B_0}\|_{L^\infty}} \sum_{k\geq 2} \exp\left(\left(-c_1 C_0^{-m_1}\right)\left(1+2^{k-1}\right)^{m_1}\right) \exp\left(\frac{c4^{m_1}}{q}\left(1+2^{k-1}\right)^{m_1}\right),
\end{aligned}
$$

donde la serie converge ya que $c < c_1 q(4C_0)^{-m_1}$.

Para el término relacionado a f_2, estimamos $|Tf_2(x) - c_B|$, con $c_B = Tf_2(x_0)$. Sea $j_0 = \max\{j : 2^j r < 2\rho(x_0)\}$. De acuerdo a la condición sobre el núcleo, del Lema 4.4 y la hipótesis sobre w, se sigue que

$$
\begin{aligned}
&|Tf_2(x) - c_B| \\
&\leq \sum_{j=1}^{j_0} \left(\int_{2^{j+1}B\setminus 2^jB} |K(x,y)-K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s} \left(\int_{2^{j+1}B} |f(y)|^{s'}dy\right)^{1/s'} \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{j_0} \left(\int_{2^{j+1}B\setminus 2^jB} |K(x,y)-K(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s} \left(\int_{2B} |f|^{d/\nu} w^{d/\nu}\right)^{\nu/d} \left(\int_{2B} w^{-q}\right)^{1/q} \\
&\lesssim \|fw\|_{L^{d/\nu}} \sum_{j=1}^{j_0} (2^j r)^{d/s-d+\nu} 2^{-\delta' j} \exp\left(-c_1\left(1+\frac{2^j r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right)\left(\int_{2B} w^{-q}\right)^{1/q} \\
&\lesssim \frac{\|fw\|_{L^{d/\nu}}}{\|w\chi_B\|_\infty} \sum_{j=1}^{j_0} (2^j r)^{d/s-d+\nu+d/q} 2^{-j\delta'} \exp\left(-c_1\left(1+\frac{2^j r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right) \exp\left(\frac{c}{q}\left(1+\frac{2^{j+1} r}{\rho(x_0)}\right)^{m}\right) \\
&\lesssim \frac{\|fw\|_{L^{d/\nu}}}{\|w\chi_B\|_\infty} \sum_{j=1}^{j_0} 2^{-j\delta'} \exp\left(-c_1\left(1+\frac{2^j r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right) \\
&\lesssim \frac{\|fw\|_{L^{d/\nu}}}{\|w\chi_B\|_\infty} \sum_{j\geq 1} 2^{-j\delta'} \exp\left(-c_1\left(1+\frac{2^j r}{\rho(x)}\right)^{m_1}\right) \\
&\leq C\frac{\|fw\|_{L^{d/\nu}}}{\|w\chi_B\|_{L^\infty}}.
\end{aligned}
$$

Como antes, hemos estimado los promedios para Tf_1 y Tf_3, y la oscilación para Tf_2; pero como para $r = \rho(x_0)$ es $f_2 = 0$, la acotación en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ queda probada. □

Demotración del Teorema 4.6. Para demostrar el ítem (i), notar que del Teorema 4.7(i) se tiene que el operador T es acotado de $L^{d/\nu}(w^{d/\nu})$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-\frac{d}{d-\nu}} \in H_{1,c}^{\rho,m_1}$ con $c < c_1\frac{d}{d-\nu}(8C_0)^{m_1}$. Luego, podemos aplicar el Teorema 4.9 con $s = d/\nu$, para obtener así que T es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$, para todo peso w tal que $w^{-p'} \in H^{\rho,m^*}_{1+\frac{p'}{q},c}$ con $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$ y $c < c_1\frac{d}{d-\nu}(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.

La demostración del ítem (ii) se sigue de la misma manera que el ítem (i) utilizando el Teorema 4.7(ii), seguido del Teorema 4.9. □

4.2. Estimaciones en espacios de tipo BMO

En esta sección estableceremos un teorema de tipo $T1$, para obtener la acotación en espacios $\mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)$ para operadores Schrödinger–Calderón–Zygmund exponenciales de tipo (ν, s, δ), para ciertos parámetros $0 < \nu < d$, $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$. La demostración del resultado es análoga al caso de operadores Schrödinger–Calderón–Zygmund exponenciales de tipo (s, δ) expuesta en el Teorema 3.18. Algunas modificaciones aparecen considerando el parámetro de fraccionalidad ν, por lo que sólo haremos referencia a estos detalles en la demostración.

Teorema 4.10. *Sea T un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (ν, s, δ), para $0 \leq \nu < d$, $\frac{d}{d-\nu} < s < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, y sean $c, m \geq 0$ las constantes que apareen en (4.1). Sea α y κ tales que $\alpha + \nu < \delta$ y $1 \leq \kappa < 1 + \frac{\delta-\nu-\alpha}{d}$. Entonces, las siguientes resultados son equivalentes:*

(i) *Existe una constante C tal que para toda bola $B = B(x_0, r)$, con $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0)$, la función $T1$ satisface*

$$\frac{1}{|B|^{1+\nu/d}} \int_B |T1(y) - (T1)_B| dy \leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{\alpha + d(\kappa-1)}, \tag{4.8}$$

cuando $\alpha > 0$ o $\kappa > 1$, o bien

$$\frac{1}{|B|^{1+\nu/d}} \int_B |T1(y) - (T1)_B| dy \leq C \log^{-1} \left(\frac{\rho(x_0)}{r} \right), \tag{4.9}$$

cuando $\alpha = 0$ y $\kappa = 1$.

(ii) *El operador T es acotado de $\mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)$ en $\mathrm{BMO}^{\alpha+\nu}_{\rho}(w)$ para todo peso $w \in E^{\rho,m}_{s,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$, con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha+\nu}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$. La norma del operador depende de w únicamente a través de los parámetros de las clases $E^{\rho,m}_{s,c_1,c_2}$ y $D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$.*

(iii) *El operador T es acotado de $\mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)$ en $\mathrm{BMO}^{\alpha+\nu}_{\rho}(w)$ para todo peso de la forma $w(x) = |x - x_0|^{d(\kappa-1)}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, con norma del operador independiente de x_0.*

Demostración. Para ver que (i)⇒(ii), sea $f \in \mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)$ y fijemos

$$w \in E^{\rho,m}_{s,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3} = \left(\bigcup_{\eta > s'} H^{\rho,m}_{s/\eta',c_1} \cap RH^{\rho,m}_{\eta,c_2} \right) \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3},$$

con $(c_2 + c_3) < c(4C_0)^{-m}$.

Para verificar la condición (1.14), por (2.2) y el Lema 1.19, basta considerar bolas críticas. Sea $B_0 = B(x_0, \rho(x_0))$ con $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Según la definición de Tf, descomponemos la función de la forma

$$f = f_1 + f_2 = f\chi_{2B_0} + f\chi_{(2B_0)^c}.$$

Esto nos permite acotar

$$\int_{B_0} |Tf(x)|dx \leq \int_{B_0} |Tf_1(x)|dx + \int_{B_0} |Tf_2(x)|dx.$$

Aquí, como T es de tipo débil $\left(s', \frac{s'd}{d-s'\nu}\right)$ con $s', \frac{s'd}{d-s'\nu} \geq 1$ se obtiene

$$\int_{B_0} |Tf_1(x)|dx \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} |B_0|^{\frac{\alpha+\nu}{d}} w(B_0).$$

Por la condición de tamaño (4.1) se obtiene

$$\begin{aligned} |Tf_2(x)| &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} w(B_0)|B_0|^{\frac{\alpha+\nu}{d}-1} \\ &\quad \times \sum_{j\in\mathbb{N}} \exp\left(\left((c_2+c_3) - \frac{c}{(4C_0)^m}\right)(1+2^{j+1})^m\right) 2^{j(d\kappa+\alpha-d+\nu)} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} w(B_0)|B_0|^{\frac{\alpha+\nu}{d}-1}, \end{aligned}$$

cuando $(c_2+c_3) < c(4C_0)^{-m}$ y $\kappa < 1 + \frac{\delta-\nu-\alpha}{d}$.

Esto concluye la demostración de (1.14) para Tf.

Para verificar la condición (1.13), fijemos $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r < \rho(x_0)$ y sea $B = B(x_0, r)$. Descomponemos f de la siguiente manera,

$$f = (f - f_B)\chi_{2B} + (f - f_B)\chi_{(2B)^c} + f_B = f_1 + f_2 + f_3.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_B |Tf(x) - (Tf)_B|dx &\leq \frac{1}{|B|}\int_B\int_B |Tf_1(x) - Tf_1(z)|dzdx \\ &\quad + \frac{1}{|B|}\int_B\int_B\int_{(2B)^c} |K(x,y) - K(z,y)||f(y) - f_B|dydzdx \\ &\quad + \int_B |Tf_3(x) - (Tf_3)_B|dx. \end{aligned}$$

Aquí la diferencia con el caso singular puede verse en el segundo término, donde utilizamos el Lema 4.4, en lugar del Lema 3.5, para $\delta' < \delta$, a elegir, y para el segundo factor, el Lema 3.24. Entonces

$$\begin{aligned} &\int_{(2B)^c} |K(x,y) - K(z,y)||f(y) - f_B|dy \\ &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha+\nu}{d}-1} \sum_{j\geq 1} 2^{j(d(\kappa-1)+\alpha+\nu-\delta')} \exp\left(\left(c_2+c_3 - \frac{c\sigma}{(4C_0)^m}\right)\left(1+\frac{2^{j+1}r}{\rho(x_0)}\right)^m\right) \\ &\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)} w(B)|B|^{\frac{\alpha+\nu}{d}-1}, \end{aligned}$$

donde la serie converge. En efecto, por hipótesis $c_2+c_3 < c\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$. Luego, podemos elegir $\sigma \in (0,1)$ tal que $\sigma < 1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha+\nu}{\delta}$ y $c_2 + c_3 < c\sigma(4C_0)^{-m}$. A su vez, de esta elección se obtiene que $d(\kappa-1)+\alpha+\nu < (1-\sigma)\delta =: \delta'$, lo que implica su convergencia.

Finalmente, el tercer término utiliza la condición $T1$ del teorema. Más precisamente (4.8) para el caso $\kappa > 1$ o $\alpha > 0$ y (4.9) cuando $\kappa = 1$ y $\alpha = 0$.

La prueba de (ii)⇒(iii) y (iii)⇒(i) es análoga al caso singular. □

Observación 4.11. Al igual que en el caso singular, (ver Observación 3.19) es sencillo ver que si (4.8) vale para algún $\alpha > 0$ o $\kappa > 1$, entonces también se verifica (4.9) y se tiene la acotación del operador de $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ en sí mismo.

El caso $s = \infty$ se sigue como una consecuencia del Teorema 4.10 y la Observación 4.3.

Corolario 4.12. *Sea T un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (ν, ∞, δ) para algún $0 < \nu < d$, $0 < \delta \leq 1$, y sean $c, m > 0$ las constantes que aparecen en* (4.3) *(para todo $1 < s < \infty$). Entonces, la acotación de T de $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho^{\alpha+\nu}(w)$ es equivalente a las condiciones (i) y (iii) del Teorema 4.10, siempre que $w \in E^{\rho,m}_{\infty,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$ con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha+\nu}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$.*

4.3. Sobre desigualdades de comparación con pesos

Al igual que en el caso singular, en el contexto fraccionario también es posible obtener desigualdades de tipo Coifman, es decir, de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p w(x)dx,$$

donde $0 < p < \infty$, S y T son operadores, w pertenece a una familia adecuada de pesos y C es una constante independiente de f.

En este contexto, consideramos T como un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (ν, s, δ), con $0 < \nu < d$, $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$. En el rol de S tomamos un operador maximal apropiado, a saber, $\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m}$, definido por

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m} f(x) := \sup_{B(x',r)\ni x} \frac{1}{\exp\left(c\left(1+\frac{r}{\rho(x')}\right)^m\right)} |B(x',r)|^{\nu/d} \left(\fint_{B(x',r)} |f(y)|^{s'}\, dy\right)^{1/s'}.$$

El resultado principal de este apartado es el siguiente.

Teorema 4.13. *Sea $0 < p < \infty$ y $w \in A^{\rho,\mathrm{loc}}$. Sea T un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (ν, s, δ), con $0 < \nu < d$, $1 < s \leq \infty$, $0 < \delta \leq 1$, y constantes c_1 y m_1 en la condición de tamaño.*

(i) *Si $s = \infty$, entonces para todo $c < c_1(8C_0)^{-m_1}$ existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m_1} f(x)|^p w(x)\, dx,$$

para toda $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) *Si* $1 < s < \infty$, *entonces para todo* $c < c_1(4C_0)^{-m_1}$ *existe una constante* C *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m_1} f(x)|^p w(x)\, dx,$$

para toda $f \in L^{s'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Las herramientas para demostrar este resultado son esencialmente las mismas que se requieren en la prueba del Teorema 3.25: la versión ρ-local de la desigualdad de Lerner (véase el Teorema 3.27), el resultado de extrapolación de la Proposición 3.26, que también es válido en este contexto, y una estimación puntual de la maximal sharp aplicada al operador T que daremos a continuación.

Proposición 4.14. *Sea* T *un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo* (ν, s, δ), *con* $0 < \nu < d$, $1 < s \le \infty$, $0 < \delta \le 1$, *y constantes* c_1 *y* m_1 *en la condición de tamaño.*

(i) *Si* $s = \infty$, *entonces, dado* $0 < \gamma \le 1$, *existe una constante* C *tal que*

$$\left[M^\sharp_{\mathrm{loc}}\left(|Tf|^\gamma\right)(x)\right]^{1/\gamma} \le C\, \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,1,\nu}_{c,m_1} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

para toda $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *y todo* $c < c_1(8C_0)^{-m_1}$.

(ii) *Si* $1 < s < \infty$, *entonces, dado* $0 < \gamma \le 1$, *existe una constante* C_γ *tal que*

$$\left[M^\sharp_{\mathrm{loc}}\left(|Tf|^\gamma\right)(x)\right]^{1/\gamma} \le C_\gamma\, \widetilde{\mathcal{M}}^{\rho,s',\nu}_{c,m_1} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

para toda $f \in L^{s'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *y todo* $c < c_1(4C_0)^{-m_1}$.

Demostración. La demostración sigue los lineamientos de la prueba de la Proposición 3.28.

En el caso del ítem (i), se utiliza la hipótesis de que T es de tipo débil $(1, \frac{d}{d-\nu})$, junto con las correspondientes condiciones de tamaño y suavidad (4.3) y (4.4), en lugar de (3.3) y (3.4).

Por su parte, en el ítem (ii), se emplea que T es de tipo débil $(s', \frac{s'd}{d-s'\nu})$, junto con las condiciones de tamaño y suavidad (4.1) y (4.2), en sustitución de (3.1) y (3.2). □

Capítulo 5

Aplicaciones de los resultados a operadores asociados a $\mathcal{L}_\mu$

En este capítulo trabajaremos con ciertos operadores que han sido objeto de estudio de diversos autores en el contexto del operador de Schrödinger $\mathcal{L}_V$ (ver [She95], [BHS09], [BCH13a], [BCH13b], [MSTZ14], [BCH16], [BHQ19], entre otros), y más generalmente, en el caso del operador $\mathcal{L}_\mu$ (ver, por ejemplo, [She99], [WY16], [Bai21]).

Para cada uno de ellos, inicialmente comentaremos los resultados conocidos y probaremos su clasificación como operadores de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponenciales. A partir de ella, deduciremos las correspondientes propiedades de acotación en espacios de Lebesgue y BMO con pesos en las clases exponenciales $H_{p,c}^{\rho,m}$, mediante los resultados obtenidos en los Capítulos 3 y 4.

De aquí en adelante, supondremos que μ siempre es una medida de Radón no negativa que satisface las propiedades (1.16) y (1.17), salvo que se indique lo contrario.

A lo largo de este capítulo, debido al uso del cálculo funcional para determinar los núcleos de los operadores en estudio, será muy frecuente encontrar a los operadores $\mathcal{L}_\lambda = -\Delta + \lambda$ y $\mathcal{L}_{\mu+\lambda} = -\Delta + \mu + \lambda$ para $\lambda \geq 0$, los cuales se enmarcan en la teoría general. En el caso de $\mu + \lambda$, como se observa en [She99, p. 554], si μ verifica (1.16) y (1.17), entonces $\mu + \lambda$ también satisface estas condiciones para todo $\lambda \geq 0$, con constantes independientes de λ (es sencillo ver que $C_{\mu+\lambda} = C_\mu + 1, D_{\mu+\lambda} = D_\mu + 2^d$ y $\delta_{\mu+\lambda} = \min\{\delta_\mu, 2\}$). A partir de esta medida tendremos la función de radio crítico $\rho_{\mu+\lambda}$ según se definió en (1.18). Además, denotaremos por Γ_λ y $\Gamma_{\mu+\lambda}$ a las soluciones fundamentales de $\mathcal{L}_\lambda$ y $\mathcal{L}_{\mu+\lambda}$, con lo cual Γ_0 corresponderá a la solución fundamental del operador laplaciano.

Para simplificar notación, denotaremos por d_V, d_μ y $d_{\mu+\lambda}$ a las distancias de Agmon correspondientes a ρ_V, ρ_μ y $\rho_{\mu+\lambda}$, respectivamente. Frecuentemente designaremos sólo con ρ a la función de radio crítico correspondiente al potencial V o a una medida más general μ, entendiendo que la referencia será clara a partir del contexto.

5.1. Transformadas de Riesz

Las transformadas de Riesz constituyen uno de los ejemplos más representativos de los operadores singulares de tipo Calderón–Zygmund, y fueron el ejemplo paradigmático que motivó toda la teoría de operadores de Schrödinger–Calderón–Zygmund, tanto en el caso potencial como en el caso generalizado con una medida de Radón.

Debido a su relevancia en el análisis armónico, han sido y continúan siendo objeto de estudio en una amplia variedad de contextos, tanto clásicos como generalizados.

En esta sección consideraremos la transformada de Riesz $\mathcal{R}_\mu = \nabla \mathcal{L}_\mu^{-1/2}$ y el operador $\mathcal{R}_\mu^* = \mathcal{L}_\mu^{-1/2}\nabla$, que si bien difiere en un signo de la definición de operador adjunto dado en la Sección 3.2, lo expuesto allí sigue siendo válido, por lo que nos permitiremos llamarla transformada de Riesz adjunta.

El objetivo principal será analizar las condiciones de tamaño y suavidad que satisfacen sus respectivos núcleos asociados, con el fin de determinar a qué clase de operadores de Schrödinger–Calderón–Zygmund con decaimiento exponencial pertenecen.

Por cálculo funcional (véase [Kat66, p. 282], [She99, Eq. (7.3)], para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $x \notin \operatorname{sop}(f)$, la transformada de Riesz $\mathcal{R}_\mu$ puede expresarse como

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\mu f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}\nabla(\mathcal{L}_\mu+\lambda)^{-1}f(x)d\lambda\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)f(y)dy\,d\lambda.\end{aligned}$$

Por el teorema de Fubini,

$$\mathcal{R}_\mu f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)d\lambda\, f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} K_\mu(x,y)f(y)dy,$$

donde K_μ es el núcleo singular de $\mathcal{R}_\mu$ dado por

$$K_\mu(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)d\lambda. \tag{5.1}$$

Luego, la transformada de Riesz adjunta $\mathcal{R}_\mu^*$ puede escribirse como

$$\mathcal{R}_\mu^* f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_\mu^*(x,y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} -K_\mu(y,x)f(y)dy.$$

El análisis para estos operadores es diferente para los casos $\delta_\mu > 1$ y $0 < \delta_\mu < 1$, lo que también se evidencia en el caso potencial. Cuando $V \in RH_q$ vimos que $\delta_V = 2 - \frac{d}{q}$ (ver Sección 1.6), por lo que $\delta_V > 1$ se traduce en el caso $q > d$, mientras que $0 < \delta_V < 1$ se corresponde con $\frac{d}{2} < q < d$.

Para $q > d$, de [She95, Theorem 0.8] se sabe que la transformada de Riesz $\mathcal{R}_V$ es un operador de Calderón–Zygmund, por lo que es acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 < p < \infty$ y de tipo débil $(1,1)$. Similarmente, si $\delta_\mu > 1$, en [She99, Theorem 7.18] se probó que también $\mathcal{R}_\mu$ es un operador de Calderón–Zygmund. Por dualidad, $\mathcal{R}_\mu^*$ (y $\mathcal{R}_V^*$) también es acotada en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 < p < \infty$ y de tipo débil $(1,1)$.

Cuando $0 < \delta_\mu < 1$, $\mathcal{R}_\mu$ y $\mathcal{R}_\mu^*$ no se comportan de la misma manera que para $\delta_\mu > 1$ en los espacios de Lebesgue clásicos, incluso en el caso potencial. Se sabe de [She95, Theorem 0.5] que, siempre que $V \in RH_q$ con $\frac{d}{2} < q < d$, la transformada de Riesz $\mathcal{R}_V$ es acotada en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 < p \leq p_0$, y su adjunta $\mathcal{R}_V^*$ lo es para todo $p_0' \leq p < \infty$, siendo $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$. Esto implica que no son operadores de Calderón–Zygmund cuando $\frac{d}{2} < q < d$, es decir, cuando $0 < \delta_V < 1$. De hecho, como probó Shen en [She95, Section 7], el exponente p_0 es óptimo, una vez fijado q.

En cuanto a acotaciones pesadas, en [BHS11, Theorem 3] se demostró que, si $q > d$, $\mathcal{R}_V$ y $\mathcal{R}_V^*$ son ambas acotadas en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y para todo $w \in A_p^\rho$, y de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w para todo $w \in A_1^\rho$. En cambio, si $\frac{d}{2} < q < d$, $\mathcal{R}_V^*$ es acotada en $L^p(w)$ para todo $p_0' \leq p < \infty$ y todo $w \in A_{p/p_0'}^\rho$, mientras que $\mathcal{R}_V$ es acotada en $L^p(w)$ para todo $1 < p \leq p_0$ con $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'/p_0'}^\rho$, siendo p_0 como antes.

Resultados análogos fueron obtenidos para las transformadas de Riesz generalizadas $\mathcal{R}_\mu$ y $\mathcal{R}_\mu^*$ en [She99, Theorem 7.15] en el caso sin peso, y en [Bai21, Theorem 4.1(ii)] con pesos en la clase de crecimiento exponencial $S_{p,c}^\rho$, extendiendo el resultado de [BHS11] a una clase más amplia de pesos, aunque con algunas restricciones adicionales sobre el exponente p_0 en el caso $0 < \delta_\mu < 1$.

Como parte de la demostración de [She99, Theorem 7.18] se muestra que los núcleos de las transformadas de Riesz asociadas a $\mathcal{L}_\mu$ satisfacen las estimaciones que mostraremos a continuación. Estas mejoran, a su vez, a las conocidas estimaciones con decaimiento polinomial asociado a la función de radio crítico obtenidas en el caso en que $d\mu(x) = V(x)dx$ con $V \in RH_{\frac{d}{2}}$ en [She95, Section 6], lo cual fue observado y explotado por Bailey en [Bai21] para ampliar la clase de pesos dada en [BHS11].

En [Bai21, Lemma 4.3] se establece la siguiente cota de tamaño para el núcleo de $\mathcal{R}_\mu^*$, la cual aplica también para K_μ intercambiando las variables x e y:

$$\left|K_\mu^*(x,y)\right| \leq C\frac{e^{-\epsilon d_\mu(x,y)}}{|x-y|^{d-1}}\left(\int_{B\left(y,\frac{|y-x|}{2}\right)} \frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}} + \frac{1}{|x-y|}\right), \quad x \neq y, \tag{5.2}$$

para ciertas constantes positivas C, ϵ.

Más aún, si $\delta_\mu > 1$, se recupera la estimación dada por Shen en [She99, (7.20)] para K_μ, para cierta constante C:

$$|K_\mu^*(x,y)| \leq C\frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}d_\mu(x,y)}}{|x-y|^d}, \quad x \neq y, \tag{5.3}$$

lo cual puede obtenerse usando (1.21), (1.16), (1.19), y el Lema 1.24 junto con (1.7).

