



Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería Química

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de Doctor en Matemática en el campo de Análisis Armónico.

Facultad de Ingeniería Química (UNL) - Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (UNL - CONICET).

ANÁLISIS DE PERTURBACIONES DEL SISTEMA DE HAAR

Unidad Ejecutora donde se realizó la investigación: Instituto de Matemática Aplicada del Litoral.

I M A L



Autor:

WILFREDO ARIEL RAMOS

Director:

Dr. Hugo A. Aimar

Codirectora:

Dra. Gladis Pradolini

Jurados:

Dr. Cabrelli, Carlos Alberto

Dr. Favier, Sergio José

Dra. Viviani, Beatriz Eleonora

Santa Fe - Argentina

2013

Quiero agradecer en primer lugar a mis directores, las dos personas que guiaron mi proceder durante los cinco años que duraron el estudio del doctorado, Hugo y Gladis. A los chicos de la ofi, con los cuales pase muy lindos momentos, el Mauri, Quique, Luis, el Marce, Gastón, la Stephy, la Jose, Emilia, Anibal, Pame, Sabri, María, Marilina, Mickel, Nacho, Edu, Marisa, Horacio, el Conrad, la Marce, Betty, el Goro, Pedro, Richard Toledano, Oscar, Pola, Nora, Silvia, Nestor. A todos y cada uno de ellos, y a mi muy querido liso santafesino, muchas gracias por todo.

Will.

Índice general

Resumen	5
Introducción. Idea central de la Tesis	7
Parte A - Contexto Euclídeo	13
Capítulo 1. Preliminares de análisis funcional y armónico	15
1.1. Lema de Cotlar	15
1.2. Pesos de Muckenhoupt en \mathbb{R}^n	17
1.3. Lema de Schur	19
1.4. Marcos, Bases de Riesz, Sucesiones de Bessel	19
1.5. Teorema de Estabilidad de Favier-Zalik	21
1.6. Sistema ortonormal de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$	21
Capítulo 2. Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en el espacio euclídeo	25
2.1. Perturbaciones del sistema de Haar de $L^2(\mathbb{R})$	25
2.2. Perturbaciones del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$	30
2.3. Bases de Riesz en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ de perturbaciones del sistema de wavelets de Haar desbalanceadas	33
Capítulo 3. Regularización del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R})$	41
3.1. Regularización por convolución de las funciones de Haar	41
3.2. Regularización de perturbaciones por aproximación de soportes del sistema de Haar	47
Capítulo 4. Estabilidad de bases de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt	53
4.1. Construcción de la regularización, enunciado y demostración del Teorema	53
Capítulo 5. Bases de Riesz continuas para espacios L^2 con pesos de variables separadas en \mathbb{R}^n	65
5.1. Caso multiparamétrico	65
5.2. Caso uniparamétrico	68
Parte B - Contexto Abstracto	81
Capítulo 6. Espacios de tipo homogéneo	83
6.1. Espacios de tipo homogéneo	83
6.2. Familias diádicas	84
6.3. Funciones maximales	86
6.4. Pesos de Muckenhoupt sobre (X, d, μ)	86

6.5.	Integrales Singulares	88
6.6.	Espacios de Banach de funciones y teorema de extrapolación	91
6.7.	Sistema de Haar	92
Capítulo 7.	Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors	97
7.1.	Perturbaciones de soportes de sistemas de Haar	98
Capítulo 8.	Integrales Singulares y sumabilidad de perturbaciones regulares de sistemas de Haar	107
8.1.	La Teoría L^2	109
8.2.	Los Núcleos	118
8.3.	La Teoría L^p	122
8.4.	El Operador Cuadrático S_ϵ	126
8.5.	Acotación en $L^p(X, \nu d\mu)$ de $T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1}$	128
Capítulo 9.	Sistemas de Haar y espacios de Banach de funciones definidas sobre espacios de tipo homogéneo	135
9.1.	Caracterización de espacios de Banach de funciones por wavelets de Haar	136
	Conclusiones	141
	Bibliografía	143

Resumen

Este trabajo explora la relación entre la estabilidad de pequeñas perturbaciones de sistemas de Haar y la geometría del dominio de las funciones del espacio L^2 subyacente.

La teoría de las integrales singulares se instala en dos puntos centrales de todo el desarrollo:

1. proveyendo el recurso técnico mas importante de toda la tesis; el Lema de Cotlar,
2. recibiendo, como contraprestación, una nutrida familia de ejemplos que permiten resolver algunos problemas abiertos de análisis armónico en espacios de tipo homogéneo, como el de caracterización de los pesos de Muckenhoupt como aquellos que garantizan la acotación en espacios de Lebesgue de ciertas familias de integrales singulares.

Así, la tesis contiene aportes de la teoría de integrales singulares al estudio de perturbaciones de bases de Haar y recíprocamente. Que también puede verse como una interacción entre las líneas que, no sin riesgo de imprecisión, podemos llamar *moderna* y *clásica* del análisis armónico.

En la dirección “herramientas clásicas” \rightarrow “resultados modernos” mencionamos que el Lema de Cotlar nos permite:

- desarrollar técnicas para el análisis de la estabilidad dentro de la clase de las Bases de Riesz de L^2 por pequeñas “perturbaciones geométricas” en los soportes de sistemas de Haar en contextos euclídeos, euclídeos ponderados y en espacios métricos con medida,
- construir bases de Riesz regulares con soportes ajustados a los cubos diádicos regularizando las wavelets de Haar por convolución. Como consecuencia las funciones regulares obtenidas tienen soporte compacto y son C^∞ ,
- desarrollar una estrategia similar a la de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ en $L^2(\mathbb{R}, wdx)$, con w un peso de Muckenhoupt y obtener bases de Riesz suaves y de soportes ajustados a diádicos tanto en el modo producto tensorial (multiparamétrico) como en el modo “uniparamétrico” de $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ cuando w es un producto tensorial de pesos $A_p(\mathbb{R})$,
- obtener condiciones geométricas suficientes en términos de dimensiones de cubos diádicos y de sus fronteras en espacios de tipo homogéneo para que los procesos de aproximación estudiados en el caso euclídeo, conduzcan a resultados de estabilidad.

En la dirección inversa, se analizan las integrales singulares que surgen en la confección de los sistemas de Bessel regulares. Estas integrales singulares también resultan operadores de tipo Calderón-Zygmund, por lo tanto se prueba la acotación de estas en los espacios $L^p(X, \mu)$ y los espacios pesados $L^p(X, \nu d\mu)$. En \mathbb{R}^n los pesos de Muckenhoupt se caracterizan por la acotación del operador maximal y por la

acotación de las transformadas de Riesz (ver [19]). Mostramos que el mismo tipo de caracterización es válida en el caso de las integrales singulares inducidas por los métodos de sumabilidad en la teoría de wavelets.

Finalmente demostramos una caracterización, via wavelets de Haar, de espacios de Banach de funciones. La herramienta principal es un teorema de extrapolación.

Introducción. Idea central de la Tesis

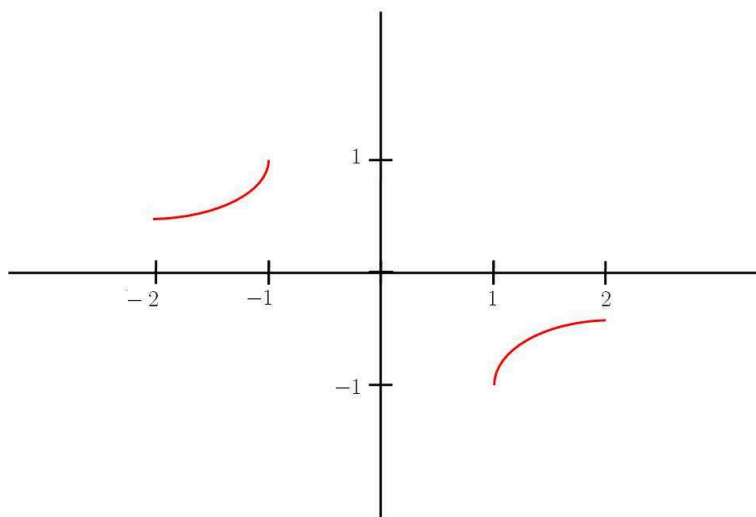
La transformada de Hilbert, definida por $H\varphi = \text{v.p.} \frac{1}{x} * \varphi$ para una función test de Schwartz φ por

$$H\varphi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{\varphi(y)}{x-y} dy,$$

es el paradigma de integral singular. Es imposible exagerar la importancia del impacto que la comprensión de las propiedades de este operador tiene en el análisis armónico y en toda la matemática.

En algún sentido la transformada de Hilbert compite con la función maximal de Hardy-Littelwood en protagonismo en el análisis armónico. Pero más cierto es que cooperan y, desde un punto de vista más general, ambas pueden ser vistas como integrantes de una misma familia de operadores.

