



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

Doctora en Matemática

EN EL CAMPO DE: **Análisis Numérico**

TÍTULO DE LA TESIS:

Algoritmo convergente para flujo por curvatura media de superficies con borde fijo

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Departamento de Matemática - Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Litoral



AUTORA:

Bárbara Solange Ivaniszyn

Director: Dr. Miguel Sebastián Pauletti **Co-director:** Dr. Pedro Morin
CONICET - UNL | FIQ - UNL CONICET - UNL | FIQ - UNL

Jurados:

Dr. Gabriel Acosta
FCEyN (UBA) - IMAS (UBA - CONICET)

Dra. Gabriela Armentano
FCEyN (UBA) - IMAS (UBA - CONICET)

Prof. Dr. Balász Kovács
Universidad de Paderborn

Santa Fe - Argentina
Año de presentación: 2025

A David, por un amor que trasciende el tiempo y por el hogar que encuentro en vos.

*A mi madre Estela, a Juan, a mis hermanas Débora y Estefania, y a la pequeña Greta,
por acompañarme siempre.*

A la memoria de mi padre, José Luis.

Agradecimientos

Quisiera comenzar con estas palabras de agradecimiento que, aunque resulten insuficientes y finitas, espero logren ser una aproximación suficientemente buena al inmenso apoyo que recibí durante la realización de este trabajo.

En primer lugar, a mis directores, Pedro y Seba. Gracias por compartir conmigo estos años y por enseñarme tantas facetas del quehacer matemático que no se encuentran en los libros. Gracias por la guía en cada paso, por incentivar siempre mi curiosidad y por compartir tan generosamente su conocimiento conmigo.

A Seba, le agradezco especialmente haberme presentado este problema; un desafío apasionante que despertó mi interés desde el primer día y que marcó el rumbo de mi investigación. A Pedro, mi más profundo agradecimiento por formarme desde el inicio de mi carrera, pero sobre todo por su apoyo incondicional en el tramo final de esta tesis. Gracias por esas largas horas imaginando caminos, intentando pruebas y haciendo cuentas y más cuentas; sin esa entrega y dedicación constante en el último trecho, este trabajo no habría sido posible.

A David, gracias por tantos años de amor y amistad. Gracias por ser mi compañero hace tanto tiempo, cuando proyectábamos juntos encontrar un camino para aprender más matemática. Gracias por tu paciencia y por construir, día a día, un hogar conmigo. Sin vos, nada de esto tendría el mismo sentido.

A mi mamá, que fue la primera en creer en mí, que siempre me alentó a perseguir mis sueños y me enseñó a levantarme y seguir después de una caída. A Juan que la acompañó y cuidó en momentos difíciles para que yo pudiera seguir adelante con esta tesis. A mis hermanas que siempre me acompañaron y a mi papá que desde el cielo habrá hecho algún que otro empujón para que siga adelante. Finalmente, a Greta, que hizo muy felices mis días desde que me dió el título de tía.

Gracias al CONICET por el apoyo económico que posibilitó la realización de esta tesis. A la Facultad de Ingeniería Química, por brindarme un lugar de trabajo en el Departamento de Matemática, así como un lugar donde desempeñarme como docente. Soy muy feliz de seguir creciendo y aprendiendo en esta casa, tratando de devolver un poco de todo lo que el Estado y la Universidad Pública le han dado a mi vida. Sin el Estado Presente no hubiese logrado ser la primera universitaria en mi familia. Un especial agradecimiento a la Univerdad Nacional de Misiones, tuve excelentes docentes que me motivaron a explorar más allá. Y donde conocí a Marga, gracias por mostrarme el mundo de la investigación e incluirme en tu equipo en un momento clave en mi vida.

A mis primeras amigas matemáticas en Santa Fe, Majo y Ceci. Gracias a toda la ofi del Babini: Majo, Ita, Nano y Mariel, compartir con ustedes mis días fue (y es) algo maravilloso.

Soy feliz de tenerles en mi vida. Gracias al grupo de numérico y en particular, gracias Edu por tantos códigos con los que ayudaste y que posibilitaron muchos experimentos de esta tesis! No podría nombrar a todas las personas que admiro y con las cuales trabajé en la FIQ, pero gracias por integrarme a sus equipos docentes, por las charlas, por los intercambios y la compañía recibida.

Gracias Sergio, Jesi y Maxi, por la compañía constante y el cariño recibido. Alegaron mis días mucho más de lo que imaginan.

Gracias al jurado de esta tesis, Gabriela, Gabriel y Balázs. Por tomarse el tiempo, por sus devoluciones y comentarios que sin dudas mejoraron este trabajo. En especial quisiera agradecer a Balázs, por su generosidad y humanidad, por la oportunidad de compartir con él este problema hace un tiempo, por el apoyo para intercambiar ideas, y para hacer matemática, sobre todo, cuando yo creía que todo estaba perdido.

Resumen

El objetivo principal de esta tesis es proponer un método numérico para el problema de flujo por curvatura media en superficies con borde fijo y estudiar su convergencia. Esta es una ecuación geométrica donde la velocidad normal de una superficie está dada por

$$V = -\kappa, \tag{1}$$

donde κ es la curvatura media de la superficie. Además, el borde de la superficie inicial permanece constante durante toda la evolución.

Las ecuaciones diferenciales geométricas han atraído la atención en varios campos de aplicación. Aparecen naturalmente cuando se trabaja en la optimización de formas. En general, son problemas no lineales que presentan un interesante desafío tanto en el modelado como en el análisis teórico y numérico.

En esta tesis, desde el enfoque paramétrico, se presenta un método numérico evolutivo para el flujo de curvatura media en superficies con borde. Se considera el problema con condición de borde Dirichlet, para el cual se presentan estimaciones de error de orden óptimo para la semidiscretización espacial, la implementación numérica del esquema totalmente discreto y experimentos numéricos que reflejan el funcionamiento del método.

En primer lugar, hemos propuesto una formulación débil para el problema de flujo por curvatura media adaptando el método propuesto en [Kovács et al. \(2019\)](#) para superficies sin borde. Para ello hemos obtenido condiciones de borde adecuadas para el vector normal y su derivada en la dirección conormal.

En cuanto a la semi-discretización espacial hemos desarrollado las herramientas para presentar un esquema semi-discreto convergente en el marco del análisis isogeométrico, utilizando espacios splines evolutivos definidos sobre superficies. Hemos obtenido estimaciones para los errores de perturbación geométricos, sin requerir al uso de la función distancia orientada, que nos permiten obtener estimaciones de consistencia óptimas para el esquema semi-discreto. Para ello también hemos definido operadores de tipo Ritz lineales y no lineales con el objetivo de lograr un tratamiento adecuado de las condiciones de borde para la curvatura media y el vector normal. Además, hemos obtenido resultados respecto de sus propiedades de aproximación en normas H^1 así como también de las derivadas materiales de dichos operadores.

Con todo lo anterior, usando espacios splines producto tensor de grado $p \geq 2$, hemos obtenido estimaciones de orden óptimo tanto en la consistencia del esquema semi-discreto como en la estabilidad del mismo, donde analizamos primero errores entre las soluciones continuas y ciertas aproximaciones teóricas auxiliares y luego los errores entre estas últimas y las soluciones numéricas. De esta manera hemos obtenido estimaciones de orden óptimo en

norma H^1 para los errores en todas las variables bajo condiciones suficientes de regularidad de la solución del problema continuo y condiciones adecuadas sobre los errores iniciales.

Presentamos también el esquema totalmente discreto utilizando Fórmulas de Diferenciación hacia atrás (BDF, por sus siglas en inglés) de orden $2 \leq q \leq 5$, y discutimos los detalles de su implementación, así como los experimentos numéricos propuestos.

Además, realizamos un estudio sobre la posible aplicación de técnicas existentes para el análisis teórico de la estabilidad del método, identificando las limitaciones impuestas por la condición de borde existente. Asimismo, analizamos las particularidades y los problemas abiertos en el estudio de la consistencia de la discretización total y, en consecuencia, de la convergencia del esquema totalmente discreto.

Por último, también presentamos avances en la implementación de las técnicas desarrolladas en esta tesis a otros problemas, como Willmore con borde Navier o Flujo por Curvatura Media con borde Neumann. Analizando las diferencias, limitaciones y desafíos de extender las ideas de esta tesis a esos nuevos problemas.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales geométricas (un caso particular de los problemas de frontera libre) han atraído la atención en varios campos de aplicación tales como las ciencias de materiales, el procesamiento de imágenes, el diseño asistido por computadora y la biología. Estas aparecen naturalmente cuando se trabaja en la optimización de formas. En general, son problemas no lineales que presentan un interesante desafío tanto en el modelado como en el análisis teórico y numérico. Una ecuación de evolución geométrica es una ecuación de la forma

$$V = f(t, \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}, \nabla_{\Gamma}\boldsymbol{\nu}), \quad (2)$$

que, dada una superficie inicial, prescribe su velocidad normal de evolución V en términos de cantidades geométricas tales como su normal $\boldsymbol{\nu}$, curvaturas $\nabla_{\Gamma}\boldsymbol{\nu}$, etc. Estas ecuaciones constituyen problemas de frontera libre, donde el dominio es una de las incógnitas principales y han recibido, en los últimos años, un interés creciente en diversas áreas como ciencias de materiales [Almgren et al. \(1993\)](#); [Almgren and Taylor \(1995\)](#); [McFadden et al. \(1993\)](#); [Taylor \(1978, 1992\)](#), procesamiento de imágenes [Droske and Bertozzi \(2010\)](#); [Leventon et al. \(2000\)](#); [Kimmel and Bruckstein \(2001\)](#), diseño asistido por computadora [Clarenz et al. \(2004\)](#); [Faugeras and Keriven \(1998\)](#), y biología [Helfrich \(1973\)](#); [Jenkins \(1977\)](#); [Seifert et al. \(1991\)](#); [Seifert \(1997\)](#); [Laradji and Mouritsen \(2000\)](#); [Cicuta et al. \(2007\)](#); [Melenkevitz and Javadpour \(1997\)](#); [Veatch and Keller \(2003\)](#). Debido a la dificultad de su tratamiento teórico, los métodos numéricos que aproximen correctamente ecuaciones geométricas son un recurso invaluable, tanto para guiar la teoría como para reemplazar costosos experimentos de laboratorio.

Estas ecuaciones describen cómo una forma geométrica cambia con el tiempo de acuerdo a ciertas cantidades geométricas. Entre ellas, el **Flujo por Curvatura Media** (en lo sucesivo, **FCM**) constituye un modelo fundamental: una superficie evoluciona moviéndose en la dirección de su vector normal con una velocidad normal igual a su curvatura media. Este proceso tiende a suavizar la superficie y disminuir su área. Este flujo guarda una analogía estrecha con la ecuación del calor, ya que describe un proceso de difusión geométrica en el que la superficie evoluciona suavizando su curvatura en el tiempo.

El interés por este flujo tiene una larga historia, con aplicaciones que remontan a los años 1920, en el estudio de interfaces en ciencias de los materiales. En el contexto del análisis geométrico y, en el caso de superficies con borde, los primeros estudios se remontan a Stone [Stone \(1996\)](#). Quien estableció condiciones para la existencia de soluciones suaves en intervalos de tiempo finito en el caso de superficies paramétricas que evolucionan siguiendo FCM con condiciones de borde Dirichlet independiente del tiempo.

Desde el punto de vista del análisis numérico, el FCM presenta desafíos significativos debido a su no linealidad, así como también debido a que implica la deformación progresiva

de la geometría. Se han propuesto distintos métodos numéricos para aproximar la solución de este problema en el caso de superficies paramétricas. El precursor en estos métodos numéricos fue Dziuk, quien en 1990 presenta la primera propuesta considerando una formulación débil basada en la siguiente ecuación:

$$\partial^\bullet \boldsymbol{x} = \Delta_\Gamma \boldsymbol{x}, \quad \text{on } \Gamma(t),$$

siendo \boldsymbol{x} la función identidad en $\Gamma(t)$. Propone por primera vez los Elementos Finitos Superficiales Evolutivos (ESFEM por sus siglas en inglés) Dziuk (1990) junto con un método numérico para superficies paramétricas, con o sin borde, donde el movimiento de los nodos de la malla de elementos finitos determinan la superficie evolutiva aproximada. Más adelante, Barrett, Garcke y Nürnberg proponen otro método Barrett et al. (2007, 2008), utilizando también elementos finitos; que también es válido para el caso de superficies con borde fijo, tal como se explica en Barrett et al. (2020). Pero su esquema considera una formulación débil diferente a la de Dziuk, pues se basa en las siguientes ecuaciones que relacionan la velocidad \boldsymbol{v} , el vector normal $\boldsymbol{\nu}$, la curvatura media κ y la función identidad

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = \kappa, \quad \kappa \boldsymbol{\nu} = \Delta_\Gamma \boldsymbol{x}.$$

En 2016, se presenta la primera adaptación del esquema semidiscreto propuesto por Dziuk en el contexto del Análisis Isogeométrico (IgA) Bartezzaghi et al. (2016) para el caso de FCM para superficies con y sin borde, donde los autores reportan buenos resultados numéricos aunque sin estimaciones del error.

En cuanto al análisis y obtención de estimaciones del error, se ha avanzado bastante en los últimos años en el caso de superficies paramétricas cerradas, esto es, compactas y sin borde. La primera prueba de convergencia fue presentada en 2019 por Kovács, Li and Lubich en Kovács et al. (2019). En dicho esquema incluyen las ecuaciones de evolución de Huisken Huisken (1984), para el vector normal y la curvatura media, al conjunto de ecuaciones a partir de las cuales constituyen su formulación débil

$$\boldsymbol{v} = \kappa \boldsymbol{\nu}, \quad \partial^\bullet \kappa = \Delta_\Gamma \kappa + |\nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}|^2 \kappa, \quad \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} = \Delta_\Gamma \boldsymbol{\nu} + |\nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}|^2 \boldsymbol{\nu}.$$

Con esta modificación, si bien aumentan el número de ecuaciones en el esquema, logran obtener por primera vez estimaciones del error para el caso de superficies cerradas. Hasta la fecha, es el único esquema numérico para el cual se han obtenido estimaciones para FCM en superficies cerradas usando ESFEM de grado polinomial $p \geq 2$.

Cabe destacar que en 2021, Buyang Li Li (2021) presenta la primera prueba de convergencia para el esquema semidiscreto de Dziuk mediante una formulación matriz-vector y algunas técnicas previamente utilizadas en Kovács et al. (2017, 2019) bajo la restricción de elementos finitos de grado polinomial $p \geq 6$. Posteriormente, en 2023, el mismo autor y Genming Bai Bai and Li (2024) proponen un nuevo enfoque para llevar a cabo el análisis no solo del método propuesto por Dziuk, sino también de otros métodos

como el propuesto en Barrett et al. (2007, 2008, 2020). En este nuevo enfoque realizan el análisis del error para el esquema completamente discreto considerando la distancia proyectada entre la superficie numérica calculada y la superficie exacta en lugar de analizar el error entre las trayectorias de las partículas, como se hace en Li (2021), o en Kovács et al. (2019). Con este nuevo enfoque logran obtener mejoras en el orden de convergencia relajando la restricción de grado polinomial a $p \geq 3$.

Los estudios previos sobre análisis y estimaciones del error se han centrado en problemas geométricos que involucran superficies cerradas y mediante el uso de elementos finitos superficiales Dziuk (1988). Hasta la fecha, y según nuestro conocimiento, no se han obtenido estimaciones del error para los esquemas numéricos propuestos en superficies con borde, ni se ha explorado la posibilidad de formular dichos esquemas dentro del marco del análisis isogeométrico. Esta brecha en la literatura motivó los siguientes interrogantes:

- *Teniendo el esquema convergente propuesto en Kovács et al. (2019) ¿Es posible adaptarlo para el caso de superficies con borde y que se preserven los órdenes de aproximación?*
- *¿Es posible utilizar otros espacios discretos, como los espacios splines y seguir teniendo buenos órdenes de convergencia?*

Siguiendo las ideas de Kovács et al. (2019), en esta tesis nos proponemos presentar un método numérico convergente para el flujo por curvatura media en el caso de superficies con borde. En particular, estudiamos el caso en que el borde permanece fijo durante la evolución, esto es, condición de borde Dirichlet. Además, analizamos la viabilidad de extender dicho esquema al contexto del análisis isogeométrico y, de esta manera obtener no solo una extensión del esquema original al caso de superficies con borde, sino también una extensión a otros espacios discretos.

La organización de esta tesis es la siguiente:

En el Capítulo 1 presentamos una breve introducción a los conceptos de superficies evolutivas y operadores diferenciales tangenciales, así como a los fundamentos del análisis isogeométrico clásico necesarios para el desarrollo de este trabajo.

En el Capítulo 2 proponemos una formulación débil continua para el problema de flujo por curvatura media que constituye la base de nuestro método. Además, analizamos las condiciones de borde adecuadas para la posición, la velocidad y el vector curvatura media, y deducimos las condiciones para el vector normal y su derivada en la dirección conormal.

En el Capítulo 3 introducimos las distintas superficies discretas utilizadas en esta tesis y los espacios splines evolutivos definidos sobre ellas. Asimismo, estudiamos los errores geométricos de consistencia, mediante los cuales se analizan y estiman los errores cometidos al aproximar la superficie continua y sus soluciones.

En el Capítulo 4 presentamos estimaciones de aproximación en espacios splines evoluti-

vos. Definimos operadores de Ritz lineales y no lineales para tratar adecuadamente las nuevas condiciones de borde y obtener las estimaciones del orden necesario para garantizar la consistencia del método.

En el Capítulo 5 presentamos el esquema semidiscreto utilizando espacios spline producto tensor de grado polinomial $p \geq 2$ y estudiamos la consistencia y la estabilidad del mismo. En ambos casos obtenemos órdenes óptimos que nos permiten obtener estimaciones óptimas en norma H^k para los errores en la posición, la velocidad, la curvatura media y el vector normal bajo condiciones suficientes de regularidad en la solución.

El Capítulo 6 se divide en dos partes. En la primera, presentamos la discretización temporal utilizando la fórmula de diferenciación hacia atrás (BDF) de orden $2 \leq q \leq 5$, junto con experimentos numéricos que reflejan el funcionamiento del método propuesto y aspectos relevantes en cuanto a su implementación. En la segunda parte, nos adentramos en el estudio teórico del método. Presentamos las herramientas necesarias para estudiar su estabilidad y consistencia, así como resultados parciales en ese sentido. Además, analizamos los desafíos y problemas abiertos para llegar a la convergencia del método totalmente discreto.

Finalmente, en el Capítulo 7 presentamos avances y problemas abiertos en la posible aplicación de las técnicas desarrolladas en esta tesis a otros problemas geométricos, como el problema de Willmore con condición de borde Navier y el problema de flujo por curvatura media con condición de borde Neumann.

Principales desafíos. Los principales desafíos que nos encontramos al desarrollar este trabajo de tesis fueron los siguientes:

- **Condición de borde para el vector normal:** El hecho de incluir la ecuación de evolución del vector normal en la formulación débil hace necesario determinar una condición de borde adecuada; más precisamente, establecer una relación sobre el comportamiento, en el borde de la superficie, de la derivada del vector normal en la dirección conormal.
- **Errores geométricos:** Al no usar la función distancia orientada para definir un *lift* que nos permita comparar funciones en la superficie $\Gamma(t)$ y en una superficie discreta $\Gamma_h(t)$, no pudimos recurrir a los resultados usuales de la literatura [Dziuk and Elliott \(2007\)](#); [Kovács \(2017\)](#). Esto nos llevó a extender resultados que fueron utilizados para el problema estacionario de Laplace-Beltrami en [Bonito et al. \(2020\)](#).
- **Proyección de Ritz para el vector normal:** Uno de los principales desafíos en la prueba de consistencia fue la definición de una proyección de Ritz adecuada tanto para las condiciones de borde del vector normal como para la estructura de la formulación débil semidiscreta.

- **Existencia y propiedades de la proyección:** Debido al espacio discreto utilizado y al hecho de no usar una proyección lineal, las técnicas usuales no son suficientes para realizar un análisis completo y obtener el orden óptimo en norma H^k para la proyección de tipo Ritz no lineal propuesta.
- **Análisis de estabilidad espacial:** Debido a la condición de borde para el vector normal, la dificultad para obtener la estabilidad fue la aparición de un término crítico en la estimación de energía. La decisión de cómo tratar la norma L^2 en el borde para controlar este error fue un punto importante en esta tesis.

Principales contribuciones de este trabajo.

- En la Sección 2.1, en el Lema 7, presentamos una condición de borde adecuada para la derivada en la dirección conormal del vector normal.
- En la Sección 2.2, presentamos una formulación débil para el problema con borde Dirichlet.
- En la Sección 3.4, presentamos resultados correspondientes a los errores geométricos sin recurrir a la función distancia orientada para obtener las estimaciones para un orden de convergencia óptimo.
- En la Sección 4.2, definimos una proyección de tipo Ritz lineal con valores de traza cero. En la Proposición 1 establecemos sus propiedades de aproximación, mientras que en la Proposición 2 presentamos las estimaciones correspondientes para su derivada material.
- En la Sección 4.3, introducimos una proyección de tipo Ritz no lineal cuya traza satisface una condición de ortogonalidad con respecto a un vector dado. Sus propiedades óptimas de aproximación en norma H^k se establecen en las Proposiciones 3 y 5.
- En la Sección 5.1, presentamos la discretización espacial propuesta. En la Sección 5.2, en la Proposición 6, obtenemos estimaciones óptimas para los errores de consistencia bajo condiciones suficientes de regularidad de la solución continua.
- En la Sección 5.3, presentamos las ecuaciones del error utilizadas, así como también un conjunto de resultados auxiliares clave para comparar y estimar errores entre superficies discretas y obtener las estimaciones de estabilidad.
- En la Sección 5.5, en los Lemas 31 al 33, obtenemos las estimaciones de energía necesarias para obtener la estabilidad del esquema semidiscreto en la Proposición 7.
- En la Sección 5.6, presentamos el teorema principal de esta tesis, donde se establece la convergencia para la semidiscretización espacial propuesta.

- En el Capítulo 7, presentamos los avances obtenidos en cuanto a la comprensión de las ecuaciones de borde para otros flujos geométricos como el flujo de Willmore (Sección 7.1) y a otras condiciones de borde para el FCM, como condiciones de tipo Neumann (Sección 7.2). Obtenemos propuestas de formulación débil que serán objeto de estudio futuro en cuanto al desarrollo de métodos numéricos adecuados.

Índice general

Resumen	iv
Introducción	vi
1 Preliminares	1
1.1 Superficies en \mathbb{R}^d	1
1.1.1 Comentario sobre otros posibles enfoques geométricos	7
1.2 Espacios de funciones sobre superficies.	8
1.3 Superficies evolutivas	12
1.4 Análisis Isogeométrico basado en B-splines	14
1.4.1 Espacios Splines Univariados	14
1.4.2 Espacios Splines producto tensor	17
1.4.3 Propiedades de aproximación	17
2 Flujo por Curvatura Media	22
2.1 Flujo por Curvatura Media en superficies con condición de borde Dirichlet	22
2.1.1 Ecuaciones de evolución y condiciones de borde para las cantidades geométricas	23
2.2 Formulación débil	24
3 Aproximación de Superficies	27
3.1 Superficie spline evolutiva	27
3.2 Superficie discreta auxiliar Γ^*	29
3.3 Lifts entre diferentes superficies	29
3.4 Errores geométricos.	30
4 Estimaciones de Aproximación	37
4.1 Quasi-interpolante definido en la superficie	37
4.2 Proyección de tipo Ritz con traza cero.	38
4.3 Proyección no lineal ortogonal al vector tangente.	43

5	Semi-discretización espacial	57
5.1	Semi-discretización espacial	57
5.2	Consistencia	60
5.3	Ecuaciones del error	64
5.4	Relación entre superficies discretas	66
5.5	Estabilidad	70
5.6	Convergencia	80
6	Esquema totalmente discreto	84
6.1	Discretización completa y experimentos numéricos	84
6.1.1	Formulación matricial-vectorial del esquema	84
6.1.2	Discretización temporal: método BDF linealmente implícito	87
6.1.3	Experimentos numéricos	88
6.2	Parte II: análisis teórico de la discretización completa	95
6.2.1	Resultados previos de Dahlquist (1978) y Nevanlinna & Odeh (1981)	96
6.2.2	Defectos y ecuaciones de error	97
6.2.3	Discusión sobre la estabilidad del esquema totalmente discreto	99
7	Aplicaciones a otros problemas	117
7.1	Willmore con condiciones de borde Navier	117
7.1.1	Ecuaciones de evolución de las cantidades geométricas y condiciones de borde	118
7.1.2	Formulación débil propuesta	119
7.1.3	Principales desafíos y problemas abiertos	120
7.2	Flujo por Curvatura Media con borde Neumann	121
7.2.1	Ecuaciones de evolución de las magnitudes geométricas y sus condiciones de borde	121
7.2.2	Formulación débil propuesta	123
7.2.3	Principales desafíos y problemas abiertos	123
	Conclusiones generales	124
	Bibliografía	127

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentamos los conceptos básicos necesarios para el desarrollo y comprensión de esta tesis. Aunque no incluimos las demostraciones de estos resultados, proporcionamos referencias bibliográficas donde estas pueden encontrarse. Las Secciones 1.1 a 1.3 tratan sobre nociones básicas acerca de superficies, incluyendo la definición de superficies con borde y de cantidades geométricas relevantes; asimismo, presentamos la definición de superficies evolutivas y operadores diferenciales definidos sobre superficies. Finalmente, en la Sección 1.4 introducimos definiciones básicas y resultados clásicos sobre espacios spline producto tensor y sus propiedades de aproximación.

La notación empleada a lo largo de este trabajo es, en su mayor parte, estándar. No obstante, cabe precisar que utilizaremos tipografía en negrita para distinguir tanto las funciones y variables con valores vectoriales como sus correspondientes espacios funcionales. Esta convención permite simplificar la exposición, manteniendo una clara distinción respecto a sus contrapartes escalares sin necesidad de recurrir a subíndices o exponentes adicionales.

1.1 Superficies en \mathbb{R}^d

Empezamos primero presentando la noción de superficie con la trabajamos en esta tesis, para luego avanzar con conceptos geométricos necesarios, así como también con nociones de diferenciabilidad en superficies. Seguiremos principalmente la exposición de (Barrett et al., 2020, Secciones 2.3 y 2.4), adoptando un punto de vista extrínseco que permite definir de manera directa espacios tangentes, campos normales, operadores diferenciales tangenciales y curvaturas.

Consideramos $d \geq 2$ y trabajamos con superficies de regularidad al menos C^1 , salvo que se indique lo contrario. Este marco resulta particularmente adecuado para el estudio de ecuaciones diferenciales parciales sobre superficies y para el análisis de problemas geométricos con condiciones de borde.

Definición 1. Sean $k \geq 1$ y $1 \leq n \leq d$. Un subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ es una superficie C^k n -dimensional con borde, si para todo punto $p \in \Gamma$ se satisface una de las siguientes condiciones:

- (I) Existe un entorno abierto $V \subset \mathbb{R}^d$ de ese punto y una función $\mathbf{C}^k(U)$ $\mathbf{X} : U \rightarrow V \cap \Gamma$ biyectiva, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, tal que el Jacobiano $\nabla \mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$ tenga rango completo por columnas.
- (II) Existen conjuntos abiertos y conexos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^d$, con $\mathbf{0} \in U$, $\mathbf{p} \in V$, y una aplicación $\mathbf{X} \in \mathbf{C}^k(U)$ inyectiva tal que $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{p}$, $\text{rango } \nabla \mathbf{X} = n$ en U , y

$$\mathbf{X}(U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0})) = V \cap \Gamma.$$

Las aplicaciones $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ en I y II se denominan parametrizaciones locales de Γ . Cuando $n = d - 1$, llamamos a Γ una hipersuperficie con borde.

Observación 1. (I) Cuando $\partial\Gamma$ es vacío, se dice que la superficie no tiene borde. Y cuando Γ es compacta y sin borde se dice que Γ es cerrada. Además, de la definición anterior se deduce que siempre que consideremos superficies acotadas, éstas serán compactas (Barrett et al., 2020, Observación 18).

- (II) Si Γ es un hipersuperficie C^k con borde, significa que su borde es una superficie $(d - 2)$ dimensional sin borde. Es importante notar además que consideramos que el borde pertenece a Γ , i.e. $\partial\Gamma \subset \Gamma$.

A lo largo del trabajo, permitimos parametrizaciones definidas sobre dominios rectangulares del plano. La eventual presencia de esquinas en el dominio paramétrico no implica la existencia de singularidades geométricas en la superficie, ya que la estructura diferenciable de Γ está determinada por el comportamiento local de la aplicación \mathbf{X} y por el rango completo de su diferencial. En particular, aunque el dominio paramétrico posea vértices, la imagen $\mathbf{X}(U)$ constituye una superficie C^k con borde siempre que en cada punto de la imagen exista un entorno difeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n o a un semiespacio $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Vale la pena mencionar, que si bien ciertos resultados y definiciones se enuncian en Barrett et al. (2020) para puntos $p \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$, los mismos son fácilmente generalizables a puntos $p \in \partial\Gamma$. Por este motivo, incluimos las aclaraciones necesarias sobre este punto en cada una de las definiciones que siguen a continuación. De todos modos, para un estudio más profundo sobre hipersuperficies con borde, recomendamos ver, por ejemplo, (Thorpe, 1979, Capítulo 20) o (Agricola and Friedrich, 2002, Sección 3.1).

Definición 2. Sea Γ una superficie C^k n -dimensional con borde. Una función $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ se dice de clase C^k , y se escribe $f \in C^k(\Gamma)$, si para toda parametrización local $\mathbf{X} : U \rightarrow \Gamma$ dada en la Definición anterior, se cumple que

$$f \circ \mathbf{X} \in C^k(U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0})).$$

Observación 2. La definición anterior es independiente de la parametrización elegida. En efecto, si \mathbf{X} y \mathbf{Y} son dos parametrizaciones locales cuyos dominios se superponen, el cambio de coordenadas $\mathbf{Y}^{-1} \circ \mathbf{X}$ es un difeomorfismo C^k entre abiertos de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, lo cual preserva la regularidad C^k por composición.

Definición 3. Sea Γ una hipersuperficie C^1 y $p \in \Gamma$. El espacio tangente $T_p\Gamma$ de Γ en p se define como el conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^d$ tales que existe una curva $c : I \rightarrow \Gamma$ con $c(0) = p$ y $c'(0) = \boldsymbol{\tau}$, donde I es un intervalo de la forma $(-\epsilon, \epsilon)$, $[0, \epsilon)$ o $(-\epsilon, 0]$.

Los intervalos semiabiertos I en la definición anterior se incluyen para asegurar que, incluso en los puntos del borde, el espacio tangente sea un subespacio. Con la ayuda de una parametrización local $\mathbf{X} : U \rightarrow \Gamma$, podemos obtener una base para este subespacio:

$$T_p\Gamma = \text{span}\{(\partial_1\mathbf{X})(P), (\partial_2\mathbf{X})(P), \dots, (\partial_n\mathbf{X})(P)\}. \quad (1.1)$$

Esto significa que $T_p\Gamma$ es un subespacio de \mathbb{R}^d de dimensión n . Su complemento ortogonal en \mathbb{R}^d lo denotaremos con $N_p\Gamma = (T_p\Gamma)^\perp$. Si un vector $\boldsymbol{\nu} \in N_p\Gamma$ diremos que $\boldsymbol{\nu}$ es un vector normal a Γ en p .

Definición 4. Diremos que una hipersuperficie Γ es orientable si existe una función continua $\boldsymbol{\nu} : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ tal que $\boldsymbol{\nu}(p) \in N_p\Gamma$ para todo $p \in \Gamma$, con \mathbb{S}^{d-1} la esfera $(d-1)$ -dimensional en \mathbb{R}^d .

Definición 5. Sea Γ una hipersuperficie C^1 con borde y $p \in \partial\Gamma$, el espacio tangente $T_p\Gamma$ de Γ en p es de dimensión $d-1$ y el espacio tangente $T_p\partial\Gamma$ es de dimensión $d-2$ con $T_p\partial\Gamma \subset T_p\Gamma$. Se puede entonces elegir un vector $\boldsymbol{\mu}(p) \in T_p\Gamma$ tal que

$$(I) \quad |\boldsymbol{\mu}(p)| = 1,$$

$$(II) \quad \boldsymbol{\mu}(p) \in N_p\partial\Gamma,$$

$$(III) \quad \text{existe una curva } c : (-\epsilon, 0] \rightarrow \Gamma \text{ en } \Gamma \text{ tal que } c(0) = p \text{ y } c'(0) = \boldsymbol{\mu}(p).$$

El vector $\boldsymbol{\mu}(p)$ se llamará vector unitario conormal exterior de Γ en $p \in \partial\Gamma$, puesto que apunta como “saliendo” de Γ , ver figura 1.1b.

Observación 3. También puede considerarse un vector unitario conormal que apunte en dirección “hacia” Γ , tal como se muestra en la figura 1.1a. En ese caso el dominio de la curva en el ítem III será $[0, \epsilon)$.

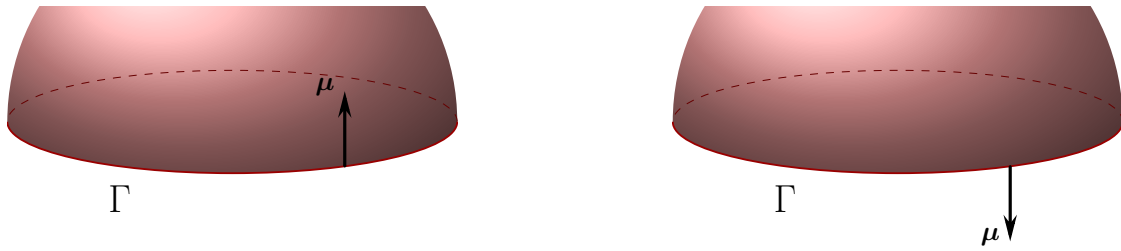
Definición 6. Sean $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ un superficie C^1 n -dimensional, $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{f} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$ funciones continuas.

(I) Para todo $p \in \Gamma$ y $\boldsymbol{\tau} \in T_p\Gamma$ la derivada direccional se define como

$$(\partial_{\boldsymbol{\tau}}f)(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{y}(\epsilon)) - f(\mathbf{y}(0))}{\epsilon} = (f \circ \mathbf{y})'(0),$$

donde $\mathbf{y} : (-1, 1) \rightarrow \Gamma$ parametriza una curva en Γ con $\mathbf{y}(0) = p$ y $\mathbf{y}'(0) = \boldsymbol{\tau}$.

Para puntos $p \in \partial\Gamma$ se elige una curva $\mathbf{y} : [0, 1) \rightarrow \Gamma$, o $\mathbf{y} : (-1, 0] \rightarrow \Gamma$, y se considera el límite lateral natural.



(a) Superficie Γ con borde y un vector conormal que apunta hacia Γ .

(b) Superficie Γ con borde y un vector conormal exterior a Γ .

Figura 1.1: Superficie con borde Γ y las elecciones posibles para el vector conormal μ .

(II) El gradiente tangencial de f en Γ en el punto $p \in \Gamma$ se define como

$$(\nabla_{\Gamma} f)(p) = \sum_{i=1}^n (\partial_{\tau_i} f)(p) \tau_i$$

donde $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ es una base ortonormal de $T_p\Gamma$.

(III) La divergencia tangencial de \mathbf{f} en $p \in \Gamma$ se define como

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \tau_i \cdot (\partial_{\tau_i} \mathbf{f})(p),$$

donde $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ es una base ortonormal de $T_p\Gamma$.

(IV) El Jacobiano tangencial \mathbf{f} en $p \in \Gamma$ se define como

$$(\nabla_{\Gamma} \mathbf{f})(p) = \sum_{i=1}^n (\partial_{\tau_i} \mathbf{f})(p) \otimes \tau_i$$

(V) Si Γ es C^2 y $f \in C^2(\Gamma)$ el operador de Laplace Beltrami y el Hessiano superficial de f en Γ se definen como

$$\Delta_{\Gamma} f = \operatorname{div}_{\Gamma}(\nabla_{\Gamma} f) \quad y \quad \nabla_{\Gamma}^2 f = \nabla_{\Gamma}(\nabla_{\Gamma} f),$$

respectivamente.

Observación 4. (I) Notar que $\mathbf{e}_i^T \nabla_{\Gamma} \mathbf{f} = \nabla_{\Gamma}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i)^T$ para $i = 1, \dots, n$; es decir, cada fila de $\nabla_{\Gamma} \mathbf{f}$ es la transpuesta del gradiente superficial de cada componente $f_i = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i$ de \mathbf{f} .

(II) Para todo $p \in \Gamma$ se cumple que

$$\begin{aligned} (\nabla_{\Gamma} f)(p) \tau &= (\partial_{\tau} f)(p) \quad \forall \tau \in T_p\Gamma, \\ (\nabla_{\Gamma} \mathbf{f})(p) \mathbf{w} &= 0 \quad \forall \mathbf{w} \in N_p\Gamma. \end{aligned}$$

(III) Todos los operadores anteriores pueden expresarse en términos de una parametrización local $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma$. En tal caso, denotando $F = f \circ \mathbf{X}$, $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ al tensor métrico inducido por esta parametrización, esto es $g_{ij} = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$ se tiene, por ejemplo,

$$(\nabla_{\Gamma} f) \circ \mathbf{X} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_i F \partial_j \mathbf{X}, \quad (\Delta_{\Gamma} f) \circ \mathbf{X} = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j F),$$

con $(g^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ la inversa de $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ y $g = \det((g_{ij})_{i,j=1,\dots,n})$. Se pueden obtener fórmulas análogas para $\nabla_{\Gamma} \mathbf{f}$ y $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{f}$. Para una exposición más detallada puede consultarse ([Barrett et al., 2020](#), Observación 8, Sección 2.1).

(IV) En caso de que Γ solo sea C^k por partes, los operadores tangenciales pueden definirse sobre los subconjuntos de Γ donde se tenga la regularidad requerida.

Definición 7. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ una hipersuperficie C^2 orientada con vector normal $\boldsymbol{\nu}$.

(I) La aplicación de Weingarten en $p \in \Gamma$ se define por

$$W_p : T_p \Gamma \rightarrow T_p \Gamma, \quad W_p(\boldsymbol{\tau}) = -\partial_{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\nu}(p).$$

(II) La correspondiente forma bilineal se denomina segunda forma fundamental y está dada por

$$\Pi_p(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = W_p(\boldsymbol{\tau}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = -\partial_{\boldsymbol{\tau}_1} \boldsymbol{\nu}(p) \cdot \boldsymbol{\tau}_2,$$

para todos $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in T_p \Gamma$.

(III) Como W_p es autoadjunto Π_p resulta una forma bilineal simétrica. De esta manera, existe una base ortonormal $\{\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_{d-1}\}$ de $T_p \Gamma$ constituida por autovalores de W_p con correspondientes autovalores $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ que se denominan curvaturas principales.

(IV) La curvatura media κ de Γ en p se define como la traza de W_p , esto es

$$\kappa(p) = \operatorname{tr} W_p = \kappa_1 + \dots + \kappa_{d-1}.$$

(V) El vector curvatura media $\boldsymbol{\kappa}$ se define como $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \boldsymbol{\nu}$.

(VI) Para $d = 3$, la curvatura Gaussiana κ_G en cada $p \in \Gamma$ se define como el determinante de W_p . Lo que significa $\kappa_G = \kappa_1 \kappa_2$. c

(VII) El Jacobiano $\nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(p)$ induce un mapeo lineal autoadjunto de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^d que colapsa a $-W_p$ en $T_p \Gamma$ y mapea $N_p \Gamma$ a cero. Como consecuencia de esto se tiene que:

a) $(\nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\nu})^T = \nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}$, $\nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$ en Γ .

b) $\kappa = -\operatorname{tr}(\nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\nu})$ en Γ .

$$c) |\nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}|^2 = \kappa_1^2 + \cdots + \kappa_{d-1}^2 \text{ en } \Gamma.$$

A continuación introducimos la noción de integral superficial sobre una hipersuperficie regular, la cual será fundamental para formular el teorema de la divergencia y las identidades de integración por partes en superficies.

Definición 8. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ una hipersuperficie C^1 de dimensión $d - 1$. Sea $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Sea $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \Gamma$ una parametrización local de clase \mathbf{C}^1 con rango completo, donde U es un abierto (o un dominio rectangular en el caso con borde). Definimos la integral de f sobre $\mathbf{X}(U)$ por

$$\int_{\mathbf{X}(U)} f d\mathcal{H}^{d-1} := \int_U f(\mathbf{X}(\xi)) \sqrt{g(\xi)} d\xi, \quad (1.2)$$

siempre que $f \circ \mathbf{X}$ sea integrable en U , donde $g(\xi) = \det((D\mathbf{X}(\xi))^T D\mathbf{X}(\xi))$ es el determinante de la métrica inducida y $d\xi$ denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^{d-1} . En el caso de una parametrización local de borde, se reemplaza U por $U \cap \{\xi_{d-1} \geq 0\}$.

La integral sobre toda Γ se define mediante una partición de la unidad subordinada a un atlas finito de parametrizaciones locales. La medida inducida

$$\mathcal{H}^{d-1}(\Gamma) := \int_{\Gamma} 1$$

coincide con la medida de Hausdorff $(d - 1)$ -dimensional de Γ .

La definición anterior es de naturaleza local y no requiere hipótesis globales sobre Γ . Sin embargo, para garantizar la validez de las fórmulas integrales globales que utilizaremos más adelante, en particular el teorema de la divergencia y las identidades de integración por partes sobre superficies, será conveniente introducir una noción geométrica de compacidad en el contexto de hipersuperficies con borde.

Definición 9. Diremos que Γ es una hipersuperficie compacta con borde $\partial\Gamma$ si Γ es una hipersuperficie con borde y el conjunto $\Gamma \cup \partial\Gamma$ es compacto en \mathbb{R}^d .

En particular, si Γ es de clase C^2 y compacta con borde, entonces su medida superficial es finita y $\partial\Gamma$ es una curva cerrada y acotada de clase C^2 . Esta hipótesis de compacidad será asumida en los resultados que siguen, y garantiza la validez de las fórmulas integrales globales que utilizaremos.

Con la noción de integral superficial y de compacidad podemos formular las identidades de integración por partes en Γ . En particular, el siguiente resultado constituye una generalización del teorema clásico de la divergencia al contexto de hipersuperficies (ver (Barrett et al., 2020, Teorema 21)).

Teorema 1 (Teorema de la divergencia en hipersuperficies). Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ una hipersuperficie C^2 compacta con borde $\partial\Gamma$ y orientada mediante el vector normal unitario $\boldsymbol{\nu}$. Sea $\mathbf{f} \in [C^1(\Gamma)]^d$. Entonces se cumple

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{f} + \kappa \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\partial\Gamma} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\mu}. \quad (1.3)$$

Observación 5. *El término adicional $\kappa \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu}$ refleja la curvatura intrínseca de la superficie. En efecto, a diferencia del caso plano, la divergencia tangencial no coincide con la traza del Jacobiano euclídeo restringido a Γ , sino que aparece un término de corrección proporcional a la curvatura media. En particular, si Γ es una porción de hiperplano (de modo que $\kappa \equiv 0$), la identidad anterior se reduce al teorema clásico de la divergencia en dominios planos.*

Como consecuencia inmediata del teorema de la divergencia en hipersuperficies, aplicándolo a campos vectoriales apropiados, obtenemos las siguientes fórmulas de integración por partes sobre Γ .

Lema 1 (Fórmulas de integración por partes). *Sea Γ una hipersuperficie C^2 compacta con borde $\partial\Gamma$ y orientada. Sean $f \in C^2(\Gamma)$, $\eta \in C^1(\Gamma)$, $\mathbf{f} \in [C^2(\Gamma)]^d$ y $\boldsymbol{\eta} \in [C^1(\Gamma)]^d$. Entonces se cumple:*

$$\int_{\Gamma} \Delta_{\Gamma} f \eta + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} f \cdot \nabla_{\Gamma} \eta = \int_{\partial\Gamma} \eta \partial_{\mu} f, \quad (1.4a)$$

$$\int_{\Gamma} \Delta_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \mathbf{f} : \nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\eta} = \int_{\partial\Gamma} \boldsymbol{\eta} \cdot \partial_{\mu} \mathbf{f}, \quad (1.4b)$$

donde

$$\partial_{\mu} f = \nabla_{\Gamma} f \cdot \boldsymbol{\mu}, \quad \partial_{\mu} \mathbf{f} = \nabla_{\Gamma} \mathbf{f} \boldsymbol{\mu}.$$

1.1.1. Comentario sobre otros posibles enfoques geométricos

Como complemento a las definiciones introducidas en esta sección, cabe señalar que un enfoque alternativo para el estudio de superficies suaves con borde puede desarrollarse desde la teoría de variedades suaves, como se presenta, por ejemplo, en [Lee \(2012\)](#). En dicho marco, una superficie suave con borde no es otra cosa que una variedad suave de dimensión 2, con borde, inmersa en \mathbb{R}^d . Este punto de vista permite distinguir claramente entre la estructura intrínseca de variedad con borde y su realización extrínseca como subconjunto de un espacio euclídeo.

Resulta útil mencionar en este punto que, debido a que toda variedad suave con borde admite una realización como subvariedad embebida de una variedad suave sin borde. Se puede (cuando sea conveniente) considerar como espacio ambiente de Γ no todo \mathbb{R}^3 , sino otra variedad que satisfaga ciertas propiedades. No profundizaremos en esta tesis en estas opciones, pero es posible adaptar las técnicas presentadas a este contexto. Solo mencionaremos algunas ideas relevantes, un estudio detallado puede encontrarse en [Lee \(2012\)](#).

A partir de una variedad suave, compacta, conexa y orientable $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ se define la variedad con borde como un subconjunto $\Gamma \subset \Sigma$, tal y como se presenta en ([Bänsch et al., 2023](#), Sección 2.5). Se dice que Γ es *relativamente abierta* en Σ si es abierta con

respecto a la topología inducida por Σ , es decir, si para todo $p_0 \in \Gamma$ existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^d$ tal que $p_0 \in V \cap \Gamma \subset \Sigma$.

En este contexto, el *borde* de Γ relativo a Σ se define como

$$\partial\Gamma := \bar{\Gamma}^\Sigma \setminus \Gamma = \{p \in \Sigma \setminus \Gamma \mid \exists p_k \in \Gamma \text{ tal que } p_k \rightarrow p\},$$

donde $\bar{\Gamma}^\Sigma$ denota la clausura de Γ en la topología de Σ .

Sea $z \in \partial\Gamma$ y $\mathbf{v} \in T_z\Sigma$. Se dice que \mathbf{v} está dirigido hacia $\Sigma \setminus \Gamma$ si para toda curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ con $\gamma(0) = z$, $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ y $\gamma(\theta) \in \Sigma$, existe $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ tal que $\gamma(\theta) \in \Sigma \setminus \Gamma$ para todo $0 < \theta \leq \varepsilon_1$.

De este modo, se dice que Γ es suave en Σ si $\partial\Gamma = \emptyset$ o bien $\partial\Gamma$ es una subvariedad suave de dimensión $d - 2$ sin borde propiamente embebida en Γ . Además satisface que Γ yace a un solo lado de $\partial\Gamma$, esto último se entiende en el sentido de que existe un campo vectorial $\boldsymbol{\mu} : \partial\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que, para todo $z \in \partial\Gamma$, se cumple que

$$|\boldsymbol{\mu}(z)| = 1, \quad \boldsymbol{\mu}(z) \in T_z\Sigma, \quad \boldsymbol{\mu}(z) \perp T_z\partial\Gamma,$$

y $\boldsymbol{\mu}(z)$ está dirigido hacia $\Sigma \setminus \Gamma$; véase la Figura 1.2.

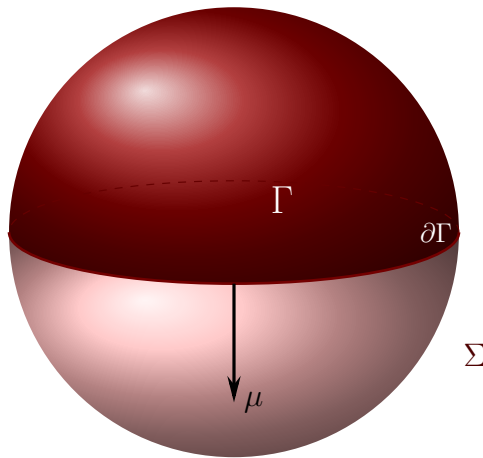


Figura 1.2: Se considera Σ una esfera de \mathbb{R}^3 y $\Gamma \subset \Sigma$ la semiesfera superior, con la normal intrínseca al borde dirigida hacia $\Sigma \setminus \Gamma$.

1.2 Espacios de funciones sobre superficies

En esta sección presentaremos las definiciones y notaciones para los espacios de funciones utilizados a lo largo de esta tesis. Para un estudio más detallado de estos conceptos, se sugiere consultar [Dziuk and Elliott \(2007\)](#); [Demlow \(2009\)](#); [Alphonse et al. \(2015, 2023\)](#); [Hebey and Robert \(2008\)](#). En todo lo que sigue, consideramos que $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie Lipschitz compacta, orientable y con borde $\partial\Gamma$ suave a trozos.

La fórmula de integración por partes sobre superficies conduce de manera natural a la noción de derivada débil tangencial y, en consecuencia, a la introducción de los espacios de Sobolev sobre superficies. Estos espacios constituyen el marco funcional adecuado para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales elípticas definidas sobre Γ .

Para $p \in [1, \infty)$, definimos $L^p(\Gamma)$ como el espacio de funciones medibles $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ respecto de la medida superficial dA (es decir, la medida de Hausdorff bidimensional) tales que

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f|^p dA \right)^{1/p} < \infty.$$

En el caso $p = \infty$, se considera el espacio $L^\infty(\Gamma)$ dotado de la norma del supremo esencial,

$$\|f\|_{L^\infty(\Gamma)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Gamma} |f(x)|.$$

El espacio $L^p(\Gamma)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$. En el caso particular $p = 2$, $L^2(\Gamma)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} fg dA.$$

Además, para $1 \leq p < \infty$, los espacios de funciones continuas $C^0(\Gamma)$ y continuamente diferenciables $C^1(\Gamma)$ son densos en $L^p(\Gamma)$.

Definición 10. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Gamma)$ como

$$W^{1,p}(\Gamma) = \left\{ \eta \in L^p(\Gamma) \mid \nabla_{\Gamma} \eta \in L^p(\Gamma)^3 \right\},$$

donde ∇_{Γ} denota el gradiente tangencial superficial entendido en sentido débil. Este espacio se dota de la norma

$$\|\eta\|_{W^{1,p}(\Gamma)} = \|\eta\|_{L^p(\Gamma)} + \|\nabla_{\Gamma} \eta\|_{L^p(\Gamma)^3}.$$

De manera análoga, se define el espacio $W^{k,p}(\Gamma)$ para cualquier entero $k \geq 0$. Siguiendo la notación habitual para el caso $p = 2$, denotamos $H^k(\Gamma) := W^{k,2}(\Gamma)$. Cuando trabajemos con funciones con valores vectoriales, utilizaremos exponentes para indicar la dimensión del espacio correspondiente (por ejemplo, $L^2(\Gamma)^3$ o $H^1(\Gamma)^3$), manteniendo las letras en formato estándar sin negritas.

Si la superficie Γ posee borde, el operador traza

$$\operatorname{Tr} : W^{1,p}(\Gamma) \rightarrow L^p(\partial\Gamma)$$

está bien definido y es continuo. Esto nos permite introducir formalmente los espacios de Sobolev con traza nula en el borde.

Definición 11. Para $1 \leq p \leq \infty$, definimos el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Gamma)$ como

$$W_0^{1,p}(\Gamma) = \left\{ \eta \in W^{1,p}(\Gamma) \mid \operatorname{Tr}(\eta) = 0 \text{ en } \partial\Gamma \right\}.$$

Para el caso $p = 2$, denotamos $H_0^1(\Gamma) := W_0^{1,2}(\Gamma)$. Equivalentemente, para $1 \leq p < \infty$, este espacio coincide con la clausura de las funciones de soporte compacto en la norma de $W^{1,p}(\Gamma)$:

$$W_0^{1,p}(\Gamma) = \overline{C_c^\infty(\Gamma)}^{W^{1,p}(\Gamma)}.$$

De forma análoga se definen los espacios $W_0^{k,p}(\Gamma)$ y $H_0^k(\Gamma)$ para $k \geq 1$.

Finalmente, sobre el borde $\partial\Gamma$ (que hereda una estructura de variedad unidimensional), definimos sus propios espacios de Sobolev intrínsecos.

Definición 12. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\partial\Gamma)$ como

$$W^{1,p}(\partial\Gamma) = \left\{ \eta \in L^p(\partial\Gamma) \mid \nabla_{\partial\Gamma}\eta \in L^p(\partial\Gamma) \right\},$$

donde $\nabla_{\partial\Gamma}$ denota el gradiente tangencial intrínseco sobre el borde. De igual manera se definen $W^{k,p}(\partial\Gamma)$ y $H^k(\partial\Gamma) := W^{k,2}(\partial\Gamma)$.

Definición 13. Para $1 \leq s \leq \infty$ y un entero $k \geq 1$, definimos el espacio de Sobolev con regularidad adicional en el borde, denotado por $W_{\partial}^{k,s}(\Gamma(t))$, como:

$$W_{\partial}^{k,s}(\Gamma(t)) = \left\{ \eta \in W^{k,s}(\Gamma(t)) : \eta|_{\partial\Gamma(t)} \in W^{k,s}(\partial\Gamma(t)) \right\}.$$

Para el caso $s = 2$, utilizaremos la notación $H_{\partial}^k(\Gamma(t)) := W_{\partial}^{k,2}(\Gamma(t))$.

Observación 6. Es importante notar la diferencia entre estos espacios y los espacios con traza nula $W_0^{k,s}(\Gamma(t))$. Mientras que en $W_0^{k,s}(\Gamma(t))$ las funciones se anulan en la frontera, en $W_{\partial}^{k,s}(\Gamma(t))$ las funciones pueden tomar valores arbitrarios en $\partial\Gamma(t)$, pero se les exige que su restricción al borde posea el mismo orden de regularidad (derivabilidad débil) que en el interior de la superficie.

Lema 2 (Desigualdad de trazas con ϵ). Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable, compacta y con borde Lipschitz $\partial\Gamma$. Supongamos que existe un dominio paramétrico acotado y Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y una parametrización global bi-Lipschitz $\mathbf{X} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Gamma}$ tal que $\Gamma = \mathbf{X}(\Omega)$ y $\partial\Gamma = \mathbf{X}(\partial\Omega)$. Entonces, existe una constante $C > 0$, que depende de Γ , tal que para todo $0 < \epsilon \leq 1$ y para todo $v \in H^1(\Gamma)$ se cumple:

$$\|v\|_{L^2(\partial\Gamma)}^2 \leq C \left(\epsilon \|\nabla_{\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \epsilon^{-1} \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right). \quad (1.5)$$

Demostración. Dada la parametrización \mathbf{X} , para cada función $v \in H^1(\Gamma)$ definimos su función *pullback* en el dominio de referencia como $\hat{v} = v \circ \mathbf{X} \in H^1(\Omega)$. Dado que la aplicación \mathbf{X} es bi-Lipschitz, la matriz jacobiana $D\mathbf{X}$ y el tensor métrico $G = (D\mathbf{X})^T D\mathbf{X}$ están uniformemente acotados, al igual que sus inversas. Esto garantiza la equivalencia de las normas en los espacios de Lebesgue y Sobolev entre Γ y Ω , así como en sus respectivas

fronteras. En particular, existen constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$, dependientes únicamente de la parametrización \mathbf{X} , tales que:

$$\|v\|_{L^2(\partial\Gamma)}^2 \leq c_1 \|\hat{v}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2, \quad (1.6)$$

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_2 \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad (1.7)$$

$$\|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_3 \|\nabla_{\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (1.8)$$

Puesto que Ω es un dominio Lipschitz en \mathbb{R}^2 , podemos aplicar la desigualdad de trazas multiplicativa clásica (véase, por ejemplo, (Brenner and Scott, 2002, Teorema 1.6.6)). Existe una constante $C_{\Omega} > 0$ tal que:

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C_{\Omega} \|\hat{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{v}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Aplicando la desigualdad de Young, $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$, al término de la derecha, y expandiendo la norma $\|\hat{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2$, se obtiene para cualquier $\epsilon > 0$:

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C_{\Omega} \left(\frac{\epsilon}{2} \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2\epsilon} \right) \|\hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Restringiendo el parámetro al intervalo $0 < \epsilon \leq 1$, observamos que $\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{1}{2\epsilon}$, lo que implica que $\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2\epsilon} \right) \leq \epsilon^{-1}$. Sustituyendo esta cota se tiene:

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C_{\Omega} \left(\epsilon \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon^{-1} \|\hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Finalmente, utilizamos las equivalencias de normas (1.6), (1.7) y (1.8) para trasladar la estimación nuevamente a la superficie Γ :

$$\|v\|_{L^2(\partial\Gamma)}^2 \leq c_1 \|\hat{v}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq c_1 C_{\Omega} \left(\epsilon c_3 \|\nabla_{\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \epsilon^{-1} c_2 \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right).$$

Agrupando las constantes bajo una única constante genérica $C = c_1 C_{\Omega} \max\{c_2, c_3\}$, obtenemos la desigualdad deseada. \square

Observación 7. *En caso de que la superficie Γ no admita una parametrización global bi-Lipschitz, es posible extender este resultado mediante el uso de una partición de la unidad. Dada la compacidad de Γ , podemos cubrirla con un número finito de cartas locales $\{\mathcal{U}_i, \mathbf{X}_i\}_{i=1}^N$, donde cada \mathcal{U}_i es un entorno en Γ y $\mathbf{X}_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo. Si $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ es una partición de la unidad subordinada a este recubrimiento, entonces para cualquier $v \in H^1(\Gamma)$ tenemos $v = \sum_{i=1}^N \phi_i v$. Utilizando la desigualdad triangular y la propiedad de que $\phi_i v$ tiene soporte compacto en \mathcal{U}_i , el lema puede aplicarse localmente en cada carta Ω_i y luego sumar las contribuciones, obteniendo una constante global C que dependerá de la geometría de los parches y de la regularidad de la partición de la unidad.*

1.3 Superficies evolutivas

En lo que sigue de la tesis nos restringiremos a trabajar con hipersuperficies donde $n = 2$ y $d = 3$, de manera que Γ será una superficie de \mathbb{R}^3 con borde y $\partial\Gamma$ será una curva en \mathbb{R}^3 sin borde. Trabajaremos siempre con superficies con borde conexas, compactas y orientadas, por lo que será suficiente considerar que tenemos un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con borde $\partial\Omega$ tal que existe una parametrización global $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\Gamma = \mathbf{X}(\Omega)$ y $\partial\Gamma = \mathbf{X}(\partial\Omega)$, y luego recurrir a una partición de la unidad. Al conjunto Ω lo denominaremos dominio paramétrico o dominio de referencia.

