

MAT

**CÁLCULO PARA
CIENCIAS ECONÓMICAS**
ABORDAJE CONCEPTUAL
Y SIGNIFICATIVO

CÁLCULO CIENCIAS ECONÓMICAS

Viviana Cámara
Estefanía Dalmasso
[compiladoras]

ediciones UNL



Cálculo para Ciencias Económicas

Cálculo para Ciencias Económicas

Abordaje conceptual y significativo

Viviana Cámara
Estefanía Dalmasso

COMPILADORAS

Viviana Cámara
Estefanía Dalmasso
Silvana Grisetti
Jonatán Perren
María Magdalena Mas
Gustavo Cabaña

ediciones UNL

CÁTEDRA

**UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL LITORAL**



Consejo Asesor
Colección Cátedra
Alicia Camilloni
Daniel Comba
Bárbara Mántaras
Isabel Molinas
Héctor Odetti
Andrea Pacífico
Ivana Tosti

Dirección editorial
Ivana Tosti
Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación comercial
José Díaz

Corrección
María Alejandra Sedrán
Diagramación interior
Jonatán Perren y Ediciones UNL
Diseño de tapa
Verónica Rainaud

© Ediciones UNL, 2026.

Cálculo para Ciencias Económicas /
Viviana Cámara ... [et al.] ; Compilación de
Viviana Cámara ; Estefanía Dalmaso
– 1ra. ed. – Santa Fe : Ediciones UNL, 2026.
Libro digital, PDF/A – (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-550-8

1. Matemática. 2. Contabilidad.
3. Educación Superior. I. Cámara, Viviana
II. Cámara, Viviana, comp. III. Dalmaso,
Estefanía, comp.
CDD 657

© Viviana Cámara, Estefanía Dalmaso,
Silvana Grisetti, Jonatán Perren, María
Magdalena Mas, Gustavo Cabaña, 2026.

© del prólogo Liliana Dillon, 2026.



—
Sugerencias y comentarios
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

Índice

PRÓLOGO / 11

PREFACIO / 13

AGRADECIMIENTOS / 17

1. CÁLCULO DIFERENCIAL / 19

Tasas de cambio / 20

Límites / 31

 Límite de una función / 32

 Propiedades de los límites / 37

 Límites laterales / 46

 Límites y continuidad / 54

 Discontinuidades. Límites infinitos. Asíntotas verticales / 63

 Límites indeterminados / 71

 Límites en el infinito. Asíntotas horizontales / 77

 Límites especiales: el número e / 87

La derivada / 91

 Conceptualización e interpretación / 92

 Interpretación geométrica de la derivada / 98

 Crecimiento: una mirada desde las pendientes de las rectas tangentes / 101

 Existencia y no existencia de la derivada / 105

 Derivabilidad y continuidad / 112

Reglas de derivación / 116

 Derivadas de funciones potencia / 116

 Reglas generales de derivación / 118

Análisis marginal / 126

 Costo marginal / 126

 Costo promedio marginal / 127

 Ingreso marginal / 128

 Utilidad marginal / 132

 Tasa de cambio relativa y porcentual / 134

Regla de la cadena y tasas relacionadas / 140

Procedimientos adicionales de derivación / 150

 Derivada de la función logarítmica / 150

 Derivación implícita / 156

Derivación logarítmica /	162
Derivación de funciones inversas /	168
La derivada en contexto /	171
Regla de l'Hôpital /	171
Optimización de problemas económicos /	177
Concavidad de una función /	198
Trazado de curvas /	214
Linealización de funciones /	222
Elasticidad puntual de la demanda /	225
Funciones de varias variables /	236
Introducción /	236
Curvas de nivel /	238
Derivadas parciales /	241
Relaciones entre bienes: una caracterización conceptual /	242
Optimización /	245
2. CÁLCULO INTEGRAL /	255
Antiderivadas /	255
Método de sustitución /	266
Integración por partes /	270
Ecuaciones diferenciales /	274
Problemas de motivación y conceptualización /	275
Ecuaciones diferenciales separables /	281
La integral en contexto /	294
Integral definida /	294
Cálculo de áreas /	314
Coefficiente de desigualdad para distribuciones de ingreso /	326
Curva de aprendizaje /	328
Maximización de la utilidad con respecto al tiempo /	329
Superávit de consumidores y Superávit de productores /	330
Integral impropia /	335
3. SUCESIONES Y SERIES /	341
Sucesiones /	342
Introducción /	342
Sucesiones monótonas /	344
Sucesiones acotadas /	348
Límite de una sucesión y convergencia /	350
Criterios de convergencia /	354
Sucesión geométrica /	356
Sucesión aritmética /	362

Series / 368

Introducción / 368

Límite y convergencia de una serie / 370

Serie geométrica / 372

Criterio de la divergencia / 382

Convergencia de series de términos positivos / 384

Series alternadas / 394

ANEXO 1. TABLAS DE REFERENCIA / 399

APÉNDICE A. RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS / 403

Sobre las autoras y los autores / 455

Prólogo

Como decana de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL, me complace enormemente presentar este libro de cálculo, fruto del esfuerzo colectivo y la dedicación de toda una cátedra. Esta obra representa un compromiso profundo con la mejora continua de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, ya que aborda las necesidades de los estudiantes en un mundo donde los cambios económicos, tecnológicos y sociales, entre otros, demandan una sólida formación en estas disciplinas.

En consonancia con los ideales de la Reforma Universitaria de 1918, la Universidad Nacional del Litoral, a través de esta Facultad, reafirma su compromiso con una educación superior que responda a las necesidades de la sociedad y contribuya al desarrollo de su entorno. Este libro no es solo un compendio de conocimientos técnicos, sino una herramienta concebida para formar ciudadanos y profesionales capaces de analizar críticamente la realidad y proponer soluciones innovadoras a los desafíos que plantea el mundo contemporáneo.

Uno de los aspectos distintivos de este libro radica en su material inédito y en la forma original en la que se han planteado los ejercicios y ejemplos. Se ha buscado ofrecer una perspectiva fresca y relevante del cálculo, conectando los conceptos fundamentales con problemas contextualizados que permitan a los estudiantes comprender la aplicabilidad de estas herramientas en el campo de las ciencias económicas. La construcción de los conceptos se ha realizado de manera rigurosa, y se han incorporado elementos que facilitan la interpretación geométrica, analítica y gráfica.

Esta publicación responde a una apuesta decidida por la formación de recursos humanos, tanto dentro como fuera de la universidad. Creemos firmemente que el conocimiento del cálculo es fundamental no solo para nuestros estudiantes, sino también para profesionales en diversas áreas que requieren habilidades de análisis y resolución de problemas. La inclusión de herramientas como GeoGebra, refleja la intencionalidad didáctica de integrar recursos pedagógicos innovadores que faciliten el aprendizaje y la conexión del cálculo con aplicaciones prácticas. El objetivo final es promover en los estudiantes la capacidad de aplicar el conocimiento y construir a partir de él, tanto en el ámbito académico como profesional. En este sentido, la obra busca articular la formación académica con las demandas del sector productivo y las necesidades del campo económico, un principio fundamental para una

universidad comprometida con el progreso social. Confiamos en que este material contribuirá a la formación de profesionales capaces de analizar los fenómenos económicos con rigor y creatividad. Es, en suma, un aporte significativo al proyecto educativo de nuestra comunidad universitaria.

La Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral se suma a este esfuerzo continuo, brindando materiales educativos de calidad para responder a los desafíos del presente y del futuro. Agradezco profundamente el compromiso de los autores y colaboradores que han hecho posible esta valiosa contribución a la enseñanza del cálculo en el ámbito de las ciencias económicas.

Mg. Liliana Dillon

Decana

Facultad de Ciencias Económicas

Universidad Nacional del Litoral

Prefacio

En un mundo en el que los cambios económicos y sociales se producen más rápidamente que antes, la exigencia sobre los actores del sistema educativo ha aumentado considerablemente. Schleicher (2016), estadístico, matemático y especialista en educación, señala que los estudiantes de hoy deben prepararse para desempeñar trabajos que aún no han sido creados y para enfrentar problemas que todavía desconocemos.

Hoy podría decirse que los motores de búsqueda lo saben todo y que ya no resulta necesario formar sujetos que acumulen saberes, sino más bien que adquieran una brújula confiable y habilidades adecuadas para encontrar un camino hacia la resolución de preguntas formuladas en el marco de una problemática. Sin embargo, dada la capacidad para proporcionar los conceptos, herramientas, métodos y estructuras necesarias para el análisis, la modelización y la comprensión de fenómenos en diversos campos (carácter fundacional), el conocimiento matemático continúa siendo la base sobre la cual se apoya y desarrolla gran parte de las disciplinas científicas y áreas de conocimiento.

Los nuevos escenarios educativos, caracterizados por la disponibilidad de recursos y herramientas, el acceso a respuestas preelaboradas y el desarrollo de la inteligencia artificial, demandan propuestas educativas capaces de orientar la enseñanza hacia la formación de competencias. En esta línea, es clave repensar el diseño de materiales y recursos didácticos.

El texto que aquí se presenta es resultado de la integración de saberes disciplinares y didácticos, en relación con el campo de las ciencias económicas. Los problemas propuestos apuntan a favorecer la extrapolación y aplicación a partir del conocimiento adquirido propiciando el abordaje de situaciones nuevas, propias del campo económico. El diseño del texto se caracteriza por los siguientes ítems:

1. Problemas contextualizados que permiten la articulación entre áreas que confluyen en el análisis económico, desde una perspectiva matemática.
2. Variedad de actividades que incluyen preguntas abiertas para fomentar la reflexión e interpretación en contexto y el análisis de resultados en situaciones reales.
3. Desarrollo teórico a través de un lenguaje claro y amigable, más cercano a las y los estudiantes, que incorpora la voz del profesor o la profesora con

el fin de potenciar recorridos autónomos, en línea con el modelo de aula invertida.

4. Tareas que demandan el uso de competencias digitales para su mayor comprensión y correcta resolución.

El libro está organizado en tres módulos. En cada uno de ellos, los temas se vinculan con uno o varios conceptos económicos, y se incorporan distintos registros (tabular, gráfico y analítico) a fin de favorecer la construcción de los conceptos. Se hace hincapié en las interpretaciones económicas de los valores obtenidos y en los procesos de toma de decisiones.

El primer módulo aborda los fundamentos del cálculo diferencial. Se inicia con el estudio de las tasas de cambio y prosigue con la conceptualización del límite funcional y la continuidad; establece las bases para la formalización del concepto de derivada como medida de la variación. Se incluyen consideraciones sobre la relación entre la existencia de la derivada y la determinación de la recta tangente. Seguidamente, se abordan las reglas y procedimientos adicionales de derivación (implícita y logarítmica). Se estudia el crecimiento, y sus tipos, para funciones en contexto, junto con el estudio de tasas relacionadas, el uso de aproximaciones lineales y la elasticidad puntual de la demanda. Finalmente, se introducen las derivadas parciales de funciones de varias variables y sus aplicaciones.

El segundo módulo se centra en el desarrollo del cálculo integral, desde la obtención de antiderivadas hasta el estudio de integrales impropias de primera especie. En este proceso se exploran ecuaciones diferenciales de variables separables como una aplicación de la integral indefinida, lo que proporciona a la/al estudiante una introducción al modelado de fenómenos continuos que implican tasas de variación relativas. La integral definida se aborda a través del análisis de situaciones que involucran la acumulación continua como resultado del cambio en una única variable. Asimismo, se incluyen los métodos de integración por sustitución e integración por partes.

Por último, a diferencia de los módulos anteriores, el tercero se focaliza en el campo discreto, ya que introduce el estudio de las sucesiones y su convergencia. En particular, se enfatiza el análisis de la sucesión geométrica, dada su relevancia en diversos modelos de las ciencias económicas. Posteriormente, se desarrolla el estudio de las series numéricas, con especial atención a la convergencia de las series geométricas. Además, se presentan los principales criterios de convergencia para series de términos positivos y series alternadas. El empleo de conceptos del cálculo diferencial e integral en el análisis de sucesiones y series permite establecer un vínculo conceptual con los temas abordados en los módulos anteriores.

Al estudiante de cálculo

Comprender la «idea» variacional es de suma importancia en un ámbito dinámico como el de las ciencias económicas. Precisamente, el cálculo se refiere al estudio de cambios y movimientos, y responde a la cuestión de cómo impacta un cambio de una variable en otra, que es dependiente de ella. Así, les proponemos problemas en el campo continuo y discreto que permiten modelar y estudiar comportamientos económicos, financieros y productivos de funciones reales en una o más variables.

Acerca de GeoGebra

En este libro se ha incorporado [GeoGebra](https://www.geogebra.org/m) como herramienta fundamental para la resolución de las actividades propuestas. Este software se destaca por su accesibilidad, al ser gratuito y estar disponible en línea sin necesidad de registro, así como por su versatilidad, al integrar módulos de geometría, funciones, tablas y cálculo simbólico (CAS). Su capacidad para generar deslizadores y animaciones transforma actividades estáticas en experiencias interactivas, lo que facilita la exploración dinámica de conceptos. Además, su compatibilidad con diversos dispositivos permite el acceso en cualquier momento y lugar. La amplia comunidad de usuarios que comparte recursos y tutoriales refuerza su utilidad como herramienta pedagógica y de auto-aprendizaje. Así, la elección de [GeoGebra](https://www.geogebra.org/m) responde a su capacidad para combinar accesibilidad, flexibilidad y dinamismo, al tiempo que favorece una comprensión práctica y aplicada del cálculo en las ciencias económicas.

Agradecimientos

Expresamos nuestro profundo agradecimiento a la comunidad universitaria de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral por su compromiso con la educación y su apoyo a iniciativas como la edición de este libro. En particular, extendemos nuestra sincera gratitud a la Dra. Marilina Carena y a la Lic. Agustina Huespe, quienes, con gran generosidad, dedicaron su tiempo y conocimiento a la revisión de este material. Agradecemos igualmente a las profesoras Cintia Bianchini y Dulce Gottig por su colaboración en la resolución de los ejercicios propuestos.

A lo largo de su desarrollo, esta obra se sustenta en una visión emancipadora de la enseñanza, en el sentido propuesto por Jacques Rancière (2003), al plantear desafíos auténticos que invitan a las y los estudiantes a expandir sus propios límites. Coincidimos con su afirmación de que «quien enseña emancipando sabe que él mismo está aprendiendo y que las respuestas del otro son, a su vez, nuevas preguntas para él».

Desde esta perspectiva, entendemos que la enseñanza del cálculo debe orientarse a la formación de un *saber en acción*, promoviendo en los estudiantes la capacidad de aplicar el conocimiento y construir a partir de lo aprendido. Este proceso no solo es individual, sino que también involucra una dimensión social cada vez más relevante, pues el quehacer en el mundo es, en esencia, un *hacer con otros* y a partir del *hacer de otros*.

Las autoras y los autores

1 Cálculo diferencial

El cálculo diferencial, una rama fundamental del cálculo, tiene raíces profundas en la historia del pensamiento matemático y ha jugado un papel crucial en el desarrollo de la ciencia, la ingeniería y, más recientemente, en las ciencias económicas. Aunque hoy en día es una parte esencial del análisis económico, su origen se remonta a los siglos XVII y XVIII, cuando matemáticos como Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz desarrollaron de manera independiente las bases del cálculo. Sus aportes, motivados por problemas en física y astronomía, dieron lugar a las técnicas que hoy conocemos y utilizamos.

Desde sus inicios, el cálculo diferencial ha encontrado aplicaciones más allá de las matemáticas puras, como en el ámbito de la física y la ingeniería. Sin embargo, es en las ciencias económicas donde el cálculo diferencial ha demostrado ser particularmente poderoso en la comprensión y modelización de fenómenos complejos.

En la economía, el cálculo diferencial se utiliza para estudiar cómo cambian las variables económicas, como precios, producción, consumo y salarios, en respuesta a variaciones en otros factores. Los economistas emplean las derivadas para analizar la sensibilidad de la demanda de un producto ante cambios en su precio, conocida como *elasticidad de la demanda*. Además, el cálculo diferencial resulta esencial en la optimización de funciones de beneficio y coste, permitiendo a las empresas y gobiernos tomar decisiones informadas sobre la asignación de recursos.

En este material abordaremos el cálculo diferencial desde una perspectiva aplicada, priorizando la interpretación económica de los conceptos por sobre el formalismo. A través de ejemplos y problemas contextualizados, se buscará no solo aprender técnicas de derivación, sino también comprender qué informa una derivada sobre un fenómeno económico y cómo usar esa información para argumentar y decidir.

TASAS DE CAMBIO

Nuestra sociedad tiene la necesidad de expresar mediante un lenguaje los atributos de las cosas utilizando algún procedimiento ordenado. Tal es así que *medir* es considerada una actividad universal matemática y se define como aquella que se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia. Recordemos que *magnitud* es todo aquello que podemos cuantificar o medir: la longitud, el peso, el tiempo, el dinero, la temperatura, etc. son algunos de los muchos ejemplos posibles.

Para medir es necesario disponer de una unidad de medida y determinar cuántas veces esta unidad se repite en la cantidad que se quiere medir. Así, cuando medimos comparamos una cantidad desconocida con una conocida de la misma naturaleza, elegida como unidad. De tal comparación surge un número al que se le denomina *medida*. Cuando este número se acompaña de la unidad con la que fue realizada la medida se obtiene la cantidad. Los números enteros, las fracciones, los decimales o las notaciones científicas son algunas formas de expresar las medidas. Por ejemplo, cuando decimos que la longitud de una cuadra es de 100 metros es porque la unidad que seleccionamos (en este caso, el metro) se repite 100 veces en la longitud de la cuadra.

El dinero considerado como unidad de cuenta representa el valor de bienes y servicios. La cantidad de dinero se expresa en unidades monetarias y cada país tiene su propia unidad monetaria: el dólar estadounidense (USD) en Estados Unidos, el peso argentino (ARS) en nuestro país y el euro (EUR) en la Unión Europea.

La actividad matemática de medir desempeña el papel de comparar objetos a partir de una cualidad compartida. Para poder comparar y operar con las medidas es fundamental usar el mismo sistema de unidades.

Ahora bien, medir, comparar y ordenar sugiere la presencia de cambios: cambio en las cantidades, cambio en las variables y cambio en los fenómenos. El cambio está asociado a la variación, entendiendo que variación es la medida de dicho cambio siempre que este sea cuantificable. La medida de la variación puede darse en términos absolutos o relativos. La diferencia entre ellos radica en que la segunda muestra la proporción de incremento de la última medida respecto del valor de referencia. Por ejemplo, si tomamos dos productos distintos e incrementamos su valor en \$100 (variación absoluta), no es el mismo impacto si el primero costaba \$100 (un incremento del 100 %) que si el segundo costaba \$10 000 (un incremento del 1 %). Formalmente podemos desprender la siguiente definición.

Definición 1.1.1 (Variación absoluta, relativa y porcentual): Si x_0 y x_1 son números reales, entonces:

- La *variación absoluta* está dada por: $\Delta x = x_1 - x_0$.
- La *variación relativa* por $\Delta x/x_0 = (x_1 - x_0)/x_0$ con $x_0 \neq 0$.
- La *variación relativa porcentual* es la razón $\Delta\% = (x_1 - x_0)/x_0 \cdot 100$ con $x_0 \neq 0$.

Observación 1: De acuerdo con el signo de $\Delta\%$ podemos interpretar:

- Si $\Delta\% > 0$ tendremos una variación o incremento relativo positivo.
- Si $\Delta\% < 0$ tendremos una variación o incremento relativo negativo.

La variación absoluta representa el cambio que manifiesta una variable al pasar de un valor a otro, mientras que la variación relativa es el cambio expresado como proporción con respecto al valor de referencia. Esta última tiene la ventaja de ser adimensional y por tanto comparable con otras.

Ejemplo 1.1.1: Si $x_0 = 100$ y $x_1 = 20$ entonces la variación absoluta Δx es igual a -80 . La variación relativa es $-80/100 = -0.8$ y la variación relativa porcentual (o simplemente variación porcentual) es -80% .

Notemos que todas las variaciones de este ejemplo son negativas, lo cual indica una disminución en la variable x del 80% respecto de $x_0 = 100$.

En el campo continuo el concepto de tasa se asocia con la rapidez necesaria para observar un cambio. Una tasa puede ser definida como una medida del cambio que expresa una cantidad, y , por cada unidad de otra cantidad, x , de la cual y es dependiente.

Definición 1.1.2 (Incrementos de las variables de una función): Sea $y = f(x)$ una función real de variable real, y sean x_0 y x_1 pertenecientes al dominio de f , de modo que todos los valores de x entre x_0 y x_1 pertenezcan también al dominio de f . Definimos

- el *incremento en x* , y lo simbolizamos Δx , como la diferencia entre x_1 y x_0 . Es decir, $\Delta x = x_1 - x_0$;
- el *incremento en y* , y lo simbolizamos Δy , como la diferencia entre $f(x_1)$ y $f(x_0)$. Es decir $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$.

Gráficamente podemos visualizarlos en la Figura 1 donde Δx es el recorrido horizontal de $P = (x_0, f(x_0))$ a $Q = (x_1, f(x_1))$, mientras que Δy es la elevación vertical de P a Q . En esta situación tenemos $x_0 < x_1$, pero podría ser $x_1 < x_0$.

Frecuentemente nos interesa determinar en qué valores de x una magnitud varía más o menos rápido. Para eso introducimos la siguiente noción.

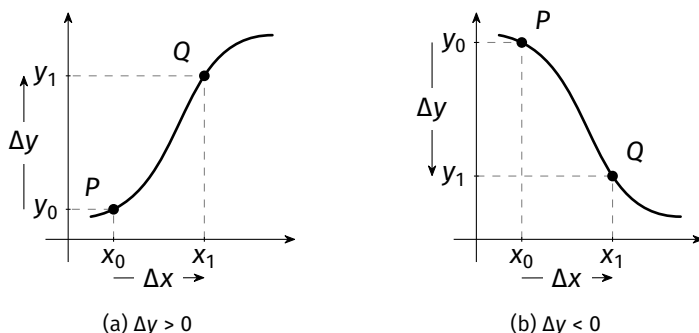


Figura 1. Representación gráfica de las variaciones si $x_0 < x_1$.

Definición 1.1.3 (Tasa de cambio promedio): Sea f una función, $[x_0, x_1]$ un intervalo con $x_1 > x_0$ y denotemos $\Delta x = x_1 - x_0 > 0$. Llamamos *tasa de cambio promedio de $y = f(x)$ en $[x_0, x_1]$* (o *variación promedio de y por cada unidad de x*) a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Este cociente se expresa en *unidades de y por unidad de x* .

El signo que corresponda a esta expresión es de suma importancia. En la Figura 1(a) tanto Δx como Δy son positivos. Por tanto, $\Delta y / \Delta x > 0$ está indicando que la tasa de cambio promedio es positiva. En este caso, la función f variará en el mismo sentido que x , aumentando cuando x aumente y disminuyendo al disminuir x . Por otro lado, en la Figura 1(b), Δx es positivo y Δy es negativo. Luego, $\Delta y / \Delta x < 0$ indica que la tasa de cambio promedio es negativa. Aquí, la función f variará en sentido opuesto a x , aumentando cuando x disminuya o disminuyendo cuando x aumente.

Ejemplo 1.1.2: La avicultura argentina ha sido caracterizada como un sector con mucha dinámica de inversiones. Empecemos por conocer algunos datos. La Tabla 1 muestra la masa promedio (en g) de los pollos en Argentina según su edad (en días).

La Tabla 2 nos muestra el incremento de la masa de los animales ΔM a medida que transcurren los días a intervalos de tamaño $\Delta t = 7$ (semanalmente).

La masa de los pollos al nacer es, en promedio, 42 g. En la primera semana de vida aumentan 125 g y lo hacen a una tasa promedio de 17.86 g/día. En la séptima semana registran su mayor aumento promedio, 96.64 g/día. Desde su nacimiento hasta la séptima semana la tasa promedio aumenta (y registra su mayor variación por día), mientras que a partir de la octava semana, si bien

Tabla 1. Masa de los pollos en criadero.

Edad (Día)	Masa (g)	Edad (Día)	Masa (g)
0	42	35	1881.5
7	167	42	2474
14	428.5	49	3150.5
21	819.5	56	3579
28	1316	63	3997

Tabla 2. Tasa promedio diaria de la masa de los pollos.

Semana	Día	Ganancia de masa semanal (g)	Tasa promedio (g/día)	Var. porcentual semanal
1	7	125	17.86	297.62 %
2	14	261.5	37.36	156.59 %
3	21	391	55.86	91.25 %
4	28	496.5	70.93	60.59 %
5	35	565.5	80.78	42.97 %
6	42	592.5	84.64	31.49 %
7	49	676.5	96.64	27.34 %
8	56	428.5	61.21	13.60 %
9	63	418	59.71	11.68 %

la masa sigue aumentando, la variación promedio diaria decrece. La última columna indica que la variación porcentual relativa siempre es positiva y disminuye semana a semana; sin embargo, la masa semanal aumenta.

Ejemplo 1.1.3: La Tabla 3 muestra los datos de las ventas totales mensuales en millones de pesos, a precio constante, de Argentina en los años 2021 y 2022.

En 2021 las mayores variaciones absolutas se dan en los meses de julio y diciembre. En julio, el aumento en las ventas totales del país fue de 2019.5 millones de pesos representando el 63.94 % respecto del mes anterior, mientras que en diciembre su aumento fue aún mayor, 3389.8 millones de pesos, es decir, 64.80 % respecto de noviembre. También señalamos que las mayores disminuciones se dieron en los meses de abril (1631.3 millones de pesos menos, lo que representa el 35.57 % respecto del mes de marzo) y de mayo (las ventas totales disminuyeron 1401.9 millones de pesos, 47.44 % respecto del mes de abril).

En 2022 se registró un aumento importante en el mes de diciembre, de 3202.2 millones de pesos, siendo un 57.12 % más respecto del mes de no-

Tabla 3. Ventas totales mensuales en millones de pesos

Mes	Ventas totales del país a un precio constante		Variaciones mensuales	
	2021	2022	2021	2022
1	4000.5	4927.4		
2	4002.8	5325.9	2.3	398.5
3	4586.4	5716.1	583.6	390.2
4	2955.1	5915.7	-1631.3	199.6
5	1553.2	5964.1	-1401.9	48.4
6	3158.2	6766.8	1605.0	802.7
7	5177.7	7594.5	2019.5	827.7
8	4854.9	5614.8	-322.8	-1979.7
9	4468.8	5054.7	-386.1	-560.1
10	6054.9	6548.6	1586.1	1493.9
11	5231.0	5606.2	-823.9	-942.4
12	8620.8	8808.4	3389.8	3202.2

Tabla 4. Variación porcentual respecto del mes anterior

Mes	2021	2022	Mes	2021	2022
1			7	63.94	12.23
2	0.06	8.09	8	-6.23	-26.07
3	14.58	7.33	9	-7.95	-9.98
4	-35.57	3.49	10	35.49	29.56
5	-47.44	0.82	11	-13.61	-14.39
6	103.33	13.46	12	64.80	57.12

viembre. Mientras que en los meses de agosto, septiembre y noviembre se produjeron disminuciones en las ventas totales. En agosto se produce la mayor caída en las ventas de un orden de 1979.7 millones de pesos representando un 26.07 % menos respecto de julio.

Ejemplo 1.1.4: En un determinado año un comerciante realizó un registro de los precios en pesos, al comienzo de cada mes, del artículo de mayor consumo de su negocio. Obtuvo el modelo lineal $p(t) = 66t + 235$, donde t indica el tiempo transcurrido a partir del primer registro, en meses. Así, $t = 0$ corresponde al primer día de enero; $t = 1$ al primer día de febrero, y así sucesivamente. Calcule la variación promedio mensual del precio entre los meses:

1. enero-marzo;
2. abril-septiembre;
3. enero-diciembre.

Solución. Al principio del mes de enero el precio de este producto es $p(0) = 235$ pesos, mientras que $p(3) = 433$ es el precio del producto a principios del mes de abril, en pesos. Para responder las consignas, calculamos la variación promedio mensual del precio para:

1. enero-marzo: $[p(2) - p(0)]/2 = \$66/\text{mes}$;
2. abril-septiembre: $[p(8) - p(3)]/5 = \$66/\text{mes}$;
3. enero-diciembre: $[p(11) - p(0)]/11 = \$66/\text{mes}$.

Notemos que la variación promedio mensual del precio de este producto es constante. Esta característica es propia de cualquier modelo lineal.

Ejemplo 1.1.5 (Costo promedio diario): Un fabricante de muebles determina que la función de costos diario en miles de dólares está dada por

$$C(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 10x + 2,$$

donde x representa la cantidad en cientos de muebles fabricados por día. Calcule la variación promedio diaria producida en el costo si se desean fabricar 50 unidades adicionales a partir de:

1. 100 unidades.
2. 200 unidades.

Solución. Consideramos que la cantidad de muebles está dada en cientos de unidades. Por lo tanto, para resolver el ítem 1, 100 muebles se corresponderá con $x = 1$, y para 150 muebles tendremos que $x = 1.5$, de modo que la variación promedio por día se calcula mediante la expresión

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(1.5) - C(1)}{1.5 - 1} \approx 3.167,$$

lo cual indica que si se aumenta la producción de muebles a 150 unidades a partir de 100, la tasa de cambio promedio del costo aumenta en 3167 dólares por unidad de x (o por cada 100 unidades de muebles) aproximadamente. Si el aumento en 50 unidades adicionales se hace a partir de 200 unidades, el costo promedio diario aumenta en

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(2.5) - C(2)}{2.5 - 2} \approx 2.167,$$

es decir, aumenta en 2167 dólares por cada cien muebles aproximadamente.

Observación 2: Es conveniente recordar que *un número aproximado* es un número tal que difiere «ligeramente» de un número exacto. Si se toma un

valor menor que el número exacto decimos que aproximamos *por defecto*, mientras que si se toma un valor mayor que dicho número decimos que aproximamos *por exceso*.

En este texto adherimos al siguiente criterio de aproximación.

1. Utilizaremos dos cifras decimales como mínimo.
2. Si la primera cifra decimal descartada es menor o igual que cinco, las cifras decimales no se alteran.
3. Si la primera cifra decimal descartada es mayor que cinco, la última cifra decimal se ve incrementada en una unidad.

Ejemplo 1.1.6: Redondeando el número π a cuatro cifras decimales se tiene 3.1416; a tres cifras decimales, 3.141, y a dos cifras decimales 3.14. El número de Neper, e redondeado a dos cifras decimales es 2.72, pero a tres cifras decimales es 2.718.

Ejemplo 1.1.7: Calcule e interprete el incremento y la tasa de cambio promedio de la función

$$y = f(x) = x^2 - 6x + 10$$

en los intervalos

- | | |
|-------------|--|
| 1. $[1, 3]$ | 2. $[6, 8]$ |
| 3. $[2, 4]$ | 4. $[x, x + \Delta x]$ si $\Delta x > 0$. |

Solución. Para los incrementos calculamos la diferencia $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, mientras que para las tasas de cambio promedio calculamos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

1. Si consideramos el primer intervalo, el incremento es $f(3) - f(1) = -4$ y la tasa de cambio es $[f(3) - f(1)]/2 = -2$. Esto nos dice que, en promedio, f disminuye dos unidades por cada unidad de x a partir de $x = 1$.
2. En el segundo intervalo el incremento es $f(8) - f(6) = 16$ y la tasa de cambio es $[f(8) - f(6)]/2 = 8$. Esto nos dice que, en promedio, f aumenta ocho unidades por cada unidad de x a partir de $x = 6$.
3. En el tercer intervalo el incremento es $f(4) - f(2) = 0$ y la tasa de cambio es $[f(4) - f(2)]/2 = 0$. Esto nos dice que, en promedio, f no aumenta ni disminuye por cada unidad de x a partir de $x = 2$.
4. En el caso general, tenemos que el incremento viene dado por

$$\begin{aligned}
 f(x + \Delta x) - f(x) &= (x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 10 - x^2 + 6x - 10 \\
 &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 6x - 6\Delta x + 10 - x^2 + 6x - 10 \\
 &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 6\Delta x \\
 &= \Delta x(\Delta x + 2x - 6).
 \end{aligned}$$

Para la tasa de cambio tenemos

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(\Delta x + 2x - 6)}{\Delta x} = \Delta x + 2x - 6.$$

Estas expresiones dependen tanto de Δx como de x .

La primera y tercera situación están representadas en la Figura 2, donde se visualiza que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ coincide con la pendiente de la recta secante en cada una de las situaciones.

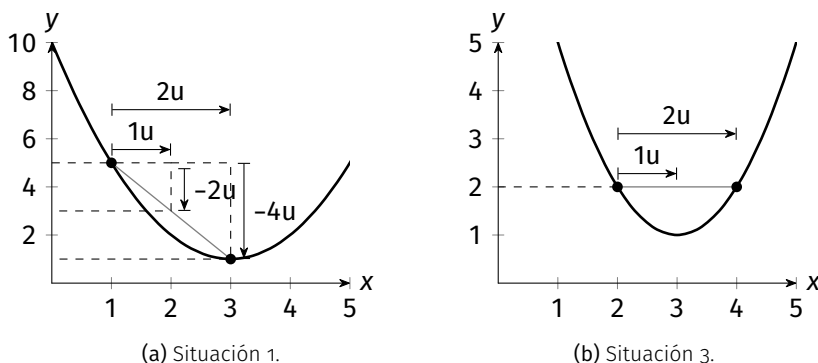


Figura 2. Interpretación geométrica de la tasa de cambio promedio.

Note, en el gráfico correspondiente a la Situación 3, que la función en el intervalo considerado presenta un tramo creciente y otro decreciente, pero su variación en promedio es cero. Por tanto, la variación promedio no refleja completamente el comportamiento de la función.

EJERCICIOS 1.1

- Si la utilidad al producir y vender x artículos está dada, en dólares, por la función $U = U(x)$, y el número de unidades producidas y vendidas pasa de x_0 a x_1 , exprese el significado de cada una de las siguientes cantidades y las respectivas unidades de medida:

a. $U(x_0) - U(x_1)$. b. $U(x_1) - U(x_0)$. c. $\frac{U(x_1) - U(x_0)}{x_1 - x_0}$.

- Con base en la Figura 3 que representa una función de costos $C = C(x)$, donde C está dado en miles de pesos y x en cientos de unidades, determine e interprete:

a. $C(8) - C(6)$. b. $\frac{C(8) - C(6)}{8 - 6}$.

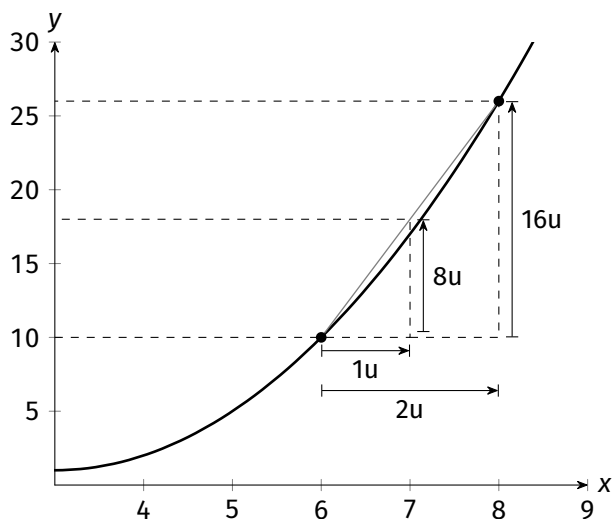


Figura 3. Función $C = C(x)$ de costos en miles de pesos.

3. El gráfico de la Figura 4 muestra la cantidad de suscripciones mundiales a telefonía móvil entre 2013 y 2018.

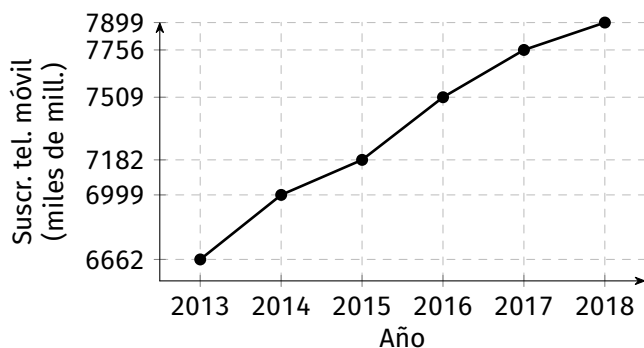


Figura 4. Suscriptores mundiales a telefonía móvil.

Considerando los datos del gráfico:

- Elabore una tabla que muestre la variación absoluta y porcentual de suscriptores año a año;
- Redacte un párrafo que describa la situación considerando la información más significativa.

4. Un comercio de la ciudad de Santa Fe vende café en grano por kg. En el mes de junio de 2020 se elaboró una tabla semanal con datos empíricos de la venta de este producto. Con base en los datos de la Tabla 5, realice las siguientes actividades.

Tabla 5. Kilogramos de granos de café vendidos por semana.

Semana	1	2	3	4
Venta de café en grano (kg)	1750	1970	2975	2890

- Agregue filas a dicha tabla que muestren las variaciones absolutas y porcentuales semanales.
 - Redacte un párrafo descriptivo de las ventas del comercio.
 - Calcule el incremento promedio en el volumen de ventas en el mes y en las últimas tres semanas del mes.
5. Considere las funciones $f(x) = -2x + 8$ y $g(x) = x^2 - 4$.
- Calcule la tasa de cambio promedio de f y g con respecto a x , en los intervalos dados a continuación:
 - $[-5, -2]$.
 - $[-3, 3]$.
 - $[2, 6]$.
 - Una vez realizados los cálculos, responda:
 - ¿En cuál función la tasa de cambio promedio es constante y en cuál es variable?
 - ¿Cómo interpreta la tasa de cambio promedio de g en el intervalo $[-3, 3]$?
 - ¿Qué otras funciones conoce en las cuáles la tasa de cambio promedio sea variable?
6. Suponga que la función de costos diarios (en cientos de dólares) de una compañía fabricante de bicicletas para competición está dada por la expresión $C(x) = 20 + 10x - 2.5x^2 + 0.42x^3$, donde x es la cantidad de bicicletas fabricadas por día, siendo la capacidad máxima de producción de la empresa de 10 unidades por día y la mínima de 2. Calcule:
- El costo de producir 2 bicicletas por día.
 - El costo promedio cuando se pasa de producir 2 a 5 bicicletas por día.
 - El incremento porcentual en el costo diario cuando la producción aumenta de 2 a 5 bicicletas por día.

- d. La tasa media de variación y el porcentaje de cambio cuando se pasa de producir 5 a 8 bicicletas por día.
 - e. A partir de los resultados obtenidos, ¿qué conclusión puede elaborar?
7. La población de la provincia de Santa Fe, Argentina, fue de 3 194 537 habitantes en el año 2010 y de 3 556 522 habitantes en el año 2022. Si asumimos que el crecimiento de la población puede estudiarse con un modelo exponencial $P(t) = Ce^{kt}$ donde t es el tiempo en años a partir de 2010, determine:
- a. el aumento en la población entre los años 2010 a 2015 y también desde 2015 a 2020;
 - b. el aumento promedio anual en cada período.
8. La Tabla 6 muestra la cotización del dólar oficial en Argentina desde diciembre de 2022 hasta diciembre de 2023, consultado el primer día hábil de cada mes.

Tabla 6. Cotización del dólar oficial en Argentina

Año	Mes	Tipo de cambio de referencia
2022	Diciembre	174.75
	Enero	184.75
	Febrero	194.50
	Marzo	204
	Abril	216.50
	Mayo	230.50
2023	Junio	249.50
	Julio	270
	Agosto	287.50
	Septiembre	365.50
	Octubre	365.50
	Noviembre	365.50
	Diciembre	376.50

Con los datos proporcionados:

- a. determine la variación absoluta y la variación porcentual del valor dólar en el período de diciembre de 2022 a diciembre de 2023 e interprete en términos económicos;
- b. encuentre el mes donde se produce la mayor variación promedio;
- c. redacte un párrafo que describa la evolución de la cotización del dólar oficial en el país en el período dado.

LÍMITES

Como mencionamos en la sección anterior, muchas veces se desea conocer la tasa de cambio de y cuando el incremento Δx es muy pequeño. Es decir, se quiere saber cómo es el comportamiento de $\Delta y / \Delta x$ a medida que Δx es cada vez más cercano a cero.

Ya sabemos que si la variable y es una función de la variable x , esto es, $y = f(x)$, y la variable independiente varía de $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) donde $x_0, x_0 + \Delta x$ y todo valor intermedio se encuentran contenidos en D_f , entonces la tasa de cambio promedio de y respecto de x se expresa como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Supongamos que $y = C(x) = 2x^2 - 8x + 12$ representa la función de costo para cierto producto, donde x representa las unidades del mismo y C está dado en dólares. Tenemos que la tasa de cambio promedio del costo, cuando la producción varía en $\Delta x \neq 0$ a partir de una producción de x_0 unidades, es

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2(x_0 + \Delta x)^2 - 8(x_0 + \Delta x) + 12 - (2x_0^2 - 8x_0 + 12)}{\Delta x} \\ &= \frac{2[x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] - 8x_0 - 8\Delta x + 12 - 2x_0^2 + 8x_0 - 12}{\Delta x} \\ &= \frac{4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 8\Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x(4x_0 - 8 + 2\Delta x)}{\Delta x} \\ &= 4x_0 - 8 + 2\Delta x.\end{aligned}$$

Si hacemos Δx cada vez más pequeño, cercano a cero (¡pero nunca igual a cero!), vemos que $\Delta y / \Delta x$ se acerca cada vez más al valor de $4x_0 - 8$. Esto dice que si la producción actual es de x_0 unidades de producto, un pequeño incremento en la producción en Δx unidades adicionales provocará que el costo aumente, aproximadamente, en $4x_0 - 8$ dólares por cada unidad adicional. Debemos notar que, en este caso, el cambio en el costo depende de x_0 . Si, por ejemplo, la producción actual es de 3 unidades ($x_0 = 3$), un pequeño incremento (Δx) en la producción generará un aumento en el costo muy cercano a $4 \cdot 3 - 8 = 4$ dólares por unidad adicional. Mientras que si el valor inicial de producción es de 1 unidad ($x_0 = 1$), el costo variará aproximadamente en $4 \cdot 1 - 8 = -4$ dólares por cada unidad adicional a partir de esa producción inicial, esto es, disminuirá en unos 4 dólares por unidad adicional a partir de producir una unidad.

Que $\Delta y / \Delta x$ se acerca cada vez más al valor de $4x_0 - 8$ cuando Δx se acerca a cero se suele simbolizar como: $\Delta y / \Delta x \rightarrow 4x_0 - 8$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$. O decimos

también que «el límite de $\Delta y / \Delta x$ cuando Δx tiende a 0 es $4x_0 - 8$ ». Es habitual expresarlo mediante la igualdad

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x_0 - 8 + 2 \Delta x) = 4x_0 - 8. \quad (1)$$

Este ejemplo ilustra un tipo común de situación donde se desea analizar la tasa de cambio «instantánea» de una variable en función de otra; situación que tiene que ver, como veremos más adelante, con la definición de derivada.

Límite de una función

Por el momento, nos concentraremos en comprender el concepto de límite, en el sentido de conocer el comportamiento de una función f que depende de una variable x , cuando x se aproxima a un valor particular c y estudiar si, para cualquier función f es posible determinar la tasa de cambio instantánea en $x = c$. Para ello, retomaremos el cálculo de límites como el dado en (1).

Ejemplo 1.2.1: Consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 1$. ¿A qué valor se acerca f cuando x se acerca a 1?

Si tomamos valores cada vez más cercanos a 1, *pero no iguales a este*, y evaluamos f en ellos, se obtienen resultados como los que se dan en la Tabla 7.

Tabla 7

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0	-1	2	7
0.5	0.25	1.5	4.25
0.7	0.89	1.2	2.84
0.9	1.61	1.1	2.41
0.99	1.9601	1.05	2.2025
0.995	1.980 025	1.01	2.0401
0.999	1.996 001	1.001	2.004 001

Esto indica que a medida que nos acerquemos más a $x = 1$, en un sentido o en otro, los valores de f parecen acercarse a $y = 2$.

Esto mismo se evidencia en la gráfica de f que se ilustra debajo: si tomamos valores de x cercanos a 1, tanto menores como mayores que este, vemos que las imágenes de los mismos (los valores f) se asemejan cada vez más a 2, que, casualmente, es también el valor de $f(1)$, aunque no siempre sucederá esto como veremos en los próximos ejemplos.

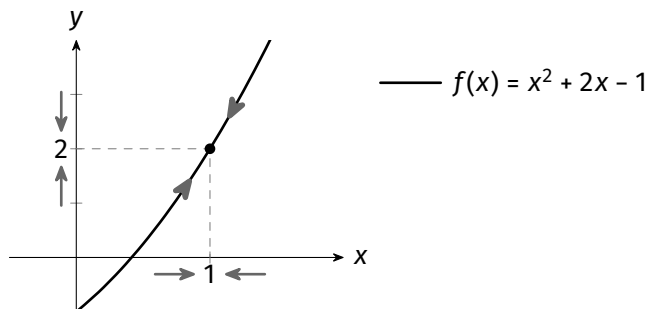


Figura 5. Límite de f en $x = 1$.

Decimos entonces que «el límite de f cuando x tiende a 1 es 2». En símbolos, escribimos

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \rightarrow 2 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow 1,$$

o también lo denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 1) = 2.$$

como indicamos en la introducción de esta sección.

¡Cuidado! Si bien estos métodos de análisis mediante tablas o gráficas permiten dar una primera idea de límite, cuando disponemos de la expresión explícita de f *no resultan ser los procedimientos más adecuados* a la hora de justificar por qué el valor límite obtenido es ese y no otro. Por un lado, el cálculo de límites por medio de tablas de valores es altamente sensible a la elección de estos; unos pocos valores pueden no ser suficientes o ser poco representativos del comportamiento de f . Asimismo, el método gráfico, dependiendo del grosor del trazo o la precisión en la escala que se emplee, puede darnos una idea errónea del valor al que se acercan las imágenes f cuando x se acerca a un valor c . Aunque tampoco daremos la definición matemática precisa de límite, puesto que excede los alcances de este curso, sí veremos métodos para el cálculo de límites que contarán con la suficiente rigurosidad matemática que se espera que el estudiante desarrolle.

Damos ahora una definición más general de límite de una función.

Definición 1.2.1 (Límite de una función): Sea f una función definida al menos en un conjunto de la forma $(c - \Delta x, c) \cup (c, c + \Delta x)$ para algún $\Delta x > 0$, arbitrariamente pequeño. Es decir, f está definida para todos los valores de x cercanos a c , *excepto, quizás, para $x = c$.*

Se dice que el número L es el *límite* de f cuando x tiende a c si podemos acercar los valores de $f(x)$ a L tanto como se desee, con tal de tomar un valor de x suficientemente cerca de c , pero no necesariamente igual a c . Si esto ocurre, lo expresamos en símbolos como

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{o bien} \quad f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow c.$$

Cuando esto sucede, esto es, cuando el límite de f en $x = c$ es un número L , decimos que el límite de f en $x = c$ *existe*.

En el Ejemplo 1.2.1 tenemos que $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $c = 1$ y $L = 2$, y f cumple estar bien definida cerca de $c = 1$ (más aún, en todos los reales).

Observación 3: Debemos notar que en la definición de límite no se requiere considerar el valor de $f(c)$ para determinar el valor del límite de f cuando x tiende a c . Ni aún siquiera es necesario que $f(c)$ exista, esto es, *no se pide que* $c \in D_f$. Lo único que interesa es conocer cómo se comporta f en un entorno de valores de x suficientemente cercanos a c .

Ejemplo 1.2.2: Consideremos la función $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \neq 1, \\ 3 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Como la misma coincide, *excepto en* $x = c = 1$, con la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ del Ejemplo 1.2.1, para todo valor de x cercano a $c = 1$ tanto f como $\tilde{f}$ se comportan de igual manera, y tendremos que también es

$$\lim_{x \rightarrow 1} \tilde{f}(x) = 2,$$

como vemos en la Figura 6. Es decir, no importa que $\tilde{f}(1) = 3 \neq 2 = f(1)$ al momento de hallar el límite cuando $x \rightarrow 1$, pues las dos funciones son iguales en todos los demás valores cercanos a $c = 1$.

Ejemplo 1.2.3: Conjeture el valor de

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x - 1}.$$

Solución. Lo primero que deberíamos detectar es que la función involucrada, denominémosla g , $g(x) = (x^3 + x^2 - 3x + 1)/(x - 1)$, no está definida en $x = 1$, esto es, que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (léase «todos los reales excepto el uno»). Pero como mencionamos en la Observación 3, esto es irrelevante para determinar el límite de g cuando $x \rightarrow 1$.

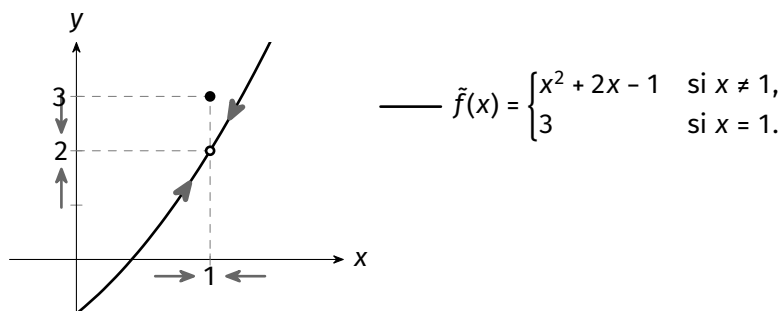


Figura 6. Límite de $\tilde{f}$ en $x = 1$.

Entonces, ¿cómo se comporta g cerca de $x = 1$? Si hacemos la gráfica de g podemos notar en la Figura 7 que la misma presenta un «agujero» en $x = 1$ pues no está definida allí.

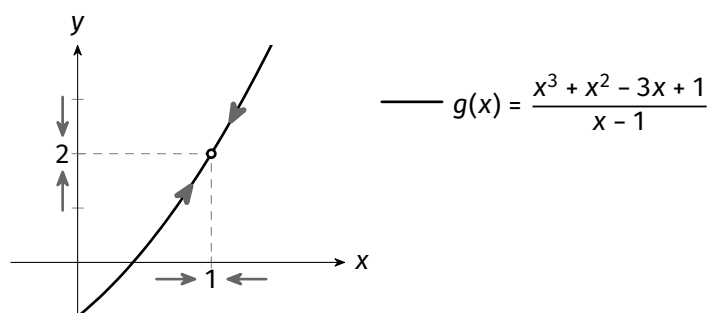


Figura 7. Límite de g en $x = 1$.

A pesar de ello, podemos acercarnos a 1 con valores menores o mayores que este, en todos los cuales g está bien definida, y conjeturar que, tal y como sucedió con la función $\tilde{f}$ del ejemplo previo,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 2. \quad (2)$$

Algo similar puede conjeturarse mediante la evaluación de g en valores cercanos a $x = 1$ como se hizo en la Tabla 7.

Ejemplo 1.2.4: Pruebe que la conjetura (2) es cierta.

Solución. Primero comencemos observando la Figura 7: ¿acaso no luce tal y como la gráfica de la función del Ejemplo 1.2.1 (Figura 5) pero con un «agujero»? Efectivamente. Y esto se debe a que la función $g(x) = (x^3 + x^2 - 3x + 1)/(x - 1)$

se puede escribir como la función f del Ejemplo 1.2.1 fuera de $x = 1$. ¿Cómo comprobamos esto algebraicamente?

Notemos que el polinomio numerador de g , $x^3 + x^2 - 3x + 1$, se anula en $x = 1$ ya que $1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$. En otras palabras, $x = 1$ es raíz de dicho polinomio o, también, $(x - 1)$ es uno de sus factores. Mediante, por ejemplo, la regla de Ruffini podemos obtener que el polinomio $x^3 + x^2 - 3x + 1$ se puede factorizar como

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(x^2 + 2x - 1),$$

lo que implica que, para $x \neq 1$, se tiene que

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + 2x - 1)}{\cancel{x-1}} = x^2 + 2x - 1.$$

Hacemos hincapié en que la función de este ejemplo no es la misma que la del Ejemplo 1.2.1 porque tienen dominios diferentes; ambas coinciden solo para $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Sin embargo, a los efectos del límite, podemos afirmar que las dos funciones tienden a 2 cuando $x \rightarrow 1$ porque, recordemos, el valor del límite de $x^2 + 2x - 1$ es independiente del valor de dicha expresión en $x = 1$. Es decir, es cierto que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 1) = 2,$$

lo que confirma la conjetura (2).

Si consideramos las funciones f , $\tilde{f}$ y g de los Ejemplos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3, respectivamente, todas tienden a 2 cuando $x \rightarrow 1$. Más aún, todas ellas son iguales siempre que $x \neq 1$. Esta coincidencia de límites no se da solo con estas funciones, sino que es más general.

Proposición 1.2.1: Si f y g son dos funciones tales que $f(x) = g(x)$ para todos los valores de x suficientemente próximos a $x = c$ excepto, quizás, en $x = c$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$, cuando este límite exista.

Notemos que de las tres funciones mencionadas, la función del Ejemplo 1.2.1 cumple que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, es decir, se puede determinar mediante una sustitución de la variable por el valor de $c = 1$ al que se acerca x , y por ello el cálculo del límite fue más sencillo de realizar. No siempre tendremos funciones de este tipo, donde el límite se reduce a la sustitución de $x = c$ en la función. Es por ello que necesitaremos de otras herramientas para el cálculo de límites cuando no dispongamos de funciones con estas características (veremos más adelante que el hecho de tener que una función f cumpla que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ está relacionado con el concepto de continuidad).

EJERCICIOS 1.2.1

1. Suponga que conoce el $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ para las funciones f dadas a continuación. Compruebe que la función g dada posee el mismo límite que f en $x = c$. Contraste su respuesta usando GeoGebra.
 - a. $c = 2$, $f(x) = x + 2$, $g(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$.
 - b. $c = 0$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = (x^3 + x)/x$.
 - c. $c = -3$; $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$, $g(x) = (x^4 - 8x^2 - 9)/(x + 3)$.
 - d. $c = 3$, $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$; $g(x) = (x^3 - 4x^2 + x + 6)/(x^3 - 3x^2 - 4x + 12)$.
 - e. $c = 0$, $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = (e^x - 1)/(e^{2x} - e^x)$. (Sugerencia: sacar factor común e^x en el denominador).
2. Conjeture el valor del $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ para cada una de las funciones dadas en el ejercicio anterior, ayudándose con una gráfica. Compare, en cada caso, las gráficas de f y g cerca de $x = c$.

Propiedades de los límites

Existen muchas propiedades de límites que nos ayudarán en el cálculo de los mismos. Todas ellas permiten determinar un límite a partir de otro u otros conocidos, que por lo general son más simples de calcular.

Primero veamos el caso de una función constante. Es claro que si $f(x) = b$ con b un número real cualquiera, la función está bien definida en todo $x \in \mathbb{R}$ y si nos acercamos a $x = c$, siempre tendremos que $f(x) \rightarrow b$ pues es el único valor que puede tomar la función. Esto indica que el límite de una (función) constante es la misma constante:

$$\lim_{x \rightarrow c} b = b. \quad (3)$$

Es fácil comprobar que la función identidad $f(x) = x$ posee límite c en $x = c$, pues justamente cuando $x \rightarrow c$, $f(x) = x \rightarrow c$. Esto se expresa como

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c. \quad (4)$$

De estas dos propiedades, y de las dadas en el siguiente teorema, será posible determinar los límites de otras funciones sencillas como las polinómicas, las racionales y algunas combinaciones de estas.

Teorema 1.2.2 (Propiedades de los límites): Sean f y g dos funciones que poseen límite en $x = c$. Entonces valen las siguientes relaciones:

1. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$;
2. cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow c} (af(x)) = a \lim_{x \rightarrow c} f(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$;
4. si $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow c} f(x))^n$;
5. si $n \in \mathbb{N}$ es impar, $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, mientras que si n es par, vale la misma propiedad solo si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq 0$;
6. si $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$, también se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}.$$

Coloquialmente, la propiedad 1 dice que el límite de la suma (o de la resta) de funciones es la suma (o la resta) de los límites de cada una de ellas, mientras que las propiedades 3 y 6 indican que el límite del producto es el producto de los límites, y lo correspondiente sucede con el cociente, pero siempre y cuando la función que tengamos en el denominador no tenga límite cero en $x = c$. La propiedad 2 nos dice que podemos «sacar» las constantes afuera de los límites. Por otro lado, la propiedad 4 muestra que, para potencias naturales, podemos «sacar» la potencia afuera, y algo similar sucede con las raíces n -ésimas según se plantea en la propiedad 5. Para usar esta última propiedad, tendremos que tener cuidado con el valor del límite de la función radicando cuando el índice de la raíz sea par.

Trataremos de deducir ahora los límites de funciones conocidas.

Ejemplo 1.2.5: Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow c} (mx + b) = mc + b, \quad (5)$$

para cualesquiera números reales m, b y c . En otras palabras, compruebe que las funciones afines tienen límite en todo su dominio y que el mismo se calcula evaluando a la función en el valor al que se acerca la variable.

Solución. Usando (3), (4) y las propiedades de los límites 1 y 2, resulta que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} (mx + b) &= \lim_{x \rightarrow c} (mx) + \lim_{x \rightarrow c} b \\ &= m \left(\lim_{x \rightarrow c} x \right) + b \\ &= mc + b, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 1.2.6: Usando una o más propiedades, halle el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(x - 4)(x + 2)^2 - 5(3 - 4x)]$$

en el caso de ser posible.

Solución. Dado que todas las funciones involucradas son afines, poseen límite en $x = 1$ por (5). Podemos aplicar las propiedades de la resta, del producto de funciones, de la potencia, y del producto por una constante, y deducir que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 4)(x + 2)^2 - 5(3 - 4x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 4)(x + 2)^2] - \lim_{x \rightarrow 1} [5(3 - 4x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - 4) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) \right)^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 4x) \\ &= (1 - 4)(1 + 2)^2 - 5(3 - 4 \cdot 1) \\ &= -3 \cdot 3^2 - 5 \cdot (-1) \\ &= -22, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos encontrar.

Ejemplo 1.2.7: Usando una o más propiedades, halle el límite

$$\lim_{x \rightarrow -1} [(3x^2 - 1) + (4x^3 + 6)^7]$$

en el caso de ser posible.

Solución. Deberemos calcular primero, si existen, los límites de las funciones sumandos $f(x) = 3x^2 - 1$ y $g(x) = 4x^3 + 6$ en $x = -1$. En ambos casos, mediante las propiedades 1, 2 y 4, junto con (4) y (3), obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 1) = 3 \left(\lim_{x \rightarrow -1} x \right)^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 1 = 3(-1)^2 - 1 = 2$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 + 6) = 4 \left(\lim_{x \rightarrow -1} x \right)^3 + \lim_{x \rightarrow -1} 6 = 4(-1)^3 + 6 = 2.$$

Ahora podemos aplicar la propiedad 1, y la propiedad 4 con $n = 7$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} [(3x^2 - 1) + (4x^3 + 6)^7] &= \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 1) + \lim_{x \rightarrow -1} [(4x^3 + 6)^7] \\ &= 2 + \left[\lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 + 6) \right]^7 \\ &= 2 + 2^7 \\ &= 130, \end{aligned}$$

que es el límite buscado.

Ejemplo 1.2.8: Usando una o más propiedades, halle el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2x + 8}{x + 1} + \frac{\sqrt[4]{x + 1}}{3} \right]$$

en el caso de ser posible.

Solución. Vemos que el primer término es un cociente de funciones afines, y como sus límites existen en cualquier punto, bastará comprobar que el límite del denominador no es cero:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3 \neq 0.$$

Por lo tanto, de la propiedad del cociente y (5), resulta que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 8}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 8)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)} = \frac{2 \cdot 2 + 8}{3} = 4.$$

El otro sumando es una constante por la raíz cuarta de un polinomio lineal con límite $3 > 0$. Entonces, de las propiedades 2 y 5,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x + 1}}{3} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[4]{x + 1} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{3} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}}.$$

Sumando ambos límites

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2x + 8}{x + 1} + \frac{\sqrt[4]{x + 1}}{3} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 8}{x + 1} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x + 1}}{3} = 4 + \frac{1}{\sqrt[4]{27}}.$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 1.2.9: Usando una o más propiedades, halle el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

en el caso de ser posible.

Solución. En este caso tenemos el límite de un cociente. Aquí deberemos tener en cuenta que el denominador es una raíz de índice par, $n = 2$, de la función $g(x) = x^2 + 9$, por lo que deberemos ver que el límite de g en $x = 0$ exista y sea positivo (tanto para la buena definición de la función como para poder aplicar las propiedades de límite de la raíz y del cociente). Usando las propiedades 1 y 2,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 9) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right)^2 + \lim_{x \rightarrow 0} 9 = 0^2 + 9 = 9 > 0.$$

Con lo cual, de la propiedad 5,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 9)} = \sqrt{9} = 3 \neq 0.$$

Resulta entonces que el límite solicitado se puede determinar mediante la propiedad del cociente, usando los cálculos anteriores y las propiedades 1 y 2 en el numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 25)}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 9}} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 0} x)^2 - \lim_{x \rightarrow 0} 25}{3} = \frac{0^2 - 25}{3} = -\frac{25}{3},$$

que es lo que queríamos determinar.

En los ejemplos previos seguramente pudo observar que los límites de las funciones polinómicas cuando $x \rightarrow c$ coinciden con los valores de las mismas en $x = c$. Se puede comprobar que no solo ocurre con las funciones de los ejemplos, sino con todas las que sean de ese tipo, si combinamos las propiedades 1, 2 y 4 podemos deducir este hecho (ver Ejercicio 1). Así, cualquier $f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con $a_0, a_1, \dots, a_n$ constantes, verifica

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

para cada $c \in \mathbb{R}$.

Esta propiedad que vale para funciones polinómicas también se da en funciones racionales, en los valores de c que no anulen al polinomio denominador. Esto es, si $f(x) = p(x)/q(x)$ con p, q polinomios tales que $q(c) \neq 0$, usando que p y q satisfacen lo de arriba junto con la propiedad 6, se deduce

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} p(x)}{\lim_{x \rightarrow c} q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} = f(c).$$

Las propiedades anteriores se resumen en el siguiente resultado.

Corolario 1.2.3: Para todo $x \in D_f$ se tiene que

1. si f es una función polinómica, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

2. Si f es una función racional de la forma $f(x) = p(x)/q(x)$ con p, q polinomios, y $x = c$ no es raíz de q , entonces $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. En otras palabras, si $q(c) \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

Veamos qué sucede cuando el denominador de una función racional se anula en $x = c$, es decir, cuando no podemos aplicar el resultado anterior.

Ejemplo 1.2.10: Determine, si es posible,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3 - 4x^2 - 14x - 8}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}.$$

Solución. Como tenemos una función racional, para poder aplicar el resultado anterior debemos comprobar que el polinomio denominador $q(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ no se anula en $x = 4$:

$$q(4) = 4^3 - 7 \cdot 4^2 + 14 \cdot 4 - 8 = 64 - 112 + 56 - 8 = 0.$$

No podemos usar, entonces, el Corolario 1.2.3. ¿Cómo determinamos si el límite existe entonces?

Observemos que, en realidad, el polinomio numerador $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 14x - 8$ también vale cero en $x = 4$:

$$p(4) = 2 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 - 14 \cdot 4 - 8 = 128 - 64 - 56 - 8 = 0.$$

Luego, los dos polinomios se anulan en $x = 4$, lo que plantea una situación donde el cociente de los polinomios es de tipo «0/0» en $x = 4$ al intentar una sustitución directa para el cálculo del límite.

Como $p(4) = q(4) = 0$, los dos polinomios tienen a $(x - 4)$ como factor, por lo que podríamos simplificar la expresión racional para decidir si tiene límite. Aplicando Ruffini con cada uno de ellos tenemos que $p(x) = (x - 4)(2x^2 + 4x + 2)$ y $q(x) = (x - 4)(x^2 - 3x + 2)$. Factorizando los polinomios cuadráticos que se obtuvieron como cocientes (con la fórmula resolvente o cualquier otro tipo de método de factorización), se puede comprobar que p y q ya no comparten ningún otro factor $(x - 4)$ pues

$$p(x) = 2(x - 4)(x + 1)^2, \quad q(x) = (x - 4)(x - 1)(x - 2).$$

La función racional se puede simplificar entonces, para $x \neq 4$, como

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - 14x - 8}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} = \frac{2\cancel{(x-4)}(x+1)^2}{\cancel{(x-4)}(x-1)(x-2)} = \frac{2(x+1)^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Teniendo en cuenta la Proposición 1.2.1 y el Corolario 1.2.3 ya que ahora el polinomio denominador no se anula en $x = 4$, podemos escribir

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3 - 4x^2 - 14x - 8}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 2}{4^2 - 3 \cdot 4 + 2} = \frac{25}{3}.$$

Es importante que observemos que la función racional no está definida en $x = 4$, pero sí tiene límite cuando $x \rightarrow 4$.

El ejemplo anterior evidencia una situación en la que, al hacer la sustitución por $x = c$ en la función racional, se tiene un cociente de tipo «0/0», lo que

se considera un tipo de *indeterminación*. Esto indica también que c no es un elemento del dominio de dicha función, pero ya dijimos en reiteradas oportunidades que esto no es lo que interesa a la hora de calcular el límite para $x \rightarrow c$. Que se tenga una indeterminación en el límite no quiere decir que no se pueda conocer su valor, sino que deberemos realizar un análisis más profundo de la función en cuestión para *determinar* el valor del límite, o *determinar* si el límite no existe (es decir, no es un número L). Estudiaremos este tipo de indeterminaciones con más detalle en la Sección 1.2.6.

Así como obtuvimos propiedades para límites de funciones polinómicas y racionales, podemos enunciar otras referidas a los límites de funciones exponenciales y logarítmicas. Sin embargo, no haremos la deducción de las mismas pues escapa a los contenidos de este curso.

Proposición 1.2.4: Sea a una constante positiva con $a \neq 1$. Entonces

1. $\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c$ para cualquier número real c ;
2. $\lim_{x \rightarrow c} \log_a(x) = \log_a(c)$ para todo número real positivo c .

Más generalmente, si f es una función tal que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, entonces

3. $\lim_{x \rightarrow c} a^{f(x)} = a^L$;
4. $\lim_{x \rightarrow c} \log_a(f(x)) = \log_a(L)$ siempre que $L > 0$.

Ejemplo 1.2.11: Determine el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2^x - (x + 3)^2)$$

siempre que sea posible.

Solución. Para determinar si existe $\lim_{x \rightarrow 1} (2^x - (x + 3)^2)$, podríamos descomponer a la función y mirar si cada término tiene límite en $x = 1$.

Por un lado, de la proposición anterior con $a = 2$, que es una constante positiva y distinta de 1, podemos garantizar que

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2^x = 2^1 = 2.$$

Por otro lado, la otra expresión es polinómica así que tendrá límite en $x = 1$, siendo este

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)^2 = (1 + 3)^2 = 4^2 = 16.$$

Por la propiedad para la diferencia de límites enunciada en el Teorema 1.2.2, obtenemos que el límite dado existe y es

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2^x - (x + 3)^2) = \lim_{x \rightarrow 1} 2^x - \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)^2 = 2 - 16 = -14,$$

que es lo que se quería determinar.

Ejemplo 1.2.12: Determine el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x^3} + e^{x+1})$$

siempre que sea posible.

Solución. En este caso, tenemos dos funciones exponenciales de base e . Cada una de ellas tendrá límite si las funciones exponentes lo tienen, con base en la propiedad 3 de la proposición anterior. Resulta que ambas funciones exponentes son polinómicas y tienen límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^3) = -0^3 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 0 + 1 = 1.$$

Entonces será

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x^3} + e^{x+1}) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} e^{x+1} = e^0 + e^1 = 1 + e,$$

que es el límite buscado.

Ejemplo 1.2.13: Determine el límite

$$\lim_{x \rightarrow -1} \log_{10}(x^2 + 1)$$

siempre que sea posible.

Solución. La base del logaritmo es $a = 10$ por lo que las propiedades enunciadas en la proposición anterior valdrán para este. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2 > 0,$$

tendremos de dicha proposición que

$$\lim_{x \rightarrow -1} \log_{10}(x^2 + 1) = \log_{10}(2)$$

es el límite buscado.

Ejemplo 1.2.14: Determine el límite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \ln(2x - 6)$$

siempre que sea posible.

Solución. Tenemos que notar que

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 6) = 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Como no es un número positivo, no podremos calcular este límite mediante la Proposición 1.2.4. Esto aún no dice que el límite no existe. Sin embargo,

teniendo en cuenta el comportamiento de las funciones logarítmicas de base $a > 1$ podemos notar que, a medida que el argumento se acerca a $x = 0$, los valores de $y = \log_a(x)$ se hacen infinitamente pequeños como vemos en la Figura 8 por lo que no se acercará a un número. Precisaremos esto más adelante, en la Sección 1.2.5.

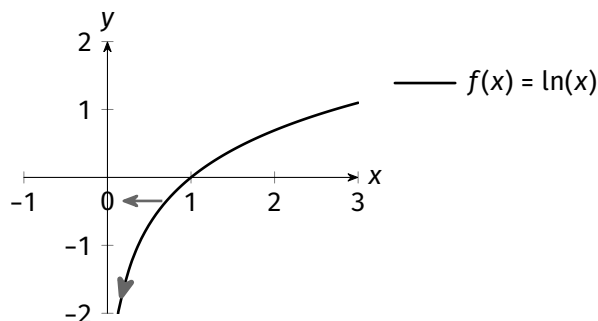


Figura 8

EJERCICIOS 1.2.2

1. Compruebe la validez del Corolario 1.2.3, parte 1.
2. Halle el límite de las funciones f del Ejercicio 1 de la sección anterior, mediante propiedades de los límites. Luego, compruebe que lo obtenido para cada una de ellas coincide con lo conjeturado en el Ejercicio 2 de dicha sección.
3. Aplicando propiedades, determine, si es posible, los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow 5} [x^2(x - 1) + 5(x - 20)].$

b. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{(x - 2)^2 + 2x^3 + 0.25}.$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 + 5x - 2)^5(x^3 - x^2 + 3)^4].$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} [\ln(2)x^2 - 5e + \sqrt{2}].$

e. $\lim_{x \rightarrow 0.5} \left[\frac{x^2 + x}{4 - 1} - \frac{\sqrt[3]{16x}}{8} \right].$

f. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 80x - 64}{x^3 - 6x^2 - 16x + 96}.$

g. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 24} - 5}{x^2 - 1}.$

h. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{8 - x}{3 - \sqrt{x + 1}}.$

i. $\lim_{x \rightarrow 3} [\log_{10}(2x + 4) - \log_3(x^7)].$

j. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x^2 + 5} - 3^{x-2}).$

k. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \ln(e^{2x+1}).$

l. $\lim_{x \rightarrow -5} 4^{\log_2(9+x)}.$

4. Determine, si existen, los valores de $c \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes funciones poseen el límite indicado en $x = c$. *Recuerde tener en cuenta el dominio de las funciones involucradas.*

a. $\lim_{x \rightarrow c} (3x + 1) = 2.$

b. $\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 2) = 4.$

c. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{5x + 14} = 8.$

d. $\lim_{x \rightarrow c} [(x - 2)(x + 3) - 5] = -5.$

e. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x + 1}{x - 2} = 4.$

f. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0.$

g. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = 1.$

h. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$

i. $\lim_{x \rightarrow c} \log_5(x^2 - 9) = 2.$

j. $\lim_{x \rightarrow c} 2^{x^2 - 4x + 3} = 1.$

k. $\lim_{x \rightarrow c} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \right) = 0.$

l. $\lim_{x \rightarrow c} e^{\ln(x+1)} = c + 1.$

Límites laterales

Hasta el momento, mediante el Teorema 1.2.2, hemos podido calcular límites de funciones f que verifican que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, y también, haciendo uso de la Proposición 1.2.1, pudimos determinar otros que a priori no podían evaluarse sustituyendo x por c .

Supongamos que tenemos una función definida por tramos. Por ejemplo, la función valor absoluto $f(x) = |x|$ es, en realidad, una función definida a trozos, pues se escribe como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Dependiendo de cómo decidamos acercarnos a $x = 0$, tendremos que analizar qué sucede si nos acercamos por la recta $y = x$ (valores de x mayores a cero) y, por otro lado, qué ocurre si lo hacemos por la recta $y = -x$ (valores de x menores a cero). Y dado que las expresiones a uno y otro lado de $x = 0$ son diferentes, no podemos calcular el límite sin tener esto en consideración. Este mismo cuidado habrá que tener en otras funciones definidas por tramos, principalmente cuando intentemos determinar el límite en aquellos valores de $x = c$ donde se produzca el cambio de definición.

Esto conduce a trabajar con dos clases de valores de x cercanos a $x = c$, los que están a su izquierda y son menores que este, y los que están a su derecha y son mayores que este. Para que el límite en $x = c$ exista debería

dar lo mismo si nos acercamos por un lado o el otro. Debido a ello, y a otras cuestiones que comentaremos luego, es que será conveniente considerar los denominados *límites laterales*.

Definición 1.2.2 (Límites laterales): Supongamos que una función f está definida en un intervalo de la forma $(c, c + \Delta x)$ con $c \in \mathbb{R}$ y $\Delta x > 0$. Decimos que f *tiende a L por derecha en $x = c$* (o que el límite de f por derecha en $x = c$ es L) cuando f se acerca a L a medida que x toma valores cada vez más cercanos a c , en el dominio de f , que son *mayores que c* . Lo escribimos como

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

Similarmente, para una función f que está definida en un intervalo de la forma $(c - \Delta x, c)$ con $c \in \mathbb{R}$ y $\Delta x > 0$, decimos que f *tiende a L por izquierda en $x = c$* (o que el límite de f por izquierda en $x = c$ es L) cuando f se acerca a L a medida que x toma valores cada vez más cercanos a c , en el dominio de f , que son *menores que c* . Lo denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L.$$

Observación 4: Al igual que ocurría con el límite definido en la sección anterior, debemos notar que en la definición no se requiere que $c \in D_f$, sino que f esté definida para todo $x \in (c - \Delta x, c)$ en el caso del límite lateral izquierdo, o todo $x \in (c, c + \Delta x)$ para el derecho para algún $\Delta x > 0$.

Con base en esta definición, el límite o límite bilateral de f existe en $x = c$ si y solo si ambos límites laterales existen en $x = c$ y son iguales a un valor L , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

En otras palabras, si sabemos que el límite bilateral existe y es L , tenemos ya calculados los límites laterales que toman el mismo valor L . Y, si en cambio tenemos calculados los límites laterales y ambos existen, solo deberemos ver si coinciden o no sus valores para determinar la existencia de límite bilateral.

Es importante mencionar que los límites laterales surgen de forma natural, independientemente de los límites bilaterales. Por ejemplo, al considerar funciones cuyo dominio es un intervalo abierto I , digamos, $I = (a, b)$ con $a < b$. En tal caso, el único límite que podemos considerar en $x = a$ es el límite por la derecha, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, mientras que en $x = b$ solo podremos considerar el límite por la izquierda, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Algo similar ocurrirá si el dominio es un intervalo cerrado $[a, b]$, semiabierto como $(a, b]$ o $[a, b)$, o incluso una semirrecta del tipo $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ o $(-\infty, b]$.

Un caso típico de esta restricción de dominio se evidencia al estudiar la función $f(x) = \sqrt{x}$, e intentar ver qué ocurre con ella cuando $x \rightarrow 0$. Esta

función está definida en $D_f = [0, +\infty)$ por lo que para estudiar lo que ocurre cerca de $x = 0$, el único límite que tiene sentido es el límite lateral derecho, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$, pues no tenemos función a la izquierda de cero. Vemos en la Figura 9 que si tomamos valores de $x > 0$ cada vez más cerca de 0, entonces f se acerca a $\sqrt{0} = 0$. Así, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

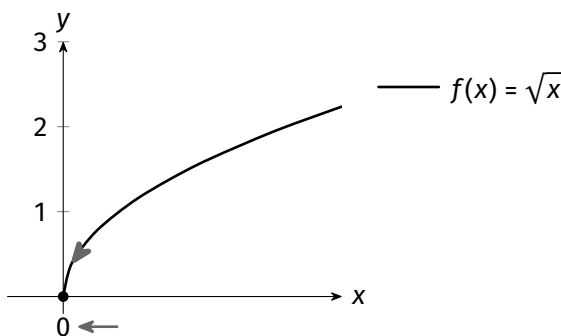


Figura 9

Observación 5: A pesar de que la Definición 1.2.1 no contempla estos casos donde el dominio de la función «impide» acercarse a $x = c$ por ambos lados, extenderemos dicha definición de la siguiente manera: cuando estemos trabajando con funciones cuyo dominio es un intervalo, convendremos en que el límite de la misma en los extremos (finitos) del intervalo coincidirá con el límite lateral que tenga sentido calcular. Así, si una función f no está definida a uno u otro lado de $x = c$, esto es, si sólo lo está en un intervalo $(c - \Delta x, c)$ ó $(c, c + \Delta x)$ para algún Δx arbitrariamente pequeño, independientemente de lo que ocurra en $x = c$, el límite bilateral será igual al límite lateral que corresponda. Por ejemplo, convendremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ existe y es igual a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$. Definimos, entonces, que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} := \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ (léase a := como «lo establecemos como»).

Ejemplo 1.2.15: Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

Solución. Para que esto suceda, deberemos ver que los límites laterales en $x = 0$ coinciden. Y esto es sencillo pues cada tramo coincide con un polinomio de grado 1 a un lado o al otro de cero. Esto es, usaremos la Proposición 1.2.1 y la existencia de límite de las funciones afines (5):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0$ y se concluye que $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

Ejemplo 1.2.16: Determine, si existe, el límite de $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = -1$.

Solución. Primero debemos tener en cuenta que $D_f = [-1, +\infty)$, por lo que en $x = -1$ el único límite lateral que tiene sentido determinar es el lateral derecho. Y, por la convención adoptada en la Observación 5, diremos que el límite (bilateral) será coincidente con este. Puesto que $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ por ser una función polinómica de grado 1, podemos decir

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0} = 0,$$

por lo que $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = 0$.

Ejemplo 1.2.17: Considere la función dada en la siguiente figura:

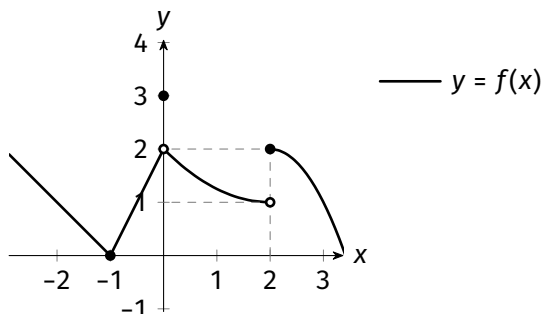


Figura 10

Con base en la gráfica, determine los límites laterales de f en los puntos de abscisas $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$. ¿Existen los límites bilaterales allí?

Solución. En $x = -1$, cuando nos acercamos por la izquierda, vemos que las imágenes decrecen a 0. Y, si nos acercamos por la derecha, ocurre lo mismo:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0.$$

Entonces, el límite (bilateral) en $x = -1$ existe y $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$. Aquí, observamos que además coincide este límite con el valor de $f(-1)$.

En $x = 0$, si nos acercamos por izquierda, por el tramo de recta, f se acerca a $y = 2$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2.$$

Por otra parte, si nos acercamos por la derecha a $x = 0$, los valores de f recorren la curva aproximándose también a $y = 2$. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2.$$

Entonces existe el límite bilateral $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$. Observemos que $f(0) = 3$, que no coincide con el límite en $x = 0$, pero ya comentamos en varias oportunidades que este hecho no afecta al valor del límite.

En $x = 2$ observamos del gráfico que al acercarnos por izquierda, con valores de x menores que 2,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1,$$

pero si nos acercamos con valores mayores que 2, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2,$$

que coincide además con el valor de $f(2)$. Luego, ambos límites laterales existen. Sin embargo, como los valores de estos límites difieren, resulta que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe.

Ejemplo 1.2.18: Para la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 4 & \text{si } x < 4, \\ 12 - 2x & \text{si } x > 4, \end{cases}$$

calcule, si es posible:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x),$

2. $\lim_{x \rightarrow 6} f(x),$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x).$

Solución. A diferencia del ejemplo anterior, aquí disponemos de la expresión de la función, por lo que haremos uso de ella para el cálculo de límites. Este ejemplo servirá como referencia para el estudio de límites de funciones definidas por tramos.

1. Vemos que la función está definida como $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ en un entorno que contiene a $x = 3$, por lo que no será necesario estudiar los límites laterales en este punto. Tenemos, del Corolario 1.2.3, que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4 \right) = \frac{1}{2} \cdot 9 - 4 = \frac{1}{2}.$$

2. Aquí pasa algo similar, en el sentido que cerca de $x = 6$ la función toma la misma expresión a izquierda y a derecha. Así, podemos calcular nuevamente por el Corolario 1.2.3,

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6} (12 - 2x) = 12 - 2 \cdot 6 = 0.$$

3. En $x = 4$ la función cambia de una expresión a otra y, por ello, no podemos calcular directamente el límite (bilateral). Veamos qué sucede si nos acercamos a $x = 4$ por derecha e izquierda. Observemos que si bien $4 \notin D_f$, la función está definida a una lado y a otro de $x = 4$, por lo que podemos intentar estudiar ambos límites laterales en $x = 4$.

Si $x \rightarrow 4^-$, entonces $x < 4$ y corresponde analizar el comportamiento de la expresión dada para f en ese tramo. Para esos valores de x , es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4 \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4 \right) = \frac{1}{2}4^2 - 4 = 4.$$

Por otro lado, cuando $x \rightarrow 4^+$, tenemos que $x > 4$ y para esos valores la expresión de la función es $f(x) = 12 - 2x$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (12 - 2x) = \lim_{x \rightarrow 4} (12 - 2x) = 12 - 2 \cdot 4 = 4.$$

Entonces tenemos que los dos límites laterales existen en $x = 4$ y, además, vemos que valen lo mismo. En consecuencia, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4$.

Los resultados encontrados pueden visualizarse gráficamente en la Figura 11.

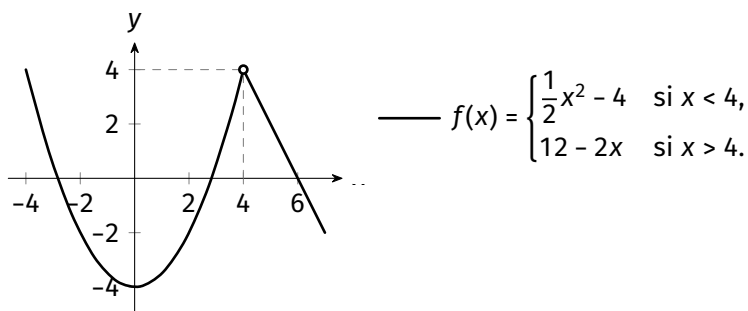


Figura 11. Función del Ejemplo 1.2.18.

Ejemplo 1.2.19: Determine el valor de la constante m para que la función

$$f(x) = \begin{cases} mx + 5 & \text{si } x \leq 1, \\ x - 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

tenga límite en $x = 1$.

Solución. Para que exista el límite en $x = 1$, bastaría con ver que ambos límites laterales existen y son iguales. Calculemos cada uno:

- Para el límite por izquierda nos acercamos por valores menores que 1, por lo que la expresión de f que corresponde a este tramo es $mx + 5$, que coincide con una función polinómica de grado 1. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx + 5) = \lim_{x \rightarrow 1} (mx + 5) = m \cdot 1 + 5 = m + 5.$$

- Por derecha tomamos valores mayores que 1, y allí interviene la otra expresión, que coincide con otra función polinómica lineal:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 8 = \lim_{x \rightarrow 1} x - 8 = 1 - 8 = -7.$$

Por lo dicho antes, los valores obtenidos deben coincidir, y tiene que ser $m + 5 = -7$. Así, $m = -12$ y

$$f(x) = \begin{cases} -12x + 5 & \text{si } x \leq 1, \\ x - 8 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

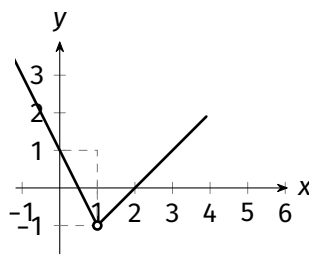
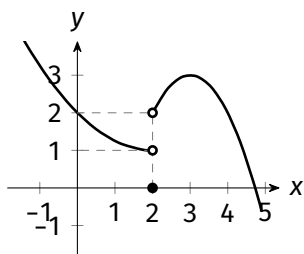
es la función resultante.

EJERCICIOS 1.2.3

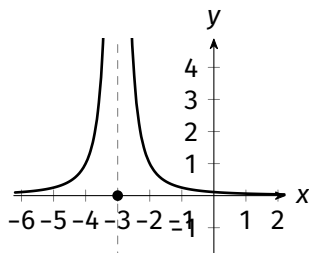
1. Haciendo uso de la gráfica de la función f , determine el valor de los límites laterales y el límite (bilateral) en el valor de $x = c$ dado, en caso de que existan. Justifique.

a. $c = 2$

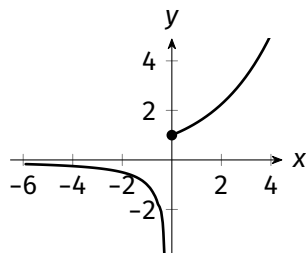
b. $c = 1$



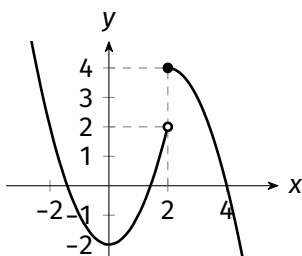
c. $c = -3$



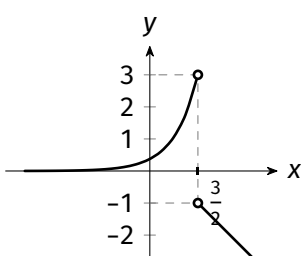
d. $c = 0$



e. $c = 4$



f. $c = \frac{3}{2}$



2. Para las siguientes funciones definidas por tramos, determine el límite indicado en cada caso:

a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 3, \\ x & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 2, \\ -x & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

d. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \neq -1, \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

e. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2, \\ 3x - 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

g. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x > 3, \\ 3x & \text{si } x \leq 3. \end{cases}$$

h. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} \log_2(x^4) & \text{si } x \leq 4, \\ \sqrt{3x + 4} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

3. Determine el intervalo dominio I de cada una de las funciones dadas. Luego, calcule los límites de la función f en los extremos (finitos) de I .

a. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

c. $f(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 7 & \text{si } 1 \leq x < 3. \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x^7 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ x^2 + 2x & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$

4. Encuentre todos los valores de la constante a para que las siguientes funciones posean límite en $x = c$.

a. $c = 2$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } x \neq 2, \\ a & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

b. $c = 0$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2 & \text{si } x < 0, \\ 7x + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

c. $c = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 1} & \text{si } x \geq 1, \\ a - \sqrt{1 - x} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

d. $c = 3$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 3, \\ ax^2 - 6 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

e. $c = -1$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x > -1, \\ (ax + 1)^2 & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

f. $c = a$,

$$f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & \text{si } x \leq a, \\ x + 3 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

g. $c = 0$,

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{si } x \geq 0, \\ ax^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

h. $c = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1) & \text{si } x \neq -1, \\ \ln(a) & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

Límites y continuidad

Los diferentes ejemplos ya presentados evidencian no solo que el límite de una función cuando $x \rightarrow c$ puede existir independientemente del valor de la función en $x = c$, sino también que no siempre podremos hallar dicho límite evaluando la función en $x = c$, pues puede no coincidir con $f(c)$, aún cuando este valor exista. Solo podremos calcular límites por medio de la sustitución de x por c en la función f cuando esta posea una gráfica «sin saltos» ni «agujeros» en $x = c$. Si comparamos las funciones dadas en los Ejemplos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3, la que posee esta propiedad en $x = 1$ es la primera de ellas. Lo que ocurre con esta función es que es *continua* allí. Precisaremos ahora este concepto.

Definición 1.2.3 (Función continua en un punto): Una función f se dice que es *continua en* $x = c \in D_f$, si la misma cumple que

1. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe, es decir, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ con L un número real;
2. $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$.

Si alguna de las condiciones anteriores falla en $x = c \in D_f$, se dice que f es *discontinua en* $x = c$. Cuando una función f es continua en cada $c \in D_f$ diremos que f es *continua en todo su dominio*, o simplemente que es *continua*.

¡Cuidado! Debemos notar que, según esta definición, no tiene sentido hablar de si una función es o no continua en un punto que no pertenezca al dominio de la misma. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ es continua en todos los valores de su dominio pues este consiste en todos los números reales excepto $x = 0$, y en todos ellos se obtiene, por el Corolario 1.2.3, que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1/c = f(c)$. No es cierto que f sea discontinua en $x = 0$ pues ese valor no está en su dominio.

Con base en la definición de límites laterales, la primera condición de continuidad puede reescribirse como:

- 1'. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ existen y son iguales a un mismo número real L .

Ejemplo 1.2.20: Revisitemos nuevamente los Ejemplos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3 para observar lo siguiente: La función f es *continua* en $x = 1$ porque, como vimos, $f(1) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. En cambio, $\tilde{f}$ *no es continua* en $x = 1$ porque si bien se cumple que $1 \in D_{\tilde{f}}$ y que $\lim_{x \rightarrow 1} \tilde{f}(x)$ existe, ocurre que $\tilde{f}(1) = 3 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \tilde{f}(x)$. Por último, la función g cumple que $1 \notin D_g$ por lo que *no corresponde estudiar la continuidad* de la misma en $x = 1$. De hecho, g es continua en todo su dominio, el cual es $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ejemplo 1.2.21: Estudie la continuidad de la siguiente función en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 67x + 126}{5x - 10} & \text{si } x \neq 2, \\ 5 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Solución. Observemos primero que $x = 2 \in D_f$, por lo que tiene sentido estudiar la continuidad de f allí. Para ello, deberíamos ver si existe el límite en $x = 2$ y, en caso de que exista, si este es igual a $f(2) = 5$.

Notemos que si intentamos hacer una sustitución en la expresión racional del tramo correspondiente a $x \neq 2$ tanto numerador como denominador se anulan en $x = 2$ lo que indica que la expresión se puede simplificar.

Dividiendo al numerador por $(x - 2)$ (mediante, por ejemplo, la regla de Ruffini) y sacando factor común en el denominador, para todo $x \neq 2$ resulta que

$$\frac{x^3 - 67x + 126}{5x - 10} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x - 63)}{5\cancel{(x-2)}} = \frac{1}{5}(x^2 + 2x - 63).$$

La función del lado derecho sí tiene límite en $x = 2$ por ser polinómica. Con base en la Proposición 1.2.1 tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 67x + 126}{5x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{5}(x^2 + 2x - 63) = \frac{1}{5}(2^2 + 2 \cdot 2 - 63) = -11.$$

Entonces, se cumple la primera condición de continuidad pero no la segunda porque

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -11 \neq 5 = f(2).$$

Por lo tanto, la función es discontinua en $x = 2$.

Ejemplo 1.2.22: Determine si la función $f(x) = |x + 1|$ es continua en $x = -1$.

Solución. Para verlo, reescribamos primero la función dada, que no es más que la función $g(x) = |x|$ trasladada horizontalmente en 1 unidad hacia la izquierda:

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x + 1 \geq 0, \\ -(x + 1) & \text{si } x + 1 < 0, \end{cases} = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq -1, \\ -x - 1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Vemos que $-1 \in D_f$ con $f(-1) = 0$, y que en $x = -1$ se produce un cambio en la expresión de la función. Entonces, debemos tratar la continuidad por límites laterales, teniendo en cuenta la condición 1'.

Para el límite lateral izquierdo debemos tener en cuenta la expresión correspondiente a los valores de x *menores que* -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x - 1) = -(-1) - 1 = 0.$$

Mientras que para determinar el límite lateral derecho se debe considerar la otra expresión, cuando los valores de x son *mayores que* -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = (-1) + 1 = 0.$$

En ambos casos el resultado es cero y coincide con el valor de la función en $x = -1$. Es decir, que el límite en $x = -1$ existe y cumple

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1),$$

de lo que resulta entonces que f es continua en $x = -1$.

Ejemplo 1.2.23: Estudie la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3, \\ -2x & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

en todo su dominio.

Solución. Esta función está bien definida en todos los reales, así que $D_f = \mathbb{R}$. Primero observemos que si $x \neq 3$, la función es continua por ser polinómica en cada uno de los tramos.

Resta ver qué sucede en $x = 3$, donde $f(3) = 5$. Para ello, nuevamente será necesario estudiar lo que ocurre a izquierda y derecha de $x = 3$, pues no disponemos de una expresión única para f .

Si nos acercamos por derecha, ya es posible ver que f no puede ser continua porque en ese caso corresponde considerar el tramo lineal lo que conduce a

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-2x) = -2 \cdot 3 = -6 \neq 5.$$

Esto es suficiente para decir que f no es continua en $x = 3$.

Si hubiéramos comenzado calculando el límite lateral izquierdo, no podríamos haber afirmado nada aún pues

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4) = 3^2 - 4 = 5 = f(3).$$

Es decir, el límite por izquierda coincide con el valor de la función, pero no así el límite por derecha, por lo que el límite en $x = 3$ no existe y f es continua únicamente en $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Cuando uno de los límites laterales en $x = c$ coincide con el valor de la función en $x = c$, como ocurre en el ejemplo anterior, se habla de una continuidad lateral de la función en $x = c$. Formalizamos esta noción a continuación.

Definición 1.2.4 (Continuidades laterales): Se dice que una función f es *continua por izquierda* en $x = c \in D_f$, si la misma cumple que

1. $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ existe;
2. $f(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$.

Similarmente, se dice que una función f es *continua por derecha* en $x = c \in D_f$, si la misma cumple que

3. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ existe;
4. $f(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.

Con base en ella, la función del Ejemplo 1.2.23 es continua en todo $x \neq 3$, y continua por izquierda en $x = 3$.

Observación 6: Como consecuencia inmediata de la definición anterior tenemos que una función f es continua en $x = c \in D_f$ si y solo si es continua por izquierda y por derecha en $x = c$.

Mediante el concepto de continuidad lateral es posible extender la noción de continuidad para funciones definidas sobre intervalos.

Definición 1.2.5 (Continuidad de una función en un intervalo): Dado un intervalo abierto (a, b) con $a < b$, decimos que una función f es *continua en (a, b)* si es continua en todo $c \in (a, b)$.

Dado un intervalo cerrado $[a, b]$ con $a < b$, decimos que una función f es *continua en $[a, b]$* si

1. f es continua en todo $c \in (a, b)$;
2. f es continua por derecha en $x = a$;
3. f es continua por izquierda en $x = b$.

Estas definiciones se extienden de forma natural a intervalos semiabiertos o infinitos. Es decir, se tendrá

- continuidad de f en $[a, b)$ si f es continua en todo $c \in (a, b)$ y f es continua por derecha en $x = a$;
- continuidad de f en $(a, b]$ si f es continua en todo $c \in (a, b)$ y f es continua por izquierda en $x = b$;
- continuidad de f en $(a, +\infty)$ si f es continua en todo $c \in (a, +\infty)$;
- continuidad de f en $[a, +\infty)$ si f es continua en todo $c \in (a, +\infty)$ y f es continua por derecha en $x = a$;
- continuidad de f en $(-\infty, b)$ si f es continua en todo $c \in (-\infty, b)$;
- continuidad de f en $(-\infty, b]$ si f es continua en todo $c \in (-\infty, b)$ y f es continua por izquierda en $x = b$.

Las funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ tienen algunas propiedades útiles, que trataremos en la Sección 1.8.2.

Coloquialmente, solemos decir que la gráfica de una función continua en un intervalo I , contenido en su dominio, es una curva que se puede dibujar en un solo trazo, sin levantar el lápiz, en todo ese intervalo. Es una curva que no tiene «saltos» ni «agujeros» en I . En la figura siguiente se muestran las gráficas

de cuatro funciones, siendo solo la primera continua en $I = [a, b]$, puesto que las tres restantes presentan algunas de las características mencionadas en sus gráficas.

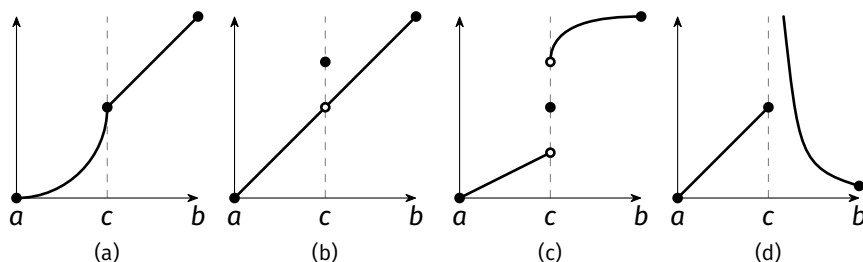


Figura 12

En líneas generales, muchas de las funciones elementales que conocemos son continuas en todo su dominio. Por ejemplo:

- las funciones polinómicas de cualquier grado son funciones continuas en el conjunto de los números reales, porque en el Corolario 1.2.3 vimos que todas cumplen $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$;
- las funciones racionales son funciones continuas en todo su dominio, pues los valores de x que anulan al denominador no forman parte de él, y porque nuevamente gracias al Corolario 1.2.3 se tiene para ese tipo de funciones que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ siempre que $c \in D_f$;
- las funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$, con a una constante positiva y distinta de 1, serán continuas en todo $\mathbb{R}$ (se deduce de la Proposición 1.2.4);
- las funciones logarítmicas $f(x) = \log_a(x)$ con a una constante positiva y distinta de 1, serán continuas en todo su dominio, el intervalo $(0, +\infty)$ (se obtiene también de la Proposición 1.2.4);
- las funciones radicales, esto es, del tipo $f(x) = \sqrt[n]{x}$ son continuas en todo su dominio (el cual depende de la paridad del índice $n \in \mathbb{N}$), con base en el Teorema 1.2.2, inciso 5, y teniendo en cuenta la convención sobre límites en el extremo de los intervalos.

Es así que para todas estas funciones, y otras que veremos posteriormente, podremos calcular el límite de f cuando $x \rightarrow c$ para todo $c \in D_f$ mediante sustitución.

Gracias a las propiedades de los límites podemos garantizar que muchas operaciones entre funciones continuas devuelven funciones que son también continuas.

Teorema 1.2.5: Sean f y g dos funciones continuas en $x = c$. Entonces

1. $f \pm g$ es continua en $x = c$;
2. af es continua en $x = c$ para cualquier número real a ;
3. fg es continua en $x = c$;
4. f/g es continua en $x = c$ siempre que $g(c) \neq 0$.

También se tiene el siguiente teorema para la composición de funciones.

Teorema 1.2.6: Si g es continua en $x = c$ y f es continua en $x = g(c)$, la función compuesta $f \circ g$ es continua en $x = c$.

El ejemplo siguiente muestra que al tomar límites para la variable independiente tendiendo a un valor c de funciones continuas en el dominio que contiene a c , basta con calcular el valor de la función en c . Si bien, ya hemos calculado límites de manera intuitiva, la noción de continuidad de la función justifica este procedimiento.

Ejemplo 1.2.24: Evalúe el límite

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5)$$

ratificando previamente la continuidad de la función.

Solución. Puesto que la función dada es polinómica de grado 1, la misma es continua en todo punto y podemos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 2 \cdot 3 - 5 = 1,$$

que es lo que se quería determinar.

Ejemplo 1.2.25: Evalúe el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3} \right)$$

ratificando previamente la continuidad de la función.

Solución. Nuevamente tenemos una función polinómica (esta vez de grado 3) que es continua en todos los reales. Así,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} - 8 + \frac{8}{3} = 0,$$

que es lo que se quería calcular.

Ejemplo 1.2.26: Evalúe el límite

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[4]{x+2}$$

ratificando previamente la continuidad de la función.

Solución. La función dada es radical y, por ser de índice par, su dominio viene dado por todos los x donde $x+2 \geq 0$, esto es, $x \in [-2, +\infty)$. Por lo dicho anteriormente, esta función será continua en este intervalo. Como $c = -1$ pertenece al mismo, el límite cuando $x \rightarrow -1$ puede calcularse por evaluación:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[4]{x+2} = \sqrt[4]{-1+2} = \sqrt[4]{1} = 1,$$

que es el límite buscado.

Ejemplo 1.2.27: Evalúe el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x+1}}$$

ratificando previamente la continuidad de la función.

Solución. Como la función dada es exponencial de base $e > 1$, es continua en $\mathbb{R}$. Y dado que la función exponente es continua en todo $[-1, \infty)$, que contiene a $x = 0$, resulta que podemos resolver el límite por sustitución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x+1}} = e^{\sqrt{0+1}} = e,$$

que es lo que se quería evaluar.

Ejemplo 1.2.28: Evalúe el límite

$$\lim_{x \rightarrow 6} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

ratificando previamente la continuidad de la función.

Solución. Tenemos la función logarítmica $f(x) = \ln(x)$, de la cual sabemos que será continua en todo su dominio, que es el intervalo $(0, +\infty)$, pero estamos componiéndola con la función racional $g(x) = (x+1)/(x-2)$, que es continua en todo su dominio, esto es, es continua en cualquier número real distinto de 2 (único valor que anula al denominador). Así, $6 \in D_g$. Como queremos evaluar el logaritmo en dicha función g , debemos asegurarnos que en $x = 6$ la imagen pertenezca al dominio de la función logarítmica:

$$g(6) = \frac{6+1}{6-2} = \frac{7}{4} > 0.$$

Del teorema anterior entonces podemos decir que la función compuesta es continua en $x = 6$ y así evaluar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \ln\left(\frac{7}{4}\right),$$

que es lo que se pedía hallar.

EJERCICIOS 1.2.4

1. Determine si la función f dada es continua en $x = c$. Suponga en cada caso que el dominio es el mayor conjunto donde la expresión tiene sentido.

a. $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $c = 1$;

b. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$, $c = -3$;

c. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & \text{si } x \neq -3, \\ -6 & \text{si } x = -3 \end{cases}$, $c = 1$;

d. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \wedge x \geq -2, \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$, $c = 2$;

e. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 4, \\ 5-x^2 & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$, $c = 4$;

f. $f(x) = 2^{x-3}$, $c = 3$;

g. $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$, $c = 1$;

h. $f(x) = \begin{cases} 3^{x+1} & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $c = 0$;

i. $f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x+1}\right)$, $c = -1$;

2. Para cada una de las funciones del Ejercicio 3 de la Sección 1.2.3, decida si son continuas en los extremos (finitos) del intervalo dominio según corresponda. Con base en sus conclusiones, indique si las funciones son continuas en *todo* su dominio según la Definición 1.2.5.
3. Exhibe ejemplos (pueden ser gráficos) de funciones f definidas en el intervalo $[0, 1]$ que cumplan las condiciones dadas en cada caso.
- f es continua en todo su dominio, excepto en $x = \frac{1}{2}$, donde falla la primera condición de continuidad.
 - f es continua en todo su dominio, excepto en $x = 0.4$, porque allí no se verifica la segunda condición de continuidad.
 - f es continua en todo su dominio, excepto en el extremo $x = 1$.
 - f es continua en todo su dominio, excepto en $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, en todos los cuales falla solo la segunda condición de continuidad.
4. Determine la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, justificando adecuadamente.

- a. Una función racional es continua en todos aquellos valores en donde lo sea cada polinomio que la determina.
- b. La función $f(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$ puede definirse en $x = -1$ de forma tal que resulte continua en todo $\mathbb{R}$.
- c. Existe una función continua en $x = 0$ tal que $f(0) = 2$ y $f(1) = 5$.
- d. Si f es una función tal que $c \in D_f$ y $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe, entonces f es continua en $x = c$.
- e. Toda función f continua en $x = c$ cumple que los límites laterales en $x = c$ existen y $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.
- f. Si $D_f = [a, b]$ con $a < b$ números reales, y f es continua por derecha en $x = a$ y continua por izquierda en $x = b$, entonces f es continua en $[a, b]$.

Discontinuidades. Límites infinitos. Asíntotas verticales

Hasta ahora hemos podido calcular diversos límites mediante sustitución y haciendo uso de algunas propiedades, gracias a la continuidad de las funciones involucradas. También hemos visto cómo hallar límites de algunas funciones definidas por tramos, tanto gráfica como analíticamente, las cuales están determinadas por tramos de funciones continuas, pero no necesariamente se obtenían funciones que fueran continuas en todo su dominio.

En el Ejemplo 1.2.21 vimos que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 67x + 126}{5x - 10} & \text{si } x \neq 2, \\ 5 & \text{si } x = 2, \end{cases}$$

era discontinua, pues poseía límite en $x = 2$ pero dicho límite no coincidía con el valor de la función en $x = 2$. Gráficamente, podemos ver que algo similar ocurre en la situación presentada en la Figura 12(b), donde la función tiene ambos límites laterales iguales en $x = c$ pero no coincide con $f(c)$.

En general, cuando $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe pero $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$, se dice que f presenta una *discontinuidad evitable o removible* en $x = c$. Este nombre se debe a que uno podría *evitar o remover* esa discontinuidad simplemente redefiniendo el valor de $f(c)$ para que coincidiera con el límite y la función sea continua. Esta situación se evidencia también en la función $\tilde{f}$ del Ejemplo 1.2.2 en $x = 1$.

Por otro lado, en el Ejemplo 1.2.23 analizamos el caso de un función para la cual existían ambos límites laterales en $x = 3$, pero no eran coincidentes.

Gráficamente, lo que ocurre es que se produce un «salto» en la gráfica en $x = 3$. Algo similar se observa en la gráfica de la Figura 12(c).

Cuando ambos límites laterales de f existan en $x = c$, para $c \in D_f$, pero sean diferentes (independientemente del valor que tome la función en $x = c$), diremos que f presenta una *discontinuidad de salto finito*.

Otra situación que puede darse es que al intentar hacer la sustitución $x = c$ en una cierta expresión f obtengamos algo del tipo $c/0$ con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (por ejemplo, ante un cociente de funciones, obteniendo el caso no incluido en la propiedad de los límites 6). Es claro que no podemos dividir por cero porque no está bien definido. ¿Cómo entendemos el límite en estos casos? ¿Existe?

Ejemplo 1.2.29: Queremos determinar si existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

Mediante una sustitución obtendríamos $1/0$ que no está definido. Lo que ocurre es que el cociente $1/x$ se hace arbitrariamente grande (positivo) a medida que $x \rightarrow 0^+$, y arbitrariamente pequeño (negativo) si $x \rightarrow 0^-$, y por ello $1/x$ no puede acercarse nunca a un número cuando $x \rightarrow 0$. En este caso diremos que *el límite no existe*, ya que no es un número.

Se suele describir este comportamiento diciendo que $1/x$ tiende a $+\infty$ por derecha en $x = 0$, y tiende a $-\infty$ por izquierda en $x = 0$. Se lo denota por

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

y la gráfica de la Figura 13 muestra este hecho:

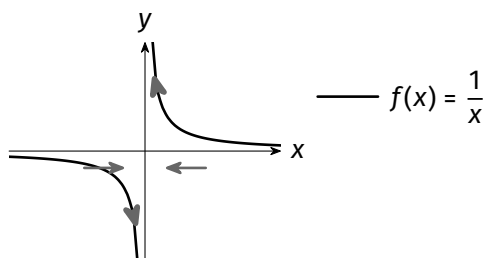


Figura 13

¡Cuidado! Si bien escribimos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$, esto no quiere decir que el límite exista. Simplemente es una notación para indicar que los valores de la función se hacen arbitrariamente grandes (o arbitrariamente pequeños según indica $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = -\infty$).

En el caso de la función $f(x) = 1/x^2$ ninguno de los dos límites laterales existe pues se tiene una situación similar al caso anterior, donde el cociente $1/x^2$ se hace indefinidamente grande a medida que nos acercamos a $x = 0$. Sin embargo, como el cociente $1/x^2 > 0$ siempre, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

En estos casos, en los que los límites laterales sean de tipo infinito con el mismo signo, podemos resumirlo como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Su gráfica puede verse en la Figura 14.

