

MAT

**FUNCIONES, ECUACIONES
E IDENTIDADES
TRIGONOMÉTRICAS**

Funciones *trigonométricas*

Marilina Carena

Elisabet Haye
Fabiana Montenegro
(revisoras)

ediciones UNL



**Funciones, ecuaciones
e identidades
trigonométricas**

Funciones, ecuaciones e identidades trigonométricas

Marilina Carena

Elisabet Haye

Fabiana Montenegro

REVISORAS

ediciones **UNL**

CÁTEDRA

**UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL LITORAL**



Consejo Asesor
Colección Cátedra
Alicia Camilloni
Daniel Comba
Bárbara Mántaras
Isabel Molinas
Héctor Odetti
Andrea Pacífico
Ivana Tosti

Dirección editorial
Ivana Tosti
Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación comercial
José Díaz

Corrección
Ediciones UNL
Diagramación interior
Marilina Carena y Ediciones UNL
Diseño de tapa
Verónica Rainaud

© Ediciones UNL, 2026.

—
Sugerencias y comentarios
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

Funciones, ecuaciones e identidades
trigonométricas / Marilina Carena
– 1ra. ed. – Santa Fe : Ediciones UNL, 2026.
Libro digital, PDF/A – (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-549-2

1. Matemática. 2. Ecuaciones.
3. Educación Superior. I. Título
CDD 510

© Marilina Carena, 2026.
© de las revisoras Elisabet Haye
y Fabiana Montenegro, 2026.



Índice general

Presentación	ii
1. Razones trigonométricas en triángulos rectángulos	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Problemas de sombras y del observador	9
1.3. Triángulos no rectángulos	16
2. Funciones trigonométricas	26
2.1. Representación de ángulos en un sistema de ejes cartesianos	26
2.2. Las funciones seno y coseno	27
2.3. Otras funciones trigonométricas	47
3. Ecuaciones e identidades trigonométricas	52
3.1. Ecuaciones trigonométricas	53
3.2. Identidades trigonométricas	67
4. Funciones trigonométricas inversas	73
Respuestas	81
Referencias bibliográficas	90
Índice alfabético	91

Presentación

El objetivo principal de este libro es el estudio de las *funciones trigonométricas*, así como la resolución de ecuaciones que las involucran. Si bien se trata de un tema muy amplio, el contenido se enfoca en su aplicación en ingenierías y carreras afines. De hecho, se origina como parte del material de estudio de la cátedra de Matemática Básica de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral.

Dado que las funciones trigonométricas tienen su origen en razones entre los lados de un triángulo rectángulo, en las dos primeras secciones del Capítulo 1 se presenta un breve repaso de estos conceptos. Estas secciones fueron extraídas de [1] y, como aplicación, se agrega la Sección 1.3 sobre resolución de triángulos no rectángulos.

En el Capítulo 2 se comienza con la representación de ángulos en un sistema de ejes cartesianos, para luego definir las funciones seno y coseno, así como el resto de las funciones trigonométricas. El desarrollo de las propiedades se presenta de modo que no sea necesario memorizarlas, sino que puedan ser deducidas a partir de la definición de las funciones. Se busca que el estudiante incorpore desde el comienzo las definiciones de las funciones seno y coseno de forma natural, y que a partir de ellas pueda deducir propiedades básicas como su paridad o imparidad, su periodicidad, y las relaciones que existen entre los valores de estas funciones para ángulos vinculados entre sí, como opuestos, suplementarios o que difieren en π . Otros hechos básicos que se estudian desde las definiciones de las funciones trigonométricas son su dominio, rango y raíces.

Una vez afianzado el estudio de las funciones trigonométricas y todas sus propiedades, en el Capítulo 3 se aborda la resolución de ecuaciones trigonométricas, así como la demostración de identidades y la diferencia entre ellas y las ecuaciones.

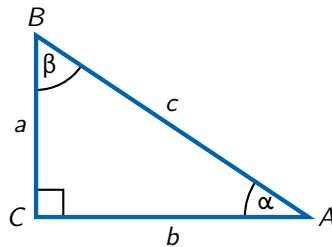
Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan de forma muy breve las funciones trigonométricas inversas, de modo que los estudiantes puedan tener una noción básica de su origen y propiedades. Para ello, se comienza presentando el concepto de inyectividad y las posibles restricciones en los dominios de cada función trigonométrica para que cumplan esta propiedad.

Capítulo 1

Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

1.1. Definiciones

En ciertos problemas a veces es necesario tomar medidas en lugares complicados o incluso inaccesibles, por lo que resulta necesario determinarlas de otra forma. Es entonces donde aparece la *trigonometría*, que es una rama de la matemática que se ocupa de estudiar las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo. En este texto nos ocuparemos solamente de problemas que involucren **triángulos rectángulos**, es decir, un triángulo con un ángulo recto (uno que mide 90°), como se muestra en la siguiente figura:



Puesto que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo debe ser igual a 180° , en este caso tenemos que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Es decir, α y β son **ángulos complementarios**. Esto implica que son ambos **agudos**, pues cada uno debe medir menos que 90° .

Dado un triángulo rectángulo, se denomina **hipotenusa** al lado opuesto al ángulo recto (indicado con la letra c en el dibujo de arriba), y es el lado de mayor longitud del triángulo. Se llaman **catetos** a los dos lados restantes del mismo (indicados con las letras a y b en el dibujo).

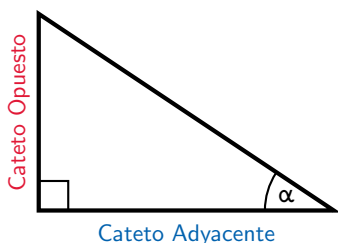
 El **teorema de Pitágoras** establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de cada uno de los catetos. Es decir, según la notación de la figura anterior (entendiendo que nos referimos a las *longitudes* de los lados),

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

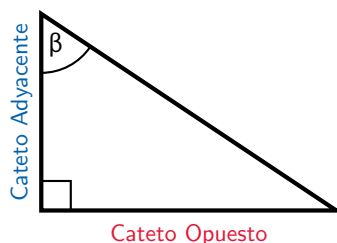
Este teorema nos permite determinar la medida de un lado desconocido de un triángulo rectángulo, conociendo la de los otros dos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Para resolver diferentes problemas definiremos relaciones entre los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y los lados del mismo. Para ello necesitamos primero especificar los nombres de los catetos, que dependerán del ángulo que estemos considerando: el **cateto opuesto** es el lado opuesto a dicho ángulo, mientras que el **cateto adyacente** es el lado adyacente al ángulo que no es la hipotenusa. Es decir, que el nombre de los catetos varía si cambiamos el ángulo agudo de referencia, como se ilustra en la siguiente figura.



Catetos respecto de α



Catetos respecto de β

Con esta terminología podemos definir las **razones trigonométricas** correspondientes a un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo. Esto es, ponerle un nombre a cada una de las razones entre los lados, como se indica a continuación:

- El **seno** de α es la razón entre las longitudes del cateto opuesto y de la hipotenusa, lo cual, por simplicidad, escribimos como:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}.$$

- El **coseno** de α es la razón entre las longitudes del cateto adyacente y de la hipotenusa:

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}.$$

- La **tangente** de α es la razón entre las longitudes del cateto opuesto y del adyacente:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}.$$

Las razones recíprocas a las anteriores se denominan **cosecante**, **secante** y **cotangente**, respectivamente:

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}},$$

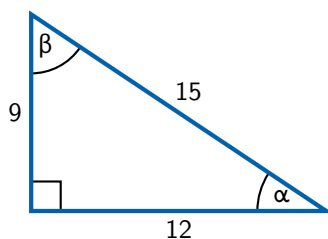
$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}},$$

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}.$$

Para resolver los problemas es suficiente con recordar las tres primeras (o bien las tres últimas, pero habitualmente se usan el seno, el coseno y la tangente). Notar que

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Ejemplo 1. Calculando razones trigonométricas. Considere el siguiente triángulo rectángulo:



En este caso tenemos que

$$\sin(\alpha) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \quad \cos(\alpha) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad \tan(\alpha) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4},$$

$$\sin(\beta) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad \cos(\beta) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \quad \tan(\beta) = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

 De las definiciones de las razones trigonométricas se puede concluir que, si α y β son los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo (por lo que resultan complementarios), entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\beta) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\beta) = \cos(\alpha), \quad (1.1)$$

ya que el cateto opuesto respecto de uno de ellos corresponde al cateto adyacente respecto del otro. Esto implica $\tan(\alpha) = \cot(\beta)$. Pueden observarse estas relaciones en los resultados obtenidos en el ejemplo anterior.

Como consecuencia del teorema de Pitágoras, si α es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{CO}{H}\right)^2 + \left(\frac{CA}{H}\right)^2 = \frac{H^2}{H^2} = 1,$$

donde CO , CA y H denotan las longitudes del cateto opuesto, del cateto adyacente y de la hipotenusa, respectivamente. Es decir,

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Esta es una de las identidades trigonométricas más importantes y se la conoce como **identidad pitagórica**¹. Permite obtener cada una de las razones involucradas a partir de la otra, sin necesidad de conocer el valor de α :

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}, \quad \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}. \quad (1.2)$$

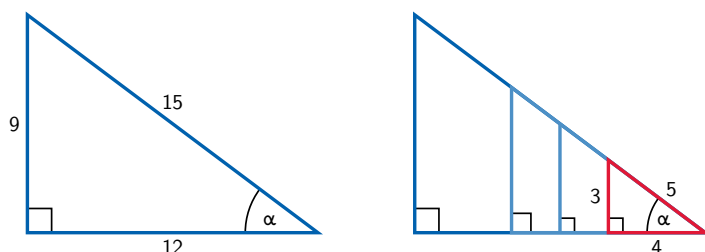
Ejemplo 2. Utilizando la identidad pitagórica. Supongamos que sabemos que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$. Usando (1.2) podemos calcular:

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5},$$

lo que coincide con lo hallado en el Ejemplo 1.

Dado un ángulo agudo α , pueden construirse infinitos triángulos rectángulos que lo tengan como uno de sus ángulos. Para ilustrar esto, en el Ejemplo 1 consideramos el triángulo que aparece del lado izquierdo en la siguiente imagen, pero cualquiera de los triángulos rectángulos de la derecha también contiene al mismo ángulo α :

¹Veremos luego que la definición de cada razón trigonométrica presentada puede extenderse a todos los números reales, surgiendo así lo que se conoce como **funciones trigonométricas**. Esta identidad trigonométrica vale para cualquier valor de α real. Volveremos a ella más adelante.



Todos estos triángulos son **semejantes**, lo que de modo informal significa que tienen la misma forma pero distintos tamaños. Con «misma forma» no nos referimos solamente a que sean triángulos rectángulos, sino que cada uno de ellos es una reducción o ampliación a escala de cualquiera de los otros. Dados dos o más triángulos semejantes, el teorema de Tales implica que las *proporciones* entre sus respectivos lados son iguales, que es justamente lo que interviene en las definiciones de las razones trigonométricas.

Así, por ejemplo, partiendo del triángulo de la izquierda se tiene que

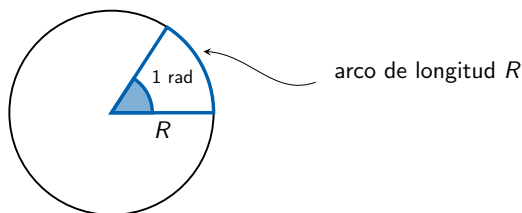
$$\cos(\alpha) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5},$$

que coincide con el resultado si se considera el triángulo rojo de la derecha, o cualquiera semejante a ellos, debido al teorema de Tales.

👉 En este sentido debe entenderse la afirmación respecto de que **las razones trigonométricas de un ángulo no dependen de la medida de los lados del triángulo rectángulo que lo contiene, sino de la amplitud de dicho ángulo.**

✍ Existen distintos sistemas de medición para la amplitud de un ángulo. El más usual es el **sistema sexagesimal**, en el cual la unidad de medida es el **grado sexagesimal** ($^{\circ}$), que es el resultado de dividir el ángulo llano en 180 partes iguales. Así, un ángulo recto mide 90° , uno llano 180° y un giro entero corresponde a 360° . Cada grado se divide en 60 minutos ($'$), y cada minuto se divide en 60 segundos ($''$). Por este motivo el sistema recibe el nombre de sexagesimal.

Otro sistema muy utilizado para medir ángulos es el **sistema circular**, cuya unidad de medida es el **radián**, de símbolo rad. Un radián se define como la amplitud de un ángulo que, teniendo su vértice en el centro de una circunferencia, determina un arco en la circunferencia cuya longitud mide lo mismo que el radio, como se ilustra a continuación:



Puede probarse que el radián no depende del tamaño de la circunferencia, y para expresar la medida de un ángulo α en radianes simplemente hacemos $\alpha = \frac{s}{R}$, donde R es el radio de la circunferencia y s es la longitud del arco que el ángulo define sobre la circunferencia.

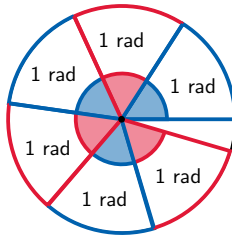
? Sabemos que el ángulo de un giro completo mide 360° , pero ¿cuánto mide este ángulo en radianes? Por lo anterior, sabemos que este ángulo se expresa en radianes haciendo

$$\frac{\text{longitud del arco}}{R} = \frac{\text{perímetro de la circunferencia}}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Entonces, el ángulo de un giro completo expresado en sistema circular es igual a 2π radianes, y en sistema sexagesimal es 360° , lo que implica que

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad.}$$

Sabemos que 2π tiene un valor aproximado de 6.28, por lo que necesitaremos un poco más de 6 radianes para completar un giro:



La igualdad anterior, junto a la regla de tres simple, nos permite concluir que

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \quad \text{y} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

Estas fórmulas nos dan un modo de convertir grados a radianes, y viceversa:

- **grados a radianes:** se multiplica la cantidad de grados por $\frac{\pi}{180}$ rad.
- **radianes a grados:** se multiplica la cantidad de radianes por $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Ejemplo 3. Grados versus radianes. Sean α y β dos ángulos, $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 2$ rad. Podemos comparar entre sí α y β , expresando la amplitud de ambos ángulos en un mismo sistema de medición. Así, tenemos que

$$\alpha = 30 \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \approx 0.52 \text{ rad},$$

donde el símbolo $\approx$ significa «aproximado», ya que hemos redondeado el resultado. También

$$\beta = 2 \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ}{\pi} \approx 115^\circ.$$

Luego, en cualquier sistema, vemos que β tiene mayor amplitud que α .

 Por convención, cuando se usa la medida angular en radianes **no** se indican las unidades. Por ello, no las escribiremos a partir de ahora. Así, si un ángulo α mide 3 radianes, escribimos $\alpha = 3$ en lugar de $\alpha = 3 \text{ rad}$. No debe haber confusión en cuanto a si estamos usando radianes o grados, puesto que si α midiera 3° , escribiríamos $\alpha = 3^\circ$.

Se puede usar el procedimiento del Ejemplo 3 a fin de obtener la siguiente tabla, que presenta las medidas correspondientes a grados y radianes de ángulos especiales.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

 ¿Cómo se utiliza la calculadora para hallar las razones trigonométricas conociendo la amplitud de un ángulo? Lo primero que debemos hacer es **asegurarnos de que la calculadora se encuentre en el modo correcto**. Podemos optar entre grados sexagesimales o radianes, dependiendo de cómo esté expresado el ángulo a ingresar. Esto se consigue con la tecla **[MODE]** o **[CONFIG]** y es fundamental verificar el modo elegido para no cometer errores: para trabajar en grados sexagesimales, hay que seleccionar la opción que aparece indicada en la pantalla como Deg, mientras que para trabajar en radianes se utiliza el modo Rad. La opción indicada como Gra se refiere a «gradianes» o grado centesimal, y no a grados sexagesimales, pero este sistema no se utilizará aquí. Una vez definido el sistema de medición², contamos con las teclas **[sin]**, **[cos]** y **[tan]** para hallar el seno, coseno y tangente de un ángulo, respectivamente. Por ejemplo, si $\alpha = 60^\circ$ colocamos la calculadora en modo grados y obtenemos que

$$\sin(60^\circ) \approx 0.87, \quad \cos(60^\circ) = 0.5, \quad \tan(60^\circ) \approx 1.73.$$

Para trabajar en modo radianes, debemos ingresar $\alpha = \pi/3$.

 La segunda función de las teclas anteriores puede llevar a confusión, ya que las mismas se indican como **[sin⁻¹]**, **[cos⁻¹]** y **[tan⁻¹]**. Podría pensarse

²Se puede corroborar que se ha elegido el modo adecuado observando si en el visor de la calculadora aparece activo un pequeño símbolo D para grados o el símbolo R para radianes.

que estas teclas indican los inversos multiplicativos del seno, coseno y tangente, los cuales llamamos cosecante, secante y cotangente, respectivamente. Sin embargo, **esto no es así** y veremos su función en el próximo ejemplo. Para obtener el inverso multiplicativo de un número se usa $\boxed{x^{-1}}$. Así, por ejemplo, habiendo calculado $\sin(60^\circ)$, utilizamos esta tecla para obtener su recíproca, es decir, $\csc(60^\circ)$.

 Las funciones que realizan las teclas $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$ reciben el nombre de **arcoseno**, **arcocoseno** y **arcotangente**, respectivamente. En este texto escribiremos

$$\arcsen(\alpha), \quad \arccos(\alpha), \quad \arctan(\alpha)$$

para indicar dichas funciones, las que estudiaremos en el Capítulo 4. De este modo evitamos confundir $\sin^{-1}(\alpha)$ con $(\sin(\alpha))^{-1} = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \csc(\alpha)$, por ejemplo.

Estas teclas permiten resolver con una calculadora el problema inverso: conociendo la medida de los lados de un triángulo rectángulo, determinar la amplitud de los dos ángulos interiores restantes. Ilustramos el uso de dichas funciones en los ejemplos siguientes.

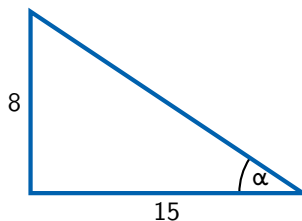
Ejemplo 4. Usando la calculadora para el problema inverso. Supongamos que para un ángulo agudo α se sabe que $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ¿Cómo podemos hallar el valor de α ? Es ahora donde utilizaremos las teclas antes mencionadas:

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{entonces} \quad \alpha = \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

lo que en la calculadora se ingresa como $\boxed{\sin^{-1}}(\sqrt{2}/2)$, dando como resultado $\alpha = 45^\circ$ (o bien $\alpha = \frac{\pi}{4}$ si estamos usando la calculadora en modo radianes).

 Para ingresar en la calculadora un ángulo cuyos minutos o segundos sean distintos de cero, se utiliza la tecla con el símbolo $\boxed{^\circ \, ' \, ''}$. La misma tecla sirve para obtener la expresión en grados, minutos y segundos de un número decimal.

Ejemplo 5. Con los datos indicados, halle el ángulo α .



Solución: En relación con el ángulo α que debemos hallar, los datos corresponden al cateto opuesto (CO) y al cateto adyacente (CA). La razón trigonométrica que relaciona estas dos cantidades es la tangente:

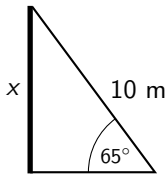
$$\tan(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{8}{15}, \quad \text{entonces} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{8}{15}\right) \approx 28^\circ 4' 21''.$$

1.2. Problemas de sombras y del observador

Se utilizará todo lo aprendido para resolver problemas concretos. Se recomienda realizar siempre un gráfico que ilustre la situación, ya que nos ayuda a identificar los datos y las incógnitas, y a hallar así la solución. Es importante recordar que, luego de efectuar los cálculos necesarios, es fundamental enunciar la **respuesta** al problema dentro del contexto del mismo.

Ejemplo 6. Determine la altura de un poste sabiendo que cuando una escalera de 10 metros de longitud se apoya en la parte superior de él, forma un ángulo de 65° con el suelo.

Solución:



Con respecto al ángulo dado como dato, la incógnita x es la medida del cateto opuesto. Además, se tiene como dato la longitud de la hipotenusa (escalera). La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es el seno:

$$\sin(65^\circ) = \frac{CO}{H} = \frac{x}{10}, \quad \text{entonces} \quad x = 10 \cdot \sin(65^\circ) \approx 9.$$

Respuesta: La altura aproximada del poste es de 9 metros.

Ejemplo 7. En el problema anterior, ¿a qué distancia del pie del poste se encuentra apoyada la base de la escalera?

Solución: En este caso, con respecto al ángulo dado como dato, la incógnita es la medida del cateto adyacente, CA . Además, se conoce la longitud de la hipotenusa. La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es el coseno:

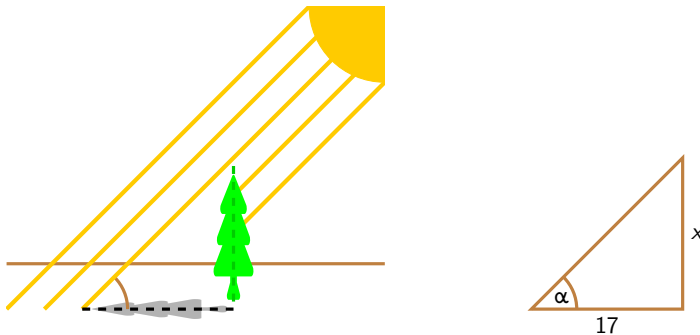
$$\cos(65^\circ) = \frac{CA}{H} = \frac{CA}{10}, \quad \text{entonces} \quad CA = 10 \cdot \cos(65^\circ) \approx 4.23.$$

Respuesta: La base de la escalera se encuentra apoyada a 4.23 metros del pie del poste, aproximadamente.

☀ Dada la lejanía y el tamaño del Sol, se puede pensar que, en regiones pequeñas de la Tierra, todos los rayos de luz llegan a ella como rectas paralelas entre sí. Entonces, en cada momento fijo del día, el ángulo que los mismos forman con respecto al suelo no cambia entre objetos cercanos. Este ángulo es el que determina la longitud de la sombra de un objeto: al amanecer y al anochecer el ángulo es muy agudo, y proyecta sombras muy largas. Al mediodía, el ángulo es recto y prácticamente no hay sombra. Nos referiremos a este como «el ángulo que forman los rayos solares con el suelo».

Ejemplo 8. Un problema de sombras. Supongamos que la sombra de un ciprés mide 17 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 50° con el suelo. ¿Qué altura tiene el ciprés?

Solución: Con estos datos se puede calcular la altura del ciprés graficando un triángulo representativo como en los problemas anteriores. Lo que conocemos es $\alpha = 50^\circ$, y que su cateto adyacente mide 17 metros. La altura del ciprés es la longitud del cateto opuesto a α .

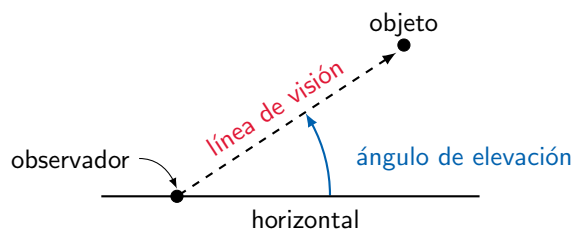


La razón trigonométrica que relaciona a estos tres valores es la tangente:

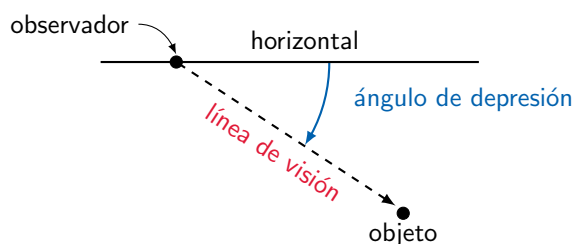
$$\tan(50^\circ) = \frac{CO}{CA} = \frac{x}{17}, \quad \text{entonces} \quad x = 17 \cdot \tan(50^\circ) \approx 20.26.$$

Respuesta: El ciprés mide aproximadamente 20.26 metros.

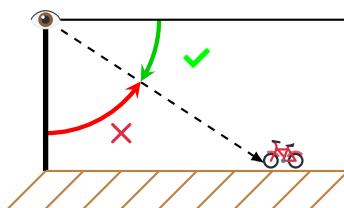
👁 Para poder resolver más problemas aplicando los conceptos estudiados, recordaremos ahora cierta terminología referida a un observador que se encuentra mirando un determinado objeto. Salvo que se indique lo contrario, supondremos siempre que el observador se encuentra al nivel del suelo (es decir, no consideramos su altura). La línea que une el ojo del observador con el objeto es llamada **línea de visión**. Si el objeto se encuentra por encima del nivel del observador, el ángulo formado por la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de **ángulo de elevación**, como se ilustra en el siguiente gráfico:



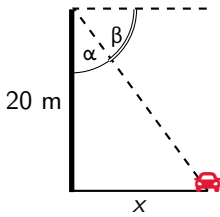
Similarmemente, si el objeto se encuentra por debajo del observador, el ángulo formado por la horizontal y la línea de visión es llamado **ángulo de depresión**.



! Los ángulos de depresión aparecen, por ejemplo, cuando el observador se encuentra sobre una torre o edificio de cierta altura. Al momento de plantear el problema, el ángulo de depresión suele confundirse con el formado entre la línea de visión y la torre, es decir, el que queda «hacia abajo» de la línea de visión. Es necesario comprender la definición de este ángulo para evitar este error frecuente. De manera no formal, el ángulo de depresión indica cuánto se debe «bajar» la mirada para ver el objeto, como se ilustra en la siguiente imagen.



Ejemplo 9. Ángulo de depresión. Desde la parte superior de un edificio de 20 metros de altura, un hombre observa su auto situado en el suelo. Calcule la distancia del auto al edificio sabiendo que el ángulo de depresión formado es de $61^{\circ}39'$.