En particular, nos interesan superficies que evolucionan durante cierto intervalo de tiempo $[0, T]$, de manera que en esta sección presentaremos conceptos, propiedades y teoremas relacionados a superficies evolutivas. La notación que seguiremos será básicamente la que está presente en [Barrett et al. \(2020\)](#) y [Elliott and Ranner \(2020\)](#).

Sea $T > 0$ fijo, $\Gamma(t)$ hace referencia a una superficie para la cual existe una función C^k , $\mathbf{X} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\mathbf{X}(t)$ es un difeomorfismo para todo $t \in [0, T]$ y

$$\Gamma(t) = \{X(P, t) : P \in \Omega\}, \quad \partial\Gamma(t) = \{X(P, t) : P \in \partial\Omega\}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado con borde $\partial\Omega$. A esta función \mathbf{X} la llamaremos parametrización global.

Definición 14. *Sea $\{\Gamma(t)\}_{t \in [0, T]}$ una familia de superficies C^k con borde, para $k \geq 1$. Llamaremos superficie evolutiva C^k al conjunto*

$$\mathcal{G}_T = \bigcup_{t \in [0, T]} (\Gamma(t) \times \{t\})$$

siempre que sea una superficie con borde en \mathbb{R}^4 tal que $T_{(p,t)}\mathcal{G}_T \neq \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ para todo $(p, t) \in \mathcal{G}_T$.

Si \mathcal{G}_T es una superficie evolutiva C^1 , podemos asumir que \mathcal{G}_T admite un campo vectorial continuo suave $\boldsymbol{\nu}(t) : \mathcal{G}_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{\nu}(p, t)$ es un vector normal unitario suave a la superficie $\Gamma(t)$ en $p \in \Gamma(t)$ en todo instante $t \in [0, T]$.

Definición 15. *La velocidad de $\Gamma(t)$ en \mathcal{G}_T , inducida por la parametrización \mathbf{X} , se define como*

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}(P, t), t) = \partial_t \mathbf{X}(P, t), \quad \forall (P, t) \in \Omega \times [0, T]. \quad (1.9)$$

Por lo tanto, la velocidad normal se define como $V = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$.

Cuando consideramos superficies evolutivas y queremos derivar con respecto al tiempo cierta función $f : \mathcal{G}_T \rightarrow \mathbb{R}$ no podemos derivar directamente $f(p, t)$ con respecto a t pues p podría no estar en $\Gamma(t)$ para diferentes tiempos t . Así que al derivar respecto de t necesitamos mover el punto p , esto motiva la siguiente definición.

Definición 16. Sea \mathcal{G}_T una superficie evolutiva C^1 , dada por una parametrización global $\mathbf{X} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $f \in C^1(\mathcal{G}_T)$, la derivada material de f se define como

$$(\partial^\bullet f)(\mathbf{X}(P, t), t) = \partial_t f(\mathbf{X}(P, t), t). \quad (1.10)$$

para $p = \mathbf{X}(P, t) \in \Gamma(t)$, con $P \in \Omega$ y $0 \leq t \leq T$.

Una primera consecuencia de la definición, es que la derivada $\partial^\bullet f$ dependerá de la parametrización \mathbf{X} considerada. Para trabajar con una noción de derivada material que sea independiente de la parametrización es necesario considerar otra definición, ver por ejemplo (Barrett et al., 2020, Definición 28 (ii) y Observación 29 (iii)). Vale la pena mencionar también que, definiendo la función $\mathbf{x} = \mathbf{X} \circ (\mathbf{X})^{-1}$ como la función identidad en Γ , de la definición se desprende que $\partial^\bullet \mathbf{x} = \partial_t \mathbf{X} \circ (\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{v}$.

Por otra parte, suponiendo que f pueda extenderse a un entorno de \mathcal{G}_T , entonces

$$\partial^\bullet f = \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{f} \quad \text{on } \Gamma(t),$$

donde $\nabla \tilde{f}$ denota el gradiente en \mathbb{R}^3 de la extensión \tilde{f} .

Fórmula del transporte. Sea \mathcal{G}_T una superficie evolutiva C^2 , sea $\Omega_\Sigma \subseteq \Omega$ un subdominio de Ω con borde Lipschitz, y sea $\Sigma(t) = \mathbf{X}(\Omega_\Sigma, t)$, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma(t)} f = \int_{\Sigma(t)} \partial^\bullet f + f \operatorname{div}_{\Gamma(t)} \mathbf{v}. \quad (1.11)$$

Si f y g son funciones tales que todas las siguientes cantidades existen, entonces (Elliott and Ranner, 2020, Sec. 9.2, ecuación (9.7) con $\mathcal{A}_\Gamma = I_3$),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma(t)} \nabla_{\Gamma(t)} f \cdot \nabla_{\Gamma(t)} g &= \int_{\Sigma(t)} \nabla_{\Gamma(t)} f \cdot \nabla_{\Gamma(t)} \partial^\bullet g + \nabla_{\Gamma(t)} \partial^\bullet f \cdot \nabla_{\Gamma(t)} g \\ &\quad + \nabla_{\Gamma(t)} f \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}) \nabla_{\Gamma(t)} g, \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde $\mathcal{B}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}_{\Gamma(t)} \mathbf{v} I_3 - (\nabla_\Gamma \mathbf{v} + (\nabla_\Gamma \mathbf{v})^T)$. Además, se cumple la siguiente identidad (Dziuk et al., 2013, Lema 2.6):

$$\begin{aligned} \partial^\bullet(\nabla_{\Gamma(t)} g) &= \nabla_{\Gamma(t)} \partial^\bullet g - (\nabla_{\Gamma(t)} \mathbf{v}^T - \boldsymbol{\nu}_{\Gamma(t)} \otimes \boldsymbol{\nu}_{\Gamma(t)} \nabla_{\Gamma(t)} \mathbf{v}) \nabla_{\Gamma(t)} g \\ &= \nabla_{\Gamma(t)} \partial^\bullet g - D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}_{\Gamma(t)}) \nabla_{\Gamma(t)} g, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde $\boldsymbol{\nu}_{\Gamma(t)}$ es el vector normal a $\Gamma(t)$.

Pullback, Push-forward y Transporte de funciones. A lo largo de esta tesis, las funciones definidas sobre el dominio paramétrico Ω se representarán con mayúsculas, mientras que las minúsculas se reservan para las funciones definidas sobre la superficie Γ . Dado $f : \Gamma(t) \rightarrow \mathbb{R}^m$, definimos su *pull-back* al dominio paramétrico como $F = f \circ \mathbf{X}(t)$. Y dado $F : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, su *push-forward* hacia la superficie $\Gamma(t)$ será $f = F \circ (\mathbf{X})^{-1}(t)$.

Si $\Gamma(t)$ es $C^{1,\alpha}$ para $0 < \alpha \leq 1$, entonces tenemos la siguiente regla de la cadena (Bonito et al., 2020, Section 2.2)

$$(\nabla_{\Gamma} f) \circ \mathbf{X}(t) = \nabla \mathbf{X}(t) G^{-1}(t) \nabla F, \quad (1.14)$$

donde $G := (\nabla \mathbf{X}(t))^T \nabla \mathbf{X}(t)$ es la primera forma fundamental de Γ .

Si \mathbf{X} es suficientemente suave, es decir, $\mathbf{X}(t) \in W^{r,\infty}(\Omega)$ y $(\mathbf{X}(t))^{-1} \in W^{r,\infty}(\Gamma(t))$ para algún $r \in \mathbb{N}$ y todo $t \in [0, T]$, tenemos la siguiente equivalencia de normas entre una función f y su pullback F : existe una constante $C = C(\mathbf{X})$ tal que

$$C^{-1} \|f(t)\|_{W^{r,s}(\Gamma(t))} \leq \|F(t)\|_{W^{r,s}(\Omega)} \leq C \|f(t)\|_{W^{r,s}(\Gamma(t))},$$

para toda $1 \leq s \leq \infty$.

Llamaremos transporte de una función F , independiente del tiempo y definida en Ω , a su push-forward hacia la superficie Γ . Este tipo de funciones satisfacen la siguiente propiedad

$$\partial^{\bullet} f = \partial_t(f \circ \mathbf{X}) \circ (\mathbf{X}(t))^{-1} = (\partial_t F) \circ (\mathbf{X}(t))^{-1} \equiv 0. \quad (1.15)$$

1.4 Análisis Isogeométrico basado en B-splines

Esta sección contiene definiciones de los espacios splines clásicos que luego serán la base para construir espacios splines evolutivos en las superficies. Además presentamos los resultados clásicos de aproximación. Más detalles pueden consultarse en De Boor (1978); Schumaker (2007); da Veiga et al. (2014).

Desde su aparición en 2005, el Análisis Isogeométrico (IGA, por su nombre en inglés *IsoGeometric Analysis*) ha demostrado ser una herramienta robusta para la aproximación numérica de ecuaciones en derivadas parciales. La idea original del método consiste en utilizar directamente las funciones de base del diseño asistido por computadora (CAD) en el análisis, integrando de manera directa las funciones de base utilizadas en la modelación geométrica dentro del marco de simulación por elementos finitos. En este contexto, las B-splines —cuyas definiciones y propiedades desarrollamos a continuación— fueron adoptadas tanto para describir la geometría del dominio computacional como para aproximar los campos incógnita, dentro del marco del método de Galerkin. Una propiedad central de este enfoque es la posibilidad de construir funciones de base con continuidad global C^{p-1} , donde p es el grado polinomial. Esta regularidad ha resultado especialmente ventajosa en problemas que requieren alta continuidad, como EDPs de orden superior, modelos de campo de fase y dinámica de fluidos, por mencionar algunas aplicaciones.

1.4.1. Espacios Splines Univariados

Presentaremos la definición de estos espacios en el intervalo $I = [0, 1]$, aunque todo lo que sigue se adapta de manera directa al caso general $I = [a, b]$. Empezaremos definiendo

las bases splines que conforman estos espacios, las B-splines son polinomios a trozos que se pueden definir como globalmente C^0 o con la continuidad global que sea requerida en el problema. Sea $p \geq 0$ el grado polinomial, el punto de partida para definir una B-spline es la partición $Z = \{\zeta_i\}_{i=1}^{N+1}$ del intervalo I en $N > 0$ subintervalos y una sucesión de enteros $\mathbf{r} = \{r_i\}_{i=1}^{N+1}$ tales que $-1 \leq r_i \leq p - 1$ para $i = 1, \dots, N + 1$, donde r_i representa la regularidad que tendrán las funciones de base en el nodo ζ_i .

Asociada a la partición Z y teniendo en cuenta la regularidad en cada nodo, es conveniente definir un vector de nodos con repeticiones que guarde información de los nodos y de su regularidad. Sea $n \geq p + 1$ definimos $\Xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n+p+1}$ como:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{\zeta_1, \dots, \zeta_1}_{p-r_1 \text{ veces}}, \underbrace{\zeta_2, \dots, \zeta_2}_{p-r_2 \text{ veces}}, \dots, \underbrace{\zeta_{N+1}, \dots, \zeta_{N+1}}_{p-r_{N+1} \text{ veces}} \right\},$$

donde $\zeta_1 = 0$ y $\zeta_{N+1} = 1$. La diferencia $m_i = p - r_i$, para $i = 1, \dots, N + 1$, representa la multiplicidad del nodo ζ_i en Ξ y satisface que $\sum_{i=1}^{N+1} m_i = n + p + 1$ con $m_i \leq p + 1$ para todos los nodos internos.

En esta tesis siempre asumiremos que trabajamos con una sucesión de nodos $(p + 1)$ -regular, lo que significa que $\xi_j < \xi_{j+p+1}$ para todo $j = 1, \dots, n$. Pero además, en los nodos del borde la multiplicidad será $m_1 = m_{N+1} = p + 1$. Todo esto constituye lo que en la literatura (ver por ejemplo (da Veiga et al., 2014, Sección 2.1) o Lyche et al. (2018)) se denomina **vector de nodos abierto**, esto es,

$$\zeta_1 = \xi_1 = \dots = \xi_{p+1} < \zeta_2 = \xi_{p+2} \leq \dots \leq \xi_n = \zeta_{N-1} < \xi_{n+1} = \dots = \xi_{n+p+1} = \zeta_{N+1}.$$

Finalmente, asociado a este open knot vector Ξ se pueden definir n funciones de base B-splines de grado p siguiendo la fórmula recursiva de Cox-DeBoor (1978); Schumaker (2007). Para $p \geq 0$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $p + 2$ números reales de la sucesión $\Xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n+p+1}$, la j -ésima Bspline $B_{j,p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grado p es idénticamente cero si $\xi_{j+p+1} = \xi_j$ y en caso contrario se define de manera recursiva como

$$B_{j,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_j}{\xi_{j+p} - \xi_j} B_{j,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{j+p+1} - \xi}{\xi_{j+p+1} - \xi_{j+1}} B_{j+1,p-1}(\xi),$$

iniciando la recursión con

$$B_{j,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_j \leq \xi \leq \xi_{j+1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Se utiliza la convención de que las fracciones con denominador cero toman el valor cero. Notar que para grado 0 las B-splines son simplemente la función característica del intervalo semi abierto $[\xi_j, \xi_{j+1})$. En la figura 1.3 se representa gráficamente una base canónica de B-splines C^1 de grado 2 con su correspondiente vector de nodos abiertos.

Las funciones de base B-splines las denotaremos con $\mathcal{B}(\Xi) = \{B_{1,p}, \dots, B_{n,p}\}$ mientras que el espacio spline univariado de grado p sobre Ξ lo denotamos como

$$\mathbb{S}_{p,r}(\Xi) := \text{span}\{B_{j,p} : j = 1, \dots, n\}.$$

Las funciones de base $B_{j,p}$ satisfacen las siguientes propiedades: son funciones no negativas C^∞ excepto en los nodos ζ_i donde son C^{r_i} -continuas ($-1 \leq r_i = p - m_i \leq p - 1$), conforman una partición de la unidad y cada función de base tiene soporte local.

Los nodos sin repetición en Z conforman la malla unidimensional, denotaremos con $h_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i$ al tamaño de cada elemento I_i . En la figura 1.3 podemos ver graficadas las funciones de base correspondientes a una base canónica de splines C^1 de grado 2. En la literatura del análisis isogeométrico se consideran mallas localmente cuasi-uniformes, es decir (da Veiga et al., 2014, ver Sección 2.1.5) que existe un $\beta \geq 1$ tal que $\beta^{-1} \leq \frac{h_i}{h_{i+1}} \leq \beta$, para todo $i = 1, \dots, N - 1$.

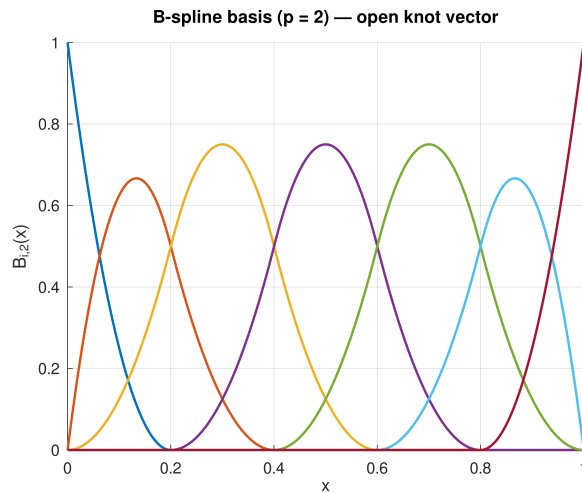


Figura 1.3: Base de B-splines canónicos para splines C^1 de grado $p = 2$, correspondientes al vector de nodos abierto $(p + 1) \Xi := \{0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1\}$. Solo una función de base tiene un valor distinto de cero en cada extremo, lo que permite la construcción de cuasi-interpolantes que coinciden con la función en los puntos del borde.

Grado polinomial y regularidad espacios univariados. Por simplicidad en esta tesis trabajaremos bajo dos supuestos en cuanto a los espacios splines univariados

- La partición será siempre uniforme, esto es, $h_i = h$ para todo $i = 1, \dots, N - 1$.
- La regularidad de las funciones de base será la misma en cada nodo interno de la partición. Así, suponemos que $r_i = \ell \geq 0$ para todo $i = 2, \dots, N$, mientras que el el borde $r_1 = r_{N+1} = -1$. Esto nos garantiza que las funciones de base serán globalmente C^ℓ .

Es por ello que, en la siguiente sección, denotaremos con $\mathbb{S}_{p,\ell,h}$ el espacio spline univariado de grado p y suavidad ℓ .

1.4.2. Espacios Splines producto tensor

Los espacios splines multivariados se definen mediante producto tensor de espacios splines univariados en cada dirección. Suponemos que el dominio de referencia $\hat{\Omega}$ es el cuadrado unitario en \mathbb{R}^2 , particionado uniformemente en N^2 cuadrados de área $h^2 = 1/N$, con $N \in \mathbb{N}$. Denotamos por \mathcal{M}_h la malla bidimensional determinada por estos elementos.

El espacio tensor-producto spline sobre $\hat{\Omega}$ se define como $\mathbb{S}_{p,\ell,h} = \mathcal{S}_{p_1,\ell,h} \otimes \mathcal{S}_{p_2,\ell,h}$, donde $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ son los grados polinomiales en cada dirección. En general, es posible tomar grados distintos en cada dirección; sin embargo, por simplicidad consideraremos $p_1 = p_2 = p$ a lo largo de este trabajo, de modo que $\mathbf{p} = (p, p)$. La base canónica de este espacio está dada por los productos tensoriales $B_{j_1,j_2,\mathbf{p}}(x, y) = B_{j_1,p}(x) B_{j_2,p}(y)$, donde $\{B_{j,p}\}_{j=1}^{n_1}$ y $\{B_{j,p}\}_{j=1}^{n_2}$ son las bases B-spline univariadas en cada dirección.

Grado polinomial y regularidad global del espacio spline. A partir de ahora omitimos los subíndices p y ℓ en los espacios, considerándolos fijos, y suponemos únicamente que $p \geq 2$ y $0 \leq \ell \leq p - 1$. La condición $p \geq 2$ es necesaria para establecer ciertas estimaciones inversas en la prueba de estabilidad de la Sección 5.5. Además, la base canónica B-spline de \mathbb{S}_h se denotará por $\{B_j\}_{j \in J}$, donde J es el conjunto de índices.

1.4.3. Propiedades de aproximación

Existen múltiples métodos para definir operadores de proyección en espacios splines. En esta tesis los utilizaremos como herramientas teóricas, por lo que nos interesa principalmente caracterizar sus propiedades y no una forma particular de calcularlos. Consideraremos cuasi-interpolantes multivariados definidos mediante producto tensor de cuasi-interpolantes univariados, siguiendo las ideas de Schumaker (2007); da Veiga et al. (2014); Bazilevs et al. (2006).

En Schumaker (2007, Section 12.3) definen un proyector de $L^1(\Omega)$ sobre el espacio \mathbb{S}_h como sigue

$$\mathcal{Q} : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{S}_h \quad \text{dado por} \quad \mathcal{Q}(W) = \sum_{j \in J} \lambda_j(W) B_j, \quad (1.16)$$

donde λ_j son funcionales lineales que definen una base dual para la base de B-splines, esto es, $\lambda_j(B_i) = \delta_{ij}$ (Schumaker, 2007, Theorem 4.41). Este operador de proyección se denomina *cuasi-interpolante* y es localmente estable en L^q para $1 \leq q \leq \infty$, lo que significa que (ver Schumaker (2007, Teorema 12.6))

- (I) $\mathcal{Q}W_h = W_h$ para toda $W_h \in \mathbb{S}_h$.

(II) $\|\mathcal{Q}W\|_{L^q(Q)} \leq C\|W\|_{L^q(\tilde{Q})}$ para todo $Q \in \mathcal{Q}_h$ y $W \in L^2(\Omega)$, donde \tilde{Q} es el soporte extendido de la celda Q .

Notar que, al considerar mallas uniformes (pero esto vale también incluso para mallas que sean localmente cuasi-uniformes^{*}), también tendremos la estabilidad del operador en seminormas Sobolev, esto es, $|\mathcal{Q}W|_{L^q(Q)} \leq C|W|_{L^q(\tilde{Q})}$.

Presentamos ahora las propiedades de aproximación. En [Bazilevs et al. \(2006, Lema 3.3\)](#) se encuentran los resultados para normas H^k . Aquí, presentaremos una adaptación normas $W^{k,q}$ que, hasta donde tenemos conocimiento, no ha sido abordado en la literatura. Si bien la demostración sigue técnicas similares a las utilizadas en trabajos previos, incluimos la demostración por razones de completitud. La demostración de los siguientes resultados se realiza con técnicas similares a las presentes en [Bazilevs et al. \(2006, Lema 3.3\)](#), o [Tagliabue et al. \(2014, Proposición 3.1\)](#).

Lema 3 (Error local de interpolación). *Sea $\mathcal{Q} : L^q(\Omega) \rightarrow \mathbb{S}_h$ sea un proyector que satisface I y II, entonces para $0 \leq |\alpha| \leq k \leq p+1$ y $U \in W^{k,q}(\tilde{Q}) \cap L^q(\Omega)$:*

$$\|D^\alpha(U - \mathcal{Q}U)\|_{L^q(Q)} \leq Ch^{k-|\alpha|}|U|_{W^{k,q}(\tilde{Q})} \quad (1.17)$$

con C independiente de h y p .

Demostración. Sea $\mathcal{T}U$ el polinomio de Taylor de grado p de U promediado sobre B , la bola de mayor radio tal que $B \subset \subset \tilde{Q}$, utilizando que \mathcal{Q} es un proyector localmente estable en L^q y estimaciones polinómicas de aproximación estándar

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(U - \mathcal{Q}U)\|_{L^q(Q)} &= \|D^\alpha(U - \mathcal{T}U)\|_{L^q(\tilde{Q})} + \|D^\alpha(\mathcal{T}U - \mathcal{Q}U)\|_{L^q(Q)} \\ &\leq \|D^\alpha(U - \mathcal{T}U)\|_{L^q(\tilde{Q})} + \|D^\alpha\mathcal{Q}(\mathcal{T}U - U)\|_{L^q(Q)} \\ &\leq Ch^{k-|\alpha|}|U|_{W^{k,q}(\tilde{Q})} + \frac{C}{h^{|\alpha|}}\|\mathcal{Q}(\mathcal{T}U - U)\|_{L^q(Q)} \\ &\leq Ch^{k-|\alpha|}|U|_{W^{k,q}(\tilde{Q})} + \frac{C}{h^{|\alpha|}}\|(\mathcal{T}U - U)\|_{L^q(\tilde{Q})} \\ &\leq Ch^{k-|\alpha|}|U|_{W^{k,q}(\tilde{Q})} + \frac{C}{h^{|\alpha|}}h^k|U|_{W^{k,q}(\tilde{Q})} \leq Ch^{k-|\alpha|}|U|_{W^{k,q}(\tilde{Q})}, \end{aligned}$$

con C independiente de h . □

Lema 4 (Error global de interpolación). *Sea $\mathcal{Q} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{S}_h$ un proyector que satisface I y II. Entonces, para $0 \leq |\alpha| \leq k \leq p+1$, $U \in W^{k,q}(\Omega)$ y $|\alpha| \leq \ell+1$, donde ℓ es la mínima regularidad del espacio spline (esto es, $\mathbb{S}_h \subset C^\ell(\Omega)$), se tiene*

$$|(U - \mathcal{Q}U)|_{W^{|\alpha|,q}(\Omega)} = \|D^\alpha(U - \mathcal{Q}U)\|_{L^q(\Omega)} \leq Ch^{k-|\alpha|}|U|_{W^{k,q}(\Omega)}, \quad (1.18)$$

con una constante C independiente de h y de p .

^{*}Una malla se dice localmente cuasi-uniforme cuando el radio de dos elementos vecinos está uniformemente acotado. Las mallas *shape regular*, esto es, el radio entre la longitud de un lado de un elemento Q y su diámetro esté acotada uniformemente con respecto a Q y a h , son mallas localmente cuasi-uniformes.

Demostración. Bajo la hipótesis $|\alpha| \leq \ell + 1$, la seminorma $|(U - \mathcal{Q}U)|_{W^{|\alpha|,q}(\Omega)}$ está bien definida. Dado que Ω es la unión disjunta de celdas $Q \in \mathcal{Q}_h$, se tiene

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(U - \mathcal{Q}U)\|_{L^q(\Omega)} &= \sum_{Q \in \mathcal{Q}_h} \|D^\alpha(U - \mathcal{Q}U)\|_{L^q(Q)} \\ &\leq Ch^{k-|\alpha|} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_h} |U|_{W^{k,q}(\tilde{Q})} \\ &\leq Ch^{k-|\alpha|} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_h} \sum_{Q' \in \tilde{Q}} |U|_{W^{k,q}(Q')} \\ &\leq KCh^{k-|\alpha|} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_h} |U|_{W^{k,q}(Q)} = KCh^{k-|\alpha|} |U|_{W^{k,q}(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde la constante K es independiente de h , pero depende del grado polinómico y de la dimensión de Ω (esta constante está relacionada con el número máximo de soportes a los que puede pertenecer una celda Q). \square

Siguiendo las mismas ideas, extendemos este operador al caso de funciones definidas en $\Omega \times [0, T]$, considerando que dejamos fija la variable t y definimos un operador para cada $U(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Lema 5. Sea $\mathcal{Q} : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{S}_h$ un operador proyector definido como en (1.16). Entonces, si $1 \leq q \leq \infty$, $T > 0$ y $U : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, satisface $U(t), \partial_t U(t) \in W^{k,q}(\Omega)$ para todo $0 \leq t \leq T$, tenemos que, para todo $0 \leq |\alpha| \leq k \leq p + 1$, si $|\alpha| \leq \ell + 1$,

$$|U(t) - \mathcal{Q}U(t)|_{W^{|\alpha|,q}(\Omega)} \leq Ch^{k-|\alpha|} |U(t)|_{W^{k,q}(\Omega)}, \quad (1.19)$$

$$|\partial_t U(t) - \partial_t(\mathcal{Q}U(t))|_{W^{|\alpha|,q}(\Omega)} \leq Ch^{k-|\alpha|} |\partial_t U(t)|_{W^{k,q}(\Omega)}, \quad (1.20)$$

con C una constante, independiente de h y U .

Demostración. La estimación (1.19) se obtiene de manera análoga a (1.18). Solo nos centraremos en la prueba de (1.20). Los funcionales λ_j se definen en Schumaker (2007) como integrales locales $\lambda_j(W) = \int_{I_j} W \Phi_j$, para ciertos $I_j \subset \Omega$ y $\Phi_j \in L^\infty(I_j)$, de manera que

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_j(U(t)) = \int_{I_j} \frac{\partial}{\partial t} U(t) \Phi_j,$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q}U(t) = \mathcal{Q} \left(\frac{\partial}{\partial t} U(t) \right),$$

entonces (1.20) es solo una consecuencia de (1.19). \square

Cuasi-interpolantes para funciones con valores de borde. Como consideramos problemas con valores en el borde Dirichlet, en algunos casos es importante considerar que estos operadores pueden ser modificados para preservar valores en el borde. Para ello es suficiente hacer modificaciones en los funcionales tal y como se explica en da Veiga et al.

(2014, Sección 2.1.5). En ese caso, se preserva la estabilidad en seminormas Sobolev y si bien no se tiene L^q estabilidad, tenemos un resultado similar:

$$\|\tilde{\mathcal{Q}}W\|_{L^q(Q)} \leq C\|W\|_{L^q(\tilde{Q})} + h|W|_{W^{1,q}(\tilde{Q})}.$$

Lo que deriva en la estabilidad \tilde{H}^1 para el operador en el caso de mallas cuasi-uniformes.

Para considerar los valores de borde se modifica el operador de proyección definido sobre \mathbb{S}_h de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathcal{Q}} : W^{1,1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{S}_h \quad \text{dado por} \quad \tilde{\mathcal{Q}}(W) = \sum_{j \in J} \lambda_j(W) B_j, \quad (1.21)$$

donde λ_j son funcionales lineales que definen una base dual para la base de B-splines, es decir, $\lambda_j(B_i) = \delta_{ij}$. Consideramos la modificación particular de los funcionales definida en (da Veiga et al., 2014, Ec. (2.29)), donde los funcionales de frontera univariados se definen mediante evaluaciones puntuales (por ejemplo, $\lambda_1(U) = U(0)$ y $\lambda_n(U) = U(1)$). El operador multidimensional $\tilde{\mathcal{Q}}$ se construye mediante un producto tensorial de cuasi-interpolantes univariados. Por lo tanto, para las funciones de base B_j que no se anulan en $\partial\Omega$, $\lambda_j(U)$ depende solo de $U|_{\partial\Omega}$; además, tales $\lambda_j(U)$ se anulan si $U|_{\partial\Omega} \equiv 0$, es decir, $\tilde{\mathcal{Q}}(U) \in \mathbb{S}_{h,0}$ si $U \in W_0^{1,1}(\Omega)$ (da Veiga et al., 2014, ver Ec. (2.47)–(2.49)).

Sus propiedades de aproximación, como se establece en el Lema 6 a continuación, son válidas para el proyector $\tilde{\mathcal{Q}}$ cuando se construye utilizando los funcionales duales antes mencionados. Mientras que los funcionales internos siguen la construcción L^q -estable de Schumaker (2007), los funcionales de frontera λ_j basados en evaluaciones puntuales requieren que U pertenezca al menos a $W^{1,q}(\Omega)$ para garantizar la estabilidad. Dado que esta base modificada preserva las propiedades de soporte local y reproducción polinomial, las estimaciones del error de cuasi-interpolación siguen siendo válidas.

Lema 6. *Sea $\tilde{\mathcal{Q}} : W^{1,1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{S}_h$ el operador proyector definido como en (1.21). Sean $1 \leq q \leq \infty$, $l \geq 1$ y $T > 0$. Si $U : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $U(t), \partial_t U(t) \in W^{l,q}(\Omega)$ para todo $0 \leq t \leq T$, entonces para $0 \leq k \leq l \leq p + 1$ con $k \leq \ell + 1$, se cumplen las siguientes estimaciones:*

$$\begin{aligned} \|U(t) - \tilde{\mathcal{Q}}U(t)\|_{W^{k,q}(\Omega)} &\leq Ch^{l-k} \|U(t)\|_{W^{l,q}(\Omega)}, \\ \|\partial_t U(t) - \partial_t(\tilde{\mathcal{Q}}U(t))\|_{W^{k,q}(\Omega)} &\leq Ch^{l-k} \|\partial_t U(t)\|_{W^{l,q}(\Omega)}, \\ \|\tilde{\mathcal{Q}}U(t)\|_{W^{l,q}(\Omega)} &\leq C \|U(t)\|_{W^{l,q}(\Omega)}, \\ \|\partial_t(\tilde{\mathcal{Q}}U(t))\|_{W^{l,q}(\Omega)} &\leq C \|\partial_t U(t)\|_{W^{l,q}(\Omega)}, \end{aligned}$$

para una constante C , que puede depender de k , l , q y p , pero que por lo demás es independiente de h y U . Además, para cada lado S de $\partial\Omega$, si $U(t)|_S, \partial_t U(t)|_S \in W^{l,q}(S)$,

tenemos:

$$\begin{aligned} \|U(t) - \tilde{Q}U(t)\|_{W^{k,q}(S)} &\leq Ch^{l-k} \|U(t)\|_{W^{l,q}(S)}, \\ \|\partial_t U(t) - \partial_t(\tilde{Q}U(t))\|_{W^{k,q}(S)} &\leq Ch^{l-k} \|\partial_t U(t)\|_{W^{l,q}(S)} \\ \|\tilde{Q}U(t)\|_{W^{l,q}(S)} &\leq C \|U(t)\|_{W^{l,q}(S)}, \quad \|\partial_t(\tilde{Q}U(t))\|_{W^{l,q}(S)} \leq C \|\partial_t U(t)\|_{W^{l,q}(S)}. \end{aligned}$$

Demostración. Las demostraciones de la estabilidad y de las estimaciones del error para $\tilde{Q}U$ se bosquejan en [da Veiga et al. \(2014\)](#) para $q = 2$. Las mismas ideas con modificaciones obvias conducen a las cotas correspondientes para $1 \leq q \leq \infty$. Las cotas para $\partial_t \tilde{Q}U$ surgen del hecho de que $\partial_t \lambda_j(U) = \lambda_j(\partial_t U)$, lo que por lo tanto implica que $\partial_t \tilde{Q}U(t) = \tilde{Q}(\partial_t U(t))$. \square

Con esta modificación y la definición del operador mediante producto tensor de operadores unidimensionales, ganamos una fuerte propiedad de localidad, más precisamente, $(\tilde{Q}U)|_{\partial\Omega}$ depende sólo de $U|_{\partial\Omega}$. Así, si Λ es una cara de $\partial\Omega$, $(\tilde{Q}U)|_{\Lambda}$ corresponde a la aplicación del proyector unidimensional a $U|_{\partial\Omega}$. Este tipo de modificaciones se han utilizado previamente en la Sección 3.4 de [Bazilevs et al. \(2006\)](#) para el caso de condición de borde Dirichlet homogéneo.

Capítulo 2

Flujo por Curvatura Media

El propósito de este capítulo es introducir el problema de flujo por curvatura media en superficies con borde Dirichlet. Así, como también presentar la formulación variacional utilizada para el esquema numérico propuesto en esta tesis.

2.1 Flujo por Curvatura Media en superficies con condición de borde Dirichlet

El flujo de curvatura media considera la evolución de una superficie $\Gamma(t)$ cuando su velocidad normal v es igual a $-\kappa$, siendo κ la curvatura media de Γ . Si consideramos que los puntos de la superficie se mueven a lo largo de la dirección normal con velocidad vectorial \mathbf{v} , tenemos:

$$\mathbf{v} = -\kappa \boldsymbol{\nu}, \quad \text{en } \Gamma(t) \times [0, T]. \quad (2.1)$$

En nuestro enfoque consideramos el flujo de curvatura media de la superficie $\Gamma(t)$ parametrizada por una cierta función $\mathbf{X}(\cdot, t)$, sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con condición de borde Dirichlet. En el dominio de referencia Ω esto conduce a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{X} &= \mathbf{v} \circ \mathbf{X} && \text{en } \Omega \times [0, T], \\ \mathbf{X}(t)|_{\partial\Omega} &= \mathbf{X}_0|_{\partial\Omega}, && \text{para } t > 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

considerando la función identidad en $\Gamma(t)$, $\mathbf{x} = \mathbf{X} \circ (\mathbf{X})^{-1}$, también se puede escribir en $\Gamma(t)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \partial^\bullet \mathbf{x} &= \mathbf{v} && \text{en } \Gamma(t) \times [0, T], \\ \mathbf{v}(t)|_{\partial\Gamma(t)} &= \mathbf{0}, && \text{para todo } t > 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Otra implicación de esta condición de contorno es que $\partial^\bullet f = \partial_t f$ en $\partial\Gamma(t)$, para cualquier función f definida en $\partial\Gamma(t)$. Denotando el vector tangente por $\boldsymbol{\tau} := \partial_s \mathbf{x}$, donde s es la longitud de arco de $\partial\Gamma(t)$, también podemos concluir que

$$\partial^\bullet \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \text{en } \partial\Gamma(t) \quad \text{para todo } t > 0, \quad (2.4)$$

debido a que $\boldsymbol{\tau}$ no cambia durante la evolución.

2.1.1. Ecuaciones de evolución y condiciones de borde para las cantidades geométricas

En el interior de la superficie $\Gamma(t)$, la normal superficial $\boldsymbol{\nu}$ y la curvatura media κ satisfacen las siguientes ecuaciones de evolución [Huisken \(1984\)](#):

$$\begin{aligned} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} &= \Delta_\Gamma \boldsymbol{\nu} + |\nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}|^2 \boldsymbol{\nu}, \\ \partial^\bullet \kappa &= \Delta_\Gamma \kappa + |\nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}|^2 \kappa. \end{aligned} \quad \text{on } \Gamma(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

En [Stone \(1996\)](#) se demostró que la curvatura media debe desaparecer en la frontera de $\Gamma(t)$, para todo $t > 0$:

$$\kappa(t) \equiv 0, \quad \text{en } \partial\Gamma(t) \times (0, T). \quad (2.6)$$

Este resultado es consecuencia de una condición de compatibilidad [Stone \(1996\)](#), que debe cumplirse en el borde, entre la velocidad nula del borde y la velocidad prescrita $\mathbf{v} = -\kappa \boldsymbol{\nu}$.

Hasta donde sabemos, no hemos encontrado referencias en la literatura al comportamiento del vector normal en la frontera, salvo que

$$\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \boldsymbol{\tau}(t) = 0, \quad \text{en } \partial\Gamma(t) \times [0, T]. \quad (2.7)$$

Esta condición no es suficiente para la unicidad de las soluciones de un sistema compuesto por las ecuaciones (2.1) y (2.5). Hemos obtenido el siguiente resultado para el mapeo de Weingarten actuando sobre la frontera, el cual es fundamental para nuestro algoritmo computacional, ya que proporciona una condición de frontera para la derivada del vector normal en la dirección del conormal $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}$ (ver [Figura 2.1](#)).

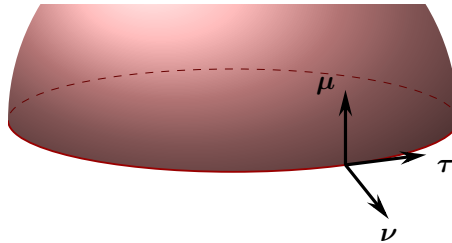


Figura 2.1: Orthonormal frame at a boundary point. $\boldsymbol{\nu}$ is normal to the surface, $\boldsymbol{\tau}$ is tangent to the boundary and $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}$ is the conormal vector.

Lema 7. *Para una superficie $\Gamma(t)$ que se mueve bajo el flujo de curvatura media con una frontera fija, es decir, que satisface (2.1) y $\mathbf{v}(t)|_{\partial\Gamma(t)} = \mathbf{0}$ para todo $t \in [0, T]$, la derivada del vector normal en la dirección de $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}$ satisface*

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\kappa}_\partial \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\mu} + (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \quad \text{en } \partial\Gamma(t), \quad (2.8)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector tangente unitario a $\partial\Gamma(t)$ y $\boldsymbol{\kappa}_\partial := \partial_s \boldsymbol{\tau}$ es el vector de curvatura de $\partial\Gamma(t)$. Como consecuencia, también tenemos

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\kappa}_\partial \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\mu}) \quad \text{para } \boldsymbol{\psi} \in N_x \partial\Gamma(t), \quad (2.9)$$

con $N_x(\partial\Gamma(t)) = \boldsymbol{\tau}^\perp$ el espacio de vectores ortogonales a $\boldsymbol{\tau}$ en $x \in \partial\Gamma(t)$.

Demostración. Consideramos la base ortonormal positivamente orientada de \mathbb{R}^3 formada por $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}\}$, con $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}$ el vector conormal a $\Gamma(t)$ en $\partial\Gamma(t)$. Entonces,

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} = (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu} + (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} = (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu} + (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}, \quad (2.10)$$

pues $\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu} = 0$.

De (2.6) tenemos

$$\nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \text{tr}(\nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}) = \kappa = 0.$$

Ya que $\nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\tau} = \partial_s \boldsymbol{\nu}$, de (2.7) podemos deducir que

$$0 = \partial_s(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \partial_s \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nu} \cdot \partial_s \boldsymbol{\tau}, = \partial_s \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial,$$

lo que implica fácilmente

$$0 = \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \partial_s \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau} + \partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial + \partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

Por lo tanto,

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial, \quad (2.11)$$

lo que junto con (2.10) conduce a la primera afirmación de este lema.

Sea $x \in \partial\Gamma(t)$, denotamos por $T_x \partial\Gamma(t)$ y $N_x \partial\Gamma(t) = (T_x \partial\Gamma(t))^\perp$ al espacio tangente $\partial\Gamma(t)$ y el espacio normal a $\partial\Gamma$ en x .

Si $\boldsymbol{\psi} \in N_x(\partial\Gamma(t))$ podemos escribir $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}$ y entonces usando (2.8), tenemos

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial)(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\psi}) + \partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi})$$

lo cual combinado con (VIIa) conduce a la última afirmación de este lema. \square

2.2 Formulación débil

Para la formulación débil consideramos (2.1), el sistema de ecuaciones parabólicas semilineales (2.5) y la EDO (2.2) junto con las condiciones de borde de (2.3), (2.6) y (2.9).

La formulación débil emplea espacios Sobolev estándar sobre superficies para la posición, la velocidad y la curvatura media. Mientras que, para el vector normal y tratar con la condición (2.7), definimos el siguiente espacio,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau}) &:= \left\{ \boldsymbol{\phi} \in H^1(\Gamma(t))^3 : \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \text{ en } \partial\Gamma(t) \right\} \\ &= \left\{ \boldsymbol{\phi} \in H^1(\Gamma(t))^3 : \mathcal{P}(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}, \text{ en } \partial\Gamma(t) \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector tangente de $\partial\Gamma(t)$ y $\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}$.

Observación 8. *Notar que si $\phi \in \mathcal{O}(\tau)$, entonces $\partial^\bullet \phi \in \mathcal{O}(\tau)$, debido a (2.4).*

Antes de obtener la formulación débil es importante mencionar que en adelante llamaremos $A := \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}$ y denotaremos por $\partial\Gamma_0$ al borde de la superficie inicial, esto significa que $\partial\Gamma_0 := \partial\Gamma(0) = \mathbf{X}(\partial\Omega, 0)$. Para obtener la formulación débil empezamos multiplicamos (2.5) por funciones test adecuadas η y $\boldsymbol{\psi}$ y luego usamos el Lema 1

$$\int_\Gamma \partial^\bullet \kappa \eta + \int_\Gamma \nabla_\Gamma \kappa \cdot \nabla_\Gamma \eta = \int_\Gamma |A|^2 \kappa \eta + \int_{\partial\Gamma_0} \eta \partial_\mu \kappa, \quad (2.13a)$$

$$\int_\Gamma \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_\Gamma \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} : \nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi} = \int_\Gamma |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\partial\Gamma_0} \boldsymbol{\psi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\nu}, \quad (2.13b)$$

donde debido a la condición de borde fijo tenemos que $\partial\Gamma(t) = \partial\Gamma_0$ para todo $t > 0$. Considerando $\eta \in H_0^1(\Gamma(t))$, el término que contiene la integral sobre borde en (2.13a) es cero. Para el término correspondiente en (2.13b), usamos el Lema 7 con funciones test en $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{O}(\tau)$, para obtener

$$\int_{\partial\Gamma_0} \partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} = \int_{\partial\Gamma_0} (\boldsymbol{\kappa}_{\partial\Gamma} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\mu}), \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{O}(\tau).$$

De esta manera, obtenemos la formulación débil del problema, que será la base de la discretización numérica que proponemos en este trabajo.

Problema 1. *Determinar $\Gamma(t)$, superficie suficientemente suave, descrita por un movimiento suave $\mathbf{X}(t) \in H^1(\Omega)^3$, con $\mathbf{v}(t) \in H_0^1(\Gamma(t))^3$ con $\kappa(t) \in H_0^1(\Gamma(t))$, $\partial^\bullet \kappa(t) \in L_0^2(\Gamma(t))$ y $\boldsymbol{\nu}(t) \in \mathcal{O}(\tau)$ con $\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}(t) \in \mathcal{O}(\tau)$ tales que:*

$$\partial_t \mathbf{X} = \mathbf{v} \circ \mathbf{X} \quad \text{en } \Omega, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{v} = -\kappa \boldsymbol{\nu}, \quad \text{on } \Gamma(t), \quad (2.15)$$

$$\int_{\Gamma(t)} \partial^\bullet \kappa \eta + \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma \kappa \cdot \nabla_\Gamma \eta = \int_{\Gamma(t)} |A|^2 \kappa \eta, \quad (2.16)$$

$$\int_{\Gamma(t)} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} : \nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi} = \int_{\Gamma(t)} |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\partial\Gamma_0} (\boldsymbol{\kappa}_{\partial} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\psi}), \quad (2.17)$$

$\forall \eta \in H_0^1(\Gamma(t))$, $\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{O}(\tau)$, y para casi todo $t \in [0, T]$. Las condiciones iniciales son

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad \text{en } \Omega, \quad \kappa(0) = \kappa_0, \quad \text{en } \Gamma_0, \quad \boldsymbol{\nu}(0) = \boldsymbol{\nu}_0, \quad \text{en } \Gamma_0,$$

donde \mathbf{X}_0 , κ_0 y $\boldsymbol{\nu}_0$ son, respectivamente, el mapeo inicial que define Γ_0 , la curvatura media y el vector normal de la superficie inicial Γ_0 . Debido a que pedimos $\mathbf{v}(t) \in H_0^1(\Gamma(t))^3$, la posición $\mathbf{X}(t)$ cumplirá la siguiente condición de borde $\mathbf{X}(t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{X}_0|_{\partial\Omega}$.

Observación 9. *Notar que si $\mathbf{X}(t)$ es una solución suficientemente suave de (2.3), entonces el vector normal $\boldsymbol{\nu}$ y la curvatura media κ de la superficie $\Gamma(t)$ descrita por \mathbf{X} , satisfacen las ecuaciones de evolución en (2.5) así como también (2.7), (2.6) y (2.9). Entonces, claramente se satisfacen (2.14) y (2.15). Luego, multiplicando cada ecuación*

en (2.5) por funciones test y utilizando Lema 1 se puede ver que tanto $\boldsymbol{\nu}$ como κ serán solución de (2.17) y (2.16).

Es importante mencionar que las condiciones de frontera dependen fuertemente de las ecuaciones bajo consideración, las cuales son de tipo parabólico no lineal para el Flujo de Curvatura Media. Al considerar otras ecuaciones de evolución, aparecerán condiciones de frontera diferentes para la curvatura media κ y el vector normal $\boldsymbol{\nu}$, tales como el flujo de Willmore (Kovács et al., 2021) o la evolución de superficies bajo un campo de velocidades prescrito (Bai et al., 2024). Además, una condición de frontera de Dirichlet no homogénea para \mathbf{X} también conducirá a condiciones de frontera diferentes para κ y $\boldsymbol{\nu}$. Cada ecuación da lugar a una investigación independiente que planeamos llevar a cabo en un futuro cercano.

Hipótesis de regularidad A partir de ahora supondremos que, para todo $t \in [0, T]$, la solución débil satisface $\mathbf{X}, \partial_t \mathbf{X} \in W^{p+1, \infty}(\Omega)$, donde $p \in \mathbb{N}$ es el grado polinómico del espacio spline definido más adelante en la Sección 3.1. Además, siempre que escribamos $A \lesssim B$ queremos decir $A \leq CB$, con una constante C que depende de $\max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{X}(t)\|_{W^{p+1, \infty}(\Omega)} + \|\partial_t \mathbf{X}(t)\|_{W^{p+1, \infty}(\Omega)}$, y posiblemente del grado polinómico p del espacio spline. También $A \cong B$ significa que $A \lesssim B$ y $B \lesssim A$.

Por último, notar que si la superficie inicial no satisface $\kappa|_{\partial\Gamma_0} \equiv 0$, se produciría una discontinuidad en el instante inicial debido a la condición de compatibilidad (2.6). Esto podría impedir la regularidad requerida de \mathbf{X} . No obstante, nuestros resultados pueden garantizarse, en principio, para superficies iniciales que cumplan dicha condición de compatibilidad. En la Sección 6.1.3 analizamos experimentalmente lo que ocurre cuando la superficie inicial no satisface esta hipótesis.

Capítulo 3

Aproximación de Superficies

En este capítulo extenderemos los resultados clásicos de espacios splines, a espacios splines evolutivos definidos sobre la superficie en distintos instantes de tiempo. Además definiremos las superficies discretas que utilizaremos para aproximar a la incógnita $\Gamma(t)$, presentando también estimaciones para los errores geométricos.

3.1 Superficie spline evolutiva

Primero empezaremos definiendo una superficie discreta $\Gamma_h(t)$ que aproximará a la superficie $\Gamma(t)$ en cada instante de tiempo. Para ello, definimos para cada $t > 0$, un mapeo $\mathbf{X}_h(t) \in \mathbb{S}_h^3$ que será una aproximación a la solución $\mathbf{X}(t)$. El espacio \mathbb{S}_h se define como en la Sección 1.4.2, es decir, un espacio spline producto tensor de grado polinomial p en cada dirección definido sobre una malla uniforme en Ω y con regularidad global C^ℓ para cierto $\ell \geq 0$. Este mapeo geométrico \mathbf{X}_h estará dado por

$$\mathbf{X}_h(P, t) = \sum_{j \in J} \mathbf{x}_j(t) B_j(P), \quad \forall P \in \Omega, \quad t > 0,$$

donde $\mathbf{x}_j(t) \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}_h := \text{span}\{B_j\}_{j \in J}$. Así, definimos $\Gamma_h(t) = \mathbf{X}_h(\Omega, t)$ como la superficie discreta globalmente C^ℓ ($\ell \geq 0$) que aproximará a $\Gamma(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Notar que, para el borde tenemos $\partial\Gamma_{h,0} = \mathbf{X}_h(\partial\Omega, 0)$ y $\partial\Gamma_h(t) = \partial\Gamma_{h,0}$ para todo t .

Luego, será necesario introducir el concepto de malla física $\mathcal{M}_h(t)$ definida sobre la superficie discreta $\Gamma_h(t)$. La cual será la imagen de \mathcal{M}_h (la malla en el dominio paramétrico Ω definida como en la Sección 1.4.2) mediante el mapeo geométrico $\mathbf{X}_h(t)$, es decir,

$$\mathcal{M}_h(t) := \{K \subset \Gamma_h(t) : K = \mathbf{X}_h(Q, t), Q \in \mathcal{M}_h\}.$$

Siguiendo [Bazilevs et al. \(2006\)](#), definimos el tamaño global de malla para la superficie dependiente del tiempo $\mathcal{M}_h(t)$ como

$$\hat{h} := \max_{t \in [0, T]} \max_{K \in \mathcal{M}_h(t)} h_K, \quad \text{con} \quad h_K = \|\nabla \mathbf{X}_h(t)\|_{L^\infty(Q)} h_Q,$$

donde $h_Q = \text{diam}(Q)$, con $Q \in \mathcal{M}_h$ tal que $K = \mathbf{X}_h(Q, t)$. Si $h_Q \simeq h_{K(t)}$, el tamaño global de la malla paramétrica $h := \max\{h_Q : Q \in \mathcal{M}_h\}$ y el tamaño global de la malla física \hat{h} satisfacen $h \simeq \hat{h}$. Para garantizar esto, a lo largo de toda la tesis trabajaremos bajo la siguiente suposición.

Supuesto 1 (Regularidad de \mathbf{X}_h). *Existe $h_0 > 0$ tal que para todo $h \leq h_0$ y $t \in [0, T]$, $\mathbf{X}_h(t)$ es un homeomorfismo bi-Lipschitz. Además, $\mathbf{X}_h(t)|_{\bar{Q}} \in C^\infty(\bar{Q})$ para todo $Q \in \mathcal{M}_{h_0}$, y $(\mathbf{X}_h)^{-1}(t)|_{\bar{K}(t)} \in C^\infty(\bar{K}(t))$, para todo $K(t) \in \mathcal{M}_{h_0}(t)$.*

Esta hipótesis de regularidad garantiza que no haya singularidades en la parametrización $\mathbf{X}_h(t)$ para todo $t \in [0, T]$, así como también previene las auto-intersecciones. Mostraremos en la Sección 5.4 que esta suposición es válida para valores suficientemente pequeños de h .

Para simplificar el tratamiento del borde, a lo largo de toda la tesis supondremos que $\partial\Gamma$ está formado por una o varias curvas suaves. Bajo esta hipótesis, cada componente de $\partial\Gamma$ coincide con la imagen de una curva del borde paramétrico $\partial\Omega$, por lo que cualquier región del borde $\Gamma_b \subset \partial\Gamma$ se corresponde con un subintervalo de una curva de $\partial\Omega$.

Definimos ahora los espacios discretos de aproximación siguiendo el enfoque isogeométrico, transportando las funciones base definidas en el dominio paramétrico a la superficie aproximada. De este modo, para $\Gamma_h(t)$ tenemos

$$\mathcal{S}_h(t) := \{f = F \circ \mathbf{X}_h^{-1}(t), F \in \mathcal{S}_h\} = \text{span}\{b_j(t) = B_j \circ \mathbf{X}_h^{-1}(t), j \in J\}. \quad (3.1)$$

Como estamos trabajando con superficies splines que evolucionan, necesitaremos una noción de derivada material discreta. Para ello definimos $\mathcal{G}_{h,T} = \bigcup_{t \in [0, T]} \Gamma_h(t) \times \{t\}$ y entonces, para una función $\eta_h : \mathcal{G}_{h,T} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la derivada material como

$$\partial^\bullet \eta_h(\mathbf{X}_h(P, t), t) = \partial_t \eta_h(\mathbf{X}_h(P, t), t), \quad (3.2)$$

para todo $\mathbf{X}_h(P, t) \in \Gamma_h(t)$ y $0 \leq t \leq T$.

Además, dado que las funciones base en $\Gamma_h(t)$ se definen mediante el transporte de las funciones base del espacio de splines en el dominio paramétrico (ver (1.15)) se puede probar que satisfacen una propiedad de transporte análoga a la que cumplen las funciones de base de ESFEM.

Lema 8 (Propiedad de transporte de las funciones de base spline). *Las funciones de base splines definidas en (3.1) satisfacen que*

$$\partial^\bullet b_j = 0 \quad \text{para todo } j \in J.$$

Demostración. Puede razonarse de manera análoga a (1.15). Dado $q \in \Gamma_h(t)$ sabemos que existe $P \in \Omega$ tal que $q = \mathbf{X}_h(P, t)$ y entonces

$$\begin{aligned} \partial^\bullet b_j(q, t) &= \partial^\bullet b_j(\mathbf{X}_h(P, t), t) = \partial_t b_j(\mathbf{X}_h(P, t), t) = \partial_t (B_j \circ (\mathbf{X}_h)^{-1}(\mathbf{X}_h(P, t), t)) \\ &= \partial_t (B_j(P)) = 0 \end{aligned}$$

donde simplemente se hace uso de la definición (3.2), de que $\text{id}_\Omega = (\mathbf{X}_h)^{-1} \circ \mathbf{X}_h$ y de que las funciones de base B_j en Ω son independientes del tiempo. \square

Por lo tanto, para cualquier función discreta $\eta_h(t) = \sum_{j \in J} \eta_j b_j \in \mathcal{S}_h(t)$ tenemos

$$\partial^\bullet \eta_h(q, t) = \sum_{j \in J} \dot{\eta}_j(t) b_j(q), \quad \forall q \in \Gamma_h(t).$$

Por último, la velocidad discreta se define como $\mathbf{v}_h = \partial_t \mathbf{X}_h \circ (\mathbf{X}_h)^{-1}$, en analogía a la velocidad a la que se mueve la superficie continua (1.9). Por lo tanto

$$\mathbf{v}_h(q, t) = \sum_{j \in J} \dot{\mathbf{x}}_j(t) b_j(q), \quad q \in \Gamma_h(t).$$

3.2 Superficie discreta auxiliar Γ^*

Para el análisis del error necesitamos introducir otra superficie discreta $\Gamma^*(t)$, la cual solo será utilizada para el análisis teórico del método. Definiremos $\Gamma^*(t)$ como la imagen de

$$\mathbf{X}^* := \tilde{\mathcal{Q}}\mathbf{X}, \quad \text{i.e., } \Gamma^*(t) = \mathbf{X}^*(\Omega, t), \quad (3.3)$$

denotaremos $\mathbf{X}_0^* := \mathbf{X}^*(\cdot, 0) = \tilde{\mathcal{Q}}\mathbf{X}_0$ en el borde $\mathbf{X}_0^*|_{\partial\Omega} = (\tilde{\mathcal{Q}}\mathbf{X}_0)|_{\partial\Omega} = \tilde{\mathcal{Q}}_{\partial\Omega}(\mathbf{X}_0|_{\partial\Omega})$ y gracias al Lema 6 tenemos que \mathbf{X}^* satisface las siguientes estimaciones. Además, resulta estable en norma H^1 y es uniformemente acotado en norma $W^{1,\infty}$.

Corolario 1. *Sea $\mathbf{X}^*(t) \in \mathbb{S}_h$ definida como en (3.3) y $\mathbf{X}(t) \in W_{\partial}^{p+1,s}(\Omega)$ para todo $t \in [0, T]$, con $1 \leq s \leq \infty$, entonces*

$$\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t)\|_{L^s(\Omega)} + h\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t)\|_{W^{1,s}(\Omega)} \lesssim h^{p+1}, \quad (3.4)$$

$$\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_0^*\|_{L^s(\partial\Omega)} + h\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_0^*\|_{W^{1,s}(\partial\Omega)} \lesssim h^{p+1}. \quad (3.5)$$

En lo que sigue supondremos que $\mathbf{X}_{h,0} = \mathbf{X}_0^*$, de modo que, en particular, $\partial\Gamma_0^* = \partial\Gamma_{h,0}$. De la misma manera en que definimos $\mathcal{S}_h(t)$, definimos ahora el espacio discreto $\mathcal{S}_h^*(t)$, el cual estará conformado por funciones discretas definidas sobre esta nueva superficie. Las funciones base b_j^* se definen nuevamente como el transporte a $\Gamma^*(t)$ de las funciones base B_j del espacio spline \mathbb{S}_h .

3.3 Lifts entre diferentes superficies

Necesitaremos comparar cantidades, funciones y operadores diferenciales definidos en diferentes superficies $\Gamma(t)$, $\Gamma^*(t)$ y $\Gamma_h(t)$.

Para hacerlo, vamos a definir *lifts* de la siguiente manera: dada una función definida en una superficie, primero vamos a “llevarla” a través de su pullback al dominio paramétrico Ω y luego definimos su push-forward para liftarla hasta la nueva superficie. Así, para cada $t \in [0, T]$, toda $\phi_h^*(t)$ definida en $\Gamma^*(t)$ estará asociada con la función

$$(\phi^*)^{\Gamma(t)}(t) := \phi^*(t) \circ \mathbf{X}^*(t) \circ (\mathbf{X})^{-1}(t),$$

definida en $\Gamma(t)$.