Respecto a las condiciones de suavidad, en [She99, (7.26)] encontramos que, si $\delta_\mu > 1$, entonces existe una constante C tal que

$$|K_\mu(x,y) - K_\mu(z,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-z|}{|x-y|}\right)^{\delta_\mu - 1}, \tag{5.4}$$

cuando $|x-y| > 2|x-z|$. Asimismo, el autor prueba en [She99, (7.29)] la suavidad en la segunda variable para K_μ, lo que permite deducir la suavidad en la primera variable para K_μ^*,

$$|K_\mu(y,x) - K_\mu(y,z)| = |K_\mu^*(x,y) - K_\mu^*(z,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-z|}{|x-y|}\right)^{\delta_1}, \qquad (5.5)$$

cuando $|x-y| > 2|x-z|$, para alguna constante C y cierto parámetro $\delta_1 \in (0,1)$.

A partir del Lema 1.9, se sigue que si $\delta_\mu > 1$, entonces

$$|K_\mu(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d}\exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right), \quad x \neq y, \qquad (5.6)$$

y, por la simetría de la distancia de Agmon, la misma cota se sigue para $|K_\mu^*(x,y)|$.

Por lo tanto, cuando $\delta_\mu > 1$, obtenemos la siguiente clasificación para la transformada de Riesz y su adjunta.

Proposición 5.1. *Sea $\delta_\mu > 1$. Entonces, $\mathcal{R}_\mu$ y $\mathcal{R}_\mu^*$ son operadores de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponenciales de tipo (∞, δ), para $\delta = \min\{1, \delta_\mu - 1\}$ y $\delta = \delta_1$, respectivamente, con constantes $c = \frac{\epsilon}{2D_1}$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$.*

Como consecuencia de la Proposición 5.1 anterior, y de los resultados obtenidos en el Capítulo 3, más precisamente, los Teoremas 3.7(i) y 3.6(i), se deduce el siguiente resultado de acotación en $L^p(w)$ con pesos $w \in H_{p,c}^{\rho,m}$ para el caso $\delta_\mu > 1$.

Teorema 5.2. *Sean $\delta_\mu > 1$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$. Entonces, para todo $c < \frac{\epsilon}{2D_1}2^{-m}$ y todo peso w tal que $w^{-1} \in H_{1,c}^{\rho,m}$, se tiene que $\mathcal{R}_\mu$ y $\mathcal{R}_\mu^*$ son acotadas de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Más aún, son acotadas en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y $w \in H_{p,c^*}^{\rho,m^*}$, con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < \frac{\epsilon}{2D_1}(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Del teorema anterior obtenemos una clase más amplia de pesos que la dada en [BHS11], que garantizan la acotación de las transformadas de Riesz asociadas a $\mathcal{L}_V$, cuando $V \in RH_q$ con $q > d$ (para pesos en las clases $S_{p,c}^\rho$, ver [Bai21, Theorem 4.1(i)]).

Corolario 5.3. *Sean $V \in RH_q$ con $q > d$ y $V \not\equiv 0$, y sea $m = \frac{1}{k_0+1}$. Entonces, para todo $c < \frac{\epsilon}{2D_1}2^{-m}$ y todo peso w tal que $w^{-1} \in H_{1,c}^{\rho,m}$, se tiene que $\mathcal{R}_V$ y $\mathcal{R}_V^*$ son acotadas de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Más aún, son acotadas en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y $w \in H_{p,c^*}^{\rho,m^*}$, con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < \frac{\epsilon}{2D_1}(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Debido al comportamiento de las transformadas de Riesz $\mathcal{R}_\mu$ y $\mathcal{R}_\mu^*$ en el caso $0 < \delta_\mu < 1$ en espacios de Lebesgue con y sin pesos, es de esperar que las únicas que sean acotadas de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ sean las adjuntas. Por esta razón, nos concentraremos en clasificar a estas últimas; los resultados de acotación en $L^p(w)$ correspondientes a $\mathcal{R}_\mu$ para $0 < \delta_\mu < 1$ se obtendrán mediante dualidad.

Para hacer dicha clasificación, tendremos en cuenta las siguientes estimaciones para la solución fundamental $\Gamma_{\mu+\lambda}$, $\lambda \geq 0$.

Lema 5.4 ([Bai21, (22)], [She99, Theorem 7.18, p. 563])**.** *Sea* $\lambda \geq 0$.

(i) *Existe una constante positiva C tal que para todo $x \neq y$*

$$|\nabla_1 \Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)| \leq C \frac{e^{-\frac{\epsilon_3}{2} d_\mu(x,y)} e^{-\frac{\epsilon_3}{4}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|^{d-2}} \left(\int_{B\left(x,\frac{|x-y|}{2}\right)} \frac{d\mu(z)}{|z-x|^{d-1}} + \frac{1}{|x-y|} \right), \tag{5.7}$$

donde ϵ_3 es la constante en (1.25)*.*

(ii) *Sea δ_1 como en* (5.5)*. Existe una constante C tal que*

$$|\nabla_1 \Gamma_{\mu+\lambda}(x,y) - \nabla_1 \Gamma_{\mu+\lambda}(x,y_0)| \leq C \left(\frac{|y-y_0|}{|y-x|} \right)^{\delta_1} \sup_{z \in B\left(y, \frac{|y-x|}{2}\right)} |\nabla_1 \Gamma_{\mu+\lambda}(x,z)|, \tag{5.8}$$

siempre que $|y-y_0| < |y-x|/8$.

Proposición 5.5. *Sea $0 < \delta_\mu < 1$. Entonces $\mathcal{R}_\mu^*$ es un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (s, δ_1) para δ_1 como en* (5.5) *y todo $1 < s < \frac{2-\delta_\mu}{1-\delta_\mu}$, con constantes $c = \frac{\epsilon}{4D_1}$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$.*

Demostración de la Proposición 5.5. La condición (i) de la Definición 3.1 se deduce de [She99, Theorem 7.1], donde se prueba la acotación de $\mathcal{R}_\mu^*$ en $L^{s'}(\mathbb{R}^d)$ para todo $s' > 2-\delta_\mu$, siempre que $0 < \delta_\mu < 1$. Por ello, $\mathcal{R}_\mu^*$ es acotada de $L^{s'}(\mathbb{R}^d)$ en $L^{s',\infty}(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 < s < \frac{2-\delta_\mu}{1-\delta_\mu}$.

Ahora probamos la condición de tamaño de tipo Hörmander (3.1). Para ello, notemos primero que si $|x-x_0| < R/2$ y $R < |x_0-y| \leq 2R$, entonces $|x-y| > \frac{R}{2}$. Por (5.2), y aplicando el Lema 1.9,

$$|K_\mu^*(x,y)| \lesssim \frac{1}{R^{d-1}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}} \right) \left(\int_{B\left(y,\frac{|y-x|}{2}\right)} \frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}} + \frac{1}{R} \right).$$

Integrando tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R^d} \int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K_\mu^*(x,y)|^s dy \right)^{1/s} &\lesssim \frac{1}{R^{d/s+d-1}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}} \right) \\ &\quad \times \left(\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} \left(\int_{B\left(y,\frac{|y-x|}{2}\right)} \frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}} \right)^s dy \right)^{1/s} \\ &\quad + \frac{1}{R^d} \exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}} \right). \end{aligned}$$

Para estimar la integral restante haremos uso de [She99, Lemma 7.9] el cual establece que, para todo $1 \leq s < \frac{2-\delta_\mu}{1-\delta_\mu}$,

$$\left(\int_B \left(\int_B \frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}\right)^s dy\right)^{1/s} \leq C \frac{\mu(3B)}{r^{d(1-1/s)-1}}, \tag{5.9}$$

donde r es el radio de la bola B.

Aplicando además el Lema 1.24, tenemos que, siempre que $|x-x_0| < R/2$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} \left(\int_{B\left(y,\frac{|y-x|}{2}\right)} \frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}\right)^s dy\right)^{1/s} &\leq \left(\int_{B(x,4R)} \left(\int_{B(x,4R)} \frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}\right)^s dy\right)^{1/s} \\ &\leq C \frac{\mu\left(B(x,12R)\right)}{R^{d(1-(1/s))-1}} \\ &\leq C R^{d/s-1} \left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\log_2 D_\mu}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Por lo tanto, usando que

$$\exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\log_2 D_\mu} \leq C \exp\left(-\frac{\epsilon}{4D_1}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right),$$

tenemos que

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R} |K_\mu^*(x,y)|^s dy\right)^{1/s} \lesssim \frac{1}{R^d} \exp\left(-\frac{\epsilon}{4D_1}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right).$$

Para probar la condición de suavidad (3.2), sean $|x-x_0| < r < \rho(x_0)$, $0 < r < R/16$, y supongamos que $R < |x_0 - y| \leq 2R$. Luego, $|x-x_0| < R/8 \leq |x-y| < 3R$. Esto nos permitirá usar las ideas dadas en la demostración de [She99, Theorem 7.18], y aplicar (5.8) para $x_0 \in B\left(x, \frac{|x-y|}{8}\right)$. Cabe señalar que si bien la condición de suavidad se definió para $0 < r < R/2$, es suficiente probar que vale la misma para todo $0 < r < aR$ con cierto $a \in (0,1)$.

Por lo tanto, de (5.8) y (5.7), existe una constante ϵ_4 tal que

$$\begin{aligned}&|\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x) - \nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x_0)| \\ &\lesssim \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1} \sup_{z\in B(x,|x-y|/2)} |\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,z)| \\ &\lesssim \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1} \sup_{z\in B(x,|x-y|/2)} \left[\frac{e^{-\epsilon_4 d_\mu(y,z)}e^{-\epsilon_4\sqrt{\lambda}|y-z|}}{|y-z|^{d-2}}\left(\int_{B\left(y,\frac{|z-y|}{2}\right)} \frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}} + \frac{1}{|z-y|}\right)\right].\end{aligned}$$

De la desigualdad (1.9), y teniendo en cuenta que $|x-y|/2 \leq |y-z| \leq |x-y|$ para $z \in B(x, |x-y|/2)$, resulta que

$$e^{-\epsilon_4 d_\mu(y,z)} \leq C e^{-\frac{\epsilon_4}{D_1}\left(1+\frac{|y-z|}{\rho(y)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}} \leq e^{-\frac{\epsilon_4}{4D_1}\left(1+\frac{R}{\rho(y)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}} \leq e^{-\epsilon_0\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{(k_0+1)^2}}}, \tag{5.11}$$

para cierta constante ϵ_0 que depende de ϵ_4, D_1, k_0 y C_0.

Así, tomando el supremo en z,

$$\begin{aligned}|\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x) - \nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x_0)|\\ \lesssim e^{-\epsilon_0\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{(k_0+1)^2}}}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1}\frac{e^{-\epsilon_4\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|^{d-2}}\left(\int_{B(y,|y-x|)}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}+\frac{1}{|x-y|}\right).\end{aligned} \tag{5.12}$$

Luego, realizando la integral en λ (ver (5.1)),

$$\begin{aligned}|K^*_\mu(x,y)-K^*_\mu(x_0,y)| &\lesssim \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1}\frac{e^{-\epsilon_0\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{(k_0+1)^2}}}}{|x-y|^{d-2}}\left(\int_{B(y,|y-x|)}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}+\frac{1}{|x-y|}\right)\\ &\qquad\times\int_0^\infty\frac{e^{-\epsilon_4\sqrt{\lambda}|x-y|}}{\sqrt{\lambda}}d\lambda\\ &\lesssim \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1}\frac{e^{-\epsilon_0\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{(k_0+1)^2}}}}{|x-y|^{d-1}}\left(\int_{B(y,|y-x|)}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}+\frac{1}{|x-y|}\right).\end{aligned}$$

Finalmente, procediendo como en la estimación del tamaño del núcleo y utilizando una estimación como (5.10), obtenemos (3.2) con $\delta=\delta_1$, con lo que se completa la demostración de la proposición. □

Una vez establecido el tipo de operador para $\mathcal{R}^*_\mu$ para el caso $0<\delta_\mu<1$, obtenemos los correspondientes resultados de acotación en los espacios $L^p(w)$, tanto para $\mathcal{R}^*_\mu$ como para $\mathcal{R}_\mu$, como consecuencia de los Teoremas 3.7(ii), 3.6(ii), y 3.12(ii).

Teorema 5.6. *Sean $0<\delta_\mu<1$, $1<s<\frac{2-\delta_\mu}{1-\delta_\mu}$ y $m=\frac{1}{k_0+1}$. Entonces, para todo $c<s'\frac{\epsilon}{4D_1}2^{-m}$, y todo peso w tal que $w^{-s'}\in H^{\rho,m}_{1,c}$ se tiene que $\mathcal{R}^*_\mu$ es acotada de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Además, es acotada en $L^p(w)$ para todo $s'<p<\infty$ y $w\in H^{\rho,m^*}_{p/s',c^*}$, con $m^*=\frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^*<s'\frac{\epsilon}{4D_1}(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

En consecuencia, $\mathcal{R}_\mu$ es acotado en $L^p(w)$ para todo $1<p<s$ y $w^{-\frac{1}{p-1}}\in H^{\rho,m^*}_{p'/s',c^*}$ para m^* y c^* como antes.

Observación 5.7. La restricción $1<s<\frac{2-\delta_\mu}{1-\delta_\mu}$ surge de utilizar (5.9), y esto mismo se evidencia en el resultado análogo al Teorema 5.6 dado en [Bai21, Theorem 4.1(ii)]. Sin embargo, este rango de s no es el óptimo en el caso potencial, tal y como se comenta en [Bai21, pp. 38–39]. Esto es, si $V\in RH_q$ con $d/2<q<d$, como mencionamos al inicio de la sección, la acotación de $\mathcal{R}_\mu$ en L^p se verifica para todo $1<p\le p_0$ con $p_0=\frac{dq}{d-q}$ óptimo. Sin embargo, recordando que $\delta_V=2-\frac{d}{q}$, el teorema anterior indica que la acotación vale para todo $1<p<s<\frac{d}{d-q}<p_0$ pues $q>3/2$.

En el caso en que $d\mu(x)=V(x)dx$, $V\not\equiv 0$, con $V\in RH_q$ y $d/2<q<d$, es posible recuperar el rango ajustando la estimación (5.10) como en la prueba de [BHQ19, Lemma 9] (cf. [Bai21, Lemma 4.4]) para operadores de Schrödinger–Calderón–Zygmund con decaimiento polinomial, pero sin perder de vista el decaimiento exponencial del núcleo K^*_V.

Proposición 5.8. *Sea $V \in RH_q$ con $d/2 < q < d$, $V \not\equiv 0$, y sea $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$. Entonces $\mathcal{R}_V^*$ es un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (p_0, δ_1) para δ_1 como en (5.5), con constantes $c = \frac{\epsilon}{4D_1}$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$.*

Demostración. La transformada $\mathcal{R}_V^*$ es de tipo fuerte (p_0', p_0') por lo que se tiene la propiedad de acotación débil de la Definición 3.1.

Para probar el tamaño y la suavidad de K_V^*, será suficiente notar que (5.10) no es más que la desigualdad [BHQ19, Eq. (63)], donde se obtiene, mediante la acotación de la integral fraccionaria clásica I_1 en $\mathbb{R}^d$ (cf. (5.9)), que

$$\left(\int_{R<|x_0-y|\leq 2R}\left(\int_{B\left(y,\frac{|y-x|}{2}\right)}\frac{V(z)dz}{|z-y|^{d-1}}\right)^{p_0}dy\right)^{1/p_0} \leq CR^{d/p_0-1}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{1+\log_2 D_\mu}.$$

A partir de aquí se procede como en la prueba de la Proposición 5.5 con $s = p_0$ para obtener la clasificación deseada. $\square$

Teorema 5.9. *Sea $V \in RH_q$ con $d/2 < q < d$, $V \not\equiv 0$. Sean $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$. Entonces, para todo $c < p_0' \frac{\epsilon}{4D_1} 2^{-m}$, y todo peso w tal que $w^{-p_0'} \in H_{1,c}^{\rho,m}$ se tiene que $\mathcal{R}_V^*$ es acotada de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Además, es acotada en $L^p(w)$ para todo $p_0' < p < \infty$ y $w \in H_{p/p_0',c^*}^{\rho,m^*}$, con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < p_0' \frac{\epsilon}{4D_1}(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

En consecuencia, $\mathcal{R}_\mu$ es acotado en $L^p(w)$ para todo $1 < p < p_0$ y $w^{-\frac{1}{p-1}} \in H_{p'/p_0',c^*}^{\rho,m^*}$ para m^* y c^* como antes.

A continuación, enunciaremos resultados de acotación en espacios de suavidad de tipo $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ para la transformada de Riesz adjunta $\mathcal{R}_\mu^*$ a partir del Teorema 3.18, dado que la hemos clasificado como un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (s, δ) para ciertos valores de $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$, dependiendo de δ_μ.

Será suficiente observar que, como $\mathcal{R}_\mu^*(1) = 0$, la condición (i) del Teorema 3.18 se verifica trivialmente. Por lo tanto, el siguiente resultado es inmediato, teniendo en cuenta las Proposiciones 5.1 y 5.5, el Teorema 3.18 y el Corolario 3.20.

Teorema 5.10. *Sean $m = \frac{1}{k_0+1}$, δ_1 como en (5.5).*

(i) *Si $\delta_\mu > 1$, sea $0 \leq \alpha < \delta_1$ y $1 \leq \kappa < \frac{\delta_1-\alpha}{d} + 1$. Entonces $\mathcal{R}_\mu^*$ es acotada en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ si y sólo si $w \in E_{\infty,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$, con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < \frac{\epsilon}{2D_1}\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta_1}\right)(4C_0)^{-m}$.*

(ii) *Si $0 < \delta_\mu < 1$, sean $0 \leq \alpha < \delta_1$, $1 \leq \kappa < \frac{\delta_1-\alpha}{d} + 1$ y $1 < s < \frac{2-\delta_\mu}{1-\delta_\mu}$. Entonces $\mathcal{R}_\mu^*$ es acotada en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ si y sólo si $w \in E_{s,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$, con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < \frac{\epsilon}{4D_1}\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta_1}\right)(4C_0)^{-m}$.*

En el caso de las transformadas asociadas al operador $\mathcal{L}_V$ puede obtenerse un mejor rango de acotación, en vistas de la Proposición 5.8.

Teorema 5.11. *Sea $V \in RH_q$, $q > \frac{d}{2}$, $V \not\equiv 0$, y sean $m = \frac{1}{k_0+1}$, δ_1 como en (5.5).*

(i) Si $q > d$, sea $0 \leq \alpha < \delta_1$ y $1 \leq \kappa < \frac{\delta_1-\alpha}{d} + 1$. Entonces $\mathcal{R}_V^*$ es acotada en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ si y sólo si $w \in E_{\infty,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$, con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < \frac{\epsilon}{2D_1}\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta_1}\right)(4C_0)^{-m}$.

(ii) Si $\frac{d}{2} < q < d$, sean $0 \leq \alpha < \delta_1$, $1 \leq \kappa < \frac{\delta_1-\alpha}{d} + 1$, y $1 < s < p_0$ donde $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$. Entonces $\mathcal{R}_V^*$ es acotada en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ si y sólo si $w \in E_{s,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$, con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < \frac{\epsilon}{4D_1}\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta_1}\right)(4C_0)^{-m}$.

El comportamiento de $\mathcal{R}_\mu$ cuando $0 < \delta_\mu < 1$, es decir, su acotación en L^p en un intervalo acotado de exponentes p, sugiere que solo pueden esperarse resultados en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ cuando $\delta_\mu > 1$. En este último caso, resulta necesario verificar la condición sobre $\mathcal{R}_\mu 1$ que establecemos en la siguiente proposición, la cual es conocida para $\mathcal{R}_V$ (ver [MSTZ14, Proposition 4.12]).

Proposición 5.12. *Sea $1 < \delta_\mu < d$ y $B = B(x_0, r)$ para $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0)$. Entonces, existe una constante C, independiente de B, tal que*

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\mathcal{R}_\mu 1(y) - (\mathcal{R}_\mu 1)_B|\, dy \leq C \log^{-1}\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right), \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\mathcal{R}_\mu 1(y) - (\mathcal{R}_\mu 1)_B|\, dy \leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta, \quad 0 < \beta < \min\{1, \delta_\mu - 1\}. \tag{5.14}$$

Una vez probado el resultado anterior, de la Proposición 5.1 y el Corolario 3.20 obtendremos la siguiente propiedad de acotación en espacios de suavidad $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ para $\mathcal{R}_\mu$ cuando $1 < \delta_\mu < d$, y el correspondiente corolario para $\mathcal{R}_V$, que caracteriza la acotación con pesos de crecimiento exponencial (para pesos con crecimiento polinomial, ver [BCH19, Theorem 7]).

Teorema 5.13. *Sean $1 < \delta_\mu < d$, $m = \frac{1}{k_0+1}$, $\delta = \min\{1, \delta_\mu - 1\}$, $0 \leq \alpha < \delta$ y $1 \leq \kappa < \frac{\delta-\alpha}{d} + 1$. Entonces $\mathcal{R}_\mu$ es acotada en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ si y sólo si $w \in E_{\infty,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$, con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < \frac{\epsilon}{4D_1}\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$.*

Corolario 5.14. *Sea $V \in RH_q$ con $q > d$, $V \not\equiv 0$, y sean $m = \frac{1}{k_0+1}$, $0 \leq \alpha < 1 - \frac{d}{q}$ y $1 \leq \kappa < \frac{1-\alpha}{d} - \frac{1}{q} + 1$. Entonces $\mathcal{R}_V$ es acotada en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ si y sólo si $w \in E_{\infty,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$, con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < \frac{\epsilon}{4D_1}\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{1-d/q}\right)(4C_0)^{-m}$.*

Para demostrar las condiciones para $\mathcal{R}_\mu 1$ dadas en la Proposición 5.12 haremos uso de las condiciones de tamaño y suavidad del núcleo que ya fueron presentadas en (5.2) y (5.4), así como también los siguientes lemas auxiliares. El primero de ellos ofrece estimaciones para la solución fundamental Γ_λ y sus derivadas, mientras que el segundo muestra cómo se comparan el núcleo K_μ con el núcleo K_0 correspondiente a la transformada de Riesz clásica $\mathcal{R}_0 = \nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$. En el caso de un potencial V, un resultado análogo a este último puede encontrarse en [BHS09, Lemma 4].

Lema 5.15 ([She95, (4.4)]). *Sea $\lambda \geq 0$. Para todo $N > 0$ existe una constante C_N tal que*

$$|\nabla_1 \Gamma_\lambda(x,y)| \leq \frac{C_N}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^N} \frac{1}{|x-y|^{d-1}}, \quad x \neq y, \tag{5.15}$$

$$\left|\nabla_1^2 \Gamma_\lambda(x,y)\right| \leq \frac{C_N}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^N |x-y|^d}, \quad x \neq y. \tag{5.16}$$

Lema 5.16. *Sea $1 < \delta_\mu < d$.*

(i) *Entonces existe una constante C tal que*

$$|K_\mu(x,y) - K_0(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}, \quad x \neq y. \tag{5.17}$$

(ii) *Sea $0 < \beta \leq \min\{1, \delta_\mu - 1\}$. Entonces existe una constante C tal que*

$$|[K_\mu(x,y) - K_0(x,y)] - [K_\mu(z,y) - K_0(z,y)]| \leq C \frac{|x-z|^\beta}{|x-y|^{d+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu} \tag{5.18}$$

siempre que $|x-y| \geq 2|x-z|$.

Observación 5.17. La restricción $\delta_\mu < d$ se requiere únicamente para las demostraciones del Lema 5.16(ii) y la Proposición 5.12. Si bien las propiedades (1.16) y (1.17) para μ no implican, a priori, que δ_μ sea menor que la dimensión, observamos que en el caso potencial esta condición se satisface automáticamente. En efecto, si $V \in RH_q$ para algún $q > d$, entonces $\delta_V = 2 - d/q < 2 < d$, ya que $d \geq 3$ y $q > 0$. Por lo tanto, recuperamos tanto la condición para $\mathcal{R}_\mu 1$ de [MSTZ14, Proposition 4.12] como el resultado de acotación de [BHS09, Lemma 4] cuando $d\mu(x) = V(x)\,dx$ con V como antes, puesto que en ese caso la condición de suavidad para K_V se cumple para todo $0 < \beta < 1 - d/q = \min\{1, \delta_V - 1\}$.