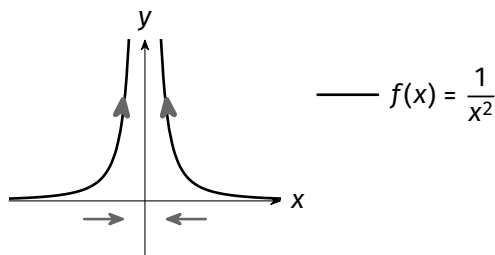


Figura 14

Ejemplo 1.2.30: ¿Qué podemos decir de la continuidad de la función

$$h(x) = \begin{cases} x^{-1/2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

en $x = 0$?

Solución. La función se puede expresar como

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$, tenemos que el cociente $1/\sqrt{x}$ crece indefinidamente, tomando siempre valores positivos, por lo que podemos afirmar

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Esto implica que h no es continua en $x = 0 \in D_h$ y no se podría redefinir de ninguna forma para que lo sea.

Lo que ocurre con la gráfica de la función h del ejemplo anterior es algo similar a lo que se observa en la Figura 12(d). Se tiene un salto en la gráfica, pero este salto ahora es infinito.

En general, si f es una función tal que $c \in D_f$, pero al menos uno de los límites laterales en $x = c$ no existe y es de tipo $\pm\infty$, se dice que la función f presenta una *discontinuidad de salto infinito* en $x = c$.

¡Cuidado! Las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/x^2$ no son discontinuas en $x = 0$ porque 0 no está en el dominio de ninguna de ellas. Son ambas funciones continuas en todo su dominio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 1.2.31: Muestre que la función

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 1, \\ x & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

Solución. Podemos hablar de continuidad/discontinuidad en $x = 1$ porque este valor está en el dominio de G . Dado que $\lim_{x \rightarrow 1^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$, para que G presente una discontinuidad de salto infinito debería darse en el límite lateral izquierdo en $x = 1$. En efecto, como $x - 1 < 0$ para $x < 1$ y se hace tan cercano a cero como uno desee cuando x se acerca a 1, su recíproco $1/(x - 1) < 0$ se hace tan grande en valor absoluto como se quiera, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

como queríamos comprobar.

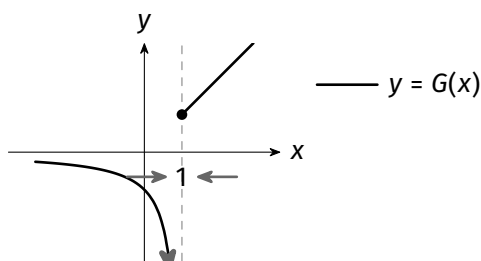


Figura 15

La función G tiene entonces una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$, como puede visualizarse en la gráfica de la Figura 15.

Resumimos en el siguiente cuadro las condiciones que deben darse para tener los tipos de discontinuidades que estuvimos discutiendo.

Definición 1.2.6 (Tipos de discontinuidades): Sea f una función y sea $c \in D_f$. Decimos que f presenta una *discontinuidad*

- *evitable* en $x = c$ si $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe pero no coincide con el valor de $f(c)$ (es decir, se podría *evitar* redefiniendo la imagen de $x = c$);
- *de salto finito* en $x = c$ si ambos límites laterales en $x = c$ existen pero son distintos (pueden o no coincidir alguno de ellos con $f(c)$);
- *de salto infinito* en $x = c$ si al menos uno de los límites laterales en $x = c$ es de tipo $\pm\infty$.

Nos concentraremos ahora en analizar el caso de discontinuidades de salto infinito. Si uno observa las gráficas de diferentes funciones que presentan límites infinitos cuando x se acerca a cierto valor c , ya sea por izquierda o por derecha, se tienen situaciones como las de los ejemplos anteriores. En todas ellas, las gráficas se acercan a la recta vertical $x = c$, la cual tiene un nombre propio, que damos en la siguiente definición.

Definición 1.2.7 (Asíntotas verticales): Una recta de ecuación $x = c$ se denomina *asíntota vertical* de una función f si se cumple al menos una de las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^+} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty.$$

Observación 7: La definición anterior indica que la recta $x = c$ es una asíntota vertical cuando al menos una de estas situaciones ocurran:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty.$$

Es claro que una función puede tener una o más asíntotas verticales. Por otra parte, es conveniente que observemos que la gráfica de una función puede cortar a una asíntota vertical en a lo sumo un punto, el de coordenadas $(c, f(c))$, si $c \in D_f$ (lo que se debe simplemente a la unicidad de imagen por ser función). En el caso de que $c \in D_f$ y $x = c$ sea una asíntota vertical de f , esto equivale a decir que f tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = c$.

Ejemplo 1.2.32: Las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/x^2$, y la función h del Ejemplo 1.2.30 tienen al eje y (la recta vertical $x = 0$) como asíntota vertical, mientras que la función G dada en el Ejemplo 1.2.31 tiene una asíntota vertical en $x = 1$. En los dos primeros casos, las funciones no intersecan a la recta asíntota, mientras que en los dos últimos sí la cortan en un punto.

Ejemplo 1.2.33: Determine las asíntotas verticales de

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-3)^2}$$

y luego bosqueje su gráfica.

Solución. Para hallar tales rectas, si las hubiera, nos interesan los valores de $x = c$ donde el límite por izquierda o derecha de $|f(x)|$ sea de tipo $+\infty$.

Como f es una función racional, los candidatos son los valores que anulan al denominador. ¿Por qué? Porque a medida que nos acerquemos a las raíces del denominador, el mismo será muy cercano a cero, y entonces el inverso será arbitrariamente grande en términos absolutos.

Para la función dada, vemos que $x = -1$ y $x = 3$ anulan al denominador, y ninguno de estos anulan al numerador. Entonces, al calcular los límites del valor absoluto de f en cada uno de estos valores, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{|x+1|(x-3)^2} = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 3} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x+1|(x-3)^2} = +\infty.\end{aligned}$$

Así, tanto $x = -1$ como $x = 3$ son asíntotas verticales de f .

Para bosquejar su gráfica, sin embargo, no serán suficientes los límites anteriores pues no nos dan información precisa sobre el sentido de las «ramas» a izquierda y a derecha de las asíntotas verticales.

Para ello, conviene estudiar mejor los límites laterales de la f hacia las asíntotas:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)(x-3)^2} = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+1)(x-3)^2} = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x+1)(x-3)^2} = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x+1)(x-3)^2} = +\infty;\end{aligned}$$

donde para determinar los signos de $(x+1)(x-3)^2$ hay que tener en cuenta cómo son tales factores cerca de -1 o de 3 , dependiendo del lado por donde nos acerquemos. Una tabla auxiliar como la Tabla 8 puede ser de utilidad para determinarlos.

En ningún otro valor tendremos un límite de tipo infinito porque f es continua en todo su dominio, decir, siempre obtendremos que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ (por el Corolario 1.2.3). En la Figura 16 se muestra la gráfica de f así como las asíntotas halladas.

Tabla 8

	$(x + 1)$	$(x - 3)^2$	$f(x)$
$x < -1$	-	+	-
$-1 < x < 3$	+	+	+
$3 < x$	+	+	+

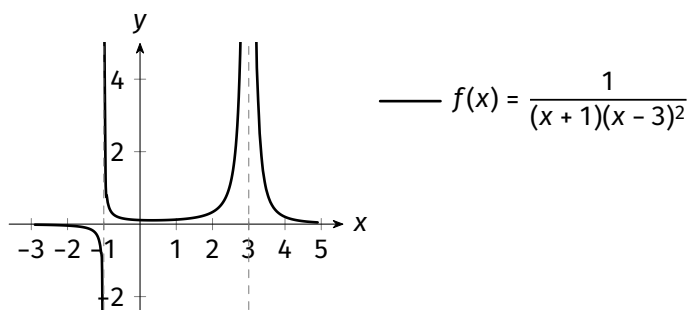


Figura 16

Ejemplo 1.2.34: ¿Qué puede decir del comportamiento de la función $f(x) = \ln(x)$ a medida que x se acerca a cero?

Solución. Aquí es claro que no podemos evaluar la función en $x = 0$ porque no es un valor de $D_f = (0, \infty)$. Sin embargo, puede probarse que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Es decir, el límite no existe en $x = 0$, y la función tiene asíntota vertical $x = 0$.

Algo similar ocurrirá con las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_b(x)$ con $b > 1$, mientras que si $b < 1$, el límite en $x = 0$ también será infinito (teniendo la misma asíntota vertical $x = 0$) pero positivo. No veremos por qué ocurre esto pues escapa a los contenidos del curso.

EJERCICIOS 1.2.5

- Determine, si existen, los valores de x en los que la función dada presenta discontinuidades. En caso de haberlas, clasifique el tipo de discontinuidad y justifique su respuesta de manera adecuada. *Recuerde tener en cuenta el dominio al momento de estudiar la discontinuidad.*

a. $f(x) = \frac{2}{x^2 + x}.$

b. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c. } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+2x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ -2 & \text{si } x = -1 \end{cases} & \text{d. } f(x) = \log_{10}(x^2 - 4). \\
 \text{e. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \wedge x > 0, \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 4. \end{cases} & \text{f. } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2x-1}} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 4x+5 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \text{g. } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 5 & \text{si } x < 1, \\ 4(1+x) & \text{si } x \geq 1. \end{cases} & \text{h. } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 7 & \text{si } 2 < x < 5, \\ \sqrt{x+4} & \text{si } x \geq 5. \end{cases}
 \end{array}$$

- Halle las asíntotas verticales de las funciones dadas en el ejercicio anterior, en caso de que existan.
- Decida si los siguientes límites existen o no. Si existen, calcúlelos. Si no existen, indique si son de tipo $\pm\infty$ y por qué.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{1/3}}. & \text{b. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}. \\
 \text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + x}. & \text{d. } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}. \\
 \text{e. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 4}. & \text{f. } \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x + 1). \\
 \text{g. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x^2 + x - 6}. & \text{h. } \lim_{x \rightarrow 4} e^{x^2 - 16}.
 \end{array}$$

- Bosqueje gráficas de funciones f que verifiquen las siguientes condiciones, siempre que sea posible. De lo contrario, explique por qué no puede construirse una función f de ese tipo:

- tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ y $f(1) = 0$.
- presenta una asíntota vertical en $x = -2$ y $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$.
- tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 2$ con $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$.
- presenta 3 asíntotas verticales, y es continua en todo su dominio.
- Tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$ con $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.
- Tiene una discontinuidad evitable en $x = -3$, una discontinuidad de salto finito en $x = 0$ y una de salto infinito en $x = 1$.
- tiene una discontinuidad evitable en $x = 4$ y $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ y $f(0) = 2$.

Límites indeterminados

Puede ocurrir como hemos visto en secciones anteriores que al intentar calcular el límite de f cuando $x \rightarrow c$, haciendo la sustitución $x = c$ en f , se obtenga un resultado *indeterminado* de la forma «0/0», esto es, que tanto numerador como denominador tengan límite 0 cuando $x \rightarrow c$. ¿Por qué decimos que es indeterminado? Porque *no podemos determinar si el límite existe o no* ya que no hay propiedades que nos indiquen qué sucede en estos casos. Para tratarlos, debemos recurrir a otros métodos para así poder tomar una decisión.

Ya nos hemos encontrado con este tipo de indeterminaciones cuando estudiamos el límite en $x = 1$ de la función

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

en el Ejemplo 1.2.4. Al intentar evaluar en $x = 1$, se observa la indeterminación mencionada de la forma «0/0». En dicho ejemplo pudimos ver que el límite en realidad existía y lo hicimos mediante la factorización del polinomio numerador. Debido a que los polinomios numerador y denominador poseen a $x = 1$ como raíz común es que luego de la factorización y cancelación de los factores comunes, se llega a una expresión equivalente, salvo en $x = 1$, que ya no presenta indeterminaciones. Un método similar utilizamos en los Ejemplos 1.2.10 y 1.2.21.

Este procedimiento, en el caso de las funciones racionales, nos permite hacer lo que coloquialmente llamamos «salvar la indeterminación» pues justamente eliminamos los factores de los polinomios que la originaron. Sin embargo, esto no quiere decir que siempre, después de «salvarla», el límite exista.

Ejemplo 1.2.35: Determine, si existe, el límite de la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

para $x = 1$ y $x = 2$.

Solución. Antes de comenzar el análisis, notemos que en $x = 1$ y $x = 2$ ambos polinomios (numerador y denominador) se anulan, por lo que en ambos valores tendremos una indeterminación del tipo «0/0».

Tratemos cada límite pedido:

- Sabemos que el hecho de que ambos polinomios se anulen en $x = 1$ tiene que ver con que 1 es raíz de ambos, o equivalentemente, que $(x - 1)$ es

factor de ambos. Realizando la división de cada polinomio por $(x - 1)$ vía la regla de Ruffini, resulta que podemos expresar

$$\begin{aligned}x^3 - 5x^2 + 8x - 4 &= (x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2, \\x^3 - 4x^2 + 5x - 2 &= (x - 1)(x^2 - 3x + 2) = (x - 1)^2(x - 2).\end{aligned}$$

Entonces, usando la Observación 3,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x-1)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = -1 < 0$ pero aún se anula el denominador en $x = 1$, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty.$$

Por lo tanto, el límite en $x = 1$ de f , que era inicialmente una indeterminación, no existe.

Cabe señalar que los límites anteriores indican que *la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función*.

- Al tomar límite en f cuando $x \rightarrow 2$ volvemos a tener una indeterminación de la forma «0/0», pero utilizando la factorización anterior resulta que el límite en $x = 2$ se puede reescribir (por la Observación 3) como

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Aquí, hemos usado la propiedad para el cociente de límites dado que ambos existen y el límite del denominador no es cero.

En este caso, la indeterminación resultó en un límite cero.

Hemos probado que el límite existe solo para uno de los valores solicitados.

Los ejemplos muestran que no podemos garantizar ningún resultado de un límite que proviene de una indeterminación. Tendremos que estudiar la función con más precisión para poder calcularlo o ver que no existe.

Pueden darse indeterminaciones también en otro tipo de funciones, como por ejemplo en aquellas que involucran radicales. En este tipo de expresiones será útil recordar la técnica de racionalización de fracciones. Una vez que avancemos con el concepto de derivadas en el próximo capítulo, podremos trabajar con otras técnicas que nos permitirán salvar indeterminaciones de límites de cocientes de funciones que involucren, por ejemplo, funciones exponenciales y logarítmicas.

Ejemplo 1.2.36: Halle, si es posible, el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}.$$

Solución. Una sustitución directa por $x = 1$ produce una indeterminación de tipo «0/0», por lo que tendremos que trabajar el cociente de funciones.

Una forma de hacerlo, cuando aparecen raíces cuadradas, es racionalizando la expresión, esto es, multiplicando numerador y denominador por un término adecuado, de modo que el producto de ambos resulte en una diferencia de cuadrados. En este caso, el término adecuado es $\sqrt{x+3} + 2$, pues

$$(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2) = (\sqrt{x+3})^2 - 2^2.$$

Haciendo esto tenemos que, para $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} &= \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} \\ &= \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \frac{x + 3 - 4}{(x - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \frac{\cancel{x} - 1}{(\cancel{x} - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2}. \end{aligned}$$

La expresión equivalente que obtuvimos ahora no genera ninguna indeterminación y podemos calcular (por Observación 3) que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{1+3} + 2} = \frac{1}{4}.$$

El límite existe y es igual a $\frac{1}{4}$.

Finalmente, consideremos otro tipo de indeterminación que puede surgir en la práctica: « $\infty - \infty$ ». Con esto queremos decir que si se tienen dos expresiones que tienden al mismo tipo de infinito (ambas a $+\infty$ o ambas a $-\infty$), y se restan, no se puede decidir el valor del límite inmediatamente. Uno puede pensar que hay una compensación y que el resultado es cero, pero no siempre será así. Veámoslo mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2.37: Estudie la existencia de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Solución. Si intentamos usar la propiedad para la diferencia de los límites, nos encontramos con que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 1}{x^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

por lo que realmente no podemos aplicarla. Estaríamos obteniendo la indeterminación mencionada, « $+\infty - (+\infty)$ ».

Sin embargo, conviene que observemos que la función dada tiene una expresión más sencilla para todo $x \neq 0$:

$$\frac{2x^2 + 1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 + 1 - 1}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Entonces, el límite sí existe pues, de la Observación 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2.$$

Muchas veces es recomendable trabajar algebraicamente con la expresión para reducirla a una que resulte más apropiada para el cálculo del límite, y usar la Observación 3.

Ejemplo 1.2.38: Estudie la existencia de

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + x^2}{x} - \frac{1}{x} \right).$$

Solución. Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2}{x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

donde en el primer límite estamos teniendo en cuenta que $1 + x^2 > 0$ y $x > 0$ para $x \rightarrow 0^+$.

Al restar las expresiones, el límite cuando $x \rightarrow 0^+$ es indeterminado. Luego, estudiaremos la diferencia de las dos expresiones para «salvar la indeterminación». Resulta que

$$\frac{1 + x^2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1 + x^2 - 1}{x} = \frac{x^2}{x} = x, \quad x \neq 0.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + x^2}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

En este caso, se produce una compensación entre los términos, lo que se debe a que los dos términos tienden a $+\infty$ de manera similar, es decir, no «gana» uno por sobre otro.

Ejemplo 1.2.39: Estudie la existencia de

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x) - \ln(x^2)).$$

Solución. Para este límite, debemos recordar el Ejemplo 1.2.34. Tanto la función $y = \ln(x)$ como la función $y = \ln(x^2) = 2 \ln(x)$ se comportarán de forma similar cerca de cero, por lo que estamos nuevamente ante una indeterminación de tipo « $-\infty - (-\infty)$ ».

Por las propiedades de logaritmo es posible escribir

$$\ln(x) - \ln(x^2) = \ln(x) - 2 \ln(x) = -\ln(x).$$

Si bien esta función no tiene límite en $x = 0$, ya no es indeterminado. Podemos afirmar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x) - \ln(x^2)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(x)) = +\infty.$$

Ejemplo 1.2.40: Estudie la existencia de

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{x}{x^3 - x} \right).$$

Solución. Para este caso, si estudiamos los límites de cada término por separado obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty,$$

porque para $x \rightarrow 1^+$, $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) > 0$ y $x > 0$, mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Entonces, la suma de las expresiones no presenta ninguna indeterminación, porque ambos términos crecen indefinidamente cuando $x \rightarrow 1^+$. Es decir, el límite no existe pero se puede expresar como

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{x}{x^3 - x} \right) = +\infty.$$

Podríamos haber operado algebraicamente la expresión a partir de una expresión más sencilla:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{x}{x^3 - x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty \end{aligned}$$

para llegar al mismo resultado.

Ejemplo 1.2.41: Estudie la existencia de

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^3 - x} \right).$$

Solución. Ahora estamos ante un límite que es indeterminado, pues los límites de cada término son de tipo $+\infty$ como se halló en el inciso anterior. Debemos trabajar con la expresión para poder definir si el límite de la resta existe o no.

Operando tenemos que, para $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^3 - x} &= \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x - 1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \frac{1}{x + 1}. \end{aligned}$$

Tomando límite

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^3 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

vemos que el mismo existe pues puede evaluarse por sustitución.

Los ejemplos anteriores nos permiten afirmar que una indeterminación de tipo « $\infty - \infty$ » puede devolver cualquier resultado, e incluso puede no existir el límite. Como en los demás casos de indeterminación, se necesita efectuar un análisis más profundo de la expresión para poder evaluar el límite, o comprobar que no existe.

EJERCICIOS 1.2.6

1. Determine los siguientes límites, indicando primeramente si se trata o no de una indeterminación:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x}.$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 2x}.$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 4x - 5}.$

d. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 4x - 5}.$

e. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 1}.$

f. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 9}.$

g. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{7 - x} - 3}.$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 1} - 1}{x^2}.$

2. Decida si los siguientes límites existen o no. De ser necesario, estudie los límites laterales.

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2x}{x} - \frac{1}{x} \right).$ b. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x}{x} - \frac{1}{x} \right).$
- c. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4x}{x - 2} + \frac{4}{x - 2} \right).$ d. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} - \frac{x - 4}{x^2 - 16} \right).$
- e. $\lim_{x \rightarrow -1^+} (\ln(x^3 + x^2) - \ln(x + 1)).$ f. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\log_2(x) - \log_2(1 - x)).$

Límites en el infinito. Asíntotas horizontales

En esta sección nos enfocaremos en cómo se comportan ciertas funciones cuando la variable crece o decrece de forma indefinida.

Ejemplo 1.2.42: La función $f(x) = 1/x$ cumple que a medida que x crece indefinidamente, los valores de f se acercan a 0. Se suele decir que f tiende a cero cuando x *tiende a infinito* lo que se puede expresar como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Gráficamente, en la Figura 13 se evidencia que la función f se acerca cada vez más a la recta horizontal $y = 0$ a medida que x crece en sentido positivo.

Algo similar ocurre con esta función si la evaluamos en x negativos, y tomando valores cada vez más pequeños. Los valores de f también se acercan cada vez más a cero, pero mediante valores negativos. Esto también puede resumirse en un límite,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

donde $x \rightarrow -\infty$ indica que x toma valores cada vez menores y negativos. Nuevamente, vemos que a medida que x decrece, la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ se acerca a la recta horizontal $y = 0$ (ver Figura 13).

Definición 1.2.8 (Límites en el infinito): Se dice que una función f *tiene límite* L cuando $x \rightarrow +\infty$, y se denota por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

si los valores de f son cada vez más cercanos a L cuando x toma valores arbitrariamente grandes.

Similarmente, se dice que una función f *tiene límite* L cuando $x \rightarrow -\infty$, y se denota por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

si los valores de f son cada vez más cercanos a L cuando x toma valores arbitrariamente pequeños, esto es, valores negativos con valores absolutos arbitrariamente grandes.

Las propiedades de los límites conocidas valen también cuando $x \rightarrow \pm\infty$ en lugar de $x \rightarrow c$. Las resumimos en el siguiente resultado.

Teorema 1.2.7 (Propiedades de los límites en el infinito): Sean f y g dos funciones que poseen límite para $x \rightarrow +\infty$. Entonces valen las siguientes relaciones:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$;
2. cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (af(x)) = a \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$;
4. si $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))^n$;
5. si $n \in \mathbb{N}$ es impar, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}$, mientras que si n es par, vale la misma propiedad solo si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$;
6. si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$, también se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}.$$

Para el caso en que f y g sean dos funciones que poseen límite para $x \rightarrow -\infty$, las mismas propiedades valen cambiando $+\infty$ por $-\infty$ en todas las apariciones.

Ejemplo 1.2.43: Estudie el comportamiento de la función $f(x) = (1 + 3x)/x$ cuando x tiende a $-\infty$.

Solución. Notemos que para todo $x \neq 0$,

$$\frac{1 + 3x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{3x}{x} = \frac{1}{x} + 3.$$

Puesto que el límite de una constante debe ser dicha constante pues la misma es independiente de la variable, podemos decir que $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$. Y usando el ejemplo anterior y la propiedad para la suma de límites, obtenemos que el límite de f para $x \rightarrow -\infty$ de la función dada existe y es

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 0 + 3 = 3.$$

Gráficamente, podemos observar que la función f está cada vez más cerca de la recta horizontal $y = 3$, a medida que los valores de x disminuyen.

El lector puede comprobar en la Figura 17 que también se tiene un comportamiento análogo cuando $x \rightarrow +\infty$.

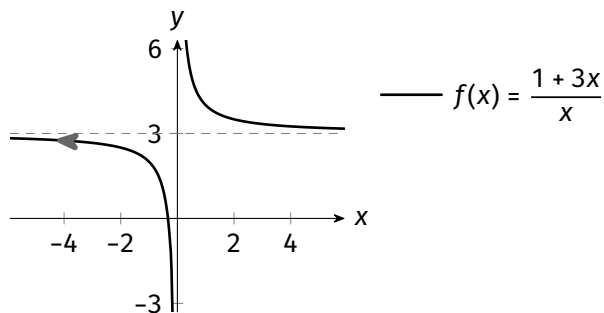


Figura 17

Lo que ocurre con la función $f(x) = 1/x$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, se evidencia también en funciones racionales de la forma $f(x) = 1/x^n$, con $n > 0$, siempre que la potencia x^n esté bien definida.

Teorema 1.2.8: Para cada número real $n > 0$, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Y siempre que x^n esté bien definido para todo $x < 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Ejemplo 1.2.44: Por ejemplo, si $n = 2$, x^2 está bien definido para todo número real, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Si $n = 1/2$, $x^{1/2} = \sqrt{x}$ solo está bien definido para $x \geq 0$, por lo que $1/\sqrt{x}$ está bien definido cuando $x > 0$. El teorema anterior indica que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Ejemplo 1.2.45: Determine, si existe,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x^2 + 4x - 4}.$$

Solución. Puesto que a medida que x se hace arbitrariamente grande, tanto el numerador como el denominador toman valores cada vez mayores, no es claro si el cociente posee o no un límite.

En el caso de funciones racionales como la dada, una buena estrategia para trabajar límites en el infinito es la de dividir al numerador y al denominador por la mayor potencia de x que aparezca *entre todos los términos involucrados*; en este caso es x^2 . Como solo nos interesan valores grandes de x , podemos asumir que $x \neq 0$ para poder hacer la división mencionada. Es así que, haciendo uso del teorema anterior y las propiedades de los límites, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x^2 + 4x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - 5x + 1}{x^2}}{\frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{1}{3}.$$

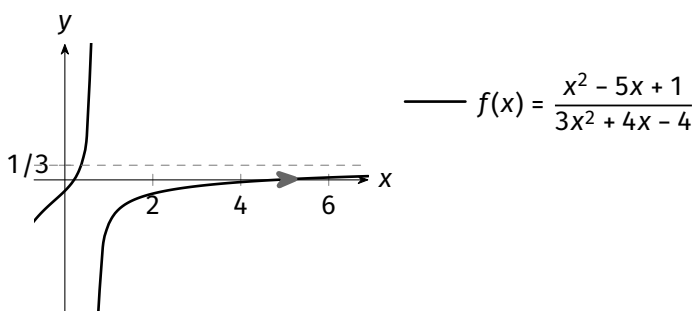


Figura 18

Si observamos la gráfica de la función racional $f(x) = (x^2 - 5x + 1)/(3x^2 + 4x - 4)$ en la Figura 18, vemos que la misma se acerca a la recta horizontal de ecuación $y = 1/3$ a medida que $x \rightarrow +\infty$.

Como hemos podido visualizar en los ejemplos anteriores, los límites en el infinito tienen su contraparte gráfica.

Definición 1.2.9 (Asíntotas horizontales): Una recta de ecuación $y = L$ se denomina *asíntota horizontal* de una función f si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

De la definición se sigue que una función puede tener dos, una o ninguna asíntota horizontal. En el caso de estas rectas, la función la puede cortar en infinitos, finitos o ningún punto; todo depende de la forma en que se acerca la función a la recta asíntota, y si lo hace de manera oscilante o no.

Ejemplo 1.2.46: De la gráfica de la Figura 19 para cierta función f podemos

deducir que tiene asíntota horizontal $y = 5/2$ porque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2},$$

pero que también posee otra asíntota horizontal de ecuación $y = -1/2$ debido a que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

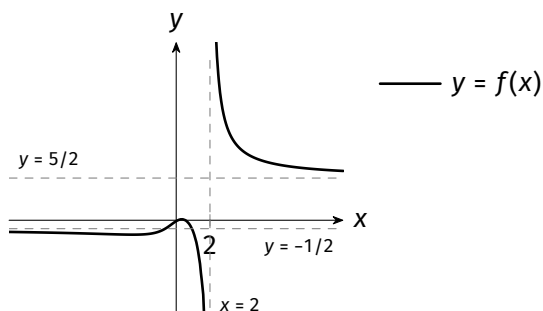


Figura 19

La función presenta también una asíntota vertical, $x = 2$, pues vemos que ambos límites laterales en $x = 2$ son de tipo infinito. Más precisamente,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

es otra forma de expresarlo.

Finalizaremos esta sección analizando límites infinitos en el infinito.

Definición 1.2.10 (Límite infinito en el infinito): Se dice que una función f tiene *límite infinito cuando $x \rightarrow +\infty$* , y se denota por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

si los valores de f son tan grandes (resp. pequeños) como se desee cuando x toma valores arbitrariamente grandes.

De forma similar, se dice que una función f tiene *límite infinito cuando $x \rightarrow -\infty$* , y se denota por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

si los valores de f son tan grandes (resp. pequeños) como se desee cuando x toma valores arbitrariamente pequeños y negativos.

Ejemplo 1.2.47: Determine, si es posible, los límites en el infinito de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1};$

2. $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}.$

Solución.

1. Observamos que la función es racional y que tanto el numerador como el denominador se hacen muy grandes cuando $x \rightarrow +\infty$ por lo que podemos intentar emplear la técnica de dividir por la mayor potencia que aparece para ver qué ocurre. Es decir, reescribimos

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

El numerador tiende a 1, pero el denominador tiende a cero, ambos mediante números positivos. Ya sabemos que esto significa que el cociente se hace tan grande como uno desee, esto es,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = +\infty.$$

Otra forma de resolverlo hubiera sido notando que

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1, \quad x \neq -1,$$

que tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

¿Qué ocurre cuando $x \rightarrow -\infty$? Algo similar. Porque si miramos ahora la última expresión, $x + 1 \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Así,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = -\infty.$$

Podemos comprobar lo obtenido en la Figura 20, lo que muestra que la gráfica de f es una recta con un «agujero» en $x = -1$.

2. Aquí debemos notar que, dado que $\sqrt{x + 1}$ solo tiene sentido para $x \geq -1$, podremos únicamente estudiar el comportamiento de f cuando $x \rightarrow +\infty$. Dado que el numerador y el denominador crecen de forma indefinida cuando $x \rightarrow +\infty$, puede ser útil racionalizar el denominador para obtener una expresión equivalente para $x \neq 3$:

$$\frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} = \frac{(x - 3)(\sqrt{x + 1} + 2)}{(\sqrt{x + 1})^2 - 2^2} = \frac{(x - 3)(\sqrt{x + 1} + 2)}{x - 3} = \sqrt{x + 1} + 2.$$

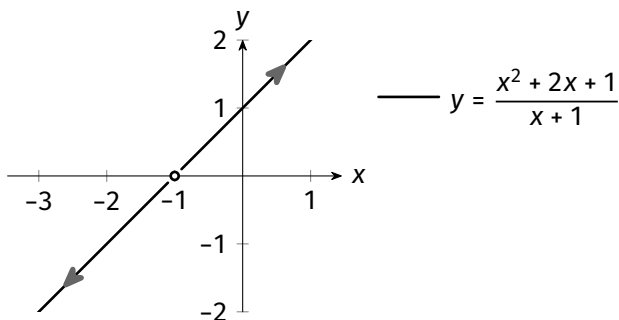


Figura 20

Puesto que esta última expresión crece indefinidamente para $x \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} = +\infty.$$

Esto se evidencia en la Figura 21.

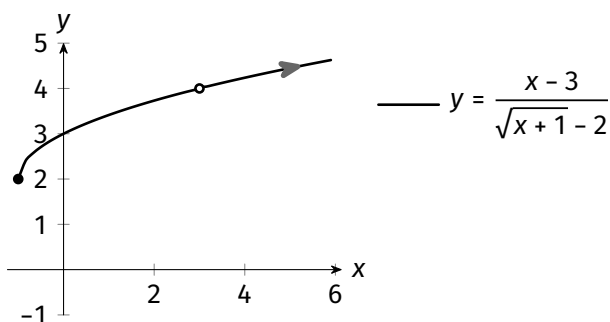


Figura 21

Podemos ver que el comportamiento en el infinito de las funciones racionales depende de lo que ocurre con la relación entre los grados de los polinomios numerador y denominador. Esto puede comprobarse aplicando la estrategia desarrollada en los ejemplos, que consistía en dividir numerador y denominador por la mayor potencia involucrada entre ambos.

Proposición 1.2.9: Sea f una función racional de la forma $f(x) = p(x)/q(x)$ con p, q polinomios.

1. Si $\text{gr}(p) = \text{gr}(q)$, con a el coeficiente principal de p y b el coeficiente principal

de q , entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{b}.$$

2. Si $\text{gr}(p) < \text{gr}(q)$, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3. Si $\text{gr}(p) > \text{gr}(q)$ y los coeficientes principales tienen el mismo signo, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

mientras que si tienen diferente signo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Coloquialmente, los dos últimos casos dicen que si el polinomio denominador «le gana» al polinomio numerador en término de grados, entonces el límite es cero. Mientras que si el polinomio numerador «le gana» al polinomio denominador, el límite es infinito. En el primer caso, al ser de igual grado, los polinomios tienen un comportamiento similar y no hay uno que «le gane» al otro, por lo que el límite será el cociente entre los coeficientes principales de ambos.

Ejemplo 1.2.48: Con base en la proposición anterior, podemos decir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 1}{-4x^8 - x^5 + 5x} = 0$$

porque el polinomio numerador tiene grado 5, menor que el grado del polinomio denominador, que es 8.

También podemos establecer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 2x + 4}{x^2 + 1} = +\infty$$

ya que ahora el polinomio numerador supera en grado al polinomio denominador y los coeficientes principales son ambos positivos.

Por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^6 - x^4 + x - 8}{3x^6 + x^2} = -\frac{4}{3}$$

pues ambos polinomios son de igual grado.

Ejemplo 1.2.49: Las funciones de tipo exponencial de base $a > 1$, las cuales están definidas en todos los números reales, tienen el aspecto general de la

Figura 22, lo que ilustra el siguiente hecho (que puede ser demostrado de forma precisa pero no veremos aquí).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

En particular, el segundo límite indica que $y = 0$ es una asíntota horizontal para $f(x) = a^x$, para cualquier $a > 1$.

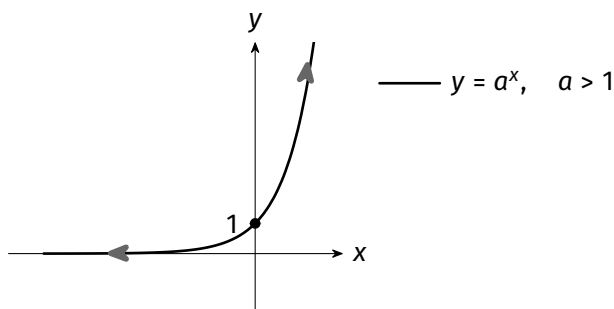


Figura 22

Para bases $0 < a < 1$ el dominio sigue siendo $\mathbb{R}$ pero el comportamiento de la gráfica cambia siendo ahora un «reflejo» respecto del eje de ordenadas de lo que ocurría con la correspondiente gráfica de la base inversa $1/a > 1$, como puede verse en la Figura 23. Así, vemos que para $0 < a < 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

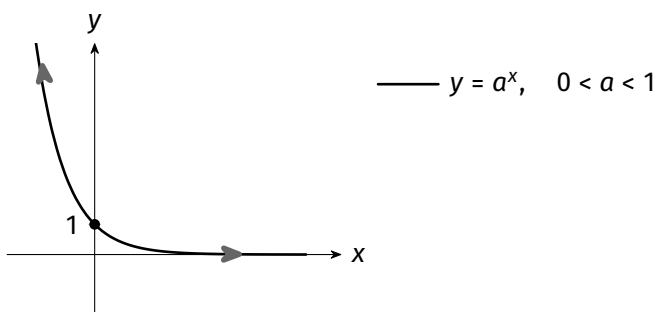


Figura 23

Nuevamente, notamos que $y = 0$ es una asíntota horizontal para $f(x) = a^x$ cualquiera sea $0 < a < 1$.

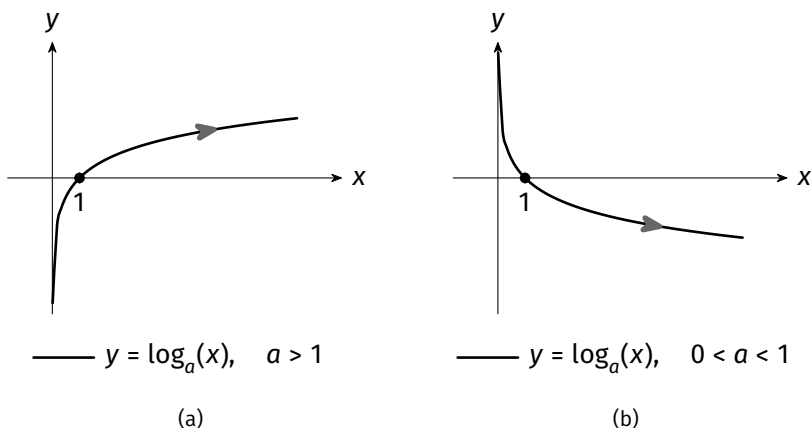


Figura 24

Ejemplo 1.2.50: Para el caso de las funciones de tipo logarítmicas, el aspecto según sea la base a positiva y distinta de 1, es el de la Figura 24.

Como el dominio de estas funciones es el intervalo $(0, +\infty)$, el único límite en el infinito que corresponde analizar es para $x \rightarrow +\infty$.

Mediante las gráficas anteriores podemos conjeturar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty, \quad a > 1,$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty, \quad 0 < a < 1.$$

En ningún caso estas funciones presentan una asíntota horizontal.

EJERCICIOS 1.2.7

1. Determine los límites en el infinito de las siguientes funciones, cuando el dominio lo permita:

a. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{3x^2 + x - 1}.$

b. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - x^2 + 6}.$

c. $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 2x + 7}.$

d. $f(x) = \frac{\sqrt{x+5} + 1}{x+4}.$

e. $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{x^2 - x}{x^4}.$

f. $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2}.$

g. $f(x) = \frac{1}{3x}.$

h. $f(x) = \log_3(x^2 + 1).$

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0, \\ 2^x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{j. } f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 1}{2 - x^2} & \text{si } x > 2. \\ \frac{1}{\sqrt{2 - x} + 1} & \text{si } x \leq 2. \end{cases}$$

2. Con base en los resultados del ejercicio anterior, determine cuáles de las funciones presentan asíntotas horizontales y cuáles son.
3. Exhiba ejemplos (pueden ser gráficos) de funciones f definidas en todo $\mathbb{R}$ que cumplan las condiciones dadas en cada caso, si es posible. De lo contrario, explique por qué no es posible construir una función f con las características indicadas:
 - a. presenta una asíntota horizontal en $y = 0$ y una asíntota vertical en $x = 1$, y posee límite infinito cuando $x \rightarrow -\infty$.
 - b. presenta dos asíntotas horizontales y una asíntota vertical, siendo solo discontinua en $x = 0$.
 - c. presenta una asíntota horizontal en $y = 1$ y dos asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 2$.
 - d. tiene límites infinitos para $x \rightarrow \pm\infty$, y $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.
 - e. presenta solo una discontinuidad, de salto finito en $x = 1$ y posee una asíntota vertical el $x = -3$.
 - f. tiene tres asíntotas horizontales y tres asíntotas verticales.

Límites especiales: el número e

El número e , o número de Euler, que es la base del logaritmo neperiano, fue introducido como tal por Jacob Bernoulli para resolver problemas de interés continuo compuesto. En su trabajo, la constante e aparece como el límite

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

donde n representa el número de intervalos en un año en los que se evalúa el interés compuesto. Si bien este límite se efectúa en el caso discreto (n es un número natural), se puede expresar también como un límite en el continuo. La definición del número e que nos será más conveniente es la siguiente.

Definición 1.2.11 (Número de Euler): El número e se define por

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}.$$

Uno puede pensar que esta definición no se parece a la dada por Bernoulli. Pero veremos en el próximo ejemplo que, en realidad, son equivalentes.

Observemos que, si no tuviéramos esta definición, e intentáramos evaluar el límite del lado derecho, veríamos que $1+x \rightarrow 1$ y $1/x \rightarrow \pm\infty$ cuando $x \rightarrow 0^\pm$, por lo que resultaría que toda la expresión tiende a algo como « 1^∞ ». Esto es, en realidad, una indeterminación que, en este caso, es igual a e . Uno podría pensar que algo que tiende a 1 elevado a algo que tiende a infinito es igual a 1 pues 1 elevado a cualquier potencia es 1. Pero la base no es exactamente 1, y la potencia que tenemos requiere también un proceso de límite. Es por ello que esta definición de e atenta contra nuestra intuición.

Por lo general, si en la evaluación de un límite obtenemos que el mismo devuelve « 1^∞ », entonces posiblemente estemos ante un límite que involucra al número e .

Ejemplo 1.2.51: Compruebe que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Solución. Lo anterior quiere decir que e es el límite de la expresión dada tanto para $x \rightarrow +\infty$ como para $x \rightarrow -\infty$. De comprobarlo, estaríamos recuperando la definición de Bernoulli en el contexto continuo.

Si definimos la variable auxiliar $y = 1/x$, resulta que decir que $y \rightarrow 0^+$ equivale a decir que $x \rightarrow +\infty$ mientras que $y \rightarrow 0^-$ equivale a $x \rightarrow -\infty$. Como $x = 1/y$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} (1 + y)^{\frac{1}{y}}.$$

Como ambos límites laterales en 0 coinciden por la definición del número e , se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

que es lo que queríamos demostrar.

Como mencionamos antes, los límites que devuelvan « 1^∞ » al evaluarlos, están muy relacionados con el número e . Lo que ocurre con la función $f(x) = x$ puede extenderse a otras funciones de similares características.

Proposición 1.2.10: Sea f una función continua definida en algún intervalo de la forma $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$, para la cual se conoce que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

Similarmente, si f es continua y está definida en algún intervalo de la forma $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$, para la cual se conoce que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

Ejemplo 1.2.52: Compruebe que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e.$$

Solución. Podemos aplicar la proposición anterior con $f(x) = x^2$, la cual es continua en todo $\mathbb{R}$ y verifica que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Por dicho resultado,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 1.2.53: Compruebe que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} = e.$$

Solución. En este caso, basta considerar $f(x) = 3x$ que es continua en $\mathbb{R}$, y cumple que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Mediante la proposición anterior,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} = e,$$

que es lo que se pedía comprobar.

Ejemplo 1.2.54: Compruebe que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)} = e.$$

Solución. Aquí, $f(x) = \ln(x)$ es continua y está definida en $(0, +\infty)$, y como vimos en el Ejemplo 1.2.50, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. Así,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)} = e,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 1.2.55: Compruebe que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{c}\right)^{\frac{c}{x}} = e, \quad \text{con } c \neq 0.$$

Solución. Para este límite, como es para $x \rightarrow 0$, conviene volver a la definición del número e . Puesto que $c \neq 0$, también $\lim_{x \rightarrow 0} x/c = 0$. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{c}\right)^{\frac{c}{x}} = \lim_{\frac{x}{c} \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{c}\right)^{\frac{c}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e,$$

como queríamos comprobar.

Ejemplo 1.2.56: Determine el límite de la siguiente expresión

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$$

cuando $x \rightarrow +\infty$.

Solución. Observamos que la expresión no es exactamente de la forma dada en la Proposición 1.2.10 aunque $f(x) = x$ cumple lo deseado. Sin embargo, mediante propiedades de potencia, la expresión dada se reescribe como

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x} = \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot 5}\right]^{\frac{1}{5}}.$$

Usando la propiedad 4 del Teorema 1.2.7

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x} = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^5 = e^5$$

que es lo que queríamos hallar.

Ejemplo 1.2.57: Determine

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2+2}.$$

Solución. Vemos que el límite no está en la forma dada en la Proposición 1.2.10. Pero mediante propiedades de potencia, podemos expresar

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2+2} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2,$$

donde el primer factor tiene límite e cuando $x \rightarrow +\infty$.

¿Tiene límite el otro factor? Sí, solo que ahora el exponente es constante, por lo que aquí tenemos un límite de los trabajados en las secciones anteriores. De hecho, podemos usar la propiedad 4 del Teorema 1.2.7 para afirmar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right]^2 = 1^2 = 1.$$

Por lo tanto, de la propiedad 3 del Teorema 1.2.7

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = e \cdot 1 = e$$

que es el límite solicitado.

EJERCICIOS 1.2.8

1. Calcule los siguientes límites, ya sea usando la definición del número e o la Proposición 1.2.10, y teniendo en cuenta las propiedades de los límites:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}.$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{-4x}.$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x-1}.$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{(x+1)^2}\right)^{x^2+2x}.$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^x}\right)^{2^x}.$

f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{3x+6}.$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{5}{x}}.$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^3)^{\frac{3}{x^3}}.$

2. ¿Es cierto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e?$$

3. ¿Es cierto que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e?$$

4. ¿Es cierto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(x^2)}\right)^{2 \ln(x)} = e?$$

LA DERIVADA

La derivada permite conocer la sensibilidad de una variable respecto al cambio de otra si están vinculadas mediante una relación funcional. Nos interesaremos en «idear» un método de comparación entre los *cambios* o *incrementos* que experimenta una variable y con respecto a cambios infinitesimales que tienen lugar en la variable x de la cual depende y , con el

objetivo de anticipar comportamientos en intervalos concretos. Para ello, retomemos el concepto de tasa de cambio promedio de y respecto de x en todo un intervalo visto anteriormente, la cual habíamos expresado de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

A este cociente se lo suele llamar *cociente incremental de f respecto de x* .

Una vez fijado el valor de x_0 esta tasa depende del incremento Δx dado a la variable x . Cuando Δx tiende a cero, es decir, cuando el incremento de x es cada vez más pequeño, tenemos la *tasa de cambio instantánea*, y ella nos dará la variación instantánea que experimenta la variable y cuando x sufre un cambio muy «pequeño» (infinitesimalmente).

Cuando hacemos que el incremento Δx se vuelva cada vez más pequeño, el cociente incremental deja de describir un cambio «promedio» en un intervalo y pasa a capturar el comportamiento local de la función en el punto x_0 . Si ese límite existe, obtenemos un número que será de sumo interés.

Conceptualización e interpretación

Lo presentado en esta introducción es un caso de lo que llamamos la *derivada* de una función en un punto de abscisa x_0 .

Definición 1.3.1 (Derivada en un punto): Sea $y = f(x)$ una función, y sea $(x_0, f(x_0))$ un punto de la gráfica de f . La *derivada* de la función f en x_0 , simbolizada por $f'(x_0)$, es

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

siempre que el límite exista.

El valor $f'(x_0)$ medirá la tasa instantánea de cambio en x_0 de la función f y constituirá una medida aproximada de la razón de cambio promedio en el intervalo $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ cuando $\Delta x > 0$ (similarmente, en el intervalo $(x_0 + \Delta x, x_0 - \Delta x)$ cuando $\Delta x < 0$). Esta aproximación es tanto mejor cuanto más pequeño sea Δx .

Si consideramos el punto $(a, f(a))$ y $\Delta x = h$, tenemos una expresión más simple para denotar la derivada de f en un punto:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite exista.

Ejemplo 1.3.1: Para la función de costo del inicio de la Sección 1.2 (p. 31) dada por $C(x) = 2x^2 - 8x + 12$ se comprobó que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x_0 - 8 + 2\Delta x) = 4x_0 - 8.$$

La tasa instantánea de cambio de y con respecto a x es $4x_0 - 8$. Así, cuando $x_0 = 5$ la tasa instantánea del costo es 12 dólares por unidad de producto. Esto se puede interpretar como sigue: a un nivel de producción de cinco unidades, el costo crece, aproximadamente, 12 dólares por cada unidad adicional. En cambio, si $x_0 = 1$, se entiende que a partir de un nivel de producción de una unidad el costo disminuye, aproximadamente, en 4 dólares por cada unidad adicional. Esta aproximación será tanto mejor cuanto más cerca se esté del punto de referencia.

Ejemplo 1.3.2: Determine si $f'(-3)$ existe cuando $f(x) = 2x + 1$ y, en caso afirmativo, halle cuál es su valor. Interprete su significado.

Solución. Sea $f(x) = 2x + 1$ y $a = -3$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-3+h) + 1 - (2 \cdot (-3) + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6 + 2h + 1 + 6 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \\ &= 2, \end{aligned}$$

lo que prueba que $f'(-3)$ existe y su valor es $f'(-3) = 2$. Esto es, la función f aumenta, aproximadamente, 2 unidades por cada unidad de variación de x a partir de $x = -3$.

Ejemplo 1.3.3: Para $f(x) = x^2$ compruebe que $f'(a)$ existe para todo $a \in \mathbb{R}$. Evalúe f' y f en $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$ e interprete los resultados.

Solución. Sea $f(x) = x^2$. Entonces, para cada $a \in \mathbb{R}$ y $h \neq 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{h} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a + h. \end{aligned}$$

Tomando límite para $h \rightarrow 0$ se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$$

para cada $a \in \mathbb{R}$. Como este límite existe sin importar cuál es el valor de a , $f'(a) = 2a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Evaluamos en los valores indicados: en $a = -3$, $f(-3) = 9$ y $f'(-3) = -6$. El valor de la función en -3 es 9 y f disminuye aproximadamente 6 unidades por cada unidad de variación de x respecto de -3 . El signo negativo en la derivada nos está indicando un decrecimiento de f . En $a = 0$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$. El valor de f en cero es cero y $f'(0) = 0$ indica que la variación instantánea es cero, es decir, cuando x aumenta o varía en una pequeña cantidad respecto de cero, no hay casi variación en f . En $a = 2$, $f(2) = 4$ y $f'(2) = 4$. El valor de la función en $a = 2$ es 4 y f aumenta aproximadamente 4 unidades por cada unidad de variación de x . El signo positivo de la derivada nos está indicando un crecimiento de f .

Observación 8: En el Ejemplo 1.3.2 se calculó f' en un valor particular, mientras que en el Ejemplo 1.3.3 se hizo para todo valor posible de la variable y luego se evaluó en los valores elegidos. Esto último podría haberse realizado también en el Ejemplo 1.3.2. Sin embargo, cuando solo necesitamos conocer la derivada en un valor de a particular, y no en varios de ellos, resulta conveniente hacer el estudio del límite para ese valor preciso, ya que los cálculos se reducen considerablemente.

Hasta ahora hemos estudiado la derivada de una función en un valor fijo a que pertenece al dominio de la función. Desde otra perspectiva, hacemos variar el número a , reemplazando a por x , obteniendo lo que llamaremos *función derivada*.

Definición 1.3.2 (Función derivada): Sea f una función y sea $y = f(x)$. La *función derivada* de f con respecto a x , simbolizada por f' o dy/dx se define como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que el límite exista.

Si se considera $h = \Delta x$, equivalentemente se puede escribir

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que el límite exista.

Observación 9: La expresión $f'(x)$ se lee « f prima de x », y dy/dx se lee «derivada de y con respecto a x ».

A la derivada también se le da el nombre de *cociente diferencial* y la operación de calcular la derivada de una función se llama *derivación*. Si la derivada de una función existe en un punto particular, decimos que f es *derivable* en dicho punto. Frecuentemente, denotamos a dy/dx como y' (se lee «y prima») dando por supuesto que y depende de una sola variable, y entonces se deriva respecto a ella. Otras notaciones son:

$$\frac{d}{dx}(y), \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(f), \quad D_x y, \quad \text{y} \quad D_x f.$$

Así, la derivada puede considerarse desde dos puntos de vista. Como un valor definido, obtenido para un valor prefijado de x (la derivada en un punto), o como una función de x (la derivada en todos los puntos posibles).

Observación 10: La notación dy/dx representa un solo símbolo y por ahora no deberá interpretarse como el cociente de dy y dx . Note que dy/dx indica la derivada de y con respecto a x , mientras dC/dq indica la derivada de C respecto a q , siendo C función de q , $C = C(q)$. También, si $x = x(u)$, entonces dx/du es la derivada de x respecto a u .

Ejemplo 1.3.4: Determine $f'(x)$ para $f(x) = x^2 - 2x - 4$, siempre que exista. Represente gráficamente f y f' .

Solución. Calcularemos los cocientes incrementales de f reduciéndolos a una mínima expresión que permita hallar luego su límite. Tenemos que

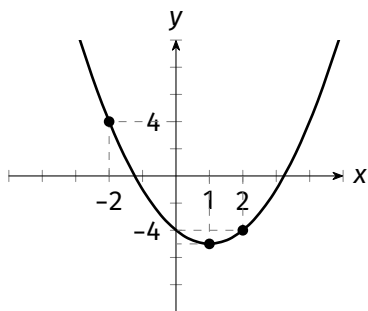
$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - 4 - (x^2 - 2x - 4)}{\Delta x} \\ &= \frac{(x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - 2x - 2 \cdot \Delta x - 4 - x^2 + 2x + 4}{\Delta x} \\ &= \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2 \Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 2)}{\Delta x} \\ &= 2x - 2 + \Delta x. \end{aligned}$$

Tomando límite se tiene que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x - 2) = 2x - 2.$$

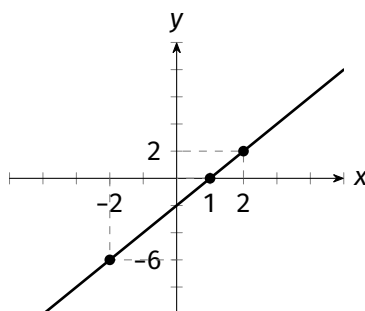
Esto es, $f'(x) = 2x - 2$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

En la Figura 25 se muestran las gráficas de f y f' .



$$f(x) = x^2 - 2x - 4$$

(a)



$$f'(x) = 2x - 2$$

(b)

Figura 25

Ejemplo 1.3.5: Determine, siempre que sea posible, $f'(x)$ para $f(x) = mx + b$, con m y b constantes reales y $m \neq 0$. Analice lo que ocurre con f según el signo de m .

Solución. Calcularemos, en primer lugar, los cocientes incrementales de f reduciéndolos a una mínima expresión, para luego hallar el límite, si este existe. Para cada $m \neq 0$ y b reales resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{m(x + \Delta x) + b - (mx + b)}{\Delta x} \\ &= \frac{mx + m\Delta x + b - mx - b}{\Delta x} \\ &= \frac{m\Delta x}{\Delta x} \\ &= m. \end{aligned}$$

Como m es constante ya sabemos que el límite es dicha constante, por lo que $f'(x)$ existe siempre y es

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

para cualquier x .

Ahora bien, teniendo en cuenta que la función es lineal, podemos inferir según sea m lo siguiente: si $m > 0$, ante una variación en x , los valores de f aumentan aproximadamente m unidades por cada unidad adicional de x ; si $m < 0$, los valores de f disminuyen aproximadamente m unidades por cada

unidad de variación en x ; y si $m = 0$, ante una variación en x , los valores de f se mantienen constantes.

EJERCICIOS 1.3.1

1. Para la función $y = f(x) = -2x^2 + 3x$ determine:

- la tasa de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[2, 4]$;
- la razón de cambio instantánea en $x = 2$ e interprete su significado;
- la razón de cambio instantánea de y con respecto a x en un valor arbitrario a ;
- la función derivada f' .

Visualice las funciones f y f' con ayuda de [GeoGebra](#) para corroborar los resultados obtenidos.

2. Para la función $y = f(x) = -5x + 10$ calcule:

- la razón de cambio instantánea en $x = -1$ e interprete su significado;
- la razón de cambio instantánea de y con respecto a x en un valor arbitrario a ;
- la función derivada f' .

Visualice las funciones f y f' con ayuda de [GeoGebra](#) para corroborar los resultados obtenidos.

3. Sea $R(q) = -q^2 + 1000q$ la función de ingresos de un fabricante de un determinado producto donde R se expresa en miles de dólares y q en cientos de unidades. ¿A qué tasa varía el ingreso cuando se venden 250, 500 y 750 unidades, respectivamente? Luego, interprete cada resultado en términos económicos.

4. Dada la siguiente función

$$g(x) = \frac{1}{x+2}$$

determine para qué valores de x existe $g'(x)$ y halle su valor en tales casos. *Recuerde que la derivada se calcula únicamente en valores que pertenecen al dominio de la función.*

5. Para un cierto bien la función de demanda es $p = f(q) = \frac{100}{q+20} + 10$, donde p se expresa en cientos de dólares y q en miles de unidades.

- Determine la tasa media de cambio en el intervalo $[1, 3]$. Interprete económicamente.

- b. Determine e interprete $f'(1)$.
- c. Analice la tendencia del precio del producto a medida que su demanda aumenta indefinidamente.

Interpretación geométrica de la derivada

En la Figura 26(a) se muestra la recta secante a la gráfica de la función que pasa por los puntos A y B, de coordenadas $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$, respectivamente. Si tomamos el incremento en x cada vez más pequeño, esto es, $h \rightarrow 0$, vemos que el punto B se aproxima al punto A como se muestra en la Figura 26(b), por lo que la recta secante se transforma en la recta tangente a la curva (o gráfica) en el punto A = $(a, f(a))$.

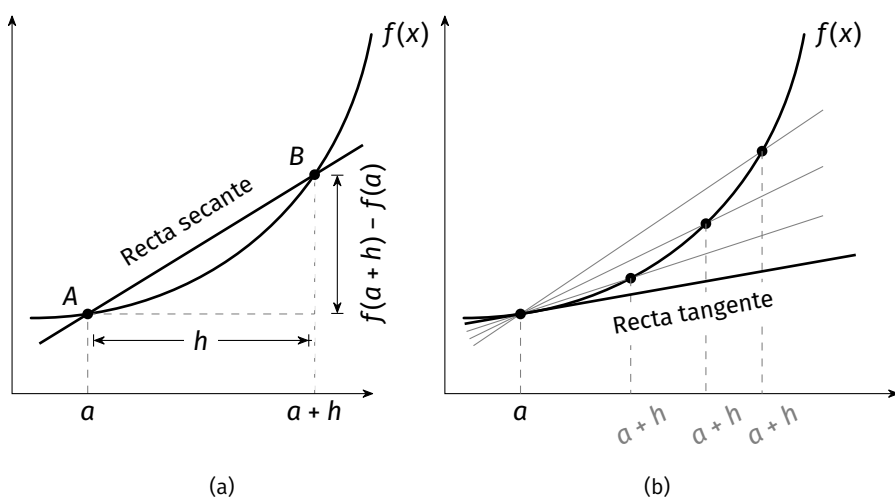


Figura 26

En términos geométricos, la razón

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

representa la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos A y B. Cuando $h \rightarrow 0$ la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente en A. De este modo, el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h}$$

es, si existe, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto A.

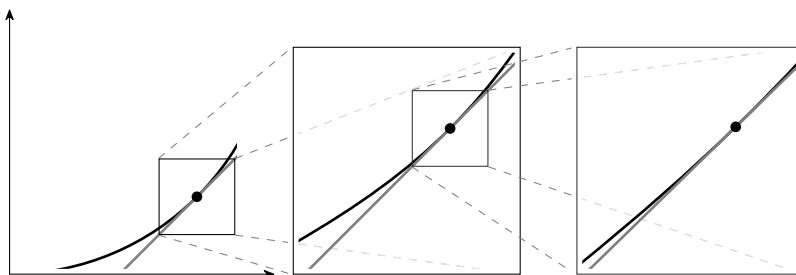


Figura 27

Si observamos en detalle haciendo un «acercamiento» en el punto A de la gráfica (Figura 27) podemos notar que cuanto más nos aproximamos al punto A más parecerá que la curva f es una recta. La pendiente de la recta tangente en A se llama, también, *pendiente de la curva* en el punto A.

Por otro lado, si consideramos que la Figura 26(a) muestra la tasa promedio de cambio representada por la pendiente de la recta secante que une los puntos A y B, y si determinamos la tasa de cambio promedio en intervalos de longitud cada vez más pequeños, vemos que el punto B se aproxima al punto A y, por lo tanto, esta tasa se transforma en la *tasa de cambio instantánea* de la función en el punto A. De esto se desprende la siguiente propiedad:

Proposición 1.3.1: La derivada de una función f en el punto $A = (a, f(a))$ se puede interpretar como

- la tasa de cambio instantánea de la función en $x = a$;
- la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en A;
- la pendiente de la curva representativa de la función en A.

Ejemplo 1.3.6: Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^2 - 2x - 4$ del Ejemplo 1.3.4 en $x = -2$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución. Podemos utilizar la ecuación de una recta dada por la fórmula punto-pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$. Para responder necesitamos los valores de las coordenadas del punto por donde pasará la recta, y el valor de la pendiente en dicho punto. Retomando el Ejemplo 1.3.4, tenemos que

- en $x = -2$, $f(-2) = 4$ y $f'(-2) = -6$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $(-2, 4)$ es $y - 4 = -6(x - (-2)) = -6x - 12$, es decir, $y = -6x - 8$;

- en $x = 1$, $f(1) = -5$ y $f'(1) = 0$ así que la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, -5)$ será simplemente $y = -5$;
- en $x = 2$, $f(2) = -4$ y $f'(2) = 2$, por lo que la ecuación de la recta tangente en el punto $(2, -4)$ es $y - (-4) = 2(x - 2)$, esto es, $y = 2x - 8$.

De esta forma, hemos encontrado las tres rectas tangentes buscadas.

Observación 11: Para determinar la ecuación de la recta tangente también se puede utilizar la fórmula $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen de la recta. Del ejemplo anterior se sabe que la gráfica de f pasa por el punto $(-2, 4)$ y la recta tangente a f en dicho punto tiene pendiente $m = f'(-2) = -6$ por lo que planteamos $y = -6x + b$ y, utilizando el punto, hallamos el valor de b : $4 = -6(-2) + b$ por lo que $b = 4 - 12 = -8$. Esto devuelve la misma recta hallada previamente, $y = -6x - 8$.

Ejemplo 1.3.7: Determine $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x > 0$ y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en $x = 1$ y en $x = 5$.

Solución. Primero calculemos los cocientes incrementales, donde usaremos el método de racionalización para «salvar» la indeterminación que surgirá al querer tomarle el límite:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\
 &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{\sqrt{x + \Delta x}^2 - \sqrt{x}^2}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$ resulta que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Así, para cada $x > 0$ obtenemos que $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Calculamos la pendiente de la recta tangente en los puntos indicados y la ecuación correspondiente.

- En $x = 1$, $f(1) = 1$ y $f'(1) = 0.5$. Utilizando cualquiera de las fórmulas antes mencionadas tendremos que la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 1)$ es $y = 0.5x + 0.5$.
- En $x = 5$, $f(5) = \sqrt{5}$ y $f'(5) = 1/(2\sqrt{5})$, obteniendo que $y = (x - 5)/(2\sqrt{5}) + \sqrt{5}$ es la ecuación correspondiente a la recta tangente en el punto $(5, \sqrt{5})$.

De esta forma, hemos encontrado las dos rectas tangentes buscadas.

EJERCICIOS 1.3.2

- Determine la ecuación de la recta tangente a las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados. Grafique cada situación utilizando GeoGebra.
 - $f(x) = 8 - 4x$ en $x = -1$.
 - $g(t) = (t + 2)^2$ en $t = 0$.
 - $w(z) = \frac{1}{2z+1}$ en $z = 2$.
 - $f(x) = 8 - 4x$ en $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.
- Encuentre los puntos $(x, f(x))$ y grafique cada situación donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$ cumple las condiciones.
 - Sea horizontal.
 - Tenga pendiente 3.
 - Sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(2, -1)$.
 - Sea perpendicular a la recta de ecuación $2y + 4x - 3 = 0$.
- Dada la función $f(x) = 3x^2 - 5$ y la recta $y = 6x + b$, halle el valor de b para que la recta sea tangente a la gráfica de f en el punto $(1, -2)$. Grafique.

Crecimiento: una mirada desde las pendientes de las rectas tangentes

Como vimos, la derivada está relacionada con el concepto abstracto de límite, pues es el límite al cual tiende el cociente incremental cuando el incremento dado a x tiende a cero. Cuando calculamos la derivada obtenemos una función en la variable independiente correspondiente. Así, la derivada de una función es también una función, cuyos dominios pueden coincidir o no. A priori podemos decir que el dominio de la derivada estará incluido en el dominio de la función porque para calcular la derivada en un punto se requiere que el mismo sea de su dominio. Sin embargo, el límite de los

cocientes incrementales podría existir en todo punto, o existir en un conjunto «más pequeño» de valores.

¿Cómo puede ser útil trabajar con la expresión genérica de la derivada? ¿Qué puede decir de f la expresión genérica de la derivada, f' , con respecto a f ? Lo realizado hasta aquí permite vincular el signo de la derivada con el crecimiento o decrecimiento de f .

Observemos esto recurriendo al Ejemplo 1.3.4, donde $f(x) = x^2 - 2x - 4$ y su derivada es $f'(x) = 2x - 2$. La Figura 28 muestra la gráfica de ambas funciones. Observamos que la derivada puede ser negativa, cero o positiva.

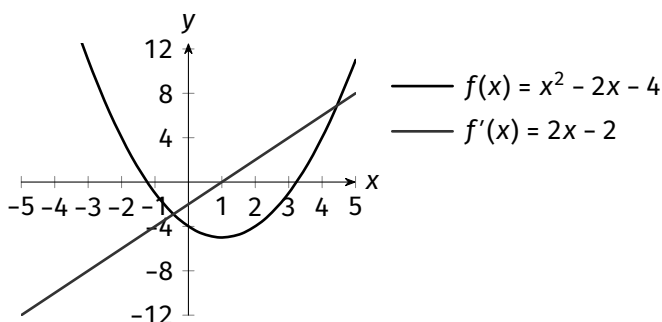


Figura 28

En el intervalo $(-\infty, 1)$, f' es negativa, es decir, la pendiente de cada recta tangente en cada $x < 1$ es negativa, indicando que a medida que los valores de x aumentan a partir de uno fijo, los valores de f disminuyen, por lo que la función f decrece en dicho intervalo.

En el intervalo $(1, \infty)$, f' es positiva y la pendiente de cada recta tangente en cada $x > 1$ es positiva, esto es, a medida que los valores de x aumentan a partir de uno dado, los de f aumentan; por tanto, f es creciente allí.

El vértice de la parábola se encuentra en $(1, -5)$, y $f'(1) = 0$ por lo que en $x = 1$ la pendiente de la recta tangente es cero y es horizontal de ecuación $y = -5$; podemos decir que en las cercanías de $x = 1$, prácticamente, no hay variación en y .

Por otro lado, en el Ejemplo 1.3.7 la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ para $x > 0$ es la función $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. En $(0, +\infty)$ la derivada f' es positiva por lo que f es creciente allí.

Ejemplo 1.3.8: Halle la función derivada de $f(x) = 1/x$ y grafique ambas funciones. Realice un análisis de los signos de la función f' en relación con el crecimiento o decrecimiento de f .

Solución. En primer lugar notemos que el dominio de la función f es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

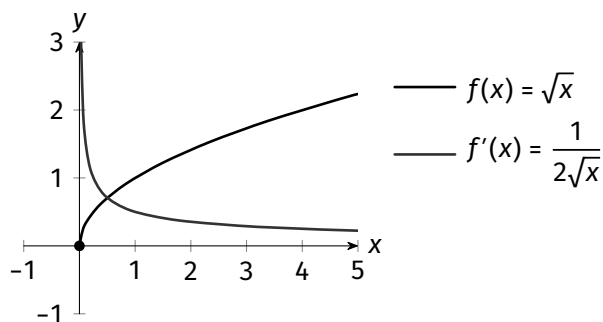


Figura 29

Hallaremos $f'(x)$ aplicando la definición. Para ello, calculamos el cociente incremental en su mínima expresión:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{x - x - \Delta x}{x^2 + x \Delta x} \right) = \frac{-1}{x^2 + x \Delta x}.$$

Ahora aplicamos límite cuando Δx tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + x \Delta x} = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}.$$

Esto es, $f'(x) = -x^{-2}$ siempre que $x \neq 0$. Notemos que para todo $x \in D_f$, $f'(x)$ existe; por lo que en este caso, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La gráfica de las funciones f y f' se muestran en la Figura 30.

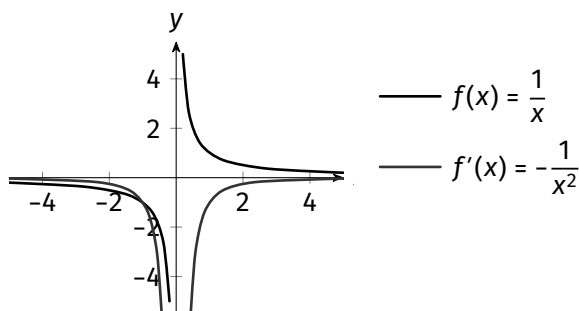


Figura 30

En $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$ f' es negativa, es decir, la pendiente de cada recta tangente en cada x es negativa, por lo que la función f decrece allí.

Esta misma conclusión puede obtenerse independientemente del gráfico, analizando la expresión de f' . Así, notamos que para todos los x en $(-\infty, 0)$ y

en $(0, \infty)$, f' es negativa por ser el cociente entre una constante negativa y la potencia de exponente par y base no nula.

El signo de la derivada en un intervalo no necesariamente coincide con el de la función. En el caso de la función $f(x) = 1/x$ tanto la derivada como la función tienen signo negativo en $(-\infty, 0)$, mientras que en el intervalo $(0, +\infty)$, f' es negativa y f es positiva.

Observación 12: La definición de derivada dada corresponde a funciones de una sola variable independiente. En una sección posterior veremos cómo se extiende este concepto a más de una variable independiente.

EJERCICIOS 1.3.3

1. Halle la función derivada de $f(x) = -x^2 + 4x + 10$ y grafique f y f' . Realice un análisis de los signos de la función f' en relación con el crecimiento o decrecimiento de f .
2. En la Figura 31 se representa la primera derivada de la función $y = g(x)$, con $x \in \mathbb{R}^+$. Con base en la información que proporciona el gráfico responda los siguientes ítems, fundamentando cada respuesta.

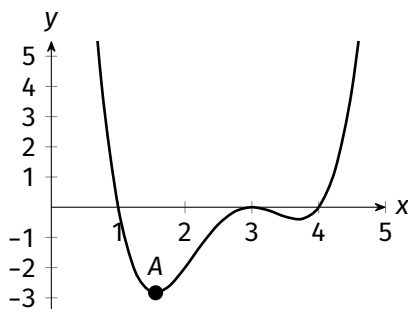


Figura 31

- a. ¿Existe el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h)-g(3)}{h}$? En caso afirmativo, ¿cuál es su valor?
- b. ¿En qué valores de x , la gráfica de g presenta rectas tangentes horizontales?
- c. ¿En qué intervalo/s la función g es creciente?
- d. ¿En qué intervalo/s la función g es decreciente?
- e. ¿Cambia el signo de g' a izquierda y derecha de la abscisa de A?

3. La función de demanda de un producto está dada por $p(q) = -\frac{1}{4}q + 1000$, donde p es el precio del producto en dólares y q es la cantidad demandada en toneladas.
- Halle la expresión analítica de la función ingreso, $R = R(q)$, e indique su dominio.
 - Calcule $R(1000)$, $R'(1000)$ e interprete los resultados.
 - Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de R .

Existencia y no existencia de la derivada

No debe suponerse que la derivada de una función f exista necesariamente para todos los valores de x de su dominio, dado que se requiere, además de la existencia de $f(x)$, la existencia del límite del cociente incremental. Una función puede tener derivada en algunos puntos de su dominio y en otros no. Para abordar esta temática consideremos la expresión para la derivada en $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite exista.

Si escribimos $x = a + h$ entonces $h = x - a$. Dado que h se aproxima a cero, la expresión para la derivada de la función f en $x = a$ se puede reescribir como

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Por lo estudiado en la Sección 1.2.3 sobre límites laterales, el límite de arriba existirá siempre y cuando existan y sean iguales los límites laterales.

Definición 1.3.3 (Derivadas laterales): Cuando $x \rightarrow a$ por derecha, tendremos la *derivada lateral derecha* y la expresamos como:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que el límite exista.

Cuando $x \rightarrow a$ por izquierda, tendremos la *derivada lateral izquierda* y la expresamos como:

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que dicho límite exista.

En consecuencia, la derivada en un punto $x = a$ existe si y solo si las derivadas laterales existen y son iguales. En símbolos:

$$f'(a) \text{ existe} \iff f'_+(a) \text{ y } f'_-(a) \text{ existen y } f'_+(a) = f'_-(a).$$

Así, si una o ambas derivadas laterales de f en $x = a$ no existen, o bien existen pero son distintas, la función f no será derivable en $x = a$.

Definición 1.3.4 (Situaciones de no derivabilidad de una función continua):

Sea f una función continua en $x = c$ que no es derivable en $x = c$. Se dice que la gráfica de f tiene

- un *punto anguloso* en $x = c$ si las derivadas laterales en $x = c$ existen ambas (es decir, son finitas) pero son distintas;
- una *cúspide* en $x = c$ cuando las derivadas laterales en $x = c$ son ambas infinitas pero con distinto signo.
- *recta tangente vertical* en $x = c$ si las derivadas laterales en $x = c$ son ambas infinitas y con el mismo signo.

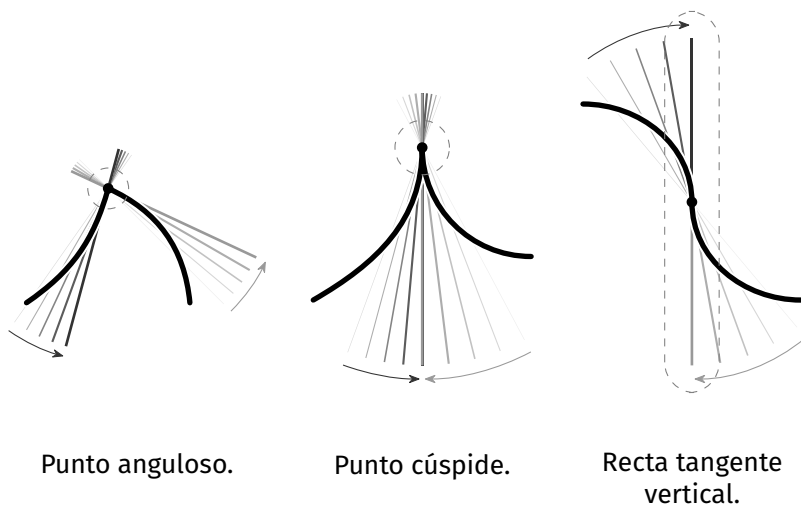


Figura 32

Ejemplo 1.3.9: Estudie la derivabilidad de $f(x) = |x|$ en $x = 0$ y analice qué sucede con la recta tangente en este punto.

Solución. Como se vio al inicio de la Sección 1.2.3, f se puede escribir como una función por tramos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

con $D_f = \mathbb{R}$.

Analicemos si existe la derivada en $x = 0$. Para ello, calculemos el límite lateral derecho del cociente incremental en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Entonces $f'_+(0)$ existe y es igual a 1.

Calculemos el límite lateral izquierdo del cociente incremental en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

Luego, $f'_-(0)$ también existe pero es igual a -1.

Así, existen ambas derivadas laterales pero son distintas: $f'_+(0) \neq f'_-(0)$. Por lo tanto, no existe la derivada de f en $x = 0$ y, en tal caso, no hay recta tangente en $x = 0$ (ver Figura 33).

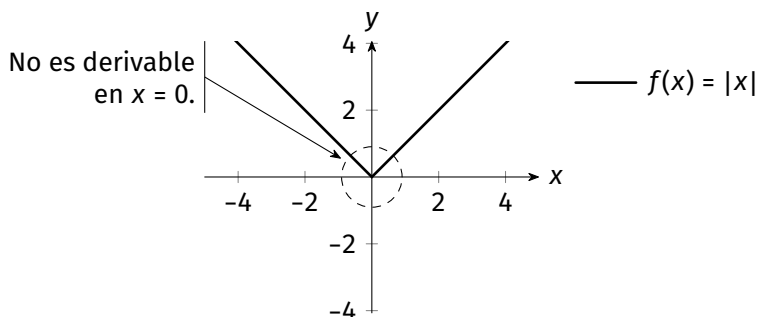


Figura 33

Ejemplo 1.3.10: Estudie la derivabilidad de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$ y analice la existencia de la recta tangente en este punto.

Solución. Observamos que el dominio de la función f es $\mathbb{R}$. Calculemos el límite lateral derecho del cociente incremental en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Como este límite es infinito se interpreta que no existe la derivada lateral derecha y, por tanto, f no es derivable en $x = 0$. Para analizar la existencia de la recta tangente, vemos que la derivada lateral izquierda en $x = 0$ devuelve también el mismo límite $+\infty$ y, al ser f continua en $x = 0$, podemos afirmar que existe recta tangente vertical en este punto, y su ecuación es $x = 0$.

La gráfica de f se muestra en la Figura 34 así como la recta tangente vertical $x = 0$.

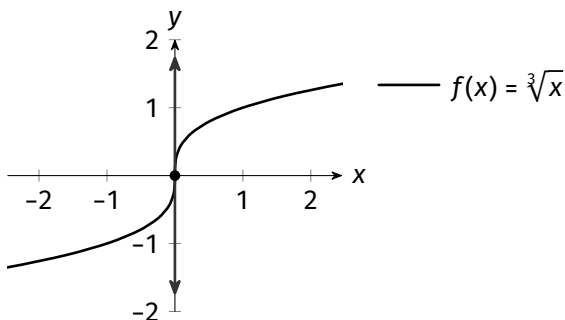


Figura 34

Ejemplo 1.3.11: Estudie la derivabilidad en $x = 1$ de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 1, \\ 2x & \text{si } x \leq 1, \end{cases}$$

y represente gráficamente la situación.

Solución. La función está definida en todo $\mathbb{R}$, y al calcular la derivada lateral derecha para $x = 1$ vemos que existe pues

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f'_+(1) = 2$. Veamos si existe la derivada lateral izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2.$$

Resulta que sí existe y es $f'_-(1) = 2 = f'_+(1)$.

Por lo tanto, existe la derivada de f en $x = 1$ y su valor es $f'(1) = 2$. Concluimos que f es derivable en $x = 1$ y que, en este caso, la recta tangente en el punto $(1, f(1)) = (1, 2)$ tiene pendiente 2. La ecuación de dicha recta es $y = 2x$.

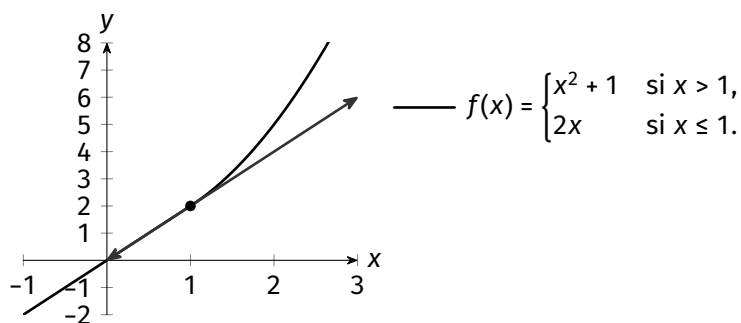


Figura 35

La gráfica de las funciones f y la recta tangente en $x = 1$ se muestran en la Figura 35.

Ejemplo 1.3.12: Estudie la derivabilidad en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$$

y represente gráficamente la situación.

Solución. El dominio de la función es $D_f = \mathbb{R}$, por lo que tiene sentido estudiar la derivada en $x = 0$ por ambos laterales. Si bien la expresión no cambia a un lado y otro de cero, veremos que conviene distinguir ambos casos pues el signo de x influirá en el resultado del límite.

Analicemos la existencia de la derivada lateral derecha en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

Este límite no existe, lo cual nos dice que la derivada lateral derecha en 0 no existe. Podemos concluir, entonces, que esta función no es derivable en $x = 0$.

Si analizamos la existencia de la derivada lateral izquierda, resulta que tampoco existe, pues se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

Los dos límites laterales anteriores indican que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando x se acerca a 0: por el lado derecho son cada vez más grandes y positivas, mientras que por el lado izquierdo son cada vez más grandes en valor absoluto pero negativas. La gráfica de la función f presenta una cúspide en el punto $x = 0$ y, en este caso, f no presenta recta tangente vertical, como puede verse en la Figura 36.

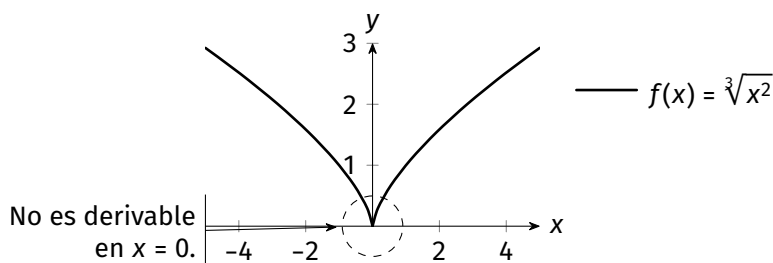


Figura 36

Ejemplo 1.3.13: Estudie la derivabilidad en $x = 0$ de

$$g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y represente gráficamente la situación y reflexione sobre la existencia de la recta tangente en $x = 0$.

Solución. Notemos que la función g dada tiene la misma expresión analítica a ambos lados de 0, y como solo un punto no respeta la regla, a priori estudiaremos el límite bilateral. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 - \frac{2}{x}.$$

Este límite es infinito y, para determinar su signo, será necesario analizar los límites laterales.

Para $x < 0$, $-2/x > 0$ por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3 - \frac{2}{x} \right) = +\infty,$$

mientras que para $x > 0$ es $-2/x < 0$, de donde obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 - \frac{2}{x} \right) = -\infty.$$

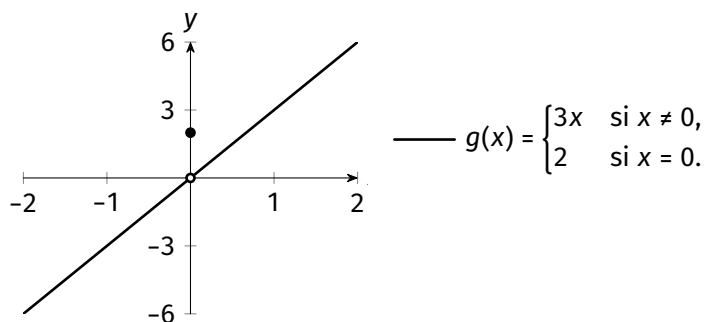


Figura 37

Concluimos que $g'(0)$ no existe y, en consecuencia, la función no es derivable en el punto $(0, 2)$.

¿Existe la recta tangente en $x = 0$? Notemos por la Figura 37 que g es discontinua en este punto, por lo no tiene sentido preguntarnos acerca de ello.

EJERCICIOS 1.3.4

- Estudie la derivabilidad de las funciones en los puntos indicados. En el caso que exista, de la ecuación de la recta tangente en el punto.
 - $f(x) = |x - 2|$ en $x = 2$.
 - $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$ en $x = 0$.
 - $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$
 - $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq -1, \\ -2x + 1 & \text{si } x > -1, \end{cases}$ en $x = 0$.
- Analice la existencia de la derivada lateral derecha de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 0$.
- Organizados por el docente en grupos de trabajo, propongan diferentes funciones continuas para estudiar la derivabilidad en un punto conocido. Expliciten en la pizarra sus respuestas y sométanlas a debate con sus compañeros.

Derivabilidad y continuidad

En ejemplos anteriores se estudiaron muchas funciones continuas pero no derivables en determinados puntos. Esto muestra que no toda función continua es derivable, lo que gráficamente se evidencia en funciones cuyas gráficas presentan puntos angulosos, cúspides, o bien poseen rectas tangentes verticales en algún punto.

La continuidad no es, entonces, suficiente para garantizar la derivabilidad de la función. Sin embargo sí es una condición necesaria. Es decir, que si f es derivable en un punto, entonces resulta continua allí.

Teorema 1.3.2 (Condición necesaria de derivabilidad): Si f es una función derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

El contrarrecíproco del teorema anterior proporciona una estrategia útil para el análisis de la derivabilidad de una función en un punto.

Corolario 1.3.3: Si la función f es discontinua en $x = c$, entonces f no es derivable en $x = c$.

¡Cuidado! Si sabemos que una función no es derivable en un punto de su dominio, no podemos decir que no puede ser continua allí. El claro ejemplo de ello es la función valor absoluto, estudiada en el Ejemplo 1.3.9, que no es derivable en $x = 0$ pero sí continua en $x = 0$. Así, se debe tener cuidado en cómo se utiliza el corolario anterior.

Ejemplo 1.3.14: La función $\tilde{f}$ del Ejemplo 1.2.2 de la Sección 1.2,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \neq 1, \\ 3 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

es discontinua en $x = 1$, por lo que no puede ser derivable allí. Sin embargo, en los demás puntos será derivable, con

$$\tilde{f}'(x) = 2x + 2, \quad x \neq 1.$$

Ejemplo 1.3.15: La función del Ejemplo 1.3.13,

$$g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

vimos que no era derivable en $x = 0$ por definición. Sin embargo, como no es continua en $x = 0$, ahora podemos afirmarlo gracias al Corolario 1.3.3 probando que es discontinua en $x = 0$. Esto es sencillo de comprobar pues el límite de g existe en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 3 \cdot 0 = 0,$$

pero $g(0) = 2 \neq 0$. Tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$ como se observa en la Figura 37.

Es conveniente comentar un error común que aparece cuando estudiamos la derivabilidad de una función, para lo cual veremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.16: ¿Es correcto afirmar que $f'(x) = 2$ en todo $x \in \mathbb{R}$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0, \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ?$$

Solución. La respuesta es negativa. Si bien cada tramo de la función corresponde a una función polinómica de grado 1, con pendiente 2, es posible decir que la derivada es igual a 2 solo para los valores de $x \neq 0$.

De hecho, f es discontinua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{pero} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq 0.$$

Así, por el Corolario 1.3.3 sabemos que entonces $f'(0)$ no existe y, en consecuencia, $f'(x) = 2$ para todo $x \neq 0$. Graficamos la derivada junto a la función en la Figura 38.

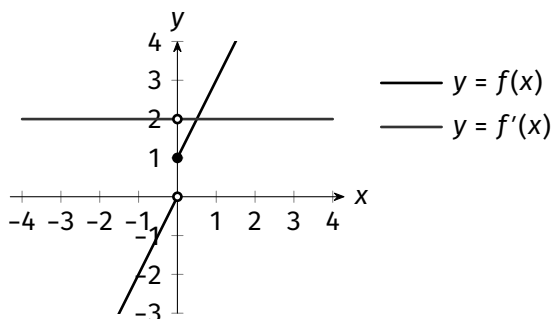


Figura 38

¡Cuidado! Más generalmente, si sabemos que f' existe para todos los valores de x a izquierda y derecha de c , cercanos, y tenemos una expresión para $f'(x)$ en cada uno de esos x , excepto para $x = c$, es erróneo calcular $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$. Si esta igualdad valiera, esto hablaría de que la función f' es continua en $x = c$. Pero existen funciones que son continuas y derivables que poseen funciones derivadas que no son necesariamente continuas. Aunque los ejemplos de este hecho escapan a los contenidos de este curso, es necesario enfatizar que es incorrecto calcular una derivada tomando límite sobre la función derivada en puntos cercanos.

Ahora bien, cuando sabemos de antemano que f es continua en $x = c$, y queremos analizar la derivabilidad de f en $x = c$, sí podemos hacer uso del comportamiento de $f'(x)$ alrededor de $x = c$, siempre que f' exista como función cerca de dicho valor.

Esto será particularmente útil cuando f es continua en $x = c$ pero no derivable allí, y querramos clasificar el tipo de situación que se evidencia en la gráfica de f en $x = c$: punto anguloso, cúspide o recta tangente vertical.

Las condiciones para hacer dicho análisis se presentan en el siguiente resultado. Debemos tener muy presente que las mismas son, en general, suficientes pero no siempre necesarias (Carena, 2024). A pesar de ello, nos ayudarán a decidir más sencillamente lo que ocurre con f en un punto de no derivabilidad, principalmente en los casos de cúspides y rectas tangentes verticales.

Proposición 1.3.4: Sea f una función continua en $x = c$ y supongamos que f' existe en un intervalo que contiene a $x = c$ pero no en $x = c$. Consideremos

$$I = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x), \quad D = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x).$$

1. Si I y D existen (ambos son números reales) y son distintos, f tiene un punto anguloso en $x = c$.
2. Si $I = +\infty$ y $D = -\infty$, o bien $I = -\infty$ y $D = +\infty$, la gráfica de f presenta una cúspide en $x = c$;
3. si $I = D = +\infty$, o bien $I = D = -\infty$, la gráfica de f presenta una recta tangente vertical en $x = c$.

Ejemplo 1.3.17: Haciendo uso de la Proposición 1.3.4 podemos volver a clasificar las situaciones dadas en los ejemplos 1.3.9, 1.3.12 y 1.3.10, respectivamente.

1. Para la función $f(x) = |x|$ tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

de donde es inmediato que $I = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$ y $D = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$. Ambos límites existen, pero son distintos, por lo que en $x = 0$ la gráfica de f presenta un punto anguloso.

2. En el caso de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, tenemos que $f'(x) = 2/3 \cdot x^{-1/3}$ para $x \neq 0$ y resulta que $I = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$ mientras que $D = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$. Según la proposición anterior hay una cúspide en $x = 0$.
3. Para la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ resulta que $f'(x) = 1/3 \cdot x^{-2/3}$ siempre que $x \neq 0$. De esto se desprende que $I = D = +\infty$ y entonces podemos comprobar que hay una recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$ que es vertical.

EJERCICIOS 1.3.5

1. Decida si puede aplicar el Corolario 1.3.3 para determinar la no derivabilidad de f en $x = c$. De lo contrario, realice un análisis adecuado de la función para comprobar su no derivabilidad en dicho punto.

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & \text{si } x \neq -3, \\ 0 & \text{si } x = -3, \end{cases}$ en $x = -3$.

b. $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x > 1, \\ 8 - x & \text{si } x \leq 1, \end{cases}$ en $x = -7$.

c. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+4}{x-2} & \text{si } x < 2, \\ 2 - x & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$ en $x = 2$.

d. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$ en $x = 0$.

2. Encuentre el/los valor/es de m para que la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3, \\ mx - 9 & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

resulte derivable en $x = 3$.

3. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente su respuesta.

a. Existe una función que es continua en $x = 0$ pero no derivable allí.

b. Existe una función derivable en $x = 0$ que no es continua allí.

c. Si f está definida en $x = c$ y presenta una asíntota vertical en $x = c$, entonces f tiene una recta tangente vertical en $x = c$.

d. La función $f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{si } x < 0, \\ 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua y no derivable en $x = 0$.

e. La función $f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x < 0, \\ 4(x + 1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$ pues $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 4$.

4. Estudie la derivabilidad de la función $h(x) = |x| + a$, con $a \in \mathbb{R}$.

REGLAS DE DERIVACIÓN

El cálculo de la derivada de una función en un punto o de la función derivada mediante la definición puede resultar tedioso. Si una función está construida a partir de funciones más simples, entonces su derivada puede ser hallada a partir de las funciones más simples que la integran. Ya hemos calculado derivadas de algunas funciones sencillas a partir de la definición. A continuación desarrollaremos reglas básicas para calcular la derivada de funciones elementales así como las reglas combinadas para derivar un múltiplo constante de una función, o funciones construidas en base a procesos algebraicos de suma, resta, producto y cociente.

Derivadas de funciones potencia

Comenzaremos mostrando que la derivada de una función constante es cero. Sea $y = f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, siendo c una constante. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Así, $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, la función derivada es la función que es constantemente cero.

Ejemplo 1.4.1: Halle la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \ln(2)$

2. $g(x) = \pi$

3. $h(x) = \sqrt[3]{5}$.

Solución. Notemos que estas funciones son constantes. Por tanto, sus derivadas existen en todo punto y son todas la función cero: $f'(x) = 0$, $g'(x) = 0$ y $h'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

La siguiente regla que veremos da una fórmula para hallar la derivada de « x elevada a una potencia constante», es decir, la derivada de $f(x) = x^n$, donde n es un número real arbitrario. Una función de esta forma se llama «función potencia».

Comenzaremos trabajando con exponentes enteros positivos para luego generalizar a todo número real.

Sea $y = f(x) = x$, es decir, $n = 1$. Su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

en cualquier valor de x . Así, $f'(x) = 1$, es decir, la derivada de $f(x) = x^1$ es la función constantemente uno.

¿Qué se obtiene cuando $n = 2$? En este caso es $y = f(x) = x^2$, y su derivada vendrá dada por

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x,\end{aligned}$$

que existe para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Procediendo de forma similar, podemos ir aumentando de uno en uno el exponente de la función potencia $f(x) = x^n$ para calcular la derivada, obteniendo los resultados de la Tabla 9.

Tabla 9. Derivadas de $f(x) = x^n$ para n entero positivo

Exponente	1	2	3	4	5	...	n
Derivada	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$	...	nx^{n-1}

Se observa que la forma general de la derivada de x^n es $n \cdot x^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4.2: La derivada de $f(x) = x^{15}$ es $f'(x) = 15x^{14}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mientras que la derivada de $h(x) = x^{1000}$ es $h'(x) = 1000x^{999}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Lo observado para potencias enteras positivas es también válido para cualquier exponente real.

Teorema 1.4.1: Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, entonces su derivada es $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, donde f' esté definida.

Esto es, la derivada de una potencia constante de x es igual al producto del exponente por x elevada a un exponente disminuido en una unidad con respecto al de x en la función original.

Ejemplo 1.4.3: En el caso de exponentes no naturales, corresponde escribir los exponentes de la forma dada en el teorema anterior.

1. Para derivar $f(x) = 1/x^2$, se escribe $f(x) = x^{-2}$ de modo que su derivada es $f'(x) = (-2)x^{-3}$ para todo $x \neq 0$.
2. Para derivar $y = \sqrt{x}$, se escribe $y = x^{1/2}$ de modo que su derivada es $dy/dx = 1/(2\sqrt{x})$ para todo $x > 0$.
3. La derivada de $y = x^{\sqrt{2}}$ es $y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ para todo $x > 0$.

EJERCICIOS 1.4.1

1. Halle la derivada de las siguientes funciones usando la regla para derivar una función potencia y explicita las restricciones adecuadas.

a. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$.

b. $w(t) = \ln(e^{t^2})$.

c. $g(z) = z^{\frac{1}{4}} \cdot z^{\frac{-1}{2}}$.

d. $h(t) = e^{5 \ln(t)}$.

2. Pruebe que las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^5$ son positivas para todo $x \neq 0$. ¿Qué sucede en el caso de la función $y = x^4$?

Reglas generales de derivación

Vamos a empezar a combinar funciones para obtener más reglas de derivación y sólo demostraremos las más sencillas.

Sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$ dos funciones derivables en x , y sea c una constante. La derivada de $h(x) = cf(x)$ es $h'(x) = cf'(x)$. En efecto, si f es derivable en x sabemos que existe el siguiente límite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

y aplicando la definición para h tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} \\ &= c \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \\ &= cf'(x), \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad 2 de límite. Concluimos entonces que $h'(x)$ existe y es $h'(x) = cf'(x)$. En otras palabras, $(cf)'(x) = cf'(x)$ para cada x donde $f'(x)$ existe.

La derivada de $h(x) = f(x) + g(x)$ es $h'(x) = f'(x) + g'(x)$. Como f y g son derivables en x , los límites $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, por lo que usando la propiedad 1 de límites resulta que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h'(x)$ existe y es igual a $f'(x) + g'(x)$ en cada x donde f y g son derivable. Lo podemos expresar también como $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ para cada x donde existen tanto $f'(x)$ como $g'(x)$.

Hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 1.4.2: Si f y g son dos funciones derivables en x , y c es una constante, entonces cf , $f + g$ y $f - g$ son derivables en x . Más aún:

1. $\frac{d(cf)}{dx} = c \frac{df}{dx}$
2. $\frac{d(f + g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
3. $\frac{d(f - g)}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$

Estas son «la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función» y «la derivada de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de las derivadas de las funciones».

Ejemplo 1.4.4: Halle la derivada de la función

$$y(x) = x^5 + \ln(2)x^2$$

en todos los valores en los que exista.

Solución. Aquí la función y es la suma de las funciones x^5 y $\ln(2)x^2$, ambas derivables en todo x real. Por lo tanto, la suma también es derivable en todo x por el teorema anterior. Aplicando en cada término las reglas vistas anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dx^5}{dx} + \frac{d(\ln(2)x^2)}{dx} \\ &= 5x^4 + \ln(2) \frac{dx^2}{dx} \\ &= 5x^4 + \ln(2) \cdot 2x \\ &= 5x^4 + 2 \ln(2)x. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.5: Halle la derivada de la función

$$w(t) = 5\sqrt{t} - \frac{1}{t^2}$$

en todos los valores en los que exista.

Solución. En este caso la función $w = w(t)$ tiene dominio en $(0, \infty)$ y es la resta de las funciones $5\sqrt{t}$ y $1/t^2 = t^{-2}$. Estas funciones son derivables simultáneamente cuando $t > 0$. Por lo tanto, la resta también es derivable para cada $t > 0$. Si aplicamos las reglas anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{d(5\sqrt{t})}{dt} - \frac{d(t^{-2})}{dt} \\ &= 5 \frac{1}{2\sqrt{t}} - (-2)t^{-2-1} \\ &= \frac{5}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{2}{t^3},\end{aligned}$$

para cada $t > 0$.

Ejemplo 1.4.6: Halle la derivada de la función

$$z(x) = \frac{1}{6}x^6 + 6x^{-1/6}$$

en todos los valores en los que exista.

Solución. La función $z = z(x)$ es suma de dos funciones, $1/6x^6$ y $6x^{-1/6}$, de donde observamos que $D_z = (0, \infty)$. Cada una de ellas es derivable para $x > 0$, por lo que se aplica la regla de la derivada de la suma y resulta que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{d\left(\frac{1}{6}x^6\right)}{dx} + \frac{d(6x^{-1/6})}{dx} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot x^5 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) x^{-7/6} \\ &= x^5 - x^{-7/6},\end{aligned}$$

para cada uno de esos valores de x .

Hasta ahora hemos derivado funciones resultantes de sumar, restar o multiplicar por un número real una o varias funciones simples y vimos las reglas de derivación para estos casos. También podemos combinar funciones mediante el producto o cociente de dos o más. A continuación se dan las reglas para obtener sus derivadas.

Teorema 1.4.3: Si $f = f(x)$ y $g = g(x)$ son dos funciones derivables en x , entonces $f \cdot g$ es derivable en x , y f/g , siempre que $g(x) \neq 0$, es derivable en x . Además, se verifica que:

$$\begin{aligned}1. \quad \frac{d(f \cdot g)}{dx} &= \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}, & 2. \quad \frac{d(f/g)}{dx} &= \frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}.\end{aligned}$$

En otras palabras, la derivada de un producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar, más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función.

Por otro lado, la derivada de un cociente de dos funciones es igual a la derivada de la función del numerador por la función del denominador, menos la función del numerador por la derivada de la función del denominador, todo ello dividido por el cuadrado de la función del denominador.

Ejemplo 1.4.7: Halle las derivadas de

$$y(x) = (5x^2 + 2x)(\sqrt{x} + 3x)$$

mediante la regla del producto, siempre que sea posible.

Solución. En primer lugar identificamos las funciones que forman el producto, las cuales son $f(x) = 5x^2 + 2x$ y $g(x) = \sqrt{x} + 3x$. Sus derivadas se pueden calcular con las reglas vistas en el Teorema 1.4.2, obteniendo

$$\frac{df}{dx} = 10x + 2 \quad \text{y} \quad \frac{dg}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3,$$

donde la primera existe en todo x pero la segunda solo para $x > 0$. Luego, y será derivable en cada $x > 0$.

Aplicamos a continuación la regla del producto para obtener dy/dx , llevándola hasta su mínima expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (5x^2 + 2x) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \right) + (\sqrt{x} + 3x) \cdot (10x + 2) \\ &= \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} + 15x^2 + \frac{x}{\sqrt{x}} + 6x + 10x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 30x^2 + 6x \\ &= \frac{5}{2}x^{3/2} + 15x^2 + \sqrt{x} + 6x + 10x^{3/2} + 2\sqrt{x} + 30x^2 + 6x \\ &= \frac{25}{2}x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 45x^2 + 12x. \end{aligned}$$

Notemos que, en este caso, podríamos haber desarrollado primero el producto de funciones, y luego derivado usando las reglas dadas en el Teorema 1.4.2. Se deja al lector comprobar que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 1.4.8: Halle las derivadas de

$$k(t) = (t^{-1/2} + 4t^2) \cdot \frac{1}{t}$$

mediante la regla del producto, siempre que sea posible.

Solución. Ahora, $k(t) = f(t) \cdot g(t)$, siendo $f(t) = t^{-1/2} + 4t^2$ y $g(t) = t^{-1}$. Estas funciones tienen las siguientes derivadas

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{2}t^{-3/2} + 8t, \quad \text{y} \quad \frac{dg}{dt} = -t^{-2}.$$

La primera de ellas existe para todo $t > 0$ mientras que la segunda existe siempre que $t \neq 0$.

Mediante la regla del producto obtenemos dk/dt para cada $t > 0$, donde las derivadas de cada factor existen:

$$\frac{dk}{dt} = (t^{-1/2} + 4t^2)(-t^{-2}) + t^{-1}\left(-\frac{1}{2}t^{-3/2} + 8t\right).$$

Aplicamos propiedad distributiva y reducimos la derivada:

$$\frac{dk}{dt} = -t^{-5/2} - 4 - \frac{1}{2}t^{-5/2} + 8 = -\frac{3}{2}t^{-5/2} + 4.$$

Observemos que en este caso podríamos haber aplicado también la propiedad distributiva al principio, quedando la función $k(t) = t^{-3/2} + 4t$, para luego derivar la suma y los cálculos serían más sencillos. O también se podría haber escrito a la función como un cociente de funciones, f como antes y $g(t) = t$, para aplicar la regla para el cociente, teniendo cuidado de verificar las condiciones del Teorema 1.4.3.

Si bien en los ejemplos anteriores es posible evitar usar la regla del producto pues las funciones se pueden reescribir inicialmente de una forma más sencilla, no siempre podremos hacer esto. Es así que es conveniente tener presentes todas las reglas para usar la mejor en cada situación.

Ejemplo 1.4.9: Obtenga la derivada de la función

$$y(x) = \frac{6 - x}{x^2 - 6}$$

utilizando la regla del cociente siempre que sea posible.

Solución. Primero identificamos las funciones f y g de modo que $y = f/g$. Obtenemos las derivadas de f y g , para finalmente aplicar la regla del cociente para los valores donde $g \neq 0$ y donde ambas derivadas existan.

Para $y(x) = (6 - x)/(x^2 - 6)$ consideramos $f(x) = 6 - x$ y $g(x) = x^2 - 6$, siendo $f'(x) = -1$ y $g'(x) = 2x$, ambas derivables en todo x . Como $g(x) = 0$ cuando $x = \pm\sqrt{6}$, la función y será derivable en todo su dominio.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(-1)(x^2 - 6) - (6 - x)(2x)}{(x^2 - 6)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 6 - 12x + 2x^2}{(x^2 - 6)^2} \\ &= \frac{x^2 - 12x + 6}{(x^2 - 6)^2}\end{aligned}$$

por regla del cociente.

Ejemplo 1.4.10: Obtenga la derivada de la función

$$y(t) = \frac{10t}{5 - 2t}$$

utilizando la regla del cociente siempre que sea posible.

Solución. Primero identificamos las funciones f y g de modo que $y = f/g$. Obtenemos las derivadas de f y g , para finalmente aplicar la regla del cociente para los valores donde $g \neq 0$ y donde ambas derivadas existan.

En este caso, $f(t) = 10t$, $g(t) = 5 - 2t$, $f'(t) = 10$ y $g'(t) = -2$. Aplicamos la regla del cociente

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{10(5 - 2t) - 10t(-2)}{(5 - 2t)^2} \\ &= \frac{50 - 20t + 20t}{(5 - 2t)^2} \\ &= \frac{50}{(5 - 2t)^2}\end{aligned}$$

para cada $t \in D_y = \mathbb{R} \setminus \{5/2\}$.

Ejemplo 1.4.11: Determine los puntos sobre la curva $y = (x + 1/x) \cdot (x^2 + 6x)$ en donde las rectas tangentes tengan una pendiente de -8 unidades.

Solución. Para obtener la derivada de la función dada aplicamos la regla para derivar el producto de dos funciones. Sean

$$u(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1} \quad \text{y} \quad v(x) = x^2 + 6x.$$

Entonces $u'(x) = 1 + (-1) \cdot x^{-2}$ y $v'(x) = 2x + 6$. La derivada de u existe para todo $x \neq 0$, y la de v para todo x en $\mathbb{R}$.

A continuación, hallamos y' :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot (2x + 6) + (1 + (-1) \cdot x^{-2}) \cdot (x^2 + 6x) \\ &= 2x^2 + 6x + 2 + \frac{6}{x} + x^2 + 6x - 1 - \frac{6}{x} \\ &= 3x^2 + 12x + 1.\end{aligned}$$

Para obtener los valores de x donde la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función es -8 resolvemos la ecuación $3x^2 + 12x + 1 = -8$, la cual equivale a buscar las raíces de $3x^2 + 12x + 9 = 0$, que son $x_1 = -1$ y $x_2 = -3$.

Para $x_1 = -1$, $y_1 = y(-1) = 10$, y para $x_2 = -3$, $y_2 = y(-3) = 30$. Así, los puntos buscados son $(-1, 10)$ y $(-3, 30)$.

Ejemplo 1.4.12: Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 4)/(x^2 + 1)$ en $x = -2$.

Solución. En este caso aplicamos la regla para derivar el cociente de dos funciones. Sean $u(x) = x^2 - 4$ y $v(x) = x^2 + 1$; entonces $u'(x) = v'(x) = 2x$. Ambas derivadas existen para todo x en $\mathbb{R}$. A continuación, hallamos y' :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{10x}{(x^2 + 1)^2},$$

la cual existe siempre porque $v(x) \neq 0$ en todo x .

Para obtener la pendiente de la recta tangente evaluamos la derivada en $x = -2$, obteniendo que la misma es $m = g'(-2) = -\frac{4}{5}$. Como $y(-2) = 0$, la ecuación de la recta tangente es $y = -\frac{4}{5}(x + 2) = -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}$.

EJERCICIOS 1.4.2

1. Aplique las reglas de derivación para hallar las derivadas de las siguientes funciones. Para cada caso indique los valores de la variable para los cuales dichas expresiones son válidas.

a. $f(x) = (3x + 7)(5 - x^2)$.

b. $g(x) = \frac{4x+1}{x^2+3}$.

c. $h(t) = t \cdot (t^2 + 9)$.

d. $z(t) = 2 \ln e^t + \frac{t^3}{2\sqrt{t}}$.

e. $p(x) = a + bx^n$, con $x > 0$ y a y b f. $q(t) = \frac{at^2+bt+c}{t+a^2}$, a , b y c constantes.

g. $h(x) = \frac{x+1}{2} \cdot (x^2 + 5) \cdot (x^3 - 2x)$.

h. $u(y) = \left(y + \frac{3}{y}\right) \cdot (y^2 - 5y)$.

i. $f(z) = \frac{(z^2+1)(2z+3)}{3z-1}$.

j. $g(t) = \frac{t-3}{t^2+1} - \frac{t^3-1}{2+t^2}$.

2. Halle la derivada de las siguientes funciones, siendo $f(x) = x^4$ y $g(x) = x^{-1/3}$. Indique todos los valores en donde h' existe.

a. $h(x) = \sqrt{2}f(x)$.

b. $h(x) = e^3 + f(x) - g(x)$.

c. $h(x) = \pi g(x) - 2f(x) - 3g(x)$.

d. $h(x) = \frac{\ln(3)}{g(x)} + 3f(x)$.

e. $h(x) = f(x) \frac{g(x)}{2}$.

f. $h(x) = f^2(x)$.

3. Si $f(x) = 2/x$, halle el o los puntos en los cuales la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $y + 8x - 2 = 0$. Encuentre la ecuación de la recta tangente. Grafique.
4. ¿Acaso la gráfica de $y = x^3 + 1/x^3$ tiene rectas tangentes horizontales en los puntos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$? Justifique adecuadamente.
5. Considere la función $f(x) = 3x^3 - x + 2$ y halle la ecuación de las rectas tangentes horizontales a la gráfica de f . Con la ayuda de **GeoGebra**, represente la función f , y utilice el comando «Tangente» con un punto sobre la curva para determinar los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es positiva y donde es negativa.
6. Sea la función $f(x) = \frac{a}{a+x^2}$ con $a > 0$.
 - a. Analice el signo de la derivada en su dominio.
 - b. Relacione lo obtenido en el ítem anterior con crecimiento y decrecimiento de f .
 - c. Con ayuda de **GeoGebra** grafique la función y su derivada.
7. Dada la función $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, la cual representa a un tipo de curva denominada *serpentina*, halle los puntos donde la misma posee rectas tangentes horizontales y sus ecuaciones. Utilizando **GeoGebra**, grafique la función, las rectas tangentes halladas y la función derivada primera. Interprete lo que observa gráficamente.
8. Encuentre las condiciones sobre las constantes a, b, c y d para que la gráfica del polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga:
 - a. exactamente dos tangentes horizontales,
 - b. exactamente una tangente horizontal y
 - c. ninguna tangente horizontal.