De la misma manera podemos liftar funciones en $\Gamma_h(t)$ a $\Gamma^*(t)$, como así también entre cualesquiera dos superficies, siguiendo la estrategia de pullback y push-forward strategy. Notar que $\mathcal{S}_h^*(t) = (\mathcal{S}_h(t))^{\Gamma^*}$, así como también $\mathcal{S}_h(t) = (\mathcal{S}_h^*(t))^{\Gamma}$.

Usando el Lema 14 en [Bonito et al. \(2020\)](#), tenemos la siguiente relación entre los gradientes tangenciales de funciones en $\Gamma^*(t)$ y sus lifts a $\Gamma(t)$,

$$(\nabla_{\Gamma}(\eta_h^*)^{\Gamma})^{\Gamma^*} = (\nabla \mathbf{X} G^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T) \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^*, \quad (3.6)$$

donde $G = (\nabla \mathbf{X})^T \nabla \mathbf{X}$ es el tensor métrico dependiente del tiempo correspondiente a la parametrización $\mathbf{X}(t)$.

Lifts y normas. Puesto que estamos suponiendo, como condición más débil, que $\Gamma(t)$ y $\Gamma^*(t)$ son superficies Lipschitz relacionadas mediante un mapeo bi-Lipschitz $\mathcal{L} = (\mathbf{X}^*)^{-1} \circ \mathbf{X}$, las normas Sobolev de una función y su lift son equivalentes (ver [Bonito et al. \(2020, Lema 17\)](#)), independientemente del tamaño de la malla h , siempre que h sea suficientemente pequeño. Más precisamente, para $k = 0, 1$ y $1 \leq s \leq \infty$, existe $h_0 > 0$ tal que, para $0 < h \leq h_0$, $0 \leq t \leq T$, y cualquier $\eta^* \in W^{k,s}(\Gamma(t))$,

$$\|\eta^*\|_{W^{k,s}(\Gamma^*(t))} \lesssim \|(\eta^*)^{\Gamma(t)}\|_{W^{k,s}(\Gamma(t))} \lesssim \|\eta^*\|_{W^{k,s}(\Gamma^*(t))}. \quad (3.7)$$

3.4 Errores geométricos

Presentamos estimaciones para el error de consistencia geométrico obtenido al aproximar $\Gamma(t)$ con la superficie discreta $\Gamma^*(t)$. Para ello, estudiaremos el error que resulta cuando las formas bilineales en Problema 1 se sustituyen por formas bilineales definidas en $\Gamma^*(t)$. Esto producirá errores entre los elementos de área correspondientes, así como matrices de error que derivaremos más adelante, por ejemplo, al comparar

$$\int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \phi^* \quad \text{con} \quad \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} (\eta^*)^{\Gamma} \cdot \nabla_{\Gamma} (\phi^*)^{\Gamma}.$$

Denotamos los elementos de área dependientes del tiempo con q_{Γ} y q_{Γ^*} , los cuales se definen como $q_{\Gamma}(t) := \sqrt{\det(G_{\Gamma}(t))}$ y $q_{\Gamma^*}(t) := \sqrt{\det(G_{\Gamma^*}(t))}$, donde $G_{\Gamma}(t) := (\nabla \mathbf{X}(t))^T \nabla \mathbf{X}(t)$ y $G_{\Gamma^*}(t) := (\nabla \mathbf{X}^*(t))^T \nabla \mathbf{X}^*(t)$ denotan la primera forma fundamental de $\Gamma(t)$ y $\Gamma^*(t)$ respectivamente. Además, $q_{\partial\Gamma_0} = |\partial_{\tau} \mathbf{X}_0|$ and $q_{\partial\Gamma_0^*} = |\partial_{\tau} \mathbf{X}_0^*|$ son los correspondientes elementos unidimensionales de borde asociados a $\partial\Gamma_0$ y $\partial\Gamma_0^*$, respectivamente.

En toda esta sección suponemos que $\mathbf{X}(t) \in W^{p+1,\infty}(\Omega)$ para todo $t \in [0, T]$.

Lema 9. *Existe $h_0 > 0$, tal que $0 < h \leq h_0$ tenemos la siguiente estimación para el error*

geométrico, para $0 \leq t \leq T$,

$$\max_{t \in [0, T]} \|1 - q_{\Gamma^*}^{-1}(t)q_{\Gamma}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim h^p, \quad (3.8)$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|I - G_{\Gamma^*}(t)G_{\Gamma}^{-1}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim h^p, \quad (3.9)$$

$$\|1 - q_{\partial\Gamma^*}^{-1}q_{\partial\Gamma_0}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \lesssim h^p. \quad (3.10)$$

Demostración. Las dos primeras estimaciones se derivan de las estimaciones para q y G dadas para el caso estacionario en la teoría de perturbaciones para superficies $C^{1,\alpha}$ presentada en Bonito et al. (2020). Así que usando el Lema 16 de Bonito et al. (2020) para cada $t \in [0, T]$ tenemos

$$\begin{aligned} \|1 - q_{\Gamma^*}^{-1}(t)q_{\Gamma}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\lesssim \|\nabla(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t))\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ \|I - G_{\Gamma^*}^{-1}(t)G_{\Gamma}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\lesssim \|\nabla(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t))\|_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde la constante oculta es una constante de estabilidad dependiente del tiempo $S_{\mathbf{X}}$, que es definida como en Bonito et al. (2020), y además es independiente de h para todo $h \leq h_0$ debido a las propiedades de \mathbf{X} and \mathbf{X}^* . Finalmente, usando (3.4) y tomando el máximo en t obtenemos las estimaciones (3.8) y (3.9).

Para la estimación (3.10), consideramos \mathbf{X}_0 como una parametrización de la curva $\partial\Gamma_0$ y $\mathbf{X}_0^* := \tilde{\mathcal{Q}}\mathbf{X}_0|_{\partial\Omega}$ como una parametrización de $\partial\Gamma^*$, con $\tilde{\mathcal{Q}}$ definido en (1.21). Así, las primeras formas fundamentales son $|\partial_\tau \mathbf{X}_0|^2$ y $|\partial_\tau \mathbf{X}_0^*|^2$, respectivamente, y para los elementos de longitud tenemos

$$\begin{aligned} \|1 - q_{\partial\Gamma^*}^{-1}q_{\partial\Gamma}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} &= \|1 - |\partial_\tau \mathbf{X}_0^*|^{-1}|\partial_\tau \mathbf{X}_0|\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\ &\lesssim \|\partial_\tau \mathbf{X}_0 - \partial_\tau \mathbf{X}_0^*\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \lesssim h^p, \end{aligned}$$

donde hemos usado la estimación (3.5) para \mathbf{X}_0^* en el borde. \square

En esta tesis utilizaremos, además de las estimaciones dadas anteriormente, estimaciones de aproximación para $\partial_t G_{\Gamma}$ y para $\partial_t q_{\Gamma}$.

Lema 10. *Existe $h_0 > 0$ tal que, si $0 < h \leq h_0$, tenemos*

$$\max_{t \in [0, T]} \|\partial_t G_{\Gamma}(t) - \partial_t G_{\Gamma^*}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim h^p, \quad (3.11)$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|\partial_t q_{\Gamma}(t) - \partial_t q_{\Gamma^*}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim h^p. \quad (3.12)$$

Demostración. Usando la definición de G_{Γ^*} y de G_{Γ} tenemos

$$\begin{aligned} \|\partial_t G_{\Gamma} - \partial_t G_{\Gamma^*}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq 2 \|\nabla \partial_t \mathbf{X}^T \nabla \mathbf{X} - (\nabla \partial_t \mathbf{X}^*)^T \nabla \mathbf{X}^*\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq 2 \left(\|\nabla \partial_t (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^T \nabla \mathbf{X}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla \partial_t \mathbf{X}^*)^T \nabla (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ &\lesssim \|\nabla \partial_t (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim h^p, \end{aligned}$$

donde hemos usado estimaciones del error de interpolación en Lema 5 y que

$$\max \|\nabla(\partial_t \mathbf{X})\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla(\partial_t \mathbf{X}^*)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

está acotado uniformemente por propiedades de interpolación.

Por otra parte, gracias al Lema 9 y la suavidad de \mathbf{X} sabemos que

$$\max_{t \in [0, T]} \max \left\{ \|G_\Gamma^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|G_{\Gamma^*}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\partial_t G_\Gamma\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\partial_t G_{\Gamma^*}\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} \leq C. \quad (3.13)$$

Para obtener (3.12) usamos que $\partial_t q_\Gamma = \frac{1}{2} q_\Gamma \operatorname{tr}(G_\Gamma^{-1} \partial_t G_\Gamma)$ para descomponer

$$\begin{aligned} \partial_t q_\Gamma - \partial_t q_{\Gamma^*} &= \frac{1}{2} q_\Gamma \operatorname{tr}(G_\Gamma^{-1} \partial_t G_\Gamma) - \frac{1}{2} q_{\Gamma^*} \operatorname{tr}(G_{\Gamma^*}^{-1} \partial_t G_{\Gamma^*}) \\ &= \frac{1}{2} q_\Gamma \operatorname{tr}(G_\Gamma^{-1} \partial_t G_\Gamma) - \frac{1}{2} q_\Gamma \operatorname{tr}(G_{\Gamma^*}^{-1} \partial_t G_{\Gamma^*}) \\ &\quad + \frac{1}{2} q_\Gamma \operatorname{tr}(G_{\Gamma^*}^{-1} \partial_t G_{\Gamma^*}) - \frac{1}{2} q_{\Gamma^*} \operatorname{tr}(G_{\Gamma^*}^{-1} \partial_t G_{\Gamma^*}). \end{aligned}$$

luego sumando y restando los términos cruzados correspondientes dentro de las trazas de las matrices, y usando (3.13) y el Lema 9 se tiene la estimación buscada. \square

Lema 11. *Existe $h_0 > 0$ tal que, si $0 < h \leq h_0$, tenemos*

$$\max_{t \in [0, T]} \|E_{\Gamma^*}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim h^p, \quad (3.14)$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|E_{\Gamma^*}^{\mathcal{B}}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim h^p, \quad (3.15)$$

donde las matrices E_{Γ^*} and $E_{\Gamma^*}^{\mathcal{B}}$ son definidas, para cada $t \in [0, T]$, en Ω por

$$E_{\Gamma^*} = \Pi_{\Gamma^*} - \nabla \mathbf{X}^* G_\Gamma^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T q_{\Gamma^*}^{-1} q_\Gamma, \quad (3.16)$$

$$E_{\Gamma^*}^{\mathcal{B}} = \Pi_{\Gamma^*} B_\Gamma \Pi_{\Gamma^*} - \nabla \mathbf{X}^* G_\Gamma^{-1} \nabla \mathbf{X}^T B_\Gamma \nabla \mathbf{X} G_\Gamma^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T q_{\Gamma^*}^{-1} q_\Gamma, \quad (3.17)$$

con $\Pi_{\Gamma^*} := \nabla \mathbf{X}^* G_\Gamma^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T$ la matriz de proyección sobre el plano tangente a la matriz de proyección sobre el plano tangente a Γ^* y

$$\begin{aligned} B_\Gamma &= \mathcal{B}_\Gamma \circ \mathbf{X} = \left[\operatorname{div}_{\Gamma(t)} \mathbf{v} I_3 - (\nabla_\Gamma \mathbf{v} + (\nabla_\Gamma \mathbf{v})^T) \right] \circ \mathbf{X}, \\ B_{\Gamma^*} &= \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \circ \mathbf{X}^* = \left[\operatorname{div}_{\Gamma^*(t)} \mathbf{v}^* I_3 - (\nabla_{\Gamma^*(t)} \mathbf{v}^* + (\nabla_{\Gamma^*(t)} \mathbf{v}^*)^T) \right] \circ \mathbf{X}^*, \end{aligned}$$

tal como se definió inmediatamente después de (1.12).

Demostración. Para (3.14), reescribimos E_{Γ^*}

$$\begin{aligned} E_{\Gamma^*} &= \nabla \mathbf{X}^* G_{\Gamma^*}^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T - \nabla \mathbf{X}^* G_\Gamma^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T q_{\Gamma^*}^{-1} q_\Gamma \\ &= \nabla \mathbf{X}^* (G_{\Gamma^*}^{-1} - G_\Gamma^{-1} q_{\Gamma^*}^{-1} q_\Gamma) (\nabla \mathbf{X}^*)^T \\ &= \nabla \mathbf{X}^* (G_{\Gamma^*}^{-1} - G_\Gamma^{-1} + G_\Gamma^{-1} - G_\Gamma^{-1} q_{\Gamma^*}^{-1} q_\Gamma) (\nabla \mathbf{X}^*)^T \\ &= \nabla \mathbf{X}^* (G_{\Gamma^*}^{-1} (I - G_{\Gamma^*} G_\Gamma^{-1}) + G_\Gamma^{-1} (1 - q_{\Gamma^*}^{-1} q_\Gamma)) (\nabla \mathbf{X}^*)^T. \end{aligned}$$

Para obtener la estimación usamos (3.8), (3.9) y que el producto

$$\|G_\Gamma^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \|G_{\Gamma^*}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \mathbf{X}^*\|_{L^\infty(\Omega)}^2$$

está acotado por la misma constante de estabilidad $S_{\mathbf{X}}$ que en el Lema 9, el cual es independiente de h .

Para probar (3.15) primero recordamos la definición de $\Pi_{\Gamma^*} = \nabla \mathbf{X}^* G_{\Gamma^*}^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T$ y luego usamos los Lemas 30 y 31 en Barrett et al. (2020), para concluir que

$$\begin{aligned} B_\Gamma^* &= \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \circ \mathbf{X}^* I_3 - \left(\nabla_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* + (\nabla_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*)^T \right) \circ \mathbf{X}^* = \partial_t q_{\Gamma^*} I_3 - \frac{1}{2} \partial_t G_{\Gamma^*}, \\ B_\Gamma &= \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} \circ \mathbf{X} I_3 - \left(\nabla_\Gamma \mathbf{v} + (\nabla_\Gamma \mathbf{v})^T \right) \circ \mathbf{X} = \partial_t q_\Gamma I_3 - \frac{1}{2} \partial_t G_\Gamma, \end{aligned}$$

Lo anterior nos permite obtener la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} E_{\Gamma^*}^{\mathcal{B}} &= \Pi_{\Gamma^*}^* \partial_t q_{\Gamma^*} \Pi_{\Gamma^*} - \Pi_{\Gamma^*}^* \frac{1}{2} \partial_t G_{\Gamma^*} \Pi_{\Gamma^*} - \partial_t q_{\Gamma^*} \nabla \mathbf{X}^* G_{\Gamma^*}^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T q_{\Gamma^*}^{-1} q_\Gamma \\ &\quad - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{X}^* G_{\Gamma^*}^{-1} \nabla \mathbf{X}^T \partial_t G_\Gamma \nabla \mathbf{X} G_\Gamma^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T q_{\Gamma^*}^{-1} q_\Gamma. \end{aligned}$$

Luego, usando que $\nabla \mathbf{X}^T \nabla \mathbf{X} G_\Gamma^{-1} = \mathbf{I}$ es la matriz identidad y Π_{Γ^*} es una matriz de proyección. Finalmente, sumando y restando los términos cruzados correspondientes y usando (3.14) y las estimaciones de los Lemas 9 y 10 se tiene la estimación. \square

Lema 12 (Errores geométricos de perturbación). *Existe un $h_0 > 0$ suficientemente pequeño, tal que para todo $0 < h \leq h_0$ se cumple que*

$$\left| \int_{\Gamma^*} \eta^* \phi^* - \int_\Gamma (\eta^* \phi^*)^\Gamma \right| \lesssim h^p \|\eta^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\phi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}, \quad (3.18a)$$

$$\left| \int_{\partial\Gamma_0^*} \eta^* \phi^* - \int_{\partial\Gamma_0} (\phi^* \eta^*)^\Gamma \right| \lesssim h^p \|\eta^*\|_{L^2(\partial\Gamma^*)} \|\phi^*\|_{L^2(\partial\Gamma^*)}, \quad (3.18b)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \phi^* - \int_\Gamma \nabla_\Gamma (\eta^*)^\Gamma \cdot \nabla_{\Gamma^*} (\phi^*)^\Gamma \right| & \quad (3.18c) \\ & \lesssim h^p \|\nabla_{\Gamma^*} \eta^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\nabla_{\Gamma^*} \phi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\Gamma^*} \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \eta^* \phi^* - \int_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} (\eta^* \phi^*)^\Gamma \right| \lesssim h^p \|\eta^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\phi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}, \quad (3.18d)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \nabla_{\Gamma^*} \phi^* - \int_\Gamma \nabla_\Gamma (\eta^*)^\Gamma \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}) \nabla_\Gamma (\phi^*)^\Gamma \right| & \quad (3.18e) \\ & \lesssim h^p \|\nabla_{\Gamma^*} \eta^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\nabla_{\Gamma^*} \phi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

para todas las funciones suficientemente suaves η^* y ϕ^* definidas en Γ^* . Es importante notar que no asumimos que ϕ^* y η^* estén necesariamente en $\mathcal{S}_h^*(t)$.

Demostración. Consideraremos que las superficies y funciones son dependientes del tiempo, pero omitiremos el argumento t para no sobrecargar la notación. Para (3.18a), cambiando

de variables, utilizando la equivalencia de normas entre las normas en Γ^* y el dominio paramétrico, y la cota geométrica (3.8), tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma^*} \eta^* \phi^* - \int_{\Gamma} (\eta^*)^{\Gamma} (\phi^*)^{\Gamma} \right| &= \left| \int_{\Gamma^*} \eta^* \phi^* - \int_{\Gamma^*} \eta^* \phi^* q_{\Gamma} q_{\Gamma^*}^{-1} \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma^*} \eta^* \phi^* (1 - q_{\Gamma} q_{\Gamma^*}^{-1}) \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \right| \\ &\lesssim \|\eta^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\phi^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \|1 - q_{\Gamma} q_{\Gamma^*}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\lesssim h^p \|\eta^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\phi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos (3.18b), pero usando la estimación (3.10) y desigualdad de Hölder con L^2 - L^2 en el borde.

Para probar (3.18c) procedemos de manera similar, utilizando una regla en cadena para los gradientes como en (3.6)

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \phi^* - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} (\eta^*)^{\Gamma} \cdot \nabla_{\Gamma^*} (\phi^*)^{\Gamma} \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \phi^* - \int_{\Gamma^*} (\nabla_{\Gamma} (\eta^*)^{\Gamma})^{\Gamma^*} \cdot (\nabla_{\Gamma^*} (\phi^*)^{\Gamma})^{\Gamma^*} q_{\Gamma} q_{\Gamma^*}^{-1} \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot E_{\Gamma^*} \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \nabla_{\Gamma^*} \phi^* \right|. \end{aligned}$$

La matriz de error E_{Γ^*} , se define como en (3.16) y se obtiene utilizando que

$$\nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \phi^* = \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \Pi_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \phi^*,$$

junto con

$$\begin{aligned} &(\nabla_{\Gamma} (\eta^*)^{\Gamma})^{\Gamma^*} \cdot (\nabla_{\Gamma} (\phi^*)^{\Gamma})^{\Gamma^*} \\ &= (\nabla \mathbf{X} G_{\Gamma}^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T) \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot (\nabla \mathbf{X} G_{\Gamma}^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T) \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \nabla_{\Gamma^*} \phi^* \\ &= \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot (\nabla \mathbf{X}^* G_{\Gamma}^{-1} \nabla \mathbf{X}^T \nabla \mathbf{X} G_{\Gamma}^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T) \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \nabla_{\Gamma^*} \phi^* \\ &= \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot (\nabla \mathbf{X}^* G_{\Gamma}^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T) \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \nabla_{\Gamma^*} \phi^*. \end{aligned}$$

Obtenemos la estimación final utilizando la equivalencia de la norma de E_{Γ^*} en Ω y su push-forward a Γ^* , junto con la estimación (3.14).

Para (3.18d), utilizamos un resultado acerca de la evolución del elemento de área con el tiempo, el mismo fue probado en el Lema 31 en Barrett et al. (2020) para superficies evolutivas C^2 . Entonces, tenemos $\partial_t q_{\Gamma} = \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \circ \mathbf{X} q_{\Gamma}$ in Ω . Además, si la superficie Γ^* no tuviese globalmente la regularidad requerida, gracias a que es suave a trozos, podemos aplicar el mismo resultado a cada elemento de Γ^* , tenemos $\partial_t q_{\Gamma^*} \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} =$

$\operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* q_{\Gamma^*}^{-1} \circ (\mathbf{X}^*)^{-1}$ en cada $K^* \subset \Gamma^*$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma^*} \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \eta^* \phi^* - \int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} (\eta^*)^{\Gamma} (\phi^*)^{\Gamma} \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma^*} \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \eta^* \phi^* - \int_{\Gamma^*} (\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v})^{\Gamma^*} \eta^* \phi^* (q_{\Gamma} q_{\Gamma^*}^{-1}) \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma^*} \left(\operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* - (\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v})^{\Gamma^*} \right) (q_{\Gamma} q_{\Gamma^*}^{-1}) \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \eta^* \phi^* \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma^*} (\partial_t q_{\Gamma^*} - \partial_t q_{\Gamma}) q_{\Gamma^*}^{-1} \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \eta^* \phi^* \right|, \end{aligned}$$

Así, usando que $\|q_{\Gamma^*}^{-1}\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*)}$ está acotada independientemente de h , (3.12) y la equivalencia de normas entre $\partial_t q_{\Gamma^*} - \partial_t q_{\Gamma}$ y sus push-forward a Γ^* obtenemos la estimación (3.18d).

Finalmente, con el objetivo de probar (3.18e), usamos nuevamente (3.6). Simplificaremos la notación en esta parte de la prueba y haremos referencia a $\mathcal{B}(\mathbf{v})$ con \mathcal{B}_{Γ} y $\mathcal{B}(\mathbf{v}^*)$ con \mathcal{B}_{Γ^*} ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \nabla_{\Gamma^*} \phi^* - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} (\eta^*)^{\Gamma} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}) \nabla_{\Gamma} (\phi^*)^{\Gamma} \\ &= \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \mathcal{B}_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \phi^* - \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} (\eta^*)^{\Gamma})^{\Gamma^*} \cdot (\mathcal{B}_{\Gamma})^{\Gamma^*} (\nabla_{\Gamma} (\phi^*)^{\Gamma})^{\Gamma^*} \\ &= \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot E_{\Gamma^*}^{\mathcal{B}} \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \nabla_{\Gamma^*} \phi^*, \end{aligned}$$

donde la matriz de error $E_{\Gamma^*}^{\mathcal{B}}$ se define como en (3.17) y se obtiene usando que

$$\nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \mathcal{B}_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \phi^* = \nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot \Pi_{\Gamma^*} \mathcal{B}_{\Gamma} \Pi_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \phi^*,$$

y (3.6) para reescribir $(\nabla_{\Gamma} (\eta^*)^{\Gamma})^{\Gamma^*} \cdot (\mathcal{B}_{\Gamma})^{\Gamma^*} (\nabla_{\Gamma} (\phi^*)^{\Gamma})^{\Gamma^*}$ as

$$\nabla_{\Gamma^*} \eta^* \cdot (\nabla \mathbf{X}^* G_{\Gamma}^{-1} \nabla \mathbf{X}^T (\mathcal{B}_{\Gamma})^{\Gamma^*} \nabla \mathbf{X} G_{\Gamma}^{-1} (\nabla \mathbf{X}^*)^T q_{\Gamma} q_{\Gamma^*}^{-1}) \circ (\mathbf{X}^*)^{-1} \nabla_{\Gamma^*} \phi^*.$$

Obtenemos entonces la última estimación (3.18e) usando de nuevo equivalencia de normas entre $E_{\Gamma^*}^{\mathcal{B}}$ y su push-forward a Γ^* and (3.15). \square

Observación 10. *Comparando las estimaciones que hemos presentado en esta sección con las presentes en la literatura, hemos obtenido estimaciones de orden p en vez de orden $p+1$ como las que se obtienen en elementos finitos (véase, por ejemplo, (Kovács, 2017, Lemma 5.6) o (Elliott and Ranner, 2020, Lemma 9.24)). Esto se debe al hecho de que en esta tesis usamos un lift genérico $\mathcal{L} := \mathbf{X} \circ (\mathbf{X}^*)^{-1}$, de Γ^* a Γ en lugar de utilizar el lift dado por la función distancia orientada. Este hecho hace que la reducción del orden sea esperable debido a que es un comportamiento análogo al que sucede cuando se analizan los errores geométricos en problemas estacionarios, por ejemplo, con el operador de Laplace-Beltrami y se utiliza un lift genérico definido mediante las parametrizaciones (ver (Bonito et al., 2020, Section 4.3)).*

Nos parece importante mencionar que estos errores de orden p no afectan el análisis a priori del error H^1 , como veremos más adelante en la Sección 5.2. Esto también es esperable pues tampoco lo afectaba en el análisis del error para Laplace-Beltrami. También cabe recordar que una función distancia C^1 implica superficies $C^{1,1}$ (ver Teorema 11 en Bonito et al. (2020)), con lo cual para garantizar errores geométricos con orden óptimo se tiene que garantizar Γ al menos C^{p+2} (ver (Elliott and Ranner, 2020, Observación 9.1)), esto es al menos C^4 , si $p \geq 2$, mientras que con estas técnicas, solo se requiere que Γ sea de clase C^{p+1} para retener el orden de aproximación.

Observación 11. Otra diferencia que vale la pena notar con los trabajos en elementos finitos es que como aquí usamos el lift dado por las parametrizaciones globales de las superficies, $\mathcal{L} = \mathbf{X} \circ (\mathbf{X}^*)^{-1}$, la velocidad de los puntos materiales es la misma que la velocidad continua \mathbf{v} y por ello no tenemos dos versiones del Teorema del Transporte en $\Gamma(t)$ como sí es común en la literatura, ver por ejemplo (Kovács, 2017, Sección 5.3) o (Elliott and Ranner, 2020, Sección 8.6). De esta manera, si se comparan por ejemplo las últimas dos estimaciones en el Lema 12 con las últimas dos estimaciones en el Lema 5.6 de Kovács (2017) veremos que aquí, en lugar de tener la velocidad discreta \mathbf{v}_h en las formas bilineales continuas (que no es la interpolada de \mathbf{v}), tenemos simplemente a \mathbf{v} .

Capítulo 4

Estimaciones de Aproximación

En este Capítulo presentaremos estimaciones de aproximación para los espacios splines definidos sobre las superficies. Para ello presentaremos operadores de Quasi-interpolación y operadores de tipo Ritz estudiando sus propiedades de aproximación.

4.1 Quasi-interpolante definido en la superficie

Definición 17. Recordemos la definición de $\Gamma^*(t)$ dada en (3.3) con su correspondiente espacio spline $\mathcal{S}_h^*(t)$. Para cada $t > 0$ definimos un proyector $\mathcal{Q}_{\Gamma^*(t)} : L^2(\Gamma(t)) \rightarrow \mathcal{S}_h^*(t)$ como sigue

$$\mathcal{Q}_{\Gamma^*(t)}((u(t))^{\Gamma^*}) := \tilde{\mathcal{Q}}\left((u(t))^{\Gamma^*} \circ \mathbf{X}^*(t)\right) \circ (\mathbf{X}^*(t))^{-1}.$$

Donde $\tilde{\mathcal{Q}}$ es el operador quasi-interpolante definido en la Sección 1.21. Además, se define $\mathcal{Q}_{\Gamma(t)}$ como el lift de \mathcal{Q}_{Γ^*} , esto es, $\mathcal{Q}_{\Gamma(t)}u(t) := (\mathcal{Q}_{\Gamma^*(t)}(u(t))^{\Gamma^*})^{\Gamma}$.

Bajo la hipótesis de que $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{X}^*(t)$ son suficientemente suaves para todo $t \in [0, T]$, podemos extender las propiedades de aproximación de los espacios splines clásicos \mathbb{S}_h^3 al espacio discreto $\mathcal{S}_h^*(t)$. Consideraremos a lo largo de todo este Capítulo que los espacios splines utilizados serán globalmente C^ℓ y de grado polinomial p .

Para el siguiente Lema requeriremos $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{X}^*(t)$ pertenezcan a $W^{k,\infty}(\Omega)$ con inversas en $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Lema 13. Sean $0 \leq |\boldsymbol{\alpha}| \leq k \leq p+1$ y $1 \leq q \leq \infty$, si $u(t) \in W^{k,q}(\Gamma(t))$ y $|\boldsymbol{\alpha}| \leq \ell$ entonces

$$\|u(t) - \mathcal{Q}_{\Gamma(t)}u(t)\|_{W^{|\boldsymbol{\alpha}|,q}(\Gamma(t))} \leq Ch^{k-|\boldsymbol{\alpha}|} \|u(t)\|_{W^{k,q}(\Gamma(t))}, \quad (4.1)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demostración. Usando equivalencia de normas, técnicas similares a las utilizadas en el Corolario 4.21 en da Veiga et al. (2014), y suponiendo t fijo en $[0, T]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|u - \mathcal{Q}_{\Gamma}u\|_{W^{|\boldsymbol{\alpha}|,q}(\Gamma(t))} &\lesssim \|(u)^{\Gamma^*} - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}u\|_{W^{|\boldsymbol{\alpha}|,q}(\Gamma^*(t))} \\ &\lesssim h^{k-|\boldsymbol{\alpha}|} \|(u)^{\Gamma^*}\|_{W^{k,q}(\Gamma^*(t))} \lesssim h^{k-|\boldsymbol{\alpha}|} \|u\|_{W^{k,q}(\Gamma(t))}. \end{aligned}$$

□

De esta estimación y la regularidad de la función $u(t)$ se desprende la siguiente acotación uniforme que será de utilidad a lo largo de esta tesis.

Lema 14. *Sea $u(t) \in W^{k,q}(\Gamma(t))$ con $k \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, se tiene que para h suficientemente pequeño*

$$\|\mathcal{Q}_{\Gamma(t)}u(t)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma(t))} \leq C\|u(t)\|_{W^{k,q}(\Gamma(t))}, \quad (4.2)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Como en esta tesis se usarán con espacios splines con condiciones de borde, consideramos el quasi-interpolante definido para funciones pertenecientes a espacios con condiciones de borde. Por simplicidad en la notación, y como siempre que usemos cuas-interpolantes haremos referencia el operador de la Definición 17, usaremos la notación sin tilde en el resto de la tesis.

Así como definimos un quasi-interpolante para funciones definidas en superficies, en esta tesis también trabajamos con cantidades geométricas definidas solo en el borde de la misma. Por tanto, será necesario considerar quasi-interpolantes definidos para funciones que solo tienen sentido en el borde. Esto lo haremos de manera análoga a la Definición 17.

Definición 18. *Sea $\partial\Gamma_0^*$, con su correspondiente espacio spline \mathcal{S}_h^∂ . Para cada $t > 0$ definimos un proyector $\mathcal{Q}_{\partial\Gamma_0^*} : L^2(\partial\Gamma_0^*) \rightarrow \mathcal{S}_h^\partial$ como sigue*

$$\mathcal{Q}_{\partial\Gamma_0^*}(u(t)) := \mathcal{Q}_{\partial\Omega}\left((u(t))^{\Gamma^*} \circ \mathbf{X}_0^*(t)\right) \circ (\mathbf{X}_0^*(t))^{-1}.$$

Donde $\mathcal{Q}_{\partial\Omega}$ es el operador quasi-interpolante univariado definido de manera análoga al operador 1.21. Además, se define $\mathcal{Q}_{\partial\Gamma_0}$ como el lift de $\mathcal{Q}_{\partial\Gamma_0^*}$, esto es, $\mathcal{Q}_{\partial\Gamma_0}u(t) := \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_0^*}u(t)^{\partial\Gamma_0}$.

Cabe destacar, que obtenemos estimaciones análogas de aproximación que para el quasi-interpolante bivariado para funciones $u(t) \in W^{k,s}(\Gamma(t))$.

Observación 12. *Notar que en las estimaciones obtenidas en esta sección, a diferencia de las clásicas que presentamos en la Sección 1.4, aún para estimar el error en seminormas Sobolev será necesario tener control de la norma Sobolev orden k de la función u . Esto se debe al papel que juegan las parametrizaciones en las estimaciones y es coherente con lo que se reporta en la literatura del análisis isogeométrico cuando se analizan errores de interpolación sobre los dominios físicos de los problemas considerados, ver por ejemplo la Observación 3.1 en Bazilevs et al. (2006).*

4.2 Proyección de tipo Ritz con traza cero

Definimos una proyección tipo Ritz como en Kovács et al. (2019), pero con valores de contorno y utilizando espacios splines en lugar de elementos finitos.

Definición 19. La proyección de Ritz modificada $\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 : H_0^1(\Gamma(t)) \rightarrow \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$ se define como sigue: Dada $u \in H_0^1(\Gamma(t))$, sea $\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u = w$, con w la única función que satisface $w \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$ y

$$\int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} w \cdot \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^* + w \eta_h^* = \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \cdot \nabla_{\Gamma} (\eta_h^*)^{\Gamma} + u (\eta_h^*)^{\Gamma}, \quad (4.3)$$

para toda $\eta_h^* \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$. Además, se define $\mathcal{R}_{\Gamma}^0 u$ como el lift de $\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u$, esto significa $\mathcal{R}_{\Gamma}^0 u := (\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u)^{\Gamma}$.

Este operador $\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0$ está bien definido para h suficientemente pequeño, como se establece en el siguiente Lema. Recordamos, nuevamente, que en todos los siguientes resultados p representa el grado polinomial.

Lema 15. Existe $h_0 > 0$ tal que, para todo $0 < h \leq h_0$, $t \in [0, T]$, y toda función $u \in H_0^1(\Gamma(t))$, existe una única solución $\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u$ de (4.3) que satisface

$$\|\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u\|_{H^1(\Gamma^*(t))} \lesssim \|u\|_{H^1(\Gamma(t))}, \quad (4.4)$$

$$\left| (e_{\mathcal{R}}, (\eta_h^*)^{\Gamma})_{H^1(\Gamma(t))} \right| \lesssim h^p \|u\|_{H^1(\Gamma(t))} \|(\eta_h^*)^{\Gamma}\|_{H^1(\Gamma(t))}, \quad (4.5)$$

para todas $\eta_h^* \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$, con $e_{\mathcal{R}} = u - (\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u)^{\Gamma} = u - \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u$.

La demostración de este lema es similar a la de los Teoremas 6.3 y 6.4 en Kovács (2017), donde también se obtiene una estimación del error L^2 , que no necesitamos en este contexto.

Demostración. La existencia y unicidad de (4.4) son consecuencias directas del teorema de Lax Milgram y (3.7). Para la quasi-ortogonalidad de Galerkin (4.5), usando (4.3), tenemos

$$\begin{aligned} (e_{\mathcal{R}}, (\eta_h^*)^{\Gamma})_{H^1(\Gamma)} &= (u, (\eta_h^*)^{\Gamma})_{H^1(\Gamma)} - \left(\mathcal{R}_{\Gamma}^0 u, (\eta_h^*)^{\Gamma} \right)_{H^1(\Gamma)} \\ &= \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u \cdot \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^* + \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u \eta_h^* \\ &\quad - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u \cdot \nabla_{\Gamma} (\eta_h^*)^{\Gamma} + \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u (\eta_h^*)^{\Gamma}. \end{aligned}$$

Reagrupando términos, usando (3.18c), (3.18a) junto con (4.4) y (3.7) deducimos (4.5). \square

En la siguiente proposición presentamos las estimaciones de error de orden superior para el mapa de Ritz a partir de la Definición 19.

Proposición 1. Sea u definida en \mathcal{G}_T tal que $u \in H_0^1(\Gamma(t)) \cap H^{p+1}(\Gamma(t))$ para todo $t \in [0, T]$. Existe $h_0 > 0$ tal que el error en el mapeo de Ritz satisface, para todo $t \in [0, T]$ y $0 < h \leq h_0$,

$$\|u - \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u\|_{H^1(\Gamma(t))} \lesssim h^p \|u\|_{H^{p+1}(\Gamma(t))}. \quad (4.6)$$

Demostración. Como antes, escribimos $e_{\mathcal{R}} = u - \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u$ y no escribimos explícitamente los argumentos de tiempo t . De la equivalencia de normas (3.7) y (4.5), existe $h_0 > 0$ tal que para todo $0 < h < h_0$, tenemos

$$\begin{aligned} \|e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)}^2 &= (e_{\mathcal{R}}, e_{\mathcal{R}})_{H^1(\Gamma)} = (e_{\mathcal{R}}, u - \mathcal{Q}_{\Gamma} u)_{H^1(\Gamma)} + (e_{\mathcal{R}}, \mathcal{Q}_{\Gamma} u - \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u)_{H^1(\Gamma)} \\ &\lesssim \|e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)} \|u - \mathcal{Q}_{\Gamma} u\|_{H^1(\Gamma)} + h^p \|u\|_{H^1(\Gamma)} \|\mathcal{Q}_{\Gamma} u - \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u\|_{H^1(\Gamma)} \\ &\lesssim h^p \|e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)} \|u\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + h^p \|u\|_{H^1(\Gamma)} \|\mathcal{Q}_{\Gamma} u - \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u\|_{H^1(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Hemos utilizado que $\mathcal{Q}_{\Gamma} u - \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u = (\mathcal{Q}_{\Gamma^*}^0 u - \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u)^{\Gamma}$, y también la estimación del error (4.1). Además,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_{\Gamma} u - \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u\|_{H^1(\Gamma)} &= \|\mathcal{Q}_{\Gamma} u - u + u - \mathcal{R}_{\Gamma}^0 u\| \\ &\leq \|\mathcal{Q}_{\Gamma} u - u\|_{H^1(\Gamma)} + \|e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)} \\ &\lesssim h^p \|u\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + \|e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)}, \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \|e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)}^2 &\lesssim h^p \|e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)} \|u\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + h^{2p} \|u\|_{H^{p+1}(\Gamma)}^2 \\ &\quad + h^p \|u\|_{H^1(\Gamma)} \|e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a la estimación deseada utilizando la desigualdad de Young. \square

Como consecuencia de la regularidad de u , las estimaciones inversas [Bazilevs et al. \(2006\)](#) y la anterior estimación de error H^1 , tenemos la siguiente cota uniforme para esta proyección.

Lema 16. *Sea $p \geq 1$ el grado polinomial. Si $u \in H_0^1(\Gamma(t)) \cap W^{p+1, \infty}(\Gamma(t))$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces,*

$$\|\mathcal{R}_{\Gamma}^0 u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma(t))} \lesssim \|u\|_{W^{p+1, \infty}(\Gamma(t))}. \quad (4.7)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_{\Gamma}^0 u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} &\leq \|\mathcal{R}_{\Gamma}^0 u - \mathbf{u}\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} \\ &\leq \|\mathcal{R}_{\Gamma}^0 u - \mathcal{Q}_{\Gamma} u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} + \|\mathcal{Q}_{\Gamma} u - \mathbf{u}\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} + C \\ &\leq Ch^{-1} \|\mathcal{R}_{\Gamma}^0 u - \mathcal{Q}_{\Gamma} u\|_{H^1(\Gamma)} + Ch^{p+1} + C \\ &\leq Ch^{-1} \|\mathcal{R}_{\Gamma}^0 u - u\|_{H^1(\Gamma)} + Ch^{-1} \|u - \mathcal{Q}_{\Gamma} u\|_{H^1(\Gamma)} + C \\ &\leq Ch^{p-1} + C, \end{aligned}$$

como $p \geq 1$, tenemos (4.7). \square

En general, no es verdad que $\partial^{\bullet} \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u = \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 \partial^{\bullet} u$, pero tenemos el siguiente resultado, el cual es similar a ([Kovács, 2017](#), Teorema 6.4, parte (a)) y ([Elliott and Ranner, 2020](#), Lemas 3.9, 3.10) excepto en que, como señalamos en la Obervación 11, en esos trabajos está presente la velocidad liftada discreta que aquí no es necesaria.

Lema 17. Sea u definida en \mathcal{G}_T con $u \in H_0^1(\Gamma(t))$ y $\partial^\bullet u \in H_0^1(\Gamma(t))$ para todo $t \in [0, T]$. Tenemos que $\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$ satisface, para todo $\eta_h^* \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$,

$$(\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*)_{H^1(\Gamma^*)} = (\partial^\bullet u, (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)} + d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma) - d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*), \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma) &:= \int_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} u (\eta_h^*)^\Gamma + \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}) \nabla_\Gamma (\eta_h^*)^\Gamma, \\ d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*) &:= \int_{\Gamma^*} \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u \eta_h^* + \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^*. \end{aligned}$$

Además, para todo h suficientemente pequeño, y $t \in [0, T]$ tenemos

$$\|\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u\|_{H^1(\Gamma^*(t))} \lesssim \|u\|_{H^1(\Gamma(t))} + \|\partial^\bullet u\|_{H^1(\Gamma(t))}, \quad (4.9)$$

y if $e_\mathcal{R} = u - \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u$, para toda $\eta_h^* \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$,

$$\left| (\partial^\bullet e_\mathcal{R}, (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma(t))} \right| \lesssim h^p \left(\|u\|_{H^1(\Gamma(t))} + \|\partial^\bullet u\|_{H^1(\Gamma(t))} \right) \|(\eta_h^*)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma(t))}. \quad (4.10)$$

Demostración. Aplicando las fórmulas de transporte (1.11)–(1.12) en ambos lados de (19), tenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \partial^\bullet \eta_h^*)_{H^1(\Gamma^*)} + (\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*)_{H^1(\Gamma^*)} + d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*) \\ = (u, \partial^\bullet (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)} + (\partial^\bullet u, (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)} + d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma). \end{aligned}$$

La definition del operador en (4.3) implica que $(\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \partial^\bullet \eta_h^*)_{H^1(\Gamma^*)} = (u, \partial^\bullet (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)}$, para toda $\eta_h^* \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$. De esta manera, los primeros términos en ambos lados de la igualdad coinciden y por tanto se cancelarán, conduciendo directamente a (4.8).

Para probar la cota de estabilidad, recordamos que, según la definición de \mathbf{v}^* como el quasi-interpolante de la velocidad exacta \mathbf{v} , para $h > 0$ suficientemente pequeño y $t \in [0, T]$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*) \right| &\leq \|\mathbf{v}^*\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} \|\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u\|_{H^1(\Gamma^*(t))} \|\eta_h^*\|_{H^1(\Gamma^*(t))} \\ &\lesssim \|u\|_{H^1(\Gamma(t))} \|\eta_h^*\|_{H^1(\Gamma^*(t))}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

y

$$\begin{aligned} \left| d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma) \right| &\leq \|\mathbf{v}\|_{W^{1,\infty}(\Gamma(t))} \|u\|_{H^1(\Gamma(t))} \|(\eta_h^*)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma(t))} \\ &\lesssim \|u\|_{H^1(\Gamma(t))} \|\eta_h^*\|_{H^1(\Gamma^*(t))}, \end{aligned}$$

donde también hemos usado la estabilidad (4.4) del operador de Ritz. Considerando como función test $\eta_h^* = \partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u$ in (4.8) obtenemos la estimación de estabilidad (4.9).

Finalmente, para mostrar (4.10) usamos (4.8) para escribir

$$\begin{aligned} (\partial^\bullet u, (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)} - (\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)} \\ = (\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*)_{H^1(\Gamma^*)} - (\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)} \\ + d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*) - d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma), \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)} &= (\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*)_{H^1(\Gamma^*)} - (\partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u, (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)} \\ &\quad + d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*) - d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma). \end{aligned}$$

Ahora recordamos que $(\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u)^\Gamma = \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u$, y usamos (3.18c), (3.18a) junto con (4.9) para obtener

$$\begin{aligned} \left| (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, (\eta_h^*)^\Gamma)_{H^1(\Gamma)} \right| &\lesssim h^p \|\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u\|_{H^1(\Gamma^*)} \|\eta_h^*\|_{H^1(\Gamma^*)} \\ &\quad + |d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*) - d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma)| \\ &\lesssim h^p \left(\|u\|_{H^1(\Gamma(t))} + \|\partial^\bullet u\|_{H^1(\Gamma(t))} \right) \|(\eta_h^*)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma)} \\ &\quad + |d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*) - d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma)|. \end{aligned}$$

Con el objetivo de acotar el último término, recordamos la acotación (4.11) para d_{Γ^*} , y la estimación para $e_{\mathcal{R}}$ de la Proposición 1:

$$\begin{aligned} &\left| d_\Gamma(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u, \eta_h^*) - d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma) \right| \\ &= |d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u - (u)^{\Gamma^*} + (u)^{\Gamma^*}, \eta_h^*) - d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma)| \\ &\leq |d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; (e_{\mathcal{R}})^{\Gamma^*}, \eta_h^*)| + |d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; (u)^{\Gamma^*}, \eta_h^*) - d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma)| \\ &\lesssim \|e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)} \|(\eta_h^*)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma)} + |d_{\Gamma^*}(\mathbf{v}^*; (u)^{\Gamma^*}, \eta_h^*) - d_\Gamma(\mathbf{v}; u, (\eta_h^*)^\Gamma)| \\ &\lesssim h^p \|u\|_{H^{p+1}(\Gamma)} \|(\eta_h^*)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma)} + h^p \|u\|_{H^1(\Gamma)} \|(\eta_h^*)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma)}, \end{aligned}$$

donde in the last step hemos usado together (3.18e) y (3.18d). \square

Para finalizar esta sección, presentamos una estimación para el error H^1 de la derivada material de la proyección de Ritz.

Proposición 2. *Sea u definida en \mathcal{G}_T con $u \in H_0^1(\Gamma(t)) \cap H^{p+1}(\Gamma(t))$ y además $\partial^\bullet u \in H^{p+1}(\Gamma(t))$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces, existe $h_0 > 0$, tal que el error en la derivada material del operador de Ritz satisface*

$$\|(\partial^\bullet)^{(\ell)}(u - \mathcal{R}_\Gamma^0 u)\|_{H^1(\Gamma(t))} \lesssim h^p \left(\sum_{j=0}^{\ell} \|(\partial^\bullet)^{(j)} u\|_{H^{p+1}(\Gamma(t))} \right), \quad (4.12)$$

para todo $t \in [0, T]$ y $0 < h \leq h_0$.

Demostración. Presentaremos la estimación solo para el caso $\ell = 1$ debido a que el caso general se sigue con argumentos similares derivando respecto de t sucesivamente la definición de la proyección de tipo Ritz.

Empezamos sumando y restando $\mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u$ en la definición de la norma $H^1(\Gamma(t))$ de $\partial^\bullet e_{\mathcal{R}} = \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u$

$$\begin{aligned} \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)}^2 &= (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \partial^\bullet u - \mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u)_{H^1(\Gamma)} + (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u)_{H^1(\Gamma)} \\ &\leq \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)} \|\partial^\bullet u - \mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u\|_{H^1(\Gamma)} \\ &\quad + (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u)_{H^1(\Gamma)} \\ &\lesssim \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)} h^p \|\partial^\bullet u\|_{H^{p+1}(\Gamma)} \\ &\quad + (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u)_{H^1(\Gamma)}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la estimación del error (4.1) para $\mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u$. Recordamos que $\mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u = (\mathcal{Q}_{\Gamma^*} \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u)^\Gamma$, y reemplazamos $\eta_h^* = \mathcal{Q}_{\Gamma^*} \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 u$ en (4.10), para llegar a que

$$\begin{aligned} (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u)_{H^1(\Gamma)} \\ \lesssim h^p \left(\|u\|_{H^1(\Gamma(t))} + \|\partial^\bullet u\|_{H^1(\Gamma(t))} \right) \|\mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u\|_{H^1(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Ahora veamos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u\|_{H^1(\Gamma)} &\leq \|\mathcal{Q}_\Gamma \partial^\bullet u - \partial^\bullet u\|_{H^1(\Gamma)} + \|\partial^\bullet u - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u\|_{H^1(\Gamma)} \\ &\lesssim h^p \|\partial^\bullet u\|_{H^1(\Gamma(t))} + \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Resumiendo y utilizando la desigualdad de Young, tenemos

$$\|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)}^2 \leq \frac{1}{2} \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H^1(\Gamma)}^2 + h^{2p} \left(\|u\|_{H^1(\Gamma(t))} + \|\partial^\bullet u\|_{H^1(\Gamma(t))} \right)^2,$$

lo que nos da el resultado de esta Proposición. \square

Finalmente, concluimos con la siguiente acotación uniforme para $\partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u$, omitimos su demostración ya que se puede seguir de manera análoga a la del Lema 16.

Lema 18. *Si $\partial^\bullet u \in H_0^1(\Gamma(t)) \cap W^{p+1,\infty}(\Gamma(t))^3$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces, para todo $p \geq 1$ tenemos*

$$\|\partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u\|_{W^{1,\infty}(\Gamma(t))} \lesssim \|\partial^\bullet u\|_{W^{p+1,\infty}(\Gamma(t))} + \|u\|_{W^{p+1,\infty}(\Gamma(t))}. \quad (4.13)$$

4.3 Proyección de Ritz no lineal con traza ortogonal al vector tangente

En esta sección definimos una proyección de Ritz no lineal sobre un espacio discreto que aproxima a $\mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$. Esta proyección es fundamental para demostrar la consistencia del método en la Sección 5.2. Su buena definición, sus propiedades de estabilidad y de aproximación, enunciadas y demostradas a continuación, constituyen uno de los resultados principales de esta tesis.

Recordemos la definición de $\mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ de la Sección 2.2 que apareció en la formulación débil:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau}) &:= \left\{ \boldsymbol{\phi} \in H^1(\Gamma(t))^3 : \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \text{ on } \partial\Gamma(t) \right\} \\ &= \left\{ \boldsymbol{\phi} \in H^1(\Gamma(t))^3 : \mathcal{P}(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}, \text{ on } \partial\Gamma(t) \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector tangente de $\partial\Gamma(t)$ y $\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}$.

Necesitamos definir un espacio discreto adecuado para aproximar este espacio $\mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$. Debido a la condición de frontera de Dirichlet que suponemos, podemos utilizar para todo $t > 0$ la misma aproximación $\partial\Gamma_h^0$ to $\partial\Gamma^0$ y así, su vector tangente. Sea $\boldsymbol{\tau}_h(t) := \boldsymbol{\tau}_{h,0} = \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}} \boldsymbol{\tau}$ una aproximación al vector tangente inicial $\boldsymbol{\tau}$, y sea $\hat{\boldsymbol{\tau}}_h := \frac{\boldsymbol{\tau}_h}{|\boldsymbol{\tau}_h|}$ la normalización de esta aproximación. Proponemos el siguiente espacio discreto como aproximación al $\mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$

$$\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h) := \left\{ \boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{S}_h(t) : \int_{\partial\Gamma_h^0} (\boldsymbol{\phi}_h \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_h) w_h = 0, \text{ para todo } w_h \in \mathcal{S}_h^\partial \right\} \quad (4.15)$$

donde aplicamos, débilmente, la restricción de ortogonalidad en el espacio spline, como se suele hacer para ciertos problemas de punto de silla. En la sección 6.1.1, presentaremos los detalles de cómo implementamos estos espacios para obtener la solución numérica.

Análogamente, definimos

$$\mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h) := \left\{ \boldsymbol{\phi}_h^* \in \mathcal{S}_h^*(t) : \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\boldsymbol{\phi}_h^* \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_h) w_h = 0, \text{ para toda } w_h \in \mathcal{S}_h^\partial \right\}. \quad (4.16)$$

hemos usado en esta definición que $\partial\Gamma_{h,0} = \partial\Gamma_0^*$, lo cual implica además que $\{v|_{\partial\Gamma_{h,0}} : v \in \mathcal{S}_h(t)\} = \{v|_{\partial\Gamma_0^*} : v \in \mathcal{S}_h^*(t)\}$.

También definimos el espacio de trazas de funciones en $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$, $\mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_h^\partial(\boldsymbol{\tau}_h) &= \{ \boldsymbol{\phi}_h|_{\partial\Gamma_{h,0}} : \boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h) \}, \\ \mathcal{O}_h^{*,\partial}(\boldsymbol{\tau}_h) &= \{ \boldsymbol{\phi}_h^*|_{\partial\Gamma_{h,0}} : \boldsymbol{\phi}_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h) \}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

notar que $\mathcal{O}_h^\partial(\boldsymbol{\tau}_h) = \mathcal{O}_h^{*,\partial}(\boldsymbol{\tau}_h)$.

El análogo discreto a $\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau})$ es definido como una proyección $L^2(\partial\Gamma_{h,0})$ ortogonal sobre el espacio discreto $\mathcal{O}_h^{*,\partial}(\boldsymbol{\tau}_h)$. De manera que $\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h) : H^1(\partial\Gamma_{h,0}) \rightarrow \mathcal{O}_h^{*,\partial}(\boldsymbol{\tau}_h)$ se define para $\mathbf{u} \in H^1(\partial\Gamma_{h,0})$ como la única solución a

$$\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)\mathbf{u} \in \mathcal{O}_h^{*,\partial}(\boldsymbol{\tau}_h) : \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}_h^* = \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{z}_h^*, \quad \forall \mathbf{z}_h^* \in \mathcal{O}_h^{*,\partial}(\boldsymbol{\tau}_h). \quad (4.18)$$

Claramente, tenemos la siguiente propiedad de estabilidad para \mathcal{P}_h :

$$\|\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)\mathbf{u}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}, \quad \|\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)\mathbf{u}\|_{H^1(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{H^1(\partial\Gamma_{h,0})},$$

donde para la segunda hay que utilizar una desigualdad inversa.

Este operador resulta fundamental para derivar las estimaciones de error tanto de la proyección de Ritz no lineal (Definición 20) como de su derivada material. Esto se debe a que, en las Proposiciones 3 y 5, el análisis requiere identificar un elemento del espacio discreto $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$ que aproxime adecuadamente a la función objetivo. A diferencia de lo expuesto en la Sección 4.2, donde el uso del quasi-interpolante era viable gracias a las condiciones de borde nulas, en este contexto no es posible proceder de igual forma, ya que no se garantiza que $\mathcal{Q}_{\Gamma^*}\mathbf{u}$ pertenezca a $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$, incluso si $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$.

La estrategia que seguimos para demostrar las Proposiciones 3 y 5 consiste en los siguientes pasos: dada $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$, proyectamos primero su traza sobre el espacio discreto $\mathcal{O}_h^{*,\partial}(\boldsymbol{\tau}_h)$ para obtener, mediante el operador $\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)$, su proyección discreta correspondiente. A continuación, definimos la extensión armónica de $\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*}$ en $H^1(\Gamma)^3$, la cual denotamos como $\tilde{\mathbf{u}}$. Finalmente, empleamos el quasi-interpolante de esta extensión como la herramienta teórica que nos permite obtener una función discreta que, además de pertenecer a $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$, posea propiedades de aproximación óptimas.

Además de su definición serán muy importantes las siguientes estimaciones de aproximación, cuya demostración se sigue usando técnicas similares a las presentes en (Akrivis et al., 2021, Lema 5.1). En líneas generales, las estimaciones se obtienen escribiendo a la proyección $\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)$ en una forma alternativa pero equivalente. En particular, la función $\mathbf{w}_h^* := \mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*}$, definida como la solución de (4.18) es, en vista de la definición de los espacios $\mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, equivalente a resolver un problema de punto silla mediante un multiplicador de Lagrange. Luego, aplicamos el Lema de Céa para problemas de punto silla y obtenemos las estimaciones del error. Por último, es importante notar, que los lemas citados utilizan el supuesto de que $|\hat{\boldsymbol{\tau}}_h| = 1$ en casi todo punto. Esta es la razón por la cual necesitamos normalizar $\boldsymbol{\tau}_h$ en todo lo que sigue.

Lema 19. *Para $\hat{\boldsymbol{\tau}}_h \in W^{p+1,\infty}(\partial\Gamma^*)^3$ tal que $|\hat{\boldsymbol{\tau}}_h| = 1$ en casi todo punto de $\partial\Gamma^*$, y para toda $\mathbf{u} \in H^{p+1}(\partial\Gamma_0)$, tenemos*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*} - \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*}\|_{L^2(\partial\Gamma^*)^3} &\leq Ch^{p+1}\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)^3}, \\ \|\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*} - \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*}\|_{H^1(\partial\Gamma^*)^3} &\leq Ch^p\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)^3}, \end{aligned}$$

donde C depends on a bound of $\|\hat{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{W^{p+1,\infty}(\partial\Gamma^*)}$.

En la siguiente definición, introduciremos una proyección de Ritz *no lineal* necesaria para estimar $\|d_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}$. Si solo usamos una proyección de Ritz *lineal*, como en la Sección 4.2, debido a los términos de borde presentes en nuestra formulación lo mejor que podemos obtener será una estimación para $\left|\int_{\partial\Gamma_0^*} d_\nu \cdot \boldsymbol{\psi}_h^*\right|$, con $\boldsymbol{\psi}_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$. Al mismo tiempo, si solo tuviéramos una esa última estimación no sería suficiente para acotar $\left|\int_{\partial\Gamma_0^*} \partial^\bullet d_\nu \cdot \boldsymbol{\psi}_h^*\right|$ de manera conveniente. Y esta última estimación es crucial para obtener la estabilidad del esquema semi-discreto.

Definición 20. Para cada $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ y para $\lambda > 0$ suficientemente grande (ver el Lema 21, las Proposiciones 3 y 4 a continuación), definimos $\mathcal{R}_{\Gamma^*}\mathbf{u} = \mathbf{w}$ como el único elemento $\mathbf{w} \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$ que satisface, para todo $\boldsymbol{\psi}_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*}\mathbf{w} : \nabla_{\Gamma^*}\boldsymbol{\psi}_h^* + \lambda \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathbf{w} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ = \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma}\mathbf{u} : \nabla_{\Gamma}(\boldsymbol{\psi}_h^*)^{\Gamma} + \lambda \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^{\Gamma} \\ - \int_{\partial\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^{\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde $\boldsymbol{\kappa}_{\partial,h} := \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}}\boldsymbol{\kappa}_{\partial}$.

El resto de esta sección estará dedicado a demostrar que existe un λ , independiente de h , tal que $\mathcal{R}_{\Gamma^*}\mathbf{u}$ está bien definido y satisface estimaciones de error óptimas. Resumimos sus propiedades en el Teorema 4 hacia el final de la sección.

Operadores de Ritz no lineales para ecuaciones parabólicas con condiciones de borde no lineales en dominios estacionarios han sido estudiados por Douglas y Dupont en Douglas and Dupont (1973); siguiendo algunas ideas de ese trabajo, extendemos este enfoque al caso de ecuaciones parabólicas con condiciones de borde no lineales sobre superficies evolutivas. De esta manera, definimos un operador de Ritz no lineal que sigue el espíritu del operador propuesto en Douglas and Dupont (1973) y que será una herramienta clave en el Capítulo 5.2.