Demostración del Lema 5.16. En relación con (i), observemos que si $|x-y| > \rho(x)$, el resultado es cierto ya que ambos son núcleos de tipo Calderón–Zygmund. Si $|x-y| \leq \rho(x)$, utilizamos la siguiente estimación, incluida en la demostración de [She99, Lemma 7.13]: para todo $x \neq y$,

$$|K_\mu(x,y) - K_0(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|^{d-1}} \left(\int_{B(x,|x-y|/2)} \frac{d\mu(z)}{|z-x|^{d-1}} + \frac{1}{|x-y|} \left(\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^{\delta_\mu} \right).$$

Por (1.21), (1.16) y (1.19), obtenemos que la integral anterior puede estimarse como sigue

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,|x-y|/2)} \frac{d\mu(z)}{|z-x|^{d-1}} &\lesssim \frac{\mu\left(B\left(x, |x-y|/2\right)\right)}{|x-y|^{d-1}} \\
&\lesssim C_\mu \frac{1}{|x-y|^{d-1}} \left(\frac{|x-y|}{2\rho(x)}\right)^{d-2+\delta_\mu} \mu(B(x,\rho(x))) \\
&\sim \frac{1}{|x-y|} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos

$$|K_\mu(x,y)-K_0(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}.$$

Para demostrar el ítem (ii), supongamos que $|x-y|\geq 2|x-z|$. Notemos que ambos operadores tienen núcleos que satisfacen la condición de suavidad de Calderón–Zygmund en la primera variable. Más precisamente, si $|x-y|\geq\rho(x)$ tenemos que

$$\begin{aligned}|K_\mu(x,y)-K_\mu(z,y)|+|K_0(x,y)-K_0(z,y)| &\leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-z|}{|x-y|}\right)^{\delta_\mu-1}+\frac{C}{|x-y|^d}\frac{|x-z|}{|x-y|}\\ &\leq C\frac{|x-z|^\beta}{|x-y|^{d+\beta}}\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}\end{aligned}$$

para todo $0<\beta\leq\text{mín}\{1,\delta_\mu-1\}$, lo que prueba la desigualdad deseada en ese caso.

Ahora supongamos que $|x-y|<\rho(x)$. De acuerdo con (5.1), la diferencia de los núcleos puede escribirse como

$$K_\mu(x,y)-K_0(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}(\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)-\nabla_1\Gamma_\lambda(x,y))d\lambda.$$

Reescribiremos el integrando, para lo cual usaremos que $u(\cdot,y)=\Gamma_{\mu+\lambda}(\cdot,y)-\Gamma_\lambda(\cdot,y)$ (como función de la primera variable) satisface la ecuación

$$(-\Delta+\lambda)u=-\mu\Gamma_{\mu+\lambda}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla_1(\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)-\Gamma_\lambda(x,y))=-\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_1\Gamma_\lambda(x,v)\Gamma_{\mu+\lambda}(v,y)d\mu(v),$$

y luego

$$K_\mu(x,y)-K_0(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_1\Gamma_\lambda(x,v)\Gamma_{\mu+\lambda}(v,y)d\mu(v)d\lambda.$$

En consecuencia, la diferencia de interés es

$$\begin{aligned}&[K_\mu(x,y)-K_0(x,y)]-[K_\mu(z,y)-K_0(z,y)]\\ &\qquad=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla_1\Gamma_\lambda(x,v)-\nabla_1\Gamma_\lambda(z,v))\Gamma_{\mu+\lambda}(v,y)d\mu(v)d\lambda.\end{aligned}$$

Primero trataremos el valor absoluto de la integral interior antes de realizar la integración respecto de λ. Como en la demostración de [BHS09, Lemma 4], consideramos cuatro regiones que cubren $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}E_1&=\left\{v\in\mathbb{R}^d:|v-x|<\tfrac{3}{2}|x-z|\right\},\\ E_2&=\left\{v\in\mathbb{R}^d:\tfrac{3}{2}|x-z|\leq|v-x|<\tfrac{1}{2}|x-y|\right\},\\ E_3&=\left\{v\in\mathbb{R}^d:\tfrac{1}{2}|x-y|\leq|v-x|<2|x-y|\right\},\\ E_4&=\left\{v\in\mathbb{R}^d:|v-x|\geq 2|x-y|\right\},\end{aligned}$$

y denotamos por

$$I_j = \int_{E_j} |\nabla_1 \Gamma_\lambda(x,v) - \nabla_1 \Gamma_\lambda(z,v)||\Gamma_{\mu+\lambda}(v,y)|d\mu(v), \quad j = 1,2,3,4.$$

El objetivo será probar que para algún $N_0 > 0$, para todo $N \geq N_0$, y $j = 1,2,3,4$,

$$I_j \lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|^\beta}{(1+\lambda^{1/2}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^{d+\beta-1}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}, \quad 0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu - 1\}. \tag{5.19}$$

Luego, se realiza la integral en λ para obtener

$$\begin{aligned} |[K_\mu(x,y) - K_0(x,y)] \, -&[K_\mu(z,y) - K_0(z,y)]| \\ &\lesssim \frac{|x-z|^\beta}{|x-y|^{d+\beta-1}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu} \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{(1+\lambda^{1/2}|x-y|)^{N\epsilon_2}} d\lambda \\ &\sim \frac{|x-z|^\beta}{|x-y|^{d+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu} \int_1^\infty \frac{1}{u^{N\epsilon_2}} d\lambda \\ &\lesssim \frac{|x-z|^\beta}{|x-y|^{d+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}, \end{aligned}$$

lo que prueba (5.18) eligiendo $N > \text{máx}\{N_0, \frac{1}{\epsilon_2}\}$.

Probemos, entonces, (5.19). Para I_1, acotamos mediante la suma de los gradientes y estimamos cada integral por separado. Es decir, consideramos

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \int_{|v-x|<\frac{3}{2}|x-z|} |\nabla_1 \Gamma_\lambda(x,v)||\Gamma_{\mu+\lambda}(v,y)| \, d\mu(v), \\ I_{1,2} &= \int_{|v-x|<\frac{3}{2}|x-z|} |\nabla_1 \Gamma_\lambda(z,v)||\Gamma_{\mu+\lambda}(v,y)| \, d\mu(v). \end{aligned}$$

En cada una de ellas utilizaremos estimaciones para el gradiente de la solución fundamental Γ_λ, para $\lambda \geq 0$, establecidos en el Lema 5.15, y la estimación (1.24) para $\mu + \lambda$. De esta última, y usando la desigualdad (ver [Bai21, (21)])

$$d_{\mu+\lambda}(v,y) \geq \frac{1}{2}\left(d_\mu(v,y) + d_\lambda(v,y)\right) \geq \frac{1}{2} d_\mu(v,y) + \frac{\sqrt{\omega_d}}{2}\sqrt{\lambda}|v-y|, \tag{5.20}$$

se tiene que, para cualquier $N > 0$ y alguna constante $\epsilon_2 > 0$,

$$\Gamma_{\mu+\lambda}(v,y) \leq \frac{Ce^{-\frac{\epsilon_1}{2}d_\mu(v,y)}}{|v-y|^{d-2}} e^{-\frac{\epsilon_1}{2}\omega_d^{1/2}\sqrt{\lambda}|v-y|} \leq \frac{C_{N,d}\, e^{-\epsilon_2 d_\mu(v,y)}}{|v-y|^{d-2}(1+\sqrt{\lambda}|v-y|)^{N\epsilon_2}}, \quad v \neq y. \tag{5.21}$$

Dado que $|x-y| \geq 2|x-z|$, para $v \in E_1$ tenemos $|v-y| \geq \frac{1}{4}|x-y|$. Entonces,

$$\Gamma_{\mu+\lambda}(v,y) \leq \frac{C_{N,d}}{|x-y|^{d-2}(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{N\epsilon_2}}, \quad x \neq y. \tag{5.22}$$

A partir de (5.15) y (5.22), y aplicando las propiedades (1.21), (1.16) y (1.19) para la medida μ, obtenemos

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &\leq \frac{C_{N,d}}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^{d-2}} \int_{B\left(x,\frac{3}{2}|x-z|\right)} \frac{d\mu(v)}{|x-v|^{d-1}} \\
&\lesssim \frac{C_{N,d}}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^{d-2}} \frac{\mu\left(B(x,\frac{3}{2}|x-z|)\right)}{|x-z|^{d-1}} \\
&\lesssim \frac{C_{N,d}}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^{d-2}} \frac{\mu(B(x,\rho(x)))}{\rho(x)^{d-2}} \frac{|x-z|^{\delta_\mu-1}}{\rho(x)^{\delta_\mu}} \\
&\lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|^\beta}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^{d-1+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu},
\end{aligned}$$

para $\beta = \delta_\mu - 1$ y todo $N > 0$. Dado que $|x-y| < \rho(x)$, la desigualdad anterior también se cumple para cualquier $0 < \beta < \delta_\mu - 1$.

Para $I_{1,2}$ utilizamos nuevamente (5.22), (5.15) con z en lugar de x, y tenemos en cuenta que la integral

$$\int_{B\left(x,\frac{3}{2}|x-z|\right)} \frac{d\mu(v)}{|z-v|^{d-1}} \leq \int_{B\left(z,\frac{5}{2}|x-z|\right)} \frac{d\mu(v)}{|z-v|^{d-1}},$$

por lo que el argumento sigue de la misma manera. Combinando ambas cotas, obtenemos, para todo $N > 0$

$$I_1 \lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|^\beta}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^{d-1+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}, \qquad 0 < \beta \leq \delta_\mu - 1. \tag{5.23}$$

A continuación, para tratar las integrales en las otras tres regiones, usaremos la estimación (5.16). Aplicando el Teorema del Valor Medio tenemos, para algún $\xi = (1-\theta)x + \theta z$, con $\theta \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
|\nabla_1\Gamma_\lambda(x,v) - \nabla_1\Gamma_\lambda(z,v)| &= \left|\nabla_1^2\Gamma_\lambda(\xi,v)\right| |x-z| \\
&\leq \frac{C_N|x-z|}{(1+\sqrt{\lambda}|\xi-v|)^N|\xi-v|^d} \\
&\leq \frac{C_N|x-z|}{(1+\sqrt{\lambda}|x-v|)^N|x-v|^d},
\end{aligned} \tag{5.24}$$

ya que $|\xi - v| \geq \frac{1}{3}|x-v|$ porque $|v-x| \geq \frac{3}{2}|x-z|$ en todas las regiones restantes.

Luego, utilizando la desigualdad anterior y la estimación (5.21), para cada $j = 2, 3, 4$ y todo $N > 0$, obtenemos

$$I_j \leq \int_{E_j} \frac{C_{N,d}|x-z|}{(1+\sqrt{\lambda}|x-v|)^k|x-v|^d} \frac{e^{-\epsilon_2 d_\mu(v,y)}}{|v-y|^{d-2}(1+\sqrt{\lambda}|v-y|)^{N\epsilon_2}} d\mu(v).$$

Para $j = 2$ utilizamos que $|v-y| > \frac{1}{2}|x-y|$ para todo $v \in E_2$ para obtener

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|^\beta}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^{d-2}} \int_{\frac{3}{2}|x-z| \leq |v-x| < \frac{1}{2}|x-y|} \frac{|x-z|^{1-\beta}}{|x-v|^d} d\mu(v) \\
&\lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|^\beta}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^{d-2}} \int_{B(x,|x-y|)} \frac{d\mu(v)}{|x-v|^{d-(1-\beta)}}.
\end{aligned}$$

Descomponiendo la última integral en anillos, recordando que seguimos en el caso en que $|x-y|<\rho(x)$ y usando (1.16), resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,|x-y|)} \frac{d\mu(v)}{|x-v|^{d-(1-\beta)}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}|x-y|\leq|v-x|<2^{-j}|x-y|} \frac{d\mu(v)}{|x-v|^{d-(1-\beta)}} \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|v-x|<2^{-j}|x-y|} \left(2^{-j-1}|x-y|\right)^{-d+(1-\beta)} d\mu(v) \\
&\leq 2^d \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu(B(x,2^{-j}|x-y|))}{(2^{-j}|x-y|)^{d-(1-\beta)}} \\
&\leq 2^d \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_\mu \mu(B(x,\rho(x)))}{(2^{-j}|x-y|)^{d-(1-\beta)}} \left(\frac{2^{-j}|x-y|}{\rho(x)}\right)^{d-2+\delta_\mu} \\
&\lesssim \frac{1}{|x-y|^{1+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(\delta_\mu-(1+\beta))} \\
&\lesssim \frac{1}{|x-y|^{1+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu},
\end{aligned}$$

siempre que $0<\beta<\delta_\mu-1$ para que la serie converja. Por lo tanto, para todo $N>0$

$$I_2 \lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|^\beta}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{k\epsilon_1}|x-y|^{d-1+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}, \quad 0<\beta<\delta_\mu-1. \tag{5.25}$$

Para $v\in E_3$, $\frac{1}{2}|x-y|\leq|v-x|\leq 2|x-y|$, lo que también implica $|v-y|<3|x-y|$ Luego, utilizando nuevamente (5.24), (5.21) y (1.20), obtenemos

$$\begin{aligned}
I_3 &\lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|}{(1+\lambda^{1/2}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^d} \int_{B(y,3|x-y|)} \frac{d\mu(v)}{|v-y|^{d-2}} \\
&\lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|}{(1+\lambda^{1/2}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^d} \frac{\mu(B(x,4|x-y|))}{|x-y|^{d-2}}.
\end{aligned}$$

Aplicando (1.16), (1.17) y (1.19), obtenemos la estimación para I_3 para $\beta=1$ y cualquier $N>0$. Por lo tanto,

$$I_3 \lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|^\beta}{(1+\lambda^{1/2}|x-y|)^{N\epsilon_2}|x-y|^{d+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}, \quad 0<\beta\leq 1. \tag{5.26}$$

Finalmente, para tratar E_4 usamos nuevamente (5.24) y (5.21), y el hecho de que $\rho(x)\sim\rho(y)$ por (1.5) (pues $|x-y|<\rho(x)$). También notamos que $|v-x|\sim|v-y|$ para $v\in E_4$.

Dado que estamos integrando en la parte global, aprovecharemos el decaimiento exponencial dado en (1.9). Se sigue de allí que para todo $N>0$, existe C_N tal que

$$e^{-\epsilon_2 d_\mu(v,y)} \lesssim e^{-\frac{\epsilon_2}{D_1}\left(1+\frac{|v-y|}{\rho(y)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}} \lesssim C_N \left(1+\frac{|v-y|}{\rho(y)}\right)^{-\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}}. \tag{5.27}$$

Por lo tanto, a partir de todas las consideraciones anteriores,

$$I_4 \lesssim \frac{C_{N,d}|x-z|}{(1+\sqrt{\lambda}|x-y|)^{N\epsilon_2}} \int_{|v-x|\geq 2|x-y|} \frac{\left(1+\frac{|v-x|}{\rho(x)}\right)^{-\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}}}{|v-x|^{2d-2}} d\mu(v). \tag{5.28}$$

Dividiremos la integral anterior en la parte dentro de la bola crítica $B(x,\rho(x))$ y fuera de ella.

Para la primera parte, sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{j_0-1}|x-y| \leq \rho(x) < 2^{j_0}|x-y|$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{2|x-y|\leq|v-x|<\rho(x)} \frac{\left(1+\frac{|v-x|}{\rho(x)}\right)^{-\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}}}{|v-x|^{2d-2}} d\mu(v) &\leq \sum_{j=1}^{j_0-1} \int_{2^j|x-y|<|v-x|\leq 2^{j+1}|x-y|} \frac{d\mu(v)}{|v-x|^{2d-2}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{\mu\left(B(x,2^{j+1}|x-y|)\right)}{(2^j|x-y|)^{2d-2}} \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{\mu\left(B(x,\rho(x))\right)}{(2^j|x-y|)^{2d-2}} \left(\frac{2^{j+1}|x-y|}{\rho(x)}\right)^{d-2+\delta_\mu} \\
&\lesssim \frac{1}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu} \sum_{j=1}^{j_0-1} 2^{j(\delta_\mu-d)} \\
&\lesssim \frac{1}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu},
\end{aligned} \tag{5.29}$$

donde hemos usado (1.16), y hemos controlado la suma parcial por la serie, la cual es convergente por ser $\delta_\mu < d$.

Para el otro término, esto es, cuando $|v-x| > \rho(x)$, dividiendo en anillos y eligiendo $N > N_0 := \frac{(k_0+1)(\log_2(D_\mu)-d)}{\epsilon_2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{|v-x|>\rho(x)} \frac{\left(1+\frac{|v-x|}{\rho(x)}\right)^{-\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}}}{|v-x|^{2d-2}} d\mu(v) &\lesssim \rho(x)^{\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}} \int_{|v-x|>\rho(x)} \frac{d\mu(v)}{|v-x|^{2d-2+\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}}} \\
&\lesssim \rho(x)^{\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{2^j\rho(x)<|v-x|<2^{j+1}\rho(x)} \frac{d\mu(v)}{|v-x|^{2d-2+\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}}} \\
&\lesssim \rho(x)^{\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2^j\rho(x))^{2d-2+\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}}} \mu\left(B(x,2^{j+1}\rho(x))\right) \\
&\lesssim \rho(x)^{2-2d} \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j\left(2d-2+\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}\right)} \left(D_\mu^{j+1} 2^{(d-2)(j+1)} \rho(x)^{d-2}\right) \\
&\lesssim \rho(x)^{-d} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(D_\mu 2^{-d-\frac{N\epsilon_2}{k_0+1}}\right)^j \\
&\lesssim \rho(x)^{-d} \lesssim \frac{1}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu},
\end{aligned}$$

donde ahora hemos utilizado (1.17), (1.19), y que $\delta_\mu < d$ y $|x-y| < \rho(x)$.

Por lo tanto, a partir de (5.28) y (5.29) obtenemos para todo $N > N_0$

$$I_4 \leq \frac{C_N|x-z|^\beta}{(1+\lambda^{1/2}|x-y|)^{N\epsilon_1}} \frac{1}{|x-y|^{d+\beta}} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}, \quad 0 < \beta \leq 1. \tag{5.30}$$

Finalmente, en (5.23), (5.25), (5.26) y (5.30) hemos probado las desigualdades (5.19) para cada $j = 1, 2, 3, 4$, para todo $N > N_0$. Concluimos que (5.18) se cumple entonces para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu - 1\}$. □

Demostración de la Proposición 5.12. Para la prueba seguiremos la estrategia utilizada en [MSTZ14, Proposition 4.12], con varias modificaciones, dado que algunas de las estimaciones no se siguen de la misma manera que en el caso de un potencial.

Sea $B = B(x_0, r)$ con $r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0)$ y sean $y, z \in B$. Luego, de (1.5), $\rho(y) \sim \rho(x_0) \sim \rho(z)$. Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{R}_\mu 1(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} K_\mu(x,y)dy, \qquad c.t.p. \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_\mu 1(y) - \mathcal{R}_\mu 1(z)| \leq &\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left| \int_{\varepsilon<|x-y|<4\rho(x_0)} K_\mu(y,x)dx - \int_{\varepsilon<|z-x|<4\rho(x_0)} K_\mu(z,x)dx \right| \\ &+ \left| \int_{|x-y|>4\rho(x_0)} K_\mu(y,x)dx - \int_{|z-x|>4\rho(x_0)} K_\mu(z,x)dx \right| \\ &=: \lim_{\varepsilon\to 0^+} A_\varepsilon + \tilde{A}. \end{aligned}$$

Primero estudiaremos A_ε, para $\varepsilon \to 0^+$. Así, podemos suponer que $0 < \varepsilon < 4\rho(x_0) - 2r$. Dado que $\int_{r_1<|x-y|<r_2} K_0(x,y)dy = 0$ para todo $0 < r_1 < r_2$, podemos escribir

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \left| \int_{\varepsilon<|x-y|\leq 4\rho(x_0)} (K_\mu(y,x) - K_0(y,x))dx - \int_{\varepsilon<|z-x|<4\rho(x_0)} (K_\mu(z,x) - K_0(z,x))dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left|(K_\mu(y,x) - K_0(y,x))(\chi_{\varepsilon<|x-y|\leq 4\rho(x_0)}(x) - \chi_{\varepsilon<|x-z|\leq 4\rho(x_0)}(x))\right| dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left|[(K_\mu(y,x) - K_0(y,x)) - (K_\mu(z,x) - K_0(z,x))]\chi_{\varepsilon<|x-z|\leq 4\rho(x_0)}(x)\right| dx \\ &:= A_{\varepsilon,1} + A_{\varepsilon,2}. \end{aligned}$$

El término $A_{\varepsilon,1}$ no es cero cuando $|\chi_{\varepsilon<|x-y|\leq 4\rho(x_0)}(x) - \chi_{\varepsilon<|x-z|\leq 4\rho(x_0)}(x)| = 1$, lo cual ocurre en los siguientes 4 casos:

(i) $\varepsilon < |x-y| \leq 4\rho(x_0)$ y $|x-z| \leq \varepsilon$;

(ii) $\varepsilon < |x-y| \leq 4\rho(x_0)$ y $|x-z| > 4\rho(x_0)$;

(iii) $\varepsilon < |x-z| \leq 4\rho(x_0)$ y $|x-y| \leq \varepsilon$;

(iv) $\varepsilon < |x-z| \leq 4\rho(x_0)$ y $|x-y| > 4\rho(x_0)$.

Para el primer caso tenemos $\varepsilon < |x-y| \leq |x-z| + |z-y| < \varepsilon + 2r$. Entonces por (5.17), integrando y usando el Teorema del Valor Medio, deducimos que

$$\begin{aligned}
A_{\varepsilon,1} &\leq C \int_{\varepsilon<|x-y|<2r+\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^d} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu} dx \\
&\leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \int_\varepsilon^{\epsilon+2r} t^{\delta_\mu-1} dt \\
&= \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \frac{1}{\delta_\mu} \left((\varepsilon+2r)^{\delta_\mu} - \varepsilon^{\delta_\mu}\right) \\
&\leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} (4\rho(x_0))^{\delta_\mu-1}(2r) \\
&\leq C\frac{r}{\rho(x_0)}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

En el segundo caso, observemos que $4\rho(x_0) < |x-z| < |x-y| + 2r$, por lo que $\varepsilon < 4\rho(x_0) - 2r < |x-y| \leq 4\rho(x_0)$. Procediendo como en el caso previo,

$$A_{\varepsilon,1} \leq C \int_{4\rho(x_0)-2r<|x-y|<4\rho(x_0)} \frac{1}{|x-y|^d} \left(\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu} dx \leq C\frac{r}{\rho(x_0)}. \tag{5.32}$$

Con respecto al tercer y cuarto caso, podremos emplear argumentos similares a los anteriores con algunos cuidados adicionales.

Observemos que $|x-y| \geq |x-z| - |y-z| > \varepsilon - 2r$ en el tercer caso, aunque $\varepsilon - 2r$ podría ser negativo. Si asumimos primero que $\varepsilon \geq 4r$, tenemos que $\varepsilon - 2r \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, de (5.17), teniendo en cuenta que $\delta_\mu - d < 0$, por el Teorema del Valor Medio y recordando que $\varepsilon < 4\rho(x_0)$ y $\delta_\mu - 1 > 0$, deducimos que

$$\begin{aligned}
A_{\varepsilon,1} &\leq C\frac{1}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \int_{\varepsilon-2r<|x-y|\leq\varepsilon} |x-y|^{\delta_\mu-d} dx \\
&\leq C\frac{1}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\delta_\mu-d} \left(\varepsilon^d - (\varepsilon-2r)^d\right) \\
&\leq C\frac{1}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\delta_\mu-d} \varepsilon^{d-1} 2r \\
&\leq C\frac{1}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \varepsilon^{\delta_\mu-1} r \\
&\leq C\frac{r}{\rho(x_0)}.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Si ahora $\varepsilon < 4r$,

$$A_{\varepsilon,1} \leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \int_{|x-y|\leq\varepsilon} |x-y|^{\delta_\mu-d} dx \leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \varepsilon^{\delta_\mu} \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\delta_\mu} \leq C\frac{r}{\rho(x_0)}, \tag{5.34}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado que $r < \rho(x_0)$ y $\delta_\mu > 1$.