Ejemplifique todos los ítems anteriores.

9. Determine una función de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica tenga una intersección con el eje de abscisas en $x = 1$, una intersección con el eje de ordenadas en $y = -2$ y una recta tangente de pendiente -1 en la intersección con el eje de ordenadas.
10. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique cada una de ellas.
 - a. La pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{kx}{x^2+1}$, $k > 0$, en $x = 0$ es 1 para algún valor de k .

- b. Si $f = f(x)$ y $g = g(x)$ son funciones derivables en $\mathbb{R}$ siendo $g(x) \neq 0$, y $h = \frac{a}{g} + a \cdot f$ con a constante no nula, entonces $h'(x) = a \cdot \left(\frac{f' - g'}{g^2} \right)$.
- c. Siendo $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, entonces la derivada de $h = 5f - 4g + f \cdot g$ evaluada en 2 es -1.

ANÁLISIS MARGINAL

Una relación entre variables económicas se puede expresar por medio de una función. Se admite corrientemente que se trata de funciones derivables en sus dominios.

En economía, considerando la función $y = f(x)$, es frecuente estudiar la variación de la variable y con respecto a la variable x utilizando los conceptos de tasa de cambio promedio y el concepto de «marginalidad». El primero expresa la relación por cociente entre la variación de y en un intervalo completo de valores de x , mientras que el segundo se refiere a la variación o cambio en y en el «margen», es decir, para cambios muy pequeños en x a partir de un valor dado. Así, el costo medio expresa la relación por cociente entre el costo total de una determinada producción en un intervalo productivo. El costo marginal permite medir aproximadamente el cambio que experimenta el costo cuando, en cierto nivel de producción, esta varía en una cantidad muy pequeña.

El concepto marginal solo tiene sentido como límite de la tasa de cambio promedio cuando la variación en x tiende a cero, es decir, cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Por tanto, está asociado a la derivada de la función que relaciona y con x .

De ahora en adelante, cuando nos refiramos a cantidad utilizaremos la variable q y designaremos al precio con la variable p siguiendo la bibliografía específica de economía. Aclaremos que todos los ejemplos y ejercicios relacionados con economía se dan bajo ciertos supuestos de modo que nos permitan trabajar con funciones sencillas.

Costo marginal

El *costo total* es la suma de los costos variables y los costos fijos. Los *costos fijos* representan la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, como la renta o los seguros. Estos costos deben pagarse independientemente de que la empresa produzca o no, mientras que los

costos variables son la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como mano de obra y materiales.

Así, la función de costo total de un fabricante, $C = C(q)$, proporciona el costo total C de producir q unidades de un producto. Si se aumenta la cantidad producida a partir de un cierto nivel de producción en un incremento Δq , el incremento correspondiente al costo será ΔC y el cociente $\Delta C/\Delta q$ representará la tasa promedio de cambio del costo. Según el signo que tenga ΔC el costo tendrá un aumento (positivo) o una disminución (negativo). El aumento o la disminución del costo por cada unidad de producción adicional o añadida será entonces la razón $\Delta C/\Delta q$. Es decir, el *costo medio* o *tasa de cambio promedio del costo* correspondiente a un cambio en la producción desde q a $q + \Delta q$.

A medida que el incremento de la producción se hace más pequeño se tiene la tasa de cambio del costo en el margen de la producción q , el cual es el límite de $\Delta C/\Delta q$ cuando $\Delta q \rightarrow 0$, y esto no es más que la derivada del costo con respecto a la producción. Esta derivada se denomina *costo marginal* de la producción q , lo que en símbolos expresamos como

$$C'(q) = \frac{dC}{dq} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta q}.$$

La misma se interpreta como la variación aproximada del costo para una unidad adicional producida a partir de un nivel de producción determinado.

En resumen, $\Delta C/\Delta q$ es la tasa promedio del costo mientras que $C'(q)$ es la tasa instantánea del costo o costo marginal.

Ejemplo 1.5.1: Suponga que $C(q) = 0.2q^2 + 8$ es una función de costo, donde C está expresado en miles de dólares y q en unidades. Entonces el costo marginal está dado por la función $C'(q) = 0.4q$ y, por ejemplo,

- el valor $C'(10) = 4$ significa que si se aumenta la producción de 10 unidades en una unidad adicional, el costo total aumentará en, aproximadamente, 4000 dólares. Es decir, la unidad adicional «casi» cuesta 4000 dólares.
- Por otro lado, $C'(5) = 2$, lo que indica que el costo aumenta aproximadamente 2000 dólares si se aumenta la producción en una unidad a partir de 5 unidades.

Costo promedio marginal

Si C es el costo total de producir q unidades de un producto, el *costo promedio por unidad* es $\bar{C}(q) = C(q)/q$. Se deduce que el costo total es el producto del

número de unidades producidas por el costo promedio unitario, $C(q) = q\bar{C}(q)$, de modo que el *costo promedio marginal* está dado por

$$\bar{C}'(q) = \frac{d\bar{C}}{dq} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{C}}{\Delta q}.$$

Ejemplo 1.5.2: Retomando la función de costo del ejemplo anterior, la función de costo promedio está dada por

$$\bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{0.2q^2 + 8}{q} = 0.2q + \frac{8}{q}.$$

La derivada nos dará la función de costo promedio marginal, $\bar{C}'(q) = 0.2 - 8/q^2$. Entonces

- $\bar{C}'(10) = 0.12$ significa que si se aumenta la producción de 10 unidades en una unidad adicional, el costo promedio aumentará en 120 dólares aproximadamente. Es decir, la unidad adicional, en promedio, cuesta aproximadamente 120 dólares.

Es necesario distinguir las interpretaciones de $C'(10)$ y $\bar{C}'(10)$. La primera se refiere a la variación aproximada en el costo total al aumentar la producción de 10 unidades a 11 unidades, mientras que la segunda refiere al incremento promedio aproximado por unidad al aumentar la producción de 10 a 11 unidades.

- Por otra parte se tiene que $\bar{C}'(5) = -0.12$, lo que muestra que el costo promedio disminuye 120 dólares, aproximadamente, si se aumenta la producción en una unidad a partir de 5 unidades.

En este caso, si bien al aumentar la producción en una unidad a partir de 5 unidades el costo aumenta aproximadamente en 2000 dólares, el costo promedio por unidad adicional disminuye aproximadamente 120 dólares.

Ingreso marginal

La ecuación de demanda de un bien cualquiera, bajo determinadas condiciones, suele expresarse como una relación entre el precio p y la cantidad demandada q . Es habitual escribirla como una función $p = p(q)$ que es continua y decreciente respecto de la cantidad demandada (o simplemente demanda), q .

El *ingreso total* es también una función continua de la demanda. Se utiliza la letra R para designar al ingreso debido a la voz inglesa «revenue»; así, escribiremos al ingreso total como $R(q) = q \cdot p(q)$.

Si se aumenta la cantidad demandada y vendida, a partir de un cierto nivel de ventas, en un incremento Δq , entonces el incremento correspondiente al ingreso será ΔR y el cociente $\Delta R/\Delta q$ representará el *ingreso medio* o *tasa de cambio promedio del ingreso* correspondiente a un cambio en la demanda desde q a $q + \Delta q$.

A medida que el incremento de la demanda se hace más pequeño, es decir, cuando $\Delta q \rightarrow 0$, tendremos la derivada del ingreso con respecto a la demanda, la cual se denomina *ingreso marginal*. En símbolos, el ingreso marginal es

$$R'(q) = \frac{dR}{dq} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta q}.$$

Este valor tiene sentido matemático cuando el ingreso y la demanda varían de una manera continua, pero puede considerarse como un valor aproximado de la variación del ingreso que corresponde a un pequeño aumento en la demanda, desde un nivel determinado de la misma.

En conclusión, $\Delta R/\Delta q$ es la tasa promedio del ingreso mientras que $R'(q)$ es la tasa instantánea del ingreso o ingreso marginal.

El ingreso marginal, en este caso, es una función de q y su valor depende siempre del nivel particular de la cantidad demandada considerada.

Para el caso en que la ecuación de demanda se exprese en función del precio p , es decir, $q = q(p)$, el ingreso será una función del precio, $R(p) = p \cdot q(p)$. En tal caso,

$$R'(p) = \frac{dR}{dp} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta p}$$

es la tasa instantánea de variación del ingreso respecto del precio, pero nos referiremos a ella como ingreso marginal.

Ejemplo 1.5.3: La función de demanda de un determinado producto está dada por $p = 1000 - q^2$, donde q representa la cantidad de unidades demandadas y p el precio unitario expresado en u.m. Determine la función ingreso marginal y calcule su valor cuando el precio de venta del producto es 775 u.m. e interprete el resultado en términos económicos.

Solución. Primero, hallamos la expresión de la función ingreso $R(q) = q(1000 - q^2)$. A continuación, derivamos $R(q)$ para obtener la expresión de la función ingreso marginal.

$$R'(q) = 1000 - q^2 + q \cdot (-2q) = 1000 - 3q^2$$

La función $R'(q)$ necesita como parámetro un valor de q . Dado que $p = 775$, obtenemos q a partir de la función de demanda:

$$\begin{aligned} 775 &= 1000 - q^2 \\ -225 &= -q^2 \\ \sqrt{225} &= |q| \implies q = 15 \end{aligned}$$

pues $q > 0$.

Evaluamos para $q = 15$, obteniendo $R'(15) = 325$. Este resultado se puede interpretar de dos formas:

- Cuando el precio es 775 u.m. y se incrementa la venta en una unidad, el ingreso aumenta en 325 u.m. aproximadamente.
- Por la venta de una unidad adicional a partir de 15, el ingreso aumenta aproximadamente 325 u.m.

Ejemplo 1.5.4: El azúcar es un producto esencial en el mercado doméstico de Argentina y, últimamente, la demanda se vio comprimida por la contracción de los ingresos. No obstante, el consumo per cápita tomando el promedio de más de una década se ubica en torno a los 40 kg/per cápita/año, siendo este valor casi el doble del consumo mundial, que se encuentra en 24 kg per cápita/año (según el Centro Azucarero Argentino). La Tabla 10 muestra la cantidad de ventas totales en Argentina y el precio de venta del azúcar al inicio de los tres primeros meses de 2021.

Tabla 10

Mes y año	Precio por kg (en \$)	Demanda (en millones de kg)
Enero 2021	88	10
Febrero 2021	86	11
Marzo 2021	84	12

Formule la función de ingreso total en términos del precio, comprobando previamente que la demanda sigue un modelo lineal, y calcule la tasa de variación del ingreso para los precios del inicio de cada mes. ¿A partir de qué precio el ingreso deja de aumentar y empieza a disminuir?

Solución. La función ingreso está determinada por el producto entre el precio y la demanda. En la tabla identificamos dos unidades de referencia: el precio por kg se expresa en pesos y la cantidad vendida en millones de kg.

Para comprobar que la demanda sigue un modelo lineal, calculamos las pendientes de a dos puntos, esto es:

$$\frac{11 - 10}{86 - 88} = \frac{12 - 11}{84 - 86} = \frac{12 - 10}{84 - 88} = -\frac{1}{2}.$$

Otro procedimiento posible es elegir dos puntos cualesquiera, determinar la ecuación de la recta que pasa por ambos y comprobar luego que el tercer punto pertenece a la recta.

Dado que la ecuación de demanda es lineal, en base a la pendiente hallada previamente tenemos que el modelo de la misma es

$$q - 11 = \frac{11 - 10}{86 - 88}(p - 86) \iff q = -\frac{1}{2}p + 54.$$

A partir de función de demanda, la función de ingreso está dada, en términos del precio, por

$$R(p) = p\left(-\frac{1}{2}p + 54\right) = -\frac{1}{2}p^2 + 54p.$$

Notemos que si p se mide en pesos por kg y q en millones de kg el ingreso queda expresado en millones de pesos.

Así, $R'(p) = -p + 54$ para $p \in (0, 108)$. Evaluando esta función en los precios al inicio de cada mes, tenemos

$$R'(88) = -34, \quad R'(86) = -32, \quad R'(84) = -30,$$

lo cual nos dice que aumentando en una unidad el precio a partir de 84, 86 u 88 pesos el ingreso disminuye.

Para responder la pregunta «¿A partir de qué precio el ingreso deja de aumentar y empieza a disminuir?» conviene visualizar la gráfica de las funciones demanda e ingreso dadas en la Figura 39.

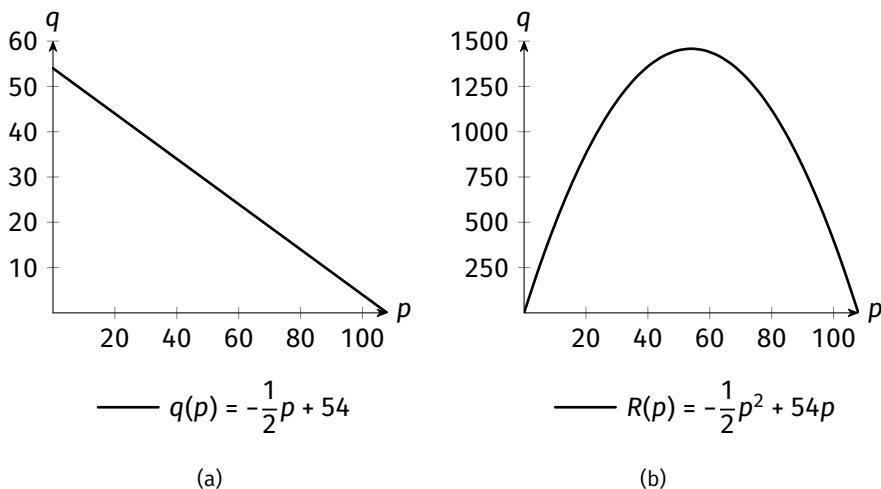


Figura 39

El dominio de ambas funciones es $0 \leq p \leq 108$. Note que la función demanda decrece en todo su dominio. Se observa que la gráfica de la función ingreso es una parábola que abre hacia abajo, por lo que alcanza el máximo valor en

el vértice, siendo este el punto (54, 1458). Así, el ingreso es máximo cuando el precio del kg es 54 pesos, y el máximo ingreso será de 1458 millones de pesos. El análisis en este caso indica que no siempre que se aumenta el precio el ingreso aumentará. De hecho, la gráfica del ingreso crece a la izquierda del máximo y decrece a su derecha.

Observemos que los valores en los que, anteriormente, calculamos $R'(p)$ corresponden a precios pertenecientes al intervalo de decrecimiento del ingreso. Si calculamos, por ejemplo, $R'(p)$ para un precio de 50, esperamos que dicho valor sea positivo, indicando un aumento del ingreso al aumentar el precio en una unidad. En efecto, $R'(50) = 4$, es decir, que el ingreso aumenta en 4 millones de pesos, aproximadamente, al aumentar el precio del kg de 50 a 51 pesos.

Utilidad marginal

La *utilidad* se define como el ingreso total menos el costo total. Considerando la función ingreso $R = R(q)$ y la función costo total $C = C(q)$, la utilidad es entonces

$$U(q) = R(q) - C(q).$$

La *utilidad marginal* será la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal, esto es,

$$\frac{dU}{dq} = \frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq}.$$

La misma significa que, para un nivel de producción q_0 , si se aumenta la producción en una unidad, la utilidad tiene una variación (positiva o negativa) de $U'(q_0)$ unidades monetarias (u.m.). En otras palabras, representa aproximadamente la variación de la utilidad cuando la producción y venta se ven afectadas en un pequeño incremento a partir de q_0 .

Ejemplo 1.5.5: El costo total de producir q artículos está dado por

$$C(q) = 0.02q^3 - 1.2q^2 + 26q$$

y se sabe que cada artículo se vende a 14 dólares. Determine la función utilidad $U = U(q)$, y exprese el significado de las cantidades:

1. $U(20)$ y $U'(20)$;
2. $U(44)$ y $U'(44)$.

Solución. La función utilidad es la diferencia de la función ingreso con la función de costo, $U(q) = R(q) - C(q)$. La función ingreso es $R(q) = 14q$ pues cada artículo se vende a 14 dólares. Luego

$$U(q) = 14q - (0.02q^3 - 1.2q^2 + 26q) = -0.02q^3 + 1.2q^2 - 12q.$$

1. Por un lado, $U(20) = 80$. Esto indica que cuando se producen y venden 20 unidades, la utilidad total es de 80 dólares.

Por otro lado, $U'(20) = 12$ significa que un incremento en la producción y venta de una unidad adicional a partir de 20 unidades aumentará la utilidad en 12 dólares, aproximadamente.

2. Se tiene que $U(44) = 91.52$, lo que indica que cuando se producen y venden 44 unidades la utilidad total es de 91.52 dólares.

Por otra parte, $U'(44) = -22.56$, lo que significa que un incremento en la producción y venta de una unidad adicional a partir de 44 unidades, disminuirá la utilidad en 22.56 dólares, aproximadamente.

La Figura 40 muestra la gráfica de la función utilidad y las rectas tangentes a la misma en $q = 20$ y $q = 44$. Obsérvense los signos de las pendientes en relación con la variación aproximada de la utilidad por unidad de variación de q a partir de estos valores.

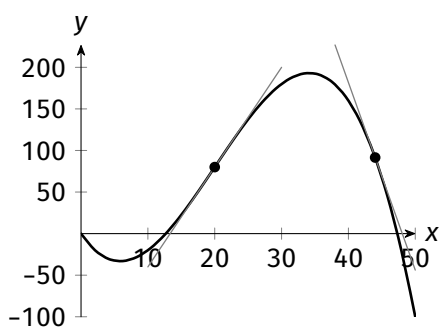


Figura 40

La utilización de tasas marginales es amplia en los negocios y en la economía. Además de las funciones marginales vistas anteriormente podemos encontrar:

- *Productividad marginal*: la función de producción hace referencia a la cantidad de bienes que se pueden producir como máximo teniendo una cantidad determinada de recursos. En la producción de cualquier bien (o servicio) las empresas necesitan trabajo, es decir, recursos humanos (trabajadores), y también capital como maquinaria y otros recursos productivos (ordenadores, vehículos, etc.). En general, la función de producción dependerá de dos variables, la cantidad de trabajo y del capital.

En economía se utiliza L para identificar a la mano de obra («labour») empleada en horas-hombre (por ejemplo, por semana) y se considera a Y

como la cantidad de producción (por ejemplo, el número total de artículos producidos por semana). La «productividad marginal de la mano de obra» viene dada por

$$Y'(L) = \frac{dY}{dL}$$

y mide la variación aproximada en la producción por unidad de mano de obra adicional.

- *Rendimiento marginal*: si se invierte una cantidad S de u.m., un inversionista obtendrá un rendimiento en la forma de ingresos Y , también en u.m., en un determinado tiempo. El «rendimiento» es una función del capital invertido, esto es, $Y = f(S)$ y

$$f'(S) = \frac{dY}{dS}$$

representa el rendimiento por unidad monetaria adicional invertido cuando se realiza un pequeño incremento en el capital.

- *Propensión marginal al consumo y al ahorro*: si $C = f(I)$ es una función de consumo, la misma expresa una relación entre el ingreso nacional total de un país, I , y el consumo nacional total, C . Estas cantidades, en general, se expresan en miles de millones de cierta unidad monetaria e I se restringe a cierto intervalo.

La diferencia entre el ingreso y el consumo es lo que se conoce como el «ahorro» S , esto es,

$$S = I - C.$$

Se dice que «la propensión marginal al consumo» es la derivada

$$\frac{dC}{dI}$$

mientras que «la propensión marginal al ahorro» corresponde a la derivada

$$\frac{dS}{dI} = 1 - \frac{dC}{dI}.$$

Observemos que esta última relación indica que la suma de ambas propensiones es 1.

Tasa de cambio relativa y porcentual

Sea $y = y(x)$ una relación funcional. Hemos definido en la Sección 1.1 a Δy como la diferencia de dos valores de la función, lo que denominamos variación absoluta. A partir de ella consideramos el cociente incremental $\Delta y / \Delta x$ como la tasa promedio de cambio de y , es decir, el cambio en promedio que sufre y en el intervalo Δx .

La derivada, al ser límite del cociente de las tasas promedio de cambio, es la medida de la tasa instantánea de cambio para algún x del dominio. Pero muchas veces esta información resulta más útil si se la compara con el propio valor de y . A esto se lo conoce como la *tasa de cambio relativa de y* , la cual se escribe como el cociente

$$\frac{y'(x)}{y(x)}.$$

Expresada como un porcentaje tenemos la **tasa de cambio porcentual**:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} \cdot 100.$$

Ejemplo 1.5.6: Suponga que un fabricante vende un determinado producto a 5 dólares la unidad. La función lineal de ingreso es $R(q) = 5q$ y su derivada, $R'(q) = 5$, es una función constante. En este caso, independientemente de la producción y venta q , el ingreso aumenta 5 dólares por unidad vendida; es decir, la variación media del ingreso coincide con la tasa de cambio instantánea, cualquiera sea el intervalo de cantidades vendidas que se considere. Veamos qué nueva información aparece al comparar la tasa de cambio $R'(q)$ con el ingreso $R(q)$ en la Tabla 11.

Tabla 11

Cantidad	Ingreso	Tasa instantánea	Tasa de cambio relativa	Tasa de cambio porcentual
5	25	5	0.2	20 %
10	50	5	0.1	10 %
20	100	5	0.05	5 %
30	150	5	0.03	3 %

Las tres primeras columnas de la Tabla 11 indican que al incrementar las cantidades vendidas, el ingreso aumenta 5 dólares por unidad adicional; las dos últimas, muestran que cuanto más grandes sean las ventas, menor es el valor que la unidad adicional agrega al ingreso. La expresión de la tasa de variación relativa $R'(q)/R(q) = 1/q$, $q > 0$, indica una relación de proporcionalidad inversa entre $R'(q)/R(q)$ y q , respondiendo al modelo $1/q$. Esta tasa tiende a 0 a medida que q tiende a $+\infty$.

Ejemplo 1.5.7: Consideremos la función lineal $y(x) = mx$, para $m \neq 0$, cuya derivada es $y'(x) = m$ y cuya tasa de cambio relativa es

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{m}{mx} = \frac{1}{x}.$$

Si $x > 0$, esta función generaliza a la función de ingreso vista en el ejemplo anterior, en la cual $m = 5$ y $q > 0$ era la variable independiente en lugar de x .

Se observa que, en general, la tasa relativa de una función lineal de la forma $y = mx$ es $1/x$ y depende de x inversamente. Esto muestra que a medida que x se hace más grande la tasa de cambio relativa disminuye puesto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$. Y si x se acerca a cero, las tasas relativas aumentan, debido a que $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x = +\infty$. Esta situación se observa en la Figura 41.

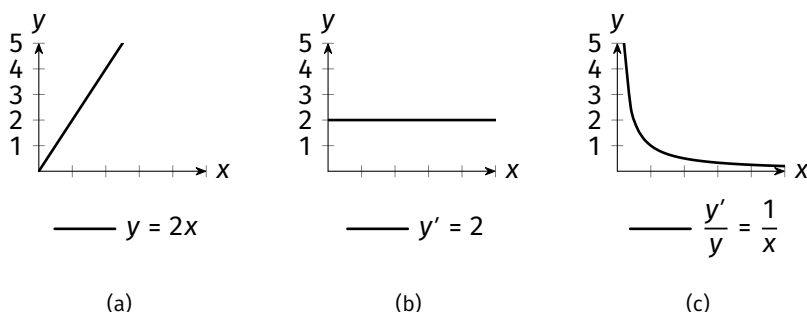


Figura 41

Por otra parte, podemos pensar en la función $y(x) = mx + b$, con $m \neq 0$, $b \neq 0$ y $x > 0$. En este caso también se tiene que $y'(x) = m$, pero ahora la tasa de variación relativa se escribe como

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{m}{mx + b} = \frac{m}{m\left(x + \frac{b}{m}\right)} = \frac{1}{x + \frac{b}{m}},$$

que también es una función de x . La tasa de variación relativa verifica que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \frac{b}{m}} = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + \frac{b}{m}} = \frac{m}{b},$$

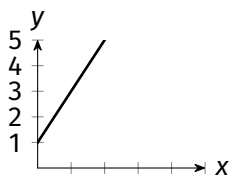
por lo que, a medida que x crece, la tasa de variación relativa disminuye, pero si x se hace cada vez más cercano a cero, ahora las tasas relativas aumentan hasta un tope, el valor $\frac{m}{b}$. Esta situación se observa en la Figura 42.

EJERCICIOS 1.5

1. Fundamente la veracidad o falsedad de cada enunciado, sabiendo que $C = C(q)$ modela el costo de producción de q artículos de una determinada empresa.

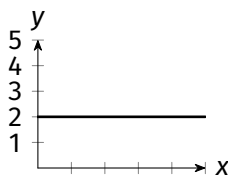
a. $C(q_0)$ representa el costo de producción de q_0 artículos.

b. $\frac{C(q_0)}{q_0}$ representa el costo promedio de q_0 unidades.



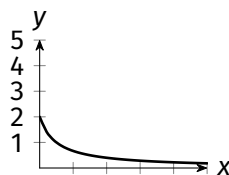
_____ $y = 2x + 1$

(a)



_____ $y' = 2$

(b)



_____ $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$

(c)

Figura 42. En el gráfico (c) tenemos $m = 2$ y $b = 1$ por lo que $\lim_{x \rightarrow 0} y' / y = 2$

- c. $C'(q_0)$ representa el costo extra aproximado por el artículo adicional cuando la producción del mismo sufre un incremento unitario a partir de q_0 .
 - d. $\frac{C(q_1) - C(q_0)}{q_1 - q_0}$, $q_1 > q_0$, representa el costo promedio por unidad en el intervalo de producción $[q_0, q_1]$.
2. Un comerciante desea conocer cómo el precio de cierto producto afecta a sus ventas. Supongamos que al precio p , en dólares, se vende una cantidad q de las unidades del producto. Si $q = f(p)$, explique el significado de cada una de las siguientes expresiones:
 - a. $f(100) = 2100$.
 - b. $f'(100) = 10$.
 - c. $f(150) = 2000$.
 - d. $f'(150) = -25$.
 3. Elabore un modelo económico que se ajuste a la información suministrada en el enunciado y, de acuerdo con este modelo, responda la pregunta planteada.

Quien vende un cierto producto observa que, si el precio de la unidad es de 1500 pesos, el ingreso por ventas aumenta ante un aumento «relativamente pequeño» del precio. Sin embargo, cuando ha fijado el precio unitario en 2000 pesos, los ingresos por ventas disminuyen ante un aumento en el precio, «por más pequeño que este sea». Se pregunta: ¿hasta dónde será posible aumentar el precio del producto sin resentir el ingreso?

4. Sea $R = R(q)$ la función que representa el ingreso, en miles de pesos, que tiene una empresa por vender q unidades de un producto.

- a. ¿Cuál es el significado económico del ingreso marginal? ¿Cuáles son sus unidades?
 - b. Interprete en términos económicos el significado de $R'(20) = 10$ y de $R'(20) = -10$.
 - c. ¿El ingreso marginal es siempre una función creciente? Justifique la respuesta.
5. La función $C(q) = 0.48q + \frac{120\,000}{q} + 1500$, con $q > 0$, representa el costo total en u.m. para producir q unidades de cierto producto. Determine:
- a. La tasa de cambio promedio si la producción aumenta de 400 a 500 unidades. Interprete el resultado en el contexto del problema.
 - b. Para $q = 400$ halle el costo marginal y dé su significado geométrico y económico.
 - c. Determine la función de costo promedio y analice su comportamiento cuando la cantidad de unidades producidas crece sin límite.
 - d. Utilice [GeoGebra](#) y grafique las funciones de costo y de costo marginal. Compare y redacte una conclusión económica.
6. Una empresa de embutidos ha acordado con una cadena de supermercados vender el jamón que produce. Dependiendo de las cantidades demandadas, el precio por kg variará linealmente de acuerdo con las condiciones de la Tabla 12.

Tabla 12

Cantidad demandada (en kg)	Precio (en \$/kg)
230	70
500	55

- a. Determine la función de ingreso total $R = R(q)$. ¿Cuánto varía en promedio el ingreso por kg cuando la demanda aumenta de 100 a 300 kg?
- b. Determine la variación aproximada del ingreso cuando se vende 1 kg más de jamón a partir de 400 kg.
- c. A un precio por kg de \$80 el fabricante evalúa la posibilidad de aumentarlo \$1. Use el análisis marginal para analizar la conveniencia de esta decisión.
- d. Utilice [GeoGebra](#) y grafique la función de ingreso total junto con la función de ingreso marginal. Compare y redacte una conclusión en términos económicos.

7. El costo semanal en dólares de producir un determinado producto está dado por la función de costos totales $C(q) = 100 + 12q - 0.1q^2 + 0.005q^3$. Dicho producto se vende a 20 dólares.
- Determine la función de costo marginal. Evalúe en un valor de su elección y explique su significado.
 - Determine la función utilidad y la función utilidad marginal.
 - ¿En qué rango se debe variar la producción para evitar pérdidas?
 - Halle la relación que existe entre el costo marginal y el ingreso marginal cuando la utilidad marginal es nula.

Grafique en [GeoGebra](#) todas las funciones e interprete económicamente dichos gráficos.

8. Si $p(q) = 100 - q^2$ es la función de demanda del producto de un fabricante, donde p se mide en dólares y q en cientos de unidades, calcule y exprese el significado en términos económicos de las cantidades.

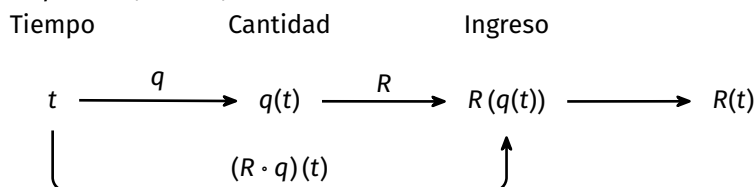
- $p'(5)$ y $p'(9)$
- $\frac{p'(5)}{p(5)} \cdot 100$ y $\frac{p'(9)}{p(9)} \cdot 100$.

9. El ingreso semanal de un fabricante de un determinado producto está dado por $R(q) = 50q$, expresado en miles de dólares, y se sabe que su producción semanal es a lo sumo de 25 unidades de su producto. Grafique en [GeoGebra](#) las funciones de ingreso, de ingreso marginal y de tasa relativa del ingreso. Compruebe que para este tipo de función de ingreso la tasa relativa del ingreso depende de la cantidad de unidades que vende y no del precio de venta.
10. El costo total mensual de un fabricante de un determinado producto está dado por $C(q) = 2q + 20$, expresado en miles de dólares. Se sabe además que su producción mensual es a lo sumo de 100 unidades de producto. Grafique las funciones de costo, costo marginal y la tasa relativa del costo. Constate que, en este caso, la tasa relativa del costo depende de la cantidad de unidades que el fabricante vende, de los costos fijos y de los costos variables.
11. Para cierto fabricante el ingreso diario (en dólares) obtenido al vender q unidades de un producto está dado por $R(q) = 60q - 0.6q^2$.
- ¿Qué tan rápido cambia diariamente el ingreso cuando se venden diez unidades?
 - Halle la tasa de cambio relativa y la porcentual del ingreso al vender diez unidades.

- c. Interprete en términos económicos los resultados obtenidos en el ítem anterior.
- d. Utilice [GeoGebra](#) para graficar la función ingreso y la función ingreso marginal. Interprete gráficamente.
12. La función de costo total de un fabricante está dada por $C(q) = \frac{6q^2}{q+2} + 100$, donde C se expresa en cientos de dólares y q en miles de unidades.
- A un nivel de producción de 2000 unidades, ¿cuál es el costo promedio de cada unidad?
 - Calcule el incremento promedio del costo por unidad cuando la producción aumenta de 2000 a 5000 unidades.
 - Determine el aumento aproximado en el costo cuando la producción varía de 2000 a 3000.
 - Halle la tasa de cambio relativa y la porcentual del costo al producir 2000 unidades. Interprete en términos económicos.
13. Dada la función de costo $C = C(q)$, compruebe que si el costo promedio marginal es cero (esto es, $\frac{d\bar{C}}{dq} = 0$), entonces la función de costo marginal es igual a la función de costo promedio.

REGLA DE LA CADENA Y TASAS RELACIONADAS

Frecuentemente se presentan situaciones donde una variable se relaciona con otra en «forma de cadena». Por ejemplo, en economía, el ingreso total depende de la cantidad vendida pero, a su vez, la cantidad vendida depende del tiempo (días, meses, etc.).



En matemática, la función $y = \sqrt{2x^3 + 4}$ es un ejemplo de una «combinación» de dos funciones elementales, la raíz cuadrada y el binomio de tercer grado, $2x^3 + 4$. Para hallar la derivada de este tipo de funciones no es suficiente con aplicar las reglas que hasta ahora conocemos porque esta función no puede

reducirse a una suma, diferencia, producto o cociente de funciones. Para ello, introduciremos un método conveniente.

En términos generales, consideremos que y depende de u y que, a su vez, u depende de x , lo cual se expresa como $y = y(u)$ y $u = u(x)$. Así, y depende indirectamente de x a través de la función u . Estamos en presencia de la composición de dos funciones, y y u , lo cual se escribe como $y(x) = (y \circ u)(x) = y(u(x))$, con restricciones de dominio adecuadas.

A continuación vamos a analizar cómo se determina la derivada de una función compuesta. Daremos el siguiente teorema sin demostración.

Teorema 1.6.1 (Regla de la cadena): Si $y = y(u)$ y $u = u(x)$ son ambas funciones derivables, entonces la derivada de y con respecto a x existe y es igual al producto de la derivada de y con respecto a u por la derivada de u con respecto a x . En símbolos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

De otra forma, si y es tal que $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ con g derivable en x y f derivable en $g(x)$, entonces

$$\frac{d}{dx}(f \circ g) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esto es, si existen dy/du y du/dx también existe dy/dx en el dominio correspondiente, y se obtiene como el producto de las dos derivadas anteriores.

Si x cambia en una unidad, ¿cómo cambia u ? Para responder esta pregunta se deriva y se obtiene du/dx . Pero cada cambio de una unidad en u implica un cambio en y es decir, dy/du . Entonces ¿cuál es el cambio en y si x cambia en una unidad? Está claro que este cambio depende tanto del cambio de u respecto a x así como del cambio de y respecto a u . Esta relación es lo que se evidencia en el teorema previo: el cambio en y respecto de x es el producto de los cambios dy/du y du/dx .

Esta regla nos permite derivar funciones más complejas y por ello es necesario identificar que la función dada se puede escribir como la composición de funciones más simples y aplicar las reglas de derivación para estas funciones. Los siguientes ejemplos ilustran lo anterior.

Ejemplo 1.6.1: Calcule la derivada de la función

$$y = (x^2 + 3x + 5)^{10}.$$

Solución. La función $y = (x^2 + 3x + 5)^{10}$ resulta de componer dos funciones:

$$y(u) = u^{10} \quad \text{y} \quad u(x) = x^2 + 3x + 5.$$

Las derivadas de cada una existen y son

$$\frac{dy}{du} = 10u^9 \quad y \quad \frac{du}{dx} = 2x + 3.$$

Aplicando regla de la cadena con $u = x^2 + 3x + 5$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 10u^9 \cdot (2x + 3) \\ &= 10(x^2 + 3x + 5)^9(2x + 3),\end{aligned}$$

que es lo que queríamos encontrar.

Ejemplo 1.6.2: Calcule la derivada de la función

$$y = \sqrt{x^3 + x}.$$

Solución. Identificamos las funciones que se han compuesto: $y(u) = \sqrt{u}$ y $u(x) = x^3 + x$. Las derivadas de cada una de ellas respecto de la variable independiente son:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad y \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 + 1.$$

Luego, de la regla de la cadena con $u = x^3 + x$ resulta que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (3x^2 + 1) \\ &= \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}},\end{aligned}$$

que es la derivada buscada.

Ejemplo 1.6.3: Calcule la derivada de la función

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Solución. La función $y = \sqrt{2}/\sqrt{x^2 + 1}$ se puede reescribir como el producto $y = \sqrt{2}(x^2 + 1)^{-1/2}$. Observamos que la expresión $\sqrt{2}(x^2 + 1)^{-1/2}$ es el resultado de componer $y(u) = \sqrt{2}u^{-1/2}$ con $u(x) = x^2 + 1$, cuyas derivadas son

$$\frac{dy}{du} = -\frac{\sqrt{2}}{2}u^{-3/2}, \quad y \quad \frac{du}{dx} = 2x.$$

Usando la regla de la cadena con $u = x^2 + 1$ se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} u^{-3/2} \cdot 2x \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (x^2 + 1)^{-3/2} \cdot (2x) \\ &= \frac{-\sqrt{2}x}{(x^2 + 1)^{3/2}},\end{aligned}$$

que es lo que se pedía encontrar.

Los ejemplos que siguen muestran cómo proceder para derivar funciones donde tenemos que combinar las reglas vistas hasta el momento, derivada de un producto, de un cociente y regla de la cadena.

Ejemplo 1.6.4: Calcule dy/dx para

$$y = (x^4 + 5x^2)(4x + 3)^3.$$

Solución. En primer lugar, analicemos la expresión de la función observando sus operaciones. La función $y = (x^4 + 5x^2)(4x + 3)^3$ está conformada sobre la base de una operación principal que es el producto de dos funciones, f y g , donde $f(x) = x^4 + 5x^2$ y $g(x) = (4x + 3)^3$, por lo que comenzamos aplicando la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d(f \cdot g)}{dx} \\ &= \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}(x^4 + 5x^2) \cdot (4x + 3)^3 + (x^4 + 5x^2) \cdot \frac{d}{dx}(4x + 3)^3.\end{aligned}$$

Ahora determinamos la derivada de f aplicando la derivada de la suma y de la potencia

$$\frac{df}{dx} = 4x^3 + 10x.$$

Para la derivada de g usamos la regla de la cadena. Así, a $g(x) = (4x + 3)^3$ la escribimos como $g(u) = u^3$ donde $u(x) = 4x + 3$, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx} &= \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3u^2 \cdot 4 \\ &= 3(4x + 3)^2 \cdot 4 \\ &= 12(4x + 3)^2.\end{aligned}$$

De acuerdo con todo lo anterior tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 10x)(4x + 3)^3 + (x^4 + 5x^2)12(4x + 3)^2.$$

Uno podría detenerse aquí o reescribir la expresión de otra forma. Por ejemplo, se obtendría

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x(4x + 3)^2 [(2x^2 + 5)(4x + 3) + 6(x^3 + 5x)] \\ &= 2x(4x + 3)^2 (14x^3 + 6x^2 + 50x + 15)\end{aligned}$$

sacando factor común $2x(4x + 3)^2$.

Ejemplo 1.6.5: Calcule dy/dx para

$$y = (2x + 1)\sqrt{x^2 + x}.$$

Solución. Esta función está conformada por el producto de las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + x}$. Aplicamos la regla del producto para obtener

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(f \cdot g) \\ &= \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx} \\ &= 2\sqrt{x^2 + x} + (2x + 1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + x}).\end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena para g queda:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{(2x + 1)^2}{2\sqrt{x^2 + x}},$$

que es lo que queríamos encontrar.

Ejemplo 1.6.6: Calcule dy/dx para

$$y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Solución. La función $y = 2x/\sqrt{x^2 + 1}$ consiste en un cociente de dos funciones, $f(x) = 2x$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Aplicaremos la regla del cociente para calcular su derivada:

$$\begin{aligned}\frac{d(f/g)}{dx} &= \frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - 2x \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}.\end{aligned}$$

Nuevamente necesitaremos usar la regla de la cadena para la derivada de g :

$$\frac{dg}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}},$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= 2(x^2 + 1)^{-1/2} - 2x^2(x^2 + 1)^{-3/2},\end{aligned}$$

que es lo que queríamos encontrar.

En los ejemplos siguientes veremos aplicaciones donde existe alguna relación entre dos o más derivadas, por lo que se habla de *tasas relacionadas*. Este concepto nos va a permitir encontrar la razón a la que alguna cantidad está cambiando conociendo las tasas de variación de otras cantidades con las cuales la primera está relacionada, directa o indirectamente.

Sea $y = f(x)$ y supongamos que x varía en función del tiempo t , entonces y también variará en términos del tiempo t . Sean, entonces, $y = f(x)$, $x = x(t)$ y supongamos que las derivadas df/dx y dx/dt existen en un dominio apropiado para la composición. Por la regla de la cadena sabemos que podemos hallar la variación instantánea de y con respecto a t de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Observación 13: En ocasiones, usaremos la notación

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \quad \text{para indicar la evaluación} \quad \frac{dy}{dx}(a),$$

y evitaremos usar $y'(a)$ cuando estemos trabajando con la regla de la cadena para evitar ambigüedades respecto a qué variable se está derivando y a qué variable corresponde el valor a en que se evalúa la derivada.

Ejemplo 1.6.7 (Tasas relacionadas con incremento relativo y absoluto): La función de costo mensual de un fabricante es

$$C(q) = 4000 + 20q - 0.2q^2 + 0.004q^3,$$

medida en dólares cuando se producen q artículos. Se conoce que la producción crece mensualmente a una tasa variable dependiendo del nivel de producción q . Calcule la tasa de variación mensual del costo en cada una de las situaciones planteadas.

1. Cuando se producen 50 unidades y la producción está creciendo a una tasa del 2 % mensual.
2. Cuando se fabrican 10 unidades y la producción está decreciendo a una tasa del 5 % mensual.
3. Cuando se fabrican 50 unidades y la producción se incrementa en dos unidades cada mes.
4. Cuando se fabrican 80 unidades y la producción está decreciendo en tres unidades cada mes.

Solución. Dado que el objetivo es «calcular la tasa de variación mensual del costo», debemos estudiar como cambia la función costo respecto al tiempo, es decir

$$\frac{dC(t)}{dt},$$

teniendo en cuenta que los costos dependen de la cantidad de artículos producidos mensualmente, es decir, $C = C(q)$, pero que, a su vez, la producción depende del tiempo en meses, esto es, $q = q(t)$ con t medido en meses. Con estos datos, y a partir de la regla de la cadena, esta derivada se calcula como sigue:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{dC(q(t))}{dt} = \frac{dC}{dq} \cdot \frac{dq}{dt},$$

donde

$$\frac{dC}{dq} = 20 - 0.4q + 0.012q^2.$$

Notemos que dC/dq se expresa en dólares por unidad y dq/dt en unidades por mes. Por tanto, dC/dt queda expresado en dólares por mes.

1. Si $q = 50$, $dC/dq(50) = 30$, y como la producción crece a una *tasa relativa* del 2 % mensual a ese nivel de producción, esto se interpreta como

$$\frac{\frac{dq}{dt}}{q} = 0.02 \implies \frac{dq}{dt} = 0.02q.$$

Así,

$$\frac{dC}{dt} = \left. \frac{dC}{dq} \right|_{q=50} \cdot \frac{dq}{dt} = 30 \cdot (0.02 \cdot 50) = 30.$$

Por lo tanto, en un nivel de producción de 50 artículos mensuales, el costo crece en 30 dólares por mes, aproximadamente, cuando la producción está creciendo a una tasa del 2 % mensual.

2. Si $q = 10$, $dC/dq(10) = 17.2$, y como la producción decrece a una *tasa relativa* del 5 % mensual a ese nivel de producción, interpretamos

$$\frac{\frac{dq}{dt}}{q} = -0.05 \implies \frac{dq}{dt} = -0.05q.$$

En consecuencia,

$$\frac{dC}{dt} = \left. \frac{dC}{dq} \right|_{q=10} \cdot \frac{dq}{dt} = 17.2 \cdot (-0.05 \cdot 10) = -8.6,$$

por lo que, en un nivel de producción de 10 artículos mensuales, el costo por artículo adicional decrece en 8.6 dólares por mes, aproximadamente, cuando la producción está decreciendo a una tasa del 5 % mensual.

3. Nuevamente, si $q = 50$, $dC/dq(50) = 30$, y como la producción crece a una *tasa absoluta* de dos unidades mensuales a ese nivel de producción, se establece que

$$\frac{dq}{dt} = 2.$$

Por tanto,

$$\frac{dC}{dt} = \left. \frac{dC}{dq} \right|_{q=50} \cdot \frac{dq}{dt} = 30 \cdot 2 = 60.$$

Luego, en un nivel de producción de 50 artículos mensuales, el costo crece en 60 dólares por mes, aproximadamente, cuando el número de unidades se incrementa en dos unidades mensualmente.

4. Si $q = 80$, $dC/dq(80) = 64.8$, y dado que la producción decrece a una *tasa absoluta* de tres unidades mensuales a ese nivel de producción, será

$$\frac{dq}{dt} = -3.$$

Así,

$$\frac{dC}{dt} = \left. \frac{dC}{dq} \right|_{q=80} \cdot \frac{dq}{dt} = 64.8 \cdot (-3) = -194.4.$$

Por tanto, en un nivel de producción de 80 artículos mensuales, el costo decrece en 194.4 dólares por mes, aproximadamente, cuando el número de unidades se reduce en tres unidades mensualmente.

EJERCICIOS 1.6

1. Obtenga la derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } y = (4x^2 + 4x + 5)^{25}. & \text{b. } y = \sqrt{4x^2 + 3}. \\ \text{c. } y = (3x + 6)^4 (10x^3 - 4x)^{10}. & \text{d. } y = \frac{3x+1}{4x+10}. \end{array}$$

2. Considere las siguientes funciones:

$$\text{a. } y = (3x + 6)^4. \quad \text{b. } y = x^4 (x^4 - 1)^5. \quad \text{c. } y = 2\sqrt[3]{7x}.$$

Mediante [GeoGebra](#) obtenga su gráfica y la de su derivada. Seleccione tres puntos: uno donde $y' > 0$, otro donde $y' = 0$ y otro tal que $y' < 0$, siempre que sea posible. Grafique la recta tangente en cada uno de esos puntos y relacione el signo de la derivada con el comportamiento de la función.

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a las curvas siguientes en el punto dado. Grafique la curva, su derivada y la recta tangente utilizando [GeoGebra](#).

$$\begin{array}{ll} \text{a. } y = (x + 3)^3 \text{ en } (-1, 8). & \text{b. } y = \sqrt{x + 2} \text{ en } (7, 3). \\ \text{c. } y = \frac{2x + 4}{(1 - x)^2} \text{ en } (0, 4). & \end{array}$$

4. Determine la tasa de cambio porcentual de y con respecto a x para los valores dados de x . Interprete.

$$\begin{array}{l} \text{a. } y = (2x + 1)^2 \text{ en } x = -2, x = 0 \text{ y } x = 2. \\ \text{b. } y = \frac{1}{(x^2 - 1)^3} \text{ en } x = 2 \text{ y en } x = 10. \end{array}$$

5. Suponga que $p(q) = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$ es la función que modela la demanda de un determinado producto de un fabricante.

- Analice el signo de $\frac{dp}{dq}$ en su dominio. Interprete en el contexto económico.
- Calcule la tasa de cambio porcentual para algunos valores de q . Interprete cada uno de ellos.
- Halle la función de ingreso marginal. Evalúe para $q = 10$ y $q = 60$. Interprete ambos resultados.

6. La función de costo de un fabricante está dada por

$$C(q) = 4000 + 20q - 0.2q^2 + 0.004q^3$$

en miles de dólares.

Si el nivel de producción actual es de 100 unidades y la misma está creciendo a una tasa de 3 al mes, calcule la tasa mensual de los costos de producción. Interprete en términos económicos.

7. La función de costo para un fabricante, en miles de dólares, es

$$C(q) = 1000 + 5q - 0.05q^2 + 0.001q^3,$$

y la función ingreso está dada por

$$R(q) = 32.5q - 0.025q^2,$$

también en miles de dólares, donde q representa las unidades producidas y vendidas. Si el nivel de producción actual es de 100 unidades y está creciendo a una tasa de 2 unidades al mes, calcule la tasa a la que está creciendo el ingreso mensualmente. ¿La utilidad aumenta o disminuye mensualmente? ¿A qué tasa?

8. La ecuación de demanda del producto de un fabricante es $pq + 2p - 50q = 0$ en donde q unidades pueden venderse a un precio p , en dólares, cada una. Si la demanda crece a una tasa de 4 unidades por semestre cuando la demanda alcanzada es de 10 unidades, calcule a qué tasa semestral está cambiando el ingreso si el fabricante ajusta su precio a esa demanda cambiante.

9. Una empresa fabrica localizador con un costo fijo mensual de 20 000 dólares, y con un costo variable por la fabricación de q localizadores dado por

$$V(q) = 0.000\,001q^3 - 0.01q^2 + 50q,$$

en dólares. La empresa obtiene un ingreso $R(q) = 0.02q^2 + 150q$ por la venta de q localizadores por semana, donde $0 \leq q \leq 7500$ dólares. La producción de esta empresa se ajusta al tamaño de los pedidos que vende por mes. Si en un determinado mes se sabe que la demanda del producto fue de 2500 localizadores y la misma está creciendo a razón de 50 unidades por mes, ¿a qué tasa están aumentando las ganancias de la empresa?

10. Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades de cierto artículo por día, donde $q(m) = 4m(m + 1)^{3/2}$. La función de ingreso total por la producción y venta de q artículos diarios está dada por

$$R(q) = \frac{50q}{\sqrt{1000 + 3q}},$$

expresada en miles de dólares.

- Halle el ingreso total R cuando hay 12 empleados y el precio por unidad (al centavo más cercano).
- Halle el ingreso marginal para 12 empleados. Interprete el resultado en términos económicos.

- c. Si llamamos *producto del ingreso marginal* a $\frac{dR}{dm}$, determine este producto cuando el número de empleados es 12. Interprete el resultado en términos económicos.

PROCEDIMIENTOS ADICIONALES DE DERIVACIÓN

En esta sección desarrollaremos nuevas reglas para derivar funciones cuyas expresiones contienen logaritmos y formas exponenciales de la variable. Además, estudiaremos dos procedimientos: uno para hallar la derivada cuando la función está dada en forma implícita, y otro para derivar expresiones funcionales donde la variable independiente aparece tanto en la base como en el exponente. También enunciaremos la propiedad para las derivadas de funciones inversas.

Derivada de la función logarítmica

La derivación logarítmica es una herramienta matemática poderosa que simplifica el proceso de derivar funciones complejas, especialmente aquellas que involucran productos, cocientes o potencias. Este método es particularmente útil en situaciones donde la función original es «difícil de manejar» mediante técnicas de derivación convencionales. En esta sección, exploraremos cómo y cuándo utilizar la derivación logarítmica, destacando su aplicación en la resolución de problemas que aparecen en economía.

Sea $y = f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$ y $a \neq 1$, para $x > 0$. Hallaremos a continuación la derivada de esta función por definición.

Para cada $x > 0$ y $\Delta x \neq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= \log_a(x + \Delta x) - \log_a x\end{aligned}$$

y, dado que $\log_a(A) - \log_a(B) = \log_a(A/B)$, tenemos

$$\begin{aligned}\Delta y &= \log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) \\ &= \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).\end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro por Δx , y multiplicando y dividiendo el lado

derecho de la última igualdad por x , obtenemos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

y, dado que $B \log_a(A) = \log_a(A^B)$, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right].$$

Se sabe por el Ejemplo 1.2.55 de página 90 (con x y c reemplazados por Δx y x , respectivamente) que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e.$$

Luego, podemos aplicar el límite para Δx tendiendo a cero al cociente incremental planteado y operar utilizando propiedades de límites, junto con el resultado anterior para deducir que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] \right)$$

y, dado que $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] \end{aligned}$$

pues $\log_a(x)$ es continua en $x = e$. Luego

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a(e).$$

Recordando que $\log_a(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}$ (por la propiedad de cambio de base), el límite anteriormente obtenido puede escribirse como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln(a)}$$

Por tanto, la derivada de $y = \log_a(x)$ existe para todo $x > 0$ y es

$$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

En particular, cuando $a = e$ se tiene que para $y = \ln(x)$ su derivada es $y' = 1/x$.

Hemos probado así el siguiente resultado.

Teorema 1.7.1: Para cada $a > 0$, $a \neq 1$, y todo $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

Para el caso especial del logaritmo de base e se tiene

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

Observación 14: Si $u = u(x)$ por la regla de la cadena se deduce:

$$\frac{d}{dx}(\log_a(u)) = \frac{1}{u \ln(a)} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Para el caso especial del logaritmo de base e se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\ln(u)) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Ejemplo 1.7.1: Halle la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \ln(x)$ para

1. $x = 0.5$.

2. $x = e$.

3. $x = k$, $k > 0$.

Solución. En primer lugar recordamos que la ecuación de la recta tangente está dada por $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta que coincide con el valor de la derivada de la función en el valor de x dado. Para $y(x) = \ln(x)$ sabemos que dicha pendiente será $y'(x) = 1/x$.

1. Para $x = 0.5$ tenemos que $y'(0.5) = 2$, de modo que la ecuación de la recta tangente es $y = 2x + b$. Como $y(0.5) = \ln(0.5)$ será $b = \ln(0.5) - 1$. Entonces la recta tangente a la curva en el punto $(0.5, \ln(0.5))$ tiene ecuación

$$y = 2x + \ln(0.5) - 1.$$

2. Para $x = e$ se tiene $y(e) = \ln(e) = 1$ e $y'(e) = 1/e$, por lo que la ecuación de la recta tangente es de la forma $y = \frac{1}{e}x + b$, con $b = 0$. Esto es, la recta tangente en $(e, 1)$ es

$$y = \frac{1}{e}x.$$

3. Para $x = k$, $k > 0$, tenemos que $y(k) = \ln(k)$ e $y'(k) = 1/k$. Se sigue de ello que la ecuación de la recta tangente se escribe como $y = \frac{1}{k}x + b$, siendo $b = \ln(k) - 1$. Es decir,

$$y = \frac{1}{k}x + \ln(k) - 1.$$

Ejemplo 1.7.2: Pruebe que la derivada de la función $y = \ln|x|$ es igual a $1/x$, para cualquier valor de x real distinto de cero.

Solución. En primer lugar observamos que el dominio de la función es el conjunto de los reales excepto el cero, por lo cual tiene sentido estudiar la derivada en tales valores. Vamos a considerar dos casos: $x > 0$ y $x < 0$.

CASO 1 Si $x > 0$ se tiene que $|x| = x$, por lo que $\ln |x| = \ln(x)$ y así, por el Teorema 1.7.1 es

$$y'(x) = \frac{1}{x}.$$

CASO 2 Cuando $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$, de donde $\ln |x| = \ln(-x)$. Es importante notar que $-x > 0$ por lo que $\ln(-x)$ está bien definido. Para derivar aplicamos la regla de la cadena para $x < 0$ y el Teorema 1.7.1:

$$y'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

De este modo, para todos los valores no nulos de x se verifica la igualdad

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}.$$

En la Figura 43 observamos que para $x > 0$ la derivada de $y = \ln |x|$ es positiva, que es donde la función es creciente, mientras que para $x < 0$ la derivada es negativa, y allí la función es decreciente.

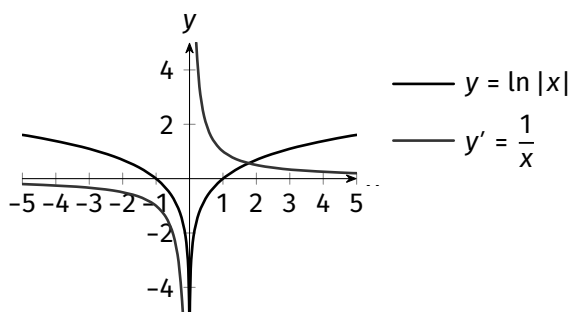


Figura 43. Función $y = \ln |x|$ y su derivada.

Ejemplo 1.7.3: Veamos dos formas distintas de hallar la derivada de la función $y = \ln(\sqrt{x})$.

En un primer procedimiento utilizaremos propiedades de logaritmos. Esto se debe a que la función $y = \ln(\sqrt{x})$ se reescribe como $y = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln(x)$, de donde se tiene que su derivada es

$$y' = \frac{1}{2x}.$$

Un segundo procedimiento consiste en derivar la función compuesta. Así, considerando $y = \ln(u)$ y $u = \sqrt{x}$, y aplicando regla de la cadena, llegamos al mismo resultado

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2x}.$$

Los dos procedimientos son válidos. No obstante, vemos que la aplicación de propiedades de logaritmos facilita la obtención de la derivada.

Ejemplo 1.7.4: Verifique que $y = \ln(x + e)$ satisface la relación $dy/dx = e^{-y}$.

Solución. La consigna nos solicita comprobar la igualdad $dy/dx = e^{-y}$, para lo cual desarrollaremos cada miembro de la igualdad por separado hasta lograr una expresión simple, de modo que resulte obvia la igualdad de ambas expresiones.

Comenzamos por derivar $y = \ln(x + e)$ aplicando la regla de la cadena para $y = \ln(u)$, siendo $u = x + e$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{x + e}.$$

Por otro lado, sustituimos y en el lado derecho de la igualdad a probar y operamos algebraicamente usando la relación entre exponenciales y logaritmos de igual base:

$$e^{-y} = e^{-\ln(x+e)} = e^{\ln(x+e)^{-1}} = (x + e)^{-1} = \frac{1}{x + e}.$$

Las expresiones finales son iguales, por lo que podemos afirmar que la función $y = \ln(x + e)$ satisface a la igualdad $dy/dx = e^{-y}$.

EJERCICIOS 1.7.1

- Para las siguientes funciones halle la ecuación de la recta tangente en los puntos indicados. Utilice [GeoGebra](#) para graficar la función, su derivada y la recta tangente encontrada. En todos los casos escriba un párrafo interpretando la situación visualizada.
 - $y = 3 \ln(x)$ en $x = e$.
 - $y = \sqrt{\ln(x)}$ en $x = 2$.
 - $y = x \ln(x)$ en $x = 1$.
- Considere la función $y = x \ln(x)$.
 - Compruebe que $y' = 0$ si y solo si $x = e^{-1}$.

- b. Explícite la ecuación de la recta tangente en $x = e^{-1}$.
 - c. Analice el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de este punto relacionándolo con el comportamiento de la función.
 - d. Utilice [GeoGebra](#) para visualizar la situación gráficamente.
- 3. La función de demanda semanal de cierto artículo es $q(p) = 200 \ln(25 - p^2)$, donde p se mide en dólares y q en miles de unidades.
 - a. Determine el dominio de la función en el contexto económico.
 - b. Encuentre la cantidad demandada si el precio del artículo es de dos dólares.
 - c. Halle el signo de $\frac{dq}{dp}$ y dé su interpretación.
 - d. Interprete el resultado de $\frac{dq}{dp}$ en $p = 2$.
 - e. Determine la función de ingreso $R = R(p)$ y $R'(p)$.
 - f. Calcule la tasa de cambio semanal del ingreso cuando el precio del artículo es de dos dólares y está aumentando a razón de 0.2 % por semana.
- 4. Los ingresos semanales R , en cientos de pesos, de una compañía cosmética se relacionan con la cantidad q de una cierta crema antiedad, que actualmente se está publicitando, mediante la función $R(q) = q \ln(q^2 + 2)$. Además, se ha ajustado la dependencia de las ventas respecto del tiempo del anuncio publicitario, en días, de acuerdo con el siguiente modelo: $q(t) = -t^2 + 40t$. Determine la tasa de cambio del ingreso respecto del tiempo después de una semana de publicidad.
- 5. La función de costo promedio semanal de un fabricante está dada por

$$\bar{C}(q) = \frac{400}{\ln(q + 20)},$$

donde q es el número de unidades producidas, y C se mide en cientos de pesos. Encuentre el costo marginal del fabricante cuando fabrica 20 unidades de su producto por semana.

- 6. Una función de costos utilizada en economía y negocios es la *función de costos logarítmica* dada por $C(q) = a + b \ln q$, donde $C(q)$ es el costo total de producir q unidades, a son los costos fijos y b es el costo variable por unidad de producción.
 - a. Compruebe que esta función de costos refleja la idea de que la reducción de costos por el aumento de producción no es constante, sino que disminuye a medida que aumenta la producción.

- b. ¿La afirmación anterior significa que el costo marginal, o el costo adicional de producir una unidad más de producción, es inversamente proporcional al nivel de producción?
- c. La afirmación «Cuanto más se produce menos cuesta producir cada unidad adicional», ¿es verdadera?
- d. La afirmación siguiente, ¿es cierta?: «Una función de costos logarítmica implica que el costo marginal de producción aumenta a medida que aumenta la producción».
- e. Las *economías de escala* ocurren cuando el costo promedio de producción disminuye a medida que aumenta la producción. ¿Podría la función de costos logarítmica modelar este tipo de economía?

Derivación implícita

Hasta ahora hemos trabajado con funciones cuya expresión analítica se puede escribir como $y = f(x)$ y, en este caso, decimos que la función está dada en forma «explícita». Sin embargo, x e y pueden encontrarse ligadas por una ecuación del tipo $F(x, y) = 0$. Si la función $y = f(x)$ definida en cierto dominio es tal que al sustituirla en $F(x, y) = 0$ se convierte en una identidad respecto a x , entonces la función $y = f(x)$ recibe el nombre de «función implícita» dada por $F(x, y) = 0$.

Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

determina implícitamente dos funciones elementales:

$$y_1 = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad y_2 = -\sqrt{9 - x^2}.$$

En efecto, al sustituir cada expresión en $F(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$, la convertimos en una identidad pues $y_1^2 = y_2^2 = 9 - x^2$ y se tiene que

$$x^2 + (9 - x^2) - 9 = 0.$$

Las expresiones de arriba se han obtenido mediante la resolución de $x^2 + y^2 - 9 = 0$ respecto de y . Sin embargo, no siempre es posible hallar la forma explícita de una función dada en forma implícita en términos de funciones elementales, o bien puede hacerse pero requiere conocer técnicas más avanzadas para hacerlo. Por ejemplo, en la ecuación $y + e^y - x = 0$ no se puede despejar y en términos exclusivamente de x .

Veremos ahora cómo se obtiene la derivada de expresiones dadas en forma implícita, donde el objetivo es determinar y' o dy/dx sabiendo que y es una función de x . Ilustraremos este método tomando como ejemplo la curva implícita dada arriba, $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Para ello, derivamos a ambos miembros con respecto a x :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 9) &= \frac{d}{dx}(0) \\ \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(9) &= 0 \\ 2x + \frac{d}{dy}(y^2) \cdot \frac{dy}{dx} - 0 &= 0 \\ 2x + 2y \cdot y' &= 0\end{aligned}$$

Notemos que hemos utilizado la igualdad $dy/dx = y'$ para que la expresión se visualice con más claridad. Una vez obtenida la ecuación para y' simplemente la despejamos:

$$y' = -\frac{x}{y},$$

donde la derivada está definida en tanto sea $y \neq 0$. Vemos que y' depende tanto de x como de y .

Una función implícita F describe una curva en el plano, la cual consiste en todos los puntos (x, y) que verifican $F(x, y) = 0$. Por ejemplo, la relación $x^2 + y^2 - 9 = 0$ determina gráficamente una circunferencia de radio 3 y centro en el origen de coordenadas $(0, 0)$. Al igual que en el caso de funciones explícitas, uno puede determinar las pendientes de las rectas tangentes a la curva cuando ella está definida de forma implícita, pero deberemos tener en cuenta que ahora la derivada relaciona tanto x como y . Esta situación se ilustra con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.7.5: Halle aquellos puntos (x, y) donde la recta tangente a la curva de ecuación $x^2 + y^2 - 9 = 0$ es horizontal.

Solución. Si buscamos aquellos puntos (x, y) donde la recta tangente es horizontal, es decir, donde la misma tiene pendiente cero, debemos resolver $y' = -x/y = 0$. Esta condición se cumple cuando $x = 0$ y $y \neq 0$. Sin embargo, no todos los puntos de la forma $(0, y)$ con $y \neq 0$ son puntos de la curva.

Para ver cuáles corresponden a ella, reemplazamos por $x = 0$ en la ecuación implícita de la curva $x^2 + y^2 - 9 = 0$:

$$0^2 + y^2 - 9 = 0 \implies y^2 = 9 \implies y = \pm 3.$$

Por tanto, los puntos de la circunferencia donde la recta tangente es horizontal son $(0, 3)$ y $(0, -3)$, y las ecuaciones de las respectivas rectas son $y = 3$ y $y = -3$.

La circunferencia y las rectas tangentes horizontales se visualizan en la Figura 44.

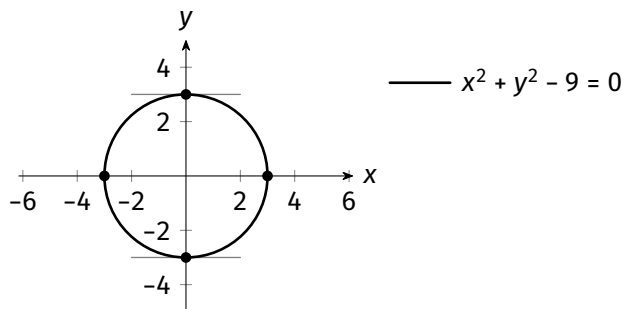


Figura 44. Tangentes horizontales a la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 3.

Ejemplo 1.7.6: Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva de ecuación $y^2 - x + 1 = 0$ en los puntos $(2, 1)$ y $(2, -1)$. Explícite las ecuaciones de las rectas y visualice en una gráfica la situación.

Solución. Primero verificamos que los puntos dados pertenecen a la curva. Para $(2, 1)$, reemplazamos x por 2 e y por 1 en la ecuación $y^2 - x + 1 = 0$, resultando $1 - 2 + 1 = 0$, es decir, se verifica la igualdad. Por tanto, el punto pertenece a la curva. Procediendo análogamente con el punto $(2, -1)$ se verifica que este pertenece a la curva pues $(-1)^2 - 2 + 1 = 0$.

A continuación encontraremos y' , para luego poder calcular el valor de la misma en los puntos indicados. Derivamos implícitamente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y^2 - x + 1) &= \frac{d}{dx}(0) \\ \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{dx}{dx} - \frac{d}{dx}(1) &= 0 \\ \frac{d}{dy}(y^2) \cdot \frac{dy}{dx} - 1 - 0 &= 0 \\ 2y \frac{dy}{dx} - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Cuando $y \neq 0$ se tiene que

$$y' = \frac{1}{2y}.$$

En este caso, el valor de la derivada depende únicamente de la ordenada del punto. Para $(2, 1)$ y $(2, -1)$, tenemos:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=1} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=-1} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

- en el punto $(2, 1)$ la recta tangente es $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$, o bien, $y = \frac{1}{2}x$.

- en el punto $(2, -1)$ dicha recta es $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, o bien, $y = -\frac{1}{2}x$.

La Figura 45 muestra la situación.

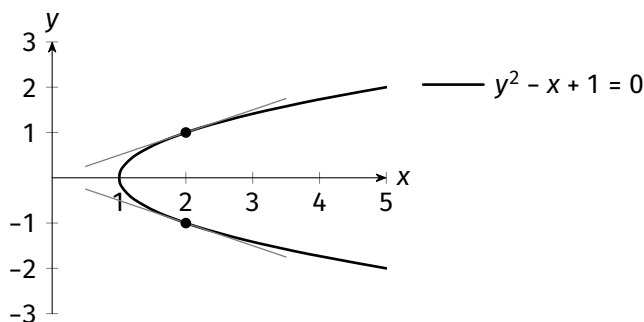


Figura 45. Parábola horizontal y dos de sus rectas tangentes.

En el ejemplo anterior se podría haber despejado y en términos de x , lo cual devuelve dos curvas explícitas:

$$y_1 = \sqrt{x - 1}, \quad \text{e} \quad y_2 = -\sqrt{x - 1},$$

la primera correspondiente a $y \geq 0$ y la segunda a $y < 0$.

Se pueden luego determinar las derivadas de cada una y evaluarlas donde corresponda: la derivada de $y_1 = \sqrt{x - 1}$ en $(2, 1)$ y la derivada de $y_2 = -\sqrt{x - 1}$ en $(2, -1)$. Sin embargo, la derivación implícita es más eficiente ya que puede usarse para obtener las pendientes de *ambas* rectas tangentes.

Observación 15: Es importante notar que si bien la definición de función implícita indica que la ecuación debe ser de tal modo que se pueda reescribir en la forma $F(x, y) = 0$, no es necesario en el proceso de derivación que la ecuación esté escrita en dicha forma.

Si pensamos en el caso de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 9 = 0$ y escribimos la ecuación en la forma $y^2 = 9 - x^2$, podemos derivar a ambos lados y llegar al mismo resultado que antes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(9 - x^2) \\ \frac{d}{dy}(y^2) \cdot \frac{dy}{dx} &= -2x \\ 2y \cdot y' &= -2x \\ y' &= -\frac{x}{y}, \end{aligned}$$

para $y \neq 0$.

Ejemplo 1.7.7: Considere la curva de ecuación $2x^2 + 2y^2 = 6 - 2xy$.

1. Halle los puntos (x, y) donde la curva presenta rectas tangentes horizontales y encuentre las ecuaciones de dichas rectas.
2. Utilice el [GeoGebra](#) para graficar la curva y las rectas tangentes halladas.

Solución. Para responder las consignas necesitamos hallar dy/dx , teniendo en cuenta que y es función de x , es decir $y = y(x)$.

Derivamos ambos miembros con respecto a x y usamos las propiedades de derivación que ya conocemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x^2 + 2y^2) &= \frac{d}{dx}(6 - 2xy) \\ \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(2y^2) &= 0 - \frac{d}{dx}(2xy) \\ 4x + 2 \cdot \frac{d}{dy}(y^2) \cdot \frac{dy}{dx} &= -2 \frac{d}{dx}(xy) \\ 4x + 2 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= -2 \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) \\ 4x + 4y \frac{dy}{dx} &= -2y - 2x \frac{dy}{dx}.\end{aligned}$$

A continuación, despejamos dy/dx , obteniendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x - 2y}{4y + 2x} = \frac{2 \cdot (-2x - y)}{2 \cdot (2y + x)} = -\frac{2x + y}{2y + x}$$

siempre que $4y + 2x \neq 0$.

Ahora respondemos las consignas.

1. Sabemos que la pendiente de una recta tangente horizontal es cero, lo cual conlleva a buscar los valores de x e y tales que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 0 \\ -\frac{2x + y}{2y + x} &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ y &= -2x.\end{aligned}$$

Reemplazamos $y = -2x$ en la ecuación de la curva $2x^2 + 2y^2 = 6 - 2xy$:

$$\begin{aligned}2x^2 + 2y^2 &= 6 - 2xy \\ 2x^2 + 2(-2x)^2 &= 6 - 2x(-2x) \\ 2x^2 + 8x^2 &= 6 + 4x^2 \\ 6x^2 &= 6 \\ x &= \pm 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos donde la recta tangente es horizontal son $(1, -2)$ y $(-1, 2)$. Luego, las rectas tangentes horizontales tienen ecuaciones $y = 2$ e $y = -2$.

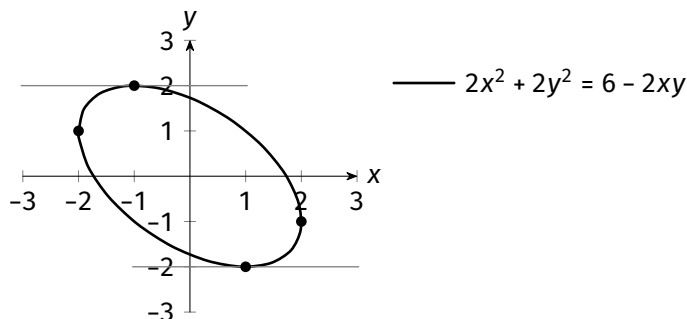


Figura 46

La Figura 46 muestra la gráfica de la curva de ecuación $2x^2 + 2y^2 = 6 - 2xy$ y las rectas tangentes horizontales.

EJERCICIOS 1.7.2

1. Compruebe que derivando implícitamente $x \cdot y = 1$ se obtiene la misma derivada que si se deriva la potencia $y = x^{-1}$.
2. Halle $\frac{dy}{dx}$ de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ y la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(3, 1)$. Grafique y verifique en [GeoGebra](#).
3. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 3xy$ en el punto $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.
4. Halle los puntos sobre la curva $x^2 + 3y^2 = 2xy + 48$ donde la recta tangente sea horizontal.
5. Considere la curva de ecuación $ax^2 + by = 2x + cy$ siendo $y = y(x)$ y a, b y c constantes.
 - a. Halle las condiciones que deben cumplir a, b y c para que $\frac{dy}{dx}$ exista.
 - b. Considere $a = 1, b = 3$ y $c = 2$, y halle los puntos donde la curva tiene una recta tangente horizontal.
6. Si x e y satisfacen la relación $xy = a$, con a una constante, probar que $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$ y $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

7. Pruebe que la curva de ecuación $3yx^2 - y^2 = 1 - 4x$ no tiene pendiente definida en aquellos puntos (x, y) de la curva donde $y = \frac{3}{2}x^2$.
8. Calcule la tasa de cambio de q con respecto a p para la relación de demanda $7q + q \ln(p + 1) = 2$.
9. Supongamos que una empresa produce dos tipos de bienes, cuyas cantidades son x e y , en condiciones técnicas y de factores de producción dadas. La relación $F(x, y) = K$ se denomina «función de transformación» de la empresa y expresa las posibilidades productivas alternativas de las ofertas disponibles de los factores de producción. La derivada $\frac{dy}{dx}$ representa la Tasa Marginal de Transformación (TMT), que mide el costo de oportunidad de producir más unidades del bien x en términos del bien y . Un valor absoluto bajo sugiere que es relativamente «barato» en términos de y aumentar la producción de x , mientras que un valor alto indicaría que producir más de x requiere sacrificar muchas unidades de y .
Sea $4x^3 + 2y^3 + 10x + 8y = K$, $K > 0$, la función de transformación semanal de cierta empresa. Calcule $\frac{dy}{dx}$ para 4000 unidades de producción de x y 10 000 unidades de producción de y . Interprete económicamente el resultado.
10. Suponga que la producción de una fábrica está dada por la expresión

$$Q = Q(x, y) = 4x^3 + 2x^2y + 2y^3,$$

donde x representa el número de horas de trabajo calificado e y el de trabajo no calificado. La fuerza laboral actual consta de 30 horas de trabajo calificado y 20 horas de trabajo no calificado. Halle el cambio que debería realizarse en el trabajo no calificado y para compensar un aumento de una hora en trabajo calificado x de manera que la producción se mantenga en su nivel actual.

Derivación logarítmica

Lo estudiado hasta el momento nos permite derivar un gran cuerpo de expresiones algebraicas, pero no resulta suficiente para otras funciones recurrentes en el ámbito de la economía, como pueden ser funciones con exponentes variables.

No debemos caer en el error de suponer que, por ejemplo, una función de la forma a^x tiene por derivada $x \cdot a^{x-1}$, es decir que no debemos extrapolar las propiedades de la forma x^a a funciones de la forma a^x .

Entonces, ¿cómo derivamos este tipo de funciones? Sabemos cómo derivar funciones si las partes variables se están sumando o restando, si están siendo elevadas a ciertos números, o si se están multiplicando o dividiendo. Si el problema es que la variable aparezca en el exponente, ¿acaso no tenemos forma de convertir esa operación en otra que sí sepamos derivar? Pues sí. Como sabemos, los logaritmos cuentan con algunas propiedades fundamentales:

$$\log_b(f \cdot g) = \log_b(f) + \log_b(g),$$

$$\log_b(f/g) = \log_b(f) - \log_b(g),$$

es decir, pueden «convertir» productos y cocientes en sumas y restas. También

$$\log_b(f^g) = g \cdot \log_b(f) \quad (6)$$

que nos permite transformar una potencia para tener un producto. Claro está que no será tan fácil como «componer la función con un logaritmo y ya».

Razonemos el proceso a partir de una función de la forma

$$y(x) = f(x)^{g(x)}$$

para hallar dy/dx , donde f y g son funciones derivables en un dominio común D , siendo $f(x) > 0$ y $f(x) \neq 1$ para todo $x \in D$. Como ya hemos dicho, la idea será aplicarle al lado derecho de la igualdad un logaritmo (por ejemplo, el logaritmo natural) para aprovechar sus propiedades. Pero para garantizar que la igualdad se conserva, debemos hacer esto miembro a miembro:

$$\ln(y) = \ln(f^g)$$

y luego usar la propiedad (6) del logaritmo para obtener

$$\ln(y) = g \cdot \ln(f).$$

Ahora bien, para derivar esta expresión lo más conveniente en esta situación es hacer uso de la derivación implícita. Aplicando además la regla de la cadena y del producto tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(y) &= \frac{d}{dx} [g \cdot \ln(f)] \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{dg}{dx} \ln(f) + g \frac{d}{dx} \ln(f) \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{dg}{dx} \ln(f) + \frac{g}{f} \frac{df}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dg}{dx} \ln(f) + \frac{g}{f} \frac{df}{dx} \right) y \end{aligned}$$

y, dado que $y(x) = f(x)^{g(x)}$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dg}{dx} \ln(f) + \frac{g}{f} \frac{df}{dx} \right) f^g,$$

por lo que hemos encontrado una forma para derivar y , la cual no depende de derivadas de potencias. Si f y/o g son potencias también, entonces el proceso se puede repetir para determinar f' y g' .

Resumimos lo hallado en el siguiente teorema.

Teorema 1.7.2: Sea $h(x) = f(x)^{g(x)}$, con f y g funciones derivables en un dominio común D , $f(x) > 0$ y $f(x) \neq 1$ para todo $x \in D$. Entonces h es derivable en x y

$$h'(x) = \left(g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right) f(x)^{g(x)}. \quad (7)$$

Observación 16: Cabe destacar que no es necesario memorizar la ecuación (7) del Teorema 1.7.2. Basta con recordar que *al encontrarnos con funciones variables en los exponentes, debemos componer con logaritmos antes de empezar a derivar*.

Podemos resumir el proceso, denominado *derivación logarítmica*, en los siguientes pasos:

PASO 1 Componemos la función de la forma $y(x) = f(x)^{g(x)}$ con un logaritmo natural a ambos lados (puede hacerse con un logaritmo en cualquier base, pero la derivada de este es más sencilla como vimos en el Teorema 1.7.1).

PASO 2 Aplicamos propiedades de los logaritmos para desarmar la potencia.

PASO 3 Derivamos implícitamente y al finalizar reemplazamos por la función original $y(x) = f(x)^{g(x)}$.

Pongamos en práctica este método en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.7.8: Halle la derivada de la función $y(x) = x^x$, siendo $x > 0$.

Solución. Por ser una función de exponente variable aplicaremos el método mencionado componiendo con el logaritmo natural miembro a miembro, para lo cual es importante que $x > 0$. Resulta de (6) que

$$\begin{aligned} y &= x^x \\ \ln(y) &= \ln(x^x). \end{aligned}$$

Dado que $\ln(A^B) = B \ln(A)$, tenemos

$$\ln(y) = x \ln(x),$$

y derivamos implícitamente:

$$\begin{aligned}\frac{d \ln(y)}{dx} &= \frac{d (x \ln(x))}{dx} \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{dx}{dx} \ln(x) + x \frac{d \ln(x)}{dx} \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \ln(x) + 1.\end{aligned}$$

Por último, explicitamos la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = (\ln(x) + 1) y$$

y, dado que $y = x^x$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = (\ln(x) + 1) x^x,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 1.7.9: Determine la derivada de la función $y = a^x$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$.

Solución. Aplicamos el proceso de derivación logarítmica aplicando logaritmo natural

$$\begin{aligned}y &= a^x \\ \ln(y) &= \ln(a^x) \\ \ln(y) &= x \cdot \ln(a).\end{aligned}$$

A partir de esta igualdad derivamos en forma implícita para obtener

$$\begin{aligned}\frac{d \ln(y)}{dx} &= \frac{d (x \cdot \ln(a))}{dx} \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \ln(a) \\ \frac{dy}{dx} &= \ln(a) \cdot y\end{aligned}$$

y, dado que $y = a^x$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \ln(a) \cdot a^x.$$

Notemos que, en este ejemplo, en lugar del logaritmo neperiano, puede resultar más conveniente aplicar logaritmo en base a .

Finalmente, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.7.3 (Derivada de una función exponencial): La derivada de la función $y(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$, es

$$y'(x) = \ln(a)a^x.$$

Para el caso especial de base e , esto es, $y(x) = e^x$, se tiene que $y'(x) = e^x$.

Observación 17: El teorema anterior indica, en otras palabras, que si la base de la función exponencial es el número e , entonces la derivada coincide con la función. Esto es, la pendiente de la recta tangente en cada valor de x coincide con el valor de la función en dicho x . En particular, en $x = 0$, la pendiente de la recta tangente a $y(x) = e^x$ es $e^0 = 1$.

Por otro lado, también puede leerse que la tasa de cambio instantánea en cada valor de x coincide con el valor de la función, es decir:

$$y' = y.$$

Observación 18: Si consideramos la función $y(x) = Ca^x$ con C cualquier constante, $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces la tasa relativa de cambio es

$$\frac{y'}{y} = \frac{C \ln(a)a^x}{Ca^x} = \ln(a).$$

Es decir, es una constante $k = \ln(a)$.

De hecho, esta propiedad solo la cumplen las funciones exponenciales por lo que *la función donde la tasa de cambio es proporcional a sí misma* ($y'(x) = ky(x)$ con k constante) o, dicho de otra manera, *donde la tasa relativa de cambio es constante, es una función exponencial de la forma $y = Ca^x$ con C una constante y base $a > 0$, $a \neq 1$.*

EJERCICIOS 1.7.3

1. Emplee la derivación logarítmica para hallar la derivada de las siguientes funciones:

a. $y = (2x + 1) \cdot \sqrt{3x^2 + 1}.$

b. $y = \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x+3}}.$

c. $y = x^{\ln(x)}.$

d. $y = e^{x^2}.$

2. Compruebe aplicando la derivación logarítmica que la derivada de $y(x) = x^r$, con r real, es $y'(x) = rx^{r-1}$. Calcule y' para $y(x) = x^\pi$ y $y(x) = x^{-e}$.

3. Aplique la derivación logarítmica para calcular la derivada de $y(x) = \sqrt[5]{\frac{x-2}{x+2}}.$

4. Compruebe que la recta tangente a $y = e^x$ tiene pendiente 1 en $x = 0$.
5. Deduzca la expresión de la derivada de la función $y = a^x$, para $a > 0$ y $a \neq 1$, aplicando derivación logarítmica y utilizando el logaritmo en base a . Compare con el resultado obtenido en el Ejemplo 1.7.9.
6. Considere las siguientes funciones de demanda:

$$p = f(q) = 30e^{-0.001q}, \quad p = g(q) = 10e^{-1/3q}.$$

Para cada una de ellas:

- a. Halle la tasa de cambio del precio para una determinada cantidad demandada, q .
 - b. Grafique en [GeoGebra](#) la función de demanda y la función de demanda marginal. Interprete ambas relacionándolas según el signo de la función marginal.
7. Para la función de costo $C(q) = 8000e^{q/800}$ de un determinado producto, halle el costo marginal, el costo promedio y el costo promedio marginal. Evalúe en un valor determinado e interprete en términos económicos.
 8. Sea la función de costo promedio

$$\bar{C}(q) = \frac{850}{q} + \frac{4000}{q} e^{(2q+6)/800}, \quad q > 0.$$

Halle la función de costo marginal y la función de costo promedio marginal, y luego evalúe ambas en $q = 97$. Interprete el resultado en términos económicos.

9. La ecuación de demanda de un determinado producto es $p = 10e^{-0.1q}$, donde p es el precio en dólares y q es la cantidad demandada en cientos de unidades.
 - a. Halle el precio de venta del producto y el precio marginal cuando se demandan 200 unidades.
 - b. Halle la tasa relativa porcentual de cambio en el ingreso cuando se demandan 200 unidades, e interprete en términos económicos.
10. En una determinada empresa la producción diaria en el día t está dada por $q(t) = 1000(1 - e^{-0.2t})$.
 - a. Encuentre la tasa de cambio de la producción q con respecto a t , en los días quinto, décimo y vigésimo. Interprete los resultados en términos económicos.

b. Grafique en GeoGebra la función q y su derivada, y conteste las siguientes cuestiones:

- i. ¿Cuál es el signo de la función derivada primera de q ?
 - ii. ¿Cuál es el límite de la función derivada primera de q ? ¿Lo podría explicar en términos económicos y en términos geométricos?
 - iii. Describa en un párrafo el comportamiento de la producción de esta empresa.
11. La función $y(t) = pe^{-ce^{-kt}}$, con $p > 0$, $c > 0$ y $k > 0$ constantes, se llama «función de Gompertz», y se utiliza para modelar el crecimiento poblacional y en función del tiempo t . Verifique que su derivada es una función exponencial negativa. ¿Qué significado tiene en términos poblacionales?
12. El PBI de un país se puede modelar como $y(t) = Ae^{rt}$, donde y es el PBI, A es una constante, r es la tasa de crecimiento y t es el tiempo. Obtenga $\frac{dy}{dt}$. ¿Cuál es su significado?

Derivación de funciones inversas

La función exponencial de base e , $f(x) = e^x$, y la función logaritmo natural $g(x) = \ln(x)$ son funciones inversas una de la otra puesto que $f \circ g(x) = e^{\ln(x)} = x$ para todo $x > 0$ y $g \circ f(x) = \ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, la composición de ellas nos da la función identidad en ambos sentidos. Nos preguntamos si es posible relacionar de alguna forma las derivadas de funciones inversas.

Sea $y = f(x)$ una función que admite inversa y sea su inversa $x = g(y)$. Entonces la composición $(g \circ f)(x) = x$, cualquiera sea el valor de la variable $x \in D_f$. Por tanto, si f es una función derivable en $x \in D_f$ y g es una función derivable en $y = f(x) \in D_g$, derivando a ambos lados de la composición anterior, y aplicando la regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) &= \frac{dx}{dx} \\ \frac{d}{dy}g(y) \cdot \frac{d}{dx}f(x) &= 1.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $x = g(y)$ e $y = f(x)$, tenemos

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1, \quad (8)$$

siempre que ambas derivadas existan.

En palabras, el producto de las derivadas de una función y de su inversa es igual a 1 (siempre que ambas existan). Entonces podemos decir que la derivada de la función inversa es el recíproco de la derivada de la función «directa» cuando $dy/dx \neq 0$. En símbolos:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

En términos geométricos, las pendientes de las rectas tangentes a las gráficas de una función y su inversa son una la recíproca de la otra (nuevamente, siempre que existan).

Observación 19: Si $dy/dx = 0$ en cierto punto, entonces y presenta una recta tangente horizontal en él, por lo que su inversa presentará una recta tangente vertical en dicho punto.

Ejemplo 1.7.10: Verifique la igualdad de la ecuación (8) para las funciones $y = e^x$ y $x = \ln(y)$.

Solución. De los teoremas 1.7.1 y 1.7.2, ambas son funciones derivables en los correspondientes dominios (y es derivable en todos los números reales y x en todos los números reales positivos). Como ya mostramos, una función es la inversa de la otra, por lo que el resultado anterior nos dice que podemos plantear, por ejemplo,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

pues $y > 0$. O bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1/y} = y = e^x.$$

Por tanto,

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y = 1 \quad \text{o también} \quad \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x} \cdot e^x = 1.$$

La igualdad se verifica por ambos caminos.

Ejemplo 1.7.11: Verifique la igualdad de la ecuación (8) para los siguientes pares de modelos de demanda, siendo a , b y c constantes reales no nulas.

1. $p = a - bq$ y $q = (a - p)/b$;
2. $p = (a - bq)^2$ y $q = (a - \sqrt{p})/b$;
3. $q^2 = (a - p)b$ y $p = a - bq^2$.

Solución. Con el fin de verificar la igualdad hallamos las derivadas correspondientes, las multiplicamos y comprobamos que el resultado sea idénticamente 1.

1. Para $p = a - bq$ es $dp/dq = -b$, y para $q = (a - p)/b$ se tiene $dq/dp = -1/b$. Por tanto,

$$\frac{dp}{dq} \cdot \frac{dq}{dp} = -b \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) = 1.$$

2. Siendo $p = (a - bq)^2$, por la regla de la cadena es $dp/dq = -2b(a - bq)$. Y para $q = (a - \sqrt{p})/b = a/b - \sqrt{p}/b$, obtenemos que $dq/dp = -1/(2b\sqrt{p})$. Así,

$$\frac{dp}{dq} \cdot \frac{dq}{dp} = -2b(a - bq) \left(-\frac{1}{2b\sqrt{p}}\right) = -2b\sqrt{p} \left(-\frac{1}{2b\sqrt{p}}\right) = 1,$$

donde hemos usado que $a - bq = \sqrt{p}$ despejando de cualquiera de las dos ecuaciones de demanda dadas.

3. Si $q^2 = (a - p)/b$, será $dq/dp = -1/(2bq)$ (por ejemplo, usando derivación implícita). Y para $p = a - bq^2$ tenemos que $dp/dq = -2bq$. Entonces

$$\frac{dp}{dq} \cdot \frac{dq}{dp} = -2bq \left(-\frac{1}{2bq}\right) = 1.$$

Finalmente tenemos las técnicas necesarias para calcular la mayoría de las derivadas que nos interesan: la derivada de una suma algebraica de funciones, la derivada de un producto y de un cociente, la derivada de una función compuesta (regla de la cadena) y la derivada de la función inversa de otra, más las derivadas típicas. Todas estas serán suficientes para hallar las derivadas de diversas funciones, aún cuando sea muy compleja su expresión analítica. Nuestros desafíos consisten, entonces, en identificar correctamente qué técnica es más eficaz para cada función.

EJERCICIOS 1.7.4

- Siendo $y = \sqrt{x}$, determine la función inversa y compruebe que la composición entre ambas da por resultado la función identidad. Además, verifique la relación entre las derivadas: $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$.
- Para los siguientes modelos de demanda encuentre la expresión analítica de la función inversa y compruebe que se cumple la identidad $\frac{dp}{dq} \cdot \frac{dq}{dp} = 1$, siendo a , b y c constantes apropiadas.

a. $p = \frac{a}{q+b} - c$.	b. $p = \sqrt{a - bq}$.
c. $q = a \cdot e^{-bp}$.	d. $q = bp^{-a} + c$.
- Considere las funciones siguientes:

$$f(x) = \sqrt{x - 4}, \quad g(x) = \ln(\sqrt{x}).$$

- Halle la función que en cada punto del dominio representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. Haga lo mismo con respecto a la función inversa.
- Verifique que el producto de estas funciones (producto de pendientes) es igual a 1.
- Halle la ecuación de la recta tangente en el punto (8, 2) para f , y en el punto (1, 0) para g .
- Visualice la situación graficando las funciones y las rectas tangentes en el [GeoGebra](#).

LA DERIVADA EN CONTEXTO

En esta sección exploraremos la derivada como una herramienta fundamental del cálculo diferencial y su aplicación en problemas prácticos. Nos enfocaremos en tres cuestiones o áreas clave: cálculos de límites indeterminados, problemas de optimización en el ámbito de las ciencias económicas y estimación de errores.

Regla de l'Hôpital

Hasta el momento, cuando tenemos que resolver límites del tipo

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y los mismos presentan formas indeterminadas del tipo «0/0» o del tipo « ∞/∞ », utilizamos recursos algebraicos para «salvar» dichas indeterminaciones y algunas veces resulta un trabajo tedioso. La técnica llamada «regla de l'Hôpital» nos ayudará en muchos casos, pues su idea básica consiste en estudiar el cociente de derivadas $f'(x)/g'(x)$ y deducir de él información relativa a $f(x)/g(x)$. Esta regla nos permite reducir el trabajo y calcular límites que de otra forma no se podrían conseguir con las estrategias vistas en la Sección 1.2.

Teorema 1.8.1 (Regla de l'Hôpital): Supongamos que f y g son funciones derivables de x y que $g'(x) \neq 0$ en un intervalo (a, b) que contiene a c , excepto quizás en c . Si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$$

o bien

$$\left| \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right| = \infty \quad \text{y} \quad \left| \lim_{x \rightarrow c} g(x) \right| = \infty$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite del lado derecho exista o sea de tipo $\pm\infty$.

Observación 20: En ocasiones es necesario aplicar la regla de l'Hôpital más de una vez para eliminar una forma indeterminada.

La regla de l'Hôpital afirma que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se satisfagan las condiciones dadas. Antes de aplicar la regla de l'Hôpital es muy importante comprobar las condiciones sobre los límites de f y g , y sobre el límite del cociente de las derivadas.

La regla también sirve para límites laterales y límites en el infinito, es decir, « $x \rightarrow c$ » puede reemplazarse por $x \rightarrow c^+$, $x \rightarrow c^-$, $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$. En los casos de límites en el infinito, se requiere que $g'(x) \neq 0$ a partir de un x suficientemente grande ($+\infty$) o suficientemente grande en valor absoluto ($-\infty$).

Ejemplo 1.8.1: Halle $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1)/x$.

Solución. Observe que tanto $f(x) = e^{2x} - 1$ como $g(x) = x$ tienden a 0 cuando x tiende a 0, por lo que este límite presenta la forma indeterminada del tipo «0/0». Como $f(x) = e^{2x} - 1$ y $g(x) = x$ son funciones derivables en $\mathbb{R}$ y $g'(x) = 1 \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2e^{2 \cdot 0} = 2.$$

Por la regla de l'Hôpital tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2.$$

Ejemplo 1.8.2: Considere la función $h(x) = \ln(x)/(x - 1)$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ y estudie la existencia de asíntotas verticales y/o horizontales a la gráfica de h .

Solución. Observar primero que el dominio de la función h son los reales positivos, excepto $x = 1$. Para calcular el límite solicitado tomamos $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = x - 1$ y vemos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

tiene la forma indeterminada «0/0».

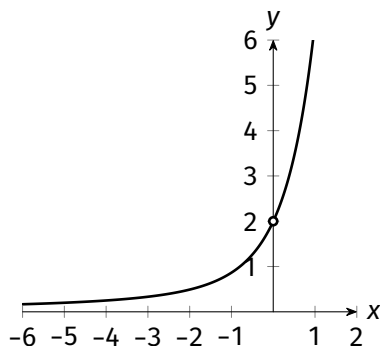


Figura 47

Tanto f como g son funciones derivables para $x > 0$, y $g'(x) = 1 \neq 0$ en cualquier x . Además,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1} = 1.$$

Puede entonces aplicarse la regla de l'Hôpital resultando que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1.$$

Con respecto a la existencia de una asíntota vertical concluimos que la función $h(x) = \ln(x)/(x - 1)$ no tiene una asíntota vertical en $x = 1$ pues el límite anterior no es de tipo infinito.

¿Tiene asíntotas horizontales? Para ello solo miramos el caso del límite en $+\infty$ ya que la función no está definida para $x \leq 0$. Otra vez, encontramos una indeterminación ya que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty.$$

Como ya dijimos, $g'(x) = 1 \neq 0$, con lo cual, por la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Entonces, la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, como podemos visualizar en la gráfica siguiente.

Muchas veces aplicaremos la regla de l'Hôpital a la vez que analizamos lo que ocurre con el límite del cociente de las derivadas y veremos si efectivamente existe o es de tipo $\pm\infty$ para resolver la indeterminación.

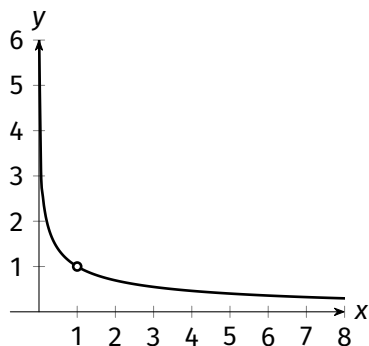


Figura 48

Ejemplo 1.8.3: ¿Es $y = 0$ asíntota horizontal de la función $h(x) = \ln(x)/x$?

Solución. Para responder calculamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x$ (sólo tiene sentido cuando $x \rightarrow +\infty$ pues $D_h = (0, +\infty)$). Considere $f(x) = \ln(x)$ que es derivable para $x > 0$, y $g(x) = x$, que es derivable también allí con $g'(x) = 1 \neq 0$, por la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ello indica que $y = 0$ es asíntota horizontal de la función h .

Ejemplo 1.8.4: Evalúe $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2/e^{-x}$.

Solución. La indeterminación es del tipo ∞/∞ y se dan las condiciones para aplicar la regla de l'Hôpital ya que $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^{-x}$ son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ y $g'(x) \neq 0$ siempre. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}.$$

Este último límite da la forma indeterminada ∞/∞ , y podemos aplicar nuevamente l'Hôpital pues las condiciones se cumplen, como el lector puede comprobar. Así,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0.$$

Por tanto $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2/e^{-x} = 0$.

Además de las formas indeterminadas vistas en los ejemplos anteriores, hay otras formas como « $0 \cdot \infty$ » o « $\infty - \infty$ » que no están contempladas en

la regla de l'Hôpital. En los Ejemplos 1.8.5 y 1.8.6 siguientes se muestra la resolución de estas formas; básicamente, se busca convertirlas en las formas del tipo «0/0» o del tipo « ∞/∞ » para poder aplicar esta regla.

La forma « $\infty - \infty$ » ya se trató en la sección 1.2.6. La forma « $0 \cdot \infty$ » es indeterminada en el sentido que no determina el valor del límite ni la existencia del mismo, como se evidencia en los siguientes límites (que no desarrollaremos pero que el lector puede comprobar fácilmente):

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{2}{x} = 2;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{e^x} = 0;$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{1}{x} = \infty.$$

Todos son del tipo « $0 \cdot \infty$ » y no puede conocerse *a priori* su resultado.

Ejemplo 1.8.5: Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sqrt{x}$.

Solución. La sustitución directa produce la forma indeterminada « $0 \cdot \infty$ ». Para poder evaluarlo o decidir si no existe reescribimos el límite adaptándolo a la forma « ∞/∞ », expresando el producto como un cociente.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}.$$

Ahora estamos frente a la indeterminación mencionada y podemos aplicar la regla de l'Hôpital (con $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = e^x$, ambas en las condiciones del Teorema 1.8.1), como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = 0.$$

El límite existe y es cero.

Ejemplo 1.8.6: Halle $\lim_{x \rightarrow 1^+} [1/\ln(x) - 1/(x-1)]$.

Solución. La sustitución directa da la forma « $\infty - \infty$ ». Al resolver la resta tenemos la forma indeterminada del tipo «0/0»

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)},$$

en la que ya es posible aplicar la regla de l'Hôpital.

Para ello, se considera $f(x) = x-1-\ln(x)$ y $g(x) = (x-1)\ln(x)$, ambas derivables en $x > 0$, y $g'(x) = 1 - 1/x + \ln(x) \neq 0$ fuera de $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right) \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x} + \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1+x\ln(x)}.$$

Este límite sigue siendo indeterminado, con lo cual aplicamos nuevamente l'Hôpital (las condiciones están dadas con $f(x) = x - 1$ y $g(x) = x - 1 + x \ln(x)$ como puede comprobarse):

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1 + x \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2 + \ln(x)} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el límite existe y es $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1/\ln(x) - 1/(x - 1)) = 1/2$.

EJERCICIOS 1.8.1

1. Describa el tipo de indeterminación, si la hay, que presentan los siguientes límites usando sustitución directa. Evalúe los límites y, de ser necesario, aplique la regla de l'Hôpital.

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x - 3)}{x^2 - 9}.$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 2x - 6}{x + 1}.$

c. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}.$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 4x^2 + 2}{x^3 - 1}.$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3}.$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 1}{x - 1}.$

g. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{3x^2 - 1}.$

h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^2}.$

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} - x}.$

j. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{x}.$

k. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$

l. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^2.$

2. Estudie la existencia de asíntotas verticales y horizontales para las gráficas de las funciones dadas y, en el caso que existan, explícite las ecuaciones de las mismas.

a. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$

b. $g(x) = \frac{e^{x/2}}{x}.$

c. $h(x) = \frac{10}{x} - \frac{3}{x^2}.$

d. $z(t) = \frac{t - 3}{\ln(2t - 5)}.$

Optimización de problemas económicos

El análisis del comportamiento gráfico de funciones y, específicamente, de funciones que representan fenómenos económicos, permite considerar aspectos relevantes para la toma de decisiones. En este sentido, abordaremos el tema de optimización de una función, lo cual nos lleva a estudiar los temas: máximos y mínimos relativos y absolutos, concavidad y puntos de inflexión.

Debemos recordar que la consideración de algunos puntos de una función para la representación gráfica no nos garantiza información suficiente acerca de su forma. La graficación considerando solo algunos puntos es insuficiente para analizar el comportamiento de la función. Es por esto por lo que comenzaremos por analizar máximos y mínimos en forma teórica.

La palabra «máximo» en el lenguaje común hace referencia al «valor más grande» respecto de «otros valores» o «límite superior o extremo al que puede llegar algo». Asimismo, la palabra «mínimo» en el lenguaje coloquial indica el «menor valor» respecto de «otros valores» o «límite inferior o extremo al que puede llegar algo». En términos matemáticos, lo definiremos de la siguiente manera:

Definición 1.8.1 (Extremos absolutos de una función): Se dice que la función f , de dominio D_f , tiene un *máximo absoluto* (o máximo global) en $x = c \in D_f$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo x perteneciente a D_f . El número $f(c)$ se llama *valor máximo* de f en D_f .

De manera análoga, se dice que f tiene un *mínimo absoluto* (o mínimo global) en $x = c \in D_f$ si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en D_f . En este caso, el número $f(c)$ se denomina *valor mínimo* de f en D_f .

Los valores máximo y mínimo absolutos de f se conocen en conjunto como *valores extremos absolutos* de f .

Existen funciones que tienen ambos extremos absolutos en su dominio, funciones que solo poseen uno de ellos, y otras que no tienen ningún extremo absoluto.

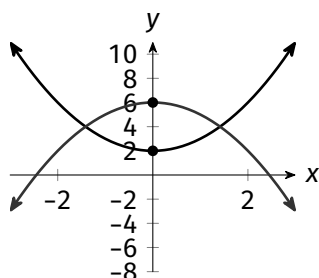
La función identidad $f(x) = x$ no tiene ningún extremo absoluto en su dominio pues los valores de x se pueden hacer tan grandes o tan pequeños, en términos absolutos, como uno quiera.

La función $f(x) = -x^2 + 6$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$ tiene máximo absoluto en $x = 0$, siendo $f(0) = 6$ dicho máximo, y no hay valor mínimo; mientras que la función $g(x) = x^2 + 2$, también con dominio en $\mathbb{R}$, tiene mínimo absoluto en $x = 0$, siendo $g(0) = 2$ dicho mínimo, y no hay valor máximo. Ambas situaciones se muestran en la Figura 49(a).

Ahora bien, si consideramos dominios acotados la situación puede modificarse. La función $f(x) = -x^2 + 6$ con dominio en $[-1, 3]$ tiene máximo absoluto en $x = 0$, y este valor es $f(0) = 6$. Además, presenta el mínimo absoluto en

$x = 3$, siendo el mínimo valor $f(3) = -3$.

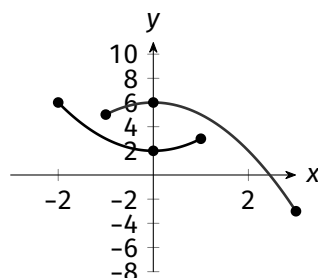
La función $g(x) = x^2 + 2$, definida en $[-2, 1]$, tiene valor mínimo absoluto 2 en $x = 0$ y máximo absoluto 6 en $x = -2$, como se observa en la Figura 49(b).



$$\text{—} y = x^2 + 2$$

$$\text{—} y = -x^2 + 6$$

(a)



$$\text{—} y = x^2 + 2$$

$$\text{—} y = -x^2 + 6$$

(b)

Figura 49

Observemos la Figura 50 donde se presenta la gráfica de una función f , continua, con dominio acotado $[a, b]$.

Esta función tiene máximo absoluto en $x = a$ y mínimo absoluto en $x = x_1$, dado que $(a, f(a))$ es el punto más alto y $(x_1, f(x_1))$ el más bajo de la gráfica en el dominio. Sin embargo, es posible hallar valores máximos o mínimos en las proximidades de un x dado, perteneciente al intervalo abierto (a, b) , lo que da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.8.2 (Extremos relativos de una función): Una función f posee un *máximo relativo* (o máximo local) en $x = c$ si $f(c) \geq f(x)$ para x en algún intervalo abierto que contiene a c .

En cambio, f posee *mínimo relativo* (o mínimo local) en $x = c$ si $f(c) \leq f(x)$ para x en algún intervalo abierto que contiene a c .

Los valores máximos y mínimos relativos de f se denominan en conjunto como *valores extremos relativos* de f .

Observando la gráfica de la Figura 50 podemos establecer que si solo consideramos valores de x cercanos a x_4 , resulta que $f(x_4)$ es menor que todos los valores de $f(x)$ cercanos a $x = x_4$; es decir, $f(x_4)$ es un «mínimo relativo» de la función f . De modo semejante, $f(x_3)$ es un valor «máximo relativo» de f , mientras que $f(x_1)$ es mínimo relativo y, también, el mínimo absoluto de f . En $x = x_2$, $x = x_5$ y $x = b$ no hay máximos ni mínimos. Podemos

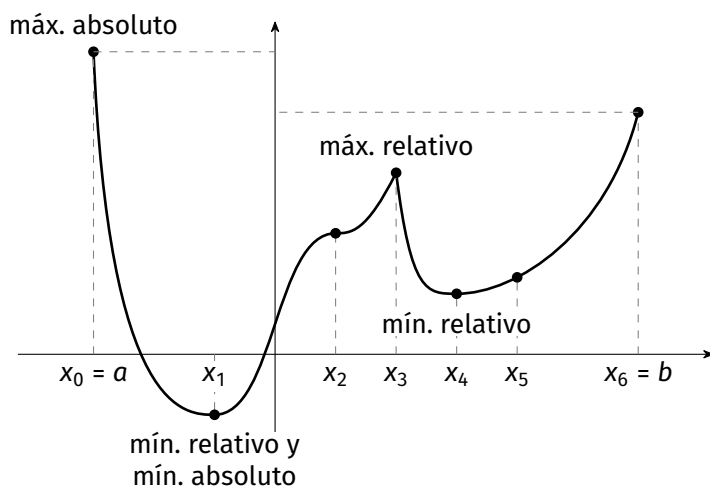


Figura 50

afirmar que $f(a)$ es máximo absoluto, aunque no se considera como extremo relativo de la función pues es un extremo del intervalo dominio.

Ejemplo 1.8.7: La función que se muestra en la Figura 51 es continua y su dominio es $\mathbb{R}$. Su valor máximo absoluto (y relativo) es 1 y su valor mínimo absoluto (y relativo) es -1; ambos ocurren en infinitos valores de x .

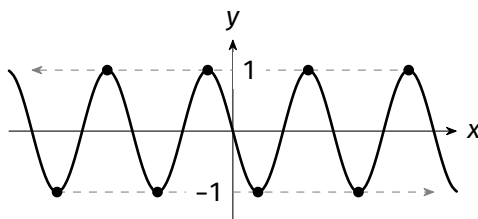


Figura 51

Ejemplo 1.8.8: La función $y = x^3$, cuya gráfica se muestra en la Figura 52, es continua en su dominio $\mathbb{R}$, no posee máximo ni mínimo absoluto ni valores extremos relativos.

Ejemplo 1.8.9: Analice los máximos y mínimos de la función

$$y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 3x^2$$

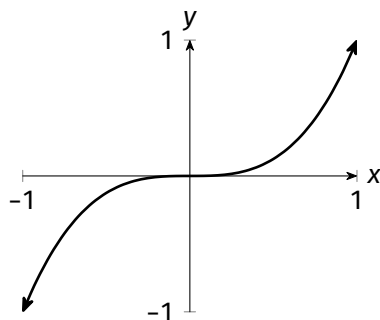


Figura 52

en el intervalo $[-1, 4]$.

Solución. La función dada es polinómica y, por tanto, es continua en todo el intervalo $[-1, 4]$. Como puede verse en la Figura 53, un valor mínimo relativo es $f(1) = -5/6$. El valor mínimo absoluto es $f(-1) = -37/6$, pero este mínimo absoluto no es un mínimo relativo porque se presenta en un punto extremo. En $x = 0$ hay un máximo relativo con valor $f(0) = 0$, mientras que $f(3) = 9/2$ es el valor máximo absoluto y es también un valor máximo relativo. En $x = 4$, f no tiene mínimo relativo por ser el extremo derecho del dominio, y tampoco corresponde a un mínimo absoluto.