Para introducir la idea central de la tesis en relación con el uso del Lema de Cotlar y el análisis en escalas vamos a descomponer la transformada de Hilbert en operadores autosimilares escalados diádicamente. Sea $K(x, y) = \frac{\chi(x, y)}{x-y}$, donde $\chi(x, y) = 1$ si $1 \leq |x-y| < 2$ y $\chi(x, y) = 0$ fuera de esa franja, la figura siguiente



representa a la función $K(x, 0)$.

El reescalamiento diádico de este núcleo, para cada $j \in \mathbb{Z}$, produce la sucesión de núcleos $K_j(x, y) = 2^{-j}K(2^{-j}x, 2^{-j}y)$ que tienen la particularidad de descomponer el núcleo de la transformada de Hilbert de una manera especial

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} K_j(x, y).$$

Lo interesante de la descomposición precedente ha sido observado por Mischa Cotlar en la primera aplicación de su célebre Lema ([18]). El hecho fundamental detrás de

esa descomposición, que induce la descomposición

$$H = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j$$

a nivel de operadores, con $T_j f = \int_{\mathbb{R}} K_j(x, y) f(y) dy$, es la *casi-ortogonalidad* de la sucesión de los T_j . Los detalles de la prueba pueden encontrarse en el libro “Real Analysis Methods in Fourier Analysis” de Miguel de Guzman ([32]). Esto permite demostrar la acotación en $L^2(\mathbb{R})$ de la transformada de Hilbert prescindiendo de la transformada de Fourier. La prescindencia de la transformada de Fourier no sería un logro importante si no fuera que en las aplicaciones en sumabilidad de series de wavelets, los núcleos singulares no son invariantes por traslaciones y la transformada de Fourier no se puede usar.

Es precisamente el tipo de descomposición de H en suma de operadores casi-autosimilares y casi-ortogonales lo que esta tesis explota como un hecho central.

Las integrales singulares más clásicas del contexto euclídeo \mathbb{R}^n tienen que ver con la teoría del potencial. En particular con derivadas segundas del potencial de Newton. Los potenciales localmente integrables, de campos centrales y conservativos, como es el de Newton tienen singularidades débiles (integrables). Pero sus derivadas segundas tienen la singularidad no integrable. Ni local ni globalmente. En efecto, como el potencial de Newton es homogéneo de grado $-n + 2$, sus derivadas segundas son homogéneas de grado $-n$. Pero, entonces, una compensación asombrosa ocurre, los núcleos derivados no son absolutamente integrables pero tienen media nula en la esfera unitaria y esto les devuelve consideración como valores principales.

Los potenciales de tipo Newton o Riesz son fáciles de definir en espacios Ahlfors y aún en espacios de tipo homogéneos generales usando la normalización de Macias y Segovia.

Sin estructura diferencial, las integrales singulares, en cambio, son más difíciles de construir en contextos generales. Desde el punto de vista de la definición de núcleo de Calderón-Zygmund tradicional, la expresión “las integrales singulares son difíciles de construir” carece de sentido puesto que $K(x, y) \equiv 0$ es un núcleo de Calderón-Zygmund en cualquiera de los contextos generales en los que trabajamos. Lo que queremos decir es construir $K(x, y)$ “realmente” singulares. ¿Cómo interpretar lo de “realmente” singular?. Un modo es preguntarnos cuán lejos o cerca está de la Maximal de Hardy-Littlewood que es en todos los contextos un control central del Análisis Armónico. En particular sabremos que algo es “realmente singular” si es capaz de detectar los pesos de Muckenhoupt.

En \mathbb{R}^n las n transformadas de Riesz forman un conjunto chico de integrales “realmente singulares” porque si todas son acotadas en L^p con peso w , entonces w está en A_p de Muckenhoupt. Y por lo tanto la maximal de Hardy-Littlewood está acotada en L^p de tal mismo w . En la parte B de la tesis usaremos los métodos de sumabilidad para regularizaciones de wavelets de Haar para producir integrales “realmente singulares” en espacios de tipo homogéneo.

En (1964), en [11] A.P. Calderón introdujo una fórmula, hoy conocida como fórmula de Calderón o resolución de la identidad de Calderón, que ya contiene los dos ingredientes esenciales de la que luego sería la teoría de wavelets: análisis en escala y localización. La fórmula es

$$(0.0.1) \quad f = \int_0^\infty \psi_t * \psi_t * f \frac{dt}{t},$$

donde ψ tiene momentos nulos, es radial, suave y $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$.

La transformada de Fourier $\mathfrak{F}f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} f(t) dt$ da una representación del contenido de frecuencia de f . La localización en el tiempo puede ser aproximada si partimos primero la señal f y tomamos una porción $g(s-t)f(s)$ bien localizada de f por la ventana g , y entonces le calculamos su transformada de Fourier

$$(0.0.2) \quad T^{\text{win}}f(\omega, t) = \int f(s)g(s-t)e^{-i\omega s} ds.$$

Esta es la transformada de Fourier localizada. Muchas elecciones pueden hacerse de la función ventana g en el análisis de señales, en particular puede elegirse g con soporte compacto y con una suavidad razonable.

La transformada wavelet provee de una descripción similar de tiempo-frecuencia con algunas importantes diferencias. La fórmula análoga a (0.0.2) de la transformada wavelet es la siguiente

$$(0.0.3) \quad T^{\text{wav}}f(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.$$

La transformada wavelets y la transformada localizada calculan el producto interno de f con una familia de funciones indexada en dos niveles, $g^{\omega, t}(s) = e^{i\omega s}g(s-t)$ en (0.0.2), y $\psi^{a, b}(s) = |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{s-b}{a}\right)$ en (0.0.3). Las funciones $\psi^{a, b}$ se llaman "wavelets", "ondeletas", "ondículas", "onditas".

El estudio de las wavelets comienza en 1982 con los trabajos de Morlet, Arens, Fourgeau y Giard, Morlet(1983), Grossmann y Morlet (1984).

En el ya clásico libro "Ten lectures on wavelets", I. Daubechies ([22], (1992)) vuelca el desarrollo de varios trabajos referidos al análisis provisto por la transformada wavelet y en particular de la construcción de wavelets suaves con soporte compacto.

Las primeras bases ortonormales de wavelets para $L^2(\mathbb{R})$ son las de Haar. La función básica de Haar es

$$(0.0.4) \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El sistema $\{h_k^j(x) = 2^{-\frac{j}{2}}h(2^{-j}x - k)\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, más aún, es una base incondicional para $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$ (ver [22]. cap. 1 y cap. 9). La propiedad de tener soporte compacto es crucial, sin embargo, debido a que no son continuas, estas wavelets no resultan adecuadas cuando el análisis involucra funciones regulares.

Por otra parte una base ortonormal de wavelets regulares de $L^2(\mathbb{R})$, sin soporte compacto, es la de Littlewood-Paley, cuya función básica esta dada en términos de su transformada de Fourier $\widehat{h}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\chi_{(\pi, 2\pi]}(|\xi|)$ o

$$(0.0.5) \quad h(x) = (\pi x)^{-1}(\text{sen}2\pi x - \text{sen}\pi x),$$

cuyo decaimiento es $h(x) \sim |x|^{-1}$ para $x \rightarrow \infty$. Posteriormente se fueron construyendo sistemas de bases ortonormales de wavelets que conservan lo mejor posible las propiedades de los sistemas dados por Haar y por Littlewood-Paley. La primera construcción fue dada por Stromberg (1982), su wavelet tiene decaimiento exponencial y son C^k con k arbitrario pero finito. El siguiente ejemplo fue dado por Meyer

(1985), su wavelet cumple que \widehat{h} tiene soporte compacto y es C^k . En 1987 Tchamitchian construye un sistema de wavelets biortogonales. También en 1987 Battle y Lamarié en 1988 construyeron bases de wavelets ortogonales $h \in C^k$ con decaimiento exponencial. Battle se inspira en técnicas de mecánica cuántica mientras que Lamarié en las de Tchamitchian. En 1986 S. Mallat e Y. Meyer desarrollan el análisis de multiresolución el cual prueba ser una herramienta muy útil para la construcción de otras bases. Precisamente una de las contribuciones más importantes de Daubechies a la teoría es su construcción de wavelets suaves con soporte compacto. Auscher y Hytönen en [10] hacen un importante aporte al construir wavelets regulares con decaimiento exponencial en el contexto de espacios métricos con medida.

Un elemento crucial en el resultado de Daubechies es la relación creciente entre regularidad de wavelet y tamaño del soporte. Es decir, a mayor regularidad requerida, mayor tamaño del soporte. En esta tesis mostramos que los procesos de regularización que son usuales en el análisis armónico pueden aplicarse para obtener bases con tanta regularidad como se quiera (o se pueda según el contexto) sin perder el control del soporte por las familias diádicas subyacentes. Esto puede hacerse si las condiciones de ortonormalidad se debilitan a quasi-ortonormalidad medida en términos de bases de Riesz.

Las noción de base de Riesz será dada en el Capítulo 1, de preliminares.

Cuando $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de Bessel en un espacio de Hilbert H con cota B y $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal, el operador T definido por

$$Tf := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, f_k \rangle e_k$$

está acotado en H con cota B . Inversamente si T está acotado sobre H , entonces $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de Bessel con cota $\|T\|$.