Para estimar el cuarto caso, notemos que $4\rho(x_0) < |x-y| < 4\rho(x_0)+2r$, lo que implica, procediendo como en (5.31), que

$$A_{\varepsilon,1} \leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}}\left((4\rho(x_0)+2r)^{\delta_\mu} - (4\rho(x_0))^{\delta_\mu}\right) \leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}}(5\rho(x_0))^{\delta_\mu-1}2r \leq C\frac{r}{\rho(x_0)}.$$

En conclusión, dado que $r < \rho(x_0)$,

$$A_{\varepsilon,1} \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1. \tag{5.35}$$

Ahora consideramos $A_{\varepsilon,2}$, y lo escribimos como sigue

$$\begin{aligned}
A_{\varepsilon,2} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|[(K_\mu(y,x)-K_0(y,x)) - (K_\mu(z,x)-K_0(z,x))]\chi_{\varepsilon<|x-z|\leq 4\rho(x_0)}(x)\right| dx \\
&\leq \int_{|z-x|\geq 2|z-y|} \left|[(K_\mu(z,x)-K_0(z,x)) - (K_\mu(y,x)-K_0(y,x))]\chi_{\varepsilon<|x-z|\leq 4\rho(x_0)}(x)\right| dx \\
&\quad + \int_{|z-x|<2|z-y|} |[(K_\mu(z,x)-K_0(z,x)) - (K_\mu(y,x)-K_0(y,x))]|\, dx \\
&= A_{\varepsilon,2,1} + A_{\varepsilon,2,2}.
\end{aligned}$$

De (5.18), para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu - 1\}$,

$$A_{\varepsilon,2,1} \leq \frac{C|y-z|^\beta}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \int_{|x-z|<4\rho(x_0)} |x-z|^{\delta_\mu-d-\beta} dx \leq \frac{Cr^\beta}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}}(4\rho(x_0))^{\delta_\mu-\beta} \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\beta}. \tag{5.36}$$

Por otro lado, de la estimación (5.17) obtenemos que

$$\begin{aligned}
A_{\varepsilon,2,2} &\leq \int_{|x-z|<2|y-z|} \frac{C}{|x-z|^d}\left(\frac{|x-z|}{\rho(z)}\right)^{\delta_\mu} dx + \int_{|x-y|<3|y-z|} \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^{\delta_\mu} dx \\
&\leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}}|y-z|^{\delta_\mu} \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\beta} \qquad ,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

para todo $0 < \beta \leq \delta_\mu$. Así, combinando las estimaciones obtenidas en (5.35), (5.36) y (5.37) tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, y para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu - 1\}$,

$$A_\varepsilon \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\beta}. \tag{5.38}$$

Ahora estimemos $\tilde{A}$, escribiendo

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \left|\int_{|x-y|>4\rho(x_0)} K_\mu(y,x)dx - \int_{|z-x|>4\rho(x_0)} K_\mu(z,x)dx\right| \\
&\leq \int_{|x-y|>4\rho(x_0)} |K_\mu(y,x) - K_\mu(z,x)|dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} |K_\mu(z,x)||\chi_{|x-z|>4\rho(x_0)}(x) - \chi_{|x-y|>4\rho(x_0)}(x)|dx \\
&=: \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2.
\end{aligned}$$

En la integral de $\tilde{A}_1$ tenemos que $|x-y| > 4\rho(x_0) \geq 8r > 2|y-z|$. Por lo tanto, usando la suavidad del núcleo K_μ dada en (5.4), y recordando que $y, z \in B$, obtenemos

$$\tilde{A}_1 \leq C|y-z|^{\delta_\mu - 1} \int_{|x-y|>4\rho(x_0)} \frac{1}{|x-y|^{d+\delta_\mu-1}} dx \leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{\delta_\mu - 1},$$

donde la integral es convergente puesto que $\delta_\mu > 1$.

Para $\tilde{A}_2$ trabajamos de manera similar a lo desarrollado para $A_{\varepsilon,1}$ con las funciones características, pero usando ahora la condición de tamaño (5.3). Aplicamos (5.27) con $N = (\delta_\mu - 1)(k_0+1)/\epsilon_2 > 0$ para obtener

$$\tilde{A}_2 \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left(1 + \frac{|z-x|}{\rho(z)}\right)^{\delta_\mu - 1}}{|z-x|^d} |\chi_{|x-z|>4\rho(x_0)}(x) - \chi_{|x-y|>4\rho(x_0)}(x)| dx.$$

Cuando $|x-z| > 4\rho(x_0) \geq |x-y|$, entonces $4\rho(x_0) < |z-x| < 4\rho(x_0) + 2r$. Luego, integrando y usando el Teorema del Valor Medio

$$\tilde{A}_2 \leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu - 1}} \int_{4\rho(x_0)<|z-x|<4\rho(x_0)+2r} \frac{1}{|z-x|^{d+1-\delta_\mu}} dx \leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu-1}} (5\rho(x_0))^{\delta_\mu - 2} 2r \leq \frac{Cr}{\rho(x_0)}.$$

En el caso $|x-y| > 4\rho(x_0) \geq |x-z|$, se tiene que $4\rho(x_0) - 2r < |z-x| \leq 4\rho(x_0)$. Procediendo como arriba, $\tilde{A}_2 \leq C\frac{r}{\rho(x_0)}$. Por lo tanto,

$$\tilde{A} \leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{\beta}, \quad 0 < \beta < \min\{1, \delta_\mu - 1\}. \tag{5.39}$$

En consecuencia, las estimaciones (5.38) y (5.39) implican

$$|\mathcal{R}_\mu 1(y) - \mathcal{R}_\mu 1(z)| \leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{\beta}, \quad 0 < \beta < \min\{1, \delta_\mu - 1\}. \tag{5.40}$$

Finalmente, tomando promedios sobre la bola B, obtenemos (5.14), y haciendo referencia a lo visto en Observación 3.19, de aquí también se sigue (5.13). $\square$

El estudio del caso extremo $p = 1$ para $\mathcal{R}_\mu$ y $\mathcal{R}_\mu^*$, se deduce de la Proposición 5.1, Proposición 5.5 y el Teorema 3.14.

Teorema 5.18. *Si $\delta_\mu > 1$, entonces $\mathcal{R}_\mu$ y $\mathcal{R}_\mu^*$ son de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w, siempre que, para algún $\nu > 1$, $w^\nu \in H_{1,c^*}^{\rho,m^*}$, con $c^* < \frac{\epsilon}{2D_1}(2^{k_0+2}C_0^{k_0+1})^{-m^*}$, $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$.*

Teorema 5.19. *Si $0 < \delta_\mu < 1$, entonces $\mathcal{R}_\mu$ es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w siempre que, para algún $\nu > 1$, $w^{s'\nu} \in H_{1,c^*}^{\rho,m^*}$, con $c^* < \frac{\epsilon}{4D_1}s'(2^{k_0+1}C_0^{k_0+1})^{-m^*}$ y $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$.*

Para el caso potencial, $\mathcal{L}_V$ se obtienen los siguientes resultados

Proposición 5.20. *Sea $V \in RH_q$.*

(i) *Si $q > d$. Entonces $\mathcal{R}_V, \mathcal{R}_V^*$ son de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w siempre que, para algún $\nu > 1$, $w^\nu \in H^{\rho,m^*}_{1,c^*}$, con $c^* < \frac{\epsilon}{2D_1}(2^{k_0+3}C_0^2)^{-m_1}$, $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$.*

(ii) *Si $d/2 < q < d$. Entonces $\mathcal{R}_V$, es de tipo debil $(1,1)$ con respecto a w, siempre que, para algún $\nu > 1$, $w^{s'\nu} \in H^{\rho,m^*}_{1,c^*}$, con $c^* < \frac{\epsilon}{4D_1}s'(2^{k_0+3}C_0^2)^{-m_1}$ y $m^* = \frac{m_1}{k_0+1}$.*

Demostración. En ambos casos, la demostración se deduce de la clasificación establecida en las Proposiciones 5.1 y 5.5, respectivamente, tomando como caso particular $d\mu = V(x)dx$ con $V \in RH_q$, y aplicando el Teorema 3.14. □

El resultado anterior mejora el obtenido en [BCH16, Theorem 7.1], donde se establecieron acotaciones de tipo débil $(1,1)$ para la transformada de Riesz y su adjunta con respecto a pesos w pertenecientes a la clase A_1^ρ.

5.2. Multiplicadores de tipo transformada de Laplace

Dada $\phi \in L^\infty(0,\infty)$, definimos

$$m_\phi(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\phi(t)\, dt, \quad \lambda > 0.$$

Mediante el Teorema Espectral, podemos definir los multiplicadores del tipo transformada de Laplace $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$. Si consideramos el semigrupo del calor asociado a $\mathcal{L}_\mu$,

$$\mathcal{W}_t f(x) := e^{-t\mathcal{L}_\mu} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{W}_t(x,y) f(y) dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),\ x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \tag{5.41}$$

podemos escribir

$$m_\phi(\mathcal{L}_\mu) f(x) = \int_0^\infty \phi(t)\mathcal{L}_\mu e^{-t\mathcal{L}_\mu} f(x) dt = -\int_0^\infty \phi(t)\partial_t \mathcal{W}_t f(x) dt, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Su núcleo puede expresarse como

$$\mathcal{M}_\phi(x,y) = -\int_0^\infty \phi(t)\partial_t \mathcal{W}_t(x,y) dt, \quad x,y \in \mathbb{R}^d.$$

Casos particulares de multiplicadores del tipo transformada de Laplace son las potencias imaginarias $\mathcal{L}_\mu^{i\gamma}$, que surgen cuando $m_\phi(\lambda) = \lambda^{i\gamma}$ para $\lambda > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$; es decir, cuando $\phi(t) = t^{-i\gamma}/\Gamma(1-i\gamma)$, donde aquí Γ es la función Gamma.

De la teoría clásica se puede deducir que $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$ es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$ para toda $\phi \in L^\infty(0,\infty)$ (ver [Ste70, Corollary 3, p. 121]).

En el caso del operador de Schrödinger $\mathcal{L}_V$, con $V \in RH_q$, $q > d/2$, podemos encontrar que $m_\phi(\mathcal{L}_V)$ se puede extender a un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 < p < \infty$

y también de $L^1(\mathbb{R}^d)$ a $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ (ver [BCFRM13, Theorem 2]). En el caso particular de las potencias imaginarias, se sigue de [BCH13b, Theorem 10] y de las propiedades de acotación del operador maximal M_ρ^θ (ver Teorema 1.14) que $\mathcal{L}_V^{i\gamma}$ es acotado en $L^p(w)$ para todo $\gamma > 0$, $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^\rho$.

En cuanto a acotaciones en espacios de suavidad, en [MSTZ14, Theorem 1.3] se obtiene, mediante un teorema de tipo $T1$, la acotación de $m_\phi(\mathcal{L}_V)$ para $\phi \in L^\infty(0,\infty)$, de $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(\mathbb{R}^d)$ en sí mismo para todo $0 < \alpha < \min\{1, \delta_V\}$.

En esta sección, probaremos resultados de acotación en espacios con pesos exponenciales para $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$, a la vez que extendemos los ya conocidos para $m_\phi(\mathcal{L}_V)$. Supondremos siempre que $\phi \in L^\infty(0,\infty)$.

Los resultados principales de esta sección son los siguientes.

Proposición 5.21. *El operador $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$ es un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (∞, δ), para $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$ con constantes $c = c_0$ (la constante del Lema 5.24(i)) y $m = \frac{1}{k_0+1}$.*

Teorema 5.22. *Sea $m = \frac{1}{k_0+1}$. Entonces, para todo $c < c_0 2^{-m}$ y todo peso w tal que $w^{-1} \in H_{1,c}^{\rho,m}$, se tiene que $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$ es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Además, es acotado en $L^p(w)$, para todo $1 < p < \infty$ y todo $w \in H_{p,c^*}^{\rho,m^*}$, donde $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < c_0(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Teorema 5.23. *Sean $m = \frac{1}{k_0+1}$ y $\delta = \min\{1, \delta_\mu\}$. Entonces, para todo $0 \le \alpha < \delta$, el operador $m_\phi(\mathcal{L})$ es acotado en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ siempre que $w \in E_{\infty,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$ con $c_1, c_2, c_3 \ge 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c_0 \left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$ y $1 \le \kappa < \frac{\delta-\alpha}{d} + 1$.*

Esta proposición y los teoremas refieren a poder clasificar al operador $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$, para luego obtener estimaciones en espacios de Lebesgue pesados por un lado, y estimaciones en espacios BMO, por otro. Para este último, será necesario además verificar la condición para $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)1$. La demostración de estos resultados utilizan estimaciones para el núcleo $\mathcal{M}_\phi(x,y)$, que se deducen por medio de estimaciones para $\mathcal{W}_t(x,y)$ y $\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)$, las cuales fueron probadas por Wu y Yan ([WY16]) y serán presentados a continuación.

Cabe señalar que una estimación inmediata del núcleo viene dada por la fórmula de Feynman-Kac, por ser la medida μ no negativa. Esta implica que el núcleo $\mathcal{W}_t(x,y)$ está controlado por el núcleo del calor clásico, es decir,

$$0 \le \mathcal{W}_t(x,y) \le W_t(x-y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, t > 0. \tag{5.42}$$

En el caso en que $d\mu(x) = V(x)dx$ con $0 \le V \in RH_{\frac{q}{2}}$, Kurata ([Kur00]) probó un mejor decaimiento del núcleo, asociado a la función de radio crítico: existen constantes positivas C, c, c_1 y k_0 tales que

$$0 \le \mathcal{W}_t(x,y) \le \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{c|x-y|^2}{t}\right) \exp\left(-c_1\left(1 + \frac{\max\{|x-y|, \sqrt{t}\}}{\rho(x)}\right)^{\frac{2}{2k_0+3}}\right) \tag{5.43}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ y todo $t > 0$.

El siguiente lema establece una cota similar a la anterior en el caso de una medida general, así como también una condición de suavidad para $\mathcal{W}_t$.

Lema 5.24 ([WY16, Theorem 1.1, Lemma 3.7]). *Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $t > 0$.*

(i) *Existen constantes positivas C, c y c_0 tales que*

$$0 \leq \mathcal{W}_t(x,y) \leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \exp\left(-c_0\left(1 + \frac{\max\{|x-y|, \sqrt{t}\}}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right).$$

(ii) *Para todo $0 < \beta < \min\{1, \delta_\mu\}$ y todo $N > 0$, existen constantes positivas c y C_N tales que, para todo $|h| \leq \sqrt{t}$,*

$$|\mathcal{W}_t(x+h,y) - \mathcal{W}_t(x,y)| \leq \frac{C_N}{t^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{|h|}{\sqrt{t}}\right)^\beta \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{ct}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}.$$

Para la derivada del núcleo del calor $\mathcal{W}_t$, se conocen las siguientes estimaciones demostradas en [WY16]; para el caso $d\mu(x) = V(x)dx$, se puede encontrar un resultado similar en [DGM+05, Proposition 4]).

Lema 5.25 ([WY16, Lemma 3.8]). *Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $t > 0$.*

(i) *Existen constantes positivas C y c tales que*

$$|t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)| \leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \exp\left(-c_0\left(1 + \frac{\max\{|x-y|, \sqrt{t}/2\}}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right),$$

donde c_0 es la constante del Lema 5.24(i).

(ii) *Para todo $0 < \beta < \min\{1, \delta_\mu\}$ y $N > 0$, existen constantes positivas c y C_N tales que, para todo $|h| \leq \sqrt{t}$,*

$$|t\partial_t \mathcal{W}_t(x+h,y) - t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)| \leq \frac{C_N}{t^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{|h|}{\sqrt{t}}\right)^\beta \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{ct}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}.$$

(iii) *Para todo $N > 0$ existe una constante C_N tal que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)dy\right| \leq C_N \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}\left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N}.$$

Para verificar la condición sobre $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)1$ necesitaremos además algunas estimaciones que comparan al núcleo $\mathcal{W}_t(x,y)$ con el núcleo $W_t(x,y)$ del semigrupo del calor clásico $\{W_t\}_{t>0} = \left\{e^{-t\Delta}\right\}_{t>0}$. La segunda estimación la presentamos como una diferencia en la primera variable, que es el modo en que la utilizaremos, y se sigue del resultado original por la simetría del núcleo $\mathcal{W}_t(x,y)$.

Proposición 5.26 ([WY16, Lemma 3.6]). *Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ y $t > 0$.*

(i) *Existen constantes positivas C y c tales que*

$$|\mathcal{W}_t(x,y) - W_t(x,y)| \leq \begin{cases} \frac{C}{t^{d/2}} \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right), & \text{si } \sqrt{t} < \rho(x), \\ \frac{C}{t^{d/2}} \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{\delta_\mu} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right), & \text{si } \sqrt{t} < \rho(y), \\ \frac{C}{t^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(ii) *Para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$ y toda constante positiva C, existen contantes positivas C' y c tales que*

$$|(\mathcal{W}_t(x,y) - W_t(x,y)) - (\mathcal{W}_t(z,y) - W_t(z,y))| \leq \frac{C'}{t^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{|x-z|}{\rho(y)}\right)^\beta \exp\left(-\frac{|y-z|^2}{ct}\right),$$

siempre que $|x - z| \leq |x - y|/4$ y $|x - z| \leq C\rho(x)$.

Estamos en condiciones de demostrar los resultados principales enunciados previamente. Primero, estableceremos la clasificación.

Demostración del Proposición 5.21. Primero probemos la condición de tamaño (3.3). Para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, por el Lema 5.25(i) se tiene que, para ciertas constantes positivas c y C,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_\phi(x,y)| &\leq \|\phi\|_\infty \int_0^\infty |\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)| dt \\ &\leq C \exp\left(-c_0 \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right) \int_0^\infty t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u = \frac{c|x-y|^2}{t}$, obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_\phi(x,y)| &\leq C \exp\left(-c_0 \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right) \frac{1}{|x-y|^d} \int_0^\infty u^{\frac{d}{2}-1} e^{-u} du \\ &\leq \frac{C}{|x-y|^d} \exp\left(-c_0 \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right), \end{aligned}$$

por lo que (3.3) se cumple con $c = c_0$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$.

Para probar la condición de suavidad (3.4), consideraremos $|x - y| > 2|x - x_0|$ y $0 < \delta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$. Escribimos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_\phi(x,y) - \mathcal{M}_\phi(x_0,y)| &\leq \|\phi\|_\infty \int_0^\infty |\partial_t \mathcal{W}_t(x,y) - \partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)| dt \\ &\sim \int_0^{|x-x_0|^2} |t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y) - t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)| \frac{dt}{t} \\ &\quad + \int_{|x-x_0|^2}^\infty |t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y) - t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)| \frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Para estimar la segunda integral, notemos que, como $|x-x_0| \leq \sqrt{t}$, por el Lema 5.25(ii) con $h = x - x_0$, y usando que $e^{-u^2} \leq Cu^{-\delta}e^{-u^2/2}$ para todo $0 < \delta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\} \leq 1$ y $u > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y) - t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)| &\leq \frac{C_1}{t^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^{\delta} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{ct}\right) \\
&\leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^{\delta}\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-\delta} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2ct}\right) \\
&= C\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta} t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2ct}\right). \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

Entonces, estimando la integral como antes, para todo $0 < \delta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$

$$\begin{aligned}
\int_{|x-x_0|^2}^{\infty} |t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y) - t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)| \frac{dt}{t} &\leq C\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta} \int_{|x-x_0|^2}^{\infty} t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2ct}\right)\frac{dt}{t} \\
&\leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta} \int_0^{\infty} u^{\frac{d}{2}-1}e^{-u}du \\
&\leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta},
\end{aligned}$$

donde $\int_0^\infty u^{\frac{d}{2}-1}e^{-u}du = \Gamma(d/2) < \infty$.

Para la integral sobre $\sqrt{t} < |x-x_0|$ usamos el Lema 5.25(i) para obtener, con δ como antes, que

$$\begin{aligned}
|t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)| &\leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \\
&\leq C\left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^{\delta} t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \\
&\leq C\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta} t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{2t}\right).
\end{aligned}$$

Y, como $|x_0-y| \geq |x-y| - |x-x_0| > \frac{1}{2}|x-y|$, también obtenemos una cota similar para $|t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)|$ cuando $\sqrt{t} < |x-x_0|$. Por lo tanto, el primer término en (5.44) está acotado como se deseaba, y deducimos de (5.44) que

$$|\mathcal{M}_\phi(x,y) - \mathcal{M}_\phi(x_0,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta},$$

para todo $0 < \delta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$, y todo $|x-y| > 2|x-x_0|$.

Finalmente, como se mencionó anteriormente, $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$ es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Esto, junto con las condiciones anteriores, nos permite concluir que se trata de un operador de Calderón–Zygmund clásico. Por lo tanto, $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$ es acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $p > 1$, y así queda demostrado que $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$ es un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo (∞, δ) para todo $0 < \delta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$, con constantes c_0 y $\frac{1}{k_0+1}$ en la condición de tamaño. $\square$

Demostración del Teorema 5.22. Es una consecuencia inmediata del Proposición 5.21, y los Teoremas 3.7(i) y 3.6(i). □

Antes de dar la demostración del Teorema 5.23, la cual se hará mediante el Teorema 3.18 dado en la Sección 3.3, para probar la condición sobre $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)1$ notamos que podemos expresar, en sentido débil, que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \mathcal{W}_t(x,y)dy = -e^{-t\mathcal{L}_\mu}\mathcal{L}_\mu 1(x) = -\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{W}_t(x,y)\mathcal{L}_\mu 1(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{W}_t(x,y)d\mu(y). \tag{5.46}$$

En vista de ello y de las cotas conocidas para $\mathcal{W}_t(x,y)$, será útil disponer de la siguiente desigualdad dada en [WY16, Eq. (2.2)]: para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{t}\right) d\mu(y) \leq \begin{cases} \frac{C}{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu}, & t < \rho(x)^2 \\ \frac{C}{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{\log_2(D_\mu)}, & t \geq \rho(x)^2 \end{cases}, \tag{5.47}$$

la cual se puede obtener fácilmente de las condiciones (1.16) y (1.17) para la medida de una bola (ver [WY16, Eq. (2.1)]):

$$\mu(B(x,r)) \leq \begin{cases} C\left(\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\delta_\mu} r^{d-2}, & t < \rho(x) \\ C\left(\frac{r}{\rho(x)}\right)^{d-2+\log_2(D_\mu)} \rho(x)^{d-2}, & t \geq \rho(x) \end{cases}. \tag{5.48}$$

Observación 5.27. Es necesario señalar que (5.48) vale aún cuando $r < a\rho(x)$ o $r \geq a\rho(x)$ para cualquier constante a, donde la constante C dependará, en tal caso, de dicho a. En consecuencia, se tendrá algo similar para (5.47) en función del parámetro a. Lo mismo ocurrirá con la estimación dada en la Proposición 5.26(i), que puede obtenerse si $\sqrt{t} < a\rho(x)$ o $\sqrt{t} < a\rho(y)$.