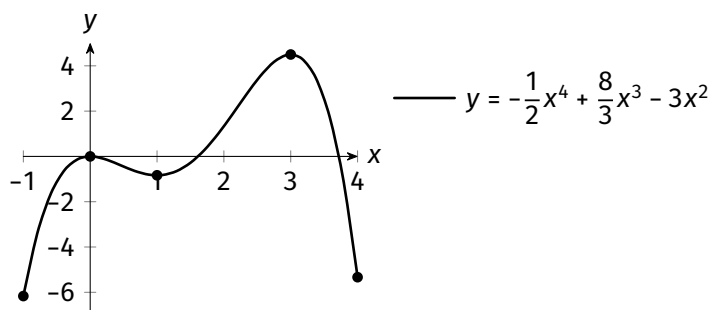


Figura 53. Función del Ejemplo 1.8.9.

Ejemplo 1.8.10: La función g definida en el intervalo $[0, 7)$ que se ilustra en la Figura 54 es discontinua en $x = 1$ y en $x = 6$. No tiene mínimo absoluto y los valores mínimos relativos son $g(2) = 2$ y $g(5) = 3$. Por otro lado, en $x = 4$ tiene un máximo absoluto (y también relativo) con valor $g(4) = 5$, y en $x = 6$ hay un

máximo relativo con valor $g(6) = 4$. En $x = 0$ no hay mínimo absoluto (y no es relativo porque no se consideran los extremos del dominio en la definición).

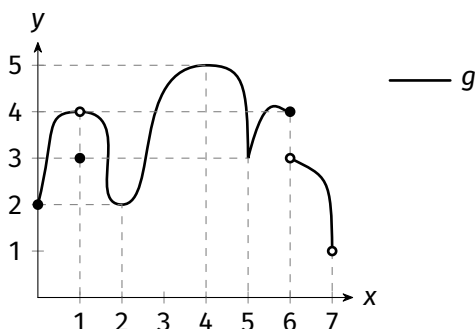


Figura 54

Ejemplo 1.8.11: La función f de la Figura 55 no tiene máximo absoluto, pero sí un máximo relativo en $x = 2$ y un mínimo absoluto en $x = 4$.

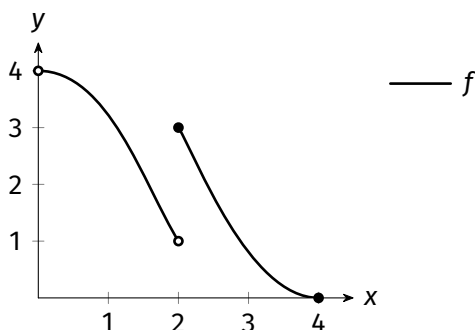


Figura 55

Ejemplo 1.8.12: La función g de la Figura 56 tiene máximo absoluto en $x = b$, mínimo absoluto en $x = x_2$, máximos relativos en $x = x_1$ y en $x = x_3$, mínimos relativos en $x = x_2$ (que también es absoluto) y en $x = x_4$. Notemos que el valor mínimo relativo en $x = x_4$ es mayor que el valor máximo relativo en $x = x_1$. Esto evidencia que no siempre todo valor máximo relativo es mayor o igual que todo valor mínimo relativo, aunque esta desigualdad sí es cierta cuando se compara un máximo absoluto con un mínimo absoluto.

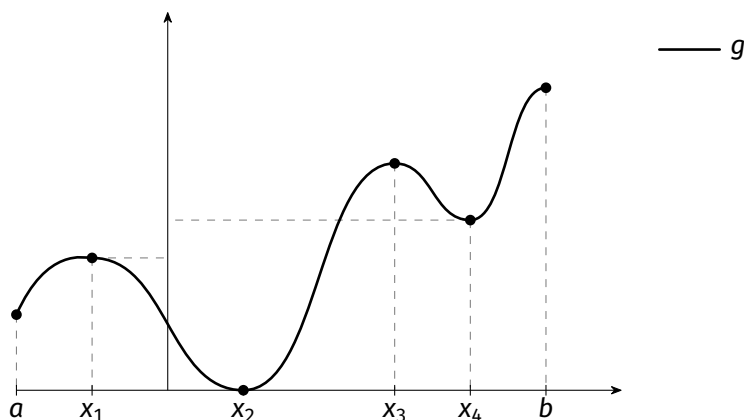


Figura 56. Gráfica de la función del Ejemplo 1.8.12.

El teorema siguiente da condiciones suficientes con las cuales se garantiza que una función continua posea valores extremos.

Teorema 1.8.2 (Teorema de los valores extremos): Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos valores c y d perteneciente al intervalo $[a, b]$.

Lo que enuncia este teorema lo podemos evidenciar en los Ejemplos 1.8.9 y 1.8.12. Sin embargo, pueden existir funciones que tengan ambos extremos absolutos sin ser continuas en todo su dominio; es por ello que la condición de continuidad es suficiente pero no necesaria.

Hasta el momento hemos analizado las gráficas de funciones para determinar la existencia o no de extremos. Ahora bien, ¿qué característica podemos enunciar respecto de las pendientes de las rectas tangentes en los puntos extremos?

En las gráficas de la Figura 57 podemos distinguir tres situaciones que presentan las funciones continuas: en la Figura 57(a) observamos que la recta tangente en los puntos donde existen los extremos es horizontal o de pendiente cero, es decir, $f'(b) = 0$ y $f'(c) = 0$. En la Figura 57(b) se observa que $f'(b)$ no existe; sin embargo, tenemos un máximo relativo en $x = b$. Por último, en la Figura 57(c) si bien $f'(b) = 0$, no hay máximos ni mínimos allí.

Lo que podemos asegurar es lo siguiente:

Teorema 1.8.3: Si la función $y = f(x)$ tiene un máximo o un mínimo relativo en $x = c$ y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

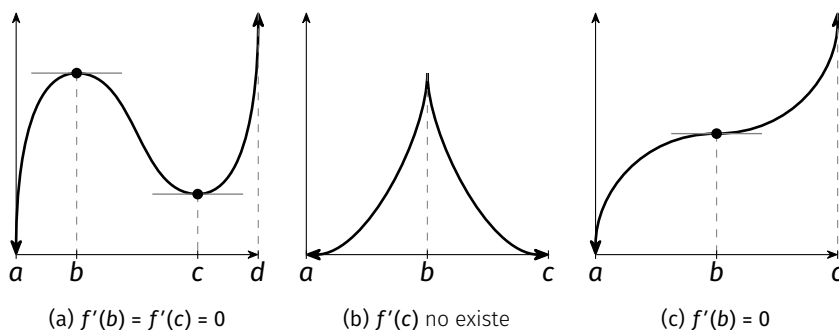


Figura 57

El teorema implica que si f es derivable en $x = c$ y tiene un extremo relativo allí, entonces necesariamente la derivada es nula, esto es, la recta tangente es horizontal. Sin embargo, si f es derivable en $x = c$ y la pendiente allí es cero, no necesariamente hay un extremo relativo como se vio en la Figura 57(c).

Observe que no se puede aplicar el teorema en puntos donde la función no es derivable. Sin embargo, podría haber extremos relativos o absolutos en puntos donde la gráfica presenta puntos angulosos o cúspides como el caso mostrado en la Figura 57(b).

Lo que el teorema sugiere es que se pueden empezar a buscar los extremos de f detectando los valores c donde $f'(c) = 0$, o bien, donde $f'(c)$ no exista. Estos valores se denominan «críticos».

Definición 1.8.3 (Valor crítico): Un valor crítico de una función f es un valor $c \in D_f$ tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Ejemplo 1.8.13: La función $f(x) = |x|$ tiene un valor mínimo absoluto (y relativo) en $x = 0$ y $f'(0)$ no existe.

Ejemplo 1.8.14: La función $f(x) = x^3$ no tiene valores extremos; sin embargo, en $x = 0$ se cumple que $f'(0) = 0$.

Como muestran todos los ejemplos anteriores, para poder afirmar que un valor crítico es un extremo relativo hace falta probar algo más. Con el fin de realizar un estudio más preciso de esta condición, veamos la siguiente definición.

Definición 1.8.4 (Crecimiento y decrecimiento): Sea f una función con dominio D_f y sea $I \subseteq D_f$ un intervalo.

- Se dice que f es *creciente* en el intervalo I si para cada par de valores

$x_1, x_2 \in I$ que verifican $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$. En el caso en que la última desigualdad sea estricta, entonces se dice que f es *estrictamente creciente*.

- Se dice que f es *decreciente* en el intervalo I si para cada par de valores $x_1, x_2 \in I$ que verifican $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$. En el caso en que la última desigualdad sea estricta, entonces se dice que f es *estrictamente decreciente*.

Ejemplo 1.8.15: Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función definida por $f(x) = 9x - \frac{1}{7}3x^3$, con base en la gráfica de la Figura 58.

Solución.

1. En el intervalo $I = [-3, 3]$ observamos que, conforme x aumenta, los valores de f también aumentan y la curva asciende, sin importar si son positivos o negativos. Es decir, si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera del intervalo I , tales que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$, es decir se mantiene la desigualdad y, por la Definición 1.8.4, f es estrictamente creciente en el intervalo I .
2. En el intervalo $I = [3, \infty)$ observamos que, al aumentar x , los valores de $f(x)$ disminuyen y la curva desciende. Es decir, si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera del intervalo I tales que $x_1 < x_2$, entonces ahora $f(x_1) > f(x_2)$ lo que indica que f es estrictamente decreciente en el intervalo I .
3. Aplicando el mismo razonamiento que en el caso anterior podemos afirmar que f es también estrictamente decreciente en el intervalo $I = (-\infty, -3]$.

Recordemos que $f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$ e indica la dirección en la cual la curva progresa en cada punto. Por ello, es de esperar que la derivada nos informe acerca del crecimiento o decrecimiento de una función.

Retomando la función del ejemplo anterior, podemos ver (Figura 58) que en el intervalo $(-3, 3)$ las pendientes de las rectas tangentes son positivas, por lo que $f'(x)$ debe ser positiva en este intervalo. Una derivada positiva implica que la curva está elevándose.

En el intervalo $(3, \infty)$, las pendientes de las rectas tangentes son negativas, por lo que $f'(x) < 0$ en dicho intervalo. Una derivada negativa implica que la curva desciende. Algo similar está ocurriendo en el intervalo $(-\infty, -3)$.

En $x = -3$ y $x = 3$ las pendientes de las rectas tangentes son nulas, que es donde se producen los cambios de crecimiento de la función. En ambos vemos que, además, hay extremos relativos.

En realidad, el análisis anterior acerca del signo de las derivadas o pendientes puede extenderse a cualquier función derivable en un intervalo.

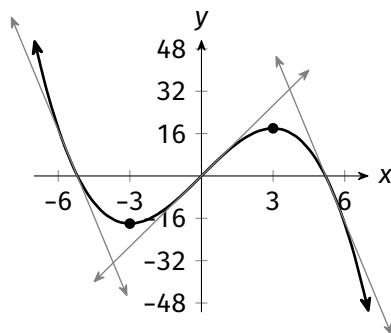


Figura 58. Función del Ejemplo 1.8.15.

Teorema 1.8.4 (Condición suficiente de crecimiento o decrecimiento): Sea f una función continua en un intervalo I , y derivable en el interior de I .

CASO 1 Si para todo x en el interior de I se tiene que $f'(x) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en I .

CASO 2 Si para todo x en el interior de I se tiene que $f'(x) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en I .

Observación 21: Debemos entender que si I es un intervalo de la forma $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ o $(a, b]$, su interior se refiere al abierto (a, b) , esto es, los extremos no forman parte del interior. Similarmente, para intervalos infinitos de la forma $[a, \infty)$ o (a, ∞) su interior es (a, ∞) , mientras que para los de la forma $(-\infty, b]$ o $(-\infty, b)$, su interior corresponde a $(-\infty, b)$.

¡Cuidado! Que una función sea estrictamente creciente (o decreciente) en intervalos disjuntos no implica que lo sea en la unión de estos.

Ejemplo 1.8.16: Aplique el teorema anterior para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 9x - 1/3 x^3$ y comparar con lo analizado en el Ejemplo 1.8.15.

Solución. Para aplicar el teorema determinamos la derivada de f , la cual es $f'(x) = 9 - x^2$. Como debemos estudiar su signo, resolvemos la inecuación $9 - x^2 > 0$:

$$9 - x^2 > 0 \iff x^2 < 9 \iff |x| < 3.$$

Entonces, $f'(x) > 0$ si y solo si $x \in (-3, 3)$, y como f es continua en todo $\mathbb{R}$, también lo es en $[-3, 3]$. Por lo tanto, f es estrictamente creciente en $[-3, 3]$.

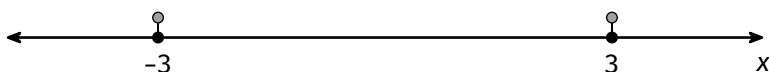
Así, de la continuidad de f en $(-\infty, 3]$ y en $[3, \infty)$, y del hecho que $f'(x) < 0$ en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$, se deduce por el Teorema 1.8.4 que f es estrictamente decreciente en $I = (-\infty, -3]$ y en $I = [3, \infty)$.

El camino de análisis del estudio de los signos de la derivada primera utilizando las inecuaciones se hace más complicado cuando las expresiones analíticas de las funciones son más complejas. Esto se hace más sencillo si hallamos en primer lugar los valores críticos de la función, teniendo en cuenta también el dominio de f , para poder plantear los intervalos de crecimiento/decrecimiento. Con base en el ejemplo anterior, procedemos como sigue:

PASO 1 Hallamos f' . En el ejemplo, $f'(x) = 9 - x^2$.

PASO 2 Hallamos todos los x para los cuales $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe. En el ejemplo, solo serán del primer tipo:

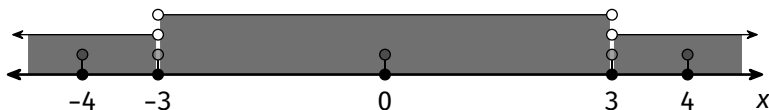
$$9 - x^2 = 0 \iff x = -3 \text{ o } x = 3.$$



PASO 3 Teniendo en cuenta el dominio de f , los intervalos de continuidad, y también los valores críticos, determinamos los intervalos abiertos en los que se divide el dominio y en los cuales haremos el análisis del signo de f' . En este caso, obtenemos los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, \infty)$.



PASO 4 Para cada intervalo abierto designemos un valor cualquiera que será el representante en su intervalo. Así, por ejemplo, elegimos -4 en $(-\infty, -3)$, 0 en $(-3, 3)$ y 4 en $(3, \infty)$.

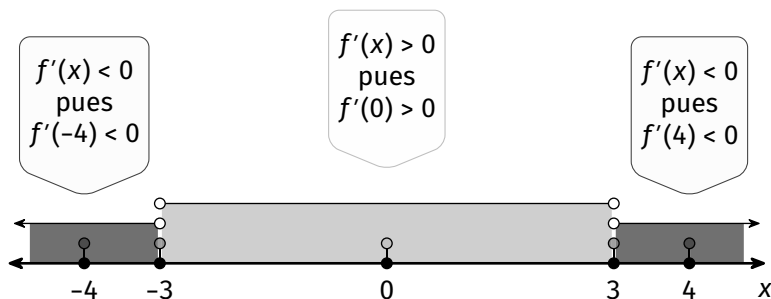


PASO 5 Evaluamos f' en cada uno de estos valores representantes. El signo de la derivada para este representante indicará el signo de la derivada en todo el intervalo.

CASO 1 Si $x = -4$, entonces $f'(-4) = -7 < 0$, por lo que $f'(x) < 0$ para cada $x \in (-\infty, -3)$.

CASO 2 Si $x = 0$, entonces $f'(0) = 9 > 0$, por lo que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-3, 3)$.

CASO 3 Si $x = 4$, entonces $f'(4) = -7 < 0$, por lo que $f'(x) < 0$ para cada $x \in (3, \infty)$.



De esta forma podemos concluir que f es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, -3]$ y $[3, \infty)$, y es estrictamente creciente en $[-3, 3]$ por ser continua en todos los reales.

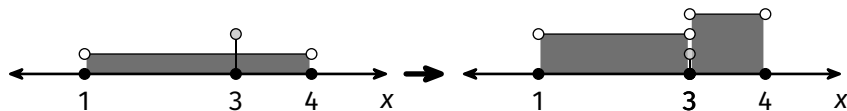
Veamos ahora por qué es válido decir que el signo de la derivada no cambia dentro de cada uno de los intervalos en los que se parte el dominio, según los valores críticos y las discontinuidades de la función.

La respuesta a esto la devuelve el *teorema de Bolzano* que enunciamos a continuación:

Teorema 1.8.5 (Teorema de Bolzano): Si g es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y el signo de $g(a)$ es opuesto al signo de $g(b)$, entonces existe algún $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.

Tomemos uno de estos intervalos I de análisis. La función f' debe ser continua y estar definida en este intervalo pues, si no lo fuera en algún punto $c \in I$ entonces, o bien $c \notin D_f$ o bien c sería un valor crítico, y, por lo tanto, en cualquiera de los casos debería haber sido el extremo de dos intervalos de análisis consecutivos, I_1 e I_2 , y no estar contenido en uno de ellos.

Es decir, si sucediera lo del gráfico siguiente y $c = 3$ fuera un valor no perteneciente al dominio de f o un valor crítico de la misma, no podría ocurrir



lo de la izquierda sino que tendría que haberse realizado una partición como la de la derecha.

Si f' es continua en I , ¿cómo sabemos que siempre tiene el mismo signo en I ? Supongamos que no es así, y que para algún $a \in I$, $f'(a) > 0$ y para otro $b \in I$, $f'(b) < 0$. Por el teorema de Bolzano, dado que f' es continua tiene que existir algún c entre a y b tal que $f'(c) = 0$. Esto quiere decir que c es un valor crítico de f , por lo que I estaría conteniendo un valor crítico y estaríamos como en lo descrito previamente. Esto nos garantiza entonces que los signos dentro de los intervalos de análisis no cambian.

Es importante recalcar que necesitamos la certeza de que f' sea continua en cada intervalo, y por eso tenemos que prestar atención a las tres características que nos determinan los intervalos: el *dominio*, los *valores de discontinuidad* y los *valores críticos*.

Ejemplo 1.8.17: Determine los intervalos que servirían para realizar el estudio de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función:

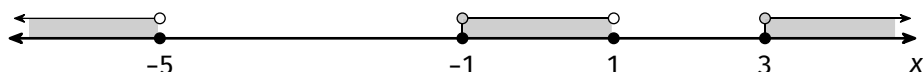
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -5 \leq x < -3, \\ x + 5 & \text{si } -3 \leq x < -1, \\ 4x - \frac{x^3}{3} & \text{si } 1 \leq x < 3. \end{cases}$$

Solución. Procedemos de la siguiente forma:

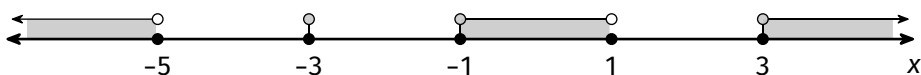
PASO 1 Dado que el dominio de esta función es

$$D_f = [-5, -1) \cup [1, 3)$$

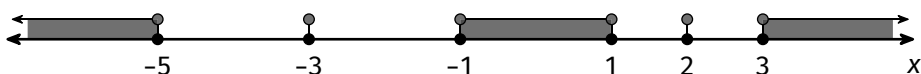
descartamos los valores -1 y 3 , dos de los extremos de los intervalos que definen este dominio, marcados con un punto gris. Además, se muestran de gris los intervalos que no forman parte del dominio de f .



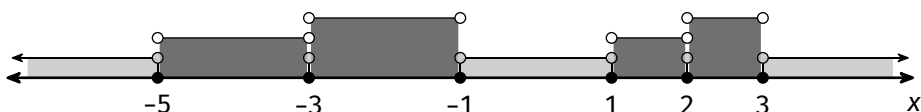
PASO 2 Luego, descartamos los valores en donde se producen discontinuidades, lo cual solo ocurre en $x = -3$.



PASO 3 Por ultimo, descartamos los valores críticos de f : $x = 2$ donde la derivada se anula, $x = -3$ donde había un punto de discontinuidad de f y por tanto, no existe la derivada allí, y los extremos del dominio $x = -5$ y $x = 1$ donde tampoco existe la derivada.



De este modo, los valores eliminados determinan cuatro intervalos abiertos en los que tenemos que hacer el estudio del signo de f' , los que se pintan de gris oscuro.



Es decir, haremos el análisis en los intervalos

$$(-5, -3), (-3, -1), (1, 2] \text{ y } [2, 3).$$

Retornando a la determinación de valores extremos, sabemos que si f tiene un valor máximo o un mínimo relativo en c , este debe ser un valor crítico de f . Sin embargo, no todos los valores críticos dan lugar a un máximo o un mínimo como ya vimos. Es necesario confirmar mediante algún método adicional, como el que llamamos la «prueba de la primera derivada» si ese valor crítico es un máximo o un mínimo o no es ninguno de ellos.

Definición 1.8.5 (Prueba de la primera derivada): Sea c un valor crítico de f , donde f es una función derivable al menos en un entorno alrededor de c .

CASO 1 Si f' cambia de positiva a negativa en $x = c$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$ y el valor máximo es $f(c)$.

CASO 2 Si f' cambia de negativa a positiva en $x = c$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$ y el valor mínimo es $f(c)$.

CASO 3 Si f' no cambia de signo en $x = c$, entonces f no tiene extremos relativos en $x = c$.

La Tabla 13 aplica la prueba de la primera derivada al Ejemplo 1.8.16, lo que permite sintetizar el estudio realizado y establecer los valores extremos.

Tabla 13

Intervalo	Representante	Signo de f'	f
$(-\infty, -3)$	-4	-	Decreciente
$(-3, 3)$	0	+	Creciente
$(3, \infty)$	4	-	Decreciente

Un máximo relativo se alcanza en $x = 3$ y su valor es $f(3) = 18$. Mientras que hay un mínimo relativo en $x = -3$, con valor $f(-3) = -18$. Estos se observan en la Figura 58.

Ejemplo 1.8.18: Determine los valores extremos de las siguientes funciones, si existen:

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; 2. $g(x) = 1/4x^4 - x^3$; 3. $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

Solución. Para cada una de las funciones analizamos su dominio, hallamos los valores críticos y los puntos de discontinuidad, estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y establecemos los máximos y/o mínimos relativos.

1. El dominio de $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ es el conjunto de los reales, y es continua por ser polinómica. Para hallar los valores críticos estudiamos su derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

que también es continua en $\mathbb{R}$. Se deduce que no hay valores donde f' no exista, así que solamente aquellos x donde $f'(x) = 0$ serán valores críticos de f .

Vemos que $f'(x) = 0$ cuando $4x(x^2 - 1) = 0$, lo que ocurre para $x = 0$ y $x = \pm 1$.

Así, el dominio quedará dividido en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. Estudiamos ahora cuáles solo los intervalos donde f crece y donde f decrece, con la Tabla 14 que resume el proceso.

Concluimos que los valores extremos relativos de la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ son $x = -1$ donde ocurre un mínimo relativo con valor $f(-1) = 2$, $x = 0$ donde $f(0) = 3$ es un valor máximo relativo, y $x = 1$ donde se tiene otro valor mínimo relativo con valor $f(1) = 2$. Observe que en ambos mínimos relativos se alcanza el mismo valor.

Tabla 14

Intervalo	Representante	Signo de f'	f
$(-\infty, -1)$	-2	-	Decreciente
$(-1, 0)$	$-\frac{1}{2}$	+	Creciente
$(0, 1)$	$\frac{1}{2}$	-	Decreciente
$(1, \infty)$	2	+	Creciente

2. La función $g(x) = 1/4x^4 - x^3$ es polinómica y continua en $\mathbb{R}$. Su derivada es $g'(x) = x^3 - 3x^2$, también definida y continua en $\mathbb{R}$.

Buscamos los valores de x donde $g'(x) = 0$:

$$g'(x) = x^3 - 3x^2 = 0 \iff x^2(x - 3) = 0 \iff x = 0 \quad \text{o} \quad x = 3.$$

Estudiamos el signo de la derivada con la Tabla 15 y concluimos sobre el crecimiento y decrecimiento de g .

Tabla 15

Intervalo	Representante	Signo g'	g
$(-\infty, 0)$	-1	-	Decreciente
$(0, 3)$	1	-	Decreciente
$(3, \infty)$	4	+	Creciente

La función tiene un único extremo en $x = 3$. El valor mínimo es $g(3) = -27/4$. Note que, aunque $x = 0$ es valor crítico de g , no existe un extremo en este valor pues no hay cambio de signo de la derivada a izquierda y derecha del mismo.

3. Consideremos ahora la función $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$, con dominio en $\mathbb{R}$. Estudiemos la existencia de valores críticos de esta función. Aplicando las reglas de derivación, su derivada es

$$h'(x) = (x-1)^{-2/3} = \frac{1}{(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}, \quad x \neq 1.$$

Como observamos, no existe x tal que $h'(x) = 0$. Pero, como h es continua en $x = 1$ debemos estudiar la existencia de la derivada en $x = 1$. Veremos que conviene realizarlo a través de las derivadas laterales. La derivada

lateral derecha en $x = 1$ se obtiene mediante el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)} - 0}{(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Como este límite no existe, $h'_+(1)$ no existe y, por tanto, h no es derivable en $x = 1$. Así, $x = 1$ es valor crítico de f .

Para determinar si en el punto $(1, 0)$ existe o no recta tangente vertical analizamos la derivada lateral izquierda:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Dado que las dos derivadas laterales en $x = 1$ son de tipo $+\infty$, en $x = 1$ la curva tiene una *recta tangente vertical* (ver Definición 1.3.4).

Estudiemos ahora el signo de la derivada en aquellos intervalos en los cuales esta existe con la Tabla 16.

Tabla 16

Intervalo	valor de prueba	Signo h'	h
$(-\infty, 1)$	-1	+	Creciente
$(1, \infty)$	2	+	Creciente

Concluimos que h es una función siempre creciente y no posee valores extremos. En la Figura 59 se evidencia que en $x = 1$ tiene una recta tangente vertical.

Ejemplo 1.8.19: Determine los extremos absolutos de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en el intervalo $[-6, 3]$.

Solución. Observamos que la función está definida y es continua en el dominio acotado $[-6, 3]$. Por el Teorema 1.8.2 van a existir extremos absolutos en este intervalo. Estos pueden alcanzarse únicamente en el interior (valores críticos de f) o en los extremos del intervalo. No existen otros candidatos a extremos absolutos para una función continua en un intervalo cerrado.

Determinamos los valores críticos de f al resolver la ecuación

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x - 2)(x + 3) = 0.$$

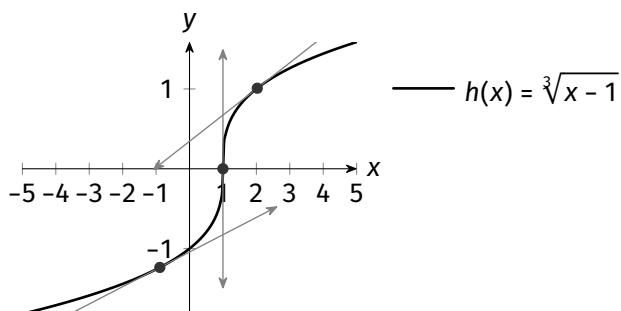


Figura 59

Las soluciones son $x = -3$ y $x = 2$, ambas pertenecientes al dominio.

Bastará hallar y comparar los valores de la función en los extremos del intervalo y en los valores críticos por lo dicho anteriormente. Esto se resume en la Tabla 17.

Tabla 17

x	$f(x)$
-6	-108
-3	81
2	-44
3	-27

Luego, en $x = -6$ se alcanza el valor mínimo absoluto siendo este -108, y en $x = -3$ el valor máximo absoluto de 81.

Concluimos entonces que para determinar los extremos absolutos de una función continua f en un intervalo $[a, b]$, proceda de la siguiente manera:

PASO 1 Encuentre los valores críticos de f en (a, b) .

PASO 2 Evalúe f en todos los valores críticos y en los extremos del intervalo dominio a y b .

PASO 3 El mayor de los valores obtenidos en el paso anterior es el valor máximo absoluto de f en $[a, b]$ y el menor valor es el mínimo absoluto de f en $[a, b]$.

Ejemplo 1.8.20: Analice la veracidad o falsedad de cada uno de los siguientes enunciados si la Figura 60 representa la gráfica de la función derivada primera de f . Justifique su respuesta.

1. La función f presenta un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$.
2. La función f es decreciente en el intervalo $(-1, +\infty)$.
3. En $x = 0$ la gráfica de la función f posee recta tangente horizontal.
4. La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

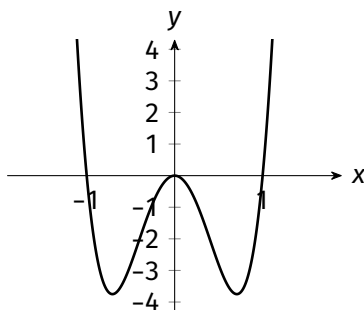


Figura 60

Solución. La gráfica presentada corresponde a la función derivada primera, es decir, f' , y dado que para todo número real existe un valor de la derivada, f es continua en el conjunto de los números reales.

1. **Verdadero.** Tanto -1 como 1 son puntos de continuidad y valores críticos de f pues $f'(-1) = f'(1) = 0$.
En $(-\infty, -1)$, f' es positiva lo cual implica que f es creciente; en $(-1, 1)$, f' es negativa lo cual implica que f es decreciente; en -1 , f pasa de ser creciente a decreciente. Entonces, en $x = -1$ f tiene un máximo local.
En $(-1, 1)$, f' es negativa lo cual implica que f es decreciente y en $(1, \infty)$, f' es positiva lo cual implica que f es creciente. En $x = 1$, f pasa de decrecer a crecer. Entonces, en $x = 1$, f presenta un mínimo local.
2. **Falso.** Como $f' > 0$ en $(1, +\infty)$, f no puede ser decreciente en todo el intervalo $(-1, +\infty)$.
3. **Verdadero.** Como $f'(0) = 0$, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$ es 0 , entonces la recta tangente en este punto es horizontal.
4. **Falso.** Para determinar la ecuación de la recta tangente en un punto se necesita más información de la que dispone. Si bien, se conoce la pendiente de la recta y la abscisa del punto de tangencia, se desconoce la ordenada correspondiente a la abscisa. En consecuencia, no es posible establecer la ecuación de la recta.

EJERCICIOS 1.8.2

- En cada inciso, si es posible, trace la gráfica de una función continua f con las propiedades indicadas en el intervalo $[-10, 10]$.
 - f tiene un mínimo absoluto en $x = -10$ y un máximo absoluto en $x = 10$.
 - f tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ y un máximo absoluto en $x = 7$.
 - f tiene exactamente dos máximos absolutos y dos mínimos absolutos.
 - f tiene un máximo relativo en $x = -5$ y no es derivable en él, tiene un máximo absoluto en $x = -10$ y un mínimo absoluto en $x = 5$.
 - f tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ pero ningún máximo absoluto.
- Sea $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 50$. Determine los valores extremos absolutos, si los hay, en cada uno de los intervalos indicados.
 - $[-2, 4]$
 - $[2, 4]$
 - $[-3, 5]$
 - $[-1, 5]$
- Considere la gráfica de la Figura 61.
 - Establezca la o las abscisas de los puntos donde f presenta máximos o mínimos absolutos y/o relativos.
 - Analice la existencia de la recta tangente en $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$. Justifique.

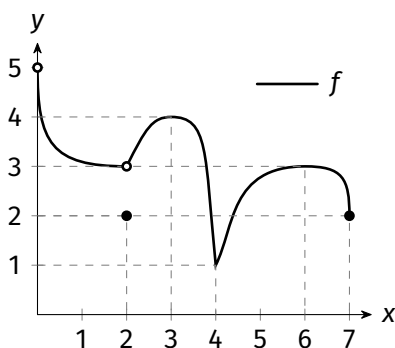


Figura 61

- Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:
 - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 12$.
 - $f(x) = x^5 - 4x^3 + 1$.
 - $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.
 - $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

e. $f(x) = x^2 \ln(x)$.

f. $f(t) = t \cdot e^t$.

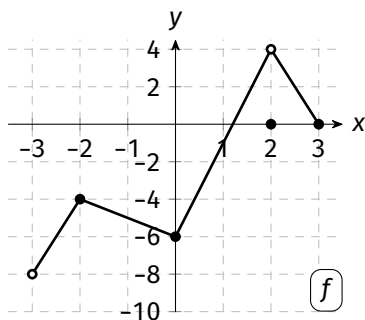
g. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

h. $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

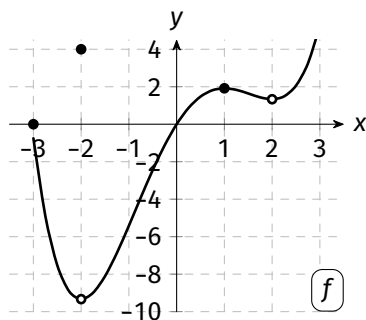
i. $f(x) = x - \ln(x)$.

j. $f(x) = xe^{-x^2}$.

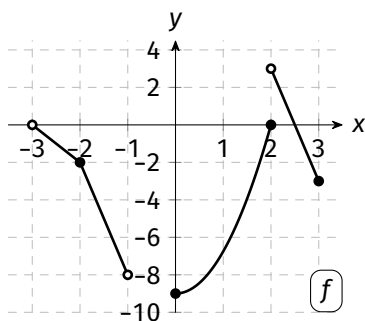
5. Si $x = c$ es un punto crítico de f , explique en qué casos no hay máximo ni mínimo relativo en $x = c$. Ejemplifique.
6. A partir de las representaciones gráficas que siguen, determine los extremos absolutos y relativos de las funciones correspondientes.



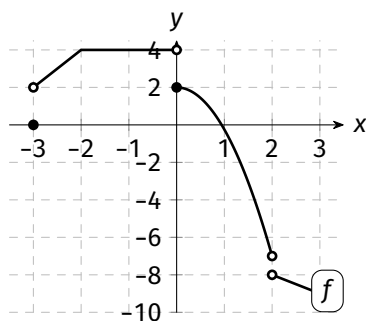
a)



b)

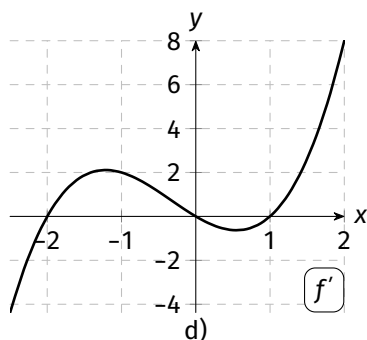
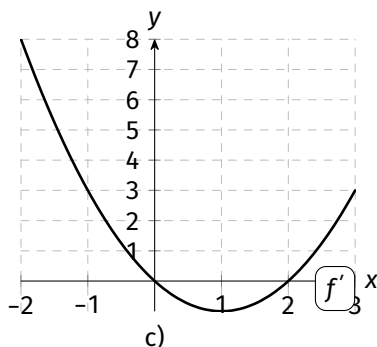
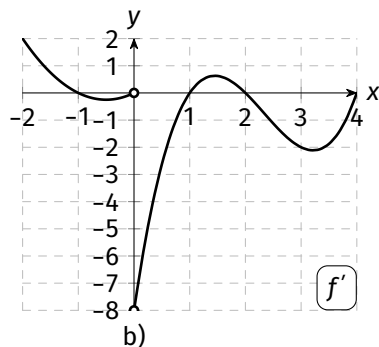
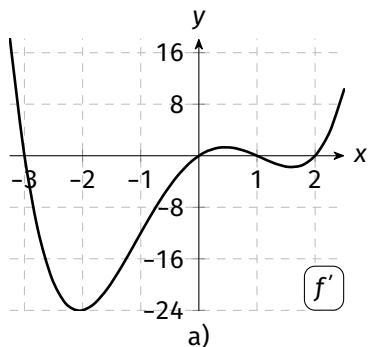


c)



d)

7. Las siguientes figuras muestran la gráfica de la primera derivada de una función. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos, asumiendo que el comportamiento de la función es el que sugiere el gráfico.



8. Cierta empresa de tecnología ha estimado que, al cabo de t meses, el porcentaje de usuarios (sobre la población total de Argentina) que adoptan su más reciente plataforma digital está dado por

$$p(t) = \frac{900}{5 + 5e^{-0.1t}} - 90.$$

- Calcule e interprete $p(0)$ y $p(12)$. ¿Cuál es el incremento promedio mensual en el porcentaje de usuarios que se estima durante el primer año?
- Estudie, si existe, $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$. Si existe, hállelo e interprete el resultado en el contexto del problema.
- Compruebe que $p'(t) > 0$ para todo $t > 0$.
- ¿Cuál es la relación entre el valor obtenido en b. y lo analizado en c.?
- Utilice [GeoGebra](#) para graficar la función p y verificar visualmente los resultados de los ítems anteriores.

Concavidad de una función

Hasta el momento estudiamos qué información nos brinda la derivada primera de una función respecto al crecimiento/decrecimiento de la misma. Esto nos permitió identificar máximos/mínimos relativos y absolutos. Sin embargo, todavía no podemos determinar la forma o la «curvatura» que presenta la gráfica de la función ni caracterizar el «tipo de crecimiento/decrecimiento» de la misma.

Para este análisis es necesario recurrir a la derivada de la derivada, denominada *segunda derivada* de la función. La derivada f' de f es en sí misma una función y, en consecuencia, puede tener una derivada propia. Si f' es derivable, entonces su derivada se denota por f'' o d^2y/dx^2 .

En tanto haya derivabilidad es posible continuar el proceso de derivación para obtener la tercera derivada de f denotada por f''' , la cuarta derivada de f que se expresa como $f^{(iv)}$ o $f^{(4)}$, y así sucesivamente. El número de veces que f se deriva se llama el *orden de la derivada*. La *derivada de n -ésimo orden* se denota como $d^n y/dx^n = f^{(n)}(x)$. Para los cálculos se aplican las reglas de derivación vistas anteriormente.

En las gráficas de funciones crecientes o decrecientes se presentan diversas situaciones como se muestra en la Figura 62.

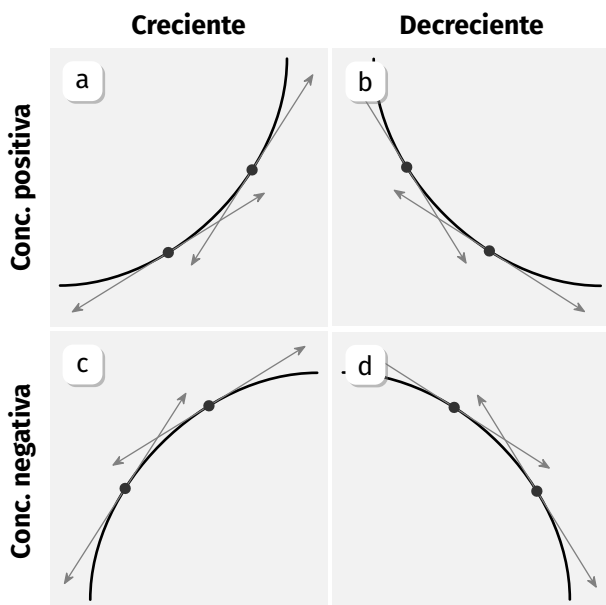


Figura 62

Podemos observar que las funciones de las gráficas **a** y **c** son crecientes pero «se ven» distintas porque flexionan en direcciones diferentes, o tienen curvaturas diferentes. Similar situación encontramos al comparar las gráficas de las funciones **b** y **d**, ambas decrecientes.

Observemos las posiciones que toman las rectas tangentes. En las Figuras 62 **a** y **b** dichas rectas se encuentran por debajo de la curva; en cambio, en las Figuras 62 **c** y **d** se encuentran por arriba de la curva. Esta situación da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.8.6 (Concavidad de la gráfica de una función): Si la gráfica de una función f se ubica por arriba de todas las rectas tangentes en un intervalo (a, b) , entonces la gráfica es *cóncava hacia arriba* en dicho intervalo.

Si la gráfica de una función f se encuentra por debajo de todas las rectas tangentes en un intervalo (a, b) , entonces la gráfica es *cóncava hacia abajo* en dicho intervalo.

Dicho esto, nos preguntamos, ¿es posible relacionar la curvatura de f con el concepto de derivada?

Observemos que en las Figura 62 **a** y **b** la pendiente de la tangente aumenta a medida que x aumenta; esto quiere decir que la derivada f' es una función creciente. Pero en las Figuras 62 **c** y **d** la pendiente de la recta tangente disminuye a medida que x aumenta, por lo cual la derivada f' es decreciente. Estos resultados se expresan en el teorema que sigue.

Teorema 1.8.6 (Concavidad y derivada primera): Si f es una función derivable en el intervalo (a, b) entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, b) si f' es creciente en dicho intervalo.

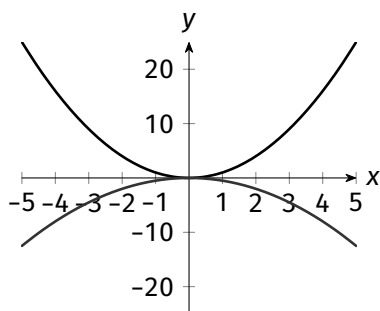
En cambio, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en (a, b) si f' es decreciente en ese intervalo.

Ejemplo 1.8.21: La gráfica de $f(x) = ax^2$ con $a > 0$ es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$ porque su derivada $f'(x) = 2ax$ es creciente en $\mathbb{R}$, mientras que si $a < 0$, la gráfica resulta cóncava hacia abajo. La Figura 63 muestra gráficas para dos valores de a .

Ejemplo 1.8.22: Si $a > 0$, la gráfica de cada función $f(x) = ax^3$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ pues $f'(x) = 3ax^2$ es decreciente en este intervalo, mientras que en $(0, +\infty)$ la gráfica de f es cóncava hacia arriba porque la derivada es creciente.

Para valores negativos del parámetro a la gráfica de cada función $g(x) = ax^3$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, +\infty)$.

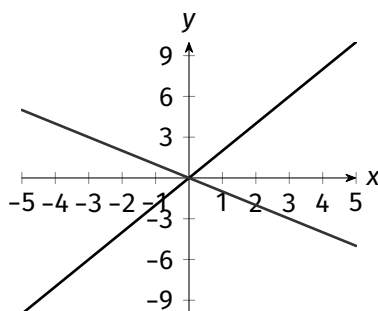
La Figura 64 muestra gráficas para diferentes valores de a .



$$\text{— } f(x) = x^2$$

$$\text{— } g(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

(a)

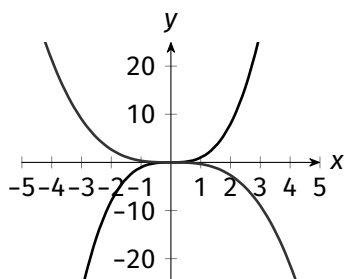


$$\text{— } f'(x) = 2x$$

$$\text{— } g'(x) = -x$$

(b)

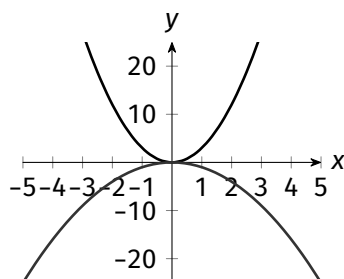
Figura 63



$$\text{— } f(x) = x^3$$

$$\text{— } g(x) = -\frac{1}{3}x^3$$

(a)



$$\text{— } f'(x) = 3x^2$$

$$\text{— } g'(x) = -x^2$$

(b)

Figura 64

Por lo anteriormente visto, si la derivada de la derivada es positiva en un intervalo (a, b) , entonces f' es creciente en dicho intervalo. De la misma manera, si la derivada de la derivada es negativa en (a, b) , entonces f' es decreciente en dicho intervalo. Lo expresado se explicita en el siguiente teorema.

Teorema 1.8.7 (Concavidad y derivada segunda): Sea f una función dos veces

derivable en el intervalo abierto (a, b) .

CASO 1 Si para todo $x \in (a, b)$ se tiene que $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, b) .

CASO 2 Si para todo $x \in (a, b)$ se tiene que $f''(x) < 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en (a, b) .

Los puntos del dominio de f donde se manifiestan cambios de concavidad tienen un interés especial, por lo que hay una terminología asociada con ellos.

Definición 1.8.7 (Punto de inflexión): Si f es continua en un intervalo abierto que contiene a c y si la gráfica de f cambia la concavidad en el punto $(c, f(c))$, entonces se dice que $(c, f(c))$ es un *punto de inflexión* de la gráfica de f .

El siguiente teorema nos da una condición para identificar posibles puntos de inflexión.

Teorema 1.8.8 (Condición necesaria para tener puntos de inflexión): Si f es continua en $x = c$ y $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f , entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.

Ejemplo 1.8.23: Para la función $f(x) = 3x^3 - 54x^2 + 400$ determine los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Identifique los puntos de inflexión y confirme resultados con una gráfica que relacione los conceptos.

Solución. El dominio de f es $\mathbb{R}$ y las derivadas primera y segunda resultan ser $f'(x) = 9x^2 - 108x$ y $f''(x) = 18x - 108$, respectivamente. Notemos que f , f' y f'' son funciones derivables (y, por lo tanto, continuas) en todo su dominio, por ser funciones polinómicas.

Para analizar los intervalos en los cuales f es cóncava hacia arriba o hacia abajo, determinaremos aquellos intervalos en donde f' crece o decrece, para lo cual resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$ obteniendo la solución $x = 6$. Así, en $(-\infty, 6)$ f' decrece, pues $f'' < 0$. Se concluye que en este intervalo la gráfica de f es cóncava hacia abajo. En $(6, \infty)$, f' crece pues $f'' > 0$; por tanto, f es cóncava hacia arriba allí. En $x = 6$ hay un punto de inflexión porque hay cambio en la concavidad de la gráfica y f es continua en un entorno de $x = 6$. El punto $(6, f(6)) = (6, -896)$ es el punto de inflexión de la función f .

La Figura 65 muestra la gráfica de f , f' y f'' , donde podemos observar lo expresado.

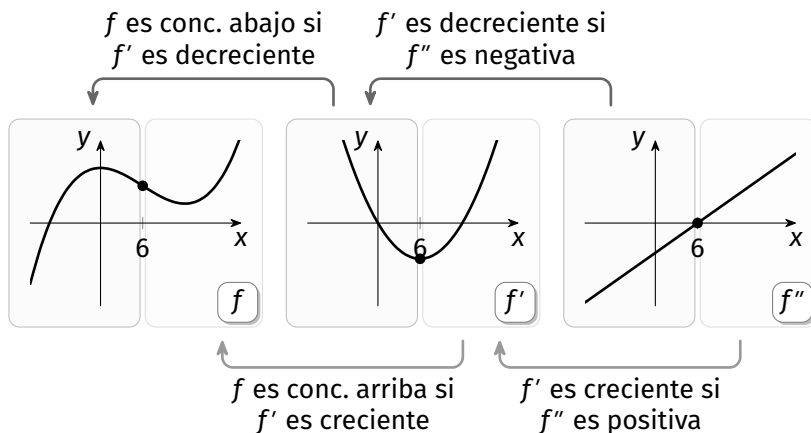


Figura 65

Ejemplo 1.8.24: Para la función $g(x) = \sqrt[3]{(x-2)^5}$ con dominio en $\mathbb{R}$, tenemos

$$g'(x) = \frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2} \quad \text{y} \quad g''(x) = \frac{10}{9} \cdot \sqrt[3]{(x-2)^{-1}}, \quad x \neq 2.$$

La derivada segunda no existe en $x = 2$. Dado que en $(-\infty, 2)$ es $g'' < 0$, entonces la gráfica de g es cóncava hacia abajo en este intervalo. En $(2, \infty)$ se tiene que $g'' > 0$, entonces la gráfica de g es cóncava hacia arriba en este intervalo. Por tanto, como g es continua en $x = 2$, el punto $(2, g(2)) = (2, 0)$ es un punto de inflexión.

Observación 22: Note que el hecho de que $f''(c) = 0$ o no exista $f''(c)$ no basta para garantizar que $(c, f(c))$ sea un punto de inflexión. Por ejemplo, la función $f(x) = x^6$ satisface $f''(0) = 0$ pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión pues su gráfica es cóncava hacia arriba en todo su dominio. Por otro lado, $f''(c)$ puede no existir porque f es discontinua en $x = c$ y, en tal caso, $(c, f(c))$ no puede ser un punto de inflexión. Por ello, es importante destacar que un punto de inflexión se presenta si y solo si f es continua en $x = c$ y el punto $(c, f(c))$ separa concavidades opuestas.

Otra aplicación de la derivada segunda es la prueba para encontrar los valores máximos y mínimos relativos.

Proposición 1.8.9 (Prueba de la derivada segunda): Sea f una función dos veces derivable y c un valor crítico de f .

CASO 1 Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$ y el valor mínimo es $f(c)$.

CASO 2 Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$ y el valor máximo es $f(c)$.

CASO 3 Si $f''(c) = 0$ no es posible decidir acerca de la existencia de un extremo relativo en $x = c$ y por lo tanto el criterio falla.

Observación 23: Si $f''(c) = 0$ en un valor crítico de f , tendremos que usar la prueba de la derivada primera. Esta última es más general que la de la derivada segunda porque podemos aplicarla incluso en valores críticos donde la derivada no exista, siempre que la función sea continua en él. La prueba de la derivada segunda se aplica a valores críticos donde la función es dos veces derivable y sólo se obtiene información si $f''(c) \neq 0$.

Ejemplo 1.8.25: Utilice, siempre que sea posible, la prueba de la segunda derivada para encontrar los extremos relativos de la función $f(x) = 2x^5 - 10x^3$; si no, recurra a otro procedimiento.

Solución. Para resolverlo, vamos a seguir la siguiente secuencia:

1. Identificamos el dominio de la función: $\mathbb{R}$. Observamos, además, que f es derivable al menos dos veces en su dominio por ser una función polinómica.
2. Obtenemos la derivada primera, $f'(x) = 10x^4 - 30x^2$ y, para hallar los valores críticos, planteamos la ecuación $f'(x) = 0$ resolviendo para x :

$$10x^4 - 30x^2 = 0 \iff 10x^2(x^2 - 3) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = \sqrt{3} \text{ o } x = -\sqrt{3}$$

3. Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 40x^3 - 60x$.
4. Estudiamos el signo de la derivada segunda en los valores críticos:
 - $f''(-\sqrt{3}) < 0$. Entonces, en $x = -\sqrt{3}$, f tiene un máximo relativo.
 - $f''(\sqrt{3}) > 0$. Por tanto, en $x = \sqrt{3}$ la función f tiene un mínimo relativo.
 - Como $f''(0) = 0$ no podemos determinar si en $x = 0$ hay un valor extremo o un punto de inflexión.

Por el criterio de la derivada primera analizamos el signo de f' en los intervalos a ambos lados de $x = 0$. Para todos los valores de x en el intervalo $(-\sqrt{3}, 0)$, $f'(x) < 0$, y en el intervalo $(0, \sqrt{3})$ se tiene también que $f'(x) < 0$. Como no hay cambio de signo en la derivada primera, no hay un valor extremo en $x = 0$.

La Figura 66 muestra gráficamente los resultados obtenidos analíticamente.

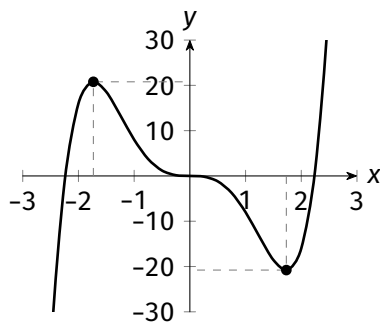


Figura 66

A continuación analizaremos cómo interpretar la derivada primera y segunda en un contexto variacional, con el fin de caracterizar el tipo de crecimiento o decrecimiento de una función.

Dada una función f dos veces derivable, su derivada f' mide la tasa de cambio de la función f . Por la misma razón, la función derivada segunda f'' es la medida de la tasa de cambio de la derivada primera f' . Es decir, la derivada segunda mide la tasa de cambio de la tasa de cambio de la función original f . Sea x_0 un punto del intervalo abierto (a, b) contenido en el dominio de f . Entonces:

1. $f'(x_0) > 0$ significa que *el valor de la función tiende a aumentar a medida que x aumenta a partir de x_0 .*
2. $f'(x_0) < 0$ significa que *el valor de la función tiende a disminuir a medida que x aumenta a partir de x_0 .*
3. $f''(x_0) > 0$ significa que *la pendiente de la curva tiende a aumentar a medida que x aumenta a partir de x_0 .*
4. $f''(x_0) < 0$ significa que *la pendiente de la curva tiende a disminuir a medida que x aumenta a partir de x_0 .*

De este modo, una derivada primera positiva junto con una derivada segunda positiva en $x = x_0$ implica que la pendiente de la curva aumenta en un intervalo suficientemente pequeño que contiene a x_0 . En tal caso, decimos que la función *crece con una tasa creciente*. Análogamente, una derivada primera positiva junto con una derivada segunda negativa, hacen que la pendiente de la curva sea positiva y decreciente, por lo que la función se dice que *crece a tasa decreciente*.

En el caso de que $f'(x_0) < 0$ y $f''(x_0) > 0$, la pendiente negativa de la curva tiende a ser menos empinada cuando se incrementa x . Es decir, el

decrecimiento se va desacelerando. En esta situación decimos que la función *decrece a tasa creciente*.

En cambio, cuando $f'(x_0) < 0$ y $f''(x_0) < 0$, esto indica que la pendiente negativa tiende a ser cada vez más empinada cuando se incrementa x , por lo que la función *decrece a tasa decreciente*. Es decir, su decrecimiento se acelera.

La Tabla 18 y la gráfica ilustran a través de los puntos A, B, C, D, E y F lo recientemente expresado.

Tabla 18

Valor	Signo o valor de f'	Signo de f''	Punto en la gráfica
x_1	+	-	A
x_2	0	-	B
x_3	-	-	C
x_4	-	+	D
x_5	0	+	E
x_6	+	+	F

Las tres primeras situaciones reflejan una curva en forma de U invertida (cóncava hacia abajo) mientras que las últimas tres reflejan una curva en forma de U (cóncava hacia arriba).

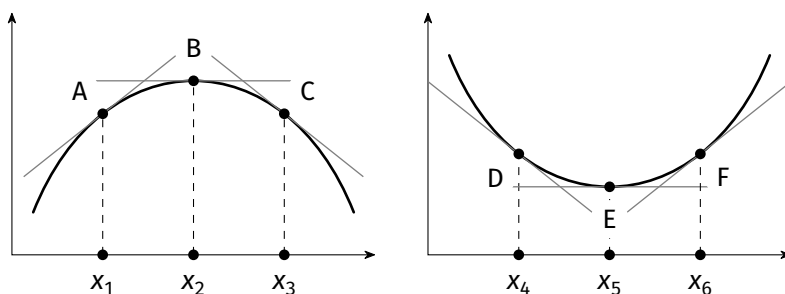


Figura 67

Ejemplo 1.8.26: Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, teniendo en cuenta que la gráfica de la Figura 68 corresponde a la función derivada primera de f . Justifique su respuesta.

1. La función f presenta tangentes horizontales en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 4$.

2. La función f presenta un máximo local en $x = 1$.
3. La función f es creciente en el intervalo $(4, +\infty)$.
4. En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función f es cóncava hacia abajo.

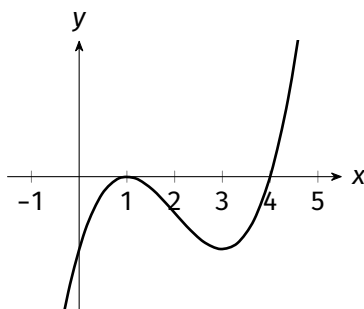


Figura 68

Solución. Observe que la gráfica corresponde a la derivada primera de f .

1. **Verdadero.** Dado que $f'(1) = f'(4) = 0$, la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de f en estos puntos es 0 y, por lo tanto, se trata de rectas horizontales.
2. **Falso.** Si bien $f'(1) = 0$, f' no cambia de signo a izquierda y derecha de $x = 1$, siendo no positiva en un intervalo abierto que contiene a este punto.
3. **Verdadero.** Como f' es positiva en este intervalo, f es creciente allí.
4. **Falso.** En este intervalo, f' crece, por lo que su derivada f'' es no negativa. Así, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1)$.

Ejemplo 1.8.27: Para los siguientes enunciados considere la gráfica de la segunda derivada de la función continua $y = f(x)$ que se muestra en la Figura 69. Decida la veracidad o falsedad de cada uno de ellos:

1. f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, a)$.
2. f presenta puntos de inflexión en los puntos con abscisas $x = a$ y $x = b$.
3. f' es decreciente en el intervalo (a, b) .

Solución. Para responder debemos considerar la información que proporciona la gráfica, en cuanto al signo de $f''(x)$ y a los intervalos de crecimiento (o de decrecimiento).

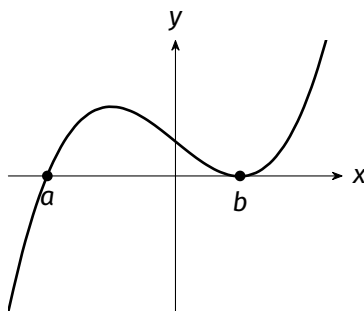


Figura 69

1. **Verdadero.** Dado que $f'' < 0$ en $(-\infty, a)$, la función f es cóncava hacia abajo en este intervalo.
2. **Falso.** En $x = b$, $f''(b) = 0$, por lo que b es punto crítico de f' . Además, $f''(x) > 0$ en el intervalo (a, b) y en (b, ∞) . Como f'' no cambia de signo a izquierda y derecha de b , no existe punto de inflexión de abscisa b .
3. **Falso.** Como en (a, b) , $f'' = (f')' > 0$, en consecuencia, f' es creciente en este intervalo.

Ejemplo 1.8.28: En la siguiente figura se muestra la gráfica de la primera derivada de una función continua g en todo $\mathbb{R}$. A partir de la misma y justificando su respuesta, determine:

1. Abscisas de los puntos donde la recta tangente a g es horizontal.
2. Intervalos de crecimiento de g .
3. Máximos locales y mínimos locales.
4. Intervalos donde la gráfica de g es cóncava hacia abajo.
5. Puntos de inflexión, si existen.

Solución.

1. Las abscisas de los puntos donde la recta tangente es horizontal corresponden a los ceros de g' y se producen en $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.
2. En los intervalos $(-5, -1)$, $(0, 1)$ y $(3, \infty)$, $g' > 0$ y por lo tanto g es creciente.

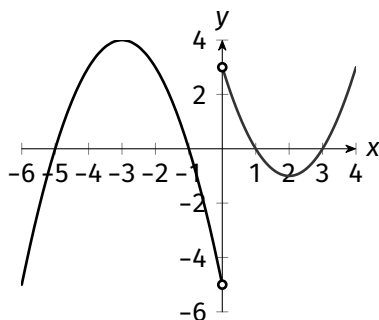


Figura 70

Tabla 19

Intervalo	Representante	Signo de g'	g
$(-\infty, -5)$	-6	-	Decreciente
$(-5, -1)$	-4	+	Creciente
$(-1, 0)$	-0.5	-	Decreciente
$(0, 1)$	0.5	+	Creciente
$(1, 3)$	2	-	Decreciente
$(3, \infty)$	4	+	Creciente

3. En primer lugar, detectamos los valores críticos de g . Como se observa de la gráfica en $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 3$ la derivada es cero, mientras que en $x = 0$ no existe. A continuación analizamos el signo de la derivada en los intervalos correspondientes con la Tabla 19.

Como se deduce del análisis presentado en la siguiente tabla, la función alcanza máximos locales en $x = -1$ y en $x = 1$ y mínimos locales en $x = -5$ y en $x = 3$. Dado que $x = 0$ es punto de continuidad de g y la derivada cambia de signo a izquierda y derecha de este punto, se tiene un mínimo local en $x = 0$. Cabe aclarar que en los puntos donde la derivada vale cero, la continuidad está asegurada por lo que el cambio de signo a izquierda y derecha de estos puntos ya garantiza la existencia de extremos locales. No obstante, en el caso en que la derivada no exista, como sucede en $x = 0$, sin la hipótesis de continuidad no puede asegurarse la existencia de extremo local por medio de derivadas, pues sin ellos, y aún sabiendo que no hay continuidad, se puede probar la existencia de extremos locales por definición.

4. En los intervalos $(-3, 0)$ y $(0, 2)$, g' es decreciente y, por tanto, la gráfica de

g es cóncava hacia abajo.

5. En $x = -3$ y en $x = 2$, g' tiene extremos locales y, dado que $g''(-3) = g''(2) = 0$, son puntos de continuidad de g' y también de g . El signo de la derivada segunda cambia de izquierda a derecha de estos puntos pues se observa en la gráfica que las pendientes de las rectas tangentes cambian de signo. Se concluye que en $x = -3$ y en $x = 2$ son abscisas de puntos de inflexión. En $x = 0$ hay un punto angular, pues g es continua y g' no existe. No hay punto de inflexión.

Ejemplo 1.8.29: El producto bruto interno (PBI) de un país en vías de desarrollo desde 2015 a 2023 puede ser aproximado mediante el modelo

$$G(t) = -0.2t^3 + 2.4t^2 + 60,$$

donde G se expresa en miles de millones de dólares y el tiempo t se mide en años a partir del comienzo de 2015, $0 \leq t \leq 9$.

1. Con base en las gráficas de G' y G'' , y la información que surja de las mismas, identifique:
 - a. El período en el cual el crecimiento del PBI se aceleró y creció;
 - b. El período en el cual el crecimiento del PBI se desaceleró;
 - c. El momento en el que la tasa de crecimiento del PBI alcanzó su máximo valor;
 - d. El valor máximo de la tasa de crecimiento del PBI.
2. ¿Cuál es el máximo PBI alcanzado durante el período 2015-2023?
3. Imaginen que ustedes son asesores económicos del ministro de economía de este país. El ministro está muy contento con la evolución del PBI en los últimos 10 años y analiza la posibilidad de impulsarla aceptando un crédito de muchos miles de millones de dólares del FMI a devolver durante los próximos 20 años. Asumiendo que se pueden hacer proyecciones con el modelo del PBI por los próximos 20 años, ¿qué le aconsejarían al ministro y por qué? *Justificar usando conocimientos matemáticos del Cálculo.*

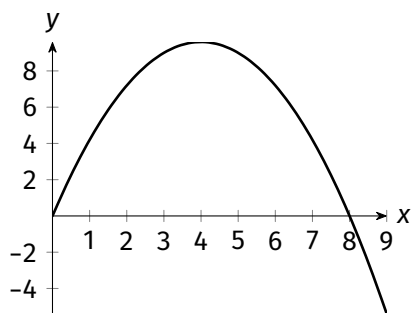
Solución.

1. Obtenemos las expresiones de las derivadas

$$G'(t) = -0.6t^2 + 4.8t$$

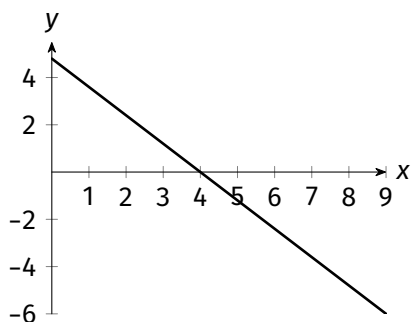
$$G''(t) = -1.2t + 4.8,$$

y graficamos ambas funciones, teniendo en cuenta que el dominio de ambas es el intervalo $(0, 9)$.



— $G'(t)$

(a)



— $G''(t)$

(b)

- a. Para ver cuándo el crecimiento del PBI se aceleró, buscamos los valores de t en los cuales tanto G' como G'' son positivas. Notamos que en el intervalo $(0, 4)$ las gráficas de G' y G'' se encuentran por encima del eje x , por lo que ambas son positivas en este intervalo. Así, G crece a tasa creciente desde el inicio de 2015 hasta el final de 2018, esto es, el crecimiento del PBI se aceleró en dicho periodo.
 - b. Ahora buscamos los valores de t donde G' sigue siendo positiva pero G'' es negativa. Esto ocurre en el intervalo $(4, 8)$, pues allí la gráfica de G' se encuentra por encima del eje x y la de G'' , por debajo. Concluimos que G crece a tasa decreciente desde el inicio de 2019 hasta el final de 2022, siendo éste el periodo donde el PBI desaceleró su crecimiento.
 - c. Buscamos el máximo absoluto de la derivada G' , que es la que representa la tasa de crecimiento del PBI. Para ello, buscamos primero sus puntos críticos, esto es, dónde G'' se anula (por ser polinómica). Visualizamos que $G''(4) = 0$. Además, si $0 < t < 4$, $G''(t) > 0$, mientras que si $4 < t < 9$, $G''(t) < 0$. Esto indica que $G'(t)$ alcanza un máximo local en $t = 4$. Observando la gráfica de $G'(t)$ podemos afirmar que en $t = 4$ la derivada alcanza el máximo absoluto; es decir, al final de 2018 o comienzo de 2019 la tasa de crecimiento del PBI es máxima.
 - d. El valor máximo de la tasa de crecimiento del PBI es $G'(4) = 9.6$ miles de millones de dólares.
2. Para buscar ahora el mayor valor del PBI, analizamos los puntos críticos de G . Dado que únicamente $G'(8) = 0$, entonces 8 es el único valor crítico de G . Evaluamos la función G en los extremos del intervalo $[0, 9]$ y en el valor crítico:

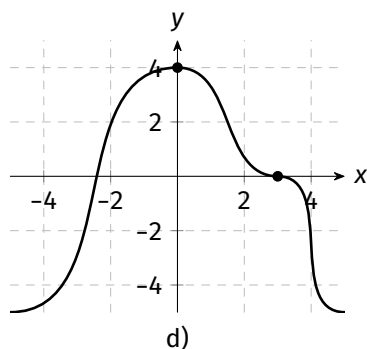
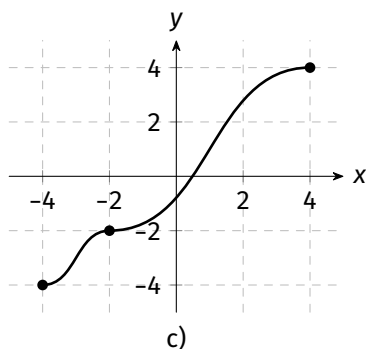
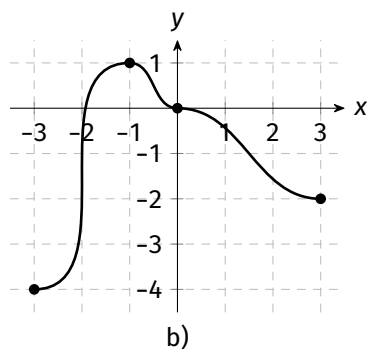
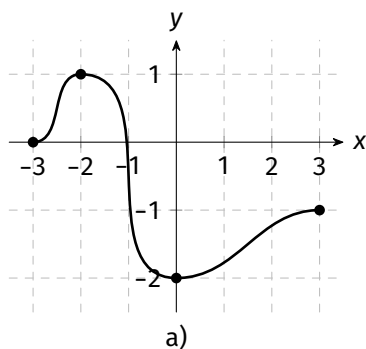
$$G(0) = 60, \quad G(8) = 111.2, \quad G(9) = 108.6.$$

Afirmamos que a fines de 2022 o principios de 2023 el PBI alcanzó su máximo absoluto, siendo este máximo de 111.2 miles de millones de dólares.

- Si se mantuviera el comportamiento del PBI durante los próximos 20 años, como G decrece a tasa creciente a partir de 2023 (G' y G'' son ambas negativas para $t > 8$), el PBI a partir de 2023 no solo decrece sino que lo hace a un ritmo muy acelerado. Por ello, no aconsejamos al ministro aceptar el préstamo.

EJERCICIOS 1.8.3

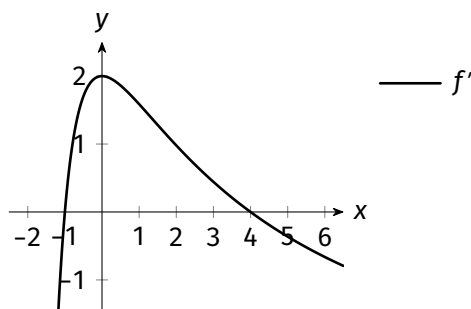
- Si f es una función dos veces derivable y el punto $(c, f(c))$ de su dominio es un punto de inflexión, ¿ f' tiene un extremo local en este punto? Justifique.
- Explique si una función polinómica de grado 2 puede tener un punto de inflexión. ¿De qué depende el tipo de concavidad de una función cuadrática?
- Las siguientes figuras muestran la gráfica de la primera derivada de una función. Determine los puntos de inflexión y los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.



4. Responda las siguientes preguntas:

- Si $f''(a) = 0$, ¿es suficiente para poder afirmar que f tiene un punto de inflexión en $x = a$?
- ¿Por qué $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ no es derivable en $x = \frac{1}{2}$ pero si tiene un punto de inflexión allí?

5. Sabiendo que la gráfica dada corresponde a la **función derivada primera de f** , determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique.



- La función f es creciente en el intervalo $(-1, 4)$.
 - En $x = 0$, f presenta un máximo relativo.
 - $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$.
6. Determine si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos. En todos los casos, justifique su respuesta.
- La gráfica de la función $y = 2x - 4 \ln(x - 1)$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
 - Si f es una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \neq c$, entonces f alcanza un mínimo relativo en $x = c$.
 - Si $x = x_0$ es un punto crítico de la función continua f , entonces f alcanza un extremo relativo en $x = x_0$.
 - Se puede asegurar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{si } x \in [-2, -1) \cup (-1, 1), \\ 2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

tiene un mínimo relativo en $x = -1$.

7. En cada ítem analice la verdad o falsedad de lo que se afirma. Justifique.

- a. La función $f(x) = a \cdot e^{bx+c}$, $a \neq 0$, a , b y c constantes, es decreciente cuando $a \cdot b < 0$.
 - b. Para que la función $g(x) = ax^3 + 2bx^2 + 6x - 4$ con a y b constantes no nulas, tenga punto de inflexión en $x = 3$ es necesario que $a = \frac{-2b}{9}$.
 - c. La utilidad para una empresa está dada por la siguiente función: $U(s) = -1/10s^3 + 12s^2 + 500$, donde s representa lo que gasta en publicidad; s y U se expresan en miles de dólares. La Utilidad Marginal máxima es 40.000 dólares.
8. La ecuación de demanda de un producto es $p = 800 - 4q$ y la función de costo promedio es $\bar{C}(q) = 0.4q + 8 + 800/q$, donde q es el número de unidades demandadas; tanto p como $\bar{C}$ se expresan en cientos de dólares. Determine la utilidad máxima y el correspondiente precio al que debe venderse el producto.
9. En un determinado país, el índice de precios al consumidor (IPC, en unidades porcentuales) desde 2013 a 2023 puede ser aproximado mediante el modelo $I(t) = -0.2t^3 + 3t^2 + 100$, donde el tiempo t se mide en años a partir del comienzo de 2013, $0 \leq t \leq 11$.
- a. Con base en las gráficas de I' e I'' , y la información que surja de las mismas, identifique:
 - i. El período en el cual el crecimiento del IPC se aceleró.
 - ii. El período en el cual el crecimiento del IPC se desaceleró.
 - iii. El momento en el que la tasa de crecimiento del IPC alcanzó su máximo valor.
 - iv. El valor máximo de la tasa de crecimiento del IPC.
 - b. ¿Qué valor máximo alcanzó el IPC durante el período 2013-2023?
 - c. Imaginen que ustedes son asesores financieros de un grupo de empresarios interesados en abrir nuevas sucursales de venta de electrodomésticos en este país, pero están preocupados por la evolución del IPC en los últimos años. Asumiendo que se pueden hacer proyecciones con el modelo por los próximos 5 años, ¿qué les aconsejarían a los empresarios y por qué?
10. El porcentaje P de casas con servicios de televisión digital desde principios de 2013 ($t = 0$) hasta fines de 2023 ($t = 11$) en un cierto país se comporta según el modelo $P(t) = -0.02t^3 + 0.3t^2 + 30$.
- a. ¿En qué período la demanda de televisión digital aceleró su crecimiento?
 - b. ¿Cuándo la tasa de variación instantánea de P alcanzó su valor máximo? ¿Cuál es el valor máximo alcanzado por esta tasa?

- c. ¿Cuál es el período durante el cual el ritmo de crecimiento de este negocio fue decayendo?
- d. ¿Qué valor máximo alcanzó el porcentaje P de casas con servicios de televisión digital durante el período 2013-2023?
- e. Imaginen que ustedes son asesores financieros de una empresa de televisión digital que busca ampliar su mercado en este país. Asumiendo que se pueden hacer proyecciones con el modelo por los próximos 5 años, ¿qué les aconsejarían a los empresarios y por qué? *Justifique analíticamente.*

Trazado de curvas

A modo de cierre, hemos integrado todas las nociones conceptuales y procedimientos que destacan las características más importantes de las funciones. Las gráficas juegan un papel crucial al ofrecer una visualización clara de los aspectos del modelo representado por la función. Aunque la tecnología permite crear gráficas con gran precisión, su efectividad depende del uso inteligente que se haga de ella. Las herramientas analíticas proporcionadas por el Cálculo son imprescindibles para descubrir las características más detalladas de las funciones, permitiendo el cálculo exacto de puntos máximos, mínimos e inflexiones, en lugar de limitarse a aproximaciones. Así, las gráficas y las herramientas analíticas se complementan para proporcionar una comprensión más completa y precisa de las funciones.

Sea $y = f(x)$, dada mediante su expresión analítica. Para obtener una gráfica que muestre los aspectos más importantes de ella, es necesario analizar:

1. Dominio: Es muy útil determinar los valores de x para los cuales f está definida.
2. Intersecciones: La intersección con el eje y es $f(0)$; con el eje x , resuelva $f(x) = 0$.
3. Asíntotas: Plantear los límites correspondientes para el análisis de la existencia de las asíntotas tanto verticales como horizontales.
4. Extremos: En este momento, se deben buscar los valores críticos y a través de la derivada primera se analizan los intervalos de crecimiento o decrecimiento para obtener valores extremos. También se puede aplicar el criterio de la derivada segunda.

5. Concavidad: Hallar los puntos de inflexión a través del análisis de los cambios de concavidad de la gráfica de la función.
6. Graficar la curva: Con la información obtenida se puede dibujar la curva correspondiente a la función en estudio.

El siguiente ejemplo muestra el estudio completo de una función.

Ejemplo 1.8.30: Grafique $f(x) = xe^x$ y corrobore la gráfica obtenida con GeoGebra.

Solución. Utilizaremos el procedimiento descrito anteriormente.

1. Dominio: El dominio de esta función es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. La función f es continua en todo su dominio.
2. Intersección con el eje x : Al hacer $y = 0$, obtenemos la ecuación $xe^x = 0$, cuya solución es $x = 0$. Por tanto, el punto de intersección con el eje x es $(0, 0)$.
3. Intersección con el eje y : Dado que $f(0) = 0$ la función interseca al eje y en $(0, 0)$.
4. Asíntotas: Esta función no tiene asíntota vertical ya que es continua en todo el dominio. Con el fin de determinar si existe asíntota horizontal planteamos y calculamos los límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0.$$

El segundo límite se calcula reescribiendo el producto para poder aplicar la Regla de l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Concluimos que la función tiene una asíntota horizontal por izquierda en $y = 0$.

5. Extremos: Para hallar los valores críticos planteamos la ecuación $f'(x) = 0$, y resolvemos para x .

$$f'(x) = 0 \iff e^x + xe^x = 0 \iff e^x(1 + x) = 0 \iff x = -1.$$

Aplicamos criterio de la primera derivada, que ilustramos en la Tabla 20.

En $x = -1$ hay un mínimo relativo y el valor mínimo es $f(-1) = -1/e$.

Observación 24: Por el criterio de la segunda derivada llegamos a la misma conclusión. En efecto, $f''(x) = e^x(2 + x)$, el signo de $f''(-1)$ es positivo, por lo que en $x = -1$ hay un mínimo relativo cuyo valor es $f(-1) = -1/e$.

Tabla 20

Intervalo	Valor de prueba	Signo f'	f
$(-\infty, -1)$	-2	-	Decreciente
$(-1, \infty)$	2	+	Creciente

6. Concavidad: Para analizar si existen puntos de inflexión planteamos y resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \iff e^x + e^x(1+x) = 0 \iff e^x(2+x) = 0 \iff x = -2.$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda con la Tabla 21.

Tabla 21

Intervalo	Representante	Signo f''	f
$(-\infty, -2)$	-3	-	Cóncava hacia abajo
$(-2, \infty)$	3	+	Cóncava hacia arriba

Así, en $x = -2$ hay un punto de inflexión que es $(-2, -2/e^2)$.

Resumiendo: la función $f(x) = xe^x$ con dominio en $\mathbb{R}$ es continua, con mínimo relativo en $(-1, -1/e)$ y punto de inflexión en $(-2, -2/e^2)$. Presenta asíntota horizontal izquierda de ecuación $y = 0$. Su gráfica se muestra en la Figura 72.

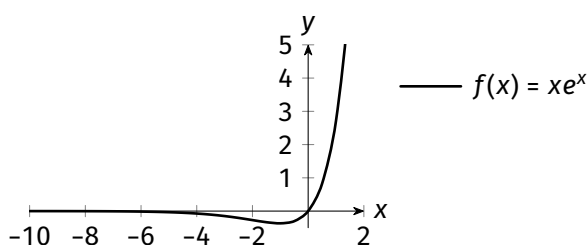


Figura 72

Ejemplo 1.8.31: Grafique $f(x) = (x - 4)^{2/3}$ y corrobore la gráfica obtenida con GeoGebra.

Solución. Utilizaremos el procedimiento descrito anteriormente.

1. Dominio: El dominio de esta función es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$ y f es una función continua en todo su dominio.
2. Intersección con el eje x : Al hacer $y = 0$, la ecuación $(x - 4)^{2/3} = 0$ tiene por solución el valor $x = 4$. Por tanto, el punto de intersección con el eje x es $(4, 0)$.
3. Intersección con el eje y : Al hacer $x = 0$, el valor de $f(0)$ es $\sqrt[3]{16}$. Por tanto, la función interseca al eje y en $(0, \sqrt[3]{16})$.
4. Asíntotas: Por ser f continua en todo el dominio, no tiene asíntota vertical. A continuación, analizamos la existencia de asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 4)^{2/3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 4)^{2/3} = +\infty.$$

5. Extremos: Comenzamos igualando $f'(x) = 2/[3(x - 4)^{1/3}]$ a cero. Dicha ecuación no tiene solución, por lo que no existe x donde la derivada primera se anule. Dado que $x = 4$ es punto de continuidad de f y no pertenece al dominio de f' , estudiamos qué sucede con la derivada en este punto:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x - 4)^{2/3} - 0}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{(x - 4)^{1/3}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x - 4)^{2/3} - 0}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{(x - 4)^{1/3}} = -\infty.$$

Se deduce que f no es derivable en $x = 4$ ($f'(4)$ no existe), 4 es valor crítico y el punto $(4, 0)$ es un punto cuspidal. Ahora bien, analicemos con la Tabla 22 el crecimiento y decrecimiento mediante la derivada primera.

Tabla 22

Intervalo	Representante	Signo f'	f
$(-\infty, 4)$	-2	-	Decreciente
$(4, \infty)$	5	+	Creciente

En este punto cúspide el estudio de la derivada primera indica que hay un mínimo relativo en él, siendo ese mínimo $f(4) = 0$.

6. Concavidad: Analizamos la derivada segunda $f''(x) = -2/[9(x - 4)^{4/3}]$. Vemos que $f''(x)$ no se anula para ningún valor del dominio y no existe en $x = 4$, punto de continuidad de f (se deja esta última comprobación al lector). Estudiemos, seguidamente, la concavidad de la gráfica de f mediante la Tabla 23.

Esto indica que a ambos lados de $x = 4$, f es cóncava hacia abajo.

Tabla 23

Intervalo	Representante	Signo f''	f
$(-\infty, 4)$	1	-	Cóncava hacia abajo
$(4, \infty)$	5	-	Cóncava hacia abajo

Resumiendo: f con dominio en $\mathbb{R}$ es continua, tiene un mínimo relativo en $(4, 0)$ y la gráfica es cóncava hacia abajo a ambos lados de $x = 4$. Su gráfica se muestra en la Figura 73.

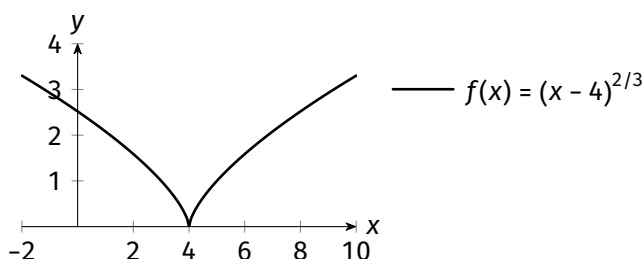


Figura 73

Ejemplo 1.8.32: La función de costo de un fabricante de zapatos de cuero es $C(q) = 4000 - 16q + 0.8q^2$ dólares cuando se producen q pares por día. Si deben producirse como mínimo 10 pares diarios y no más de 200:

1. Determine el mínimo costo promedio de producción de cada par.
2. Grafique utilizando [GeoGebra](#) las funciones costo promedio y costo marginal y determine el punto de intersección de ambas gráficas.
3. Interprete la situación cuando el costo promedio es mayor que el marginal, y viceversa.

Solución.

1. La expresión del costo promedio es $\bar{C}(q) = (4000 - 16q + 0.8q^2)/q$, con dominio $[10, 200]$. Es una función continua por lo que alcanza sus extremos absolutos en dicho intervalo. Para hallar los valores críticos resolvemos la ecuación $\bar{C}'(q) = 0$. La solución en el contexto del problema es $q = 50$.

A continuación, evaluamos el costo promedio en el valor crítico y en los extremos del dominio. $\bar{C}(10) = 392$, $\bar{C}(50) = 104$ y $\bar{C}(200) = 164$.

Concluimos que el mínimo costo promedio es 104 dólares por par de zapatos.

- La función de costo marginal es $C'(q) = -16 + 1.6q$. Para hallar el punto de intersección resolvemos la ecuación $C'(q) = \bar{C}(q)$ resultando $q \approx 70$.

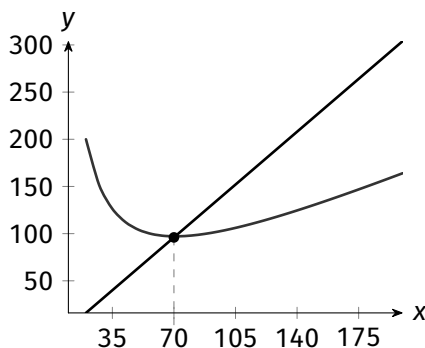


Figura 74

- A partir de las gráficas observamos que al producir menos de 70 pares (aproximadamente), los costos promedios resultan mayores a los costos marginales. Esto indica que los costos promedios están disminuyendo con la producción adicional, lo cual es una señal de que la empresa está experimentando economías de escala, donde producir más unidades reduce el costo promedio por unidad. Cuando la producción excede los 70 pares (aproximadamente), es decir, el costo promedio es menor que el costo marginal, indica que los costos están aumentando con la producción adicional. Esto puede ser una señal de ineficiencia o de que la empresa está alcanzando su capacidad máxima de producción.

En términos generales, es ideal que el costo marginal sea igual o menor que el costo promedio, ya que esto sugiere que la empresa está operando de manera eficiente y que los costos adicionales de producción no están aumentando desproporcionadamente.

EJERCICIOS 1.8.4

- Según los datos disponibles, se pudo establecer que el precio de una libra (≈ 454 g) de azúcar blanca en Estados Unidos desde 2000 a 2006, sigue la fórmula

$$p(t) = \frac{1}{300} \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 28t + 70 \right)$$

donde t se mide en años desde inicios de 2000, esto es, $0 \leq t \leq 6$, y p se mide en dólares.

- a. ¿En qué ocasión el azúcar tuvo el precio más bajo durante el período de 2000 a 2006? ¿Y en qué momento alcanzó su precio más alto?
 - b. ¿Cuáles son los precios mínimo y máximo que tuvo el azúcar en el período mencionado?
 - c. ¿En qué período de tiempo el precio decrece a tasa creciente?
2. Una empresa de componentes electrónicos lanzó un nuevo producto el 1 de enero de 2020. Durante el año siguiente, una estimación aproximada de la cantidad de pedidos, N , recibidos t semanas después del lanzamiento del producto está dada por $N(t) = e^{-0.5t-3.5}(1000t)^2$.
 - a. ¿Después de cuántas semanas la empresa recibió el mayor número de pedidos?
 - b. ¿Cuál es el número máximo de pedidos? (Redondear al entero más próximo).
3. La ecuación de demanda de cierto producto es $q = 1000e^{-0.02p}$, p en dólares y q en unidades de producto.
 - a. Halle la variación media de la cantidad demandada cuando el precio del artículo aumenta 3.2 % a partir de \$20. Interprete en términos económicos.
 - b. Muestre que la demanda decrece a medida que aumenta el precio.
 - c. Determine el precio p que maximiza el ingreso y el correspondiente ingreso máximo.
4. El departamento de producción de una empresa que puede producir hasta 500 unidades diarias determina que la función de costo diario para ese producto es $C(q) = 0.4q^3 - 2.4q^2 + 2.1q + 12$, donde q está dado en cientos de unidades y C en miles de dólares. Con este dato, el gerente de producción desea saber:
 - a. ¿Cuál es el costo fijo?
 - b. Cuando se producen 100 unidades, ¿el costo está aumentando o disminuyendo? ¿Y a qué ritmo lo hace?
 - c. ¿Cuál es el nivel de producción con mínimo costo? ¿Cuál es dicho costo?
 - d. ¿A qué nivel de producción el costo marginal es mínimo?
5. Las funciones de demanda y costo promedio para cierto producto están dadas por $p = \frac{50}{\sqrt{q}}$ y $\bar{C}(q) = 0.5 + \frac{1000}{q}$ respectivamente, donde q representa las unidades del producto y p su precio en dólares.

- a. Halle el nivel de producción que maximiza el beneficio.
 - b. Calcule el máximo beneficio y el correspondiente precio.
 - c. Demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal en ese punto.
6. La ecuación de demanda de un artículo es $p = b - a \cdot q$ y la función de costo es $C(q) = c + d \cdot q$ donde p es el precio del artículo y q es la cantidad vendida.
 - a. Expresé la función utilidad $U(q)$.
 - b. Determine el valor de q que maximiza esta función, en términos de las constantes.
 - c. Estudie las condiciones que deben cumplir los parámetros (constantes) para que el modelo propuesto sea consistente.
7. Demuestre analíticamente que si el costo marginal es menor al costo promedio, entonces el costo promedio marginal es negativo.
8. La curva de costos de una compañía responde a corto plazo al modelo de Cobb-Douglas, $C(q) = K \cdot q^{1/a} + F$, donde a es una constante positiva, F es el costo fijo y $K > 0$ mide la tecnología con que cuenta la compañía.
 - a. Compruebe que esta curva de costos siempre crece.
 - b. Demuestre que, si $a > 1$, la función de costos es cóncava hacia abajo. ¿Cuál es el significado en términos económicos?
 - c. La empresa TechSmart produce celulares inteligentes y utiliza una tecnología avanzada que permite producir celulares de manera más eficiente. El costo total de producción de q celulares está dado por $C(q) = 5q^{0.8} + 200\,000$, compruebe que el costo promedio por unidad decrece a medida que aumenta la producción.
9. Para cada una de las siguientes funciones encuentre los máximos y mínimos en los intervalos especificados.
 - a. $f(x) = x^3 e^{-2x}$ en $[1, 4]$.
 - b. $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$ en $[1, e]$.
10. Con frecuencia las ventas totales de un producto nuevo en el mercado responden al modelo logístico. Esto es, cuando el producto aparece en el mercado las ventas aumentan, al inicio, rápidamente. Pasado un tiempo, como muchas personas ya lo compraron, las ventas comienzan a disminuir. Suponga entonces que las ventas totales de un nuevo celular en un determinado país, responden a la siguiente función:

$$V(t) = \frac{532}{1 + 869e^{-1.30 \cdot t}}$$

donde t representa el tiempo en meses y V en miles de unidades.

- a. Calcule las ventas que se produjeron al momento del lanzamiento del nuevo celular.
- b. Con base en el modelo, estime el límite máximo de ventas alcanzable para este producto.
- c. ¿Las ventas siempre crecen? En caso afirmativo, caracterice dicho crecimiento.
- d. Halle el punto de inflexión. ¿Qué indica este punto?
- e. Con ayuda de [GeoGebra](#) analice el comportamiento de $V(t)$, de su derivada $V'(t)$ y de la segunda derivada, $V''(t)$. Reflexione sobre ello.

11. La función logística tiene, en general, la forma:

$$f(t) = \frac{L}{1 + Ce^{-k \cdot t}},$$

con constantes L, C, k positivas.

- a. Considere $k = 1$ y con ayuda de [GeoGebra](#) analice la función para diferentes valores de L . Explique el efecto de dicho parámetro.
- b. Sea ahora $L = 1$. Con ayuda [GeoGebra](#) analice la función para diferentes valores de K . Explique el efecto de dicho parámetro. ¿Qué representa el parámetro L ?
- c. Halle $f'(t)$ y $f''(t)$. Interprete.

Linealización de funciones

Existen muchas situaciones, dentro y fuera de la matemática, en que necesitamos estimar una diferencia entre valores de una función cuando la variable independiente varía «muy poco» a partir de uno dado. Según lo estudiado hasta ahora podemos suponer que una curva se aproxima bien a su recta tangente cerca del punto de tangencia. La ecuación de esta recta constituye la mejor aproximación lineal a la función en las cercanías del punto de tangencia. Así, aproximaremos la *diferencia* Δy mediante la diferencia sobre la recta tangente, a la que denominaremos *diferencial* de la función, dy .

Sea $y = f(x)$ una función derivable en x_0 . Tomamos, a partir de x_0 , abscisa del punto $A = (x_0, f(x_0))$, un pequeño incremento Δx que, en este contexto, llamaremos dx (léase «diferencial de x »). Sea B el punto de coordenadas $(x_1, f(x_1)) = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. El incremento correspondiente en la función

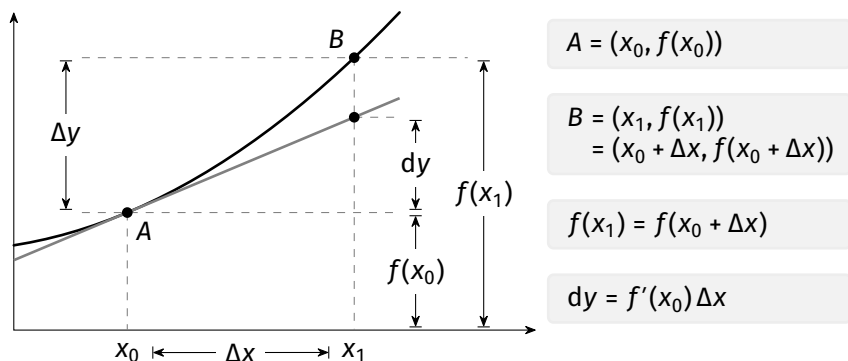


Figura 75

es $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ y dy es la variación de y sobre la recta tangente en el mismo rango de variación de x .

Podemos notar gráficamente que, para valores suficientemente pequeños de Δx ,

$$\Delta y \approx dy.$$

La pendiente de la recta tangente en x_0 es $f'(x_0)$ y, además, por definición de pendiente de una recta, podemos escribir $f'(x_0) = dy/\Delta x = dy/dx$. De aquí surge que

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Resumiendo, el diferencial dy indica el cambio aproximado en los valores de la variable dependiente y cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$.

Los diferenciales se utilizan a menudo en la estimación de errores que se cometen al medir cantidades. Así, dx indica el error en x , y el consecuente error en y está dado en forma aproximada por $dy = f'(x) dx$. La razón dx/x estima el error relativo en x y dy/y el error relativo en y . Si estas razones se multiplican por 100, obtenemos el error porcentual de la variable correspondiente.

Ejemplo 1.8.33: La función de costo (en cientos de dólares) para cierto fabricante es $C(q) = 200 + q + 0.05q^{3/2}$, q en unidades.

1. Estime el cambio en el costo si el nivel de producción se incrementa de 100 a 110 unidades. Compare con el cambio real.
2. Calcule el costo aproximado de producir 110 unidades. ¿Qué error porcentual se produce en la aproximación?

Solución.

1. Para $x_0 = 100$ y $dx = 10$, teniendo en cuenta que ΔC es aproximadamente igual al diferencial dC , planteamos:

$$C(110) - C(100) \approx C'(100) \cdot 10$$

de donde

$$C(110) - C(100) \approx 17.5.$$

Concluimos que al aumentar la producción en 10 unidades a partir de 100, el costo aumenta aproximadamente 1750 dólares, mientras que el aumento real es $C(110) - C(100) = 1768$ dólares.

2. Para este cálculo aplicamos la aproximación lineal

$$C(110) \approx C(100) + C'(100) \cdot 10.$$

Por tanto, $C(110) \approx 367.5$. Es decir, el costo de producir 110 unidades es, aproximadamente, 36750 dólares. Como, de acuerdo con el modelo $C(q)$ dado, el costo real de producir 110 unidades es $C(110) = 36768$ dólares, el error al aproximar es $36750 - 36768 = -18$. En términos porcentuales, se comete un error por defecto de 0.05 %.

Ejemplo 1.8.34: Un fabricante estima que las ventas serán de 400 unidades en la semana próxima con un error porcentual aproximado del 3 %. Si la función de ingreso está dada por $R(q) = 20q - 0.02q^2$, en cientos de dólares, estime el error máximo en el ingreso al vender 400 unidades.

Solución. Si $q = 400$, el ingreso es $R(400) = 4800$. Dado que el error porcentual máximo estimado en las cantidades es del 3 %, entonces $dq/q = 0.03$. De esta expresión se deduce que $dq = 0.03 \cdot 400 = 12$. A continuación, planteamos la expresión para calcular el error aproximado en el ingreso:

$$dR = R'(q) \cdot dq = (20 - 0.04q) \cdot dq.$$

Reemplazando en la expresión anterior q por 400 y dq por 12 obtenemos:

$$dR = (20 - 0.04 \cdot 400) \cdot 12 = 48.$$

Así, el error máximo estimado en el ingreso de la semana próxima es de 4800 dólares. En términos porcentuales

$$\frac{dR}{R} \cdot 100 = \frac{48}{4800} \cdot 100 = 1.$$

Esto significa que la estimación en las ventas de la semana próxima con un error máximo del 3 %, ocasionará un error máximo en el ingreso del 1 %.

EJERCICIOS 1.8.5

1. Un gerente de ventas estima que su equipo venderá 20 000 unidades del producto el próximo mes, con una posible fluctuación del 2.5 % en la cantidad vendida. Si la función de utilidad es $U(q) = 2q - 0.000\,08q^2$, en miles de dólares mensuales, y q es el número de unidades vendidas por mes, use el diferencial para estimar la variación máxima en la utilidad.
2. La función de demanda de cierto producto es $p = 100 - 10 \ln(9q + 1)$, donde p se mide en cientos de dólares y q en miles de unidades.
 - a. Estime el cambio en el ingreso si el nivel de producción se incrementa de 4000 a 6000 unidades. Compare con el cambio real.
 - b. Calcule el ingreso aproximado por la venta de 6000 unidades. ¿Qué error porcentual se produce en la aproximación?
3. Con el fin de aumentar los ingresos mensuales, el equipo de ventas de una compañía cosmética sugiere incrementar un 10 % el precio de venta de su crema antiedad, que cuesta actualmente 12 mil pesos. La función de demanda para este producto es $q = 100e^{-p/20}$, con p en miles de pesos y q en unidades. Estime el cambio porcentual en el ingreso y concluya acerca de la conveniencia de llevar adelante la propuesta del equipo de ventas.
4. La función de demanda semanal de un determinado producto está dada por $p = 90 - 0.06q$, y el costo de producir q unidades por semana está dado por $C(q) = 3000 + 10q - 0.02q^2$. Actualmente, la compañía está produciendo 500 unidades. Si se espera que las ventas disminuyan alrededor del 2 % en la próxima semana, estime el máximo impacto porcentual en las utilidades.

ELASTICIDAD PUNTUAL DE LA DEMANDA

Los economistas utilizan el concepto de elasticidad de la demanda para estudiar cómo las variaciones de precio afectan a la demanda de un cierto bien. Podemos preguntarnos, ¿en cuántas unidades variará la cantidad demandada si el precio aumenta una unidad monetaria? La respuesta a esta pregunta es un número concreto, sin embargo, hay varios aspectos a considerar en esta respuesta. La variación de una unidad monetaria en un kilo de pan puede ser significativa mientras que ese mismo aumento en el precio de un automóvil es insignificante. Para solucionar este problema, la medición de la sensibilidad de la demanda ante cambios en el precio se calcula utilizando variaciones

relativas, garantizando que el número que se obtiene como respuesta es independiente de las unidades en que se midan cantidades y precios. En esta sección, trataremos la respuesta a la pregunta: ¿cuál es la variación porcentual de la cantidad demandada cuando el precio aumenta en uno por ciento (1 %)?

Para ello, consideremos la función demanda $q = f(p)$, q representa la cantidad demandada y p el precio. Supongamos que el precio sufre un incremento Δp , cambiando de p a $p + \Delta p$, por lo que la cantidad demandada cambiará de q a $q + \Delta q$ donde:

$$q + \Delta q = f(p + \Delta p)$$

$$\Delta q = f(p + \Delta p) - q$$

$$\Delta q = f(p + \Delta p) - f(p)$$

Ahora bien, el incremento en el precio es Δp , el cociente $\Delta p/p$ es la variación relativa del incremento respecto al precio p , y $\Delta p/p \cdot 100$ es la variación porcentual del precio. Es decir, si el precio original por unidad es 4 u.m. y el nuevo precio es 4.10, el incremento es $\Delta p = 0.10$. El cociente $\Delta p/p = 0.10/4 = 0.025$ es la variación relativa al precio original, y $0.025 \cdot 100 = 2.5\%$ es la variación porcentual del precio.

De forma análoga podemos pensar el incremento en la cantidad demandada, de modo que el incremento en la demanda es Δq , el cociente $\Delta q/q$ es la variación relativa del incremento respecto a la demanda original q , y $\Delta q/q \cdot 100$ es la variación porcentual correspondiente.

Con el fin de comparar estos cambios consideremos la razón

$$\frac{\text{Cambio porcentual en la demanda}}{\text{Cambio porcentual en el precio}} = \frac{(\Delta q/q) \cdot 100}{(\Delta p/p) \cdot 100} = \frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

a la cual se denomina «elasticidad media de la demanda». No obstante, resulta más conveniente medir la elasticidad cuando el incremento en el precio sea tan pequeño como se desee; de este modo se evita calcular el cociente $\Delta q/\Delta p$. Para ello, se aplica límite cuando $\Delta p \rightarrow 0$, resultando:

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p} \right) = \frac{p}{q} \cdot \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}.$$

La «elasticidad puntual de la demanda», que se denota con la letra griega η (léase *eta*), se define como sigue:

Definición 1.9.1 (Elasticidad puntual de la demanda): Sea $q = f(p)$ una función derivable en p y tal que $f(p) \neq 0$. La elasticidad de q con respecto a p es

$$\eta = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} \quad \text{o también} \quad \eta = \frac{p}{f(p)} f'(p).$$

En consecuencia, si Δp es pequeño, la razón entre el cambio porcentual en la demanda y el cambio porcentual en el precio es aproximadamente igual a η :

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p} \approx \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \eta.$$

Por tanto,

$$\text{Cambio porc. en la demanda} \approx \eta \text{ Cambio porc. en el precio.} \quad (9)$$

En símbolos:

$$\Delta q\% \approx \eta \cdot \Delta p\%.$$

Observación 25: La elasticidad carece de unidades.

Observación 26: Para un comportamiento común de la demanda, a un aumento (disminución) en el precio corresponde una disminución (aumento) en la demanda. Esto se corresponde con una derivada dq/dp negativa. Además, como p y q son positivos, η será negativa, y así se considerará en este texto.

Observación 27: Como $\eta = (p/f(p))f'(p)$, podemos escribir, $\eta = p \cdot f'(p)/f(p)$ y afirmar que la elasticidad es igual al precio por la tasa de cambio relativa de la cantidad en función del precio.

Ejemplo 1.9.1: Determine la elasticidad de la demanda para cada valor de p indicado, e interprete sabiendo que la función demanda es $q = 100(20 - p)$.

1. $p = 5$ u.m.

2. $p = 10$ u.m.

3. $p = 15$ u.m.

Solución. En primer lugar identificamos el dominio de la función demanda: p variará en $0 \leq p \leq 20$. Como $dq/dp = -100$, resulta

$$\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{100(20 - p)} \cdot (-100) = \frac{-p}{20 - p}.$$

Observamos que la elasticidad depende del valor de p .

1. Si $p = 5$, $\eta = -1/3$. Significa que cuando el precio es de 5 u.m. y éste se aumenta 1 %, la demanda disminuirá 0.33 % aproximadamente.
2. Si $p = 10$, $\eta = -1$. Significa que cuando el precio es de 10 u.m. y éste se aumenta 1 % la demanda disminuirá también en 1 % aproximadamente.
3. Si $p = 12$, $\eta = -3/2 = -1.5$. Significa que cuando el precio es de 12 u.m. y éste se aumenta 1 % la demanda disminuirá en 1.5 % aproximadamente.

A partir de este ejemplo, introducimos que la demanda se puede clasificar en términos de elasticidad del siguiente modo.

Definición 1.9.2 (Clasificación de la demanda): Sea η la elasticidad de la demanda. Entonces:

CASO 1 Si $\eta < -1$: el cambio porcentual de la demanda es mayor que el cambio porcentual del precio. En este caso, decimos que la demanda es *elástica*.

CASO 2 Si $\eta = -1$: el cambio porcentual de la demanda es igual al cambio porcentual del precio. En este caso, la elasticidad es *unitaria*.

CASO 3 Si $-1 < \eta < 0$: el cambio porcentual de la demanda es menor que el cambio porcentual del precio. Decimos entonces que la demanda es *inelástica*.

Ejemplo 1.9.2: En referencia al Ejemplo 1.9.1, decimos que la demanda es inelástica para $p = 5$ u.m., es elástica para $p = 12$ u.m. y unitaria para $p = 10$ u.m.

Ejemplo 1.9.3: Si para cierto producto se sabe que, al aumentar el precio en 1 %, la demanda disminuye en 2 %, ¿cuál es la elasticidad de este producto?

Solución. Considerando la relación (9), resulta $\eta = -2 \% / 1 \% = -2$.

Ejemplo 1.9.4: Si para cierto producto se sabe que, la elasticidad es -1.5 , ¿en cuánto disminuirá la demanda cuando el precio aumente 2 %?

Solución. Considerando la ecuación (9) tenemos que la demanda disminuirá aproximadamente 3 %.

Hasta ahora hemos analizado la elasticidad puntual de la demanda cuando q depende de p , es decir, la cantidad demandada depende del precio, sin embargo, es frecuente que la función de demanda se exprese como $p = f(q)$, es decir, el precio dependiendo de la cantidad demandada. Estas funciones son inversas entre sí, por lo que es válido: $dp/dq = 1/(dq/dp)$, con lo cual, tenemos la siguiente igualdad:

$$\eta = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dq}}.$$

Ejemplo 1.9.5: Halle la elasticidad puntual de la demanda si la función de demanda es $p = -1/2q + 20$ para $q = 10$, $q = 30$ y $q = 20$ y clasifíquela.

Solución. En esta función de demanda la variable q es la variable independiente, por lo que para calcular la elasticidad aplicamos la fórmula:

$$\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dq}}.$$

Así,

$$\eta = \frac{-1/2q + 20}{q} \cdot \frac{1}{-0.5} = 1 - \frac{40}{q}.$$

Entonces:

- Para $q = 10$ se tiene que $\eta = -3$, por lo que la demanda es elástica.
- Para $q = 30$ se tiene que $\eta = -0.33$, por lo que la demanda es inelástica.
- Para $q = 20$ se tiene que $\eta = -1$, por lo que la demanda es unitaria.

Ejemplo 1.9.6: Siendo la función de demanda genérica $p = mq + b$ con $m < 0$ y $b > 0$, verifique que la elasticidad puntual decrece a medida que aumenta p .

Solución. Para calcular la elasticidad aplicamos la fórmula:

$$\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dq}}.$$

Así,

$$\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{m} = \frac{p}{mq}. \quad (10)$$

Dado que la función de demanda es $p = mq + b$, se tiene en consecuencia que $p - b = mq$. Reemplazando esto en la ecuación (10) se tiene

$$\eta = \frac{p}{mq} = \frac{p}{p - b}.$$

Ahora bien, siendo $\eta = p/(p - b)$, calculamos $d\eta/dp$.

$$\frac{d\eta}{dp} = -\frac{b}{(p - b)^2}.$$

Como $b > 0$ y $(p - b)^2 > 0$, entonces $d\eta/dp < 0$, y por lo tanto la elasticidad es decreciente respecto al precio p . Es decir, cuando la demanda es lineal, si aumenta el precio, disminuye la elasticidad.

A continuación estudiaremos la relación entre la elasticidad de la demanda y el ingreso. Consideremos la función ingreso $R(p) = q \cdot p$ donde $q = f(p)$. Calculamos dR/dp por medio de la regla del producto:

$$\frac{dR}{dp} = q + p \frac{dq}{dp} = q \cdot \left(1 + \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}\right).$$

Dado que $p/q \cdot dq/dp$ es η , tenemos:

$$\frac{dR}{dp} = q \cdot (1 + \eta).$$

Del análisis de esta igualdad surge la siguiente interpretación.

1. Si la demanda es elástica, $\eta < -1$ y $1 + \eta < 0$, siendo la derivada del ingreso negativa. De modo que un aumento en el precio dará lugar a una disminución en la demanda proporcionalmente mayor, por lo cual el ingreso disminuye.
2. Si la demanda es inelástica, $-1 < \eta < 0$ y $1 + \eta > 0$, y la tasa de cambio del ingreso es positiva. Así, al aumentar el precio la cantidad demandada disminuirá en menor proporción, por lo que el ingreso aumentará.
3. Si la demanda es unitaria, $\eta = -1$, y entonces $1 + \eta = 0$. Un aumento en el precio motivará una disminución proporcionalmente igual en la demanda; en consecuencia, el ingreso no cambia.

Ahora, consideremos la función demanda $p = f(q)$, el ingreso $R(q) = p \cdot q$, en función de q entonces:

$$\frac{dR}{dq} = p + q \frac{dp}{dq} = p \left(1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq} \right) = p \left(1 + \frac{1}{\eta} \right).$$

1. Si la demanda es elástica, $\eta < -1$, el ingreso marginal es positivo. Así, para una demanda dada, una reducción en el precio produce un incremento relativo mayor en la cantidad demandada, lo que hace crecer el ingreso.
2. Si la demanda es inelástica, $-1 < \eta < 0$, una reducción en el precio produce un incremento relativo menor en la cantidad que se demanda. Entonces, el ingreso marginal es negativo y, en consecuencia, el ingreso disminuye.
3. Si la demanda es unitaria, $\eta = -1$, una reducción en el precio produce que la cantidad demandada aumente en la misma proporción, lo que hará que el ingreso no se modifique.

Relacionando las situaciones presentadas $q = q(p)$ y $p = p(q)$, tenemos:

1. Si la demanda es elástica, un aumento en el precio causa que el ingreso disminuya. En cambio, si se reduce el precio, aumentará el ingreso.
2. Si la demanda es inelástica, un aumento en el precio causa que el ingreso aumente. En cambio, si el precio disminuye, el ingreso también disminuirá.
3. Si la demanda es unitaria, un aumento en el precio no causa cambio en el ingreso. Un precio menor, también deja sin cambio al ingreso.

A modo de síntesis, podemos decir que si la demanda es elástica conviene disminuir el precio para que aumente el ingreso; en cambio, si la demanda es inelástica, conviene aumentar el precio para que aumente el ingreso.

Ejemplo 1.9.7: La función de demanda de un determinado producto está dada por $q = 36 - 4p^2$, con q en unidades de producto y el p precio unitario en miles de dólares.

1. Halle la elasticidad, la función ingreso y verifique que $dR/dp = q \cdot (1 + \eta)$.
2. Determine las cantidades demandadas para los que la demanda sea elástica, inelástica y unitaria. Relacione estas elasticidades con el ingreso.