Para demostrar que esta proyección no lineal está bien definida, primero necesitamos el siguiente lema, que se deduce de las propiedades del quasi-interpolante y de la regularidad de las funciones $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\kappa}_{\partial}$.

Lema 20. Sean $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\kappa}_{\partial}$ funciones en $W^{p+1,\infty}(\partial\Gamma_0)^3$, y definamos $\boldsymbol{\tau}_h := \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}}\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\kappa}_{\partial,h} := \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}}\boldsymbol{\kappa}_{\partial}$. Entonces existe $h_0 > 0$ tal que

$$\|(\boldsymbol{\tau})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim h^{p+1}, \quad \|(\boldsymbol{\kappa}_{\partial})^{\Gamma^*} - \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim h^{p+1}, \quad (4.20)$$

para todo $0 < h \leq h_0$.

Además, a partir de estas estimaciones se obtiene, para $0 < h \leq h_0$,

$$\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim C, \quad \|\boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim C. \quad (4.21)$$

El objetivo del siguiente lema es demostrar la existencia de un punto fijo \mathbf{w} de (4.19) y una cota de estabilidad. Para ello recurriremos al Teorema del punto fijo de Leray–Schauder (Gilbarg and Trudinger, 1983, Teorema 11.3), que enunciamos aquí para conveniencia:

Teorema 2 (Leray–Schauder Gilbarg and Trudinger (1983)). Sea T una aplicación compacta de un espacio de Banach \mathcal{B} en sí mismo, y supongamos que existe una constante M tal que $\|v\|_{\mathcal{B}} \leq M$ para todo $v \in \mathcal{B}$ y $\sigma \in [0, 1]$ que satisfacen $v = \sigma T v$. Entonces T tiene al menos un punto fijo.

Lema 21. *Existen $h_0 > 0$ y $C > 0$ tales que, para cada $\lambda \geq 1$, $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ y $0 < h \leq h_0$, existe una solución \mathbf{w} de (4.19). Además, toda solución \mathbf{w} de (4.19) satisface la siguiente cota de estabilidad:*

$$\|\mathbf{w}\|_{H^1(\Gamma^*)} \leq C \left(\sqrt{\lambda} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma^*)} + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)}^2 \right), \quad (4.22)$$

Demostración. Consideremos $h_0 > 0$ como en el Lema 20, y sea $0 < h < h_0$. Primero probaremos que para cada $\lambda \geq 1$ existe una solución \mathbf{w} de la ecuación (4.19). Recurrirnos al teorema de punto fijo de Leray-Schauder. Tomamos $\mathcal{B} = \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$ con la topología $H^1(\Gamma^*)$.

Dado $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$, definimos el operador $T : \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h) \rightarrow \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$ como sigue: para $\mathbf{v} \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, sea $T(\mathbf{v})$ la única función en $\mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$ que satisface, para todo $\boldsymbol{\psi}_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} T(\mathbf{v}) : \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\psi}_h^* + \lambda T(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* &= \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \mathbf{u} : \nabla_{\Gamma} (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma + \lambda \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ &\quad - \int_{\partial\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^*. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Obsérvese que \mathbf{w} es solución de (4.19) si y solo si es un punto fijo de T .

Observamos ahora que, debido a (4.21), si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, se tiene

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} (T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2)) : \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\psi}_h^* + \lambda (T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2)) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ &= \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathbf{v}_2 \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ &= \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathbf{v}_2 \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathbf{v}_2 \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathbf{v}_2 \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ &\leq c \left(\|\mathbf{v}_1\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} + \|\mathbf{v}_2\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \right) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \|\boldsymbol{\psi}_h^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\lesssim c_T \left(\|\mathbf{v}_1\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})}^2 + \|\mathbf{v}_2\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})}^2 \right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}^2 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2c_T} \|\boldsymbol{\psi}_h^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}^2, \end{aligned}$$

con c dependiendo únicamente de la norma L^∞ de $\boldsymbol{\kappa}_\partial$ y $\boldsymbol{\tau}$. La constante c_T proviene de la siguiente desigualdad de traza, la cual se sigue del Lema 2,

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}^2 \leq c_T \left(\epsilon \|\nabla_{\Gamma} \mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 + \epsilon^{-1} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 \right), \quad (4.24)$$

y vale para todo $0 < \epsilon \leq 1$ y $\mathbf{v} \in H^1(\Gamma^*)^3$, y por lo tanto implica, tomando $\epsilon = 1/\sqrt{\lambda}$,

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{c_T} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}^2 \leq \|\nabla_{\Gamma} \mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 + \lambda \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 =: \|\mathbf{v}\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*)}^2.$$

Junto con la equivalencia de normas (3.7), esta desigualdad de traza aplicada a $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ y a $\boldsymbol{\psi}_h^*$ produce:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} (T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2)) : \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\psi}_h^* + \lambda (T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2)) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ &\leq \frac{c c_T^2}{\lambda} \left(\|\mathbf{v}_1\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})}^2 + \|\mathbf{v}_2\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})}^2 \right) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*(t))}^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\psi}_h^*\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*(t))}^2. \end{aligned}$$

Tomando $\boldsymbol{\psi}_h^* = T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2)$ obtenemos

$$\|T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2)\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*)}^2 \leq \frac{2c c_T^2}{\lambda} \left(\|\mathbf{v}_1\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})}^2 + \|\mathbf{v}_2\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})}^2 \right) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*)}^2, \quad (4.25)$$

lo cual implica que T es continuo y compacto porque $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$ es de dimensión finita.

Supongamos ahora que $\sigma \in [0, 1]$ y $\mathbf{v} = \sigma T(\mathbf{v})$. Entonces, a partir de (4.23), probando con $\boldsymbol{\psi}_h^* = \mathbf{v}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \mathbf{v} : \nabla_{\Gamma^*} \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\nabla_{\Gamma^*} \mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*(t))}^2 + \lambda \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*(t))}^2 \\ & = \sigma \left(\int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \mathbf{u} : \nabla_{\Gamma} (\mathbf{v})^\Gamma + \lambda \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v})^\Gamma - \int_{\partial\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathbf{v})^\Gamma + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h} \underbrace{(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \mathbf{v}}_{=0} \right). \end{aligned}$$

Utilizando argumentos similares a los anteriores,

$$\|\nabla_{\Gamma^*} \mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*(t))}^2 + \lambda \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*(t))}^2 \leq c \left(1 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)}^2 \right) \left(\|\nabla_{\Gamma^*} \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma(t))}^2 + \lambda \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma(t))}^2 \right),$$

con c independiente de σ y \mathbf{v} . Por lo tanto, se satisfacen las hipótesis del teorema de Leray-Schauder con $M = c \left(1 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)}^2 \right) \left(\|\nabla_{\Gamma} \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma(t))}^2 + \lambda \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma(t))}^2 \right)$ y existe *al menos* un punto fijo.

Este último razonamiento con $\sigma = 1$ y $\lambda \geq 1$ conduce a la cota de estabilidad para todo punto fijo \mathbf{w} . \square

Ahora demostramos las estimaciones de error para cualquier solución \mathbf{w} de (4.19); utilizaremos esto para probar que, si λ es lo suficientemente grande, independiente de h , dicha solución es única y puede ser denominada $\mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u}$.

Notación. A continuación, usaremos $H_\partial^{p+1}(\Gamma(t))$ para denotar el conjunto de funciones $u \in H^{p+1}(\Gamma(t))$ tales que $u|_{\partial\Gamma(t)} \in H^{p+1}(\partial\Gamma(t))$; asimismo, $W_\partial^{p+1,s}(\Gamma(t))$ denotará aquellas $u \in W^{p+1,s}(\Gamma(t))$ tales que $u|_{\partial\Gamma(t)} \in W^{p+1,s}(\partial\Gamma(t))$, para $1 \leq s \leq \infty$.

Proposición 3. *Sea \mathbf{u} definida en \mathcal{G}_T tal que $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau}) \cap H_\partial^{p+1}(\Gamma(t))^3 \cap L^\infty(\Gamma(t))$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces, existen $h_0 > 0$ y $C \geq 1$, tales que para cualquier $\lambda \geq C$, si \mathbf{w} es un punto fijo de T , es decir, una solución de (4.19),*

$$\|\mathbf{u} - (\mathbf{w})^{\Gamma(t)}\|_{H_\lambda^1(\Gamma(t))} \lesssim C_u \sqrt{\lambda} h^p, \quad (4.26)$$

para todo $t \in [0, T]$ and $0 < h \leq h_0$, con $C_u^2 = \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)}^4 + \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2$.

Demostración. Para probar (4.32), denotamos $e = \mathbf{u} - (\mathbf{w})^\Gamma$ y recordamos que

$$\|e\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 := \|\nabla_{\Gamma} e\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \lambda \|e\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Ahora definimos $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Gamma)^3$ como la única función que satisface $\tilde{\mathbf{u}}|_{\partial\Gamma_0} = (\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*})^{\partial\Gamma_0}$ y $(\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta})_{H^1(\Gamma)} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})_{H^1(\Gamma)}$ para toda $\boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\Gamma)^3$, de manera que

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Gamma)} \cong \|\mathbf{u} - (\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*})^{\partial\Gamma_0}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Gamma_0)}. \quad (4.27)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|e\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 &= \left(\int_\Gamma \nabla_\Gamma e : \nabla_\Gamma(\mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}}) + \lambda \int_\Gamma e \cdot (\mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}}) \right) \\ &\quad + \left(\int_\Gamma \nabla_\Gamma e : \nabla_\Gamma(\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) + \lambda \int_\Gamma e \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) \right) = (I) + (II). \end{aligned}$$

Como explicamos anteriormente, la idea para estimar e es introducir una función discreta intermedia con buenas propiedades de aproximación. Hemos definido esta función como $\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}}$; ahora, verificaremos que posee buenas propiedades de aproximación. Para ello, es necesario estudiar primero la proximidad entre $\tilde{\mathbf{u}}$ y \mathbf{u} .

Considerando que $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$, $\mathbf{u}|_{\partial\Gamma_0} = \mathcal{P}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{u}|_{\partial\Gamma_0}$, junto con (4.27), el Lema 19 y el hecho de que $\boldsymbol{\tau}_h := \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}}\boldsymbol{\tau}$, podemos deducir que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Gamma)} &\leq \|\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{u} - (\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*})^{\partial\Gamma_0}\|_{H^1(\partial\Gamma_0)} \\ &\lesssim \|(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{u})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*}\|_{H^1(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\leq \|(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{u})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*}\|_{H^1(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\quad + \|\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*} - \mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\mathbf{u})^{\Gamma^*}\|_{H^1(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\lesssim \|(\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \hat{\boldsymbol{\tau}}_h \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{W^{1,\infty}(\partial\Gamma_{h,0})} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\partial\Gamma_0)} + h^p \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} \\ &\lesssim h^p \|\boldsymbol{\tau}\|_{W^{p+1,\infty}(\partial\Gamma_0)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\partial\Gamma_0)} + Ch^p \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}, \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Gamma)} \lesssim h^p \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}, \quad (4.28)$$

Además, utilizando argumentos similares a los anteriores y el Lema 19 deducimos que

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \lesssim h^{p+1} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}. \quad (4.29)$$

De todas estas estimaciones, luego de utilizar los errores de interpolación (4.1) junto con la estabilidad de \mathcal{Q}_Γ , tenemos

$$\|\mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Gamma)} \lesssim h^p \left(\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} \right), \quad (4.30)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \lesssim h^{p+1} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}. \quad (4.31)$$

Usando (4.30) obtenemos,

$$\begin{aligned} |(I)| &= \left| \int_\Gamma \nabla_\Gamma e : \nabla_\Gamma(\mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}}) + \lambda \int_\Gamma e \cdot (\mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}}) \right| \\ &\leq \|e\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} \left(\|\nabla_\Gamma(\mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}})\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \lambda \|\mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim \|e\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} \sqrt{\lambda} h^p \left(\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} \right) \end{aligned}$$

así, para cualquier $\delta_1 > 0$,

$$|(I)| \leq \delta_1 \|e\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + \frac{c\lambda}{\delta_1} h^{2p} \left(\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2 \right).$$

Para obtener la cota de (II) usamos la ecuación (4.19) para deducir que

$$\begin{aligned} (II) &= \int_\Gamma \nabla_\Gamma e : \nabla_\Gamma (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) + \lambda \int_\Gamma e \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) \\ &= \int_\Gamma \nabla_\Gamma \mathbf{u} : \nabla_\Gamma (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) + \lambda \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) \\ &\quad - \int_\Gamma \nabla_\Gamma (\mathbf{w})^\Gamma : \nabla_\Gamma (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) + \lambda \int_\Gamma (\mathbf{w})^\Gamma \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) \\ &= \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \mathbf{w} : \nabla_{\Gamma^*} (\mathcal{Q}_{\Gamma^*} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{w}) + \lambda \int_{\Gamma^*} \mathbf{w} \cdot (\mathcal{Q}_{\Gamma^*} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{w}) \\ &\quad - (III) - \int_\Gamma \nabla_\Gamma (\mathbf{w})^\Gamma : \nabla_\Gamma (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) + \lambda \int_\Gamma (\mathbf{w})^\Gamma \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma), \end{aligned}$$

con

$$(III) = \int_{\partial\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathbf{w} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot (\mathcal{Q}_{\Gamma^*} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{w}).$$

Por tanto, gracias al Lema 12, (4.22) y (4.28), tenemos, para cualquier $\delta_2 > 0$,

$$\begin{aligned} |(II)| &\leq ch^p \|(\mathbf{w})^\Gamma\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} \|\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} + |(III)| \\ &\leq ch^p \left(\|\mathbf{u}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)}^2 \right) \left(\|\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} + \|\mathbf{u} - (\mathbf{w})^\Gamma\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} \right) + |(III)| \\ &\leq \frac{c}{\delta_2} h^{2p} \left(\|\mathbf{u}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + \underbrace{\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)}^4 + \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2}_{C_u^2} \right) + \delta_2 \|e\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + |(III)|. \end{aligned}$$

Ahora obtendremos una cota para $|(III)|$. Primero, sumando y restando $(\mathbf{w})^\Gamma$ en la primera integral, y $(\mathbf{u})^{\Gamma^*}$ en la segunda integral, obtenemos

$$\begin{aligned} (III) &= \int_{\partial\Gamma_0} e \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) + \int_{\partial\Gamma_0} (\mathbf{w})^\Gamma \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}((e)^{\Gamma^*} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot (\mathcal{Q}_{\Gamma^*} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{w}) \\ &\quad - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}((\mathbf{u})^{\Gamma^*} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot (\mathcal{Q}_{\Gamma^*} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{w}) \\ &= (J_1) + (J_2) + (J_3) + (J_4). \end{aligned}$$

Para continuar, analizaremos los términos $(J_1) + (J_3)$ y $(J_2) + (J_4)$ por separado. Para la primera suma, usando que $\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma = \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u} + e$, tenemos

$$\begin{aligned} (J_1) + (J_3) &= \int_{\partial\Gamma_0} e \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) + \int_{\partial\Gamma_0} e \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot e \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}((e)^{\Gamma^*} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^{\Gamma^*} \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h} \underbrace{((e)^{\Gamma^*} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot (e)^{\Gamma^*}}_{=0}. \end{aligned}$$

Luego, combinando una desigualdad inversa con (4.22) y la equivalencia de normas en Γ^* y Γ , podemos notar que

$$\|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim \frac{1}{h} \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Gamma^*)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}h} \|(\mathbf{w})^\Gamma\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{\lambda}h} \left(\|\mathbf{u}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Gamma)}^2 \right) \lesssim \frac{1}{h}.$$

Finalmente, gracias a (4.28), la regularidad de \mathbf{u} , $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\kappa}_\partial$ en el borde, y la desigualdad de Young tenemos la siguiente cota para $|(J_1) + (J_3)|$

$$\begin{aligned} |(J_1) + (J_3)| &\lesssim \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \|\boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau})\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)} \|\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \\ &\quad + \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \|\boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau})\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)} \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \\ &\quad + \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \|\boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \|\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \\ &\lesssim \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} h^{p+1} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} + \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2 \\ &\quad + h^{-1} \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} h^{p+1} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} \\ &\lesssim h^{2p} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2 + \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2. \end{aligned}$$

Ahora seguimos con el análisis de $(J_2) + (J_4)$, sumando y restando $\boldsymbol{\tau}_h^{\partial\Gamma_0}$ en la integral (J_2) y $\boldsymbol{\kappa}_\partial^{\partial\Gamma_0^*}$ en (J_4) , tenemos

$$\begin{aligned} (J_2) + (J_4) &= \int_{\partial\Gamma_0} (\mathbf{w})^\Gamma \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h^{\partial\Gamma_0})) \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma) \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_0} (\mathbf{w})^\Gamma \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}_h^{\partial\Gamma_0}) \cdot ((\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}})^\Gamma - (\mathbf{w})^\Gamma) \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{w} \cdot (\boldsymbol{\kappa}_\partial^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}) ((\mathbf{u})^{\Gamma^*} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{w}) \\ &\quad - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial^{\partial\Gamma_{h,0}} ((\mathbf{u})^{\Gamma^*} \times \boldsymbol{\tau}_h) \cdot (\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{w}). \end{aligned}$$

De (4.31) podemos deducir que

$$\|\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{w})^\Gamma\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} + \|(\tilde{\mathbf{u}})^{\Gamma^*} - \mathbf{w}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim h^{p+1} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} + \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}.$$

Argumentos similares a los que hemos utilizado para la cota de $|(J_1) + (J_3)|$ junto con las estimaciones de error para $\boldsymbol{\tau}_h$ y $\boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}$ y el error geométrico en (3.18b), nos permiten concluir que

$$\begin{aligned} |(J_2) + (J_4)| &\lesssim h^p \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma)} \left(h^{p+1} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} + \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \right) \\ &\lesssim h^{2p} \left(\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2 \right) + \|e\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2, \end{aligned}$$

Finalmente, usando las cotas anteriores para $|(J_1) + (J_3)|$ y $|(J_2) + (J_4)|$ junto con la desigualdad de trazas (4.24), podemos obtener la siguiente estimación de $|(III)|$

$$|(III)| \leq ch^{2p} \left(\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2 \right) + c c_T \epsilon \|\nabla_\Gamma e\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{c c_T}{\epsilon} \|e\|_{L^2(\Gamma)}^2,$$

y así, eligiendo $\epsilon = \frac{1}{4c c_T}$, logramos estimar $|(II)|$

$$|(II)| \leq \frac{c}{\delta_2} h^{2p} \left(\|\mathbf{u}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + C_u^2 \right) + \delta_2 \|e\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla_\Gamma e\|_{L^2(\Gamma)}^2 + 4c_T^2 \|e\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Resumiendo, tenemos

$$\begin{aligned} \|e\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 &\leq c\lambda\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\right)h^{2p}\left(\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma)}^2 + C_u^2\right) + (\delta_1 + \delta_2)\|e\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\|\nabla_\Gamma e\|_{L^2(\Gamma)}^2 + 4c^2c_T^2\|e\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Entonces, eligiendo $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{4}$ y $\lambda \geq 8c^2c_T^2$, obtenemos la estimación deseada (4.26). \square

Como consecuencia de la regularidad de \mathbf{u} , de las estimaciones inversas (Bazilevs et al., 2006) y de la estimación previa del error en norma H_λ^1 , se obtiene la siguiente cota uniforme para cualquier punto fijo, lo cual conduce a la unicidad de la proyección de Ritz no lineal si λ es suficientemente grande, independientemente de h .

Lema 22. *Sea \mathbf{u} definida en \mathcal{G}_T tal que $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau}) \cap H_\partial^{p+1}(\Gamma(t))^3 \cap L^\infty(\Gamma(t))$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces existen $h_0 > 0$ y $C \geq 1$ tales que, para todo $\lambda \geq C$, si \mathbf{w} es un punto fijo de T , es decir, una solución de (4.19),*

$$\|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Gamma^*)} \leq \tilde{C}_u,$$

donde \tilde{C}_u es una constante que depende de $\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}$, $\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)}$ y $\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}$, pero es independiente de λ y de h .

Demostración. Debido a una desigualdad inversa,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Gamma^*)} &\leq \|\mathbf{w} - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Gamma^*)} + \|\mathcal{Q}_{\Gamma^*}\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Gamma^*)} \\ &\lesssim \frac{1}{h}\|\mathbf{w} - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\mathcal{Q}_{\Gamma^*}\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Gamma^*)} \\ &\lesssim \frac{1}{h}\|\mathbf{w} - (\mathbf{u})^{\Gamma^*}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \frac{1}{h}\|(\mathbf{u})^{\Gamma^*} - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\mathcal{Q}_{\Gamma^*}\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

El cuasi-interpolante \mathcal{Q}_{Γ^*} satisface

$$\|(\mathbf{u})^{\Gamma^*} - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma^*)} \lesssim h^{p+1}, \quad \|\mathcal{Q}_{\Gamma^*}\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Gamma^*)} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Gamma)},$$

mientras que (4.26) proporciona

$$\|(\mathbf{w})^\Gamma - \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|(\mathbf{w})^\Gamma - \mathbf{u}\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}h^p\sqrt{\lambda}C_u \leq h^pC_u.$$

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Gamma^*)} \lesssim C_u(1 + h^{p-1}) \lesssim C_u,$$

lo que prueba la estimación deseada. \square

Proposición 4. *Sea \mathbf{u} definida en \mathcal{G}_T tal que $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau}) \cap H_\partial^{p+1}(\Gamma(t))^3 \cap L^\infty(\Gamma(t))$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces existen $\lambda \geq 1$ y $h_0 > 0$ tales que existe una única solución \mathbf{w} de (4.19), que denotamos ahora por $\mathcal{R}_\Gamma\mathbf{u}$, y que satisface*

$$\|\mathbf{u} - \mathcal{R}_\Gamma\mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma(t))} \leq C'_u h^p, \quad (4.32)$$

donde C'_u es una constante que depende de $\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}$, $\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)}$ y $\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}$, y además

$$\|\mathcal{R}_\Gamma \mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}(\Gamma(t))} \lesssim C''_u, \quad (4.33)$$

donde C''_u es una constante que depende de $\|\mathbf{u}\|_{W^{p+1,\infty}(\Gamma(t))}$.

Demostración. Si \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 son soluciones de (4.19), entonces son puntos fijos del operador T definido en la demostración del Lema 21, y por lo tanto (4.25) implica

$$\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*)}^2 \leq \frac{2c c_T^2}{\lambda} \left(\|\mathbf{w}_1\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})}^2 + \|\mathbf{w}_2\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})}^2 \right) \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*)}^2.$$

El Lema 22 implica ahora que, si λ es suficientemente grande, entonces $\|\mathbf{w}_1\|_{L^\infty(\Gamma^*)}, \|\mathbf{w}_2\|_{L^\infty(\Gamma^*)} \leq \tilde{C}_u$, y por consiguiente

$$\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*)}^2 \leq \frac{2c c_T^2}{\lambda} 2C_u^2 \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{H_\lambda^1(\Gamma^*)}^2.$$

Elegimos ahora λ suficientemente grande de modo que $\frac{2c c_T^2}{\lambda} 2C_u^2 = 1/2 < 1$, lo que garantiza la unicidad del punto fijo. Fijado λ , la estimación de error (4.32) es consecuencia directa de (4.26).

La demostración de la última cota (4.33) es análoga a la del Lema 22. \square

Ahora presentaremos estimaciones de estabilidad para la derivada material de $\mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u}$, que son necesarias para obtener estimaciones para el error $(\partial^\bullet)^{(\ell)}(\mathbf{u} - \mathcal{R}_\Gamma \mathbf{u})$. Recordamos que en todos los resultados p representa el grado polinomial utilizado y $p \geq 1$.

Lema 23. *Sea \mathbf{u} definida en \mathcal{G}_T con $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ y $\partial^\bullet \mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces, $\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$ satisfice*

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*}(\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u}) : \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\psi}_h^* + \lambda \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ &= \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \partial^\bullet \mathbf{u} : \nabla_{\Gamma} (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma + \lambda \int_{\Gamma} \partial^\bullet \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ & \quad + \int_{\partial\Gamma_0} (\partial^\bullet \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\partial^\bullet \mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau})) \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ & \quad - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}_h) + \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}_h)) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ & \quad + d_\Gamma^\lambda(\mathbf{v}; \mathbf{u}, (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma) - d_{\Gamma^*}^\lambda(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}_h^*), \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde

$$\begin{aligned} d_\Gamma^\lambda(\mathbf{v}; \mathbf{u}, (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma) &:= \lambda \int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \mathbf{u} : \mathcal{B} \nabla_{\Gamma} (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma, \\ d_{\Gamma^*}^\lambda(\mathbf{v}^*; \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}_h^*) &:= \lambda \int_{\Gamma^*} \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* + \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} : \mathcal{B}^* \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\psi}_h^*, \end{aligned}$$

para toda $\boldsymbol{\psi}_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$. Además, existe $\lambda > 0$ suficientemente grande y $h_0 > 0$ tal que, si $0 < h \leq h_0$, y $t \in [0, T]$ tenemos

$$\begin{aligned} \|\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma^*(t))} &\lesssim \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma(t))} + \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma(t))} \\ & \quad + \|\mathbf{u}\|_{H^1(\partial\Gamma_0)} + \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^1(\partial\Gamma_0)}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

Demostración. La prueba de la identidad (4.34) es análoga a la prueba de (4.8). La estimación de la estabilidad (4.35) de operador se sigue usando (4.34) con $\psi_h^* = \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u}$, (4.33) y argumentos similares a aquellos usando en el Lema 21, para algún $\lambda > 0$ suficientemente grande. Es por ello que solo nos centraremos en la prueba de que $\partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u}$ pertenece a $\mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$. Dado $\mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u} \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, sabemos que para toda $w_h \in \mathcal{O}_h^\partial(\boldsymbol{\tau}_h)$

$$\int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_h) w_h = 0.$$

Entonces, derivando con respecto a t en (4.18) y considerando que $\partial\Gamma_{h,0}$ es fija e independiente de t , tenemos, para toda $w_h \in \mathcal{O}_h^\partial(\boldsymbol{\tau}_h)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_h) w_h = 0.$$

Ahora, como $\mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u} \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, y $\partial^\bullet w_h = 0$, la igualdad anterior deriva en

$$0 = \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\partial^\bullet (\mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau}_h) w_h + (\mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_h) \partial^\bullet w_h = \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\partial^\bullet (\mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau}_h) w_h.$$

Por lo tanto, $\partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^* \mathbf{u}$ pertenece a $\mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$. \square

Proposición 5. Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ con $\mathbf{u} \in H_\partial^{p+1}(\Gamma(t))^3$, y $(\partial^\bullet)^\ell \mathbf{u} \in H_\partial^{p+1}(\Gamma(t))^3$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces, existe $h_0 > 0$ tal que la derivada material del mapa de Ritz satisface, para todo $t \in [0, T]$ y $0 < h \leq h_0$,

$$\begin{aligned} \|(\partial^\bullet)^\ell (\mathbf{u} - \mathcal{R}_\Gamma \mathbf{u})\|_{H^1(\Gamma(t))} \\ \lesssim h^p \left(\sum_{j=0}^{\ell} \|(\partial^\bullet)^j \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma(t))} + \|(\partial^\bullet)^\ell \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Demostración. Probaremos (4.36) para $\ell = 1$, la demostración para $\ell > 1$ es análoga.

Consideramos una extensión $\tilde{\mathbf{w}} \in H^1(\Gamma)$

of $(\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\partial^\bullet \mathbf{u})^{\Gamma^*})^{\partial\Gamma_0} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Gamma_0)$,

tal que $\tilde{\mathbf{w}}|_{\partial\Gamma_0} = (\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)(\partial^\bullet \mathbf{u})^{\Gamma^*})^{\partial\Gamma_0}$

satisface $(\tilde{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\eta})_{H^1(\Gamma)} = (\partial^\bullet \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})_{H^1(\Gamma)}$ para toda $\boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\Gamma)$, y

$$\|\partial^\bullet \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}\|_{H^1(\Gamma)} = \|\partial^\bullet \mathbf{u} - (\mathcal{P}_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h) \partial^\bullet \mathbf{u})^{\partial\Gamma_0}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Gamma_0)}. \quad (4.37)$$

Comenzamos denotando $\partial^\bullet e_{\mathcal{R}} = \partial^\bullet \mathbf{u} - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma \mathbf{u}$ y sumando y restando $\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{w}}$ en la definición de la norma $H_\lambda^1(\Gamma)$ de $\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}$

$$\begin{aligned} \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 &= (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \partial^\bullet \mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{w}})_{H_\lambda^1(\Gamma)} + (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{w}} - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma \mathbf{u})_{H_\lambda^1(\Gamma)} \\ &\leq \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} \|\partial^\bullet \mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{w}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} \\ &\quad + (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{w}} - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma \mathbf{u})_{H_\lambda^1(\Gamma)} \end{aligned}$$

Como $\partial^\bullet \mathbf{u} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$, usando (4.37) y procediendo como en la Proposición 3 podemos acotar

$$\begin{aligned}\|\partial^\bullet \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}\|_{H^1(\Gamma)} &\lesssim h^p \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}, \\ \|\partial^\bullet \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} &\lesssim h^{p+1} \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}.\end{aligned}$$

Estas estimaciones nos permiten concluir

$$\|\partial^\bullet \mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{w}}\|_{H^1(\Gamma)} \lesssim h^p \left(\|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} \right) \quad (4.38)$$

$$\|\partial^\bullet \mathbf{u} - \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{w}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \lesssim h^{p+1} \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}. \quad (4.39)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 &\leq \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} c_\lambda h^p \left(\|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} \right) \\ &\quad + (\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{w}} - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma u)_{H_\lambda^1(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Para acotar el último término primero analizamos $(\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma)_{H_\lambda^1(\Gamma)}$ para cualquier $\boldsymbol{\psi}_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, usando la Definición 4.34 y argumentos similares a los que hemos usado en el Lema 17 tenemos

$$\begin{aligned}(\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}, \boldsymbol{\psi}_h^*)_{H_\lambda^1(\Gamma)} &\lesssim h^p \left(\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma)} + \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma)} \right) \|(\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma\|_{H_\lambda^1(\Gamma)} + |(I)| \\ &\leq ch^{2p} \left(\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma)}^2 + \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^1(\Gamma)}^2 \right) + \frac{1}{2} \|(\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + |(I)|,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(I) &= \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}_h) + \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}_h)) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ &\quad - \int_{\partial\Gamma_0} (\partial^\bullet \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial(\partial^\bullet \mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau})) \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma.\end{aligned}$$

Este último grupo de términos puede acotarse aplicando estrategias similares a las que hemos utilizado para acotar el grupo de términos (III) en el Lemma 3. Así, utilizando la regularidad de \mathbf{u} y $\mathcal{R}_{\Gamma^*} \mathbf{u}$, dada por la ecuación (4.33), deducimos que

$$\begin{aligned}|(I)| &\lesssim \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2 + ch^{2p} \left(\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}^2 + \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2 \right) \\ &\quad + \|e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2 + \|(\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2.\end{aligned}$$

Por consiguiente, si $\boldsymbol{\psi}_h^* = \mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\mathbf{w}} - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma u$ tenemos

$$\begin{aligned}\|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 &\leq \frac{1}{4} \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + c \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} + \frac{1}{4} \|(\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 \\ &\quad + c_\lambda h^{2p} \left(\|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}^2 + c \|\partial^\bullet \mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2 \right) \\ &\quad + c \|e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2 + c \|(\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2.\end{aligned}$$

Ahora consideramos $\boldsymbol{\psi}_h^* = \mathcal{Q}_{\Gamma^*}(\tilde{\boldsymbol{w}})^{\Gamma^*} - \partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \boldsymbol{u} \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, en esta última estimación y obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 &\leq \frac{1}{4} \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + c \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} + \frac{1}{4} \|\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\boldsymbol{w}} - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma u\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 \\
&\quad + c_\lambda h^{2p} \left(\|\boldsymbol{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}^2 + \|\partial^\bullet \boldsymbol{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2 \right) \\
&\quad + c \|e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2 + c \|\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\boldsymbol{w}} - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma u\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2 \\
&\leq \frac{1}{4} \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + c \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \\
&\quad + \frac{1}{4} \|\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\boldsymbol{w}} - \partial^\bullet \boldsymbol{u} + \partial^\bullet \boldsymbol{u} - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma u\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 \\
&\quad + c_\lambda h^{2p} \left(\|\boldsymbol{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}^2 + \|\partial^\bullet \boldsymbol{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2 \right) \\
&\quad + c \|e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2 + c \|\mathcal{Q}_\Gamma \tilde{\boldsymbol{w}} - \partial^\bullet \boldsymbol{u} + \partial^\bullet \boldsymbol{u} - \partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma u\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{H_\lambda^1(\Gamma)}^2 + c \|\partial^\bullet e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} \\
&\quad + c_\lambda h^{2p} \left(\|\boldsymbol{u}\|_{H^{p+1}(\Gamma)}^2 + \|\partial^\bullet \boldsymbol{u}\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)}^2 \right) \\
&\quad + c \|e_{\mathcal{R}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)}^2,
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado (4.38) y (4.39). Por último, utilizando la desigualdad de la traza (4.24) con un $\epsilon > 0$ apropiado, deducimos el error la estimación del error H^1 (4.36) deseada para $\lambda > 0$ suficientemente grande. \square

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior obtenemos el siguiente resultado de regularidad para la proyección de Ritz no lineal.

Lema 24. *Si $(\partial^\bullet)^{(\ell)} \boldsymbol{u} \in W^{p+1, \infty}(\Gamma(t))$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces, para todo $\ell \geq 1$ tenemos*

$$\|(\partial^\bullet)^{(\ell)} \mathcal{R}_{\Gamma^*} \boldsymbol{u}\|_{W^{1, \infty}(\Gamma(t))} \sum_{j=0}^{\ell} \|(\partial^\bullet)^{(j)} \boldsymbol{u}\|_{W^{p+1, \infty}(\Gamma(t))}. \quad (4.40)$$

Demostración. Damos la demostración para $\ell = 1$, las otras se siguen de manera análoga.

$$\begin{aligned}
\|\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma^*} \boldsymbol{u}\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} &\leq \|\partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma u - \partial^\bullet \mathcal{Q}_\Gamma u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} + \|\partial^\bullet \mathcal{Q}_\Gamma u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} \\
&\leq \|\partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma u - \partial^\bullet u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} \\
&\quad + \|\partial^\bullet \mathcal{Q}_\Gamma u - \partial^\bullet u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} + c \|\partial^\bullet u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} \\
&\leq ch^{-1} \|\partial^\bullet \mathcal{R}_\Gamma^0 u - \partial^\bullet u\|_{H^1(\Gamma)} \\
&\quad + ch^{p-1} \|\partial^\bullet u\|_{W^{p+1, \infty}(\Gamma)} + c \|\partial^\bullet u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)} \\
&\leq ch^{p-1} \left(\|u\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + \|u\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} \right) \\
&\quad + ch^{p-1} \left(\|\partial^\bullet u\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + \|\partial^\bullet u\|_{H^{p+1}(\partial\Gamma_0)} \right) \\
&\quad + ch^{p-1} \|\partial^\bullet u\|_{W^{p+1, \infty}(\Gamma)} + c \|\partial^\bullet u\|_{W^{1, \infty}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

como $p \geq 1$, tenemos (4.40). \square

Capítulo 5

Semi-discretización espacial

En este capítulo demostramos estimaciones de error a priori para una aproximación Galerkin del Problema 1, bajo h -refinamientos y utilizando espacios B-spline de grado $p \geq 2$ y suavidad C^ℓ , para $0 \leq \ell \leq p - 1$ para todas las variables.

5.1 Semi-discretización espacial

Empezamos definiendo el problema semi-discreto de la siguiente manera.

Problema 2. Determinar $\mathbf{X}_h(t) \in \mathbb{S}_h^3$ ($\Gamma_h(t) = \text{imagen de } \Omega \text{ bajo } \mathbf{X}_h(t)$), $\mathbf{v}_h(t) \in \mathcal{S}_{h,0}(t)^3$, $\kappa_h(t) \in \mathcal{S}_{h,0}(t)$ y $\boldsymbol{\nu}_h(t) \in \mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$ tal que:

$$\mathbf{v}_h = \mathcal{Q}_{\Gamma_h}(-\kappa_h \boldsymbol{\nu}_h), \quad (5.1)$$

$$\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \kappa_h \eta_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \kappa_h \cdot \nabla_{\Gamma_h} \eta_h = \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \kappa_h \eta_h, \quad (5.2)$$

$$\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \boldsymbol{\nu}_h \cdot \nabla_{\Gamma_h} \boldsymbol{\psi}_h = \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h, \quad (5.3)$$

$$\partial_t \mathbf{X}_h = \mathbf{v}_h \circ \mathbf{X}_h, \quad (5.4)$$

para todo $t > 0$ y para toda $\eta_h \in \mathcal{S}_{h,0}(t)$ and $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$. Los valores iniciales discretos se definen como $\mathbf{X}_{h,0} := \mathcal{Q}\mathbf{X}_0$, $\kappa_{h,0} := \mathcal{Q}_{\Gamma_{h,0}}(\kappa_0)$, $\boldsymbol{\nu}_{h,0} := \mathcal{R}_{\Gamma_{h,0}}(\boldsymbol{\nu}_0)$ y $\mathbf{v}_{h,0} := \mathcal{Q}_{\Gamma_{h,0}}(-\kappa_{h,0} \boldsymbol{\nu}_{h,0})$.

Denotamos con $A_h = \nabla_{\Gamma_h} \boldsymbol{\nu}_h$ el mapa de Weingarten y con $|A_h|$ su norma de Frobenius. Definiendo $\boldsymbol{\tau}_h$ y $\boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}$ como en el Lema 20, definimos $\alpha_{\partial,h} = (\boldsymbol{\kappa}_{\partial,h} \cdot \boldsymbol{\nu}_h)$ y $\boldsymbol{\mu}_h = \boldsymbol{\nu}_h \times \boldsymbol{\tau}_h$. Es importante tener en cuenta que $\alpha_{\partial,h}$ y $\boldsymbol{\mu}_h$ no son ni la curvatura normal ni el vector conormal a $\partial\Gamma_{h,0}$ porque $\boldsymbol{\nu}_h$ no es necesariamente el vector normal a la superficie discreta.

Para estimar el error entre una función u , definida sobre la superficie Γ , y su aproximación numérica u_h , definida sobre la superficie spline Γ_h , consideraremos una aproximación discreta teórica u^* definida sobre la superficie quasi-interpolada Γ^* para la que tenemos

una estimación del error de orden óptimo, de forma que

$$\begin{aligned} \|u - (u_h)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma)} &\leq \|u - (u^*)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma)} + \|(u^*)^\Gamma - (u_h)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma)} \\ &= O(h^p) + \|e_u\|_{H^1(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada variable desconocida u de la formulación débil en el Problema 1 definiremos ahora una aproximación discreta u^* y probaremos límites para $u^* - u_h$.

Recordemos la definición de la superficie quasi-interpolada $\Gamma^*(t)$ de (3.3), esta superficie se mueve con velocidad \mathbf{v}^* , tal que

$$\partial_t \mathbf{X}^* = \mathbf{v}^* \circ \mathbf{X}^*. \quad (5.5)$$

Es decir, $\mathbf{v}^* := \mathcal{Q}_{\Gamma^*}((\mathbf{v})^{\Gamma^*})$. Para κ y $\boldsymbol{\nu}$ utilizaremos las proyecciones de Ritz presentadas en las Secciones 4.2 y 4.3 y definimos

$$\kappa^* := \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 \kappa \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\nu}^* := \mathcal{R}_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}. \quad (5.6)$$

También necesitamos definir aproximaciones adecuadas para las cantidades definidas sólo en la frontera. Como $\partial\Gamma_{h,0} = \partial\Gamma_{h,0}^*$, consideramos $\boldsymbol{\tau}^* := \boldsymbol{\tau}_h$ y $\boldsymbol{\kappa}_\partial^* := \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}$. Para $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}$ y $\alpha = \boldsymbol{\kappa}_\partial \cdot \boldsymbol{\nu}$, consideramos aproximaciones adecuadas definidas en el siguiente Lema.

Lema 25. Sean $\boldsymbol{\tau}^* = \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}} \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\kappa}_\partial^* = \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}} \boldsymbol{\kappa}_\partial$. Si definimos $\boldsymbol{\mu}^* := \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\tau}^*$, $\alpha^* = \boldsymbol{\kappa}_\partial^* \cdot \boldsymbol{\nu}^*$ entonces, para todo $0 < h \leq h_0$

$$\|(\boldsymbol{\mu})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\mu}^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim h^p, \quad \|(\alpha)^{\partial\Gamma_{h,0}} - \alpha^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim h^p. \quad (5.7)$$

Además, a partir de estas estimaciones obtenemos para todos $h \leq h_0$

$$\|\boldsymbol{\mu}^*\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim C, \quad \|\alpha^*\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim C. \quad (5.8)$$

Demostración. La primera estimación (5.7) puede deducirse de usar el Lema 20, la estimación dada en la ecuación (4.32) para $\mathcal{R}_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}$ y el Teorema 4, de la siguiente manera:

Primero observamos que

$$\begin{aligned} \|(\boldsymbol{\mu})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\mu}^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} &= \|(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\tau}^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\lesssim \|((\boldsymbol{\nu})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\nu}^*) \times \boldsymbol{\tau}^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\quad + \|(\boldsymbol{\nu})^{\partial\Gamma_{h,0}} \times ((\boldsymbol{\tau})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\tau}^*)\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\lesssim \|(\boldsymbol{\nu})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\nu}^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \|\boldsymbol{\tau}^*\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\quad + \|(\boldsymbol{\nu})^{\partial\Gamma_{h,0}}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{h,0})} \|(\boldsymbol{\tau})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\tau}^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}. \end{aligned}$$

Para el primer término de la última desigualdad tenemos $\|(\boldsymbol{\nu})^{\partial\Gamma_{h,0}} - \boldsymbol{\nu}^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \lesssim \|\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{\nu}^*)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma_h)} \lesssim h^p$, lo que se obtiene debido al Teorema de Trazas y a (4.32). Mientras que el segundo término está acotado por h^{p+1} debido a que $\boldsymbol{\tau}^*$ es un interpolante de $\boldsymbol{\tau}$. La segunda estimación (5.7) se puede obtener de manera análoga.

Finalmente, (5.8) es una consecuencia directa de (4.33). \square

Obsérvese que $\boldsymbol{\mu}^*$ y α^* sólo están definidos en $\partial\Gamma_{h,0}$. Además, es importante mencionar que α^* no es necesariamente la curvatura normal del borde de la superficie discreta, así como $\boldsymbol{\mu}^*$ no es el vector conormal a $\partial\Gamma_{h,0}$.

Lema 26. *Suponiendo que las funciones $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\kappa(t)$ y $\boldsymbol{\nu}(t)$ son suficientemente suaves. Existe $h_0 > 0$ tal que,*

$$\|\nabla \mathbf{X}^*(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim \|\nabla \mathbf{X}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (5.9)$$

los casi-interpolantes de \mathbf{x}^* y \mathbf{v}^* satisfacen

$$\|\mathbf{x}^*\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} + \|\mathbf{v}^*\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} \leq C, \quad (5.10)$$

y las proyecciones de tipo Ritz κ^* y $\boldsymbol{\nu}^*$ satisfacen

$$\|\kappa^*\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} + \|\boldsymbol{\nu}^*\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} \leq C, \quad (5.11)$$

para todo $t \in [0, T]$ and $0 < h \leq h_0$.

Demostración. La estimación uniforme (5.9) se deduce directamente de la definición de \mathbf{X}^* , de la regularidad de \mathbf{X} y del error de interpolación en el Lema 5. Y, usando equivalencia de normas y que $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}^* \circ (\mathbf{X}^*)^{-1}$, esto es, es el push-forward de \mathbf{X}^* , tenemos la cota uniforme para \mathbf{x}^* . La estimación para $\boldsymbol{\nu}^*$ sale directamente de su definición y de aplicar el Lema 14.

Las últimas desigualdades en (5.11) son consecuencias directas de (4.7) y (4.33). □

Definición 21. *Definimos los defectos d_v , d_κ y d_ν como las cantidades que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones (5.1)–(5.3) cuando se reemplazan \mathbf{X}_h , \mathbf{v}_h , κ_h y $\boldsymbol{\nu}_h$ por las correspondientes cantidades discretas \mathbf{X}^* , \mathbf{v}^* , κ^* y $\boldsymbol{\nu}^*$. Es decir, para cada $t > 0$, $d_\kappa, d_v \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$, $d_\nu \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$ satisfacen*

$$\mathbf{v}^* = \mathcal{Q}_{\Gamma^*}(-\kappa^* \boldsymbol{\nu}^*) + d_v, \quad (5.12)$$

$$\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* + \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^* = \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* + \int_{\Gamma^*} d_\kappa \eta_h^*, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* + \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* : \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\psi}_h^* &= \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ &+ \int_{\partial\Gamma_0^*} \alpha_{\partial}^* \boldsymbol{\mu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* + \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \boldsymbol{\psi}_h^*, \end{aligned} \quad (5.14)$$

para toda $\eta_h^* \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t)$ y $\boldsymbol{\psi}_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, donde $A_h^* = \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^*$.

5.2 Consistencia

Proposición 6. Sean d_v , d_κ y d_ν funciones definidas en la Definición 21. Siempre que las soluciones continuas sean suficientemente suaves, existe $h_0 > 0$ tal que para todo $0 < h \leq h_0$ y todo $t \in [0, T]$

$$\|d_v(t)\|_{H^1(\Gamma^*)} \lesssim h^p, \quad \|d_\kappa(t)\|_{L^2(\Gamma^*)} \lesssim h^p, \quad (5.15)$$

además,

$$\|d_\nu(t)\|_{L^2(\Gamma^*)} \lesssim h^p, \quad y \quad \|\partial^\bullet d_\nu(t)\|_{L^2(\Gamma^*)} \lesssim h^p \|\psi_h^*\|_{H^1(\Gamma^*)}, \quad (5.16)$$

para toda $\psi_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\tau_h)$.

Para esta Proposición serán suficientes las siguientes condiciones de regularidad para todo $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &\in W_\partial^{p+1, \infty}(\Omega), & \mathbf{v}(t) &\in H^{p+1}(\Gamma(t)), & \kappa(t) &\in W^{p+1, \infty}(\Gamma(t)) \\ \partial^\bullet \kappa(t) &\in W^{p+1, \infty}(\Gamma(t)), & \boldsymbol{\nu}(t) &\in W_\partial^{p+1, \infty}(\Gamma(t)), & \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}(t) &\in W^{p+1, \infty}(\Gamma(t)), \\ \partial_\mu \boldsymbol{\nu} &\in H^{p+1}(\partial\Gamma_0), & \partial^\bullet(\partial_\mu \boldsymbol{\nu}) &\in H^{p+1}(\partial\Gamma_0), & \partial^\bullet \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}(t) &\in H_\partial^{p+1}(\Gamma(t)). \end{aligned}$$

Demostración. Restando (2.15)-(2.16) de (5.12)-(5.13) tenemos las siguientes ecuaciones para los defectos d_v y d_κ

$$\begin{aligned} d_v &= (\mathbf{v}^* - (\mathbf{v})^{\Gamma^*}) + ((-\kappa \boldsymbol{\nu})^{\Gamma^*} - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}(-\kappa^* \boldsymbol{\nu}^*)), \\ \int_{\Gamma^*} d_\kappa \eta_h^* &= \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* + \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^* - \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* \\ &\quad - \int_{\Gamma} \partial^\bullet \kappa (\eta_h^*)^\Gamma - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \kappa \cdot \nabla_{\Gamma} (\eta_h^*)^\Gamma + \int_{\Gamma} |A|^2 \kappa (\eta_h^*)^\Gamma. \end{aligned}$$

Comenzamos obteniendo la estimación para d_v . Recordando que $\mathbf{v}^* = \mathcal{Q}_{\Gamma^*} \mathbf{v}$ y usando la estimación de interpolación para la velocidad, tenemos

$$\begin{aligned} \|d_v\|_{H^1(\Gamma^*)} &= \|\mathcal{Q}_{\Gamma^*} \mathbf{v} - (\mathbf{v})^{\Gamma^*}\|_{H^1(\Gamma^*)} + \|(\kappa \boldsymbol{\nu})^{\Gamma^*} - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}(\kappa^* \boldsymbol{\nu}^*)\|_{H^1(\Gamma^*)} \\ &\lesssim h^p \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Gamma)} + \|(\kappa \boldsymbol{\nu})^{\Gamma^*} - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}(\kappa \boldsymbol{\nu})\|_{H^1(\Gamma^*)} \\ &\quad + \|\mathcal{Q}_{\Gamma^*}(\kappa \boldsymbol{\nu}) - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}(\kappa^* \boldsymbol{\nu}^*)\|_{H^1(\Gamma^*)} \\ &\lesssim h^p \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Gamma)} + h^p \|\kappa \boldsymbol{\nu}\|_{H^{p+1}(\Gamma)} + \|\mathcal{Q}_{\Gamma^*}(\kappa \boldsymbol{\nu} - \kappa^* \boldsymbol{\nu}^*)\|_{H^1(\Gamma^*)}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la linealidad de \mathcal{Q}_{Γ^*} . Para acotar el último término, aprovechamos la estabilidad del operador \mathcal{Q}_{Γ^*} en norma H^1 , las estimaciones de error para las proyecciones de Ritz de $\boldsymbol{\nu}$ y κ y su acotación uniforme dada en (4.33) y (4.7)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_{\Gamma^*}(\kappa \boldsymbol{\nu} - \kappa^* \boldsymbol{\nu}^*)\|_{H^1(\Gamma^*)} &\lesssim \|(\kappa \boldsymbol{\nu})^{\Gamma^*} - (\kappa^* \boldsymbol{\nu}^*)\|_{H^1(\Gamma^*)} \\ &\lesssim \|(\kappa - \kappa^*)(\boldsymbol{\nu})^{\Gamma^*}\|_{H^1(\Gamma^*)} + \|\kappa^*((\boldsymbol{\nu})^{\Gamma^*} - \boldsymbol{\nu}^*)\|_{H^1(\Gamma^*)} \\ &\lesssim h^p. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|d_\nu\|_{H^1(\Gamma^*(t))} \lesssim h^p$, donde la constante involucrada depende de las normas de \mathbf{v} , κ y ν pero es independiente de h .

Reagrupando los términos en la ecuación para d_κ , recordando que $\kappa^* := \mathcal{R}_{\Gamma^*}^0 \kappa$, y usando la definición de $\mathcal{R}_{\Gamma^*}^0$ de (19), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} d_\kappa \eta_h^* &= \left(\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} \partial^\bullet \kappa (\eta_h^*)^\Gamma \right) \\ &\quad + \left(\int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^* - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \kappa \cdot \nabla_{\Gamma} (\eta_h^*)^\Gamma \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} |A|^2 \kappa (\eta_h^*)^\Gamma \right) \\ &= \left(\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} \partial^\bullet \kappa (\eta_h^*)^\Gamma \right) + \left(\int_{\Gamma^*} \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} \kappa (\eta_h^*)^\Gamma \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} |A|^2 \kappa (\eta_h^*)^\Gamma \right). \end{aligned}$$

Acotamos todos los términos por pares, utilizando el error de perturbación geométrico y las estimaciones de interpolación. En primer lugar, consideramos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} d_\kappa \eta_h^* &= \left(\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} \partial^\bullet \kappa (\eta_h^*)^\Gamma \right) + \left(\int_{\Gamma^*} \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} \kappa (\eta_h^*)^\Gamma \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} |A|^2 \kappa (\eta_h^*)^\Gamma \right) = (I) + (II) + (III). \end{aligned}$$

Ahora vamos a acotar (I), usando (3.18a), la acotación uniforme para $\partial^\bullet \kappa^*$, la regularidad de $\partial^\bullet \kappa$ y la equivalencia de normas:

$$\begin{aligned} |(I)| &= \left| \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} (\partial^\bullet \kappa - (\partial^\bullet \kappa^*)^\Gamma + (\partial^\bullet \kappa^*)^\Gamma) (\eta_h^*)^\Gamma \right| \\ &\leq \left| \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} (\partial^\bullet \kappa^*)^\Gamma (\eta_h^*)^\Gamma \right| + \left| \int_{\Gamma} (\partial^\bullet \kappa - (\partial^\bullet \kappa^*)^\Gamma) (\eta_h^*)^\Gamma \right| \\ &\lesssim h^p \|\partial^\bullet \kappa^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\eta_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)} + h^p \|(\partial^\bullet \kappa)^\Gamma\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\eta_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\lesssim h^p \|\eta_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

Podemos proceder de manera similar para (II). Finalmente, para (III) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |(III)| &= \left| \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} |A|^2 \kappa (\eta_h^*)^\Gamma \right| \\ &\leq \left| \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* - \int_{\Gamma} (|A_h^*|^2 \kappa^*)^\Gamma (\eta_h^*)^\Gamma \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Gamma} (|A|^2 \kappa - (|A_h^*|^2 \kappa^*)^\Gamma) (\eta_h^*)^\Gamma \right| \\ &\lesssim h^p \|\eta_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)} + \| |A|^2 \kappa - (|A_h^*|^2 \kappa^*)^\Gamma \|_{L^2(\Gamma)} \|(\eta_h^*)^\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\lesssim h^p \|\eta_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado que

$$\| |A|^2 \kappa - (|A_h^*|^2 \kappa^*)^\Gamma \|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \| |A|^2 \kappa - (|A_h^*|^2 \kappa^*)^\Gamma \|_{L^2(\Gamma)} + \| \kappa - (\kappa^*)^\Gamma \|_{L^2(\Gamma)},$$

junto con la estimación (4.32), (4.6) y la equivalencia de normas en Γ y Γ^* . Lo cual en su conjunto nos permite deducir que

$$\int_{\Gamma^*} d_\kappa \eta_h^* \lesssim h^p \|\eta_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)},$$

y, por ende, la estimación para $\|d_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)}$.

La prueba para d_ν es un poco más técnica porque $(\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h))^\Gamma \not\subset \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$; esto implica una no conformidad adicional en el método.

Recordemos que, en $\partial\Gamma$, debido a (2.8) sabemos que

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} = (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} + (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\mu} = (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} + \underbrace{(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\partial)}_\alpha \boldsymbol{\mu}.$$

Usando esta identidad y (2.13b) obtenemos que, para cualquier función $\boldsymbol{\psi}_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma &= - \int_\Gamma \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} : \nabla_\Gamma (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma + \int_\Gamma |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma + \int_{\partial\Gamma} \alpha \boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma} (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \end{aligned}$$

usando solo que $(\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \in H^1(\Gamma)$. Sumando esto a (5.14) es posible deducir que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* &= \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* + \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* : \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\psi}_h^* - \int_{\Gamma^*} |A^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\ &\quad - \int_{\partial\Gamma^*} \alpha_h^* \boldsymbol{\mu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* + \int_{\partial\Gamma} \alpha \boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ &\quad - \int_\Gamma \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma - \int_\Gamma \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} : \nabla_\Gamma (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma + \int_\Gamma |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma} (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma. \end{aligned}$$

Recordamos ahora que $\boldsymbol{\nu}^* := \mathcal{R}_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}$, siendo \mathcal{R}_{Γ^*} la proyección de tipo Ritz no lineal de la Definición 20, y también que $\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}$, $\alpha = \boldsymbol{\kappa}_\partial \cdot \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\mu}^* := \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\tau}^*$, $\alpha^* = \boldsymbol{\kappa}_\partial^* \cdot \boldsymbol{\nu}^*$, de modo que las dos primeras integrales sobre el borde se anulan, lo que conduce a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* &= \left(\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* - \int_\Gamma \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \right) \\ &\quad + \lambda \left(\int_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* - \int_\Gamma \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma^*} |A^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* - \int_\Gamma |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \right) \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma} (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Los primeros tres términos pueden acotarse de la misma manera que para d_κ , por $ch^p \|\boldsymbol{\psi}_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)}$. Para el último término, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Gamma} (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma &= \int_{\partial\Gamma} (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) (\boldsymbol{\tau} - \hat{\boldsymbol{\tau}}_h) \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma} (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \hat{\boldsymbol{\tau}}_h \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ &\quad - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}} (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \hat{\boldsymbol{\tau}}_h \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma, \end{aligned} \tag{5.18}$$

donde hemos usado que el último término desaparece porque $\psi_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\tau_h)$ (recordar la definición de $\mathcal{O}_h^*(\tau_h)$ en (4.16)). Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Gamma} (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot (\psi_h^*)^\Gamma \right| &\lesssim \|\boldsymbol{\tau} - \hat{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \|\psi_h^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\quad + \|(\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}}(\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau})\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \|\psi_h^*\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \\ &\lesssim h^{p+1} h^{-1/2} \|\psi_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)} + h^{p+1} h^{-1/2} \|\psi_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Con esta última estimación obtenemos el límite deseado para d_ν .

Para acotar $\partial^\bullet d_\nu$ consideramos que, si $\partial^\bullet \psi_h^* = 0$,

$$\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet d_\nu \cdot \psi_h^* = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \psi_h^* - \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \psi_h^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*,$$

así

$$\left| \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet d_\nu \cdot \psi_h^* \right| \leq \left| \frac{d}{dt} \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \psi_h^* \right| + \left| \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \psi_h^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \right|.$$

De esta manera, para acotar el primer término del lado derecho primero derivamos (5.17) respecto del tiempo, usando el Teorema de Transporte (1.11). Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \psi_h^* &= \left(\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* - \int_{\Gamma} \partial^\bullet \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot (\psi_h^*)^{\Gamma^*} \right) \\ &\quad + \left(\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* - \int_{\Gamma} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot (\psi_h^*)^{\Gamma^*} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \right) \\ &\quad + \left(\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* - \int_{\Gamma} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot (\psi_h^*)^{\Gamma^*} \right) \\ &\quad + \left(\int_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\psi_h^*)^{\Gamma^*} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma^*} \partial^\bullet (|A^*|^2) \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* - \int_{\Gamma} \partial^\bullet (|A|^2) \boldsymbol{\nu} \cdot (\psi_h^*)^{\Gamma^*} \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma^*} |A^*|^2 \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* - \int_{\Gamma} |A|^2 \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot (\psi_h^*)^{\Gamma^*} \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma^*} |A^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* - \int_{\Gamma} |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot (\psi_h^*)^{\Gamma^*} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \right) \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma} (\partial^\bullet (\partial_\mu \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot (\psi_h^*)^\Gamma. \end{aligned}$$

Además usaremos que

$$\begin{aligned} \partial^\bullet (|A|^2) &= 2(\nabla_{\Gamma}(\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}) : A - AD : A), \\ \partial^\bullet (|A^*|^2) &= 2(\nabla_{\Gamma^*}(\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^*) : A^* - A^* D^* : A^*), \end{aligned}$$

con $D = ((\nabla_{\Gamma} \mathbf{v})^T - \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} \nabla_{\Gamma} \mathbf{v})$ y $D^* = ((\nabla_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*)^T - \boldsymbol{\nu}_{\Gamma^*} \otimes \boldsymbol{\nu}_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*)$, siendo $\boldsymbol{\nu}_{\Gamma^*}$ el vector normal de Γ^* .