Cuando $f_k = e_k$, T es la identidad. En general, cuando $H = L^2$, T es un operador integral singular en un sentido amplio. Las técnicas del análisis armónico para la acotación de operadores incluyen el Lema de Cotlar, cuyo enunciado y demostración están en el Capítulo 1.

Nuestro interés radica en el caso particular de $H = L^2$, cuando el sistema de Bessel y la base ortonormal se construyen por dilataciones y traslaciones del espacio subyacente. En tal caso el operador T tiene una descomposición natural como $T = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j$. Algunas veces la base ortonormal puede ser elegida de tal manera que los operadores T_j resulten casi ortogonales en el sentido de Cotlar. Nosotros utilizaremos esta técnica para producir sucesiones de Bessel regulares y bases de Riesz regulares y localizadas.

En este trabajo se presentan diferentes versiones de perturbaciones de sistemas de Haar, algunas de ellas son perturbaciones regulares con soportes localizados. Continuando con la idea de encontrar sistemas de funciones que conserven las propiedades de las wavelets de Haar y las de Littlewood-Paley, buscamos sistemas de funciones con soporte compacto que gocen de algún nivel de regularidad y que caractericen, de alguna manera, los espacios funcionales L^p , tanto en el contexto euclídeo como en el de espacios métricos con medida. Otras perturbaciones exploran mejor la relación del sistema de Haar con el contexto geométrico en el que están definidas. En este sentido cabe mencionar que la estabilidad de perturbaciones por aproximación de soportes está relacionada de manera natural con cierta regularidad de las fronteras

de cubos diádicos medida en términos de la relación entre la dimensión de un cubo y la de su frontera.

La monografía se divide en dos partes, y diez capítulos, en la Parte A se trabaja en el contexto de espacios euclídeos y consta de cinco capítulos. En el primer capítulo se enuncian resultados preliminares y herramientas básicas con las que trabajaremos. En el Capítulo 2 se construyen bases de Riesz, no regulares, con soportes localizados, por perturbaciones de sistemas de Haar. Las ideas generales de cómo vincular el lema de Cotlar y el teorema de estabilidad de Favier y Zalik son expuestas en este capítulo y serán adaptadas a lo largo de toda la monografía.

En los Capítulos 3 y 4 se construyen bases de Riesz regulares en el contexto euclídeo, considerando en el primero la medida de Lebesgue y cambiando la medida de Lebesgue por $w dx$, para w un peso de Muckenhoupt, en el segundo. En el Capítulo 5 se construyen bases de Riesz regulares en espacios L^2 con pesos de Muckenhoupt especiales en \mathbb{R}^n .

En la Parte B se trabaja en el contexto de espacios métricos con medida, explorando las relaciones entre geometría y análisis. Para ello en el Capítulo 6 se repasan resultados de integrales singulares y propiedades básicas de espacios de tipo homogéneo y de espacios de Banach generales que serán usados en el desarrollo posterior.

En el Capítulo 7 se estudia la estabilidad como bases de Riesz de perturbaciones geométricas de sistemas de Haar en $L^2(X)$, para X un espacio métrico con medida. En el Capítulo 8 se estudian los operadores integrales singulares inducidos por sistemas de Bessel de funciones regulares obtenidas por perturbaciones de sistemas de tipo Haar. Se obtiene la teoría $L^p(X)$ para esos operadores. En el Capítulo 9 se estudian los operadores del Capítulo 8 en espacios pesados $L^p(X, \nu d\mu)$, con ν un peso en la clase de pesos diádicos de Muckenhoupt y se obtiene un teorema de caracterización de pesos en términos de integrales singulares. En el Capítulo 10 se demuestra una caracterización de ciertos espacios de Banach de funciones definidas sobre espacios de tipo homogéneo via wavelets de Haar. Finalmente se detallan las Conclusiones Generales basadas en los resultados principales de cada capítulo.

Parte A - Contexto Euclídeo

Capítulo 1

Preliminares de análisis funcional y armónico

En este capítulo se presentan resultados cruciales que serán utilizados a lo largo de esta monografía, está dividido en seis secciones, en la Sección 1 se ilustra, enuncia y demuestra el Lema de Cotlar, los resultados básicos sobre pesos de Muckenhoupt se introducen en la Sección 2 mientras que en la Sección 3 se enuncia y demuestra el Lema de Schur, lema que será utilizado individualmente para la acotación diversos operadores en algunos casos y en otros se aplicará para complementar el Lema de Cotlar. En la Sección 4 se enuncian los conceptos y resultados ligados a Marcos, Sucesiones de Bessel y Bases de Riesz. Uno de los principales teoremas que usaremos a lo largo de toda la tesis es el “Teorema de estabilidad de Favier y Zalik” cuyo enunciado se da en la Sección 5. En la Sección 6 se reúnen los conceptos y propiedades principales de un sistema ortonormal de Haar en L^2 con la medida de Lebesgue.

1.1. Lema de Cotlar

Cuando se trabaja con una sucesión de operadores $\{T_j\}$ definidos sobre un espacio de Hilbert H , y estos cumplen la condición de tener sus normas uniformemente acotadas por una cota B y además son ortogonales entre si, en el sentido que $T_j^*T_i = T_jT_i^* = 0$ si $i \neq j$, entonces el operador definido como $T = \sum T_j$ está acotado sobre H . En efecto si m y N son números naturales entonces la norma del operador $T_N = \sum_{|j| \leq N} T_j$ cumple la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \|T_N\|^{2m} &= \left\| \left[\left(\sum_{i=1}^N T_i^* \right) \left(\sum_{j=1}^N T_j \right) \right]^m \right\| = \left\| \left(\sum_{i,j=1}^N T_i^* T_j \right)^m \right\| \\ &\leq \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2m}=1}^N \|T_{i_1}^* T_{i_2} \dots T_{i_{2m-1}}^* T_{i_m}\|, \end{aligned}$$

como los operadores T_j son ortogonales entonces sólo sobreviven las composiciones en las cuales se cruzan los mismos subíndices, esto es

$$\begin{aligned} \|T_N\|^{2m} &\leq \sum_{i=1}^N \|(T_i^* T_i)^m\| = \sum_{i=1}^N \|T_i\|^{2m} \\ &\leq \sum_{i=1}^N B^{2m} = N B^{2m}, \end{aligned}$$

por lo tanto $\|T_N\| \leq N^{1/2m} B$, haciendo tender m a infinito obtenemos que la norma de T_N está acotada uniformemente en N por B .

Esta observación puede verse en [43] (Lema 4.1). Cotlar demuestra que el mismo resultado se obtiene si se debilita adecuadamente la hipótesis de la ortogonalidad de la sucesión $\{T_j\}$. Enunciamos el siguiente resultado debido a Mischa Cotlar [18] que es conocido como el *lema de Cotlar* o el lema de ortogonalidad de Cotlar-Stein.

LEMA 1.1.1. *Lema de Cotlar. Sea $\{T_i\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos sobre un espacio de Hilbert H . Supongamos que existe $s : \mathbb{Z} \rightarrow (0, \infty)$ tal que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k)^{\frac{1}{2}} = A < \infty$, y*

$$\|T_i^* T_j\| \leq s(i - j) \quad y \quad \|T_i T_j^*\| \leq s(i - j).$$

Entonces

$$\left\| \sum_{i=-N}^N T_i \right\| \leq A,$$

Para todo $N \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $N \in \mathbb{N}$ y $T = \sum_{j=-N}^N T_j$, dado $m \in \mathbb{N}$ podemos escribir,

$$\begin{aligned} \|T\|^{2m} &= \|(T^* T)^m\| = \left\| \left[\left(\sum_{i=-N}^N T_i^* \right) \left(\sum_{j=-N}^N T_j \right) \right]^m \right\| \\ &= \left\| \left(\sum_{i,j=-N}^N T_i^* T_j \right)^m \right\| \leq \sum_{k_1, \dots, k_{2m}} \|T_{k_1}^* T_{k_2} \dots T_{k_{2m-1}}^* T_{k_{2m}}\|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\|T_{k_1}^*\| = \|T_{k_1}^* T_{k_1}\|^{1/2} \leq s(0)^{1/2}$, y que lo mismo ocurre con $\|T_{k_{2m}}\|$, acotamos cada sumando de dos maneras,

$$\begin{aligned} \|T_{k_1}^* T_{k_2} \dots T_{k_{2m-1}}^* T_{k_{2m}}\| &\leq \|T_{k_1}^*\| \|T_{k_2} T_{k_3}^*\| \dots \|T_{k_{2m-2}} T_{k_{2m-1}}^*\| \|T_{k_{2m}}\| \\ &\leq s(0)^{1/2} s(k_2 - k_3) \dots s(k_{2m-2} - k_{2m-1}) s(0)^{1/2} = M, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|T_{k_1}^* T_{k_2} \dots T_{k_{2m-1}}^* T_{k_{2m}}\| &= \|T_{k_1}^* T_{k_2}\| \|T_{k_3}^* T_{k_4}\| \dots \|T_{k_{2m-3}}^* T_{k_{2m-2}}\| \|T_{k_{2m-1}}^* T_{k_{2m}}\| \\ &\leq s(k_1 - k_2) \dots s(k_{2m-1} - k_{2m}) = P. \end{aligned}$$