Solución.

1. Hallamos la expresión de la elasticidad,

$$\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q} \cdot (-8p) = \frac{-8p^2}{q} = \frac{-8p^2}{36 - 4p^2}.$$

Ahora bien, la función ingreso es $R(p) = 36p - 4p^3$, de donde derivando obtenemos

$$\frac{dR}{dp} = 36 - 12p^2. \quad (11)$$

En relación con la elasticidad, tenemos que:

$$\begin{aligned} q \cdot (1 + \eta) &= (36 - 4p^2)(1 + \eta) \\ &= (36 - 4p^2) \left(1 + \frac{-8p^2}{(36 - 4p^2)} \right) \\ &= 36 - 4p^2 + \frac{(36 - 4p^2)(-8p^2)}{(36 - 4p^2)} \\ &= 36 - 4p^2 - 8p^2 \\ &= 36 - 12p^2. \end{aligned} \quad (12)$$

En consecuencia, a partir de las ecuaciones (11) y (12), podemos afirmar la igualdad, $dR/dp = q \cdot (1 + \eta)$.

2. Para responder este ítem los cálculos van a resultar más simples si expresamos la elasticidad en función de q . Reemplazamos $p^2 = (-1/4)q + 9$ en $\eta = -8p^2/q$ obteniendo, $\eta = (2q - 72)/q$. Ahora analizamos la demanda:

- es elástica cuando

$$\frac{2q - 72}{q} < -1 \implies 0 < q < 24;$$

- es inelástica cuando

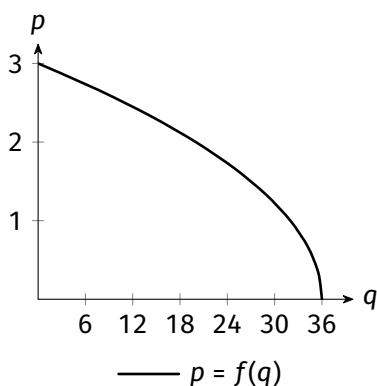
$$-1 < \frac{2q - 72}{q} < 0 \implies 24 < q < 36;$$

- y es unitaria cuando

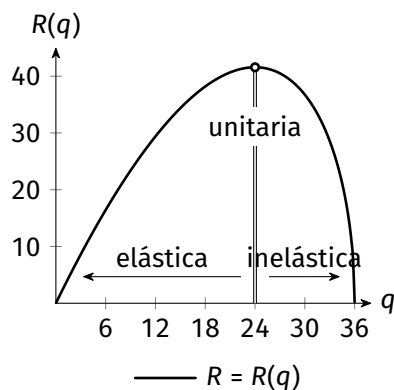
$$\frac{2q - 72}{q} = -1 \implies q = 24.$$

Por lo tanto, cuando se demandan 24 unidades del producto, el ingreso alcanza su valor máximo, siendo éste de 41 570 dólares. En cambio, cuando se demandan hasta 24 unidades el ingreso crece, y decrece cuando se demandan entre 24 y 36 unidades.

En la Figura 76 pueden apreciarse tanto la gráfica de la función de la demanda y la del ingreso (ambas en función de q a fines comparativos) y las regiones de elasticidad para q .



(a) Función de demanda



(b) Función de ingreso

Figura 76

Ejemplo 1.9.8: Para la función de demanda $p = -5q + 2500$, q en unidades y p en dólares, halle las cantidades demandadas para las cuales la demanda es elástica, inelástica y unitaria. Relacione con el ingreso.

Solución. En primer lugar hallamos η . Así,

$$\eta = \frac{(-5q + 2500)}{q} \cdot \frac{1}{-5} = \frac{q - 500}{q}.$$

Tenemos que la demanda es elástica cuando

$$\frac{q - 500}{q} < -1 \implies 0 < q < 250.$$

En cambio, será inelástica en el caso en que

$$-1 < \frac{q - 500}{q} < 0 \implies 250 < q < 500.$$

Será unitaria para

$$\frac{q - 500}{q} = -1 \implies q = 250.$$

Por otro lado, el ingreso marginal dR/dq en función de la elasticidad es

$$\frac{dR}{dq} = p \left(1 + \frac{1}{\eta} \right).$$

Luego, si $0 < q < 250$, la elasticidad es elástica ($\eta < -1$), con lo cual $p(1 + 1/\eta) > 0$, y entonces R es creciente en $(0, 250)$.

Si $250 < q < 500$, la elasticidad es inelástica ($-1 < \eta < 0$), de donde $p(1 + 1/\eta) < 0$. Entonces R es decreciente en $(250, 500)$.

Si $q = 250$, la elasticidad es unitaria ($\eta = -1$), por lo que $p(1 + 1/\eta) = 0$, siendo el ingreso máximo en $q = 250$.

En la Figura 77 se muestran la gráfica de la función de la demanda y el ingreso y las regiones de elasticidad.

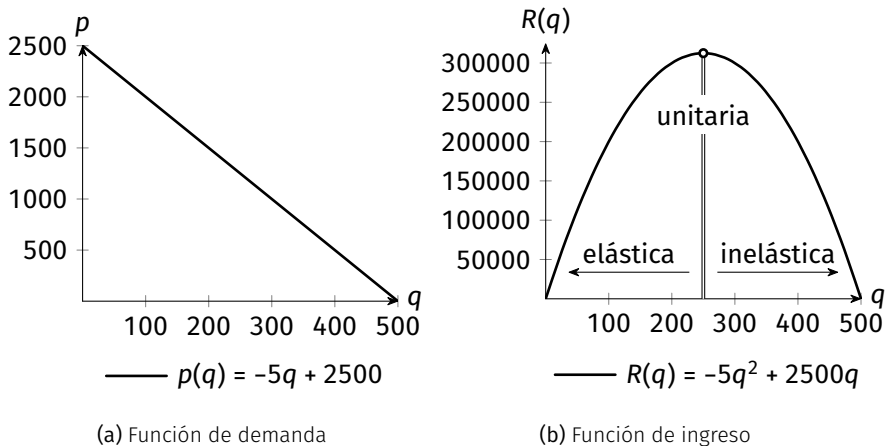


Figura 77

Hasta aquí nos hemos dedicado a estudiar la elasticidad puntual de la demanda, es decir, qué tan sensible es la demanda de un bien ante un cambio muy pequeño en su precio. No obstante, este concepto no se limita exclusivamente a funciones de demanda, ya que podrían estudiarse, por ejemplo, la elasticidad de la oferta, del costo, o de una función cualquiera,

respecto a alguna de sus variables independientes. El concepto de elasticidad de una función, en términos generales, se define como sigue.

Definición 1.9.3 (Elasticidad): Sea $y = f(x)$ una función derivable en x tal que $f(x) \neq 0$. Entonces, la elasticidad de y con respecto a x es:

$$\eta = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \quad \text{o también} \quad \eta = \frac{x}{f(x)} f'(x).$$

Ejemplo 1.9.9: Determine la elasticidad de las siguientes funciones.

1. $y = ax$, $a \neq 0$ constante.
2. $xy = a$, $a \neq 0$ constante.
3. $y = ax^b$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$ constantes.
4. $y = ce^{-kx}$, $c \neq 0$ y k constantes.

Solución. Aplicamos definición de elasticidad.

1. Para $y = ax$, tenemos

$$\eta = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{ax} \cdot a = 1.$$

2. Para $xy = a$, resulta

$$\eta = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{a/x} \cdot \frac{-a}{x^2} = -1.$$

3. Para $y = ax^b$, la elasticidad es

$$\eta = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{ax^b} \cdot a \cdot b \cdot x^{b-1} = b.$$

4. Para $y = ce^{-kx}$, tenemos

$$\eta = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{ce^{-kx}} \cdot c(-k)e^{-kx} = -k \cdot x.$$

La función potencia $y = ax^b$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ constantes, tiene elasticidad igual a b . Si, por ejemplo, la constante b es negativa, la elasticidad es negativa y constante en todos sus puntos.

La elasticidad de una función varía, en general, con el valor que se tome para x , como se observa en la función $y = ce^{-kx}$.

EJERCICIOS 1.9

1. Halle la elasticidad de la demanda η para las siguientes leyes de demanda y su correspondiente precio.
 - a. $p = 500 - 2q$ y $p = 100$.
 - b. $q = 600 - p$ y $q = 200$.

- c. $p = 1000 - q^2$, q en decenas de unidades, para $q = 200$ unidades.
- d. $p = \sqrt{1000 - 2q}$, $p = 25$
- La ley de demanda de un determinado producto es $q = 10e^{-0.005p}$, con q en unidades y p en dólares. Halle la elasticidad de la demanda cuando el precio del producto es 100 dólares, clasifique y relacione con el ingreso.
 - La función de demanda de un determinado producto es $q \cdot p^3 = 81\,000$ al demandarse q unidades a un precio unitario de p dólares. Compruebe que a partir de cualquier valor de q , si el precio se aumenta en 1 %, la demanda caerá tres veces más. Relacione con el ingreso.
 - La demanda de un determinado artículo está modelada por $p = 80 - 2q^2$, donde p está expresado en dólares y q en cientos de unidades. Obtenga la elasticidad de la demanda cuando el precio es de 32 dólares y cuál debería ser la reducción porcentual en el precio para producir un incremento aproximado del 10 % en la demanda.
 - Para cada función de demanda siguiente, donde q está expresado en cientos de unidades y p , el precio unitario, en miles de dólares
 - $p = 120 - 12q^2$;
 - $2p^2 + 800q = 36\,000$;
 determine:
 - las cantidades q para las cuales la elasticidad es elástica, inelástica y unitaria;
 - la función de ingreso e ingreso marginal y compruebe que la igualdad $\frac{dR}{dq} = p \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)$ se cumple;
 - la gráfica de la función ingreso e indique donde $\eta < -1$, $-1 < \eta < 0$ y $\eta = -1$.
 - Si la función de demanda es $q \cdot p^n = a$, donde n es un entero positivo y a un número real positivo, demuestre que la elasticidad puntual de la demanda es la constante $-n$ e interprete económicamente este resultado. Con la ayuda de [GeoGebra](#), asigne valores a los parámetros y grafique las funciones de demanda e ingreso. Relacione con la elasticidad.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Hasta ahora hemos estudiado funciones de una sola variable, en las que una cantidad depende de un único factor. Sin embargo, en el ámbito de las ciencias económicas es frecuente encontrar situaciones en las que una variable depende de varios factores simultáneamente. En esta sección introducimos las funciones de dos variables reales, desarrollamos herramientas para analizarlas (como las curvas de nivel y las derivadas parciales) y estudiamos sus aplicaciones al análisis económico, en particular a la optimización.

Introducción

En las ciencias económicas se encuentran múltiples situaciones en las cuales ciertas variables dependen de muchas otras. Por ejemplo, la demanda de cierto producto depende no sólo de su tipo, sino también de su precio, del precio de otros productos, de factores estacionales, de la moda, etc. El ingreso de una familia depende, entre otras, de la cantidad de integrantes que trabajan, del nivel de estudio, del tipo de trabajo. En la vida cotidiana, la cantidad de personas que se encuentran en una playa de cierta ciudad depende de la hora del día, del estado del día (lluvioso, nublado, soleado), del día de la semana (lunes/domingo), etc.

Abordaremos el estudio de las funciones de varias variables y nos abocaremos a resolver problemas de optimización inherentes a las ciencias económicas. Más precisamente, vamos a presentar las funciones de dos variables independientes.

Definición 1.10.1 (Función real de dos variables): Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto de pares ordenados de números reales (x, y) . Una *función real de dos variables reales* es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) en D un único número real, denotado por $f(x, y)$.

El conjunto D es el *dominio de la función* y el conjunto de todos los valores de la función es el *conjunto imagen* de f .

Observación 28: Cuando se tiene una función de dos variables, se suele utilizar z para representar los valores de la función: $z = f(x, y)$. La variable z es la variable dependiente y x e y , las variables independientes. Sin embargo, como esto solo es una convención, a veces pueden usarse otros símbolos para las variables involucradas.

Observación 29: Si el dominio de una función $z = f(x, y)$ no está explicitado, se entiende que este es el conjunto de todos los pares (x, y) para los cuales la función está definida. Es decir, quitando de $\mathbb{R}^2$ los puntos (x, y) que incurran en alguna restricción algebraica o de contexto.

Definición 1.10.2 (Gráfica de una función de dos variables): Sea $z = f(x, y)$ una función con dominio D . La *gráfica de f* es el conjunto de los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x, y)$ y $(x, y) \in D$.

La gráfica de una función de dos variables puede interpretarse como una superficie en el espacio tridimensional, cuya proyección sobre el plano xy es el dominio de la función. Así como no todas las curvas del plano pueden ser descritas como la gráfica de una función $y = f(x)$, no todas las superficies representan la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Se debe cumplir que a todo par ordenado $(x, y) \in D$ le corresponde una única imagen. Por ejemplo, una esfera es una superficie en el espacio de tres dimensiones que no puede ser representada como la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

Ejemplo 1.10.1:1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, $D = \mathbb{R}^2$.

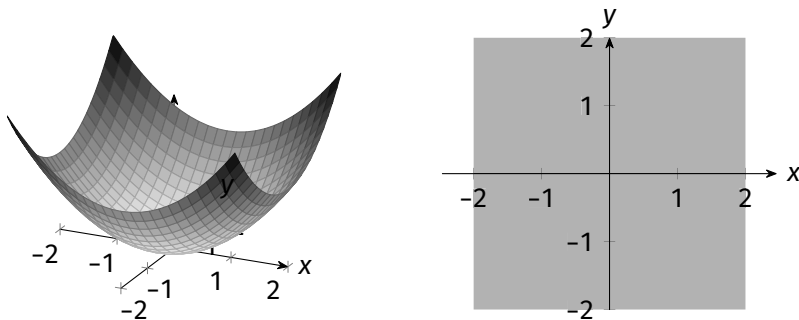


Figura 78

2. $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$.

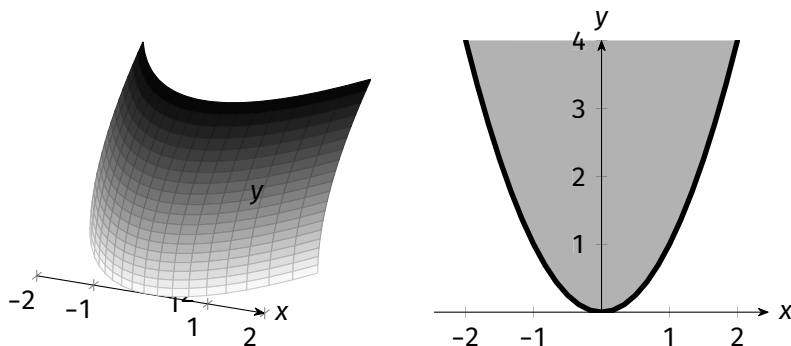


Figura 79

3. $f(x, y) = \ln(x + y)$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}$.

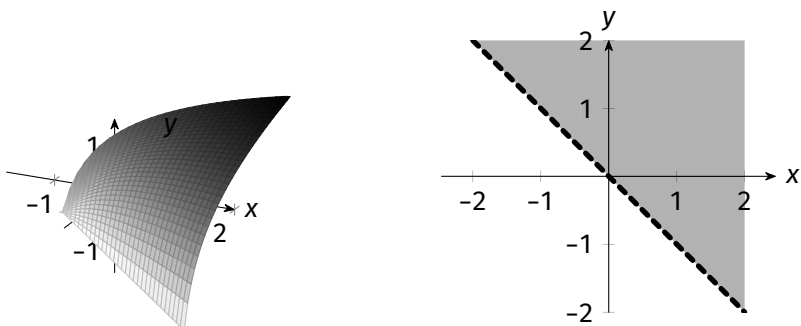


Figura 80

Curvas de nivel

Al estudiar funciones de varias variables, surge de forma natural un concepto que tiene muchos usos en las ciencias económicas.

Definición 1.10.3 (Curva de nivel): La *curva de nivel* c de una función $z = f(x, y)$ para un número real cualquiera c es la curva que surge como la intersección de la gráfica de f y el plano $z = c$. Es decir, la curva dada por $f(x, y) = c$.

Ejemplo 1.10.2: Se muestran algunas funciones y sus curvas de nivel a continuación.

1. Para $z = x^2 + y^2$ veamos las curvas de nivel 1, 4 y 9.

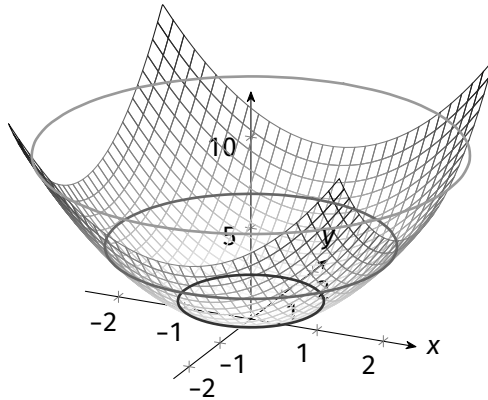


Figura 81

2. Para la función $z = x^2 - y^2$ veamos las curvas de nivel 1, -1, 4 y -4.

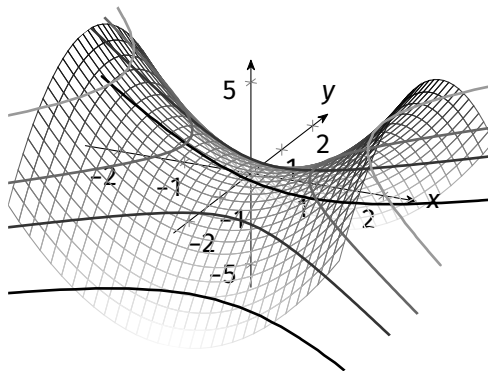


Figura 82

Vamos a mostrar ahora algunos usos específicos de las curvas de nivel en contextos económicos.

Ejemplo 1.10.3 (Curvas de indiferencia): Una función de utilidad $u = f(q_1, q_2)$, con $q_1, q_2 \geq 0$, cuantifica el nivel de satisfacción o preferencia de una persona al adquirir q_1 y q_2 unidades de dos bienes. Si bien la utilidad es un concepto subjetivo que no puede medirse, podemos simularla mediante la función u .

El conjunto de las diferentes combinaciones de las cantidades q_1 y q_2 para las cuales se obtiene el mismo nivel de utilidad u_0 se denomina *curva de*

indiferencia. Notemos que una curva de indiferencia no es otra cosa que una curva de nivel.

Supongamos que la utilidad de una persona en un mercado de pantalones y buzos, al comprar q_1 pantalones y q_2 buzos, está dada por $u = f(q_1, q_2) = 2q_1q_2$. Algunas curvas de indiferencia son:

- Si $u_0 = 6$, tenemos que $6 = 2q_1q_2$. Luego, $q_2 = 3/q_1$.
- Si $u_0 = 8$, tenemos que $8 = 2q_1q_2$. Luego, $q_2 = 4/q_1$.
- Si $u_0 = 12$, tenemos que $12 = 2q_1q_2$. Luego, $q_2 = 6/q_1$.

En el contexto del problema q_1 y q_2 no pueden ser negativas, por lo que podemos ver las curvas de indiferencia en el primer cuadrante del plano q_1q_2 en la Figura 83.

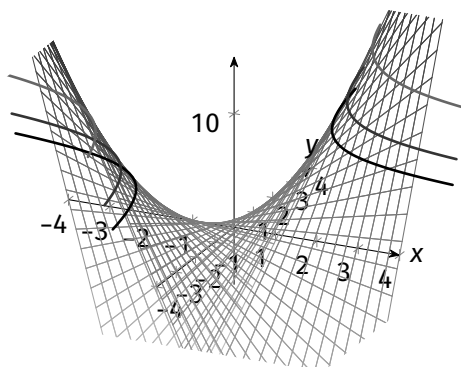


Figura 83

Ejemplo 1.10.4 (Isocuantas): Sean q_1 y q_2 las cantidades de dos insumos utilizados en la elaboración de un único producto. La cantidad Q de producto fabricado está dada por $Q = f(q_1, q_2)$ con $q_1, q_2 \geq 0$. Una *isocuanta* es una curva de nivel de la función de producción, es decir, es la curva que proporcione todas las combinaciones de insumos que generan el mismo nivel de producción.

Sea $Q = f(q_1, q_2) = 10q_1^{1/3}q_2^{2/3}$ una función de producción. Algunas isocuantas son:

- Si $Q_0 = 1000$, tenemos que $1000 = 10q_1^{1/3}q_2^{2/3}$. Luego, $q_2 = 1000q_1^{-1/2}$.
- Si $Q_0 = 4000$, tenemos que $4000 = 10q_1^{1/3}q_2^{2/3}$. Luego, $q_2 = 8000q_1^{-1/2}$.

- Si $Q_0 = 9000$, tenemos que $9000 = 10q_1^{1/3}q_2^{2/3}$. Luego, $q_2 = 27\,000q_1^{-1/2}$.

Las funciones de producción de la forma $Q = f(q_1, q_2) = Aq_1^\alpha q_2^\beta$, como la de este ejemplo, se llaman funciones de Cobb-Douglas.

En el contexto del problema q_1 y q_2 no pueden ser negativas, por lo que podemos ver las isocuantas en el primer cuadrante del plano q_1q_2 :

Observación 30: De forma similar, podrían estudiarse curvas de nivel de funciones de costo, ingreso, beneficio, entre otras, dando lugar a curvas de isocosto, isoingreso o isobeneficio. Muchas de estas curvas tienen además otras características propias relacionadas con conceptos económicos, pero que escapan a los objetivos de este libro.

Derivadas parciales

Consideremos una función $z = f(x, y)$ de dos variables, donde x e y son variables independientes y z es la variable dependiente. Las derivadas parciales de primer orden de f se denotan y se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}.\end{aligned}$$

Estas expresiones representan la tasa de cambio de f con respecto a x e y respectivamente, manteniendo la otra variable constante.

Podemos calcular derivadas parciales de orden superior también. Por ejemplo, la segunda derivada parcial con respecto a x se denota como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

y la segunda derivada parcial mixta con respecto a x e y se denota como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

De todos modos, cuando calculemos derivadas parciales en general evitaremos calcular el límite correspondiente, pues podemos aplicar las reglas conocidas de derivación de funciones de una variable, asumiendo que la variable que no se ve afectada se considera constante.

Otra notación que suele usarse para derivadas parciales es mediante subíndices que indiquen respecto a cuál variable se realiza la derivada, es decir:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Ejemplo 1.10.5: Se dan a continuación algunos ejemplos de derivadas parciales.

1. Si $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$, entonces $f_x(x, y) = 3x^2 - 3y$ y $f_y(x, y) = -3x + 2y$, recordando que cada variable se trata como una constante cuando derivamos respecto a la otra.
2. Si $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$, entonces usando la regla de la cadena tenemos que

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^4)^{-1/2} (2x) = x (x^2 + y^4)^{-1/2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^4)^{-1/2} (4y^3) = 2y^3 (x^2 + y^4)^{-1/2}.$$

Además, si quisiéramos, por ejemplo, calcular f_{xx} deberíamos usar la regla del producto:

$$f_{xx}(x, y) = (x^2 + y^4)^{-1/2} + x \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^4)^{-3/2} (2x) = (x^2 + y^4)^{-1/2} - x^2 (x^2 + y^4)^{-3/2}.$$

3. Si $f(x, y) = xy/\ln(x)$, entonces para calcular f_x podemos usar la regla del cociente, pero para calcular f_y no es necesario porque x se trata como una constante:

$$f_x(x, y) = \frac{y \ln(x) - xy \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{y \ln(x) - y}{(\ln(x))^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Relaciones entre bienes: una caracterización conceptual

En general, la demanda de un bien puede verse afectada no sólo por su propio precio sino también por el precio de otro bien relacionado con él. Por ejemplo, la demanda de carne vacuna puede verse afectada no sólo por el propio precio por kg, sino por el precio por kg de carne aviar. Cualquier cambio en el precio del kg de la carne aviar afectará siempre la demanda de la carne vacuna, y viceversa, dado que algunos consumidores estarán dispuestos a cambiar un producto por otro. Se presentan los siguientes tipos de relaciones entre bienes, a saber:

- **Bienes sustitutos:** son productos o servicios que pueden satisfacer las mismas necesidades o deseos que otro producto o servicio. También se dice que son bienes competitivos. Por ejemplo, Coca-Cola y Pepsi son bienes sustitutos.

- *Bienes complementarios*: son productos o servicios que se utilizan juntos para satisfacer una necesidad o deseo. Por ejemplo, los automóviles y el combustible son bienes complementarios.
- *Bienes independientes*: son productos o servicios que no tienen relación directa entre ellos. Por ejemplo, un libro y un par de zapatos son bienes independientes.

Estos conceptos son fundamentales en economía y *marketing*. Es posible profundizarlos estudiando la elasticidad de la demanda y cómo se ve afectada por la existencia de bienes sustitutos o complementarios, la estrategia de marketing y cómo las empresas pueden aprovechar la relación entre los bienes para promocionar sus productos o estudiar la competencia y cómo las empresas pueden diferenciar sus productos para evitar la sustitución, entre otros.

Sean A y B dos bienes relacionados tales que el precio de uno afecta la demanda del otro. Denotemos p_A y p_B los precios unitarios de los dos bienes. Sus demandas, x_A y x_B son funciones de ambos precios, esto es:

$$x_A = f(p_A, p_B) \quad \text{y} \quad x_B = g(p_A, p_B).$$

Podemos calcular cuatro derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A}, \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B}, \quad \frac{\partial x_B}{\partial p_A}, \quad \frac{\partial x_B}{\partial p_B}.$$

La derivada parcial $\partial x_A / \partial p_A$ representa la *demanda marginal de A respecto del precio p_A* . De manera análoga, $\partial x_A / \partial p_B$ es la demanda marginal de A con respecto a p_B , y mide aproximadamente cuánto varía la demanda de A ante un incremento unitario en el precio de B. Las otras dos derivadas se interpretan de manera similar.

A continuación analizamos los signos de las derivadas parciales de primer orden. Si el precio del artículo B se mantiene fijo, entonces, en general, un incremento en el precio de A da como resultado una disminución en la demanda x_A ; esto se refleja en el signo negativo de la derivada parcial:

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_B}{\partial p_B} < 0.$$

Las derivadas cruzadas $\partial x_A / \partial p_B$ y $\partial x_B / \partial p_A$ pueden ser positivas o negativas dependiendo de la interacción entre los dos bienes.

Por ejemplo, si el precio de A permanece constante y aumenta el precio de B, puede producirse un aumento en la demanda de A, es decir,

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_B} > 0,$$

ya que algunos consumidores cambiarán del bien B al bien A . De manera similar, si el precio de B se mantiene y aumenta el precio de A , la demanda de B puede aumentar:

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} > 0,$$

porque algunos consumidores cambiarán de A a B .

En este caso, los bienes A y B son *sustitutos* (o *competitivos*) entre sí cuando se cumplen ambas condiciones:

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} > 0, \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} > 0,$$

es decir, cuando un aumento en el precio de uno provoca un aumento en la demanda del otro.

Ejemplos de bienes sustitutos son: la carne vacuna y la carne de cerdo, el pan y las galletitas, el azúcar y la miel, etc.

En otras situaciones, un aumento en el precio de un bien provoca una disminución en la demanda del otro, manteniéndose constante su precio. En tal caso, ambas derivadas cruzadas son negativas:

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} < 0, \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} < 0.$$

Se dice entonces que los bienes A y B son *complementarios*.

Ejemplos de bienes complementarios son: el motor de autos y el aceite de motor, el lápiz y la goma de borrar, la raqueta y las pelotas de tenis, etc. Cabe destacar que la complementariedad no siempre es mutua: por ejemplo, cierto software puede ser complementario de una computadora, pero no necesariamente a la inversa, ya que la computadora puede utilizar otros programas.

Por último, existen pares de bienes entre los cuales *no hay relación de dependencia*: se dice que son *bienes independientes*, dado que un cambio en el precio de uno no afecta la cantidad demandada del otro. En este caso se verifica que:

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} = 0, \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 0.$$

Ejemplos de bienes independientes son: las legumbres y el cemento, la ropa deportiva y el azúcar, etc.

Ejemplo 1.10.6: A continuación se presentan algunas funciones de demanda para ciertos bienes A y B , para determinar si son sustitutos, complementarios o independientes.

1. Los bienes A y B cuyas demandas están dadas por

$$x_A = 300 - 0.6p_B^2 - 4p_A^2, \quad x_B = 400 - 0.4p_A^2 - 6p_B^2,$$

son complementarios, ya que

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} = -0.8p_A < 0, \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} = -1.2p_B < 0,$$

y se supone que $p_A > 0$, $p_B > 0$.

2. Los bienes A y B cuyas demandas están dadas por

$$x_A = 30 + 5p_B - p_A, \quad x_B = 40 + 3p_A - 6p_B,$$

son sustitutos, ya que

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} = 3 > 0, \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 5 > 0.$$

Optimización

De una manera similar a la usada en funciones reales de una variable real $y = f(x)$, vamos a buscar puntos críticos y extremos locales en funciones reales de dos variables reales $z = f(x, y)$.

Para determinar los puntos extremos locales de una función de una variable, buscamos los puntos donde la gráfica tiene una recta tangente horizontal. Es decir, los máximos y/o mínimos locales, si estos existen, aunque también podía suceder que la recta tangente en el punto no estuviera definida. Es decir, para optimizar una función $y = f(x)$, analizamos los puntos críticos $x = c$, tales que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Análogamente, para una función de dos variables hallamos los puntos donde la superficie tiene un plano tangente horizontal. En estos determinamos máximos locales, mínimos locales, o puntos de silla, si estos existen. Así, el estudio de máximos y mínimos locales de una función de varias variables es una extensión del caso de una variable. No vamos a considerar en este libro puntos críticos en los cuales el plano tangente no esté definido.

En general, es usual hablar de *función suave* cuando tanto la función como sus derivadas son continuas, tanto como sea necesario. En tal caso, nunca pasará que el plano tangente en un punto del dominio no esté definido.

Definición 1.10.4 (Extremos locales): La función $z = f(x, y)$ tiene un *máximo local* en el punto (x_0, y_0) si

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

para todo punto (x, y) «cercano» a (x_0, y_0) y distinto de (x_0, y_0) .

La función $z = f(x, y)$ tiene un *mínimo local* en el punto (x_0, y_0) si

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

para todo punto (x, y) «cercano» a (x_0, y_0) y distinto de (x_0, y_0) .

El valor $f(x_0, y_0)$ se denomina *valor máximo local* o *valor mínimo local* según corresponda. A veces se utilizan las palabras extremo u óptimo para referirse tanto a máximos como a mínimos.

Ahora bien, ¿cómo buscamos los puntos críticos para hallar potenciales extremos locales para funciones $z = f(x, y)$?

Definición 1.10.5 (Punto crítico): Dada una función suave $z = f(x, y)$ con dominio D , un punto $(x_0, y_0) \in D$ es un *punto crítico* de f si $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Es decir, para hallar los puntos críticos debemos buscar las soluciones del sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

De aquí inferimos que para localizar puntos extremos de una función debemos examinar los puntos críticos. Sin embargo, debemos tener en cuenta que un punto crítico puede resultar ser un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de estos.

Ejemplo 1.10.7: Hallar los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3$.

Solución. Las derivadas de primer orden son $f_x(x, y) = 2x - 4$ y $f_y(x, y) = 4y + 4$, por lo que tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

de donde obtenemos un único punto crítico, que es $(2, -1)$.

De manera similar al caso de funciones de una sola variable, existen funciones donde las derivadas parciales son ceros en el punto crítico y sin embargo en ese punto no se alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.10.8: Consideremos la función $z = f(x, y) = x^2 - y^2$, cuya gráfica se asemeja a una silla de montar como puede verse:

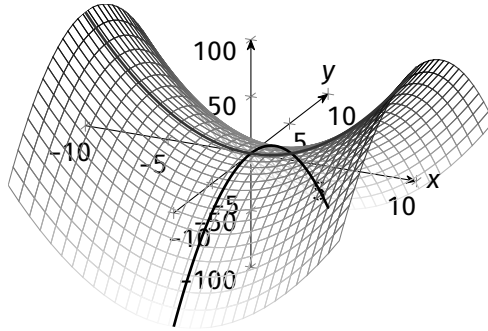


Figura 84

En este caso tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

de donde obtenemos un único punto crítico, que es $(0, 0)$. Pero como podemos ver en el gráfico, ese punto no puede ser un máximo local, pues la función crece en la dirección de x , y no puede ser un mínimo local, pues la función decrece en la dirección de y .

Un punto crítico de este tipo se denomina *punto silla*.

Como puede verse en el gráfico del ejemplo anterior, no todo punto crítico va a indicar la existencia de un óptimo local en él. En el caso general, las denominadas *condiciones de segundo orden* nos van a servir para identificar en cada punto crítico la presencia de un máximo, un mínimo, o un punto silla. Para ello, vamos a recordar la definición de determinantes de matrices de 2×2 :

Definición 1.10.6 (Determinante de una matriz cuadrada): Dada una matriz de 2×2 de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, su *determinante* es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Definición 1.10.7 (Matriz hessiana): Dada una función suave $z = f(x, y)$, su *matriz hessiana*, denotada por D^2f , es la matriz formada por sus derivadas parciales de segundo orden de la siguiente manera:

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.10.1 (Condiciones de segundo orden): Sean $z = f(x, y)$ una función suave y (x_0, y_0) un punto crítico de f .

1. Si $|D^2 f(x_0, y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en (x_0, y_0) .
2. Si $|D^2 f(x_0, y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en (x_0, y_0) .
3. Si $|D^2 f(x_0, y_0)| < 0$, entonces f tiene un punto silla en (x_0, y_0) .
4. Si $|D^2 f(x_0, y_0)| = 0$, no podemos afirmar cuál es la naturaleza de la función en el punto crítico, por lo que el criterio falla.

Ejemplo 1.10.9: Hallar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4.$$

Solución. En primer lugar, notemos que sus derivadas de primer orden son $f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x$ y $f_y(x, y) = 6xy - 6y$. Por ello, para hallar los puntos críticos debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ 6xy - 6y = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación puede escribirse como $6y(x - 1) = 0$, de donde deducimos que $6y = 0$ o $x - 1 = 0$, ya que para que un producto de números reales sea cero, debe ser cero alguno de los factores involucrados. De aquí tenemos que $y = 0$ (pues $6 \neq 0$) o $x = 1$.

Ahora usaremos estos datos en la primera ecuación, por lo que tenemos dos casos.

CASO 1 $y = 0$: La primera ecuación queda $3x^2 + 3 \cdot 0^2 - 6x = 0$, es decir $3x^2 - 6x = 0$. Esta ecuación puede escribirse como $3x(x - 2) = 0$ y obtenemos que $3x = 0$ o $x - 2 = 0$, es decir que $x = 0$ o $x = 2$ (también podríamos haber usado la fórmula resolvente). Por lo tanto de este caso obtenemos dos puntos críticos: $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

CASO 2 $x = 1$: La primera ecuación queda $3 \cdot 1^2 + 3y^2 - 6 \cdot 1 = 0$, es decir

$3 + 3y^2 - 6 = 0$. Luego, $3y^2 - 3 = 0$. De aquí:

$$\begin{aligned} 3y^2 - 3 &= 0 \\ 3y^2 - 3 + 3 &= 0 + 3 \\ 3y^2 &= 3 \\ \frac{1}{3}3y^2 &= \frac{1}{3}3 \\ y^2 &= 1 \\ \sqrt{y^2} &= \sqrt{1} \\ |y| &= 1, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $y = 1$ o $y = -1$ (lo cual también puede obtenerse resolviendo la ecuación cuadrática $3y^2 - 3 = 0$ con la fórmula resolvente). Por lo tanto de este caso obtenemos dos puntos críticos: $(1, 1)$ y $(1, -1)$.

Hasta aquí, hemos encontrado los cuatro puntos críticos de la función analizada, siendo estos $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, -1)$, pero además queremos clasificarlos. Para ello vamos a necesitar conocer f_{xx} y $|D^2f|$. Recordemos que $f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x$ y $f_y(x, y) = 6xy - 6y$. Luego $f_{xx}(x, y) = 6x - 6$ y

$$|D^2f| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x - 6 & 6y \\ 6y & 6x - 6 \end{vmatrix} = (6x - 6)^2 - 36y^2.$$

Con esto, podemos armar la Tabla 24 para clasificar a cada punto crítico (x_0, y_0) . En $(0, 0)$ la función tiene un máximo local, y el valor de f es $f(0, 0) = 4$.

Tabla 24

(x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$ D^2f(x_0, y_0) $	Clasificación
$(0, 0)$	-6	36	Máximo local
$(2, 0)$	6	36	Mínimo local
$(1, 1)$	0	-36	Punto silla
$(1, -1)$	0	-36	Punto silla

Por otro lado, en $(2, 0)$ la función tiene un mínimo local, y el valor de f es $f(2, 0) = 0$.

EJERCICIOS 1.10

1. Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones. Luego, calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden.

a. $f(x, y) = 2x + y$.

b. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.

c. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

d. $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$.

e. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9)$.

f. $f(x, y) = e^{3x-6y}$.

2. En cada una de las siguientes funciones encontrar los puntos críticos y clasificarlos. En los mínimos y máximos locales, encontrar el valor correspondiente de la función.

a. $f(x, y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - y^2 - 2xy$. **b.** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + xy + 2$.

c. $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 8x + 10y - 5xy$. d. $f(x, y) = -x^2 - y^3 + 12y^2$.

e. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x$.

f. $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - x - 4y.$

3. Determine la relación, si existe, entre los bienes A y B si las funciones de demanda están dadas por:

a. $x_A = 1000 - 0.01p_A - 0.005p_B$ y $x_B = 1500 + \frac{2}{p_A+4} + \frac{3}{p_B+2}$.

b. $x_A = 400 - 2p_A + p_B$ y $x_B = 300 + 3p_A - 4p_B$.

4. El propietario de una juguetería estima que la cantidad de unidades z que podría vender en el año de un nuevo juguete es función de lo que invierte en publicidad a través de plataformas digitales y televisión por cable, de acuerdo con la ley:

$$z(x, y) = 7200x + 6000y - 20x^2 - 12.5y^2 - 50xy,$$

donde x e y representan montos anuales pagados por publicidad en televisión por cable y en plataformas digitales, respectivamente, expresados en millones de pesos. Actualmente se destinan 60 millones a anuncios publicitarios en televisión y 30 millones a anuncios en plataformas digitales.

- a. Calcule la cantidad de juguetes que actualmente se espera vender en un año.
 - b. Utilizando derivadas parciales, analice si conviene aumentar en un millón la inversión en televisión o en plataformas digitales.
 - c. Determine si existe una combinación de montos a invertir en cada medio para que las ventas anuales alcancen el valor máximo.
5. Una empresa fabrica velas y las vende en cajas de 50 unidades, en dos ciudades de la provincia de Santa Fe, una ubicada al sur (ciudad A), y otra en el norte (ciudad B). El costo de producción diario (en dólares) de x cajas en la ciudad A está dado por $C_A(x) = 0.05x^2 + 4x + 275$, mientras que el costo de producción diario (en dólares) de y cajas en la ciudad B está dado por $C_B(y) = 0.02y^2 + 4y + 500$. Cada caja de velas se vende a 15 dólares, sin importar la ciudad en que se produzca.

- a. Halle la función beneficio conjunta $B(x, y)$.
 - b. Calcule $B(100, 30)$ y $\frac{\partial B}{\partial y}(100, 30)$ e interprete en términos económicos cada resultado.
 - c. Determine la cantidad de cajas de velas que se deben fabricar y vender en cada ciudad para obtener un beneficio *máximo*. ¿Cuál es dicho beneficio?
6. Las demandas semanales de dos artículos X e Y se comportan según los modelos $x = 12 - p_1$ y $y = \frac{33}{2} - \frac{1}{2}p_2$, donde x e y son cantidades demandadas (en kilos) de X e Y , respectivamente, y p_1 y p_2 son los correspondientes precios por kilo de producto, en dólares. La función de costos totales está dada por $C(x, y) = 3x^2 + xy + 2y^2$.
- a. Halle la expresión de la utilidad semanal $U(x, y)$.
 - b. ¿Cuánto debe venderse por semana de cada producto para lograr la máxima utilidad? ¿A qué precios?
 - c. Obtenga la utilidad máxima.
7. Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital (en miles de dólares), la producción semanal de una empresa está dada por $P(L, K) = 10K + 11L + 2LK - L^2 - 2K^2$ siendo $L > 0$ y $K > 0$.
- a. Actualmente, se utilizan por semana 36 horas de manos de obra y 5000 dólares de capital. Si la empresa desea aumentar la producción, ¿le aconsejaría aumentar las horas de mano de obra o aumentar el capital?
 - b. Halle la cantidad de horas de mano de obra y de capital que se deben usar, semanalmente, con el fin de maximizar la producción.
8. Una empresa utiliza dos tipos de materias primas, X e Y , en su producción. Usando x unidades de X e y unidades de Y , la empresa puede elaborar P unidades del producto, con $P = 0.52x + 0.48y + 0.12xy - 0.07x^2 - 0.06y^2$. El costo de cada unidad de x es 5.10 dólares y de 1.80 dólares por cada unidad utilizada de Y , y la empresa puede vender todas las unidades que produce a 12 dólares cada una.
- a. ¿Qué cantidades de X e Y tendrán que usarse para maximizar las utilidades?
 - b. ¿A cuánto asciende la máxima utilidad?
9. Un comercio vende dos tipos de té, A y B , cuyos costos por kilogramo, son de 60 y 75 dólares, respectivamente. Su propietario sabe, por experiencia, que si vende cada kilogramo de té clase A en p_A dólares y cada kilogramo

de té tipo B en p_B dólares, las cantidades vendidas, en kg, de cada uno pueden determinarse a través de las siguientes expresiones:

$$q_A = 4800 - 75p_A + 37.5p_B, \quad q_B = 600 - 37.5p_B + 37.5p_A.$$

- a. Estos bienes ¿son competitivos, complementarios o no están relacionados?
 - b. Encuentre la función que representa el beneficio para el comercio en base a los precios unitarios.
 - c. ¿A qué precio debería vender el kilogramo de cada tipo de té para maximizar su beneficio?
 - d. ¿Cuál es el máximo beneficio?
10. Una industria láctea ha determinado que cada corrida de producción de leche en polvo tiene un costo total (en u.m.) dado por la función $C(x, y) = 6x^2 + 8y^2 - 10xy + 6x - 28y + 40$, donde x representa el número de horas-máquina (en cientos) e y la cantidad (en miles) de kilogramos de leche elaborada.
- a. Hallar e interpretar en el contexto del problema $\frac{\partial C}{\partial x}(10, 25)$ y $\frac{\partial C}{\partial y}(10, 25)$.
 - b. Determinar la cantidad de horas-máquina y la cantidad de kilogramos a producir que minimizan el costo total de la corrida de producción.
11. Una compañía vende dos productos que son sustitutos parciales uno del otro, por ejemplo, té y café. Las cantidades demandadas, q_1 y q_2 , se dan como función de los precios p_1 y p_2 , como sigue:

$$q_1 = 517 - 3.5p_1 + 0.8p_2 \quad q_2 = 770 + 1.4p_1 - 4.4p_2$$

- a. Halle $R(p_1, p_2)$, es decir, el ingreso por ventas totales en función de p_1 y p_2 .
 - b. ¿Qué precios deberá cobrar la compañía con el fin de maximizar el ingreso por las ventas totales?
12. En un determinado período de tiempo la producción mensual P (en miles de litros) de una cervecería está dada por la función de Cobb-Douglas $P = 1.1 \cdot L^{0.6} \cdot K^{0.4}$, L es la mano de obra (en cientos de h-hombre) y K el capital invertido, en miles de dólares.
- a. Halle la producción total para 3000 horas-hombre semanales y una inversión mensual de 70 000 dólares.
 - b. Determine e interprete económicamente las productividades marginales en las condiciones dadas en el ítem anterior.

13. El volumen de ventas mensuales V de cierto artículo depende de su precio p y de la cantidad A que el fabricante invierte en publicidad (ambos en dólares), modelado por

$$V(p, A) = 4000 \cdot (5 - p \cdot e^{-0.01A}).$$

Analice qué sucede con las ventas en los siguientes casos.

- a. Se aumenta el precio del producto en una cantidad muy pequeña a partir de su precio actual de 8 dólares, y se fija la inversión publicitaria en 400 dólares.
- b. Se aumenta la inversión en publicidad en una cantidad muy pequeña a partir de 400 dólares, y el precio se mantiene en su valor actual de 8 dólares.
- c. Basándose en lo obtenido, ¿qué recomendaría al gerente comercial de esta compañía?

2 Cálculo integral

El cálculo integral, una rama fundamental del cálculo matemático, ha sido una herramienta esencial en el avance de la ciencia y la tecnología. Su historia es tan fascinante como su aplicación, y este capítulo tiene como objetivo explorar ambos aspectos.

La historia del cálculo integral se remonta a la antigua Grecia, donde matemáticos como Eudoxo y Arquímedes hicieron las primeras tentativas de entender el concepto de área bajo una curva, mediante aproximaciones sucesivas de áreas de polígonos. Sin embargo, no fue hasta el siglo XVII cuando dos matemáticos brillantes, Isaac Newton (1643 – 1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), en forma independiente, desarrollaron lo que ahora conocemos como cálculo integral.

Newton, un físico, astrónomo y matemático inglés, utilizó el cálculo integral para formular sus leyes del movimiento y la gravitación universal. Por otro lado, Leibniz, un filósofo y matemático alemán, introdujo la notación integral que usamos hoy en día. Aunque hubo una disputa sobre quién fue el verdadero inventor del cálculo, ambos contribuyeron enormemente a su desarrollo y aplicación.

El cálculo integral es más que un simple ejercicio matemático. Ha encontrado aplicaciones en diversas disciplinas. Particularmente, en el campo de las ciencias económicas, algunas de sus aplicaciones las encontramos en el cálculo de índices como el de Gini, excedente del consumidor y del productor y para obtener los modelos de costo total, ingreso y utilidades a partir de sus respectivas tasas de cambio.

A lo largo de este capítulo, estudiaremos los conceptos fundamentales, las técnicas y aplicaciones del cálculo integral con el fin de comprender y manejar sólidamente este campo de conocimiento.

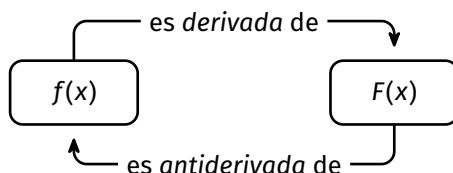
ANTIDERIVADAS

Hasta ahora en nuestro estudio del cálculo, nos hemos ocupado del proceso de diferenciación (esto es, conceptualización, cálculo y aplicación de las

derivadas de funciones). Esta parte se denomina cálculo diferencial. Enseguida abordaremos el segundo campo de estudio dentro del área general del cálculo, denominado cálculo integral, en el que nos interesará el proceso inverso a la diferenciación.

Por ejemplo, podemos estar estudiando un modelo de costos en que el costo marginal, $C' = C'(q)$, es una función conocida del nivel de producción y necesitamos calcular el costo total de producir q artículos, $C = C(q)$. O bien, podríamos conocer la tasa de crecimiento del capital en función del tiempo, $C' = C'(t)$ y querer calcular el valor de la inversión al cabo de cierto periodo, $C = C(t)$. Es decir, estamos necesitando obtener información de la función original a partir de su tasa de cambio.

El proceso de determinar la función cuando se conoce su derivada se llama *integración*, y la función a determinar se denomina *antiderivada* o *primitiva* de la función dada.



Hallar la antiderivada de alguna función f significa encontrar una función F , cuya derivada sea igual a f .

Por ejemplo, si $f(x) = 3x^2$, entonces $F(x) = x^3$ es «una» antiderivada de f . Ahora bien, ¿hay otras antiderivadas posibles? Debe observarse que esto es así, pues las funciones $G(x) = x^3 + 4$ y $H(x) = x^3 + 2$ también tienen a $f(x) = 3x^2$ como derivada. De hecho, para cualquier constante C , $x^3 + C$ tiene derivada $3x^2$ y, en consecuencia, $F(x) = x^3 + C$ es la «familia» de antiderivadas de $f(x) = 3x^2$ para cualquier C . La constante C , que puede tener un valor arbitrario, se conoce como *constante de integración*.

Cada antiderivada de f en un intervalo I puede expresarse de la forma $F(x) + C$, siendo C un valor constante.

Definición 2.1.1 (Antiderivada): Una función F es una *primitiva* o *antiderivada* de f en un intervalo I dado, si la derivada de F es igual a f para toda x del intervalo. Es decir

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

para toda $x \in I$.

La familia de funciones de la forma $F(x) + C$ recibe el nombre de *antiderivada general* de f .

Observamos que, dada una antiderivada de f , entonces cualquier otra antiderivada difiere de ella sólo por una constante, como se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1: Si F_1 y F_2 son dos antiderivadas de una función f en un intervalo I , entonces existe una constante C tal que

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

En consecuencia, una vez que se conoce una antiderivada particular de f en un intervalo I , todas las demás antiderivadas en ese intervalo se pueden obtener sumando constantes a la antiderivada conocida.

El teorema siguiente resume lo expresado hasta acá.

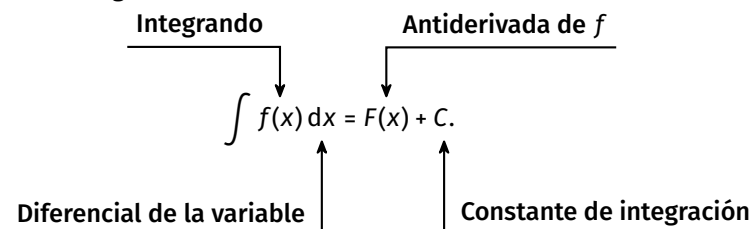
Teorema 2.1.2: Si F es cualquier antiderivada de f en un intervalo I , entonces para cualquier constante C , $F(x) + C$ es, también, una antiderivada en ese intervalo. Además, estas son todas las antiderivadas de f posibles. Es decir, cada antiderivada de f en el intervalo I puede expresarse en la forma $F(x) + C$, siendo C una constante real.

Dado que la constante de integración puede ser cualquier número real, la integral así obtenida recibe el nombre más propio de *integral indefinida*.

La expresión

$$\int f(x) dx$$

se utiliza para denotar a un miembro arbitrario del conjunto de antiderivadas de f y se lee integral de $f(x)$ respecto de x . En tal expresión, la función f a integrar se denomina *integrando* y el símbolo $\int$ es el *signo de integral*. El signo de integral y dx van juntos. El signo de integral indica la operación de integración y el diferencial dx especifica que la variable de integración es x . El integrando siempre se coloca entre el signo de integral y la diferencial de la variable de integración.



Cuando la integral se resuelve, tanto el signo de integral como la diferencial desaparecen, dando lugar a $F(x) + C$.

Ejemplo 2.1.1: Represente gráficamente algunas funciones de la familia de antiderivadas $F(x) + C$, siendo $f(x) = 3x^2$.

Solución. Integramos la función f y, por lo visto anteriormente, resulta:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

La antiderivada general o simplemente la integral indefinida de $f(x) = 3x^2$ es $F(x) = x^3 + C$. Si $C = 0$, se obtiene la antiderivada $F_1(x) = x^3$. Otras antiderivadas posibles son : $F_2(x) = x^3 + 1$, $F_3(x) = x^3 - 1$, $F_4(x) = x^3 + 2$, etc. como puede verse en la Figura 1.

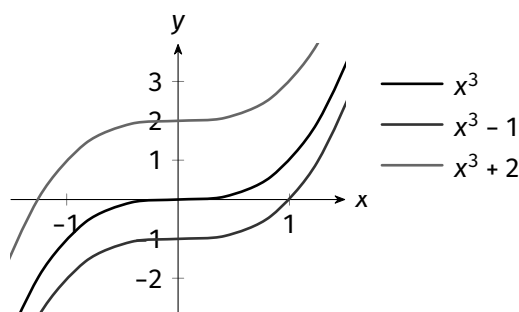


Figura 1

Ejemplo 2.1.2: Para la función del ejemplo anterior, obtenga la antiderivada cuya gráfica pasa por el punto $(2, -4)$.

Solución. Se busca la función de la familia $F(x) = x^3 + C$ cuya gráfica pase el punto $(2, -4)$. Reemplazamos x por 2 y $F(x)$ por -4 y resolvemos la ecuación para C : $-4 = 2^3 + C$. Se obtiene $C = -12$. Así, la antiderivada buscada es $y = x^3 - 12$.

Se deduce de este ejemplo que para hallar el valor de C en una situación particular será necesario contar con información adicional referida a la función que se quiere obtener. A continuación analizaremos otro ejemplo que ilustra esta cuestión.

Ejemplo 2.1.3: Considerando que la tasa de crecimiento del ingreso por la venta de un determinado producto es una constante positiva, halle la función que representa el ingreso total.

Solución. Se tiene como dato la función de ingreso marginal, $R'(q) = k$, $k > 0$ y $q \geq 0$. La función de ingreso total se obtiene integrando:

$$\int R'(q) dq = \int k dq.$$

Resolver esta integral implica buscar funciones cuya derivada sea una constante. Por lo que sabemos del proceso de derivación, el resultado es

$$\int k \, dq = kq + C.$$

Ahora bien, ¿qué valor toma C en la función ingreso total? Si R es función ingreso, entonces $R(0) = 0$; esta condición permite obtener el valor de $C = 0$. Así, la expresión de la función ingreso total es $R(q) = kq$, siendo $q \geq 0$.

Ejemplo 2.1.4: Halle la expresión de la función que representa el costo total, $C = C(q)$, si la tasa de cambio del costo de un producto puede modelarse mediante $C'(q) = 2q$, $q \geq 0$ siendo el costo fijo 100 u.m.

Solución. La expresión del costo total estará dada por una función cuya derivada sea justamente $C'(q)$ y tal que se cumpla la condición estipulada. En primer lugar, buscamos la antiderivada de $C'(q)$, integrando:

$$\int C'(q) \, dq = \int 2q \, dq = q^2 + K.$$

Para evitar confusión entre la constante de integración y la denominación de la función, llamamos K a la primera. Como el costo fijo es 100 u.m. quiere decir que el punto $(0, 100)$ pertenece a la función costo total buscada. Considerando $C(0) = 100$ resulta que K tiene el valor de 100 u.m. Por tanto, la función que modela el costo total de acuerdo con los datos es: $C(q) = q^2 + 100$.

Observación 31: Es menester aclarar que $\int dx$ es igual a $\int 1 \, dx$ y no a $\int 0 \, dx$.

A partir de la definición de integral indefinida, se sigue que

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) \, dx \right] = f(x).$$

Con el fin de establecer reglas y procedimientos que nos permitan el cálculo de integrales, comenzaremos analizando el proceso de integración para funciones de la forma $y = x^n$.

Una de las actividades matemáticas principales refiere a la búsqueda de «regularidades» o «repeticiones en la evolución de un proceso». Esta búsqueda nos lleva a determinar una fórmula para la situación que se está estudiando, sin embargo, la validación de la fórmula necesita de una «demostración» formal para utilizarla sin cometer errores en su campo de aplicación. En nuestro caso, trabajaremos el proceso de la búsqueda de la fórmula y la validaremos mediante una proposición.

Comenzaremos con la función más sencilla e iremos aumentando la potencia y el campo numérico. Así,

1. Tomando $n = 0$, $f(x) = x^0 = 1$, una antiderivada es $F(x) = x$ puesto que $F'(x) = 1$.
2. Si $n = 1$, $f(x) = x$, una antiderivada es $F(x) = x^2/2$ puesto que $F'(x) = x$.
3. Si $n = 2$, $f(x) = x^2$, una antiderivada es $F(x) = x^3/3$ puesto que $F'(x) = x^2$.
4. Si $n = 3$, $f(x) = x^3$, una antiderivada es $F(x) = x^4/4$ puesto que $F'(x) = x^3$, y así sucesivamente.

Hasta aquí, se observa que una antiderivada de $f(x) = x^n$ es otra función potencia cuyo exponente es una unidad mayor que el dado, multiplicada por el recíproco de su nuevo exponente.

Ahora bien, analicemos si este resultado se mantiene en el caso de tener exponente entero negativo. Volvemos a calcular algunas antiderivadas.

1. Si $n = -2$, $f(x) = x^{-2} = 1/x^2$, una antiderivada es $F(x) = x^{-1}/(-1) = -1/x$ puesto que $F'(x) = x^{-2}$.
2. Si $n = -3$, $f(x) = x^{-3}$, una antiderivada es $F(x) = (-1/2)x^{-2} = -1/(2x^2)$ puesto que $F'(x) = x^{-3}$.

La siguiente proposición valida lo anterior.

Proposición 2.1.3 (Fórmula de la potencia): Sea x^n un monomio en la variable x , tal que $n \neq -1$. Entonces

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

Esta fórmula puede comprobarse derivando la integral indefinida:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) = \frac{1}{n+1} \frac{d}{dx} (x^{n+1}) = \frac{1}{n+1} (n+1) x^n = x^n.$$

Ejemplo 2.1.5: Halle la antiderivada de

$$\int x^{10} dx.$$

Solución. Por la proposición 2.1.3, dado que el integrando es de la forma x^n , con $n = 10$, tenemos que su antiderivada es

$$\int x^{10} dx = \frac{x^{10+1}}{10+1} + C = \frac{x^{11}}{11} + C,$$

que es lo que se quería determinar.

Ejemplo 2.1.6: Halle la antiderivada de

$$\int \frac{1}{x^{20}} dx.$$

Solución. En esta situación, es conveniente reescribir $1/x^{20}$ como x^{-20} . Así, tenemos:

$$\int \frac{1}{x^{20}} dx = \int x^{-20} dx = \frac{x^{-20+1}}{-20+1} + K = \frac{x^{-19}}{-19} + K = \frac{-1}{19} \cdot x^{-19} + K,$$

que es lo que se quería encontrar.

Ejemplo 2.1.7: Halle la antiderivada de

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

Solución. Al igual que en el inciso anterior, lo conveniente aquí es reescribir $1/\sqrt{t}$ como $t^{-1/2}$. Luego,

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + M = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + M = 2 \cdot \sqrt{t} + M, \quad t \geq 0,$$

que es la antiderivada pedida.

Ejemplo 2.1.8: Halle la antiderivada de

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx.$$

Solución. En este caso, para lograr un integrando de la forma x^n aplicamos propiedades de potencias de igual base, obteniendo: $x^2/\sqrt{x} = x^{3/2}$. Por consiguiente:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} + C,$$

y obtenemos la antiderivada buscada.

Ejemplo 2.1.9: ¿Cuál es la antiderivada de $y = x^n$ cuando $n = -1$?

Solución. En este caso, no es posible aplicar la proposición 2.1.3 ya que $n = -1$. Afortunadamente, conocemos una función cuya derivada es $1/x$, a saber, el logaritmo natural de x .

Para $x > 0$, $d/dx \ln(x) = 1/x$. Entonces, lo reinterpretemos como

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + K, \quad \text{para } x > 0.$$

Si $x < 0$ sabemos que $\ln(x)$ no está definido y no puede ser una antiderivada de $1/x$. Sin embargo, sí lo está $\ln(-x)$ y $d/dx \ln(-x) = 1/(-x) \cdot (-1) = 1/x$ por la regla de la cadena. Así,

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + K, \quad \text{para } x < 0.$$

Esto significa que $\ln(x)$ es una antiderivada de $1/x$ para $x > 0$ mientras $\ln(-x)$ es una antiderivada de $1/x$ cuando $x < 0$. Relacionando el argumento con $|x|$, se pueden unificar estas fórmulas como:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + K,$$

que es lo que queríamos responder.

Proposición 2.1.4: Otras integrales elementales son:

$$\begin{array}{ll} 1. \int \sqrt{x} dx = \frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3} + K & 2. \int \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C \\ 3. \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + K & 4. \int e^x dx = e^x + M \end{array}$$

A continuación, avanzaremos con algunas propiedades que resultarán de utilidad para el cálculo de integrales de otras funciones.

Teorema 2.1.5 (Integral del producto de una constante por una función): La integral del producto de una constante por una función de x es igual a la constante por la integral de la función. Así, si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

¡Cuidado! Las variables o factores que no sean constantes no pueden extraerse como factores fuera del signo de integral. Por ejemplo,

$$\int xe^{-x} dx \neq x \int e^{-x} dx.$$

Teorema 2.1.6 (Integral de la suma o resta de dos funciones): La integral de la suma (o diferencia) de dos funciones es igual a la suma (o diferencia) de sus integrales. En símbolos:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Observación 32: Estos resultados pueden extenderse a cualquier suma algebraica de un número finito de funciones. Esto es,

$$\begin{aligned} & \int [a_1 f_1(x) \pm a_2 f_2(x) \pm \dots \pm a_n f_n(x)] dx \\ &= a_1 \int f_1(x) dx \pm a_2 \int f_2(x) dx \pm \dots \pm a_n \int f_n(x) dx \\ &= F_1 + C_1 \pm F_2 + C_2 \pm \dots \pm F_n + C_n \\ &= F_1 \pm F_2 \pm \dots \pm F_n + C. \end{aligned}$$

Note que la introducción anticipada de las constantes de integración $C_1, C_2, \dots, C_n$ originan problemas que se pueden evitar insertando la constante de integración en el resultado final, en vez de hacerlo en los cálculos intermedios, es decir, colocar al final, C .

Ejemplo 2.1.10: Calcule la integral de $(x - 1/(2x))^2$ y verifique el resultado obtenido.

Solución. Desarrollamos $(x - 1/(2x))^2$ con el objetivo de expresar el integrando como una suma de funciones potencia.

$$\begin{aligned}\int \left(x - \frac{1}{2x}\right)^2 dx &= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{4x^2}\right) dx \\&= \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{4x^2} dx \\&= \int x^2 dx - 1 \int dx + \frac{1}{4} \int x^{-2} dx \\&= \frac{x^{2+1}}{2+1} - x + \frac{1}{4} \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) + C \\&= \frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{4x} + C.\end{aligned}$$

Por último, podemos comprobar que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{4x} + C \right) = x^2 - 1 + \frac{1}{4x^2} = (x - 1/(2x))^2,$$

que es el resultado derivando la integral indefinida.

Ejemplo 2.1.11: Calcule la integral de $(7 - 2t + 5t^2 + t^3)/t^2$.

Solución. Comencemos aplicamos la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{7 - 2t + 5t^2 + t^3}{t^2} \right) dt &= \int \left(\frac{7}{t^2} - \frac{2}{t} + 5 + t \right) dt \\&= 7 \int t^{-2} dt - 2 \int \frac{1}{t} dt + 5 \int dt + \int t dt \\&= 7 \left(\frac{t^{-2+1}}{-2+1} \right) - 2 \ln |t| + 5t + \frac{t^{1+1}}{1+1} + C \\&= -\frac{7}{t} - 2 \ln |t| + 5t + \frac{t^2}{2} + C,\end{aligned}$$

que es lo que queríamos calcular.

Ejemplo 2.1.12: Determine $f(x)$, si $f'(x) = (x^2 + 1)(4x - 3)$ y $f(1) = 5$.

Solución. Aplicamos propiedad distributiva en la expresión de f' , para luego integrar:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 1)(4x - 3) \\ &= 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

Si integramos m.a.m. tenemos

$$\begin{aligned} \int f'(x) dx &= \int (4x^3 - 3x^2 + 4x - 3) dx \\ f(x) &= 4\left(\frac{x^4}{4}\right) - 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 3x + C \\ f(x) &= x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + C, \end{aligned}$$

donde C es la constante de integración. Ahora bien, como $f(1) = 5$ obtenemos el valor de la constante C :

$$f(1) = (1)^4 - (1)^3 + 2(1)^2 - 3(1) + C \implies 5 = -1 + C \implies 6 = C,$$

por lo que concluimos que $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 6$.

Ejemplo 2.1.13: Una empresa produce actualmente 100 unidades por semana de producto. Se sabe además, que el costo marginal en dólares/unidad producida está dado por

$$C'(q) = 50 - 0.04q.$$

Determine el aumento en el costo semanal al elevar la producción de 100 a 200 unidades.

Solución. El costo marginal es la derivada de la función de costo. Así, la función de costo se obtiene integrando la función de costo marginal.

$$\begin{aligned} C(q) &= \int C'(q) dq = \int (50 - 0.04q) dq \\ &= 50q - 0.04 \cdot \frac{q^2}{2} + K = 50q - 0.02q^2 + K, \end{aligned}$$

donde K es la constante de integración. No tenemos la información suficiente para determinar el valor de K . Sin embargo, deseamos calcular el incremento en el costo que resulta de aumentar q desde 100 a 200 (es decir $C(200) - C(100)$).

Así, pues

- $C(200) = 50(200) - 0.02(200)^2 + K = 9200 + K$
- $C(100) = 50(100) - 0.02(100)^2 + K = 4800 + K$

y, por consiguiente,

$$C(200) - C(100) = (9200 + K) - (4800 + K) = 4400.$$

El incremento en el costo semanal sería por tanto 4400 dólares.

Ejemplo 2.1.14: Una compañía tiene ingresos marginales que siguen el modelo lineal

$$R'(q) = 30 - 0.02q,$$

donde R' se expresa en cientos de dólares/unidad de producto.

1. Determine la función de ingreso, $R = R(q)$.
2. Encuentre la expresión de la demanda, $p = f(q)$, para el producto de la empresa.

Solución.

1. La función de ingreso $R(q)$ es la integral de la función de ingreso marginal. Así que

$$R(q) = \int R'(q) dq = \int (30 - 0.02q) dq = 30q - 0.02 \frac{q^2}{2} + C = 30q - 0.01q^2 + C$$

en donde C es la constante de integración. Con el fin de determinar C , usamos el hecho de que el ingreso debe ser cero cuando no se venden unidades. Es decir, si $q = 0$ entonces $R = 0$. Usando esta condición en nuestra expresión de $R(q)$ obtenemos

$$0 = 30(0) - 0.01(0^2) + C$$

lo que da $C = 0$. Por consiguiente, la función de ingreso es

$$R(q) = 30q - 0.01q^2.$$

2. Si cada artículo que la empresa produce se vende a un precio p , se sigue que el ingreso obtenido por la venta de q artículos está dado por $R = p \cdot q$. Así que

$$p \cdot q = 30q - 0.01q^2 \quad \text{o bien} \quad p = 30 - 0.01q$$

que es la relación de demanda requerida.

EJERCICIOS 2.1

1. Compruebe la veracidad de las siguientes proposiciones:

a. $\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$

b. $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$

2. Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique adecuadamente. Aquí, M , C y K son constantes arbitrarias.

a. $\int t \, dt = t + M.$

b. $\int e^x \, dx = e^x + M.$

c. $\int (e + 2) \cdot x^{e+1} \, dx = x^{e+2} + M.$

d. $\int x \cdot \ln(2) \, dx = \ln(2) + K.$

e. $\int \frac{\ln(x^3)}{\ln(x)} \, dx = C.$

f. $\int e^{3 \ln(x)} \, dx = 3x + C.$

g. $\int \sqrt{3x} \, dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^3} + C.$

h. $\int (t - 2)(t + 4) \, dt = \frac{t^3}{3} + t^2 - 8t + C.$

i. $\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C, k \neq 0.$

3. La función de ingreso marginal de cierta empresa es $R'(q) = 200 - 0.2q - 0.03q^2$, en dólares/unidad. Calcule e interprete en términos económicos $R(100)$, $R'(100)$ y halle el precio unitario cuando se venden 100 productos.
4. La tasa de crecimiento de la demanda de dispositivos digitales en Argentina se ha estimado mediante el modelo $N'(t) = 160 + 10e^t$, donde N está expresado en cientos de dispositivos por mes y $t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1990. Si después de cinco meses de comenzada la medición, el número de dispositivos vendidos fue 80 000 unidades, encuentre la expresión de la función que determina el número de dispositivos vendidos al cabo de t meses.
5. Para quien produce un determinado artículo los ingresos marginales están dados por $R'(q) = 100 - 5/8q$. ¿Para qué rango de valores de q la demanda es elástica?

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

No todas las integrales pueden obtenerse a partir de lo visto en la sección anterior. A continuación veremos que, mediante un cambio de la variable de integración, la integral dada puede expresarse como una integral ya conocida. Tal método se conoce como *método de sustitución* y corresponde a la regla de la cadena en derivación.

Suponga que F es una antiderivada de f , de modo que

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C.$$

En esta ecuación podemos cambiar el nombre de la variable de x a u y resulta:

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

Si u es una función de x , esto es $u = g(x)$, siendo g cualquier función derivable, podemos reemplazar u por $g(x)$ y la igualdad anterior sigue siendo válida. En este reemplazo, $du = g'(x) dx$. Así, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1 (Método de sustitución): Si $\int f(u) du = F(u) + C$, y g es derivable, entonces

$$\int f[g(x)] g'(x) dx = F[g(x)] + C.$$

Ejemplo 2.2.1: Halle $\int (0.5x^2 + 2x - 8)^4 (x + 2) dx$.

Solución. Observamos que la diferencial de $0.5x^2 + 2x - 8$ es igual a $(x + 2) dx$, que aparece en la integral. Usando esta sustitución, la integral se reduce a

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(0.5x^2 + 2x - 8)^4}_{g(x)=u} \underbrace{(x + 2) dx}_{g'(x)dx=du} &= \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{1}{5} (0.5x^2 + 2x - 8)^5 + C \end{aligned} \quad (1)$$

donde en la ecuación (1) hemos sustituido el valor de u .

Ejemplo 2.2.2: Calcule $\int 1/(x \ln x) dx$.

Solución. Al expresar el integrando como un producto podemos reconocer que el factor $(1/x) dx$ es el diferencial de $\ln x$, lo cual induce la sustitución $\ln x = u$. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{du} = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \\ &= \ln |\ln x| + C, \end{aligned}$$

después de sustituir u por $\ln x$.

Observamos que al aplicar este método *buscamos una función $u = g(x)$ cuya diferencial $g'(x) dx$ aparezca en la integral original. El resto del integrando debe ser una función simple de u .* La elección de la sustitución no siempre es del todo obvia.

Ejemplo 2.2.3: Halle $\int e^{t^2-4t} (8 - 4t) dt$.

Solución. Observemos que $(8 - 4t) dt = -2(2t - 4) dt$. La integral dada puede reescribirse como sigue:

$$\int e^{t^2-4t} (8 - 4t) dt = \int e^{t^2-4t} [-2(2t - 4)] dt = -2 \cdot \int e^{t^2-4t} (2t - 4) dt.$$

Al hacer la sustitución $u = t^2 - 4t$, el diferencial es $du = (2t - 4) dt$ y por tanto,

$$\begin{aligned} -2 \cdot \int e^{\overbrace{t^2-4t}^u} \underbrace{(2t-4) dt}_{du} &= -2 \cdot \int e^u du = -2 \cdot e^u + C \\ &= -2 \cdot e^{t^2-4t} + C, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos calcular.

Este ejemplo nos muestra que algunas veces la diferencial exacta no aparece en la integral original, pero mediante transformaciones algebraicas apropiadas puede «salvarse» esta situación.

Ejemplo 2.2.4: Encuentre $\int \sqrt{3x+4} dx$.

Solución. Al sustituir u por $3x+4$ obtenemos $du = 3 \cdot dx$ y, equivalentemente, $dx = 1/3 \cdot du$. Luego,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3x+4} dx &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3} \cdot du = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} + C = \frac{2}{9} (3x+4)^{3/2} + C, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos calcular.

Ejemplo 2.2.5: Calcule $\int x^2 e^{x^3+2} dx$.

Solución. La derivada de $x^3 + 2$ es $3x^2$. Puesto que la expresión $x^2 dx$ aparece en el integrando, esto nos sugiere hacer $u = x^3 + 2$. Luego, $du = 3x^2 dx$, y así $x^2 dx = 1/3 \cdot du$:

$$\int x^2 e^{x^3+2} dx = \int e^u \left(\frac{1}{3} du \right) = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3+2} + C$$

También podemos hacer que aparezca $3x^2 dx$ al multiplicar y dividir la integral por 3:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{x^3+2} dx &= \frac{3}{3} \int x^2 e^{x^3+2} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3+2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int e^{\overbrace{x^3+2}^u} \underbrace{3x^2 dx}_{du} = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3+2} + C, \end{aligned}$$

llegando al mismo resultado.

El Ejemplo 2.2.4 es uno de un tipo especial de sustitución denominada *sustitución lineal*. En el teorema 2.2.1 si elegimos $u = ax + b$, en donde a y b son constantes ($a \neq 0$). Esto es, $g(x) = ax + b$ y $g'(x) = a$. Entonces, el enunciado del teorema se transforma en

$$\int f(ax + b) \cdot a \, dx = F(ax + b) + C_1.$$

Dividiendo ambos miembros por a y $C = C_1/a$ tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2: Sean a y b dos constantes cualesquiera tal que $a \neq 0$. Si $\int f(x) \, dx = F(x) + C$ entonces

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

EJERCICIOS 2.2

1. Calcule las siguientes integrales, siendo a, b constantes y $a \neq 0$.

a. $\int \sqrt{ax + b} \, dx.$ b. $\int \frac{1}{ax + b} \, dx.$ c. $\int e^{ax+b} \, dx.$

2. Calcule:

a. $\int (4x + 6) \cdot \sqrt{x^2 + 3x} \, dx.$ b. $\int 12x \cdot e^{3x^2+2} \, dx.$
c. $\int \frac{\ln(3x + 1)^2}{2x + 2/3} \, dx.$ d. $\int \frac{2}{\sqrt{15 - 3x}} \, dx.$
e. $\int e^{x^2 + \ln x} \, dx.$ f. $\int \frac{3}{2x(5 + \ln x)} \, dx.$
g. $\int \frac{4t^2}{\sqrt[3]{t^3 + 8}} \, dt.$ h. $\int \frac{3}{(3 - 2x)^2} \, dx.$
i. $\int \frac{4}{z} (\ln z)^3 \, dz.$

3. Determine la veracidad de los siguientes enunciados. Justifique su respuesta.

a. Si $g'(x) = e^{\sqrt{x}}/\sqrt{x}$ y $g(0) = 4$, entonces $g(1) = 2(e + 1)$.
b. $f(e) = \ln(1 + e)$ si $f'(x) = (x + x \ln x)^{-1}$ y $f(1) = 0$.

4. Si $f'(x) = g(x)$, calcule las siguientes integrales:

a. $\int g(3x) \, dx.$ b. $\int xg(x^2) \, dx.$
c. $\int e^x \cdot g(e^x) \, dx.$ d. $\int x^{-1}g(\ln x) \, dx.$

5. Un estudio realizado por el departamento de marketing de una empresa determinó que, una vez lanzado al mercado un nuevo producto, la tasa de crecimiento de sus ventas estará dada por la función $V'(t) = 4000 - 3000 \cdot e^{0.5-0.05t}$, $0 \leq t \leq 60$, donde t representa el tiempo en meses desde el lanzamiento y $V'(t)$ se expresa en unidades por mes. Además, se estima que al momento del lanzamiento, es decir, $t = 0$, ya se habrán vendido 90 000 unidades en concepto de preventa.
- Determine una expresión que calcule el número de unidades del producto $V = V(t)$ que se venderán t meses después que estén disponibles en el mercado.
 - Calcule la cantidad de productos que se venderán al primer mes, al segundo mes, a los 60 meses.
 - Calcule entre qué meses se dará el mínimo de las ventas.
 - $V''(t)$ es positiva para $0 \leq t \leq 60$. ¿Qué implica este hecho en términos de ventas?
6. A partir de la crisis económica iniciada al comienzo de 1989, $t = 0$, el porcentaje de desempleados creció a razón de $D'(t) = 0.5e^{-0.2t} / (1 + e^{-0.2t})^2$ donde t es el tiempo en meses. Dado que inicialmente había 5 % de desempleados, halle el porcentaje de desempleados 10 y 20 meses después.

INTEGRACIÓN POR PARTES

Este método de integración suele usarse cuando el integrando se puede expresar mediante un producto entre una función y el diferencial de la misma u otra. La fórmula que nos será de utilidad surge de la derivada del producto de dos funciones derivables. Del cálculo diferencial sabemos que

$$\frac{d}{dx} [u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

o bien

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx} [u(x)v(x)] - u'(x)v(x).$$

Integrando ambos lados con respecto a x , obtenemos la tesis del siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 (Fórmula de integración por partes):

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx. \quad (2)$$

Es común escribir esta identidad en la forma

$$\int u dv = uv - \int v du$$

después de introducir las diferenciales $du = u'(x) dx$ y $dv = v'(x) dx$. Una manera alternativa de escribirla es como sigue.

Sea $u(x) = f(x)$ y $v'(x) = g(x)$. Se sigue que podemos escribir $v(x) = G(x)$, en donde $G(x)$ denota la integral de $g(x)$ y, entonces, la ecuación (2) del Teorema 2.3.1 se transforma en

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx.$$

Este método resultará útil cuando la integral de $f'(x)G(x)$ sea más fácil de calcular que la integral del producto original, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1: Halle $\int xe^{3x+2} dx$.

Solución. Elijamos $f(x) = x$ y $g(x) = e^{3x+2}$, de modo que la integral dada tiene la forma $\int f(x)g(x) dx$. Se sigue que $f'(x) = 1$ y $G(x)$, la antiderivada de $g(x)$, está dada por la expresión $G(x) = 1/3e^{3x+2} + C_1$, en donde C_1 es una constante de integración. Sustituyendo estas expresiones tenemos

$$\begin{aligned} \int f(x)g(x) dx &= f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx \\ \int xe^{3x+2} dx &= x\left(\frac{1}{3}e^{3x+2} + C_1\right) - \int 1 \cdot \left(\frac{1}{3}e^{3x+2} + C_1\right) dx \\ &= \frac{1}{3}xe^{3x+2} + C_1x - \frac{1}{3} \int e^{3x+2} dx - \int C_1 dx \\ &= \frac{1}{3}xe^{3x+2} + C_1x - \frac{1}{9}e^{3x+2} - C_1x + C \\ &= \frac{1}{9}(3x - 1)e^{3x+2} + C \end{aligned}$$

en donde C es una constante de integración.

Observación 33: Al integrar por partes siempre sucede que la primera constante de integración que surge al integrar $g(x)$ se cancela en la respuesta final. Así, en la práctica basta tomar $G(x)$ como cualquier antiderivada de $g(x)$ siendo la opción más sencilla la que corresponde a $C = 0$.

Si en el Ejemplo 2.3.1 cambiamos las elecciones de $f(x)$ y $g(x)$ haciendo $f(x) = e^{3x+2}$ y $g(x) = x$, entonces $f'(x) = 3e^{3x+2}$ y $G(x) = \frac{1}{2}x^2$, de modo que la fórmula de integración por partes se convierte en

$$\int x e^{3x+2} dx = 3e^{3x+2} \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot 3e^{3x+2} dx$$

y, aunque esta igualdad es correcta, no es de mucha utilidad, dado que la integral del lado derecho es más complicada que la integral original.

A continuación mostramos algunos «tips» útiles para elegir f y g .

CASO 1 Si el integrando es el producto de un polinomio en x y una función exponencial, a menudo es útil elegir $f(x)$ como el polinomio dado.

CASO 2 Si el integrando contiene una función logarítmica como factor, con frecuencia conviene elegir esta función como $f(x)$. Si el integrando consta por completo de una función logarítmica, elegiremos $g(x) = 1$.

En el siguiente ejemplo se ilustran ambos principios.

Ejemplo 2.3.2: Halle $\int x^2 \ln x dx$ sabiendo que $x > 0$.

Solución. Elegimos $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2$. Luego, $f'(x) = 1/x$ y $G(x) = x^3/3$. Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \ln x \cdot x^2 dx &= \ln x \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}x^3 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos calcular.

Ejemplo 2.3.3: Calcule $\int \ln x dx$.

Solución. En este caso, podemos expresar el integrando como un producto escribiendo $f(x) = \ln x$ y $g(x) = 1$. Se sigue que

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad G(x) = x.$$

Integrando por partes resulta

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C, \end{aligned}$$

que es la integral buscada.

Tanto el método de sustitución como el método de partes pueden combinarse para calcular integrales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.4: Calcule $\int t \ln(t^2 + 4) dt$.

Solución. Al elegir $u = t^2 + 4$, $du = 2t dt$, por lo que $du/2 = t dt$. Así

$$\begin{aligned} \int t \ln(t^2 + 4) dt &= \int \ln u \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int \ln u du \\ &= \frac{1}{2} u (\ln u - 1) + C. \end{aligned} \quad (3)$$

Ahora bien, por el Ejemplo 2.3.3 tenemos

$$\int t \ln(t^2 + 4) dt = \frac{1}{2} (t^2 + 4) [\ln(t^2 + 4) - 1] + C.$$

Note que en la ecuación (3) se integró esa expresión usando el método de integración por partes bajo la variable u .

En general, la evaluación de integrales es una tarea que requiere el conocimiento de una gran variedad de métodos. Aquí sólo hemos visto algunas estrategias. Sin embargo, podemos apoyarnos en un buen número de tablas de integrales en las que se consignan las antiderivadas de diversas familias de funciones, por lo que sólo será necesario ubicar en la tabla la integral dada y extraer la respuesta correcta.

EJERCICIOS 2.3

1. Utilizando [GeoGebra](#), calcule las siguientes integrales

- | | | |
|----------------------------------|---------------------------------|------------------------|
| a. $\int \frac{t}{e^t} dt.$ | b. $\int x \cdot e^{3x} dx.$ | c. $\int \ln(4x) dx.$ |
| d. $\int \frac{t+1}{e^{2t}} dt.$ | e. $\int x^2 \cdot \ln(ex) dx.$ | f. $\int \ln(x+1) dx.$ |

2. Para cada ítem anterior, responda y resuelva lo que corresponda:

- ¿Por qué debe aplicar integración por partes? Compruebe si la solución dada por la aplicación es la correcta.
- Grafique la antiderivada para la constante de integración igual a cero. Halle los valores máximos o mínimos relativos, si los tiene.
- Halle las asíntotas horizontales y/o verticales, si existen. Explique porqué son asíntotas.
- La función antiderivada ¿cambia su concavidad? ¿Tiene algún punto de inflexión?

3. Se estima que las ventas mensuales de un determinado producto disminuyen a una tasa de $V'(t) = -4 \cdot t \cdot e^{0.1t}$ productos por mes, donde t es tiempo en meses y $V(t)$ es la cantidad de productos vendidos por mes. Si actualmente ($t = 0$) se venden 5000 productos, encuentre la expresión de la función que determina la cantidad de productos que se venden por mes. ¿En qué mes se producen las ventas máximas? ¿Es esta una función cóncava hacia abajo? Si es cierto, ¿qué significa este hecho para las ventas?
4. Una empresa tiene un costo marginal diario por unidad de su producto y viene dado por $C'(q) = 4000 \cdot \ln(q + 10)/(q + 10)^2$, en donde q es el nivel de producción. Si los costos fijos ascienden a 200 dólares diarios, determine la función de costo y el costo de producir 120 unidades.
5. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = h(x)$ en cualquier punto $(x, h(x))$ está dada por $h'(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$. Si el punto $(1, 0)$ está en la gráfica, determine la expresión de la función h .
6. Escriba la familia de antiderivadas utilizando la tabla de integrales. Verifique la respuesta.

a. $\int x \left(\frac{x}{2} - 4 \right)^{-1} dx.$	b. $\int \frac{2x}{\sqrt{5 - 2x}} dx.$
c. $\int t e^{-3t} dt.$	d. $\int t \ln(t) dt.$

ECUACIONES DIFERENCIALES

Las palabras «ecuación» y «diferencial» nos deben hacer pensar en su significado. Por un lado, sabemos lo que significa «ecuación», pues hemos resuelto ecuaciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas, etc. Hemos aprendido a resolverlas y a encontrar su conjunto solución.

Por otra parte, el término «diferencial» hace referencia a la derivada. Así, si $y = f(x)$ entonces $y' = dy/dx$ es un cociente de diferenciales.

Frecuentemente, los datos que proporciona la investigación científica se relacionan con cambios de pequeña magnitud en las cantidades correspondientes. En el límite, estos cambios dan lugar a derivadas o diferenciales de las variables involucradas. Así surgen modelos que incorporan información sobre tasas de cambio o diferenciales, a través de los cuales se buscará encontrar la relación funcional existente entre las variables. De este modo, se tendrán ecuaciones en las que aparecen una o más derivadas de una

función «desconocida». Aprenderemos a formularlas a partir de problemas sencillos y a resolverlas, es decir, encontraremos la solución. Este nuevo tipo de ecuación, se denomina *ecuación diferencial*, y resolverla implica hallar esta función desconocida.

Las ecuaciones diferenciales se destacan por su utilidad en el modelado de fenómenos de distintas ciencias. En general, los modelos matemáticos aportan el lenguaje y la estructura conceptual necesaria para expresar reglas generales de comportamiento y obtener predicciones de validez general.

Problemas de motivación y conceptualización

Los siguientes ejemplos muestran ecuaciones diferenciales que abordan problemáticas particulares.

Ejemplo 2.4.1: Si el costo de producción diario para un cierto producto, expresado en dólares, presenta una variación instantánea constante de k dólares por unidad de producto, la expresión de esta relación involucra la derivada de la función costo, $dC/dq = k$. Esta es una ecuación diferencial. Resolverla significa encontrar todas las funciones de costo que satisfacen esta condición.

Ejemplo 2.4.2: Sea C_0 un monto de capital que se invierte a una tasa de interés nominal del R % anual, donde los intereses se acumulan en forma continua. Dado que $t = 0$ señala el momento en el cual se invierte el capital inicial, se tiene que $C(0) = C_0$. Deduce la expresión de la tasa de cambio del valor de la inversión $C(t)$, en cualquier instante t , es decir, el modelo diferencial asociado a esta situación.

Solución. Comenzaremos suponiendo que se realizan n capitalizaciones en un año y llamando Δt a la amplitud de cada período de capitalización, entonces $n \Delta t = 1$ año o $\Delta t = 1/n$ años.

Si $C(t)$ y $C(t + \Delta t)$ son los montos de la inversión en los tiempos t y $t + \Delta t$, el incremento en el capital, es decir el interés ganado en el período $[t, t + \Delta t]$, viene dado por

$$\Delta C = C(t + \Delta t) - C(t).$$

Si R es la tasa nominal anual de interés, R/n es la tasa de interés efectiva (expresada en porcentaje) en cada período de amplitud Δt . El interés ganado en dicho período se calcula mediante

$$\text{Capital inicial} \times \frac{\text{Porcentaje de interés efectivo}}{100}.$$

Matemáticamente, el interés periódico se expresa como

$$\Delta C = C(t^*) \frac{R/n}{100} = C(t^*) \frac{R}{100} \frac{1}{n} = C(t^*) r \Delta t,$$

donde $C(t^*)$ es el capital al inicio de cada período de duración Δt y $r = R/100$.

Por tanto, dividiendo miembro a miembro por Δt se obtiene la igualdad

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = rC,$$

según la cual, la tasa media de variación del capital en cada intervalo de amplitud Δt es proporcional al capital inicial de dicho período, siendo r la constante de proporcionalidad.

Si el interés se capitaliza en forma continua, n crece indefinidamente; esto es, $n \rightarrow \infty$ y

$$\Delta t = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

En consecuencia, tomando límite para $\Delta t \rightarrow 0^+$ en ambos miembros, se tiene que la tasa media de variación del capital en el intervalo de amplitud Δt tiende a la tasa instantánea de cambio de la inversión. Simbólicamente,

$$\frac{dC}{dt} = rC,$$

lo cual significa que la tasa de cambio del valor de la inversión en cualquier instante t es proporcional al valor de la inversión en dicho instante. Equivalentemente

$$r = \frac{C'(t)}{C(t)},$$

que es la llamada *tasa instantánea de rendimiento* que resulta una medida de la intensidad de crecimiento relativo del capital.

Esta ecuación que involucra tanto a $C(t)$ como a su derivada es una ecuación diferencial.

Ejemplo 2.4.3: Sea $P = P(t)$ el número de individuos de una población en el instante t . Una suposición razonable para una población (de bacterias, animales, personas, etc.) en condiciones ideales; es decir, ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores, etc. es «en cualquier instante t la población crece en una cantidad proporcional a su tamaño». Halle la expresión matemática que modela la situación.

Solución. Si $P = P(t)$ es el número de individuos de una población en un determinado momento t con la derivada dP/dt expresamos la rapidez de crecimiento de dicha población, en cualquier momento t . Además, como la rapidez de crecimiento es proporcional al tamaño de la población, P , podemos escribir la ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Esta ecuación es el primer modelo para el crecimiento poblacional; es una ecuación diferencial porque contiene una función desconocida P y su derivada dP/dt .

Podemos reescribir esta ecuación como sigue:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k,$$

lo que se traduce: en cualquier instante t , la «tasa relativa de crecimiento de la población es constante». Así, los dos enunciados: «en cualquier instante t , la población crece en una cantidad proporcional al tamaño de la población» y «la tasa relativa de crecimiento de la población es constante, en cualquier instante t » son equivalentes. Simbólicamente se expresan como $dP/dt = kP$ o $P'/P = k$.

Observación 34: Las expresiones resultantes de las dos últimas situaciones analizadas, $dC/dt = kC$ (ecuación diferencial de interés compuesto continuo) y $dP/dt = kP$ (ecuación diferencial de crecimiento poblacional) son ejemplos particulares del modelo matemático diferencial $dy/dt = ky$ donde k es un número real distinto de cero.

Definición 2.4.1 (Ecuación diferencial de orden n): Sea $y = f(t)$ una función n veces derivable respecto de t y sean $y', y'', \dots, y^{(n)}$ las primeras n derivadas de y .

Una *ecuación diferencial de orden n* de la función y es una ecuación que relaciona las variables $t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

El orden hace referencia a la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación diferencial.

El grado de la ecuación diferencial es el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden.

- Las ecuaciones diferenciales presentadas en los ejemplos son de orden 1 (o de primer orden) y de primer grado.
- La ecuación $y'' - e^{ty} = 0$ es de segundo orden y de primer grado.
- La ecuación $y^{(n)} = t^2$ es de orden n y grado 1.
- $dy/dt = ky$ es de orden y grado 1.
- $(dy/dt)^2 - 3yx = 0$ es de orden 1 y grado 2.

Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial para $y = f(t)$ se dice *lineal* si sólo aparecen la variable y o cualquiera de sus derivadas sumadas, restadas y/o multiplicadas por una constante o una función que solo depende de t , o bien si solo aparece una función de t .

Ejemplo 2.4.4: La ecuación $y' = ry$ es lineal, siendo r una constante.

Ejemplo 2.4.5: La ecuación $dP/dt = kP$ es lineal con k constante.

Ejemplo 2.4.6: La ecuación $y'' - e^{ty} = 0$ no es lineal ya que la variable y aparece como argumento de la exponencial y no puede reescribirse de otra manera para hacerla lineal.

Ejemplo 2.4.7: La ecuación $y'' = 5(y')^2$ no es lineal porque aparece una potencia de y' mayor que uno.

Ejemplo 2.4.8: La ecuación $y'' = \ln(t^2 + 1)y' + e^t y$ es lineal (la variable t puede aparecer de cualquier forma).

Ejemplo 2.4.9: La ecuación $e^{ty} = e^{t^2 y'}$ no es lineal, pero podemos escribirla como la ecuación diferencial lineal $ty = t^2 y'$, usando propiedades de la exponencial.

Resolver una ecuación diferencial implica hallar todas las soluciones de la ecuación. Es decir, todas las funciones que la satisfacen. En general, no es un asunto fácil, en este texto sólo nos limitaremos a estudiar las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de «variables separables». A continuación daremos las definiciones correspondientes a «solución de una ecuación diferencial».

Definición 2.4.2 (Solución de una ecuación diferencial): Diremos que la función $y(t)$ es *solución de una ecuación diferencial* dada si al sustituir y y sus derivadas, la ecuación se satisface para todo t en el dominio de y .

Ejemplo 2.4.10: La función $y = t^2$ es una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $t \, dy/dt - 2y = 0$ porque $dy/dt = 2t$ y al reemplazar en el lado izquierdo de la ecuación, ésta se verifica.

$$t \frac{dy}{dt} - 2y = t(2t) - 2t^2 = 2t^2 - 2t^2 = 0.$$

Ejemplo 2.4.11: La función $y = e^{kt}$, con k constante, es una solución de la

ecuación diferencial lineal de 2° orden $d^2y/dt^2 = k^2y$ porque $dy/dt = ke^{kt}$, $d^2y/dt^2 = k^2e^{kt}$ y así

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k^2e^{kt} = k^2y.$$

Ejemplo 2.4.12: La función $y = 2 \ln(t)$, con $t > 0$, no es solución de la ecuación diferencial no lineal de 2° orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 0$$

porque $dy/dt = 2/t$, $d^2y/dt^2 = -2/t^2$ y resulta

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{-2}{t^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{t} \right)^2 = \frac{-2}{t^2} - \frac{2}{t^2} = -\frac{4}{t^2} \neq 0.$$

Al resolver una ecuación diferencial encontramos dos tipos de soluciones.

Definición 2.4.3 (Soluciones de una ecuación diferencial): Llamamos *solución general* a la expresión de una familia de curvas cuyas expresiones junto con las de sus derivadas satisfacen la ecuación diferencial. Esta expresión contiene constantes arbitrarias en número igual al orden de la ecuación.

Llamamos *solución particular* a la que se obtiene dando a las constantes arbitrarias valores particulares. En la práctica, una solución particular se obtiene de la general considerando las condiciones iniciales del problema.

Observación 35: La expresión de la solución general contiene infinitas soluciones particulares.

Observación 36: Existen otras soluciones de la ecuación diferencial denominadas singulares y son las que no se obtienen a partir de la solución general. En este texto no trataremos este tipo de soluciones.

Ejemplo 2.4.13: El costo, en dólares, de producir diariamente q gramos de un cierto producto presenta una variación instantánea constante de 2 dólares por gramo. Además, se sabe que el costo fijo es de 1000 dólares. ¿Cuál es la función de costo total? y ¿cuál es el costo total si en un día se producen 2 kg?

Solución. Denominando a la función de costo total, $C = C(q)$, la expresión «variación instantánea constante de dos dólares por g » hace referencia a su derivada, esto es, $dC/dq = 2$. Como esta expresión involucra la derivada de una función estamos en presencia de una ecuación diferencial lineal de primer orden. Para hallar la función de costo total, reacomodamos la expresión planteando:

$$\frac{dC}{dq} = 2 \iff dC = 2 dq,$$

e integramos miembro a miembro:

$$\int dC = \int 2 dq.$$

Si bien aparece un término constante como resultado de cada operación, para sintetizar se conviene agregar la constante de integración en el lado donde se integra la variable independiente. Obtenemos así, la solución general,

$$C = 2 \cdot q + K$$

siendo K la constante de integración.

Para obtener la solución particular, debemos hallar el valor de K utilizando el dato del costo fijo, $C(0) = 1000$. Reemplazamos q por 0 e igualamos a 1000. Resolviendo la ecuación para K , resulta $K = 1000$. Así, la solución particular de la ecuación diferencial es

$$C(q) = 2 \cdot q + 1000.$$

Como se desea saber el costo cuando se producen 2 kg diarios del producto, reemplazamos q por 2000 obteniendo $C(2000) = 5000$.

Finalmente, respondemos las preguntas: la función de costo total bajo las condiciones del problema es $C(q) = 2 \cdot q + 1000$ y cuando se producen 2 kg diarios de este producto, el costo total es de 5000 dólares.

En este problema podemos verificar que tanto la solución la general como la particular satisfacen la ecuación diferencial $dC/dq = 2$.

Ejemplo 2.4.14: Retomemos la ecuación diferencial del Ejemplo 2.4.2 para capitalización continua: $dC/dt = rC$ y determinemos la solución particular que satisface $C(0) = C_0$.

Solución. Una forma equivalente de la ecuación es:

$$\frac{dC}{C} = r dt.$$

De esta forma, todos los términos con C aparecen de un lado, y los de t , del otro. Ahora integramos a ambos lados, según indican los diferenciales

$$\begin{aligned} \int \frac{dC}{C} &= \int r dt \\ \int \frac{1}{C} dC &= r \int dt \\ \ln(C) &= rt + K_1, \quad \text{pues } C > 0 \\ C &= e^{rt+K_1} \\ &= Ke^{rt}, \quad \text{siendo } K = e^{K_1}. \end{aligned}$$

Como sabemos cuánto vale C en $t = 0$, podemos determinar K :

$$C_0 = C(0) = Ke^{r \cdot 0} = K.$$

Así, $C(t) = C_0 e^{rt}$, es decir, cuando el interés se capitaliza en forma continua la inversión crece exponencialmente.

Proposición 2.4.1: La ecuación diferencial $dy/dt = ky$ en donde k es una constante dada, tiene la solución $y = Ce^{kt}$, siendo C una constante arbitraria.

Ejemplo 2.4.15: Halle la función $y = y(x)$ tal que la tasa de variación instantánea es igual al valor de la función en cada x .

Solución. Siendo $y = y(x)$, en símbolos, la expresión «tasa de variación instantánea es igual al valor de la función en cada x », se escribe como: $dy/dx = y$ o $y' = y$ o $y'/y = 1$.

Para hallar la solución, reacomodamos las variables de modo que los términos con y aparezcan de un lado y los de x del otro, quedando:

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

A continuación según el diferencial, se integra en ambos lados.

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= \int dx \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int dx \\ \ln |y| &= x + C_1.\end{aligned}$$

Considerando el signo de y , resulta:

- Si $y > 0$, tenemos $y = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1}$, denominando $C = e^{C_1}$, $y = C \cdot e^x$.
- Si $y < 0$, $\ln |y| = \ln(-y)$, tenemos $-y = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1}$, denominando $C = -e^{C_1}$, $y = C \cdot e^x$.

Para $y' = y$, podemos comprobar que cada curva de la familia de las funciones exponenciales $y = C \cdot e^x$ es la solución general de esta ecuación diferencial. La Figura 2 muestra la familias de curvas solución para $C > 0$ y para $C < 0$.

Ecuaciones diferenciales separables

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es *separable* si puede expresarse en la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y)g(t).$$

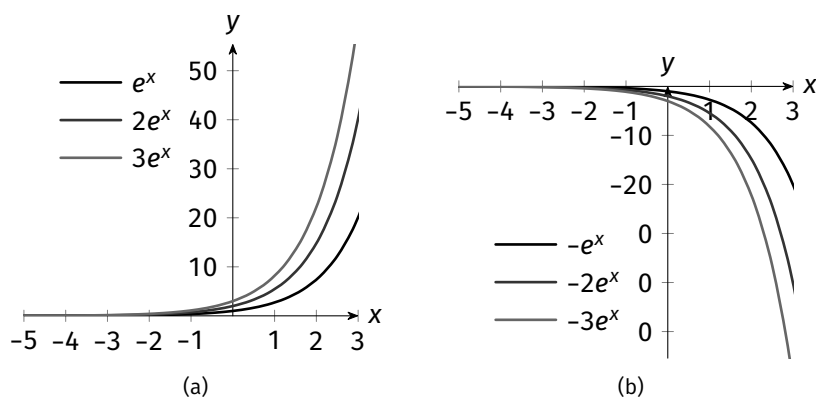


Figura 2

Su resolución es simple, pues basta separar los términos que dependen de y y los que dependen de t y luego integrar:

$$\frac{1}{f(y)} dy = g(t) dt$$

y así

$$\int \frac{1}{f(y)} dy = \int g(t) dt.$$

Cuando se trabajó con la ecuación lineal $dy/dt = ky$ con k una constante, se resolvió de esta forma, aún sin conocer que la ecuación era separable.

Observación 37: Debemos tener en cuenta que este procedimiento puede hacer perder soluciones, pues estamos dividiendo por la función $f(y)$ que podría anularse para algún y . En esos casos, tendremos que verificar si ese valor de y es o no una solución de la ecuación original.

Ejemplo 2.4.16: Determine la solución general de la ecuación diferencial $dy/dx + 2y = xy$. Luego, encuentre aquella que satisface la condición inicial $y(2) = 0$.

Solución. Reescribamos la ecuación para ver si es separable y resolvemos:

$$\frac{dy}{dx} = xy - 2y = y(x - 2) \implies \frac{1}{y} dy = (x - 2) dx,$$

siempre que $y \neq 0$. Integramos para hallar la solución general:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y} dy &= \int (x - 2) dx \\ \ln |y| &= \frac{x^2}{2} - 2x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ |y| &= e^{\frac{x^2}{2} - 2x + C} \\ |y| &= e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2} - 2x} \\ y(x) &= Ae^{\frac{x^2}{2} - 2x}, \quad \text{con } A = \pm e^C \neq 0.\end{aligned}$$

Para poder saber si tenemos todas las soluciones, nos falta verificar qué ocurre con $y = 0$, la solución idénticamente 0. Por un lado, tenemos que $y' = dy/dx = 0$ para esta función, por lo que el lado izquierdo de la ecuación diferencial original es

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 + 2 \cdot 0 = 0,$$

mientras que el lado derecho es $xy = x \cdot 0 = 0$.

Por lo tanto, $y(x) = 0$ es también una solución de la ecuación dada. Ésta se corresponde con el caso $A = 0$ en la forma hallada anteriormente. Así, podemos decir que la solución general es

$$y(x) = Ae^{\frac{x^2}{2} - 2x}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

¿Cuál de todas ellas verifica $y(2) = 0$? Para ello hacemos

$$0 = y(2) = Ae^{\frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2} = Ae^{-2} \implies A = 0.$$

La solución que cumple esto es $y(x) = 0$. Esto lo podríamos haber deducido simplemente notando que la exponencial nunca es cero, por lo que la única posibilidad es que A sea 0.

Ejemplo 2.4.17: Si la elasticidad de la demanda para cierto bien es -2 para todos los valores de su precio unitario, determine la relación de demanda $q = f(p)$ si la demanda es de 20 unidades cuando el precio es 10 dólares.

Solución. Si q es el número de unidades demandadas a un precio p , la elasticidad es

$$\eta = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} = -2.$$

O bien

$$\begin{aligned}\frac{dq}{q} &= \frac{-2}{p} dp \\ \int \frac{dq}{q} &= \int \frac{-2}{p} dp \\ \ln |q| &= -2 \ln |p| + C \\ \ln q &= -\ln(p^2) + C, \quad \text{pues } q, p > 0 \\ \ln q + \ln(p^2) &= C \\ \ln(qp^2) &= C \\ qp^2 &= e^C = D.\end{aligned}$$

Esta última ecuación es la solución general de la ecuación diferencial. Para hallar la solución particular (la ecuación de demanda solicitada) tenemos en cuenta que $q = 20$ y $p = 10$; por tanto, $20 \cdot 10^2 = D$, entonces $D = 2000$. La ecuación de demanda que se solicita es: $q = 2000/p^2$.

Ejemplo 2.4.18: La elasticidad de la demanda de un cierto bien está dada por $\eta = (q - 400)/q$, donde $0 < q < 400$, q se expresa en unidades de producto y p en dólares.

1. Determine la función de demanda $p = f(q)$, si a un precio de 5 dólares la demanda es de 380 unidades.
2. Para este precio, ¿la demanda es elástica o inelástica? ¿Se mantiene esta característica en todo el dominio de la demanda?

Solución.

1. Para hallar la función de demanda utilizamos la fórmula de elasticidad. Sabiendo que

$$\eta = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} = \frac{q - 400}{q}$$

y reescribiendo se tiene que

$$\frac{q}{q \cdot (q - 400)} dq = \frac{dp}{p}$$

Simplificamos q :

$$\frac{dq}{q - 400} = \frac{dp}{p}$$

e integramos miembro a miembro:

$$\begin{aligned}\int \frac{dq}{q - 400} &= \int \frac{dp}{p} \\ \ln |q - 400| &= \ln |p| + C.\end{aligned}$$

Como $0 < q < 400$, $q - 400 < 0$, por lo que $|q - 400| = 400 - q$. Además, p representa un precio por lo que es positivo y se obtiene:

$$\ln(400 - q) = \ln p + C$$

$$400 - q = e^{\ln p + C}$$

$$400 - q = e^C \cdot e^{\ln p}.$$

Llamando $A = e^C$, $A > 0$ y como $e^{\ln p} = p$,

$$400 - q = A \cdot e^{\ln p}$$

$$q = 400 - A \cdot p.$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial. Ahora, como $p = 5$ y $q = 380$,

$$380 = (400 - A \cdot 5)$$

$$A = 4,$$

y la función demanda $p = f(q)$ es,

$$p = \frac{400 - q}{A} = 100 - \frac{1}{4}q$$

para $0 < q < 400$.

2. Para el precio $p = 5$, la elasticidad es

$$\eta = \frac{380 - 400}{380} = -\frac{1}{17}.$$

Entonces $\eta > -1$, lo que indica que la demanda es inelástica. Pero esto no se mantiene en todo el dominio porque $\eta > -1$ cuando

$$\eta = \frac{q - 400}{q} > -1 \iff q - 400 > -q \iff q > 200,$$

es decir, que sólo será inelástica cuando la demanda esté comprendida entre 200 y 400 unidades.

Ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes

Una *ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes* es una ecuación del tipo

$$\frac{dy}{dt} = ky + b$$

donde k y b son constantes, con $k \neq 0$. Ya vimos cómo se resuelve el caso $b = 0$. Usaremos ese caso para resolver esta nueva ecuación diferencial. Como $k \neq 0$, escribimos

$$\frac{dy}{dt} = k \left(y + \frac{b}{k} \right)$$

y hacemos el cambio de variable $z = y + b/k$.

Entonces, como b/k es una constante, $dz/dt = dy/dt$, y la ecuación se transforma en

$$\frac{dz}{dt} = kz.$$

Sabemos que la solución general es $z = Ce^{kt}$, con lo cual la solución general de la ecuación original es

$$y = z - \frac{b}{k} = Ce^{kt} - \frac{b}{k}.$$

Proposición 2.4.2: La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky + b$$

en donde $k \neq 0$ y b son constantes dadas, tiene la solución $y = Ce^{kt} - b/k$, en donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 2.4.19: La función $C = C(t)$ representa el valor de una inversión en el instante t medido en años. Se sabe que la tasa de cambio de C es proporcional al valor de la inversión en dicho instante.

Si la inversión inicial fue de 40 000 dólares y la tasa nominal de interés correspondiente a los primeros dos años es 0.5 %, exprese la función que determina:

1. El valor de la inversión en cualquier momento t .
2. El valor de la inversión en cualquier momento t si por año, se adiciona a la inversión una suma fija de 5000 dólares.

Solución.

1. Como se ha deducido antes, el modelo para determinar el valor del capital al cabo de un tiempo, t , expresado en años es $C(t) = Ke^{rt}$. Teniendo en cuenta que la inversión inicial es 40 000 dólares, $K = 40\,000$ y la tasa efectiva anual es $r = 0.005/2 = 0.0025$. Entonces, la función capital es $C(t) = 40\,000 \cdot e^{0.0025t}$.
2. En el caso para el cual se adiciona una suma constante por año consecutivo, la función capital es $C(t) = 2\,040\,000 \cdot e^{0.0025t} - 2\,000\,000$.

En la ecuación diferencial de crecimiento poblacional $dP/dt = kP$ (k es la constante de proporcionalidad) se tiene que $b = 0$ lo cual indica que no hay restricciones en el ambiente que limiten el crecimiento de la población.

Cuando la población se ve afectada, por ejemplo, por la inmigración constante de miembros externos, o bien por la emigración constante de sus miembros, eso significa que la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = kP + b$$

es más apropiada, pues k representa la tasa de crecimiento específico, la cual no se ve afectada por otros factores, y el término b , que es una tasa constante, indica que la población además sufre un incremento constante, $b > 0$ debido a la inmigración, o $b < 0$ debido a la emigración.

Este último caso ($b < 0$) puede significar también que la población pierde miembros, lo que es fundamental conocer para lograr la preservación de las especies.

Ejemplo 2.4.20: El Censo Nacional de Población y Vivienda de 2023, divulgados por el INDEC, informa que la población de la ciudad de Santa Fe de la Vera Cruz, capital de la provincia de Santa Fe, Argentina, es de 572 265 personas (a mayo de ese año) y es un 9 % más que en 2010, cuando había 525 093. Suponiendo un modelo de crecimiento exponencial, y que se mantiene la tasa de crecimiento anual entre 2010 y 2023:

1. Estime la población de dicha ciudad para el año 2030 y 2050, sin considerar migraciones en la ciudad.
2. Si 100 personas por año se van de la ciudad a otra dentro de la Argentina o al extranjero, estime la población de dicha ciudad para el año 2030 y 2050.