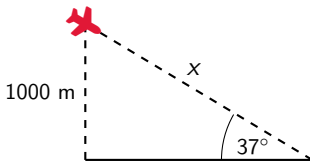
Solución:

El ángulo dado como dato es $\beta = 61^\circ 39'$ y, por lo tanto, tenemos que $\alpha = 90^\circ - \beta = 28^\circ 21'$. Con respecto a α , la incógnita x es la medida del cateto opuesto. Además, se tiene como dato la longitud del cateto adyacente a α . La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es la tangente:

$$\tan(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{x}{20}, \quad \text{entonces} \quad x = 20 \cdot \tan(28^\circ 21') \approx 10.79.$$

Respuesta: El auto está a 10.79 metros del edificio, aproximadamente.

Ejemplo 10. Ángulo de elevación. En un determinado momento, una persona observa un avión que se encuentra volando a 1000 metros de altura, con un ángulo de elevación de 37° . Halle la distancia entre el avión y dicha persona.

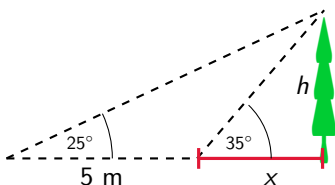
Solución:

Con respecto al ángulo dado como dato, se conoce la longitud del cateto opuesto, y la incógnita x es la medida de la hipotenusa. La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es el seno:

$$\sin(37^\circ) = \frac{CO}{H} = \frac{1000}{x}, \quad \text{entonces} \quad x = \frac{1000}{\sin(37^\circ)} \approx 1661.64.$$

Respuesta: El avión se encuentra aproximadamente a 1661.64 metros de la persona que lo observa.

Ejemplo 11. Recurriendo a sistemas de ecuaciones. Nazareno está descansando en la orilla de un río mientras observa un pino que está en la orilla opuesta. Mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del pino y obtiene 35° . Además, si retrocede 5 metros y mide el nuevo ángulo de elevación, obtiene uno de 25° . Calcule la altura del árbol y el ancho del río.

Solución:

Llamemos x al ancho del río y h a la altura del pino. Sabemos que

$$\tan(35^\circ) = \frac{h}{x} \quad \text{y} \quad \tan(25^\circ) = \frac{h}{5+x}.$$

Este es un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, el cual podemos resolver, por ejemplo, despejando h de cada una de las igualdades para obtener

$$h = \tan(35^\circ)x \quad \text{y} \quad h = \tan(25^\circ)(5 + x).$$

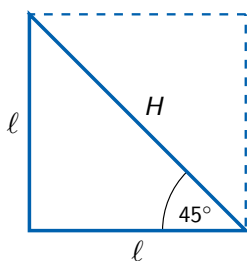
Igualando estas dos expresiones obtenemos $\tan(35^\circ)x = \tan(25^\circ)(5 + x)$ y, resolviendo esta ecuación en x , tenemos que $x \approx 9.97$. Reemplazando este valor en cualquiera de las dos expresiones para h nos queda $h \approx 6.98$.

Respuesta: El ancho del río es de 9.97 metros, y el pino tiene una altura de 6.98 metros, aproximadamente.

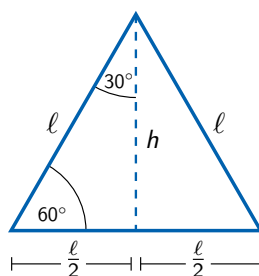
Finalizamos la sección con el seno y coseno de ángulos «especiales». Cabe señalar que estos valores se obtienen fácilmente a partir de las definiciones: para $\alpha = 45^\circ$ basta con tomar un triángulo rectángulo con catetos iguales (ver Figura 1.1 (a)) y, para los otros dos, se parte de cualquier triángulo equilátero (ver Figura 1.1 (b)). En el Ejercicio 8 se pide utilizar estas razones para hallar las restantes.

α	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{cos}(\alpha)$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Cuadro 1.1: Seno y coseno de algunos ángulos «especiales».



(a) Por Pitágoras $H = \sqrt{2}\ell$.

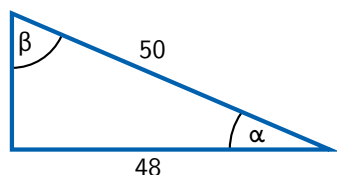


(b) Por Pitágoras $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$.

Figura 1.1: Figuras representativas del cuadro anterior.

Ejercicios Secciones 1.1 y 1.2

1. Sabiendo que los catetos de un triángulo rectángulo miden 15 y 8 unidades, use el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la hipotenusa.
2. Sabiendo que la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 unidades y uno de sus catetos mide 24, halle la longitud del otro cateto.
3. Una escalera de 7 metros de longitud está apoyada sobre una pared y su pie dista 3 metros de ella.
 - (a) ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera en la pared?
 - (b) ¿A qué distancia de la pared habrá que apoyar el pie de la escalera para que la parte superior se apoye en la pared a una altura de 5 metros?
4. Para el siguiente triángulo, halle las razones trigonométricas indicadas a partir de la definición de cada una de ellas. Observe que se verifica la relación (1.1) para ángulos complementarios:



$$\operatorname{sen}(\alpha) = \boxed{}$$

$$\cot(\alpha) = \boxed{}$$

$$\operatorname{csc}(\beta) = \boxed{}$$

$$\cos(\beta) = \boxed{}$$

5. Complete:
 - (a) Cada una de las $\boxed{}$ partes iguales en las que se divide el ángulo central de una circunferencia se llama grado sexagesimal.
 - (b) Si se toma una circunferencia de radio R , y se lleva esa longitud R sobre un arco de la misma, el ángulo central determinado por el arco y sus radios extremos mide un $\boxed{}$.
6. Halle la medida de los ángulos α y β del Ejercicio 4. Expresarlos en grados sexagesimales y en radianes.
7. Halle la medida de cada uno de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 70 y 24 unidades. Expresarlos en grados sexagesimales y en radianes.
8. Complete utilizando el Cuadro 1.1 y las relaciones entre las razones trigonométricas, racionalizando denominadores cuando sea necesario:

α	$\tan(\alpha)$	$\csc(\alpha)$	$\sec(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
30°				
45°				
60°				

9. Una escalera de 6 metros se apoya contra la pared de una casa formando con ella un ángulo de 67° . Halle la altura a la que se apoya la escalera en la pared.
10. Se dispone de una madera de 20 metros para realizar una rampa desde el suelo hasta el techo de una casa de 12 metros de altura, que permita subir materiales de construcción. ¿Qué pendiente tendrá la rampa? (Es decir, se pide el ángulo que forma la rampa con el suelo).
11. El lado de un rectángulo mide 4 metros y la diagonal forma con dicho lado un ángulo de 33° . Calcule la longitud de la diagonal y el área del rectángulo.
12. La base de un triángulo isósceles (la cual corresponde al lado desigual) mide 64 cm, y el ángulo que se forma entre los lados iguales es de 40° . Calcule el perímetro y el área del triángulo.
13. Sabemos que el lado desigual de un triángulo isósceles dado mide 18 metros y su altura es de 10 metros. ¿Cuánto miden sus ángulos?
14. Un tronco de 6.2 metros está apoyado en una pared y forma con el suelo un ángulo de 55° .
 - (a) ¿A qué altura de la pared se encuentra apoyado?
 - (b) Calcule la distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.
15. Calcule la altura de una torre si se sabe que su sombra mide 270 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 30° con el suelo.
16. Cuando los rayos solares forman un ángulo de 70° con el suelo, un edificio proyecta una sombra de 20 metros de longitud. ¿Qué altura tiene el edificio?
17. Halle la longitud de la sombra de un árbol de 8 metros de altura cuando los rayos solares forman con la horizontal un ángulo de 30° .
18. Calcule la longitud de la sombra que proyecta una persona que mide 1.8 metros cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 35° con el suelo.

19. Halle la altura de una antena sabiendo que a una distancia de 18 metros de la base se observa la parte superior de la misma con un ángulo de elevación de 30° .
20. Desde la terraza superior de un edificio de 150 metros de altura se observa el techo de otro edificio más alto con un ángulo de elevación de 45° . La distancia entre las bases de ambos edificios es de 21 metros. Calcule la altura del otro edificio.
21. Desde el quinto piso de un edificio se observa un recipiente para basura situado en la vereda, con un ángulo de depresión de $56^\circ 18'$. Calcule la altura a la que se encuentra el observador, sabiendo que el recipiente está a 10 metros de la base del edificio.
22. Desde un avión que se encuentra a 4500 metros de altura se observan dos autos ubicados hacia el mismo lado del avión, con un ángulo de depresión de 62° y 35° respectivamente. Determine la distancia entre ambos autos.
23. Se quiere medir la altura de un monumento colocado en el centro de un lago artificial circular, sin ingresar al mismo. Para ello se observa el extremo superior del monumento desde el borde del lago y se mide el ángulo de elevación, el cual resulta ser de 50° . Luego, se aleja 0.45 metros y se vuelve a medir, obteniendo un ángulo de 35° . Halle la altura del monumento y la superficie del lago. *Sugerencia:* plantee un sistema como en el Ejemplo 11.
24. Desde un punto del suelo se ve la punta de la copa de un pino bajo un ángulo de elevación de 42° . Si nos alejamos 2.5 metros hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la punta de la copa bajo un ángulo de 24° . Calcule la altura del pino.
25. Un hombre observa el extremo superior de un edificio con un ángulo de elevación de 45° . Si se aleja 45 metros, el nuevo ángulo de elevación es de 30° . Halle la altura del edificio.

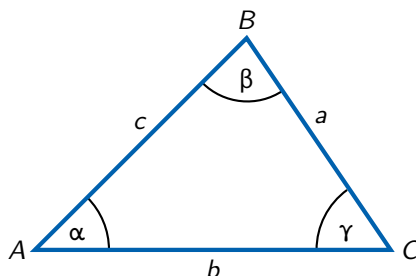
1.3. Triángulos no rectángulos

Existen situaciones problemáticas cuyo modelo matemático involucra triángulos que no son rectángulos. Dado que las herramientas presentadas hasta aquí no son suficientes para resolver estos casos, en esta sección exploraremos dos resultados fundamentales: los teoremas del seno y del coseno.

Como veremos a continuación, ambos pueden deducirse de las definiciones y resultados trabajados previamente.

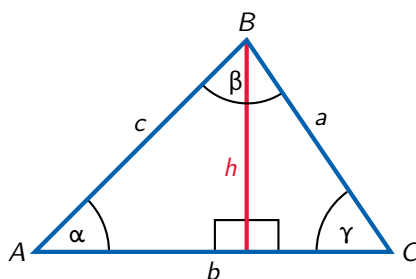
Comenzaremos considerando triángulos **acutángulos**, que son aquellos donde cada ángulo es menor que 90° .

Para enunciar estos teoremas nombraremos los vértices, longitudes y ángulos del triángulo de la siguiente manera:



Esto es, denotamos con a la longitud del lado opuesto al vértice A , y llamamos α al ángulo interior en dicho vértice. Para el vértice B , usamos b para la longitud del lado opuesto y β para el ángulo, mientras que para C utilizamos c y γ , respectivamente.

Marquemos la **altura**³ del triángulo con respecto a cualquiera de sus lados. Por ejemplo:



A partir de lo trabajado para triángulos rectángulos, tenemos que

$$h = a \operatorname{sen}(\gamma) \quad \text{y también} \quad h = c \operatorname{sen}(\alpha),$$

por lo que

$$a \operatorname{sen}(\gamma) = c \operatorname{sen}(\alpha).$$

Equivalentemente, tenemos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}.$$

Puesto que los ángulos interiores de un triángulo son positivos y menores que π , el seno de cualquiera de ellos nunca se anula, como exploraremos con mayor detalle en el siguiente capítulo.

³La **altura** de un triángulo es el segmento que une un vértice del triángulo con el lado opuesto, formando un ángulo recto con dicho lado.

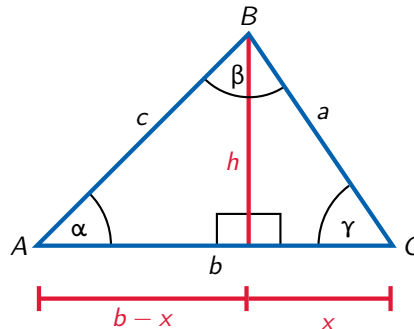
En un triángulo acutángulo, los pies de las alturas caen *dentro* del triángulo. Por lo tanto podemos proceder de forma análoga a lo anterior trazando la altura con respecto a cualquiera de los otros dos lados. Por ejemplo, trazando la altura perpendicular al lado de longitud a , llegamos a una relación análoga para c , b , $\text{sen}(\gamma)$ y $\text{sen}(\beta)$. Así se prueba el siguiente resultado:

Teorema del seno

Con la notación presentada previamente, se tiene que

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}.$$

Por otro lado, dividamos la base de longitud b en dos partes como se indica en la figura siguiente:



Entonces $x = a \cos(\gamma)$. Además, por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2 \quad \text{y} \quad a^2 = h^2 + x^2.$$

Al reemplazar por lo obtenido para x , las igualdades anteriores quedan

$$c^2 = h^2 + (b - a \cos(\gamma))^2 \quad \text{y} \quad a^2 = h^2 + (a \cos(\gamma))^2.$$

Ahora despejamos h^2 de cada una de las identidades anteriores, desarrollamos el cuadrado del binomio e igualamos para obtener que

$$c^2 - b^2 - a^2 \cos^2(\gamma) + 2ab \cos(\gamma) = a^2 - a^2 \cos^2(\gamma).$$

De esto se concluye que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

De forma análoga se prueba que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \quad \text{y} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta).$$

Lo anterior se conoce como teorema del coseno, y lo resumimos a continuación.

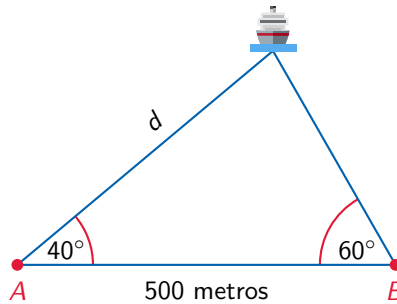
Teorema del coseno

Si a denota el lado opuesto al ángulo α , entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha).$$

Ejemplo 12. Aplicando el teorema del seno. Un barco que se encuentra en el mar es observado desde dos faros en la costa, A y B , que tienen la misma altura. Desde el faro A , el ángulo de elevación hacia el barco es de 40° , mientras que desde el faro B el ángulo de elevación es de 60° . Sabiendo que la distancia entre los faros es de 500 metros, ¿a qué distancia se encuentra el barco del faro A ?

Solución: Comencemos ilustrando el problema, en el que indicamos con d la distancia buscada:



Puesto que los ángulos interiores deben sumar 180° , sabemos que el ángulo opuesto al lado que mide 500 metros es de 80° . Así, por el teorema del seno, sabemos que

$$\frac{d}{\sin(60^\circ)} = \frac{500}{\sin(80^\circ)},$$

por lo que $d = \frac{500}{\sin(80^\circ)} \sin(60^\circ) \approx 439.69$.

Respuesta: La distancia entre el faro A y el barco es de aproximadamente 439.69 metros.

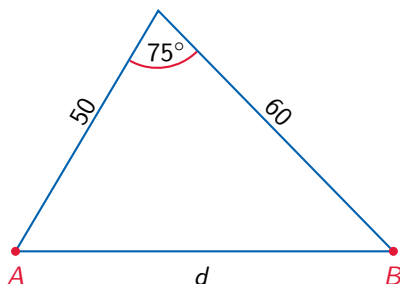
Ejemplo 13. Aplicando el teorema del coseno. Un puente está siendo diseñado para cruzar un río, y se requieren cables tensados desde dos puntos de anclaje en el suelo en ambos lados del río hasta un punto de unión en el aire, sobre el agua. Los dos cables forman un triángulo con el río, y se conocen las siguientes condiciones:

- El cable que va desde el punto de anclaje en el lado izquierdo del río tiene una longitud de 50 metros.

- El cable que va desde el punto de anclaje en el lado derecho del río tiene una longitud de 60 metros.
- El ángulo formado entre los dos cables es de 75° .

¿Cuál es la distancia entre los dos puntos de anclaje?

Solución: El bosquejo de la situación es el siguiente, en donde la incógnita es la distancia d entre los puntos de anclaje A y B :



Por el teorema del coseno sabemos que

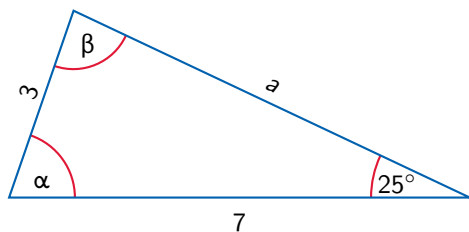
$$\begin{aligned} d^2 &= 50^2 + 60^2 - 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \cos(75^\circ) \\ &= 2500 + 3600 - 6000 \cdot \cos(75^\circ) \approx 4547.1, \end{aligned}$$

de lo que se concluye que $d \approx 67.43$.

Respuesta: La distancia entre ambos puntos de anclaje es de 67.43 metros, aproximadamente.

Ejemplo 14. Encontrando ángulos. Supongamos que las medidas de dos lados de un triángulo son 3 y 7 unidades, y que el ángulo opuesto al menor de estos lados mide 25° . ¿Cuánto miden los otros dos ángulos interiores del triángulo?

Solución: Comencemos haciendo un bosquejo representativo de la situación.



Para hallar los ángulos interiores restantes aplicaremos el teorema del seno. Sabemos que

$$\frac{7}{\sin(\beta)} = \frac{3}{\sin(25^\circ)},$$

por lo que

$$\frac{7}{3} \sin(25^\circ) = \sin(\beta),$$

de lo que se concluye que $\beta \approx 80^\circ 26' 20''$. El ángulo α puede calcularse de modo que los tres sumen 180° :

$$\alpha \approx 180^\circ - 25^\circ - 80^\circ 26' 20'' = 74^\circ 33' 40''.$$

Respuesta: Las medidas de los ángulos son $\alpha \approx 74^\circ 33' 40''$ y $\beta \approx 80^\circ 26' 20''$.

 Con las herramientas presentadas hasta aquí no tendremos ningún inconveniente trabajando con triángulos rectángulos o acutángulos. Sin embargo, deberemos prestar atención si estamos ante un triángulo **obtusángulo**, esto es, si uno de sus ángulos interiores tiene amplitud mayor que 90° . Puesto que los ángulos interiores suman 180° , los otros dos ángulos en un triángulo obtusángulo son agudos.

Es posible identificar cuándo un triángulo es obtusángulo conociendo las medidas de sus lados. Más precisamente, esto ocurre cuando el cuadrado del lado más largo (cuya longitud denotaremos con c) es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados:

$$c^2 > a^2 + b^2.$$

Cuando $c^2 = a^2 + b^2$ el triángulo es rectángulo, y es acutángulo si $c^2 < a^2 + b^2$.

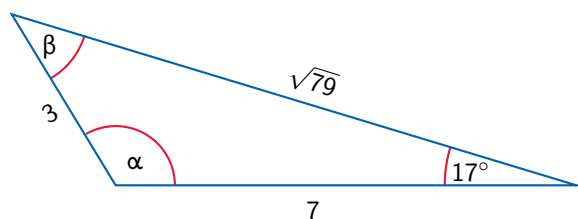
Puede probarse que los teoremas del seno y del coseno valen en cualquier triángulo⁴, pero resultará importante detectar si el triángulo es obtusángulo para evitar obtener una conclusión errónea.

Para ilustrarlo, supongamos como en el ejemplo anterior que dos de los lados de un triángulo miden 3 y 7 unidades, que el ángulo opuesto al menor de estos lados es de 17° , y que el lado restante mide $\sqrt{79}$ unidades. Este último es el lado más largo y cumple que

$$c^2 = 79 > 3^2 + 7^2 = 58,$$

por lo que se trata de un triángulo obtusángulo. El bosquejo es el siguiente:

⁴En el próximo capítulo también veremos qué significa calcularle el seno y el coseno a un ángulo mayor que 90° , lo que por ahora haremos con calculadora si hace falta.



Si quisiéramos empezar calculando el ángulo α mediante el teorema del seno, tendríamos que

$$\frac{\sqrt{79}}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{3}{\text{sen}(17^\circ)}.$$

Esto implica

$$\alpha \approx \text{arc sen}(0.86622),$$

lo que arroja $\alpha \approx 60^\circ$ utilizando la calculadora. Es claro que esa no es la amplitud de α , ya que es obtuso. En el capítulo siguiente veremos que el suplemento de este valor es la medida correcta para α , esto es, $\alpha \approx 120^\circ$.

Para evitar esta dificultad, lo que haremos cuando nos encontremos con un triángulo obtusángulo es calcular primero su otro ángulo agudo, que en este caso es β :

$$\frac{7}{\text{sen}(\beta)} = \frac{3}{\text{sen}(17^\circ)},$$

por lo que

$$\beta \approx \text{arc sen}(0.6822).$$

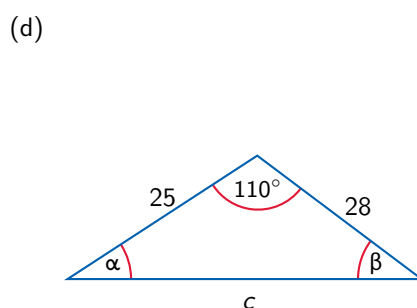
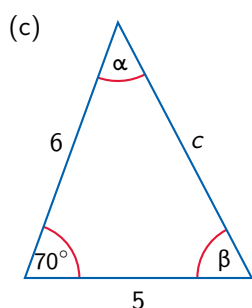
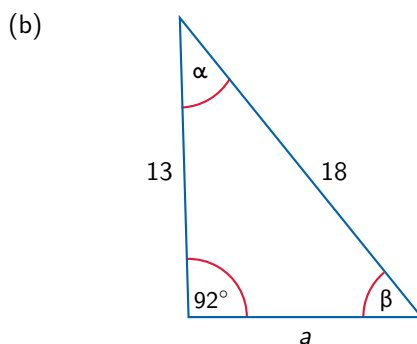
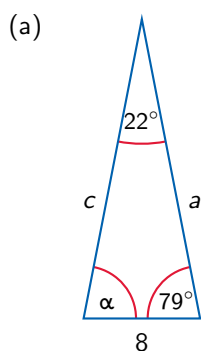
Esto conduce a $\beta \approx 43^\circ$, y podemos sacar α haciendo

$$\alpha \approx 180^\circ - 17^\circ - 43^\circ = 120^\circ,$$

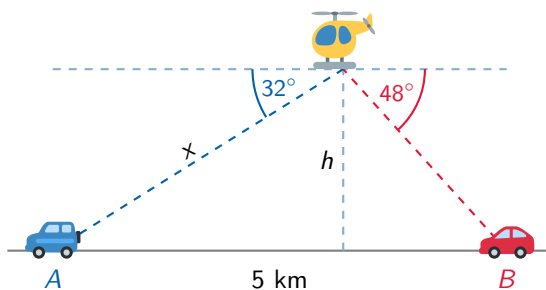
tal como habíamos afirmado antes.

Ejercicios Sección 1.3

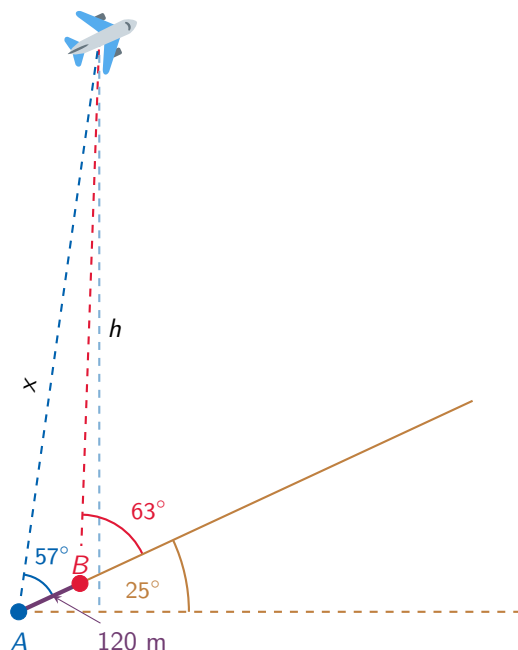
1. Un triángulo tiene un lado de 5 cm opuesto a un ángulo de 45° . Además, se sabe que otro de sus ángulos mide 75° . Calcule la longitud de los lados restantes.
2. En cada uno de los siguientes casos, halle los lados y ángulos restantes:



3. El ángulo opuesto a una de las diagonales de un paralelogramo es de 120° . Dicha diagonal es la mayor y mide $6\sqrt{7}$ cm. Determine el lado mayor y la diagonal menor del paralelogramo, sabiendo que el lado menor mide 6 cm.
4. Un piloto de un helicóptero está volando sobre una ruta recta, y desde allí observa dos autos, A y B , con ángulos de depresión de 32° y 48° respectivamente, los cuales están a 5 km de distancia entre sí, y ubicados como se ilustra a continuación. Determine la distancia del helicóptero al auto A y su altitud.



5. Un camino recto pero empinado forma un ángulo de 25° con respecto a la horizontal. Desde el punto A sobre el camino, se observa un avión con un ángulo de elevación de 57° . En el mismo instante, desde otro punto B situado a 120 metros de A en la forma que indica la figura siguiente, el ángulo de elevación es de 63° . Encuentre la distancia del punto A hasta el avión y la altura a la que vuela el avión con respecto a la horizontal.