Todos los pares de términos que hemos obtenido se pueden acotar mediante los errores geométricos del Lema 12 usando argumentos similares a los de la estimación para d_ν , además de la regularidad de $\partial^\bullet \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}$ y las estimaciones (4.32) para $\partial^\bullet \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^*$.

Para el término de borde podemos proceder, como en la ecuación (5.18),

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Gamma} (\partial^\bullet(\partial_\mu \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma &= \int_{\partial\Gamma} (\partial^\bullet(\partial_\mu \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\tau}) (\boldsymbol{\tau} - \hat{\boldsymbol{\tau}}_h) \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma} (\partial^\bullet(\partial_\mu \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\tau}) \hat{\boldsymbol{\tau}}_h \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma \\ &\quad - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathcal{Q}_{\partial\Gamma_{h,0}}((\partial^\bullet(\partial_\mu \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\tau})) \hat{\boldsymbol{\tau}}_h \cdot (\boldsymbol{\psi}_h^*)^\Gamma, \end{aligned} \quad (5.20)$$

y luego procedemos como en (5.19) usando también la regularidad de $\partial^\bullet(\partial_\mu \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\tau}$ y estimaciones de interpolación. Finalmente, nos queda

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \right| \lesssim h^p \|\boldsymbol{\psi}_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)}.$$

Para el segundo término tenemos

$$\left| \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \right| \lesssim h^p \|\boldsymbol{\psi}_h^*\|_{L^2(\Gamma^*)}.$$

□

5.3 Ecuaciones del error

Definimos las siguientes funciones de error que pertenecen a $\mathcal{S}_h^*(t)$, $\mathcal{S}_{h,0}^*(t)$ y $\mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)$, respectivamente, para todo $t > 0$:

$$\begin{aligned} e_x &= (\mathbf{x}_h)^\Gamma - \mathbf{x}^*, & e_\kappa &= (\kappa_h)^\Gamma - \kappa^*, \\ e_v &= (\mathbf{v}_h)^\Gamma - \mathbf{v}^*, & e_\nu &= (\boldsymbol{\nu}_h)^\Gamma - \boldsymbol{\nu}^*, \end{aligned}$$

donde utilizamos las funciones de identidad $\mathbf{x}_h = \mathbf{X}_h \circ (\mathbf{X}_h)^{-1}$ y $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}^* \circ (\mathbf{X}^*)^{-1}$. Obtenemos así las *ecuaciones de error* al restar (5.12), (5.13) y (5.14) de (5.1), (5.2) y (5.3), respectivamente

$$\partial^\bullet e_x = e_v \quad (5.21)$$

$$e_v = (\mathcal{Q}_{\Gamma_h}(-\kappa_h \boldsymbol{\nu}_h))^\Gamma - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}(-\kappa^* \boldsymbol{\nu}^*) - d_v \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet (e_\kappa)^\Gamma \eta_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} (e_\kappa)^\Gamma \cdot \nabla_{\Gamma_h} \eta_h \\ &= - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} (\kappa^*)^\Gamma \cdot \nabla_{\Gamma_h} \eta_h - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^* \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet ((\kappa^*)^\Gamma) \eta_h - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* \right) \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \kappa_h \eta_h - \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* + \int_{\Gamma^*} d_\kappa \eta_h^*. \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h} \cdot \boldsymbol{\psi}_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(e_\nu)^{\Gamma_h} : \nabla_{\Gamma_h} \boldsymbol{\psi}_h \\
&= - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} : \nabla_{\Gamma_h} \boldsymbol{\psi}_h - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* : \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\psi}_h^* \right) \\
&\quad - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet((\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h}) \cdot \boldsymbol{\psi}_h - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_h^* \right) \\
&\quad + \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h - \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* \\
&\quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \alpha_{\partial}^* \boldsymbol{\mu}^* \cdot \boldsymbol{\psi}_h^* + \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \boldsymbol{\psi}_h^*.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

A continuación, presentamos la deducción de cada ecuación:

- (a) Considerando la definición de derivada material, las funciones identidad \boldsymbol{x}_h y \boldsymbol{x}^* , y las ecuaciones para las velocidades (5.4) y (5.5), obtenemos la ecuación de error para e_x .

$$\begin{aligned}
\partial^\bullet e_x &= \partial_t(e_x \circ \boldsymbol{X}^*) \circ (\boldsymbol{X}^*)^{-1} \\
&= \partial_t((\boldsymbol{x}_h)^{\Gamma^*} \circ \boldsymbol{X}^*) \circ (\boldsymbol{X}^*)^{-1} - \partial_t(\boldsymbol{x}^* \circ \boldsymbol{X}^*) \circ (\boldsymbol{X}^*)^{-1} \\
&= \partial_t \boldsymbol{X}_h \circ (\boldsymbol{X}^*)^{-1} - \partial_t \boldsymbol{X}^* \circ (\boldsymbol{X}^*)^{-1} \\
&= \boldsymbol{v}_h \circ \boldsymbol{X}_h \circ (\boldsymbol{X}^*)^{-1} - \boldsymbol{v}^* \circ \boldsymbol{X}^* \circ (\boldsymbol{X}^*)^{-1} \\
&= (\boldsymbol{v}_h)^{\Gamma^*} - \boldsymbol{v}^* = e_v.
\end{aligned}$$

- (b) Restando (5.12) de (5.1) tenemos para e_v

$$e_v = (\mathcal{Q}_{\Gamma_h}(-\kappa_h \boldsymbol{\nu}_h))^{\Gamma^*} - \mathcal{Q}_{\Gamma^*}(-\kappa^* \boldsymbol{\nu}^*) - d_v.$$

- (c) Restando (5.13) de (5.2), y sumando y restando $\partial^\bullet(\kappa^*)^{\Gamma_h}$ en el primer y tercer integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \kappa_h \eta_h - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \kappa_h \cdot \nabla_{\Gamma_h} \eta_h - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^* \\
&= \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \kappa_h \eta_h - \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* + \int_{\Gamma^*} d_\kappa \cdot \eta_h^*, \\
& \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet((e_\kappa)^{\Gamma_h} + (\kappa^*)^{\Gamma_h}) \eta_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}((e_\kappa)^{\Gamma_h} + (\kappa^*)^{\Gamma_h}) \cdot \nabla_{\Gamma_h} \eta_h \\
&= \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^* + \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* \\
&+ \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \kappa_h \eta_h - \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* + \int_{\Gamma^*} d_\kappa \eta_h^*.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet(e_\kappa)^{\Gamma_h} \eta_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h} \eta_h \\
&= - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\kappa^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h} \eta_h - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \eta_h^* \right) \\
&\quad - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet((\kappa^*)^{\Gamma_h}) \eta_h - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \eta_h^* \right) \\
&\quad + \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \kappa_h \eta_h - \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \kappa^* \eta_h^* + \int_{\Gamma^*} d_\kappa \eta_h^*.
\end{aligned}$$

- (d) La ecuación de error para $\boldsymbol{\nu}$ se obtiene de manera similar. La única diferencia es que aparecen dos términos adicionales, correspondientes a los integrales de frontera.

5.4 Relación entre superficies discretas

Comenzamos observando que, debido a la continuidad de las dos aproximaciones discretas de \mathbf{X} y al hecho de que coinciden en $t = 0$, permanecen cercanas durante algún tiempo.

Lema 27. *Sea $p \geq 2$, y para $h > 0$ sea \mathbf{X}_h la parametrización spline de Γ_h dada por la solución numérica del Problema 2, sea \mathbf{X}^* como en (3.3). Entonces, existen $t_0 \in [0, T]$ y $h_0 > 0$ tales que*

$$\|\mathbf{X}_h(t) - \mathbf{X}^*(t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq h^{(p-1)/2}, \quad \forall t \in [0, t_0], \quad \forall h \in (0, h_0]. \quad (5.25)$$

Además, la Suposición 1 se cumple, esto es, \mathbf{X}_h y su inversa están uniformemente acotadas en h en $W^{1,\infty}(\Omega)$, para todo $0 < h \leq h_0$, y todo $0 \leq t \leq t_0$.

Demostración. Sea $E_{\mathbf{X}}$ el pull-pack $E_{\mathbf{X}} = e_x \circ \mathbf{X}^* = \mathbf{X}_h - \mathbf{X}^*$. Debido a que $E_{\mathbf{X}} : [0, T] \rightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$ es continua en el tiempo y $E_{\mathbf{X}}(0) = 0$, para cada $h > 0$ existe $t_0 > 0$ (que, en principio, podría depender de h) tal que (5.25) sea verdadera. De (5.25) y usando (5.9) deducimos que, tomando h_0 como en el Lema 26, la Suposición 1 se satisface. \square

El hecho de que las superficies discretas se encuentren suficientemente cerca, nos permite obtener el siguiente lema, como un resultado análogo al (Kovács et al., 2017, Lema 4.3), respecto de la equivalencia de normas definidas en superficies discretas.

Para su demostración, establecemos una relación entre las superficies discretas a través de un nuevo movimiento (artificial) $\mathbf{Y}(\cdot, \theta) : \Omega \rightarrow \Lambda(\theta)$, con $\theta \in [0, 1]$, definido de manera que $\Lambda(0) = \Gamma^*(t)$ y $\Lambda(1) = \Gamma_h(t)$ para algún $t \in [0, t_0]$ fijo, donde el lema previo se cumple.

Lema 28. *Para $\theta \in [0, 1]$, sea $\Lambda(\theta)$ una superficie parametrizada por $\mathbf{Y}(\cdot, \theta) = \mathbf{X}^* + \theta E_{\mathbf{X}}$, con $E_{\mathbf{X}}$ el mapeo pull-back $E_{\mathbf{X}} = e_x \circ \mathbf{X}^* = \mathbf{X}_h - \mathbf{X}^*$. Si*

$$\|\nabla E_{\mathbf{X}}\|_{L^\infty(\Omega)} < c_{\mathbf{X}}, \quad (5.26)$$

donde $c_{\mathbf{X}} > 0$ es una constante dependiente de \mathbf{X} . Entonces, existe $h_0 > 0$ tal que, para todo $0 < h \leq h_0$ tenemos:

(I) Para $1 \leq q \leq \infty$, y $\eta \in W^{1,p}(\Gamma^*)$,

$$\|(\eta^*)^{\Lambda(\theta)}\|_{W^{1,p}(\Lambda(\theta))} \lesssim \|\eta^*\|_{W^{1,p}(\Gamma^*)}. \quad (5.27)$$

(II) Además, las normas $L^2(\Lambda(\theta))$ y $H^1(\Lambda(\theta))$ son h -uniformemente equivalentes para $\theta \in [0, 1]$. Lo cual implica que las normas $L^2(\Gamma_h(t))$ y $L^2(\Gamma^*(t))$, así como las H^1 son equivalentes para cada $t \in [0, t_0]$.

Demostración. La principal diferencia con Kovács et al. (2017) es que, para probar (5.27), utilizamos la parametrización definida en el dominio de referencia. Entonces, ya que $\nabla \mathbf{Y}(\theta) = \nabla(\mathbf{X}^* + \theta E_{\mathbf{X}})$ y (5.9) se cumple, tendremos que $\|\nabla \mathbf{Y}(\theta)\|_{L^\infty(\Omega)}$ está acotada uniformemente en h y θ . De manera que, $\nabla \mathbf{Y}(\theta)$ será una matriz de rango completo si

$$\|(G^*)^{-1}(\nabla \mathbf{X}^*)^T \nabla E_{\mathbf{X}}\|_{L^\infty(\Omega)} < 1.$$

Luego, por el Lema 27, podemos elegir $h_0 > 0$ tal que

$$\|\nabla E_{\mathbf{X}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq h^{\frac{p-1}{2}} < \frac{1}{C_{\mathbf{X}}} := c_{\mathbf{X}}, \quad \forall h \in (0, h_0],$$

donde $C_{\mathbf{X}}$, que depende de \mathbf{X} , satisface $\|(G^*)^{-1}(\nabla \mathbf{X}^*)^T\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{\mathbf{X}}$.

Por lo tanto, obtenemos que $G_\Lambda^{-1}(\theta)$ es una matriz no singular y que $\|G_\Lambda^{-1}(\theta)\|_{L^\infty(\Omega)}$ está uniformemente acotado. De este modo, la siguiente expresión está bien definida

$$\begin{aligned} (\nabla_\Lambda(\eta^*)^{\Lambda(\theta)}) \circ \mathbf{Y}(\theta) &= \nabla \mathbf{Y}(\theta) G_\Lambda^{-1}(\theta) \nabla((\eta^*)^{\Lambda(\theta)}) \circ \mathbf{Y}(\theta) \\ &= \nabla \mathbf{Y}(\theta) G_\Lambda^{-1}(\theta) \nabla(\eta^* \circ \mathbf{X}^*) \\ &= \nabla \mathbf{Y}(\theta) G_\Lambda^{-1}(\theta) (\nabla \mathbf{X}^*)^T (\nabla_{\Gamma^*} \eta^*) \circ \mathbf{X}^*, \end{aligned}$$

y podemos deducir (5.27).

Finalmente, intercambiando los papeles de \mathbf{X}^* y \mathbf{X}_h en la definición de \mathbf{Y} , deducimos que las normas $L^2(\Lambda(\theta))$ y $H^1(\Lambda(\theta))$ son h -uniformemente equivalentes para todo $\theta \in [0, 1]$. \square

Observación 13. *Notar que la condición $\|(G^*)^{-1}(\nabla \mathbf{X}^*)^T \nabla E_{\mathbf{X}}\|_{L^\infty(\Omega)} < 1$ implica que $\|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^\infty(\Gamma^*)} < 1$ para equivalencia de normas discretas, usando que $(\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}) \circ \mathbf{X}^* = \nabla E_{\mathbf{X}}(G^*)^{-1}(\nabla \mathbf{X}^*)^T$ y equivalencia de normas entre normas entre pullback y pushforward. Esa condición sale de que*

$$(G^*)^{-1}(\nabla \mathbf{X}^*)^T \nabla \mathbf{Y}(\theta) = I_2 + \theta(G^*)^{-1}(\nabla \mathbf{X}^*)^T \nabla E_{\mathbf{X}}.$$

Antes de demostrar la estabilidad, necesitamos los siguientes resultados auxiliares.

Lema 29. *Sean ϕ^* y ψ^* funciones definidas en Γ^* y sea η definida en Γ_h tales que las siguientes cantidades existen y se cumple (5.26).*

Si $\|\phi^\|_{L^\infty(\Gamma^*)} \leq C$, entonces*

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_h} \eta(\psi^*)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \phi^* \psi^* &\lesssim \|(\eta)^{\Gamma^*} - \phi^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\psi^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\quad + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\psi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Si $\|\phi^\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*)} \leq C$ entonces,*

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\phi^*)^{\Gamma_h} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}_h) \nabla_{\Gamma_h}(\psi^*)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \phi^* \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \nabla_{\Gamma^*} \phi^* \\ \lesssim \left(\|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\nabla_{\Gamma^*} \psi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}, \end{aligned} \tag{5.29}$$

donde $\mathcal{B}(\mathbf{v}_h)$ and $\mathcal{B}(\mathbf{v}^*)$ están definidas como en 1.12 con \mathbf{v}_h y \mathbf{v}^* en lugar de \mathbf{v} .

Demostración. Consideramos aquí que t está fijo $[0, T]$. Por lo tanto, omitiremos el argumento t de la prueba. Sea $\Lambda(\theta)$ como en el Lema 28. Notar que \mathbf{X}_h y \mathbf{X}^* son independientes de θ , además $\Lambda(0) = \Gamma(t)$ y $\Lambda(1) = \Gamma^*(t)$. Esta superficie intermedia evoluciona con velocidad

$$\mathbf{v}_{\Lambda(\theta)} = \partial_\theta \mathbf{Y} \circ \mathbf{Y}^{-1} = (E_{\mathbf{X}}) \circ \mathbf{Y}^{-1} = (e_{\mathbf{x}})^{\Lambda(\theta)}$$

Así, usando el Lema 28, tenemos

$$\|\mathbf{v}_{\Lambda(\theta)}\|_{W^{1,\infty}(\Lambda(\theta))} \lesssim \|e_{\mathbf{x}}\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*)} \leq c, \quad (5.30)$$

Para todo $0 \leq \theta \leq 1$. Como $(\phi^*)^{\Lambda(\theta)}$ es el transporte a $\Lambda(\theta)$ de una función independiente de θ , $\phi^* \circ \mathbf{X}^*$, podemos usar (1.15) para obtener $\partial^\bullet(\phi^*)^{\Lambda(\theta)} = 0$. Luego, definiendo

$$\bar{\varepsilon}(\theta) := (\phi^*)^{\Lambda(\theta)} + \theta(\eta^* - \phi^*)^{\Lambda(\theta)}$$

y usando (1.11),

$$\begin{aligned} (I) &= \int_{\Gamma_h} \eta(\psi^*)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \phi^* \psi^* = \int_1^0 \frac{d}{d\theta} \int_{\Lambda} \bar{\varepsilon}(\theta) (\psi^*)^\Lambda \\ &= \int_1^0 \int_{\Lambda} \partial^\bullet \bar{\varepsilon}(\theta) (\psi^*)^\Lambda + \bar{\varepsilon}(\theta) (\psi^*)^\Lambda \operatorname{div}_\Lambda \mathbf{v}_\Lambda. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\partial^\bullet \bar{\varepsilon}(\theta) = (\eta^* - \phi^*)^{\Lambda(\theta)}$, el supuesto de regularidad en cada caso, la desigualdad de Hölder y el uso del Lema 28, obtenemos la primera estimación.

Para la segunda, podemos aplicar en cada componente (1.11),

$$\begin{aligned} (II) &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \int_{\Lambda} \nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda = \int_0^1 \int_{\Lambda} \partial_\theta^\bullet (\nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda) \\ &\quad + \int_0^1 \int_{\Lambda} \operatorname{div}_\Lambda \mathbf{v}_\Lambda \nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda, \end{aligned}$$

donde hemos definido $\bar{\mathbf{v}}(\theta) := (\mathbf{v}^*)^{\Lambda(\theta)} + \theta(e_{\mathbf{v}})^{\Lambda(\theta)}$.

Aplicando (1.13) podemos reescribir el integrando del primer término de (II), con $\boldsymbol{\nu}_\Lambda$ es el vector normal de Λ

$$\begin{aligned} &\partial^\bullet (\nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda) \\ &= \nabla_\Lambda \partial^\bullet (\phi^*)^\Lambda \cdot \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda - \nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) D(\mathbf{v}_\Lambda, \boldsymbol{\nu}_\Lambda) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda \\ &\quad + \nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) \nabla_\Lambda \partial^\bullet (\psi^*)^\Lambda - \nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) D(\mathbf{v}_\Lambda, \boldsymbol{\nu}_\Lambda) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda \\ &\quad + \nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \partial^\bullet \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda \\ &= -2 \nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) D(\mathbf{v}_\Lambda, \boldsymbol{\nu}_\Lambda) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda + \nabla_\Lambda(\phi^*)^\Lambda \cdot \partial^\bullet \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) \nabla_\Lambda(\psi^*)^\Lambda, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\partial_\theta^\bullet (\phi^*)^{\Lambda(\theta)} = \partial_\theta^\bullet (\psi^*)^{\Lambda(\theta)} = 0$.

Ahora usaremos que, tanto las cantidades relacionadas al vector normal a Λ como a su velocidad están uniformemente acotadas. Esto es, $\|\boldsymbol{\nu}_{\Lambda(\theta)}\|_{L^\infty(\Lambda(\theta))} \leq C$ para todo θ y para $h \leq h_0$ tal que (5.26) se cumple. Luego, tenemos $\|D(\mathbf{v}_\Lambda, \boldsymbol{\nu}_\Lambda)\|_{L^\infty(\Lambda(\theta))} \leq C$ para todo $\theta \in [0, 1]$, que está garantizado gracias a (5.30).

Finalmente usaremos que $\|D(\mathbf{v}_\Lambda, \boldsymbol{\nu}_\Lambda)\|_{L^2(\Lambda(\theta))} \leq \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)}$ para todo $\theta \in [0, 1]$, gracias a (5.30). Junto con

$$\|\mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}})\|_{L^\infty(\Lambda(\theta))} \leq 3\|\nabla_\Lambda \bar{\mathbf{v}}\|_{L^\infty(\Lambda(\theta))} \leq C\|\nabla_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*\|_{L^\infty(\Gamma^*)} \leq C,$$

más (5.27) y las hipótesis sobre ϕ^* para obtener

$$\begin{aligned} |II| &\lesssim \|D(\mathbf{v}_\Lambda, \boldsymbol{\nu}_\Lambda)\|_{L^2(\Lambda(\theta))} \|\nabla_{\Gamma^*} \psi^*\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\partial_\theta^\bullet \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Lambda(\theta))} \|\nabla_{\Gamma^*} \psi^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\quad + \|\nabla_\Lambda \mathbf{v}_\Lambda\|_{L^2(\Lambda(\theta))} \|\nabla_{\Gamma^*} \psi^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\lesssim \left(\|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\nabla_{\Gamma^*} \psi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

Para la última desigualdad hemos usado además que

$$\begin{aligned} \partial_\theta^\bullet \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}}) &= \partial_\theta^\bullet (\operatorname{div}_\Lambda \bar{\mathbf{v}} - (\nabla_\Lambda \bar{\mathbf{v}} + (\nabla_\Lambda \bar{\mathbf{v}}^T))) \\ &= \mathcal{B}(\partial_\theta^\bullet \bar{\mathbf{v}}) - \operatorname{tr}(F(\theta)) + F(\theta) + F(\theta)^T \\ &= \mathcal{B}((e_{\mathbf{v}})^{\Lambda(\theta)}) - \operatorname{tr}(F(\theta)) + F(\theta) + F(\theta)^T, \end{aligned}$$

donde $F(\theta) := \nabla_\Lambda \bar{\mathbf{v}}((\nabla_\Lambda \mathbf{v}_\Lambda)^T - \boldsymbol{\nu}_\Lambda \otimes \boldsymbol{\nu}_\Lambda \nabla_\Lambda \mathbf{v}_\Lambda)$. Y así,

$$\begin{aligned} \|\partial_\theta^\bullet \mathcal{B}(\bar{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Lambda(\theta))} &\leq 3\|\nabla_\Lambda (e_{\mathbf{v}})^{\Lambda(\theta)}\|_{L^2(\Lambda(\theta))} + 3\|F(\theta)\|_{L^2(\Lambda(\theta))} \\ &\lesssim \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

□

Si consideramos $\eta = (\phi^*)^{\Gamma_h}$ en (5.31), tendremos el primero de los resultados del siguiente Corolario. Y, si consideramos $\mathcal{B}(\mathbf{w})$ igual a la matriz identidad para toda \mathbf{w} en la desigualdad (5.29), entonces $\mathcal{B}(\mathbf{w})$ es independiente de θ , de donde $\partial_\theta^\bullet \mathcal{B}(\mathbf{w}) = 0$ para toda \mathbf{w} , y tendremos la segunda desigualdad del siguiente Corolario.

Corolario 2. *Sea ϕ^* y ψ^* como en el Lema 29. Si $\|\phi^*\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*)} \leq C$, entonces, para $0 < h \leq h_0$ tal que (5.26) se cumple,*

$$\int_{\Gamma_h} (\phi^*)^{\Gamma_h} (\psi^*)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \phi^* \psi^* \lesssim \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\psi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}. \quad (5.31)$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} (\phi^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h} (\psi^*)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \psi^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \phi^* \\ \lesssim \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\nabla_{\Gamma^*} \psi^*\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Notar que en el Lema 29 y el Corolario 2 estamos considerando superficies discretas, pero no funciones discretas.

Resumiendo, para finalizar esta sección vale la pena hacer la siguiente mención,

Si dos superficies parametrizadas sobre un mismo dominio de referencia, satisfacen que sus parametrizaciones están suficientemente cerca. Entonces, tendremos equivalencia de normas entre funciones y sus lifts correspondientes, y podremos estimar diferencias entre formas bilineales como en el Corolario 2.

La cual formalizaremos en el siguiente Corolario.

Corolario 3. Sean Λ y Σ dos superficies suficientemente suaves, parametrizadas por $\mathbf{X}_\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{X}_\Sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sean f y g dos funciones definidas en Σ . Si se cumple que

$$\|\mathbf{X}_\Lambda - \mathbf{X}_\Sigma\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C, \quad (5.33)$$

entonces las normas $L^2(\Lambda)$ y $L^2(\Sigma)$, así como las H^1 son equivalentes. Además, si $\|f\|_{W^{1,\infty}(\Sigma)} \leq C$,

$$\left| \int_\Lambda (f)^\Lambda (g)^\Lambda - \int_\Sigma f g \right| \lesssim \|\nabla_\Sigma e_{\mathbf{X}}\|_{L^2(\Sigma)} \|g\|_{L^2(\Sigma)}. \quad (5.34)$$

y

$$\left| \int_\Lambda \nabla_\Lambda (f)^\Lambda \cdot \nabla_\Lambda (g)^\Lambda - \int_\Sigma \nabla_\Sigma f \cdot \nabla_\Sigma g \right| \lesssim \|\nabla_\Sigma e_{\mathbf{X}}\|_{L^2(\Sigma)} \|\nabla_\Sigma g\|_{L^2(\Sigma)}. \quad (5.35)$$

Donde los lift son los definidos mediante las parametrizaciones, esto es, $(f)^\Lambda = f \circ \mathbf{X}_\Sigma \circ (\mathbf{X}_\Lambda)^{-1}$.

Demostración. La demostración consistirá en aplicar los mismos pasos que en el Lema 28 y luego los mismos pasos seguidos en el Corolario 2. \square

5.5 Estabilidad

En esta sección, presentaremos el análisis de la estabilidad del esquema semi-discreto. El resultado más importante es la Proposición 7.

Comenzaremos esta sección con tres lemas que contienen estimaciones de energía clave para la prueba de estabilidad. Sin embargo, antes de proceder, presentaremos un lema adicional que desempeñará un papel crucial en las estimaciones que obtenemos en esta sección.

Lema 30. Sea $p \geq 2$. Existen $h_0 > 0$ y $t_0 \in [0, T]$ maximal tal que

$$\begin{aligned} \|e_{\mathbf{x}}(t)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} &\leq h^{(p-1)/2}, \\ \|e_{\mathbf{v}}(t)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} &\leq h^{(p-1)/2}, \\ \|e_{\kappa}(t)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} &\leq h^{(p-1)/2}, \\ \|e_{\nu}(t)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} &\leq h^{(p-1)/2}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

para todo $0 < h \leq h_0$ y para todo $t \in [0, t_0]$. Además, existe una constante C independiente de t tal que

$$\|\mathbf{x}_h\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} + \|\mathbf{v}_h\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} + \|\kappa_h\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} + \|\boldsymbol{\nu}_h\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} \leq C, \quad (5.37)$$

para todo $0 < h \leq h_0$ y todo $t \in [0, t_0]$.

La idea de esta prueba es análoga a las utilizadas en Kovács et al. (2019), pero la incluimos aquí por exhaustividad.

Demostración. Notemos primero que $e_x(0) = 0$, $e_v(0) = 0$ y también $e_\nu(0) = 0$ (pues elegimos $\boldsymbol{\nu}_{h,0} = \mathcal{R}_{\Gamma^*}\boldsymbol{\nu}_0$). Además, recordando que $p > 1$, $\|e_\kappa(0)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} \lesssim h^{p-1} \leq h^{(p-1)/2}$ para h suficientemente pequeño, esto es, para $h \leq h_0$ con algún $h_0 > 0$. Entonces, por continuidad, para ese h_0 elegimos $t_0 > 0$ tal que t_0 es el tiempo máximo en que se satisfacen todas las desigualdades en (5.36).

Finalmente para ver las cotas uniformes de las soluciones numéricas, procederemos de la siguiente manera para $u_h \in \{\mathbf{x}_h, \mathbf{v}_h, \kappa_h, \boldsymbol{\nu}_h\}$

$$\|u_h\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} \leq \|u_h - u^*\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} + \|u^*\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))},$$

donde $u^* \in \{\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*, \kappa^*, \boldsymbol{\nu}^*\}$. En el primer término usamos (5.36) para ver que el primer término en cada caso está uniformemente acotado para $h \leq h_0$. Luego, para el segundo término se usan las acotaciones uniformes de los distintos operadores definidos en la Sección 4.1, esto es el Lema 26, junto con la equivalencia de normas. \square

Observación 14. *A partir del Lema 27, sabemos que existe $h_0 > 0$ tal que (5.25) se satisface para todo $t \in [0, t_0]$. Entonces, la condición (5.26) en el Lema 28 se satisface para $0 < h \leq h_0$ y $0 \leq t \leq t_0$. Por lo tanto, las afirmaciones del Lema 29 y del Corolario 2 se mantienen para $0 < h \leq h_0$ y $0 \leq t \leq t_0$.*

Lema 31. *Sean $t_0 > 0$ y $h_0 > 0$ tales que se satisfaga el Lema 27. Entonces, para todo $t \in [0, t_0]$ y para todo $0 < h < h_0$ tenemos*

$$\frac{d}{dt} \|e_x\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 \lesssim \|e_v\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_x\|_{H^1(\Gamma^*)}^2, \quad (5.38)$$

y

$$\|e_v\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 \lesssim \|e_\kappa\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|d_v\|_{H^1(\Gamma^*)}^2. \quad (5.39)$$

Demostración. Sea $t \in [0, t_0]$, y $0 < h \leq h_0$. Entonces, el Lema 28 (ii) se cumple y tenemos equivalencia de normas.

Usando la fórmula de transporte (1.11) y el hecho de que $\partial^\bullet e_x = e_v$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e_x\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 &= 2 \int_{\Gamma^*} e_x \cdot e_v + e_x \cdot e_x \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} e_x : \nabla_{\Gamma^*} e_v + \nabla_{\Gamma^*} e_x : \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \nabla_{\Gamma^*} e_x, \end{aligned}$$

La desigualdad de Young y la cota uniforme para \mathbf{v}^* del Lema 26 conducen a (5.38). Considerando que $(\mathcal{Q}_{\Gamma_h}(-\kappa_h \boldsymbol{\nu}_h))^{\Gamma^*} = \mathcal{Q}_{\Gamma^*}(-\kappa_h \boldsymbol{\nu}_h)^{\Gamma^*}$, obtenemos la siguiente estimación para e_v

$$\begin{aligned} \|e_v\|_{H^1(\Gamma^*)} &= \|\mathcal{Q}_{\Gamma^*}((-\kappa_h \boldsymbol{\nu}_h)^{\Gamma^*} - \kappa^* \boldsymbol{\nu}^*)\|_{H^1(\Gamma^*)} + \|d_v\|_{H^1(\Gamma^*)} \\ &\lesssim \|(-\kappa_h \boldsymbol{\nu}_h)^{\Gamma^*} - \kappa^* \boldsymbol{\nu}^*\|_{H^1(\Gamma^*)} + \|d_v\|_{H^1(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

Las estimaciones para las proyecciones de tipo Ritz de las Secciones 4.2 y 4.3, nos permiten llegar a (5.39). \square

Lema 32. Sean $t_0 > 0$ y $h_0 > 0$ tales que se satisfaga el Lema 27. Entonces, para todo $t \in [0, t_0]$ y para todo $0 < h < h_0$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e_\kappa\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 &\lesssim -\frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\kappa^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} e_\kappa \right) \\ &\quad + \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_x\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_v\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 \\ &\quad + \|e_\kappa\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|d_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)}^2. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Demostración. Since $\partial^\bullet(e_\kappa)^{\Gamma_h} = (\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h}$, substituting $\eta_h = (\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h}$ and $\eta_h^* = \partial^\bullet e_\kappa$ in equation (5.23) we obtain

$$\begin{aligned} &\|(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h} \\ &= - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\kappa^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet e_\kappa \right) \\ &\quad - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet(\kappa^*)^{\Gamma_h} (\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \kappa^* \partial^\bullet e_\kappa \right) \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \kappa_h (\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} |A^*|^2 \kappa^* \partial^\bullet e_\kappa + \int_{\Gamma^*} d_\kappa \partial^\bullet e_\kappa. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 29 a la segunda diferencia y el Corolario 2 a la tercera, obtenemos

$$\begin{aligned} &\|(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h} \\ &\lesssim \underbrace{\left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\kappa^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet e_\kappa \right)}_{(A)} \\ &\quad + \left(\|\nabla_{\Gamma^*} e_x\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|(|A_h|^2 \kappa_h)^{\Gamma^*} - |A^*|^2 \kappa^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\partial^\bullet e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\quad + \|d_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\partial^\bullet e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)}, \end{aligned}$$

Para acotar (A) usamos (1.12) para reescribirla de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(A) &= -\frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\kappa^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*}\kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*}e_\kappa \right) \\
&\quad + \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet(\kappa^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet\kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*}e_\kappa \right) \\
&\quad + \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\kappa^*)^{\Gamma_h} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}_h) \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*}\kappa^* \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \nabla_{\Gamma^*}e_\kappa \right) \\
&\lesssim -\frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma^*}(\kappa^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*}\kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*}e_\kappa \right) \\
&\quad + \|\nabla_{\Gamma^*}e_\mathbf{x}\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\nabla_{\Gamma^*}e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*}e_\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\nabla_{\Gamma^*}e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)},
\end{aligned}$$

donde hemos usado (5.32) y (5.29).

Para el lado izquierdo, usando (1.12) tenemos

$$\begin{aligned}
&\|(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h} \\
&\geq \|(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 - c \|\nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la combinación de las estimaciones anteriores conduce a

$$\begin{aligned}
&\|(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \\
&\lesssim -\frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\kappa^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*}\kappa^* \cdot \nabla_{\Gamma^*}e_\kappa \right) \\
&\quad + \|\nabla_{\Gamma^*}e_\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\nabla_{\Gamma^*}e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*}e_\mathbf{x}\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\nabla_{\Gamma^*}e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)} \\
&\quad + \left(\|\nabla_{\Gamma^*}e_\mathbf{x}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|(|A_h|^2\kappa_h)^{\Gamma^*} - |A^*|^2\kappa^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\partial^\bullet e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)} \\
&\quad + \|d_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\partial^\bullet e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*}e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)}^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, usaremos que

$$\|(|A_h|^2\kappa_h)^{\Gamma^*} - |A^*|^2\kappa^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \lesssim \|\nabla_{\Gamma^*}e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*}e_\kappa\|_{L^2(\Gamma^*)},$$

junto con

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \leq \|(\partial^\bullet e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + c \|(e_\kappa)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2,$$

además de la equivalencia de normas y desigualdad de Young para obtener la estimación deseada. \square

Antes de seguir con el siguiente Lema, vale la pena destacar que al testear con $\partial^\bullet e_\kappa$ en el lado izquierdo solo obtenemos la norma L^2 de $\partial^\bullet e_\kappa$, en el lado derecho no podemos permitir que aparezca un gradiente de esta función, porque no podríamos absorberla. Así que si quisiéramos seguir el mismo razonamiento para obtener las estimaciones para e_ν no podríamos debido a que, gracias a los términos de borde, no podemos evitar la aparición de una norma superior del lado derecho. Esto motiva la búsqueda de una nueva ecuación que nos permita controlarla tal y como mostraremos en la prueba del siguiente Lema.

Lema 33. Sean $t_0 > 0$ y $h_0 > 0$ tales que se satisfaga el Lema 27. Entonces, para todo $t \in [0, t_0]$ y para todo $0 < h < h_0$ tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \frac{d}{dt} \|\partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \|\nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \\
& \lesssim -\frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} e_\nu \right) \\
& \quad + \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_x\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_v\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 \\
& \quad + \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 + \|\partial^\bullet d_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 + \|d_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}^2.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Demostración. Comenzamos tomando $\boldsymbol{\psi}_h^* = \partial^\bullet e_\nu$ y $\boldsymbol{\psi}_h = (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h}$ en (5.24) luego, siguiendo pasos similares a los empleados en el Lema 32, llegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 & \lesssim -\frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} e_\nu \right) \\
& \quad + \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_x\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_v\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 \\
& \quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h - \alpha_\partial^* \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \partial^\bullet e_\nu + \|d_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}^2.
\end{aligned}$$

La principal diferencia con la estimación para e_κ se encuentra en los términos de borde, en los que centramos ahora nuestra atención. Sumando y restando $\alpha_\partial^* \boldsymbol{\mu}_h = \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}(\boldsymbol{\nu}_h \times \boldsymbol{\tau}_h)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h - \alpha_\partial^* \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \partial^\bullet e_\nu & = \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (e_\nu \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h - \alpha_\partial^* (e_\nu \times \boldsymbol{\tau}_h)) \cdot \partial^\bullet e_\nu \\
& \lesssim \|e_\nu\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}.
\end{aligned}$$

Entonces, usando desigualdad de Young y luego desigualdad de traza para acotar $\|e_\nu\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 & \lesssim -\frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* \cdot \nabla_{\Gamma^*} e_\nu \right) \\
& \quad + \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_x\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_v\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 \\
& \quad + \|\partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}^2 + \|d_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}^2.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Para lidiar con el término crítico $\|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}$ será necesario deducir una nueva estimación de energía. Para esto, diferenciamos la ecuación (5.24) con respecto a t y usamos (1.11)

junto con (1.12) para obtener la siguiente ecuación para $\psi_h^* \in \mathcal{O}_h^*(\tau_h)$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h} \cdot \psi_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h} : \nabla_{\Gamma_h} \psi_h \\
& \quad + \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h} \cdot \psi_h \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} (e_\nu)^{\Gamma_h} : \mathcal{B}(\mathbf{v}_h) \nabla_{\Gamma_h} \psi_h \\
& = - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} : \nabla_{\Gamma_h} \psi_h - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* : \nabla_{\Gamma_h} \psi_h^* \right) \\
& \quad - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} : \mathcal{B}(\mathbf{v}_h) \nabla_{\Gamma_h} \psi_h - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* : \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \nabla_{\Gamma^*} \psi_h^* \right) \\
& \quad - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \partial^\bullet (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot \psi_h - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* \right) \\
& \quad - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot \psi_h \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \right) \\
& \quad + \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet (|A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h) \cdot \psi_h - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet (|A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^*) \cdot \psi_h^* \\
& \quad + \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h \cdot \psi_h \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h - \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \cdot \psi_h^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h) \cdot \psi_h \\
& \quad - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial}^* \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \psi_h^* + \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet d_\nu \cdot \psi_h^* + \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \psi_h^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Observamos que el primer término del lado izquierdo satisface

$$\int_{\Gamma} \partial^\bullet \partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h} \cdot \partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} |\partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h}|^2 \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h.$$

Luego, considerando $\psi_h^* = \partial^\bullet e_\nu$ and $\psi_h = (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \|\nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \\
& = - \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} (e_\nu)^{\Gamma_h} : \mathcal{B}(\mathbf{v}_h) \nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} |\partial^\bullet (e_\nu)^{\Gamma_h}|^2 \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h \\
& \quad - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} : \nabla_{\Gamma_h} (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* : \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet e_\nu \right) \\
& \quad - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} : \mathcal{B}(\mathbf{v}_h) \nabla_{\Gamma_h} (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* : \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet e_\nu \right) \\
& \quad - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \partial^\bullet (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \partial^\bullet e_\nu \right) \\
& \quad - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \partial^\bullet e_\nu \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \right) \\
& \quad + \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet (|A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h) \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet (|A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^*) \cdot \partial^\bullet e_\nu \\
& \quad + \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h - \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \cdot \partial^\bullet e_\nu \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \\
& \quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h) \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial}^* \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \partial^\bullet e_\nu \\
& \quad + \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet d_\nu \cdot \partial^\bullet e_\nu + \int_{\Gamma^*} d_\nu \cdot \partial^\bullet e_\nu \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Considerando que \mathbf{v}_h está uniformemente acotada y la equivalencia de normas tenemos

para los términos del primer renglón del lado derecho de (5.44)

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(e_\nu)^{\Gamma_h} : \mathcal{B}(\mathbf{v}_h) \nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} |\partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}| \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h \\ & \lesssim \|\nabla_{\Gamma^*}(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)} + \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}^2. \end{aligned}$$

Aplicando el Corolario 2, el Lema 28 y las estimaciones (4.40), (5.37), podemos deducir que los siguientes cuatro renglones del lado derecho de (5.44) satisfacen

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet(\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} : \nabla_{\Gamma_h} (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* : \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet e_\nu \right) \\ & - \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} : \mathcal{B}(\mathbf{v}_h) \nabla_{\Gamma_h} (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* : \mathcal{B}(\mathbf{v}^*) \nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet e_\nu \right) \\ & - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \partial^\bullet (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \partial^\bullet e_\nu \right) \\ & - \left(\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \partial^\bullet (\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^* \cdot \partial^\bullet e_\nu \right) \\ & \leq \left(\|\nabla_{\Gamma^*} e_x\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_v\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

Para los renglones sexto y séptimo del lado derecho de (5.44), procedemos como antes

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet(|A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h) \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \partial^\bullet(|A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^*) \cdot \partial^\bullet e_\nu \\ & + \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h - \int_{\Gamma^*} |A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \cdot \partial^\bullet e_\nu \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^* \\ & \lesssim \left(\|(\partial^\bullet(|A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h))^{\Gamma^*} - \partial^\bullet(|A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^*)\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_x\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ & + \left(\|(|A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h)^{\Gamma^*} - |A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_x\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

Así, al combinar todos los elementos anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \|\nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \\ & \lesssim \|\nabla_{\Gamma_h}(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)} \\ & + \left(\|\nabla_{\Gamma^*} e_x\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_v\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\nabla_{\Gamma^*} \partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ & + \left(\|(\partial^\bullet(|A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h))^{\Gamma^*} - \partial^\bullet(|A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^*)\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_x\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ & + \left(\|(|A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h)^{\Gamma^*} - |A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_x\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ & + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h) \cdot (\partial^\bullet e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial}^* \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \partial^\bullet e_\nu \\ & + \|\partial^\bullet d_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|d_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \partial^\bullet(|A_h|^2) &= 2(\nabla_{\Gamma}(\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h) : A_h - A_h D_h : A_h), \\ \partial^\bullet(|A^*|^2) &= 2(\nabla_{\Gamma^*}(\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^*) : A^* - A^* D^* : A^*), \end{aligned}$$

donde $D_h = ((\nabla_{\Gamma} \mathbf{v}_h)^T - \boldsymbol{\nu}_{\Gamma_h} \otimes \boldsymbol{\nu}_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \mathbf{v}_h)$ y similarmente para D^* , con $\boldsymbol{\nu}_{\Gamma^*}$ y $\boldsymbol{\nu}_{\Gamma_h}$ los vectores normales de Γ^* y Γ_h respectivamente. Podemos derivar las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} \|(\partial^{\bullet}(|A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h))^{\Gamma^*} - \partial^{\bullet}(|A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^*)\|_{L^2(\Gamma^*)} &\lesssim \|\nabla_{\Gamma^*} \partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\quad + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)}, \end{aligned}$$

y

$$\|(|A_h|^2 \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h)^{\Gamma^*} - |A_h^*|^2 \boldsymbol{\nu}^* \operatorname{div}_{\Gamma^*} \mathbf{v}^*\|_{L^2(\Gamma^*)} \lesssim \|e_{\nu}\|_{H^1(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)},$$

Resumiendo, hasta ahora tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^{\bullet}(e_{\nu})^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \|\nabla_{\Gamma_h} \partial^{\bullet}(e_{\nu})^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \\ &\lesssim \|\nabla_{\Gamma_h}(e_{\nu})^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\nabla_{\Gamma_h} \partial^{\bullet}(e_{\nu})^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)} \\ &\quad + \left(\|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\nabla_{\Gamma^*} \partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\quad + \left(\|\nabla_{\Gamma^*} \partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|e_{\nu}\|_{H^1(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\quad + \left(\|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)} \right) \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h) \cdot (\partial^{\bullet} e_{\nu})^{\Gamma_h} - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial}^* \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \partial^{\bullet} e_{\nu} \\ &\quad + \|\partial^{\bullet} d_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|d_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)}. \end{aligned}$$

Lo siguiente será centrarnos en los términos con integrales de borde en la última estimación. Recordemos primero que $\partial_t \alpha_{\partial,h} = \partial^{\bullet} \boldsymbol{\nu}_h \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}$, $\partial_t \boldsymbol{\mu}_h = \partial^{\bullet} \boldsymbol{\nu}_h \times \boldsymbol{\tau}_h$, $\partial_t \alpha_{\partial}^* = \partial^{\bullet} \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}$, $\partial_t \boldsymbol{\mu}^* = \partial^{\bullet} \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\tau}_h$. Entonces, sumando y restando $\partial_t \alpha_{\partial}^* \boldsymbol{\mu}_h$ y $\alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}^*$ tenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h) \cdot (\partial^{\bullet} e_{\nu})^{\Gamma_h} - \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \partial_t(\alpha_{\partial}^* \boldsymbol{\mu}^*) \cdot \partial^{\bullet} e_{\nu} \\ &= \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \left((\partial^{\bullet} e_{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}) \boldsymbol{\mu}_h + \partial_t \alpha_{\partial}^*(e_{\nu} \times \boldsymbol{\tau}_h) \right) \cdot \partial^{\bullet} e_{\nu} \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \left(\alpha_{\partial,h} (\partial^{\bullet} e_{\nu} \times \boldsymbol{\tau}_h) + (e_{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}) \partial_t \boldsymbol{\mu}^* \right) \cdot \partial^{\bullet} e_{\nu} \\ &\lesssim \|e_{\nu}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})} + c_1 \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}^2. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la equivalencia de normas, aplicando la desigualdad de Young y absorbiendo el término $\|\nabla_{\Gamma^*} \partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)}$ en el lado izquierdo, deducimos,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^{\bullet}(e_{\nu})^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_{\Gamma_h} \partial^{\bullet}(e_{\nu})^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \\ &\lesssim \|\nabla_{\Gamma_h}(e_{\nu})^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\mathbf{x}}\|_{L^2(\Gamma^*)} + \|\nabla_{\Gamma^*} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)} \\ &\quad + \|e_{\nu}\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 + \|e_{\nu}\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 \\ &\quad + \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}^2 + c_1 \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}^2 \\ &\quad + \|\partial^{\bullet} d_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 + \|d_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 + \|\partial^{\bullet} e_{\nu}\|_{L^2(\Gamma^*)}^2. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Para terminar, sumando (5.42) y (5.45) podemos deducir

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2 \\
& \lesssim -\frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h}(\boldsymbol{\nu}^*)^{\Gamma_h} \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\nu)^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*} \boldsymbol{\nu}^* \cdot \nabla_{\Gamma_h} e_\nu \right) \\
& \quad + \|e_\nu\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_x\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|e_v\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 + \|\partial^\bullet d_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 \\
& \quad + \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}^2 + \|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 + \|d_\nu\|_{L^2(\Gamma^*)}^2.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

De esta manera, gracias la desigualdad de traza (4.24) y eligiendo un $0 < \epsilon < 1$ convenientemente, absorbemos el término $\|\nabla_{\Gamma_h} \partial^\bullet(e_\nu)^{\Gamma_h}\|_{L^2(\Gamma_h)}^2$ en el lado izquierdo, y se obtiene la estimación (5.41). □

La siguiente proposición es el resultado principal de esta sección y conlleva la existencia global de la solución discreta y las estimaciones de error óptimas cuando se comparan con las funciones discretas auxiliares.

Proposición 7. *Sea $p \geq 2$. Si para todo $t \in [0, T]$ y $h > 0$ suficientemente pequeño los defectos definidos en 21 satisfacen*

$$\begin{aligned}
\|d_v(t)\| &\lesssim h^p, \quad \|d_\kappa(t)\|_{L^2(\Gamma^*(t))} \lesssim h^p, \\
\|d_\nu(t)\|_{L^2(\Gamma^*(t))} + \|\partial^\bullet d_\nu(t)\|_{L^2(\Gamma^*(t))} &\lesssim h^p,
\end{aligned} \tag{5.47}$$

y los errores iniciales satisfacen

$$\|e_x(0)\|_{H^1(\Gamma_0^*)} + \|e_\kappa(0)\|_{H^1(\Gamma_0^*)} + \|e_\nu(0)\|_{H^1(\Gamma_0^*)} + \|\partial^\bullet e_\nu(0)\|_{L^2(\Gamma_0^*)} \lesssim h^p. \tag{5.48}$$

Entonces, existe $h_0 > 0$ tal que para todo $0 < h \leq h_0$ las soluciones semidiscretas existen para todo $t \in [0, T]$ y se satisfacen las siguientes estimaciones de error

$$\|e_x(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} + \|e_v(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} + \|e_\kappa(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} + \|e_\nu(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} \lesssim h^p. \tag{5.49}$$

Demostración. Comenzamos la demostración considerando que $t_0 > 0$ y $h_0 > 0$ son tales que los Lemas 31, 32 y 33 se satisfacen. Dado que t estará fijado en $[0, t_0]$, omitiremos este argumento t para simplificar la notación. Reemplazando (5.39) en (5.38) e integrando las desigualdades resultantes en el tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|e_x(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 &\lesssim \int_0^t \left(\|e_\nu(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|e_\kappa(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|d_v(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 \right) ds \\
&\quad + \int_0^t \|e_x(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 ds + \|e_x(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Ahora vamos a reemplazar (5.39) en (5.40) y luego integrar respecto de t para obtener

$$\begin{aligned} \|e_\kappa\|_{H^1(\Gamma^*)}^2 &\lesssim - \left(\int_{\Gamma_h(t)} \nabla_{\Gamma_h}(\kappa^*)^{\Gamma_h}(t) \cdot \nabla_{\Gamma_h}(e_\kappa)^{\Gamma_h}(t) - \int_{\Gamma^*(t)} \nabla_{\Gamma^*}\kappa^*(t) \cdot \nabla_{\Gamma^*}e_\kappa(t) \right) \\ &\quad + \left(\int_{\Gamma_{h,0}} \nabla_{\Gamma_{h,0}}(\kappa^*)^{\Gamma_h}(0) \cdot \nabla_{\Gamma_{h,0}}(e_\kappa(0))^{\Gamma_h} - \int_{\Gamma_0^*} \nabla_{\Gamma_0^*}\kappa^*(0) \cdot \nabla_{\Gamma_0^*}e_\kappa(0) \right) \\ &\quad + \int_0^t \left(\|e_\kappa(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|e_\nu(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|e_x(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\|d_\nu(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|d_\kappa(s)\|_{L^2(\Gamma^*(s))}^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Para estimar los primeros dos términos usaremos el Corolario 2, en particular (5.32), primero para $s = t$ y luego para $s = 0$. Luego la equivalencia de normas del Lema 28 y la desigualdad de Young, para concluir que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_h(t)} \nabla_{\Gamma_h(t)}(\kappa^*)^{\Gamma_h}(t) \cdot \nabla_{\Gamma_h(t)}(e_\kappa)^{\Gamma_h}(t) - \int_{\Gamma^*(t)} \nabla_{\Gamma^*(t)}\kappa^*(t) \cdot \nabla_{\Gamma^*(t)}e_\kappa(t) \\ \lesssim \|e_x(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 + \frac{1}{2}\|e_\kappa(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2. \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, t_0]$. Análogamente

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{h,0}} \nabla_{\Gamma_{h,0}}(\kappa^*)^{\Gamma_h}(0) \cdot \nabla_{\Gamma_{h,0}}(e_\kappa)^{\Gamma_h}(0) - \int_{\Gamma_0^*} \nabla_{\Gamma_0^*}\kappa^*(0) \cdot \nabla_{\Gamma_0^*}e_\kappa(0) \\ \lesssim \|e_x(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2 + \|e_\kappa(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2. \end{aligned}$$

Entonces absorbemos el término $\|e_\kappa(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2$ en el lado izquierdo y obtenemos la siguiente estimación para e_κ

$$\begin{aligned} \|e_\kappa(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 &\lesssim \|e_x(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 + \|e_x(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2 + \|e_\kappa(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2 \\ &\quad + \int_0^t \left(\|e_\kappa(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|e_\nu(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\|e_x(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|d_\kappa(s)\|_{L^2(\Gamma^*(s))}^2 + \|d_\nu(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 \right) ds. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Procediendo de la misma manera, de (5.41) tenemos

$$\begin{aligned} \|e_\nu(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 + \|\partial^\bullet e_\nu(t)\|_{L^2(\Gamma^*(t))}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\Gamma^*}\partial^\bullet e_\nu(s)\|_{L^2(\Gamma^*(s))}^2 ds \\ \lesssim \|e_x(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 + \|e_\kappa(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 + \|e_x(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2 + \|e_\nu(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2 \\ + \int_0^t \left(\|e_\nu(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|e_\kappa(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 \|e_x(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 \right) ds \\ + \int_0^t \left(\|\partial^\bullet e_\nu(s)\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 + \|\partial^\bullet d_\nu(s)\|_{L^2(\Gamma^*(t))}^2 + \|d_\nu(s)\|_{L^2(\Gamma^*(s))}^2 + \|d_\nu(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 \right) \\ + \|\partial^\bullet e_\nu(0)\|_{L^2(\Gamma^*(0))}^2. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Sumando (5.50), (5.51) y (5.52), tenemos

$$\begin{aligned}
& \|e_{\mathbf{x}}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 + \|e_{\kappa}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 + \|e_{\nu}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))}^2 + \|\partial^{\bullet} e_{\nu}(t)\|_{L^2(\Gamma^*(t))}^2 \\
& \lesssim \int_0^t \left(\|e_{\nu}(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|e_{\kappa}(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 + \|e_{\mathbf{x}}(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 \right) ds \\
& \quad + \int_0^t \|\partial^{\bullet} e_{\nu}(s)\|_{L^2(\Gamma^*(s))}^2 ds + \|\partial^{\bullet} e_{\nu}(0)\|_{L^2(\Gamma^*(0))}^2 + \|e_{\nu}(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2 \\
& \quad + \|e_{\kappa}(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2 + \|e_{\mathbf{x}}(0)\|_{H^1(\Gamma^*(0))}^2 \\
& \quad + \int_0^t \left(\|d_{\kappa}(s)\|_{L^2(\Gamma^*(s))}^2 + \|\partial^{\bullet} d_{\nu}(s)\|_{L^2(\Gamma^*(s))}^2 + \|d_{\nu}(s)\|_{L^2(\Gamma^*(s))}^2 + \|d_{\mathbf{v}}(s)\|_{H^1(\Gamma^*(s))}^2 \right) ds.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Por la desigualdad de Gronwall, y utilizando las hipótesis (5.47)–(5.48), obtenemos que, para todo $0 \leq t \leq t_0$ y $0 < h \leq h_0$,

$$\|e_{\mathbf{x}}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} + \|e_{\kappa}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} + \|e_{\nu}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} + \|\partial^{\bullet} e_{\nu}(t)\|_{L^2(\Gamma^*(t))} \leq C_1 e^{C_2 t_0} h^p,$$

para algunas constantes positivas C_1, C_2 , independientes de h y t . Ahora vamos a extender esa estimación para todo el intervalo $[0, T]$. Para ello vamos a usar primero desigualdad inversa junto con esa última estimación y luego nuevamente (5.39). Tendremos entonces que para todo $t \in [0, t_0]$, y $0 < h \leq h_0$,

$$\begin{aligned}
& \|e_{\mathbf{x}}(t)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} + \|e_{\kappa}(t)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} + \|e_{\nu}(t)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} + \|e_{\mathbf{v}}(t)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma^*(t))} \\
& \leq \frac{C_3}{h} \left(\|e_{\mathbf{x}}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} + \|e_{\kappa}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} + \|e_{\nu}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} + \|e_{\mathbf{v}}(t)\|_{H^1(\Gamma^*(t))} \right) \\
& \leq C_1 C_3 e^{C_2 t_0} h^{p-1} \leq C_1 C_3 e^{C_2 T} h^{p-1} \leq C h^{p-1},
\end{aligned}$$

con C una constante independiente de t_0 . Entonces, ahora podemos definir un nuevo $h'_0 \leq h_0$, de manera que se cumpla que $C h^{p-1} \leq \frac{1}{2} h_0^{(p-1)/2}$ para todo $h \leq h'_0$. Esto implicaría que debe ser $t_0 = T$, ya que, de lo contrario, se tendría que (5.36) es válida más allá del intervalo $[0, t_0]$, lo que contradice el hecho de que t_0 fue elegido como el mayor tiempo en $[0, T]$ para el cual se cumple (5.36).

Por lo tanto, la estimación (5.49) se verifica para todo $t \in [0, T]$, con lo cual hemos demostrado el resultado de esta Proposición. □

5.6 Convergencia

En esta sección combinamos las estimaciones de error anteriores para deducir finalmente los límites de error para la solución del problema semidiscreto planteado como Problema 2.

Teorema 3. *Supongamos que el dato inicial \mathbf{X}_0 es tal que el Problema 1 admite una solución exacta $(\mathbf{X}(t), \mathbf{v}(t), \kappa(t), \nu(t))$ suficientemente suave, siendo $\Gamma(t) = \mathbf{X}(t)(\Omega)$ una superficie no degenerada y regular con borde $\partial\Gamma(t) = \partial\Gamma^0$ suave a trozos para todo $t \in [0, T]$.*

Consideremos el Problema semidiscreto 2, con los espacios spline \mathbb{S}_h^3 , $\mathcal{S}_{h,0}(t)$, $\mathcal{S}_{h,0}(t)^3$ y $\mathcal{O}_h(\tau_h)$ tal como se definen en la Sección 3.1 y 4.1, con grado polinómico $p \geq 2$ y suavidad C^ℓ , $0 \leq \ell \leq p - 1$. Entonces, existe $h_0 > 0$ tal que para todo $0 < h \leq h_0$, el Problema 2 admite una solución única $(\mathbf{X}_h(t), \mathbf{v}_h(t), \kappa_h(t), \boldsymbol{\nu}_h(t))$ en $[0, T]$. Además, tenemos la siguiente estimación para la parametrización spline:

$$\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_h(t)\|_{H^1(\Omega)^3} \lesssim h^p,$$

y también,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{x}_h)^\Gamma - \mathbf{x}\|_{H^1(\Gamma(t))^3} &\lesssim h^p, & \|(\mathbf{v}_h)^\Gamma - \mathbf{v}\|_{H^1(\Gamma(t))^3} &\lesssim h^p, \\ \|(\boldsymbol{\nu}_h)^\Gamma - \boldsymbol{\nu}\|_{H^1(\Gamma(t))^3} &\lesssim h^p, & \|(\kappa_h)^\Gamma - \kappa\|_{H^1(\Gamma(t))^3} &\lesssim h^p, \end{aligned}$$

donde las constantes ocultas dependen de la regularidad de la solución, pero son independientes de h .