Luego cada sumando en la estimación para $\|T\|^{2m}$ se acota por la media geométrica de M y P , y obtenemos

$$\begin{aligned} \|T\|^{2m} &\leq \sum_{k_1, \dots, k_{2m}=-N}^N \sqrt{MP} \\ &\leq \sum_{k_1, \dots, k_{2m}=-N}^N s(0)^{1/2} s(k_1 - k_2)^{1/2} s(k_2 - k_3)^{1/2} \dots s(k_{2m-2} - k_{2m-1})^{1/2} s(k_{2m-1} - k_{2m})^{1/2} \\ &= s(0)^{1/2} \sum_{k_1, \dots, k_{2m-1}=-N}^N s(k_1 - k_2)^{1/2} s(k_2 - k_3)^{1/2} \dots s(k_{2m-2} - k_{2m-1})^{1/2} \sum_{k_{2m}=-N}^N s(k_{2m-1} - k_{2m})^{1/2} \\ &\leq s(0)^{1/2} A \sum_{k_1, \dots, k_{2m-1}=-N}^N s(k_1 - k_2)^{1/2} s(k_2 - k_3)^{1/2} \dots s(k_{2m-2} - k_{2m-1})^{1/2} \\ &\leq s(0)^{1/2} A^{2m-1} \sum_{k_1=-N}^N 1 \leq (2N + 1) A^{2m}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T\| \leq (2N + 1)^{1/2m} A$, tomando $m \rightarrow \infty$ obtenemos el resultado deseado. \square

En [32] puede hallarse la aplicación detallada del Lema de Cotlar a la acotación en L^2 de la transformada de Hilbert. En [1] se aplica a integrales singulares generales en espacios de tipo homogéneo. Entre sus aplicaciones más notables se incluye la demostración del Teorema $T(1)$.

1.2. Pesos de Muckenhoupt en \mathbb{R}^n

Una referencia ya clásica sobre la teoría de los pesos de Muckenhoupt es el libro de García Cuerva y Rubio de Francia [30].

DEFINICIÓN 1.2.1. *Sea $1 \leq p < \infty$. Una función localmente integrable y no negativa w definida sobre \mathbb{R}^n es un peso de Muckenhoupt A_p , con $p > 1$, si existe una constante C tal que la desigualdad*

$$\left(\int_Q w \right) \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C |Q|^p$$

se cumple para todo cubo Q de \mathbb{R}^n .

Decimos que el peso w está en la clase A_1 de Muckenhoupt si se cumple la siguiente desigualdad, para todo cubo Q en \mathbb{R}^n .

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \leq c \inf_Q w(y).$$

La clase $A_\infty(\mathbb{R}^n)$ es la unión de todas las clases A_p .

En nuestro desarrollo ulterior serán muy importantes las dos propiedades siguientes de los pesos de Muckenhoupt. La primera es una simple y muy conocida propiedad de la clase A_∞ que implica la condición doblante para la medida $w(x)dx$, debida a B. Muckenhoupt, es la desigualdad

$$(1.2.2) \quad \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^p \leq C \frac{w(E)}{w(Q)}$$

que se cumple para alguna constante C y cualquier subconjunto medible E de cualquier cubo Q , siempre que $w \in A_p$. Aquí $w(E) = \int_E w(x)dx$.

Por otra parte el Teorema 2.9, pág. 401 en [30], establece lo siguiente.

Coifman-Fefferman. *Si $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ entonces existen constantes positivas y finitas c y γ tal que la desigualdad*

$$(1.2.3) \quad \frac{w(E)}{w(Q)} \leq c \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\gamma$$

se cumple para cualquier cubo Q y cualquier subconjunto medible E de Q .

Las clases de Muckenhoupt están íntimamente relacionadas con las propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood.

DEFINICIÓN 1.2.4. *Dada una función f localmente integrable sobre \mathbb{R}^n el operador Maximal de Hardy-Littlewood aplicado a f se define como*

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy.$$

Donde el supremo se toma sobre todas las bolas que contienen a x . Con M_d denotaremos al operador maximal diádico de Hardy-Littlewood definido por

$$M_d f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos diádicos Q que contienen a x .

El operador maximal M es del tipo débil $(1, 1)$ y además está acotada en L^p para $1 < p \leq \infty$. Una prueba de esta acotación se encuentra desarrollada [25].

El resultado clásico principal sobre los pesos A_p es la caracterización de los pesos para los que la maximal de Hardy-Littlewood es acotada en $L^p(w)$. Precisamente en [30] (Teorema 2.8, pág.400) se prueba el siguiente resultado.

TEOREMA 1.2.5. *Sea w un peso en \mathbb{R}^n y sea $1 < p < \infty$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) *M es del tipo débil (p, p) con respecto a w , esto es, existe una constante C tal que para cualquier función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y cualquier $\lambda > 0$*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq C \lambda^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p w(y) dy,$$

- b) *existe una constante C tal que para cualquier función $f \geq 0$ en \mathbb{R}^n y cualquier cubo Q*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right)^p w(Q) \leq C \int_Q f(y)^p w(y) dy,$$

- c) *$w \in A_p$,*

- d) *M está acotada sobre L^p , esto es, existe una constante C tal que para cualquier función $f \in L^p(w)$:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(y)^p w(y) dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p w(y) dy.$$

La maximal diádica M_d es mas chica que M , la clase de pesos para los que está acotada es más grande. Estos pesos son los A_p^{dy} .

DEFINICIÓN 1.2.6. *Sea $1 \leq p < \infty$. Una función localmente integrable y no negativa w definida sobre \mathbb{R}^n se dice un peso diádico de Muckenhoupt A_p^{dy} , con $p > 1$, si existe una constante C tal que la desigualdad*

$$\left(\int_Q w \right) \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C |Q|^p$$

se cumple para todo cubo diádico Q de \mathbb{R}^n .

Decimos que el peso w está en la clase diádica A_1^{dy} de Muckenhoupt si se cumple la siguiente desigualdad, para todo cubo diádico Q en \mathbb{R}^n .

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \leq c \inf_Q w(y).$$

La clase diádica $A_\infty^{dy}(\mathbb{R}^n)$ es la unión de todas las clases A_p^{dy} .

1.3. Lema de Schur

El lema de Schur es una extensión de la desigualdad de Young en contextos no invariantes por traslaciones.

LEMA 1.3.1. (*Lema de Schur*) Sean (X, μ) e (Y, ν) dos espacios de medida σ -finita. Sea $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

- a) $\int_X |K(x, y)| d\mu(x) < M$ c.t.p $y \in Y$.
- b) $\int_Y |K(x, y)| d\nu(y) < M$ c.t.p $x \in X$.

para alguna constante $M > 0$. Entonces el operador Υ , $1 < p < \infty$ definido por

$$\Upsilon g(x) = \int_Y K(x, y)g(y)d\nu(y)$$

está acotado de $L^p(Y, \nu)$ en $L^p(X, \mu)$ y además $\|\Upsilon\| \leq M$.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la desigualdad de Hölder y las hipótesis del enunciado resulta

$$\begin{aligned} \|\Upsilon g\|_{L^p(X)}^p &= \int_X |\Upsilon g|^p(x) d\mu(x) \leq \int_X \left(\int_Y |K(x, y)| |g(y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \\ &\leq \int_X \left(\int_Y |K(x, y)|^{1/p'+1/p} |g(y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \\ &\leq \int_X \left(\int_Y |K(x, y)| d\nu(y) \right)^{\frac{p}{p'}} \int_Y |K(x, y)| |g(y)|^p d\nu(y) d\mu(x) \\ &\leq M^{p/p'} \int_Y |g(y)|^p \int_X |K(x, y)| d\mu(x) d\nu(y) \\ &\leq M^{\frac{p}{p'}+1} \|g\|_{L^p(Y)}^p = M^p \|g\|_{L^p(Y)}^p. \end{aligned}$$

□

1.4. Marcos, Bases de Riesz, Sucesiones de Bessel

En un espacio de Banach \mathbb{B} general, el concepto de base fue introducido por Schauder en 1927. La idea de una base de Schauder es la de una familia de vectores con la propiedad de que cualquier elemento del espacio pueda ser representado de manera única en términos de los vectores de la base. Más específicamente, una sucesión de vectores $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ pertenecientes a \mathbb{B} es una *base de Schauder* para \mathbb{B} si, para cada $f \in \mathbb{B}$ existe una sucesión única de escalares $\{c_k(f), k \in \mathbb{Z}\}$ tal que $f = \sum_k c_k(f)e_k$. Este concepto general de base es heredado en el caso particular de un espacio de Hilbert H .

Un *marco* también es una sucesión de elementos $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ de H con la característica de que podemos escribir a un elemento $f \in H$ como serie infinita de elementos del marco, sin embargo los coeficientes no son necesariamente únicos. Las definiciones y resultados de esta sección siguen la línea de [15].