Demostración del Teorema 5.23. Por el Corolario 3.20 y la Observación 3.19, basta probar que para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0)$, y para todo $0 \leq \beta < \min\{1, \delta_\mu\}$ se cumple

$$\frac{1}{|B|}\int_B |m_\phi(\mathcal{L}_\mu)1(y) - (m_\phi(\mathcal{L}_\mu)1)_B|dy \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta. \tag{5.49}$$

Consideremos $y, z \in B$ y estimemos la siguiente diferencia

$$\begin{aligned} |m_\phi(\mathcal{L}_\mu)1(y) - (m_\phi(\mathcal{L}_\mu)1)(z)| &= \left|\int_0^\infty \phi(t)\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - \partial_t \mathcal{W}_t(z,x))\, dxdt\right| \\ &\leq \|\phi\|_\infty \int_0^\infty \left|\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - \partial_t \mathcal{W}_t(z,x))dx\right| dt. \end{aligned}$$

Dividimos la integral sobre t en tres regiones. Primero consideremos la parte de 0 a $4r^2$, la cual controlamos por la suma

$$\begin{aligned}\int_0^{4r^2} &\left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - \partial_t \mathcal{W}_t(z,x)dx\right| dt \\ &\leq \int_0^{4r^2} \left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \mathcal{W}_t(y,x)dx\right| dt + \int_0^{4r^2} \left|\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \mathcal{W}_t(z,x))dx\right| dt.\end{aligned}$$

Estudiaremos sólo la primera de ellas ya que la otra se resuelve de manera análoga teniendo en cuenta que, como $y, z \in B$, $\rho(y) \sim \rho(x_0) \sim \rho(z)$. Aplicando el Lema 5.25(iii)

$$\begin{aligned}\int_0^{4r^2} \left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \mathcal{W}_t(y,x)dx\right| dt &\leq C \int_0^{4r^2} \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{\delta_\mu} \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{C}{\rho(x_0)^{\delta_\mu}} \int_0^{4r^2} t^{\delta_\mu/2-1} dt \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\delta_\mu}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Ahora, estudiemos la integral sobre t de $\rho(x_0)^2$ a ∞. Aquí aplicamos el Lema 5.25(ii) ya que $|y - z| \leq 2r \leq \rho(x_0) \leq \sqrt{t}$. Se tiene que, para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$,

$$\begin{aligned}&\int_{\rho(x_0)^2}^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - \partial_t \mathcal{W}_t(z,x)|\, dxdt \\ &\leq C \int_{\rho(x_0)^2}^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|z-y|}{\sqrt{t}}\right)^\beta t^{-d/2-1} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) dxdt \\ &\leq Cr^\beta \int_{\rho(x_0)^2}^\infty t^{-\beta/2-d/2-1} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) dxdt \\ &= C(2r)^\beta \int_{\rho(x_0)^2}^\infty t^{-\beta/2-1} dt \\ &\leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta, \end{aligned} \tag{5.51}$$

donde se usó que $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} dx = (c\pi t)^{d/2}$.

Por último, consideramos la parte restante, para $4r^2 \leq t \leq \rho(x_0)^2$. Aquí tendremos en cuenta la identidad (5.46), y aplicaremos el Lema 5.24(ii). Para ello, notemos que $|y - z| \leq 2r \leq \sqrt{t}$ en el dominio de integración. Luego, para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_{4r^2}^{\rho(x_0)^2} \left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - \partial_t \mathcal{W}_t(z,x)dx\right| dt \\ &= \int_{4r^2}^{\rho(x_0)^2} \left|\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{W}_t(y,x) - \mathcal{W}_t(z,x))d\mu(x)\right| dt \\ &\leq \int_{4r^2}^{\rho(x_0)^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{W}_t(y,x) - \mathcal{W}_t(z,x))|\, d\mu(x)dt \\ &\leq C \int_{4r^2}^{\rho(x_0)^2} \left(\frac{|z-y|}{\sqrt{t}}\right)^\beta \int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2} \exp\left(-c\frac{|y-x|^2}{t}\right) d\mu(x)dt.\end{aligned}$$

Dado que $t \leq \rho(x_0)^2 < C\rho(y)^2$, de la desigualdad (5.47) junto con la Observación 5.27, resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{4r^2}^{\rho(x_0)^2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - \partial_t \mathcal{W}_t(z,x) dx \right| dt &\leq C r^\beta \int_{4r^2}^{\rho(x_0)^2} t^{-\beta/2-1} \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)} \right)^{\delta_\mu} dt \\
&\leq C r^\beta \rho(x_0)^{-\delta_\mu} \int_0^{\rho(x_0)^2} t^{-1+\frac{\delta_\mu - \beta}{2}} dt \\
&\leq C r^\beta \rho(x_0)^{-\delta_\mu} \rho(x_0)^{\delta_\mu - \beta} \\
&= C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^\beta, \qquad (5.52)
\end{aligned}$$

para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$.

Por lo tanto, combinando las estimaciones (5.50), (5.51) y (5.52), se tiene (5.49) como queríamos probar. La propiedad de acotación de $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$ se sigue del Corolario 3.20. □

5.3. Operador maximal asociado al semigrupo del calor de $\mathcal{L}_\mu$

Definimos el operador maximal asociado a $e^{-t\mathcal{L}_\mu}$ dado, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, por

$$\mathcal{W}^* f(x) = \sup_{t>0} \left| e^{-t\mathcal{L}_\mu} f(x) \right| = \sup_{t>0} |\mathcal{W}_t f(x)|, \qquad (5.53)$$

donde $\mathcal{W}_t f(x)$ como en (5.41).

El caso particular en que $d\mu = V(x)dx$ fue estudiado en [Bai21, Theorem 1.2], obteniendo la acotación de $\mathcal{W}^*$ asociado a $\mathcal{L}_V$ en $L^p(w)$ para $w \in H_{p,c}^{\rho,m}$. El autor separa el operador en una parte local y una parte global, utilizando en esta última la desigualdad (5.43).

Este resultado se recupera en forma mas general, esto es, con una medida μ mediante la teoría desarrollada en el Capítulo 3. Para ello se introduce un enfoque vectorial como en [MSTZ14], donde estudian este operador asociado a $\mathcal{L}_V$ en espacios BMO_ρ^α. La acotación en estos espacios para $\mathcal{W}^*$ asociado a $\mathcal{L}_\mu$ también se obtiene como parte de los resultados principales de esta sección. Consideremos el operador

$$\Lambda(f)(x) := \{W_t f(x)\}_{t>0}.$$

Entonces, a cada $x \in \mathbb{R}^d$ le corresponde un vector en el espacio de funciones $E = L^\infty((0,\infty), dt)$. En este contexto, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\|W_t f(x)\|_E = \sup_{t>0} |\mathcal{W}_t f(x)| = \mathcal{W}^* f(x).$$

y por la Observación 3.21, el estudio de $\mathcal{W}^*$ en BMO_ρ^α se reduce a analizar el comportamiento del operador vectorial Λ de espacios BMO_ρ^α en $\text{BMO}_{\rho,E}^\alpha$. El espacio $\text{BMO}_{\rho,E}^\alpha$ se define de forma análoga a BMO_ρ^α, reemplazando el valor absoluto por la norma $\|\cdot\|_E$. Lo mismo ocurre para la acotación en espacios de Lebesgue L^p ya que, como vimos en la Observación 3.13, podemos considerar las condiciones de tamaño y suavidad dadas en la Definición 3.3 en la norma $\|\cdot\|_E$. Por el Teorema Espectral, Λ es acotado de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en $L^2_E(\mathbb{R}^d)$, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|\Lambda f(x)\|_E^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx.$$

Entonces, de las condiciones del núcleo que probaremos a continuación se sigue que Λ es un operador de Calderón–Zygmund a valores vectoriales, por lo que será acotado de $L^p(\mathbb{R}^d)$ en $L^p_E(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 < p < \infty$. Para más detalles sobre espacios de funciones a valores vectoriales, ver [ST05].

Proposición 5.28. *Sean $x_0, x, y \in \mathbb{R}^d$ y $t > 0$.*

(i) *Existe una constante C tal que*

$$\|\mathcal{W}_t(x,y)\|_E \leq C \frac{1}{|x-y|^d} \exp\left(-c_0\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right),$$

donde c_0 es la constante dada en el Lema 5.24(i).

(ii) *Para todo $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$, existe una constante C tal que*

$$\|\mathcal{W}_t(x,y) - \mathcal{W}_t(x_0,y)\|_E \leq C \frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}},$$

siempre que $|x-y| > 2|x-x_0|$.

Demostración. Primero probemos la condición de tamaño (i). Usaremos el Lema 5.24(i), por lo cual distinguiremos dos casos.

Si $t > |x-y|^2$, tenemos que $t^{-d/2} < |x-y|^{-d}$, por lo que es inmediato que para todos estos valores de t,

$$0 \leq \mathcal{W}_t(x,y) \leq C \frac{1}{|x-y|^d} \exp\left(-c_0\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right).$$

Si $t \leq |x-y|^2$, como para cada $N > 0$ existe C_N tal que

$$\exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \leq C_N \left(\frac{|x-y|^2}{t}\right)^{-N}, \tag{5.54}$$

consideramos $N = \frac{d}{2}$ y tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{W}_t(x,y) &\leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \exp\left(-c_0\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right) \\ &\leq \frac{C_d}{t^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-d} \exp\left(-c_0\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right) \\ &= \frac{C}{|x-y|^d} \exp\left(-c_0\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right). \end{aligned}$$

Luego, como la acotación es para todo $t > 0$ se tiene la estimación deseada en la norma de E.

Para probar la condición de suavidad (ii) consideremos $|x-y| > 2|x-x_0|$, y notemos que $|x-y| \sim |x_0-y|$.

Para todo $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$, si $|x-x_0| < \sqrt{t}$, por el Lema 5.24(ii), y tomando $N = \frac{d}{2} + \frac{\delta}{2}$ en (5.54) se tiene

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_t(x,y) - \mathcal{W}_t(x_0,y)| &\leq C\left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^{\delta} t^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{ct}\right) \\ &\leq C|x-x_0|^{\delta} t^{-\frac{d}{2}-\frac{\delta}{2}} \left(\frac{|x-y|^2}{ct}\right)^{-\frac{d}{2}-\frac{\delta}{2}} \\ &\leq C\frac{1}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta}. \end{aligned}$$

Si $|x-x_0| > \sqrt{t}$, por el Lema 5.24(i), y aplicando nuevamente (5.54) con $N = \frac{d}{2} + \frac{\delta}{2}$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_t(x,y)| &\leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \exp\left(-c_0\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right) \\ &\leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{|x-y|^2}{t}\right)^{-\frac{d}{2}-\frac{\delta}{2}} \\ &\leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{\sqrt{t}}{|x-y|}\right)^{\delta} \\ &\leq \frac{C}{|x-y|^d}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta}. \end{aligned}$$

La misma estimación puede obtenerse para $\mathcal{W}_t(x_0,y)$ cuando $|x-x_0| > \sqrt{t}$ puesto que, como mencionamos, $|x-y| \sim |x_0-y|$. Luego se obtiene la estimación deseada tomando supremo para $t > 0$. □

Como consecuencia del Proposición 5.28 y de la Observación 3.13 se obtiene el siguiente resultado de acotación.

Teorema 5.29. *Sea $m = \frac{1}{k_0+1}$ y sea c_0 la constante del Lema 5.24(i). Entonces, para todo $c < c_0 2^{-m}$ y todo peso w tal que $w^{-1} \in H^{\rho,m}_{1,c}$, se tiene que $\mathcal{W}^*$ es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Más aún, es acotado en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y $w \in H^{\rho,m^*}_{p,c^*}$, con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < c_0(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Finalizamos el análisis del operador maximal $\mathcal{W}^*$ con estimaciones en espacios de tipo BMO dadas por el siguiente teorema.

Teorema 5.30. *Sea $m = \frac{1}{k_0+1}$, c_0 la constante del Lema 5.24(i) y $\delta = \min\{1, \delta_\mu\}$, con $\delta_\mu < d$. Entonces, para todo $0 \leq \alpha < \delta$, el operador $\mathcal{W}^*$ es acotado en $\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)$ siempre que $w \in E^{\rho,m}_{\infty,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$ con $1 \leq \kappa < \frac{\delta-\alpha}{d} + 1$ y $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c_0\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$.*

Demostración. Por el Corolario 3.20 y la Observación 3.21 es suficiente probar que existe una constante C tal que el operador $\mathcal{W}_t$ satisface

$$\frac{1}{|B|}\int_B \|\mathcal{W}_t 1(y) - (\mathcal{W}_t 1)_B\|_E \, dy \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta, \tag{5.55}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $0 < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0)$ y todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$.

Para esto, como

$$\|\mathcal{W}_t 1(y) - (\mathcal{W}_t 1)_B\|_E \leq \frac{1}{|B|}\int_B \|\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)\|_E dz,$$

estimaremos el integrando $\|\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)\|_E$.

Sea $t > 0$ y sean $y, z \in B$. Como para el semigrupo del calor asociado al operador laplaciano se tiene que $W_t 1(x) \equiv 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned}|\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)| &\leq |\mathcal{W}_t 1(y) - W_t 1(y)| + |\mathcal{W}_t 1(z) - W_t 1(z)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{W}_t(y,x) - W_t(y,x)| dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{W}_t(z,x) - W_t(z,x)| dx.\end{aligned}$$

Dado que $\rho(y) \sim \rho(x_0) \sim \rho(z)$, si $\sqrt{t} < 2r$, entonces $\sqrt{t} < \rho(x_0) \leq C\rho(z)$ y $\sqrt{t} < C\rho(y)$. Utilizando la Proposición 5.26(i), teniendo en cuenta la Observación 5.27, y realizando un cambio de variables, se tiene

$$\begin{aligned}&|\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)| \\ &\leq \frac{C}{t^{d/2}}\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{\delta_\mu}\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{ct}\right)dx + C\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(z)}\right)^{\delta_\mu}\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left(-\frac{|z-x|^2}{ct}\right)dx \\ &\leq C\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x_0)}\right)^{\delta_\mu} \leq \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\delta_\mu}.\end{aligned}$$

Para $\sqrt{t} > \rho(x_0) \geq 2r$ se tiene que $|y-z| < 2r < \sqrt{t}$. Por lo tanto, por el Lema 5.24(ii), para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{W}_t(y,x) - \mathcal{W}_t(z,x)| dx \\ &\leq C\left(\frac{|y-z|}{\sqrt{t}}\right)^\beta t^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{ct}\right)dx \\ &\leq C\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^\beta \qquad (5.56) \\ &\leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta.\end{aligned}$$

Por último, si $2r < \sqrt{t} < \rho(x_0)$, escribimos

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)| \\
&= |(\mathcal{W}_t 1(y) - W_t 1(y)) - (\mathcal{W}_t 1(z) - W_t 1(z))| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{W}_t(y,x) - W_t(y,x)) - (\mathcal{W}_t(z,x) - W_t(z,x)) dx \right| \\
&\leq \int_{4|y-z|<|x-y|\leq C\rho(y)} |(\mathcal{W}_t(y,x) - W_t(y,x)) - (\mathcal{W}_t(z,x) - W_t(z,x))| \, dx \\
&\quad + \int_{|x-y|\leq 4|y-z|} |(\mathcal{W}_t(y,x) - W_t(y,x)) - (\mathcal{W}_t(z,x) - W_t(z,x))| \, dx \\
&\quad + \int_{|x-y|>C\rho(y)} |(\mathcal{W}_t(y,x) - W_t(y,x)) - (\mathcal{W}_t(z,x) - W_t(z,x))| \, dx,
\end{aligned} \tag{5.57}
$$

con $C = 2^{k_0+1} C_0$.

Para la primera integral, aplicamos el Lema 5.26(ii) y el hecho de que en la región de integración $|x-z| \sim |x-y|$ y $\rho(x) \sim \rho(y)$, para obtener

$$
\begin{aligned}
\int_{4|y-z|<|x-y|<C\rho(y)} &|(\mathcal{W}_t(y,x) - W_t(y,x)) - (\mathcal{W}_t(z,x) - W_t(z,x))| dx \\
&\leq \frac{C'}{t^{d/2}} \int_{4|y-z|<|x-y|<C\rho(y)} \left(\frac{|y-z|}{\rho(x)} \right)^\beta \exp\left(-\frac{|z-x|^2}{ct} \right) dx \\
&\leq C \left(\frac{|y-z|}{\rho(y)} \right)^\beta t^{-d/2} \int_{4|y-z|<|x-y|<C\rho(y)} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{ct} \right) dx \\
&\leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^\beta .
\end{aligned} \tag{5.58}
$$

Con respecto a la segunda integral, como x está cerca tanto de y como de z, se puede usar la regularidad del núcleo dada en el Proposición 5.26(i) y nuevamente el hecho que $\sqrt{t} < \rho(x_0) \sim \rho(y) \sim \rho(z)$ teniendo en cuenta la Observación 5.27. Desarrollaremos sólo uno de los sumandos puesto que la estimación del otro término se obtiene en forma análoga. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x-y|<4|y-z|} |(\mathcal{W}_t(y,x) - W_t(y,x)) - (\mathcal{W}_t(z,x) - W_t(z,x))| dx \\
&\leq \int_{|x-y|<4|y-z|} |\mathcal{W}_t(y,x) - W_t(y,x)| dx + \int_{|x-z|<5|y-z|} |\mathcal{W}_t(z,x) - W_t(z,x)| dx \\
&\leq \frac{C}{t^{d/2}} \int_{|x-y|<4|y-z|} \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)} \right)^{\delta_\mu} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t} \right) dx \\
&\quad + \frac{C}{t^{d/2}} \int_{|x-z|<5|y-z|} \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(z)} \right)^{\delta_\mu} \exp\left(-c\frac{|x-z|^2}{t} \right) dx \\
&\leq \frac{C}{t^{d/2}} \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x_0)} \right)^{\delta_\mu} \left[\int_{|x-y|<4|y-z|} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t} \right) dx + \int_{|x-z|<5|y-z|} \exp\left(-c\frac{|x-z|^2}{t} \right) dx \right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C}{t^{d/2}}\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x_0)}\right)^{\delta_\mu}\int_0^{5|y-z|} e^{-c\frac{u^2}{t}}u^{d-1}du\\
&\le C\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x_0)}\right)^{\delta_\mu}\left(\frac{|y-z|}{\sqrt{t}}\right)^{d}\\
&\le C\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x_0)}\right)^{\delta_\mu}\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^{\delta_\mu}\\
&= C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\delta_\mu}, \qquad (5.59)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $|y-z|<2r<\sqrt{t}$ y que $\delta_\mu<d$.

Por último, para el tercer término en (5.57), utilizamos la estimación dada en Lema 5.24(ii) para $\mathcal{W}_t$ y la correspondiente condición de suavidad para el núcleo de calor clásico W_t.

Como $|y-z|<\rho(x_0)$ y $|x-y|>C\rho(y)\ge CC_0^{-1}2^{-k_0}\rho(x_0)\ge 2\rho(x_0)$, se tiene $|x-y|>2|y-z|$.

Por lo tanto, para todo $0<\beta<\text{mín}\{1,\delta_\mu\}$

$$\begin{aligned}
&\int_{|x-y|>C\rho(y)}|(\mathcal{W}_t(y,x)-W_t(y,x))-(\mathcal{W}_t(z,x)-W_t(z,x))|dx\\
&\qquad\le\int_{|x-y|>C\rho(y)}|\mathcal{W}_t(y,x)-\mathcal{W}_t(z,x)|dx+\int_{|x-y|>C\rho(y)}|W_t(y,x)-W_t(z,x)|dx\\
&\qquad\le C|y-z|^\beta\int_{|x-y|>C\rho(y)}\frac{1}{|x-y|^{d+\beta}}dx\\
&\qquad\le Cr^\beta\int_{C\rho(y)}^\infty\frac{1}{s^{d+\beta}}s^{d-1}ds\\
&\qquad\le C\frac{r^\beta}{(C\rho(y))^\beta}\le C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta. \qquad (5.60)
\end{aligned}$$

Combinando (5.58), (5.59), y (5.60), se tiene

$$\|\mathcal{W}_t1(y)-\mathcal{W}_t1(z)\|_E\le C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta,\quad 0<\beta<\text{mín}\{1,\delta_\mu\}, \qquad (5.61)$$

lo que nos da (5.55), como queríamos probar. □

Observación 5.31. La condición $\delta_\mu<d$ planteada en el enunciado del Teorema 5.30 difiere del caso particular $d\mu(x)=V(x)dx$. Esto se debe a que en dicho caso $\delta_V=2-d/q$, donde q es la constante de la condición RH_q que satisface el potencial V, y la condición $\delta_V<d$ es siempre cierta.

5.4. Operador maximal asociado al semigrupo de Poisson

Para $0 < \sigma < 1$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, se definen los operadores de Poisson generalizados $\mathcal{P}_t^\sigma$ mediante la fórmula de subordinación

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t^\sigma f(x) &= \frac{t^{2\sigma}}{4^\sigma \Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4r}} \mathcal{W}_r f(x) \frac{dr}{r^{1+\sigma}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-r} \mathcal{W}_{\frac{t^2}{4r}} f(x) \frac{dr}{r^{1-\sigma}}, \end{aligned} \tag{5.62}$$

para $x \in \mathbb{R}^d$ y $t > 0$, siendo $\mathcal{W}_{\frac{t^2}{4r}} f$ como en (5.41), el semigrupo del calor asociado a $\mathcal{L}_\mu$.

Luego,

$$\mathcal{P}_t^\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{P}_t^\sigma(x,y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

donde la expresión para el núcleo es

$$\mathcal{P}_t^\sigma(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-r} \mathcal{W}_{\frac{t^2}{4r}}(x,y) \frac{dr}{r^{1-\sigma}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{5.63}$$

En el caso del operador laplaciano, cuando $\sigma = 1/2$ se tiene el semigrupo de Poisson clásico, $P_t f = e^{-t\sqrt{-\Delta}} f$ para $t > 0$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, el cual puede expresarse como una convolución con el denominado núcleo de Poisson,

$$P_t(x) = c_d \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}}}.$$

Consideraremos el operador maximal asociado a $\mathcal{P}_t^\sigma$, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, como

$$\mathcal{P}^{\sigma,*} f(x) := \sup_{t>0} |\mathcal{P}_t^\sigma f(x)| = \|\mathcal{P}_t^\sigma f(x)\|_E, \tag{5.64}$$

en el espacio de Banach $E = L^\infty((0,\infty), dt)$ como antes. Luego, podemos estudiar el operador con un enfoque vectorial de la misma manera en que lo hicimos en la Sección 5.3, esto es, considerando $\Lambda(f)(x) = \{\mathcal{P}_t^\sigma f(x)\}_{t>0}$, y obtener la acotación de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en $L^2_E(\mathbb{R}^d)$, lo que se sigue del hecho que $\mathcal{P}^{\sigma,*} f(x) \le \mathcal{W}^* f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ por (5.62).

Además, por el mismo control puntual, podemos obtener que vale el mismo resultado que para el operador maximal $\mathcal{W}^*$ en espacios de Lebesgue pesados dado en el Teorema 5.29.

Teorema 5.32. *Sean $0 < \sigma < 1$, $m = \frac{1}{k_0+1}$ y sea c_0 la constante del Lema 5.24(i). Entonces, para todo $c < c_0 2^{-m}$ y todo peso w tal que $w^{-1} \in H_{1,c}^{\rho,m}$, se tiene que $\mathcal{P}^{\sigma,*}$ es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Más aún, es acotado en $L^p(w)$ para todo $1 < p < \infty$ y $w \in H_{p,c^*}^{\rho,m^*}$, con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < c_0(2^{3k_0+7} C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

En los espacios BMO_ρ^α sin pesos, estos operadores maximales $\mathcal{P}^{\sigma,*}$ fueron estudiados en [MSTZ14] en el caso particular en que $d\mu(x) = V(x)dx$. Una versión pesada de estos resultados, para un medida general μ, son el propósito principal de esta sección. Para ello, probaremos que las condiciones (3.3) y (3.4) con la norma del espacio de Banach E se cumplen para luego obtener la acotación del operador $\mathcal{P}^{\sigma,*}$ en el espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ para ciertos pesos w a través del Corolario 3.20.

Proposición 5.33. *Sean $x_0, x, y \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ y $0 < \sigma < 1$.*

(i) *Existe una constante C tal que*

$$\|\mathcal{P}_t^\sigma(x,y)\|_E \leq C\frac{1}{|x-y|^d}\exp\left(-c_0\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right),$$

donde c_0 es la constante del Lema 5.24(i).

(ii) *Para todo $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$, existe una constante C tal que*

$$\|\mathcal{P}_t^\sigma(x,y) - \mathcal{P}_t^\sigma(x_0,y)\|_E \leq C\frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}},$$

siempre que $|x-y| > 2|x-x_0|$.