Demostración. Sea u cualquier variable en el conjunto $\{\mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \kappa, \boldsymbol{\nu}\}$. Vamos a empezar descomponiendo el error de la siguiente manera

$$\|(u_h)^\Gamma - u\|_{H^1(\Gamma)} \leq \|(u_h)^\Gamma - (u^*)^\Gamma\|_{H^1(\Gamma)} + \|(u^*)^\Gamma - u\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Donde $u^* \in \{\mathbf{X}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*, \kappa^*, \boldsymbol{\nu}^*\}$ y $u_h \in \{\mathbf{X}_h, \mathbf{x}_h, \mathbf{v}_h, \kappa_h, \boldsymbol{\nu}_h\}$.

En cada caso, el segundo término está acotado por ch^p debido a las estimaciones de interpolación en el Lema 13 y en las Proposiciones 2 y 3. Por la misma razón, los errores iniciales satisfacen la cota (5.48).

Ahora veremos que las suposiciones (5.47) y (5.48) de la Proposición 7 se satisfacen, lo que implicará que los primeros términos también están acotados por ch^p , llegando así a la afirmación del teorema.

Por la Proposición 6, existe $h_0 > 0$ tal que la suposición (5.47) se cumple para todo $t \in [0, T]$ y para todo $0 < h \leq h_0$. Por lo tanto, solo resta verificar que los errores iniciales satisfacen la suposición (5.48). Para e_κ , en $t = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \|e_\kappa(0)\|_{H^1(\Gamma_0^*)} &= \|(\kappa_h(0))^{\Gamma^*} - \kappa^*(0)\|_{H^1(\Gamma_0^*)} \\ &\lesssim \|\mathcal{Q}_{\Gamma_{h,0}}\kappa_0 - (\kappa_0)^{\Gamma_h}\|_{H^1(\Gamma_{h,0})} + \|(\kappa_0)^{\Gamma^*} - \mathcal{R}_{\Gamma_0^*}\kappa_0\|_{H^1(\Gamma_0^*)} \\ &\lesssim h^p, \end{aligned}$$

usando de nuevo al error de interpolación y al error en la proyección de Ritz. Por otra parte, como definimos $\boldsymbol{\nu}_{h,0} = \boldsymbol{\nu}_0^*$, sabemos que $e_\nu(0) = 0$, por lo que sólo queda demostrar que $\|\partial^\bullet e_\nu(0)\| \lesssim h^p$.

Para ello consideraremos de nuevo una descomposición del error inicial

$$\|\partial^\bullet e_\nu(0)\|_{L^2(\Gamma_0^*)} = \|(\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h(0))^{\Gamma^*} - \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^*(0)\|_{L^2(\Gamma_0^*)}.$$

Como no tenemos datos iniciales para $\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h(t)$, debemos obtener una estimación para este error, para ello vamos a considerar la definición de $\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h(0)$. Y, esta función se define mediante la ecuación (5.3) en el tiempo $t = 0$, esto es

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{h,0}} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h(0) \cdot \boldsymbol{\psi}_h &= - \int_{\Gamma_{h,0}} \nabla_{\Gamma_{h,0}} \boldsymbol{\nu}_{h,0} \cdot \nabla_{\Gamma_{h,0}} \boldsymbol{\psi}_h \\ &\quad + \int_{\Gamma_{h,0}} |A_{h,0}|^2 \boldsymbol{\nu}_{h,0} \cdot \boldsymbol{\psi}_h + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \alpha_{\partial,h,0} \boldsymbol{\mu}_{h,0} \cdot \boldsymbol{\psi}_h, \end{aligned}$$

para toda $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$. Entonces, usando nuevamente que $\boldsymbol{\nu}_{h,0} = \boldsymbol{\nu}^*(0) = \mathcal{R}_{\Gamma_0^*} \boldsymbol{\nu}(0)$, con \mathcal{R}_{Γ^*} la proyección de Ritz no lineal de la Definición 20, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{h,0}} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h(0) \cdot \boldsymbol{\psi}_h &= - \int_{\Gamma_0} \nabla_{\Gamma_0} \boldsymbol{\nu}_0 \cdot \nabla_{\Gamma_0} (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0} \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_0} \alpha_{\partial,0} \boldsymbol{\mu}_0 \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_{h,0}} |A_{h,0}|^2 \boldsymbol{\nu}_{h,0} \cdot \boldsymbol{\psi}_h \quad (5.54) \\ &\quad + \lambda \left(\int_{\Gamma_{h,0}} \boldsymbol{\nu}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}_h - \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\nu}_0 \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_{h,0}} \right). \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\nu}$ es solución del problema continuo $\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}(0) = \Delta_{\Gamma_0} \boldsymbol{\nu}_0 + |A_0|^2 \boldsymbol{\nu}_0$, sabemos que para cualquier $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\Gamma_0)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}(0) \cdot \boldsymbol{\psi} &= - \int_{\Gamma_0} \nabla_{\Gamma_0} \boldsymbol{\nu}_0 : \nabla_{\Gamma_0} \boldsymbol{\psi} + \int_{\partial\Gamma_0} \alpha_{\partial,0} \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\psi} \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_0} (\partial_{\boldsymbol{\mu}_0} \boldsymbol{\nu}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\Gamma_0} |A_0|^2 \boldsymbol{\nu}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}. \end{aligned}$$

Entonces, reescribimos (5.54) como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{h,0}} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h(0) \cdot \boldsymbol{\psi}_h &= \int_{\Gamma_0} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}(0) \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0} - \int_{\partial\Gamma_0} (\nabla_{\Gamma_0} \boldsymbol{\nu}_0 \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0} \\ &\quad + \int_{\Gamma_{h,0}} |A_{h,0}|^2 \boldsymbol{\nu}_{h,0} \cdot \boldsymbol{\psi}_h - \int_{\Gamma_0} |A_0|^2 \boldsymbol{\nu}_0 \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0} \\ &\quad + \lambda \left(\int_{\Gamma_{h,0}} \boldsymbol{\nu}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}_h - \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\nu}_0 \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0} \right). \end{aligned}$$

Sumando y restando $(\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^*(0))^{\Gamma_{h,0}} = (\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma_0^*} \boldsymbol{\nu}(0))^{\Gamma_{h,0}}$ en la integral del lado izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_{h,0}} \left(\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h(0) - (\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}^*(0))^{\Gamma_{h,0}} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \\ &= \int_{\Gamma_0} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}(0) \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0} - \int_{\Gamma_{h,0}} (\partial^\bullet \mathcal{R}_{\Gamma_0^*} \boldsymbol{\nu}(0))^{\Gamma_{h,0}} \cdot \boldsymbol{\psi}_h \\ &\quad + \int_{\Gamma_{h,0}} |A_{h,0}|^2 \boldsymbol{\nu}_{h,0} \cdot \boldsymbol{\psi}_h - \int_{\Gamma_0} |A_0|^2 \boldsymbol{\nu}_0 \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0} \\ &\quad + \lambda \left(\int_{\Gamma_{h,0}} \boldsymbol{\nu}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}_h - \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\nu}_0 \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0} \right) \\ &\quad - \int_{\partial\Gamma_0} (\partial_{\boldsymbol{\mu}_0} \boldsymbol{\nu}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\psi}_h)^{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

Las tres primeras diferencias en el lado derecho se pueden estimar como en la Sección 5.2, y todas ellas están acotadas por $ch^p \|\boldsymbol{\psi}_h\|_{L^2(\Gamma_{h,0})}$. Para el último término también podemos

utilizar la misma técnica que hemos utilizado en 5.2, más precisamente, en la prueba de la Proposición 6. Finalmente, tomando $\psi_h = \partial^\bullet \nu_h(0) - (\partial^\bullet \nu^*(0))^{\Gamma_{h,0}}$, obtenemos que $\partial^\bullet e_\nu(0)$ satisface la estimación deseada (5.48).

Hemos probado así las hipótesis de la Proposición 7 y entonces la afirmación de este teorema. \square

Capítulo 6

Esquema totalmente discreto

Este capítulo se divide en dos partes. En la primera, se describe el proceso de discretización temporal, junto con los aspectos clave para la implementación del método numérico propuesto. Además, se presentan experimentos numéricos que ilustran su funcionamiento y permiten realizar una comparación con los resultados teóricos obtenidos en cuanto al orden de convergencia.

La segunda parte está dedicada al análisis del esquema totalmente discreto. Se introducen las herramientas teóricas necesarias para estudiar su convergencia y se presentan los resultados parciales obtenidos en el análisis de estabilidad del método. Finalmente, se discute en detalle los resultados obtenidos, los desafíos encontrados en la obtención de estimaciones que garanticen la convergencia del método y posibles estrategias para abordar dichas dificultades.

6.1 Parte I: Discretización completa y experimentos numéricos

6.1.1. Formulación matricial-vectorial del esquema

Presentamos aquí la formulación matricial-vectorial del esquema (2). Reunimos los coeficientes de las soluciones $\mathbf{X}_h(t) \in \mathbb{S}_h^3$, $\mathbf{v}_h(t) \in \mathcal{S}_{h,0}(t)^3$, $\boldsymbol{\kappa}_h(t) \in \mathcal{S}_{h,0}(t)$ y $\boldsymbol{\nu}_h(t) \in \mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$ en los siguientes vectores columna:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &\in \mathbb{R}^{3N}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3N}, \\ \boldsymbol{\kappa} &\in \mathbb{R}^N, \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{3N}.\end{aligned}$$

Sea I_3 la matriz identidad de tamaño 3×3 , denotamos por $\mathbf{M}^{\Gamma_h} = I_3 \otimes M^{\Gamma_h}$ ($\mathbf{M}_0^{\Gamma_h} = I_3 \otimes M_0^{\Gamma_h}$) y $\mathbf{A}^{\Gamma_h} = I_3 \otimes A^{\Gamma_h}$ ($\mathbf{A}_0^{\Gamma_h} = I_3 \otimes A_0^{\Gamma_h}$), donde M^{Γ_h} ($M_0^{\Gamma_h}$) y A^{Γ_h} ($A_0^{\Gamma_h}$) son las matrices de masa y rigidez habituales con funciones base en $\mathcal{S}_h(t)$ ($\mathcal{S}_{h,0}(t)$).

Más precisamente, la matriz de masa dependiente de la superficie M^{Γ_h} ($M_0^{\Gamma_h}$) y la matriz de rigidez A^{Γ_h} ($A_0^{\Gamma_h}$) en la superficie Γ_h , definida por la superficie spline \mathbf{X}_h con coeficientes \mathbf{x} , están dadas por

$$M_{ij}^{\Gamma_h} = \int_{\Gamma_h} b_j b_i, \quad A_{ij}^{\Gamma_h} = \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} b_j \cdot \nabla_{\Gamma_h} b_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \ (N_0),$$

donde $\{b_j\}_{j=1}^N$ ($\mathcal{S}_h(t)$ ($\mathcal{S}_{h,0}(t)$)) es una base de $\mathcal{S}_h(t)$ ($\mathcal{S}_{h,0}(t)$).

Además, denotamos por $\mathbf{M}_\partial^{\Gamma_h}$ y $\mathbf{A}_\partial^{\Gamma_h}$ las matrices de masa y rigidez habituales obtenidas al utilizar un conjunto $\{\mathbf{b}_\partial^i\}_{i=1}^{N_\partial}$ de funciones base de $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$. Obtener dicha base es un problema complicado, y en lugar de hacerlo, recurrimos a una formulación con multiplicadores de Lagrange que describimos a continuación.

Definimos las siguientes funciones no lineales $f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^N$, $f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{3N}$ y $f_b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{3N}$ por

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\nu})_i &= \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \kappa_h b_i, \\ f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu})_k &= \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \nu_h \cdot \mathbf{b}_\partial^n, \\ f_b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu})_k &= \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h \cdot \mathbf{b}_\partial^n, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, N$ y $k = 1, \dots, N_\partial$, donde $\alpha_{\partial,h} = \boldsymbol{\nu}_h \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial,h}$ y $(\boldsymbol{\mu}_h)_\ell = (\boldsymbol{\nu}_h)_\ell \times \boldsymbol{\tau}_h$, con κ_h y ν_h las funciones spline correspondientes a los vectores $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\nu}$, respectivamente. Además, Γ_h es la imagen del dominio de referencia Ω por $\mathbf{X}_h(t)$, la función spline correspondiente a $\mathbf{x}(t)$.

Entonces, (2) puede escribirse en la siguiente forma matricial-vectorial:

Problema 3. Hallar $\mathbf{x} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$, $\boldsymbol{\kappa} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_0}$, $\boldsymbol{\nu} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_\partial}$ tal que

$$M_0^{\Gamma_h} \dot{\boldsymbol{\kappa}} + A_0^{\Gamma_h} \boldsymbol{\kappa} = f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\nu}) \quad (6.1)$$

$$\mathbf{M}_\partial^{\Gamma_h} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{A}_\partial^{\Gamma_h} \boldsymbol{\nu} = f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) + f_b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) \quad (6.2)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \quad (6.3)$$

donde \mathbf{v} está dado por los coeficientes de la función spline $\mathcal{Q}_{\Gamma_h}(-\kappa_h \boldsymbol{\nu}_h)$, y $\Gamma_h(t)$ es la imagen del dominio de referencia Ω por $\mathbf{X}_h(t)$, la función spline correspondiente a $\mathbf{x}(t)$.

La ecuación para $\boldsymbol{\kappa}$ tiene la misma estructura que la análoga en Kovács et al. (2019), la única diferencia es que usamos espacios discretos con valores nulos en el borde. Los principales cambios están en la ecuación correspondiente a la evolución del vector normal $\boldsymbol{\nu}_h$. Existen al menos dos formas de implementar los espacios $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$: usando restricciones o construyendo una base local de $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$. Hemos decidido usar restricciones, ya que es más simple y realista que construir un conjunto de funciones base locales de $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$. Para esto, usamos técnicas similares a las empleadas en diversos problemas de punto silla en ecuaciones en derivadas parciales.

La ecuación de evolución para $\boldsymbol{\nu}_h$ consiste en hallar $\boldsymbol{\nu}_h : [0, T] \rightarrow \mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$ tal que, para todo $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$,

$$\int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \boldsymbol{\nu}_h \cdot \nabla_{\Gamma_h} \boldsymbol{\psi}_h = \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h.$$

Recordando de (4.15) la definición de $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)$:

$$\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h) := \left\{ \boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{S}_h(t) : \int_{\partial\Gamma_h^0} (\boldsymbol{\phi}_h \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_h) w_h = 0, \text{ para todo } w_h \in \mathcal{S}_h^\partial \right\},$$

esta ecuación es equivalente a hallar $\boldsymbol{\nu}_h : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}_h(t)^3$ y un multiplicador de Lagrange $\lambda_h : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}_h(t)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_h} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu}_h \cdot \mathbf{z}_h + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \boldsymbol{\nu}_h \cdot \nabla_{\Gamma_h} \mathbf{z}_h + \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\hat{\boldsymbol{\tau}}_h \cdot \mathbf{z}_h) \lambda_h &= \int_{\Gamma_h} |A_h|^2 \boldsymbol{\nu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h \\ &+ \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \alpha_{\partial,h} \boldsymbol{\mu}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h, \\ \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\hat{\boldsymbol{\tau}}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h) w_h &= 0 \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{z}_h \in \mathcal{S}_h(t)^3$ y todo $w_h \in \mathcal{S}_h(t)$.

La formulación matricial-vectorial equivalente de (6.2) será la siguiente, para $\boldsymbol{\nu} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ y $\boldsymbol{\lambda} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\Gamma_h} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{A}^{\Gamma_h} \boldsymbol{\nu} + \mathbf{S}^T \boldsymbol{\lambda} &= f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) + f_b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) \\ \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde la matriz de restricciones $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times 3N}$ está definida por bloques de la siguiente manera

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S^1 & S^2 & S^3 \end{bmatrix},$$

donde cada bloque es una matriz $S^\ell \in \mathbb{R}^{N \times N}$ para $\ell = 1, 2, 3$. Las entradas de esos bloques son calculadas de la siguiente manera:

$$S_{ij}^\ell = \int_{\partial\Gamma_{h,0}} (\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)_\ell b_j b_i, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

donde $(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h)_\ell$ denota la ℓ -ésima componente del vector $\hat{\boldsymbol{\tau}}_h$, y $\{b_i\}_{i=1}^N$ es la base de $\mathcal{S}_h(t)$.

La forma matriz-vector del problema considerando los espacios splines usuales será

Problema 4. *Encontrar $\mathbf{x} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$, $\boldsymbol{\kappa} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_0}$, $\boldsymbol{\nu} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$, $\boldsymbol{\lambda} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tales que,*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^{\Gamma_h} \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbf{A}_0^{\Gamma_h} \boldsymbol{\kappa} &= f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\nu}) \\ \mathbf{M}^{\Gamma_h} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{A}^{\Gamma_h} \boldsymbol{\nu} + \mathbf{S}^T \boldsymbol{\lambda} &= f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) + f_b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) \\ \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

donde \mathbf{v} es dada por los coeficientes de la función spline $\mathcal{Q}_{\Gamma_h}(-\boldsymbol{\kappa}_h \boldsymbol{\nu}_h)$, y $\Gamma_h(t)$ es la imagen del dominio de referencia Ω a través de $\mathbf{X}_h(t)$, la función spline correspondiente a $\mathbf{x}(t)$.

Observación 15. *Es importante aclarar que la formulación débil con multiplicador de Lagrange se usa solo como una herramienta para la implementación del esquema numérico y es la que hemos empleado en los experimentos numéricos reportados a continuación. Creemos que es importante mencionar esta formulación con multiplicador de Lagrange para mostrar que el esquema (2) puede implementarse y no es meramente teórico.*

6.1.2. Discretización temporal: método BDF linealmente implícito

Para la discretización temporal del problema espacialmente discreto (2), consideramos el método BDF (Backward Differentiation Formulas) implícitamente lineal de q pasos para $2 \leq q \leq 5$. Este método está determinado por sus coeficientes, los cuales se definen mediante los polinomios δ y γ de la siguiente manera:

$$\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^q \delta_j \zeta^j = \sum_{\ell=1}^q \frac{1}{\ell} (1 - \zeta)^\ell, \quad \gamma(\zeta) = \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_j \zeta^j = \frac{1 - (1 - \zeta)^q}{\zeta}.$$

El BDF clásico es conocido por ser estable para $q \leq 6$ y tener orden q , ver (Hairer and Wanner, 1996, Chapter V). Además, se ha demostrado que este orden se conserva en esta variante implícitamente lineal utilizando los coeficientes γ_j , ver Akrivis et al. (2017); Akrivis and Lubich (2015).

Con el uso del BDF linealmente implícito, la dependencia entre la solución y las cantidades geométricas se tiene en cuenta tratando la geometría de manera explícita, usando la superficie extrapolada obtenida en los pasos previos. De manera similar, para el término en el lado derecho, para manejar los términos no lineales, consideramos funciones extrapoladas definidas por las soluciones de los pasos anteriores.

Sea $\Delta t > 0$ un paso de tiempo y $t_n = n\Delta t \leq T$ una partición uniforme del intervalo $[0, T]$. Usamos índices superiores para los niveles de tiempo, entonces, para $n \geq 0$, \mathbf{x}_h^n , $\boldsymbol{\nu}_h^n$ y κ_h^n denotan $\mathbf{x}_h(t_n)$, $\boldsymbol{\nu}_h(t_n)$ y $\kappa_h(t_n)$, respectivamente. El método BDF de q pasos define la derivada temporal discreta para todo $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_h^n &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^q \delta_j (\mathbf{x}_h^{n-j}) \tilde{\Gamma}_h^n, & \dot{\boldsymbol{\nu}}_h^n &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^q \delta_j (\boldsymbol{\nu}_h^{n-j}) \tilde{\Gamma}_h^n \\ \dot{\kappa}_h^n &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^q \delta_j (\kappa_h^{n-j}) \tilde{\Gamma}_h^n, \end{aligned} \tag{6.4}$$

donde $\mathbf{x}_h^n = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\nu}_h^n = \mathbf{0}$ y $\kappa_h^n = 0$ para $k \leq -1$ y para $0 \leq n \leq q-1$ asumimos que tenemos las siguientes aproximaciones iniciales:

$$\mathbf{x}_h^0, \dots, \mathbf{x}_h^{q-1}, \quad \boldsymbol{\nu}_h^0, \dots, \boldsymbol{\nu}_h^{q-1}, \quad \kappa_h^0, \dots, \kappa_h^{q-1}.$$

En (6.4), $\tilde{\Gamma}_h^n$ es la superficie extrapolada y se define mediante el movimiento extrapolado $\tilde{\mathbf{X}}_h^n : \Omega \rightarrow \tilde{\Gamma}_h^n \subset \mathbb{R}^3$. Este movimiento se define para todo $k \geq q$ como:

$$\tilde{\mathbf{X}}_h^n = \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_j \mathbf{X}_h^{n-1-j}, \tag{6.5}$$

donde se asume que los valores iniciales $\mathbf{X}_h^0, \dots, \mathbf{X}_h^{q-1}$ son dados y $\mathbf{X}_h^n := \mathbf{X}_h(t_n)$.

Para los términos no lineales en el lado derecho, también necesitamos definir las

funciones extrapoladas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_h^n &= \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_j (\mathbf{x}_h^{n-1-j}) \tilde{\Gamma}_h^n, & \tilde{\mathbf{v}}_h^n &= \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_j (\mathbf{v}_h^{n-1-j}) \tilde{\Gamma}_h^n \\ \tilde{\kappa}_h^n &= \sum_{j=0}^q \gamma_j (\kappa_h^{n-1-j}) \tilde{\Gamma}_h^n,\end{aligned}\tag{6.6}$$

para $n \geq q$.

Ahora presentaremos el esquema totalmente discreto que usamos en la implementación,

Problema 5. Hallar $\mathbf{x}^n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$, $\boldsymbol{\kappa}^n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_0}$, $\boldsymbol{\nu}^n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ y $\boldsymbol{\lambda}^n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que

$$M_0^{\tilde{\Gamma}_h^n} \dot{\boldsymbol{\kappa}}^n + A_0^{\tilde{\Gamma}_h^n} \boldsymbol{\kappa}^n = f_1(\tilde{\mathbf{x}}^n, \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^n, \tilde{\boldsymbol{\nu}}^n)\tag{6.7}$$

$$\mathbf{M}^{\tilde{\Gamma}_h^n} \dot{\boldsymbol{\nu}}^n + \mathbf{A}^{\tilde{\Gamma}_h^n} \boldsymbol{\nu}^n + \mathbf{S}^T \boldsymbol{\lambda}^n = f_2(\tilde{\mathbf{x}}^n, \tilde{\boldsymbol{\nu}}^n) + f_b(\mathbf{x}^n, \tilde{\boldsymbol{\nu}}^n),\tag{6.8}$$

$$\mathbf{S} \boldsymbol{\nu}^n = \mathbf{0},\tag{6.9}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^n = \mathbf{v}^n\tag{6.10}$$

donde \mathbf{v}^n está dado por los coeficientes de la función spline $\mathcal{Q}_{\tilde{\Gamma}_h^n}((\kappa_h^n \boldsymbol{\nu}_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n})$, y $\tilde{\Gamma}_h^n$ es la imagen del dominio de referencia Ω por $\tilde{\mathbf{X}}_h^n$, la función spline correspondiente a $\tilde{\mathbf{x}}^n$.

Donde $\tilde{\mathbf{x}}^n, \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^n, \tilde{\boldsymbol{\nu}}^n$ son los coeficientes de las funciones extrapoladas $\tilde{\mathbf{x}}_h^n, \tilde{\kappa}_h^n$ y $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_h^n$ respectivamente y $\dot{\mathbf{x}}^n, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^n$ y $\dot{\boldsymbol{\nu}}^n$ los coeficientes de $\dot{\mathbf{x}}_h^n, \dot{\kappa}_h^n$ y $\dot{\boldsymbol{\nu}}_h^n$ respectivamente.

De esta manera, en cada paso de tiempo resolvemos dos ecuaciones lineales

$$\left[\delta_0 M_0^{\tilde{\Gamma}_h^n} + \Delta t A_0^{\tilde{\Gamma}_h^n} \right] [\boldsymbol{\kappa}^n] = \left[f_1(\tilde{\mathbf{x}}^n, \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^n, \tilde{\boldsymbol{\nu}}^n) - \sum_{j=1}^q M_0^{\tilde{\Gamma}_h^n} \boldsymbol{\kappa}^{n-j} \right].$$

y

$$\begin{bmatrix} \delta_0 \mathbf{M}^{\tilde{\Gamma}_h^n} + \Delta t \mathbf{A}^{\tilde{\Gamma}_h^n} & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}^n \\ \boldsymbol{\lambda}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(\tilde{\mathbf{x}}^n, \tilde{\boldsymbol{\nu}}^n) + f_b(\mathbf{x}^n, \tilde{\boldsymbol{\nu}}^n) - \sum_{j=1}^q M_0^{\tilde{\Gamma}_h^n} \boldsymbol{\nu}^{n-j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

sonde $\mathbf{0}$ es la matriz nula de $3N \times 3N$.

6.1.3. Experimentos numéricos

Los experimentos de esta sección se implementan con el software Octave, particularmente se emplea el paquete GeopDEs Vázquez (2016). Se presentan dos experimentos numéricos, en ambos se utilizan espacios splines bicuadrados para la implementación. Además se consideran con máxima regularidad, esto es, splines que son globalmente C^1 . Para la discretización temporal se usan Fórmulas de BDF de orden $q = 2$.

Experimento 1

En el primer ejemplo, consideramos como superficie inicial una superficie para la cual la curva del borde es una curva plana y cuya área inicial es de 4.0442 unidades. En este caso se esperaría que pasado cierto tiempo la superficie tienda a la superficie $S = \{(x, y, 1) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. En la Figura 6.1 graficamos la superficie inicial desde distintos ángulos de visualización, junto con los valores de su curvatura media.

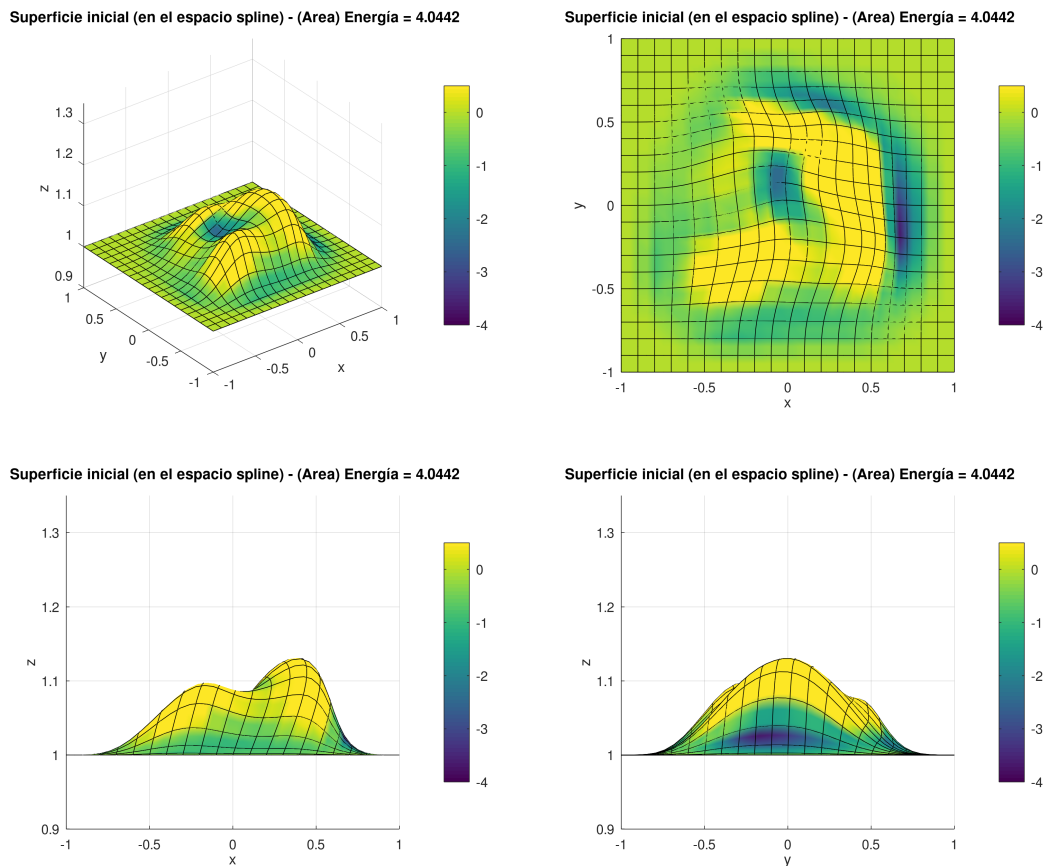


Figura 6.1: Superficie inicial aproximada para el Experimento 1.

Las superficies aproximadas se obtienen considerando el intervalo $[0, T] = [0, 0.8]$, con tamaño de paso $\Delta t = 0.0125$. En la Figura 6.2 se observa la superficie Γ_h^n , obtenida mediante la solución del esquema numérico presentado en el Problema 5, para diferentes pasos de tiempo: $t_0, t_{10}, t_{50}, t_{100}, t_{400}, t_{500}$.

En la Figura 6.3 se presenta la superficie final en $t = 0.8$, visualizada desde distintas perspectivas. Es posible observar que la superficie aproximada final tiene área 4 y que además la Figura 6.3 (b) presenta en la malla cierta deformación ubicada en la zona central donde originalmente estaba la perturbación.

En la Figura 6.4 presentamos los valores del área de las superficies aproximadas, en

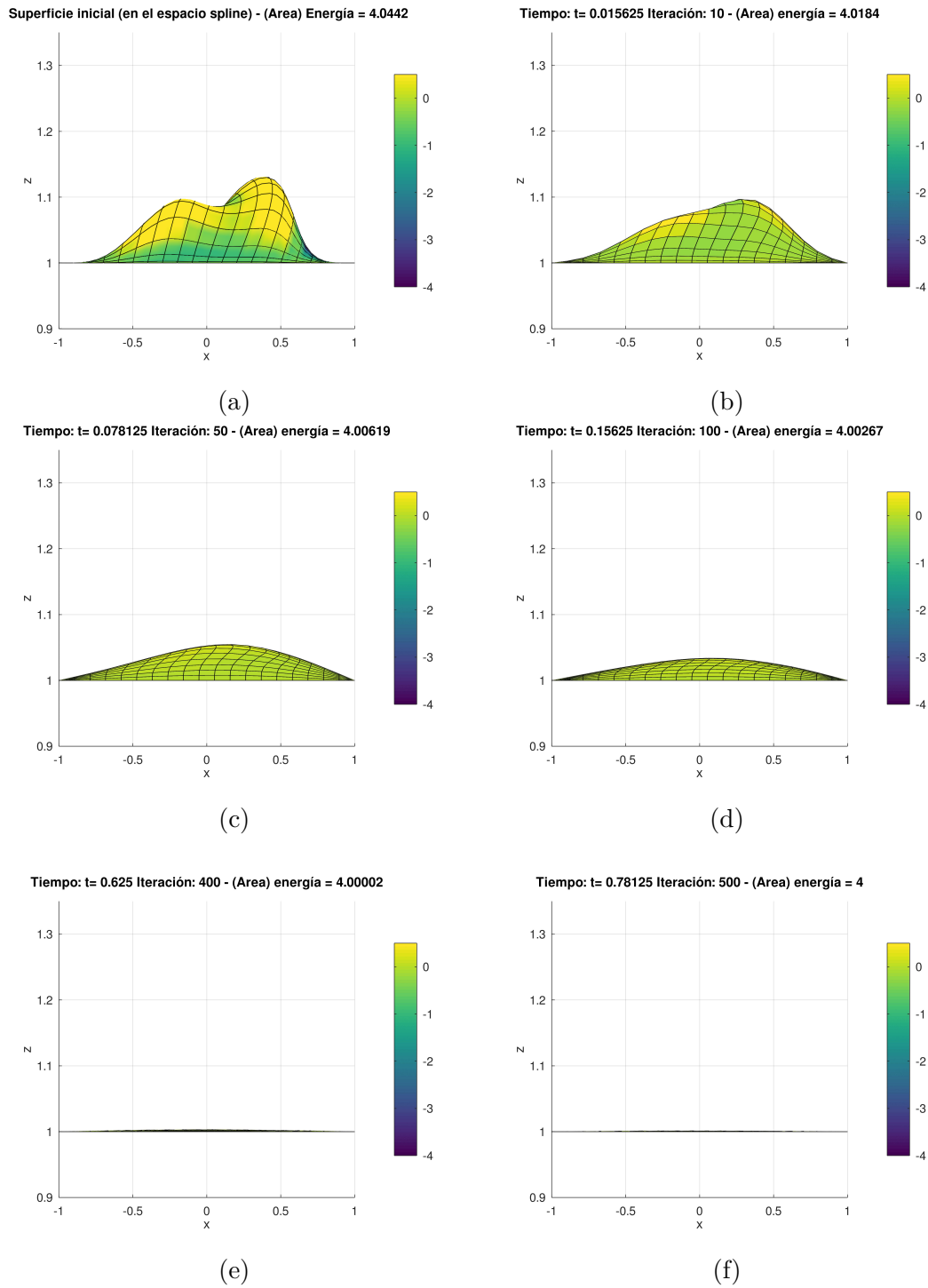


Figura 6.2: Superficies aproximada en distintas iteraciones del método para el Experimento 1.

la Figura 6.4a puede verse cómo el área disminuye a medida que transcurre el tiempo y se aproxima al área de la superficie estacionaria S . Mientras que en la Figura 6.4b presentamos la evolución de los valores de la función $\max |\kappa_h^n|$, recordar que $\max |\kappa_h^n|$ aproxima el valor de la curvatura media en cada punto de la superficie. Podemos ver cómo

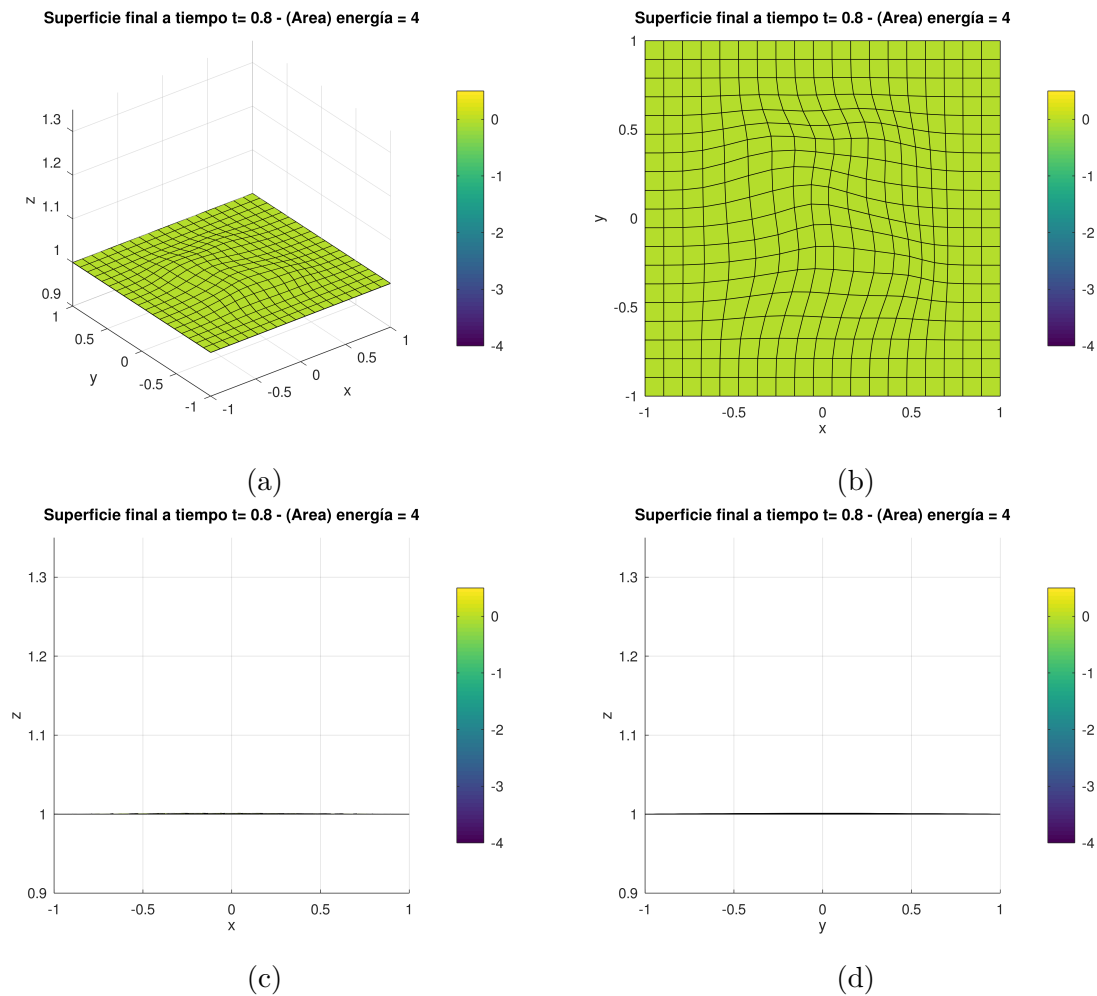


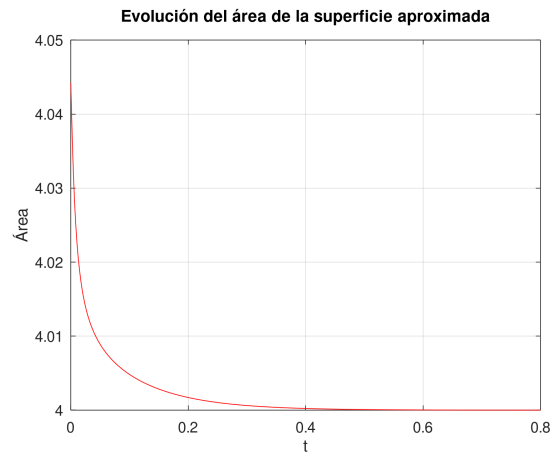
Figura 6.3: Superficie aproximada final del Experimento 1: (a) vista en tres dimensiones, (b) vista desde el plano xy , (c) y (d) vistas laterales desde los planos xz e yz respectivamente.

tiende a cero, lo cual también es coherente con la curvatura de la superficie estacionaria S .

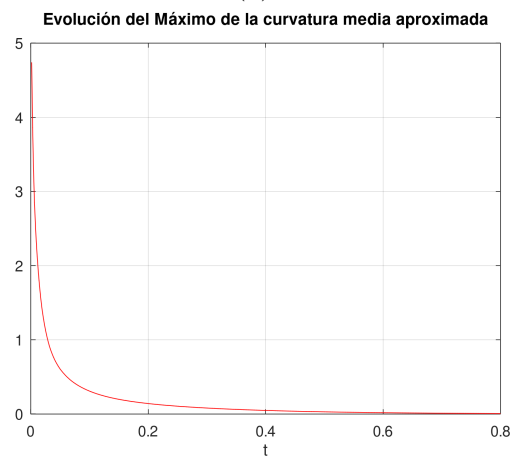
Experimento 2

Ahora consideramos como superficie inicial una superficie que no tiene el borde plano. Es una pieza cuadrada de una esfera, con área inicial 4.37755 unidades. En la Figura 6.5 graficamos Γ_h^0 desde dos ángulos de visualización junto con su curvatura media inicial; al ser parte de una esfera unitaria la curvatura media inicial es constante y vale -2 en toda la superficie.

Se obtienen las superficies aproximadas en el intervalo $[0, T] = [0, 0.9]$, considerando como tamaño de paso $\Delta t = 0.025$. En la Figura 6.6 presentamos la evolución de la superficie Γ_h^n obtenida mediante la solución del esquema numérico presentado en el Problema 5 para diferentes pasos de tiempo, junto con los valores de la variable κ_h^k en los distintos puntos de la superficie.



(a)



(b)

Figura 6.4: (a) Evolución del área de la superficie aproximada y en (b) evolución del valor máximo de $|\kappa_h^n|$ durante la evolución.

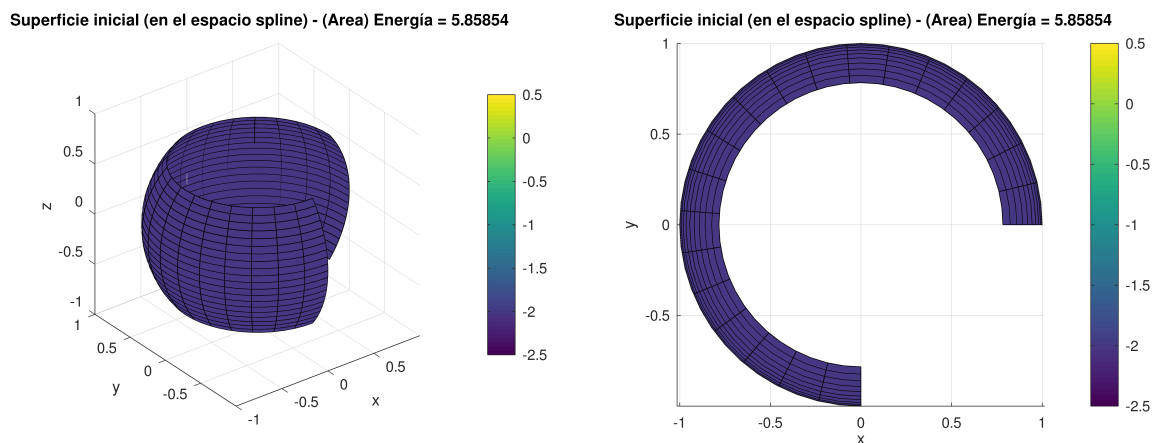


Figura 6.5: Superficie inicial Experimento 2.

Por último, presentamos la evolución del área de la superficie aproximada Γ_h^n . Como puede notarse, a medida que avanza el tiempo el área disminuye y parece estabilizarse. Si

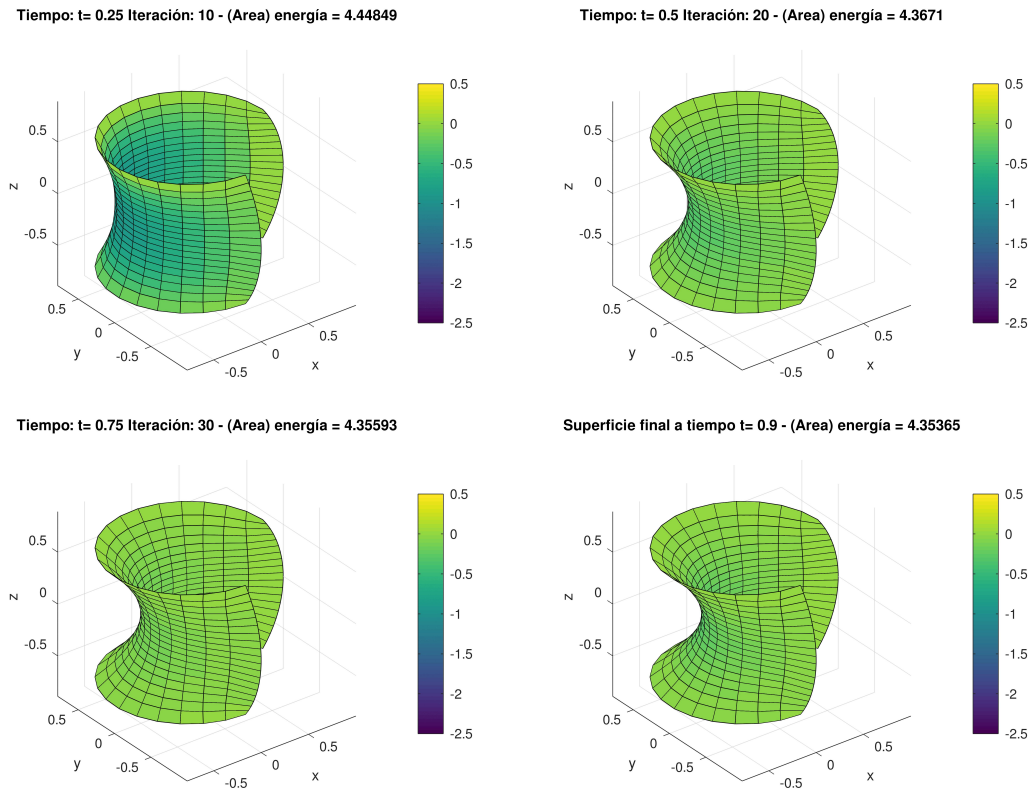


Figura 6.6: Superficie aproximada Γ_h^k en t_{10}, t_{20}, t_{30} y el $t = 0.9$.

bien no tenemos una solución exacta con la cual comparar la solución aproximada para este caso, podemos decir que hemos obtenido valores razonables para el área con los reportados en [Chicco Ruiz et al. \(2019\)](#), pero también con los valores obtenidos con el esquema de Dziuk. En la [Figura 6.7b](#) presentamos una comparación entre nuestros resultados para los valores del área y los obtenidos usando el esquema de Dziuk adaptado para el caso de borde Dirichlet.

Órdenes de convergencia experimentales. El objetivo de este párrafo es observar el orden computacional de convergencia. Dado que no disponemos de una solución exacta del problema evolutivo, medimos el error a un tiempo fijo $t_0 > 0$, entre el área de la solución discreta y la de la solución exacta. Calculamos este error para una secuencia de tamaños de malla desde $h = 1/4$ hasta $h = 1/64$. En la [Figura 6.8](#) representamos este error para los dos experimentos de las secciones anteriores.

Observamos un error de $O(h^2)$ cuando $h \rightarrow 0$ en ambos casos. En el primer ejemplo, la curvatura y los vectores normales cumplen una condición de compatibilidad y esperamos que las soluciones sean muy suaves, lo que conduce a las estimaciones de error óptimas observadas en la imagen. En el segundo ejemplo, la curvatura media de Γ_0 es -2 , de modo que su valor salta de -2 a 0 en $\partial\Gamma_0$ al tiempo $t = 0$. Por lo tanto, no esperamos que κ o

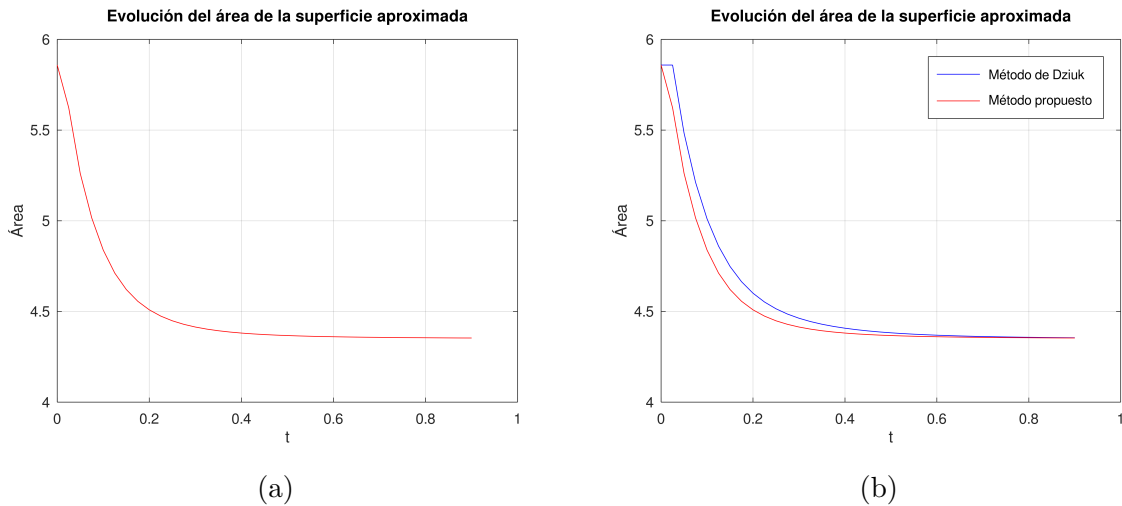


Figura 6.7: (a) Evolución del área de la superficie aproximada y en (b) evolución del área de la superficie aproximada en el método propuesto y en el método de Dziuk.

\mathbf{X} estén uniformemente en $W^{p+1,\infty}$ para t cercano a 0. Sin embargo, el error disminuye a la tasa óptima $O(h^2)$, lo cual es mejor de lo esperado según nuestra teoría.

Para comprender mejor este fenómeno, sería necesario realizar un análisis de regularidad más detallado de las soluciones para el Flujo de Curvatura Media con frontera fija. Dicho análisis va más allá del alcance de esta tesis y queda como pregunta abierta para trabajos futuros.

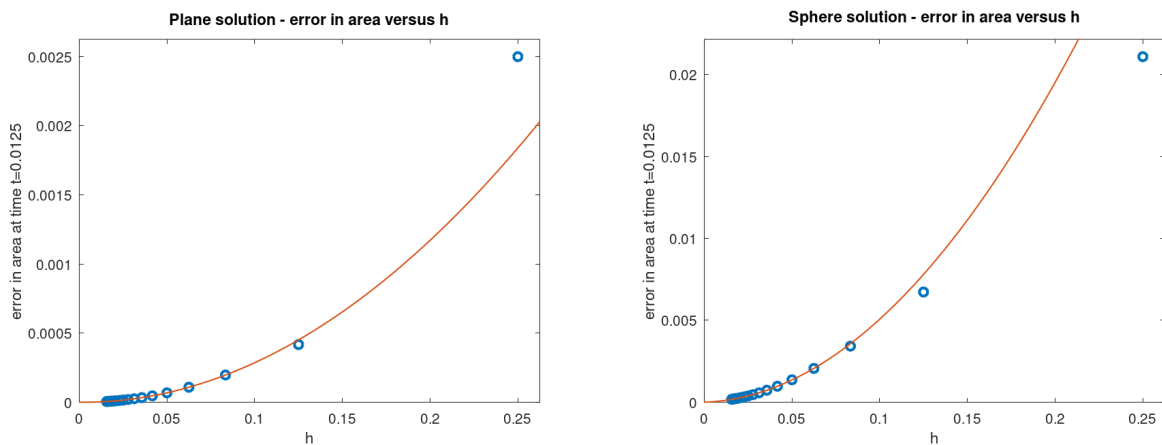


Figura 6.8: Error en el área al tiempo $t_0 = 0.0125$, frente a h , para los dos ejemplos. Cabe observar que el error disminuye cuadráticamente en ambos ejemplos, a pesar de que las condiciones de contorno del segundo son incompatibles.

Comentarios generales sobre los experimentos presentados.

En general, el método propuesto en esta tesis, así como en el método de Dziuk y el presentado en [Kovács et al. \(2019\)](#), bajo ciertas condiciones, puede presentar deterioro en la

calidad de la malla debido a movimientos tangenciales de los nodos, tal como puede verse en la Figura 6.3b. Por tanto, queda como problema abierto el análisis de la factibilidad de aplicar a nuestro esquema, desde un punto de vista teórico pero también experimental, las mejoras propuestas en Hu and Li (2022) para el método de Kovács et al. (2019) para superficies sin borde con el objetivo de obtener mejoras en la calidad de la malla.

Por otra parte, es importante recordar que la variable $\boldsymbol{\nu}_h^n$ no tiene que ser un vector unitario en cada punto de la superficie. En esta tesis, ambos experimentos se realizaron sin normalizar dicha variable. Un aspecto que podría ser objeto de análisis futuro es la posibilidad de que se presenten mejoras en la solución, similar a lo que se observa en (Kovács et al., 2019, Sección 13.2) para el caso de superficies que exhiben singularidades durante su evolución, al normalizar $\boldsymbol{\nu}_h^n$ en cada iteración.

6.2 Parte II: análisis teórico de la discretización completa

En esta sección, se presentarán las herramientas necesarias para realizar un estudio teórico de la discretización completa. En este contexto, se expondrán resultados parciales obtenidos en dicha dirección, así como también se discutirán los desafíos encontrados en la obtención de las estimaciones necesarias para garantizar la convergencia del esquema totalmente discreto. Además, se propondrán posibles estrategias para abordar estos desafíos, las cuales serán objeto de estudio en trabajos futuros.

Antes de presentar la formulación del esquema totalmente discreto que estudiaremos en esta sección, y que fue implementado en la sección anterior, introducimos las siguientes funciones $f_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f_1(\mathbf{u}, A) = |A|^2 \mathbf{u}, \quad f_2(u, A) = |A|^2 u, \quad g(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\partial, h}) \mathbf{u} \times \boldsymbol{\tau}_h. \quad (6.11)$$

Definimos también las siguientes formas bilineales para $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in H^1(\tilde{\Gamma}_h^n)$

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) &= \int_{\tilde{\Gamma}_h^n} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z}, & a_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) &= \int_{\tilde{\Gamma}_h^n} \nabla_{\tilde{\Gamma}_h^n} \mathbf{w} : \nabla_{\tilde{\Gamma}_h^n} \mathbf{z}, \\ m_{\partial\Gamma_{h,0}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) &= \int_{\partial\Gamma_{h,0}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Las formas bilineales $m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\cdot, \cdot)$ y $a_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\cdot, \cdot)$ también pueden ser definidas para funciones escalares.

De (6.4), (6.5), (6.6), (6.11) y (6.12), obtenemos el siguiente esquema numérico.

Problema 6. *Dados los valores q valores iniciales*

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h^0, \dots, \mathbf{X}_h^{q-1}, \quad \mathbf{v}_h^0, \dots, \mathbf{v}_h^{q-1}, \\ \boldsymbol{\nu}_h^0, \dots, \boldsymbol{\nu}_h^{q-1}, \quad \kappa_h^0, \dots, \kappa_h^{q-1}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Encontrar $\mathbf{X}_h^n \in \mathbb{S}_h^n$ (Γ_h^n imagen de Ω a través de \mathbf{X}_h^n), $\mathbf{v}_h^n \in \mathcal{S}_{h,0}^n$, $\boldsymbol{\nu}_h^n \in \mathcal{O}_h^n(\boldsymbol{\tau}_h)$ y $\kappa_h^n \in \mathcal{S}_{h,0}^n$ como aproximaciones de $\mathbf{X}(t_n)$, $\mathbf{v}(t_n)$, $\boldsymbol{\nu}(t_n)$ y $\kappa(t_n)$, respectivamente, tales que para todo $q\Delta t \leq n\Delta t \leq T$,

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\dot{\boldsymbol{\nu}}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) + a_{\tilde{\Gamma}_h^n}((\boldsymbol{\nu}_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, \boldsymbol{\psi}_h) &= m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(f_1(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_h^n, \tilde{A}_h^n), \boldsymbol{\psi}_h) + m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_h^n), \boldsymbol{\psi}_h), \\ m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\dot{\kappa}_h^n, \eta_h) + a_{\tilde{\Gamma}_h^n}((\kappa_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, \eta_h) &= m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(f_2(\tilde{\kappa}_h^n, \tilde{A}_h^n), \eta_h), \\ (\mathbf{v}_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n} &= \mathcal{Q}_{\tilde{\Gamma}_h^n}((\kappa_h^n \boldsymbol{\nu}_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}), \\ \dot{\mathbf{X}}_h^n &= (\mathbf{v}_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n} \circ \tilde{\mathbf{X}}_h^n, \end{aligned} \quad (6.14)$$

para todo $\boldsymbol{\psi}_h \in \tilde{\mathcal{O}}_h^n(\boldsymbol{\tau}_h)$ y $\eta_h \in \tilde{\mathcal{S}}_{h,0}^n$. Aquí, $\tilde{\mathcal{O}}_h^n(\boldsymbol{\tau}_h)$, $\tilde{\mathcal{S}}_h^n$ y $\tilde{\mathcal{S}}_{h,0}^n$ son espacios de splines definidos en la superficie extrapolada $\tilde{\Gamma}_h^n$, y $\tilde{A}_h^n = |\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^n} \tilde{\boldsymbol{\nu}}_h^n|^2$.

Notar que en cada paso definimos la nueva parametrización \mathbf{X}_h^k , usando la fórmula de $\dot{\mathbf{X}}_h^n$, esto es, de la derivada temporal discreta dada por el método BDF, de la siguiente manera

$$\mathbf{X}_h^n = \frac{\Delta t}{\delta_0} (\mathbf{v}_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n} \circ \tilde{\mathbf{X}}_h^n - \sum_{j=1}^q \frac{\delta_j}{\delta_0} \mathbf{X}_h^{k-j}. \quad (6.15)$$

En cada paso, obtenemos también podemos definir la nueva función identidad como $\mathbf{x}_h^n = \mathbf{X}_h^n \circ (\mathbf{X}_h^n)^{-1}$. Notar que $(\mathbf{x}_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}$, \mathbf{x}_h^n y \mathbf{X}_h^k tienen los mismos coeficientes.

6.2.1. Resultados previos de Dahlquist (1978) y Nevanlinna & Odeh (1981)

Para estudiar la estabilidad y utilizar estimaciones de energía en el esquema totalmente discreto, emplearemos los siguientes resultados: el primero proviene de la teoría de G-estabilidad de Dahlquist [Dahlquist \(1978\)](#), y el segundo de la técnica del multiplicador de Nevanlinna y Odeh [Nevanlinna and Odeh \(1981\)](#). Estos resultados han sido utilizados previamente para obtener estimaciones de energía cuando se utilizan métodos BDF en distintos problemas, ver por ejemplo [Kovács et al. \(2019\)](#); [Akrivis et al. \(2021\)](#).

Lema 34. Sean $\delta(\zeta) = \sum_{i=0}^q \delta_i \zeta^i$ y $\mu(\zeta) = \sum_{i=0}^q \mu_i \zeta^i$ polinomios de grado a lo sumo q (al menos uno de ellos de grado exactamente q) que no tienen divisores comunes. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en \mathbb{R}^N con norma asociada $|\cdot|$. Si

$$\operatorname{Re} \frac{\delta(\zeta)}{\mu(\zeta)}, \quad \text{para } \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1,$$

entonces existe una matriz simétrica definida positiva $G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{q \times q}$ tal que para todos $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_q \in \mathbb{R}^N$ se cumple

$$\left\langle \sum_{i=0}^q \delta_i \mathbf{w}_{q-i}, \sum_{i=0}^q \mu_i \mathbf{w}_{q-i} \right\rangle \geq \sum_{i,j=1}^q g_{i,j} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle - \sum_{i,j=1}^q g_{i,j} \langle \mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{w}_{j-1} \rangle.$$

La clave del análisis de estabilidad radica en la elección de $\mu(\zeta) = 1 - \eta_q \zeta$ en el resultado anterior, junto con el siguiente lema para métodos BDF de orden hasta 5.