DEFINICIÓN 1.4.1. Una sucesión $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ de elementos de un espacio de Hilbert H es un marco para H si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$(1.4.2) \quad A \|f\|_H^2 \leq \sum_k |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|_H^2 \quad \text{para toda } f \in H.$$

Las constantes A y B se denominan cotas del marco.

Existen dos categorías de marco que representan un interés particular para nosotros.

- Un marco se denomina *justo* si podemos elegir $A = B$ como cotas del marco.
- Si al quitar un elemento de un marco, éste deja de cumplir la desigualdad de la izquierda en (1.4.2) entonces este marco se denomina marco *exacto*.

Dos conceptos ligados a estas categorías de marco, y los cuales serán ampliamente utilizados a lo largo de toda la monografía, es la de sucesión de Bessel y la de base de Riesz. Específicamente

DEFINICIÓN 1.4.3. Una sucesión $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ en un espacio de Hilbert H es una sucesión de Bessel con cota B si la desigualdad

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|_H^2$$

se cumple para toda $f \in H$.

Si $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de Bessel con cota B y $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para un espacio de Hilbert separable H , entonces el operador T sobre H definido por

$$Tf := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, f_k \rangle e_k$$

está acotado sobre H con cota B . Inversamente si T está acotado sobre H , entonces $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de Bessel con cota $\|T\|$.

DEFINICIÓN 1.4.4. Una base de Riesz para un espacio de Hilbert H es una familia de la forma $\{Ue_k, k \in \mathbb{Z}\}$, donde $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para H y $U : H \rightarrow H$ es un operador biyectivo y acotado.

El siguiente enunciado es una caracterización de Bases de Riesz que puede hallarse en ([15], Teorema 3.6.6).

TEOREMA 1.4.5. Dada una sucesión $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ en un espacio de Hilbert H , las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz para H .
- ii) $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ es completa en H y además existen constantes positivas A y B tales que, dada cualquier sucesión numérica finita $\{c_k\}$, se cumple

$$(1.4.6) \quad A \sum |c_k|^2 \leq \left\| \sum c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum |c_k|^2$$

Por otro lado también en [15] (Teorema 6.1.1) el autor prueba que ser una base de Riesz en un espacio de Hilbert H es equivalente a ser un marco exacto. Esto implica que una base de Riesz en un espacio de Hilbert H cumple las estimaciones en (1.4.2), más aún, de la demostración del Teorema 3.6.6 en [15] se desprende el hecho de que las constantes A y B en (1.4.6) son las mismas que en (1.4.2).

1.5. Teorema de Estabilidad de Favier-Zalik

El teorema de Favier-Zalik da una versión cuantitativa precisa de un hecho intuitivo: *pequeñas perturbaciones de Bessel no cambian el carácter básico de una base de Riesz*. La demostración puede hallarse en [28].

TEOREMA 1.5.1. *Teorema de estabilidad de Favier-Zalik de bases de Riesz. Sea H un espacio de Hilbert, $\{f_n\}$ una base de Riesz en H con cotas A y B . Sea $\{g_n\} \subset H$ tal que $\{f_n - g_n\}$ es una sucesión de Bessel con cota $M < A$. Entonces $\{g_n\}$ es una base de Riesz con cota $[1 - (\frac{M}{A})^{\frac{1}{2}}]^2 A$ y $[1 + (\frac{M}{B})^{\frac{1}{2}}]^2 B$.*

El Teorema 1.5.1 se aplicará directamente en el caso en que las funciones $\{f_n\}$ sean bases de Riesz conocidas, en el contexto de $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(X)$, como por ejemplo el sistema de Haar u otras bases de Riesz con las que trabajaremos, y las funciones g_n sean perturbaciones de las primeras.

1.6. Sistema ortonormal de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Presentamos en esta sección la base ortonormal de wavelets en $L^2(\mathbb{R}^n)$ más sencilla. Esta base es conocida con el nombre de *sistema de Haar* o *sistema de waveletes de Haar* y debe su nombre al trabajo de Alfred Haar (1885-1983) en [33].

Sea $\mathcal{D}([0, 1]) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j([0, 1])$ la familia de intervalos diádicos del $[0, 1]$, esto es, $\mathcal{D}^j([0, 1]) = \{I_k^j = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)), k = 0, \dots, 2^j - 1\}$. El sistema de Haar en el intervalo $[0, 1]$, $\mathcal{H}([0, 1])$, consiste en las dilataciones y traslaciones diádicas de la función básica h dada en (0.0.4) normalizadas en $L^2([0, 1])$, esto es,

$$\mathcal{H}([0, 1]) = \{h_k^j(x) = 2^{j/2}h(2^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k = 0, \dots, 2^j - 1\}.$$

En [33], el autor demuestra que este sistema es una base ortonormal de $L^2([0, 1])$. Este resultado es luego generalizado para el caso de toda la recta Real, esto es, si $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{I_k^j, k \in \mathbb{Z}\}$ es la familia de intervalos diádicos en \mathbb{R} , con $I = I_k^j = (2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ y la wavelet de Haar asociada a este intervalo es $h_I(x) = h_k^j(x) = 2^{j/2}h(2^j x - k)$, entonces el sistema

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{R}) = \{h_I, I \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\},$$

es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Una demostración de este resultado se puede hallar por ejemplo en el capítulo 1 de [22].

También existen versiones de wavelets de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es un cubo diádico en \mathbb{R}^n , entonces éste se puede escribir como el producto de sus n proyecciones $\pi_i(Q)$ a los ejes coordenados, las cuales resultan ser intervalos diádicos en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, esto es $Q = \prod_{i=1}^n \pi_i(Q)$. Si $Q \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n)$ entonces cada proyección $\pi_i(Q)$ pertenece a $\mathcal{D}^j(\mathbb{R})$. Dado $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \{0, 1\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} := \Lambda$, definimos la wavelets de Haar asociada a Q y a λ como

$$h_Q^\lambda(x) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \chi_{\pi_i(Q)}(x_i) + (1 - \lambda_i) h_{\pi_i(Q)}(x_i).$$

Se puede demostrar que el sistema de Haar $\{h_Q^\lambda, Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver [52], pág. 103), además se desprende de la definición y del hecho de que $|h_{\pi_i(Q)}(x_i)| = |\pi_i(Q)|^{-1/2}$ para todo $i = 1, \dots, n$, que entonces $|h_Q^\lambda(x)| = \prod_{i=1}^n |\pi_i(Q)|^{-1/2} = |Q|^{-1/2}$.

Como el cardinal de Λ es $2^n - 1$, podemos referirnos al sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$ como $\{h_Q^m, Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), m = 1, \dots, 2^n - 1\}$.

Una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R}, wdx)$, con w localmente integrable, es la siguiente versión desbalanceada del sistema de Haar (ver [51], pág. 313).

DEFINICIÓN 1.6.1. *Para cada $I \in \mathcal{D}$, se define la wavelets desbalanceada asociada a I como*

$$(1.6.2) \quad h_I^w(x) = \frac{1}{\sqrt{w(I)}} \left\{ \sqrt{\frac{w(I_r)}{w(I_l)}} \chi_{I_l}(x) - \sqrt{\frac{w(I_l)}{w(I_r)}} \chi_{I_r}(x) \right\}.$$

Donde $w(E) = \int_E w dx$, I_l es la mitad izquierda de I y I_r es su mitad derecha. Notar que, si $w = 1$, con la notación anterior h_I^1 es la wavelet estándar de Haar h_I para $L^2(\mathbb{R})$.

Podemos ver que $\{h_I^w : I \in \mathcal{D}\}$ definida en (1.6.2) es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R}, wdx)$. En efecto, para $j \in \mathbb{Z}$, sea

$$\mathcal{V}_j = \{f \in L^2(wdx) : f \text{ es constante sobre cada } I \in \mathcal{D}^j\}$$

y observemos que $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j$ es denso en $L^2(wdx)$. Como w no es integrable, (1.2.3) implica que $w dx$ es duplicante, también obtenemos que $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j = \{0\}$. Para $I \in \mathcal{D}$ fijo, el espacio vectorial de dimensión dos de las funciones f definidas sobre I que son constantes sobre cada mitad I_l e I_r de I , $\{\frac{\chi_I}{\sqrt{w(I)}}, h_I^w\}$ es una base ortonormal con el producto interno de $L^2(wdx)$. Para $j \in \mathbb{Z}$, definimos \mathcal{W}_j como el complemento ortogonal en $L^2(wdx)$ de \mathcal{V}_j en \mathcal{V}_{j+1} , en otras palabras, $\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j$.

De las propiedades de multiresolución de $\{\mathcal{V}_j : j \in \mathbb{Z}\}$ vemos que

$$L^2(wdx) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{W}_j$$

Como, para $j \in \mathbb{Z}$ fijo, la familia $\{h_I^w : I \in \mathcal{D}^j\}$ es una base ortonormal de \mathcal{W}_j obtenemos que $\{h_I^w : I \in \mathcal{D}\}$ es una base ortonormal para $L^2(wdx)$.