Demostración. Para probar el ítem (i), partimos de las definiciones (5.64) y (5.63), y la estimaciones en la norma de E ya obtenidas para $\mathcal{W}_t$ en el Proposición 5.28. Para la condición de tamaño, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_t^\sigma(x,y)\|_E &\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty e^{-r}\|\mathcal{W}_{\frac{t^2}{4r}}(x,y)\|_E\frac{dr}{r^{1-\sigma}}\\ &\leq \frac{C}{\Gamma(\sigma)}\frac{1}{|x-y|^d}\exp\left(-c_0\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)\int_0^\infty r^{\sigma-1}e^{-r}dr\\ &= C\frac{1}{|x-y|^d}\exp\left(-c_0\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right).\end{aligned}$$

Para probar la condición de suavidad (ii), utilizamos el Proposición 5.28(ii) para obtener

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_t^\sigma(x,y) - \mathcal{P}_t^\sigma(x_0,y)\|_E &\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty e^{-r}\left\|\mathcal{W}_{\frac{t^2}{4r}}(x,y) - \mathcal{W}_{\frac{t^2}{4r}}(x_0,y)\right\|_E\frac{dr}{r^{1-\sigma}}\\ &\leq C\frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}},\end{aligned}$$

siempre que $|x-y| > 2|x-x_0|$ y $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$. $\square$

Teorema 5.34. *Sean $0 < \sigma < 1$, $m = \frac{1}{k_0+1}$, c_0 la constante del Lema 5.24(i), y $\delta = \min\{1, \delta_\mu\}$. Entonces, para todo $0 \leq \alpha < \delta$, el operador $\mathcal{P}^{\sigma,*}$ es acotado en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ siempre que $w \in E^{\rho,m}_{\infty,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$ con $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $1 \leq \kappa < \frac{\delta-\alpha}{d} + 1$ y $(c_2 + c_3) < c_0\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$.*

Demostración. Fijemos $0 < \sigma < 1$. Por el Corolario 3.20 y la Observación 3.21, y en vistas de las condiciones para el núcleo dadas en el Proposición 5.33, es suficiente probar que existe una constante C tal que el operador $\mathcal{P}_t^\sigma$ satisface

$$\frac{1}{|B|}\int_B \|\mathcal{P}_t^\sigma 1(y) - (\mathcal{P}_t^\sigma 1)_B\|_E dy \le C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta, \tag{5.65}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < r \le \frac{1}{2}\rho(x_0)$ y $0 \le \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$.

Para mostrarlo, estimaremos $\|\mathcal{P}_t^\sigma 1(y) - \mathcal{P}_t^\sigma 1(z)\|_E$ para todo $y, z \in B = B(x_0, r)$. De acuerdo a la representación del núcleo del operador de Poisson generalizado (5.63), y usando la estimación (5.61), se tiene que, para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_t^\sigma 1(y) - \mathcal{P}_t^\sigma 1(z)\|_E &= \left\|\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty e^{-s}(\mathcal{W}_{\frac{t^2}{4s}}(y,x) - \mathcal{W}_{\frac{t^2}{4s}}(z,x))\frac{ds}{s^{1-\sigma}}\right\|_E\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty s^{\sigma-1}e^{-s}\|\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)\|_E ds\\ &\le C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta.\end{aligned}$$

Promediando para $y, z \in B$, se tiene la cota deseada. $\square$

5.5. Función g de Littlewood-Paley para el semigrupo de difusión del calor

La función g de Littlewood–Paley asociada a la familia $\{\mathcal{W}_t\}_{t>0}$ se define por

$$g_{\mathcal{W}}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |t\partial_t \mathcal{W}_t f(x)|^2\,\frac{dt}{t}\right)^{1/2} = \|t\partial_t\mathcal{W}_t f(x)\|_F,$$

donde $F = L^2\left((0,\infty), \frac{dt}{t}\right)$.

En el caso particular en que $d\mu(x) = V(x)dx$ con $0 \le V \in RH_q$ para $q > d/2$, la función $g_{\mathcal{W}}$ fue estudiada previamente en [BHS11], donde los autores obtienen su acotación en $L^p(w)$ para pesos $w \in A_p^\rho$, con $1 < p < \infty$. Por otro lado, estimaciones sin pesos en el espacio BMO_ρ^α pueden encontrarse en [MSTZ14].

Para estudiar el caso general asociado a una medida, seguiremos la línea planteada en las dos secciones anteriores, en el sentido que trabajaremos en un contexto vectorial, donde el espacio de Banach apropiado es F. Así, probaremos primero que las condiciones de tamaño y suavidad dadas en la Definición 3.3 son válidas considerando la norma $\|\cdot\|_F$, así como también las condiciones necesarias para la acotación en el espacio $\text{BMO}_\rho^\alpha(w)$. Por el Teorema Espectral, el operador $\{t\partial_t\mathcal{W}_t\}_{t>0}$ es acotado de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en $L_F^2(\mathbb{R}^d)$, lo que junto con las condiciones del núcleo que probaremos a continuación implica que es un Calderón–Zygmund a valores vectoriales, y por tanto, acotado de $L^p(\mathbb{R}^d)$ en $L_F^p(\mathbb{R}^d)$, para todo $1 < p < \infty$.

Proposición 5.35. *Sean $x_0, x, y \in \mathbb{R}^d$ y $t > 0$.*

(i) *Existe una constante C tal que*

$$\|t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)\|_F \leq \frac{C}{|x-y|^d} \exp\left(-c_0\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right),$$

donde c_0 es la constante del Lema 5.24(i).

(ii) *Para todo $0 < \delta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$ existe una constante C tal que*

$$\|t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y) - t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)\|_F \leq C\frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}},$$

siempre que $|x-y| > 2|x-x_0|$.

Demostración. Comencemos con la condición de tamaño (i). De forma análoga a lo realizado en la prueba del Proposición 5.21, usamos el Lema 5.25(i), del cual tenemos que existen constantes positivas C y c tales que

$$\begin{aligned}
\|t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)\|_F^2 &= \int_0^\infty |t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)|^2 \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^\infty \frac{C}{t^{d+1}} \exp\left(-2c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \exp\left(-2c_0\left(1+\frac{\text{máx}\{|x-y|,\sqrt{t}\}}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right) dt \\
&\leq C\exp\left(-2c_0\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right) \int_0^\infty t^{-d-1} \exp\left(-2c\frac{|x-y|^2}{t}\right) dt \\
&\leq \frac{C}{|x-y|^{2d}} \exp\left(-2c_0\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right),
\end{aligned}$$

donde en la última integral se estimó mediante el cambio de variables $u = \frac{2c|x-y|^2}{t}$. De aquí se sigue la condición deseada.

Con respecto a la condición de suavidad (ii), consideremos $|x-y| > 2|x-x_0|$.

De la estimación realizada previamente en (5.45), y procediendo nuevamente como en la prueba del Proposición 5.21 (ver pág. 115) para $m_\phi(\mathcal{L}_\mu)$, se sigue, por un lado, que

$$\int_{|x-x_0|^2}^\infty |t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y) - t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)|^2 \frac{dt}{t} \leq \frac{C}{|x-y|^{2d}} \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{2\delta},$$

para todo $0 < \delta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$ y cierta constante C.

Por otro lado, teniendo en cuenta que $|x_0 - y| > \frac{1}{2}|x-y|$, de las estimaciones para el tamaño de $t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)$ y $t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)$ obtenidas también en la demostración del Proposición 5.21, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{|x-x_0|^2} |t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y) - t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)|^2 \frac{dt}{t} \\
&\qquad \leq \int_0^{|x-x_0|^2} |t\partial_t \mathcal{W}_t(x,y)|^2 \frac{dt}{t} + \int_0^{|x-x_0|^2} |t\partial_t \mathcal{W}_t(x_0,y)|^2 \frac{dt}{t} \\
&\qquad \leq 2C \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{2\delta} \int_0^\infty t^{-d-1} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) dt \\
&\qquad \leq \frac{C}{|x-y|^{2d}} \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{2\delta},
\end{aligned}$$

todo $0 < \delta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$.

Combinando ambas estimaciones se sigue la condición en la norma de F. □

Como consecuencia del Proposici ón 5.35 y de la Observación 3.13 se obtiene el siguiente resultado para $g_{\mathcal{W}}$ en espacios de Lebesgue con pesos.

Teorema 5.36. *Sean $m = \frac{1}{k_0+1}$ y c_0 la constante del Lema 5.24(i). Entonces, para todo $c < c_0 2^{-m}$ y todo peso w tal que $w^{-1} \in H_{1,c}^{\rho,m}$, se tiene que $g_{\mathcal{W}}$ es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Más aún, es acotado en $L^p(w)$, para todo $1 < p < \infty$ y $w \in H_{p,c^*}^{\rho,m^*}$, con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < c_0(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Finalmente, estimamos el operador en espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ verificando las condiciones pedidas en el Corolario 3.20.

Teorema 5.37. *Sean $m = \frac{1}{k_0+1}$, c_0 la constante del Lema 5.24(i) y $\delta = \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$. Entonces, para todo $0 \leq \alpha < \delta$, el operador $g_{\mathcal{W}}$ es acotado en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ siempre que $w \in E_{\infty,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$ con $1 \leq \kappa < \frac{\delta-\alpha}{d} + 1$ y $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c_0 \left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right) (4C_0)^{-m}$.*

Demostración. En vistas de la Observación 3.21, es suficiente probar que existe una constante C tal que

$$\frac{1}{|B|} \int_B \|t\partial_t \mathcal{W}_t 1(y) - (t\partial_t \mathcal{W}_t 1)_B\|_F dy \leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta, \tag{5.66}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $0 < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0)$ y $0 \leq \beta < \text{mín}\,\{1, \delta_\mu\}$. De la desigualdad de Minkowski se sigue que

$$\|t\partial_t \mathcal{W}_t 1(y) - (t\partial_t \mathcal{W}_t 1)_B\|_F \leq \frac{1}{|B|} \int_B \|t\partial_t \mathcal{W}_t 1(y) - t\partial_t \mathcal{W}_t 1(z)\|_F \, dz,$$

por lo que bastará ver que

$$\|t\partial_t \mathcal{W}_t 1(y) - t\partial_t \mathcal{W}_t 1(z)\|_F \leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta,$$

para todo $y, z \in B$ y todo $0 \leq \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\|t\partial_t \mathcal{W}_t 1(y) - t\partial_t \mathcal{W}_t 1(z)\|_F^2 &= \int_0^\infty |t\partial_t \mathcal{W}_t 1(y) - t\partial_t \mathcal{W}_t 1(z)|^2 \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \left| \int_{\mathbb{R}^d} t\partial_t \mathcal{W}_t(y,x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} t\partial_t \mathcal{W}_t(z,x)dx \right|^2 \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \left| \int_{\mathbb{R}^d} (t\partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - t\partial_t \mathcal{W}_t(z,x))dx \right|^2 \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Procederemos como en la prueba del Teorema 5.23 (ver pág. 117), dividiendo la integral en la variable t en tres regiones.

Para $0 < t \leq 4r^2$, usando que $\rho(y) \sim \rho(x_0) \sim \rho(z)$ por ser $y, z \in B$, y aplicando el Lema 5.25(iii) dos veces, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{4r^2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (t\partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - t\partial_t \mathcal{W}_t(z,x))dx \right|^2 \frac{dt}{t} \\
&\quad \leq \int_0^{4r^2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} t\partial_t \mathcal{W}_t(y,x)dx \right|^2 \frac{dt}{t} + \int_0^{4r^2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} t\partial_t \mathcal{W}_t(z,x)dx \right|^2 \frac{dt}{t} \\
&\quad \leq C \int_0^{4r^2} \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x_0)} \right)^{2\delta_\mu} \frac{dt}{t} \\
&\quad = C \frac{1}{\rho(x_0)^{2\delta_\mu}} \int_0^{4r^2} t^{\delta_\mu - 1} dt \\
&\quad = C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{2\delta_\mu}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $2r^2 < t \leq \rho(x_0)^2$, utilizamos (5.46) para reescribir la integral en x. Luego, teniendo en cuenta que $|y-z| \leq \sqrt{t}$, podremos aplicar el Lema 5.25(ii), y en vistas de la Observación 5.27, usaremos (5.47) pues $t < C\rho(y)^2$ en esta región. Así, se tiene que para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{4r^2}^{\rho(x_0)^2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (t\partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - t\partial_t \mathcal{W}_t(z,x))dx \right|^2 \frac{dt}{t} \\
&\quad = \int_{4r^2}^{\rho(x_0)^2} t \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{W}_t(y,x) - \mathcal{W}_t(z,x))\, d\mu(x) \right|^2 dt \\
&\quad \leq C|y-z|^{2\beta} \int_{4r^2}^{\rho(x_0)^2} t^{1-\beta} \left| \int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{ct} \right) d\mu(x) \right|^2 dt \\
&\quad \leq Cr^{2\beta} \int_0^{\rho(x_0)^2} t^{-\beta-1} \left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)} \right)^{2\delta_\mu} dt \\
&\quad = Cr^{2\beta} \rho(x_0)^{2\delta_\mu} \rho(x_0)^{2\delta_\mu - 2\beta} \\
&\quad = C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{2\beta}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para analizar la integral en la tercera región cuando $t > \rho(x_0)^2$, vemos que $|y - z| < 2r \leq \rho(x_0) < \sqrt{t}$. Luego, por el Lema 5.25(ii)

$$\begin{aligned}
&\int_{\rho(x_0)}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (t\partial_t \mathcal{W}_t(y,x) - t\partial_t \mathcal{W}_t(z,x))dx \right|^2 \frac{dt}{t} \\
&\quad \leq C \int_{\rho(x_0)^2}^{\infty} \left(\frac{|y-z|}{\sqrt{t}} \right)^{2\beta} \left| \int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{ct} \right) dx \right|^2 \frac{dt}{t} \\
&\quad \leq C r^{2\beta} \int_{\rho(x_0)^2}^{\infty} t^{-\beta-1} dt \\
&\quad = C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^{2\beta},
\end{aligned}$$

para todo $0 < \beta < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$, lo que concluye la demostración de (5.66). $\square$

5.6. Función g de Littlewood-Paley para el semigrupo de Poisson

La función g de Littlewood-Paley asociada a el semigrupo de Poisson está definida de manera análoga a $g_{\mathcal{W}}$, considerando en este caso al semigrupo de Poisson clásico definido en la Sección 5.4 como $\mathcal{P}_t^{1/2}$, al que denotaremos simplemente por $\mathcal{P}_t$. Luego, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, definimos

$$g_{\mathcal{P}}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |t\partial_t \mathcal{P}_t f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} = \|t\partial_t \mathcal{P}_t f(x)\|_F, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.67}$$

donde $F = L^2\left((0,\infty), \frac{dt}{t}\right)$.

Las estimaciones para espacios de Lebesgue y BMO, en sus versiones pesadas adecuadas al contexto de esta tesis, se dan de la misma manera que las de $g_{\mathcal{W}}$, en el sentido que se obtienen, por un lado, las mismas estimaciones de tamaño y suavidad correspondientes a la Definición 3.3 y, por otro, las necesarias para el Corolario 3.20, considerando en ambos casos la norma $\|\cdot\|_F$. Tal y como se realizó el estudio de los operadores en un contexto vectorial en las secciones anteriores, utilizando el Teorema Espectral y las condiciones de tamaño y suavidad que veremos a continuación se obtiene que $\{t\partial_t \mathcal{P}_t\}_{t>0}$ es acotado de $L^p(\mathbb{R}^d)$ en $L^p_F(\mathbb{R}^d)$, para todo $1 < p < \infty$.

Proposición 5.38. *Sean $x_0, x, y \in \mathbb{R}^d$ y $t > 0$.*

(i) *Existe una constante C ta que*

$$\|t\partial_t \mathcal{P}_t(x,y)\|_F \leq C \frac{1}{|x-y|^d} \exp\left(-c_0 \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)} \right)^{\frac{1}{k_0+1}} \right),$$

donde c_0 es la constante del Lema 5.24(i).

(ii) *Para todo* $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$ *existe una constante* C *tal que*

$$\|t\partial_t\mathcal{P}_t(x,y) - t\partial_t\mathcal{P}_t(x_0,y)\|_F \leq C\frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}},$$

siempre que $|x-y| > 2|x-x_0|$.

Demostración. Partimos de la representación subordinada del núcleo de Poisson para $\sigma = \frac{1}{2}$ dada en (5.63). Derivando con respecto a t y multiplicando por t pero acá se hicieron más cosas, hay un cambio de variable en la derivada; es en t inicialmente

$$\begin{aligned} t\partial_t\mathcal{P}_t(x,y) &= \frac{t}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-r}\partial_t\mathcal{W}_{\frac{t^2}{4r}}(x,y)\,\frac{dr}{r^{1/2}} \\ &= \frac{t}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-r}\frac{t}{2r}\partial_u\mathcal{W}_u(x,y)\Big|_{u=\frac{t^2}{4r}}\frac{dr}{r^{1/2}}. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo el cambio de variables $u = \frac{t^2}{4r}$, se obtiene

$$t\partial_t\mathcal{P}_t(x,y) = \frac{t}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4u}}u\partial_u\mathcal{W}_u(x,y)\,\frac{du}{u^{3/2}}. \tag{5.68}$$

Luego, para probar la condición (i), a partir de (5.68) aplicamos la desigualdad de Minkowski integral y procedemos como en la prueba del Proposición 5.21 (ver pág. 115)

$$\begin{aligned} \|t\partial_t\mathcal{P}_t(x,y)\|_F &= \left(\int_0^\infty |t\partial_t\mathcal{P}_t(x,y)|^2\,\frac{dt}{t}\right)^{1/2} \\ &\leq C\int_0^\infty\left(\int_0^\infty te^{-\frac{t^2}{2u}}dt\right)^{1/2}|u\partial_u\mathcal{W}_u(x,y)|\frac{du}{u^{1/2}} \\ &= C\int_0^\infty |u\partial_u\mathcal{W}_u(x,y)|\,du \\ &\leq C\frac{1}{|x-y|^d}\exp\left(-c_0\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\int_0^\infty te^{-\frac{t^2}{2u}}dt = u$.

Para mostrar (ii), aplicamos la desigualdad de Minkowski nuevamente, y procedemos de manera análoga a lo realizado en la prueba del Proposición 5.21 (ver pág. 115) para deducir que

$$\begin{aligned} \|t\partial_t\mathcal{P}_t(x,y) - t\partial_t\mathcal{P}_t(x_0,y)\|_F &\leq C\int_0^\infty |u\partial_u\mathcal{W}_u(x,y) - u\partial_u\mathcal{W}_u(x_0,y)|\,du \\ &\leq C\frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}, \end{aligned}$$

para todo $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$, siempre que $|x-y| > 2|x-x_0|$. □

Como consecuencia del Proposición 5.38 y de la Observación 3.13 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 5.39. *Sean $m = \frac{1}{k_0+1}$ y c_0 la constante del Lema 5.24(i). Entonces, para todo $c < c_0 2^{-m}$ y todo peso w tal que $w^{-1} \in H_{1,c}^{\rho,m}$, se tiene que $g_{\mathcal{P}}$ es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Más aún, es acotado en $L^p(w)$, para todo $1 < p < \infty$ y $w \in H_{p,c^*}^{\rho,m^*}$, con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < c_0(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Finalmente, estudiaremos el operador en espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$.

Teorema 5.40. *Sean $m = \frac{1}{k_0+1}$, c_0 la constante del Lema 5.24(i) y $\delta = \min\{1, \delta_\mu\}$. Entonces, para todo $0 \le \alpha < \delta$, el operador $g_{\mathcal{P}}$ es acotado en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ siempre que $w \in E_{\infty,c_1,c_2}^{\rho,m} \cap D_{\kappa,c_3}^{\rho,m}$ con $1 \le \kappa < \frac{\delta-\alpha}{d} + 1$ y $c_1, c_2, c_3 \ge 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c_0\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$.*

Demostración. Por Corolario 3.20 y las Observaciones 3.19 y 3.21, bastará probar que existe una constante C tal que, para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $0 < r \le \frac{1}{2}\rho(x_0)$

$$\frac{1}{|B|}\int_B \|t\partial_t\mathcal{P}_t 1(y) - (t\partial_t\mathcal{P}_t 1)_B\|_F dy \le C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta, \tag{5.69}$$

con $0 \le \beta < \min\{1, \delta_\mu\}$.

Dados $y, z \in B$, y gracias a la desigualdad de Minkowski, será suficiente estimar $\|t\partial_t\mathcal{P}_t 1(y) - t\partial_t\mathcal{P}_t 1(z)\|_F$. De (5.68), aplicando la desigualdad de Minkowski nuevamente,

$$\begin{aligned}
&\|t\partial_t\mathcal{P}_t 1(y) - t\partial_t\mathcal{P}_t 1(z)\|_F \\
&= \left\|\int_{\mathbb{R}^d}(t\partial_t\mathcal{P}_t(y,x) - t\partial_t\mathcal{P}_t(z,x))dx\right\|_F \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty te^{-\frac{t^2}{2u}}dt\right)^{1/2}\left|\int_{\mathbb{R}^d}(u\partial_u\mathcal{W}_u(y,x) - u\partial_u\mathcal{W}_u(z,x))dx\right|\frac{du}{u^{3/2}} \\
&= C\int_0^\infty\left|\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_u\mathcal{W}_u(y,x) - \partial_u\mathcal{W}_u(z,x))dx\right|du.
\end{aligned}$$

Esta última expresión ya fue estimada en la demostración del Teorema 5.23 (ver pág. 117), por lo que (5.69) se sigue a partir de ello. □

5.7. Operadores integrales fraccionarios

Dado $\gamma > 0$, las potencias negativas $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}$ admiten la siguiente representación integral en términos del semigrupo de calor, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}_\mu}f(x)\frac{dt}{t^{1-\gamma}},$$

donde Γ denota la función Gamma.

Utilizando la representación de $e^{-t\mathcal{L}_\mu}$ en términos del núcleo $\mathcal{W}_t(x,y)$, podemos reescribir la expresión anterior de forma explícita como un operador integral

$$\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{W}_t(x,y)f(y)dy\frac{dt}{t^{1-\gamma}} = \int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{J}_\gamma(x,y)f(y)dy,$$

con un núcleo de tipo fraccionario dado por

$$\mathcal{J}_\gamma(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \mathcal{W}_t(x,y) \frac{dt}{t^{1-\gamma}}, \qquad x,y \in \mathbb{R}^d. \tag{5.70}$$

Este operador puede verse como una generalización natural del potencial de Riesz clásico asociado al operador laplaciano, el cual tiene núcleo $J_\gamma(x,y) = c_{d,\gamma}|x-y|^{2\gamma-d}$, para $0 < \gamma < d/2$. Es inmediato de (5.42) que la integral anterior es finita cuando $0 < \gamma < d/2$, por lo que este es también el rango óptimo para el estudio de las potencias negativas de $\mathcal{L}_\mu$.

El caso de las potencias negativas del operador $\mathcal{L}_V$ fue analizado primeramente en [BHS11], donde se obtuvieron estimaciones en espacios de Lebesgue con pesos en A_p^ρ, así como el correspondiente resultado de tipo débil $(1, \frac{d}{d-2\gamma})$ para $w \in A_1^\rho$. Posteriormente, en [BCH13a] se establecieron acotaciones desde espacios de Lebesgue con pesos hacia espacios $\mathrm{BMO}_\rho(w)$, nuevamente para pesos en A_p^ρ. Por otro lado, en [MSTZ14] se obtuvieron estimaciones para $\mathcal{L}_V^{-\gamma}$ entre espacios BMO_ρ^α sin pesos mediante un teorema de tipo $T1$, mientras que en [BHS08] se dieron estimaciones en $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ con técnicas adaptadas al operador.

Los resultados principales de esta sección son las propiedades de acotación para $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}$ tanto en espacios $L^p(w)$ como en espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ con w en el contexto de pesos $H_{p,c}^{\rho,m}$. A continuación enunciamos cada uno de ellos, los que serán demostrados utilizando lo visto para operadores fraccionarios en el Capítulo 4.