6. Durante una práctica de campo, un grupo de estudiantes instala un sensor flotante que transmite datos en tiempo real desde el cauce de un canal artificial. El sensor se lanza desde una estación en la orilla (punto A) y la corriente lo arrastra por el canal, donde pasa cerca de una boya fija (punto B). Desde ahí, el sensor continúa su recorrido aguas abajo hasta llegar a la posición actual (punto S). Se sabe que la distancia desde A hasta B es 30 metros, y que la distancia entre la boya en B y el sensor flotante S es 45 metros. Además, se conoce que el ángulo entre las líneas AB y BS es de 120° (ver Figura 1.2). Los estudiantes quieren saber si el sensor está dentro del alcance de transmisión inalámbrica de la estación base ubicada en A , cuyo rango es de 60 metros. ¿Está dentro del alcance?

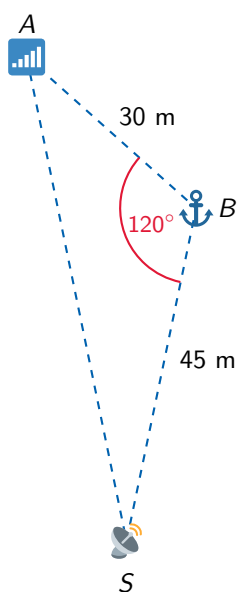
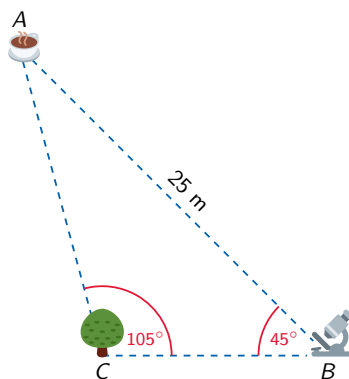


Figura 1.2: Gráfico para el Ejercicio 6.

7. Un grupo de estudiantes está trabajando en el diseño de una red Wi-Fi para el exterior del edificio de la facultad. Colocan dos puntos de acceso fijos en planta baja: uno dentro del bar (punto A) y otro en el laboratorio (punto B). La distancia entre estos dos puntos es de 25 metros (ver gráfico). Desde un tercer punto (C) ubicado en el exterior, se tiene que

- el ángulo entre las líneas AC y CB de 105° ;
- el ángulo entre las líneas CB y BA de 45° .

Se sabe que el alcance de la señal es de 15 metros. Determine si ambas señales llegan al punto C , o solo alguna de ellas. En tal caso, indique cuál.

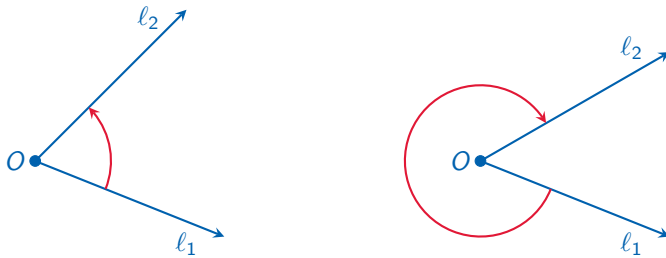


Capítulo 2

Funciones trigonométricas

2.1. Representación de ángulos en un sistema de ejes cartesianos

En trigonometría es frecuente interpretar ángulos como rotaciones de rayos (semirrectas). Empezamos con un rayo fijo ℓ_1 , que tiene punto extremo O , y lo giramos en un plano alrededor de O (en cualquiera de los dos sentidos) hasta una posición especificada por el rayo ℓ_2 . Llamamos a ℓ_1 el **lado inicial**, ℓ_2 es el **lado terminal** y O es el **vértice** del ángulo formado por estas semirrectas.



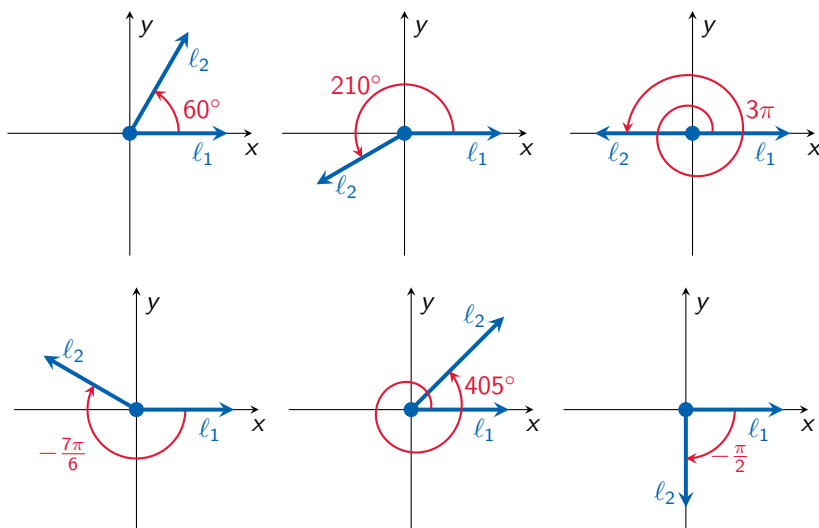
Si introducimos un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la **posición estándar** de un ángulo se obtiene al tomar el vértice en el origen de coordenadas y hacer que el lado inicial ℓ_1 coincida con el eje x positivo.

La dirección de rotación está relacionada con el signo del ángulo. Si ℓ_1 se hace girar en dirección contraria al giro de las agujas de un reloj (sentido antihorario) hasta la posición terminal ℓ_2 , el ángulo se considera **positivo**. Si ℓ_1 se hace girar en la misma dirección de las agujas del reloj (sentido horario), el ángulo es **negativo**.

La cantidad de rotaciones no está restringida en ninguna forma. Podríamos considerar que ℓ_1 hace varias revoluciones alrededor de O (en la dirección indicada por el signo) antes de que llegue a la posición ℓ_2 .

Dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si sus lados coinciden. Así, por ejemplo, tenemos que $\alpha = 270^\circ$, $\beta = -90^\circ$ y $\gamma = 630^\circ$ son tres ángulos coterminales.

Ilustramos todo lo anterior a continuación, utilizando ángulos tanto en grados sexagesimales como en radianes. Recordemos que un giro completo corresponde a 360° o 2π rad.



2.2. Las funciones seno y coseno

Sabemos que una **función** es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B . Esto significa que, dado un elemento $x \in A$, le corresponde un único valor que pertenece al conjunto B , al cual denotamos por $f(x)$. Escribimos:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

El conjunto A se llama **dominio** de f o **conjunto de partida**, mientras que B se llama **codominio** o **conjunto de llegada**.

Si $y = f(x)$ entonces decimos que y es la **imagen** de x a través de f . No todo elemento en el conjunto de llegada es necesariamente imagen de algún elemento en el dominio. Todos los que sí son imágenes de algún elemento del

dominio se coleccionan en un conjunto llamado **imagen** del dominio bajo f , el cual se denota y define formalmente como

$$\text{Im}(f) = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}.$$

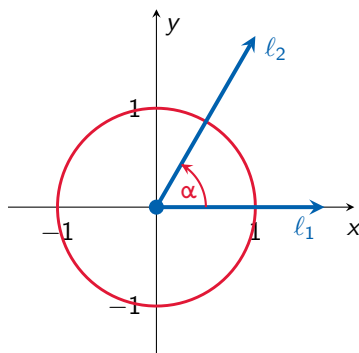
Se sigue de esto que la imagen está contenida en el conjunto de llegada.

! En la definición de «función» hay dos condiciones que no deben pasarse por alto: **existencia y unicidad de imagen**. Esto es, *a cada elemento de A le corresponde un valor en B (existencia) y debe ser único (unicidad)*.

Recordemos que un punto en el plano se localiza con un **par ordenado** de valores (x, y) llamados **coordenadas**, siendo el número x la **abscisa** del punto, y el número y su **ordenada**.

En el Capítulo 1 estudiamos las razones trigonométricas de cada uno de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo. El objetivo es extender estos conceptos a cualquier tipo de ángulo.

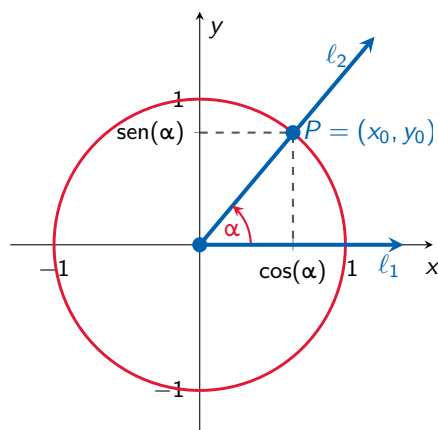
Para definir las funciones trigonométricas vamos a considerar los ángulos como centrales en la **circunferencia trigonométrica o unitaria**, que es una circunferencia de **radio 1 centrada en el origen** de un sistema coordenadas cartesianas (ver gráfico a continuación). Ubicaremos el ángulo en la **posición estándar** definida previamente y lo mediremos en **radianes**. Pueden ser positivos o negativos, mayores o menores que 2π , es decir, un ángulo α puede tomar cualquier valor real.



Ubicado el ángulo α , **existe** un **único** punto P en la circunferencia que interseca al lado terminal ℓ_2 . Nos referiremos a P como «el punto sobre la circunferencia unitaria que corresponde a α ». Si (x_0, y_0) denotan las coordenadas de este punto P , se definen las **funciones seno y coseno** como

$$\text{sen}(\alpha) = y_0, \quad \text{cos}(\alpha) = x_0. \quad \leftarrow \text{Definición de seno y coseno}$$

Se ilustran estas definiciones en la Figura 2.1.

Figura 2.1: $\text{sen}(\alpha) = y_0$ y $\text{cos}(\alpha) = x_0$.

✍ La función $f(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$ representa la variación de la ordenada de un punto P situado en la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas, en función de su ángulo α medido en radianes. Por otra parte, la función $g(\alpha) = \text{cos}(\alpha)$ representa la variación de la abscisa del punto en función de su ángulo α .

Ingresando a <https://www.geogebra.org/m/sdq4pj4> se puede observar como animación la definición de la función seno. La del coseno puede verse ingresando en <https://www.geogebra.org/m/sr5u36fc>.

De esta forma quedan definidas ambas funciones con dominio igual a $\mathbb{R}$, es decir, todos los números reales. Además, a medida que varíe la amplitud de α , el punto P irá recorriendo la circunferencia unitaria (en un sentido u otro, según el signo de α). Entonces tanto x_0 como y_0 , que son sus coordenadas, tomarán todos los valores en $[-1, 1]$. Así, concluimos que para ambas funciones se tiene

$$\text{Dominio} = \mathbb{R};$$

$$\text{Imagen} = [-1, 1].$$

Con el fin de esbozar las gráficas de las funciones seno y coseno, y comprender cuestiones que resultarán de gran importancia en aplicaciones posteriores, dedicaremos esta sección a analizar un poco más la definición de las mismas.

Comencemos suponiendo que el ángulo α es agudo, es decir, $0 < \alpha < \pi/2$. Entonces el punto P está dentro del primer cuadrante, por lo que x_0 e y_0 son valores positivos. Como se ilustra en la Figura 2.2, consideraremos el triángulo rectángulo formado por los puntos O , P y $Q = (x_0, 0)$.

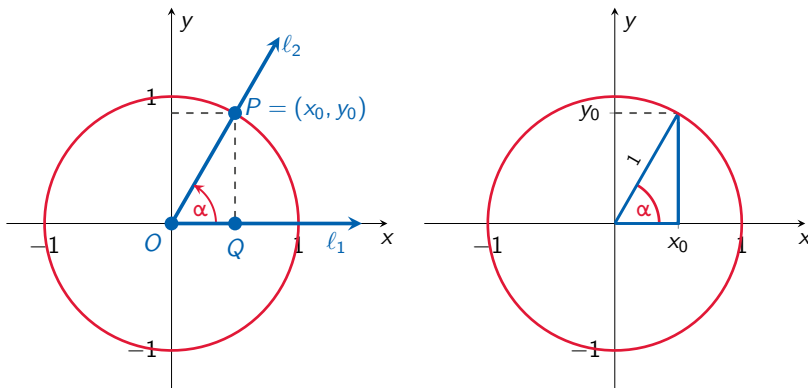


Figura 2.2: Triángulo que determina α en la circunferencia trigonométrica.

Mencionamos antes que mediante semejanza de triángulos se prueba fácilmente que las razones trigonométricas de un ángulo definidas en el Capítulo 1 no dependen de la medida de los lados del triángulo, sino de la amplitud de dicho ángulo (ver página 5). Por otro lado, el triángulo $\triangle OPQ$ tiene hipotenusa de longitud 1, el cateto adyacente con respecto a α mide x_0 , y el opuesto mide y_0 . Entonces, tomemos este triángulo para aplicar las definiciones de las razones trigonométricas seno y coseno de α presentadas en el Capítulo 1:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{CO}{H} = \frac{y_0}{1} = y_0, \quad \cos(\alpha) = \frac{CA}{H} = \frac{x_0}{1} = x_0.$$

Lo anterior ilustra que las definiciones dadas en esta sección para las *funciones* seno y coseno coinciden con las correspondientes *razones* trigonométricas para ángulos agudos presentadas al comienzo, esto es, no fueron definiciones hechas en forma arbitraria sino inspiradas en dichas razones. La diferencia, ahora, es que las funciones $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ se extienden a cualquier valor real de α .

El objetivo final de esta sección será comprender cómo y por qué **si conocemos los valores de $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, \pi/2]$ entonces, a partir de ellos, conoceremos los valores de $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ para todo α real.**

Del Cuadro 1.1 podemos obtener los valores para el seno y coseno de $\alpha = \pi/6$, $\alpha = \pi/3$ y $\alpha = \pi/2$. A continuación calcularemos el resultado para otros ángulos particulares mediante simple inspección de las coordenadas de P .

 **Algunos valores directos.** De manera coloquial, la función seno indica la «altura» del punto P cuando este varía alrededor de la circunferencia unitaria en función de su ángulo α medido en radianes (el signo indica si está arriba o abajo del eje x), mientras que el coseno denota a qué distancia se

encuentra del eje y (el signo indica si está hacia la derecha o hacia la izquierda del eje vertical).

👉 Así, para calcular $\text{sen}(\alpha)$ o $\text{cos}(\alpha)$ nos importa conocer la posición de P que determina este ángulo α en la circunferencia trigonométrica, **independientemente de cuántas vueltas dio para llegar ahí o en qué sentido giró**, ya que solamente necesitamos sus coordenadas. La ordenada y_0 nos dará la imagen para el seno, mientras que la abscisa x_0 será el coseno de α .

Para ciertos ángulos particulares es fácil determinar la posición de este punto P . Por ejemplo, consideremos:

$\alpha = 0$: Esto equivale a que el lado terminal del ángulo coincida con el inicial, por lo que se tiene $P = (1, 0)$. Así, las definiciones arrojan que

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \text{cos}(0) = 1.$$

$\alpha = \pi/2$: Suponiendo que el punto P parte de la posición $\alpha = 0$, entonces habrá dado un cuarto de vuelta en sentido antihorario cuando $\alpha = \pi/2$. Es decir, su posición será $P = (0, 1)$ y

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \text{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Observar que esta misma posición para P se obtiene cuando este gira $3/4$ de vuelta completa en sentido negativo, es decir, cuando $\alpha = -\frac{3}{4} \cdot 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$. Luego

$$\text{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 1, \quad \text{cos}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 0.$$

$\alpha = \pi$: Ahora P habrá recorrido media vuelta en dirección positiva, encontrándose en la posición $P = (-1, 0)$. Así

$$\text{sen}(\pi) = 0, \quad \text{cos}(\pi) = -1.$$

Notar que si P recorre media vuelta en sentido negativo, se encontrará en la misma posición que si lo hace en sentido positivo. Así,

$$\text{sen}(-\pi) = 0, \quad \text{cos}(-\pi) = -1.$$

$\alpha = 3\pi/2$: Al haber girado en sentido positivo un ángulo que corresponde a $3/4$ de vuelta completa, tendremos $P = (0, -1)$, por lo que

$$\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1, \quad \text{cos}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0.$$

También tenemos que $P = (0, -1)$ cuando recorre un cuarto de vuelta en sentido negativo, por lo que

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \text{cos}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$



Tabla de ángulos especiales. En la tabla siguiente se reúnen los valores de las funciones seno y coseno de algunos de los ángulos trabajados, ampliando el Cuadro 1.1 (los valores $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$ no tenían sentido en ese momento). Los ángulos que aparecen en las dos filas superiores se denominan **ángulos notables**, expresados en grados y en radianes.

α en grados	0°	30°	45°	60°	90°
α en radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{cos}(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Cuadro 2.1: Seno y coseno de ángulos notables.

Reescribimos a continuación la tabla previa de forma que sea más fácil construirla mediante una **regla mnemotécnica**, en caso de no tenerla al alcance. Luego de simplificar cada valor el resultado es, por supuesto, el mismo que antes.

α en grados	0°	30°	45°	60°	90°
α en radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\text{cos}(\alpha)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Exploraremos ahora algunas propiedades de las funciones seno y coseno que serán de gran importancia conocer y manejar. Se recomienda comprender la *deducción* de los resultados ya que solamente se basan en la definición de las funciones, y serán frecuentemente utilizados en diferentes aplicaciones.



Período¹. Si el punto P parte de la posición $\alpha = 0$, entonces P dará una «vuelta completa» en sentido antihorario cuando α sea 2π . En ese momento vuelve a su posición inicial, por lo que $\text{sen}(0) = \text{sen}(2\pi)$ y $\text{cos}(0) = \text{cos}(2\pi)$. Lo mismo ocurre si el giro es en sentido horario, es decir, si $\alpha = -2\pi$. Así, los valores del seno y coseno se repetirán de forma periódica a medida que P recorra la circunferencia, sin importar cuántas vueltas haya dado ni en qué sentido lo haya hecho. En otras palabras, ambas funciones tienen período 2π :

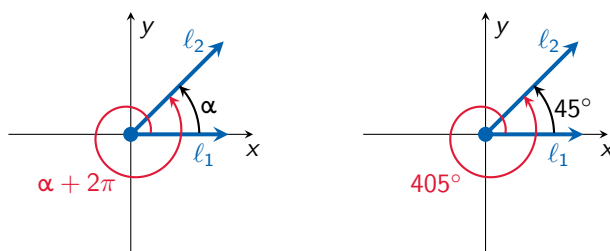
¹Recordemos que, dado $p \neq 0$, una función f es **p -periódica** si $f(x + p) = f(x)$ para todo x en el dominio de f . El número p se llama **período** de la función. El menor número positivo p que satisface esto recibe el nombre de **período fundamental** para f . Todos los períodos hallados en esta nota resultan fundamentales, pero no lo demostraremos.

Periodicidad de las funciones seno y coseno

Para todo número entero n y todo número real α se tiene que

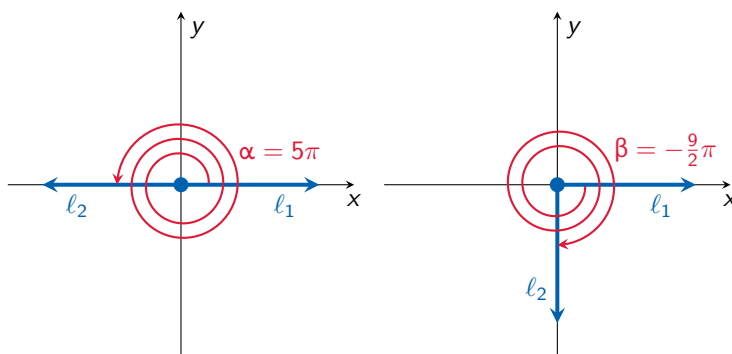
$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{sen}(\alpha) \quad \text{y} \quad \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos(\alpha). \quad (2.1)$$

Lo anterior también se deduce de que, por definición, los ángulos coterminales tendrán el mismo seno y coseno, y la forma de construir estos ángulos es sumando o restando cualquier cantidad de giros completos.



Así, solamente necesitamos analizar los valores del seno y coseno para ángulos en $[0, 2\pi)$, ya que a partir de estos podremos obtener el resto.

Ejemplo 15. Utilizando el período. Halle el seno y el coseno de $\alpha = 5\pi$ y $\beta = -\frac{9}{2}\pi$.



Solución: Tal como puede verse en el gráfico, comencemos notando que

$$\alpha = \pi + 4\pi, \quad \beta = \frac{3}{2}\pi - 6\pi.$$

Así, por ser ambas funciones 2π -periódicas, tenemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\pi) = 0, \quad \cos(\alpha) = \cos(\pi) = -1, \quad \leftarrow (2.1) \text{ con } n = 2$$

$$\operatorname{sen}(\beta) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1, \quad \cos(\beta) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0. \quad \leftarrow (2.1) \text{ con } n = -3$$

Los resultados obtenidos coinciden con lo que puede observarse en la imagen previa a la solución, ya que el punto sobre la circunferencia unitaria que corresponde a α es $(-1, 0)$, mientras que para el ángulo β es $(0, -1)$.

En lo que sigue, analizaremos la relación que existe entre el seno y el coseno de un ángulo α y los valores de estas funciones para ángulos relacionados con él, como los opuestos, suplementarios o aquellos que difieren en π .

 **Ángulos opuestos.** Dado un ángulo α , el ángulo $\beta = -\alpha$ se conoce como su **opuesto**. Es decir, el opuesto de un ángulo tiene la misma amplitud pero en sentido contrario. Si $P = (x_0, y_0)$ denota el punto sobre la circunferencia unitaria que corresponde a α , entonces el punto correspondiente al ángulo $-\alpha$ es $P' = (x_0, -y_0)$, como se ilustra en la Figura 2.3. De esto y de las definiciones de seno y coseno tenemos que $\sin(-\alpha) = -y_0$ y $\cos(-\alpha) = x_0$. Hemos probado que:

Fórmulas para ángulos opuestos

Para todo número real α se tiene que

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{y} \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha). \quad (2.2)$$

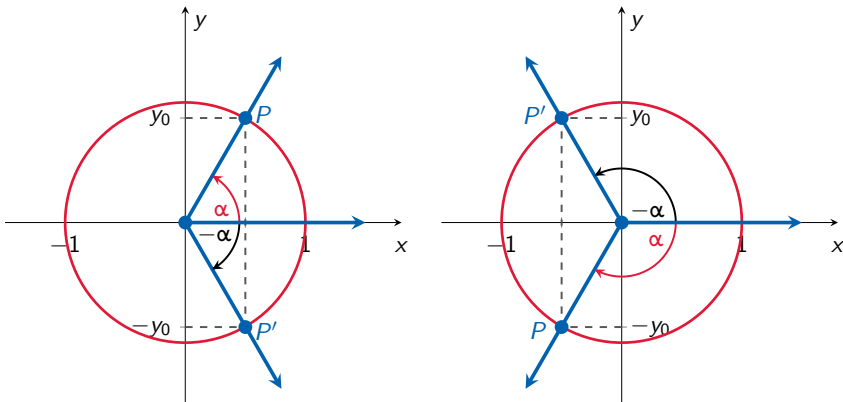


Figura 2.3: Ángulos opuestos.

 Las igualdades contenidas en (2.2) establecen que la función seno es **impar** mientras que el coseno es **par**². Notar que $-\alpha$ solo indica el opuesto de α , y no es necesariamente un número negativo.

²Se dice que una función f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo x . Si $f(-x) = -f(x)$ para todo x , la función se llama **impar**.

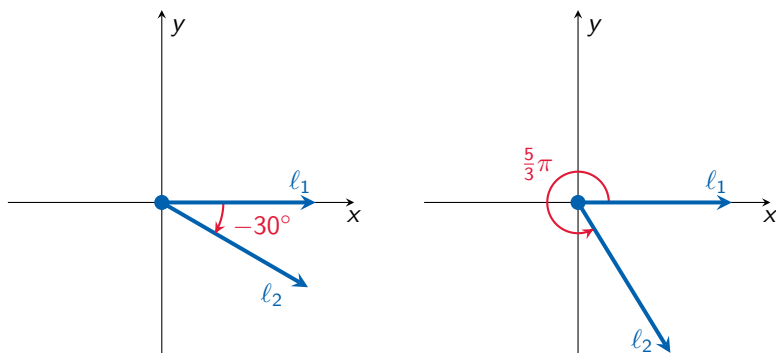
Usaremos lo anterior para calcular el seno y coseno de cualquier ángulo que pertenece al cuarto cuadrante (esto es, su lado terminal está en dicho cuadrante) a partir de un ángulo agudo, utilizando los datos del Cuadro 1.1. Luego intentaremos lo mismo para un ángulo del tercer cuadrante.

Ejemplo 16. Ángulos en el cuarto cuadrante. Halle el seno y el coseno de $\alpha = -30^\circ$ y $\beta = \frac{5}{3}\pi$.

Solución: Para α tenemos que

$$\sin(-30^\circ) \stackrel{\text{es impar}}{=} -\sin(30^\circ) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \stackrel{\text{Cuadro 1.1}}{=} -\frac{1}{2},$$

$$\cos(-30^\circ) \stackrel{\text{es par}}{=} \cos(30^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \stackrel{\text{Cuadro 1.1}}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

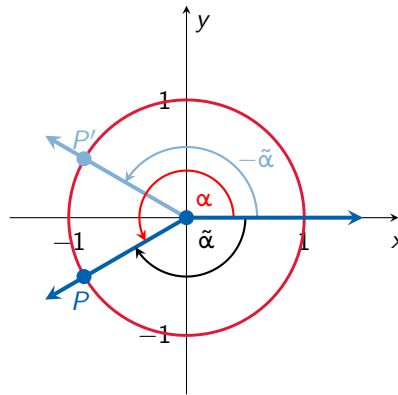


Ahora consideremos al ángulo β :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) &= \sin\left(\frac{5}{3}\pi - 2\pi\right) && \leftarrow \text{por ser } 2\pi\text{-periódica} \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) && \leftarrow \text{por ser impar} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. && \leftarrow \text{por Cuadro 1.1} \end{aligned}$$

De forma similar podemos ver que $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 17. Ángulos en el tercer cuadrante. Consideremos $\alpha = 210^\circ$, y sea P el punto sobre la circunferencia unitaria correspondiente a α . Entonces P pertenece al tercer cuadrante. Ya que $\tilde{\alpha} = -150^\circ$ es cotermino con α , el mismo punto P también corresponde a $\tilde{\alpha}$, como puede verse en la gráfica siguiente.