Una versión de sistemas ortonormales de $L^2(X)$ para espacios métricos con medida duplicante, como \mathbb{R}^n con la medida de Lebesgue $|\cdot|$, puede encontrarse en [6], pág.23.

A continuación describimos brevemente una construcción de sistemas de tipo Haar en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ para un función, no negativa y localmente integrable w tal que su integral sobre cualquier cuadrante en \mathbb{R}^n sea infinita.

Si consideramos en \mathbb{R}^n la familia de cubos diádicos estándar $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ y definimos $V_j := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n, wdx) / f \text{ es constante sobre cada } Q \in \mathcal{D}^j\}$ entonces la familia $\{V_j\}$ cumple las propiedades de un análisis de multiresolución, esto es, $V_j \subset V_{j+1}$, como el espacio generado por $\{\chi_Q, Q \in \mathcal{D}\}$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ obtenemos que $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$, y como la integral sobre cualquier cuadrante de w es infinita entonces $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Para $j \in \mathbb{Z}$ y $Q \in \mathcal{D}^j$, sea $\mathcal{O}(Q) := \{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} / Q' \subset Q\}$, elegimos un cubo $Q'_0 \in \mathcal{O}(Q)$ cualquiera y definimos $\mathcal{O}'(Q) := \mathcal{O}(Q) \setminus \{Q'_0\}$.

Sea $V_{j+1}(Q)$ la restricción de V_{j+1} al cubo Q , entonces el espacio vectorial $V_{j+1}(Q)$ tiene como base algebraica a la familia $\{\chi_Q\} \cup \{\chi_{Q'}, Q' \in \mathcal{O}'(Q)\}$. Aplicando el algoritmo de ortonormalización de Gram-Schmidt (u otro), con el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$

de $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$, comenzando con la función χ_Q , obtenemos una base ortonormal $\mathcal{B}_{j+1}(Q) := \{\chi_Q w(Q)^{-1/2}\} \cup \{h_Q^{w, Q'}, Q' \in \mathcal{O}'(Q)\}$. Como $\#\mathcal{O}'(Q) = 2^n - 1$, podemos escribir sin pérdida de generalidad $\mathcal{B}_{j+1}(Q) := \{\chi_Q w(Q)^{-1/2}\} \cup \{h_Q^{w, m}, m = 1, \dots, 2^n - 1\}$. Sea W_j la clausura en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ del espacio lineal generado por el conjunto $\{h_Q^{w, m}, Q \in \mathcal{D}^j, m = 1, \dots, 2^n - 1\}$. Es fácil verificar que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, lo cual implica que $L^2(\mathbb{R}^n, wdx) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$.

La familia $\mathcal{H}^w := \{h_Q^{w, m}, Q \in \mathcal{D}, m = 1, \dots, 2^n - 1\}$ es una base ortonormal de tipo Haar, para $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ inducida por la familia diádica \mathcal{D} . Es claro que $\int_Q h_Q^{w, m} wdx = 0$ y que $h_Q^{w, m}$ es constante sobre cada $Q' \in \mathcal{O}(Q)$, esto es, $h_Q^{w, m} = \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} C_{Q'}^{m, Q} \chi_{Q'}$. El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt no deja claro si las constantes $C_{Q'}^{m, Q}$ son distintas de cero siempre, sin embargo es posible construir sistemas de Haar de modo que cada $C_{Q'}^{m, Q} \neq 0$ y además existan constantes c_1 y c_2 mayores que cero y dependiendo sólo de la dimensión n y de w tal que $c_1 w(Q)^{-1/2} \leq |C_{Q'}^{m, Q}| \leq c_2 w(Q)^{-1/2}$. Veremos brevemente esto en el contexto abstracto.

Capítulo 2

Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en el espacio euclídeo

En este capítulo exploraremos, en tres secciones, la estabilidad del carácter *básico* de perturbaciones de sistemas de Haar por contracción de soportes. En las dos primeras secciones consideraremos los casos euclídeos invariantes por traslaciones y en la tercera abordaremos el caso desbalanceado por pesos de Muckenhoupt. En la Parte B de esta tesis exploraremos los mismos problemas en contextos geométricos más generales y daremos condiciones geométricas suficientes para obtener el mismo tipo de estabilidad.

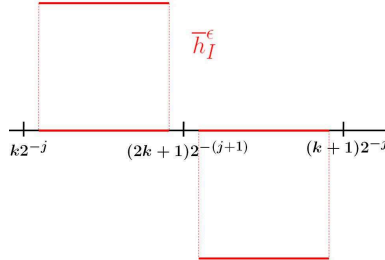
2.1. Perturbaciones del sistema de Haar de $L^2(\mathbb{R})$

En esta sección construimos perturbaciones de un sistema de Haar que resultan de aproximar las wavelets soportadas sobre los intervalos diádicos por combinaciones lineales de características de subconjuntos de éstos. Probaremos que el nuevo sistema perturbado resulta una base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$ si la aproximación de los soportes es suficientemente justa.

Para cada $j \in \mathbb{Z}$ consideramos la familia de intervalos diádicos en \mathbb{R} de nivel j , $\mathcal{D}^j = \{I = [k2^j, (k+1)2^j), k \in \mathbb{Z}\}$ y sea $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ la familia de intervalos diádicos usuales en \mathbb{R} . Sea $\mathcal{H} = \{h_I, I \in \mathcal{D}\}$ el sistema de wavelets de Haar en $L^2(\mathbb{R})$.

Comenzaremos por aproximar los intervalos diádicos desde adentro por subconjuntos simétricos. Motiva esta construcción particular, su eventual uso en aproximaciones suaves de tipo "spline" para las funciones de Haar.

Para cada $I \in \mathcal{D}$, tendremos subconjuntos $E_I \subset I$ simétricos respecto del centro de I y tal que la medida de la diferencia $I \setminus E_I$ sea suficientemente pequeña. Una gráfica de estas funciones \bar{h}_I^ϵ se presenta en la siguiente figura



TEOREMA 2.1.1. Sea $c = \sqrt{6} \left[1 + 2 \left(\frac{1/\sqrt[4]{2}}{1-1/\sqrt[4]{2}} \right) \right]$ y $0 < \epsilon < c^{-2}$, para cada $I \in \mathcal{D}$ sea E_I un subconjunto de I que satisfice las siguientes propiedades,

- i) E_I es unión de dos sub-intervalos de I , simétricos con respecto al centro del intervalo I ,

ii) $|I \setminus E_I| \leq \epsilon |I|$, para todo $I \in \mathcal{D}$.

Entonces la familia $\{\bar{h}_I^\epsilon = h_I \chi_{E_I}, I \in \mathcal{D}\}$ es una base de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$, con cotas $A_\epsilon = (1 - (c^2\epsilon)^{1/2})^2$ y $B_\epsilon = (1 + (c^2\epsilon)^{1/2})^2$.

Más específicamente $\{\bar{h}_I^\epsilon : I \in \mathcal{D}\}$ es base de $L^2(\mathbb{R})$ y para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, se verifican las siguientes desigualdades

$$(2.1.2) \quad \left(1 - (c^2\epsilon)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{I \in \mathcal{D}} \left| \langle \bar{h}_I^\epsilon, f \rangle \right|^2 \leq \left(1 + (c^2\epsilon)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Para probar el Teorema 2.1.1 utilizaremos el Teorema de Favier-Zalik 1.5.1, el Lema de Cotlar 1.1.1 y Lema de Schur 1.3.1.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\epsilon > 0$, consideramos la sucesión de diferencias $\{\bar{b}_I^\epsilon = h_I - \bar{h}_I^\epsilon, I \in \mathcal{D}\}$. Observemos que como $\{h_I, I \in \mathcal{D}\}$ es una base de Riesz con cotas $A = B = 1$ en $L^2(\mathbb{R})$, aplicando el Teorema 1.5.1 será suficiente probar que $\{\bar{b}_I^\epsilon\}$ es una sucesión de Bessel con cota Bessel $C_\epsilon = c^2\epsilon$. Esto es, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ veremos que

$$\sum_{I \in \mathcal{D}} \left| \langle f, \bar{b}_I^\epsilon \rangle \right|^2 \leq C_\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Para esto consideramos el operador sobre $L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$Tf(x) := \sum_{I \in \mathcal{D}} \langle f, \bar{b}_I^\epsilon \rangle h_I(x).$$

Notemos que, por la ortonormalidad de \mathcal{H} , resulta $\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}} \left| \langle f, \bar{b}_I^\epsilon \rangle \right|^2$, en consecuencia lo que queremos probar es que $\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.

Dado que

$$Tf(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, \bar{b}_J^\epsilon \rangle h_J(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j f(x)$$

donde $T_j f = \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, \bar{b}_J^\epsilon \rangle h_J$, aplicaremos el Lema de Cotlar 1.1.1 con la sucesión de operadores $\{T_j\}$. Es necesario entonces encontrar la expresión de T_j^* . Para f y g en $L^2(\mathbb{R})$ tenemos

$$\langle T_j f, g \rangle = \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, \bar{b}_J^\epsilon \rangle \langle h_J, g \rangle = \left\langle f, \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle h_J, g \rangle \bar{b}_J^\epsilon \right\rangle = \langle f, T_j^* g \rangle$$

de donde se deduce que $T_j^* f = \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, h_J \rangle \bar{b}_J^\epsilon$ para cada $j \in \mathbb{Z}$.