Proposición 5.41. *Sea $0 < \gamma < d/2$. Entonces, $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}$ es un operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund exponencial de tipo $(2\gamma, \infty, \delta)$ para todo con $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$, con constantes $c = c_0$ (la constante del Lema 5.24(i)) y $m = \frac{1}{k_0+1}$.*

Teorema 5.42. *Sean $0 < \gamma < d/2$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$. El operador $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}$ es acotado de $L^{\frac{d}{2\gamma}}(w^{\frac{d}{2\gamma}})$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-\frac{d}{d-2\gamma}} \in H_{1,c}^{\rho,m}$ con $c < c_0 \frac{d}{d-2\gamma}(8C_0)^{-m_1}$. Más aún, $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ para todo $1 < p < \frac{d}{2\gamma}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2\gamma}{d}$, y todo peso w tal que $w^{-p'} \in H^{\rho,m^*}_{1+\frac{p'}{q},c}$ con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c < c_0 \frac{d}{d-2\gamma}(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Teorema 5.43. *Sea $0 < \gamma < d/2$, $\delta = \min\{1, \delta_\mu\}$, $m = \frac{1}{k_0+1}$ y c_0 la constante del Lema 5.24(i). Entonces, para todo $0 \le \alpha + 2\gamma < \delta$, el operador $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}$ es acotado de $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho^{\alpha+2\gamma}(w)$ siempre que $w \in E^{\rho,m}_{\infty,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$ con $1 \le \kappa < \frac{\delta-2\gamma-\alpha}{d} + 1$ y $c_1, c_2, c_3 \ge 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c_0 \left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha+2\gamma}{\delta}\right)(4C_0)^{-m}$.*

Demostración del Teorema 5.41. Probaremos a continuación las estimaciones de tamaño (4.3) y suavidad (4.4). Más precisamente:

(i) existe una constante C tal que

$$|\mathcal{J}_\gamma(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^{d-2\gamma}} \exp\left(-c_0\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right), \tag{5.71}$$

siendo c_0 la constante del Lema 5.24(i).

(ii) para todo $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$, existe una constante C tal que

$$|\mathcal{J}_\gamma(x,y) - \mathcal{J}_\gamma(x_0,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{d-2\gamma}} \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^\delta, \tag{5.72}$$

siempre que $|x-y| > 2|x-x_0|$.

Comencemos por la condición de tamaño. Para ello, usaremos el Lema 5.24(i), del cual se sigue, mediante un cambio de variables, que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{J}_\gamma(x,y)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty |\mathcal{W}_t(x,y)| \frac{dt}{t^{1-\gamma}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \exp\left(-c_0 \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right) \int_0^\infty t^{-\frac{d}{2}+\gamma-1} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) dt \\
&\leq \frac{C}{|x-y|^{d-2\gamma}} \exp\left(-c_0 \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right),
\end{aligned}$$

dado que $0 < \gamma < \frac{d}{2}$.

Para la condición de suavidad, sean $|x-y| > 2|x-x_0|$. Teniendo en cuenta que

$$|\mathcal{J}_\gamma(x,y) - \mathcal{J}_\gamma(x_0,y)| = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty |\mathcal{W}_t(x,y) - \mathcal{W}_t(x_0,y)| \frac{dt}{t^{1-\gamma}},$$

consideramos dos casos.

Si $t \leq |x-x_0|^2$, usamos el Lema 5.24(i) y la estimación (5.54) con $N = \delta/2$, $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$, para obtener

$$\begin{aligned}
|\mathcal{W}_t(x,y)| &\leq C t^{-d/2} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \\
&\leq C t^{-d/2} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^\delta \\
&\leq C t^{-d/2} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{2t}\right) \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-\delta} \left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^\delta \\
&\leq C_\delta t^{-d/2} \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^\delta \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{2t}\right).
\end{aligned}$$

Y, como $|x_0-y| > \frac{1}{2}|x-y|$, también obtenemos la misma cota para $|\mathcal{W}_t(x_0,y)|$. Entonces, integrando como antes,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{|x-x_0|^2} |\mathcal{W}_t(x,y) - \mathcal{W}_t(x_0,y)| \frac{dt}{t^{1-\gamma}} \\
&\qquad \leq C \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^\delta \int_0^{|x-x_0|^2} t^{-\frac{d}{2}+\gamma-1} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{2t}\right) dt \\
&\qquad \leq C \frac{1}{|x-y|^{d-2\gamma}} \left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^\delta.
\end{aligned}$$

Para $t > |x - x_0|^2$, por Lema 5.24(ii), para todo $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$ vale la estimación

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_t(x,y) - \mathcal{W}_t(x_0,y)| &\leq Ct^{-d/2}\left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^{\delta} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{ct}\right) \\ &\leq Ct^{-d/2}\left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^{\delta}\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-\delta} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2ct}\right) \\ &= C\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta} t^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2ct}\right). \end{aligned}$$

donde nuevamente hemos usado (5.54) con $N = \delta/2$.

Entonces, integrando en t y realizando el cambio de variables $u = \frac{|x-y|^2}{2ct}$,

$$\begin{aligned} &\int_{|x-x_0|^2}^{\infty} |\mathcal{W}_t(x,y) - \mathcal{W}_t(x_0,y)| \frac{dt}{t^{1-\gamma}} \\ &\qquad \leq C\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta} \int_0^{\infty} t^{-\frac{d}{2}+\gamma-1} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2ct}\right) dt \\ &\qquad \leq C\frac{1}{|x-y|^{d-2\gamma}}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta}. \end{aligned}$$

Luego, de las estimaciones de ambas integrales se obtiene 5.72 para todo $0 < \delta < \min\{1, \delta_\mu\}$.

Finalmente, debemos probar que el operador $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}$ es acotado de $L^1(\mathbb{R}^d)$ en $L^{\frac{d}{d-2\gamma},\infty}(\mathbb{R}^d)$. Esto se desprende de la condición 5.71 puesto que dicha condición implica que

$$|\mathcal{J}_\gamma(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{d-2\gamma}}.$$

Luego,

$$|\mathcal{L}_\mu^{-\gamma} f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-2\gamma}} dy = CI_{2\gamma}(|f|)(x),$$

donde $I_{2\gamma}$ es la integral fraccionaria clásica de orden $2\gamma < d$. Es un resultado clásico (Teorema de Hardy–Littlewood–Sobolev) que este operador es acotado de $L^1(\mathbb{R}^d)$ en $L^{\frac{d}{d-2\gamma},\infty}(\mathbb{R}^d)$. Así $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}$ también lo es, completando la demostración del teorema. □

Demostración del Teorema 5.42. Es una consecuencia inmediata de los Teoremas 5.41, 4.7(i) y 4.6(i). □

Demostración del Teorema 5.43. Por el Corolario 4.12 y la Observación 4.11 basta probar que existe una constante C tal que

$$\frac{1}{|B|^{1+2\gamma/d}} \int_B \left|\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}1(y) - \left(\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}1\right)_B\right| dx \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\beta}, \tag{5.73}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $0 < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0)$ y $0 < \beta < \min\{1, \delta_\mu\} - 2\gamma$.

Dados $y, z \in B$, estimaremos $|\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}1(y) - \mathcal{L}_\mu^{-\gamma}1(z)|$ para luego tomar promedios. Observar que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}1(y) - \mathcal{L}_\mu^{-\gamma}1(z)| &= \left|\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{W}_t(y,x) - \mathcal{W}_t(z,x) dx\, t^{\gamma-1} dt\right| \\ &\leq \int_0^{\infty} |\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)|\, t^{\gamma-1} dt. \end{aligned}$$

Dividimos la integral en t en dos partes. Para $0 < t \le \rho(x_0)^2$, usamos (5.61) para obtener

$$\int_0^{\rho(x_0)^2} |\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)|\, t^{\gamma-1} dt \le C \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\beta}} \int_0^{\rho(x_0)^2} t^{\gamma-1} dt = C \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\beta}} \rho(x_0)^{2\gamma},$$

siempre que $0 < \tilde{\beta} < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$.

Para la integral en $t > \rho(x_0)^2$ usamos (5.56), de donde se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\rho(x_0)^2}^{\infty} |\mathcal{W}_t 1(y) - \mathcal{W}_t 1(z)|\, t^{\gamma-1} dt &\le C \int_{\rho(x_0)^2}^{\infty} \left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^{\tilde{\beta}} t^{\gamma-1} dt \\ &= C r^{\tilde{\beta}} \int_{\rho(x_0)^2}^{\infty} t^{-\frac{\tilde{\beta}}{2}+\gamma-1} dt \\ &= C \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\beta}} \rho(x_0)^{2\gamma},\end{aligned}$$

para todo $2\gamma < \tilde{\beta} < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$.

De ambas estimaciones, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|^{1+2\gamma/d}} \int_B |\mathcal{L}_\mu^{-\gamma} 1(y) - (\mathcal{L}_\mu^{-\gamma} 1)_B| dy &\le \frac{1}{|B|^{2+2\gamma/d}} \int_B \int_B |\mathcal{L}_\mu^{-\gamma} 1(y) - \mathcal{L}_\mu^{-\gamma} 1(z)| dy dz \\ &\le \frac{C}{|B|^{2\gamma/d}} \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\beta}} \rho(x_0)^{2\gamma} \\ &\le C \left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\tilde{\beta}-2\gamma},\end{aligned}$$

siempre que $2\gamma < \tilde{\beta} < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$. Haciendo $\beta = \tilde{\beta} - 2\gamma$, tenemos que (5.73) vale para todo $0 < \beta + 2\gamma < \text{mín}\{1, \delta_\mu\}$.

De aquí se sigue el resultado de acotación de $\mathrm{BMO}_\rho^\beta(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho^{\beta+2\gamma}(w)$. □

5.8. Operadores asociados a un potencial V

En el caso particular en que la medida μ está dada por $d\mu(x) = V(x)\, dx$, con V una función no negativa que pertenece a la clase de reverse Hölder clásica RH_q para $q > \frac{d}{2}$, podremos estudiar los operadores $T_\gamma = \mathcal{L}_V^{-\gamma} V^\gamma$ para $0 < \gamma < d/2$.

Estos se definen , para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ por

$$T_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{J}_\gamma(x, y) V^\gamma(y) f(y) dy,$$

siendo $K_\gamma(x, y)$ el núcleo del operador $\mathcal{L}_V^{-\gamma}$ definido en (5.70), considerando aquí el caso particular $d\mu = V(x)dx$.

Para los casos en que γ toma los valores $\frac{1}{2}$ y 1, la acotación en $L^p(\mathbb{R}^d)$ fue probada en [She95, Theorem 5.10, Theorem 3.1] cuando $1 \le p \le 2q$ y $1 \le p \le q$, respectivamente.

Estos operadores fueron estudiados posteriormente en [GLP08, Lemma 2, Lemma 3], quienes probaron estimaciones puntuales para sus núcleos, de tamaño y suavidad con decaimiento polinomial asociado a la función de radio crítico ρ. Luego, haciendo uso de estos resultados obtuvieron la condición de suavidad (3.2), la cual se encuentra contenida en la demostración de [GLP08, Theorem 1] cuando $s = q$ y $s = 2q$ para T_1 y $T_{1/2}$, respectivamente, y algún $\delta > 0$.

Partiendo de dichos resultados para el núcleo del operador,en [BCH13a, Theorem 8, Theorem 9] se probaron estimaciones con pesos en la clase A_p^ρ para T_1 y $T_{1/2}$. Más precisamente, se establecieron acotaciones de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$, y entre espacios $L^p(w)$. De forma independiente, Tang (ver [Tan15, Theorem 3.4, Corollary 3.5]), probó el mismo resultado de acotación en $L^p(w)$ para estos operadores y sus adjuntos T_1^* y $T_{1/2}^*$.

El caso general $0 < \gamma < d/2$ fue estudiado posteriormente en [BHQ19], donde los autores obtuvieron resultados para operadores en la clase de Schrödinger–Calderón–Zygmund (s, δ) con $1 < s \leq \infty$ y $0 < \delta \leq 1$, los cuales les permitieron deducir la acotación de T_γ en espacios $L^p(w)$ para todo $(q/\gamma)' < p < \infty$ y $w \in A^\rho_{p/(q/\gamma)'}$, y en espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ para ciertos pesos w relacionados con la clase A_p^ρ. Para ello, dieron las estimaciones (3.1) y (3.2) para el núcleo $\mathcal{J}_\gamma V^\gamma$ con $s = q/\gamma > 1$ y $\delta = \text{mín}\{1, 2 - d/q\}$, y probaron la acotación del operador T_γ de $L^{s'}(\mathbb{R}^d)$ en $L^{s',\infty}(\mathbb{R}^d)$. Más aún, mostraron que en el caso en que $V \in RH_q$ para todo $q \geq 1$, T_γ es acotado para todo $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^\rho$.

Adicionalmente, en [BHQ19] los autores deducen una condición de tipo $T1$ para estos operadores, la cual les permite obtener la acotación de T_γ en espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\beta(w)$ para ciertos pesos w relacionados con la clase A_p^ρ. Más precisamente, prueban que, si $\tilde{\delta} = \text{mín}\{\delta, \gamma(2 - d/q)\}$, para todo $0 < \beta < \tilde{\delta}$ existe una constante C tal que

$$\frac{1}{|B|}\int_B \left|\mathcal{L}_V^{-\gamma}V^\gamma 1(x) - \left(\mathcal{L}_V^{-\gamma}V^\gamma 1\right)_B\right| dx \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\beta, \tag{5.74}$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$ con $0 < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0)$.

Entonces, por todo lo antes dicho, si podemos obtener la condición de tamaño (3.1) para el núcleo $\mathcal{J}_\gamma V^\gamma$, a partir de los resultados del Capítulo 3 será posible extender las acotaciones ya existentes al contexto de espacios de funciones con pesos en la clase $H_{p,c}^{\rho,m}$, puesto que la condición (3.2) y la propiedad de acotación de T_γ requerida la Definición 3.1 se deducen de la clasificación dada en [Qui19, Proposición 2.4.6].

Proposición 5.44. *Sea $V \in RH_q$, $q > \frac{d}{2}$, $V \not\equiv 0$ y $0 < \gamma < \frac{d}{2}$. Entonces, T_γ es un operador de Schrödinger–Calderón–Zygmund de tipo $(\frac{q}{\gamma}, \delta)$ con $\delta = \text{mín}\left\{1, 2 - \frac{d}{q}\right\}$, y constantes $m = \frac{1}{k_0+1}$ y $c = c_0 2^{-(m+1)}$, siendo c_0 la constante del Lema 5.24(i).*

Demostración. Por lo observado previamente, basta probar que existe una constante C tal que, para todo $R > 0$,

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\le 2R} |\mathcal{J}_\gamma(x,y)V^\gamma(y)|^{q/\gamma}dy\right)^{\gamma/q} \le \frac{C}{R^d}\exp\left(-c_0 2^{-m-1}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right),$$

siempre que $|x-x_0| < R/2$. Aquí, $m = \frac{1}{k_0+1}$.

Partiendo de la estimación (5.71) ya obtenida para $\mathcal{J}_\gamma(x,y)$, teniendo en cuenta que $R/2 \le |x-y| \le 3R$ en el anillo de integración, y usando la condición reverse-Hölder RH_q para V, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\le 2R} |\mathcal{J}_\gamma(x,y)V^\gamma(y)|^{q/\gamma}dy\right)^{\gamma/q}\\
&\le \frac{C}{R^{d-2\gamma}}\exp\left(-c_0 2^{-m}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right)\left(\frac{1}{R^d}\int_{B(x,3R)} V^q(y)dy\right)^{\gamma/q}\\
&\le \frac{C}{R^{d-2\gamma}}\exp\left(-c_0 2^{-m}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right)\left(\frac{1}{R^d}\int_{B(x,3R)} V(y)dy\right)^{\gamma}\\
&\le \frac{C}{R^{d-2\gamma}}\exp\left(-c_0 2^{-m}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right)R^{-2\gamma}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\log_2(D_V)\gamma}\\
&\le \frac{C}{R^d}\exp\left(-c_0 2^{-m-1}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^m\right),
\end{aligned}$$

donde se usó el Lema 1.24 para el caso $d\mu(x) = V(x)dx$ y D_V denota a la constante de duplicación correspondiente a V. □

Como consecuencia de los Teoremas 3.7(ii) y 3.6(ii) obtenemos el siguiente resultado para cada T_γ, el cual permite ampliar la clase pesos dadas en [BHQ19] para el caso $L^p(w)$ con $(q/\gamma)' < p < \infty$, y extiende el resultado en el extremo $p = \infty$ de [BCH13a] para todo T_γ con $0 < \gamma < \frac{d}{2}$.

Teorema 5.45. *Sea $V \in RH_q$, $q > \frac{d}{2}$, $V \not\equiv 0$ y $0 < \gamma < \frac{d}{2}$. Sean $m = \frac{1}{k_0+1}$ y c_0 la constante del Lema 5.24(i). Entonces, para todo $c < (q/\gamma)'2^{-2m-1}$ y todo peso w tal que $w^{-(q/\gamma)'} \in H^{\rho,m}_{1,c}$, se tiene que T_γ es acotado de $L^\infty(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$. Además, es acotado en $L^p(w)$ para todo $(q/\gamma)' < p < \infty$ y $w \in H^{\rho,m^*}_{p/(q/\gamma)',c^*}$, con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < c_0 2^{-(m+1)}(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Finalmente, la acotación en espacios de tipo BMO es una consecuencia del Teorema 3.18 y la estimación (5.74) como enunciamos a continuación.

Teorema 5.46. *Sea $V \in RH_q$, $q > \frac{d}{2}$, $V \not\equiv 0$ y $0 < \gamma < \frac{d}{2}$. Sean $m = \frac{1}{k_0+1}$ y $\tilde{\delta} = \min\{1, 2-d/q, \gamma(2-d/q)\}$. Entonces, para todo $0 \le \alpha < \tilde{\delta}$, el operador T_γ es acotado en $\mathrm{BMO}^\alpha_\rho(w)$ siempre que $w \in E^{\rho,m}_{\frac{q}{\gamma},c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$, con $1 \le \kappa < \frac{\tilde{\delta}-\alpha}{d}+1$ y $c_1, c_2, c_3 \ge 0$ tales que $(c_2+c_3) < \frac{c_0}{2}\left(1-\frac{d(\kappa-1)+\alpha}{\tilde{\delta}}\right)(8C_0)^{-m}$.*

De acuerdo con los Teoremas 3.12 y 3.14, se obtienen los siguientes resultados de acotación en $L^p(w)$ para $1 < p < q/\gamma$, y en el extremo $p = 1$, para el operador adjunto T_γ^*.

Teorema 5.47. *Sea $V \in RH_q$, $q > \frac{d}{2}$, $V \not\equiv 0$ y $0 < \gamma < \frac{d}{2}$. Entonces T_γ^* es acotado en $L^p(w)$ para todo $1 < p < q/\gamma$ y todo peso w tal que $w^{-\frac{1}{p-1}} \in H^{\rho,m^*}_{p'/(q/\gamma)',c^*}$ con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < c_0 2^{-m-1}\left(\frac{q}{\gamma}\right)'(2^{k_0+6}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Teorema 5.48. *Sea $V \in RH_q$, $q > \frac{d}{2}$, $V \not\equiv 0$ y $0 < \gamma < \frac{d}{2}$. Entonces T_γ^* es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w, si existe $\nu > 1$ tal que $w^{(q/\gamma)'\nu} \in H^{\rho,m^*}_{1,c^*}$, con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c^* < c_0 2^{-m-1}\left(\frac{q}{\gamma}\right)'(2^{k_0+1}C_0^{k_0+1})^{-m^*}$.*

5.9. Operador $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$

En esta sección estudiaremos el operador fraccionario $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$, para $0 < \gamma \leq 1$, el cual verificaremos que se enmarca en la Definiciones 4.1 o 4.2, según el valor de δ_μ.

Notemos que $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ puede considerarse de orden fraccionario $\nu = 2\gamma - 1$, puesto que $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}$ es de orden 2γ y el gradiente ∇ reduce el orden en uno. Así, $\nu > 0$ siempre que consideremos $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$.

Cuando $\gamma = 1$, se tiene que el orden es $\nu = 1$. En este caso, el operador $\mathcal{L}_\mu^{-1}\nabla$ puede expresarse directamente mediante la solución fundamental de $\mathcal{L}_\mu$

$$\mathcal{L}_\mu^{-1}\nabla f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_\mu(x,y)\nabla f(y)dy,$$

para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Aplicando integración por partes obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_\mu(x,y)\nabla f(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_2\Gamma_\mu(x,y)f(y)dy,$$

por lo que el núcleo de $\mathcal{L}_\mu^{-1}\nabla$ es

$$\mathcal{K}_1(x,y) = -\nabla_2\Gamma_\mu(x,y),$$

donde ∇_2 indica el gradiente con respecto a la segunda variable.

En virtud de la simetría $\Gamma_\mu(x,y) = \Gamma_\mu(y,x)$ (ver [She99, Theorem 2.18]), se tiene

$$\nabla_2\Gamma_\mu(x,y) = \nabla_1\Gamma_\mu(y,x),$$

Gracias a esta igualdad, las estimaciones para $\nabla_1\Gamma_\mu$ dadas en la Proposición 1.26 permiten dar cotas adecuadas para el tamaño de $\mathcal{K}_1$. Esto es, existen constantes positivas C, ϵ_3 tales que

$$|\mathcal{K}_1(x,y)| = |\nabla_1\Gamma_\mu(y,x)| \leq \frac{Ce^{-\epsilon_3 d_\mu(y,x)}}{|y-x|^{d-2}}\left(\int_{B\left(y,\frac{|y-x|}{2}\right)} \frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}} + \frac{1}{|y-x|}\right), \tag{5.75}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ con $x \neq y$.

Más aún, si $\delta_\mu > 1$, entonces

$$|\mathcal{K}_1(x,y)| \leq \frac{Ce^{-\epsilon d_\mu(y,x)}}{|y-x|^{d-1}}.$$

Para deducir las condiciones de suavidad, disponemos del Lema 5.4 para $\lambda = 0$, para conseguir las estimaciones deseadas con $\delta = \delta_1$, la constante de (5.5). Veremos esto en detalle en el próximo resultado.

Ahora bien, cuando $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, podemos recurrir a la fórmula de Balakrishnan (ver [Kat66, Eq. (3.53), p. 286]) para expresar al núcleo de $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$, mediante la cual se tiene que

$$\mathcal{L}_\mu^{-\gamma} = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\gamma}\mathcal{L}_{\mu+\lambda}^{-1}d\lambda.$$

Dado que

$$\mathcal{L}_{\mu+\lambda}^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)f(y)dy,$$

para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, se obtiene

$$\mathcal{L}_{\mu+\lambda}^{-1}\nabla f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)\nabla f(y)dy.$$

Considerando las derivadas parciales con respecto a cada una de las coordenadas y aplicando integración por partes componente a componente, se deduce que el vector gradiente satisface

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)\nabla f(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_2\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)f(y)dy.$$

Por lo tanto,por la simetría de $\Gamma_{\mu+\lambda}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla f(x) &= \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\gamma}\mathcal{L}_{\mu+\lambda}^{-1}\nabla f(x)d\lambda\\ &= -\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\gamma}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_2\Gamma_{\mu+\lambda}(x,y)f(y)dyd\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} -\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\gamma}\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x)d\lambda f(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}_\gamma(x,y)f(y)dy, \end{aligned} \tag{5.76}$$

donde

$$\mathcal{K}_\gamma(x,y) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\gamma}\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x)d\lambda. \tag{5.77}$$

Nuevamente, a partir de la Proposición 1.26 y el Lema 5.4 podremos dar las estimaciones deseadas para el núcleo $\mathcal{K}_\gamma$ también cuando $\frac{1}{2} < \gamma < 1$.

Con estas estimaciones a disposición podemos probar la siguiente clasificación para $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$, primeramente en el caso en que $\delta_\mu > 1$.

Proposición 5.49. *Sean $\delta_\mu > 1$ y $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$. Entonces, $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ es un operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo $(2\gamma-1, \infty, \delta_1)$, con constantes $c = \frac{\epsilon}{2D_1}$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$, donde D_1 es la constante dada en (1.7).*

Demostración. Notemos primero que de la condición de tamaño puntual de $\nabla_1\Gamma_\mu$ dada en (1.26), y aplicando (5.20) junto con el Lema 1.9, para todo $\lambda \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}|\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x)| &\leq \frac{Ce^{-\frac{\epsilon}{2}d_\mu(y,x)-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|y-x|^{d-1}} \\ &\leq \frac{Ce^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|y-x|^{d-1}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right), \end{aligned} \tag{5.78}$$

donde $\rho(x)$ puede cambiarse por $\rho(y)$ por la simetría de la distancia d_μ.