Esto pasa porque $\tilde{\alpha} = \alpha - 360^\circ$. Así,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\tilde{\alpha}) \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = \cos(\tilde{\alpha}).$$

Aplicando las fórmulas para ángulos opuestos:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\tilde{\alpha}) = -\operatorname{sen}(-\tilde{\alpha}) = -\operatorname{sen}(150^\circ),$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\tilde{\alpha}) = \cos(-\tilde{\alpha}) = \cos(150^\circ).$$

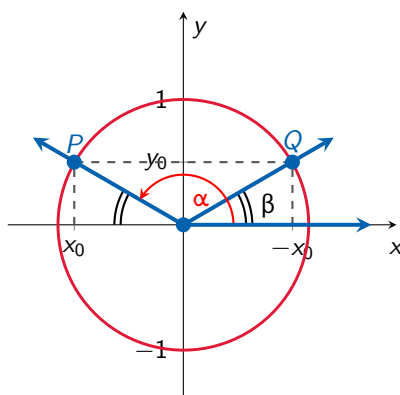
La pregunta natural es... ¿para qué hicimos esto? Este razonamiento, junto con el Ejemplo 16, nos muestra que la periodicidad más las fórmulas del ángulo opuesto nos permiten conocer el seno y el coseno de cualquier número real si conocemos el valor de estas funciones para valores en $[0, \pi]$. Volveremos a esto en la página siguiente, ya que queremos reducir aún más este intervalo. Más precisamente, veremos cómo calcular el seno y el coseno de cualquier ángulo, por ejemplo uno de 150° como arriba, en términos de uno del primer cuadrante.

 **Ángulos suplementarios.** Dado un ángulo α , el ángulo $\beta = \pi - \alpha$ se conoce como su **suplemento**. Es decir, la suma de ambos da como resultado un ángulo **llano**, que es uno de 180° o π radianes. Supongamos, para comenzar, que $\alpha \in [0, \pi]$. Si α es obtuso entonces su suplemento β será agudo (ver gráfico en la página siguiente, donde tanto α como β están ubicados de forma estándar), y viceversa.

Como puede observarse en dicho gráfico, si $P = (x_0, y_0)$ es el punto sobre la circunferencia unitaria correspondiente a α , entonces el punto correspondiente a $\beta = \pi - \alpha$ es $Q = (-x_0, y_0)$. Así, por definición de seno y coseno tenemos que

$$\operatorname{sen}(\beta) = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = y_0 = \operatorname{sen}(\alpha),$$

$$\cos(\beta) = \cos(\pi - \alpha) = -x_0 = -\cos(\alpha).$$



Como en los Ejemplos 16 y 17, la periodicidad de las funciones seno y coseno junto con las fórmulas para ángulos opuestos nos permiten extender lo anterior a cualquier valor real de α . Así:

Fórmulas para ángulos suplementarios

Para todo número real α se tiene que

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) \quad \text{y} \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha). \quad (2.3)$$

Habíamos concluido que podemos calcular el seno y el coseno de cualquier número real si conocíamos los resultados para todos los valores en $[0, \pi]$. Pero lo anterior reduce aún más la situación: basta con conocer el resultado para todo $\alpha \in [0, \pi/2]$, lo que en grados equivale a $[0, 90^\circ]$. Por ejemplo, $\beta = 150^\circ$ pertenece al segundo cuadrante, pero es el suplemento de $\alpha = 30^\circ$. Entonces,

por (2.3): $\operatorname{sen}(150^\circ) = \operatorname{sen}(30^\circ) \quad \text{y} \quad \cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ).$

Si el ángulo está en el cuarto cuadrante ya vimos que también podemos hacerlo (estamos expresando los ángulos en grados solo para ubicarlos más rápido mentalmente en cada cuadrante):

por ser opuestos: $\operatorname{sen}(-30^\circ) = -\operatorname{sen}(30^\circ) \quad \text{y} \quad \cos(-30^\circ) = \cos(30^\circ).$

Si el ángulo está en el tercer cuadrante, **por Ejemplo 17 + (2.3) + Cuadro 1.1:**

$$\operatorname{sen}(210^\circ) = -\operatorname{sen}(150^\circ) = -\operatorname{sen}(30^\circ) = -\frac{1}{2},$$

$$\cos(210^\circ) = \cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

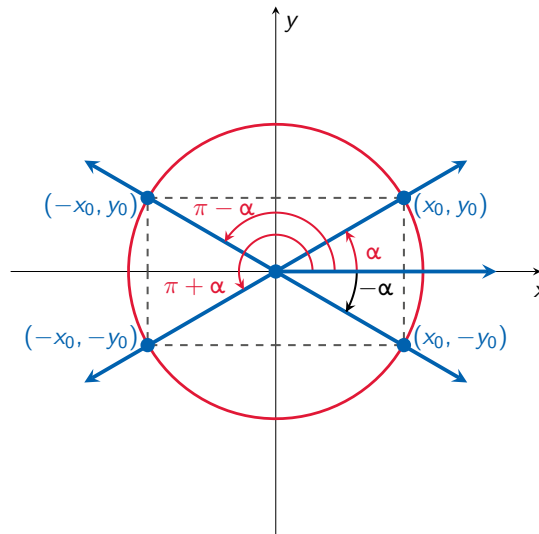
Se dice que los ángulos 210° y 30° «difieren en π » ya que su diferencia expresada en radianes es igual a π . Ya sea mediante el mismo razonamiento allí aplicado, o combinando (2.3) con (2.2), se obtiene la siguiente relación.

Fórmulas para ángulos que difieren en π

Para todo número real α se tiene que

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha) \quad \text{y} \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha). \quad (2.4)$$

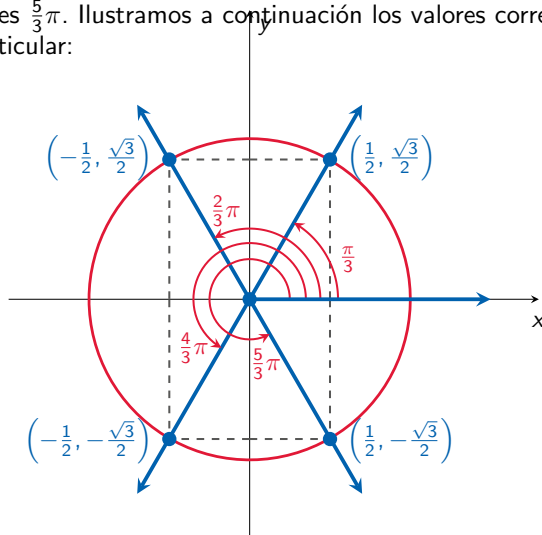
Antes de seguir, y a modo de resumen de lo trabajado hasta aquí, incluimos en un mismo gráfico un ángulo α del **primer cuadrante**, su opuesto $-\alpha$, su suplemento $\pi - \alpha$ y el ángulo $\pi + \alpha$ (que difiere en π con respecto a α). Al ubicar los puntos correspondientes a cada uno de estos ángulos en la circunferencia trigonométrica, sus coordenadas nos permiten obtener las relaciones entre el seno y el coseno de cada uno de estos ángulos con respecto a los valores del seno y del coseno de α .



Ángulo:	$\operatorname{sen}(\alpha) = y_0,$	$\cos(\alpha) = x_0,$
Suplemento:	$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = y_0,$	$\cos(\pi - \alpha) = -x_0,$
Difiere en π:	$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -y_0,$	$\cos(\pi + \alpha) = -x_0,$
Opuesto:	$\operatorname{sen}(-\alpha) = -y_0,$	$\cos(-\alpha) = x_0.$

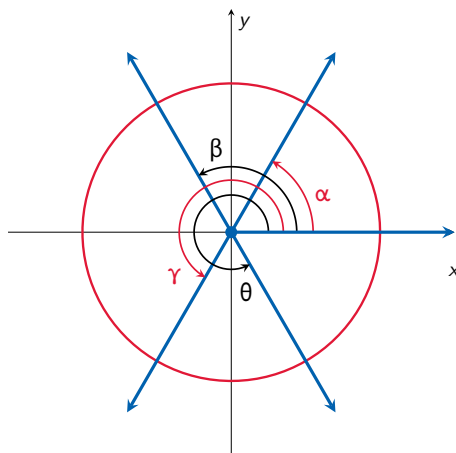
Figura 2.4: Gráfico resumen para los casos trabajados hasta aquí.

Por ejemplo, tomando $\alpha = \frac{\pi}{3}$ tenemos que $\pi - \alpha = \frac{2}{3}\pi$ y que $\pi + \alpha = \frac{4}{3}\pi$. Además, notemos que $-\alpha$ es siempre cotermino con el ángulo $2\pi - \alpha$, que en este caso es $\frac{5}{3}\pi$. Ilustramos a continuación los valores correspondientes a este caso particular:



Los gráficos anteriores ilustran la relación entre el seno y el coseno de un ángulo α del **primer cuadrante**, con el seno y el coseno de otro ángulo relacionado con α en cada uno de los demás cuadrantes:

- con su suplemento $\beta = \pi - \alpha$, que pertenece al **segundo cuadrante**;
- con $\gamma = \pi + \alpha$, que difiere de α en π , y se ubica en el **tercer cuadrante**;
- con su opuesto $\delta = -\alpha$, que se ubica en el **cuarto cuadrante** y es cotermino con el ángulo positivo $\theta = 2\pi - \alpha$.



 **Ángulos complementarios.** Dado un ángulo α , el ángulo $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ se conoce como su **complemento**. Si α es un ángulo agudo, entonces β también lo es. Supongamos que este es el caso, y ubiquemos ambos en un mismo sistema de ejes cartesianos, como se ilustra en la Figura 2.5.

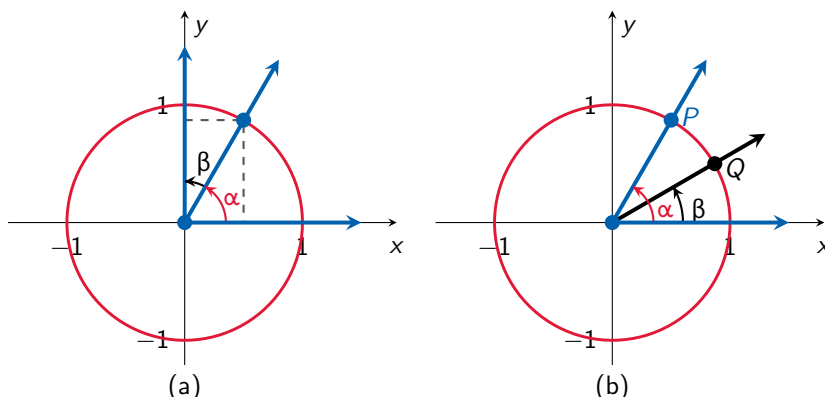


Figura 2.5: Ángulos complementarios ubicados como (a) consecutivos y (b) de forma estándar.

Vimos que el seno y el coseno de ángulos agudos coinciden con las razones trabajadas en el Capítulo 1. Allí, en (1.1) probamos que

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = \sin(\beta),$$

es decir, el seno de uno coincide con el coseno del otro. Esto es sencillo de recordar y de comprobar ya que, como puede verse en (a) de la Figura 2.5, la longitud del cateto adyacente a α coincide con la longitud del cateto opuesto a β , y viceversa.

Todo lo analizado previamente permite extender estas igualdades a cualquier número real α :

Fórmulas para ángulos complementarios (identidades de cofunción)

Para todo número real α se tiene que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha) \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha). \quad (2.5)$$

 **Signo según el cuadrante.** Ya vimos que si $0 < \alpha < \pi/2$, es decir, si el ángulo está dentro del primer cuadrante, entonces tanto el seno como el coseno son positivos. En la Figura 2.6 se incluyen ángulos en los cuadrantes

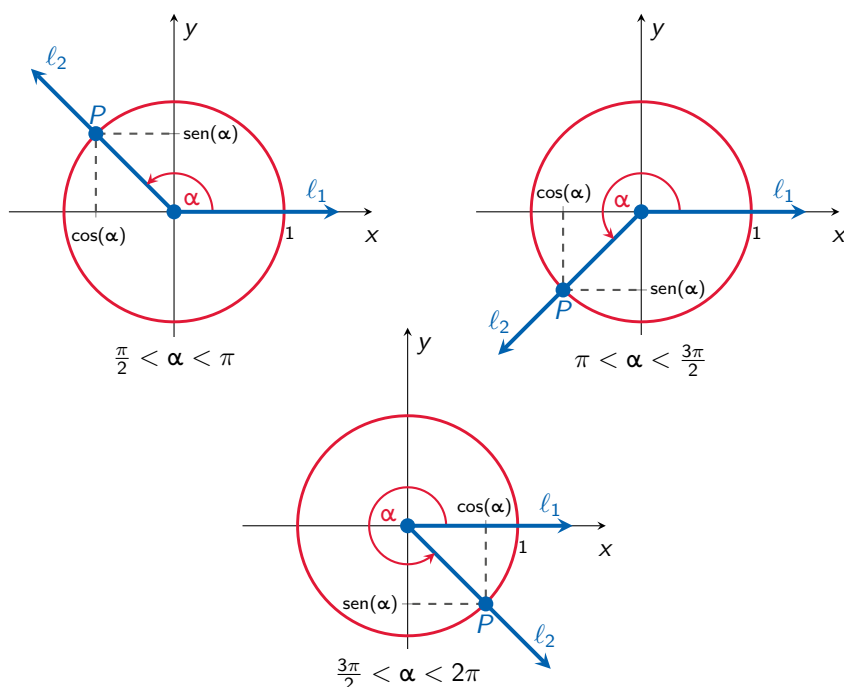


Figura 2.6: Seno y coseno para ángulos en otros cuadrantes.

restantes para analizar el signo de las funciones definidas. Recordemos que la función seno indica la altura de P (dada por su ordenada) mientras este punto recorre la circunferencia trigonométrica, y que el coseno denota su desplazamiento lateral (su abscisa). Esto nos permite construir el gráfico contenido en la Figura 2.7 que indica el signo de cada función según el cuadrante al cual pertenece el ángulo.

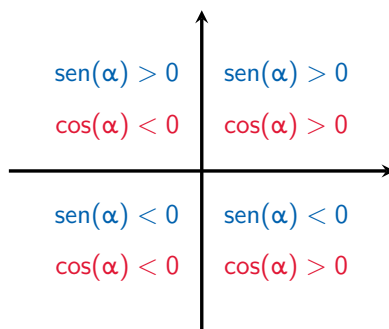


Figura 2.7: Signos del seno y del coseno según el cuadrante al que pertenece α .

 **Identidad pitagórica.** Usando el teorema de Pitágoras y la definición del seno y coseno a partir de la circunferencia unitaria (ver, por ejemplo, los triángulos rectángulos que quedan determinados en la Figura 2.6) se deduce que la identidad mencionada en la página 4 del Capítulo 1 es válida para cualquier valor real de α :

Identidad pitagórica

Para todo número real α se tiene que

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1. \quad (2.6)$$

Ejemplo 18. Calcule $\cos(\alpha)$ sabiendo que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{4}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Solución: De la identidad pitagórica tenemos que

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos lados obtenemos que

$$|\cos(\alpha)| = \frac{3}{5},$$

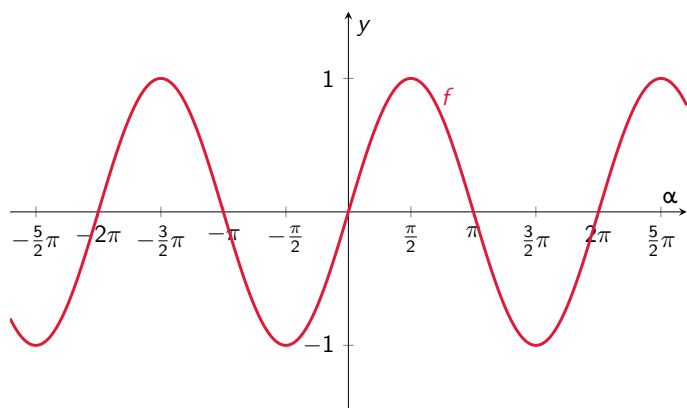
lo que implica que $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$ o $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$. El enunciado indica que $\pi/2 < \alpha < 2\pi$. Pero, además, establece que el seno de α es positivo, por lo que este intervalo se reduce a $\pi/2 < \alpha < \pi$ según la Figura 2.7 (es decir, α pertenece al segundo cuadrante). Así, la única posibilidad es $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$.

 **Raíces y gráfica.** Antes de que comience la segunda vuelta del punto P sobre la circunferencia unitaria, su ordenada habrá tomado dos veces el valor cero: cuando $\alpha = 0$ y cuando $\alpha = \pi$. En palabras, al partir y al dar media vuelta el punto P se encuentra a altura cero. Estos valores son las únicas dos raíces de la función $f(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$ en $[0, 2\pi)$, y podremos obtener todas las raíces de f sumando múltiplos enteros del período $p = 2\pi$. Al hacer esto se obtiene que:

Raíces de la función seno: múltiplos enteros de π

$$\operatorname{sen}(\alpha) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \alpha = n\pi \text{ con } n \in \mathbb{Z}.$$

A partir de todo el análisis previo construimos la gráfica de la función seno:

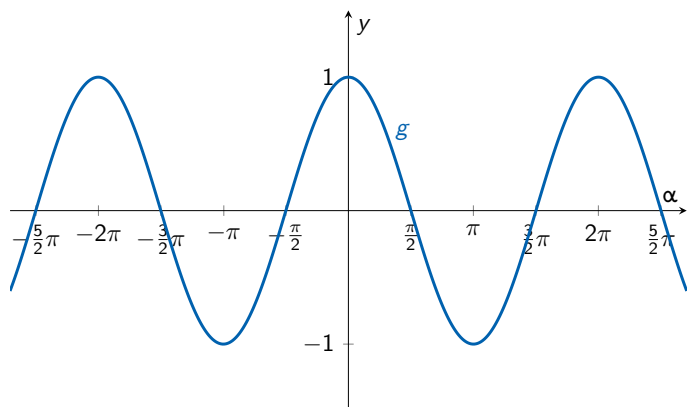
Figura 2.8: Gráfica de $f(\alpha) = \sin(\alpha)$.

Similarmenre, la abscisa de P vale cero dos veces antes de comenzar la segunda vuelta: cuando $\alpha = \pi/2$ y cuando $\alpha = 3\pi/2$. Como antes, obtendremos todas las raíces de $g(\alpha) = \cos(\alpha)$ sumando a estos valores múltiplos enteros del período $p = 2\pi$.

Raíces de la función coseno: múltiplos impares de $\pi/2$

$$\cos(\alpha) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

Con toda la información estudiada se construye la gráfica del coseno, la que puede observarse en la Figura 2.9.

Figura 2.9: Gráfica de $g(\alpha) = \cos(\alpha)$.



Fórmulas para la suma y la diferencia de ángulos. En contraposición a lo trabajado previamente, las fórmulas que enunciaremos a continuación no pueden deducirse de manera intuitiva a partir de las definiciones. Su prueba requiere algunas cuentas adicionales referidas a la distancia entre puntos de una circunferencia que, aunque no son complicadas, no incluiremos aquí.

Seno y coseno de la suma y la diferencia de ángulos

Para todo par de números reales α y β se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta); \quad (2.7)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta); \quad (2.8)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta); \quad (2.9)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta). \quad (2.10)$$



Las fórmulas (2.3), (2.4) y (2.5) enunciadas previamente fueron deducidas directamente a partir de las definiciones de seno y coseno. Como veremos a continuación, también pueden obtenerse como consecuencia de las identidades (2.7) a (2.10), junto con los valores del seno y del coseno en ciertos ángulos particulares, como π o $\pi/2$. La ventaja del primer enfoque es que no requiere recordar ni disponer de las fórmulas de suma y diferencia de ángulos. No obstante, si se cuenta con ellas, dichas propiedades pueden demostrarse fácilmente del modo que se muestra a continuación.

Ángulos suplementarios.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi - \alpha) &= \operatorname{sen}(\pi) \cos(\alpha) - \cos(\pi) \operatorname{sen}(\alpha) \quad \leftarrow \text{por (2.8)} \\ &= 0 \cdot \cos(\alpha) - (-1) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \quad \leftarrow \operatorname{sen}(\pi) = 0, \cos(\pi) = -1 \\ &= \operatorname{sen}(\alpha). \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= \cos(\pi) \cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\pi) \operatorname{sen}(\alpha) \quad \leftarrow \text{por (2.10)} \\ &= (-1) \cdot \cos(\alpha) + 0 \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \quad \leftarrow \cos(\pi) = -1, \operatorname{sen}(\pi) = 0 \\ &= -\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Ángulos que difieren en π .

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi + \alpha) &= \operatorname{sen}(\pi) \cos(\alpha) + \cos(\pi) \operatorname{sen}(\alpha) \quad \leftarrow \text{por (2.7)} \\ &= 0 \cdot \cos(\alpha) + (-1) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \quad \leftarrow \operatorname{sen}(\pi) = 0, \cos(\pi) = -1 \\ &= -\operatorname{sen}(\alpha). \end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}\cos(\pi + \alpha) &= \cos(\pi) \cos(\alpha) - \sin(\pi) \sin(\alpha) \quad \leftarrow \text{por (2.9)} \\ &= (-1) \cdot \cos(\alpha) + 0 \cdot \sin(\alpha) \quad \leftarrow \cos(\pi) = -1, \sin(\pi) = 0 \\ &= -\cos(\alpha).\end{aligned}$$

Ángulos complementarios.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\alpha) \quad \leftarrow \text{por (2.8)} \\ &= 1 \cdot \cos(\alpha) + 0 \cdot \sin(\alpha) \quad \leftarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ &= \cos(\alpha).\end{aligned}$$

De la misma manera:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\alpha) \quad \leftarrow \text{por (2.10)} \\ &= 0 \cdot \cos(\alpha) + 1 \cdot \sin(\alpha) \quad \leftarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ &= \sin(\alpha).\end{aligned}$$

La paridad e imparidad del coseno y del seno, expresadas en las igualdades (2.2) para **ángulos opuestos**, también pueden deducirse a partir de las fórmulas del seno y del coseno para la suma y diferencia de ángulos, ya que:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= \sin(0 - \alpha) = \sin(0) \cos(\alpha) - \cos(0) \sin(\alpha) \\ &= 0 \cdot \cos(\alpha) - 1 \cdot \sin(\alpha) \\ &= -\sin(\alpha).\end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos(0 - \alpha) = \cos(0) \cos(\alpha) + \sin(0) \sin(\alpha) \\ &= 1 \cdot \cos(\alpha) - 0 \cdot \sin(\alpha) \\ &= \cos(\alpha).\end{aligned}$$

No obstante, las fórmulas para el seno y coseno de ángulos opuestos se deducen de manera tan inmediata a partir de sus definiciones que resulta poco natural obtenerlas mediante las identidades de suma y diferencia. Además, la mayoría de las demostraciones clásicas de las igualdades (2.7) a (2.10) hacen uso de la paridad de las funciones trigonométricas, con lo cual se estaría apelando justamente a las propiedades que se pretenden establecer, salvo que se disponga de pruebas alternativas que eviten ese recurso. Dado que aquí

no nos detenemos en tales demostraciones, sugerimos en este caso remitirse directamente a las definiciones de seno y coseno.

La periodicidad enunciada en (2.1) también se deduce de manera directa a partir de la definición de seno y coseno ya que, como mencionamos, cada una de estas funciones toma el mismo valor en ángulos coterminales. Tales ángulos se obtienen sumando o restando cualquier número entero de giros completos, es decir, expresiones de la forma $2\pi n$, con n entero. Por este motivo, y dado que una demostración alternativa mediante las fórmulas de suma y resta de ángulos requeriría recurrir además a la inducción, no se recomienda apoyarse en dichas fórmulas para establecer la periodicidad. Sin embargo, su empleo sí puede ser útil en ejemplos puntuales, como por ejemplo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + 6\pi) &= \operatorname{sen}(\alpha) \cos(6\pi) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(6\pi) \\ &= \operatorname{sen}(\alpha) \cdot 1 + \cos(\alpha) \cdot 0 \\ &= \operatorname{sen}(\alpha).\end{aligned}$$

Ejercicios Secciones 2.1 y 2.2

1. Ubique en posición estándar los ángulos notables contenidos en el Cuadro 2.1.
2. Explique por qué es cierto que $\cos(3) \neq \cos(3^\circ)$. ¿Qué signo tiene cada miembro?
3. ¿Existe algún ángulo α tal que $\operatorname{sen}(\alpha) = \pi$? Justifique.
4. En cada caso se dan las coordenadas del punto P que determina un ángulo α en la circunferencia unitaria. Ubique de forma aproximada a P gráficamente y calcule $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$.

$$(a) P = \left(-\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right);$$

$$(c) P = \left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right);$$

$$(b) P = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right);$$

$$(d) P = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right).$$

5. Para cada ángulo α dado, calcule y ubique de forma estándar en un mismo sistema de ejes cartesianos los siguientes pares de ángulos:

(i) α y su opuesto;

(iii) α y su suplemento;

(ii) α y su complemento;

(iv) α y $\beta = \pi + \alpha$;

Los ángulos a considerar son:

$$(a) \alpha = \pi/6; \quad (b) \alpha = 20^\circ; \quad (c) \alpha = \pi/3.$$

6. Para cada uno de los ángulos $\alpha = \pi/6$, $\alpha = \pi/4$ y $\alpha = \pi/3$ use el Cuadro 2.1 y las propiedades para hallar el seno y el coseno de $-\alpha$, $\pi + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\alpha - \pi$ y $\frac{\pi}{2} - \alpha$.
7. ¿Existe un ángulo α tal que $\sin(\alpha) = \cos(\alpha) = \frac{1}{2}$? Justifique.
8. Sabiendo solamente que $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$, ¿puede determinar un valor único para $\cos(\alpha)$? Justifique.
9. Calcule $\cos(\alpha)$ sabiendo que $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ y que $\pi/2 < \alpha < \pi$.
10. Encuentre dos valores distintos para α , mayores que 2π , que satisfagan $\cos(\alpha) = 0$.
11. Encuentre dos valores distintos para α , menores que -2π , tales que $\cos(\alpha) = 1$.
12. Encuentre dos valores distintos para α , menores que -2π , tales que $\sin(\alpha) = 0$.
13. Encuentre dos valores distintos para α , mayores que 2π , que satisfagan $\sin(\alpha) = -1$.
14. Pruebe que las funciones $F(x) = c \cdot \sin(ax + b)$ y $G(x) = c \cdot \cos(ax + b)$ tienen período $p = 2\pi/|a|$ ($a, c \neq 0$). Esto es, demuestre que $F(x + p) = F(x)$ y que $G(x + p) = G(x)$ para todo x . ¿Qué valor máximo toman estas funciones? Este valor máximo se llama **amplitud**. Puede observar el efecto de los parámetros a , b y c ingresando a <https://www.geogebra.org/m/vmqj2ah9>.