A continuación analizamos $\|T_i^* T_j\|$. Por la ortogonalidad de \mathcal{H} , si $i \neq j$, resulta

$$T_i^* T_j f = \sum_{I \in \mathcal{D}^i, J \in \mathcal{D}^j} \langle f, \bar{b}_J^\epsilon \rangle \langle h_J, h_I \rangle \bar{b}_I^\epsilon = 0,$$

en cambio, si $i = j$ tenemos que

$$\|T_j^* T_j f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|T_j f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \left| \langle f, \bar{b}_J^\epsilon \rangle \right|^2 \leq \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \|f\|_{L^2(J \setminus E_J)}^2 \left\| \bar{b}_J^\epsilon \right\|_{L^2(J \setminus E_J)}^2.$$

Como $|h_J(x)| \leq \frac{1}{|J|^{\frac{1}{2}}}$, de la hipótesis y la definición de \bar{b}_J^ϵ resulta,

$$\|\bar{b}_J^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{J \setminus E_J} |\bar{b}_J^\epsilon|^2 dx \leq \frac{|J \setminus E_J|}{|J|} \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, como la familia $\{J \setminus E_J, J \in \mathcal{D}^j\}$ es disjunta de a pares obtenemos $\|T_j^* T_j f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Resumiendo,

$$(2.1.3) \quad \|T_j^* T_i\| \leq \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \epsilon & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Estimamos ahora $\|T_i T_j^*\|$. Puesto que ahora $T_i T_j^* f = \sum_{I \in \mathcal{D}^i, J \in \mathcal{D}^j} \langle f, h_J \rangle \langle \bar{b}_J^\epsilon, \bar{b}_I^\epsilon \rangle h_I$, la interferencias entre escalas distintas no está controlada ya que no hay, a priori, ninguna ortogonalidad en la familia $\{\bar{b}_J^\epsilon\}$. Pero

$$(2.1.4) \quad \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \left\| \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left\langle \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, h_J \rangle \bar{b}_J^\epsilon, \bar{b}_I^\epsilon \right\rangle h_I \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, h_J \rangle \langle \bar{b}_I^\epsilon, \bar{b}_J^\epsilon \rangle \right)^2.$$

Para estimar la suma precedente aplicamos el Lema de Schur 1.3.1 en el siguiente contexto, $X = \mathcal{D}^i$, $Y = \mathcal{D}^j$, con μ y ν las medidas contadoras sobre X e Y respectivamente. Sea Υ el operador sobre $L^2(Y)$ definido por

$$\Upsilon g(I) = \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle \bar{b}_I^\epsilon, \bar{b}_J^\epsilon \rangle g(J) = \int_Y K^\epsilon(I, J) g(J) d\nu(J),$$

donde $K^\epsilon(I, J) = \langle \bar{b}_I^\epsilon, \bar{b}_J^\epsilon \rangle$. Podemos observar que para el caso particular en que $g(J) = \langle f, h_J \rangle$ la ecuación (2.1.4) puede escribirse como

$$\|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_X |\Upsilon g(I)|^2 d\mu(I).$$

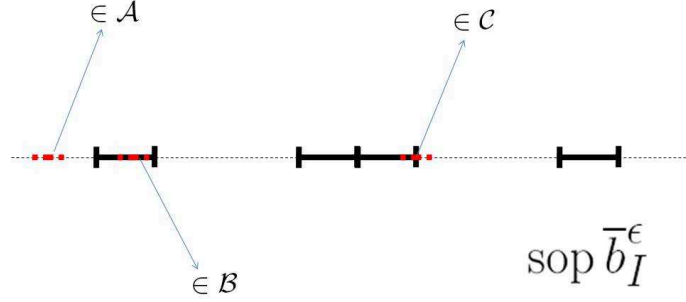
Veamos que el operador Υ está acotado de $L^2(Y)$ en $L^2(X)$ con una constante dependiendo de ϵ , i y j adecuada. Consideramos separadamente los casos $j \geq i$ y $i > j$. Comenzamos suponiendo que $j \geq i$. Para $J \in \mathcal{D}^j$ dado, por las propiedades del soporte de \bar{b}_J^ϵ , el producto escalar $\langle \bar{b}_I^\epsilon, \bar{b}_J^\epsilon \rangle$ difiere de cero para a lo más un $I \in \mathcal{D}^i$. Por lo tanto resulta

$$(2.1.5) \quad \int_X |K^\epsilon(I, J)| d\mu(I) = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} |\langle \bar{b}_I^\epsilon, \bar{b}_J^\epsilon \rangle| = \left| \int_{J \setminus E_J} \bar{b}_I^\epsilon(x) \bar{b}_J^\epsilon(x) dx \right| \\ \leq \frac{|J \setminus E_J|}{|I|^{\frac{1}{2}} |J|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\epsilon |J|}{|I|^{\frac{1}{2}} |J|^{\frac{1}{2}}} \leq \epsilon 2^{\frac{-(j-i)}{2}}.$$

Con esto probamos la primera de las hipótesis en el Lema de Schur para el núcleo K^ϵ con $M = \epsilon 2^{\frac{-(j-i)}{2}}$. Para chequear la segunda de las hipótesis, en el mismo caso

$j \geq 1$, dado $I \in \mathcal{D}^i$, para estimar $\int_Y |K^\epsilon(I, J)| d\nu(J)$ partimos el espacio $Y = \mathcal{D}^j$ en tres conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}(I) = \{J \in \mathcal{D}^j / \text{sop } \bar{b}_J^\epsilon \cap \text{sop } \bar{b}_I^\epsilon = \emptyset\}; \\ \mathcal{B} &= \mathcal{B}(I) = \{J \in \mathcal{D}^j / \bar{b}_I^\epsilon \chi_{\text{sop } \bar{b}_J^\epsilon} \text{ es una constante no nula}\}; \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}(I) = \mathcal{D}^j \setminus \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \end{aligned}$$



Es fácil ver que si $J \in \mathcal{A}$ entonces $\langle \bar{b}_I^\epsilon, \bar{b}_J^\epsilon \rangle = 0$.

Por otro lado, la hipótesis i) implica que $\int_{E_J} \bar{h}_J^\epsilon(x) dx = 0$ para cualquier intervalo $J \in \mathcal{D}$, y como h_J también tiene integral nula, se deduce que $\int_J \bar{b}_J^\epsilon(x) dx = 0$ para todo $J \in \mathcal{D}$. Por lo tanto si $J \in \mathcal{B}$ como la función \bar{b}_I^ϵ es constante sobre el soporte de \bar{b}_J^ϵ y \bar{b}_J^ϵ tiene promedio nulo obtenemos $\langle \bar{b}_I^\epsilon, \bar{b}_J^\epsilon \rangle = 0$.

Por último, notemos que \mathcal{C} está constituido por aquellos intervalos J que contienen a los extremos de cada componente conexa en la que queda dividido el soporte $\text{sop } \bar{b}_I^\epsilon = I \setminus E_I$, como este conjunto tiene tres componentes conexas y cada uno es un intervalo entonces $\sharp(\mathcal{C}) = 6$, por lo tanto resulta

$$(2.1.6) \quad \int_Y |K^\epsilon(I, J)| d\nu(J) = \sum_{J \in \mathcal{C}} \left| \langle \bar{b}_I^\epsilon, \bar{b}_J^\epsilon \rangle \right| \leq 6\epsilon 2^{-\frac{(j-i)}{2}}, \quad I \in \mathcal{D}^i, \text{ y } j \geq i.$$

El caso $i > j$ se deduce del anterior cambiando los roles de X y de Y . Las estimaciones que se obtienen son las mismas.