Solución. En principio, definimos t como el tiempo transcurrido desde 2023 en años y $P(t)$ la población de dicha ciudad en el tiempo t .

Puesto que el año 2023 corresponde a $t = 0$ entonces $P_0 = 572\,265$ personas. La tasa anual de crecimiento de la población entre el año 2010 y 2023 puede suponerse constante siendo su valor de $k \approx 0.66\%$.

1. Por tanto, la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.0066 \cdot P$$

modela la situación y la población de la ciudad en el tiempo t está dada por:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt},$$

es decir,

$$P(t) = 572\,265 \cdot e^{0.0066 \cdot t}.$$

Para el año 2030 habrán transcurrido desde 2023, 7 años,

$$P(7) = 572\,265 \cdot e^{0.0066 \cdot 7} \approx 599\,323.$$

Para el año 2050 habrán transcurrido desde 2023, 27 años,

$$P(27) = 572\,265 \cdot e^{0.0066 \cdot 27} \approx 683\,890.$$

Por tanto, en el año 2030, la población de la ciudad de Santa Fe de la Vera Cruz será, aproximadamente de 599 323 habitantes. En el año 2050, la población será, aproximadamente, de 683 890 habitantes.

2. Considerando que 100 personas salen de la ciudad para vivir en otro lugar, la ecuación diferencial que modela esta situación es:

$$\frac{dP}{dt} = 0.0066 \cdot P - 100.$$

Al resolver tenemos:

$$P(t) = C \cdot e^{0.0066 \cdot t} + \frac{100}{0.0066},$$

donde $C = 557\,113$ y $100/0.0066 \approx 15\,152$. Resulta entonces

$$P(t) = 557\,113 \cdot e^{0.0066t} + 15\,152.$$

Así, para el año 2030 la población de la ciudad de Santa Fe de la Vera Cruz, será aproximadamente de 598 607 habitantes, mientras que en 2050, será aproximadamente de 680 941 habitantes.

Ejemplo 2.4.21: Un pequeño pueblo decide realizar una colecta para comprar un camión de bomberos que cuesta 800 000 dólares. La cantidad inicial de la colecta es de 50 000 dólares. Con base a colectas anteriores, se determinó que t meses después del inicio de la colecta anterior, la tasa, dx/dt , a la que se recibe dinero es proporcional a la diferencia entre la cantidad deseada y la cantidad total x que haya en el fondo en ese momento. Con estos datos:

1. Halle la expresión diferencial que modela la situación.
2. Halle la solución general y particular.
3. Si se sabe que después de un mes de iniciada la última colecta se tiene 200 000 dólares en el fondo, ¿cuánto se tendrá después de tres meses?
4. Si el gobierno municipal otorga un subsidio por el 10 % del valor del camión, ¿cuánto tiempo se demorará en obtener este nuevo monto para la compra de la unidad?

Solución.

1. Sea $x(t)$ la cantidad de dinero (en dólares) en el fondo al instante t (siendo t el tiempo en meses). Teniendo en cuenta que la tasa a la que se recibe el dinero es proporcional a la diferencia entre la cantidad deseada y la cantidad total x que haya en el fondo en ese momento; podemos plantear la siguiente expresión diferencial que modela la situación.

$$\frac{dx}{dt} = k(800\,000 - x).$$

2. Considerando que $x < 800\,000$, podemos expresar la relación anterior como una ecuación diferencial de variables separables y resolver integrando ambos miembros:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{800\,000 - x} &= k \, dt \\ \int \frac{dx}{800\,000 - x} &= \int k \, dt \\ -\ln(800\,000 - x) &= k \cdot t + C \\ 800\,000 - x &= e^{-k \cdot t - C} \\ x &= 800\,000 - A \cdot e^{-kt}, \quad \text{con } A = e^{-C}.\end{aligned}$$

Con lo cual, la solución general viene dada por

$$x(t) = 800\,000 - A \cdot e^{-kt} \quad \text{con } A > 0.$$

Para determinar una solución particular, partimos de que la cantidad inicial ($t = 0$) es de 50 000 dólares, de este modo:

$$50\,000 = 800\,000 - A \cdot e^{-k \cdot 0} \implies A = 750\,000.$$

En consecuencia, una solución particular será:

$$x(t) = 800\,000 - 750\,000e^{-kt}.$$

3. Sabemos que después de un mes se tienen 200 000 dólares en el fondo, es decir $x(1) = 200\,000$, y además $x(0) = 50\,000$. Entonces, evaluando en la solución particular hallada, tenemos

$$200\,000 = 800\,000 - 750\,000e^{-k \cdot 1}$$

$$e^{-k} = \frac{600\,000}{750\,000}$$

$$e^{-k} = \frac{12}{15}$$

$$-k = \ln\left(\frac{12}{15}\right)$$

$$k \approx 0.22,$$

de modo que la función resultante será:

$$x(t) = 800\,000 - 750\,000e^{-0.22 \cdot t}.$$

Luego, para calcular el dinero recaudado al cabo de 3 meses, tomamos $t = 3$, obteniendo

$$x(3) = 800\,000 - 750\,000e^{-0.22 \cdot 3} \approx 412\,361.5.$$

Es decir, al cabo de tres meses habrá un fondo de 412 361 dólares aproximadamente.

4. Si se desea conocer el tiempo necesario para la compra de la unidad consideramos, sabiendo que $k = 0.22$:

$$\begin{aligned} 800\,000 \cdot 0.90 &= 800\,000 - 750\,000e^{-0.22 \cdot t} \\ \frac{80}{750} &= e^{-0.22 \cdot t} \\ \ln\left(\frac{80}{750}\right) \cdot \left(-\frac{1}{0.22}\right) &= t \\ t &\approx 10.17. \end{aligned}$$

Lograrán recaudar el dinero aproximadamente en 10 meses.

EJERCICIOS 2.4

- Indique orden y grado y decida si son o no lineales las siguientes ecuaciones diferenciales:
 - $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4 - y.$
 - $\frac{dy}{dt} - t \frac{d^2y}{dt^2} = t^3y.$
 - $\frac{du}{dy} - y^2u = 2.$
 - $\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 = y.$
 - $x \frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 1) \cdot y.$
- Decida si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique su respuesta.
 - Toda función de la familia $f(x) = (\ln(x) + C)/x$ con $C \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.
 - La curva de ecuación $y = e^{x^2/2}$ pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene pendiente $x \cdot y$ en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de la curva.
 - Una solución de la ecuación diferencial $y' - 0.5y + 2 = 0$ es $y = 2e^{0.5x} + 4$.
 - Si $y = f(x)$ es una función derivable que verifica $y' = 2y$ con condición inicial $y(0) = e$, entonces $y(-1) = e^{-2}$.

- e. La tasa de cambio del número de ventas de autos en cierto país, entre 1998 y 2012, sigue la fórmula $f(t) = -0.186 \cdot e^{-0.02t}$, donde t se mide en años a partir de 1998 y la tasa se mide en miles de autos por año. Si se sabe que en 2012 se vendieron 7080 autos, podemos deducir que en el año 1998 se vendieron aproximadamente 90 autos.
 - f. En cierta ciudad, la población N en cualquier tiempo cambia a una razón proporcional a la población existente. Si en 1985 era de 40 000 habitantes y, en 1995, de 48 000, una ecuación aproximada para la población en el tiempo t , donde t es el número de años después de 1985 viene dada por $N(t) = 40\,000 \cdot e^{-0.018t}$.
 - g. La población P de cierta ciudad satisface la ecuación diferencial $dP/dt = k\sqrt{P}$, siendo t la cantidad de años transcurridos desde el 2018 y k una constante positiva. Si en ese año la población fue de 160 000 habitantes y en 2024 es de 198 025, entonces la población en el año 2030 será de 211 600 habitantes.
 - h. Si para un determinado producto cuyo precio máximo es de 20 dólares por unidad, la elasticidad depende de la cantidad demandada x , con $0 < x < 20/3$, según la ecuación $\eta = (3x - 20)/(3x)$, entonces la función de demanda está dada por $p = -3x + 20$.
3. Suponga que las utilidades, P de una compañía como función del gasto G en publicidad satisface la ecuación diferencial $dP/dG = k(C - G)$ en donde k y C son constantes positivas.
 - a. Resuelve la ecuación diferencial, hallando $P(G)$ y sabiendo que $P(0) = P_0$.
 - b. Si $P_0 = 100$, $P(100) = 1100$, $P(200) = 1600$, calcule el gasto óptimo en publicidad.
 4. Considere la familia de funciones $y = x^2 + k$ con k una constante cualquiera. Compruebe que existe una única función de esta familia que es solución de la ecuación diferencial $2y - xy' = 20$ y que ninguna de ellas puede ser solución de $xy'' - y' + 1 = 0$.
 5. Se extrae continuamente petróleo de un pozo a una razón proporcional a la cantidad de petróleo que hay en éste (expresada en millones de barriles). Inicialmente había 1 millón de barriles de petróleo en el pozo y, seis años después, sólo quedaban 500 000 barriles.
 - a. Halle la ecuación diferencial que modela esta situación.
 - b. ¿A qué tasa está decreciendo la cantidad de petróleo en el pozo cuando quedan 700 000 barriles?

- c. ¿Al cabo de cuántos años el contenido del pozo será de 50 000 barriles de petróleo?
6. La elasticidad de la demanda de cierto bien es $\eta = (x - 150)/x$, $0 < x < 150$, siendo x el número de unidades. Determine la función de demanda $p = f(x)$, donde p es el precio en dólares, sabiendo que se demandan 90 unidades a 180 dólares.
7. Sea $dV/dp = -V/(2(p + 3))$ un modelo que describe las relaciones entre el precio y las ventas semanales de cierto producto, donde V es el volumen de ventas (en millones de euros) y p el precio del producto (en euros).
- Encuentre el volumen de ventas en función del precio si se sabe que la semana anterior se tuvo un volumen de ventas de 7 millones de euros y el precio de venta fue de 6 euros.
 - ¿Qué precio deberá tener el producto para lograr un volumen de ventas de 10 millones de euros?
8. El valor de una acción crece en forma continua a partir de su valor inicial de 10 dólares a una tasa de interés nominal anual del 3.5 %.
- Determine el modelo del valor de la acción al cabo de t años.
 - Calcule el valor de la acción dentro de 2 años.
 - Después de cuántos años la acción alcanzará el doble de su valor inicial.

Justifique por qué el modelo del que surge la solución del problema es diferencial.

9. Si la tasa de cambio de la esperanza de vida E al nacer, de las personas que nacen en un determinado lugar, puede modelarse mediante $E'(t) = 12/(2t + 50)$, donde t es el número de años a partir de 1940. Además, se conoce que la esperanza de vida en 1940 era de 63 años.
- Encuentre la esperanza de vida para las personas que nacieron en 1998.
 - Compruebe que la función $E(t)$, para $t > 0$, tiene un ritmo de crecimiento cada vez más lento.
10. La asociación civil de rescate y rehabilitación de caballos maltratados, S.O.S. Caballos Santa Fe, en abril de 2024, rescata un animal muy enfermo. Urge realizar una cirugía, cuyo costo es 1 700 000 pesos. La comisión directiva de la asociación decide realizar una colecta para afrontar la cirugía, ya que ella cuenta con sólo 100 000 pesos. Con base en las colectas anteriores, se determinó que t horas después del inicio, la tasa dx/dt a la que se

recibe dinero es proporcional a la diferencia entre la cantidad deseada y la cantidad total x que haya en el fondo en ese momento. Con estos datos:

- a. Halle la expresión diferencial que modela la situación.
 - b. Obtenga la solución general de la ecuación diferencial y la solución particular, sabiendo que la colecta termina cuando se alcanza el dinero para la cirugía.
 - c. Si al cabo de dos horas de iniciada la colecta se tienen 250 000 pesos en el fondo, ¿cuánto habrá después de 12 horas?
 - d. Si el equipo médico veterinario contribuye bonificando un 10 % de lo presupuestado, ¿cuánto demorará la asociación en obtener el monto necesario?
11. Una familia desea constituir un fondo de inversión para afrontar a futuro los estudios universitarios de su hijo de 10 años. Para tal fin, invierte una suma inicial de 5000 dólares en un sistema de capitalización continua a una tasa nominal anual de 5 % e invierte cada año una suma adicional fija de 1000 dólares, justo antes de cada capitalización. En promedio las matrículas en universidades públicas de EEUU cuestan 5250 dólares anuales. Determine si el fondo al cabo de 8 años, (momento en el que se espera el ingreso a la universidad), resultará suficiente para costear una carrera de 4 años de duración.
12. En 2019, el Banco Central de la República Argentina (BCRA) debía retirar de circulación aproximadamente 510.6 millones de billetes de \$5 y reemplazarlos por billetes de mayor denominación. Este proceso comenzó en agosto de 2019 y se debía completar en febrero de 2020. Se había planificado llevar a depositar en los bancos para su destrucción, semanalmente, un promedio de 18.24 millones de billetes. Sea $y(t)$ la cantidad de billetes viejos, en millones, que se encuentra en circulación a tiempo t , en semanas. Suponiendo que la tasa instantánea de variación porcentual semanal a la que decrece la cantidad de billetes viejos en circulación es constante de 4 %.
- a. Halle la cantidad de billetes de \$5 que había en circulación para cada tiempo t , en el período: ago/19 - feb/20.
 - b. Calcule la cantidad de tiempo necesario para que el 50 % de los billetes viejos sea reemplazado por nuevos billetes de mayor denominación.
 - c. ¿Cuánto tiempo llevará reemplazar el 95 % de los billetes viejos? ¿Cumplió el BCRA con su objetivo de máxima?
13. Una empresa lanza un modelo de celular a un precio de 150 dólares y se sabe que su valor varía en función del tiempo, quedando siempre por

encima de 15 dólares. La demanda de este bien está dada por:

$$q_D = 160 - 5p(t) - 3\frac{dp}{dt} \quad \text{y la oferta por} \quad q_O = 40 + 3p(t) + \frac{dp}{dt},$$

donde t es el tiempo medido en años y p el precio en dólares.

- a. Encuentre la función del precio, $p = p(t)$, cuando la demanda es igual a la oferta: $q_D = q_O$.
- b. ¿Cuál será el precio del celular al cabo de dos años?

LA INTEGRAL EN CONTEXTO

La derivada permite analizar cómo cambia una cantidad; la integral, en cambio, permite acumular esos cambios. En esta sección introducimos la integral definida a partir de un problema concreto de acumulación, desarrollamos las herramientas para calcularla y estudiamos sus aplicaciones al análisis económico, como el cálculo de áreas y la medición de excedentes.

Integral definida

Comenzaremos planteando y resolviendo un problema sencillo.

Los picos de consumo eléctrico representan un verdadero desafío para los sistemas energéticos en todo el mundo. Los países invierten en una gran infraestructura que solo se utiliza durante unos minutos al día, mientras que el resto del tiempo permanece subutilizada. Para abordar este problema, muchos países implementan un esquema tarifario basado en bandas horarias, donde el precio del kilovatio por hora (kW h) varía según el momento del día. En general, los países admiten que el precio más bajo se encuentra entre la medianoche y las 7 de la mañana y durante las horas «pico», que corresponden al momento de mayor consumo, el precio es más alto. La Figura 3 muestra una posible función $p = p(t)$ que representa la distribución del costo del kilovatio por hora durante 24 h.

Si una familia se va de vacaciones, no sería muy raro que su hogar tuviese un consumo eléctrico aproximadamente constante durante todo el día. Supongamos que ese consumo es de 2 kW h.

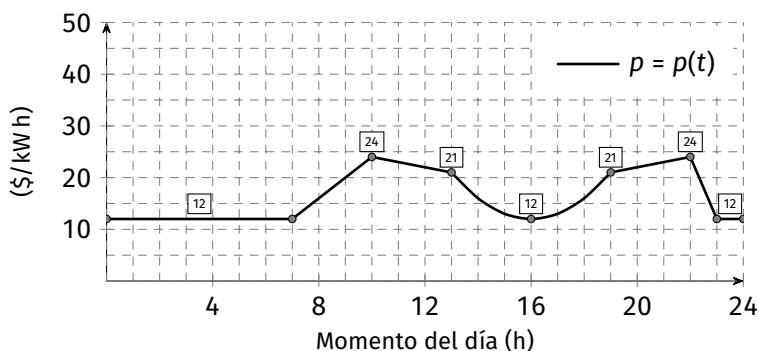


Figura 3. Distribución del costo del kWh en cada momento del día.

A partir de esto, podemos deducir el costo por hora, $f(t)$, utilizando la tarifa y el consumo:

$$f(t) = 2p(t), \quad \text{con } 0 \leq t < 24.$$

La Figura 4 muestra la representación gráfica de esta función, que es la tasa de cambio del precio que deberá abonar ese día en particular una familia, de acuerdo con el consumo en ese día.

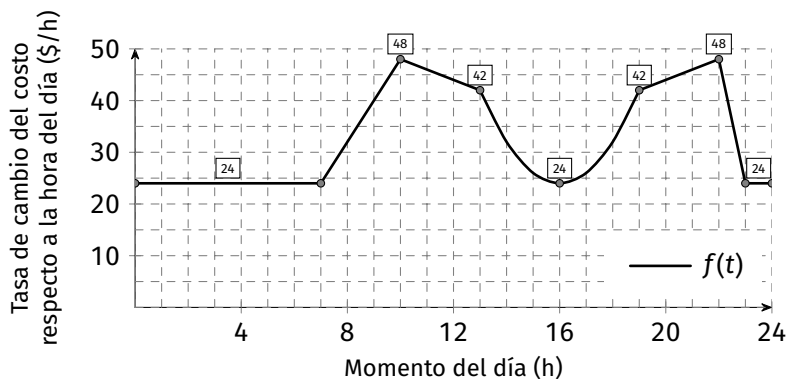


Figura 4. Distribución del costo por hora teniendo en cuenta su consumo en un día y el precio de la energía en cada momento del día.

Observamos que desde la medianoche hasta las 7 de la mañana, la tasa es constante. Mientras que, en otros intervalos del día aumenta y en otros disminuye, hasta retomar su valor constante a las 23 horas. La situación planteada

permite formular las siguientes preguntas, referidas a un día determinado:

1. ¿Cuánto deberá abonar la familia por el consumo ocurrido desde la medianoche hasta las siete de la mañana?
2. ¿Y en el periodo de siete a diez de la mañana?
3. ¿Cuál es, si consideramos de 13 h a 19 h?
4. ¿Cuál es el costo de la energía eléctrica que se abona en un día completo?

Vayamos respondiendo estas preguntas una a una por casos:

CASO 1 A partir de la gráfica de la Figura 4 podemos ver que ese costo es constante, es decir \$24 por cada hora transcurrida. Así, la tarifa que abona esta familia entre la medianoche y las siete de la mañana se calcula como:

$$24 \text{ \$/h} \cdot (7 \text{ h} - 0 \text{ h}),$$

o 168 pesos. Si se examina la gráfica de la función observamos que este valor es el área de la región rectangular que se encuentra limitada arriba por la gráfica de f , debajo, por el eje t , entre $0 \leq t \leq 7$ y a la izquierda y a la derecha por las rectas verticales $t = 0$ y $t = 7$.

CASO 2 Ahora bien, en el intervalo de 7 h a 10 h podemos ver que el precio a pagar es variable, por lo que acá la situación se complejiza. Una forma de comenzar a tratarlo sería dividir el intervalo por cada una de las horas y calcular en cada intervalo como se ve en la Tabla 1. A partir de esos valores se obtiene

$$24 + 32 + 40 = 96,$$

es decir \$96.

Tabla 1

t	7	8	9
$f(t)$	24	32	40
$\text{\$/h}$	24	32	40

En la Figura 5 se puede ver una representación del modelo que estaríamos usando en el caso de adoptar esta estrategia. Como podemos apreciar, no es una aproximación muy buena, ya que realmente, por ejemplo, a las 7:30 h el costo es superior a \$24.

Tratemos ahora de trabajar con un intervalo de tiempo mas pequeño, como por ejemplo de media hora. Así, se tiene que

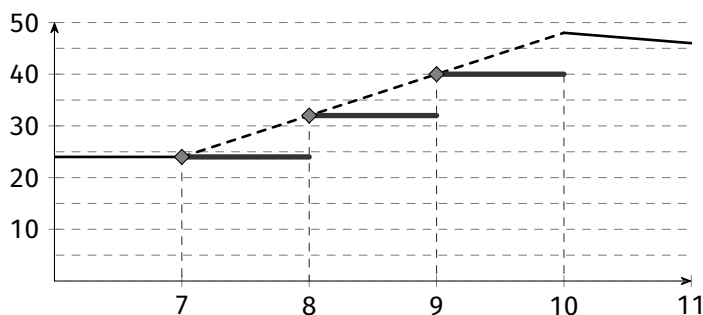


Figura 5

Tabla 2

t	7	7.5	8	8.5	9	9.5
$f(t)$	24	28	32	36	40	44
$\$/30 \text{ min}$	12	14	16	18	20	22

$$\$24 \cdot 0.5 + \$28 \cdot 0.5 + \$32 \cdot 0.5 + \$36 \cdot 0.5 + \$40 \cdot 0.5 + \$44 \cdot 0.5 = \$102. \quad (4)$$

En la Figura 6 se puede ver una representación de este nuevo modelo con divisiones cada media hora. Nuevamente, aunque es una mejor aproximación, no es suficientemente buena.

Antes de continuar, notemos que cada uno de los términos de la izquierda en la ecuación (4) representa también el área de los rectángulos que aparecen sombreados en la Figura 6, pues 0.5 en cada caso representa la medida de la base y la altura es el monto por hora.

Este razonamiento lo podemos extrapolar a una subdivisión menor de los intervalos de tiempo, como por ejemplo de 15 min.

Tabla 3

t	7	7.25	7.5	7.75	8	8.25	8.5	8.75	9	...
$f(t)$	24	26	28	30	32	34	36	38	40	...
$\$/15 \text{ min}$	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	...

A partir de estos datos tenemos que el costo total aproximado es de \$105. En la Figura 7 se puede ver que la suma de las áreas de estos

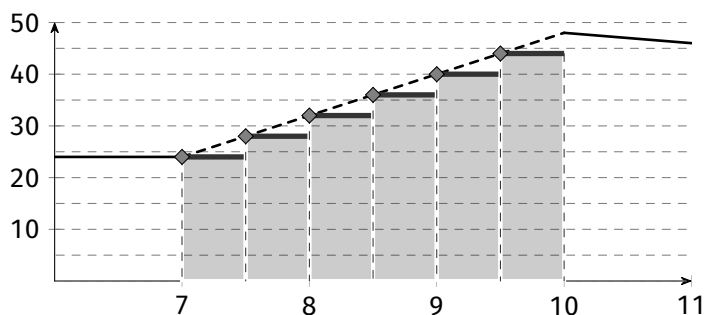


Figura 6

rectángulos, a medida que se toman intervalos más pequeños, aproximan cada vez más el área que hay bajo la curva. Por ello, nos podemos aventurar a pensar que el costo real es el valor límite que tenemos cuando la amplitud de cada intervalo de tiempo tiende a cero y que, por consiguiente, coincidirían con dicha área.

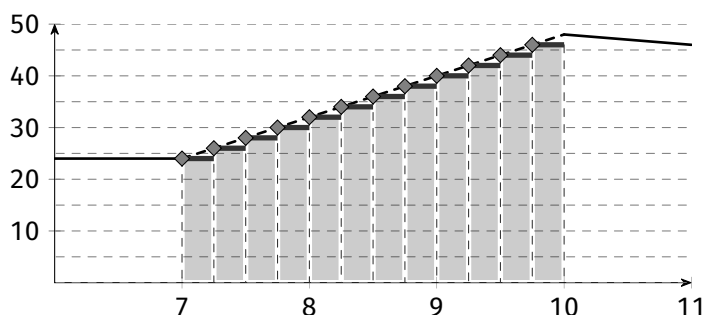


Figura 7

Otra forma de abordar este cálculo es considerar que podemos descomponer esta superficie y calcular el área como la suma del área del rectángulo más el área de un triángulo, como puede verse en la Figura 8, es decir:

$$(10 - 7) \cdot 24 + (10 - 7) \cdot (48 - 24)/2 = 108$$

por lo que el costo correspondiente al uso entre las 7 h y las 10 h es de \$108.

Notemos que la división de una región en rectángulos de base cada vez más pequeña parece ser la técnica adecuada para el cálculo de áreas.

Ahora bien, para responder a la tercera pregunta, es decir hallar el costo

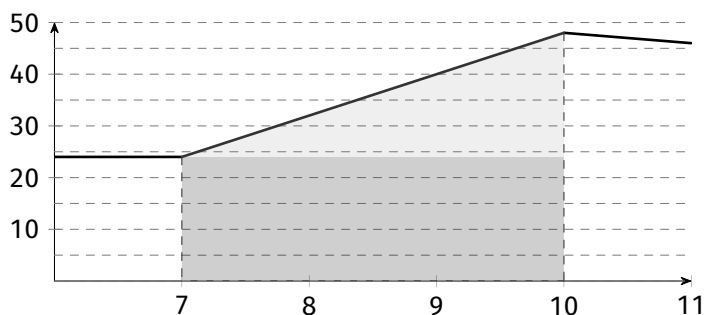


Figura 8

por consumo entre las 13 h y las 19 h, tendremos que calcular el área de la región limitada superiormente por una parábola (una curva), debajo por el eje t y por las rectas $t = 13$ y $t = 19$, a la izquierda y a la derecha, respectivamente (Figura 9). Por supuesto, por el momento no tenemos una expresión para hallar el área de este tipo de superficies así que cabe preguntarnos: ¿cómo se aborda este problema?

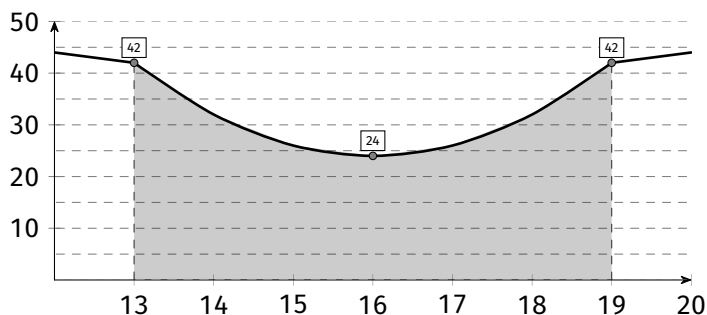


Figura 9

Esta situación refiere al segundo problema fundamental del cálculo: calcular el área de una región limitada arriba por la gráfica de una función f , no negativa en el intervalo $[a, b]$, abajo por el eje x y a la izquierda y derecha por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, respectivamente. En particular, consideraremos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.

Esta área se llama «área bajo la curva de f » en el intervalo $[a, b]$, o desde a hasta b .

Particularmente comenzaremos analizando el período $13 \leq t \leq 16$, en el cual la función f decrece.

Haremos una aproximación utilizando áreas de rectángulos (cantidades

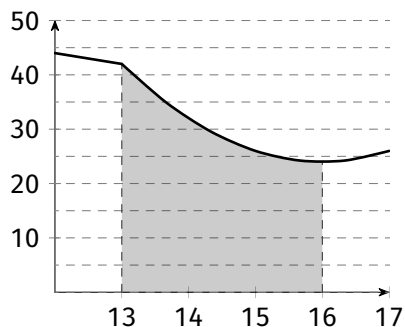


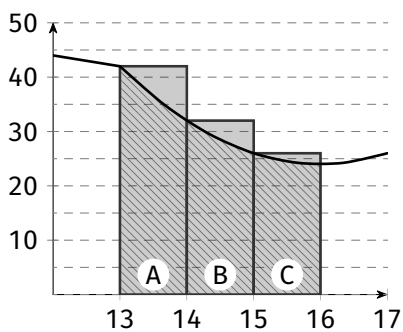
Figura 10

que se pueden calcular) para ayudar a definir el área bajo la curva de una función.

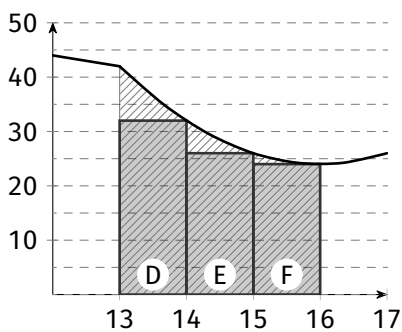
1. Dividiremos el intervalo $[13, 16]$ en tres subintervalos. Tendremos tres rectángulos cuya base es de 1 unidad y si consideramos el extremo izquierdo, valor máximo de la función en el intervalo, como altura del rectángulo (Figura 11(a)), tendremos que el área se calcula

$$\underbrace{42 \cdot (14 - 13)}_{\text{Área de A}} + \underbrace{32 \cdot (15 - 14)}_{\text{Área de B}} + \underbrace{26 \cdot (16 - 15)}_{\text{Área de C}}$$

y es $100 \$/h \cdot h = \100 .



(a)



(b)

Figura 11

Por otro lado, si consideramos el extremo derecho, valor mínimo de la función en el intervalo, como altura del rectángulo (Figura 11(b)) tendremos

que el área es, aproximadamente:

$$\underbrace{32 \cdot (14 - 13)}_{\text{Área de D}} + \underbrace{26 \cdot (15 - 14)}_{\text{Área de E}} + \underbrace{24 \cdot (16 - 15)}_{\text{Área de F}}$$

y es $82 \text{ \$/h} \cdot \text{h} = \82 .

Quiere decir entonces, que el costo de energía eléctrica entre las 13 h y 16 h va a estar entre $\$82$ y $\$100$, pues la primera suma realizada supera el valor del área y la segunda es menor.

2. Sin embargo podemos lograr una mejor aproximación dividiendo el intervalo $[13, 16]$ en más subintervalos. Por ejemplo, si lo hacemos en seis subintervalos (Figura 12) tendremos que la base del rectángulo es 0.5 y, si la altura es el valor máximo de la función en cada intervalo, resulta

$$42 \cdot 0.5 + 36.5 \cdot 0.5 + 32 \cdot 0.5 + 28.5 \cdot 0.5 + 26 \cdot 0.5 + 24.5 \cdot 0.5$$

y es $94,75 \text{ \$/h} \cdot \text{h} = \$94,75$.

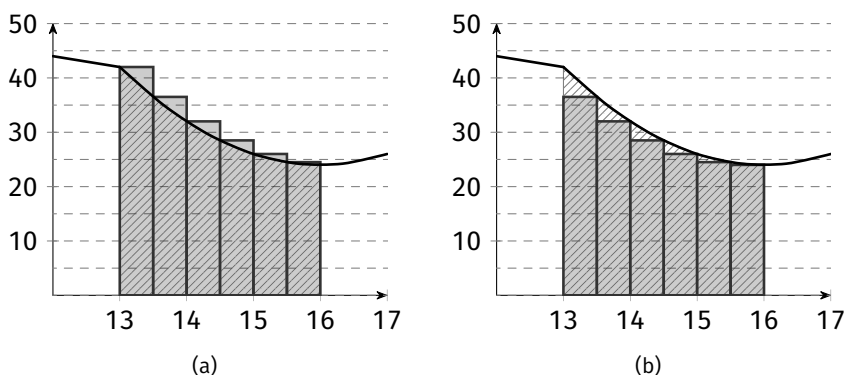


Figura 12

Si la altura de cada rectángulo es el valor mínimo de la función en el intervalo correspondiente, el valor del área es

$$36.5 \cdot 0.5 + 32 \cdot 0.5 + 28.5 \cdot 0.5 + 26 \cdot 0.5 + 24.5 \cdot 0.5 + 24 \cdot 0.5,$$

o, lo que es lo mismo, $\$85.75$.

Quiere decir entonces, que el costo de energía eléctrica entre las 13 h y 16 h va a estar entre $\$85.75$ y $\$94.75$.

Observamos que cuanto mayor es la cantidad de subintervalos utilizados más nos aproximamos al verdadero valor.

Sumas superiores e inferiores

El procedimiento utilizado en la situación planteada, puede generalizarse de la siguiente manera: Consideremos una región plana limitada en su parte superior por la gráfica de una función $y = f(x)$ continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$; en su parte inferior por el eje x , y a la izquierda y a la derecha por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como lo muestra la Figura 13(a).

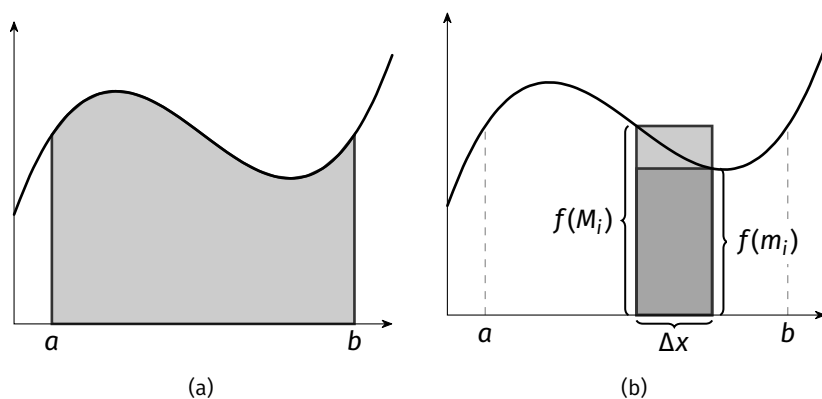


Figura 13

Para aproximar el área de la región, se empieza subdividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$ (ver Figura 13(b)).

Como f es continua, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de un valor mínimo y uno máximo en cada subintervalo.

Sean $f(m_i)$ el valor mínimo de f en el i -ésimo subintervalo y $f(M_i)$ el valor máximo de f en el i -ésimo subintervalo.

Sea un «rectángulo inscrito» dentro de la i -ésima subregión de altura $f(m_i)$ y un «rectángulo circunscrito» de altura $f(M_i)$, ambos de base Δx . El área del rectángulo inscrito en la subregión i es:

$$f(m_i) \cdot \Delta x.$$

El área del rectángulo circunscrito en la subregión i es

$$f(M_i) \cdot \Delta x.$$

Para cada i , el área del rectángulo inscrito es menor o igual al área del rectángulo circunscrito.

$$f(m_i) \cdot \Delta x \leq f(M_i) \cdot \Delta x$$

La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de *suma inferior*, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se conoce

como *suma superior*. En símbolos,

$$\text{Suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^n f(m_i) \cdot \Delta x,$$

$$\text{Suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta x.$$

En la Figura 14 se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual a la suma superior, $S(n)$. Además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas.

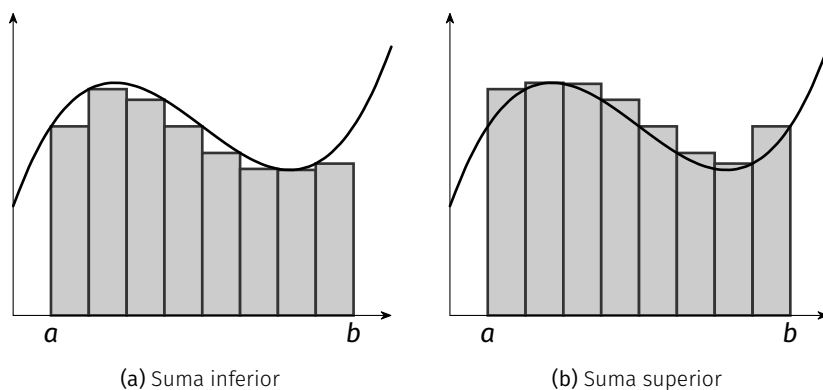


Figura 14

Estamos en condiciones de presentar el siguiente teorema:

Teorema 2.5.1 (Límites de las sumas superior e inferior): Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites cuando $n \rightarrow \infty$ de las sumas superior e inferior existen y son iguales entre sí. Esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(m_i) \cdot \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $f(m_i)$ y $f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el subintervalo i .

Debido a que ambas sumas tienen el mismo límite resulta indistinto elegir cualquier valor de f en el i -ésimo intervalo, lo que da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.5.1 (Área de una región en el plano): Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f , el eje x

y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x$$

donde $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ y $\Delta x = (b - a)/n$.

Hasta el momento hemos definido subintervalos de igual amplitud, sin embargo, esta condición no es necesaria y se fundamenta en que cuando n crece, la amplitud del subintervalo de mayor longitud tiende a cero y, por ende, lo harán los de menor amplitud. Ésta es la característica clave del desarrollo de las integrales definidas.

La siguiente definición se debe a Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), quién generalizó el concepto de suma para cubrir una categoría más amplia de funciones.

Definición 2.5.2 (Suma de Riemann): Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea una partición de $[a, b]$ dada por:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ es la amplitud del subintervalo i -ésimo.

Si c_i es cualquier punto en el i -ésimo subintervalo entonces la suma

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \quad \text{donde} \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

se llama *Suma de Riemann* de f para la partición dada.

Notar que aquí la función f no tiene otra restricción que haber sido definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Anteriormente, se pidió que la función f sea continua y no negativa debido a que se asoció con el concepto geométrico de área.

A continuación definimos la noción central de esta sección.

Definición 2.5.3 (Integral definida): Se dice que una función f es «integrable» en el intervalo cerrado $[a, b]$ si el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

existe y no depende de la elección de las particiones ni de la elección de los puntos c_i en los subintervalos. Este límite se denota por

$$\int_a^b f(x) dx$$

y recibe el nombre de *integral definida* de f de a a b . El número a es el límite inferior de integración y el número b , el límite superior.

Las funciones continuas satisfacen la condición de integrabilidad en cualquier intervalo cerrado incluido en el dominio.

Observación 38: Las integrales definidas y las integrales indefinidas son nociones matemáticas diferentes. Una integral definida es un *número* mientras que una integral indefinida es una *familia de funciones*.

Para que una integral definida sea interpretada como un área, la función f debe ser continua y no negativa en $[a, b]$, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.5.2 (Área de una región): Si f es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f , el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx.$$

Retomando el problema representado en la Figura 9, el área está dada por:

$$\text{Área} = \int_{13}^{16} p(t) dt.$$

Ahora bien, resolver la integral a partir del límite de sumas inferiores o superiores es un procedimiento muy engorroso, por lo que el denominado *Teorema fundamental del cálculo* proporciona una herramienta sencilla para el cálculo de integrales definidas y, a su vez, es extremadamente poderoso en tanto establece la relación entre diferenciación e integración. Esta conexión fue descubierta en forma independiente por dos grandes matemáticos: Sir Isaac Newton (1643–1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). La demostración escapa a los objetivos del libro.

Teorema 2.5.3 (Teorema fundamental del cálculo): Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

En virtud de la igualdad anterior, se justifica el uso de la notación $\int$ para las antiderivadas.

Observación 39: Resulta conveniente utilizar la siguiente notación:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Retomando el problema inicialmente planteado, podemos aplicar este último resultado para calcular el costo del servicio de energía eléctrica.

$$\text{Área} = \int_{13}^{16} p(t) dt.$$

Para determinar la expresión de la función $p = p(t)$ podemos recurrir a una aplicación tecnológica o bien plantear un sistema de ecuaciones con tres puntos pertenecientes a la función. Así, obtenemos que:

$$p(t) = 2t^2 - 64t + 536.$$

De esta manera, el área buscada es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{13}^{16} (2t^2 - 64t + 536) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - 32t^2 + 536t \right]_{13}^{16} \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot 16^3 - 32 \cdot 16^2 + 536 \cdot 16 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 13^3 - 32 \cdot 13^2 + 536 \cdot 13 \right) \\ &= 90. \end{aligned}$$

Anteriormente habíamos determinado que, entre las 13 h y 16 h, el costo de energía eléctrica aproximadamente estaba entre \$82 y \$100, o entre \$85.75 y \$94.75. Ahora sabemos que es, efectivamente, de \$90.

Ahora bien, estamos en condiciones de responder la tercera pregunta, ¿cuánto deberá abonar la familia por el consumo desde las 13 h a 19 h en un día determinado? Puesto que la gráfica de la función es simétrica respecto de la recta $t = 16$, bastará multiplicar por dos el valor \$90. Así, en un determinado día, la familia deberá abonar \$180.

Finalmente, respondemos la pregunta: ¿cuánto deberá abonar la familia por el consumo las 24 h de un día determinado?, planteando la siguiente suma:

$$\begin{aligned} \text{Área total} &= \text{Área 1} + \text{Área 2} + \text{Área 3} + \text{Área 4} + \text{Área 5} + \text{Área 6} + \text{Área 7} \\ &= \$168 + \$108 + \$132 + \$180 + \$132 + \$36 + \$24 = \$780. \end{aligned}$$

Concluimos que el costo de electricidad en un día determinado de una familia tipo es de \$780. En un mes de treinta días será, aproximadamente, \$23 400 (valores estimados a mayo 2024 en la provincia de Santa Fe).

Ejemplo 2.5.1 (Estimación ventas totales en supermercados de Argentina): La Tabla 4 muestra el total de ventas de los productos del sector almacén en los

supermercados del país (Argentina) en el mes de enero de 2024. Los datos corresponden a las ventas ocurridas el primer día de cada semana de dicho mes. La semana quinta consta sólo de tres días y, además, el 1 de febrero las ventas fueron de 45 millones. Estime el monto total de las ventas en el mes de enero de 2024.

Tabla 4

Semana	1	2	3	4	5
Ventas (millones de \$ por día)	35	40	42	43	44

Solución. Si suponemos que las ventas se mantuvieron en 40 millones cada día de la primera semana, en 42 millones cada día de la segunda semana, y continuando así, para realizar una estimación por exceso de las ventas totales del mes, realizamos el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \text{Ventas totales} &= 40 \cdot 7 + 42 \cdot 7 + 43 \cdot 7 + 44 \cdot 7 + 45 \cdot 3 \\ &= 1318 \text{ millones de pesos/día} \times \text{día} \\ &= 1318 \text{ millones de pesos.} \end{aligned}$$

Ahora bien, si tomamos los valores al comienzo de cada semana tendremos una estimación por defecto del valor de las ventas totales, así:

$$\begin{aligned} \text{Ventas totales} &= 35 \cdot 7 + 40 \cdot 7 + 42 \cdot 7 + 43 \cdot 7 + 44 \cdot 3 \\ &= 1252 \text{ millones de pesos/ día} \times \text{día} \\ &= 1252 \text{ millones de pesos.} \end{aligned}$$

Entonces, las ventas totales del sector almacén de los supermercados argentinos en el mes de enero de 2024, estuvieron entre 1252 millones y 1318 millones. Podemos tomar el promedio de ambos valores dándonos un monto estimado de 1285 millones.

Ejemplo 2.5.2 (Flujo de vehículos en una calle): El medio Aire de Santa Fe publicó en mayo de 2024 datos sobre el volumen de vehículos que transitaron la calle San Jerónimo en la ciudad de Santa Fe en un día en particular. A partir de estos datos se elaboró la siguiente gráfica en donde se puede ver la tasa de cambio de los vehículos que transitaron por hora en cada momento del día.

Determine el número de vehículos que transitaron durante todo el día.

Solución. Para conocer el número total de vehículos que transitaron es necesario *acumular* todos los valores de la tasa de cambio entre 0 y 24. Si

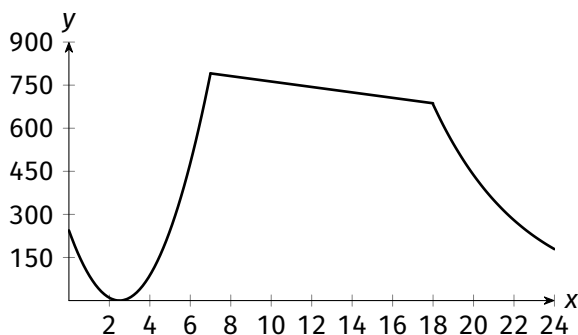


Figura 15

consideramos que la función f cuya gráfica se muestra en la Figura 16 está compuesta de tres tramos: el primer tramo ($f_1(x)$) se aproximará mediante un modelo cuadrático; el segundo, ($f_2(x)$), por una función lineal y por último, el tercero, ($f_3(x)$), por una función exponencial. Las expresiones que definen la función son:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 9.8(2x - 5)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 7, \\ -9.46x + 857.21 & \text{si } 7 < x \leq 18, \\ 1.25^{-x+47.25} & \text{si } 18 < x \leq 24. \end{cases}$$

Luego, calculamos el área de las regiones A, B y C mediante las integrales:

$$\text{Área A} = \int_0^7 (9.8(2x - 5)^2) dx = 1394.87,$$

$$\text{Área B} = \int_7^{18} (-9.46x + 857.21) dx = 8128.56,$$

$$\text{Área C} = \int_{18}^{24} (1.25^{-x+47.25}) dx = 2259.46.$$

El área total es 11 782, 89 y, en consecuencia, la cantidad de autos que transitan en el día es 11 783, aproximadamente. En la Figura 16 se muestra la interpretación geométrica del cálculo realizado.

Cambio total a partir de una tasa de cambio

Integrar la tasa de cambio de $F = F(x)$ con respecto a x en un intervalo $[a, b]$ da como resultado el cambio que ocurre en el valor de $F(x)$ cuando x se incrementa desde a hasta b . En otras palabras, si $f = f(x)$ es la tasa de cambio de una cantidad, entonces, el *cambio total* en la cantidad entre $x = a$

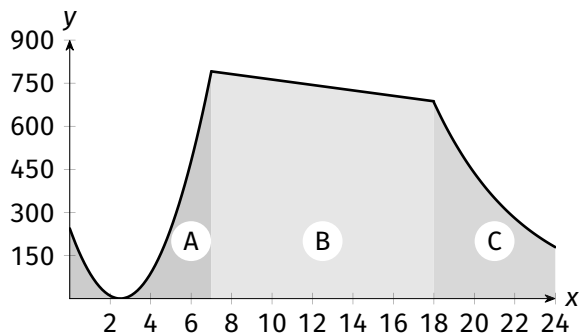


Figura 16

y $x = b$ está dado por:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Como hemos observado en lo estudiado hasta aquí, en la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

la unidad de medida que se genera es el producto de las unidades para $f(x)$ y el de las unidades para x .

Por ejemplo, si $f(x)$ y x tienen las mismas unidades, entonces la integral $\int_a^b f(x) dx$ se mide en unidades al cuadrado. En el caso en que la unidad de ambos factores sea m , el resultado de la integral tendrá por unidad $m \times m$ será m^2 .

Analogamente si $f(q)$ se mide en dólares/unidad de producción y q en unidades de producción, entonces, la medida de la $\int_a^b f(q) dq$, es (dólares/unidad de producción) $\times$ (unidad de producción) igual a dólares; que es lo que esperamos porque la integral representa cambio en unidades monetarias.

Ejemplo 2.5.3: Si $C'(q)$ es el costo marginal expresado en dólares/unidad de producción, cuando se aumenta la producción de a unidades a b unidades, ($a < b$), el incremento en el costo es:

$$\int_a^b C'(q) dq = C(b) - C(a)$$

y su unidad de medida es dólares. Es decir, la integral proporciona la cantidad que cuesta aumentar la producción de a unidades a b unidades.

Si $C(0)$ es el costo fijo, entonces, el costo variable total de producir b unidades está dado por:

$$\int_0^b C'(q) dq = C(b) - C(0).$$

El costo total de producir b unidades es el costo fijo más el costo variable total:

$$C(b) = C(0) + \int_0^b C'(q) dq.$$

Ejemplo 2.5.4: Si $R'(q)$ es el ingreso marginal de un determinado producto, expresado en miles de dólares/unidad vendida, siendo $a < b$, la integral:

$$\int_a^b R'(q) dq = R(b) - R(a)$$

es la variación del ingreso cuando se pasa de vender a unidades a b unidades. Su unidad de medida es miles de dólares.

Ejemplo 2.5.5: Si $U'(q)$ es la utilidad marginal que se produce por la producción y venta de un determinado producto, expresado en miles de dólares/unidad producida y vendida, siendo $a < b$, la integral:

$$\int_a^b U'(q) dq = U(b) - U(a)$$

es el aumento o disminución, según el signo, en la utilidad cuando se pasa de producir y vender a unidades a b unidades. Su unidad de medida es miles de dólares.

Ejemplo 2.5.6: Si $C'(t)$ es la función de costo marginal de calefaccionar una vivienda tipo en un determinado lugar, expresado en dólares por día, y t , el tiempo medido en día. Para calcular el costo de calefaccionar dicha vivienda en 31 días, a partir del 1 de enero de 2024 ($t = 0$) hasta fin de mes, debemos calcular,

$$\int_0^{31} C'(t) dt = C(31) - C(0)$$

cuya unidad de medida es: (dólares/día)×(día), que equivale a dólares.

Ejemplo 2.5.7: Si un capital crece de manera continua y $C'(t)$ es la tasa de crecimiento de dicha inversión en el tiempo t en días, para calcular la ganancia obtenida luego de 30 días debemos hallar

$$\int_0^{30} C'(t) dt = C(30) - C(0)$$

siendo $C(0)$ el valor de la inversión al inicio de la operación. La unidad de medida es: u.m./(día) por día, que equivale a u.m.

Ejemplo 2.5.8: Durante los meses de verano, el ingreso de un emprendimiento que vende ropa de playa crece a la tasa $R'(t) = 2t^2 + 100$ dólares por día, donde $0 \leq t \leq 90$. Halle el ingreso total de este emprendimiento en la temporada.

Solución. Sabemos que $R' = R'(t)$ representa la tasa de variación del ingreso y R es una antiderivada de R' , entonces

$$\int_0^{90} R'(t) dt$$

nos dará el ingreso total de la temporada. Resolvemos,

$$\int_0^{90} (2t^2 + 100) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + 100t \right]_0^{90} = \frac{2}{3} \cdot 90^3 + 100 \cdot 90 = 495\,000.$$

El ingreso del emprendimiento en la temporada es 495 000 dólares.

Ejemplo 2.5.9: La tasa de cambio del costo diario de producción de q cientos de kg de pastas (en miles de dólares) que elabora una fábrica responde al modelo: $C'(q) = e^q(q - 2)/q^3$, donde $q \geq 2$. Determine el aumento del costo total cuando la producción se incrementa de 200 kg a 300 kg por día.

Solución. Para determinar la variación producida en el costo integramos en forma definida el costo marginal, C' .

$$\int_2^3 C'(q) dq = \int_2^3 \frac{e^q(q - 2)}{q^3} dq = \left[\frac{e^q}{q^2} \right]_2^3 \approx 0.384\,46.$$

Al aumentar la producción de 200 a 300 kg por día, los costos diarios aumentan aproximadamente 384,46 dólares. Para los cálculos se ha utilizado GeoGebra.

El teorema dado a continuación indica que toda f continua admite una antiderivada.

Teorema 2.5.4 (Segundo teorema fundamental del cálculo): Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a a , entonces, para toda x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

Las siguientes propiedades resultan de utilidad a la hora de trabajar con expresiones que involucren integrales definidas.

Proposición 2.5.5 (Propiedades de la integral definida): Sean a , b , c y k números reales y f y g funciones integrables en $[a, b]$. Entonces:

1. $\int_a^a f(x) dx = 0.$

2. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$
3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$
4. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx.$
5. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$

Observación 40: La propiedad 5 de esta proposición puede extenderse a cualquier número finito de funciones.

EJERCICIOS 2.5.1

1. La Tabla 5 muestra el consumo per cápita de electricidad en kWh de la población de Argentina en el período 2017-2022.

Tabla 5

Año	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Consumo (kWh/año)	3017.2	2973.6	2858.1	2785.5	2874.2	2793.8

Estime el consumo de electricidad de la población Argentina en el período 2017-2022.

2. La Tabla 6 muestra el consumo de gas por usuario tipo (equivalente a 3.5 personas) metros cúbicos por día, en el transcurso de un año, en Argentina.

Tabla 6

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Consumo (m ³ /día)	1	1.1	1.2	1.9	3	5.1	6	5	3.5	2	1.1	1

Suponga que febrero tiene 28 días y estime el consumo anual de gas de un usuario tipo en Argentina.

3. La Tabla 7 muestra el consumo de ración, en g/día, de los pollos de criadero de acuerdo con el tiempo de vida. La información presentada corresponde al primer día de cada semana.

Tabla 7

días	7	14	21	28	35	42	49	56
Consumo (g/día)	16.7	45.7	81.3	104.5	147.6	164	190	227

Estime el consumo de los pollos de criadero desde su nacimiento hasta los 56 días de vida.

4. El costo marginal de cierta empresa está dado por $C'(q) = 31.4 - 0.004q$ mientras que su ingreso marginal es $R'(q) = 44 - 0.008q$, ambas funciones están dadas en dólares/unidad. Determine el incremento en las utilidades de la empresa si las ventas se incrementan 20 % a partir de 500 unidades.
5. La función de costo marginal diario para una compañía está dada por $C'(q) = 2q^2 - 36q + 140$ dólares por unidad. Si el costo fijo es de 500 dólares diarios, calcule el costo total de producir 20 unidades del producto.
6. Si $P = P(t)$ es una población (de plantas, animales o personas en el tiempo t , describe el significado de $P'(t)$ y de $\int_{t_1}^{t_2} P'(t) dt$.
7. Si $V'(t)$ es la tasa de cambio del nivel de ventas mensuales de un determinado producto de una empresa manufacturera dado en dólares/mes, describe el significado de $\int_0^{12} V'(t) dt$ y sus unidades.
8. Suponga que la recta tangente a una curva $y = f(x)$ tiene pendiente $m(x)$ en x . ¿Qué representa la $\int_{x_1}^{x_2} m(x) dx$?
9. Si el ingreso marginal de un fabricante está dado por la función, $R'(q) = 500 - 2q - 0.4q^2$, expresado en dólares por unidad vendida, determine el incremento en el ingreso total del fabricante si la venta se incrementa de 15 a 25 unidades.
10. Determine si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos. Justifique.

a. $\int_a^b f(x) dx > 0$.

c. $\int_a^b dx = 0$.

b. $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

d. $\int_a^b x dt = x(b - a)$.
11. La gráfica de f se muestra en la Figura 17 y está compuesta por segmentos de recta y un semicírculo. Evalúe cada integral definida. En lo posible, utilice dos modos diferentes de hacerlo. Compare y concluya.

a. $\int_0^2 f(x) dx$.

b. $\int_2^6 f(x) dx$.

c. $\int_{-5}^{-2} f(x) dx$.

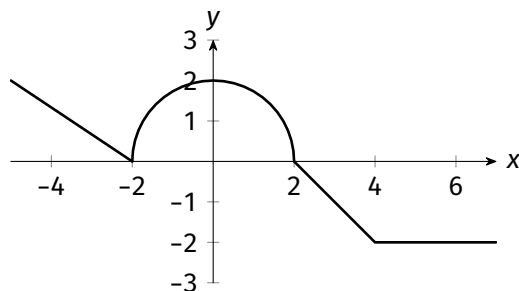


Figura 17

12. Evalúe cada integral utilizando $\int_2^4 x^3 dx$, $\int_2^4 x dx$ y $\int_2^4 dx$.

a. $\int_4^2 x dx.$

b. $\int_2^2 x^3 dx.$

c. $\int_2^4 4x dx.$

d. $\int_2^4 (-x^3 + 4) dx.$

e. $\int_4^2 (x^3 - 3x + 2) dx.$

f. $\int_4^4 dx.$

13. Dadas $\int_{-2}^1 f(x) dx = 7$, $\int_0^5 f(x) dx = 10$ y $\int_0^1 f(x) dx = 2$ halle:

a. $\int_{-2}^5 f(x) dx.$

b. $\int_{-2}^0 f(x) dx.$

14. Halle $F'(x)$ en cada ítem y verifique que se cumple el Segundo teorema fundamental del cálculo.

a. $F(x) = \int_{-2}^x (t^2 - 2t) dt.$

b. $F(x) = \int_8^x \sqrt[3]{t} dt.$

15. Determine si el enunciado siguiente es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.

Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Cálculo de áreas

En esta sección nos dedicaremos al cálculo de áreas de regiones acotadas por curvas. Por definición, el área de una región es un valor no negativo.

De acuerdo con el Teorema fundamental del cálculo:

Si una función f es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f , entonces el área A comprendida entre la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, está dada por la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ilustraremos su aplicación mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 2.5.10: Evalúe el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^3$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución. En la Figura 18 se ha representado el recinto cuya área se desea calcular. Notemos que $f(x) = x^3$ es no negativa y continua en el intervalo $0 \leq x \leq 2$ por tanto, calculamos la integral definida:

$$\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - 0 = 4.$$

Por lo tanto, el área es 4 unidades cuadradas.

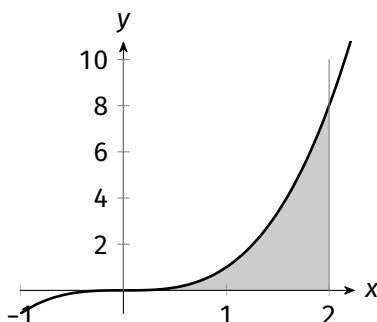


Figura 18

Ejemplo 2.5.11: Determine el área de la superficie acotada por el eje x , la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 4$.

Solución. La región sombreada en la Figura 19 tiene área dada por:

$$\begin{aligned} \int_1^4 (2x^2 + 3x + 4) dx &= \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{2 \cdot 4^3}{3} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right) \\ &= \frac{153}{2}, \end{aligned}$$

ya que la función f es positiva y continua en el intervalo de interés. El área es $153/2$ unidades cuadradas.

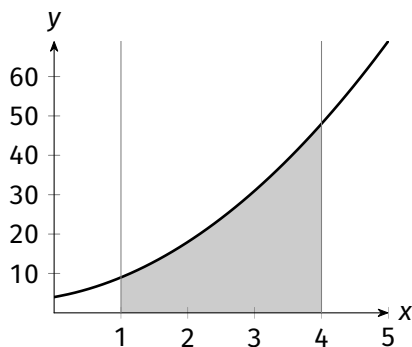


Figura 19

Frecuentemente el cálculo de la integral requiere utilizar el método de sustitución. El ejemplo que sigue ilustra cómo se procede en esta situación.

Ejemplo 2.5.12: Determine el área de la región limitada por el eje x , la gráfica de la función $f(x) = 2x/(x^2 + 4)$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 10$.

Solución. La superficie cuya área se desea calcular está sombreada en la Figura 20. Siendo f no negativa y continua en el intervalo $0 \leq x \leq 10$, el área está dada por:

$$\int_0^{10} \left(\frac{2x}{x^2 + 4} \right) dx.$$

Resolvemos la integral definida aplicando sustitución, de la siguiente manera. Sea $u = x^2 + 4$ y $du = 2x dx$. En función del cambio de variable realizado los extremos de integración se modifican teniendo en cuenta la nueva variable. Para $x = 0$ corresponde $u = 4$ y para $x = 10$, corresponde $u = 104$. Así, se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_0^{10} \left(\frac{2x}{x^2 + 4} \right) dx = \int_4^{104} \left(\frac{du}{u} \right).$$

Resolvemos para u :

$$\int_4^{104} \left(\frac{du}{u} \right) = \ln(u) \Big|_4^{104} = \ln 104 - \ln 4 = \ln 26 \approx 3.2581.$$

Así, el área es, aproximadamente, 3.2581 unidades cuadradas, o bien $\ln(26)$ unidades cuadradas.

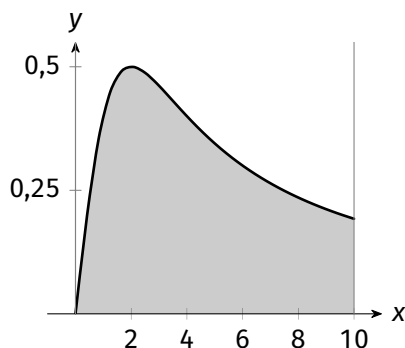


Figura 20

Consideremos ahora el caso correspondiente a la región acotada por la curva representativa de una función f continua y $f \leq 0$ y el eje x para $a \leq x \leq b$. Es claro que la región en cuestión está situada por completo por debajo del eje x , como se advierte en la Figura 21.

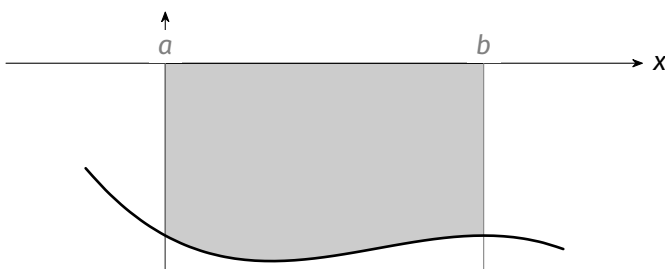


Figura 21

Para resolver esta situación, definimos la función $g = -f$, $g \geq 0$ y continua para $a \leq x \leq b$. Integrando g resulta:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \\ &= -(F(b) - F(a)) = F(a) - F(b) \\ &= \int_b^a f(x) dx. \end{aligned}$$

En el último paso se aplicó el Teorema fundamental del cálculo. Esta igualdad indica que el área de la región bajo la gráfica de g y sobre el eje x entre $x = a$ y $x = b$ es la misma que la de la Figura 21, dado que una región puede obtenerse reflejando la otra con respecto al eje x .

En consecuencia, el área de la región situada por debajo del eje x y acotada inferiormente por la gráfica de f , entre las rectas $x = a$ y $x = b$, está dada por la integral definida:

$$-\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$$

Ejemplo 2.5.13: Halle el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 0$.

Solución. Es conveniente representar gráficamente la región cuya área se desea calcular. La Figura 22 ilustra la situación.

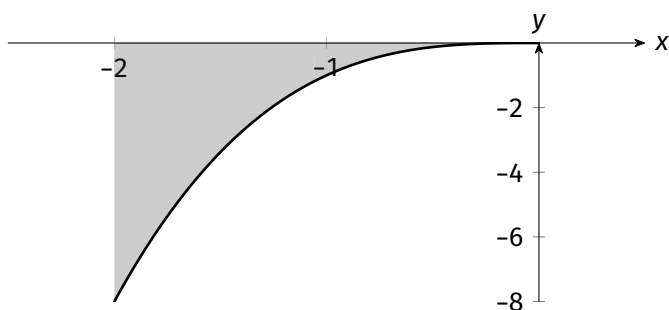


Figura 22

Como podemos observar la región se encuentra debajo del eje x . Por tanto, el área está dada por

$$-\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_0^{-2} x^3 dx = 4.$$

Por tanto, el área solicitada es 4 unidades cuadradas.

Ejemplo 2.5.14: Halle el área de la región determinada por $f(x) = x^3$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

Solución. La Figura 23 muestra la región cuya área debemos calcular.

Como se visualiza en la gráfica, hay una parte de la región sobre el eje x y otra por debajo del mismo. Esto nos obliga a considerar dos integrales definidas; la suma de ambos resultados será el área buscada.

$$-\int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = 4 + 4 = 8.$$

Por lo tanto, el área de la región indicada es de 8 unidades cuadradas.

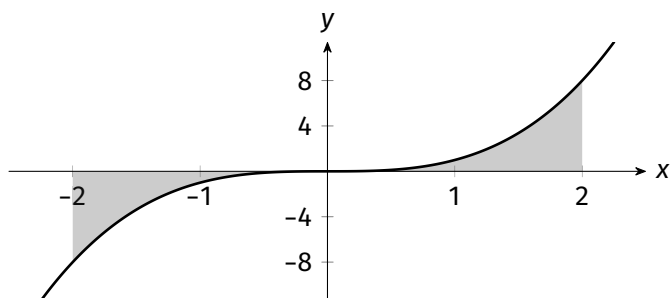


Figura 23

Dado que la gráfica de la función es simétrica respecto al origen de coordenadas, el área entre $x = -2$ y $x = 0$ es la misma que entre $x = 0$ y $x = 2$, por lo que bastará calcular una sola integral y multiplicarla por dos.

Ejemplo 2.5.15: Determine el área de la región sombreada que se muestra en la Figura 24.

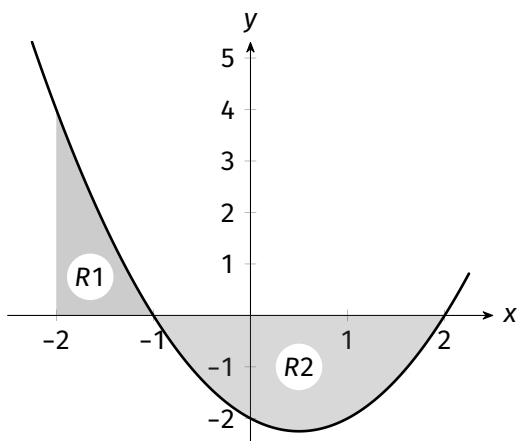


Figura 24

Solución. Como se observa en el gráfico el área A de la región es la suma de las áreas A_1 y A_2 de las subregiones R_1 y R_2 respectivamente. La función es no negativa en el intervalo $[-2, -1]$ y no positiva en el intervalo $[-1, 2]$, por tanto:

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx = \frac{11}{6},$$

$$A_2 = - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx = \int_2^{-1} (x^2 - x - 2) dx = \frac{9}{2}.$$

En consecuencia, $A = 11/6 + 9/2 = 19/3$ unidades cuadradas.

A continuación estudiaremos cómo hallar el área de regiones limitadas por dos o más curvas. Consideremos el área de la región mostrada en la Figura 25(a), limitada por $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$.

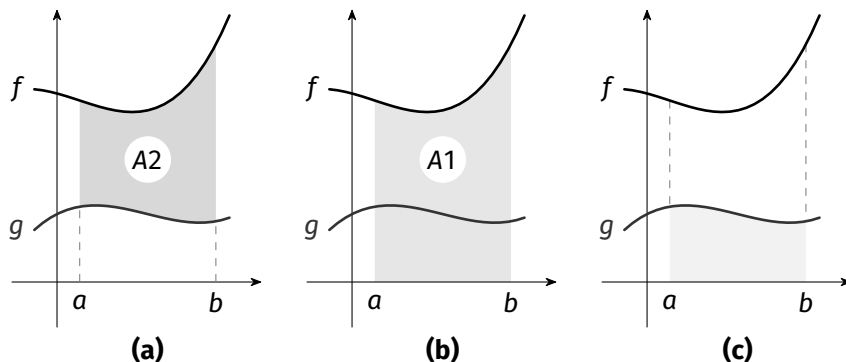


Figura 25

La integral $\int_a^b f(x) dx$ representa el área mostrada en la Figura 25(b) y $\int_a^b g(x) dx$, el área mostrada en la Figura 25(c). El área de la región entre f y g es la diferencia entre A_1 y A_2 .

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Observación 41: En realidad, el procedimiento vale aún cuando f o g sean no negativas en el intervalo de integración. Es suficiente que $f \geq g$ en $[a, b]$; esto es equivalente a decir que $f - g \geq 0$ en $[a, b]$, de modo que el integrando $(f(x) - g(x)) dx$ sea significativo para el área.

Ilustraremos esta cuestión en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.5.16: Determine el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x$.

Solución. Notemos que no están explicitados los límites de la región. Podemos explorar la situación haciendo el gráfico de ambas funciones. En la Figura 26 observamos que ambas gráficas se intersectan en dos puntos y, para hallarlos resolvemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x. \end{cases}$$

El conjunto solución es $S = \{(0, 0), (1, 1)\}$. Así, la región queda limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Su área es:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \frac{1}{6}.$$

Por consiguiente, $A = 1/6$ unidades cuadradas.

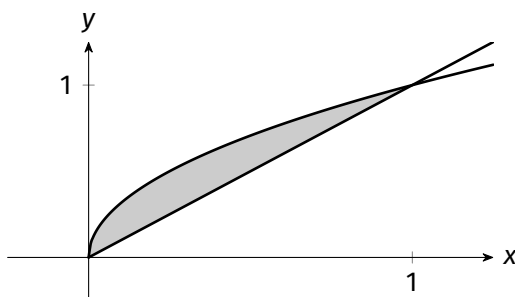


Figura 26

Ejemplo 2.5.17: Determine el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 5 - 2x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución. Al graficar la región observamos que está constituida por dos subregiones que no se superponen, R_1 y R_2 ; por tanto su área A será la suma de las áreas de las subregiones, es decir, A_1 y A_2 , respectivamente. Como en R_1 , $g - f \geq 0$ y en R_2 , $f - g \geq 0$ es necesario determinar el valor de x donde ocurre este cambio, es decir, donde se intersecan las rectas.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 5 - 2x. \end{cases}$$

La solución es el punto $(2, 1)$. Así, el área de cada subregión es:

$$A_1 = \int_0^2 (5 - 2x) - (x - 1) dx = \int_0^2 (6 - 3x) dx = 6x - \frac{3x^2}{2} \Big|_0^2 = 6,$$

$$A_2 = \int_2^4 ((x - 1) - (5 - 2x)) dx = \int_2^4 (3x - 6) dx = \frac{3x^2}{2} - 6x \Big|_2^4 = 6.$$

Entonces, $A = 6 + 6 = 12$ unidades cuadradas (Figura 27).

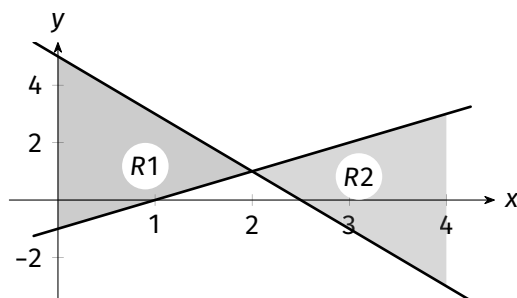


Figura 27

Ejemplo 2.5.18: Determine el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 9 - x^2$ y las rectas $x = -3$ y $x = 3$.

Solución. Notamos que la región es simétrica respecto del eje y (Figura 28). Así, para calcular su área consideraremos sólo la región comprendida entre $0 \leq x \leq 3$ y luego multiplicaremos por dos el valor obtenido.

En $[0, 3]$ esta región está acotada superiormente por dos curvas distintas. Para hallar el punto de intersección entre ambas gráficas, resolvemos el sistema de ecuaciones de segundo grado,

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$$

cuyo conjunto solución es $S = \{(-2, 5), (2, 5)\}$.

Sean A_1 y A_2 las áreas de R_1 y R_2 respectivamente. Entonces

$$A_1 = \int_0^2 (9 - x^2) - (x^2 + 1) dx = \int_0^2 (8 - 2x^2) dx = 8x - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{32}{3},$$

$$A_2 = \int_2^3 ((x^2 + 1) - (9 - x^2)) dx = \int_2^3 (2x^2 - 8) dx = \frac{2x^3}{3} - 8x \Big|_2^3 = \frac{14}{3}.$$

El área de la región completa es $A = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 92/3$ unidades cuadradas.

En ocasiones resulta más fácil integrar respecto de la variable y , en lugar de x . El proceso de integrar con respecto al eje y para determinar el área de una región implica que el observador adopta una perspectiva diferente en relación con la representación gráfica de la región, ubicando el eje y horizontalmente respecto de quien observa.

Ejemplo 2.5.19: Determine el área de la región limitada por las gráficas de las funciones, $y^2 = x$ y $x - y = 2$.

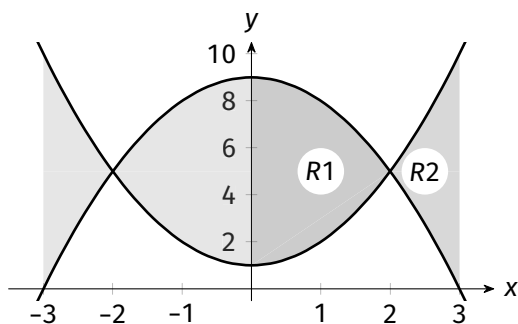


Figura 28

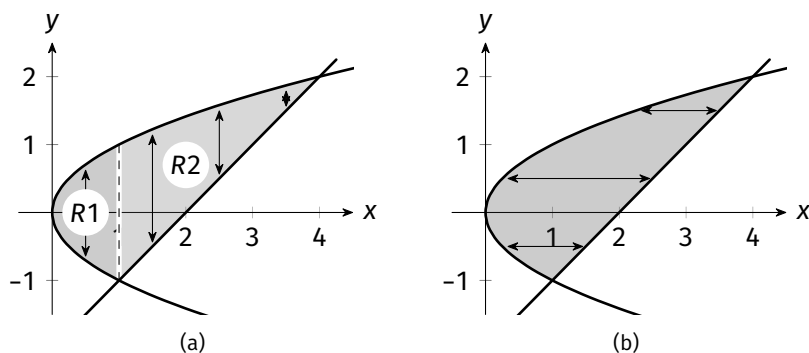


Figura 29

Solución. En la Figura 29 se representa gráficamente la región cuya área se desea calcular. Para hallar los puntos de intersección se resuelve el sistema no lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Reemplazando x por y^2 en la segunda ecuación, resulta: $y = y^2 - 2$, lo que equivale a $y^2 - y - 2 = 0$, de donde $y = -1$, $y = 2$. Luego, reemplazando en la primera ecuación resulta, $x = 1$ y $x = 4$. Por tanto, las gráficas se intersecan en los puntos $(1, -1)$ y $(4, 2)$.

A continuación, mostraremos el cálculo del área de dos maneras distintas.

CASO 1 Integración respecto al eje x : Al despejar y de $y^2 = x$, se obtiene $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$. Como se observa en la Figura 29(a), para calcular el área de la región son necesarias dos integrales. A la izquierda de $x = 1$,

calculamos el área de la región R1 (A1):

$$A1 = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx = \int_0^1 2 \cdot \sqrt{x} dx = \left. \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

A la derecha de $x = 1$, calculamos A2, área de la región R2:

$$A2 = \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^4 = \frac{19}{6}.$$

Por tanto, el área del recinto es $A = A1 + A2 = 9/2$ unidades cuadradas.

CASO 2 Integración respecto al eje y: Integrando respecto a la variable y nos simplifica el trabajo dado que el área se puede calcular mediante una sola integral. Tomando y como variable independiente, las expresiones de las funciones son $x = y + 2$ e $x = y^2$. Luego,

$$A = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{1}{3} \cdot y^3 \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Así, el área es $9/2$ unidades cuadradas.

EJERCICIOS 2.5.2

1. Halle el área de la región limitada por las gráficas de:

- $f(x) = -|x| + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$.
- $f(x) = (x - 1)^2$, $g(x) = -x + 3$, $x = -2$ y $x = 4$.
- $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$, $x = -1$ y $x = 2$.
- $f(x) = -x^2 + 4$, $g(x) = (x - 2)^2$ y $x = 3$.
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$, $x = 0.5$ y $x = 4$.
- $f(x) = 2 + \ln x$, $(e - 1) \cdot y = -2x + 2e$ y $x = 4$.
- $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x} - 1$, $x = 0$ y $x = 2$.

2. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 8x - 2x^2 & \text{si } x \leq 4, \\ -8x + 32 & \text{si } x > 4 \end{cases} \text{ y las rectas } x = 0, x = 5 \text{ y el eje } x.$$

- Determine el área de la región sombreada que se muestra en la Figura 30. Las expresiones de las funciones son $y = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$ y $y = 4x - 4$.
- Describe dos maneras distintas (siempre que sea posible) de realizar el cálculo del área de las regiones A, B y C de la Figura 31. Las funciones son $f(x) = -x^2 + 7x - 6$ y $g(x) = -2x + 8$. Calcule dichas áreas.

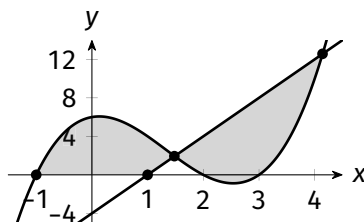


Figura 30

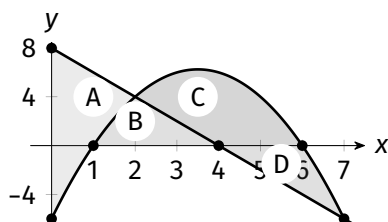


Figura 31

5. Utilice dos maneras distintas (o más si existen) para realizar el cálculo de las áreas de la región limitada por las curvas $y^2 - x = 0$ y $x - y = 2$. Verifique usando [GeoGebra](#).

6. Grafique y sombree una región cuya área está expresada por las integrales

$$\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^3 (g(x) - f(x)) dx.$$

7. Exprese mediante una integral el área de la región que se muestra en la Figura 32.

8. Sugiera un nombre para cada curva y proponga una expresión que permita calcular el área de la región sombreada en cada una de las siguientes figuras. Si es necesario, aproxime las intersecciones.

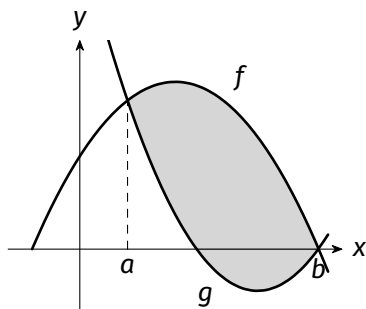
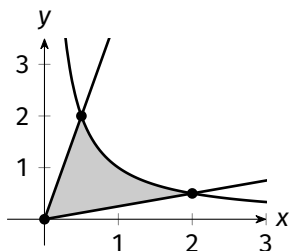
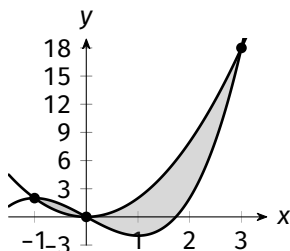


Figura 32

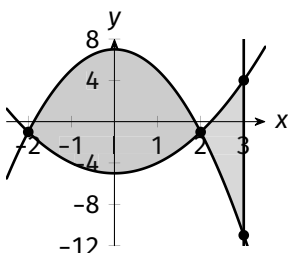
a.



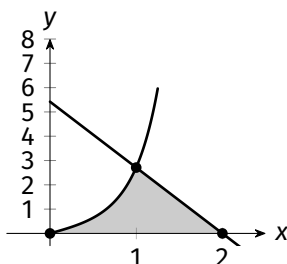
b.



c.



d.



Coefficiente de desigualdad para distribuciones de ingreso

La curva de Lorenz se representa en un plano donde en el eje x se ubica la proporción acumulada de la población, ordenada de menor a mayor ingreso, y en el eje y la proporción acumulada del ingreso total que recibe ese grupo. Por ejemplo, el punto $(x, y) = (0.5, 0.25)$ indica que el 50 % de la población más pobre recibe el 25 % del ingreso total. De forma análoga, el punto $(0.9, 0.55)$ indica que el 90 % de la población con menores ingresos concentra el 55 % del ingreso. Se considera que la equidad perfecta se da cuando el 50 % de la población de menores ingresos recibe el 50 % de los ingresos totales, el 10 % recibe el 10 %, etc.

En la práctica, la curva de Lorenz real siempre se ubica por debajo de esta bisectriz. Cuanto más próxima esté a la recta $y = x$, más equitativa será la distribución; en cambio, cuanto más se aleje, mayor será el grado de desigualdad.

Formalmente, si denotamos la curva de Lorenz como una función $y = f(x)$,

se cumplen las condiciones $f(0) = 0$ (ningún ingreso para población nula) y $f(1) = 1$ (todo el ingreso acumulado en el total de la población). Tanto x como y toman valores en el intervalo $[0, 1]$.

A partir de esta curva se definen indicadores de desigualdad, como el coeficiente de Gini, que mide la proporción de área comprendida entre la línea de igualdad perfecta y la curva de Lorenz con respecto al área bajo la línea de equidad perfecta en el dominio. La Figura 33 ilustra gráficamente dos ejemplos de curvas de Lorenz.

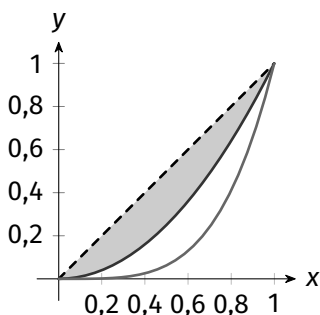


Figura 33

El coeficiente de Gini fue desarrollado por Corrado Gini (1884–1965) en 1912 y es el cociente entre el área de la superficie que se encuentra entre la curva y la recta $y = x$ y el área bajo esta última y sobre el eje x , $0 \leq x \leq 1$. Esta superficie se llama área de concentración. Cuanto mayor sea, más concentrada estará la riqueza; cuanto más pequeña sea esta área, más equitativa será la distribución de la renta del país representado. El coeficiente de Gini (o de desigualdad) se define como:

$$L = \frac{\text{Área entre la recta y la curva}}{\text{Área bajo la recta}}.$$

El área bajo la recta $y = x$ es el área de un triángulo, de modo que está dada por:

$$\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, el coeficiente de Gini se obtiene como:

$$L = 2 \times \text{Área entre la recta y la curva} = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx,$$

donde $y = f(x)$ es la función de la curva de Lorenz.

Ejemplo 2.5.20: La distribución del ingreso de cierto país está descrita por la curva de Lorenz dada por $y = 19/20x^2 + 1/20x$, en donde x representa la

proporción de la población que recibe ingresos, ordenada desde los más bajos ingresos a los más altos e y , es la proporción del ingreso total del país.

1. Explique el significado del valor de la función para $x = 0.10$.
2. ¿Qué proporción del ingreso total recibe el 20 % más pobre de ese país?
3. ¿Qué proporción del ingreso total recibe el 20 % del sector con mejores ingresos?
4. Determine el coeficiente de Gini actual para este país.

Solución. Notar que tenemos como dato la expresión analítica de la curva de Lorenz, entonces a partir de ella, responderemos lo solicitado.

1. En este primer ítem calculamos $y(0.10) = 0.0145$, lo cual indica que el 10 % de la población más pobre recibe el 1.45 % de los ingresos del país.
2. Evaluamos, $y(0.20) = 0.048$, lo cual significa que el 20 % de la población más pobre recibe el 4.8 % de los ingresos del país.
3. La pregunta es equivalente a: ¿qué proporción del ingreso total recibe el último 20 % de la población (el 20 % más rico)? El 20 % más rico corresponde a la población entre $x = 0.8$ y $x = 1$, por tanto calculamos $y(1) - y(0.8) = 1 - 0.648 = 0.352$, lo cual significa que el 20 % de la población más rica recibe el 35.2 % de los ingresos del país.
4. Aplicamos la fórmula para hallar el coeficiente de Gini:

$$\begin{aligned} L &= 2 \times \text{Área entre la recta y la curva} \\ &= 2 \int_0^1 \left(x - \frac{19}{20}x^2 - \frac{1}{20}x \right) dx \\ &= 2 \cdot \frac{19}{120} \approx 0.317. \end{aligned}$$

Curva de aprendizaje

En producción industrial, la administración a menudo debe estimar de antemano el número total de horas-hombre que requerirá con la finalidad de producir un número determinado de unidades de su producto. Una herramienta que con frecuencia se utiliza para tal predicción se denomina «curva de aprendizaje». Se sabe que una persona tiende a requerir menos tiempo en la ejecución de una tarea particular si ya la ha realizado antes un número de veces. En otras palabras, cuanto más repita una persona una tarea, será más eficiente y empleará menos tiempo al realizarla de nuevo. Así, entre más

unidades se produzcan en una serie de producción, el tiempo necesario para producir cada unidad irá descendiendo.

Si se conoce la tasa de variación del tiempo total T respecto de la producción de x unidades, dT/dx , entonces

$$\int_{x_0}^{x_0+k} T'(x) dx$$

representa el tiempo total en horas-hombre que demanda la producción de k unidades adicionales a partir de x_0 .

Ejemplo 2.5.21: Después de pintar 40 autos del mismo modelo en una semana, el departamento de pintura de una fábrica de automotores estima que la curva de aprendizaje es $f(x) = 10 \cdot x^{-0.25}$. Luego, el número total de horas-hombre para pintar 60 autos más por semana se calcula por $\int_{40}^{100} 10 \cdot x^{-0.25} dx \approx 209.56$. Se concluye que la fábrica debe disponer de, aproximadamente, 210 horas-hombre adicionales para realizar esta tarea.

Maximización de la utilidad con respecto al tiempo

Cierto tipo de actividades, después de un tiempo de explotación de un recurso natural de interés se tornan no rentables. Ejemplo de esto suelen ser las empresas que se dedican a la explotación de minas o perforación de pozos petroleros. La tasa de cambio en el ingreso, $R'(t)$ es alta al inicio de la operación, pero decrece a medida que transcurre el tiempo, mientras que la tasa de variación del costo, $C'(t)$, es pequeña al comienzo y aumenta con el paso del tiempo por factores como mantenimiento de las maquinarias, costo de extracción más altos, entre otros.

En estas operaciones hay un momento a partir del cual la tasa instantánea del costo es mayor que la tasa ingreso, con lo cual la empresa comienza a perder dinero. Es de interés determinar en qué momento sucede esto, y así poder conocer el plazo máximo en que la operación es rentable.

Sean $R'(t)$, $C'(t)$ y $U'(t)$ las tasas de variación del ingreso, costo y utilidad, respectivamente. Sean $R(t)$, $C(t)$ y $U(t)$, el ingreso total, el costo total y la utilidad total desde el inicio de la operación hasta el instante t . Tenemos que:

$$U(t) = R(t) - C(t) \quad \text{y} \quad U'(t) = R'(t) - C'(t).$$

La utilidad máxima ocurre cuando $U'(t) = 0$, es decir cuando $R'(t) = C'(t)$. Entonces, la operación debería realizarse hasta el instante t_0 en el cual se tiene $R'(t_0) = C'(t_0)$.

La variación en las utilidades desde el inicio hasta el instante t_0 está dada por

$$\Delta U = \int_0^{t_0} U'(t) dt = \int_0^{t_0} (R'(t) - C'(t)) dt.$$

Puede interpretarse como el área encerrada por las curvas de las funciones $R'(t)$ y $C'(t)$ entre $t = 0$ y $t = t_0$. Si se desea obtener la utilidad máxima real, se debe restar de ΔU el costo fijo.

Ejemplo 2.5.22: Las tasas de costo y de ingreso de una operación de perforación petrolera están dadas por $C'(t) = 40 + 2t^{1/2}$ y $R'(t) = 80 - 3t^{1/2}$, en donde t se mide en años y R y C se miden en miles de millones de dólares. Determine en cuánto tiempo se obtendrá la utilidad máxima y cuál es su valor, si los costos fijos para iniciar la operación son de 1 200 millones de dólares.

Solución. Buscamos el valor de t para el cual las dos tasas son iguales. Es decir,

$$\begin{aligned} C'(t) &= R'(t) \\ 40 + 2t^{1/2} &= 80 - 3t^{1/2} \\ 5t^{1/2} &= 40 \\ t^{1/2} &= 8 \\ t &= 64. \end{aligned}$$

Por tanto, la operación deberá mantenerse por $t_0 = 64$ años, y la utilidad máxima será:

$$\int_0^{64} U'(t) dt - 1.2 = \int_0^{64} (40 - 5t^{1/2}) dt - 1.2 = 853.3 - 1.2 \approx 852.1.$$

En 64 años, la utilidad real obtenida es de 852 100 millones de dólares.

Superávit de consumidores y Superávit de productores

El comportamiento del consumidor se representa mediante la función de demanda, que muestra la cantidad de un bien adquirida, q , a distintos precios, p . Por su parte, la curva de oferta describe el comportamiento de los productores u oferentes, indicando la cantidad q del bien que están dispuestos a vender o suministrar a diferentes precios p .

El mercado alcanza un punto de equilibrio cuando la cantidad demandada coincide con la cantidad ofrecida. A este precio se lo denomina precio de equilibrio, p_e , y la cantidad correspondiente, cantidad de equilibrio, q_e .

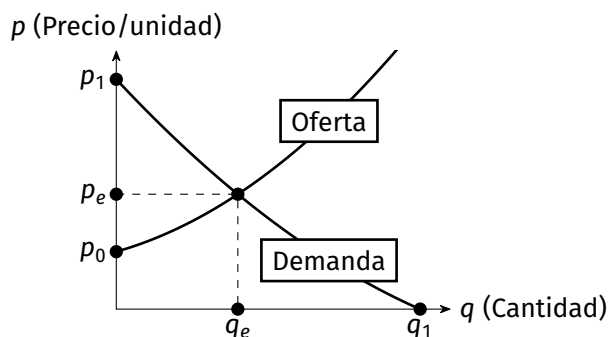


Figura 34. Curvas de oferta y demanda.

De este modo, el punto de equilibrio del sistema oferta–demanda queda expresado como $E = (q_e, p_e)$, el cual corresponde a la intersección de ambas curvas.

La Figura 34 ilustra gráficamente esta situación.

En equilibrio, hay cierto número de consumidores que han comprado el producto a un precio menor del que estaban dispuestos a pagar por él, de modo que están beneficiándose de este menor precio p_e . En referencia a esta situación podemos definir lo siguiente.

Definición 2.5.4 (Superávit de consumidores): El superávit del consumidor mide la ganancia total de los consumidores por la compra. Es la cantidad total que ganan los consumidores al comprar el producto al precio de equilibrio, en lugar de haberlo comprado a un precio que hubieran estado dispuestos a pagar (superior al de equilibrio).

A continuación analizaremos cómo se calcula esta medida. Para ello consideremos la función demanda $p = f(q)$. De acuerdo con su definición, hay consumidores que estarían dispuestos a pagar más que p_e . Por ejemplo, al precio p_1 por unidad los consumidores comprarían q_1 unidades y su gasto es $p_1 \cdot q_1$. Para determinar el gasto total de estos consumidores suponiendo que todos los consumidores compran el artículo al precio máximo que están dispuestos a pagar subdividimos el intervalo entre 0 y q_e en intervalos de longitud Δq . La Figura 35(a) muestra que una cantidad Δq de productos se venden a un precio cercano a p y $p \cdot \Delta q$ puede considerarse como la cantidad total de dinero que los consumidores gastarían comprando Δq unidades de producto si el precio por unidad fuese p . Por consiguiente, si todos los consumidores que estaban dispuestos a pagar un precio mayor que p_e pagaron lo que estaban dispuestos a pagar, entonces, a medida que $\Delta q \rightarrow 0$ tenemos

$$\text{Gasto del consumidor} = \int_0^{q_e} f(q) dq,$$

cuya interpretación geométrica puede verse en la Figura 35(b).

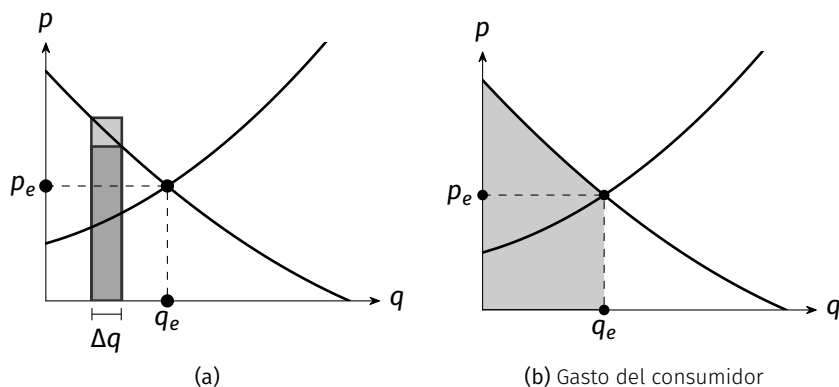


Figura 35

Pero, como el precio en realidad es p_e esos consumidores sólo gastan $p_e \cdot q_e$, lo que representa el gasto real del consumidor, si todos los consumidores pagaran el precio de equilibrio. De aquí que, el superávit del consumidor es la diferencia entre el gasto total del consumidor, si todos los consumidores pagaran el precio máximo que están dispuestos a pagar, y el gasto real del consumidor, si todos los consumidores pagaran el precio de equilibrio. Por lo que:

$$\text{Superávit consumidor} = \int_0^{q_e} f(q) dq - p_e \cdot q_e$$

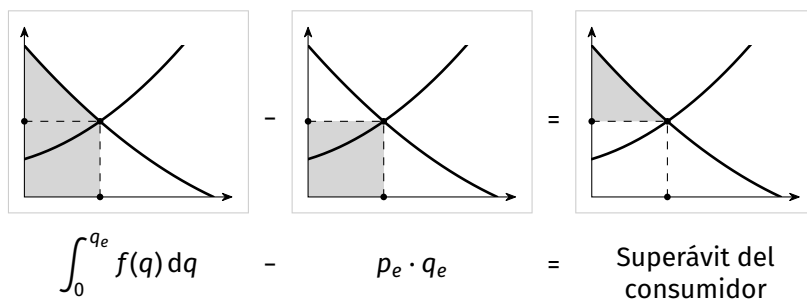


Figura 36

Del mismo modo que ocurre con los consumidores, hay algunos proveedores que hubieran estado dispuestos a producir/ofrecer el producto a un precio menor al de equilibrio. En relación con los oferentes, podemos definir:

Definición 2.5.5 (Superávit de productores): El superávit del productor mide la ganancia total de los proveedores por la venta, al precio de equilibrio. Es la cantidad total que ganan los productores por vender al precio de equilibrio en lugar del precio que hubieran estado dispuestos a aceptar (menor al de equilibrio).

Consideremos la función de oferta $p = g(q)$. Si los productores venden todos los productos al precio de equilibrio p_e , su ganancia está dada por el producto $p_e \cdot q_e$. Sin embargo, hay productores que venden su producto a un precio menor al de equilibrio; por consiguiente, si los productores están dispuestos a vender su producto a un precio menor que p_e , entonces, la ganancia real del sector está dada por:

$$\text{Ganancia real del productor} = \int_0^{q_e} g(q) dq.$$

El superávit del productor ahora es la diferencia entre la ganancia total, si todos los productores vendieran al precio de equilibrio, y la ganancia real del productor, si todos los productores vendieran el producto a un precio por debajo del de equilibrio. Por tanto:

$$\text{Superávit del productor} = p_e \cdot q_e - \int_0^{q_e} g(q) dq$$

Es decir, el superávit del productor está representado por el área limitada por la recta horizontal $p = p_e$ y la curva de la función oferta, para $0 \leq q \leq q_e$. Visualizamos lo anterior en la Figura 37.

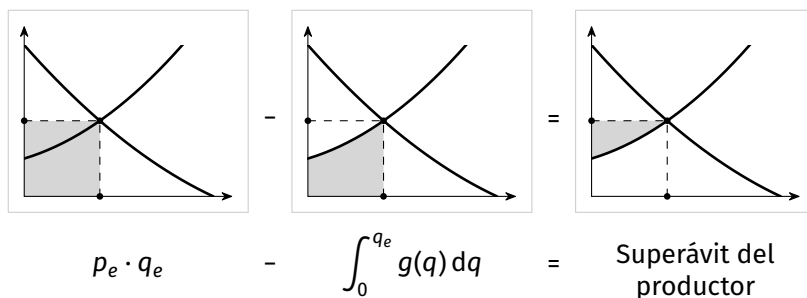


Figura 37

Observación 42: Frecuentemente se utilizan las fórmulas

$$SC = \int_0^{q_e} (f(q) - p_e) dq \quad \text{y} \quad SP = \int_0^{q_e} (p_e - g(q)) dq$$

EJERCICIOS 2.5.6

1. Calcule el coeficiente de desigualdad si la curva de Lorenz es la de ecuación $y = 0.94x^2 + 0.06x$.
2. Calcule el coeficiente de la desigualdad (en función de a) para la curva de Lorenz $y = ax^2 + (1 - a)x$, en donde a es una constante positiva. Asigne valores a la constante a y estudie la distribución de la riqueza para los distintos valores de a .
3. Realice una búsqueda en soportes electrónicos del coeficiente de Gini, para Argentina, en distintos años, y para países limítrofes. Compare y saque conclusiones.
4. Suponga que se ha establecido el equilibrio del mercado. Determine y grafique el superávit del consumidor y del productor si las funciones de demanda y de oferta del producto son:
 - a. $p = 370/(q + 6)$; $p = 3.8 + 0.2q$.
 - b. $p = 1200 - 1.5q^2$; $p = 200 + q^2$.
5. La elasticidad de la demanda para cierto bien es $\eta = (q - 400)/q$, para $0 < q < 400$.
 - a. Determine la función demanda $p = f(q)$ sabiendo que el precio es 5 dólares cuando se vende 380 unidades del producto.
 - b. Halle el superávit del consumidor y del productor si la función oferta es $p = 4/25q + 18$.
6. Si el ingreso marginal de un fabricante es $R'(q) = 100 - (3/2)\sqrt{4q}$, expresado en dólares/unidad, determine:
 - a. La función de demanda $p = f(q)$.
 - b. El precio al cual se venden 400 unidades de su producto.
 - c. El superávit del consumidor si el precio hallado en **b.** es el precio de equilibrio.
 - d. El incremento del ingreso cuando la producción aumenta 200 unidades a partir de 600.
7. Las tasas de ingreso y costo de cierta operación son $R'(t) = 40 - 8t^{1/3}$ y $C'(t) = 8 + 8t^{1/3}$ respectivamente, donde t se mide en años y R y C se miden en millones de dólares. Determine por cuánto tiempo deberá continuar la operación con la finalidad de obtener la utilidad máxima. ¿Cuál es el monto de la utilidad máxima suponiendo que los costos fijos de operación inicial son de 6 millones de dólares?

8. Las tasas de ingreso y costos de una actividad son: $R'(t) = a - bt^{1/2}$ y $C'(t) = c - dt^{1/2}$. Asigne valores a los parámetros a , b , c y d de modo que el instante t_0 de obtención de máxima utilidad sea positivo y entero. Luego, determine la utilidad máxima para el t_0 obtenido. Explícite al menos tres posibilidades de valores para los parámetros.
9. El ensamblado de las primeras 100 calculadoras demanda 80 horas-hombre en total. El tiempo necesario para ensamblar cada lote de 100 calculadoras se modela mediante la curva de aprendizaje

$$f(x) = 80x^{-0.35},$$

donde x es el número de lote de 100 calculadoras ($x = 1$ para el primer lote de 100, $x = 2$ para el segundo, etc.) y $f(x)$ se mide en horas-hombre por lote. Estimando el proceso de forma continua, ¿cuántas horas-hombre se invertirán en ensamblar las primeras 1500 calculadoras?

INTEGRAL IMPROPIA

Hemos visto que, si f es una función continua y no negativa, la integral $\int_a^b f(x) dx$ es el área de la región ubicada entre la curva $y = f(x)$ y el eje x , desde $x = a$ hasta $x = b$. Podemos extender esta idea del cálculo de áreas a regiones abiertas, como se puede visualizar en la Figura 38.

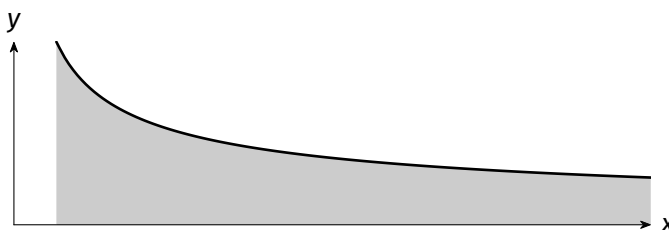


Figura 38

En lenguaje simbólico,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

expresa la idea donde el extremo superior del intervalo de integración tiende a ∞ . De la misma manera, podemos plantear

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

donde el extremo inferior del intervalo de integración es $-\infty$.

Estas integrales se denominan *impropias* y para calcularlas recuperamos la idea de límite.

Definición 2.6.1 (Integral impropia): Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Sea $y = f(x)$ una función continua en $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

En el caso de existencia del límite, la integral impropia es convergente y, de lo contrario, es divergente.

Además podemos definir la integral impropia donde ambos extremos son infinitos.

Sea $y = f(x)$ una función continua en $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx,$$

donde c es un número real arbitrario, aunque suele ser conveniente elegir el cero. Si convergen ambas integrales impropias del segundo miembro, entonces converge la integral impropia del primer miembro y es igual a la suma de las dos integrales. Cuando una de las dos integrales del segundo miembro es divergente, entonces, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ es divergente.

Las integrales impropias convergentes en las cuales el integrando es una función continua y no negativa para $x \leq a$ ó $x \geq b$ ó $-\infty < x < \infty$ representan el área de la región abierta limitada superiormente por la gráfica de f e inferiormente por el eje x .

En este texto sólo abordaremos integrales impropias con límites de integración infinitos de funciones continuas en el intervalo de integración: las denominadas integrales de primera especie.

Ejemplo 2.6.1: Determine si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

es convergente o divergente. Interprete geométricamente.

Solución. Calculamos:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b \\ &= \infty.\end{aligned}$$

La integral impropia $\int_1^{\infty} 1/x dx$ es divergente, por lo que la región determinada por la gráfica de $f(x) = 1/x$ y el eje x , para $x \geq 1$, tiene área infinita.

Ejemplo 2.6.2: Determine si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

es convergente o divergente. Interprete geométicamente.

Solución. Calculamos la integral

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{b} + 1 \right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

La integral impropia $\int_1^{\infty} 1/x^2 dx$ es convergente. Esta integral impropia se interpreta como el área de la región no acotada delimitada por la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ y el eje x , para $x \geq 1$, la cual es igual a 1 unidad cuadrada.

Ejemplo 2.6.3: Determine si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

es convergente o divergente. Interprete geométicamente.

Solución. Realizamos el cálculo primero de la integral impropia:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt{x} \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (2 \cdot \sqrt{b} - 2) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

La integral impropia $\int_1^{\infty} 1/\sqrt{x} dx$ es divergente. Luego, la región no acotada, limitada entre la gráfica de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ y el eje x , para $x \geq 1$, tiene área infinita.

Ejemplo 2.6.4: Determine si la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$$

es convergente o divergente. Interprete geométricamente.

Solución. Primero dividimos la integral como sigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\infty} e^x dx.$$

Entonces, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) \\ &= 1,\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^x dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^x dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^x \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (e^b - e^0) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

La integral impropia $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ es convergente, mientras $\int_0^{\infty} e^x dx$ es divergente. En consecuencia, $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$ es divergente. Se interpreta que la región entre $f(x) = e^x$ y el eje x , sobre todo $\mathbb{R}$, es no acotada de área infinita.

EJERCICIOS 2.6

1. Estudie la convergencia de las integrales.

a. $\int_1^{\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx.$

b. $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx.$

c. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx.$

d. $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2} dx.$

e. $\int_1^{\infty} (1-x) \cdot e^{-x} dx.$

f. $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x/2} dx.$

2. Calcule el área comprendida entre la curva $y = e^{-x}$ y el eje x , para $x \geq 0$. Represente gráficamente.
3. Estudie para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es convergente la integral de la función $f(x) = \frac{1}{x^a}$ en el intervalo $[1, \infty)$ con $a \geq 0$.
4. La mutual de una ciudad de 500 000 habitantes desea constituir un fondo para ayudar a los jóvenes a estudiar en la universidad por medio de becas. Para ello se propone realizar aportes continuos capitalizables a una tasa de variación que responde al modelo $f(t) = 20te^{-t^2}$ en millones de dólares/año. ¿Cuál es la máxima cantidad que podrá reunir este fondo desde el momento de su creación?

3 Sucesiones y series

Las sucesiones y series son herramientas matemáticas fundamentales con aplicaciones amplias en las ciencias económicas. Pueden modelar el comportamiento de variables económicas a lo largo del tiempo. En economía, las sucesiones son útiles para modelar fenómenos como la evolución de precios, el crecimiento de una población o la rentabilidad de una inversión pues proporcionan un marco para observar y predecir tendencias a futuro.

Las series son esenciales para estudiar procesos de acumulación discreta. Por ejemplo, en finanzas, las series geométricas permiten calcular el valor acumulado de intereses compuestos y son fundamentales en el análisis de créditos y amortización de préstamos. En econometría, las series ayudan a estimar modelos que proyectan el comportamiento de variables macroeconómicas y facilitan la toma de decisiones estratégicas en políticas de inversión y gasto.

Desde un punto de vista histórico, las sucesiones y las series surgen de la necesidad de comprender procesos que involucran cambio, repetición y acumulación. Ya en la Antigüedad, problemas filosóficos como las paradojas de Zenón —en particular la paradoja de la flecha y la de Aquiles y la tortuga— planteaban interrogantes sobre el movimiento y la divisibilidad del espacio y del tiempo, que pueden interpretarse como el estudio de una sucesión infinita de instantes o distancias. Más adelante, en el desarrollo de la matemática griega y, siglos después, en el surgimiento del cálculo infinitesimal, estas ideas se formalizaron mediante sucesiones y series, permitiendo describir rigurosamente procesos continuos a partir de aproximaciones discretas.

Comprender estos conceptos proporciona una base para tomar decisiones informadas en economía, finanzas y administración, permitiendo a los profesionales modelar, analizar y prever el comportamiento de los mercados y los recursos en el tiempo.

SUCESIONES

En esta sección formalizamos el concepto de sucesión y estudiamos sus propiedades fundamentales: monotonía, acotamiento y convergencia. Finalizamos con dos familias de especial relevancia en economía y finanzas: las sucesiones aritméticas y las geométricas.

Introducción

En matemáticas, la palabra *sucesión* se usa en un sentido muy parecido al del lenguaje usual. Se dice que una colección de objetos o eventos *está en sucesión* cuando la colección está *ordenada* de manera que tiene un primer elemento, un segundo elemento, y así sucesivamente. Este orden lo logramos listando los elementos de la sucesión por medio de los números naturales.

Definición 3.1.1 (Sucesión): Una *sucesión* es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Más formalmente, f es una sucesión si $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1/2)^x$ cuya gráfica está representada en la Figura 1(a).

Al restringir su dominio al conjunto de los números naturales, se tiene que la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ luce como en la Figura 1(b).

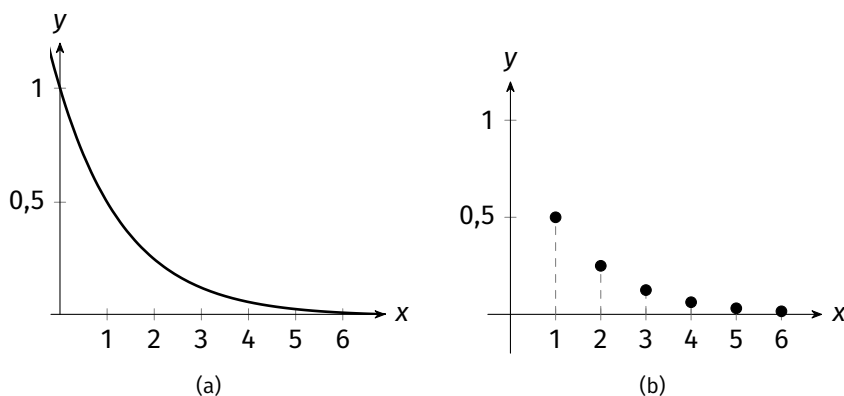


Figura 1

Esta función es una sucesión, y las imágenes obtenidas

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{4}, \quad f(3) = \frac{1}{8}, \quad f(4) = \frac{1}{16}, \quad f(5) = \frac{1}{32}, \quad f(6) = \frac{1}{64}, \quad \dots$$

son los elementos de dicha sucesión.

La notación empleada para indicar una sucesión es a través de un nombre y de un subíndice. Por lo general, dada la función $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde un elemento de la sucesión, $a(n)$, el cual lo escribiremos de forma más compacta con el subíndice correspondiente a_n .

Los elementos del dominio indican el orden en que se suceden los valores de la variable dependiente. Es decir, al número 1 le corresponde el valor a_1 , al número 2, el valor a_2 , y así sucesivamente, al número natural n le corresponde el valor a_n . De este modo se puede denotar la sucesión de alguna de las siguientes maneras:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\}_{n \geq 1} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\}.$$

Por lo tanto, una sucesión numérica es una secuencia de números ordenados de una forma predeterminada. Los números a_1, a_2, a_3 , etc. son los *términos* de la sucesión y a_n , cualquiera sea $n \geq 1$, indica el *término general*.

Para el ejemplo de sucesión dado arriba, tenemos

$$\{a_n\}_{n \geq 1} = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}_{n \geq 1} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \left(\frac{1}{2} \right)^n, \dots \right\}.$$

Observación 43: En ocasiones, es conveniente empezar una sucesión en $n = 0$, es decir, extender el dominio al conjunto de los enteros no negativos, que se denota como $\mathbb{N}_0$. De este modo, los términos de la sucesión serán: a_0, a_1, a_2, a_3 , etc., donde el primer término ahora será a_0 , el segundo término será a_1 , y así sucesivamente. En estos casos, escribiremos la sucesión de la forma $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ o bien, $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

Ejemplo 3.1.1: Determine los primeros elementos de la sucesión

$$\{a_n\}_{n \geq 1} = \{3 + (-1)^n\}_{n \geq 1}.$$

Solución. Los elementos

$$\begin{array}{ccccccc} 3 + (-1)^1, & 3 + (-1)^2, & 3 + (-1)^3, & 3 + (-1)^4, & \dots \\ 2, & 4, & 2, & 4, & \dots \end{array}$$

son los primeros de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

Ejemplo 3.1.2: Determine los primeros elementos de la sucesión

$$\{b_n\}_{n \geq 1} = \left\{ \frac{n}{1 - 2n} \right\}_{n \geq 1}.$$

Solución. Los elementos

$$\frac{1}{1-2 \cdot 1}, \frac{2}{1-2 \cdot 2}, \frac{3}{1-2 \cdot 3}, \frac{4}{1-2 \cdot 4}, \dots$$

$$-1, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}, \dots$$

son los primeros de la sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1}$.