2.3. Otras funciones trigonométricas

Para definir el resto de las funciones trigonométricas seguimos el mismo criterio que para el seno y el coseno: se ubica el ángulo α en forma estándar medido en radianes, y el punto $P = (x_0, y_0)$ sobre la circunferencia unitaria que corresponde a α (ver Figura 2.2). Se definen:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_0}{x_0}, \quad \sec(\alpha) = \frac{1}{x_0}, \quad \cot(\alpha) = \frac{x_0}{y_0}, \quad \csc(\alpha) = \frac{1}{y_0}, \quad (2.11)$$

siempre que el valor exista (es decir, cuando el denominador no sea cero).

Puesto que $x_0 = \cos(\alpha)$ e $y_0 = \sin(\alpha)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, & \sec(\alpha) &= \frac{1}{\cos(\alpha)}, \\ \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}, & \csc(\alpha) &= \frac{1}{\sin(\alpha)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

para cada α en el que estas cantidades existan. Sabemos que $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ existen para todo α , por lo que la única razón por la que alguno de los cocientes no existiría es que el denominador se anule. Esto determina el dominio de cada una de las funciones trigonométricas.

A continuación presentamos algunas propiedades de cada una y sus gráficas. Utilizaremos lo que ya conocemos de las funciones seno y coseno para hallar el dominio, período, paridad, raíces y demás características de las otras funciones trigonométricas. Trabajaremos con mayor detalle la primera para que, imitando el procedimiento, se resuelvan como ejercicio las restantes.

 **Función tangente.** El dominio de esta función serán todos los números reales α que no anulen al denominador, es decir, debemos excluir los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, esto es, los de la forma $\alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ para n entero. Como puede verse en la Figura 2.10, si trazamos rectas verticales en estos valores se obtienen las **asíntotas verticales**³ para la función. No es difícil comprobar analíticamente que el conjunto imagen de la tangente son todos los números reales. Además, por ser un cociente, las raíces de la tangente son las mismas que las del numerador (función seno), esto es, los múltiplos enteros de π .

La tangente resulta ser una función impar, por ser el cociente entre una impar (el seno) y una par (el coseno). En efecto, para cada α en su dominio tenemos que:

$$\begin{aligned} \tan(-\alpha) &= \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} && \leftarrow \text{por la definición de la tangente} \\ &= \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} && \leftarrow \text{porque el seno es impar y el coseno es par} \\ &= -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ &= -\tan(\alpha). && \leftarrow \text{por la definición de la tangente} \end{aligned}$$

³De manera informal, se llama **asíntota vertical** de una función a una recta vertical $x = c$ que hace que la gráfica de alguna rama de dicha función tienda a infinito (ya sea por valores positivos o negativos), al considerar valores de x cercanos a c (por izquierda, por derecha o por ambos lados). Este concepto se trabaja formalmente mediante la noción de límite.

Por último, la tangente tiene período π y lo demostraremos a continuación:

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \pi) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} && \leftarrow \text{por la definición de la tangente} \\
 &= \frac{-\operatorname{sen}(\alpha)}{-\cos(\alpha)} && \leftarrow \text{por (2.4)} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\
 &= \tan(\alpha), && \leftarrow \text{por la definición de la tangente}
 \end{aligned}$$

para todo α en el dominio (lo que implica que $\alpha + \pi$ también pertenece a dicho dominio).

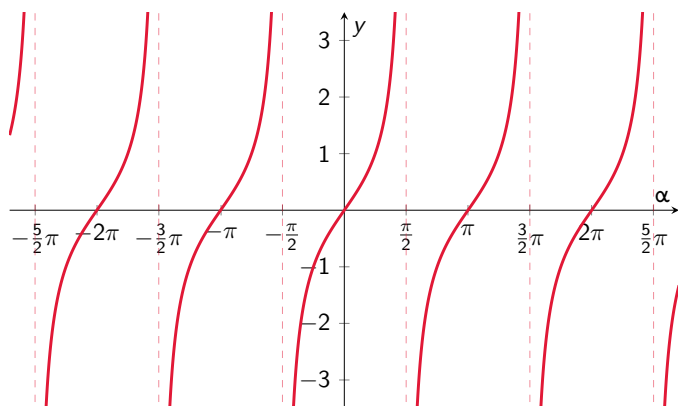


Figura 2.10: Gráfica de $f(\alpha) = \tan(\alpha)$.



Función secante. La secante es la inversa multiplicativa del coseno. Por eso, al igual que la tangente, el dominio de esta función serán todos los números reales excepto los de la forma $\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ para n entero, en donde estarán las asíntotas verticales. Ya que el numerador nunca se anula (vale 1), la secante no posee raíces. Además, resulta ser una función par con período $p = 2\pi$, y puede verse que su imagen es $\mathbb{R} - (-1, 1)$. En la Figura 2.11 se incluye su gráfica así como la del coseno para observar la relación entre ellas.

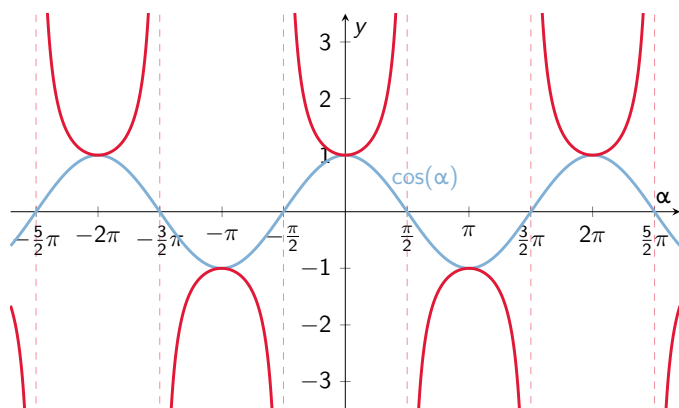


Figura 2.11: Gráfica de $f(\alpha) = \sec(\alpha)$.



Función cosecante. La cosecante es la inversa multiplicativa del seno. Por eso su dominio será el conjunto de todos los números reales que no anulen a la función seno, es decir, se deben excluir aquellos de la forma $\alpha = n\pi$ para n entero, en donde estarán las asíntotas verticales. Ya que el numerador nunca se anula, la cosecante no posee raíces. Es también una función impar con período $p = 2\pi$, y puede probarse que su imagen es $\mathbb{R} - (-1, 1)$. En la Figura 2.12 se incluye su gráfica junto con la del seno.

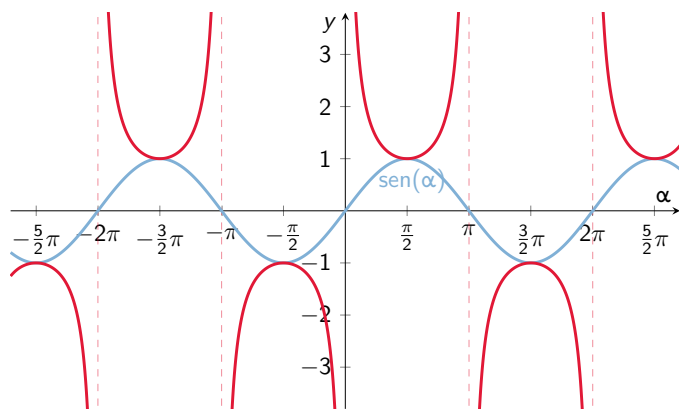


Figura 2.12: Gráfica de $f(\alpha) = \csc(\alpha)$.



Función cotangente. La cotangente es la inversa multiplicativa de la tangente. Por ello, su dominio coincide con el de la cosecante: todos los números reales excepto los de la forma $\alpha = n\pi$ para n entero, donde la función presenta asíntotas verticales. sus raíces son los valores que anulen al numerador, es decir, al coseno. Esto ocurre en todos los múltiplos impares de $\pi/2$. Al igual que la tangente, es una función impar con período $p = \pi$, y

su imagen es $\mathbb{R}$. Su gráfica se muestra en la Figura 2.13, junto con la de la función tangente para su comparación.

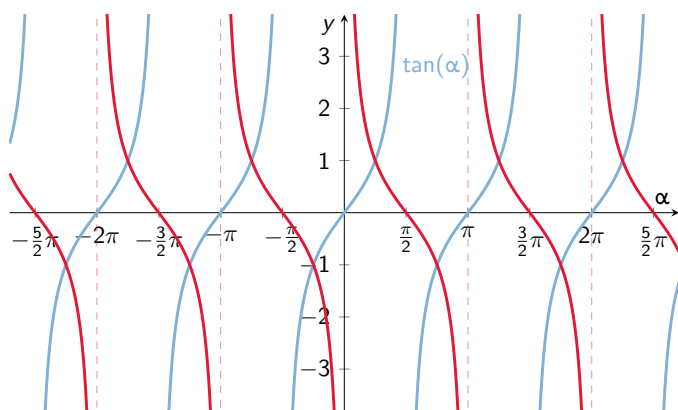


Figura 2.13: Gráfica de $f(\alpha) = \cot(\alpha)$.

Ejercicios Sección 2.3

1. Imitando lo realizado para la tangente, pruebe que la cotangente y la cosecante son funciones impares, y que la secante es par.
2. Pruebe que las funciones secante y cosecante son 2π -periódicas, y que el período de la cotangente es π .
3. Si se sabe que $\sin(\alpha) = \frac{1}{4}$, calcule el valor de $\csc(\alpha)$ usando identidades.
4. ¿Puede existir un valor α tal que $\sec(\alpha) = \frac{1}{2}$? Justifique su respuesta.
5. Determine el cuadrante al que pertenece un ángulo β sabiendo que $\sin(\beta) < 0$ y $\sec(\beta) > 0$.
6. Sabiendo que $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ y $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$, halle el valor de las otras cuatro funciones trigonométricas para α usando identidades.
7. Sabiendo que $\sin(\alpha) = -\frac{7}{25}$ y que $\tan(\alpha) < 0$, halle el valor de las otras cuatro funciones trigonométricas para α .
8. Sean $P = (0, 1)$ y $Q = (-1, 0)$ los puntos correspondientes a α y β sobre la circunferencia trigonométrica. Halle, cuando sea posible, las seis funciones trigonométricas para α y β a partir de sus definiciones. Cuando no sea posible, indique por qué. ¿Qué valor poseen los ángulos α y β sabiendo que pertenecen a $[0, 2\pi)$?
9. Halle dos raíces para la tangente y dos para la cotangente, que no pertenezcan a $[-2\pi, 2\pi]$.

Capítulo 3

Ecuaciones e identidades trigonométricas

Una **identidad** es una igualdad algebraica que se verifica para cualquier valor de la variable o variables involucradas. Por ejemplo

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

es una identidad, ya que es válida para cualquier elección de números reales a y b . En cambio, una **ecuación** es una igualdad algebraica que se verifica solo para determinados valores de la incógnita o incógnitas que aparecen en ella. Resolver una ecuación es encontrar el valor o los valores de las incógnitas tales que se cumple la igualdad. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 25 = 0$ tiene como conjunto solución a $S = \{-5, 5\}$. Esto significa que la igualdad se verifica solo cuando se reemplaza a x por 5 o por -5 .

Vimos ya algunas identidades trigonométricas, como las dadas en (2.1) a (2.6) o (2.12), obtenidas directamente de la definición de las funciones, y hemos enunciado otras como las contenidas en (2.7) a (2.10).

En cambio, si consideramos la igualdad $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$, ya no es válida para cualquier valor de α . Por ejemplo, tenemos que

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \quad \text{pero} \quad \sin(\pi) \neq \cos(\pi).$$

Así, $\alpha = \pi/4$ es una solución para la ecuación $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$, mientras que $\alpha = \pi$ no lo es. Sin embargo, las funciones seno y coseno se intersecan en infinitos valores (ver Figura 3.3). Resolver la ecuación significa hallar *todos* los valores para los que se cumple la igualdad. A continuación aprenderemos a resolver este tipo de ecuaciones, que involucran funciones trigonométricas.

3.1. Ecuaciones trigonométricas

En muchas aplicaciones reales necesitaremos resolver el problema inverso al de hallar la imagen de un número a través de una función trigonométrica. Como vimos en el Capítulo 1, si queremos hallar *un* ángulo α tal que $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}$, es suficiente con utilizar la tecla $\boxed{\sin^{-1}}$ de la calculadora, para obtener que $\alpha = \pi/6$ o $\alpha = 30^\circ$, según si está seleccionado el modo radianes o grados, respectivamente.

 También mencionamos que, para no confundir $\text{sen}^{-1}(\alpha)$ con $(\text{sen}(\alpha))^{-1} = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} = \text{csc}(\alpha)$, utilizaremos aquí el nombre **arcoseno** para esta función, y la denotaremos como $\text{arcsen}(\alpha)$.

Así, para este ejemplo, usando la calculadora en radianes obtenemos

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\text{calculadora}} \quad \alpha = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}. \quad (3.1)$$

Ya sabemos que la función seno es periódica, por lo que toma infinitas veces cada valor en $[-1, 1]$. Entonces, al mirar el resultado arrojado en (3.1), nos preguntamos cómo podemos obtener *todos* los valores de α para los que $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}$. En otras palabras, veremos cómo hallar el conjunto solución de esta ecuación. Una primera idea, por ser 2π -periódica, sería tomar todos los de la forma

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,$$

para n entero. Sin embargo, rápidamente observamos que para ningún entero n se obtiene el valor α^* dado en la Figura 3.1 (porque $\frac{\pi}{6}$ y α^* se encuentran a distancia menor que π) quien, como se ve allí, también satisface la igualdad.

Analicemos la siguiente conversación.



Necesito hallar *todas* las soluciones de $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}$, pero la calculadora solo me da $\alpha = \frac{\pi}{6}$.



Si pudiéramos hallar también el valor de α^* , entonces obtendríamos *todas* sumando múltiplos enteros de 2π a *cada uno* de estos valores.



¿Qué nos asegura que podemos obtener *todas* las soluciones a partir de estas dos?



Porque son las dos únicas soluciones en $[0, 2\pi)$ y, luego, todo se repite de forma 2π -periódica.



Pero... ¿cómo estamos tan seguros de que hay *exactamente* dos soluciones en $[0, 2\pi)$?



Lo que se ve en el gráfico refleja la definición del seno: ¿cuántas veces «pasa» por la misma altura el punto P de la Figura 2.1 mientras da la primera vuelta? En este caso, la altura es $\frac{1}{2}$.

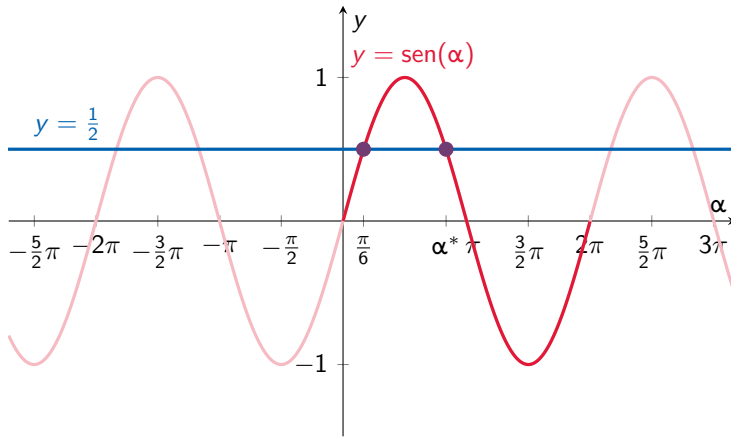


Figura 3.1: Soluciones $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ en $[0, 2\pi]$.



¡Exactamente dos veces! Para α en el primer cuadrante y para α^* en el segundo. ¿De qué forma podemos hallar el valor de α^* ? Lo que nos da la calculadora debe poder ayudarnos...



¡Efectivamente! Ese valor, junto con la igualdad (2.3) para el seno, nos permitirá calcular α^* .



Según esa fórmula, $\alpha^* = \pi - \alpha = \frac{5}{6}\pi$ y, entonces, el conjunto solución de la ecuación es

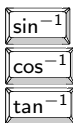
$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{6}\pi + 2n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

donde el símbolo $\cup$ denota la unión de los dos conjuntos.

Lo anterior ilustra el procedimiento para resolver una ecuación tan simple como $\sin(\alpha) = k$, con $k = \frac{1}{2}$. Veremos que con el resto de las funciones trigonométricas se procede de forma similar, combinando el resultado de la calculadora con las propiedades estudiadas, para no «perder» soluciones.



Para resolver ecuaciones, además de manejar las propiedades (las que, repetimos, pueden deducirse intuitivamente a partir de las definiciones en caso de no recordarlas), será necesario saber a qué intervalo pertenecen los resultados que arroja la calculadora. Nos centraremos en el arcoseno, arcocoseno y arcotangente, que serán suficientes para resolver los problemas:



Devuelve valores en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow$ cuadrantes 1 y 4.

Devuelve valores en $[0, \pi] \rightarrow$ cuadrantes 1 y 2.

Devuelve valores en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$ cuadrantes 1 y 4.

El motivo de lo anterior, donde supusimos que la calculadora está en modo radianes, tiene que ver con funciones inversas. Veremos esto con más detalle en el Capítulo 4. Si la calculadora está en modo grados, los resultados corresponderán a los mismos cuadrantes pero expresados en grados.

 Entonces la calculadora arrojará como resultado solamente **un** valor, por lo que deberemos obtener los restantes si queremos **todas** las soluciones, o adaptar lo obtenido al cuadrante correspondiente en caso de ser necesario. Mostramos el proceder en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 19. Ecuación trigonométrica con el coseno. Supongamos que buscamos α y β tales que $\cos(\alpha) = 0.5$ y $\cos(\beta) = -0.5$. Pero, además, se nos informa que α pertenece al cuarto cuadrante, mientras que β está en el tercero. ¿Qué valores tienen α y β , expresados en grados?

Solución: Los resultados arrojados por la calculadora, en modo grados, son:

$$\alpha = \arccos(0.5) = 60^\circ; \quad \beta = \arccos(-0.5) = 120^\circ.$$

Ninguno de los dos pertenece a los respectivos cuadrantes indicados en el enunciado, por lo que deberemos adaptar adecuadamente estos valores. Para ello, haremos uso de las propiedades de las funciones.

- **Para α :** sabemos que el coseno es una función par, por lo que $\cos(60^\circ) = \cos(-60^\circ)$. Así, el ángulo buscado es $\alpha = -60^\circ$, que sí está en el cuarto cuadrante. Si queremos expresarlo como un ángulo positivo, hacemos $\alpha = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$. De cualquiera de las dos formas, corresponde a un ángulo en el cuarto cuadrante, como queríamos.
- **Para β :** al igual que para α , podemos tomar $\beta = -120^\circ$ o $\beta = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$, que corresponden a ángulos en el tercer cuadrante y tienen el mismo coseno que 120° .

Ejemplo 20. Ecuación trigonométrica con la tangente. Resuelva la ecuación $\tan(\alpha) = -1$. Luego, halle una solución α^* que pertenezca al intervalo $[\pi/2, \pi]$, y otra solución β^* que esté en el cuarto cuadrante. ¿Existe alguna en el tercer cuadrante?

Solución: La tangente tiene período π y es inyectiva en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, por lo que será suficiente hallar un número real α en dicho intervalo tal que $\tan(\alpha) = -1$, y sumar múltiplos enteros de π para obtener todas las demás soluciones. Si usamos la calculadora en modo radianes, obtenemos

$$\alpha = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Así, el conjunto solución es $S = \{n\pi - \frac{\pi}{4} : n \in \mathbb{Z}\}$. Tomando $n = 1$ obtenemos $\alpha^* = \frac{3}{4}\pi$, que pertenece al intervalo deseado. Con $n = 2$ tenemos

$\beta^* = \frac{7}{4}\pi$ que corresponde a un ángulo en el cuarto cuadrante. En el tercer cuadrante, tanto el seno como el coseno son negativos, por lo que la tangente es positiva. Así, ningún ángulo en el tercer cuadrante tendrá tangente igual a -1 .

Aunque ya mostramos al comienzo de la sección cómo trabajar con el seno, incluimos un ejemplo adicional.

Ejemplo 21. Ecuación trigonométrica con el seno. Halle un ángulo α que no pertenezca al cuarto cuadrante y que satisfaga $\sin(\alpha) = -0.5$. Expresé el resultado en grados.

Solución: Si utilizamos la calculadora obtenemos

$$\alpha = \arcsen(-0.5) = -30^\circ,$$

que representa un ángulo en el cuarto cuadrante. El seno de ángulos que pertenecen al primer o segundo cuadrante es positivo, por lo que debemos encontrar el otro resultado en el tercer cuadrante. Para hallarlo, recordemos que el seno de ángulos suplementarios coincide. Así, tomamos

$$\alpha^* = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - (-30^\circ) = 210^\circ$$

que, como esperábamos, pertenece al tercer cuadrante.

 En los ejemplos previos ilustramos la forma de resolver ecuaciones trigonométricas básicas a partir del resultado de la calculadora: **con el seno usamos que ángulos suplementarios tienen la misma imagen, para el coseno utilizamos que ángulos opuestos tienen imágenes iguales.** Luego, sumando múltiplos enteros de 2π obtenemos todos los resultados. Para la tangente, usamos que tiene período π y que ninguno de sus valores se repite en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, es decir, es **inyectiva allí**. Aplicaremos esto en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 22. Halle todas las soluciones reales de las ecuaciones $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$ y $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}$.

Solución: En el Ejemplo 21 vimos que la calculadora (ahora en radianes) arroja como resultado

$$\alpha = \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Vimos, además, que su ángulo suplementario tiene el mismo seno, así que calculamos

$$\alpha^* = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{6}\pi.$$

Así, todas las soluciones reales se obtienen sumando a estos dos valores múltiplos enteros de 2π , es decir, están dadas por

$$-\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad \frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Ahora resolvamos la ecuación $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}$. Como en el Ejemplo 19, pero con la calculadora en modo radianes, obtenemos

$$\beta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi.$$

Sabemos que su ángulo opuesto tiene el mismo coseno, así que calculamos

$$\beta^* = -\frac{2}{3}\pi.$$

Por lo tanto, todas las soluciones reales se obtienen sumando a estos dos valores múltiplos enteros de 2π , es decir, están dadas por

$$\frac{2}{3}\pi + 2n\pi, \quad -\frac{2}{3}\pi + 2n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Ejemplo 23. Cuando lo hallado no coincide con la respuesta del libro.

Si buscamos en cualquier libro o software matemático las soluciones de la ecuación $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$ seguramente no coincidan con las dadas en (3.2). Esto se debe a que, en general, se suman múltiplos enteros de 2π a las dos soluciones pertenecientes al intervalo $[0, 2\pi)$. Debido al uso de calculadora, de los dos valores «iniciales» hallados en el Ejemplo 22 solamente α^* está en dicho intervalo. Para obtener un ángulo coterminal con α dentro de $[0, 2\pi)$, simplemente debemos sumarle 2π :

$$\tilde{\alpha} = 2\pi + \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi.$$

Así, las soluciones a la ecuación $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$ pueden expresarse también como

$$\frac{11}{6}\pi + 2n\pi, \quad \frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

En el Ejercicio 2 se verá que tanto (3.2) como (3.4) generan los mismos resultados. Si bien ninguna de las dos es incorrecta, debe recordarse que la última es más usada y puede ser el motivo por el cual lo hallado por uno no coincida con la respuesta dada en este libro o en otros sitios.

Algo similar ocurre para el coseno. De los dos valores β y β^* hallados en el Ejemplo 22, solo uno de ellos pertenece a $[0, 2\pi)$. El ángulo coterminal con β^* dentro de dicho intervalo es

$$\tilde{\beta} = 2\pi + \beta^* = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi.$$

Así, las soluciones a la ecuación $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ también pueden escribirse como

$$\frac{2}{3}\pi + 2n\pi, \quad \frac{4}{3}\pi + 2n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

Al igual que para el caso del seno, tanto (3.3) como (3.5) son correctas, pero la última es más usada.

Ejemplo 24. Hallando α conociendo a P . Sean $P_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, $P_2 = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ y $P_3 = (-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$ los puntos sobre la circunferencia unitaria correspondientes a α_1 , α_2 y α_3 , respectivamente. Halle dichos ángulos en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

Solución: Para cada ángulo sabemos que su coseno es la primera coordenada del punto correspondiente, mientras que la segunda coordenada es el valor de su seno. En cada caso, usaremos la función que más nos convenga, para tener que adaptar lo menos posible el resultado. Explicamos mejor esto a continuación.