De aquí se sigue inmediatamente que si $\gamma = 1$ (y por tanto, $\nu = 2\gamma - 1 = 1$)

$$|\mathcal{K}_1(x,y)| = |\nabla_1\Gamma_\mu(y,x)| \leq \frac{C}{|y-x|^{d-1}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right).$$

Para el caso $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, integramos (5.78) en λ, haciendo el cambio de variables $u = \frac{\epsilon}{2}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|$, de donde se sigue que

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}_\gamma(x,y)| &\leq \frac{C}{|x-y|^{d-1}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)\int_0^\infty \lambda^{-\gamma}e^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|}d\lambda \\ &\leq \frac{C}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)\int_0^\infty u^{(2-2\gamma)-1}e^{-u}du \\ &\leq \frac{C}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right),\end{aligned}$$

donde hemos usado que la integral es convergente por ser $\gamma < 1$.

Para probar la condición de suavidad correspondiente, consideramos $|x-x_0| < |y-x|/8$. Luego, aplicando el Lema 5.4, y usando nuevamente (5.78) tenemos que

$$\begin{aligned}|\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x) - \nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x_0)| &\leq C\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1} \sup_{z\in B(x,|x-y|/2)} \frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|y-z|}}{|y-z|^{d-1}} \\ &\leq C\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1} \frac{e^{-\frac{\epsilon}{4}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|^{d-1}}.\end{aligned}$$

En el caso en que $\gamma = 1$, usamos la desigualdad con $\lambda = 0$, de donde se sigue que

$$|\mathcal{K}_1(x,y) - \mathcal{K}_1(x_0,y)| \leq \frac{C}{|y-z|^{d-1}}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1},$$

siempre que $|x-y| > 8|x-x_0|$.

Para los demás casos, integramos como antes para obtener

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}_\gamma(x,y)-\mathcal{K}_\gamma(x_0,y)| &\leq C\int_0^\infty \lambda^{-\gamma}|\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x)-\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x_0)|d\lambda\\ &\leq \frac{C}{|x-y|^{d-1}}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1}\int_0^\infty \lambda^{-\gamma}e^{-\frac{\epsilon}{4}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|}d\lambda\\ &\leq \frac{C}{|y-x|^{d-(2\gamma-1)}}\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1},\end{aligned}$$

siempre que $|x-y|>8|x-x_0|$.

Finalmente, para probar que $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ resulta acotada de $L^1(\mathbb{R}^d)$ en $L^{\frac{d}{d-(2\gamma-1)},\infty}(\mathbb{R}^d)$, procedemos como en el caso de las integrales fraccionarias. Es decir, considerando las estimaciones puntuales obtenidas previamente, para $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ y cualquier $\frac{1}{2}<\gamma\leq 1$, escribimos

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d}|\mathcal{K}_\gamma(x,y)||f(y)|dy\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}}\exp\left(-\frac{\epsilon}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)|f(y)|dy\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)}}dy\\ &= CI_{2\gamma-1}(|f|)(x),\end{aligned}$$

donde $I_{2\gamma-1}$ es la integral fraccionaria clásica de orden $2\gamma-1$. Puesto que esta es de tipo débil $\left(1,\frac{d}{d-(2\gamma-1)}\right)$, $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ también es de este tipo. □

Para $0<\delta_\mu<1$, el operador $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ es Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo $(2\gamma-1,s,\delta)$ para ciertos valores de $1<s<\infty$ y $0<\delta\leq 1$. Las estimaciones para el núcleo en este caso requieren más cuidado, pero siguen los lineamientos de las pruebas realizadas para las transformadas de Riesz adjuntas en la Sección 5.1, donde, a su vez, el rango de s mejora cuando se particulariza al caso potencial.

Proposición 5.50. *Sean $0<\delta_\mu<1$, $\frac{1}{2}<\gamma\leq 1$. Entonces, $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ es un operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo $(2\gamma-1,s,\delta_1)$ para todo $\frac{d}{d-(2\gamma-1)}<s<\frac{2-\delta_\mu}{1-\delta_\mu}$ y $\delta_1\in(0,1)$, con constantes $c=\frac{\epsilon_3}{4D_1}$ y $m=\frac{1}{k_0+1}$, donde D_1 es la constante dada en (1.7).*

Demostración. Comencemos probando que el núcleo $\mathcal{K}_\gamma$ verifica la condición de tamaño integral (4.1). Para ello, consideramos la estimación del Lema 5.4, y utilizamos como en la demostración anterior el control dado en el Lema 1.9. Para todo $\lambda \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}|\nabla_1\Gamma_{\mu+\lambda}(y,x)| &\leq \frac{Ce^{-\frac{\epsilon_3}{2}d_\mu(y,x)-\frac{\epsilon_3}{4}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|^{d-2}}\left(\int_{B\left(y,\frac{|x-y|}{2}\right)}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}+\frac{1}{|x-y|}\right)\\ &\leq \frac{Ce^{-\frac{\epsilon_3}{4}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|^{d-2}}\exp\left(-\frac{\epsilon_3}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)\\ &\quad\times\left[\int_{B\left(y,\frac{|x-y|}{2}\right)}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}+\frac{1}{|x-y|}\right].\end{aligned}$$

Así, por un lado,

$$|\mathcal{K}_1(x,y)| \leq \frac{C\exp\left(-\frac{\epsilon_3}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)}{|x-y|^{d-2}}\left[\int_{B\left(y,\frac{|x-y|}{2}\right)}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}+\frac{1}{|x-y|}\right].$$

Por otro, si $\frac{1}{2}<\gamma<1$, integrando resulta una cota análoga:

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}_\gamma(x,y)| &\leq \frac{C\exp\left(-\frac{\epsilon_3}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)}{|x-y|^{d-2}}\left[\int_{B\left(y,\frac{|x-y|}{2}\right)}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}+\frac{1}{|x-y|}\right]\\ &\quad\times\int_0^\infty \lambda^{-\gamma}e^{-\frac{\epsilon_3}{4}\sqrt{\omega_d}\sqrt{\lambda}|x-y|}d\lambda\\ &\leq \frac{C\exp\left(-\frac{\epsilon_3}{2D_1}\left(1+\frac{|y-x|}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)-1}}\left[\int_{B\left(y,\frac{|x-y|}{2}\right)}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}+\frac{1}{|x-y|}\right].\end{aligned}\tag{5.79}$$

Así, para cada $\frac{1}{2}<\gamma\leq 1$ y $|x-x_0|<R/2$ con $R>0$, procediendo como en la demostración de la Proposición 5.5 (ver pág. 97) se sigue que

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|\leq 2R}|\mathcal{K}_\gamma(x,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq \frac{C}{R^{d-(2\gamma-1)}}\exp\left(-\frac{\epsilon_3}{4D_1}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right),$$

para todo $1<s<\frac{2-\delta_\mu}{1-\delta_\mu}$.

Para obtener la condición de suavidad para $\mathcal{K}_\gamma$ basta retomar la desigualdad (5.12) y proceder como en la prueba de condición de suavidad para $\mathcal{R}_\mu^*$ de la Proposición 5.5 (ver pág. 97). Así, para cada $|x-x_0|<r<\rho(x_0)$, y $0<r<R/16$, se puede deducir que

$$|\mathcal{K}_\gamma(x,y)-\mathcal{K}_\gamma(x_0,y)| \leq C\left(\frac{|x-x_0|}{|x-y|}\right)^{\delta_1}\frac{e^{-\epsilon_0\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{(k_0+1)^2}}}}{|x-y|^{d-(2\gamma-1)-1}}\left(\int_{B(y,|y-x|)}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{d-1}}+\frac{1}{|x-y|}\right),$$

para cierta constante positiva ϵ_0.

A partir de ella, se sigue como en la demostración mencionada la condición de suavidad (4.2) con $\nu=2\gamma-1$, para todo $1<s<\frac{2-\delta_\mu}{1-\delta_\mu}$.

Por último, notemos que si $f \in L^{s'}(\mathbb{R}^d)$, mediante la desigualdad de Hölder y la condición de tamaño del núcleo $\mathcal{K}_\gamma$ cuando $0 < \delta_\mu < 1$, se sigue que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla f(x)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j\rho(x)<|y-x|\leq 2^{j+1}\rho(x)} |\mathcal{K}_\gamma(x,y)||f(y)|dy \\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{2^j\rho(x)<|y-x|\leq 2^{j+1}\rho(x)} |\mathcal{K}_\gamma(x,y)|^s dy\right)^{1/s}\left(\int_{B(x,2^{j+1}\rho(x))}|f(y)|^{s'}\right)^{1/s'} \\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C(2^j\rho(x))^{d/s}}{(2^j\rho(x))^{d-(2\gamma-1)}}\exp\left(-\frac{\epsilon_3}{4D_1}\left(1+2^j\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\right)\left(\int_{B(x,2^{j+1}\rho(x))}|f(y)|^{s'}\right)^{1/s'} \\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\epsilon_3}{4D_1}2^{j\frac{1}{k_0+1}}\right)|B(x,2^{j+1}\rho(x))|^{\frac{2\gamma-1}{d}}\left(\fint_{B(x,2^{j+1}\rho(x))}|f(y)|^{s'}\right)^{1/s'} \\
&\leq CM_{2\gamma-1,s'}(f)(x),
\end{aligned}$$

donde $M_{2\gamma-1,s'}$ denota la maximal fraccionaria centrada con promedios en norma s', esto es,

$$M_{2\gamma-1,s'}(f)(x) = \sup_{r>0}|B(x,r)|^{\frac{2\gamma-1}{d}}\left(\fint_{B(x,r)}|f|^{s'}\right)^{1/s'}.$$

Usando el tipo débil $\left(1, \frac{d}{d-(2\gamma-1)}\right)$ de la maximal fraccionaria clásica, se deduce que $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ es de tipo débil $\left(s', \frac{ds'}{d-(2\gamma-1)s'}\right)$ puesto que $(2\gamma-1)s' < d$. $\square$

Observar que, en el caso $d\mu(x) = V(x)dx$, mediante una estimación como la dada en la prueba de la Proposición 5.8, es posible obtener un resultado mejor para $\mathcal{L}_V^{-\gamma}\nabla$ cuando $V \in RH_q$ con $\frac{d}{2} < q < d$, teniendo en cuenta el parámetro p_0 que era el extremo óptimo para la acotación de las transformadas de Riesz. Éste cumple automáticamente que $p_0 > \frac{d}{d-(2\gamma-1)}$ para todo $\frac{d}{2} < q < d$ y $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ por lo que tenemos el siguiente resultado en el caso potencial.

Proposición 5.51. *Sea $V \in RH_q$ con $\frac{d}{2} < q < d$, $V \not\equiv 0$, $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ y $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$. Entonces, $\mathcal{L}_V^{-\gamma}\nabla$ es un operador Schrödinger–Calderón–Zygmund exponencial de tipo $(p_0, 2\gamma-1, \delta_1)$, con constantes $c = \frac{\epsilon_3}{4D_1}$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$, donde D_1 es la constante dada en* (1.7).

A partir de la clasificación obtenida, se derivan los siguientes resultados de acotación como consecuencia de los Teoremas 5.49, 5.50, 4.6 y 4.7.

Teorema 5.52. *Sean $\delta_\mu > 1$, $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$. El operador $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ es acotado de $L^{\frac{d}{2\gamma-1}}(w^{\frac{d}{2\gamma-1}})$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-\frac{d}{d-(2\gamma-1)}} \in H_{1,c}^{\rho,m}$ con $c < \frac{\epsilon}{2D_1}\frac{d}{d-(2\gamma-1)}(8C_0)^{-m_1}$. Más aún, $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ para todo $1 < p < \frac{d}{2\gamma-1}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2\gamma-1}{d}$, y todo peso w tal que $w^{-p'} \in H_{1+\frac{p'}{q},c}^{\rho,m^*}$ con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c < \frac{\epsilon}{2D_1}\frac{d}{d-(2\gamma-1)}(2^{3k_0+7}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Teorema 5.53. *Sean $0 < \delta_\mu < 1$, $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ y $m = \frac{1}{k_0+1}$. El operador $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ es acotado de $L^{\frac{d}{2\gamma-1}}(w^{\frac{d}{2\gamma-1}})$ en $\mathrm{BMO}_\rho(w)$ para todo peso w tal que $w^{-\frac{d}{d-(2\gamma-1)}} \in H_{1,c}^{\rho,m}$ con $c < \frac{\epsilon_3}{4D_1}\frac{ds'}{d-(2\gamma-1)s'}(4C_0)^{-m_1}$. Más aún, $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ para todo $1 < p < \frac{d}{2\gamma-1}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2\gamma-1}{d}$, y todo peso w tal que $w^{-p'} \in H^{\rho,m^*}_{1+\frac{p'}{q},c}$ con $m^* = \frac{1}{(k_0+1)^2}$ y $c < \frac{\epsilon_3}{4D_1}\frac{ds'}{d-(2\gamma-1)s'}(2^{2k_0+6}C_0^{k_0+3})^{-m^*}$.*

Por último, dado que $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla(1) = 0$, se tiene inmediatamente la siguiente propiedad de acotación entre espacios de tipo $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$, a partir del Teorema 4.10 y 5.50.

Teorema 5.54. *Sea $0 < \delta_\mu < 1$, $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$, $\delta = \delta_1$, $m = \frac{1}{k_0+1}$. Entonces, para todo $0 \leq \alpha+(2\gamma-1) < \text{mín}\{\delta_1, 1\}$, el operador $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$ es acotado de $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ en $\mathrm{BMO}_\rho^{\alpha+2\gamma-1}(w)$ siempre que $w \in E^{\rho,m}_{s,c_1,c_2} \cap D^{\rho,m}_{\kappa,c_3}$ con $1 \leq \kappa < 1 + \frac{\delta-2\gamma-1-\alpha}{d}$ y $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ tales que $(c_2 + c_3) < c_0\left(1 - \frac{d(\kappa-1)+\alpha+2\gamma-1}{\delta_1}\right)(4C_0)^{-m}$.*

Conclusiones

- En esta tesis se profundizó el estudio de las propiedades de las clases de pesos exponenciales $S^{\rho}_{p,c}$ y $H^{\rho,m}_{p,c}$ introducidas por Bailey en [Bai21]. Las mismas son las adecuadas para capturar el comportamiento exponencial de los núcleos asociados a operadores de tipo Schrödinger generalizado.

- Se completó una carateterización precisa de un nuevo operador maximal que se ajusta al crecimiento exponencial de los pesos adaptados. En dicha caracterización los parámetros de cada clase juegan un rol fundamental, permitiendo establecer las condiciones exactas que relacionan la acotación del operador maximal y los pesos.

- Se introdujeron nuevas familias de operadores integrales singulares cuyos núcleos satisfacen condiciones de tamaño y suavidad con decaimiento exponencial asociado a una función de radio crítico, las cuales denominamos operadores de Schrödinger–Calderón–Zygmund con decaimiento exponencial. Estas familias incluyen a operadores relacionados con el operador $\mathcal{L}_\mu = -\Delta + \mu$, donde μ es una medida de Radón no negativa en $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 3$, que satisface ciertas propiedades de control sobre bolas. Para dichas familias se demostraron resultados de acotación en los espacios $L^p(w)$ y $\mathrm{BMO}^{\alpha}_{\rho}(w)$ con pesos w, extendiendo de manera significativa los resultados clásicos de la teoría de Calderón–Zygmund. Este avance permite tratar tanto operadores asociados a un potencial V (como los estudiados en [BCH13a], [MSTZ14] y [BHQ19]), como otros cuya naturaleza excede el comportamiento polinómico estudiado con anterioridad.

- Dado que los parámetros involucrados en las definiciones de los operadores maximales y de las clases de pesos no permiten aplicar directamente resultados existentes, se formuló un nuevo teorema de extrapolación adaptado al contexto exponencial, que permitió obtener resultados de acotación en espacios $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$, conservando la dependencia precisa en los parámetros característicos de cada familia de pesos. Para el caso límite $p = 1$ se obtuvieron estimaciones de tipo débil.

- Se probaron desigualdades de tipo Coifman, adaptadas al contexto de los pesos exponenciales, en donde interviene el operador maximal que caracteriza a los pesos exponenciales. Ellas proporcionaron una prueba alternativa para las estimaciones en espacios de Lebesgue con pesos.

- En el contexto de los espacios $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$ se demostró un teorema $T1$ adaptado a las familias de operadores con núcleos con decaimiento exponencial. Este resultado proporciona un criterio que reduce el estudio de la acotación de los operadores a condiciones sobre la función $T1$.

- Con respecto a los operadores integrales fraccionarios, se demostró que mediante técnicas de extrapolación y los criterios tipo $T1$ adaptados al contexto fraccionario, es posible garantizar su acotación en espacios de Lebesgue pesados bajo condiciones análogas sobre los pesos y los parámetros involucrados. De esta forma, se unificó el tratamiento de los operadores singulares y fraccionarios bajo un mismo marco teórico.

- Se analizaron una amplia variedad de operadores, entre los que se incluyen la transformada de Riesz de primer orden y su adjunta asociada a $\mathcal{L}_\mu$, el operador maximal asociado al semigrupo del calor $e^{-t\mathcal{L}_\mu}$, los operadores de Poisson generalizados $\mathcal{P}_t^\sigma$, la función g de Littlewood–Paley asociada al semigrupo del calor y al semigrupo de Poisson, y operadores de la forma $T_\gamma = \mathcal{L}_V^{-\gamma} V^\gamma$ con $0 < \gamma < d/2$ asociados a un potencial V. En el caso de operadores de tipo fraccionarios se estudiaron los potenciales de Riesz y operadores de la forma $\mathcal{L}_\mu^{-\gamma}\nabla$, donde $1/2 < \gamma \leq 1$. En todos estos casos se verificó que encajan naturalmente dentro de las familias de operadores de Schrödinger–Calderón–Zygmund con decaimiento exponencial. Se comprobaron las condiciones necesarias para su acotación en $L^p(w)$ y $\mathrm{BMO}_\rho^\alpha(w)$, mediante resultados obtenidos previamente.

Bibliografía

[Agm82] Shmuel Agmon. *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators*, volume 29 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.

[Bai18] Julian Bailey. A Hardy-Littlewood maximal operator adapted to the harmonic oscillator. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 59(2):339–373, 2018.

[Bai21] Julian Bailey. Weights of exponential growth and decay for Schrödinger-type operators. *J. Funct. Anal.*, 281(1):Paper No. 108996, 93, 2021.

[BCFRM13] Jorge J. Betancor, Raquel Crescimbeni, Juan C. Fariña, and Lourdes Rodríguez-Mesa. Multipliers and imaginary powers of the Schrödinger operators characterizing UMD Banach spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 38(1):209–227, 2013.

[BCH13a] Bruno Bongioanni, Adrián Cabral, and Eleonor Harboure. Extrapolation for classes of weights related to a family of operators and applications. *Potential Anal.*, 38(4):1207–1232, 2013.

[BCH13b] Bruno Bongioanni, Adrián Cabral, and Eleonor Harboure. Lerner's inequality associated to a critical radius function and applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 407(1):35–55, 2013.

[BCH16] Bruno Bongioanni, Adrián Cabral, and Eleonor Harboure. Schrödinger type singular integrals: weighted estimates for $p = 1$. *Math. Nachr.*, 289(11-12):1341–1369, 2016.

[BCH19] Bruno Bongioanni, Adrián Cabral, and Eleonor Harboure. Regularity of maximal functions associated to a critical radius function. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 60(2):539–566, 2019.

[BHQ19] Bruno Bongioanni, Eleonor Harboure, and Pablo Quijano. Weighted inequalities for Schrödinger type singular integrals. *J. Fourier Anal. Appl.*, 25(3):595–632, 2019.

[BHS08] Bruno Bongioanni, Eleonor Harboure, and Oscar Salinas. Weighted inequalities for negative powers of Schrödinger operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 348(1):12–27, 2008.

[BHS09] Bruno Bongioanni, Eleonor Harboure, and Oscar Salinas. Riesz transforms related to Schrödinger operators acting on BMO type spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 357(1):115–131, 2009.

[BHS11] Bruno Bongioanni, Eleonor Harboure, and Oscar Salinas. Classes of weights related to Schrödinger operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 373(2):563–579, 2011.

[CF74] Ronald R. Coifman and Charles Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Math.*, 51:241–250, 1974.

[Coi72] Ronald R. Coifman. Distribution function inequalities for singular integrals. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 69:2838–2839, 1972.

[CUMP11] David V. Cruz-Uribe, José Maria Martell, and Carlos Pérez. *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, volume 215 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[dG81] Miguel de Guzmán. *Real variable methods in Fourier analysis*. Notas de Matemática. [Mathematical Notes]. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981. North-Holland Mathematics Studies, 46.

[DGM+05] Jacek Dziubański, Gustavo Garrigós, Teresa Martínez, José Luis Torrea, and Jacek Zienkiewicz. BMO spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality. *Math. Z.*, 249(2):329–356, 2005.

[DLT26] Estefanía Dalmasso, Gabriela R. Lezama, and Marisa Toschi. Weighted estimates for Schrödinger-Calderón-Zygmund operators with exponential decay. *Banach J. Math. Anal.*, 20(1):Paper No. 1, 30, 2026.

[Duo01] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[DZ99] Jacek Dziubański and Jacek Zienkiewicz. Hardy space H^1 associated to Schrödinger operator with potential satisfying reverse Hölder inequality. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 15(2):279–296, 1999.

[Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[GLP08] Zihua Guo, Pengtao Li, and Lizhong Peng. L^p boundedness of commutators of Riesz transforms associated to Schrödinger operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 341(1):421–432, 2008.

[Gra04] Loukas Grafakos. *Classical and modern Fourier analysis*. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[Gra14] Loukas Grafakos. *Modern Fourier analysis*, volume 250 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2014.

[Hel88] Bernard Helffer. *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, volume 1336 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[HMS88] Eleonor Harboure, Roberto A. Macías, and Carlos Segovia. Extrapolation results for classes of weights. *Amer. J. Math.*, 110(3):383–397, 1988.

[HMW73] Richard Hunt, Benjamin Muckenhoupt, and Richard Wheeden. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 176:227–251, 1973.

[Kat66] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.

[Kur00] Kazuhiro Kurata. An estimate on the heat kernel of magnetic Schrödinger operators and uniformly elliptic operators with non-negative potentials. *J. London Math. Soc. (2)*, 62(3):885–903, 2000.

[Ler04] Andrei K. Lerner. Weighted norm inequalities for the local sharp maximal function. *J. Fourier Anal. Appl.*, 10(5):465–474, 2004.

[MSTZ14] Tao Ma, Pablo Raúl Stinga, José L. Torrea, and Chao Zhang. Regularity estimates in Hölder spaces for Schrödinger operators via a $T1$ theorem. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 193(2):561–589, 2014.

[Muc72] Benjamin Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:207–226, 1972.

[Qui19] Pablo Quijano. *Operadores de Schrödinger: propiedades de tamaño y suavidad.* PhD thesis, Universidad Nacional del Litoral, 2019.

[She95] Zhong Wei Shen. L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 45(2):513–546, 1995.

[She99] Zhongwei Shen. On fundamental solutions of generalized Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 167(2):521–564, 1999.

[ST05] Krzysztof Stempak and José Luis Torrea. BMO results for operators associated to Hermite expansions. *Illinois J. Math.*, 49(4):1111–1131, 2005.

[Ste70] Elias M. Stein. *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory.* Annals of Mathematics Studies, No. 63. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1970.

[Tan15] Lin Tang. Weighted norm inequalities for Schrödinger type operators. *Forum Math.*, 27(4):2491–2532, 2015.

[WY16] Liangchuan Wu and Lixin Yan. Heat kernels, upper bounds and Hardy spaces associated to the generalized Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 270(10):3709–3749, 2016.

[Zho93] Jiaping Zhong. *Harmonic analysis for some Schrödinger type operators.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1993. Thesis (Ph.D.)–Princeton University.