Ejemplo 3.1.3: Determine los primeros elementos de la sucesión

$$\{c_n\}_{n \geq 1} = \left\{ \frac{n^2}{2^n - 1} \right\}_{n \geq 1}.$$

Solución. Los elementos

$$\frac{1^2}{2^1 - 1}, \frac{2^2}{2^2 - 1}, \frac{3^2}{2^3 - 1}, \frac{4^2}{2^4 - 1}, \dots$$

$$1, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{16}{15}, \dots$$

son los primeros de la sucesión $\{c_n\}_{n \geq 1}$.

Sucesiones monótonas

Un aspecto fundamental al analizar el comportamiento de una sucesión es determinar si sus términos siguen una tendencia constante de crecimiento o decrecimiento a medida que avanza el índice n .

Definición 3.1.2 (Sucesión monótona): Una sucesión se dice *monótona* cuando es creciente o decreciente. Es decir, una sucesión es

- *monótona creciente* si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n en el dominio, o
- *monótona decreciente* si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n en el dominio.

Si la desigualdad es estricta diremos que es *estrictamente creciente* o *estrictamente decreciente*.

Ejemplo 3.1.4: La sucesión $\{e_n\}_{n \geq 0} = \{3n/(n+1)\}_{n \geq 0}$ es monótona creciente. La desigualdad que queremos probar es $e_n \leq e_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, es decir

$$\frac{3n}{n+1} \leq \frac{3(n+1)}{(n+1)+1} = \frac{3n+3}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Puesto que todos los factores son positivos, obtenemos la desigualdad equivalente

$$3n(n+2) \leq (3n+3)(n+1).$$

Desarrollando cada miembro tenemos que

$$3n^2 + 6n \leq 3n^2 + 6n + 3,$$

y cancelando los términos que se repiten, llegamos a $0 \leq 3$, lo cual es una desigualdad verdadera. Podemos concluir entonces que la sucesión es monótona creciente.

Ejemplo 3.1.5: La sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{n/(2n+1)\}_{n \geq 1}$ es estrictamente creciente. Podemos proceder como en el ejemplo anterior, o probarlo de la siguiente forma: restamos dos términos consecutivos y mostramos que la diferencia es positiva cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0, \end{aligned}$$

lo cual es cierto para todo número natural n , ya que $2n+3 > 0$ y $2n+1 > 0$ para $n \geq 1$.

Ejemplo 3.1.6: La sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{2/(n+1)\}_{n \geq 1}$ es monótona decreciente porque

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)+1} - \frac{2}{n+1} = \frac{2(n+1) - 2(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-2}{(n+2)(n+1)} \leq 0$$

para cualquier número natural n .

Otra manera de comprobar si una sucesión a_n es monótona decreciente (creciente) consiste en argumentar que la derivada de una función derivable asociada a la sucesión es negativa (positiva) en el intervalo $[1, \infty)$. Esta función g deberá cumplir que $g(n) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión comienza en $n = 0$, tendrá que verificarse lo mismo pero en el intervalo $[0, \infty)$.

En el ejemplo anterior, la función $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2/(x+1)$ es la que denominamos función asociada, puesto que trivialmente verifica $f(n) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La derivada de dicha función es

$$f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2},$$

la cual es negativa en todo su dominio. Entonces tenemos que la función es decreciente, lo que implica que la sucesión también es decreciente (pues los términos de la sucesión son los valores de f cuando su dominio se restringe a $\mathbb{N}$).

Este criterio es una *condición suficiente*. Pueden existir sucesiones monótonas tales que las funciones derivables asociadas no cumplan tener esa misma monotonía sobre todo el intervalo $[1, \infty)$ (o sobre todo el intervalo $[0, \infty)$, según corresponda).

Ejemplo 3.1.7: Consideremos la sucesión $\{d_n\}_{n \geq 1} = \{(n-5)^2\}_{n \geq 1}$ y analicemos su monotonía:

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= ((n+1)-5)^2 - (n-5)^2 \\ &= n^2 - 8n + 16 - (n^2 - 10n + 25) \\ &= -9 + 2n. \end{aligned}$$

En este caso $d_{n+1} - d_n$ no tiene el mismo signo para todo n , pues si $n = 1$ entonces $d_2 - d_1 = -7 < 0$, pero si $n = 10$ entonces $d_{11} - d_{10} = 11 > 0$. Luego, la sucesión d_n no es monótona.

Aquí también podríamos haber utilizado el criterio de la derivada. La función asociada a la sucesión $\{d_n\}_{n \geq 1}$ es $f(x) = (x-5)^2$, para $x \geq 1$, cuya derivada es $f'(x) = 2(x-5) = 2x - 10$. Vemos que

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x > 5 \quad \text{y} \quad f'(x) < 0 \quad \text{para } x < 5.$$

Luego, la función asociada no es monótona decreciente en todo el intervalo $[1, \infty)$, y la sucesión tampoco lo será.

Ejemplo 3.1.8: La función $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1/2)^x$ está asociada con la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{(1/2)^n\}_{n \geq 1}$. Su derivada es $f'(x) = \ln(1/2)(1/2)^x$, que es negativa en todo su dominio. Luego, tenemos que f es decreciente, y esto conduce a que la sucesión correspondiente es también monótona decreciente.

Ejemplo 3.1.9: Vimos anteriormente que la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{3 + (-1)^n\}_{n \geq 1}$ alternaba entre los valores 2 y 4. Esta sucesión no será monótona porque, por ejemplo, $a_1 = 2 < 4 = a_2$ pero $a_2 = 4 > 2 = a_3$. Es decir, no vale que $a_n \leq a_{n+1}$ ni que $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos otros ejemplos en forma gráfica.

Ejemplo 3.1.10: La sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ no es monótona, como vemos en el gráfico de la Figura 2, dado que $a_1 = -2 < 4 = a_2$ pero $a_2 = 4 \neq -8 = a_3$.

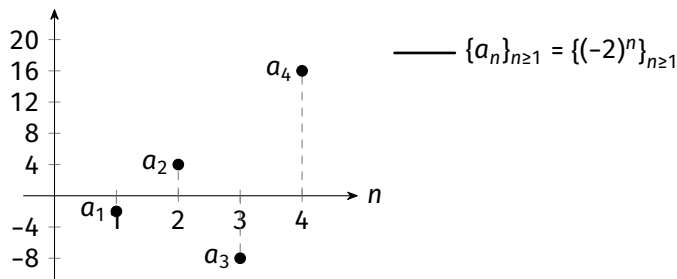


Figura 2

Ejemplo 3.1.11: La sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1}$ sí es monótona. Si bien esto se observa en el gráfico de la Figura 3, siempre que se disponga del término general de la sucesión, debe hacerse la comprobación analítica. En este caso, tenemos que la expresión de la sucesión verifica que $b_n = f(n)$, $n \geq 1$, siendo la función $f(x) = 2x/(1+x)$. Si derivamos f tenemos que $f'(x) = 2/(1+x)^2 > 0$ para todo $x \geq 1$. Luego, la sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1} = \{2n/(1+n)\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente.

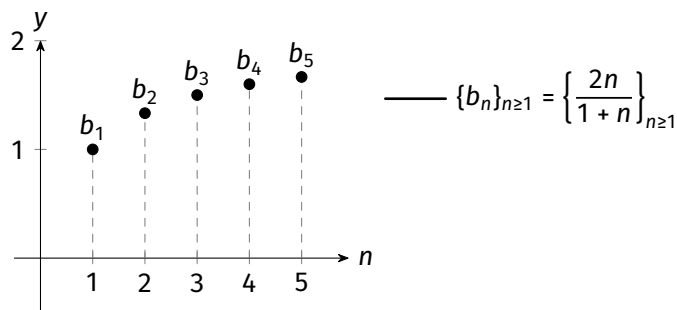


Figura 3

Ejemplo 3.1.12: Para el caso de $\{c_n\}_{n \geq 1}$, vemos en la gráfica de la Figura 4 que la sucesión no es monótona ya que crece inicialmente y decrece después. Para justificar que no es monótona es suficiente exhibir términos donde esto se evidencie: $1 = c_1 < c_2 = 4/3$, pero $9/7 = c_3 > c_4 = 16/15$, con lo cual podemos afirmar que no es monótona.

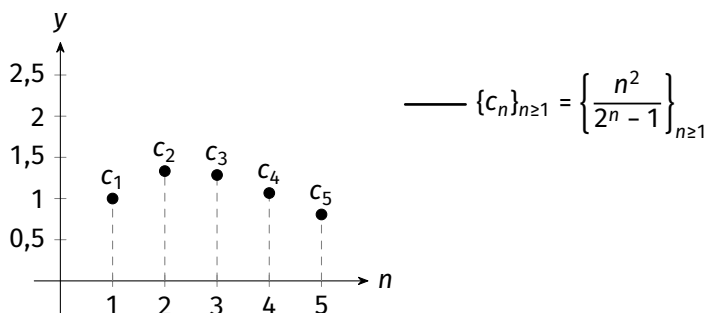


Figura 4

Sucesiones acotadas

Otra propiedad esencial para el estudio de la convergencia es determinar si los términos de la sucesión pueden crecer o decrecer indefinidamente, o si, por el contrario, su magnitud se mantiene restringida dentro de un rango finito.

Definición 3.1.3 (Sucesiones acotadas): Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es *acotada inferiormente* si todos sus términos son mayores o iguales que un cierto número m , que llamaremos una *cota inferior* de la sucesión, es decir,

$$a_n \geq m, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es *acotada superiormente* si todos sus términos son menores o iguales que un cierto número M , que llamaremos una *cota superior* de la sucesión, es decir,

$$a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si una sucesión es acotada superior e inferiormente, se dice que es una sucesión *acotada*. En caso contrario, diremos que la sucesión es *no acotada*.

Observación 44: Las cotas inferiores y superiores no son únicas. Cualquier número más pequeño que una cota inferior m también es cota inferior, y cualquier número mayor que una cota superior M es otra cota superior. Es decir, cuando busquemos cotas inferiores y superiores no necesitamos ser tan precisos. Lo que importa para decidir la acotación o no de una sucesión es que podamos encontrar *alguna* cota inferior y *alguna* cota superior.

Ejemplo 3.1.13: Demuestre que la sucesión $\{2n/(n+3)\}_{n \geq 1}$ es acotada y monótona creciente.

Solución. Existen distintos procedimientos para analizar la monotonía y acotación de una sucesión. En este primer caso, comenzamos por analizar si la sucesión es monótona a partir del signo de la derivada primera de la función asociada f , tal que $f(x) = 2x/(x+3)$, $x \geq 1$. Como $f'(x) = 6/(x+3)^2$ es positiva para $x \geq 1$, entonces f es creciente y, en consecuencia, la sucesión es monótona creciente. Dado que es monótona creciente, está acotada inferiormente por el primer término, $1/2$. Para constatar si existe cota superior calculamos el $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n/(n+3)$. Este límite es 2 y es cota superior. En consecuencia, la sucesión está acotada.

Ejemplo 3.1.14: Demuestre que la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{(4 - n^2)/(2 + n)\}_{n \geq 1}$ es acotada superiormente y monótona decreciente.

Solución. Observamos que $(4 - n^2)/(2 + n) = 2 - n$. Para analizar la monotonía planteamos la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera, obteniendo $a_{n+1} - a_n = 2 - (n+1) - (2 - n) = -1$. Al ser negativa esta diferencia, $a_{n+1} \leq a_n$, por lo que concluimos que la sucesión es monótona decreciente y, por tanto, está acotada superiormente por el primer término, 1.

Ejemplo 3.1.15: Demuestre que la sucesión $\{n^3/(n^2 + 1)\}_{n \geq 1}$ es acotada inferiormente y monótona creciente.

Solución. Notamos que todos los términos de la sucesión son positivos, por lo que 0 es una cota inferior. Seguidamente, estudiamos la monotonía a través del signo de la derivada primera de la función asociada $f(x) = x^3/(x^2 + 1)$, para $x \geq 1$. La derivada $f'(x) = x^2 \cdot (x^2 + 3)/(x^2 + 1)^2$ es positiva en el dominio de f . Luego, f es creciente y, por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Ejemplo 3.1.16: Demuestre que la sucesión $\{(-1)^n/2\}_{n \geq 1}$ es acotada y no monótona.

Solución. Notemos que $(-1)^n = 1$ si n es par y $(-1)^n = -1$ si n es impar, por lo que los términos de la sucesión serán $1/2$ y $-1/2$, respectivamente. Esta sucesión está acotada superiormente por cualquier real mayor o igual que $1/2$ e inferiormente por cualquier real menor o igual que $-1/2$, por lo que está acotada. Además, no es monótona puesto que crece y decrece.

Ejemplo 3.1.17: Demuestre que la sucesión $\{(-1)^n \cdot n\}_{n \geq 1}$ no es ni acotada ni monótona.

Solución. En este caso, cuando n es par, los términos de la sucesión crecen indefinidamente ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Cuando n es impar, decrecen sin límite pues $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$. Así, los términos de la sucesión aumentan y

disminuyen alternadamente a medida que n crece; por tanto, la sucesión no es acotada ni monótona.

Ejemplo 3.1.18: Demuestre que la sucesión $\{\ln(n)\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente y acotada inferiormente por 0, pero no es acotada superiormente.

Solución. Analizamos la monotonía a partir del signo de la derivada primera de la función asociada f , tal que $f(x) = \ln(x)$, $x \geq 1$. Como $f'(x) = 1/x$ es positiva para $x \geq 1$, f es creciente y, por ende, la sucesión es monótona creciente. Una cota inferior será el primer término, $\ln(1) = 0$. Para constatar si existe cota superior calculamos el $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty$. En consecuencia, la sucesión no está acotada superiormente.

Ejemplo 3.1.19: La sucesión $\{e^n\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente, acotada inferiormente por el número e pero no acotada superiormente, mientras que la sucesión $\{e^{-n}\}_{n \geq 1}$ es monótona decreciente, acotada inferiormente por 0 y superiormente por $e^{-1} = 1/e$.

Límite de una sucesión y convergencia

Como una sucesión es una función con dominio en $\mathbb{N}$, sólo podemos analizar la tendencia de sus valores a medida que n se hace cada vez más grande en ese conjunto numérico.

Definición 3.1.4 (Sucesión convergente): Si los términos de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ se acercan a un número L cuando n se acerca a ∞ , es decir, si el término general de la sucesión posee límite finito L , se dice que la sucesión es *convergente*. Esto es,

$$\{a_n\}_{n \geq 1} \text{ es convergente si y solo si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Si el límite no existe, se dice que la sucesión es *divergente*.

Ejemplo 3.1.20: ¿Es convergente la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{(1/2)^n\}_{n \geq 1}$?

Solución. Podemos visualizar su comportamiento graficando sus primeros términos en los ejes cartesianos como se ve en la Figura 5, o en la recta real como se ve en la Figura 6.

Vemos en ambos gráficos que la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ decrece a 0. Luego, podemos decir con base en los mismos que la sucesión es convergente con $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2)^n = 0$.

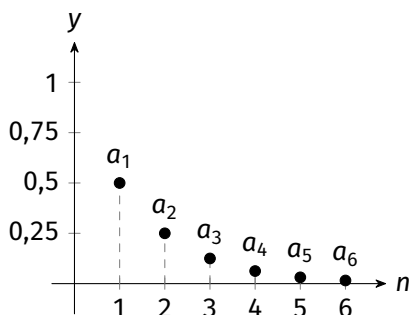


Figura 5

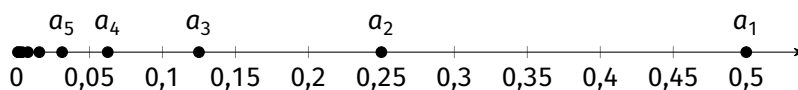


Figura 6

El siguiente teorema permite aplicar las propiedades de límite de funciones de variables reales a límites de sucesiones.

Teorema 3.1.1: Sea f una función definida sobre $x \in [1, \infty)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si

1. $f(n) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$,

entonces la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Observación 45: Si la sucesión $\{a_n\}$ comienza en $n = n_0$, bastará con que la función f esté definida para todo $x \geq n_0$ y coincida con la sucesión; es decir, que se verifique $f(n) = a_n$ para todo $n \geq n_0$. Por ejemplo, si queremos estudiar la convergencia (o también la monotonía) de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 6} = \left\{ \frac{n^2}{\sqrt{n-5}} \right\}_{n \geq 6}$, vemos que su función asociada es $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-5}}$. Esta función no está definida para todo $x \geq 1$ pero nos basta con que lo esté para todo $x \geq 6$, y esto sí lo cumple.

El recíproco del Teorema 3.1.1 es falso, esto es, la sucesión puede tener límite y la función de variable real no. Más aún, como la función debe coincidir con la sucesión sólo sobre números naturales, pueden definirse muchas funciones diferentes asociadas a la sucesión, algunas de las cuales podrán tener límite y otras no. No veremos en este texto funciones de este tipo.

También puede ocurrir que la sucesión no tenga una función real asociada, es decir, que cierta función u operación tenga sentido para números natu-

rales pero no para números reales en general. Tal es el caso de la sucesión $\{(-1/2)^n\}_{n \geq 1}$ que es convergente a 0 pero no proviene de una función real ya que las potencias a^x , cuando $a < 0$, no están bien definidas sobre los números reales (por ejemplo, pensar si $x = 1/2, -3/4, \pi$). Veremos más adelante otros ejemplos de sucesiones que no poseen una función asociada conocida.

Ejemplo 3.1.21: Como la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{3 + (-1)^n\}_{n \geq 1}$ alterna entre los valores 2 y 4, no posee límite. Por lo tanto, la sucesión es divergente. Aquí no podemos aplicar el teorema anterior ya que no está bien definida la función $f(x) = (-1)^x$ para $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1.22: Para la sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1} = \{n/(1 - 2n)\}_{n \geq 1}$, consideramos $f(x) = x/(1 - 2x)$, para $x \geq 1$, de la cual sabemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1/2$. Del Teorema 3.1.1 tenemos entonces que también la sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1}$ converge a $-1/2$.

Ejemplo 3.1.23: Para la sucesión $\{c_n\}_{n \geq 1} = \{(n - 5)^2\}_{n \geq 1}$, podemos considerar la función $f(x) = (x - 5)^2$ definida sobre $[1, \infty)$. Sabemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, con lo cual no es posible aplicar el Teorema 3.1.1. Veremos luego un criterio que nos permitirá decir qué límite poseen este tipo de sucesiones.

Ejemplo 3.1.24: La sucesión $\{d_n\}_{n \geq 1} = \{3n/(n + 1)\}_{n \geq 1}$ tiene como función asociada a $f(x) = 3x/(x + 1)$, con $x \geq 1$. Esta función converge a 3 cuando $x \rightarrow \infty$, con lo cual $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 3$ por el Teorema 3.1.1.

Ejemplo 3.1.25: La sucesión $\{\ln(n)\}_{n \geq 1}$ tiene como función asociada a $f(x) = \ln(x)$ ($x \geq 1$) la cual verifica $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, y no podemos aplicar el Teorema 3.1.1.

Ejemplo 3.1.26: Para analizar la convergencia de $\{f_n\}_{n \geq 1} = \{(2n + 1)/e^n\}_{n \geq 1}$, podemos considerar la función asociada $f(x) = (2x + 1)/e^x$, y calcular su límite cuando $x \rightarrow \infty$. Como tanto el numerador como el denominador de la expresión crecen indefinidamente, no podemos hallar directamente el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$; estamos ante una indeterminación de tipo ∞/∞ . Podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para funciones, notando que $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = e^x$ son ambas funciones derivables en todo x con $h'(x) = e^x \neq 0$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

En consecuencia, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1)/e^n = 0$.

Ejemplo 3.1.27: Para calcular el límite de la sucesión $\{g_n\}_{n \geq 1}$ dada por

$$g_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

también debemos recurrir a la Regla de L'Hôpital para la función asociada

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}, \quad x > 0,$$

ya que tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Aquí, debemos chequear que $g(x) = e^{1/x} - 1$ y $h(x) = \ln(1 + 1/x)$ sean derivables, lo cual se cumple para todo $x > 0$ (esto basta ya que el límite se toma para $x \rightarrow \infty$), y que h tenga derivada no nula para estos x :

$$h'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x}{x+1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \neq 0$$

para todo $x > 0$. Entonces, estamos en condiciones de aplicar la regla:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Entonces resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 1$.

Al igual que ocurría con los límites de funciones, tenemos propiedades para los límites de sucesiones, las cuales son una consecuencia inmediata de las correspondientes propiedades para los límites de funciones y el Teorema 3.1.1.

Teorema 3.1.2 (Propiedades de límites de sucesiones): Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante cualquiera, entonces las sucesiones $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{ca_n\}$ y $\{a_n \cdot b_n\}$ son convergentes. Más aún, se verifican las siguientes propiedades:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, y, en particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$;

Si, además, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, la sucesión $\{a_n/b_n\}$ es convergente y en ese caso vale

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Por otro lado, si $\{a_n\}$ es una sucesión de términos no negativos y p es una constante positiva, también $\{(a_n)^p\}$ es convergente con

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^p.$$

Criterios de convergencia

Veremos algunos criterios que nos permitirán decidir si una sucesión es convergente o divergente. El primer criterio brinda una condición suficiente sobre convergencia.

Teorema 3.1.3 (Condición suficiente de convergencia): Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Es decir, si sabemos que una sucesión es monótona y acotada, podemos afirmar que es convergente. Pero si no es monótona o no es acotada, no podemos decir que es divergente usando este teorema. El Teorema 3.1.3 se puede utilizar para decidir si una sucesión es no monótona o no acotada, sabiendo de antemano que es divergente.

Por otro lado, el siguiente teorema da un criterio de divergencia:

Teorema 3.1.4: Toda sucesión convergente es acotada.

Esto indica que las sucesiones que no posean alguna de las dos cotas, no pueden ser convergentes.

Ejemplo 3.1.28: Vimos que la sucesión $\{(1/2)^n\}_{n \geq 1}$ era convergente, lo cual podríamos haber deducido del Teorema 3.1.3 ya que sabíamos que era monótona decreciente y acotada.

Ejemplo 3.1.29: Vimos que la sucesión $\{3 + (-1)^n\}_{n \geq 1}$ era divergente. Luego, por el Teorema 3.1.3, o bien no es monótona, o bien no es acotada. Como acotada sí es (acotada inferiormente por 2 y superiormente por 4), el Teorema 3.1.3 nos permite decir que la sucesión no es monótona.

Ejemplo 3.1.30: La sucesión $\{(-3)^n\}_{n \geq 0} = \{1, -3, 9, -27, 81, -243, 729, \dots\}$ es una sucesión no acotada (ni superior ni inferiormente). Luego, es divergente por el Teorema 3.1.4.

Ejemplo 3.1.31: La sucesión $\{5 - \sqrt{n}\}_{n \geq 0} = \{5, 4, 5 - \sqrt{2}, 5 - \sqrt{3}, 3, 5 - \sqrt{5}, \dots\}$ es divergente como indica el Teorema 3.1.4, puesto que es no acotada inferiormente.

Ejemplo 3.1.32: La sucesión $\{n^2/(n+1)\}_{n \geq 1}$ es no acotada superiormente, por lo que será divergente según el Teorema 3.1.4.

Ejemplo 3.1.33 (El número e): La sucesión $\{(1 + 1/n)^n\}_{n \geq 1} = \{2, 9/4, 64/27, \dots\}$ es monótona creciente ya que si miramos la función asociada $f(x) = (1 + 1/x)^x$, con $x \geq 1$, su derivada puede calcularse por diferenciación logarítmica y resulta

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right],$$

la cual es positiva¹ para todo $x \geq 1$. Además, la sucesión es acotada (inferiormente por 2 y superiormente por 3). Luego, por el Teorema 3.1.3, es convergente. Su límite es el número e , la base de la función exponencial y del logaritmo neperiano, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e \approx 2.718\,281\,828$.

Ejemplo 3.1.34: La sucesión $\{(-1/2)^n\}_{n \geq 1}$ es acotada (superiormente por $1/4$ e inferiormente por $-1/2$), pero no es monótona. Sin embargo, ya indicamos que era convergente. No podemos afirmarlo a partir del Teorema 3.1.3.

Si sabemos el tipo de monotonía y de acotación que presenta una sucesión, tenemos entonces un criterio para decidir si la misma es convergente o divergente.

Teorema 3.1.5: Dada la sucesión de números reales $\{a_n\}$:

1. Si es monótona creciente y acotada superiormente, es convergente.
2. Si es monótona creciente pero no acotada superiormente, es divergente.
3. Si es monótona decreciente y acotada inferiormente, es convergente.
4. Si es monótona decreciente y no acotada inferiormente, es divergente.

Ejemplo 3.1.35: La sucesión $\{3n/(2+n)\}_{n \geq 0}$ es monótona creciente porque $f(x) = 3x/(2+x)$ tiene derivada

$$f'(x) = 6/(2+x)^2 > 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Además, está acotada superiormente por 3 por lo que podemos afirmar, del Teorema 3.1.5 (inciso 1) que la sucesión es convergente.

¹No nos detendremos a probar que esa derivada es positiva en este momento. No es inmediato que la expresión entre corchetes, $g(x) = \ln(1 + 1/x) - 1/(x+1)$, es positiva para $x \geq 1$, aunque puede obtenerse con los conceptos tratados previamente en este texto.

Ejemplo 3.1.36: La sucesión $\{-4^n\}_{n \geq 1}$ es monótona decreciente y no acotada inferiormente. Por el Teorema 3.1.5 (inciso 4), es divergente.

Ejemplo 3.1.37 (Factorial de un número natural n): Dado $n \in \mathbb{N}$, se define el factorial de n como el producto de los primeros n números naturales, el cual se denota por $n!$ y se calcula de forma recursiva como

$$1! = 1, \quad n! = n \cdot (n - 1)!$$

Esto es, el factorial de n es igual a n por el factorial de $n - 1$. Se conviene, además, que $0! = 1$. Así, por ejemplo,

$$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6,$$

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24,$$

$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120.$$

Podemos observar que la sucesión $\{n!\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente ya que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = n \cdot (n - 1)! \geq (n - 1)!$$

Sin embargo, no está acotada superiormente (porque dado cualquier número $M > 0$, éste no puede ser una cota superior ya que siempre tiene al menos un término de la sucesión que lo supera, por ejemplo, el factorial del primer natural mayor o igual que M). Por lo tanto, la sucesión $\{n!\}_{n \geq 1}$ será divergente (Teorema 3.1.5 (inciso 2)).

Sucesión geométrica

La sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{(1/2)^n\}_{n \geq 1}$ presenta algunas particularidades que vamos a destacar. Observemos que cada nuevo término se genera multiplicando por una constante fija al término anterior:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot a_2$$

$$a_4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot a_3$$

$$a_5 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot a_4$$

⋮

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot a_n.$$

También podemos decir que el cociente entre un término y el anterior es constante pues

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Cuando una sucesión presenta esta característica se denomina *sucesión geométrica*. La constante se denomina *razón* de la sucesión; en esta sucesión la razón es $1/2$.

Si conocemos el primer término de una sucesión geométrica y su razón, podemos construir los demás términos de la sucesión a través de potencias de la razón y así obtener el término general a_n . Por ejemplo, para la sucesión anterior tenemos que su primer término es $a_1 = 1/2$ y que su razón es $1/2$ por lo que cada término se consigue haciendo:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4} \\ a_3 &= a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \\ a_4 &= a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} \\ a_5 &= a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32} \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Definición 3.1.5 (Sucesión geométrica): Una sucesión $\{a_n\}$ que cumple con la condición que el cociente entre un término y el anterior es constante se llama *sucesión geométrica*. Es decir, cuando para todo n se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \neq 0$$

siendo q la *razón de la sucesión*.

El n -ésimo término de una sucesión geométrica que inicia en $n = 1$ es $a_n = a_1 q^{n-1}$, mientras que si la sucesión comienza en $n = 0$, su n -ésimo término es $a_n = a_0 q^n$.

Notemos que cuando la razón q es positiva, por la forma general que tiene una sucesión geométrica, $a_n = a_1 q^{n-1}$, la misma resulta ser una restricción de una función exponencial de base $q > 0$. Más precisamente, es una restricción de la función exponencial $f(x) = a_1 q^{x-1}$ al conjunto de los números naturales.

Ejemplo 3.1.38: La sucesión geométrica dada por $\{3, 6, 12, 24, 48, \dots\}$ tiene término general $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $n \geq 1$, ya que el primer término es 3 y la razón es $q = 2$, lo que se deduce haciendo

$$\frac{6}{3} = 2, \quad \frac{12}{6} = 2, \quad \frac{24}{12} = 2, \quad \frac{48}{24} = 2.$$

Ejemplo 3.1.39: El término general de la sucesión geométrica $\{1/3, 1/9, 1/27, 1/81, 1/243, 1/729, \dots\}$ se puede expresar como

$$a_n = 1/3 \cdot (1/3)^{n-1} = (1/3)^n$$

para $n \geq 1$, puesto que el primer término es $1/3$ y la razón también es $q = 1/3$.

Ejemplo 3.1.40: El término general de la sucesión geométrica $\{1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, 1/243, \dots\}$ también se puede expresar como

$$a_n = 1 \cdot (1/3)^n = (1/3)^n$$

con $n \geq 0$, puesto que el primer término es $1 = (1/3)^0$ y la razón es $q = 1/3$.

Ejemplo 3.1.41: El término general de la sucesión geométrica $\{4, -8, 16, -32, 64, \dots\}$ es $a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$, para $n \geq 1$, ya que el primer término es 4 y la razón es $q = -2$. Observar que podemos expresarla también como

$$a_n = (-2)^2 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n+1}, \quad n \geq 1$$

o también como

$$a_n = (-2)^n, \quad n \geq 2.$$

Convergencia de la sucesión geométrica

Las sucesiones geométricas juegan un papel fundamental en el cálculo. Su comportamiento a largo plazo —es decir, si los términos se desvanecen, se estabilizan o crecen indefinidamente— está determinado exclusivamente por el valor de su razón común q en relación con la unidad.

Proposición 3.1.6 (Criterio de convergencia de una sucesión geométrica): Dada la sucesión geométrica $\{a_n\}_{n \geq 0} = \{aq^n\}_{n \geq 0}$, siendo a y q números reales, y $a \neq 0$, tenemos que:

- Si $|q| < 1$ o $q = 1$, la sucesión es *convergente*.
- Si $|q| > 1$ o $q = -1$, la sucesión es *divergente*.

Ejemplo 3.1.42: Si $q = -1$, las potencias $q^n = (-1)^n$ alternan entre 1 y -1 , dependiendo de si n es par o impar. Por tanto, $aq^n = a(-1)^n$ alterna entre los valores a y $-a$, y entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n$ no existe, es decir, la sucesión diverge en este caso.

Ejemplo 3.1.43: Si $q < -1$, las potencias q^n oscilan entre valores que crecen o decrecen indefinidamente, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ no existe; en consecuencia, tampoco existe $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n$ cualquiera sea $a \neq 0$, esto es, la sucesión es divergente.

Ejemplo 3.1.44: La sucesión $\{(2/3)^n\}$ es geométrica de razón $q = 2/3$. Como $|q| = 2/3 < 1$, resulta convergente y su límite es cero.

Ejemplo 3.1.45: La sucesión $\{2^n\}$ es geométrica de razón $q = 2$. Puesto que $|q| = 2 > 1$, resulta divergente.

Ejemplo 3.1.46: La sucesión $\{(-1/4)^n\}$ es geométrica de razón $q = -1/4$. Como $|q| = 1/4 < 1$, resulta convergente y su límite es cero.

Ejemplo 3.1.47 (Interés compuesto): En el mundo de la inversión es importante conocer la sucesión geométrica por su velocidad de crecimiento. El régimen de capitalización denominado «interés compuesto» es un ejemplo de aplicación de la misma. *Consideremos una suma invertida C_0 a una tasa de interés de R por ciento anual (constante). ¿Cuál es el factor por el cual se multiplica la inversión cada año? ¿Cuál es la fórmula del valor de la inversión C_n después de n años?*

Solución. El interés que genera la inversión luego del primer año viene dado por $C_0 \cdot R/100$, por lo que al cabo de un año el valor de la inversión es

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{R}{100} = C_0 \left(1 + \frac{R}{100}\right).$$

Si llamamos $i = R/100$ a la tasa de interés, entonces podemos escribir

$$C_1 = C_0(1 + i).$$

En el segundo año, el valor de la inversión será

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)^2.$$

Similarmente, en el tercer año será

$$C_3 = C_0(1 + i)^3.$$

El factor por el que se multiplica la inversión cada año es, entonces, $1 + i$.

Después de n años, el valor de la inversión se puede expresar como

$$C_n = C_0(1 + i)^n.$$

Como mencionamos, la sucesión $\{C_n\}_{n \geq 0}$ de los montos de inversión anuales es una sucesión geométrica, con primer término C_0 y razón $q = 1 + i$. Como $1 + i > 1$ independientemente de la tasa de interés, esta sucesión crecerá indefinidamente (es divergente y, en este caso, podemos escribir que $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \infty$).

Si, por ejemplo, se invierten \$12 000 a una tasa del 18 % anual, al cabo de 5 años la inversión será de $C_5 = 12\,000(1 + 18/100)^5 = 12\,000(1.18)^5 \approx 27\,453.10$ pesos. En este caso, la razón de la sucesión geométrica $\{C_n\}_{n \geq 0} = \{12\,000(1.18)^n\}_{n \geq 0}$ es $q = 1.18$ y su primer término es $C_0 = 12\,000$.

Ejemplo 3.1.48: Una persona gana cada mes una cuarta parte más de lo que ganó el mes anterior. Si el primer mes ganó 2000 pesos, ¿cuánto ganará al sexto mes? ¿Cuánto debería ganar el primer mes para que el sueldo sea de \$10 000 al sexto mes?

Solución. Si el sueldo (en pesos) de la persona a los n meses es S_n , entonces sabemos que $S_1 = 2000$. Como cada mes gana $1/4$ más que el mes anterior, el segundo mes ganará

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{4}S_1 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)S_1 = \frac{5}{4}S_1 = \frac{5}{4} \cdot 2000 = 2500$$

pesos. El tercer mes ganará

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{4}S_2 = \frac{5}{4}S_2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 S_1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 2000 = 3125$$

pesos. De esta manera, podemos expresar la sucesión de salarios, en pesos, de la persona como

$$\{S_n\}_{n \geq 1} = \left\{ \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} 2000 \right\}_{n \geq 1}.$$

Vemos que esta sucesión es geométrica de razón $q = 5/4$ y término inicial $S_1 = 2000$.

Con base en la expresión obtenida, al sexto mes la persona ganará

$$S_6 = \left(\frac{5}{4}\right)^{6-1} 2000 = \left(\frac{5}{4}\right)^5 2000 = \frac{3125}{1024} \cdot 2000 \approx 6103.52$$

pesos.

Si ahora queremos averiguar el valor del sueldo inicial S_1 para que al sexto mes la persona gane 10 000 pesos, planteamos

$$\begin{aligned} S_6 &= 10\,000 \\ \left(\frac{5}{4}\right)^5 S_1 &= 10\,000 \\ \frac{3125}{1024} \cdot S_1 &= 10\,000 \\ S_1 &= 10\,000 \frac{1024}{3125} \\ S_1 &= 3276.80. \end{aligned}$$

Así, la persona deberá ganar \$3276.80 el primer mes para poder obtener un salario de \$10 000 al sexto mes.

Ejemplo 3.1.49: Se sabe que la maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20 % de su valor y que la misma costó 4 millones de dólares. ¿En cuánto se valorará después de 4 años? ¿Y después de 10 años? Si la fábrica desea reemplazar la maquinaria antes de que pierda la mitad de su valor, ¿en qué momento debería realizar el reemplazo?

Solución. Para responder estas preguntas, analicemos los datos. Sabemos que el valor inicial de la maquinaria es $V_0 = 4$, en millones de dólares. Si denotamos con V_n el valor de la maquinaria después de n años queremos determinar los valores de V_4 y V_{10} .

Como la maquinaria se deprecia un 20 % anualmente, al cabo del primer año valdrá

$$V_1 = V_0 - V_0 \cdot \frac{20}{100} = V_0 \cdot 0.8 = 4 \cdot 0.8 = 3.2$$

millones de dólares. Luego de dos años, su valor será

$$V_2 = V_1 - V_1 \cdot \frac{20}{100} = V_1 \cdot 0.8 = V_0(0.8)^2 = 4 \cdot 0.64 = 2.56$$

millones de dólares. Sucesivamente, encontraremos que el valor de la maquinaria, en millones de dólares, al cabo de n años será

$$V_n = V_0(0.8)^n = 4(0.8)^n.$$

Esto indica que la sucesión de valores de la maquinaria es una sucesión geométrica de primer término $V_0 = 4$ y razón $q = 0.8$.

Tenemos que $V_4 = 4(0.8)^4 = 1.6384$ y $V_{10} = 4(0.8)^{10} = 0.429\,496\,729\,6$. Es decir, después de 4 años la maquinaria se valorará en 1 638 400 dólares, mientras que a los 10 años valdrá alrededor de 429 496.73 dólares.

Ahora bien, cuando $V_n = 2$, la maquinaria valdrá la mitad de lo que costó comprarla. ¿En qué momento se dará esto? Para determinarlo, buscamos el

valor de n tal que esto ocurra:

$$\begin{aligned}V_n &= 2 \\4(0.8)^n &= 2 \\(0.8)^n &= 0.5 \\\ln((0.8)^n) &= \ln(0.5) \\n \ln(0.8) &= \ln(0.5) \\n &= \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.8)} \approx 3.11.\end{aligned}$$

La fábrica deberá reemplazar la maquinaria aproximadamente a los 3 años desde su adquisición.

Sucesión aritmética

Analicemos la sucesión cuyos primeros términos son:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 5, \quad a_5 = 7, \quad a_6 = 9.$$

Observamos que la diferencia entre un término y el anterior es siempre 2:

$$\begin{aligned}a_2 - a_1 &= 1 - (-1) = 2 \\a_3 - a_2 &= 3 - 1 = 2 \\a_4 - a_3 &= 5 - 3 = 2 \\a_5 - a_4 &= 7 - 5 = 2 \\a_6 - a_5 &= 9 - 7 = 2.\end{aligned}$$

Si este comportamiento se mantiene, podemos obtener una fórmula para el término general:

$$\begin{aligned}n = 2: \quad a_2 &= a_1 + 2 = a_1 + 1 \cdot 2 = -1 + (2 - 1) \cdot 2 \\n = 3: \quad a_3 &= a_2 + 2 = a_1 + 2 \cdot 2 = -1 + (3 - 1) \cdot 2 \\n = 4: \quad a_4 &= a_3 + 2 = a_1 + 3 \cdot 2 = -1 + (4 - 1) \cdot 2 \\n = 5: \quad a_5 &= a_4 + 2 = a_1 + 4 \cdot 2 = -1 + (5 - 1) \cdot 2 \\n = 6: \quad a_6 &= a_5 + 2 = a_1 + 5 \cdot 2 = -1 + (6 - 1) \cdot 2 \\&\vdots \\n \geq 1: \quad a_n &= -1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 3.\end{aligned}$$

La representación gráfica de esta sucesión en los ejes cartesianos viene dada por la Figura 7. Como vemos, tiene como función asociada a la función

afín $f(x) = 2x - 3$ para $x \geq 1$. La constante 2, que era la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión dada, coincide con el valor de la pendiente de la gráfica de f en cada punto.

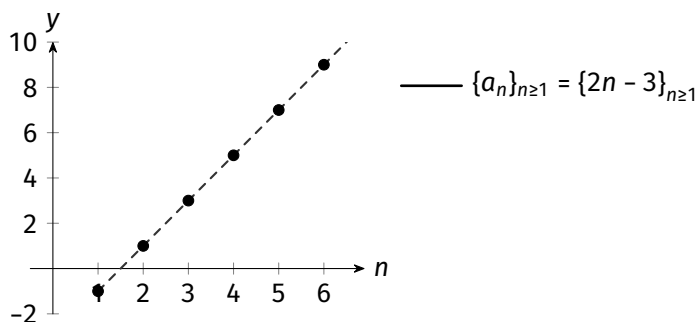


Figura 7

Este tipo de sucesiones reciben un nombre especial.

Definición 3.1.6 (Sucesión aritmética): Una sucesión $\{a_n\}$ que verifica que la diferencia entre un término y el anterior es constante se llama *sucesión aritmética*. Es decir, cuando para todo n se tiene que

$$a_{n+1} - a_n = d,$$

siendo d la *diferencia* o *distancia* de la sucesión.

El n -ésimo término de una sucesión aritmética de diferencia d que inicia en $n = 1$ se calcula como $a_n = a_1 + (n - 1)d$ para cada $n \geq 1$, mientras que si la sucesión comienza en $n = 0$, su n -ésimo término es $a_n = a_0 + nd$, para cada $n \geq 0$.

Notemos que, así como hemos dicho que la sucesión geométrica de razón $q > 0$ es la restricción de una función exponencial al conjunto de los números naturales, la sucesión aritmética es la restricción de una función afín al conjunto de los números naturales.

Propiedades de la sucesión aritmética

Dependiendo de la diferencia d se tienen las siguientes características:

- Si $d > 0$, la sucesión aritmética es creciente y no está acotada superiormente.

En efecto, como $a_{n+1} - a_n = d > 0$ para cualquier $n \geq 1$, $a_n < a_{n+1}$ para todo n , por lo que la sucesión es creciente. No está acotada superiormente porque la sucesión crece indefinidamente: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 + (n - 1)d = \infty$.

- Si $d < 0$, la sucesión aritmética es decreciente y no está acotada inferiormente.

En este caso, $a_{n+1} - a_n = d < 0$ para cualquier $n \geq 1$, es decir, $a_{n+1} < a_n$ para todo n , por lo que la sucesión es decreciente. No está acotada inferiormente porque la sucesión decrece indefinidamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 + (n-1)d = -\infty.$$

- Si $d = 0$, la sucesión es de términos constantes.

Efectivamente, si $d = 0$, $a_n = a_1$ para cualquier n , esto es, es una sucesión de términos constantes, todos iguales al término inicial.

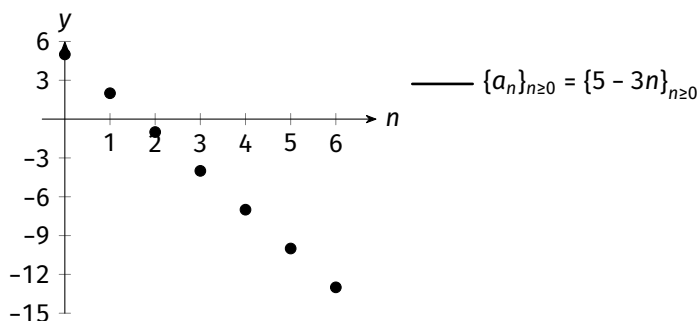
- La sucesión aritmética sólo converge para $d = 0$.

Como vimos antes, para $d > 0$ y $d < 0$ la sucesión es divergente. En el caso $d = 0$, como la sucesión es constante, su límite existe y es esta misma constante.

Ejemplo 3.1.50: La sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0} = \{5 - 3n\}_{n \geq 0}$ es aritmética porque

$$a_{n+1} - a_n = 5 - 3(n+1) - (5 - 3n) = 5 - 3n - 3 - 5 + 3n = -3$$

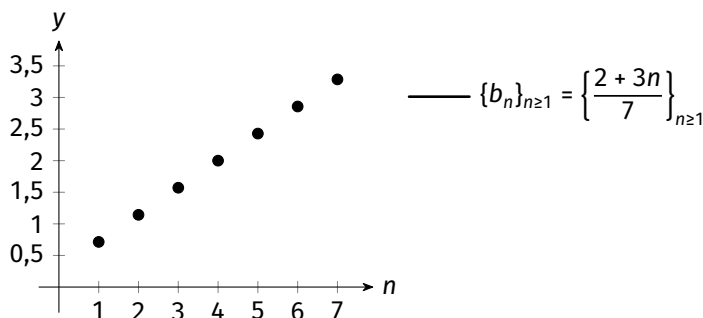
para cualesquiera dos términos consecutivos, es decir, la diferencia es constante, $d = -3$. Dado que $d < 0$, sabemos que esta sucesión es decreciente, no acotada inferiormente y divergente. Su gráfica es la siguiente:



Ejemplo 3.1.51: La sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1} = \{(2 + 3n)/7\}_{n \geq 1}$ es también aritmética ya que

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2 + 3(n+1)}{7} - \frac{2 + 3n}{7} = \frac{2 + 3n + 3 - 2 - 3n}{7} = \frac{3}{7}$$

para todo $n \geq 1$. Su gráfica es la siguiente:



La diferencia entre dos términos consecutivos es siempre $d = 3/7$. Puesto que $d > 0$, sabemos que esta sucesión es creciente, no acotada superiormente y divergente.

EJERCICIOS 3.1

- Obtenga los primeros 6 términos de las siguientes sucesiones y clasifique en monótonas y/o acotadas.

a. $\{a_n\}_{n \geq 1} = \left\{ \frac{n}{n^3 + 1} \right\}_{n \geq 1}$.

b. $\{b_n\}_{n \geq 1} = \{(-1)^n\}_{n \geq 1}$.

c. $\{c_n\}_{n \geq 0} = \{n!\}_{n \geq 0}$.

- Observando las representaciones gráficas de las sucesiones de la Figura 8, determine cuáles son convergentes y cuáles divergentes. Justifique en cada caso. Observación: asuma que las sucesiones mantienen la misma tendencia más allá de los límites de la gráfica.

- Determine si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes. Si convergen, calcule su límite (considere en todos los casos $n \geq 1$).

a. $\left\{ \frac{2n}{3n + 5} \right\}$.

b. $\left\{ 4 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$.

c. $\{3 + 2n\}$.

d. $\left\{ \left(\frac{3n^3 - 2n}{n^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$.

e. $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2} \right\}$.

f. $\left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$.

g. $\left\{ \frac{5 - 3^{n+2}}{3^n} \right\}$.

h. $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$.

i. $\{6^{-n}\}$.

j. $\left\{ \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n} \right\}$.

k. $\{4^n\}$.

l. $\left\{ \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{3n} \right\}$.

- Determine si las siguientes sucesiones son monótonas crecientes o decrecientes, o no monótonas.

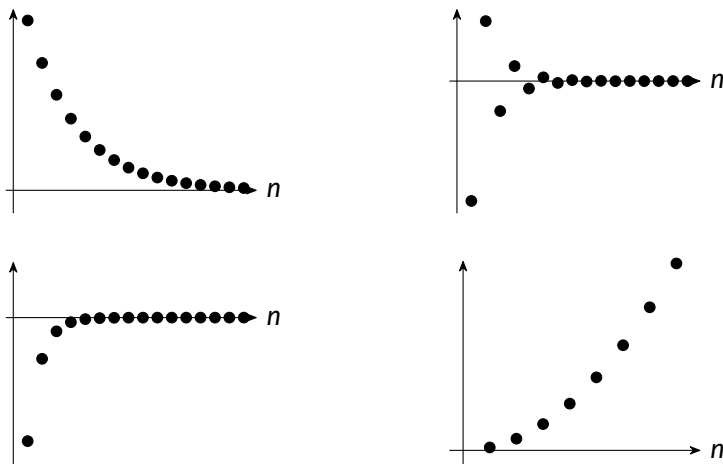


Figura 8

- a. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$. b. $\left\{\frac{2n}{n+5}\right\}_{n \geq 0}$. c. $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}_{n \geq 1}$.
d. $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$. e. $\{(n^2 + 2n - 14)e^{-n}\}_{n \geq 0}$. f. $\{2n + 5\}_{n \geq 0}$.

5. Determine el término general de las siguientes sucesiones, sabiendo que son sucesiones geométricas o aritméticas:

- a. 1, 4, 7, 10, 13, ... b. 2, 0, -2, -4, -6, ... c. $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}, \dots$
d. $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$ e. $-\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{4}{81}, \dots$ f. -1, -5, -9, -13, ...

6. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$, calcule:

- a. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$. b. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$. c. $\lim_{n \rightarrow \infty} 3a_n$.
d. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$. e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n}$.

7. Dada la sucesión geométrica $\{a_n\}_{n \geq 0} = \{a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \dots\}$, con a, q constantes no nulas, demuestre que:

- a. Si $q < 0$, la sucesión no es monótona.
b. Si $0 < q < 1$ y $a > 0$, la sucesión es monótona decreciente.
c. Si $0 < q < 1$ y $a < 0$, la sucesión es monótona creciente.
d. Si $q > 1$ y $a > 0$, la sucesión es monótona creciente.
e. Si $q > 1$ y $a < 0$, la sucesión es monótona decreciente.

- f. Si $q = 1$, la sucesión es constante.
8. Si se invierten \$10 000 al 5 % de interés compuesto anual, encuentre el valor del capital final al cabo de 4 años. ¿Cuál debería ser la tasa de interés anual para obtener \$13 000 al cabo de 4 años?
 9. Un productor agropecuario compra una sembradora al valor de 160 000 dólares, la cual deprecia su valor un 8 % cada año. ¿Al cabo de cuántos años, aproximadamente, la máquina conserva un tercio de su valor?
 10. Una compañía compra una máquina por \$475 000, la cual se deprecia en un 30 % por año. Encuentre una fórmula para el valor de la máquina después de n años. ¿Cuál es su valor después de 5 años? ¿Es cierto que al cabo de 2 años la máquina vale menos de la mitad de su valor inicial?
 11. Hace 10 meses, una empresa de comida rápida incorporó un servicio de entregas a domicilio. Los registros muestran que los ingresos mensuales, en cientos de dólares, han aumentado un 1.5 % mes a mes. Si el último valor registrado es de 576 cientos de dólares, ¿cuál es la tasa media de variación mensual del ingreso desde que la compañía cuenta con ese servicio?
 12. Para cada caso, dé un ejemplo de una sucesión $\{a_n\}$ que verifique las condiciones indicadas.
 - a. Es acotada pero no monótona (ni creciente ni decreciente).
 - b. Es monótona creciente y convergente a cero.
 - c. Es una sucesión geométrica divergente de términos positivos.
 - d. Es una sucesión aritmética decreciente.
 13. Determine la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados. Justifique en cada caso.
 - a. Toda sucesión monótona es convergente.
 - b. Si una sucesión es convergente, es acotada.
 - c. El límite de la suma de dos sucesiones convergentes existe y es la suma de los límites de cada sucesión.
 - d. El límite del cociente de dos sucesiones convergentes existe y es el cociente de los límites de cada sucesión.
 - e. Las sucesiones geométricas son siempre convergentes.
 - f. Una sucesión aritmética no constante puede ser convergente.
 - g. Existe una sucesión creciente y divergente.
 - h. Si $\{a_n\}$ es una sucesión acotada superiormente y monótona creciente, es convergente.

- i. No existe sucesión monótona y acotada que sea divergente.
 - j. Toda sucesión que sea alternada en signo será divergente.
14. Considere la sucesión cuyo término general es $b_n = \frac{n^3}{a_n}$ para $n \geq 1$, siendo a_n el término general de alguna de las siguientes:

$$a_n = n^2, \quad a_n = n^3 - 2n + 1, \quad a_n = e^n, \quad a_n = \frac{1}{2^n}, \quad a_n = \sqrt{n+1}.$$

Decida cuál o cuáles (podrían ser más de una o, incluso, ninguna) de estas sucesiones hacen que:

- | | |
|---|--|
| a. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$ | b. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$ |
| c. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2.$ | d. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$ |

SERIES

En esta sección introducimos las series numéricas como sumas de infinitos términos de una sucesión y estudiamos cuándo esa suma tiene un valor finito. Analizamos la convergencia mediante el concepto de límite de sumas parciales, estudiamos en detalle la serie geométrica y presentamos criterios generales para determinar si una serie converge o diverge.

Introducción

Las series numéricas se emplean como modelos en distintas ciencias y especialmente en las finanzas. El concepto de serie nos permitirá responder la pregunta: ¿una suma de infinitos términos puede dar como resultado un número?

Consideremos nuevamente la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{(1/2)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Comencemos por realizar las sumas de los dos primeros términos, de los tres primeros términos y de los cuatro primeros términos, para comparar los resultados y

extraer algunas primeras conclusiones:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Observemos que cada uno de los resultados anteriores son cocientes de dos números consecutivos, siendo el denominador la potencia de 2 correspondiente a la cantidad de términos sumados. Es decir, las sumas siguen el patrón:

$$S_1 = \frac{1}{2} = \frac{2^1 - 1}{2^1}$$

$$S_2 = \frac{3}{4} = \frac{2^2 - 1}{2^2}$$

$$S_3 = \frac{7}{8} = \frac{2^3 - 1}{2^3}$$

$$S_4 = \frac{15}{16} = \frac{2^4 - 1}{2^4}.$$

Conjeturamos que, en general, se tendrá que la suma de los primeros n términos de la sucesión es

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{2^n - 1}{2^n},$$

o también

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Si deseamos conocer la suma cuando la cantidad de términos n es cada vez más grande, tomamos límite y obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Respondiendo a la pregunta inicial: sí es posible que una suma de infinitos términos genere un resultado finito. En este caso vemos que la suma de infinitos recíprocos de potencias de 2 es igual a 1, un valor finito. Geométricamente esta suma se puede interpretar como en la Figura 9, en donde esta suma se corresponde con el área de un cuadrado de lado 1 [u].

Definición 3.2.1 (Serie): Formalmente, dada una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$, al sumar sus infinitos términos obtenemos la expresión

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

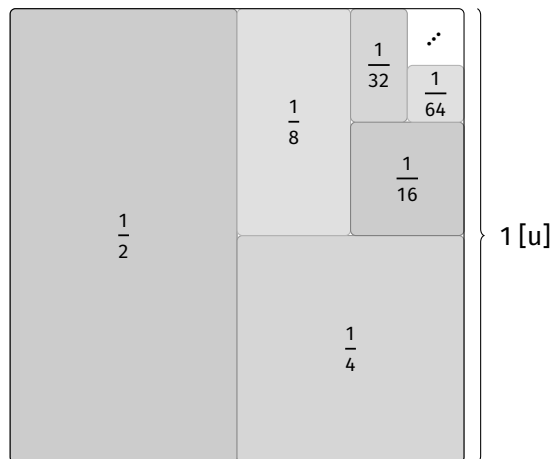


Figura 9

la cual se denomina serie infinita o simplemente *serie*, y se denota mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

donde $\sum$ (sigma) es el operador de sumatoria.

Definición 3.2.2 (Sucesión de sumas parciales): Dada $\{a_n\}_{n \geq 1}$, la sucesión

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = \sum_{i=1}^1 a_i, \\ S_2 &= a_1 + a_2 = \sum_{i=1}^2 a_i, \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i, \end{aligned}$$

se llama *sucesión de sumas parciales* de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Límite y convergencia de una serie

Si bien la adición es una operación algebraica definida para una cantidad finita de términos, la idea de «sumar infinitos números» requiere una fundamentación más rigurosa, ya que no es posible realizar la operación aritméticamente.

Para otorgar un significado matemático preciso a una serie infinita, debemos analizar el comportamiento de las sumas acumuladas a medida que incorporamos más términos, trasladando el problema al cálculo de límites de sucesiones.

Definición 3.2.3 (Límite y convergencia de una serie): Dada una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

si la sucesión de sumas parciales

$$\{S_n\}_{n \geq 1} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \right\}_{n \geq 1}$$

es *convergente*, esto es, si existe un número S tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

diremos que la serie es *convergente* y que su *suma* es S . De lo contrario, si la sucesión $\{S_n\}_{n \geq 1}$ es *divergente*, entonces diremos que la serie es *divergente*.

Es decir, la *suma de una serie* es el límite de la sucesión de sumas parciales, siempre que este exista.

Cuando hablemos del *carácter de la serie*, estaremos refiriéndonos a si la misma es convergente o divergente.

No se debe confundir el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ con el límite de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n \geq 1}$. Pueden existir ambos, solo uno de ellos, o ninguno de los dos. Y, aún cuando ambos existan, no tienen que ser necesariamente iguales. El ejemplo al inicio de este capítulo permite mostrar esto: la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{(1/2)^n\}_{n \geq 1}$ es convergente a 0, mientras que la sucesión de sumas parciales de la serie $\{S_n\}_{n \geq 1} = \{1 - (1/2)^n\}_{n \geq 1}$ converge a 1.

Las series pueden comenzar a sumarse desde otros valores, diferentes de 1. Esto no modificará el carácter convergente o divergente de la serie, pues lo que determina la existencia del límite de la sucesión de sumas parciales es lo que ocurre con los últimos términos que se suman, es decir, con los «últimos» términos de la sucesión $\{S_n\}$.

Por ejemplo, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

son todas convergentes ya que la primera lo es, como vimos arriba.

En el caso de las series divergentes ocurrirá lo mismo, ya sea que sumemos desde $n = 0$ o desde $n = 1$, o desde otro valor de n , todas estas series serán igualmente divergentes.

En el caso de la series convergentes, debemos tener en cuenta que cambiar el índice inicial de la sumatoria puede modificar el resultado de la suma S . Por ejemplo, si consideramos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

esta es convergente, pero su suma es ahora $S = 2$. Esto se debe a que estamos sumando un término adicional, correspondiente al índice $n = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 = 2.$$

Esto también lo podemos deducir de la sucesión de sumas parciales, cuyos términos tendrán todos este sumando adicional. Teniendo en cuenta la fórmula hallada para la sucesión de sumas parciales desde $n = 1$, podemos obtener que, si sumamos desde $n = 0$, la sucesión $\{S_n\}_{n \geq 0}$ tiene la siguiente expresión:

$$S_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

la cual ahora converge a $S = 2$, como mostramos antes.

De las propiedades para límites de sucesiones se pueden deducir fácilmente las siguientes propiedades para las series convergentes. Con $\sum a_n$ denotaremos la serie cuyo término general es a_n , pudiendo comenzar la sumatoria en cualquier valor de n .

Proposición 3.2.1 (Propiedades elementales de las series): Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes y c es una constante, entonces

1. $\sum ca_n$ es convergente y $\sum ca_n = c \sum a_n$.
2. $\sum(a_n \pm b_n)$ es convergente y $\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$.

Serie geométrica

Las series geométricas constituyen uno de los modelos matemáticos más fundamentales debido a su amplia aparición en diversos contextos, desde el cálculo de intereses compuestos y el valor presente en finanzas, hasta procesos físicos y biológicos. Se construyen sumando los términos de una sucesión donde la razón entre términos consecutivos se mantiene constante.

Definición 3.2.4 (Serie geométrica): Dada una sucesión geométrica de razón q y primer término a_1 , una *serie geométrica* viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots$$

Para las series geométricas es posible aplicar un criterio de convergencia propio de estas series.

Teorema 3.2.2 (Criterio de convergencia para series geométricas): Una serie geométrica de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1},$$

con $a_1 \neq 0$, tiene por sucesión de sumas parciales

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q},$$

y es convergente siempre que $|q| < 1$ y su suma es

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Si $|q| \geq 1$, entonces la serie geométrica es divergente.

Demostración. Consideremos la n -ésima suma parcial de la serie geométrica

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}.$$

Multiplicando por q a ambos miembros tenemos que

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n.$$

Entonces, restando ambas ecuaciones tenemos

$$S_n - qS_n = (a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}) - (a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n)$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Si $q = 1$, la suma parcial es fácil de calcular, ya que todos sus términos son iguales a a_1 . Así, para $q = 1$ la suma es $S_n = na_1$.

Para analizar la convergencia o divergencia de la serie debemos calcular el límite de la sucesión $\{S_n\}_{n \geq 1}$. Este límite va a depender del comportamiento de q , por lo que se deben tener en cuenta distintos casos:

CASO 1 si $|q| < 1$, esto es, si $-1 < q < 1$, sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1(1 - 0)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Es decir, el límite existe y podemos afirmar que la serie es convergente y su suma es $S = a_1/(1 - q)$ (el cociente entre el primer término y 1 menos su razón).

CASO 2 si $q > 1$, sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, por lo que también será $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Es decir, la sucesión de sumas parciales diverge, por lo que la serie geométrica será divergente.

CASO 3 si $q = 1$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na_1$. Este límite tiende a $-\infty$ o ∞ según el signo de a_1 . En este caso también es divergente la serie geométrica.

CASO 4 si $q = -1$, la sumas parciales toman distintos valores según si n es par o impar. Para n par tenemos que $(-1)^n = 1$ por lo que

$$S_n = \frac{a_1(1 - (-1)^n)}{1 - (-1)} = \frac{a_1 \cdot 0}{2} = 0.$$

Mientras que si n es impar, $(-1)^n = -1$ y resulta

$$S_n = \frac{a_1(1 - (-1)^n)}{1 - (-1)} = \frac{a_1 \cdot 2}{2} = a_1 \neq 0.$$

Así, la sucesión $\{S_n\}_{n \geq 1}$ alterna entre dos valores diferentes, por lo que será divergente. En consecuencia, la serie geométrica diverge para $q = -1$.

CASO 5 si $q < -1$, sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ no existe, por lo que la serie geométrica será divergente.

En conclusión, la serie geométrica sólo converge para $|q| < 1$ y su suma en ese caso es

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

En cualquier otro caso, es divergente. □

En el caso de considerar la serie geométrica escrita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots,$$

el Teorema 3.2.2 se puede aplicar igualmente pues es la misma serie que antes, solo que el primer término es a_0 en lugar de a_1 . La serie será convergente, entonces, solo para $|q| < 1$ con suma $S = a_0/(1 - q)$. Sin embargo, en esta

serie la suma parcial S_n denota la suma de los primeros $n + 1$ términos de la serie (sumamos desde 0 hasta n), y se puede comprobar que tiene la forma

$$S_n = \frac{a_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}.$$

Es decir, cambia la potencia a la que se eleva la razón q en el numerador porque ahora se están sumando $n + 1$ términos. Esto no influye en la suma S de la serie pues se trata de un límite y tanto q^n como q^{n+1} convergen a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, siempre que $|q| < 1$.

Ejemplo 3.2.1: Apliquemos el criterio dado en el Teorema 3.2.2 a la serie geométrica que estábamos analizando, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, cuyo término general es $a_n = 1/2^n = (1/2)^n$, $n \geq 1$.

Observemos que su primer término es $a_1 = 1/2$, y la razón es $q = 1/2$, la cual calculamos como siempre, o también podemos notar que

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = a_1 q^{n-1}.$$

Anteriormente demostramos que esta serie converge y que su suma es 1. Si aplicamos el Criterio de convergencia para series geométricas, obtendremos el mismo resultado: como la razón $q = 1/2$ verifica $|q| = |1/2| = 1/2 < 1$, por dicho criterio la serie es convergente y su suma es

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Ejemplo 3.2.2: Analicemos el carácter de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n.$$

¿Es una serie geométrica? Sabemos que, para que lo sea, debe verificar que el cociente a_{n+1}/a_n es siempre una constante q (razón), donde $a_n = 3(2/5)^n$ en este ejemplo. Si calculamos este cociente obtenemos, para todo $n \geq 0$, que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}}{3 \left(\frac{2}{5} \right)^n} = \frac{2}{5} = q.$$

Entonces la serie sí es geométrica de razón $q = 2/5$ y tiene primer término $a_0 = 3(2/5)^0 = 3$. Dado que $|q| = 2/5 < 1$, podemos afirmar que la serie es convergente y que su suma es

$$S = \frac{a_0}{1 - q} = \frac{3}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5$$

por el Teorema 3.2.2.

Ejemplo 3.2.3: ¿Es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{2}{5}\right)^n?$$

Hacemos el mismo análisis que en el ejemplo anterior. Observar que la única diferencia entre esta serie y la anterior es el valor en el cual inicia la serie. Es fácil ver que sigue siendo una serie geométrica de razón $q = 2/5$, con lo cual es convergente. Sin embargo, ahora su primer término es

$$a_1 = 3\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{6}{5}.$$

Luego, su suma es

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{6}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{5}} = 2.$$

Es decir, como mencionamos anteriormente, cambiar el valor de inicio de la serie no produce un cambio en el carácter de la misma, solo puede modificar el valor de su suma, en el caso de que la misma converja.

Ejemplo 3.2.4: Determinemos si la siguiente serie es convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)5^n.$$

Observemos que el término general es $a_n = (-3)5^n$ y el cociente de dos términos consecutivos es

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-3)5^{n+1}}{(-3)5^n} = 5.$$

Luego, esta serie es geométrica de razón $q = 5$. Como la razón es mayor que 1, la serie es divergente y, por lo tanto, no tiene suma finita.

Ejemplo 3.2.5: Analicemos el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{7}{8}\right)^n.$$

La misma será convergente pues

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(-\frac{7}{8}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{7}{8}\right)^n} = -\frac{7}{8} = q,$$

una constante, y $|q| = 7/8 < 1$. Su primer término es $a_1 = -7/8$ por lo que

$$S = \frac{-\frac{7}{8}}{1 - \left(-\frac{7}{8}\right)} = \frac{-\frac{7}{8}}{\frac{15}{8}} = -\frac{7}{15}$$

será su suma.

Ejemplo 3.2.6 (Programa gubernamental): Un programa gubernamental que actualmente cuesta a los contribuyentes 4.5 mil millones de dólares por año, se va a reducir 20 % por año.

1. Hallar una expresión para la cantidad presupuestada de este programa después de n años.
2. Calcular los años que tardará este programa en reducir su costo a la mitad.
3. Plantear la serie generada por esta sucesión. ¿Esta serie es convergente? Si es así, hallar su suma e interpretar este resultado en función del contexto planteado.

Solución. Para responder el ítem 1, notemos que este problema nos presenta los siguientes datos: un valor inicial $a_0 = 4.5$ (mil millones de dólares), y la reducción de este valor en un 20 % por año, es decir a razón de 0.20. Al transcurrir un año, la cantidad presupuestada para este programa, en miles de millones de dólares, estará dada por

$$a_1 = 4.5 - 4.5 \cdot 0.20 = 4.5 \cdot 0.80 = 3.6.$$

Para el segundo año, tenemos la cantidad

$$a_2 = 3.6 - 3.6 \cdot 0.20 = 3.6 \cdot 0.80 = 4.5 \cdot 0.80 \cdot 0.80 = 4.5(0.80)^2 = 2.88$$

mil millones de dólares, mientras que para el tercer año tendremos:

$$a_3 = 2.88 - 2.88 \cdot 0.20 = 2.88 \cdot 0.80 = 4.5 \cdot 0.80 \cdot 0.80 \cdot 0.80 = 4.5(0.80)^3 = 2.304$$

mil millones de dólares.

Así, transcurridos n años, tendremos la siguiente expresión para calcular la cantidad presupuestada, en miles de millones de dólares:

$$a_n = 4.5(0.80)^n.$$

Esto nos facilitará el cálculo que se pide en el inciso 2, acerca de la cantidad de años que llevará reducir el costo de este programa a la mitad, es decir, a 2.25 mil millones de dólares. Planteamos

$$a_n = 2.25$$

$$4.5(0.80)^n = 2.25$$

$$(0.80)^n = 0.5.$$

Aplicando logaritmo neperiano en ambos miembros de la igualdad resulta

$$\ln((0.80)^n) = \ln(0.5)$$

$$n \ln(0.80) = \ln(0.5)$$

$$n = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.80)},$$

es decir, $n \approx 3.11$. Por tanto, podemos afirmar que el costo del programa llegará a la mitad de lo que es actualmente en aproximadamente 3 años.

Ahora solo nos resta responder el ítem 3. La serie asociada a la sucesión es $\sum_{n=0}^{\infty} 4.5(0.80)^n$, la cual es una serie geométrica de razón $q = 0.80$. Puesto que $|q| < 1$, es convergente y podemos calcular su suma. Dicha suma es $S = a_0/(1 - q) = 4.5/(1 - 0.80) = 4.5/0.20 = 22.5$.

Concluimos que este programa tendrá un costo final de 22.5 mil millones de dólares a pesar de la reducción que se hace año tras año.

Ejemplo 3.2.7 (Sistema de ahorro a futuro): Una persona está pensando su futuro económico para el momento en que esté jubilada. Para ello, planea un sistema de ahorro, a partir de los 40 años en una entidad que le asegura un incremento de 0.5 % mensual. Se plantean dos situaciones:

1. Si deposita 20 000 dólares por única vez:
 - a. Escribir los primeros cinco términos de la sucesión de capitales al inicio de cada mes. ¿Cumple con la definición de sucesión geométrica? Justificar la respuesta.
 - b. ¿Cuánto dinero retirará a los 70 años?
 - c. Si desea obtener a los 70 años una suma igual a 200 000 dólares, ¿cuál debería ser el monto inicial del ahorro? Aproximar a dos cifras decimales.
2. Si la persona optó por colocar al inicio de cada mes una suma fija de 500 dólares en la misma entidad financiera, ¿cuál es el importe reunido al momento de jubilarse?

Redondear los resultados a dos decimales.

Solución. En la primera situación, ítem 1, consideramos como valor inicial $a_0 = 20\,000$ dólares, que es el depósito inicial. Luego, para el primer mes el capital a_1 será el capital inicial más un incremento del 0.5 % mensual, resultando

$$\begin{aligned} a_1 &= 20\,000 + 20\,000 \cdot 0.005 \\ &= 20\,000(1 + 0.005) \\ &= 20\,000 \cdot 1.005 \\ &= 20\,100 \text{ dólares.} \end{aligned}$$

Así, en el segundo mes, tendremos el capital a_1 más un 0.5 % adicional sobre éste, es decir,

$$\begin{aligned} a_2 &= 20\,100 + 20\,100 \cdot 0.005 \\ &= 20\,100 \cdot 1.005 \\ &= 20\,000(1.005)^2 \\ &= 20\,200.5 \text{ dólares.} \end{aligned}$$

En el tercer mes, el capital será de

$$\begin{aligned} a_3 &= 20\,200.5 \cdot 1.005 \\ &= 20\,000(1.005)^3 \\ &\approx 20\,301.50 \text{ dólares.} \end{aligned}$$

Finalmente, para el cuarto mes, el capital será de

$$\begin{aligned} a_4 &= 20\,301.5 \cdot 1.005 \\ &= 20\,000(1.005)^4 \\ &\approx 20\,403.01 \text{ dólares.} \end{aligned}$$

La sucesión de capitales (en dólares) al inicio de cada mes tendrá como término general

$$a_n = 20\,000(1.005)^n.$$

Es una sucesión geométrica ya que el cociente de cualesquiera dos términos consecutivos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{20\,000(1.005)^{n+1}}{20\,000(1.005)^n} = 1.005, \quad n \geq 0,$$

es una constante, la cual es la razón de la sucesión, $q = 1.005$.

Para responder cuánto dinero retirará a los 70 años debemos considerar que transcurren 30 años desde que la persona empieza a ahorrar. Como el incremento se efectúa mensualmente, el tiempo a considerar es de 360 meses (30 años por 12 meses). Calculamos, entonces, el término a_{360} , dado por:

$$a_{360} = 20\,000(1.005)^{360} \approx 120\,451.50 \text{ dólares.}$$

Así, al cumplir 70 años, tendrá ahorrado y podrá retirar, de acuerdo con las condiciones, alrededor de 120 451.5 dólares.

Ahora bien, si desea llegar a 200 000 dólares cuando se jubile, deberá depositar un monto inicial a_0 de modo que

$$a_{360} = a_0(1.005)^{360} = 200\,000.$$

De aquí que

$$a_0 = \frac{200\,000}{(1.005)^{360}} \approx 33\,208.39,$$

por lo que la persona deberá depositar al inicio unos 33 208.39 dólares para lograr la suma deseada al jubilarse.

Para responder a la segunda situación, ítem 2, analizamos qué ocurre con los depósitos fijos mensuales. Consideramos como valor inicial $a_0 = 500$ dólares, el primer depósito. Para el primer mes el capital a_1 será el capital inicial más un incremento del 0.5 % mensual, más 500 dólares, resultando

$$\begin{aligned} a_1 &= 500 + 500 \cdot 0.005 + 500 \\ &= 500(1 + 0.005) + 500 \\ &= 500 \cdot 1.005 + 500 \text{ dólares.} \end{aligned}$$

Posteriormente, en el segundo mes, tendremos el capital inicial a_0 que genera interés por dos períodos de tiempo, más a_1 que genera interés por un solo período de tiempo más los 500 dólares fijos que se depositan en dicho mes. Así,

$$\begin{aligned} a_2 &= 500 \cdot (1.005)^2 + 500 \cdot 1.005 + 500 \\ &= 505.0125 + 502.5 + 500 \\ &\approx 1507.51 \text{ dólares.} \end{aligned}$$

En el tercer mes, el capital será de

$$\begin{aligned} a_3 &= 500 \cdot (1.005)^3 + 500 \cdot (1.005)^2 + 500 \cdot 1.005 + 500 \\ &\approx 2015.05 \text{ dólares,} \end{aligned}$$

pues ahora el primer depósito se capitaliza por 3 meses, el segundo depósito por 2 meses, el tercer depósito por un mes, y se agrega el depósito de 500 dólares del tercer mes.

Sucesivamente, vemos que para el n -ésimo mes, el capital será de

$$a_n = 500 \cdot (1.005)^n + 500(1.005)^{n-1} + \dots + 500 \cdot 1.005 + 500 \text{ dólares,}$$

lo cual puede expresarse más precisamente como la suma

$$a_n = \sum_{k=0}^n 500(1.005)^k.$$

Esta suma no es más que la n -ésima suma parcial de una serie geométrica de primer término 500 (cuando $k = 0$) y razón $q = 1.005$.

Como queremos calcular el capital al cabo de 30 años de hecho el primer depósito, buscamos el valor, como en la situación anterior, de a_{360} . Este se

puede calcular como

$$\begin{aligned}
 a_{360} &= \sum_{k=0}^{360} 500(1.005)^k \\
 &= 500 \frac{1 - (1.005)^{360+1}}{1 - 1.005} \\
 &= 500 \frac{1 - (1.005)^{361}}{-0.005} \\
 &\approx 505\,268.81.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, al cumplir 70 años, la persona podrá retirar lo ahorrado que asciende a 505 268.81 dólares.

Ejemplo 3.2.8 (Recursos agotables): Se calcula que a inicios del año 1999 las reservas de oro de la mina Yanacocha (mina aurífera peruana considerada la más grande de América del Sur y la segunda a nivel mundial) ascendían a un total de 32.9 millones de onzas (1 onza equivale a aproximadamente 28.3495 g). Sin embargo, luego de esa medición, se sabe que se produjeron 1.66 millones de onzas de oro.

- a) Si se mantiene el nivel de producción de 1999, ¿en qué año se agotarán las reservas?
- b) Suponga que la producción se reduce un 1 % cada año a partir del año 2000. ¿Cuánto durarán las reservas de oro en este caso?

Redondear los resultados a dos decimales.

Solución. En el ítem **a)** la producción se está manteniendo constante, lo que quiere decir que, en principio, se tienen en reserva $a_0 = 32.9$ millones de onzas. En ese año se extraen 1.66 millones de onzas, de modo que quedan en reserva $a_1 = 32.9 - 1.66$ millones de onzas; al segundo año las reservas serán de $a_2 = 32.9 - 2 \cdot 1.66$ millones de onzas; sucesivamente, en el n -ésimo año, medido a partir de 1999, tendremos $a_n = 32.9 - n \cdot 1.66$ millones de onzas de oro en la mina. Por tanto, para saber en qué año se agotarán las reservas planteamos la ecuación:

$$0 = 32.9 - n \cdot 1.66,$$

y resolvemos para hallar el año n en el que esto ocurrirá. Será $n = 19.82$, lo cual quiere decir que en el término de aproximadamente 19 años, 9 meses y 25 días se agotarán las reservas de oro. Esto es, alrededor del año 2018 se agotarían estas reservas.

El ítem **b)** plantea una reducción de la producción del 1 % anual a partir del año 2000. Entonces tenemos que calcular cuándo la suma de las producciones anuales ascenderá a 32.9 millones de onzas, agotando así las reservas. En

este caso, si p_n denota la producción, en millones de onzas, al año n medido desde 1999, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{aligned}p_0 &= 1.66 \\p_1 &= 1.66 - 1.66 \cdot 0.01 = 1.66 \cdot 0.99 \\p_2 &= p_1 - p_1 \cdot 0.01 = 1.66(0.99)^2 \\p_3 &= p_2 - p_2 \cdot 0.01 = 1.66(0.99)^3 \\&\vdots \\p_n &= p_{n-1} - p_{n-1} \cdot 0.01 = 1.66(0.99)^n.\end{aligned}$$

Así, $p_0, p_1, \dots, p_n$ indican las extracciones que se efectúan cada año, de modo que la suma de todas ellas, S_n , dará la totalidad de las extracciones.

Observar que la sucesión $\{p_n\}_{n \geq 0}$ es geométrica de razón $q = 0.99$ y primer término $p_0 = 1.66$. Luego, la suma S_n puede calcularse como

$$S_n = \sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n 1.66(0.99)^k = \frac{1.66(1 - (0.99)^{n+1})}{1 - 0.99} = 166(1 - (0.99)^{n+1}).$$

Planteamos $S_n = 32.9$ para encontrar el año en que se agotan las reservas:

$$\begin{aligned}S_n &= 32.9 \\166(1 - (0.99)^{n+1}) &= 32.9 \\1 - (0.99)^{n+1} &= \frac{32.9}{1660} \\1 - \frac{32.9}{1660} &= (0.99)^{n+1} \\\ln\left(\frac{1331}{1660}\right) &= (n+1)\ln(0.99) \\\frac{\ln\left(\frac{1331}{1660}\right)}{\ln(0.99)} - 1 &= n \\20.98 &\approx n.\end{aligned}$$

En conclusión, si la producción se reduce un 1 % cada año a partir de 2000, las reservas se agotarán transcurridos casi 21 años a partir de 1999, esto es, en el año 2020.

Criterio de la divergencia

Antes de ver esta proposición, veremos una condición necesaria para que una serie sea convergente.

Teorema 3.2.3 (Condición necesaria de convergencia de una serie): Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demostración. Sea $\sum a_n$ una serie convergente. Por simplicidad, supondremos que la serie inicia en $n = 1$, aunque el teorema vale si la serie inicia en cualquier otro valor.

Queremos ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Para ello, explicitemos dos sumas parciales consecutivas, S_{n-1} y S_n , cuando $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

La resta de ambas es

$$S_n - S_{n-1} = a_n,$$

es decir, el término general de la serie para $n \geq 2$.

Así, si queremos hallar el límite de a_n , podemos hallar el límite de $S_n - S_{n-1}$ puesto que son iguales para cada $n \geq 2$.

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente a un cierto número S , sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

Entonces, por la propiedad del límite de la resta,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

como queríamos demostrar.

Por lo tanto, cualquier serie convergente cumple que su término general converge a 0. $\square$

Observación 46: El recíproco del teorema anterior no es válido, es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, no podemos afirmar que la serie asociada es convergente. En otras palabras, existen series divergentes cuyo término general tiende a cero.

Por ejemplo, si tomamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Sin embargo, la serie es divergente como veremos más adelante.

El contrarrecíproco del Teorema 3.2.3 nos da un criterio para determinar la divergencia de una serie.

Teorema 3.2.4 (Criterio de la divergencia): Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ o no existe el límite, entonces la serie asociada $\sum a_n$ es divergente.

Ejemplo 3.2.9: Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/(2n+1)$. Si analizamos la convergencia del término general de la serie $a_n = n/(2n+1)$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Esto nos permite asegurar, por el Criterio de la divergencia, que la serie asociada es divergente.

Ejemplo 3.2.10: La serie aritmética

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 + 4(n - 1)$$

es divergente por el Criterio de la divergencia, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + 4(n - 1)) = \infty$.

Ejemplo 3.2.11: Si consideramos la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, sabemos que la misma es divergente pues su razón es $q = -1$. Podemos comprobarlo nuevamente usando el Criterio de la divergencia, dado que la sucesión $\{(-1)^n\}_{n \geq 1}$ es oscilante (alterna entre los valores -1 y 1) y, por lo tanto, divergente.

Convergencia de series de términos positivos

Una serie de términos positivos es toda serie $\sum a_n$ tal que $a_n > 0$ para todo n . Estudiaremos diferentes criterios para este tipo de series.

Observación 47: Vale la pena aclarar que todos los criterios que veremos de aquí en adelante no dan información acerca de la suma de una serie convergente. Sólo permiten decidir el carácter de una serie. Esto no significa que no existan fórmulas para las sumas de series convergentes no geométricas, pero la obtención de las mismas requiere de otros conceptos que escapan a este curso.

Criterio de la integral

En la unidad de Cálculo Integral determinamos áreas de regiones no acotadas mediante integrales impropias y, en algunos casos, fue posible determinar el valor de ellas; decíamos, entonces, que la integral impropia existía, es decir, era convergente. Analizaremos en este apartado la convergencia de series de términos positivos mediante el análisis de convergencia de integrales impropias.

Teorema 3.2.5 (Criterio de la integral): Sea $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$, y sea $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de términos positivos tales que para $n \geq 1$ se cumple que $a_n = f(n)$.

Entonces, la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Veamos la interpretación geométrica de este criterio a través de la Figura 10.

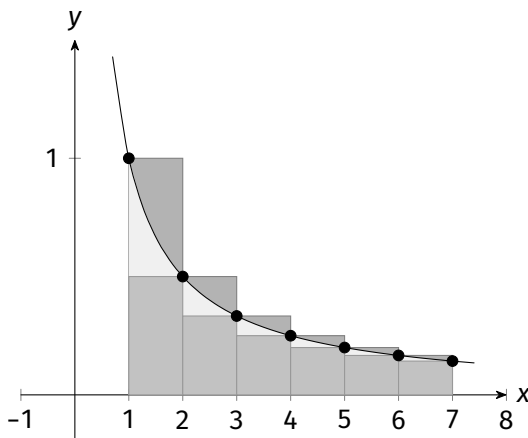


Figura 10

La integral impropia $\int_1^{\infty} f(x) dx$ representa el área de la región que se encuentra debajo de la gráfica de f para $x \geq 1$. Por otro lado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ representa una aproximación a este área por medio de áreas de rectángulos por exceso, mientras que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ representa una aproximación del mismo área por defecto.

Teniendo esto en cuenta, si la integral impropia converge, entonces la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge por ser más pequeña y, en consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ también converge.

Similarmente, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, la integral impropia también por ser más pequeña que la serie.

Ejemplo 3.2.12: Para la sucesión $\{a_n\} = \{(1/2)^n\}$, vimos que su serie asociada es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

Si consideramos $f(x) = (1/2)^x$, vemos que es una función positiva, continua (es de tipo exponencial) y decreciente en $[1, \infty)$ porque su derivada verifica $f'(x) = \ln(1/2)(1/2)^x < 0$ (ya que el logaritmo de un número menor que 1 es negativo). Luego, como $f(n) = (1/2)^n = a_n$, la serie es convergente si y sólo si lo es la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x) dx$. En base a lo estudiado para integrales impropias, tenemos que

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Bigg|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^b - \frac{1}{2}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2 \ln 2}.$$

Por lo tanto, la integral impropia es convergente, y por el teorema podemos asegurar que la serie correspondiente también.

Notar que, como ya sabemos, la suma de la serie es $S = 1$, pero aquí obtuvimos que la integral impropia converge a un número distinto de 1, por lo que podemos observar claramente que $\int_1^\infty (1/2)^x dx \neq S$. Esto muestra que el Criterio de la integral es cualitativo, no cuantitativo.

Ejemplo 3.2.13: Vamos a analizar si la serie $\sum_{n=1}^\infty n/(n^2 + 1)$ es convergente. Para aplicar el Criterio de la integral analizamos si la función asociada, $f(x) = x/(x^2 + 1)$, cumple las condiciones requeridas. Claramente, si $x \geq 1$, es una función positiva, y es continua en todos los reales. Para determinar si es decreciente analizamos el signo de su derivada:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} < 0$$

siempre que $-x^2 + 1 < 0$, esto es, siempre que $|x| > 1$. Así, para $x > 1$ es decreciente. Luego, f satisface las condiciones del Criterio de la integral. Integramos para ver la convergencia de su integral impropia, usando la sustitución $u = x^2 + 1$, y cambiando los extremos de integración correspondientemente:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{x}{(x^2 + 1)} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^b \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_2^{b^2+1} \frac{1}{u} du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln |u| \Big|_2^{b^2+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + 1}{2} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Luego, como la integral impropia es divergente, la serie diverge por el Criterio de la integral.

Ejemplo 3.2.14: Consideremos la serie $\sum_{n=1}^\infty 1/(n + 1)$ y analicemos su convergencia. La función $f(x) = 1/(x + 1)$ es positiva y continua para $x \geq 1$. Además su derivada $f'(x) = -1/(x + 1)^2$ es negativa para $x \geq 1$ y en consecuencia f es decreciente en $[1, \infty)$. Por tanto, satisface las condiciones del Criterio de la integral.

Planteamos la integral impropia de f y resolvemos con la sustitución $u = x + 1$, cambiando los extremos acorde a ella:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{(x + 1)} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^{b+1} \frac{1}{u} du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |u| \Big|_2^{b+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{b + 1}{2} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Entonces, la serie diverge pues la integral impropia asociada es divergente.

Ejemplo 3.2.15: Estudiaremos la serie $\sum_{n=1}^\infty e^{-n}$. Veamos si satisface las condiciones del Criterio de la integral. Sea $f(x) = e^{-x}$. Esta función es positiva y

continua para $x \geq 1$. Su derivada es $f'(x) = -e^{-x}$ es negativa para $x \geq 1$, por lo cual f es decreciente allí. En consecuencia, f satisface las condiciones del Criterio de la integral. Planteamos la integral y resolvemos:

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b} + e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Por tanto, la integral impropia converge, la serie converge.

Ahora bien, ¿a qué converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$? Por ser una serie geométrica de razón $q = 1/e$ y primer término $a_1 = 1/e$, es convergente y es posible calcular la suma

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1/e}{1-1/e} = \frac{1}{e-1}.$$

Así, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ converge a $1/(e-1)$ pero $\int_1^{\infty} e^{-x} dx = 1/e \neq 1/(1-e)$.

Observación 48: El teorema asegura que si la integral impropia es convergente, la serie es convergente, pero no informa a qué converge la serie.

Observación 49: Cuando se use la prueba de la integral no es necesario iniciar la serie o la integral en 1. Por ejemplo, para la serie $\sum_{n=4}^{\infty} 1/(n-3)^2$ lo natural es analizar la integral impropia $\int_4^{\infty} 1/(x-3)^2 dx$. De igual manera, no es necesario que f sea siempre decreciente pero sí que lo sea a partir de algún momento. Así, por ejemplo, la función asociada a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(3n-13)^2$ es $f(x) = 1/(3x-13)^2$ y la misma es decreciente para todo $x > 13/3 \approx 4.33$ por lo que deberemos estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_5^{\infty} f(x) dx$. Esto nos permite afirmar qué ocurre con la serie $\sum_{n=5}^{\infty} 1/(3n-13)^2$, pero lo mismo le pasará a la serie original pues los 4 primeros términos no van a modificar el carácter de la serie. Una cantidad finita de términos no van a cambiar la convergencia o divergencia de una serie.

Serie armónica y series p

Se denomina *serie p* a toda serie de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

siendo p un número real. En el caso en que $p = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es más conocida como *serie armónica*. Para estudiar la convergencia de la serie conviene distinguir los cinco casos siguientes:

CASO 1 $p < 0$: observamos que el término a_n crece indefinidamente a medida que n crece, esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^p = \infty$. Luego, por el Criterio de la divergencia, la serie p , con p negativo, diverge.

CASO 2 $p = 0$: resulta que todos los términos son iguales a 1, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$. Nuevamente, por el Criterio de la divergencia, la serie p con $p = 0$ diverge.

CASO 3 $0 < p < 1$: aquí, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^p = 0$, con lo cual, no podemos afirmar nada sobre la convergencia o divergencia de la serie. Sin embargo, si consideramos la función $f(x) = 1/x^p$, con $x \geq 1$, esta función cumple: $f(n) = a_n$, f es positiva y continua para esos valores de x , y como $f'(x) = -p/x^{p+1}$ es negativa por ser $p > 0$ y $x \geq 1$ cumple las condiciones del Criterio de la integral.

Luego, basta analizar la integral impropia asociada a f en $[1, \infty)$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{-p+1} - 1}{-p+1} = \infty$$

dado que $-p+1 > 0$. Luego, si $0 < p < 1$, la integral diverge y por lo tanto, la serie también.

CASO 4 $p = 1$: Este se corresponde con la que se conoce como serie armónica. Como en el caso anterior, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, con lo cual, no podemos afirmar nada sobre la convergencia o divergencia de la serie armónica. De todas formas, podemos proceder como antes, ya que $f(x) = 1/x$ cumple las hipótesis del Criterio de la integral. Aquí, la diferencia está en la antiderivada de f :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) - \ln(1) = \infty.$$

Tenemos pues, que la integral diverge, por lo que la serie armónica también es divergente.

CASO 5 $p > 1$: Observamos que también en este caso $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^p = 0$, pero esto no nos da información sobre convergencia de la serie. Repitiendo el procedimiento anterior, como la función $f(x) = 1/x^p$ es decreciente para $x \geq 1$, siempre que $p > 0$, y es continua y positiva para $x > 0$, aplicamos el Criterio de la integral. Resulta que, como $-p+1 < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{-p+1} - 1}{-p+1} = \frac{0 - 1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

Entonces, la integral es convergente. Por lo tanto, la serie también es convergente.

Los casos contemplados arriba se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.6 (Convergencias de series p): La serie p , dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

es convergente solo si $p > 1$ y es divergente si $p \leq 1$.

Observación 50: En particular, note que este teorema garantiza que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es divergente.

Criterio del cociente o Criterio de D'Alembert

Para una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, este criterio permite determinar convergencia o divergencia de la serie estudiando el límite de la razón de dos términos consecutivos.

Teorema 3.2.7 (Criterio del cociente): Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = L < 1$, la serie es convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = L > 1$, la serie es divergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = L = 1$, el criterio no es concluyente.

Ejemplo 3.2.16: Determinar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}.$$

Solución. Vemos que esta serie tiene términos $a_n = n/4^n$ positivos. Estudie-
mos el límite del cociente de términos consecutivos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{4} < 1.$$

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/4^n$ es convergente por el Criterio del cociente.

Ejemplo 3.2.17: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^n}.$$

Solución. En este caso, los términos son $a_n = 3/5^n$ positivos. Aplicamos el Criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{5^{n+1}}}{\frac{3}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} < 1.$$

Luego, la serie es convergente por el Criterio de D'Alembert.

Podríamos haber estudiado esta serie sin este criterio, puesto que es una serie geométrica con razón $q = 1/5$ (lo que se observó cuando hicimos los cocientes a_{n+1}/a_n) y primer término $3/5$. Vista como serie geométrica también obtenemos que es convergente, y, más aún, podemos calcular su suma

$$S = \frac{3/5}{1 - 1/5} = \frac{3}{4},$$

la cual no puede determinarse mediante el Criterio del cociente.

Ejemplo 3.2.18: Apliquemos el Criterio del cociente a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}.$$

Resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{4^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2 + 2n + 1} = 4 > 1,$$

por lo que la serie es divergente.

Ejemplo 3.2.19: Si estudiamos la convergencia de una serie p con el Criterio del cociente, encontramos que, cualquiera sea $p \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1.$$

Es decir, el criterio no es concluyente para ningún p . Sin embargo, sabemos que para $p \leq 1$, la serie diverge y para $p > 1$, converge. Esto muestra que puede haber casos en los que el criterio no da información, y puede ocurrir que la serie converja o diverja, pero hay que determinarlo con otro criterio.

Criterio de la raíz o Criterio de Cauchy

Este criterio también lo aplicaremos a series de términos positivos, principalmente a aquellas cuyos términos generales contengan potencias n -ésimas.

Teorema 3.2.8 (Criterio de la raíz): Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, la serie es convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$, la serie es divergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L = 1$, el criterio no es concluyente.

Ejemplo 3.2.20: Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+5} \right)^{3n}.$$

Solución. Aplicando raíz n -ésima y tomando límite, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+5} \right)^{3n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n+5} \right)^3. \end{aligned}$$

Como el límite de la base existe, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+5} \right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27} < 1. \end{aligned}$$

Por el Criterio de la raíz, la serie es convergente.

Ejemplo 3.2.21: Decidir si es convergente o divergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

Solución. Podemos aplicar el Criterio de la raíz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1.$$

Luego, la serie es divergente.

Ejemplo 3.2.22: Usar el Criterio de la raíz para estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3} \right)^n.$$

Solución. Calculamos el límite de la raíz n -ésima:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3} > 1.$$

Luego, la serie es divergente. Podemos ver que esta serie es geométrica de razón $q = 5/3$, por lo que podemos afirmar, por ese otro criterio, que es divergente ya que $q > 1$.

Criterio de Raabe

Este es el último criterio que estudiaremos para el caso de series de términos positivos. El mismo suele ser de utilidad cuando el Criterio del cociente no es concluyente.

Teorema 3.2.9 (Criterio de Raabe): Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) = L > 1$, la serie es convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) = L < 1$, la serie es divergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) = L = 1$, el criterio no es concluyente.

Observación 51: Note que el cociente involucrado en este criterio es a_n/a_{n+1} y no el utilizado en el criterio del cociente. También, las conclusiones respecto al valor del límite cambian.

Ejemplo 3.2.23: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Solución. Notemos primero, que si aplicamos el Criterio del cociente, este no es concluyente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2(n+1)+1)^2}}{\frac{1}{(2n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{(2n+3)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 12n + 9} = 1.$$

Estudiamos, entonces, el límite propuesto por el Criterio de Raabe:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 + 12n + 9}{4n^2 + 4n + 1} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1}{4n^2 + 4n + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{8n + 8}{4n^2 + 4n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 8n}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{8}{4} = 2 > 1. \end{aligned}$$

Luego, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n+1)^2$ es convergente por el Criterio de Raabe.

Ejemplo 3.2.24: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Solución. Si aplicamos el Criterio del cociente, vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)^2}}{\frac{n}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n(n+2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} = 1$$

y no es concluyente. Mediante el Criterio de Raabe tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n^2 + n - 1}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 - n}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} = 1, \end{aligned}$$

que tampoco es concluyente. ¿Qué criterio utilizamos para decidir si es o no convergente?

Podemos aplicar el Criterio de la integral, ya que la función asociada $f(x) = x/(x+1)^2$ es continua y positiva en $[1, \infty)$, y su derivada está dada por $f'(x) = (1-x)/(x+1)^3 \leq 0$ para $x \geq 1$. Su integral impropia es

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{x}{(x+1)^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{x}{(x+1)^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{(x+1) - 1}{(x+1)^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^{b+1} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln |u| + \frac{1}{u} \right) \Big|_2^{b+1} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln(b+1) + \frac{1}{b+1} - \ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \infty, \end{aligned}$$

donde se hizo la sustitución $u = x + 1$ cambiando los extremos de integración. Al ser divergente la integral impropia, es también divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)^2$.

Ejemplo 3.2.25: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Solución. Primero intentamos aplicar el Criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = \sqrt{1} = 1,$$

pero no es concluyente. Ahora, si aplicamos el Criterio de Raabe, racionalizando obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

por lo que la serie resulta divergente.

La serie dada también podría haberse estudiado mediante el Criterio de las series p . La misma es un múltiplo constante de la serie $p = 1/2$ que es divergente pues $p < 1$.

Series alternadas

Una serie se dice *serie alternada* (o *alternante*) si sus términos son alternadamente positivos y negativos. En general, una serie de este tipo tendrá como término general $a_n = (-1)^n b_n$ o bien $a_n = (-1)^{n-1} b_n$ siendo $\{b_n\}$ una sucesión de términos positivos. Esto es, en cualquier caso será $b_n = |a_n|$ para cada n . Para estas series, tenemos el siguiente criterio de convergencia.

Teorema 3.2.10 (Criterio de la serie alternante o Criterio de Leibniz): Dada la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, donde $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$, si se cumple que

- $b_{n+1} \leq b_n$ para todo $n \geq 1$, y
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

entonces la serie alternante es convergente.

Observación 52: Si alguna o ambas condiciones no se cumplen, el criterio no puede aplicarse. De ningún modo significa que la serie diverge; deberemos recurrir a otro método para analizar el carácter de la serie.

Ejemplo 3.2.26: Estudiar la convergencia de la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Solución. Aquí, $b_n = 1/n > 0$, la cual verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Además, es decreciente pues, como $n+1 > n$, $b_{n+1} = 1/(n+1) < 1/n = b_n$ para todo $n \geq 1$. Entonces, por el Criterio de Leibniz, la serie armónica alternante es convergente.

Observación 53: El ejemplo anterior muestra que una serie puede ser divergente (la serie armónica), pero su serie alternada puede ser convergente (la serie del ejemplo).

Ejemplo 3.2.27: Determinar si la serie siguiente es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}.$$

Solución. Consideramos $b_n = 3n/(4n-1) > 0$. En este caso, vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3/4 \neq 0$, por lo que no podemos aplicar el Criterio de la serie alternante. Sin embargo, dado que se tiene ese límite, podemos decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n b_n$ no existe (para los valores de n pares, a_n tiende a $3/4$ mientras que para los n impares, a_n tiende a $-3/4$). Así, por el Criterio de la divergencia, la serie alternada dada es divergente.

Observación 54: Cuando una serie alternante verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$, resultará que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe y, por el Criterio de la divergencia, la serie alternante correspondiente diverge.

Ejemplo 3.2.28: Analice la convergencia de la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

Solución. En este caso, tenemos que $b_n = n/(n+1) > 0$. Si estudiamos la función asociada $f(x) = x/(x+1)$, su derivada es $f'(x) = 1/(x+1)^2 > 0$, por lo que b_n no es decreciente. No es posible usar el Criterio de Leibniz. Sin

embargo, basta observar que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \neq 0$, de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe. En consecuencia, el Criterio de la divergencia nos permite afirmar que la serie alternada dada diverge.

Ejemplo 3.2.29: Estudie la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}.$$

Solución. Aquí será $b_n = 1/e^n = e^{-n} > 0$. Como $e > 1$, $b_{n+1} = e^{-(n+1)} < e^{-n} = b_n$ para todo n , por lo que podemos afirmar que b_n es decreciente. Además, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Por lo tanto, por el Criterio de Leibniz, la serie alternante es convergente.

Otra forma de estudiar esta serie es observando que su término general es $a_n = (-1/e)^n$, con lo cual la serie es de tipo geométrica de razón $q = -1/e$ y primer término $a_1 = -1/e$. Puesto que $|q| = 1/e < 1$, la misma es convergente, como ya vimos con el Criterio de Leibniz. Más aún, sabiendo que es geométrica, podemos calcular su suma:

$$S = \frac{-\frac{1}{e}}{1 - \left(-\frac{1}{e}\right)} = \frac{-\frac{1}{e}}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{-1}{e + 1}.$$

EJERCICIOS 3.2

- Identifique cuáles de las siguientes series geométricas son convergentes. Justifique cada caso y calcule la suma correspondiente.

a. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{3}\right)^n.$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{6}{5}\right)^n.$

e. $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)5^n.$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}.$

g. $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}.$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^n}.$

i. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n.$

j. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n.$

k. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$

l. $\sum_{n=3}^{\infty} 9\left(\frac{1}{3}\right)^n.$

- Halle el término general de las siguientes series geométricas y exprese cada una utilizando el símbolo de sumatoria.

a. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \dots$

b. $5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \frac{5}{64} + \frac{5}{256} + \dots$

c. $-3 - \frac{3}{5} - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625} - \dots$

d. $5 - \frac{15}{4} + \frac{45}{16} - \frac{135}{64} + \frac{405}{256} - \dots$

3. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique.

- a. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es divergente.
 - b. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es convergente.
 - c. Si la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.
 - d. Si la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
 - e. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces para todo $k \neq 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + k)$ es convergente.
 - f. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.
 - g. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.
 - h. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
 - i. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{5}{2}\right)^n$ es convergente y su suma es $S = 2$.
 - j. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{2}{5}\right)^n$ es convergente y su suma es $S = -5$.
 - k. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-2) \left(\frac{1}{3}\right)^n$ es convergente y su suma es $S = -3$.
 - l. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2}n)$ es una serie aritmética con diferencia $d = -\frac{1}{2}$ y es convergente por ser $|d| < 1$.
 - m. El Criterio del cociente permite afirmar que la serie armónica es divergente.
 - n. El Criterio de la integral permite hallar el valor de la suma de una serie convergente.
 - o. Cualquier serie p es convergente, sin importar el valor de p .
 - p. Existe una serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que la serie alternada correspondiente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es convergente.
4. Una empresa multinacional realiza el primer año una donación de \$50 000, y cada año siguiente, dona la tercera parte de lo que donó el año anterior. Si la donación se hace por tiempo indeterminado, ¿es posible determinar a cuánto ascenderá la donación? Justifique la respuesta y, si es posible, calcule dicho valor.
5. Una estimación del total de reservas de petróleo de la plataforma continental noruega es de $6 \cdot 10^9$ toneladas a principio de 1980. Suponiendo que la producción de aquel año fue de $2 \cdot 10^5$ toneladas y que a partir de entonces la producción se reduce en un 1 % cada año, resuelva los siguientes ítems:
- a. Halle los cinco primeros términos de la sucesión que indica la cantidad de toneladas de petróleo producidas al cabo de n años a partir de 1980. ¿Qué tipo de sucesión es? Fundamente.

- b. Identifique qué representa la serie asociada en términos del problema. Si es posible, calcule su suma.
- c. ¿Se podrá asegurar la existencia de reservas para un tiempo indefinido?
6. Un fabricante de juegos electrónicos que produce un nuevo producto estima que las ventas anuales serán de 8000 unidades y sabe que cada año el 5 % de las unidades vendidas dejan de funcionar.
- a. Calcule la cantidad de unidades que estarán en uso después de dos años y después de tres años.
- b. ¿Cuántas unidades estarán en uso después de n años?
- c. ¿Es cierto que, pasados 10 años, habrá menos del 80 % de las unidades funcionando?

7. Analice la convergencia de las siguientes series con el criterio que crea conveniente:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}.$

b. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}.$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1}.$

f. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n.$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}.$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n-1}\right)^{2n}.$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n}.$

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$

k. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}.$

l. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}}.$

8. Halle el valor de la constante a para que la suma de la siguiente serie sea igual 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot 16^{n/2}}{5^n}.$$

9. Halle todos los valores de la constante k para que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9k^2}{4}\right)^n$$

sea convergente y su suma sea igual a 1.

10. Justifique por qué la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$ es divergente, y por qué la sucesión $\left\{\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n\right\}_{n \geq 1}$ es convergente.

Tablas de referencia

Tabla de derivadas

1. $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$
2. $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g(x)'f(x)}{g^2(x)}.$
3. $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$
4. $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$
5. $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$

Tabla de integrales

Observación Se omite la constante de integración y el lector deberá agregarla.

1. $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)}, (n \neq -1).$
2. $\int (ax + b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b|.$
3. $\int x(ax + b)^n dx = \frac{1}{a^2}(ax + b)^{n+1} \left[\frac{ax + b}{n+2} - \frac{b}{n+1} \right], (n \neq -1, -2).$
4. $\int x(ax + b)^{-1} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b|.$
5. $\int x(ax + b)^{-2} dx = \frac{1}{a^2} \left[\ln |ax + b| + \frac{b}{ax + b} \right].$
6. $\int \frac{1}{x(ax + b)} dx = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{ax + b} \right|, (b \neq 0).$
7. $\int x\sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{(ax + b)^{5/2}}{5} - \frac{b(ax + b)^{3/2}}{3} \right].$

8. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2ax-4b}{3a^2} \sqrt{ax+b}.$
9. $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|.$
10. $\int \frac{x}{a^2 \pm x^2} dx = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2|.$
11. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2-x^2}.$
12. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$
13. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x.$
14. $\int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} (ax-1) e^{ax}.$
15. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$
16. $\int \ln |x| dx = x \ln |x| - x.$
17. $\int x \ln |x| dx = \frac{1}{2} x^2 \ln |x| - \frac{1}{4} x^2.$
18. $\int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = \frac{-e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx.$

Tabla de derivadas

$$1. \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

$$3. \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

$$5. \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$2. \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

$$4. \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

Tabla de integrales

Observación Se omite la constante de integración y el lector deberá agregarla.

$$1. \int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)}, (n \neq -1).$$

$$3. \int x(ax + b)^n dx = \frac{1}{a^2} (ax + b)^{n+1} \left[\frac{ax + b}{n+2} - \frac{b}{n+1} \right], (n \neq -1, -2).$$

$$5. \int x(ax + b)^{-2} dx = \frac{1}{a^2} \left[\ln |ax + b| + \frac{b}{ax + b} \right].$$

$$7. \int x\sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{(ax + b)^{5/2}}{5} - \frac{b(ax + b)^{3/2}}{3} \right].$$

$$9. \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|.$$

$$11. \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$13. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x.$$

$$15. \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$$

$$17. \int x \ln |x| dx = \frac{1}{2} x^2 \ln |x| - \frac{1}{4} x^2.$$

$$2. \int (ax + b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b|.$$

$$4. \int x(ax + b)^{-1} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b|.$$

$$6. \int \frac{1}{x(ax + b)} dx = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{ax + b} \right|, (b \neq 0).$$

$$8. \int \frac{x}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{2ax - 4b}{3a^2} \sqrt{ax + b}.$$

$$10. \int \frac{x}{a^2 \pm x^2} dx = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2|.$$

$$12. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

$$14. \int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} (ax - 1) e^{ax}.$$

$$16. \int \ln |x| dx = x \ln |x| - x.$$

$$18. \int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = \frac{-e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx.$$

Respuestas de los ejercicios

CAPÍTULO 1

Ejercicios 1.1 (p. 27)

- 1.a. La variación de la utilidad cuando se pasa de producir x_1 unidades a x_0 unidades. La unidad de medida es en dólares.
- 1.b. La variación de la utilidad cuando se pasa de producir x_0 unidades a x_1 unidades. La unidad de medida es en dólares.
- 1.c. Es la variación promedio de la utilidad cuando se pasa de producir x_0 unidades a x_1 unidades. La unidad de medida es dólares/unidad.
- 2.a. Al aumentar la producción de 600 a 800 unidades, el costo se incrementa en \$16 000.
- 2.b. Al aumentar la producción de 600 a 800 unidades, el costo se incrementa en promedio \$8000 por cada 100 unidades.
- 3.a.

Año	Variación absoluta (miles de millones)	Variación porcentual
2013	-	-
2014	337	5.06 %
2015	183	2.61 %
2016	327	4.55 %
2017	247	3.29 %
2018	143	1.84 %

- 3.b.** Durante el primer año se registró el mayor incremento en la cantidad de suscriptores. En el segundo año, dicho crecimiento se redujo aproximadamente a la mitad, para luego repuntar en el tercer año. En los tres años posteriores se observa un aumento sostenido pero cada vez más moderado, es decir, continúan incorporándose nuevos suscriptores, aunque en una proporción decreciente año tras año.

4.a.

Semana	1	2	3	4
Venta de café en grano (kg)	1750	1970	2975	2890
Variación absoluta (kg)	-	220	1005	-85
Variación porcentual	-	12.57 %	51.02 %	-2.86 %

- 4.b.** Durante las dos primeras semanas, las ventas aumentaron registrando el mayor incremento entre la segunda y tercera semana. En la semana siguiente las ventas disminuyeron 2.86 %.
- 4.c.** Podemos calcular el incremento promedio de las ventas de café en las últimas tres semanas: $\frac{2890-1750}{4-1} = 380 \text{ kg / semana}$. Los datos no son suficientes para calcular la variación en todo el mes.
- 5.a.i.** En el intervalo $[-5, -2]$, f disminuye en promedio 2 unidades por cada unidad de x mientras que g también disminuye en promedio 7 unidades por unidad de x .
- 5.a.ii.** En el intervalo $[-3, 3]$, f disminuye en promedio 2 unidades por cada unidad de x mientras que la variación promedio de g es nula.
- 5.a.iii.** En el intervalo $[2, 6]$, f disminuye en promedio 2 unidades por cada unidad de x mientras que g aumenta en promedio 8 unidades por cada unidad de x .
- 5.b.i.** La tasa de cambio promedio se mantiene constante en la función f y variable en la función g .
- 5.b.ii.** En este intervalo, en promedio, g no aumenta ni disminuye por cada unidad de x .
- 5.b.iii.** Funciones polinómicas de grado mayor que 1, exponenciales, logarítmicas. Hay más respuestas correctas.
- 6.a.** El costo de producir 2 bicicletas por día es 3336 dólares.