- P_1 pertenece al cuarto cuadrante. La calculadora devuelve ángulos en dicho cuadrante al usar el arcoseno (también el arcotangente). Entonces, lo más directo es hacer:

$$\text{sen}(\alpha) = -\frac{3}{5} \quad \xrightarrow{\text{calculadora}} \quad \alpha = \arcsen(-\frac{3}{5}) \approx -36^\circ 52' 12''.$$

Si bien ya está en el cuadrante correcto, por periodicidad y solo para obtener un ángulo dentro del intervalo indicado en el enunciado, sumamos 360° a α , obteniendo $\alpha_1 \approx 323^\circ 7' 48''$.

- P_2 pertenece al segundo cuadrante, por lo que lo más directo es usar ahora el arcocoseno, que nos dará un ángulo en dicho cuadrante:

$$\cos(\alpha) = -\frac{4}{5} \quad \xrightarrow{\text{calculadora}} \quad \alpha = \arccos(-\frac{4}{5}) \approx 143^\circ 7' 48''.$$

Así, $\alpha_2 \approx 143^\circ 7' 48''$.

- P_3 pertenece al tercer cuadrante, y ninguna de las funciones inversas devuelve un valor allí mediante la calculadora, por lo que deberemos adaptar el resultado a dicho cuadrante sin importar cuál de ellas usemos. La «adaptación» más sencilla la requiere la tangente ya que, para hacerla, solamente habrá que sumar 180° (o π radianes) a lo obtenido, debido a su período:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{12}{5} \quad \xrightarrow{\text{calculadora}} \quad \alpha = \arctan(\frac{12}{5}) \approx 67^\circ 22' 49''.$$

Para obtener un ángulo en el tercer cuadrante, sumamos 180° a este valor para obtener $\alpha_3 \approx 247^\circ 22' 49''$.

Ejemplo 25. Pendiente de una recta. Dada la recta $y = mx$, sea α el ángulo no negativo con lado inicial sobre el semieje positivo x y con lado terminal sobre la recta (ver Figura 3.2). Pruebe que $m = \tan(\alpha)$.

Solución: Sea $P = (x_0, y_0)$ el punto determinado por α sobre la circunferencia trigonométrica. Es decir, P surge de la intersección entre la recta y la

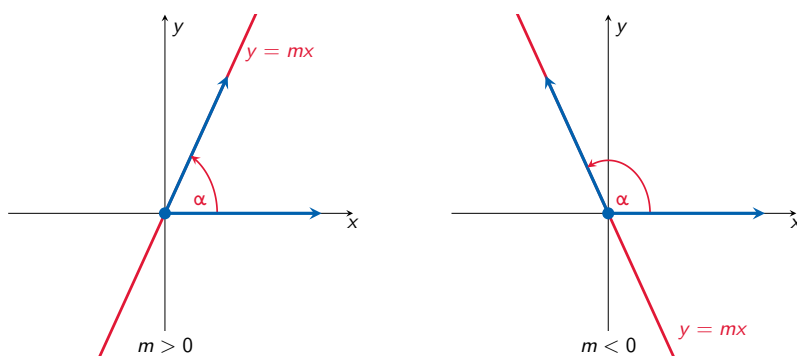


Figura 3.2: Ángulo no negativo determinado por una recta por el origen.

circunferencia unitaria. Por estar sobre la recta, sus coordenadas satisfacen la relación $y_0 = mx_0$. Por otro lado, por la definición de tangente tenemos que

$$\tan(\alpha) = \frac{y_0}{x_0} = \frac{mx_0}{x_0} = m,$$

como queríamos ver.

Ejemplo 26. Determine el ángulo α del segundo cuadrante que resulta de la intersección de la recta de ecuación $y = -\sqrt{3}x$ con la circunferencia unitaria. Halle, además, el ángulo β del cuarto cuadrante resultante de dicha intersección. Expresé los resultados en radianes y en grados.

Solución: Para tener un bosquejo gráfico de la situación, consideramos la imagen de la derecha en la Figura 3.2, pues la recta tiene pendiente negativa $m = -\sqrt{3}$. Allí vimos que $\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$. Usando la calculadora en modo radianes obtenemos que $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, pero este valor corresponde a un ángulo del cuarto cuadrante. Para adaptarlo al segundo cuadrante simplemente le sumamos π , ya que la tangente es π -periódica y estamos buscando una solución en el segundo cuadrante:

$$\alpha = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi.$$

En grados, el ángulo es $\alpha = 120^\circ$. El ángulo β buscado es, precisamente, el arrojado por la calculadora: $\beta = -\frac{\pi}{3}$, o bien, $\beta = -60^\circ$.

Ejemplo 27. Ecuación trigonométrica con el argumento modificado.

Resuelva la ecuación $\cos(2\alpha) = 0$, y encuentre luego aquellas soluciones que pertenezcan a $[0, 2\pi)$.

Solución: Este ejemplo es muy sencillo pero su único objetivo es ilustrar el cambio de variable en el argumento donde, ahora, no aparece solo α . Por eso, llamemos $t = 2\alpha$. Sabemos que el conjunto solución de la ecuación $\cos(t) = 0$ está formado por todos los valores de la forma

$$t = n\pi + \frac{\pi}{2},$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Puesto que $t = 2\alpha$, obtenemos

$$2\alpha = n\pi + \frac{\pi}{2},$$

es decir, las soluciones de la ecuación son todas las de la forma

$$\alpha = n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

para n entero.

Ahora resta ver cuáles de ellas pertenecen al intervalo $[0, 2\pi)$. Para ello podemos probar diferentes valores para n y ver si el resultado está en el intervalo (con cuidado de no olvidarnos de ninguna), o podemos hacerlo de forma general resolviendo para n la doble desigualdad:

$$0 \leq n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < 2\pi.$$

Al resolverla se obtiene $-\frac{1}{2} \leq n < \frac{7}{2}$. Sin embargo, no debemos olvidar que solamente podemos tomar los valores *enteros* comprendidos en este intervalo: $n = 0, 1, 2, 3$. Así, las soluciones dentro de $[0, 2\pi)$ son

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi, \quad \alpha = \frac{5}{4}\pi, \quad \alpha = \frac{7}{4}\pi.$$

 Para resolver ecuaciones trigonométricas más complejas se utilizan técnicas algebraicas para convertir la dada en una **básica**, esto es, una de la forma $\sin(\alpha) = k$, $\cos(\alpha) = k$ o $\tan(\alpha) = k$. Ilustraremos esto en los siguientes ejemplos, que contienen distintas técnicas de uso frecuente.

Ejemplo 28. Resuelva la ecuación $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$.

Solución: Observar primero que ninguna raíz de la función seno es a su vez raíz de la función coseno. Así, ningún valor de α tal que $\cos(\alpha) = 0$ es solución de la ecuación. Esto nos permite suponer $\cos(\alpha) \neq 0$ y dividir ambos miembros de la ecuación por $\cos(\alpha)$, obteniendo:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 1,$$

es decir, $\tan(\alpha) = 1$. Mediante la calculadora obtenemos $\alpha = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Como la tangente es π -periódica e inyectiva en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, el conjunto solución de la ecuación es

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

como se ilustra en la Figura 3.3.

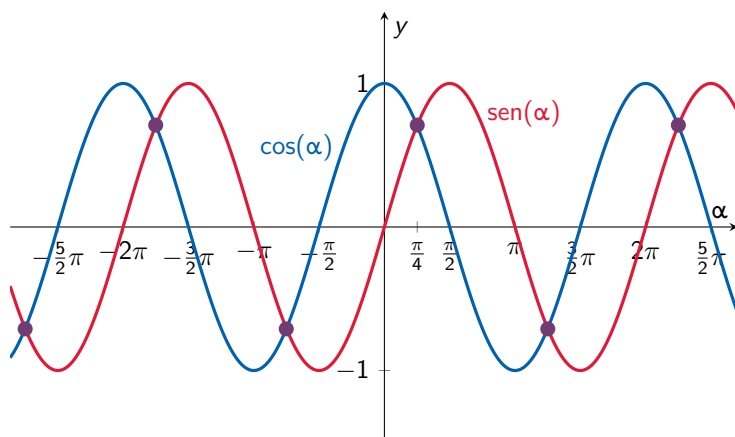


Figura 3.3: Soluciones de $\text{sen}(\alpha) = \text{cos}(\alpha)$ como intersección de funciones.

👉 En las definiciones de las funciones trigonométricas seno y coseno utilizamos la letra α para indicar la variable independiente, porque indica un ángulo y solemos emplear letras griegas para referirnos a ellos. Por supuesto, podemos elegir cualquier nombre para denotar esta variable. Es usual llamarle x o también t , puesto que muchos problemas reales involucran funciones trigonométricas cuya variable independiente es el tiempo. Recordemos que **si la medida en grados no está especificada, entonces las soluciones de una ecuación trigonométrica deben expresarse en radianes (es decir, como números reales)**.

Ejemplo 29. Resolviendo con factor común. Resuelva la ecuación $\text{sen}(x) \tan(x) = \text{sen}(x)$.

Solución: Reescribimos la ecuación como

$$\text{sen}(x) \tan(x) - \text{sen}(x) = 0$$

$$\text{sen}(x)(\tan(x) - 1) = 0. \quad \leftarrow \text{extraemos } \text{sen}(x) \text{ como factor común}$$

Por la propiedad del producto cero, la última igualdad se cumple si y solo si uno o ambos factores son nulos:

$$\text{sen}(x) = 0 \quad \text{o} \quad \tan(x) - 1 = 0.$$

La primera igualdad se cumple si $x = n\pi$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. La segunda equivale a $\tan(x) = 1$ y la resolvimos en el ejemplo anterior, donde obtuvimos $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, con n entero. Así, el conjunto de todas las soluciones es la unión de ambos conjuntos solución, es decir,

$$S = \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ejemplo 30. Resolviendo con factor común. Halle las soluciones en el intervalo $[0, \pi]$ de la ecuación $\cot(x) \cos^2(x) = 2 \cot(x)$. ¿Existe otra solución en $[0, 2\pi)$?

Solución: Como en el ejemplo anterior, reescribimos la ecuación para luego factorizar y aplicar la propiedad del producto cero:

$$\cot(x) \cos^2(x) - 2 \cot(x) = 0$$

$$\cot(x)(\cos^2(x) - 2) = 0. \quad \leftarrow \text{extraemos } \cot(x) \text{ como factor común}$$

La igualdad vale si y solo si

$$\cot(x) = 0 \quad \text{o} \quad \cos^2(x) - 2 = 0.$$

Para resolver la primera igualdad recordamos que $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Sabemos que una fracción es cero si y solo si su numerador es cero, siempre que el denominador esté definido y no se anule. Así,

$$\cot(x) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \cos(x) = 0.$$

Si recordamos las raíces del coseno, o usando la calculadora si no, la única solución en $[0, \pi]$ es $x = \frac{\pi}{2}$. Ahora consideramos la opción $\cos^2(x) - 2 = 0$:

$$\cos^2(x) - 2 = 0$$

$$\cos^2(x) = 2 \quad \leftarrow \text{por transposición de términos}$$

$$\sqrt{\cos^2(x)} = \sqrt{2} \quad \leftarrow \text{aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros}$$

$$|\cos(x)| = \sqrt{2} \quad \leftarrow \text{no olvide que } \sqrt{t^2} = |t|$$

$$\cos(x) = \pm\sqrt{2}.$$

Puesto que la imagen del coseno es $[-1, 1]$, no existen valores de x que verifiquen esta igualdad. Así, el único valor que satisface la ecuación dada es el que hallamos antes, y el conjunto solución en $[0, \pi]$ es $S = \{\frac{\pi}{2}\}$. Así, para determinar si existe otra solución en $[0, 2\pi)$, basta con analizar la igualdad $\cos(x) = 0$. Utilizando la paridad del coseno, se obtiene $x = -\frac{\pi}{2}$. Luego, considerando su ángulo coterminal, resulta $x = \frac{3}{2}\pi$ como otra solución en el intervalo mencionado.

Ejemplo 31. Aplicando resolvente. Resuelva la ecuación

$$2 \sin^2(x) + 3 \cos(x) - 3 = 0.$$

Solución: De la identidad pitagórica sabemos que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. Entonces la ecuación se transforma en

$$2(1 - \cos^2(x)) + 3 \cos(x) - 3 = 0 \quad \leftarrow \text{reemplazamos } \sin^2(x)$$

$$-2 \cos^2(x) + 3 \cos(x) - 1 = 0. \quad \leftarrow \text{operamos}$$

Esta es una ecuación «cuadrática en $\cos(x)$ », lo que significa que haciendo el cambio $t = \cos(x)$, obtenemos

$$-2t^2 + 3t - 1 = 0,$$

que es una ecuación cuadrática en t . Aplicamos la regla de la resolvente para calcular sus soluciones:

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 \pm 1}{-4}.$$

De esto obtenemos $t_1 = \frac{1}{2}$ y $t_2 = 1$. Ahora recordamos que $t = \cos(x)$, así que resolvemos esta nueva ecuación para cada uno de los valores de t hallados.

- $t_1 = \frac{1}{2}$. En el Ejemplo 19 ya hallamos las soluciones de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ en $[0, 2\pi)$. Expresadas en radianes, estas son $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{5}{3}\pi$. Para hallar el resto basta con sumar múltiplos enteros de 2π a cada una de ellas:

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad \frac{5}{3}\pi + 2n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

- $t_2 = 1$. La ecuación $\cos(x) = 1$ tiene una *única* solución en $[0, 2\pi)$, que es $x = 0$. Esto puede concluirse a partir de la definición del coseno. Sin embargo, si nos da más seguridad, también podemos razonar como antes: de la solución $x = \arccos(1) = 0$ dada por la calculadora, usando la paridad del coseno, obtenemos su opuesto $-x$ como otra solución. En este caso, es $-x = -0 = 0$, lo que coincide con lo afirmado. Así, todas las soluciones son de la forma

$$0 + 2n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

De todo lo anterior concluimos que las soluciones de la ecuación son

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad \frac{5}{3}\pi + 2n\pi, \quad 2n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicios Sección 3.1

1. Halle *todas* las soluciones de cada ecuación, justificando todo lo aplicado.

(a) $\cos(t) = -1$

(d) $\sec(\beta) = \sqrt{2}$

(b) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(e) $\csc(u) = \sqrt{2}$

(c) $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$

(f) $\cot(w) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Aunque no constituye una demostración, complete la siguiente tabla para observar que los conjuntos $\{-\frac{\pi}{6} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ y $\{\frac{11}{6}\pi + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ son iguales:

	$n = -3$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$-\frac{\pi}{6} + 2n\pi$								
$\frac{11}{6}\pi + 2n\pi$								

3. Aunque no constituye una demostración, complete la siguiente tabla para observar que los conjuntos $\{-\frac{2}{3}\pi + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ y $\{\frac{4}{3}\pi + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ coinciden:

	$n = -3$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$-\frac{2}{3}\pi + 2n\pi$								
$\frac{4}{3}\pi + 2n\pi$								

4. Resuelva las siguientes ecuaciones, transformando la dada en alguna de las tres trabajadas en los Ejemplos 20 y 23.

(a) $2 \cos(t - \frac{\pi}{3}) = -1$

(d) $\cot(3t) + 1 = 0$

(b) $\sec(4t - \frac{\pi}{4}) = -2$

(e) $2 \cos(2t) + 1 = 0$

(c) $\csc(t + \frac{\pi}{4}) + 2 = 0$

(f) $\sec(2t - \pi) \sin(2t - \pi) = -1$

5. Encuentre todas las soluciones de $\cos(t)(2 \sin(t) + 1) = 0$.
6. Sean $P_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ y $P_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ los puntos sobre la circunferencia unitaria correspondientes a α_1 , α_2 y α_3 , respectivamente. Halle dichos ángulos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$. *Sugerencia:* vea el Ejemplo 24.
7. Halle las soluciones de $4 \sin^2(x) \tan(x) - \tan(x) = 0$ que pertenezcan a $[0, 2\pi)$. *Sugerencia:* vea el Ejemplo 30.
8. Resuelva la ecuación $2 \cos^2(\beta) - 7 \cos(\beta) + 3 = 0$. *Sugerencia:* vea el Ejemplo 31.
9. Suponga que se quiere resolver la ecuación

$$\cos^2(\alpha) = \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (3.6)$$

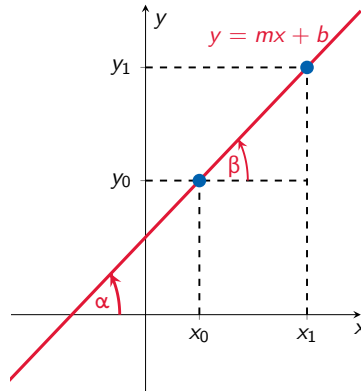
y que, para ello, se dividen ambos miembros de la igualdad por $\cos(\alpha)$, para obtener

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha),$$

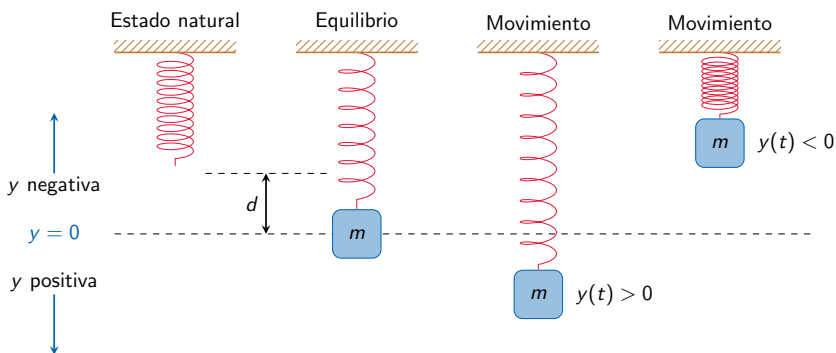
que está ya resuelta en el Ejemplo 28. Así, concluimos que el conjunto solución para la ecuación (3.6) es $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

- (a) Compruebe que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ es solución de la ecuación original (3.6).
 - (b) Pruebe que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ no es un elemento de S , es decir, que no existe ningún número entero n tal que $\alpha = \frac{\pi}{4} + n\pi$.
 - (c) Demuestre que todo múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ es solución de (3.6), pero no pertenece a S .
 - (d) Como vemos, hemos «perdido» infinitas soluciones al resolver la ecuación. ¿Dónde ocurrió esto? ¿Cómo se evita?
 - (e) Escriba el conjunto solución de (3.6).
10. Halle todas las soluciones de $2\sin^2(t) - \cos(t) - 1 = 0$.
11. Encuentre todas las soluciones de $\csc^4(2x) - 4 = 0$. *Sugerencia:* factorice por diferencia de cuadrados.
12. Encuentre los valores de $x \in [0, 2\pi)$ que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:
- (a) $\sin^2(x) = \sin(x)$
 - (b) $\cos^2(x) = \sin^2(x)$
 - (c) $2 + \csc(x) = \csc^2(x)$
13. Determine el conjunto solución de cada ecuación en el intervalo señalado:
- (a) $4\cos^2(t) - 3 = 0$ en $[0, 2\pi)$.
 - (b) $3\tan^2(x) = 9$ en $(-\infty, \infty)$.
 - (c) $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$ en $(-\infty, \infty)$.
 - (d) $5\sin^2(t) + 20 = 40$ en $(-\infty, \infty)$.
 - (e) $\cos(x) + 1 = \sin(x)$ en $[0, 2\pi)$. *Ayuda:* comience elevando ambos miembros al cuadrado. Sin embargo, recuerde que esta operación puede introducir **soluciones ficticias**, es decir, valores que satisfacen la nueva ecuación pero no la original. Por lo tanto, en estos casos es necesario comprobar si cada valor obtenido verifica la ecuación original o no.
14. Determine el ángulo α del cuarto cuadrante que resulta de la intersección de la circunferencia unitaria con la recta que pasa por el origen y el punto $(-4, 4)$. Trace un bosquejo de la situación planteada y justifique adecuadamente su respuesta. *Sugerencia:* vea el Ejemplo 26.
15. Determine el ángulo α del tercer cuadrante que resulta de la intersección de la circunferencia unitaria con la recta de ecuación $y = 3x$. Bosqueje la situación planteada y justifique adecuadamente su respuesta.

16. Considere la recta de ecuación $y = mx + b$, y sea α el ángulo que forma la recta con el eje x que se indica en el dibujo. Pruebe que $m = \tan(\alpha)$. *Sugerencia:* tome dos puntos distintos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) sobre la recta, y note que $\alpha = \beta$. Aunque esto vale para todo m , puede suponer $m > 0$ como en la imagen.

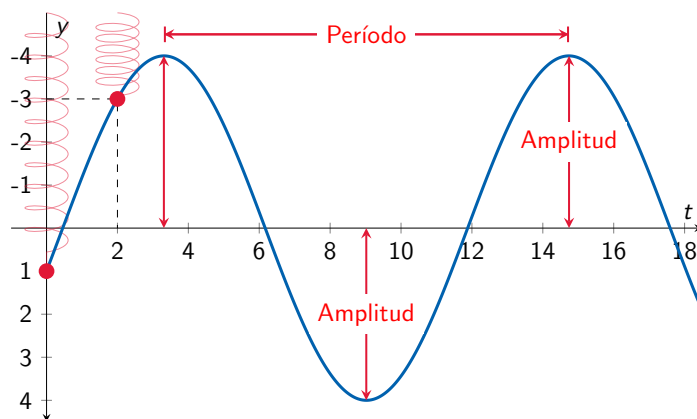


La figura siguiente muestra el denominado **sistema masa-resorte**, que consta de una masa sujeta a un resorte empotrado, en este caso, en el techo. Inicialmente, cuando la masa no está unida al resorte, este último se encuentra en su *estado natural* pero, al colgarle la masa en su extremo inferior, inmediatamente el resorte se estirará una cantidad d hasta llegar a la denominada *posición de equilibrio*. Supongamos que el sistema se pone en movimiento (se lo estira o contrae en una recta vertical que pasa por el centro de gravedad de la masa), y para cada instante t se denota con $y(t)$ a la distancia dirigida de la masa hasta punto de equilibrio.



Como se ilustra en la figura, convenimos aquí que la dirección hacia abajo es positiva. Así, por ejemplo, $y(0) = 1$ significa que la masa parte de un punto situado 1 unidad debajo del punto de equilibrio (el resorte se encuentra

estirado), mientras que $y(2) = -3$ indica que al tiempo $t = 2$ la masa está 3 unidades por arriba de la posición de equilibrio (resorte comprimido).



Mediante leyes de la Física que verás más adelante, y bajo ciertos supuestos, es posible describir el movimiento de la masa, es decir, hallar una expresión para $y(t)$ que dependerá, por supuesto, de diversos factores. En los siguientes problemas trabajaremos un caso particular, conocido como **movimiento armónico simple** o **movimiento libre no amortiguado**.

17. Considere un sistema masa-resorte en el que el desplazamiento de la masa desde el equilibrio está dado por $y(t) = \frac{1}{4} \cos(6t)$, donde y se mide en metros y t es el tiempo en segundos.
 - (a) Encuentre el desplazamiento cuando $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ y $t = \frac{7}{12}$ segundos. Indique, en cada caso, si el resorte se encuentra en su posición de equilibrio, comprimido o estirado.
 - (b) ¿Cuáles son la amplitud (o desplazamiento máximo) y el período del movimiento?
 - (c) ¿Para qué tiempos se alcanzará el desplazamiento máximo (en cualquier lado de la posición de equilibrio)?
 - (d) ¿Para qué tiempos la masa pasa por la posición de equilibrio? ¿En qué momento pasa por segunda vez?
18. Repita las instrucciones del ejercicio anterior para cuando el desplazamiento de la masa desde el equilibrio está dado por $y(t) = -\frac{1}{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$.

3.2. Identidades trigonométricas

Como mencionamos, algunas igualdades que involucran expresiones trigonométricas son válidas para cualquier valor de los argumentos (salvo aquellos

para los que las expresiones no están definidas). Cuando afirmamos que una igualdad es cierta, estamos suponiendo que lo es para todos los números reales para los que la expresión tiene significado. Por ejemplo, si decimos que

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x), \quad (3.7)$$

se entiende que vale para todo x en el dominio de la tangente (que coincide con el de la secante).

Ya obtuvimos algunas identidades trigonométricas directamente de la definición de las funciones, como las dadas en (2.1) a (2.6) o (2.12), y enunciamos otras como las contenidas en (2.7) a (2.10). El objetivo de esta sección es aprender a demostrar identidades trigonométricas, transformando expresiones complejas en otras equivalentes más sencillas, mediante el uso de otras identidades conocidas y manipulaciones algebraicas. [Las identidades básicas más utilizadas para ello son la pitagórica \(2.6\) y las relaciones entre las funciones trigonométricas de un ángulo dadas en \(2.12\).](#)

Por ejemplo, para demostrar que (3.7) vale, transformamos el lado izquierdo en el derecho:

$$\begin{aligned} \tan^2(x) + 1 &= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 && \leftarrow \text{relación para tangente en (2.12)} \\ &= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} && \leftarrow \text{denominador común para sumar} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} && \leftarrow \text{identidad pitagórica (2.6)} \\ &= \sec^2(x). && \leftarrow \text{relación para secante en (2.12)} \end{aligned}$$

Muchas veces se considera como pitagóricas a las tres identidades (2.6), (3.7) y la contenida en el Ejercicio 1.(a), puesto que las dos últimas pueden obtenerse de la primera.

Dedicaremos el resto de la sección a desarrollar ejemplos que permitan observar técnicas o herramientas clásicas para comprobar la validez de identidades trigonométricas.