Lema 35. Si $1 \leq q \leq 5$, entonces existe $0 \leq \eta_q < 1$ tal que, para $\delta(\zeta) = \sum_{\ell=1}^q \frac{1}{\ell} (1 - \zeta)^\ell$,

$$\operatorname{Re} \frac{\delta(\zeta)}{1 - \eta_q \zeta}, \quad \text{para } \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1.$$

Los valores mínimos posibles de η son $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0.0836$, $\eta_4 = 0.2878$ y $\eta_5 = 0.8160$ (Nevanlinna and Odeh, 1981, Tabla en página 384). Para más detalles sobre los valores de los multiplicadores, remitimos a Akrivis and Katsoprinakis (2015).

Estos resultados han sido aplicados al análisis del error en la discretización temporal BDF en Kovács and Guerra (2015); Kovács et al. (2019); Lubich et al. (2013).

6.2.2. Defectos y ecuaciones de error

Definimos otra superficie extrapolada $\tilde{\Gamma}_*^n$, dada por $\tilde{\mathbf{X}}_*^n := \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_j \mathbf{X}_*^{n-1-j}$, donde $\mathbf{X}_*^k := \mathbf{X}^*(t_n)$ para todo $n \geq 0$. De manera análoga a lo hecho en la Sección 5.1, utilizamos las abreviaciones $\mathbf{x}_*^n = \mathbf{x}^*(t_n)$, $\mathbf{v}_*^n = \mathbf{v}^*(t_n)$, $\boldsymbol{\nu}_*^n = \boldsymbol{\nu}^*(t_n)$ y $\kappa_*^n = \kappa^*(t_n)$, para hacer referencia a los quasi-interpolantes y a las proyecciones de Ritz evaluadas en tiempo $t_n = n\Delta t \in [0, T]$.

Consideramos los espacios de splines correspondientes definidos en $\tilde{\Gamma}_*^n$. Al insertar estas funciones en el esquema (6.14), se obtienen ciertos defectos.

Definición 22. Definimos los defectos d_x^n , d_v^n , d_ν^n y d_κ^n como las funciones que aparecen en el lado derecho de (6.14) cuando se reemplazan \mathbf{X}_h^k , \mathbf{v}_h^n , $\boldsymbol{\nu}_h^n$ y κ_h^n por \mathbf{X}_*^k , \mathbf{v}_*^n , $\boldsymbol{\nu}_*^n$ y κ_*^n .

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\dot{\mathbf{v}}_*^n, \boldsymbol{\psi}_h^*) + a_{\tilde{\Gamma}_*^n}((\boldsymbol{\nu}_*^n)^{\tilde{\Gamma}_*^n}, \boldsymbol{\psi}_h^*) &= m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(f_1(\tilde{\mathbf{v}}_*^n, \tilde{A}_*^n), \boldsymbol{\psi}_h^*) + m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\tilde{\mathbf{v}}_*^n), \boldsymbol{\psi}_h^*) \\ &\quad + m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(d_\nu^n, \boldsymbol{\psi}_h^*), \\ m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\dot{\kappa}_*^n, \eta_h^*) + a_{\tilde{\Gamma}_*^n}((\kappa_*^n)^{\tilde{\Gamma}_*^n}, \eta_h^*) &= m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(f_2(\tilde{\kappa}_*^n, \tilde{A}_*^n), \eta_h^*) + m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(d_\kappa^n, \eta_h^*), \\ (\mathbf{v}_*^n)^{\tilde{\Gamma}_*^n} &= \mathcal{Q}_{\tilde{\Gamma}_*^n}((\kappa_*^n \boldsymbol{\nu}_*^n)^{\tilde{\Gamma}_*^n}) + d_v^n, \\ \dot{\mathbf{X}}_*^n &= (\mathbf{v}_*^n)^{\tilde{\Gamma}_*^n} \circ (\tilde{\mathbf{X}}_*^n)^{-1} + d_x^n \circ (\tilde{\mathbf{X}}_*^n)^{-1}, \end{aligned} \tag{6.16}$$

para todas las funciones $\boldsymbol{\psi}_h^* \in \tilde{\mathcal{O}}_*(\boldsymbol{\tau}_h)$ y $\eta_h^* \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t_n)$. Donde $d_x^n \in \mathbb{S}_h^3$, $d_v^n \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t_n)^3$, $d_\nu^n \in \tilde{\mathcal{O}}_*(\boldsymbol{\tau}_h)$ y $d_\kappa^n \in \mathcal{S}_{h,0}^*(t_n)$.

La derivada temporal discreta, las funciones extrapoladas y las formas bilineales están definidas de manera análoga a las de la Sección 6.1.2.

Observación 16. *Es importante notar que los espacios $\mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)(t_n)$ definidos en las distintas superficies, coinciden en su traza pues el vector $\boldsymbol{\tau}_h$ no cambia durante la evolución, así que no cambia en los distintos pasos de tiempo. Así, por ejemplo, si $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{O}_h(\boldsymbol{\tau}_h)(t_n)$ entonces $(\boldsymbol{\psi}_h)^{\tilde{\Gamma}_h^n}|_{\partial\Gamma_{h,0}} = \boldsymbol{\psi}_h|_{\partial\Gamma_{h,0}}$, de manera que $(\boldsymbol{\psi}_h)^{\tilde{\Gamma}_h^n} \in \tilde{\mathcal{O}}_h(\boldsymbol{\tau}_h)(t_n)$. De forma análoga pueden considerarse lift a otros espacios de funciones. Esto nos garantiza que las siguientes funciones pertenecen a los espacios dados.*

Definimos las siguientes funciones de error, que pertenecen a $\mathcal{S}_h^*(t_n)^3$, $\mathcal{S}_{h,0}^*(t_n)$, $\mathcal{S}_{h,0}^*(t_n)^3$ y $\mathcal{O}_h^*(\boldsymbol{\tau}_h)(t_n)$, respectivamente, para $n \geq q$:

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{x}}^n &= (\mathbf{x}_h^n)^{\Gamma_*^n} - \mathbf{x}^n, & e_{\kappa}^n &= (\kappa_h^n)^{\Gamma_*^n} - \kappa^*, \\ e_{\mathbf{v}}^n &= (\mathbf{v}_h^n)^{\Gamma_*^n} - \mathbf{v}^*, & e_{\nu}^n &= (\nu_h^n)^{\Gamma_*^n} - \nu^*, \end{aligned}$$

donde además hemos usado las funciones identidad $\mathbf{x}_h^n = \mathbf{X}_h^n \circ (\mathbf{X}_h^n)^{-1}$ y $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}_*^n \circ (\mathbf{X}_*^n)^{-1}$. Para las derivadas temporales discretas de los errores usaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\mathbf{x}}^n &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^q \delta_j (e_{\mathbf{x}}^{k-j})^{\tilde{\Gamma}_h^n}, & \dot{e}_{\nu}^n &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^q \delta_j (e_{\nu}^{k-j})^{\tilde{\Gamma}_h^n}, \\ \dot{e}_{\kappa}^n &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^q \delta_j (e_{\kappa}^{k-j})^{\tilde{\Gamma}_h^n}. \end{aligned}$$

Restando (6.16) de (6.14), podemos obtener las siguientes ecuaciones del error

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\dot{e}_{\nu}^n, \boldsymbol{\psi}_h) + a_{\tilde{\Gamma}_h^n}((e_{\nu}^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, \boldsymbol{\psi}_h) &= m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(f_1(\tilde{\nu}_h^n, \tilde{A}_h^n), \boldsymbol{\psi}_h) - m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(f_1(\tilde{\nu}_*^n, \tilde{A}_*^n), \boldsymbol{\psi}_h^*) \\ &\quad + m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\tilde{\nu}_h^n), \boldsymbol{\psi}_h) - m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\tilde{\nu}_*^n), \boldsymbol{\psi}_h^*) \\ &\quad - (a_{\tilde{\Gamma}_h^n}((\nu_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, \boldsymbol{\psi}_h) - a_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\nu_h^n, \boldsymbol{\psi}_h^*)) + m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(d_{\nu}^n, \boldsymbol{\psi}_h^*) \\ &\quad - (m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\dot{\nu}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\dot{\nu}_*^n, \boldsymbol{\psi}_h^*)), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\dot{e}_{\kappa}^n, \eta_h) + a_{\tilde{\Gamma}_h^n}((e_{\kappa}^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, \eta_h) &= m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(f_2(\tilde{\kappa}_h^n, \tilde{A}_h^n), \eta_h) - m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(f_2(\tilde{\kappa}_*^n, \tilde{A}_*^n), \eta_h^*) \\ &\quad - (a_{\tilde{\Gamma}_h^n}((\kappa_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, \eta_h) - a_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\kappa_h^n, \eta_h^*)) + m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(d_{\kappa}^n, \eta_h^*) \\ &\quad - (m_{\tilde{\Gamma}_h^n}(\dot{\kappa}_h^n, \eta_h) - m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\dot{\kappa}_*^n, \eta_h^*)), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$(e_{\mathbf{v}}^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n} = \mathcal{Q}_{\tilde{\Gamma}_h^n}((\kappa_h^n \nu_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}) - (\mathcal{Q}_{\tilde{\Gamma}_*^n}((\kappa_*^n \nu_*^n)^{\tilde{\Gamma}_*^n}))^{\tilde{\Gamma}_h^n} + d_{\mathbf{v}}^n, \quad (6.19)$$

$$\dot{e}_{\mathbf{x}}^n = (e_{\mathbf{v}}^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n} - d_{\mathbf{x}}^n, \quad (6.20)$$

para $\boldsymbol{\psi}_h \in \tilde{\mathcal{O}}_h^n$ y $\eta_h \in \tilde{\mathcal{S}}_h^n$. Notar que en las ecuaciones anteriores, cuando hacemos referencia a $\boldsymbol{\psi}_h^*$ estamos considerando que $\boldsymbol{\psi}_h^* = (\boldsymbol{\psi}_h)^{\tilde{\Gamma}_*^n}$. Cabe mencionar que, debido a la Observación 16, $\dot{e}_{\nu}^n \in \tilde{\mathcal{O}}_h^n(\boldsymbol{\tau}_h)$.

Observación 17. *Para el análisis de estabilidad consideraremos la ecuación (6.17) en dos pasos de tiempo, n y $n-1$. Así que será importante poder garantizar que la función que queremos usar como función test pertenezca al espacio de funciones adecuado. Nuevamente,*

gracias a la Observación 16 y a que los espacios discretos se definen mediante transporte de funciones de base independientes de t , tenemos que $(\dot{e}_\nu^n)_{\tilde{\Gamma}_h^{n-1}} \in \tilde{\mathcal{O}}_h^{n-1}(\tau_h)$ por lo cual podremos reemplazar esa función como función test tal y como veremos más adelante.

6.2.3. Discusión sobre la estabilidad del esquema totalmente discreto

En esta sección presentamos primero resultados auxiliares que son necesarios para realizar el análisis teórico del esquema totalmente discreto. Luego, resultados parciales obtenidos para las estimaciones de energía para los errores en la posición, la velocidad y la curvatura. Junto con un resultado parcial alcanzado para el error en el vector normal. Finalmente, establecemos posibles estrategias para probar una estimación de energía adecuada para el error en el vector normal que será objeto de un trabajo futuro. Así como también presentamos una breve discusión acerca del análisis de consistencia.

6.2.3.1. Resultados auxiliares

Hipótesis sobre los errores iniciales. El método BDF de orden q requiere tener calculados con un método previo los primeros q valores iniciales. El primer requisito que se debe cumplir para obtener estimaciones de estabilidad es que los errores iniciales sean de orden h^m para cierto $1 < m \leq p$. Esto es,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_h^i - \mathbf{X}_*^i\|_{H^1(\Omega)} &\leq h^m, \\ \|e_{\mathbf{x}}^i\|_{H^1(\Gamma_*^n)} &\leq h^m, \\ \|e_{\mathbf{v}}^i\|_{H^1(\Gamma_*^n)} &\leq h^m, \\ \|e_{\kappa}^i\|_{H^1(\Gamma_*^n)} &\leq h^m, \\ \|e_{\nu}^i\|_{H^1(\Gamma_*^n)} &\leq h^m, \end{aligned} \tag{6.21}$$

para $i = 0, \dots, q - 1$.

Acotación uniforme de los quasi-interpolantes y las proyecciones de Ritz. De las estimaciones uniformes obtenidas para estos operadores en el Capítulo 4 tenemos que, aplicando el Lema 26 tenemos que para todo $n \geq 0$ y $h \leq h_0$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_*^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} &\leq C, \quad \|\mathbf{x}_*^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_*^n)} \leq C \\ \|\mathbf{v}_*^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_*^n)} &\leq C, \quad \|\nu_*^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_*^n)} \leq C \\ \|\kappa_*^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_*^n)} &\leq C \end{aligned} \tag{6.22}$$

con C independiente de t y h .

Estimaciones a priori para las soluciones numéricas. Presentamos un Lema análogo al Lema 27 y al Lema 30 del Capítulo 5.

Lema 36. *Sea $t_0 \in (0, T]$ (que podría depender de Δt y h) el tiempo máximo para el cual se cumplen las siguientes estimaciones*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{X}_h^n - \mathbf{X}_*^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} &\leq h^{(m-1)/2}, \\
\|e_x^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_*^n)} &\leq h^{(m-1)/2}, \\
\|e_v^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_*^n)} &\leq h^{(m-1)/2}, \\
\|e_\kappa^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_*^n)} &\leq h^{(m-1)/2}, \\
\|e_\nu^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_*^n)} &\leq h^{(m-1)/2},
\end{aligned} \tag{6.23}$$

para todo $t \in [0, t_0]$, $h \leq h_0$ y todo $n\Delta t \leq t_0$, con $n \leq \bar{n}$ para algún \bar{n} .

Además, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{X}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} &\leq C \\
\|\mathbf{x}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_*^n)} + \|\mathbf{v}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_h^n)} + \|\kappa_h^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_h^n)} + \|\boldsymbol{\nu}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_h^n)} &\leq C.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Demostración. Debido a que el método BDF de orden q requiere q pasos iniciales, suponiendo que se cumplen las hipótesis (6.21), entonces usando desigualdades inversa tenemos

$$\|e\|_{W^{1,\infty}} \leq ch^{-1}\|e\|_{H^1} \leq ch^{m-1},$$

para $e \in \{e_x^n, e_v^n, e_\kappa^n, e_\nu^n, E_{\mathbf{X}}^n\}$. De esta manera, $ch^{m-1} \leq h^{(m-1)/2}$ para h suficientemente pequeño. La acotación en norma $W^{1,\infty}$ en todos los casos se deduce combinando (6.23) con (6.22), más la equivalencia de normas entre normas en Γ_h^n y Γ_*^n garantizadas por el Corolario 2, gracias a que tenemos $\|E_{\mathbf{X}}^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C$ (esta condición sería la análoga a (5.25)). \square

El objetivo posterior, así como lo fue en la Sección 5.5, será probar que $t_0 = T$ completando el argumento de inducción, esto es, mostrando que las estimaciones (6.24) se cumplen para $n = \bar{n} + 1$.

Relacionando superficies discretas. Empezaremos esta sección haciendo algunas observaciones. Primero, si comparamos normas definidas en dos superficies durante un mismo instante de tiempo, por ejemplo, en Γ_h^n y Γ_*^n . Gracias al Lema 36 podemos aplicar el Corolario 3 con Γ_h^n y Γ_*^n y obtener entonces que las normas L^2 y H^1 definidas en ambas superficies son equivalentes.

Para estudiar la estabilidad, necesitaremos acotar en el lado derecho diferencias de formas bilineales definidas en la superficie discreta $\tilde{\Gamma}_*^n$ y en $\tilde{\Gamma}_h^n$. En los siguientes lemas solo presentaremos la demostración para las formas bilineales m , pues las otras se siguen de forma análoga.

Lema 37. Sean u y w funciones definidas en $\tilde{\Gamma}_*^n$, entonces para todo $n \leq \bar{n}$ y $n\Delta t \leq t_0$

$$\begin{aligned} \left| m_{\tilde{\Gamma}_h^n} \left((u)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, (w)^{\tilde{\Gamma}_h^n} \right) - m_{\tilde{\Gamma}_*^n} (u, w) \right| &\lesssim \|u\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^n)} \|w\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^n)}. \\ \left| a_{\tilde{\Gamma}_h^n} \left((u)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, (w)^{\tilde{\Gamma}_h^n} \right) - a_{\tilde{\Gamma}_*^n} (u, w) \right| &\lesssim \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_*^n} u\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^n)} \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_*^n} w\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^n)}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Demostración. Para obtener esta estimación, podemos utilizar el Corolario 3 pensando que $\tilde{\Gamma}_*^n$ y $\tilde{\Gamma}_h^n$ están conectadas mediante el movimiento $Y = \tilde{\mathbf{X}}_*^n + \theta E_{\tilde{\mathbf{X}}}^n$ con $\theta \in [0, 1]$. Entonces, si se cumple que $\|E_{\tilde{\mathbf{X}}}^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C$ (como en (5.33)), con C independiente de h , Δt y n para todo $n\Delta t \leq t_0$, podríamos usar el Corolario con $\tilde{\Gamma}_h^n$ en el lugar de Λ y $\tilde{\Gamma}_h^{n-1}$ en el lugar de Σ para obtener la estimación deseada.

Usando la definición de las funciones extrapoladas, para $n \geq q$

$$\|E_{\tilde{\mathbf{X}}}^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C_\gamma \sum_{i=0}^{q-1} \|E_{\tilde{\mathbf{X}}}^{n-i-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)},$$

como $n-i-1 \leq n-1 \leq n \leq \bar{n}$ podemos usar el Lema 36 y obtener la acotación uniforme para todo $t \in [0, t_0]$ y $h \leq h_0$ con una constante independiente de h y Δt . \square

Lema 38. Sean u y w funciones definidas en Γ_*^n , entonces para todo $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \left| m_{\tilde{\Gamma}_*^n} \left((u)^{\tilde{\Gamma}_*^n}, (w)^{\tilde{\Gamma}_*^n} \right) - m_{\Gamma_*^n} (u, w) \right| &\lesssim \Delta t^q \|u\|_{L^2(\Gamma_*^n)} \|w\|_{L^2(\Gamma_*^n)}. \\ \left| a_{\tilde{\Gamma}_*^n} \left((u)^{\tilde{\Gamma}_*^n}, (w)^{\tilde{\Gamma}_*^n} \right) - a_{\Gamma_*^n} (u, w) \right| &\lesssim \Delta t^q \|\nabla_{\Gamma_*^n} u\|_{L^2(\Gamma_*^n)} \|\nabla_{\Gamma_*^n} w\|_{L^2(\Gamma_*^n)}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Demostración. De forma análoga, vamos a considerar que Γ_*^n y $\tilde{\Gamma}_*^n$ están relacionadas por el movimiento $Y = \mathbf{X}_*^n + \theta(\tilde{\mathbf{X}}_*^n - \mathbf{X}_*^n)$ con $\theta \in [0, 1]$. Entonces, para aplicar el Corolario 3, debemos ver qué sucede con la diferencia $\tilde{\mathbf{X}}_*^n - \mathbf{X}_*^n$. Pero usando Taylor y propiedades de los coeficientes del método BDF se tiene que

$$\|\tilde{\mathbf{X}}_*^n - \mathbf{X}_*^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq c\Delta t^q, \quad (6.27)$$

con c independiente de Δt y de h . \square

Así, de los tres lemas anteriores (haciendo $u = w$ y luego intercambiando los roles de los pares de superficies en cada caso) podemos concluir que las normas definidas en las superficies $\tilde{\Gamma}_*^n$, $\tilde{\Gamma}_h^n$, Γ_*^n y Γ_h^n son h y Δt equivalentes para $h \leq h_0$ y $\Delta t \leq \Delta t_0$ para todo $(q+1)\Delta t \leq n\Delta t \leq T$.

Para finalizar esta sección, nos gustaría obtener una relación conveniente entre normas definidas en tiempos diferentes, por ejemplo t_n y t_{n-j} para cierto $1 \leq j \leq q$. Para ello vamos a recordar primero unas herramientas relacionadas al método BDF. Para definirlo, usamos de base los coeficientes de los polinomios

$$\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^q \delta_j \zeta^j = \sum_{\ell=1}^q \frac{1}{\ell} (1-\zeta)^\ell, \quad \gamma(\zeta) = \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_j \zeta^j = \frac{1 - (1-\zeta)^q}{\zeta}. \quad (6.28)$$

Algo que será de utilidad en los resultados de esta sección es que podemos factorizar al polinomio generador $\delta(\zeta)$ de la siguiente manera

$$\delta(\zeta) = (1 - \zeta)\sigma(\zeta),$$

donde $\sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{q-1} \sigma_j \zeta^j$ tiene grado $q - 1$ y no tiene ceros en el disco unitario cerrado (esta característica expresa la cero-estabilidad del método BDF, para $q \leq 6$; ver por ejemplo (?), Sección III.3)). De esta manera, tendremos que

$$\sum_{j=0}^q \delta_j \zeta^j = (1 - \zeta)\sigma(\zeta) = (1 - \zeta) \sum_{j=0}^{q-1} \sigma_j (\zeta^j - \zeta^{j-1}). \quad (6.29)$$

Además, existe $\rho < 1$ tal que (Kovács et al., 2019, Sección 10.3, (10.13)-(10.14))

$$\frac{1}{\sigma(\zeta)} := \chi(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j \zeta^j, \quad \text{con } |\chi_j| \leq c\rho^j. \quad (6.30)$$

Análogamente,

$$\frac{1}{\delta(\zeta)} := \omega(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \zeta^j, \quad \text{con } |\omega_j| \leq c, \quad (6.31)$$

donde los coeficientes ω_j están acotados para todo j debido a la cero-estabilidad del método BDF de orden $q \leq 6$.

Presentamos ahora un resultado que se deriva de (6.29), (6.31) y (6.30) y se puede probar siguiendo las ideas presentes en (Kovács et al., 2019, Sección 10.3) para una sucesión de vectores, pero que puede ser extendida a las funciones vectoriales que se definen con esos vectores como coeficientes.

Lema 39. *Sea $(\mathbf{e}^k)_{k=0}^M$ una sucesión de funciones definidas en Ω . Denotando por*

$$\partial^{\Delta t} \mathbf{e}^k = \frac{\mathbf{e}^k - \mathbf{e}^{k-1}}{\Delta t}, \quad (6.32)$$

para $k = 0, \dots, M$. Existen coeficientes χ_j y ω_j acotados para todo j tales que

$$\mathbf{e}^k = \Delta t \sum_{j=q}^k \chi_{k-j} (\dot{\mathbf{e}}^k - \mathbf{s}^j), \quad (6.33)$$

$$\partial^{\Delta t} \mathbf{e}^k = \sum_{j=q}^k \omega_{k-j} (\dot{\mathbf{e}}^k - \mathbf{r}^j), \quad (6.34)$$

con $\mathbf{s}^j = \sum_{i=0}^{q-1} \delta_{j-i} \mathbf{e}^i$ y $\mathbf{r}^j = \sum_{i=0}^{q-1} \sigma_{j-i} \partial^{\Delta t} \mathbf{e}^i$.

Lema 40. *Sean u y w funciones definidas en $\tilde{\Gamma}_h^{n-1}$, entonces para todo $n \leq \bar{n}$ y $n\Delta t \leq t_0$*

$$\begin{aligned} \left| m_{\tilde{\Gamma}_h^n} \left((u)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, (w)^{\tilde{\Gamma}_h^n} \right) - m_{\tilde{\Gamma}_h^{n-1}}(u, w) \right| &\lesssim \Delta t \|u\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{n-1})} \|w\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{n-1})}. \\ \left| a_{\tilde{\Gamma}_h^n} \left((u)^{\tilde{\Gamma}_h^n}, (w)^{\tilde{\Gamma}_h^n} \right) - a_{\tilde{\Gamma}_h^{n-1}}(u, w) \right| &\lesssim \Delta t \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^{n-1}} u\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{n-1})} \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^{n-1}} w\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{n-1})}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Demostración. Para obtener esta estimación, podemos utilizar el Corolario 3 siempre y cuando tengamos que

$$\|\widetilde{\mathbf{X}}_h^n - \widetilde{\mathbf{X}}_h^{n-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C, \quad (6.36)$$

con C independiente de h , Δt y n para todo $n\Delta t \leq t_0$. Si descomponemos pensamos este error de la siguiente manera

$$\widetilde{\mathbf{X}}_h^n - \widetilde{\mathbf{X}}_h^{n-1} = \Delta t \bar{\partial} \widetilde{\mathbf{X}}_h^n \quad (6.37)$$

Usando (6.34) tenemos que

$$\|\partial^{\Delta t} \widetilde{\mathbf{X}}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq \sum_{j=q}^n \|\dot{\widetilde{\mathbf{X}}}_h^j\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \sum_{j=q}^n \|\mathbf{r}^j\|_{W^{1,\infty}(\Omega)},$$

donde los \mathbf{r}^j están relacionados con los errores iniciales que satisfacen (6.21). Así que solo resta ver que el primer término está uniformemente acotado. Notar que según las definiciones que hemos dado en (6.14),

$$\dot{\widetilde{\mathbf{X}}}_h^j = \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_i \dot{\mathbf{X}}_h^{j-i-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_i \mathbf{V}_h^{j-i-1}.$$

Estamos definiendo \mathbf{V}_h^{j-i-1} como el pull-back a Ω de la función \mathbf{v}_h^{j-i-1} . De esta manera,

$$\|\dot{\widetilde{\mathbf{X}}}_h^j\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C\gamma \|\dot{\mathbf{X}}_h^{j-i-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq \gamma \|\mathbf{V}_h^{j-i-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}.$$

Para acotar esta última sumamos y restamos \mathbf{V}_*^{j-i-1} , de manera que

$$\|\mathbf{V}_h^{j-i-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq \|\mathbf{V}_h^{j-i-1} - \mathbf{V}_*^{j-i-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|\mathbf{V}_*^{j-i-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)},$$

en el último término usamos las acotaciones de \mathbf{v}_*^{j-i-1} (su pushforward) y el Lema 36, para ver que el primer término está uniformemente acotado para todo $h \leq h_0$ y $n \leq \bar{n}$. Como $j - i - 1 \leq n - 1$ estamos dentro del rango de validez de ese resultado.

Así, $\|\widetilde{\mathbf{X}}_h^n - \widetilde{\mathbf{X}}_h^{n-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq \Delta t C$ y podemos usar el Corolario 3. \square

Observación 18. *Se puede probar, por inducción, que si $\|\partial^{\Delta t} \widetilde{\mathbf{X}}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C$ vale hasta $n - 1$, entonces las normas en $\widetilde{\Gamma}_h^j$ son equivalentes para todo $q \leq j \leq n - 1$. Y, siguiendo un procedimiento análogo al del Lema anterior, se puede ver en realidad que la cota vale para n y no solo para $n - 1$ y entonces extender la equivalencia de normas $\widetilde{\Gamma}_h^j$ para todo $q \leq j \leq n$.*

Algo que vale la pena notar, es que el lema anterior puede generalizarse de la siguiente manera.

Lema 41. *Sean u y w funciones definidas en $\widetilde{\Gamma}_h^{n-j}$, con $j = 1, \dots, q$. Entonces para todo $n \leq \bar{n}$ y $n\Delta t \leq t_0$*

$$\begin{aligned} \left| m_{\widetilde{\Gamma}_h^n} \left((u)^{\widetilde{\Gamma}_h^n}, (w)^{\widetilde{\Gamma}_h^n} \right) - m_{\widetilde{\Gamma}_h^{n-j}}(u, w) \right| &\lesssim \Delta t \|u\|_{L^2(\widetilde{\Gamma}_h^{n-j})} \|w\|_{L^2(\widetilde{\Gamma}_h^{n-j})}. \\ \left| a_{\widetilde{\Gamma}_h^n} \left((u)^{\widetilde{\Gamma}_h^n}, (w)^{\widetilde{\Gamma}_h^n} \right) - a_{\widetilde{\Gamma}_h^{n-j}}(u, w) \right| &\lesssim \Delta t \|u\|_{L^2(\widetilde{\Gamma}_h^{n-j})} \|w\|_{L^2(\widetilde{\Gamma}_h^{n-j})}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Demostración. La demostración es análoga al caso $j = 1$, y se obtiene escribiendo

$$\widetilde{\mathbf{X}}_h^n - \widetilde{\mathbf{X}}_h^{n-j} = \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_i \sum_{\ell=0}^j \partial \mathbf{X}_h^{n-i-\ell},$$

y luego que $\partial \mathbf{X}_h^{n-i-\ell} = \sum_{m=q}^{n-i-\ell} (\dot{\widetilde{X}}_h^m - r^m)$ y con que

$$\|\dot{\widetilde{X}}_h^m\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq \gamma \|\mathbf{V}_h^{m-i-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)},$$

con $m - i - 1 \leq n - i - \ell - i - 1 \leq n - i - 1 \leq n - 1$ lo que garantiza poder usar el Lema 36. \square

El Lema 39 puede extenderse también a funciones definidas en $\widetilde{\Gamma}_h^n$ y se puede concluir el siguiente resultado, tomando normas H^1 a ambos miembros y sumando para sobre k para la segunda estimación.

Lema 42. *Para $n \geq q$ y $n\Delta t \leq T$, tenemos*

$$\|\mathbf{e}^n\|_{H^1(\widetilde{\Gamma}_h^n)}^2 \lesssim \Delta t \sum_{k=q}^n \|\dot{\mathbf{e}}^k\|_{H^1(\widetilde{\Gamma}_h^n)}^2 + \sum_{i=1}^{q-1} \|\mathbf{e}^i\|_{H^1(\widetilde{\Gamma}_h^n)}^2, \quad (6.39)$$

$$\sum_{k=q}^n \|\partial^{\Delta t} \mathbf{e}^k\|_{H^1(\widetilde{\Gamma}_h^n)}^2 \lesssim \sum_{k=q}^n \|\dot{\mathbf{e}}^k\|_{H^1(\widetilde{\Gamma}_h^n)}^2 + \sum_{i=1}^{q-1} \|\partial^{\Delta t} \mathbf{e}^i\|_{H^1(\widetilde{\Gamma}_h^n)}^2. \quad (6.40)$$

Notar que debido a la definición de los espacios spline y del lift para comparar funciones en diferentes superficies, siempre se satisface que las funciones

$$u_h^n, \quad (u_h^n)^{\widetilde{\Gamma}_h^n}, \quad (u_h^n)^{\widetilde{\Gamma}_*^n}, \quad (u_h^n)^{\Gamma_*^n} \quad \text{tienen los mismos coeficientes } \mathbf{u}^n, \quad (6.41)$$

por lo tanto, el lema anterior podría formularse para funciones definidas en cualquier superficie o lifts de funciones.

Lema 43. *Para los valores extrapolados tendremos*

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathbf{X}}_*^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} &\leq C, & \|\widetilde{\mathbf{x}}_*^n\|_{W^{1,\infty}(\widetilde{\Gamma}_*^n)} &\leq C \\ \|\widetilde{\kappa}_*^n\|_{W^{1,\infty}(\widetilde{\Gamma}_*^n)} &\leq C, & \|\widetilde{\nu}_*^n\|_{W^{1,\infty}(\widetilde{\Gamma}_*^n)} &\leq C. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Y de lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathbf{X}}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} &\leq C \\ \|\widetilde{\mathbf{x}}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\widetilde{\Gamma}_h^n)} + \|\widetilde{\kappa}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\widetilde{\Gamma}_h^n)} + \|\widetilde{\nu}_h^n\|_{W^{1,\infty}(\widetilde{\Gamma}_h^n)} &\leq C, \end{aligned} \quad (6.43)$$

Demostración. La demostración se deduce de combinar la definición de las funciones extrapoladas y la acotación uniforme dada en (6.42). \square

En lo que sigue, en algunos casos haremos un abuso de notación en el siguiente sentido, sea u_h^n definida en Γ_h^n , entonces escribiremos

$$\|u_h^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^n)} \quad \text{en vez de} \quad \|(u_h^n)^{\tilde{\Gamma}_h^n}\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^n)},$$

de manera que se entenderá por el contexto que si la función no está definida en $\tilde{\Gamma}_h^n$ se considera su lift. Procederemos de manera análoga con la norma de los lifts de esa función en otras superficies al igual que para las formas bilineales.

6.2.3.2. Estimaciones de energía

Comenzamos, como en la Sección 5.5 con tres lemas que contienen estimaciones de energía clave para llegar a una estimación de la estabilidad.

Lema 44. *Sea $n \geq q$ tal que $n\Delta t \leq t_0$, con t_0 como en el Lema 36, entonces*

$$\|e_x^n\|_{H^1(\Gamma_*^n)}^2 \lesssim \Delta t \sum_{k=q}^n \|e_v^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 + \Delta t \sum_{k=q}^n \|d_x^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 + \sum_{i=0}^{q-1} \|e_x^i\|_{H^1(\Gamma_h^i)}^2, \quad (6.44)$$

y

$$\|e_v^n\|_{H^1(\Gamma_*^n)}^2 \lesssim \|e_\nu^n\|_{H^1(\Gamma_*^n)}^2 + \|e_\kappa^n\|_{H^1(\Gamma_*^n)}^2 + \|d_v^n\|_{H^1(\Gamma_*^n)}^2. \quad (6.45)$$

Demostración. Para (6.44) se usa (6.39) con normas $H^1(\Gamma_*^n)$ y luego equivalencia de normas. Entonces,

$$\begin{aligned} \|e_x^n\|_{H^1(\Gamma_*^n)}^2 &\lesssim \Delta t \sum_{k=q}^n \|\dot{e}_x^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^n)}^2 + \sum_{i=1}^{q-1} \|e_x^i\|_{H^1(\Gamma_*^i)}^2 \\ &\lesssim \Delta t \sum_{k=q}^n \|e_v^n\|_{H^1(\Gamma_*^n)}^2 + \sum_{k=q}^n \|d_x^n\|_{H^1(\Gamma_*^n)}^2 + \sum_{i=1}^{q-1} \|e_x^i\|_{H^1(\Gamma_*^i)}^2, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad nuevamente equivalencia de normas y (6.20). De (6.19), usando la Definición 17 del quasi-interpolante y la definición de los lifts, tendremos

$$e_v^n = \mathcal{Q}_{\Gamma_*^n}((\kappa_h^n \nu_h^n)^{\Gamma_*^n}) - \mathcal{Q}_{\Gamma_*^n}(\kappa_*^n \nu_*^n) + (d_v^n)^{\Gamma_*^n}, \quad (6.46)$$

entonces procedemos de forma análoga a (5.39) sumando y restando los términos cruzados y usando la estabilidad del quasi-interpolante, además de la acotación uniforme (6.22) para ν_*^n y κ_*^n para h suficientemente pequeño. \square

La estimación de energía para e_κ^n se obtiene de manera análoga a la de e_ν^n . Y se puede deducir adaptando los argumentos usados en (Kovács et al., 2019, Proposición 10.1). Por ese motivo solo la enunciaremos y omitiremos su demostración.

Lema 45. Sea $n \geq q$ tal que $n\Delta t \leq t_0$, con t_0 como en el Lema 36, entonces

$$\begin{aligned} \|e_\kappa^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 &\lesssim c \sum_{i=0}^{q-1} \|e_x^{n-1-i}\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^{n-1-i})}^2 + \Delta t \sum_{k=q}^n \left(\|e_\nu^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 + \|e_x^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 + \|e_\kappa^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 \right) \\ &+ \sum_{i=0}^{q-1} \left(\|e_\nu^i\|_{H^1(\Gamma_h^i)}^2 + \|e_x^i\|_{H^1(\Gamma_h^i)}^2 + \|e_\kappa^i\|_{H^1(\Gamma_h^i)}^2 \right) + \Delta t \sum_{i=1}^{q-1} \|\partial^{\Delta t} e_x^i\|_{H^1(\Gamma_h^i)}^2 \\ &+ \Delta t \sum_{k=q}^n \left(\|d_x^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 + \|d_\kappa^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Un primer paso hacia a la estabilidad del esquema totalmente discreto es tener una estimación similar a la del Lema anterior para e_ν^n . El principal desafío, al igual que en el esquema semidiscreto, es poder lidiar con el término crítico que aparecerá del lado derecho debido a los términos de borde en la ecuación (6.17). En este caso será $\|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}$, que luego de aplicar desigualdad de traza se transformará en

$$\epsilon^{-1} \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} + \epsilon \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)},$$

para $0 < \epsilon < 1$.

Antes de seguir discutiendo posibles estrategias para controlar ese término, presentaremos un Lema auxiliar donde aparece por primera vez el término crítico.

Lema 46. Sea $n \geq q$ tal que $n\Delta t \leq t_0$, con t_0 como en el Lema 36, entonces

$$\begin{aligned} \|\dot{e}_\nu^n\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^n)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^n} e_\nu^n\|_{\tilde{\Gamma}_h^n}^2 &\lesssim \sum_{i=0}^{q-1} \|e_\nu^{k-i-1}\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^{k-i-1})}^2 + \sum_{i=0}^{q-1} \|e_\nu^i\|_{H^1(\Gamma_*^i)}^2 \\ &+ \sum_{i=0}^{q-1} \left(\|e_\nu^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)}^2 + \|e_x^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)}^2 \right) + \Delta t \sum_{i=1}^{q-1} \|\partial^{\Delta t} e_x^i\|_{H^1(\Gamma_h^i)}^2 \\ &+ \Delta t \sum_{k=q}^n \left(\|d_x^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 + \|d_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 \right) \\ &+ \epsilon \Delta t \sum_{k=q}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} + \epsilon^{-1} \Delta t \sum_{k=q}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Demostración. Sea $q+1 \leq k \leq n$, Empezamos restando a la ecuación (6.17) para $k-1$, η veces la ecuación para $k-1$, esto es

$$m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \psi_h) + a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(e_\nu^k, \psi_h) = R^k(\psi_h) + R_\partial^k(\psi_h), \quad \text{para toda } \psi_h \in \tilde{\mathcal{O}}_h^k,$$

—

$$\eta \times \left(m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \psi_h) + a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(e_\nu^k, \psi_h) \right) = \eta(R^{k-1}(\psi_h) + R_\partial^{k-1}(\psi_h)), \quad \text{para toda } \psi_h \in \tilde{\mathcal{O}}_h^{k-1},$$

donde

$$\begin{aligned} R^k(\psi_h) &= m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(f_1(\tilde{\nu}_h^k, \tilde{A}_h^k), \psi_h) - m_{\tilde{\Gamma}_*^k}(f_1(\tilde{\nu}_*^k, \tilde{A}_*^k), \psi_h^*) \\ &- \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\nu_*^k, \psi_h) - a_{\tilde{\Gamma}_*^k}(\nu_*^k, \psi_h) \right) + m_{\tilde{\Gamma}_*^k}(d_\nu^k, \psi_h^*) \\ &- \left(m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{\nu}_*^k, \psi_h) - m_{\tilde{\Gamma}_*^k}(\dot{\nu}_*^k, \psi_h) \right), \end{aligned} \quad (6.49)$$

y

$$R_{\partial}^k(\boldsymbol{\psi}_h) = m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_h^k), \boldsymbol{\psi}_h) - m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_h^k), \boldsymbol{\psi}_h). \quad (6.50)$$

Así, considerando $\boldsymbol{\psi}_h = \dot{e}_{\nu}^k$ para la primera ecuación y $\boldsymbol{\psi}_h = (\dot{e}_{\nu}^k)^{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}}$ para la segunda*, obtenemos

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_{\nu}^k, \dot{e}_{\nu}^k) + a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_{\nu}^k, \dot{e}_{\nu}^k) - \eta m_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}}(\dot{e}_{\nu}^{k-1}, \dot{e}_{\nu}^k) - \eta a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}}(e_{\nu}^{k-1}, (\dot{e}_{\nu}^k)) \\ = (R^k(\dot{e}_{\nu}^k) - \eta R^{k-1}(\dot{e}_{\nu}^k)) + (R_{\partial}^k(\dot{e}_{\nu}^k) - \eta R_{\partial}^{k-1}(\dot{e}_{\nu}^k)). \end{aligned}$$

Sumando y restando $\eta(e_{\nu}^{k-1})^{\tilde{\Gamma}_h^k}$ en la forma bilineal $a_{\tilde{\Gamma}_h^k}$, reagrupando y considerando que $\|\dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 = m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_{\nu}^k, \dot{e}_{\nu}^k)$ tendremos la primera ecuación para e_{ν}^k para $k \geq q+1$

$$\begin{aligned} \|\dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(e_{\nu}^k - \eta e_{\nu}^{k-1}, \dot{e}_{\nu}^k) \\ = -\eta \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(e_{\nu}^{k-1}, \dot{e}_{\nu}^k) - a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}}(e_{\nu}^{k-1}, \dot{e}_{\nu}^k) \right) \\ + \eta m_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}}(\dot{e}_{\nu}^{k-1}, \dot{e}_{\nu}^k) + (R^k(\dot{e}_{\nu}^k) - \eta R^{k-1}(\dot{e}_{\nu}^k)) \\ + (R_{\partial}^k(\dot{e}_{\nu}^k) - \eta R_{\partial}^{k-1}(\dot{e}_{\nu}^k)). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Recordemos que la ecuación (6.17) estará definida para $k-1$ solo tiene sentido si $k-1 \geq 1$.

Para el segundo término del lado izquierdo, sabemos que usando la definición de \dot{e}_{ν}^k , el Lema 34 y el Lema 35 tenemos

$$a_{\tilde{\Gamma}_h^k} \left((e_{\nu}^k)^{\tilde{\Gamma}_h^k} - \eta (e_{\nu}^{k-1})^{\tilde{\Gamma}_h^k}, \dot{e}_{\nu}^k \right) \geq \frac{1}{\Delta t} \left(|\mathbf{E}_{\nu}^k|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2 - |\mathbf{E}_{\nu}^{k-1}|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2 \right), \quad (6.52)$$

donde introducimos la siguiente notación:

Definimos $\mathbf{E}_{\nu}^k = ((e_{\nu}^k)^{\tilde{\Gamma}_h^k}, \dots, (e_{\nu}^{k-q+1})^{\tilde{\Gamma}_h^k})$ y denotamos con $|\cdot|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}$, la seminorma G -ponderada generada por la matriz del Lema 34, esto es,

$$|\mathbf{E}_{\nu}^k|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k} = \sum_{i,j=1}^q g_{i,j} a_{\tilde{\Gamma}_h^k} \left((e_{\nu}^{k-q+i})^{\tilde{\Gamma}_h^k}, (e_{\nu}^{k-q+j})^{\tilde{\Gamma}_h^k} \right).$$

Esta seminorma satisface la relación

$$\gamma^- \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} e_{\nu}^k\|^2 \leq \gamma^- \sum_{j=1}^q \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^{k-q+j}} e_{\nu}^{k-q+j}\|^2 \leq |\mathbf{E}_{\nu}^k|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2 \leq \gamma^+ \sum_{j=1}^q \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^{k-q+j}} e_{\nu}^{k-q+j}\|^2, \quad (6.53)$$

donde $\|\cdot\|$ hace referencia a la norma $L^2(\tilde{\Gamma}_h^{k-j+1})$ y γ^- y γ^+ son el mínimo y el máximo autovalor de la matriz simétrica y definida positiva G .

Entonces, usando (6.52) tenemos

$$\begin{aligned} \|\dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \frac{1}{\Delta t} \left(|\mathbf{E}_{\nu}^k|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2 - |\mathbf{E}_{\nu}^{k-1}|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2 \right) \\ \leq -\eta \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(e_{\nu}^{k-1}, \dot{e}_{\nu}^k) - a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}}(e_{\nu}^{k-1}, \dot{e}_{\nu}^k) \right) \\ + \eta m_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}}(\dot{e}_{\nu}^{k-1}, \dot{e}_{\nu}^k) + (R^k(\dot{e}_{\nu}^k) - \eta R^{k-1}(\dot{e}_{\nu}^k)) \\ + (R_{\partial}^k(\dot{e}_{\nu}^k) - \eta R_{\partial}^{k-1}(\dot{e}_{\nu}^k)). \end{aligned} \quad (6.54)$$

*Recordamos que para simplificar la notación omitiremos los lifts de las funciones en las formas bilineales y los utilizaremos olo cuando sea estrictamente necesario.

Al sumar en k nos gustaría que la suma del segundo término del lado izquierdo fuese telescópica, lo cual en principio no ocurre pues tenemos la seminorma de \mathbf{E}_ν^{k-1} en $\tilde{\Gamma}_h^k$ en vez de $\tilde{\Gamma}_h^{k-1}$. Para solucionarlo, usamos el siguiente resultado:

Para Δt suficientemente pequeño, gracias a (6.23), usando la segunda estimación del Lema 40 y las equivalencias de normas en 18, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(|\mathbf{E}_\nu^{k-1}|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2 - |\mathbf{E}_\nu^{k-1}|_{G, \tilde{\Gamma}_h^{k-1}}^2 \right) &\leq c \sum_{j=1}^q \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}} e_\nu^{k-1-q+i}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{k-1})}^2 \\ &\leq c \sum_{j=1}^q \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^{k-q+i}} e_\nu^{k-1-q+i}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{k-i-1})}^2. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Entonces, si sumamos (6.55) de la ecuación anterior, podemos cambiar $|\mathbf{E}_\nu^{k-1}|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2$ por $|\mathbf{E}_\nu^{k-1}|_{G, \tilde{\Gamma}_h^{k-1}}^2$ en el lado izquierdo.

Multiplicando por Δt y sumando desde $q+1$ hasta n tendremos

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \sum_{k=q+1}^n \left(|\mathbf{E}_\nu^k|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2 - |\mathbf{E}_\nu^{k-1}|_{G, \tilde{\Gamma}_h^{k-1}}^2 \right) \\ \leq -\Delta t \sum_{k=q}^n \eta \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^k} \left(e_\nu^{k-1}, \dot{e}_\nu^k \right) - a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}} \left(e_\nu^{k-1}, \dot{e}_\nu^k \right) \right) \\ + \eta \Delta t \sum_{k=q+1}^n m_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}} \left(\dot{e}_\nu^{k-1}, \dot{e}_\nu^k \right) \\ + c \Delta t \sum_{k=q+1}^n \sum_{j=1}^q \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1-q+i}} e_\nu^{k-1-q+i}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{k-q-i+1})}^2 \\ + \Delta t \sum_{k=q+1}^n \left(R^k(\dot{e}_\nu^k) - \eta R^{k-1}(\dot{e}_\nu^k) \right) \\ + \Delta t \sum_{k=q+1}^n \left(R_\partial^k(\dot{e}_\nu^k) - \eta R_\partial^{k-1}(\dot{e}_\nu^k) \right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Usando que la suma del segundo término del lado izquierdo resulta telescópica y que

$$\begin{aligned} c \Delta t \sum_{k=q+1}^n \sum_{j=1}^q \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1-q+i}} e_\nu^{k-1-q+i}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{k-q-i+1})}^2 &\leq c \sum_{i=1}^q \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^i} e_\nu^i\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^i)} \\ &+ c \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} e_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} \end{aligned}$$

tendremos

$$\begin{aligned}
 \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + |\mathbf{E}_\nu^n|_{G, \tilde{\Gamma}_h^n}^2 - |\mathbf{E}_\nu^q|_{G, \tilde{\Gamma}_h^q}^2 \\
 \leq -\Delta t \sum_{k=q}^n \eta \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^k} (e_\nu^{k-1}, \dot{e}_\nu^k) - a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}} (e_\nu^{k-1}, \dot{e}_\nu^k) \right) \\
 + \eta \Delta t \sum_{k=q+1}^n m_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}} (\dot{e}_\nu^{k-1}, \dot{e}_\nu^k) + c \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} e_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} \\
 + \Delta t \sum_{k=q+1}^n (R^k(\dot{e}_\nu^k) - \eta R^{k-1}(\dot{e}_\nu^k)) + c \sum_{i=1}^q \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^i} e_\nu^i\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^i)} \\
 + \Delta t \sum_{k=q+1}^n (R_\partial^k(\dot{e}_\nu^k) - \eta R_\partial^{k-1}(\dot{e}_\nu^k)).
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Ahora analicemos los términos del lado derecho. En cuanto al primero, usando Lema 41 tenemos

$$\left| \Delta t \sum_{k=q}^n \eta \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^k} (e_\nu^{k-1}, \dot{e}_\nu^k) - a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}} (e_\nu^{k-1}, \dot{e}_\nu^k) \right) \right| \lesssim \Delta t \eta \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} e_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}. \tag{6.58}$$

Usando Young y desigualdad inversa, más desigualdad inversa y la restricción del tamaño de paso $\Delta t \leq C_0 h$. Tenemos

$$\left| \eta \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^k} ((e_\nu^{k-1})^{\tilde{\Gamma}_h^k}, \dot{e}_\nu^k) - a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}} ((e_\nu^{k-1})^{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}}, \dot{e}_\nu^k) \right) \right| \lesssim \epsilon \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \epsilon^{-1} \|e_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2. \tag{6.59}$$

Para el segundo término, se puede usar nuevamente el Lema 41 (para pasar de la norma de e_ν^k en $\tilde{\Gamma}_h^{k-1}$ a $\tilde{\Gamma}_h^k$) y obtener que para Δt suficientemente pequeño

$$\begin{aligned}
 \eta \Delta t \sum_{k=q+1}^n m_{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}} (\dot{e}_\nu^{k-1}, \dot{e}_\nu^k) &\leq \eta \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_\nu^{k-1}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{k-1})} \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{k-1})} \\
 &\leq \eta \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_\nu^{k-1}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{k-1})} (1 + c \Delta t) \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} \\
 &\leq \frac{\eta}{2} c \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_\nu^{k-1}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^{k-1})}^2 + \frac{\eta}{2} c \Delta t \sum_{k=q+1}^n (1 + c \Delta t) \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} \\
 &= \frac{\eta}{2} c \Delta t \sum_{k=q+1}^{n-1} \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \frac{\eta}{2} c \Delta t \sum_{k=q+1}^n (1 + c \Delta t) \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} \\
 &\leq \frac{\eta}{2} c (1 + c \Delta t) \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}.
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

Como $\eta < 1$ y eligiendo las constantes de las desigualdades de Young de manera conveniente, para Δt suficientemente pequeño, podemos absorber este término del lado izquierdo.

Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + |\mathbf{E}_\nu^n|_{G, \tilde{\Gamma}_h^n}^2 &\leq \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|e_\nu^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + |\mathbf{E}_\nu^q|_{G, \tilde{\Gamma}_h^q}^2 \\
&+ \Delta t \sum_{k=q+1}^n (R^k(\dot{e}_\nu^k) - \eta R^{k-1}(\dot{e}_\nu^k)) \\
&+ \Delta t \sum_{k=q+1}^n (R_\partial^k(\dot{e}_\nu^k) - \eta R_\partial^{k-1}(\dot{e}_\nu^k)).
\end{aligned} \tag{6.61}$$

Ahora usando (6.53) para acotar $|\mathbf{E}_\nu^n|_{G, \tilde{\Gamma}_h^n}^2$ por abajo, tendremos

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^n} e_\nu^n\|_{\tilde{\Gamma}_h^n}^2 &\lesssim \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|e_\nu^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + |\mathbf{E}_\nu^q|_{G, q}^2 \\
&+ \Delta t \sum_{k=q+1}^n (R^k(\dot{e}_\nu^k) - \eta R^{k-1}(\dot{e}_\nu^k)) \\
&+ \Delta t \sum_{k=q+1}^n (R_\partial^k(\dot{e}_\nu^k) - \eta R_\partial^{k-1}(\dot{e}_\nu^k)).
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned}
R^k(\psi_h) &= m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(f_1(\tilde{\nu}_h^k, \tilde{A}_h^k), \psi_h) - m_{\tilde{\Gamma}_*^k}(f_1(\tilde{\nu}_*^k, \tilde{A}_*^k), \psi_h^*) \\
&- \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\nu_*^k, \psi_h) - a_{\tilde{\Gamma}_*^k}(\nu_*^k, \psi_h) \right) + m_{\tilde{\Gamma}_*^k}(d_\nu^k, \psi_h^*) \\
&- \left(m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{\nu}_*^k, \psi_h) - m_{\tilde{\Gamma}_*^k}(\dot{\nu}_*^k, \psi_h) \right),
\end{aligned} \tag{6.63}$$

de manera que los términos correspondientes al tercer renglón que contiene la forma bilineal m pueden acotarse, por ejemplo, usando el Lema 38. Mientras que los que tienen la forma bilineal a se pueden acotar usando estrategias similares a los puntos (iv)-(vi) en la Proposición 10.1 de Kovács et al. (2019). Obteniendo estimaciones similares, a las de la ecuación (10.36) de ese trabajo, esto es,

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^n} e_\nu^n\|_{\tilde{\Gamma}_h^n}^2 &\lesssim \sum_{i=0}^{q-1} \|e_\nu^{k-i-1}\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^{k-i-1})}^2 + \sum_{i=0}^{q-1} \|e_\nu^i\|_{H^1(\Gamma_*^i)}^2 \\
&+ \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|e_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \Delta t \sum_{i=1}^{q-1} \|\partial^{\Delta t} e_x^i\|_{H^1(\Gamma_h^i)}^2 \\
&+ \Delta t \sum_{k=q+1}^n \left(\|e_\nu^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 + \|e_x^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 + \|e_\nu^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 \right) \\
&+ \sum_{i=0}^{q-1} \left(\|e_\nu^i\|_{H^1(\Gamma_*^i)}^2 + \|e_x^i\|_{H^1(\Gamma_*^i)}^2 \right) + |\mathbf{E}_\nu^q|_{G, q}^2 \\
&+ \Delta t \sum_{k=q+1}^n \left(\|d_x^k\|_{H^1(\Gamma_*^k)}^2 + \|d_\nu^k\|_{L^2(\Gamma_*^k)}^2 \right) \\
&+ \Delta t \sum_{k=q+1}^n (R_\partial^k(\dot{e}_\nu^k) - \eta R_\partial^{k-1}(\dot{e}_\nu^k)).
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Lo diferente, es lo que sucede con los términos del último renglón, que son los términos que continen integrales sobre el borde, para los cuales podemos proceder de manera análoga a lo hecho en la Sección 5.5 y reescribir para cada k

$$R_{\partial}^k(\dot{e}_{\nu}^k) = m_{\partial\Gamma_{h,0}}((e_{\nu}^k \cdot \kappa_{\partial,h})(\tilde{\nu}_h^k \times \tau_h), \dot{e}_{\nu}^k) + m_{\partial\Gamma_{h,0}}((\tilde{\nu}_*^k \cdot \kappa_{\partial,h})(e_{\nu}^k \times \tau_h), \dot{e}_{\nu}^k), \quad (6.65)$$

entonces, usando las acotaciones uniformes de $\kappa_{\partial,h}$, τ_h y de las funciones extrapoladas $\tilde{\nu}_h^k$ y $\tilde{\nu}_*^k$, y desigualdad de trazas para el primer factor, se puede deducir que

$$\Delta t \sum_{k=q+1}^n |R_{\partial}^k(\dot{e}_{\nu}^k)| \lesssim \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|e_{\nu}^k\|_{L^2(\partial\Gamma_h)} \|\dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\partial\Gamma_h)} \lesssim \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|e_{\nu}^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^n)} \|\dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\partial\Gamma_h)}. \quad (6.66)$$

Posteriormente, usando que $\sum_{k=q+1}^n \|e_{\nu}^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^n)} \lesssim \sum_{k=q+1}^n \|e_{\nu}^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^n)}$, y desigualdad de Young más la desigualdad de trazas que usamos en la prueba del Lema 33 podemos deducir para $0 < \epsilon < 1$,

$$\sum_{k=q+1}^n |R_{\partial}^k(\dot{e}_{\nu}^k)| \lesssim \sum_{k=q+1}^n \|e_{\nu}^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \epsilon^{-1} \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} + \epsilon \sum_{k=q+1}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}. \quad (6.67)$$

Análogamente se puede proceder para el término correspondiente a $R_{\partial}^{k-1}((\dot{e}_{\nu}^k)^{\tilde{\Gamma}_h^{k-1}})$.

Reemplazando (6.67) en (6.64) y usando nuevamente (6.53) para $k = q$ tenemos para todo $k \geq q + 1$,

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^n} e_{\nu}^n\|_{\tilde{\Gamma}_h^n}^2 &\lesssim \sum_{i=0}^{q-1} \|e_{\nu}^{k-i-1}\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^{k-i-1})} + \sum_{i=0}^{q-1} \|e_{\nu}^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)} \\ &+ \sum_{i=0}^{q-1} \left(\|e_{\nu}^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)}^2 + \|e_x^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)}^2 \right) + \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^q} e_{\nu}^q\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^q)}^2 \\ &+ \Delta t \sum_{k=q+1}^n \left(\|d_x^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 + \|d_{\nu}^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 \right) \\ &+ \epsilon \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} + \epsilon^{-1} \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\dot{e}_{\nu}^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

El caso especial $k = q$ tenemos, testeando con \dot{e}_{ν}^q , usando que $\delta_0 > 0$ y la desigualdad de traza con $0 < \epsilon < 1$, para los términos de borde, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta t \|\dot{e}_{\nu}^q\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^q)}^2 + \delta_0 \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^q} e_{\nu}^q\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^q)}^2 &\lesssim \sum_{i=0}^{q-1} \left(\|e_{\nu}^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)}^2 + \|e_x^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)}^2 \right) + \Delta t \|d_{\nu}^q\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^q)}^2 \\ &+ \epsilon^{-1} \Delta t \|\dot{e}_{\nu}^q\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^q)}^2 + \epsilon \Delta t \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^q} \dot{e}_{\nu}^q\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^q)}^2. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Al mismo tiempo, esa ecuación, combinada con (6.39) para $n = q$, nos permite estimar la norma del gradiente de e_{ν}^q que aparece en el lado derecho de (6.68) usando que

$$\|e_{\nu}^q\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^q)}^2 \lesssim \sum_{i=0}^{q-1} \left(\|e_{\nu}^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)}^2 \right) + \Delta t \|d_{\nu}^q\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^q)}^2 + \rho^{-1} \Delta t \|\dot{e}_{\nu}^q\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^q)}^2 + \rho \Delta t \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^q} \dot{e}_{\nu}^q\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^q)}^2. \quad (6.70)$$

Así, sumando (6.68) y (6.69), tenemos para todo $k \geq q$

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{k=q}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^n} e_\nu^n\|_{\tilde{\Gamma}_h^n}^2 &\lesssim \sum_{i=0}^{q-1} \|e_\nu^{k-i-1}\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^{k-i-1})} + \sum_{i=0}^{q-1} \|e_\nu^i\|_{H^1(\Gamma_*^i)} \\
&+ \sum_{i=0}^{q-1} \left(\|e_\nu^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)}^2 + \|e_x^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^i)}^2 \right) \\
&+ \Delta t \sum_{k=q}^n \left(\|d_x^k\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 + \|d_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^k)}^2 \right) \\
&+ \epsilon \Delta t \sum_{k=q}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)} + \epsilon^{-1} \sum_{k=q}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}.
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Finalmente, usando (6.39) para acotar

$$\Delta t \sum_{k=q}^n \|\dot{e}_\nu^k\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^k)}^2 \geq \|\dot{e}_\nu^n\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^n)}^2 - \sum_{i=1}^{q-1} \|e_\nu^i\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^i)}^2,$$

obtenemos (6.48). □

En este punto necesitamos derivar otra ecuación, con el objetivo de controlar el término crítico tal y como lo hicimos en la Sección 5.5. Para ello, una posibilidad es tratar de proceder como hicimos en el caso semi-discreto, en el Lema 33. Para poder hacerlo necesitamos un sustituto discreto para la derivada respecto de t . Con ese objetivo se puede tomar la derivada temporal discreta para la ecuación (6.17).