- 6.b. El costo promedio cuando se pasa de producir 2 a 5 bicicletas por día es 888 dólares por bicicleta.
- 6.c. El incremento porcentual es de, aproximadamente, 79.86 %.
- 6.d. El costo promedio por bicicleta cuando se pasa de producir 5 a 8 bicicletas por día es 3168 dólares y el incremento porcentual correspondiente es de, aproximadamente, 158.4 %.
- 6.e. El costo promedio es menor cuando se producen cinco bicicletas por día, en comparación con cuando se producen dos bicicletas por día.
- 7.a. Con $k \approx 0.009$ y $C = 3\,194\,537$, el aumento en la población en el período 2010–2015 es de 147 038 personas y en el período 2015–2020 es de 153 805 personas.
- 7.b. En el período 2010–2015, la población, en promedio, aumenta aproximadamente 29 408 personas por año y, en 2015–2020, 30 761 personas por año.
- 8.a. 201.75 – 115.45 %.
- 8.b. El mes donde se produce la mayor variación promedio es septiembre.
- 8.c. Se observa un incremento significativo en el valor promedio del dólar de diciembre de 2022 a diciembre de 2023. El aumento supera el 100 %, en un año, es de 115 %, aproximadamente.

Ejercicios 1.2.1 (p. 37)

- 1.a. $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2.$
- 1.b. $g(x) = \frac{x^3+x}{x} = \frac{x(x^2+1)}{x} = x^2 + 1.$
- 1.c. $g(x) = \frac{x^4-8x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3)(x^3-3x^2+x-3)}{x+3} = x^3 - 3x^2 + x - 3.$
- 1.d. $g(x) = \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^3-3x^2-4x+12} = \frac{(x+1)(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-3)(x-2)} = \frac{x+1}{x+2}.$
- 1.e. $g(x) = \frac{e^x-1}{e^{2x}-e^x} = \frac{e^x-1}{e^x(e^x-1)} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$
2. Las gráficas de f y g cerca de $x = c$ se aproximan al valor de $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Valores conjeturados para los límites: **a.** 4; **b.** 1; **c.** -60; **d.** 4/5; **e.** 1.

Ejercicios 1.2.2 (p. 45)

1. Sea $f(x)$ una función polinómica de grado n de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \neq 0$. Así,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\&= \lim_{x \rightarrow c} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow c} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow c} a_1 x + \lim_{x \rightarrow c} a_0 \\&= a_n \lim_{x \rightarrow c} x^n + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow c} x^{n-1} + \dots + a_1 \lim_{x \rightarrow c} x + a_0 \\&= a_n \left(\lim_{x \rightarrow c} x \right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow c} x \right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\lim_{x \rightarrow c} x \right) + a_0 \\&= a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0.\end{aligned}$$

Puesto que $f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$, por lo desarrollado anteriormente, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

2. **a.** $L = 4$; **b.** $L = 1$; **c.** $L = -60$; **d.** $L = 4/5$; **e.** $L = 1$.

3.a. $\lim_{x \rightarrow 5} [x^2(x-1) + 5(x-20)] = 25.$

3.b. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{(x-2)^2 + 2x^3 + 0.25} = \frac{1}{2}.$

3.c. $\lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 + 5x - 2)^5 (x^3 - x^2 + 3)^4] = -2592.$

3.d. $\lim_{x \rightarrow 2} [\ln(2)x^2 - 5e + \sqrt{2}] = 4 \ln 2 - 5e + \sqrt{2}.$

3.e. $\lim_{x \rightarrow 0.5} \left[\frac{x^2+x}{4} - \frac{\sqrt[3]{16x}}{8} \right] = -\frac{1}{16}.$

3.f. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 80x - 64}{x^3 - 6x^2 - 16x + 96} = 0.$

3.g. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+24}-5}{x^2-1} = \frac{1}{20}.$

3.h. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{8-x}{3-\sqrt{x+1}} = 6.$

3.i. $\lim_{x \rightarrow 3} [\log_{10}(2x+4) - \log_3(x^7)] = -6.$

3.j. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x^2+5} - 3^{x-2}) = e^5 - \frac{1}{9}.$

3.k. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \ln(e^{2x+1}) = 4.$

3.l. $\lim_{x \rightarrow -5} 4^{\log_2(9+x)} = 16.$

4.a. $\lim_{x \rightarrow c} (3x+1) = 2$ si y solo si $c = \frac{1}{3}.$

- 4.b. $\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 2) = 4$ si y solo si $c = \pm\sqrt{2}$.
- 4.c. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{5x + 14} = 8$ si y solo si $c = 10$.
- 4.d. $\lim_{x \rightarrow c} [(x - 2)(x + 3) - 5] = -5$ si y solo si $c = 2$ v $c = -3$.
- 4.e. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x+1}{x-2} = 4$ si y solo si $c = 3$.
- 4.f. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2-4}{x^2} = 0$ si y solo si $c = \pm 2$.
- 4.g. No existe $c \in \mathbb{R}$ para que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1$.
- 4.h. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$ si y solo si $c = 0$.
- 4.i. $\lim_{x \rightarrow c} \log_5(x^2 - 9) = 2$ si y solo si $c = \pm\sqrt{34}$.
- 4.j. $\lim_{x \rightarrow c} 2^{x^2-4x+3} = 1$ si y solo si $c = 3$ v $c = 1$.
- 4.k. No existe $c \in \mathbb{R}$ para que $\lim_{x \rightarrow c} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-4}\right) = 0$.
- 4.l. $\lim_{x \rightarrow c} e^{\ln(x+1)} = c + 1$ si y solo si $c > -1$.

Ejercicios 1.2.3 (p. 52)

- 1.a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ por lo que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe.
- 1.b. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$ por lo que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$.
- 1.c. $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \infty$ por lo que $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ no existe.
- 1.d. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ por lo que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.
- 1.e. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0$ por lo que $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$.
- 1.f. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = -1$ por lo que $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x)$ no existe.
- 2.a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$.
- 2.b. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2$.
- 2.c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$.
- 2.d. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -5$.
- 2.e. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.
- 2.f. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

- 2.g. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 27$.
- 2.h. No existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.
- 3.a. El intervalo dominio es $I = [-1, 1]$. El límite en cada extremo es $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
- 3.b. El intervalo dominio es $I = (-2, 2)$. El límite en cada extremo es $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$.
- 3.c. El intervalo dominio es $I = [0, 3)$. El límite en cada extremo es $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -5$ y $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$.
- 3.d. El intervalo dominio es $I = [1, 4]$. El límite en cada extremo es $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 24$.
- 4.a. Para que f tenga límite en $c = 2$ basta con tomar cualquier $a \in \mathbb{R}$.
- 4.b. Para que f tenga límite en $c = 0$ se debe tomar $a = \pm 1$.
- 4.c. Para que f tenga límite en $c = 1$ se debe tomar $a = \sqrt{2}$.
- 4.d. Para que f tenga límite en $c = 3$ se debe tomar $a = \frac{11}{3}$.
- 4.e. Para que f tenga límite en $c = -1$ se puede tomar $a = 0$ o $a = 1$.
- 4.f. Para que f tenga límite en $c = a$ se puede tomar $a = -2$ o $a = 1$.
- 4.g. $\nexists a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga límite en $c = 0$.
- 4.h. Para que f tenga límite en $c = 1$ basta con tomar $a > 0$.

Ejercicios 1.2.4 (p. 62)

- 1.a. La función $f(x)$ es continua en $x = 1$.
- 1.b. No tiene sentido estudiar la continuidad en $x = -3$ para $f(x)$.
- 1.c. La función $f(x)$ es continua en $x = 1$.
- 1.d. La función $f(x)$ no es continua en $x = 2$.
- 1.e. La función $f(x)$ no es continua en $x = 4$.
- 1.f. La función $f(x)$ es continua en $x = 3$.
- 1.g. La función $f(x)$ es continua en $x = 1$.
- 1.h. La función $f(x)$ es continua en $x = 0$.
- 1.i. No tiene sentido estudiar la continuidad en $x = -1$ para $f(x)$.
2. **a.** Es continua; **b.** Es continua; **c.** No es continua en $x = 1$; **d.** No es continua en $x = 2$.

$$3.a. \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

$$3.b. \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, 1\right], \\ 3 & \text{si } x = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

$$3.c. \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$3.d. \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + x\right) & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

4.a. **Falso.**

4.b. **Verdadero.**

4.c. **Verdadero.**

4.d. **Falso.**

4.e. **Verdadero.**

4.f. **Falso.**

Ejercicios 1.2.5 (p. 69)

1.a. El dominio de f es $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Es continua en todo su dominio.

1.b. El dominio de f es $\mathbb{R}_0^+$. Es continua en todo su dominio.

1.c. El dominio de f es $\mathbb{R}$. La función es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ y tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -1$.

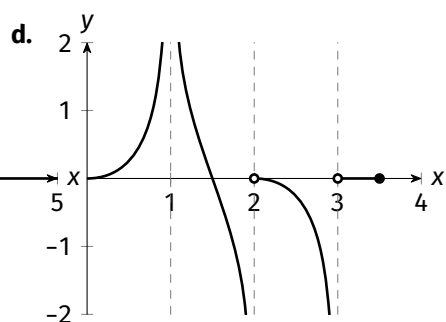
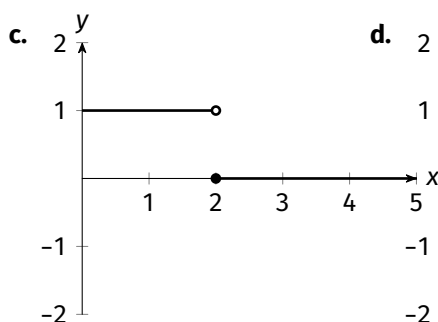
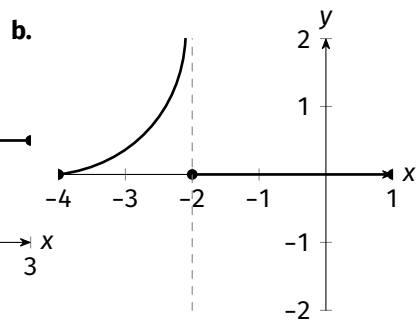
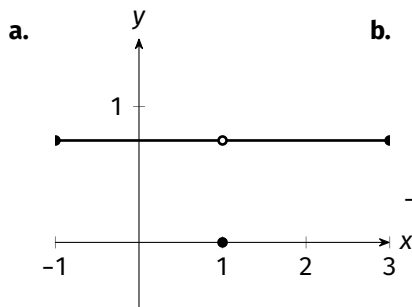
1.d. El dominio de f es $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Es continua en todo su dominio.

1.e. El dominio de f es $\mathbb{R}_0^+$. La función no presenta ninguna discontinuidad.

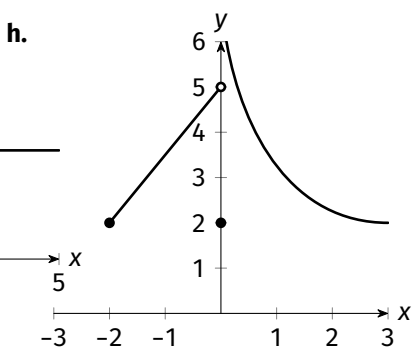
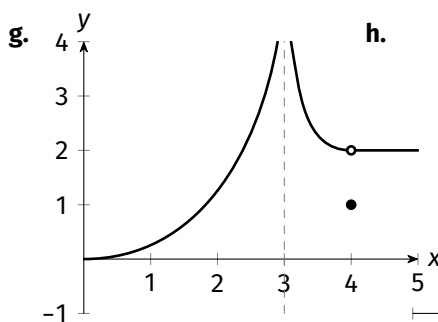
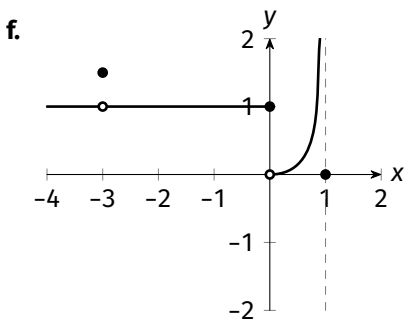
1.f. El dominio de f es $\mathbb{R}$. La función presenta una discontinuidad de salto finito en $x = \frac{1}{2}$. Por tanto es continua en $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

- 1.g. El dominio de f es $\mathbb{R}$. La función es continua en $\mathbb{R}$.
- 1.h. El dominio de f es $\mathbb{R}$. La función presenta una discontinuidad de salto en $x = 2$. Por tanto es continua en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. La función $f(x) = \frac{2}{x^2+x}$ del inciso **a.** tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = 0$ y $x = -1$. La función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+2x+1} & \text{si } x \neq -1, \\ -2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ del inciso **c.** tiene una asíntota vertical en $x = -1$. La función $f(x) = \log(x^2 - 4)$ del inciso **d.** tiene dos asíntotas verticales, $x = -2$ y $x = 2$.
- 3.a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{1/3}} \stackrel{\frac{1}{\rightarrow 0}}{=} +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{1/3}} \stackrel{\frac{1}{\rightarrow 0}}{=} -\infty$.
- 3.b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{1}{\rightarrow 0}}{=} +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{1}{\rightarrow 0}}{=} -\infty$.
- 3.c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + 1} = 1$.
- 3.d. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{1}{6}$.
- 3.e. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 4} = \frac{0}{-2} = 0$.
- 3.f. $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x + 1) = -\infty$.
- 3.g. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2}{x^2 + x - 6} \stackrel{\frac{4}{\rightarrow 0}}{=} +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x^2 + x - 6} \stackrel{\frac{4}{\rightarrow 0}}{=} -\infty$.
- 3.h. $\lim_{x \rightarrow 4} e^{x^2 - 16} = e^0 = 1$.

4.



e. No existe función que satisfaga esas condiciones.



Ejercicios 1.2.6 (p. 76)

- 1.a. Indeterminación del tipo «0/0». Se tiene $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x+2 = 2$.
- 1.b. Indeterminación del tipo «0/0». Se tiene $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$.
- 1.c. Indeterminación del tipo «0/0». Se tiene $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-6x+5}{x^2+4x-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5}{x+5} = -\frac{2}{3}$.
- 1.d. No se presenta ninguna indeterminación. El límite $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-6x+5}{x^2+4x-5}$ es cero.
- 1.e. Indeterminación del tipo «0/0». El límite no existe.
- 1.f. No se presenta ninguna indeterminación. El límite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2+9}$ es cero.
- 1.g. Indeterminación del tipo «0/0». Se tiene $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\sqrt{7-x}}{3-\sqrt{7-x}} = -6$.
- 1.h. Indeterminación del tipo «0/0». El límite no existe.
- 2.a. El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+2x}{x} - \frac{1}{x} \right)$ no existe.
- 2.b. El límite $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2+x}{x} - \frac{1}{x} \right)$ es 1.
- 2.c. El límite $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-4x}{x-2} + \frac{4}{x-2} \right)$ es 0.
- 2.d. El límite $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} - \frac{x-4}{x^2-16} \right)$ es $\frac{1}{8}$.
- 2.e. El límite $\lim_{x \rightarrow -1} (\ln(x^3+x^2) - \ln(x+1))$ es 0.
- 2.f. El límite $\lim_{x \rightarrow 1} (\log_2(x) - \log_2(1-x))$ no existe.

Ejercicios 1.2.7 (p. 86)

- 1.a. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3x+5}{3x^2+x-1} = \frac{1}{3}$.
- 1.b. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3x+5}{x^3-x^2+6} = 0$.
- 1.c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x^2-2x+7} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3x^2-2x+7} = -\infty$.
- 1.d. El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}+1}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+5}+1}$ es igual a cero, mientras que no se puede estudiar $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x+5}+1}{x+4}$ pues el dominio de $f(x)$ es $[-5, \infty)$.

- 1.e. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x^3} + \frac{x^2-x}{x^4} \right] = 0.$
- 1.f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{x^2-5x+7}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+5x-5}{x-2} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} - \frac{x^2-5x+7}{x-2} = +\infty.$
- 1.g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^x = 0$ y
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^x = +\infty$ pues $a = \frac{1}{3}$ es mayor que cero y menor que uno, $0 < a < 1$.
- 1.h. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \log_3(x^2 + 1) = +\infty$ pues b , base del logaritmo es positiva, $b > 1$.
- 1.i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$
- 1.j. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+1}{2-x^2} = \frac{3}{-1} = -3$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2-x}+1} = 0.$
2. Las funciones que presentan asíntotas horizontales son las correspondientes a los incisos **1.a**, **1.b**, **1.d**, **1.e**, **1.g** y **1.j**.

3.a.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

3.b.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

3.c.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^4 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

3.d.
$$f(x) = \begin{cases} |\ln |x-3|| & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}.$$

- 3.e. Al tener una asíntota vertical, se presenta también una discontinuidad infinita, por lo tanto, no es posible encontrar tal función.
- 3.f. Dado que una función puede tener sólo dos asíntotas horizontales como máximo, no es posible encontrar tal función.

Ejercicios 1.2.8 (p. 91)

1.a. El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x}{2}}$ es $e^{\frac{1}{2}}$.

1.b. El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x} \right)^{-4x}$ es e^{-1} .

- 1.c. El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x-1}$ es e .
- 1.d. El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{(x+1)^2}\right)^{x^2+2x}$ es e .
- 1.e. El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^x}\right)^{2^x}$ es e .
- 1.f. El límite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{3x+6}$ es e^3 .
- 1.g. El límite $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{5}{x}}$ es e^{-25} .
- 1.h. El límite $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^3)^{\frac{3}{x^3}}$ es e^3 .
2. **Falso.**
3. **Falso.**
4. **Verdadero.**

Ejercicios 1.3.1 (p. 97)

- 1.a. La tasa de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[2, 4]$ es -9 .
- 1.b. La razón de cambio instantánea en $x = 2$ es -5 . Esto quiere decir que cuando $x = 2$, la función $f(x)$ decrece, aproximadamente, en 5 unidades por cada unidad adicional en la variable independiente.
- 1.c. La razón de cambio instantánea de y con respecto a x en un valor arbitrario a es $f'(a) = -4a + 3$.
- 1.d. La función derivada de f es $f'(x) = -4x + 3$.
- 2.a. La razón de cambio instantánea en $x = -1$ es -5 . Esto quiere decir que cuando $x = -1$, la función $f(x)$ decrece, aproximadamente, en 5 unidades por cada unidad adicional en la variable independiente.
- 2.b. La razón de cambio instantánea de y con respecto a x en un valor arbitrario a es $f'(a) = -5$.
- 2.c. La función derivada de f es $f'(x) = -5$.

3. Tenemos $R'(2.5) = 995$, $R'(5) = 990$ y $R'(7.5) = 985$. De esto se puede interpretar que: **a.** En un nivel de producción de 250 unidades, el ingreso crece, aproximadamente, en 995 mil dólares por cada 100 unidades adicionales fabricadas. **b.** En un nivel de producción de 500 unidades, el ingreso crece, aproximadamente, en 990 mil dólares por cada 100 unidades adicionales fabricadas. **c.** En un nivel de producción de 750 unidades, el ingreso crece, aproximadamente, en 985 mil dólares por cada 100 unidades adicionales fabricadas.
4. La función derivada $g'(x)$ existe para todos los valores del dominio de $g(x)$. Para cada x en el dominio de g se tiene que $g'(x) = \frac{-1}{x^2+4x+4}$.
- 5.a. La tasa media de cambio en el intervalo $[1, 3]$ es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -0.207$. Esto quiere decir que el precio de un artículo baja, en promedio por unidad, \$20.7 cuando la demanda pasa de 1000 unidades a 3000 unidades (o cuando la demanda se incrementa en 2000 unidades a partir de 1000).
- 5.b. Tenemos que $f'(1) = -0.2267$. Se puede interpretar expresando que si a partir de mil unidades la demanda aumenta en mil unidades, el precio disminuye aproximadamente en \$22.67.
- 5.c. Dado que $\lim_{q \rightarrow \infty} f(q) = 10$, si la demanda aumenta indefinidamente, el precio tenderá a estabilizarse en los 1000 dólares.

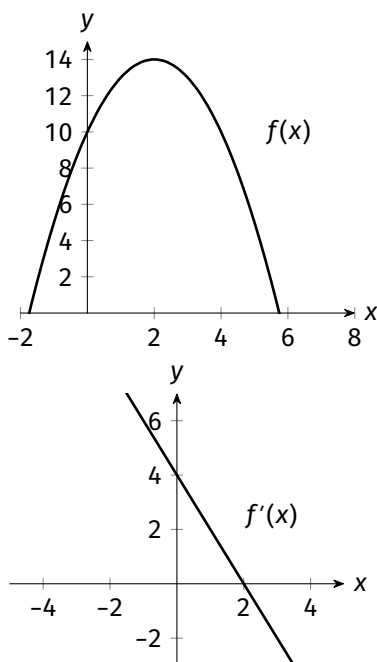
Ejercicios 1.3.2 (p. 101)

- 1.a. La ecuación de la recta tangente a $f(x) = 8 - 4x$ en el punto $(-1, 12)$ es $y = -4x + 8$.
- 1.b. La ecuación de la recta tangente a $g(t) = (t + 2)^2$ en el punto $(0, 4)$ es $y = 4t + 4$.
- 1.c. La ecuación de la recta tangente a $w(z) = \frac{1}{2z+1}$ en el punto $(2, \frac{1}{5})$ es $y = -\frac{2}{25}x + \frac{9}{25}$.
- 1.d. La ecuación de la recta tangente a $f(x) = 8 - 4x$ en el punto $(a, 8 - 4a)$ es $y = -4x + 8$.
- 2.a. La función $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$ presenta una recta tangente horizontal en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{25}{2})$.
- 2.b. La función $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$ presenta una recta tangente con pendiente 3 en el punto $(-\frac{1}{4}, \frac{91}{8})$.

- 2.c. La función $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$ presenta una recta tangente paralela a la recta pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(2, -1)$ en el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{99}{8}\right)$.
- 2.d. La función $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$ presenta una recta tangente perpendicular a la recta de ecuación $2y + 4x - 3 = 0$ en el punto $\left(\frac{3}{8}, \frac{399}{32}\right)$.
3. Para que la recta $y = 6x + b$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, -2)$ hay que tomar $b = -8$.

Ejercicios 1.3.3 (p. 104)

1. La función derivada de $f(x)$ es $f'(x) = -2x + 4$. En el intervalo $(-\infty, 2)$, f' es positiva, por lo que la función crece en dicho intervalo. En el intervalo $(2, \infty)$, f' es negativa, por tanto, $f(x)$ es decreciente en ese intervalo. Se observa también que $f'(2) = 0$, por lo que podemos decir que en las cercanías de $x = 2$ prácticamente, no hay variación en y .



- 2.a. Existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h)-g(3)}{h}$ y su valor es 0.
- 2.b. La función $g(x)$ presenta rectas tangentes horizontales en $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$.

- 2.c. La función $g(x)$ es creciente en $(0, 1)$ y en $(4, \infty)$.
- 2.d. La función $g(x)$ es decreciente en $(1, 4)$.
- 2.e. El signo de g' se mantiene negativo.
- 3.a. La función ingreso está dada por la ecuación: $R(q) = p(q) \cdot q = -\frac{1}{4}q^2 + 1000q$ su dominio es $D_R = [0, 4000]$.
- 3.b. Tenemos $R(1000) = 750\,000$ y $R'(1000) = 500$. A partir de esta información, sabemos que en ingreso para mil toneladas es 750 000 dólares. Además, aumentar el nivel de producción en una tonelada implica un aumento aproximado en el ingreso de 500 dólares.
- 3.c. El ingreso crece en el intervalo $(0, 2000)$ y decrece en el intervalo $(2000, 4000)$.

Ejercicios 1.3.4 (p. 111)

- 1.a. No existe la derivada de $f(x)$ en $x = 2$.
- 1.b. Existe la derivada de f en $x = 0$ y $f'(0) = 0$. La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 1$.
- 1.c. Existe la derivada de $f(x)$ en $x = 1$ y $f'(1) = \frac{1}{2}$. La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- 1.d. Existe la derivada de $f(x)$ en $x = 0$ y $f'(0) = -2$. La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = -2x + 1$.
2. El límite cuando x tiende a 0 por derecha del cociente incremental para la función $f(x) = \sqrt{x}$ es infinito. Por esto, no existe la derivada lateral derecha y, por tanto, f no es derivable en $x = 0$.
3. Algunos ejemplos de funciones podrían ser:

$$\bullet f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 3, \\ x^2 - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases} \text{ en } x = 3.$$

$$\bullet f(x) = \begin{cases} -(x+2)^3 & \text{si } x \leq -1, \\ x & \text{si } x > -1 \end{cases} \text{ en } x = -1.$$

$$\bullet f(x) = -|x - 3| \text{ en } x = 3.$$

Ejercicios 1.3.5 (p. 115)

- 1.a. La función es discontinua en $x = -3$. Luego, por el Corolario 1.3.3, la función no es derivable en $x = -3$.

- 1.b. No es posible aplicar el Corolario 1.3.3 para asegurar la no derivabilidad en $x = -7$. Las derivadas laterales existen y coinciden en $x = -7$, por lo que existe $f'(-7)$.
- 1.c. No es posible aplicar el Corolario 1.3.3 para asegurar la no derivabilidad en $x = 2$. Las derivadas laterales no coinciden. Por lo tanto, no existe $f'(2)$.
- 1.d. No es posible aplicar el Corolario 1.3.3 para asegurar la no derivabilidad en $x = 0$. La derivada lateral derecha no existe, por lo cual no existe $f'(0)$.
2. Para que la función resulte derivable en $x = 3$ se debe tomar $m = 6$.
- 3.a. **Verdadero.**
- 3.b. **Falso.**
- 3.c. **Falso.**
- 3.d. **Verdadero.**
- 3.e. **Falso.**
4.
$$h'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ por lo que } h \text{ es derivable en } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ejercicios 1.4.1 (p. 118)

- 1.a. Si $x \neq 0$ entonces $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$.
- 1.b. Si $t \in \mathbb{R}$ entonces $w'(t) = 2t$.
- 1.c. Si $z \in \mathbb{R}^+$ entonces $g'(z) = -\frac{1}{4}z^{-\frac{5}{4}}$.
- 1.d. Si $t \in \mathbb{R}^+$ entonces $h'(t) = 5t^4$.
2. Las pendientes a $f(x) = x^5$ para cada x vienen dadas por $f'(x) = 5x^4$. Dado que $x^4 > 0$ para $x \neq 0$, $f'(x) > 0$ si $x \neq 0$, por lo que se tiene lo que se quería probar.
Por otro lado, si $g(x) = x^4$ entonces $g'(x) = 4x^3$, por lo que solo serán positivas las pendientes de las rectas tangentes donde $x > 0$ y negativas donde $x < 0$.

Ejercicios 1.4.2 (p. 124)

- 1.a. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $f'(x) = -9x^2 - 14x + 15$.
- 1.b. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $g'(x) = \frac{-4x^2 - 2x + 12}{(x^2 + 3)^2}$.

- 1.c. Si $t \in \mathbb{R}$ entonces $h'(t) = 3t^2 + 9$.
- 1.d. Si $t \in \mathbb{R}_0^+$ entonces $z'(t) = 2 + \frac{5}{4}t^{\frac{3}{2}}$.
- 1.e. Si $x \in \mathbb{R}^+$ entonces $p'(x) = bnx^{n-1}$.
- 1.f. Si $t \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2\}$ entonces $q'(t) = \frac{2a^3t + a^2b + at^2 - c}{(a^2 + t)^2}$.
- 1.g. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $h'(x) = 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 + 6x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 10x - 5$.
- 1.h. Si $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $u'(y) = 3y^2 - 10y + 3$.
- 1.i. Si $z \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ entonces $f'(z) = \frac{12z^3 + 3z^2 - 6z - 11}{(3z - 1)^2}$.
- 1.j. Si $t \in \mathbb{R}$ entonces $g'(t) = -\frac{3t^2}{2+t^2} - \frac{2(t-3)t}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1} + \frac{2(t^3-1)t}{(2+t^2)^2}$.
- 2.a. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $h'(x) = 4\sqrt{2}x^3$.
- 2.b. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $h'(x) = 4x^3 + \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{3}$.
- 2.c. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $h'(x) = \frac{1-\frac{\pi}{3}}{\sqrt[3]{x^4}} - 8x^3$.
- 2.d. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $h'(x) = \frac{\ln(3)}{3}x^{-2/3} + 12x^3$ o $h'(x) = \frac{\ln(3)}{3x^{2/3}} + 12x^3$.
- 2.e. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $h'(x) = \frac{11}{6} \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}} = \frac{11}{6} \sqrt[3]{x^8}$.
- 2.f. Siendo $h(x) = f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$; $x \in \mathbb{R}$ entonces $h'(x) = 8x^7$.
3. Los puntos donde las rectas tangentes son paralelas a $y + 8x - 2 = 0$ son $(\frac{1}{2}, 4)$ y $(-\frac{1}{2}, -4)$. Las rectas tangentes son $y = -8x + 8$ e $y = -8x - 8$.
4. **Verdadero.**
5. Las rectas tangentes horizontales son $y = \frac{20}{9}$ e $y = \frac{16}{9}$. La pendiente de las rectas tangentes son positivas en $(-\infty, -\frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{3}, \infty)$, y negativas en $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
- 6.a. La derivada es positiva si $x < 0$ y negativa si $x > 0$.
- 6.b. La función f es creciente donde $f'(x) > 0$ y decreciente donde $f'(x) < 0$.
7. Los puntos donde la misma posee rectas tangentes horizontales son $(-1, -\frac{1}{2})$ y $(1, \frac{1}{2})$. Las ecuaciones de las rectas son $y = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$.

- 8.a. Para que $f(x)$ tenga exactamente dos tangentes horizontales se debe cumplir $b^2 > 3ac$.
- 8.b. Para que $f(x)$ tenga exactamente una tangente horizontal se debe cumplir $b^2 = 3ac$.
- 8.c. Para que $f(x)$ no tenga tangentes horizontales se debe cumplir $b^2 < 3ac$.
- 9. Una función que cumple esas condiciones es $f(x) = 3x^2 - x - 2$.
- 10.a. **Verdadero.**
- 10.b. **Falso.**
- 10.c. **Falso.**

Ejercicios 1.5 (p. 136)

- 1.a. **Verdadero**
- 1.b. **Verdadero**
- 1.c. **Verdadero**
- 1.d. **Verdadero**
- 2.a. Cuando el precio de venta es de 100 dólares se venden 2100 productos.
- 2.b. Cuando el precio de venta es de 100 dólares, aumentarlo en 1 dólar produciría un aumento de 10 unidades en las ventas. Esto puede ocurrir para ciertos productos llamados sustitutos; por ejemplo, pan y galletitas. Un aumento en el precio de la harina, impacta en el precio del pan quizás en menor medida que en el de las galletitas. Esto podría provocar que la demanda del pan aumente a pesar del aumento de su precio.
- 2.c. Cuando el precio de venta es de 150 dólares se venden 2000 productos.
- 2.d. Cuando el precio de venta es de 150 dólares, aumentarlo en 1 dólar produciría una disminución de 25 unidades en las ventas.
- 3. Un posible modelo para la función demanda correspondiente a la información suministrada es $q(p) = -\frac{p^2}{7} + 500p$. A partir de este modelo se puede decir que el precio unitario puede aumentarse hasta \$1750 sin resentir el ingreso.
- 4.a. El ingreso marginal nos indica la variación aproximada del ingreso en miles de pesos por la venta de una unidad adicional a partir de q_0 unidades.

- 4.b. La expresión $R'(20) = 10$ nos dice que por la venta de una unidad adicional a partir de 20 unidades, el ingreso aumenta aproximadamente en 10 000 pesos. Mientras que $R'(20) = -10$ nos dice que por la venta de una unidad adicional a partir de 20 unidades, el ingreso disminuye aproximadamente en 10 000 pesos.
- 4.c. El ingreso marginal no es siempre creciente.
- 5.a. La tasa de cambio promedio $\frac{C(500)-C(400)}{500-400} = -0.12$ nos dice que si la producción aumenta de 400 a 500 unidades, entonces el costo disminuirá 0.12 u.m. en promedio por unidad adicional.
- 5.b. El costo marginal es $C'(q) = 0.48 - \frac{120\,000}{q^2}$. Evaluando se obtiene $C'(400) = -0.27$ y, en términos económicos, nos dice que el costo total disminuirá aproximadamente a razón de 0.27 u.m. por una unidad adicional en la producción. En términos geométricos nos dice que la pendiente de la recta tangente a la función costo es -0.27 cuando la producción alcanza 400 unidades.
- 5.c. La función de costo promedio es $\bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q} = 0.48 + \frac{120\,000}{q^2} + \frac{1500}{q}$. Cuando la cantidad de unidades producidas crece sin límite, el costo promedio es 0.48.
- 5.d. Se observa que la función costo tiene una gráfica similar a una recta cuando $q > 800$ aproximadamente, lo cual implica que la pendiente de la recta tangente tenderá a ser constante partir de ese valor, tal como lo observamos en el inciso anterior.
- 6.a. El ingreso total está dado por la función $R(q) = p(q) \cdot q = -\frac{q^2}{18} + \frac{745}{9}q$. Cuando la demanda aumenta de 100 a 300 kg, el ingreso varía en promedio 60.55 u.m. por unidad.
- 6.b. Cuando se vende 1 kg más de jamón a partir de 400 kg el ingreso aumenta aproximadamente 38.33 u.m.
- 6.c. Si $\tilde{R}(p)$ es la función de ingreso respecto a p , entonces $\tilde{R}'(80) \approx -1390$, por lo que, a este nivel de precio, el ingreso disminuye. Sin tener información sobre los costos, no hay decisiones concluyentes.
- 6.d. El ingreso crece hasta que la demanda llega a los 745 kg. Luego comienza a decrecer hasta que la demanda llega a 1490 kg. Aunque el ingreso crece significativamente, al observar el ingreso marginal, vemos que el aumento del ingreso por cada unidad adicional no es tan significativo y, de hecho, va en decremento.

- 7.a. La función de costo marginal es $C'(q) = 12 - 0.2q + 0.015q^2$. Y $C'(10) = 11.5$ nos dice que producir una unidad adicional a partir de 10 unidades aumenta el costo aproximadamente en 11.5 dólares semanales.
- 7.b. La función de utilidad es $U(q) = -100 + 8q + 0.1q^2 - 0.005q^3$. La utilidad marginal es $U'(q) = 8 + 0.2q - 0.015q^2$.
- 7.c. El dominio de la utilidad es $D_U = \mathbb{R}_0^+$ y es no negativa cuando $q \in [11.7, 45.5]$.
- 7.d. Cuando la utilidad marginal es cero, el ingreso marginal es igual que el costo marginal. En términos económicos significa que el ingreso aumenta la misma cantidad que aumenta el costo por una unidad adicional.
- 8.a. Que $p'(5) = -10$ significa que el precio disminuye aproximadamente en 10 dólares cuando q pasa de 5 a 6, es decir de 500 a 600 unidades. Análogamente, $p'(9) = -18$ significa que el precio disminuye aproximadamente en 18 dólares cuando q pasa de 9 a 10, es decir de 900 a 1000 unidades.
- 8.b. La magnitud $\frac{p'(5)}{p(5)} \cdot 100 \approx -13.33$ nos dice que al pasar de producir de 500 a 600 unidades, el precio disminuye 13.33 %. Por otro lado, la magnitud $\frac{p'(9)}{p(9)} \cdot 100 \approx -94.73$ nos dice que al pasar de producir de 900 a 1000 unidades, el precio disminuye 94.73 %.
- 11.a. El ingreso marginal en 10 es $R'(10) = 48$. Es decir, cambia a razón de 48 dólares aproximadamente.
- 11.b. La tasa de cambio relativa del ingreso es $\frac{R'(10)}{R(10)} = 0.088$ aproximadamente. En consecuencia, la porcentual es de aproximadamente 8.8 %.
- 11.c. Los valores obtenidos anteriormente indican que en un nivel de producción de diez artículos, incrementar la producción y venta en un artículo repercute en un incremento del 8.8 % en el ingreso.
- 12.a. Dado que $\bar{C}(2) = 53$, el costo promedio por cada unidad es 5300 dólares.
- 12.b. Dado que $\frac{C(5)-C(2)}{5-2} = 5.14$, el incremento promedio del costo por unidad cuando la producción aumenta de 2000 a 5000 unidades es 514 dólares.
- 12.c. Dado que $C'(2) = 4.5$, el aumento aproximado en el costo cuando la producción varía de 2000 a 3000 es de 450 dólares.

- 12.d. La tasa de cambio relativa es $\frac{C'(2)}{C(2)} = 0.042$. En consecuencia, la tasa de cambio porcentual es 4.2 %. Esto dice que incrementar la producción en mil unidades a partir de 2000, representa un incremento en el costo de un 4.2 %.

Ejercicios 1.6 (p. 147)

- 1.a. $\frac{dy}{dx} = 25(4x^2 + 4x + 5)^{24} \cdot (8x + 4).$
- 1.b. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}.$
- 1.c. $\frac{dy}{dx} = 12(3x + 6)^3(10x^3 - 4x)^{10} + 10(3x + 6)^4(10x^3 - 4x)^9(30x^2 - 4).$
- 1.d. $\frac{dy}{dx} = \frac{3(4x+10)-(3x+1)4}{(4x+10)^2}.$
- 3.a. La recta tangente a la curva generada por $y = (x + 3)^3$ en el punto $(-1, 8)$ es $y = 12x + 20$.
- 3.b. La recta tangente a la curva generada por $y = \sqrt{x + 2}$ en el punto $(7, 3)$ es $y = \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}.$
- 3.c. La recta tangente a la curva generada por $y = \frac{2x + 4}{(1 - x)^2}$ en el punto $(0, 4)$ es $y = 10x + 4$.
- 4.a. Para $x = -2$, la tasa relativa es -1.333 , es decir, cuando x aumenta en una unidad desde -2 , el valor de y disminuye en un 133.3%, esto indica un cambio muy rápido y decreciente en y . Para $x = 0$, cuando x aumenta una unidad desde 0, el valor de y aumenta en un 400% de su valor actual. Esto indica un aumento muy rápido. Para $x = 2$: Cuando x aumenta una unidad desde 2, el valor de y aumenta en un 80% de su valor actual. Esto indica un aumento significativo, aunque no tan rápido como en el caso de $x = 0$.
- 4.b. Para $x = 2$, la tasa de cambio relativa es -400 , lo cual significa que si x aumenta ligeramente a partir de 2, el valor de y disminuye en un 400% de su valor actual. Es decir, hay una disminución muy rápida en el valor de y . Para $x = 10$, la tasa relativa es aproximadamente -60 , por lo que si x aumenta ligeramente a partir de 10, el valor de y disminuye en un 60% su valor actual. La disminución es mucho menos pronunciada que en el caso anterior.

- 5.a. El dominio de la función demanda es $[0, 100]$, pues esto garantiza que $p(q) > 0$. Como $\frac{dp}{dq} < 0$ para todo $q > 0$ en nuestro dominio, la demanda es decreciente. Es decir, a medida que aumenta la cantidad demandada (q), el precio (p) disminuye.
- 5.b. La tasa de cambio porcentual nos indica el porcentaje en que cambia el precio cuando la cantidad aumenta en un 1%. Supongamos que queremos calcular la tasa de cambio porcentual para $q = 10$. Esto significa que cuando la cantidad demandada aumenta en un 1% desde 10 unidades, el precio disminuye aproximadamente en un 1.025%.
- 5.c. La función de ingreso es $R(q) = 100q - q\sqrt{q^2 + 20}$ y el ingreso marginal es $R'(q) = 100 - \sqrt{q^2 + 20} - q^2(q^2 + 20)^{-\frac{1}{2}}$. La evaluación en 10 es $R'(10) = 79.92$ y en 60 es $R'(60) = -20$. Esto quiere decir que cuando el nivel de producción es diez (o sesenta) unidades, el ingreso aumenta (o disminuye) en 79.92 (o 20) por unidad adicional aproximadamente.
6. La tasa del costo de producción es 300 u.m. por mes. Esto quiere decir que cuando el nivel de producción actual es de 100 unidades, pero se incrementan a una tasa de 3 por mes, los costos se incrementan en 300 u.m. por mes.
7. La tasa de cambio $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dq}(100) \cdot \frac{dq}{dt} = 55$ significa que en un nivel de producción de 100 unidades, el ingreso está aumentando a una tasa de 55 mil dólares por mes aproximadamente cuando las unidades se incrementan en dos unidades por mes. La tasa de cambio $\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dq}(100) \cdot \frac{dq}{dt} = 5$ significa que la utilidad está aumentando a una tasa de 5 mil dólares por mes aproximadamente cuando las unidades se incrementan en dos unidades por mes.
8. La tasa de cambio $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dq}(10) \cdot \frac{dq}{dt} = 194.44$ significa el ingreso está aumentando a una tasa de 194.44 dólares por semestre cuando la demanda es de 10 unidades y está creciendo a una tasa de 4 unidades por semestre.
9. La tasa de cambio $\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dq}(2500) \cdot \frac{dq}{dt} = 11\,562.5$ significa que las ganancias de la empresa están aumentando a una tasa de 11 562.50 dólares por mes cuando el nivel de producción es de 2500 unidades y la misma crece a razón de 50 unidades por mes.

- 10.a. La cantidad producida por 12 empleados es $q(12) = 2249.86$. Luego, $R(2249.86) = 1277.86$ miles de dólares, es decir, 1 277 869.24 dólares. El precio por unidad es $\frac{1\,277\,869.24}{2249.86} = 567.98$ dólares.
- 10.b. $R'(2249.86) = 0.32$ significa que el ingreso marginal es aproximadamente 0.32 miles de dólares por unidad adicional producida, lo que equivale a 320 dólares.
- 10.c. La tasa de cambio es $\frac{dR}{dm} = 143.07$. Esto significa que al incrementar el número de empleados cuando hay 12, el ingreso total aumentará en aproximadamente 14 307 dólares.

Ejercicios 1.71 (p. 154)

- 1.a. La ecuación de la recta tangente en $x = e$ es $y = \frac{3}{e}x$.
- 1.b. La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = \frac{x}{4\sqrt{\ln 2}} + \frac{2\ln 2 - 1}{2\sqrt{\ln 2}}$.
- 1.c. La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = x - 1$.
- 2.a. $y' = \ln x + 1 = 0$ si $\ln x = -1$, esto es si y solo si $x = e^{-1}$.
- 2.b. La recta tangente es $y = -\frac{1}{e}$ pues $y' = 0$ cuando $x = e^{-1}$.
- 2.c. En $x = 0.35 < e^{-1}$, $y' = \ln 0.35 + 1 \approx -0.0498$, por tanto la derivada es negativa a la izquierda de e^{-1} . Análogamente, en $x = 0.37 > e^{-1}$, $y' = \ln 0.37 + 1 \approx 0.005\,747$, por tanto la derivada es positiva a la derecha de e^{-1} . Esto nos dice que la función decrece si $x < e^{-1}$ y crece si $x > e^{-1}$.
- 3.a. Dado que $q > 0 \wedge p > 0$, el dominio es $D_q = [0, \sqrt{24})$.
- 3.b. La cantidad demandada es 608 900 unidades.
- 3.c. El signo de la derivada es $\frac{dq}{dp} = -\frac{400p}{25-p^2} < 0$ y la demanda es decreciente en el dominio correspondiente.
- 3.d. La tasa $\frac{dq}{dp}(2) = -38\,095$ significa que si el precio aumenta de 2 a 3 dólares la demanda disminuye 38 095 unidades aproximadamente.
- 3.e. Las función de ingreso es $R(p) = 200p \ln(25 - p^2)$ y el ingreso marginal es $R'(p) = 200 \left(\ln(25 - p^2) - \frac{2p^2}{25 - p^2} \right)$.

- 3.f. $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} = 532.71 \cdot 2 \cdot 0.002 \approx 2.13084$ lo que significa que la tasa de cambio semanal cuando el precio del artículo es dos dólares y aumenta a una razón del 0.2 % semanal, el ingreso semanal aumenta aproximadamente 2.13 dólares.
4. La tasa de cambio es $\frac{dR}{dt} = R'(231) \cdot q'(7) \approx 12.885 \times 26 \approx 335$ (cientos de pesos/día).
5. Dado que $C'(20) \approx 93.73$, el costo marginal del fabricante cuando fabrica 20 unidades de su producto por semana es \$9373.
- 6.a. $C'(q) = \frac{b}{q}$. Si q crece, $C'(q)$ decrece.
- 6.b. **Verdadero.**
- 6.c. **Verdadero.**
- 6.d. **Falso.**
- 6.e. **Verdadero.**

Ejercicios 1.7.2 (p. 161)

2. La ecuación de la recta tangente es $y = \frac{13}{9}x - \frac{10}{3}$.
3. La ecuación de la recta tangente es $y = -x + 3$.
4. Los puntos son $(\sqrt{24}, \sqrt{24})$ y $(-\sqrt{24}, -\sqrt{24})$.
- 5.a. Para que $\frac{dy}{dx}$ exista debe pasar que $b \neq c$.
- 5.b. El punto donde la recta tangente es horizontal es $(1, 1)$.
6. Derivando implícitamente con respecto a y tenemos $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$.
Derivando implícitamente con respecto a x tenemos $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.
7. Derivando implícitamente con respecto a x obtenemos $y' = \frac{-4x^3 - 6xy}{3x^2 - 2y}$. Al ser una función racional y' existe si $3x^2 - 2y \neq 0$. Al despejar obtenemos que esto pasa si $y = \frac{3}{2}x^2$.
8. Derivando implícitamente con respecto a p obtenemos que $\frac{dq}{dp} = -\frac{q}{(p+1)(7+\ln(p+1))}$.
9. Para 4000 unidades de producción de x y 10 000 unidades de producción de y obtenemos que $\frac{dy}{dx} \approx -0.32$. Este valor indica que, en el punto dado de producción, para aumentar la producción de x en una unidad, la empresa debe reducir la producción de y en aproximadamente 0.32 unidades.

10. Para mantener el nivel de producción de 160 000 unidades, al aumentar una hora de trabajo calificado a partir de 30 horas, la cantidad de horas de trabajo no calificado debe disminuir desde 20 horas en $22/7 \approx 3.14$ horas aproximadamente.

Ejercicios 1.7.3 (p. 166)

1.a. $\frac{dy}{dx} = (2x + 1)\sqrt{3x^2 + 1} \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3x}{3x^2+1} \right).$

1.b. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x^3+x}{x+3}} \left(\frac{6x^2+1}{2x^3+x} - \frac{1}{x+3} \right).$

1.c. $\frac{dy}{dx} = 2 \frac{\ln x}{x} \cdot x^{\ln x}.$

1.d. $\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}.$

2. Al aplicar logaritmo natural a ambos miembros tenemos

$$\ln y = \ln x^r = r \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{r}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} \cdot x^r = rx^{r-1}.$$

Utilizamos el resultado anterior para calcular y' para $y = x^\pi$ e $y = x^{-e}$, respectivamente: $y' = \pi \cdot x^{\pi-1}$ e $y' = -e \cdot x^{-e-1}$.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right).$

4. La derivada es $y' = e^x$. Luego, $y(0) = e^0 = 1$.

5. Aplicamos logaritmo de base a a ambos miembros:

$$\log_a y = \log_a a^x = x \log_a a = x$$

$$\frac{y'}{y \cdot \ln a} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

- 6.a. La tasa de cambio del precio para una determinada cantidad demandada es $f'(q) = -0.03e^{-0.001q}$ y $g'(q) = -\frac{10}{3}e^{-\frac{1}{3}q}$ para cada una de las funciones de demanda dadas.

- 6.b. Para ambas funciones de demanda, la función demanda marginal es negativa en su dominio. Esto significa que el precio baja a medida que aumenta la cantidad de unidades producidas.

7. Para la función $C(q)$ dada tenemos: $C'(q) = 10e^{\frac{q}{800}}$, $\bar{C}(q) = \frac{8000}{q}e^{\frac{q}{800}}$ y $\bar{C}'(q) = 10\frac{q-800}{q^2}e^{\frac{q}{800}}$.
 Para $q = 200$, $C(200) \approx 10\,272$ representa que el costo de producir 200 unidades de cierto producto es de 10 272 u.m. aproximadamente, mientras que $C'(200) \approx 12.84$ representa que al producir una unidad adicional a partir de 200 unidades, el costo se incrementa en 12.84 u.m. aproximadamente. Por otro lado, $\bar{C}(200) \approx 51.36$ representa que el costo promedio por unidad al producir 200 unidades es de 51.36 u.m. aproximadamente, mientras que $\bar{C}'(200) \approx -0.19$ representa que al aumentar la producción en una unidad a partir de 200, el costo promedio por unidad aumenta 0.19 u.m. aproximadamente.
8. Para $\bar{C}(q)$ dada tenemos: $C'(q) = 10e^{\frac{2q+6}{800}}$ y $\bar{C}'(q) = \frac{(10q-4000)e^{\frac{2q+6}{800}}-850}{q^2}$.
 La expresión $C'(97) \approx 12.84$ representa que aumentar la producción en una unidad a partir de 97, el costo aumenta 12.84 u.m. aproximadamente. Por otro lado, $\bar{C}'(97) \approx -0.5$ representa que al aumentar la producción en una unidad a partir de 97, el costo promedio por unidad disminuye 0.5 u.m. aproximadamente.
- 9.a. $p(2) \approx 8.19$ dólares; $p'(2) \approx -0.82$ dólares.
- 9.b. Sea $\frac{R'(2)}{R(2)} \cdot 100 = \frac{2}{5} \cdot 100 = 40\%$. Esto significa que al aumentar las ventas en cien unidades a partir de 200, se presenta un aumento en los ingresos de un 40 %.
- 10.a. $q'(5) \approx 73.78$, $q'(10) \approx 27.07$ y $q'(20) \approx 3.66$. Esto representa que la producción diaria de la empresa aumenta en 74 unidades aproximadamente del quinto al sexto día, aumenta 27 unidades aproximadamente del décimo al onceavo día, y aumenta 4 unidades aproximadamente del vigésimo al vigésimo primero.
- 10.b.i. El signo de la función derivada primera de q es positivo.
- 10.b.ii. El límite de la función derivada primera de q es igual a 0. Esto representa que al aumentar el número de días de forma indefinida, el incremento de la producción por cada día adicional a partir de cierto día tiende a ser 0 por lo que la producción tiende a mantenerse constante. En términos geométricos, a medida que t toma valores más grandes, la función de producción marginal se acerca cada vez más a cero.

- 10.b.iii. La producción de la empresa aumenta a medida que transcurren los días, presentándose un incremento diario mayor en los primeros días. A medida que la cantidad de días aumenta, la producción se incrementa diariamente en una cantidad de unidades cada vez más pequeña, por lo que para una cantidad de días indefinidamente grande, la producción diaria tiene a mantenerse constante.
11. La derivada de la función es $y' = pcke^{-kt+kt}$. Esto significa que la población aumenta continuamente.
12. $\frac{dy}{dt} = A \cdot r \cdot e^{rt}$. Esto significa que al aumentar el tiempo en una unidad, el PBI presenta un incremento aproximadamente igual al producto de la tasa de crecimiento por el PBI en ese momento.

Ejercicios 1.7.4 (p. 170)

1. La función inversa de $y = \sqrt{x}$ es $x = y^2$. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$, $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$. Además, se tiene que $\frac{dx}{dy} = 2y = 2\sqrt{x}$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, por tanto $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$.
- 2.a. Sea $q = \frac{a}{p+c} - b$. Luego, $\frac{dp}{dq} \cdot \frac{dq}{dp} = -\frac{a}{(q+b)^2} \cdot -\frac{(q+b)^2}{a} = 1$
- 2.b. Sea $q = \frac{p^2-a}{-b}$. Luego, $\frac{dp}{dq} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{-b}{2\sqrt{a-bq}} \cdot -\frac{1}{b} \cdot 2\sqrt{a-bq} = 1$
- 2.c. Sea $p = -\frac{\ln \frac{q}{a}}{b}$. Luego, $\frac{dq}{dp} \cdot \frac{dp}{dq} = -ab \cdot e^{-bp} \cdot \frac{-1}{ba \cdot e^{-bp}} = 1$
- 2.d. Sea $p = \frac{b}{q-c} \cdot \frac{1}{a}$. Luego, $\frac{dq}{dp} \cdot \frac{dp}{dq} = \frac{-a(q-c)^{\frac{1}{a}+1}}{b^{\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a}} \cdot \frac{-b^{\frac{1}{a}}}{a(q+c)^{\frac{1}{a}+1}} = 1$
- 3.a. Sean $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ y $g^{-1}(x) = e^{2x}$ las funciones inversas de f y g , respectivamente. Las funciones que representan la pendiente de la recta tangente a la gráfica de cada función son: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}}$, $g'(x) = \frac{1}{2x}$, $(f^{-1})'(x) = 2\sqrt{x-4}$ y $(g^{-1})'(x) = 2e^{2x}$.
- 3.b. $f'(x) \cdot (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} \cdot 2\sqrt{x-4} = 1$; $g'(x) \cdot (g^{-1})'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2e^{2x}$.
- 3.c. Sea $f'(8) = \frac{1}{4}$ y $g'(1) = \frac{1}{2}$. Las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto (8, 2) para f , y en el punto (1, 0) para g son $y = \frac{1}{4}x$ y $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, respectivamente.

Ejercicios 1.8.1 (p. 176)

1.a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-3)}{x^2-9} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x} = \frac{1}{2}$. La indeterminación es de tipo « $\frac{0}{0}$ ».

1.b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 2x - 6}{x+1} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{8x-2}{1} = -10$. La indeterminación es de tipo « $\frac{0}{0}$ ».

1.c. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = \frac{1}{6}$. La indeterminación es de tipo « $\frac{0}{0}$ ».

1.d. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 4x^2 + 2}{x^3 - 1} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 8x}{3x^2} = -\frac{2}{3}$. La indeterminación es de tipo « $\frac{0}{0}$ ».

1.e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4x}{3x^2} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 4}{6x}$. El límite no existe. La indeterminación es de tipo « $\frac{0}{0}$ ».

1.f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 1}{x-1} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 2x}{1} = \infty$. La indeterminación es de tipo « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

1.g. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{3x^2 - 1} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 2}{6x} = \frac{1}{3}$. La indeterminación es de tipo « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

1.h. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x^2} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2x}}{2x} = 0$. La indeterminación es de tipo « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

1.i. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{x}{e^{2x}}}{1 - \frac{x}{e^{2x}}} = 1$. La indeterminación es de tipo « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

1.j. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{x} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{1 + e^{2x}} = -2$. La indeterminación es de tipo « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

1.k. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}$. La indeterminación es de tipo « $\frac{0}{0}$ ».

1.l. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x} = 0$. La indeterminación es de tipo « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

- 2.a. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$. La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x^2} = \infty$. La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- 2.b. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x/2}}{x} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x/2}}{2} = 0$. La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x/2}}{x} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x/2}}{2} = -\infty$. La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- 2.c. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10}{x} - \frac{3}{x^2} = 0$. La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10}{x} - \frac{3}{x^2} = -\infty$. La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- 2.d. No tiene asíntotas.

Ejercicios 1.8.2 (p. 195)

- 2.a. En $x = -1$ hay un máximo absoluto y es 60. En $x = 3$ hay un mínimo absoluto y es -4.
- 2.b. En $x = 4$ hay un máximo absoluto y es 10. En $x = 3$ hay un mínimo absoluto y es -4.
- 2.c. En $x = -1$ y $x = 5$ hay un máximo absoluto y es 60. En $x = 3$ y $x = -3$ hay un mínimo absoluto y es -4.
- 2.d. En $x = -1$ y $x = 5$ hay un máximo absoluto y es 60. En $x = 3$ hay un mínimo absoluto y es -4.
- 3.a. En $x = 3$ y en $x = 6$ hay un máximo relativo. En $x = 4$ hay un mínimo absoluto. En $x = 2$ hay un mínimo relativo.
- 3.b. La recta tangente en $x = 2$ no existe pues la función es discontinua en ese punto. La tangente en $x = 3$ existe y como la función tiene un máximo relativo en ese punto entonces $f'(3) = 0$. La recta tangente en $x = 4$ no existe pues no existe la derivada en ese punto ya que presenta un punto anguloso.
- 4.a. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$ y $f'(x) = 0$ cuando $x \approx 0.37$ y cuando $x \approx 3.63$. Entonces $f(0.37) \approx 12.7$ es un máximo relativo y $f(3.63) \approx -4.7$ es un mínimo relativo. En $(-\infty, 0.37)$ y en $(3.63, \infty)$ f es creciente. Es decreciente en $(0.37, 3.63)$.
- 4.b. Máximo relativo: $x = -\sqrt{\frac{12}{5}}$, $y \approx 6.94$. Mínimo relativo: $x = \sqrt{\frac{12}{5}}$, $y \approx -4.95$. Intervalos de crecimiento: $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{12}{5}}\right), \left(\sqrt{\frac{12}{5}}, \infty\right)$. Intervalos de decrecimiento: $\left(-\sqrt{\frac{12}{5}}, \sqrt{\frac{12}{5}}\right)$.

- 4.c. $f'(x) = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$ y $f'(x) = 0$ cuando $x = 2$ y cuando $x = -2$. Entonces $f(2) = \frac{1}{4}$ es un máximo absoluto y $f(-2) = \frac{-1}{4}$ es un mínimo absoluto. Luego, f es decreciente en $(-\infty, -2)$, f es creciente en $(-2, 2)$ y f es decreciente en $(2, \infty)$.
- 4.d. $f'(x) = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$ y $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. Luego $f(0) = 0$ es un punto crítico de la función y como $f'(-1) = 1$ y $f'(1) = 1$ entonces la función es creciente en todo su dominio. Por lo tanto, f no tiene extremos.
- 4.e. $f'(x) = x + 2x \ln(x)$ y $f'(x) = 0$ cuando $x = e^{-1/2}$. Luego como $f'(-0.5) = -0.19$ y $f'(0.7) = 0.2$ entonces la función es decreciente en $(0, e^{-1/2})$ y creciente en $(e^{-1/2}, \infty)$. Así, f tiene un mínimo absoluto en $x = e^{-1/2}$. El dominio es el conjunto de reales positivos, y el límite de f cuando $x \rightarrow 0$ es cero.
- 4.f. $f'(t) = e^t(1+t)$ y $f'(t) = 0$ cuando $t = -1$. Como $f'(-2) \approx -0.13$ y $f'(0) = 1$ entonces la función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, \infty)$, por lo que f tiene un mínimo absoluto en $t = -1$.
- 4.g. Observemos que f tiene asíntotas verticales en $x = -3$ y en $x = 3$. Luego $f'(x) = \frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2}$. Como $f'(x)$ nunca se hace 0, la función no tiene puntos críticos. Como $f'(1) = -0.15$ entonces la función es decreciente en todo su dominio y no tiene extremos.
- 4.h. Observemos que $x = 0$ no pertenece al dominio de la función. Además $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ y $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$. Así, f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 1)$, y creciente en $(1, \infty)$. Por lo tanto f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.
- 4.i. Observemos que el dominio de la función son los reales positivos. Luego $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ y $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$. Como $f'(0.5) = -1.3$ y $f'(2) = \frac{1}{2}$ entonces la función es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$. Luego f tiene un mínimo absoluto en $x = 1$.
- 4.j. Máximo relativo: $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $y \approx 0.43$. Mínimo relativo: $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y \approx -0.43$. Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}})$, $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty)$. Intervalos de crecimiento: $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$.

5. Si $x = c$ es punto crítico de f , $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, puede existir un punto de inflexión de f ; tal es el caso de $f(x) = x^n$, con n impar y no hay máximo ni mínimo relativo en $x = c$. Si $f'(c)$ no existe, como en el caso de la función $y = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$, no hay máximo ni mínimo local pues dicha función es creciente en todo el dominio.
6. **a.** No existen extremos absolutos. Máximo relativo en $x = -2$, mínimos relativos en $x = 0$ y en $x = 2$. **b.** No existen extremos absolutos. Máximos relativos en $x = -2$ y en $x = 1$. **c.** Mínimo absoluto: $x = 0$. **d.** Máximos relativos: en todos los puntos del intervalos $[-2, 0)$.
7. **a.** Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -3)$, $(0, 1)$, $(2, \infty)$. Intervalos de decrecimiento: $(-3, 0)$, $(1, 2)$. En $x = -3$ y en $x = 1$ hay máximos relativos. En $x = 0$ y en $x = 2$ hay mínimos relativos. **b.** Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1)$, $(1, 2)$, $(4, \infty)$. Intervalos de decrecimiento: $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 4)$. En $x = -1$ y en $x = 2$ hay máximos relativos. En $x = 1$ y en $x = 4$ hay mínimos relativos. **c.** Intervalos de crecimiento: $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$. Intervalos de decrecimiento: $(0, 2)$. En $x = 0$ hay máximo relativo. En $x = 2$ hay mínimo relativo. **d.** Intervalos de crecimiento: $(-2, 0)$, $(1, \infty)$. Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, -2)$, $(0, 1)$. En $x = 0$ hay máximo relativo. En $x = -2$ y en $x = 1$ hay mínimos relativos.
- 8.a. $p(0) = 0$. Al momento del lanzamiento de la plataforma digital, el porcentaje de usuarios de la misma es 0 %. Y $p(12) = 48.33$, por lo que al cabo de un año la cantidad de usuarios es el 48.33 % de la población argentina. El porcentaje promedio mensual estimado es del 4 %, aproximadamente.
- 8.b. $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 90$, lo cual indica que el máximo porcentaje de la población argentina que adquirirá la plataforma digital es del 90 %.
- 8.c. $p'(t) = \frac{18 \cdot e^{0.1t}}{(1 + e^{-0.1t})^2}$. La derivada es positiva $\forall t \in D_p$, y p es creciente.
- 8.d. La gráfica presenta asíntota horizontal: $p = 90$.

Ejercicios 1.8.3 (p. 211)

1. Como $(c, f(c))$ es punto de inflexión, $f''(c) = (f')'(c) = 0$, por lo que $x = c$ es punto crítico de f' . Además, f cambia de concavidad a izquierda y derecha de $x = c$. Si f pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, f' pasa de creciente a decreciente y en $x = c$ hay un máximo local. Por el contrario, si f pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, existe un mínimo local en $x = c$. Por tanto, f' tiene un extremo local en $x = c$.
2. Dada una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, su segunda derivada será $y'' = 2a$ y $y'' \neq 0$. Por lo tanto, una función polinómica de segundo grado nunca tendrá un punto de inflexión y, de esta forma, siempre tendrá la misma concavidad, la cual depende del signo de a .
3. **a.** La gráfica de f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-3, -2)$ y $(0, 3)$, y es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-2, 0)$. Puntos de inflexión: $(-2, f(-2))$ y $(0, f(0))$. **b.** La gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-3, -1)$, y es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-1, 3)$. Puntos de inflexión: $(-1, f(-1))$. **c.** La gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-4, 4)$ por lo que no presenta puntos de inflexión. **d.** La gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, 0)$, y es cóncava hacia abajo en el intervalo $(0, \infty)$. Punto de inflexión: $(0, f(0))$
- 4.a. No, porque tiene que cambiar la concavidad, es decir, cambiar el signo de f'' a izquierda y a derecha de $x = a$.
- 4.b. $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ no es derivable en $x = 1/2$ puesto que $f'(x) = (2x - 1)^{-2/3}$ y $\nexists f'(1/2)$ (Hay recta tangente vertical en $x = 1/2$). Pero en $(-\infty, 1/2)$, $f'' > 0$, mientras que en $(1/2, +\infty)$, $f'' < 0$. De esto, en $x = 1/2$ hay punto de inflexión.
- 5.a. **Verdadero**, f' es positiva en este intervalo.
- 5.b. **Falso**, $x = 0$ no es punto crítico de f .
- 5.c. **Verdadero**, f' decrece en este intervalo.
- 6.a. **Verdadero**.
- 6.b. **Falso**.
- 6.c. **Falso**.
- 6.d. **Falso**.
- 7.a. **Verdadero**.
- 7.b. **Verdadero**.
- 7.c. **Verdadero**.

8. Si se venden 90 unidades, la utilidad alcanza un máximo de 3 494 000 dólares, y el precio de cada unidad es \$44 000 dólares.
- 9.a.i. En $0 < t < 5$.
- 9.a.ii. En $5 < t < 11$.
- 9.a.iii. En $t = 5$.
- 9.a.iv. $I'(5) = 15$.
- 9.b. $I(10) = 200$.
- 9.c. Aconsejaría no abrir nuevas sucursales ya que el IPC irá decreciendo.
- 10.a. La demanda aceleró su crecimiento desde el principio de 2013 hasta finales de 2017. En este período la función crece a tasa creciente.
- 10.b. La tasa de variación instantánea de P alcanzó un máximo en $t = 5$, es decir, a fines de 2017 y el máximo incremento porcentual por año en el número de casas con servicio de televisión digital se produjo a fines de 2017, y es de 1.5 %.
- 10.c. El ritmo de crecimiento del negocio fue decayendo desde principios de 2018.
- 10.d. El máximo porcentaje P de casas con servicios de televisión digital durante el período 2013-2023 fue del 40 %.
- 10.e. Le aconsejaría no ampliar su mercado en este país, porque el porcentaje de casas con servicios de televisión digital continua disminuyendo desde principios de 2018, a una tasa creciente.

Ejercicios 1.8.4 (p. 219)

- 1.a. El azúcar alcanzó el precio más bajo en 2004 y el precio más alto en el año 2000.
- 1.b. El precio mínimo alcanzado por el azúcar es de 0.082 dólares por libra aproximadamente, mientras que el precio máximo es de 0.23 dólares por libra aproximadamente.
- 1.c. El precio decrece a tasa creciente del año 2000 a 2004.
- 2.a. La empresa recibió el mayor número de pedidos después de cuatro semanas.
- 2.b. El número máximo de pedidos es 65 388.
- 3.a. Cuando el precio del artículo aumenta 3.2 % a partir de \$20, la demanda disminuye 13.33 unidades por dólar, en promedio.

- 3.b. Puesto que $q' = -20e^{-\frac{p}{50}}$ y la derivada de la ecuación de la demanda es negativa en su dominio, la demanda decrece a medida que aumenta el precio.
- 3.c. El precio que maximiza el ingreso es de 50 dólares, siendo el ingreso correspondiente de 18 393.97 dólares aproximadamente.
- 4.a. El costo fijo es de 12 000 dólares.
- 4.b. Dado que $C'(1) < 0$ y $C''(1) < 0$, es posible decir que cuando se producen 100 unidades, el costo está disminuyendo a ritmo decreciente.
- 4.c. El costo mínimo es de 7100 dólares y se alcanza cuando se producen 350 unidades.
- 4.d. El costo marginal es mínimo cuando se producen 200 unidades.
- 5.a. El beneficio se maximiza cuando se producen 2500 unidades.
- 5.b. El máximo beneficio es de 250 dólares, siendo el precio por unidad producida de 1 dólar.
- 5.c. Veamos que el ingreso marginal es igual al costo marginal en $q = 2500$:

$$R'(q) = C'(q) \implies \frac{25}{\sqrt{q}} = 0.5 \implies 50 = \sqrt{q} \implies q = 2500.$$

- 6.a. La utilidad viene dada por $U(q) = -aq^2 + (b - d)q - c$.
- 6.b. El valor de q que maximiza la función utilidad es $\frac{d-b}{2a}$.
- 6.c. Para que el modelo propuesto sea consistente los parámetros deben satisfacer que $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, con $b > d$.
7. Si $C'(q) < \bar{C}(q)$, tenemos que

$$\bar{C}'(q) = \frac{C'(q) \cdot q - C(q)}{q^2} < \frac{\bar{C}(q) \cdot q - C(q)}{q^2} = \frac{C(q) - C(q)}{q^2} = \frac{0}{q^2} = 0,$$

y esto demuestra que el costo promedio marginal es negativo.

- 8.a. La derivada de C respecto a q es $C'(q) = \frac{K}{a} \cdot q^{\frac{1}{a}-1}$ es positiva, por lo que la función de costos crece en su dominio.
- 8.b. Dado que $C''(q) = K \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) q^{\frac{1}{a}-2} < 0$ si $\frac{1}{a} - 1 < 0$ y esto pasa si $a > 1$. Al ser la función costo creciente ($C'(q)$ es positiva para toda q) y cóncava hacia abajo, interpretamos que la función crece a tasa decreciente.

- 8.c. La función de costo promedio es $\overline{C}(q) = \frac{5q^{0.8} + 200\,000}{q}$ y su derivada, $\overline{C}'(q) = -\frac{q^{0.8} + 200\,000}{q^2}$, es negativa en todo su dominio; por tanto, el costo promedio por unidad decrece a medida que aumenta la producción.
- 9.a. Hay un máximo absoluto en $x = \frac{3}{2}$ y es $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.168$. Hay un mínimo absoluto en $x = 4$ y es $f(4) \approx 0.021$.
- 9.b. Hay un máximo absoluto en $x = \frac{e}{2}$ y es $g\left(\frac{e}{2}\right) \approx 0.73$. Hay un mínimo absoluto en $x = e$ y es $g(e) \approx 0.622$.
- 10.a. $V(0) \approx 0.6115$. Las ventas que se produjeron al momento del lanzamiento del nuevo celular son 611 unidades.
- 10.b. Puesto que $V(t) \rightarrow 532$ cuando $t \rightarrow \infty$. Dado que V es creciente, podemos decir que el límite de ventas totales para este producto es 532 000 unidades.
- 10.c. Dado que $V'(t) = \frac{601\,000 \cdot 4e^{(-1.30t)}}{1 + 869e^{(-1.30t)}} > 0$ para todo t , las ventas siempre crecen.
- 10.d. Hay un punto de inflexión en $t = \frac{\ln 869}{1.30}$. Interpretamos que la función crece a tasa creciente para $0 < t < \frac{\ln 869}{1.30}$ y crece a tasa decreciente para $t > \frac{\ln 869}{1.30}$.
- 11.a. Para $L > 0$ la función es creciente para todo t . La función tiende a L a medida que t aumenta indefinidamente, así, si L aumenta, la función alcance máximos más altos.
- 11.b. Para $L = 1$ la función es creciente para todo t y tiende a 1 a medida que t aumenta indefinidamente. A medida que k aumenta, la función tiende más rápidamente a 1.
- 11.c. La derivada primera es $f'(t) = \frac{kLCe^{-kt}}{(1+Ce^{-kt})^2}$ y la derivada segunda $f''(t) = \frac{-k^2LCe^{-kt}}{(1+Ce^{-kt})^4}$.

Ejercicios 1.8.5 (p. 225)

1. Usando el diferencial, se estima que la utilidad puede disminuir hasta 600 000 dólares debido a la variación del 2.5 % en la cantidad de unidades vendidas.
- 2.a. El cambio estimado en el ingreso si el nivel de producción se incrementa de 4000 a 6000 unidades es de $dR \approx 108.2$ cientos de dólares, mientras que el valor real del incremento es de $R(6) - R(4) \approx 104$ cientos de dólares.

- 2.b. El ingreso si se venden 6000 unidades es de aproximadamente 35 956 dólares. Como el valor aproximado del ingreso para esta cantidad de unidades es de 36 388 dólares, se está produciendo un error del 1.2 % por defecto en la aproximación.
3. Al aumentar un 10 % el precio del producto la crema antiedad, el ingreso aumenta en 3.2 % aproximadamente, por lo cual la propuesta resulta conveniente.
4. A lo sumo, las utilidades disminuirán 1.48 % aproximadamente.

Ejercicios 1.9 (p. 234)

1.a. $\eta = -\frac{1}{4}$.

1.b. $\eta = -2$.

1.c. $\eta = -0.75$.

1.d. $\eta = -\frac{10}{3}$.

2. Puesto que $\eta = \frac{100}{10e^{-0.5}} \cdot (-0.05e^{-0.5}) = -0.5$, la demanda es inelástica cuando el precio es \$100. Así, un aumento en el precio produce un aumento en el ingreso. Una disminución en el precio produce una disminución en el ingreso también.

3. Puesto que $\eta = \frac{p}{81\,000p^{-3}} \cdot (81\,000 \cdot (-3)p^{-4}) = -3$, la elasticidad no depende del precio al ser constante; esto es, al incrementar el precio en 1 % la disminución en la demanda será siempre el triple, lo que produce una disminución en el ingreso. Sin embargo, una disminución en el precio, produce un aumento en el ingreso también.

4. Para producir un incremento aproximado del 10 % en la demanda, la reducción porcentual en el precio debería ser del 30 %.

- 5.a. 1. $\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dq}} = \frac{120-12q^2}{q} \cdot \frac{1}{-24q} = \frac{120-12q^2}{-24q^2}$. La demanda es elástica si $q < \sqrt{\frac{10}{3}}$, inelástica si $\sqrt{\frac{10}{3}} < q < \sqrt{10}$ y unitaria si $q = \sqrt{\frac{10}{3}}$. 2. Derivando implícitamente $\frac{d}{dq}(2p^2 + 800q = 36\,000)$ y despejando tenemos $\frac{dp}{dq} = \frac{-200}{p}$. La elasticidad de la demanda en función de q es $\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{-200} = \frac{-p^2}{200q} = \frac{2q-90}{q}$. La demanda es elástica si $q < 30$, inelástica si $30 < q < 45$ y unitaria si $q = 30$.

- 5.b. 1. $R(q) = q \cdot p(q) = q(120 - q^2) = 120q - 12q^3$ y $\frac{dR}{dq} = 120 - 36q^2$. Por otro lado, $\frac{dR}{dq} = p(1 + \frac{1}{\eta}) = (120 - 12q^2)(1 + \frac{1}{\frac{120-12q^2}{-24q^2}}) = 120 - 12q^2 + (120 - 12q^2) \cdot \frac{-24q^2}{120-12q^2} = 120 - 12q^2 - 24q^2 = 120 - 36q^2$. Se cumple la igualdad. 2. $R(q) = q \cdot p(q) = q \cdot 20\sqrt{45 - q} = 20\sqrt{45 - q} \cdot q \cdot \frac{-10}{\sqrt{45 - q}}$. Por otro lado, $\frac{dR}{dq} = p(1 + \frac{1}{\eta}) = 20\sqrt{45 - q} \cdot (1 + \frac{q}{2q-90}) = 20\sqrt{45 - q} + 20\sqrt{45 - q} \cdot \frac{q}{2q-90} = 20\sqrt{45 - q} - \frac{10q}{\sqrt{45 - q}}$. Se cumple la igualdad.
6. $q \cdot p^n = a \implies q = \frac{a}{p^n} \implies q' = \frac{-n \cdot a}{p^{n+1}}$.
 $\eta = \frac{p}{\frac{a}{p^n}} \cdot \frac{-n \cdot a}{p^{n+1}} = \frac{p^{n+1}}{a} \cdot \frac{-n \cdot a}{p^{n+1}} = -n$.
 Si $n = 1$, la demanda tiene elasticidad unitaria, es decir, el ingreso no sufre variación ante una variación en el precio.

Ejercicios 1.10 (p. 249)

- 1.a. Dominio: $\mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales de primer orden son: $f_x = 2$; $f_y = 1$. Las derivadas parciales de segundo orden son: $f_{xx} = f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = 0$.
- 1.b. Dominio: $\mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales de primer orden son: $f_x = 2x + 2y$; $f_y = 2x + 2y$. Las derivadas parciales de segundo orden son: $f_{xx} = f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = 2$.
- 1.c. Dominio: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Las derivadas parciales de primer orden son: $f_x = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$; $f_y = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. Las derivadas parciales de segundo orden son: $f_{xx} = \frac{4-y^2}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $f_{xy} = f_{yx} = -\frac{xy}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $f_{yy} = \frac{4-x^2}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 1.d. Dominio: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$. Las derivadas parciales de primer orden son: $f_x = \frac{-y^2}{(x-y)^2}$; $f_y = \frac{x^2}{(x-y)^2}$. Las derivadas parciales de segundo orden son: $f_{xx} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}$; $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2xy}{(y-x)^3}$; $f_{yy} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}$.
- 1.e. Dominio: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 9\}$. Las derivadas parciales de primer orden son: $f_x = \frac{2x}{x^2+y^2-9}$; $f_y = \frac{2y}{x^2+y^2-9}$. Las derivadas parciales de segundo orden son: $f_{xx} = \frac{2(-x^2+y^2-9)}{(x^2+y^2-9)^2}$; $f_{xy} = f_{yx} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2-9)^2}$; $f_{yy} = \frac{2(x^2-y^2-9)}{(x^2+y^2-9)^2}$.

- 1.f. Dominio: $\mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales de primer orden son: $f_x = 3 \cdot e^{3x-6y}$; $f_y = (-6) \cdot e^{3x-6y}$. Las derivadas parciales de segundo orden son: $f_{xx} = 9 \cdot e^{3x-6y}$; $f_{xy} = f_{yx} = -18 \cdot e^{3x-6y}$; $f_{yy} = 36 \cdot e^{3x-6y}$.
- 2.a. La función tiene un máximo local en $(0, 1)$ y su valor máximo es $f(0, 1) = 4$.
- 2.b. La función tiene un mínimo local en $(2, -1)$ y su valor mínimo es $f(2, -1) = -1$.
- 2.c. La función tiene un punto silla en $(2, 0)$.
- 2.d. La función tiene un punto silla en $(0, 0)$; máximo local en $(0, 8)$ y su valor máximo es $f(0, 8) = 256$.
- 2.e. La función tiene un punto silla en $(-1, 0)$. La función tiene un mínimo local en $(1, 0)$ y su valor mínimo es $f(1, 0) = -2$.
- 2.f. La función tiene un punto silla en $(1, -2)$ y en $(-1, 2)$; mínimo local en $(1, 2)$ y su valor mínimo es $f(1, 2) = -6$; máximo local en $(-1, -2)$ y su valor máximo es $f(-1, -2) = 6$.
- 3.a. A y B son complementarios.
- 3.b. A y B son sustitutos o competitivos.
- 4.a. La cantidad de juguetes que espera vender en un año es $z(60, 30) = 438\,750$ juguetes.
- 4.b. Si se aumenta en un millón la inversión en televisión, la cantidad de juguetes vendidos aumenta en $z_x(60, 30) = 3300$ unidades. Si se aumenta en un millón la inversión en plataformas digitales, la cantidad de juguetes vendidos aumenta en $z_y(60, 30) = 2250$ unidades.
- 4.c. Dado que $|D^2 f(x, y)| = -1500 < 0$ no existe una combinación de montos a invertir en cada medio para que las ventas anuales alcancen el valor máximo.
- 5.a. La función beneficio conjunta diaria es: $B(x, y) = -0.05x^2 - 0.02y^2 + 11x + 11y - 775$, B en dólares.
- 5.b. $B(100, 30) = 137$ indica que al producir y vender 100 cajas de velas de la ciudad A y 30 de la ciudad B se obtiene una ganancia diaria de 137 dólares.
 $\frac{\partial B}{\partial y}(100, 30) = 9.8$ lo que indica que a partir de producir 100 cajas de velas en la ciudad A y 30 en la ciudad B, si se vende una caja más de B, manteniéndose constante la cantidad de cajas vendidas de la ciudad A (100), el beneficio diario aumenta aproximadamente 9.8 dólares.

- 5.c. Para obtener el máximo beneficio se deben producir y vender 110 cajas de velas de la ciudad A y 275 de la ciudad B, es decir un total de 19 250 velas por día. El beneficio máximo obtenido es de 1342.5 dólares diarios.
- 6.a. $U(x, y) = -4x^2 - 4y^2 + 12x + 33y - xy$.
- 6.b. El punto crítico de la función utilidad es (1, 4) y aplicando el Teorema 1 se obtiene que representa un máximo local de la función. Por lo tanto para lograr la máxima utilidad debe venderse 1 kg del producto X a 11 dólares y 4 kg del producto Y a 25 dólares.
- 6.c. La utilidad máxima es $U(1, 4) = 72$ dólares.
- 7.a. Es conveniente aumentar el capital, pues por los siguientes mil dólares adicionales la producción semanal aumentará aproximadamente en 62 unidades, mientras que el aumento de una hora hombre reducirá la producción en 51 unidades.
- 7.b. La productividad de la empresa es máxima cuando las horas de mano de obra son 16 y el capital invertido es de 10 500 dólares.
- 8.a. Para maximizar las utilidades deben venderse 21.25 unidades de X y 24 unidades de Y.
- 8.b. La máxima utilidad asciende a 59.63 dólares aproximadamente.
- 9.a. Son competitivos.
- 9.b. La función beneficio es: $B(p_A, p_B) = -75p_A^2 + 75p_Ap_B + 6487.5p_A - 37.5p_B^2 + 1162.5p_B - 333\,000$.
- 9.c. El tipo de té A se debe vender a 102 dólares el kg y el de tipo B a 117.5 dólares el kg.
- 9.d. El beneficio máximo es de 66 159.4 dólares.
- 10.a. $\frac{\partial C}{\partial x}(10, 25) = -124$ se interpreta como que si se producen 25 000 kg de leche empleando 1000 horas-máquina y se aumenta la cantidad de horas en 100 manteniendo la misma cantidad de kg de leche, la corrida de la producción de leche en polvo disminuye en 124 u.m. aproximadamente. Por otro lado, $\frac{\partial C}{\partial y}(10, 25) = 272$ se interpreta como si se producen 25 000 kg de leche empleando 1000 horas-máquina y se aumenta la producción de leche en 1000 kg, la producción de leche en polvo aumenta en 272 u.m. aproximadamente.
- 10.b. Para minimizar el costo total de la corrida de producción de leche se requiere producir 3000 kg de leche empleando 200 horas-máquina.

- 11.a. La función ingreso es: $R(p_1, p_2) = -3.5p_1^2 - 4.4p_2^2 + 517p_1 + 770p_2 + 2.2p_1p_2$.
- 11.b. $p_1 = 110$ y $p_2 = 115$, ambos en las unidades monetarias correspondientes.
- 12.a. Tomando 4 semanas por mes, 3000 horas-hombre semanales equivalen a 12 000 horas-hombre mensuales, es decir, $L = 120$. Además, 70 000 dólares equivalen a $K = 70$. Entonces,

$$P(120, 70) = 1.1 \cdot 120^{0.6} \cdot 70^{0.4} \\ \approx 106.4.$$

Por lo tanto, la producción total es aproximadamente 106 400 litros de cerveza por mes.

- 12.b. Las productividades marginales son

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 1.1 \cdot 0.6 L^{-0.4} K^{0.4}, \quad \frac{\partial P}{\partial K} = 1.1 \cdot 0.4 L^{0.6} K^{-0.6}.$$

Evaluyendo en $(L, K) = (120, 70)$:

$$\frac{\partial P}{\partial L}(120, 70) \approx 0.53, \quad \frac{\partial P}{\partial K}(120, 70) \approx 0.61.$$

Interpretación: si $K = 70$ (es decir, 70 000 dólares mensuales) y se incrementa L en 1 unidad (esto es, 100 h-hombre mensuales), entonces la producción aumenta aproximadamente 0.53 miles de litros, es decir, 530 litros. Por otro lado, si $L = 120$ (esto es, 12 000 h-hombre mensuales) y se incrementa K en 1 unidad (esto es, 1000 dólares mensuales), entonces la producción aumenta aproximadamente 0.61 miles de litros, es decir, 610 litros.

- 13.a. Las ventas disminuyen en, aproximadamente, 73.26 dólares.
- 13.b. Las ventas aumentan, aproximadamente, 5.86 dólares.
- 13.c. Aumentar la inversión en publicidad y mantener el precio.

CAPÍTULO 2

Ejercicios 2.1 (p. 265)

- 2.a. Falso.
- 2.b. Verdadero.
- 2.c. Verdadero.
- 2.d. Falso.

- 2.e. **Falso.**
- 2.f. **Falso.**
- 2.g. **Verdadero.**
- 2.h. **Verdadero.**
- 2.i. **Verdadero.**
3. $R(100) = 9000$, $R'(100) = -120$, $p = 90$. Esto significa que cuando se venden 100 unidades, se obtiene un ingreso de 9000 dólares. El ingreso disminuirá, aproximadamente, a razón de 120 dólares cuando se vende una unidad adicional a partir de 100 unidades.
4. $N(t) = 160t + 10e^t - 10e^5$.
5. La demanda es elástica, para $0 < q < 160$.

Ejercicios 2.2 (p. 269)

- 1.a. $\frac{2}{3a}(ax + b)^{\frac{3}{2}} + C.$
- 1.b. $\frac{1}{a} \ln |ax + b| + C.$
- 1.c. $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$
- 2.a. $\frac{4}{3}(x^2 + 3x)^{\frac{3}{2}} + C.$
- 2.b. $2e^{3x^2+2} + C.$
- 2.c. $\frac{[\ln(3x+1)]^2}{2} + C.$
- 2.d. $\frac{-4}{3}(15 - 3x)^{\frac{1}{2}} + C.$
- 2.e. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$
- 2.f. $\frac{3}{2} \ln(5 + \ln x) + C.$
- 2.g. $2(t^3 + 8)^{\frac{2}{3}} + C.$
- 2.h. $\frac{3}{2}(3 - 2x)^{-1} + C.$
- 2.i. $(\ln z)^4 + C.$
- 3.a. **Verdadero.**
- 3.b. **Falso.**
- 4.a. $\frac{1}{3}f(3x) + C.$

- 4.b. $\frac{1}{2}f(x^2) + C.$
- 4.c. $f(e^x) + C.$
- 4.d. $f(\ln x) + C.$
- 5.a. $V(t) = 4000t + 60\,000 \cdot e^{0.5-0.05t} - 8923.18.$
- 5.b. Luego de un mes: $V(1) \approx 89\,175$ unidades. Luego de dos meses: $V(2) \approx 88\,586.3$ unidades; Luego de sesenta meses: $V(60) \approx 236\,002$ unidades de producción.
- 5.c. El mínimo en las ventas se da entre el cuarto y quinto mes y empiezan a crecer aproximadamente a partir del cuarto mes y siete días.
- 5.d. $V''(t) = 150e^{0.5-0.05t}$, mayor que cero para todo t . Gráficamente, la función ventas es cóncava hacia arriba. En los cuatro primeros meses (hasta el mínimo de ventas) las ventas están disminuyendo, se vende poco o incluso se pierden ventas, pero, como $V''(t)$ es positiva la tasa de ventas está mejorando lentamente. A los cuatro meses y siete días (aprox) se alcanza el mínimo de ventas. Ese es el punto de cambio. A partir de ahí las ventas crecen y como $V''(t)$ es positiva la tasa de crecimiento se acelera, es decir, las ventas crecen a tasa creciente.
6. El porcentaje de desempleados luego de diez meses es $D(10) \approx 5.95\%$ y luego de veinte meses es $D(20) \approx 6.2\%$.

Ejercicios 2.3 (p. 273)

- 2.b. a. Mínimo es -1 . b. Mínimo es $-\frac{1}{9}$. c. Mínimo es $-\frac{1}{4}$. d. Mínimo es aproximadamente -1.84 . e. Mínimo es $-e^{-3}/9$. f. Mínimo es 0 .
- 2.c. a. Asíntota horizontal: $y = 0$. b. Asíntota horizontal: $y = 0$. c. No tiene. d. Asíntota horizontal: $y = 0$. e. No tiene. f. No tiene.
- 2.d. a. Tiene punto de inflexión en $t = 1$. b. Tiene punto de inflexión en $x = -\frac{1}{3}$. c. No tiene. d. Tiene punto de inflexión en $t = -\frac{1}{2}$. e. Tiene punto de inflexión en $x = e^{-\frac{3}{2}}$. f. No tiene.
3. Se alcanza el máximo cuando $t = 0$. Es una función con gráfica cóncava hacia abajo, lo que significa que la venta disminuye cada vez más rápido.
4. $C(q) = -4000 \frac{\ln(q+10)}{q+10} - \frac{4000}{q+10} + 600 + 400 \ln(10) \approx -4000 \frac{\ln(q+10)}{q+10} - \frac{4000}{q+10} + 1521.03$. El costo de producir 120 unidades es $C(120) \approx 1340.49$ dólares.

5. $h(x) = \frac{2}{3} \ln x \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}.$
- 6.a. $a = \frac{1}{2}, b = -4, 2x + 16 \ln \left| \frac{x}{2} - 4 \right| + C$
- 6.b. $a = -2, b = 5, -\frac{2}{3}(x+5)\sqrt{5-2x} + C.$
- 6.c. $a = -3, -\frac{1}{9}(3t+1)e^{-3t} + C.$
- 6.d. $\frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 + C.$

Ejercicios 2.4 (p. 290)

- 1.a. Es una ecuación diferencial no lineal de primer orden y grado 2.
- 1.b. Es una ecuación diferencial lineal de orden 2 y grado 1.
- 1.c. Es una ecuación diferencial lineal de grado y orden 1.
- 1.d. Es una ecuación diferencial no lineal de orden 2 y grado 1.
- 1.e. Es una ecuación diferencial lineal de orden y grado 1.
- 2.a. **Verdadero.**
- 2.b. **Verdadero.**
- 2.c. **Verdadero.**
- 2.d. **Falso.**
- 2.e. **Falso.**
- 2.f. **Falso.**
- 2.g. **Falso.**
- 2.h. **Falso.**
- 3.a. $P(G) = k \cdot G \cdot (C - G/2) + P_0.$
- 3.b. El gasto óptimo en publicidad es $G = 250.$
4. Sí, existe una única solución, $k = 10.$
- 5.a. $dP/dt = -0.1155P.$
- 5.b. Está disminuyendo a una tasa de 0.8085 al año, cuando hay 700 000 barriles.
- 5.c. El contenido del pozo será de 50 000 barriles al cabo de 26 años aproximadamente.
6. $p = 450 - 3x.$
- 7.a. $V(p) = 21 \cdot (p + 3)^{-1/2}.$
- 7.b. Para lograr un volumen de ventas de 10 millones de euros el precio del producto deberá ser de 1.41 euros aproximadamente.

- 8.a. $A(t) = 10e^{0.035t}$.
- 8.b. $A(2) = 10.725$ dólares.
- 8.c. Al cabo de 19.8 años aproximadamente.
- 9.a. $E(58) \approx 70.2$ años.
- 9.b. $E''(t) = -6/(t + 25)^2 < 0$ para todo $t > 0$.
- 10.a. $\frac{dx}{dt} = k(1\,700\,000 - x)$.
- 10.b. $x(t) = 1\,700\,000 - 1\,600\,000e^{-kt}$.
- 10.c. Después de 12 horas se tendrán aproximadamente 813 644.18 pesos.
- 10.d. Aproximadamente a las 46 horas la asociación obtendrá el monto necesario para realizar la cirugía con el descuento del 10 %.
11. No alcanza el fondo para costear los estudios dado que el fondo al cabo de 8 años sería de 17 295.6 dólares aproximadamente y se necesita 21 000 dólares para costear los 4 años de estudio.
- 12.a. La cantidad de billetes de \$5 que había en circulación para cada tiempo t , en el período ago/19 - feb/20 está dado por la expresión $y(t) = 510.6e^{-0.04t}$.
- 12.b. Aproximadamente 17 semanas.
- 12.c. Aproximadamente 75 semanas.
- 13.a. $p(t) = 15 + 135e^{-2t}$.
- 13.b. $p(2) \approx 17.47$ dólares.

Ejercicios 2.5.1 (p. 312)

- El consumo eléctrico fue 14 396.9 kWh.
- 943 m^3 .
- 5984.65 g.
- 1040 dólares.
- El costo total diario de producir 20 unidades del producto de la compañía es aproximadamente 1433.33 dólares.
- $P'(t)$ es la tasa de variación de la población $P(t)$; $\int_{t_1}^{t_2} P'(t) dt$ representa el total de la variación de la población de t_1 hasta t_2 .
- Son las ventas totales en los doce meses siguientes a partir del momento cero.

8. Representa la variación de $f(x)$ entre x_1 y x_2 .
9. 2966.6 dólares.
- 10.a. **Falso.**
- 10.b. **Verdadero.**
- 10.c. **Falso.**
- 10.d. **Verdadero.**
- 11.a. π .
- 11.b. -6 .
- 11.c. 3 .
- 12.a. $-\int_2^4 x \, dx = -6$.
- 12.b. 0 .
- 12.c. $4 \int_2^4 x \, dx = 24$.
- 12.d. $-\int_2^4 x^3 \, dx + 4 \int_2^4 dx = -52$.
- 12.e. $-\int_2^4 x^3 \, dx + \int_2^4 x \, dx - \int_2^4 dx = -46$.
- 12.f. 0 .
- 13.a. 15 .
- 13.b. 5 .
- 14.a. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{20}{3}$, entonces $F'(x) = x^2 - 2x = f(x)$ por lo que se verifica el teorema.
- 14.b. $F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 12$, entonces $F'(x) = x^{\frac{1}{3}} = f(x)$ por lo que se verifica el teorema.
15. **Verdadero.**

Ejercicios 2.5.2 (p. 324)

- 1.a. $A = \frac{7}{3}$ unidades de área.
- 1.b. $A = 15$ unidades de área.
- 1.c. $A = 4.003$ unidades de área aproximadamente.
- 1.d. $A = \frac{16}{3}$ unidades de área.
- 1.e. $A = \frac{59}{8}$ unidades de área.
- 1.f. $A = 7.78$ unidades de área aproximadamente.
- 1.g. $A = (e^2 + e^{-2})$ unidades de área.

2. $A = \frac{76}{3}$ unidades de área.
3. $A = 24.17$ unidades de área aproximadamente.
4. Región A: $A = 38/3$ unidades de área; Región B: $A = 37/3$ unidades de área; Región C: $A = 44/3$ unidades de área.
5. Respecto a x :

$$\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt{x}) dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = \frac{9}{2}.$$

Respecto a y :

$$\int_{-1}^2 (-y^2 + (2 + y)) dy = \frac{9}{2}.$$

6. $f(x) = -x + 1$; $g(x) = (x - 1)^3$.
7. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.
- 8.a. $A = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - h(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (g(x) - h(x)) dx$.
- 8.b. $A = \int_{-1}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$.
- 8.c. $A = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx + \int_2^3 (g(x) - f(x)) dx$.
- 8.d. $A = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx$.

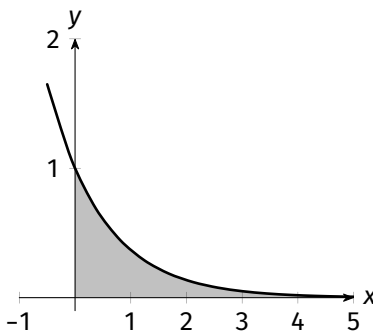
Ejercicios 2.5.6 (p. 333)

1. $L \approx 31\%$.
2. $L = \frac{a}{3}$.
- 4.a. $SC \approx 363.08$ u.m. y $SP \approx 96.1$ u.m..
- 4.b. $SC \approx 8000$ u.m. y $SP \approx 5333.3$ u.m..
- 5.a. $p = 100 - 0.25q$.
- 5.b. $SC = 5000$ dólares y $SP = 3200$ dólares.
6. **a.** $p(q) = 100 - 2\sqrt{q}$; **b.** $p(400) = 60$ dólares; **c.** $SC \approx 5333.3$ dólares; **d.** $R(800) - R(600) \approx 4139.05$ dólares.
7. La máxima utilidad se alcanza al cabo de los 8 años, y la misma es de 58 millones de dólares.

8. $t = \left(\frac{c-a}{d-b}\right)^2$ con $d \neq b$ y $(c-a)$ múltiplo de $(d-b)$ para que $t \in \mathbb{Z}$. Ejemplos de valores para a, b, c y d : $a = 2, b = 2, c = 4$ y $d = 4$; $a = 3, b = 1, c = 12$ y $d = 4$; $a = 4, b = 5, c = -10$ y $d = -2$. La utilidad es $U_{\max} = (a-c)\left(\frac{c-a}{d-b}\right)^2 + (d-b)\left(\frac{c-a}{d-b}\right)^3$.
9. El ensamblado de las calculadoras demorará aproximadamente 593 horas-hombre.

Ejercicios 2.6 (p. 339)

- 1.a. La integral es divergente.
- 1.b. La integral converge a $\frac{1}{2}$.
- 1.c. La integral es divergente.
- 1.d. La integral converge a 0.
- 1.e. La integral converge a $-e^{-1}$.
- 1.f. La integral converge a 4.
2. El área es $= 1u^2$. Su representación gráfica, acotada entre cero y cinco, es



3. La integral es convergente si $a > 1$.
4. Se podrá reunir 10 millones de dólares como máximo.

CAPÍTULO 3

Ejercicios 3.1 (p. 365)

- 1.a. Los primeros seis términos de la sucesión son $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{9}$, $a_3 = \frac{3}{28}$, $a_4 = \frac{4}{65}$, $a_5 = \frac{5}{126}$ y $a_6 = \frac{6}{217}$. La sucesión es monótona decreciente y está acotada superiormente por $\frac{1}{2}$ e inferiormente por 0.
- 1.b. Los primeros seis términos de la sucesión son $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 1$, $b_5 = -1$ y $b_6 = 1$. No es una sucesión monótona y esta acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1.
- 1.c. Los primeros seis términos de la sucesión son $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 6$, $c_4 = 24$ y $c_5 = 120$. La sucesión es monótona creciente y esta acotada inferiormente por 1 pero no está acotada superiormente.
2. Las primeras tres sucesiones son convergentes, mientras que la última es divergente.
- 3.a. La sucesión es convergente y converge a $\frac{2}{3}$.
- 3.b. La sucesión es convergente y converge a 0.
- 3.c. La sucesión es divergente.
- 3.d. La sucesión es convergente y converge a $\sqrt{3}$.
- 3.e. La sucesión es convergente y converge a 1.
- 3.f. La sucesión es convergente y converge a 0.
- 3.g. La sucesión es convergente y converge a -9.
- 3.h. La sucesión es convergente y converge a 0.
- 3.i. La sucesión es convergente y converge a 0.
- 3.j. La sucesión es convergente y converge a $\frac{3}{2}$.
- 3.k. La sucesión es divergente.
- 3.l. La sucesión es convergente y converge a e^{-6} .
- 4.a. La sucesión es monótona decreciente.
- 4.b. La sucesión es monótona creciente.
- 4.c. La sucesión es monótona creciente.
- 4.d. La sucesión es monótona decreciente.
- 4.e. La sucesión no es monótona.

- 4.f. La sucesión es monótona creciente.
- 5.a. El término general viene dado por $3n - 2$ si $n \geq 1$.
- 5.b. El término general viene dado por $2 - 2n$ si $n \geq 0$.
- 5.c. El término general viene dado por $\frac{2}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n$, si $n \geq 0$.
- 5.d. El término general viene dado por $\frac{n}{5}$ si $n \geq 1$.
- 5.e. El término general viene dado por $-\frac{4}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ si $n \geq 0$.
- 5.f. El término general viene dado por $3 - 4n$ si $n \geq 1$.
- 6.a. El límite es 3.
- 6.b. El límite es 7.
- 6.c. El límite es 15.
- 6.d. El límite es -10.
- 6.e. El límite es $-\frac{5}{2}$.
- 6.f. El límite es $\frac{4}{5}$.
8. El capital final al 5 % es aproximadamente \$12155. La tasa de interés anual debe ser de alrededor del 6.8 % para lograr el objetivo deseado.
9. La máquina valdrá un tercio de su valor original pasados 13 años y 2 meses aproximadamente.
10. Luego de cinco años la máquina valdrá \$79 833.25. Es cierto que al cabo de 2 años la máquina valdrá menos de la mitad de su valor inicial.
11. El ingreso de la compañía aumentó en un promedio de 796.8 dólares por mes desde que cuenta con el nuevo servicio.
12. a. $\{(-1)^n\}_{n \geq 1}$; b. $\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$; c. $\{2^n\}_{n \geq 1}$; d. $\{5 - n\}_{n \geq 1}$.
- 13.a. **Falso.**
- 13.b. **Verdadero.**
- 13.c. **Verdadero.**
- 13.d. **Falso.**
- 13.e. **Falso.**
- 13.f. **Falso.**
- 13.g. **Verdadero.**

13.h. **Verdadero.**

13.i. **Verdadero.**

13.j. **Falso.**

14. Si $a_n = n^2$, $a_n = \frac{1}{2^n}$ o $a_n = \sqrt{n+1}$ entonces b_n tiende a infinito. Si $a_n = n^3 - 2n + 1$ entonces b_n tiende a 1. Si $a_n = e^n$ entonces b_n tiende a cero.

Ejercicios 3.2 (p. 396)

1.a. La serie es convergente por ser una serie geométrica de razón $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Su suma es 6.

1.b. La serie es convergente por ser una serie geométrica de razón $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$. Su suma es $\frac{2}{3}$.

1.c. La serie es divergente por ser una serie geométrica de razón $\left|-\frac{7}{3}\right| > 1$.

1.d. La serie es divergente por ser una serie geométrica de razón $\left|\frac{6}{5}\right| > 1$.

1.e. La serie es divergente por ser una serie geométrica de razón $|5| > 1$.

1.f. La serie es convergente por ser una serie geométrica de razón $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$. Su suma es 4.

1.g. La serie es divergente por ser una serie geométrica de razón $\left|\frac{4}{3}\right| > 1$.

1.h. La serie es convergente por ser una serie geométrica de razón $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$. Su suma es $\frac{5}{3}$.

1.i. La serie es convergente por ser una serie geométrica de razón $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$. Su suma es $\frac{9}{28}$.

1.j. La serie es divergente por ser una serie geométrica de razón $\left|\frac{5}{4}\right| > 1$.

1.k. La serie es convergente por ser una serie geométrica de razón $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$. Su suma es $\frac{1}{12}$.

1.l. La serie es convergente por ser una serie geométrica de razón $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. Su suma es $\frac{1}{2}$.

2.a. La serie es $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- 2.b. La serie es $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- 2.c. La serie es $\sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{1}{5}\right)^n$.
- 2.d. La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.
- 3.a. **Falso.**
- 3.b. **Verdadero.**
- 3.c. **Verdadero.**
- 3.d. **Falso.**
- 3.e. **Falso.**
- 3.f. **Verdadero.**
- 3.g. **Falso.**
- 3.h. **Falso.**
- 3.i. **Falso.**
- 3.j. **Verdadero.**
- 3.k. **Falso.**
- 3.l. **Falso.**
- 3.m. **Falso.**
- 3.n. **Falso.**
- 3.o. **Falso.**
- 3.p. **Verdadero.**
4. El posible determinar a cuánto ascenderá la donación. La empresa podrá donar como máximo \$75 000.
- 5.a. Los cinco primeros términos son $a_0 = 200\,000$, $a_1 = 198\,000$, $a_2 = 196\,020$, $a_3 = 194\,059.8$, $a_4 = 192\,119.202$. Se trata de una sucesión geométrica de razón 0.99: $\{a_n = 2 \cdot 10^5 \cdot (0.99)^n\}$.
- 5.b. La serie representa la producción total si se extrajeran reservas de petróleo por tiempo indeterminado. La suma es $2 \cdot 10^7$.
- 5.c. Es posible asegurar la existencia de reservas de petróleo para un tiempo indefinido.
- 6.a. Después de dos años estarán en uso 22 820 unidades y después de tres años 29 679 unidades.
- 6.b. Después de n años estarán en uso $u_n = 160\,000(1 - 0.95^{n+1})$ unidades.

- 6.c. No es cierto que pasados 10 años habrá menos del 80 % de las unidades funcionando.
- 7.a. Con el Criterio de la divergencia podemos ver que la serie diverge.
- 7.b. Con el Criterio de la integral podemos ver que la serie diverge.
- 7.c. Con el Criterio de la integral podemos ver que la serie converge.
- 7.d. Con el Criterio de la integral podemos ver que la serie diverge.
- 7.e. Por la prueba de la divergencia, la serie asociada diverge.
- 7.f. Dado que es una serie geométrica con razón $\frac{1}{4}$ concluimos que converge.
- 7.g. Con el Criterio del cociente podemos ver que la serie converge.
- 7.h. Por Criterio de la raíz, la serie es convergente
- 7.i. Por la prueba de la divergencia, la serie es divergente.
- 7.j. Por el Criterio de Leibniz, la serie es convergente.
- 7.k. Con el Criterio del cociente podemos ver que la serie converge.
- 7.l. Por el Criterio de la integral, la serie es divergente.
- 8. Para que la suma sea igual a 3, debe ser $a = \frac{3}{4}$.
- 9. Para que la serie sea convergente y su suma sea 1, debe ser $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$.
- 10. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n = \sqrt{e}$, la sucesión converge. La serie diverge porque ese límite no es cero (Criterio de la divergencia).

Sobre las autoras y los autores

VIVIANA CÁMARA. Licenciada en Matemática Aplicada (Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral). Magíster en Didácticas Específicas (Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL). Profesora Titular de Cálculo para Ciencias Económicas (Facultad de Ciencias Económicas, UNL). Directora del Departamento de Matemática (FCE–UNL). Directora e integrante de proyectos de investigación y extensión en Matemática Educativa. Directora y evaluadora de trabajos finales de la Especialización en Docencia Universitaria (FHUC–UNL y UTN–FRSF). Directora de becas de iniciación a la investigación (CIENTIBECA). Evaluadora en congresos nacionales e internacionales. Coautora de libros de texto. Expositora en congresos nacionales e internacionales. Representante Argentina ante el CIAEM. Publicaciones en revistas internacionales.

ESTEFANÍA DALMASSO. Licenciada en Matemática Aplicada, doctora en Matemática y profesora Asociada (Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral). Investigadora Adjunta del CONICET en el Instituto de Matemática Aplicada del Litoral Dra. Eleonor Harboure (CONICET–UNL). Directora y codirectora de diversos proyectos de investigación. Directora y codirectora de tesis.

SILVANA GRISETTI. Profesora en Matemática con especialidad en Didáctica de la Matemática. Maestranda en Docencia Universitaria. Docente de nivel medio y superior. Docente e integrante de equipos de investigación y extensión (Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional del Litoral). Especializada en enseñanza y aprendizaje de la Matemática en el nivel universitario.

JONATÁN PERREN. Profesor de Matemática. Profesor Adjunto en Cálculo para Ciencias Económicas e Inferencia Estadística (Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional del Litoral). Docente en programación científica (Julia y R) y en marcado y programación de bajo nivel para composición tipográfica (LaTeX y ConTeXt). Autor del paquete pgf–go (CTAN). Integrante de equipos de investigación. Coordinador editorial de la Revista *Documentos y Aportes para la Administración Pública y Gestión Estatal y de la Revista de Ciencias Económicas*.

MARÍA MAGDALENA MAS. Profesora de Matemática. Docente Investigadora Categoría IV (PRINUAR). Profesora Adjunta Ordinaria en Matemática Básica y Cálculo para las Ciencias Económicas (Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional del Litoral). Coordinadora, codirectora e integrante de múltiples proyectos científicos (PROACI y CAI+D). Autora de numerosos artículos en revistas indexadas y coautora de libros académicos. Ponente en congresos nacionales e internacionales de educación matemática.

GUSTAVO CABAÑA. Licenciado en Matemática Aplicada y doctor en Matemática (Universidad Nacional del Litoral). Docente universitario (Universidad Nacional de Rafaela y la Universidad Nacional del Litoral). Investigador en teoría de códigos auto-correctores y aplicaciones matemáticas a cuestiones de índole económica.

**CÁLCULO PARA
CIENCIAS ECONÓMICAS**
ABORDAJE CONCEPTUAL
Y SIGNIFICATIVO
Viviana Cámara
Estefanía Dalmaso
[compiladoras]

C Á T E D R A

Cálculo para Ciencias Económicas. Abordaje conceptual y significativo ofrece un recorrido riguroso y accesible por los principales contenidos del cálculo diferencial e integral, e incorpora además una introducción al estudio de sucesiones y series. La obra ha sido escrita para la formación del profesional de las ciencias económicas, privilegiando la comprensión conceptual y la construcción de significados por sobre la mera aplicación mecánica de procedimientos. Los ejemplos y problemas desarrollados en contextos económicos promueven la transferencia y extrapolación de los conocimientos matemáticos a situaciones nuevas y relevantes, mientras que la incorporación de herramientas digitales contribuye a enriquecer los procesos de exploración, análisis y aprendizaje. El libro está dirigido a estudiantes que se inician en el pensamiento variacional, indispensable para la comprensión de los fenómenos de cambio, variación y acumulación.