Ejemplo 32. Demuestre la validez de la identidad

$$\sec(x) - \cos(x) = \sin(x) \tan(x).$$

Solución: Partiremos del lado izquierdo de la identidad y, aplicando transformaciones algebraicas y trigonométricas, buscaremos llegar al lado derecho.

$$\begin{aligned}
 \sec(x) - \cos(x) &= \frac{1}{\cos(x)} - \cos(x) && \leftarrow \text{relación para secante en (2.12)} \\
 &= \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)} && \leftarrow \text{operamos} \\
 &= \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} && \leftarrow \text{por identidad pitagórica (2.6)} \\
 &= \sin(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
 &= \sin(x) \tan(x), && \leftarrow \text{relación para tangente en (2.12)}
 \end{aligned}$$

lo que prueba la validez de la identidad.

Ejemplo 33. Demuestre que $\sec(x) = \sin(x) (\tan(x) + \cot(x))$.

Solución: Transformaremos el lado derecho en el izquierdo, ya que es más sencillo:

$$\begin{aligned}
 \sin(x) (\tan(x) + \cot(x)) &= \sin(x) \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) && \leftarrow \text{por (2.12)} \\
 &= \sin(x) \left(\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x) \sin(x)} \right) && \leftarrow \text{operamos} \\
 &= \sin(x) \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} && \leftarrow \text{por (2.6)} \\
 &= \frac{1}{\cos(x)} \\
 &= \sec(x), && \leftarrow \text{por (2.12)}
 \end{aligned}$$

demostrando así que la identidad enunciada es verdadera.

Ejemplo 34. Pruebe que $\frac{\tan^2(x)}{\sec(x) + 1} = \frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)}$.

Solución: Una forma de probar esta identidad es recordando que, para $b, d \neq 0$, tenemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $ad = cb$. Como dijimos al inicio, estamos suponiendo que la expresión tiene sentido, por lo que asumimos que los denominadores son no nulos. Así, en lugar de probar la igualdad dada, demostraremos que

$$\tan^2(x) \cos(x) = (1 - \cos(x))(\sec(x) + 1).$$

Para ello, transformaremos el lado derecho en el izquierdo, aplicando en primer lugar la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}
(1 - \cos(x))(\sec(x) + 1) &= \sec(x) + 1 - \cos(x)\sec(x) - \cos(x) \\
&= \sec(x) + 1 - 1 - \cos(x) \quad \leftarrow \cos(x)\sec(x) = 1 \\
&= \frac{1}{\cos(x)} - \cos(x) \quad \leftarrow \text{por (2.12)} \\
&= \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)} \quad \leftarrow \text{operamos} \\
&= \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \quad \leftarrow \text{por identidad pitagórica (2.6)} \\
&= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \cos(x) \\
&= \tan^2(x) \cos(x). \quad \leftarrow \text{relación en (2.12)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 35. Pruebe que $(\tan(x) + \sec(x))^2 = \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)}$.

Solución: Ilustraremos con este ejemplo otra forma posible de trabajar cuando no es claro cómo transformar un lado de la igualdad en el otro: para ver que $a = b$, probaremos que $a = c$ y que también $b = c$. Es decir, mediante operaciones algebraicas haremos que cada uno de los lados sea equivalente a una misma expresión. Comencemos con el lado izquierdo, desarrollando el cuadrado del binomio:

$$\begin{aligned}
(\tan(x) + \sec(x))^2 &= \tan^2(x) + \sec^2(x) + 2 \tan(x) \sec(x) \\
&= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} + 2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \frac{1}{\cos(x)} \quad \leftarrow \text{por (2.12)} \\
&= \frac{\sin^2(x) + 1 + 2 \sin(x)}{\cos^2(x)}. \quad \leftarrow \text{operamos} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Ahora trabajemos con el lado derecho, al que multiplicamos y dividimos por la cantidad $1 + \sin(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} &= \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \cdot \frac{1 + \sin(x)}{1 + \sin(x)} \\
&= \frac{(1 + \sin(x))^2}{(1 - \sin(x))(1 + \sin(x))} \quad \leftarrow \text{producto de fracciones} \\
&= \frac{(1 + \sin(x))^2}{1 - \sin^2(x)} \quad \leftarrow \text{diferencia de cuadrados} \\
&= \frac{(1 + \sin(x))^2}{\cos^2(x)} \quad \leftarrow \text{por identidad pitagórica (2.6)} \\
&= \frac{1 + 2 \sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}, \quad \leftarrow \text{cuadrado de un binomio}
\end{aligned}$$

y así llegamos a lo mismo obtenido en (3.8) para el lado izquierdo.

Ejemplo 36. Usando la fórmula para la suma. Pruebe que

$$\cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) = \sin(x).$$

Solución: En este caso no usaremos identidades básicas, sino (2.9) con $\alpha = x$ y $\beta = \frac{3}{2}\pi$:

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) &= \cos(x) \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) && \leftarrow \text{por (2.9)} \\ &= \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot (-1) \\ &= \sin(x),\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos que $\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ y que $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$.

Ejercicios Sección 3.2

1. Demuestre la validez de cada una de las identidades trigonométricas.

(a) $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$

(b) $\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \tan^2(x)$

(c) $(\sec(x) - \tan(x))(\csc(x) + 1) = \cot(x)$

(d) $\tan(x) \sin(x) + \cos(x) = \sec(x)$

(e) $[\tan(x) + \cot(x)] \sin(x) \cos(x) = 1$

(f) $\frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = 2 \csc(x)$

(g) $\frac{1}{1 - \cos(x)} + \frac{1}{1 + \cos(x)} = 2 \csc^2(x)$

2. Pruebe que $\frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)} = \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}$. *Sugerencia:* vea el Ejemplo 34.

3. Demuestre que $\frac{1}{1 + \tan^2(t)} = \cos^2(t)$. *Sugerencia:* vea el Ejemplo 34.

4. Pruebe que $(\tan(x) - \sec(x))^2 = \frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}$. *Sugerencia:* vea el Ejemplo 35.

5. Pruebe que $\frac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\cos(x) - \sin(x)} = 1 + \sin(x) \cos(x)$. *Sugerencia:* factorice $a^3 - b^3$.

6. Suponiendo válida (2.7), combine esa identidad con (2.2) para obtener (2.8).
7. Suponiendo válida (2.9), combine esa identidad con (2.2) para obtener (2.10).
8. **(Fórmulas de ángulo doble)** Utilice (2.7) y (2.9) para probar que
- (a) $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
 - (b) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
 - (c) $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$
9. Utilice lo obtenido en el ejercicio anterior para el coseno para probar que
- (a) $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$
 - (b) $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$
10. **(Fórmulas de semiángulo)** Use los resultados de los ejercicios anteriores para probar que
- (a) $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$
 - (b) $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$
 - (c) $\tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$
11. Pruebe, como en Ejemplo 36, que
- (a) $\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \cos(\pi - x) \right] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right] = 2 \sin(x)$
 - (b) $\frac{\sec(\pi - x)}{\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} + \frac{\sec(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} + 1 = \tan(x)$

Capítulo 4

Funciones trigonométricas inversas

En (3.1) vimos que si usamos la calculadora en modo radianes obtenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\text{calculadora}} \quad \alpha = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

En este sentido, las operaciones seno y arcoseno son *inversas*, ya que al aplicar ambas a un número fijo no afectan su valor:

$$\operatorname{sen}\left(\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\arcsen\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Recordemos que, en forma general, decimos que dos funciones f y g son **inversas** si

$$f(g(x)) = x \quad \text{y} \quad g(f(x)) = x,$$

para todo valor permitido x en cada caso. Así, las gráficas de f y g son reflexiones entre sí a través de la recta $y = x$. Para asegurar que $g: B \rightarrow A$ esté bien definida (es decir, que cumpla con la existencia y unicidad de imagen), es necesario y suficiente que la función $f: A \rightarrow B$ sea biyectiva. Recordemos que una función f se dice que es **inyectiva** si a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas. Esto se expresa como:

$$x_1, x_2 \in A \text{ con } x_1 \neq x_2 \text{ implica } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Cuando el conjunto imagen de f coincide con el conjunto de llegada, se dice que f es **sobreyectiva**. Esto se expresa como:

$$\text{para todo } y \in B \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y.$$

Una función que sea inyectiva y sobreyectiva recibe el nombre de **biyectiva**.

Para el caso de las funciones trigonométricas seno y coseno, el hecho de ser periódicas hace que no sean inyectivas si consideramos a todos los reales como su dominio. Sin embargo, sí lo serán si restringimos adecuadamente el dominio de cada una. Precisamente, un punto P sobre la circunferencia unitaria recorre todas alturas diferentes cuando su ángulo pertenece al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, mientras que las abscisas no se repiten si el ángulo va desde 0 a π , por ejemplo. Así, con el fin de que resulten biyectivas y disponer de sus funciones inversas, consideramos las restricciones

$$\begin{aligned} f: [-\pi/2, \pi/2] &\rightarrow [-1, 1] & g: [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] \\ \alpha &\mapsto \sin(\alpha); & \alpha &\mapsto \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Las gráficas de estas funciones se dan en la Figura 4.1.

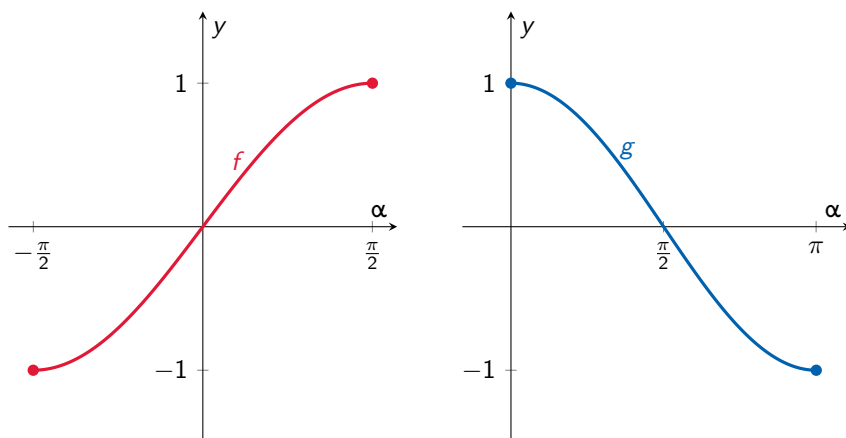


Figura 4.1: Restricción del dominio y conjunto de llegada del seno y del coseno para que resulten biyectivas.

Una vez hechas estas restricciones, ambas funciones tienen inversas. La función inversa del seno se denomina **arcoseno** y se denota como $\arcsen$, por lo que su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen es $[-\pi/2, \pi/2]$. Similarmente, la función inversa del coseno se llama **arcocoseno** y se indica como $\arccos$, su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen es $[0, \pi]$ (ver Figura 4.2).

De forma análoga se definen las funciones inversas de la tangente, cotangente, secante y cosecante. Incluimos a continuación la gráfica de la función **arcotangente**, que se indica como $\arctan$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen es el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. En el mismo sistema graficamos la función **arcocotangente**, que se denota como arccot , cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen es el intervalo $(0, \pi)$.

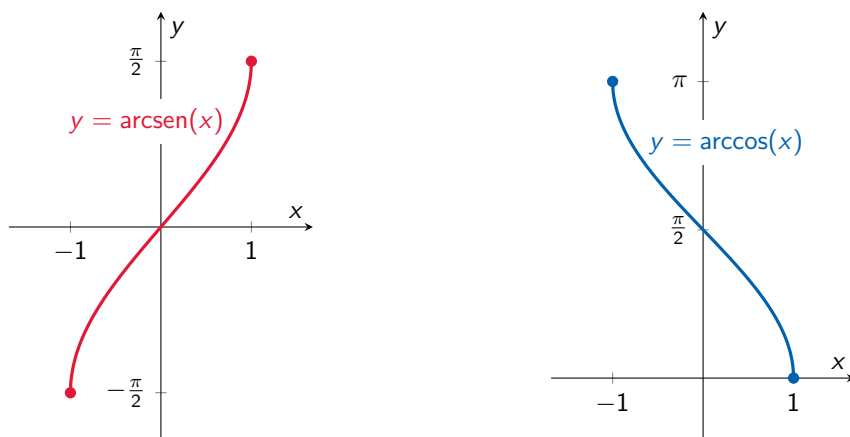


Figura 4.2: Gráficas de $y = \arcsen(x)$ y de $y = \arccos(x)$.

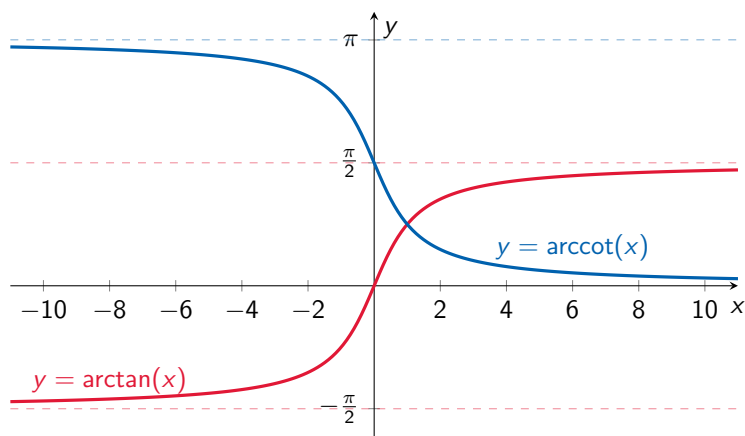


Figura 4.3: Gráficas de $y = \arctan(x)$ y de $y = \operatorname{arccot}(x)$.

La razón por la que se suele centrar la atención en estudio del arcoseno, arcocoseno y la arcotangente es que las inversas de las funciones trigonométricas restantes no se aplican con frecuencia. Además, pueden obtenerse a partir de las tres mencionadas. Por ejemplo, como se observa en la Figura 4.3, puede probar que

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Para el caso de las funciones **arcosecante** y **arcocosecante**, existen definiciones distintas según cómo se restrinja el dominio de la secante y la cosecante para que resulten inyectivas, ya que no hay un acuerdo universal

sobre esto, y depende de cada autor. Si consideramos como dominio de la secante a $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ y al de la cosecante como $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$, se obtienen las correspondientes funciones inversas cuyas gráficas se incluyen en las Figuras 4.4 y 4.5, y puede probarse que

$$\operatorname{arcsec}(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{arccsc}(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$$

para cada $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

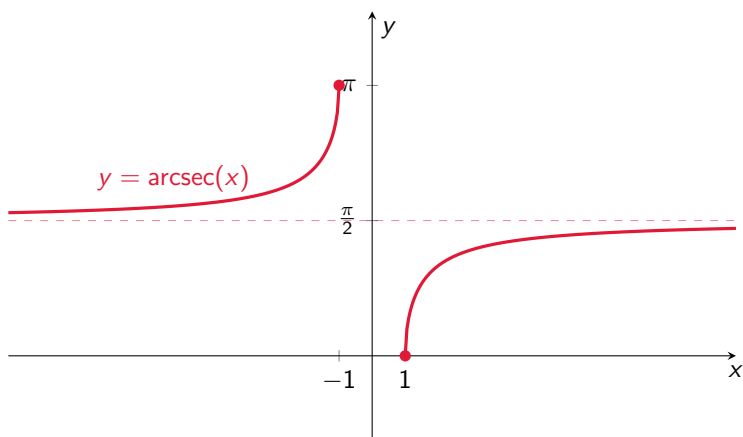


Figura 4.4: Gráfica de $y = \operatorname{arcsec}(x)$.

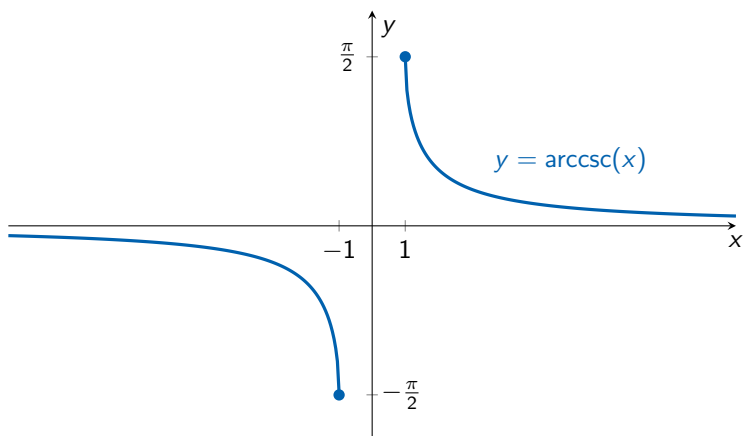


Figura 4.5: Gráfica de $y = \operatorname{arccsc}(x)$.

Sin embargo, otros autores prefieren restringir el dominio de la secante a $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$ porque allí la tangente toma valores positivos, y entonces

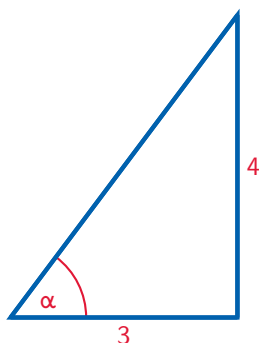
se tiene que $\tan(\operatorname{arcsec}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$, por ejemplo. Similarmente, se puede encontrar también que consideren como dominio de la cosecante a $(0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi]$ o al conjunto $(-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

Por todo lo anterior, y por su limitado uso en aplicaciones, no consideraremos ejemplos o ejercicios respecto de estas funciones (arcocotangente, arcocosecante y arcosecante).

En los siguientes ejemplos se muestra cómo se recurre a triángulos rectángulos para trabajar con expresiones que involucran funciones trigonométricas inversas. El saber qué valor darle a cada lado o ángulo del mismo se logra, en general, mediante la práctica.

Ejemplo 37. Halle, sin usar calculadora, el valor exacto de $\sec\left(\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)$.

Solución:



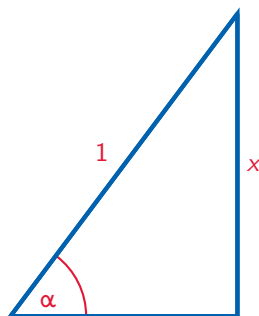
Sea $\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$. Debemos hallar $\sec(\alpha)$. Debido a la imagen de la función arcotangente, sabemos que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Pero además, por la definición de α , tenemos que $\tan(\alpha) = \frac{4}{3} > 0$. De ambas condiciones se deduce que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, por lo que podemos considerar a α como la medida en radianes de un ángulo del triángulo rectángulo que se ilustra a la izquierda.

Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es igual a 5, por lo que

$$\sec\left(\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \sec(\alpha) = \frac{H}{CA} = \frac{5}{3}.$$

Ejemplo 38. Usando un triángulo rectángulo adecuado, demuestre que $\cos(\arcsen(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ para todo $0 < x < 1$.

Solución:



Sea $\alpha = \arcsen(x)$, esto es, $\sen(\alpha) = x$. Como $0 < x < 1$, tenemos que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, y podemos considerar a α como la medida en radianes de un ángulo del triángulo rectángulo que se ilustra a la izquierda.

Por el teorema de Pitágoras, la longitud del cateto adyacente es igual a $\sqrt{1 - x^2}$, por lo que

$$\cos(\alpha) = \frac{CA}{H} = \sqrt{1 - x^2}.$$

👉 Utilizando propiedades de las funciones trigonométricas se puede extender a todo $x \in [-1, 1]$ lo probado en el ejemplo anterior. En efecto, para $x = 0$ o $x = 1$ el resultado se obtiene por evaluación directa de ambos miembros de la igualdad. Si $-1 \leq x < 0$ entonces $\tilde{x} = -x$ pertenece a $(0, 1]$, por lo que podemos aplicar a $\tilde{x}$ lo obtenido antes. Como la función arcoseno es impar en su dominio, se tiene que

$$\arcsen(x) = -\arcsen(-x).$$

Además, usando la paridad del coseno, concluimos que:

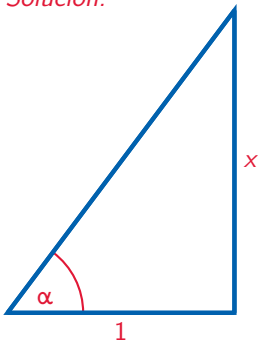
$$\begin{aligned}\cos(\arcsen(x)) &= \cos(-\arcsen(-x)) \\ &= \cos(\arcsen(-x)) \\ &= \sqrt{1 - (-x)^2} \\ &= \sqrt{1 - x^2},\end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad para todo $-1 \leq x \leq 1$.

Así, la construcción geométrica solo vale para longitudes $x > 0$, y el caso general se obtiene a partir de propiedades de simetría de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 39. Usando un triángulo rectángulo adecuado, demuestre que $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ para todo x .

Solución:



Supongamos primero que $x > 0$, y sea $\alpha = \arctan(x)$. Entonces $\tan(\alpha) = x$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, por lo que podemos considerar a α como la medida en radianes de un ángulo del triángulo rectángulo graficado a la izquierda.

Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es igual a $\sqrt{1+x^2}$, por lo que

$$\cos(\alpha) = \frac{CA}{H} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Si $x < 0$, entonces $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Esto implica que $0 < -\alpha < \frac{\pi}{2}$, y podemos aplicar lo anterior al ángulo opuesto $-\alpha$, junto con la paridad del coseno, para obtener

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Cuando $x = 0$ es directo ya que $\cos(0) = 1 = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}}$. Así, la igualdad vale para todo x .

Como muestran los ejemplos previos, muchas veces es posible considerar $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (lo que permite trabajar con un triángulo rectángulo) y, luego, extender lo obtenido al resto de los valores. Para ello puede resultar útil contar con las siguientes identidades, las que se deducen directamente de las propiedades de las funciones trigonométricas y de la definición de sus inversas.

Fórmulas para argumentos opuestos

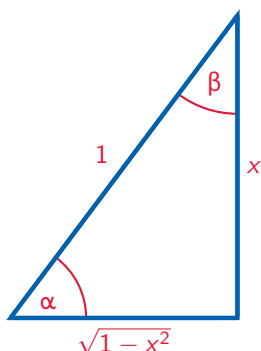
Para cada x dentro del correspondiente dominio, se tiene que

$$\arcsen(-x) = -\arcsen(x),$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x),$$

$$\arctan(-x) = -\arctan(x).$$

Finalizamos la sección completando el triángulo contenido en el Ejemplo 38, ya que puede resultar útil para muchas ocasiones.



Suponiendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tenemos que $\sen(\alpha) = x = \cos(\beta)$, lo que implica $0 < x < 1$ y

$$\alpha = \arcsen(x) \quad \text{y} \quad \beta = \arccos(x).$$

Además, α y β son complementarios, por lo que que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Se concluye entonces que para todo $0 < x < 1$ vale

$$\arcsen(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Es claro que la igualdad anterior vale también para $x = 0$ y $x = 1$. Mediante las fórmulas para argumentos opuestos para las funciones trigonométricas inversas puede probarse que la identidad vale para todo $-1 \leq x \leq 1$.

Ejercicios Capítulo 4

1. Procediendo como en el Ejemplo 37, halle el valor exacto de:

(a) $\sec\left(\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

(c) $\sec\left(\arctan\left(\frac{7}{4}\right)\right)$

(b) $\cot\left(\arcsen\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

(d) $\csc\left(\arccos\left(\frac{1}{5}\right)\right)$

2. Como en los Ejemplos 38 y 39, escriba la expresión de forma algebraica en x (de los valores de x posibles en cada caso, considere solo el caso x positivo):

(a) $\sin(\arctan(x))$

(b) $\tan(\arccos(x))$

(c) $\cot\left(\arcsen\left(\frac{x}{3}\right)\right)$

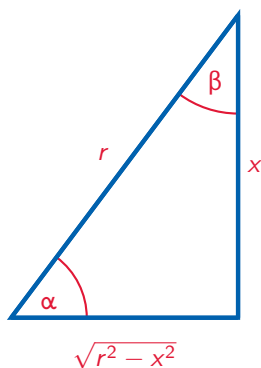
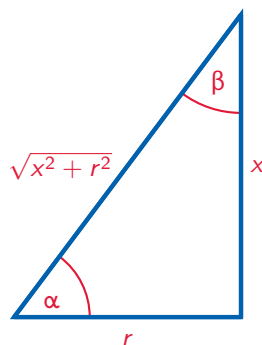
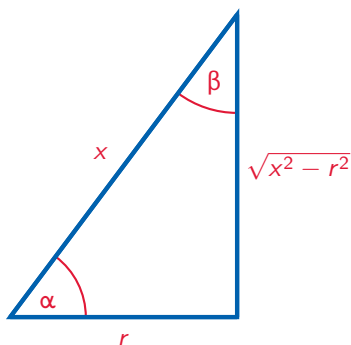
(d) $\csc\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

(e) $\sec\left(\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right)\right)$, con $r > 0$

(f) $\cos\left(\arcsen\left(\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x}\right)\right)$, con $r > 0$



Los siguientes triángulos pueden resultar útiles para todos los ejercicios previos y muchos futuros, ya que contemplan todas las posibilidades al considerar α o β según sea necesario. Estamos suponiendo x y r positivos.



Respuestas

Secciones 1.1 y 1.2 (ejercicios en página 14)

1. Mide 17 unidades.
2. Mide 10 unidades.
3. (a) Se apoya a $2\sqrt{10} \approx 6.32$ metros.
(b) Deberá apoyarse a $2\sqrt{6} \approx 4.9$ metros.
4. $\sin(\alpha) = \frac{7}{25}$; $\cot(\alpha) = \frac{24}{7}$; $\csc(\beta) = \frac{25}{24}$; $\cos(\beta) = \frac{7}{25}$.
5. a) 360; b) radián.
6. $\alpha \approx 16^\circ 15' 37'' \approx 0.28$ rad; $\beta \approx 73^\circ 44' 23'' \approx 1.29$ rad.
7. $\alpha \approx 18^\circ 55' 29'' \approx 0.33$ rad; $\beta \approx 71^\circ 4' 31'' \approx 1.24$ rad.
- 8.