Si denotamos $\bar{\partial}_q$ a la derivada discreta obtenida con el método BDF de orden q . La idea sería, realizar para $k \geq q$

$$\bar{\partial}_q \left(m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \psi_h) \right) + \bar{\partial}_q \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(e_\nu^k, \psi_h) \right) = \bar{\partial}_q \left(R^k(\psi_h) + R_\partial^k(\psi_h) \right). \tag{6.72}$$

Entonces, si primero consideramos para $k \geq 2q$ la combinación lineal de (6.17) para $k-i$ con $i = 0, \dots, q$ ponderadas con $\frac{\delta_i}{\Delta t}$. Tendríamos entonces (omitimos los lifts en las funciones para no sobrecargar la notación), para $k \geq 2q$

$$\sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} m_{\tilde{\Gamma}_h^{k-i}}(\dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h) + \sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-i}}(e_\nu^{k-i}, \psi_h) = \sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} R^{k-i}(\psi_h) + \sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} R_\partial^{k-i}(\psi_h). \tag{6.73}$$

Sumando y restando en el lado izquierdo

$$\sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h) \quad y \quad \sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(e_\nu^{k-i}, \psi_h),$$

Podemos obtener una ecuación para todo $k \geq 2q$

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_h^k} \left(\sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} \dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h \right) + a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^n, \psi_h) &= - \sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} \left(m_{\tilde{\Gamma}_h^{k-i}}(\dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h) - m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h) \right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-i}}(\dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h) - a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h) \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} R^{k-i}(\psi_h) + \sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} R_{\partial}^{k-i}(\psi_h). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Desafíos encontrados en la búsqueda de la estabilidad Para $q+1 \leq k < 2q$, no podemos usar la ecuación (6.17) pues no tenemos asegurado que $k-i \geq q$ para $q+1 \leq k < 2q$. Así que un primer aspecto a resolver es cómo extender (6.74) para todo $k \geq q$. Una posibilidad sería considerar que, de la definición (6.4)

$$\dot{e}_\nu^i = \sum_{j=0}^i \frac{\delta_j}{\Delta t} \dot{e}_\nu^{i-j}, \quad \text{para } i = 0, \dots, q-1. \quad (6.75)$$

De esta manera, se podría sumar a ambos miembros los términos correspondientes a los valores iniciales, cambiando la superficie extrapolada (la cual no está definida para valores iniciales) por la superficie discreta en el paso i .

Extendiendo (6.74) para $k \geq q$ tendríamos en el lado izquierdo

$$m_{\tilde{\Gamma}_h^k} \left(\sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} \dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h \right) + a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \psi_h), \quad (6.76)$$

entendiendo que $\tilde{\Gamma}_h^k$ es la superficie extrapolada si $k \geq 2q$ y la superficie Γ_h^k si $q+1 \leq k < 2q$. De esta manera, testeando con $\psi_h = \dot{e}_\nu^k - \eta(\dot{e}_\nu^{k-1})^{\tilde{\Gamma}_h^k}$, tendríamos en el lado izquierdo

$$\begin{aligned} LI^k &= m_{\tilde{\Gamma}_h^k} \left(\sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} \dot{e}_\nu^{k-i}, \dot{e}_\nu^k - \eta \dot{e}_\nu^{k-1} \right) + a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \dot{e}_\nu^k - \eta \dot{e}_\nu^{k-1}) \\ &= m_{\tilde{\Gamma}_h^k} \left(\sum_{i=0}^q \frac{\delta_i}{\Delta t} \dot{e}_\nu^{k-i}, \dot{e}_\nu^k - \eta \dot{e}_\nu^{k-1} \right) + \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{\tilde{\Gamma}_h^k}^2 - \eta a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \dot{e}_\nu^{k-1}). \end{aligned}$$

Entonces, se podrían usar nuevamente los Lemas 34 y 35 ahora con la sucesión de funciones (\dot{e}_ν^i) para acotar el primer término por debajo y tener,

$$LI^k \geq \frac{1}{\Delta t} (\|\dot{\mathbf{E}}_\nu^k\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2 - \|\dot{\mathbf{E}}_\nu^{k-1}\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2) + \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{\tilde{\Gamma}_h^k}^2 - \eta a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \dot{e}_\nu^{k-1}).$$

Esto nos permite obtener $\|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{\tilde{\Gamma}_h^k}^2$ para luego, al multiplicar por Δt y sumar sobre k desde $q+1$ hasta n , controlar el término crítico que aparecía en el lado derecho de (6.48).

Por otra parte, con el término que contiene la diferencia de los $\dot{\mathbf{E}}_\nu^k$ se puede proceder de manera análoga a lo que hicimos en el Lema 46 para cambiar $\|\dot{\mathbf{E}}_\nu^{k-1}\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2$ por $\|\dot{\mathbf{E}}_\nu^{k-1}\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^{k-1}}^2$ y obtener una suma telescópica. Entonces, el lado izquierdo resultaría

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{k=q+1}^n LI^k &\geq \|\dot{\mathbf{E}}_\nu^n\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^n}^2 - \|\dot{\mathbf{E}}_\nu^q\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^q}^2 + \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{\tilde{\Gamma}_h^k}^2 - \Delta t \sum_{k=q+1}^n \eta a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \dot{e}_\nu^{k-1}) \\ &\geq \|\dot{e}_\nu^n\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^n)}^2 - \|\dot{\mathbf{E}}_\nu^q\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^q}^2 + \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{\tilde{\Gamma}_h^k}^2 - \Delta t \sum_{k=q+1}^n \eta a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \dot{e}_\nu^{k-1}) \end{aligned}$$

Lo que podemos afirmar, es que, luego de sumar de $k = q + 1$ hasta n y multiplicar por Δt , al menos para $k \geq 2q$

$$\begin{aligned}
\|\dot{e}_\nu^n\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_h^n)}^2 + \Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{\tilde{\Gamma}_h^k}^2 &\leq \|\dot{\mathbf{E}}_\nu^q\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^q}^2 - \Delta t \eta \sum_{k=q+1}^n a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^k, \dot{e}_\nu^{k-1}) \\
&\quad - \sum_{k=q+1}^n \sum_{i=0}^q \delta_i \left(m_{\tilde{\Gamma}_h^{k-i}}(\dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h) - m_{\tilde{\Gamma}_h^k}(\dot{e}_\nu^{k-i}, \psi_h) \right) \\
&\quad - \sum_{k=q+1}^n \sum_{i=0}^q \delta_i \left(a_{\tilde{\Gamma}_h^{k-i}}(e_\nu^{k-i}, \psi_h) - a_{\tilde{\Gamma}_h^k}(e_\nu^{k-i}, \psi_h) \right) \\
&\quad + \sum_{k=q+1}^n \sum_{i=0}^q \delta_i R^{k-i}(\psi_h) + \sum_{k=q+1}^n \sum_{i=0}^q \delta_i R_\partial^{k-i}(\psi_h).
\end{aligned} \tag{6.77}$$

Análogamente a la propiedad (6.53), tenemos la siguiente para la norma G -ponderada

$$\gamma^- \|e_\nu^k\|^2 \leq \gamma^- \sum_{j=1}^q \|e_\nu^{k-j+1}\|^2 \leq \|\mathbf{E}_\nu^k\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^k}^2 \leq \gamma^+ \sum_{j=1}^q \|e_\nu^{k-j+1}\|^2, \tag{6.78}$$

De manera que $\|\dot{\mathbf{E}}_\nu^q\|_{G, \tilde{\Gamma}_h^q}^2 \leq \sum_{j=1}^q \|\dot{e}_\nu^{q-j+1}\|^2$, esto es, depende de cómo definamos los \dot{e}_ν^n para los valores iniciales. En principio, la definición que presentamos los incluye. Esta versión no es la presentación usual del BDF, pero aparece por ejemplo en(? , tSección 4.2). Así que tendríamos una definición que dependerá de los errores iniciales.

Por otra parte, en el lado derecho hay términos (los de formas bilineales en $\tilde{\Gamma}_h^{k-i}$ y $\tilde{\Gamma}_h^k$) que pueden estimarse considerando los Lemas 41. Los términos de borde serán un punto a seguir investigando. Una cuestión importante es terminar de entender si será necesario pedir como hipótesis inicial que $\Delta t \|\partial^{\Delta t} e_\nu^i\|$ sea de orden h^m para $i = 0, \dots, q-1$.

Pero la clave es deteminar cómo tratar con los valores iniciales (pues no tenemos una ecuación para ellos) para poder completar la ecuación para todo $q \leq k < 2q$. Una posibilidad sería considerar el lado derecho según los distintos valores de k y diferenciando los términos donde sí podemos usar la ecuación de los términos donde no podemos.

El objetivo es seguir trabajando para obtener alguna estimación de este tipo

$$\begin{aligned}
\|e_\nu^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 + \|\dot{e}_\nu^n\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 &\lesssim c \sum_{i=0}^{q-1} \|e_x^{n-1-i}\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_h^{n-1-i})}^2 + \Delta t \sum_{j=q}^n \|\dot{e}_\nu^j\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^j)}^2 \\
&\quad + \Delta t \sum_{j=q}^n \left(\|e_\nu^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 + \|e_x^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 + \|e_\nu^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{q-1} \left(\|e_\nu^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 + \|e_x^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 + \|e_\nu^i\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 \right) \\
&\quad + \Delta t \sum_{j=q}^n \left(\|d_x^n\|_{H^1(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 + \|d_\nu^n\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_*^n)}^2 \right),
\end{aligned} \tag{6.79}$$

donde lo importante es que se pueda absorber el término crítico $\Delta t \sum_{k=q+1}^n \|\nabla_{\tilde{\Gamma}_h^k} \dot{e}_\nu^k\|_{\tilde{\Gamma}_h^k}^2$ en el lado izquierdo y que del lado derecho sigan quedando términos controlables. Sin dudas este punto tiene aspectos importantes a seguir trabajando en vistas de entender más acerca de la estabilidad del esquema.

6.2.3.3. Acerca de la consistencia del esquema completamente discreto

En cuanto a la consistencia, también el punto más desafiante es obtener las estimaciones necesarias para d_{ν}^n y, probablemente, \dot{d}_{ν}^n en alguna norma conveniente. Las estimaciones de d_x^n , d_v^n y d_{κ}^n se pueden obtener de manera análoga a lo hecho en la Sección 11 de [Kovács et al. \(2019\)](#), así que las omitiremos y solo presentaremos algunos aspectos relevantes en el tratamiento del defecto temporal para el vector normal.

En primer lugar, recordamos la ecuación para d_{ν}^n de la Sección 6.2.2

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(d_{\nu}^n, \psi_h^*) &= m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\dot{\nu}_*^n, \psi_h^*) + a_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\nu_*^n, \psi_h^*) \\ &\quad - m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(f_1(\tilde{\nu}_*^n, \tilde{A}_*^n), \psi_h^*) - m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\tilde{\nu}_*^n), \psi_h^*), \end{aligned}$$

donde $\dot{\nu}_h^n$ representa la derivada material discreta dada por el método BDF.

Si sumamos y restamos los términos convenientes podemos llegar a que

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(d_{\nu}^n, \psi_h^*) &= m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\dot{\nu}_*^n - \dot{\nu}^*(t_n) + \dot{\nu}^*(t_n), \psi_h^*) - m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\dot{\nu}^*(t_n), \psi_h^*) + m_{\Gamma_*^n}(\dot{\nu}^*(t_n), \psi_h^*) \\ &\quad + a_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\nu_*^n, \psi_h^*) - a_{\Gamma_*^n}(\nu_*^n, \psi_h^*) + a_{\Gamma_*^n}(\nu_*^n, \psi_h^*) \\ &\quad - \left(m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(f_1(\tilde{\nu}_*^n, \tilde{A}_*^n), \psi_h^*) + m_{\Gamma_*^n}(f_1(\nu_*^n, A_*^n), \psi_h^*) \right) - m_{\Gamma_*^n}(f_1(\nu_*^n, A_*^n), \psi_h^*) \\ &\quad - m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\tilde{\nu}_*^n), \psi_h^*) + m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\nu_*^n), \psi_h^*) - m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\nu_*^n), \psi_h^*), \end{aligned}$$

Recordando que $\psi_h^* \notin \mathcal{O}(\tau)$, tal y como usamos en la Sección 5.2,

$$\begin{aligned} 0 &= -m_{\Gamma(t_n)}(\partial^{\bullet}\nu(t_n), (\psi_h^*)^{\Gamma}) - a_{\Gamma(t_n)}(\nu(t_n), (\psi_h^*)^{\Gamma}) \\ &\quad + m_{\Gamma(t_n)}(f_1(\nu(t_n), A(t_n)), (\psi_h^*)^{\Gamma}) + m_{\partial\Gamma_0}(g(\nu(t_n)), (\psi_h^*)^{\Gamma}) \\ &\quad + m_{\partial\Gamma_0}((\partial_{\mu}\nu(t_n) \cdot \tau)\tau, (\psi_h^*)^{\Gamma}). \end{aligned}$$

Si sumamos las dos ecuaciones tendremos, por un lado, cuando restemos las formas bilineales en Γ_*^n y las formas bilineales en $\Gamma(t_n)$, la ecuación del defecto semidiscreto a tiempo t_n . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(d_{\nu}^n, \psi_h^*) &= m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\dot{\nu}_*^n - \dot{\nu}^*(t_n), \psi_h^*) + m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\dot{\nu}^*(t_n), \psi_h^*) - m_{\Gamma_*^n}(\dot{\nu}^*(t_n), \psi_h^*) \\ &\quad + a_{\tilde{\Gamma}_*^n}(\nu_*^n, \psi_h^*) - a_{\Gamma_*^n}(\nu_*^n, \psi_h^*) + m_{\Gamma_*^n}(d_{\nu}(t_n), \psi_h^*) \\ &\quad - \left(m_{\tilde{\Gamma}_*^n}(f_1(\tilde{\nu}_*^n, \tilde{A}_*^n), \psi_h^*) + m_{\Gamma_*^n}(f_1(\nu_*^n, A_*^n), \psi_h^*) \right) \\ &\quad - \left(m_{\partial\Gamma_{h,0}}(g(\tilde{\nu}_*^n) - g(\nu_*^n), \psi_h^*) \right). \end{aligned}$$

A excepción del último par, el resto de los términos del lado derecho pueden ser estimados con estrategias similares a las utilizadas en ([Kovács et al., 2019](#), Sección 11). El primer término requiere estimar la diferencia entre la derivada temporal discreta y la continua, lo cual puede hacerse usando la representación del núcleo de Peano, o usando expansión por Taylor en torno a t_{n-i} . Luego, los términos correspondientes a diferencias de formas bilineales a o m pueden estimarse con los Lemas 38. Aquí el único punto a tratar con

cuidado debería ser el de la forma bilineal con gradientes, para que no quede del lado derecho la norma H^1 de la función test (que luego será reemplazada por d_{ν}^n).

Mientras que para los términos no lineales, tanto los que no tienen integrales de borde como los que sí la tienen requerirán el uso de la estimación del error de extrapolación, bajo condiciones de la solución suficientemente suave, para el cual se tiene que (Akrivis et al., 2017, (6.10) en Sección 6.)

$$\|\tilde{\nu}_*^n - \nu_*^n\|_{W^{1,s}(\Gamma_*^n)} \leq \Delta t^q, \quad (6.80)$$

la cual resulta de expandir por Taylor. Una desigualdad análoga será necesaria para el borde, donde también hay que analizar con cuidado la norma que se utiliza del lado derecho para la función test con el objetivo de acotar la norma L^2 para d_{ν}^n .

Para concluir esta sección de discusiones sobre los problemas abiertos relacionados con la consistencia, es importante destacar que, dado el enfoque utilizado para obtener la estabilidad del esquema semidiscreto, es altamente probable que sea necesario establecer estimaciones para las derivadas temporales discretas de los defectos d_{ν}^n .

Un primer paso en esta dirección consiste en analizar la aplicabilidad de algunas de las técnicas desarrolladas recientemente en Bullerjahn and Kovács (2025) para el esquema totalmente discreto en el problema de Cahn-Hilliard con condiciones de borde dinámicas, donde los autores proponen métodos novedosos para estimar dichas derivadas. No obstante, en ese trabajo, la superficie es un dato del problema, lo que implica que aún quedan aspectos por investigar en nuestro contexto.

Capítulo 7

Extensiones a otros problemas geométricos con condiciones de borde

En este Capítulo presentamos algunos avances en la aplicación de las técnicas desarrolladas en esta tesis para otros problemas geométricos con valores de borde. En particular, buscamos formulaciones variacionales continuas que sean factibles para cada problema analizando los principales desafíos y los problemas abiertos en cada caso.

7.1 Willmore con condiciones de borde Navier

El flujo de Willmore es la evolución de una superficie $\Gamma(t)$ cuando su velocidad normal V igual a

$$V = -\Delta_{\Gamma}\kappa + Q, \quad \text{en } \Gamma(t) \times [0, T), \quad (7.1)$$

donde si $Q = 0$ tenemos *Surface difussion flow* y si $Q = -\frac{1}{2}\kappa^3 + |A|^2\kappa$ tenemos *Willmore difussion flow*.

Notar que, a diferencia del problema de Flujo por Curvatura Media (FCM) ahora consideramos que se prescribe la velocidad normal V , en lugar del vector velocidad \mathbf{v} .

Consideraremos, como antes, que la superficie $\Gamma(t)$ es parametrizada por la función $\mathbf{X}(\cdot, t)$ sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y que el borde permanece fijo. A diferencia del problema FCM con borde Dirichlet, para Willmore existen dos tipos de condición Dirichlet: *clamped* y *Navier*. En la primera, se refiere a que el borde está fijo pero también el vector conormal $\boldsymbol{\mu}$ permanece fijo durante la evolución, ver por ejemplo [Schätzle \(2010\)](#). En la segunda, el borde permanece fijo y la curvatura media $\kappa = 0$ en el borde [Deckelnick and Grunau \(2009\)](#); [Menzel \(2021\)](#).

En esta Sección presentaremos algunas discusiones considerando condición de tipo Navier para el borde. En el dominio de referencia Ω esto conduce a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{X} &= \mathbf{v} \circ \mathbf{X} && \text{en } \Omega \times [0, T), \\ \mathbf{X}(t)|_{\partial\Omega} &= \mathbf{X}^0|_{\partial\Omega}, && \text{para } t > 0, \\ (\kappa \circ \mathbf{X})|_{\partial\Omega} &= 0, && \text{para } t > 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

que se escribe en $\Gamma(t)$, tal como en el caso de FCM,

$$\begin{aligned} \partial^\bullet \mathbf{x} &= \mathbf{v}, & \text{en } \Gamma(t) \times [0, T), \\ \mathbf{v}(t)|_{\partial\Gamma(t)} &= \mathbf{0}, & \text{para todo } t > 0. \\ \kappa(t) &\equiv 0, & \text{en } \partial\Gamma(t) \times (0, T). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Como el borde permanece fijo y $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, claramente tendremos que

$$V(t) \equiv 0, \quad \text{en } \partial\Gamma(t) \times (0, T). \quad (7.4)$$

Nuevamente tendremos que $\partial^\bullet f = \partial_t f$ en $\partial\Gamma(t)$, para cualquier f definida en $\partial\Gamma(t)$. Y que el vector tangente satisface

$$\partial^\bullet \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \text{en } \partial\Gamma(t) \quad \text{y para todo } t > 0, \quad (7.5)$$

7.1.1. Ecuaciones de evolución de las cantidades geométricas y condiciones de borde

En el interior de la superficie $\Gamma(t)$, la normal superficial $\boldsymbol{\nu}$ y la curvatura media κ satisfacen las siguientes ecuaciones de evolución (Kovács et al., 2021, Sección 2.2):

$$\begin{aligned} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} &= (-\Delta_\Gamma + (\kappa A - A^2))(\Delta_\Gamma \boldsymbol{\nu} + |A|^2 \boldsymbol{\nu}) + ((\nabla_\Gamma \kappa - |A|^2 \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla_\Gamma \kappa) \boldsymbol{\nu} \\ &\quad - 2 \operatorname{div}_\Gamma(A \nabla_\Gamma \kappa) \boldsymbol{\nu} - A^2 \nabla_\Gamma \kappa - \nabla_\Gamma Q, \\ \partial^\bullet \kappa &= -(\Delta_\Gamma + |A|^2)(\Delta_\Gamma \kappa + Q), \end{aligned} \quad (7.6)$$

Introduciendo una nueva variable $z = \Delta_\Gamma \boldsymbol{\nu} + |A|^2 \boldsymbol{\nu}$, y utilizando que $V = \Delta_\Gamma \kappa + Q$, obtenemos una formulación equivalente en términos de z y v ,

$$\begin{aligned} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} &= -\Delta_\Gamma z + (\kappa A - A^2)z + ((\nabla_\Gamma \kappa - |A|^2 \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla_\Gamma \kappa) \boldsymbol{\nu} \\ &\quad - 2 \operatorname{div}_\Gamma(A \nabla_\Gamma \kappa) \boldsymbol{\nu} - A^2 \nabla_\Gamma \kappa - \nabla_\Gamma Q, \\ \partial^\bullet \kappa &= -\Delta_\Gamma V - |A|^2 V. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Hasta donde sabemos, no hemos encontrado referencias en la literatura sobre el comportamiento del vector normal en el borde para el caso Navier, salvo que

$$\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \boldsymbol{\tau}(t) = 0, \quad \text{en } \partial\Gamma(t) \times [0, T). \quad (7.8)$$

Para decir algo sobre el comportamiento de la variable auxiliar z en $\partial\Gamma_0$, vamos a recordar que $\Delta_\Gamma \boldsymbol{\nu} + |A|^2 \boldsymbol{\nu} = \nabla_\Gamma \kappa$, luego también tenemos $z = \nabla_\Gamma \kappa$. Esta observación es importante para demostrar que

$$z(t) \cdot \boldsymbol{\tau}(t) = 0, \quad \text{en } \partial\Gamma(t) \times [0, T). \quad (7.9)$$

Consideramos la base ortonormal positivamente orientada de \mathbb{R}^3 formada por $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}\}$, con $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}$ el vector conormal a $\Gamma(t)$ en $\partial\Gamma(t)$. Entonces, en $\partial\Gamma_0$, tenemos

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{z} = (\nabla_\Gamma \mathbf{z} \boldsymbol{\mu}) \cdot \boldsymbol{\mu} + (\nabla_\Gamma \mathbf{z} \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\tau} = (\nabla_\Gamma \mathbf{z} \boldsymbol{\mu}) \cdot \boldsymbol{\mu} + \partial_s \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (7.10)$$

debido a que $\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, $\partial_s \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{z} \cdot \partial_s \boldsymbol{\tau}$. Además, $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{z} = \operatorname{div}_\Gamma(\nabla_\Gamma \kappa) = \Delta_\Gamma \kappa = V - Q$. Entonces, tenemos

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{z} = \operatorname{div}_\Gamma(\nabla_\Gamma \kappa) = \Delta_\Gamma \kappa = V - \left(\frac{1}{3}\kappa^3 + |A|^2 \kappa\right) = 0 \quad \text{en } \partial\Gamma(t),$$

para todo $t \in [0, T]$ gracias a la condición de tipo Navier que asegura $\kappa = 0$ on $\partial\Gamma_0$.

Entonces, tenemos el siguiente resultado para $\partial_\mu \mathbf{z}$ y $\partial_\mu \boldsymbol{\nu}$ on $\partial\Gamma_0$. Donde la condición para $\partial_\mu \boldsymbol{\nu}$ se obtiene con un procedimiento análogo al del Lema 7.

Lema 47. *Para una superficie $\Gamma(t)$ que se mueve bajo el flujo de Willmore, con condiciones de borde Navier, tenemos que para todo $x \in \partial\Gamma(t)$*

$$\begin{aligned} \partial_\mu \boldsymbol{\nu} &= (\boldsymbol{\kappa}_\partial \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\mu} + (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} & \text{en } \partial\Gamma(t), \\ \partial_\mu \mathbf{z} &= -(\boldsymbol{\kappa}_\partial \cdot \mathbf{z}) \boldsymbol{\mu} + (\partial_\mu \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} & \text{en } \partial\Gamma(t). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Y además,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} &= (\boldsymbol{\kappa}_\partial \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\mu}) & \text{para } \boldsymbol{\psi} \in N_x \partial\Gamma(t) \\ \partial_\mu \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\zeta} &= (-\boldsymbol{\kappa}_\partial \cdot \mathbf{z})(\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\mu}) & \text{para } \boldsymbol{\zeta} \in N_x \partial\Gamma(t). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Donde $\boldsymbol{\kappa}_\partial := \partial_s \boldsymbol{\tau}$ es el vector de curvatura de $\partial\Gamma(t)$, y $N_x(\partial\Gamma(t)) = \boldsymbol{\tau}^\perp$ es el espacio de vectores ortogonales a $\boldsymbol{\tau}$, que es el vector unitario tangente a $\partial\Gamma(t)$ en x .

Las relaciones obtenidas en el lema anterior serían un primer paso en una adaptación de la formulación variacional propuesta en (Kovács et al., 2021, Sección 2.3).

7.1.2. Formulación débil propuesta

Primero, para la parametrización, la velocidad, la velocidad normal y la curvatura media consideraremos espacios de Sobolev usuales, atendiendo a las respectivas condiciones de borde Dirichlet para todas estas variables. Para el vector normal y la nueva variable \mathbf{z} se pueden considerar los espacios $\mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ tal y como lo hicimos en FCM.

Para la formulación débil, consideramos (7.1), el sistema de ecuaciones parabólicas semilineales (7.6) y la EDO (7.2), junto con las condiciones de contorno de (7.3) y (7.11).

Llegamos así a la siguiente formulación débil del problema, que sería la base de una discretización numérica.

Problema 7. Determinar $\Gamma(t)$, una superficie suficientemente suave descrita por un movimiento $\mathbf{X}(t) \in H^1(\Omega)^3$, con $V(t) \in H_0^1(\Gamma(t))^3$, $\kappa(t) \in H_0^1(\Gamma(t))$ con $\partial^\bullet \kappa(t) \in L_0^2(\Gamma(t))$ y $\boldsymbol{\nu}(t) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ con $\partial^\bullet \boldsymbol{\nu}(t) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ tales que:

$$\partial_t \mathbf{X} = \mathbf{v} \circ \mathbf{X} \quad \text{en } \Omega, \quad (7.13)$$

$$\mathbf{v} = v \boldsymbol{\nu}, \quad \text{on } \Gamma(t), \quad (7.14)$$

$$\int_{\Gamma(t)} \partial^\bullet \kappa \eta - \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma V \cdot \nabla_\Gamma \eta = - \int_{\Gamma(t)} |A|^2 V \eta, \quad (7.15)$$

$$\int_{\Gamma(t)} V \phi + \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma \kappa \cdot \nabla_\Gamma \phi = \int_{\Gamma(t)} |A|^2 V \phi, \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} - \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma \mathbf{z} : \nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi} &= - \int_{\partial\Gamma(t)} (\boldsymbol{\kappa}_{\partial\Gamma_0} \cdot \mathbf{z})(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\psi}) \\ &+ \int_{\Gamma(t)} (\kappa A - A^2) \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\Gamma(t)} (|\nabla_\Gamma \kappa|^2 \boldsymbol{\nu} + A^2 \nabla_\Gamma \kappa) \boldsymbol{\psi} \\ &+ \int_{\Gamma(t)} Q \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\psi} - \int_{\Gamma(t)} \kappa \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\int_{\Gamma(t)} \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\zeta} + \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} : \nabla_\Gamma \boldsymbol{\zeta} = \int_{\partial\Gamma(t)} (\boldsymbol{\kappa}_{\partial\Gamma_0} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\zeta}) + \int_{\Gamma(t)} |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \quad (7.18)$$

$\forall \eta, \phi \in H_0^1(\Gamma(t)), \forall \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$, y para casi todo $t \in [0, T]$.

Las condiciones iniciales serían

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad \text{on } \Omega, \quad \kappa(0) = \kappa_0, \quad \text{on } \Gamma_0, \quad \boldsymbol{\nu}(0) = \boldsymbol{\nu}_0, \quad \text{on } \Gamma_0,$$

donde \mathbf{X}_0, κ_0 y $\boldsymbol{\nu}_0$ son, respectivamente, el mapeo inicial que define Γ_0 , la curvatura media y el vector normal de Γ_0 .

7.1.3. Principales desafíos y problemas abiertos

Al proponer esa formulación y analizar el esquema semidiscreto resultante, si bien hay algunos aspectos del problema de FCM que pueden reutilizarse, como por ejemplo la definición de una proyección de tipo Ritz no lineal no solo para $\boldsymbol{\nu}$, sino también para la variable auxiliar \mathbf{z} , lo cual podría ser de utilidad para lograr probar la consistencia del método. Existen aún desafíos en cuanto a la estabilidad. Así como en FCM la principal dificultad estuvo en entender cómo lidiar con el término crítico que aparece del lado derecho $\|\partial^\bullet e_\nu\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}$. En este problema el desafío es entender cómo proceder con un nuevo término crítico que tiene la misma naturaleza: $\|\partial^\bullet e_z\|_{L^2(\partial\Gamma_{h,0})}$.

La estructura antisimétrica de la formulación débil, que se hereda al esquema semidiscreto, y la cual se explota en Kovács et al. (2021) para probar la estabilidad del método para superficies sin borde mediante múltiples estimaciones de energía, en el caso del problema con borde presenta un desafío. El cual se obtiene al intentar utilizar técnicas similares a las del Lema 33 para lidiar con este nuevo término crítico, la estructura antisimétrica más

la nueva condición de borde para la variable \mathbf{z} representan una limitante para esa técnica y requieren de nuevas formas de abordarlas.

Esta primera propuesta para un método numérico en el caso de Willmore con borde Navier, se basa en adaptar el método mixto propuesto en [Kovács et al. \(2021\)](#). Así que una pregunta abierta aún es entender si en la semi-discretización los espacios splines tienen algo más que aportar en el sentido de, quizás, no requerir una formulación mixta para obtener un método convergente.

7.2 Flujo por Curvatura Media con borde Neumann

Consideramos ahora la misma definición de la superficie $\Gamma(t)$ que en la Sección 2.1. El análisis para este problema fue iniciado por Stahl en [Stahl \(1996b,a\)](#).

Consideremos el flujo de curvatura media de la superficie $\Gamma(t)$, tal que se prescribe una condición de borde Neumann en $\partial\Gamma(t)$, es decir, se prescribe un ángulo de contacto vertical entre la normal a la superficie $\Gamma(t)$ y una superficie fija dada Σ .

La evolución de la superficie se describe entonces mediante

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{X} &= \mathbf{v} \circ \mathbf{X} && \text{en } \Omega \times [0, T) \\ v &= -\kappa \boldsymbol{\nu}, && \text{en } \Gamma(t), \\ \partial\Gamma_0 &\subset \Sigma, && \text{para todo } 0 \leq t \leq T, \\ \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma &= 0, && \text{en } \partial\Gamma_0, \end{aligned} \tag{7.19}$$

donde ahora $\boldsymbol{\nu}_\Sigma$ denota el vector normal unitario de Σ .

Del mismo modo, como en [Stahl \(1996b,a\)](#) utilizaremos la convención para denotar cantidades relacionadas con la superficie ambiente Σ por un índice inferior Σ , por ejemplo la segunda forma fundamental de Σ se denota por A^Σ .

7.2.1. Ecuaciones de evolución de las magnitudes geométricas y sus condiciones de borde

En el interior de la superficie $\Gamma(t)$, la normal superficial $\boldsymbol{\nu}$ y la curvatura media κ satisfacen las mismas ecuaciones de evolución que en el problema Dirichlet.

$$\begin{aligned} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} &= \Delta_\Gamma \boldsymbol{\nu} + |A|^2 \boldsymbol{\nu}, \\ \partial^\bullet \kappa &= \Delta_\Gamma \kappa + |A|^2 \kappa, \end{aligned} \quad \text{on } \Gamma(t), \tag{7.20}$$

considerado junto con (7.19). En [Stahl \(1996a\)](#) se demostró que el sistema anterior está dotado de las siguientes condiciones de contorno, respectivamente, de tipo Dirichlet y

Neumann:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma = 0 \quad \text{and} \quad \nabla_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nu} + \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma = 0, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}_\Sigma} \kappa = -\nabla_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad \text{on } \partial\Gamma(t), \quad (7.21)$$

donde $x \in T_p\Gamma(t) \cap T_p\Sigma$, y donde $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Sigma}$ denota la derivada co-normal de la superficie, es decir, $\partial_{\boldsymbol{\nu}_\Sigma} \kappa = \nabla_{\Gamma(t)} \kappa \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma$, y A^Σ es la segunda forma fundamental de la superficie ambiente Σ .

Es crucial tener en cuenta que debido a la suposición respecto de un ángulo vertical de contacto, se tendrá que

$$\text{el vector co-normal } \boldsymbol{\mu} \text{ de } \Gamma(t) \text{ y el vector normal de } \Sigma \text{ coinciden, esto es } \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}_\Sigma, \quad (7.22)$$

en los puntos de contacto, esto es en $\partial\Gamma(t)$ para todo t . Esto implica entonces, en la notación que seguimos en esta tesis, que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0 \quad \text{and} \quad \nabla_\Sigma \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nu} + \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0, \\ \partial_\mu \kappa = \nabla_\Sigma \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad \text{on } \partial\Gamma(t), \quad (7.23)$$

siendo ahora $\boldsymbol{\mu}$ un dato del problema. Entonces, tenemos el siguiente resultado que será clave para la formulación débil propuesta

Lema 48. *Sea $\Gamma(t)$ una superficie que evoluciona por el flujo de curvatura media, con borde fijo, para $x \in \partial\Gamma(t)$ se tiene que*

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} = (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\mu} - (\partial_s \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\tau} \quad \text{en } \partial\Gamma(t), \quad (7.24)$$

y, en consecuencia, también tenemos

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} = -(\partial_s \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\tau} \quad \text{para } \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\mu}). \quad (7.25)$$

Demostración. Descomponiendo como en (2.10) tenemos

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} = (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\mu} + (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}, \quad (7.26)$$

y usando que $\nabla_\Sigma \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nu} + \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0$ se tiene que $\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{w} = -\nabla_\Sigma \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nu}$ (lo que nos permite pasar de un gradiente del vector normal al gradiente de $\boldsymbol{\mu}$ como vector normal de Σ y eso es un dato del problema). Podemos entonces tener que

$$\partial_\mu \boldsymbol{\nu} = (\partial_\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\mu} - (\nabla_\Sigma \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\tau},$$

y eso nos da (7.24) usando que $\partial_s \boldsymbol{\mu} = -\nabla_\Sigma \boldsymbol{\mu}$.

La otra parte se deduce de manera análoga a (2.9) considerando ahora funciones test en el espacio de funciones ortogonales a $\boldsymbol{\mu}$. \square

Por otra parte ahora no se cumple que $\partial^\bullet f = \partial_t f$ pues la velocidad en el borde no es cero. Aunque sí podemos afirmar que la velocidad del borde en la dirección conormal debe ser cero, esto es,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0,$$

pues $\partial\Gamma_0 \subset \Sigma$ para todo $t > 0$.

7.2.2. Formulación débil propuesta

Multiplicando por funciones test e integrando por partes, como antes, lo que cambiará de la formulación débil serán las ecuaciones para $\boldsymbol{\nu}$ y para κ

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} : \nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi} &= \int_{\Gamma(t)} |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} - \int_{\partial\Gamma_0} (\partial_s \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\psi}) \\ \int_{\Gamma(t)} \partial^\bullet \kappa \eta + \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma \kappa \cdot \nabla_\Gamma \eta &= \int_{\Gamma(t)} |A|^2 \kappa \eta + \int_{\partial\Gamma(t)} A^\Sigma(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) \eta, \end{aligned} \quad (7.27)$$

siendo como, antes $A = \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}$, y $A^\Sigma = \nabla_\Sigma \boldsymbol{\mu}$. Entonces tendremos

Problema 8. *Determinar $\Gamma(t)$, una superficie suficientemente suave descrita por un movimiento $\mathbf{X}(t) \in H^1(\Omega)^3$, con $\mathbf{v}(t) \in H^1(\Gamma(t))^3$, $\kappa(t) \in H^1(\Gamma(t))$ y $\boldsymbol{\nu}(t) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\mu})$ tales que:*

$$\partial_t \mathbf{X} = \mathbf{v} \circ \mathbf{X} \quad \text{en } \Omega, \quad (7.28)$$

$$\mathbf{v} = -\kappa \boldsymbol{\nu}, \quad \text{on } \Gamma(t), \quad (7.29)$$

$$\int_{\Gamma(t)} \partial^\bullet \kappa \eta + \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma \kappa \cdot \nabla_\Gamma \eta = \int_{\Gamma(t)} |A|^2 \kappa \eta, + \int_{\partial\Gamma(t)} A^\Sigma(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) \eta \quad (7.30)$$

$$\int_{\Gamma(t)} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\Gamma(t)} \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} : \nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi} = \int_{\Gamma(t)} |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} - \int_{\partial\Gamma_0} (\partial_s \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\psi}), \quad (7.31)$$

$\forall \eta \in H^1(\Gamma(t))$, $\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{\mu})$, y para casi todo $t \in [0, T]$. Las condiciones iniciales son

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad \text{en } \Omega, \quad \kappa(0) = \kappa_0, \quad \text{en } \Gamma_0, \quad \boldsymbol{\nu}(0) = \boldsymbol{\nu}_0, \quad \text{en } \Gamma_0,$$

donde \mathbf{X}_0 , κ_0 y $\boldsymbol{\nu}_0$ son, respectivamente, el mapeo inicial que define Γ_0 , la curvatura media y el vector normal de Γ_0 .

7.2.3. Principales desafíos y problemas abiertos

Este problema presenta nuevos desafíos, por un lado, en la definición adecuada de una proyección de tipo Ritz para el vector normal y la curvatura media. Pero también, el hecho de que ahora la velocidad no es cero en el borde, trae un nuevo término crítico, correspondiente a la norma $\|e_x\|_{H^1(\partial\Gamma_0^*)}$. Así como también la consideración de errores geométricos al aproximar el borde. Sin dudas, estos aspectos requerirán un análisis exhaustivo además nuevas herramientas para entender y seguir en la búsqueda de un algoritmo convergente.

Conclusiones generales

En esta tesis hemos presentado un método numérico, bajo un enfoque paramétrico, para el problema de flujo por curvatura media en superficies con borde. Hemos considerado, en particular, el caso de borde Dirichlet con dato independiente del tiempo; esto implica que la superficie inicial evoluciona siguiendo el flujo por curvatura media, mientras que su borde permanece constante a lo largo de la evolución.

Si bien formulamos el método numérico y su correspondiente análisis en el marco del análisis isogeométrico (IGA)—mediante la definición y utilización de elementos isogeométricos evolutivos—, es importante señalar que los resultados obtenidos no se restringen exclusivamente a este contexto. En efecto, las demostraciones desarrolladas en esta tesis pueden extenderse al empleo de elementos finitos evolutivos, ya que en todos los resultados presentados consideramos espacios spline globalmente C^ℓ , con $\ell \geq 0$.

En esta línea, dejamos abiertas diversas perspectivas de trabajo futuro. Por un lado, podremos explorar posibles mejoras en las técnicas cuando se utilicen elementos finitos, particularmente aprovechando las ventajas que ofrece la función distancia orientada. Por otro, resulta de gran interés profundizar en el estudio de dicha función en el contexto de espacios spline, analizando su potencial como herramienta de adaptación.

Tal como mencionamos en la introducción, debido a la inclusión de la ecuación de evolución del vector normal (2.5), en la formulación débil obtenemos inicialmente lo siguiente:

$$\int_{\Gamma} \partial^\bullet \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} : \nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\psi} = \int_{\Gamma} |A|^2 \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\partial\Gamma_0} \boldsymbol{\psi} \cdot \partial_{\mu} \boldsymbol{\nu},$$

con lo cual, una parte fundamental de esta tesis consistió en establecer una condición de borde adecuada para la derivada del vector normal en la dirección conormal, así como determinar el espacio adecuado para buscar la solución. Esto nos llevó a introducir los espacios $\mathcal{O}(\boldsymbol{\tau})$ y a determinar, en el Lema 7, cuál es el comportamiento de la derivada conormal del vector normal a la superficie en el borde, es decir, el vector $\partial_{\mu} \boldsymbol{\nu}$. De este modo, en el Capítulo 2 establecemos los principales resultados que constituyen los fundamentos teóricos para el esquema propuesto.

Por otra parte, el Capítulo 3 se dedicó a describir el procedimiento mediante el cual aproximamos la superficie continua, así como la forma de comparar funciones definidas sobre distintas superficies. Para abordar este último aspecto, introdujimos un *lift* basado en parametrizaciones, sin recurrir a la función distancia orientada. Si bien este enfoque no es el más habitual en la literatura sobre análisis numérico de problemas en superficies, resulta natural dentro del contexto del análisis isogeométrico, donde la parametrización geométrica ocupa un rol central.

Asimismo, obtuvimos estimaciones de los errores geométricos; por ejemplo, al aproximar

$$\int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma}(\eta^*)^{\Gamma} \cdot \nabla_{\Gamma^*}(\phi^*)^{\Gamma} \quad \text{por} \quad \int_{\Gamma^*} \nabla_{\Gamma^*}\eta^* \cdot \nabla_{\Gamma^*}\phi^*,$$

donde los órdenes de convergencia resultaron coherentes con el uso de *lifts* de este tipo y con resultados previos para problemas estacionarios, como los presentados en [Bonito et al. \(2020\)](#).

En el Capítulo 4, definimos primero una proyección lineal de tipo Ritz con traza cero y su correspondiente derivada material, obteniendo órdenes de error óptimos de aproximación en normas H^1 . Luego, introducimos la definición de un nuevo espacio discreto $\mathcal{O}_h(\tau_h)$ y analizamos sus propiedades de aproximación. Además, definimos otro operador de tipo Ritz, esta vez no lineal, el cual es clave para la obtención de órdenes de consistencia óptimos en la convergencia del esquema semidiscreto.

Dicho operador sigue el espíritu de los operadores usados en [Kovács et al. \(2021\)](#), pero presenta un carácter no lineal y está definido para proyectar funciones $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\tau)$ sobre $\mathcal{O}_h(\tau_h)$. Dado que $\mathcal{O}_h(\tau_h) \not\subset \mathcal{O}(\tau)$, para obtener las estimaciones de aproximación definimos una función auxiliar $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Gamma)$ con un valor de borde conveniente, la cual se encuentra “cerca” de la función $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(\tau)$ en el sentido de que

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\partial\Gamma_0)} = \mathcal{O}(h^p) \quad \text{y} \quad \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\partial\Gamma_0)} = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Luego, mediante las propiedades del cuasi-interpolante, pudimos obtener una aproximación discreta adecuada para realizar la estimación del error, tanto para la proyección de Ritz $\mathcal{R}_{\Gamma}\mathbf{u}$ como para su derivada material $\partial^{\bullet}\mathcal{R}_{\Gamma}\mathbf{u}$.

Finalmente, en el Capítulo 5 presentamos el resultado principal de esta tesis: la convergencia del esquema semidiscreto propuesto (ver Teorema 3), asumiendo que la solución continua es suficientemente suave y que se utilizan espacios spline de grado $p \geq 2$.

Para ello, establecemos primero la consistencia del método en la Proposición 6, la cual se obtiene combinando los resultados sobre errores geométricos de la Sección 3.4 con las propiedades de las diferentes proyecciones de tipo Ritz y de los cuasi-interpolantes. Cabe destacar que los errores geométricos intervienen exclusivamente en el análisis de consistencia.

El último resultado clave para la convergencia es el que presentamos en la Proposición 7 de la Sección 5.5. Para esta demostración resultaron fundamentales los hallazgos que nos permiten relacionar superficies discretas en la Sección 5.4, así como las estimaciones de energía obtenidas en los Lemas 31, 32 y 33.

Así, combinando el estudio de la consistencia y la estabilidad del esquema semidiscreto, hemos obtenido estimaciones de error óptimas en norma H^1 para la posición, la velocidad, la normal y la curvatura media. En consecuencia, esta tesis constituye la primera prueba de convergencia para un esquema numérico semidiscreto para el flujo por curvatura media

en el caso de superficies con borde fijo, siendo además la primera prueba para un método de este tipo en el contexto del análisis isogeométrico.

Posteriormente, en el Capítulo 6 presentamos experimentos numéricos que reflejan el funcionamiento del método usando para la discretización temporal Fórmulas BDF de orden q . Se presentan estimaciones numéricas que permiten contrastar con lo existente en los resultados teóricos. Se muestra el funcionamiento del método para una superficie inicial que cumple las hipótesis de regularidad requeridas para obtener el orden de convergencia presentao, así como también para el caso donde las mismas no se satisfacen y aún así el método se comporta con el orden esperado. Por otra parte, también realizamos avances en el estudio teórico de la convergencia del mismo, presentando herramientas necesarias para realizarlo, analizando los obstáculos encontrados para aplicar las técnicas existentes y estableciendo posibles estrategias para un trabajo futuro.

Para finalizar, en el Capítulo 7 presentamos avances en la aplicación de las técnicas desarrolladas en esta tesis a otros problemas gemétricos con borde, como el problema de Willmore con condición de borde Navier y el problema de flujo por curvatura media con condición de borde Neumann. Proponemos formulaciones variacionales continuas en cada caso y analizamos los puntos donde se pueden usar técnicas presentadas en esta tesis, así como destacamos los desafíos que serán objeto de investigaciones futuras.

Bibliografía

- Agricola, I. and Friedrich, T. (2002). *Global Analysis: Differential Forms in Analysis, Geometry and Physics. Graduate Studies in Mathematics*, volume 52. Cambridge university press, Providence, RI.
- Akrivis, G., Feischl, M., Kovács, B., and Lubich, C. (2021). Higher-order linearly implicit full discretization of the landau–lifshitz–gilbert equation. *Mathematics of Computation*, 90(329):995–1038.
- Akrivis, G. and Katsoprinakis, E. (2015). Backward difference formulae: New multipliers and stability properties for parabolic equations. *Math. Comput.*, 85:2195–2216.
- Akrivis, G., Li, B., and Lubich, C. (2017). Combining maximal regularity and energy estimates for time discretizations of quasilinear parabolic equations. *Mathematics of Computation*, 86:1527–1552.
- Akrivis, G. and Lubich, C. (2015). Fully implicit, linearly implicit and implicit–explicit backward difference formulae for quasi-linear parabolic equations. *Numerische Mathematik*, 131:713–735.
- Almgren, F. and Taylor, J. E. (1995). Optimal geometry in equilibrium and growth. *Fractals*, 3(4):713–723. Symposium in Honor of Benoit Mandelbrot (Curaçao, 1995).
- Almgren, F., Taylor, J. E., and Wang, L. (1993). Curvature-driven flows: a variational approach. *SIAM J. Control Optim.*, 31(2):387–438.
- Alphonse, A., Caetano, D., Djurdjevac, A., and Elliott, C. M. (2023). Function spaces, time derivatives and compactness for evolving families of banach spaces with applications to PDEs. *J. Differ. Equ.*, 353:268–338.
- Alphonse, A., Elliott, C. M., and Stinner, B. (2015). An abstract framework for parabolic PDEs on evolving spaces. *Port. Math.*, 72(1):1–46.
- Bai, G., Hu, J., and Li, B. (2024). A convergent evolving finite element method with artificial tangential motion for surface evolution under a prescribed velocity field. *SIAM J. Numer. Anal.*, 62(5):2172–2195.
- Bai, G. and Li, B. (2024). A new approach to the analysis of parametric finite element approximations to mean curvature flow. *Found. Comput. Math.*, 24(5):1673–1737.
- Bänsch, E., Deckelnick, K., Garcke, H., and Pozzi, P. (2023). *Interfaces: Modeling, analysis, numerics*. Springer Nature Switzerland, Cham.

- Barrett, J. W., Garcke, H., and Nürnberg, R. (2007). A parametric finite element method for fourth order geometric evolution equations. *Journal of Computational Physics*, 222(1):441–467.
- Barrett, J. W., Garcke, H., and Nürnberg, R. (2008). On the parametric finite element approximation of evolving hypersurfaces in \mathbb{R}^3 . *Journal of Computational Physics*, 227(9):4281–4307.
- Barrett, J. W., Garcke, H., and Nürnberg, R. (2020). Chapter 4 - parametric finite element approximations of curvature-driven interface evolutions. In Bonito, A. and Nochetto, R. H., editors, *Geometric Partial Differential Equations - Part I*, volume 21 of *Handbook of Numerical Analysis*, pages 275–423. Elsevier.
- Bartezzaghi, A., Dedè, L., and Quarteroni, A. (2016). Isogeometric analysis of geometric partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 311:625–647.
- Bazilevs, Y., Beirão da Veiga, L., Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., and Sangalli, G. (2006). Isogeometric analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16(07):1031–1090.
- Bonito, A., Demlow, A., and Nochetto, R. H. (2020). Finite element methods for the laplace-beltrami operator. In Bonito, A. and Nochetto, R. H., editors, *Geometric Partial Differential Equations - Part I*, volume 21 of *Handbook of Numerical Analysis*, pages 1–103. Elsevier.
- Brenner, S. C. and Scott, L. R. (2002). *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition.
- Bullerjahn, N. and Kovács, B. (2025). Error estimates for full discretization of cahn–hilliard equation with dynamic boundary conditions.
- Chicco Ruiz, A. L., Garau, E., and Pauletti, M. S. (2019). A numerical scheme for mean curvature flow. In *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI)*, volume 7. MACI. Proceedings of the conference.
- Cicuta, P., Keller, S., and Veatch, S. (2007). Diffusion of liquid domains in lipid bilayer membranes. *Journal of Physical Chemistry B*, 111(13):3328–3331. cited By (since 1996)90.
- Clarenz, U., Diewald, U., Dziuk, G., Rumpf, M., and Rusu, R. (2004). A finite element method for surface restoration with smooth boundary conditions. *Comput. Aided Geom. Design*, 21(5):427–445.
- da Veiga, L. B., Buffa, A., Sangalli, G., and Vázquez, R. (2014). Mathematical analysis of variational isogeometric methods. *Acta Numerica*, 23:157–287.

- Dahlquist, G. (1978). G-stability is equivalent to A-stability. *BIT*, 18(4):384–401.
- De Boor, C. (1978). *A Practical Guide to Splines*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York.
- Deckelnick, K. and Grunau, H.-C. (2009). A Navier boundary value problem for Willmore surfaces of revolution. *Analysis*, 29:229–258.
- Demlow, A. (2009). Higher-order finite element methods and pointwise error estimates for elliptic problems on surfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(2):805–827.
- Douglas, Jr, J. and Dupont, T. (1973). Galerkin methods for parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *Numerische Mathematik. (Heidelb.)*, 20(3):213–237.
- Droske, M. and Bertozzi, A. (2010). Higher-order feature-preserving geometric regularization. *SIAM J. Imaging Sci.*, 3(1):21–51.
- Dziuk, G. (1988). Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces. In *Partial differential equations and calculus of variations*, volume 1357 of *Lecture Notes in Math.*, pages 142–155. Springer, Berlin.
- Dziuk, G. (1990). An algorithm for evolutionary surfaces. *Numerische Mathematik.*, 58(1):603–611.
- Dziuk, G. and Elliott, C. M. (2007). Finite elements on evolving surfaces. *IMA J. Numer. Anal.*, 27(2):262–292.
- Dziuk, G., Kröner, D., and Müller, T. (2013). Scalar conservation laws on moving hypersurfaces. *Interfaces Free Bound.*, 15(2):203–236.
- Elliott, C. M. and Ranner, T. (2020). A unified theory for continuous-in-time evolving finite element space approximations to partial differential equations in evolving domains. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 41(3):1696–1845.
- Faugeras, O. and Keriven, R. (1998). Variational principles, surface evolution, pdes, level set methods, and the stereo problem. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 7(3):336–344.
- Gilbarg, D. and Trudinger, N. (1983). *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition.
- Hairer, E. and Wanner, G. (1996). *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2nd edition.

- Hebey, E. and Robert, F. (2008). Sobolev spaces on manifolds. In *Handbook of Global Analysis*, pages 375–415. Elsevier.
- Helfrich, W. (1973). Elastic properties of lipid bilayers - theory and possible experiments. *Zeitschrift Fur Naturforschung C-A Journal Of Biosciences*, 28:693.
- Hu, J. and Li, B. (2022). Evolving finite element methods with an artificial tangential velocity for mean curvature flow and willmore flow. *Numerische Mathematik*, 152.
- Huisken, G. (1984). Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *Journal of Differential Geometry*, 20(1):237 – 266.
- Jenkins, J. (1977). Static equilibrium configurations of a model red blood cell. *J. Math. Biology*, 4(2):150–169.
- Kimmel, R. and Bruckstein, A. M. (2001). Regularized laplacian zero crossings as optimal edge integrators. *International Journal of Computer Vision*, 53:225–243.
- Kovács, B. and Guerra, C. A. P. (2015). Error analysis for full discretizations of quasilinear parabolic problems on evolving surfaces. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 32.
- Kovács, B., Li, B., and Lubich, C. (2021). A convergent evolving finite element algorithm for willmore flow of closed surfaces. *Numerische Mathematik*, 149(3):595–643.
- Kovács, B. (2017). High-order evolving surface finite element method for parabolic problems on evolving surfaces. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 38(1):430–459.
- Kovács, B., Li, B., and Lubich, C. (2019). A convergent evolving finite element algorithm for mean curvature flow of closed surfaces. *Numerische Mathematik.*, 143(4):797–853.
- Kovács, B., Li, B., Lubich, C., and Power Guerra, C. A. (2017). Convergence of finite elements on an evolving surface driven by diffusion on the surface. *Numerische Mathematik.*, 137:643–689.
- Laradji, M. and Mouritsen, O. G. (2000). Elastic properties of surfactant monolayers at liquid–liquid interfaces: A molecular dynamics study. *The Journal of Chemical Physics*, 112(19):8621–8630.
- Lee, J. M. (2012). *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 2 edition.
- Leventon, M., Faugeras, O., Grimson, W. E. L., and Wells, W. (2000). Level set based segmentation with intensity and curvature priors. In *Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis, 2000. Proceedings. IEEE Workshop on*, pages 4–11.

- Li, B. (2021). Convergence of Dziuk's semidiscrete finite element method for mean curvature flow of closed surfaces with high-order finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 59(3):1592–1617.
- Lubich, C., Mansour, D., and Venkataraman, C. (2013). Backward difference time discretization of parabolic differential equations on evolving surfaces. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 33(4):1365–1385.
- Lyche, T., Manni, C., and Speleers, H. (2018). Foundations of spline theory: B-splines, spline approximation, and hierarchical refinement. In *Lecture Notes in Mathematics*, Lecture Notes in Mathematics, pages 1–76. Springer International Publishing, Cham.
- McFadden, G. B., Wheeler, A. A., Braun, R. J., Coriell, S. R., and Sekerka, R. F. (1993). Phase-field models for anisotropic interfaces. *Phys. Rev. E (3)*, 48(3):2016–2024.
- Melenkevitz, J. and Javadpour, S. H. (1997). Phase separation dynamics in mixtures containing surfactants. *The Journal of Chemical Physics*, 107(2):623–629.
- Menzel, J. (2021). Boundary value problems for evolutions of willmore type.
- Nevanlinna, O. and Odeh, F. (1981). Multiplier techniques for linear multistep methods. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 3(4):377–423.
- Schätzle, R. (2010). The willmore boundary problem. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 37(3-4):275–302.
- Schumaker, L. (2007). *Spline functions: basic theory*. Cambridge University Press.
- Seifert, U. (1997). Configurations of fluid membranes and vesicles. *Advances in Physics*, 46(1):13–137.
- Seifert, U., Berndl, K., and Lipowsky, R. (1991). Shape transformations of vesicles: Phase diagram for spontaneous- curvature and bilayer-coupling models. *Phys. Rev. A*, 44(2):1182–1202.
- Stahl, A. (1996a). Convergence of solutions to the mean curvature flow with a neumann boundary condition. *Calculus of Variations*, 4.
- Stahl, A. (1996b). Regularity estimates for solutions of the mean curvature flow with a neumann boundary condition. *Calculus of Variations*, 4.
- Stone, A. (1996). A boundary regularity theorem for mean curvature flow. *Journal of Differential Geometry*, 44(2):371 – 434.
- Tagliabue, A., Dedè, L., and Quarteroni, A. (2014). Isogeometric analysis and error estimates for high order partial differential equations in fluid dynamics. *Computers and Fluids*, 102:277–303.

- Taylor, J. (1992). H —mean curvature and weighted mean curvature. *Acta Metallurgica et Materialia*, 40(7):1475 – 1485.
- Taylor, J. E. (1978). Crystalline variational problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(4):568–588.
- Thorpe, J. A. (1979). *Elementary Topics in Differential Geometry*. Springer New York.
- Veatch, S. L. and Keller, S. L. (2003). Separation of Liquid Phases in Giant Vesicles of Ternary Mixtures of Phospholipids and Cholesterol. *Biophysical Journal*, 85(5):3074–3083.
- Vázquez, R. (2016). A new design for the implementation of isogeometric analysis in octave and matlab: Geopdes 3.0. *Computers and Mathematics with Applications*, 72(3):523–554.