α	$\tan(\alpha)$	$\csc(\alpha)$	$\sec(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. Se apoya, aproximadamente, a 2.34 metros de altura.
10. La pendiente será de $36^\circ 52' 12''$, aproximadamente.
11. Aproximadamente, la diagonal mide 4.77 m, y el área del rectángulo es de 10.4 m^2 .
12. Perímetro aproximado: 251.12 cm. Área aproximada: 2813.44 cm^2 .
13. Dos ángulos de 48° y uno de 84° , aproximadamente.

14. (a) 5.1 m; (b) 3.56 m. (Resultados aproximados)
15. La torre mide aproximadamente 155.88 metros de altura.
16. La altura del edificio es de casi 55 metros.
17. La sombra del árbol mide aproximadamente 13.86 metros.
18. La persona proyecta una sombra de casi 2.6 metros.
19. La antena mide 10.39 metros, aproximadamente.
20. La altura del edificio es de 171 metros.
21. La altura es de 15 metros aproximadamente (14.99 m).
22. La distancia entre ambos autos es casi 4034 metros.
23. Altura aproximada del monumento: 0.76 m. Superficie aproximada del lago: 1.29 m^2 .
24. La altura del pino es de 2.20 metros, aproximadamente.
25. La altura aproximada del edificio es de 61.47 metros.

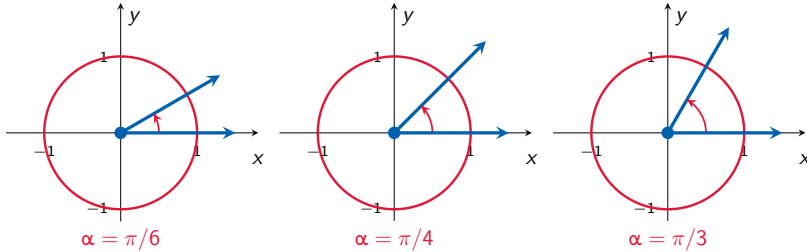
Sección 1.3 (ejercicios en página 22)

1. El lado opuesto al ángulo de 75° mide $\frac{5+5\sqrt{3}}{2} \approx 6.83$ unidades, y el lado opuesto al ángulo de 60° mide $\frac{5\sqrt{6}}{2} \approx 6.12$ unidades.
2. (a) $\alpha = 79^\circ$, $c = a \approx 20.96$ unidades.
(b) $a \approx 12$ unidades, $\alpha \approx 41.8^\circ$, $\beta \approx 46.2^\circ$.
(c) $c \approx 6.36$ unidades, $\alpha \approx 47.56^\circ$, $\beta \approx 62.44^\circ$.
(d) $c \approx 43.45$ unidades, $\alpha \approx 37.27^\circ$, $\beta \approx 32.73^\circ$.
3. Si L representa la longitud del lado mayor, aplicando el teorema del coseno se llega a una ecuación cuadrática en L que conduce a las soluciones $L = 12$ y $L = -18$. Esta última se descarta porque estamos trabajando con longitudes, por lo que el lado mayor mide 12 cm. La diagonal menor mide $6\sqrt{3}$ cm.
4. Consideremos el triángulo que determinan el helicóptero y los dos autos. El ángulo opuesto al lado que mide 5 km es de 100° , el ángulo formado por x y la ruta es de 32° , y el opuesto a x mide 48° . Por el teorema del seno, $x \approx 3.77$ km. Esta medida nos permite determinar que $h = x \sin(32^\circ) \approx 2$ km.

5. Si consideramos el triángulo formado por las dos primeras líneas punteadas y el segmento $\overline{AB}$, el lado indicado con x se opone a un ángulo de 117° . Además, el lado $\overline{AB}$ mide 120 m y se opone a un ángulo de 6° . Por el teorema del seno se tiene que $x \approx 1022.89$ metros, y es la distancia del punto A al avión. Con respecto a la horizontal, el avión se encuentra aproximadamente a 1012.93 metros de altura, ya que es el cateto opuesto de un ángulo de 82° , en un triángulo rectángulo de hipotenusa x .
6. La distancia aproximada es 65.38 metros, por lo que está fuera del alcance.
7. Aproximadamente, la distancia del punto C al bar es de 18.30 metros, y de 12.94 metros al laboratorio. Solamente llegará esta última señal.

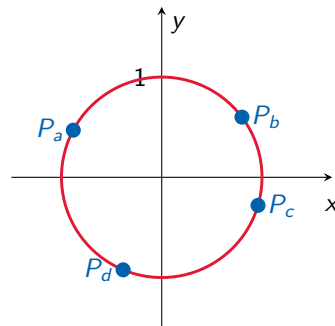
Secciones 2.1 y 2.2 (ejercicios en página 46)

1. $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$ (recto) son obvios. Graficamos los otros tres:



2. Por la convención enunciada en la página 7, el lado izquierdo refiere al coseno de un ángulo α que mide 3 radianes, mientras que el lado derecho es el coseno de un ángulo β de 3 grados sexagesimales. Así, α está en el segundo cuadrante (es cercano a π) por lo que su coseno es negativo, mientras que β pertenece al primer cuadrante y su coseno es positivo.
3. La imagen de la función seno es el intervalo $[-1, 1]$, y el número π no pertenece a él, por lo que no existe α tal que $\sin(\alpha) = \pi$.

4. (a) $\sin(\alpha) = \frac{8}{17}$, $\cos(\alpha) = -\frac{15}{17}$.
- (b) $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$, $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$.
- (c) $\sin(\alpha) = -\frac{7}{25}$, $\cos(\alpha) = \frac{24}{25}$.
- (d) $\sin(\alpha) = -\frac{12}{13}$, $\cos(\alpha) = -\frac{5}{13}$.



5. (a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

(i) $-\alpha = -\frac{\pi}{6}$

(ii) $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{3}$

(iii) $\delta = \pi - \alpha = \frac{5}{6}\pi$

(iv) $\beta = \pi + \alpha = \frac{7}{6}\pi$

(b) $\alpha = 20^\circ$

(i) $-\alpha = -20^\circ$

(ii) $\gamma = 90^\circ - \alpha = 70^\circ$

(iii) $\delta = 180^\circ - \alpha = 160^\circ$

(iv) $\beta = 180^\circ + \alpha = 200^\circ$

(c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$

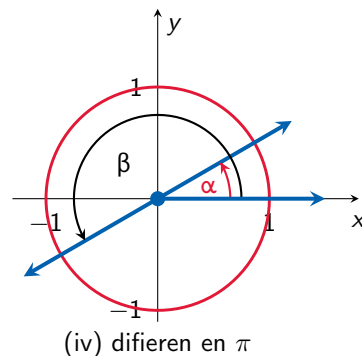
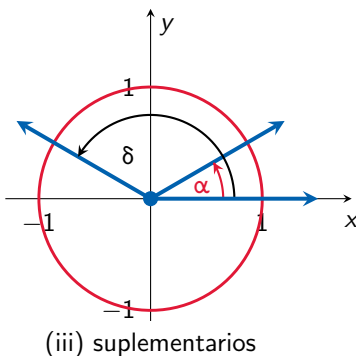
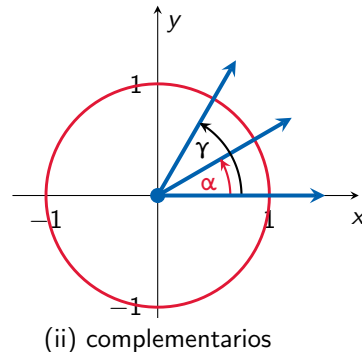
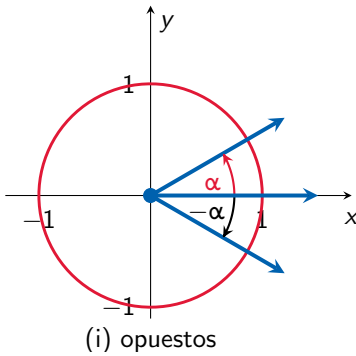
(i) $-\alpha = -\frac{\pi}{3}$

(ii) $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{6}$

(iii) $\delta = \pi - \alpha = \frac{2}{3}\pi$

(iv) $\beta = \pi + \alpha = \frac{4}{3}\pi$

Se incluye solamente el gráfico del caso (a), es decir, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.



6.

α	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{sen}(-\alpha)$	$\text{sen}(\pi + \alpha)$	$\text{sen}(\pi - \alpha)$	$\text{sen}(\alpha - \pi)$	$\text{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

α	$\text{cos}(\alpha)$	$\text{cos}(-\alpha)$	$\text{cos}(\pi + \alpha)$	$\text{cos}(\pi - \alpha)$	$\text{cos}(\alpha - \pi)$	$\text{cos}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Si existiera, debería satisfacer la identidad pitagórica, esto es, debe cumplir que $\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$. Pero, en este caso, el lado izquierdo sería igual a $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, que es distinto de 1. Por lo tanto, dicho ángulo no puede existir.
8. Por la identidad pitagórica hay dos resultados posibles: $\text{cos}(\alpha) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.
9. El signo del coseno debe ser negativo: $\text{cos}(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
10. Por ejemplo: $\alpha = \frac{5}{2}\pi$ y $\alpha = \frac{7}{2}\pi$.
11. Por ejemplo: $\alpha = -4\pi$ y $\alpha = -6\pi$.
12. Por ejemplo: $\alpha = -3\pi$ y $\alpha = -4\pi$.
13. Por ejemplo: $\alpha = \frac{7}{2}\pi$ y $\alpha = \frac{11}{2}\pi$.
14. Supongamos primero $a > 0$. Veremos que $F(x + p) = F(x)$ para todo x , siendo $p = 2\pi/a$:

$$\begin{aligned}
 F(x + p) &= c \text{sen}(a(x + p) + b) \\
 &= c \text{sen}(ax + ap + b) \\
 &= c \text{sen}(ax + 2\pi + b) \quad \leftarrow p = 2\pi/a \\
 &= c \text{sen}(ax + b) \quad \leftarrow (2.1) \text{ con } \alpha = ax + b \text{ y } n = 1 \\
 &= F(x).
 \end{aligned}$$

Si $a < 0$, entonces $p = -2\pi/a$. La prueba es igual a la anterior pero tomando $n = -1$ en (2.1). Similarmente se procede para G . El valor máximo que toman ambas es $|c|$, ya que su imagen es el intervalo $[-|c|, |c|]$.

Sección 2.3 (ejercicios en página 51)

1. Probaremos solo el caso de la secante:

$$\sec(-\alpha) \stackrel{(2.12)}{=} \frac{1}{\cos(-\alpha)} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{\cos(\alpha)} \stackrel{(2.12)}{=} \sec(\alpha).$$

2. Para la secante y cosecante sale directo de (2.12) y del período del coseno y seno, respectivamente. Por ejemplo, para la secante se tiene que

$$\sec(\alpha + 2\pi) \stackrel{(2.12)}{=} \frac{1}{\cos(\alpha + 2\pi)} \stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{\cos(\alpha)} \stackrel{(2.12)}{=} \sec(\alpha).$$

Para la cotangente se procede igual que en página 49 para la tangente.

3. $\csc(\alpha) = \frac{1}{\sen(\alpha)} = 4$.
4. $\sec(\alpha) = 1/2$ equivale a $\cos(\alpha) = 2$, por lo que dicho α no puede existir.
5. $\sec(\beta) > 0$ equivale a $\cos(\beta) > 0$. Esto, junto con $\sen(\beta) < 0$, implican que β está en el cuarto cuadrante.
6. $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$, $\cot(\alpha) = \frac{4}{3}$, $\sec(\alpha) = \frac{5}{4}$, $\csc(\alpha) = \frac{5}{3}$.
7. El coseno de α debe ser positivo, por lo que $\cos(\alpha) = \frac{24}{25}$. Así, se tiene que $\tan(\alpha) = -\frac{7}{24}$, $\cot(\alpha) = -\frac{24}{7}$, $\sec(\alpha) = \frac{25}{24}$, $\csc(\alpha) = -\frac{25}{7}$.
8. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = \pi$. A partir de las definiciones aplicadas a P y Q , tenemos que

$$\sen(\alpha) = 1$$

$$\sen(\beta) = 0$$

$$\cos(\alpha) = 0$$

$$\cos(\beta) = -1$$

$$\tan(\alpha) \text{ no existe}$$

$$\tan(\beta) = 0$$

$$\sec(\alpha) \text{ no existe}$$

$$\sec(\beta) = -1$$

$$\csc(\alpha) = 1$$

$$\csc(\beta) \text{ no existe}$$

$$\cot(\alpha) = 0$$

$$\cot(\beta) \text{ no existe}$$

9. Para la tangente: $\alpha = 3\pi$ o $\alpha = -4\pi$. Para la cotangente: $\alpha = \frac{5}{2}\pi$ o $\alpha = -\frac{7}{2}\pi$.

Sección 3.1 (ejercicios en página 63)

1. (a) $t = \pi + 2n\pi$, $t = -\pi + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ (en este caso una de las expresiones es redundante porque cada una queda contenida en la otra, pero no es necesario notar esto. Sí es importante identificar las dos soluciones «iniciales» $t = \pi$ y $t = -\pi$.)

(b) $x = \frac{5}{4}\pi + 2n\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

(c) $\alpha = \frac{\pi}{3} + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

(d) $\beta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $\beta = \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

(e) $u = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $u = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

(f) $w = \frac{2}{3}\pi + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

2.

	$n = -3$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$-\frac{\pi}{6} + 2n\pi$	$-\frac{37}{6}\pi$	$-\frac{25}{6}\pi$	$-\frac{13}{6}\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{23}{6}\pi$	$\frac{35}{6}\pi$	$\frac{47}{6}\pi$
$\frac{11}{6}\pi + 2n\pi$	$-\frac{25}{6}\pi$	$-\frac{13}{6}\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{23}{6}\pi$	$\frac{35}{6}\pi$	$\frac{47}{6}\pi$	$\frac{59}{6}\pi$

3.

	$n = -3$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$-\frac{2}{3}\pi + 2n\pi$	$-\frac{20}{3}\pi$	$-\frac{14}{3}\pi$	$-\frac{8}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{10}{3}\pi$	$\frac{16}{3}\pi$	$\frac{22}{3}\pi$
$\frac{4}{3}\pi + 2n\pi$	$-\frac{14}{3}\pi$	$-\frac{8}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{10}{3}\pi$	$\frac{16}{3}\pi$	$\frac{22}{3}\pi$	$\frac{28}{3}\pi$

4. (a) $t = \pi + 2n\pi$, $t = \frac{5}{3}\pi + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

(b) $t = \frac{11}{48}\pi + n\frac{\pi}{2}$, $t = \frac{19}{48}\pi + n\frac{\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

(c) $t = \frac{11}{12}\pi + 2n\pi$, $t = \frac{19}{12}\pi + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

(d) $t = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{3}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

(e) $t = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $t = \frac{2}{3}\pi + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

(f) $t = \frac{7}{8}\pi + n\frac{\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

5. $t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $t = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$, $t = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi$, $t = \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

6. $\alpha_1 = \frac{11}{6}\pi$, $\alpha_2 = \frac{7}{6}\pi$, $\alpha_3 = \frac{5}{6}\pi$.

7. $x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$ y $x = \frac{11}{6}\pi$.

8. $\beta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $\beta = \frac{5}{3}\pi + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

9. (a) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ es solución de (3.6) ya que, al reemplazar por este valor de α en ella, se obtiene cero tanto del lado izquierdo como en el derecho.

(b) Al resolver $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi$ se obtiene como única solución $n = \frac{1}{4}$, que no es un número entero. Así, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ no es un elemento de S .

(c) Todo α que sea múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ es solución de (3.6) porque anula al factor $\cos(\alpha)$ en ambos miembros. Sin embargo, para cada $m \in \mathbb{Z}$ fijo, la solución a

$$(2m+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

es $n = m + \frac{1}{4}$, que no es un número entero.

(d) El problema se originó al dividir ambos miembros por $\cos(\alpha)$, ya que esta cantidad se anula para ciertos valores de α (¡y dividir por cero no es una operación permitida!). Para evitarlo, *antes* de dividir debemos preguntarnos si cada α que satisface $\cos(\alpha) = 0$, es o no es solución de la ecuación dada. Si no lo fuera, se debe aclarar que por eso podemos proseguir con la división sin problemas, ya que descartamos dichos valores como soluciones de la ecuación. Si lo es, como en este caso, los valores de α tales que $\cos(\alpha) = 0$ deben agregarse al conjunto solución. Así, toda raíz de la función coseno es también solución de (3.6).

(e) Por todo lo anterior, el conjunto solución es

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

10. $t = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $t = \frac{5}{3}\pi + 2n\pi$, $t = \pi + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

11. $x = \frac{\pi}{8} + n\pi$, $x = \frac{3}{8}\pi + n\pi$, $x = \frac{5}{8}\pi + n\pi$, $x = \frac{7}{8}\pi + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

12. (a) $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$.

(b) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$ y $x = \frac{7}{4}\pi$.

(c) $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ y $x = \frac{3}{2}\pi$.

13. (a) $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \right\}$.

(b) $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2}{3}\pi + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

(c) $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3}{4}\pi + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

(d) $S = \emptyset$ (cuidado con escribir $S = \{\emptyset\}$ porque es incorrecto).

(e) $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$.

14. $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ (o $\alpha = \frac{7}{4}\pi$ si se consideró en sentido antihorario).

15. $\alpha \approx 4.39$ (o $\alpha \approx -1.89$ si se consideró en sentido horario).

16. Al mirar el triángulo formado por las líneas punteadas y la recta, tenemos

$$\tan(\beta) = \frac{CO}{CA} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Pero $y_0 = mx_0 + b$ y también $y_1 = mx_1 + b$. Al reemplazar se tiene $\tan(\beta) = m$.

17. (a) $y(0) = \frac{1}{4}$ (resorte estirado, 25 cm por debajo de la posición de equilibrio); $y(\frac{1}{2}) \approx -0.25$ (resorte comprimido, aproximadamente 25 cm por encima de la posición de equilibrio); $y(\frac{7}{12}\pi) = 0$ (en posición de equilibrio).

- (b) Amplitud: $\frac{1}{4}$ (corresponde a 25 centímetros). Período: $\frac{\pi}{3}$. (Vea el Ejercicio 14 en la página 47.)
- (c) Se plantea $\cos(6t) = 1$ o $\cos(6t) = -1$, lo que arroja $t = \frac{n\pi}{3}$ o $t = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$, para $n \geq 0$ entero (los tiempos no pueden ser negativos).
- (d) Se plantea $\cos(6t) = 0$, lo que implica $t = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}$ o $t = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{3}$, para n entero no negativo. La segunda vez que la masa pasa por la posición de equilibrio corresponde a $t = \frac{\pi}{4}$ segundos, lo que equivale a menos de un segundo.
18. (a) $y(0) = -\frac{1}{2}$ (resorte comprimido, 50 cm por encima de la posición de equilibrio); $y(\frac{1}{2}) \approx -0.27$ (resorte comprimido, aproximadamente 27 cm por encima de la posición de equilibrio); $y(\frac{7}{12}\pi) \approx 0.43$ (resorte estirado, aproximadamente 43 cm por debajo de la posición de equilibrio).
- (b) Amplitud: $\frac{1}{2}$ (corresponde a 50 centímetros). Período: π . (Vea el Ejercicio 14 en la página 47.)
- (c) Se plantea $\sin(2t + \frac{\pi}{2}) = 1$ o $\sin(2t + \frac{\pi}{2}) = -1$, lo que arroja $t = n\pi$ o $t = \frac{\pi}{2} + n\pi$, para $n \geq 0$ entero (los tiempos no pueden ser negativos).
- (d) Se plantea $\sin(2t + \frac{\pi}{2}) = 0$, lo que implica $t = n\pi - \frac{\pi}{4}$ con $n \geq 1$ entero, o $t = n\pi + \frac{\pi}{4}$ para $n \geq 0$ entero. La segunda vez que la masa pasa por la posición de equilibrio corresponde a $t = \frac{3}{4}\pi$ segundos, lo que equivale a casi 2 segundos y medio.

Sección 3.2 (ejercicios en página 71)

Todos los ejercicios son demostraciones, así que solamente daremos pistas o claves en cada uno. Estas deben tomarse solo como sugerencias, ya que la forma de probar las identidades no es única.

1. En 1.(a) proceda como en (3.7). En los demás incisos también opere el lado izquierdo para obtener el derecho, mediante el uso de (2.6) y las relaciones dadas en (2.12).
2. Pruebe que $(1 + \sin(x))(1 - \sin(x)) = \cos^2(x)$.
3. Muestre que $\cos^2(t)(1 + \tan^2(t)) = 1$.
4. Pruebe que cada lado es igual a $\frac{1 + \sin^2(x) - 2\sin(x)}{(1 + \sin(x))(1 - \sin(x))}$.
5. Aplique que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$ para factorizar el numerador.
6. Escriba $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$. Aplique a esto (2.7) y, luego, (2.2).

7. Escriba $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta))$. Aplique a esto (2.9) y, luego, (2.2).
8. (a) Escriba $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha)$ y aplique (2.7).
 (b) Escriba $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha)$ y aplique (2.9).
 (c) Utilice los dos incisos previos para reescribir $\tan(2\alpha)$ y luego divida el numerador y el denominador por $\cos^2(x)$.
9. (a) Parta de la igualdad del inciso (b) del ejercicio anterior y reemplace $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.
 (b) Parta de la igualdad del inciso (b) del ejercicio anterior y reemplace $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.
10. En cada una transforme el lado derecho en el izquierdo:
 - (a) reemplazando $\cos(2\alpha)$ por lo dado en el Ejercicio 9.(a);
 - (b) reemplazando $\cos(2\alpha)$ por lo dado en el Ejercicio 9.(b);
 - (c) combinando las dos anteriores.
11. Utilice las fórmulas (2.7) a (2.10) en cada una de las funciones involucradas del lado izquierdo para llegar al lado derecho.

Capítulo 4 (ejercicios en página 79)

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. (a) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ | (c) $\frac{\sqrt{65}}{4}$ |
| (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | (d) $\frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$ |
| 2. (a) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ | (d) $\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$ |
| (b) $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ | (e) $\frac{\sqrt{x^2 + r^2}}{r}$ |
| (c) $\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$ | (f) $\frac{r}{x}$ |

Referencias bibliográficas

1. Carena, Marilina (2023, versión impresa; 2021, versión digital). *Manual de Matemática preuniversitaria: edición ampliada y corregida*. (2a ed.) Ediciones UNL.
2. Swokowski, Earl W. y Cole, Jeffery A. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. (12a ed.) CENGAGE Learning.

Índice alfabético

- abscisa, 28
- altura, 17
- amplitud, 47
- ángulo
 - agudo, 1
 - de depresión, 11
 - de elevación, 10
 - doble, 72
 - llano, 36
 - negativo, 26
 - positivo, 26
- ángulos
 - complementarios, 1
 - coterminal, 27
 - notables, 32
 - opuestos, 34
 - que difieren en π , 37
 - suplementarios, 36
- arcocosecante, 75
- arcocoseno, 8, 74
- arcocotangente, 74
- arcosecante, 75
- arcoseno, 8, 74
- arcotangente, 8, 74
- asíntota vertical, 48
- cateto, 1
 - adyacente, 2
 - opuesto, 2
- circunferencia
 - trigonométrica, 28
 - unitaria, 28
- codominio, 27
- cofunción, 40
- complemento, 40
- conjunto de llegada, 27
- conjunto de partida, 27
- coordenadas, 28
- cosecante, 3
- coseno, 2, 28
- cotangente, 3
- dominio, 27
- ecuación, 52
- función, 27
 - biyectiva, 73
 - impar, 34
 - inyectiva, 73
 - par, 34
 - sobreyectiva, 73
- funciones inversas, 73
- grado sexagesimal, 5
- hipotenusa, 1
- identidad, 52
 - pitagórica, 4, 42
- imagen, 27
 - existencia, 28
 - unicidad, 28
- lado
 - inicial, 26
 - terminal, 26
- línea de visión, 10
- ordenada, 28
- par ordenado, 28

período, 32

posición estándar, 26

radián, 5

razones trigonométricas, 2

secante, 3

semejante, 5

semiángulo, 72

seno, 2, 28

sistema

 circular, 5

 sexagesimal, 5

soluciones ficticias, 65

suplemento, 36

tangente, 3

teorema

 de Pitágoras, 2

 del coseno, 18

 del seno, 18

triángulo

 acutángulo, 16

 obtusángulo, 21

 rectángulo, 1

vértice, 26

Sobre la autora

MARILINA CARENA. Doctora en Matemática. Investigadora Independiente del CONICET. Profesora Asociada en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL).

Sobre las revisoras

ELISABET HAYE. Magíster en Matemática. Profesora Titular de Matemática Básica en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Responsable de las asignaturas de grado vinculadas a Ecuaciones Diferenciales de esta facultad.

FABIANA MONTENEGRO. Profesora, Licenciada en Matemática Aplicada, Magíster en Matemática y Doctora en Educación. Profesora Titular en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Responsable de la asignatura Álgebra Lineal de esta facultad.

**FUNCIONES, ECUACIONES
E IDENTIDADES
TRIGONOMÉTRICAS**

C Á T E D R A

Este libro introduce el estudio de las funciones trigonométricas con un enfoque centrado en la comprensión de sus fundamentos y propiedades, por sobre la memorización de fórmulas. Partiendo de las razones trigonométricas y la resolución de triángulos, avanza hacia las funciones trigonométricas, la resolución de ecuaciones e identidades, y una breve introducción a sus funciones inversas.

Dirigido a estudiantes de ingeniería y carreras afines, constituye un recurso riguroso y accesible para los primeros cursos universitarios.