Así, de (2.1.5) y (2.1.6) podemos asegurar que

$$\int_X |K^\epsilon(I, J)| d\mu(I) \leq 6\epsilon 2^{-\frac{|i-j|}{2}}, \quad \forall J \in \mathcal{D}^j.$$

Análogamente

$$\int_Y |K^\epsilon(I, J)| d\nu(J) \leq 6\epsilon 2^{-\frac{|i-j|}{2}}, \quad \forall I \in \mathcal{D}^i.$$

Luego, aplicando el Lema de Schur 1.3.1 deducimos la acotación del operador Υ . Poniendo $g(J) = \langle f, h_J \rangle$ resulta

$$(2.1.7) \quad \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\Upsilon g\|_{L^2(\mathcal{D}^i)}^2 \leq 6^2 \epsilon^2 2^{-|i-j|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Por último, las desigualdades (2.1.3) y (2.1.7) nos permiten aplicar el Lema de Cotlar 1.1.1, con la sucesión $s(j) = 6\epsilon 2^{-|j|/2}$. Como

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k)^{1/2} = \sqrt{6\epsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|/4} = \sqrt{6\epsilon} \left[1 + 2 \left(\frac{1/\sqrt[4]{2}}{1 - 1/\sqrt[4]{2}} \right) \right],$$

poniendo $c = \sqrt{6} \left[1 + 2 \left(\frac{1/\sqrt[4]{2}}{1 - 1/\sqrt[4]{2}} \right) \right]$ podemos concluir que $\|T\| \leq c\sqrt{\epsilon}$, lo cual implica que la sucesión $\{\bar{b}_J^\epsilon\}$ es una sucesión de Bessel con cota $c^2\epsilon$, que es precisamente lo que queríamos probar. \square

Como dijimos al principio de la sección, la simetría del conjunto E_J , así como el hecho de que éste sea la unión de dos subintervalos de J responde a un método de regularización que mostraremos en el siguiente capítulo, sin embargo, podemos prescindir de la simetría si pedimos en la hipótesis del teorema que los conjuntos E_J sean interiores a J y tales que las perturbaciones $\bar{h}_J^\epsilon = h_J \chi_{E_J}$ conserven su promedio nulo. Por otro lado la hipótesis de que cada E_J sea unión de dos intervalos puede ser reemplazada por la de que la clausura de $J \setminus E_J$ tenga a lo sumo m componentes conexas, donde m no depende del intervalo J . En cambio la hipótesis de aproximación de las medidas parece mas fundamental. En este sentido, siguiendo los mismos lineamientos que en la demostración anterior, podemos probar el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1.8. *Sea $I \in \mathcal{D}$ y E_I un subconjunto de I cumpliendo las siguientes propiedades,*

- i) $\int_{E_I} h_I dx = 0$, para todo $I \in \mathcal{D}$.
- ii) Existe m , independiente de $I \in \mathcal{D}$, tal que el complemento del conjunto cerrado $\bar{I} \setminus E_I$ tiene a lo sumo m componentes conexas.
- iii) $|I \setminus E_I| \leq \epsilon |I|$, para todo $I \in \mathcal{D}$.

Entonces si $c = \sqrt{2m} \left[1 + 2 \left(\frac{1/\sqrt[4]{2}}{1 - 1/\sqrt[4]{2}} \right) \right]$ y $0 < \epsilon < c^{-2}$, la familia $\{\bar{h}_I^\epsilon = h_I \chi_{E_I}, I \in \mathcal{D}\}$ es una base de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$, con cotas $A_\epsilon = (1 - (c^2\epsilon)^{1/2})^2$ y $B_\epsilon = (1 + (c^2\epsilon)^{1/2})^2$.

Más específicamente $\{\bar{h}_I^\epsilon : I \in \mathcal{D}\}$ es base de $L^2(\mathbb{R})$ y para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, se verifican la siguientes desigualdades

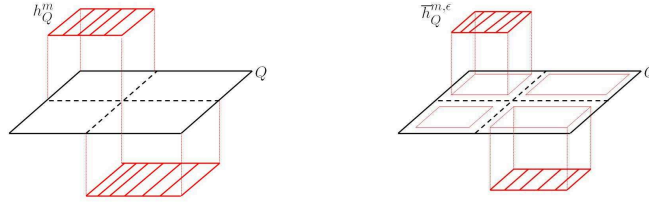
$$(2.1.9) \quad \left(1 - (c^2\epsilon)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{I \in \mathcal{D}} \left| \langle \bar{h}_I^\epsilon, f \rangle \right|^2 \leq \left(1 + (c^2\epsilon)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Antes de finalizar la sección observamos que la simplicidad geométrica del dominio aproximante parece esencial si pretendemos estimar la norma de la perturbación usando el Lema de Cotlar. Una aproximación en medida del tipo $\bar{h}_k^j(x) = 2^{j/2} \bar{h}(2^j x - k)$ con $\bar{h}(x) = h(x) \chi_E$ puede obtenerse con E un conjunto simétrico con respecto a $1/2$ que en $(0, 1/2)$ es el complemento relativo del conjunto $\bigcup_{l=1}^{\infty} (q_l - \delta/2^l, q_l + \delta/2^l)$ donde $\{q_l\}$ es una numeración de los racionales en $(0, 1/2)$ y δ es un número positivo pequeño. En este caso, aunque el promedio se preserva y el conjunto de diferencia entre h y \bar{h} tiene medida tan chica como se quiera, su frontera es demasiado grande como para tener algún control del cardinal de interferencias entre niveles distintos.

2.2. Perturbaciones del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n)$

En esta sección construiremos perturbaciones de un sistema de Haar sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ por aproximación del soporte, conservando aspectos generales de la sección anterior. Las condiciones geométricas que usaremos están lejos de ser necesarias, pero en la parte B, en el contexto abstracto, obtendremos condiciones suficientes más ajustadas y notaremos que una relación adecuada entre las dimensiones de las fronteras de las aproximaciones y del espacio es, en algún sentido, natural.

Si se considera la familia de cubos diádicos $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y un sistema de Haar asociado, podemos reproducir la misma demostración que en la prueba del Teorema 2.1.1 para una familia de perturbaciones a las cuales denotamos por $\bar{h}_Q^{m,\epsilon}$, estas preservan la propiedad de tener promedio nulo y, su soporte E_Q , cumple la condición del control de la medida de $Q \setminus E_Q$ relativo a $|Q|$, dado por $|Q \setminus E_Q| \leq \epsilon |Q|$. Manteniendo el objetivo de utilizar, en el capítulo siguiente, estas perturbaciones para regularizar bases de Riesz y siguiendo los lineamientos \mathbb{R} los conjuntos E_Q asociados a cada cubo diádico Q son la unión de cubos de lados paralelos a los ejes o, un poco más generalmente, una unión de convexos. Una posible gráfica de una wavelet de Haar $\{h_Q^m\}$ y las perturbaciones por aproximación de soportes $\{\bar{h}_Q^{m,\epsilon}\}$ para $n = 2$ se representa en la siguiente figura.



Denotaremos con $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ a un sistema de Haar sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ dado por $\{h_Q^m, Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), m = 1, \dots, 2^n - 1\}$. El resultado principal de esta sección es el siguiente.

TEOREMA 2.2.1. *Sea $\epsilon > 0$ dado. Supongamos que para cada $Q \in \mathcal{D}$ y para cada $Q' \in \mathcal{O}(Q)$ está dado un abierto convexo en Q' cuya clausura, $K_{Q'}$, está contenida en Q' . Supongamos además que $|Q' \setminus K_{Q'}| \leq 2^{-n} \epsilon |Q|$ y que los diferentes $K_{Q'}$ para $Q' \in \mathcal{O}(Q)$ están balanceados de modo que $\bar{h}_Q^{m,\epsilon} = h_Q^m \chi_{E_Q^\epsilon}$ tenga integral nula, cuando $E_Q^\epsilon = \bigcup_{Q' \subset Q} K_{Q'}$. Entonces el sistema $\{\bar{h}_Q^{m,\epsilon} = h_Q^m \chi_{E_Q^\epsilon}, Q \in \mathcal{D}, m = 1, \dots, 2^n - 1\}$ es una base de Riesz en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con cotas Riesz $A_\epsilon = [1 - (C^2 \epsilon)^{1/2}]^2$ y $B_\epsilon = [1 + (C^2 \epsilon)^{1/2}]^2$, con C dependiendo sólo de n .*

DEMOSTRACIÓN. Desde el punto de vista del análisis funcional la demostración sigue las mismas líneas que las del Teorema 2.1.1. En cambio la dificultad geométrica es ahora mayor y merece especial consideración.

Puesto que $|Q' \setminus K_{Q'}| \leq 2^{-n} \epsilon |Q|$ resulta que $|Q \setminus E_Q| \leq \epsilon |Q|$, además como $|h_Q^m(x)| \leq C |Q|^{-\frac{1}{2}}$ entonces, la diferencia $\bar{b}_Q^{m,\epsilon} := h_Q^m - \bar{h}_Q^{m,\epsilon}$, satisface $|\bar{b}_Q^{m,\epsilon}(x)| \leq \frac{C}{|Q|^{1/2}}$. En consecuencia, si tomamos $j, i \in \mathbb{Z}, i > j, J \in \mathcal{D}^j$ y $Q \in \mathcal{D}^i$ tales que $\langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle \neq 0$, entonces

$$(2.2.2) \quad \left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle \right| \leq C \frac{|Q \setminus E_Q|}{|J|^{1/2} |Q|^{1/2}} \leq C \epsilon 2^{-\frac{(i-j)n}{2}}.$$

Como antes, aplicaremos el Lema de Cotlar para acotar el operador

$$(2.2.3) \quad Tf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^n-1}} \langle f, \bar{b}_Q^{m,\epsilon} \rangle h_Q^m = \sum_{i \in \mathbb{Z}} T_i f.$$

Para estimar $\|T_i^* T_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ procedemos como en el Teorema 2.1.1. Si $i \neq j$ de la ortogonalidad de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $\|T_i^* T_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$, y si $i = j$

$$(2.2.4) \quad \|T_i^* T_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

en efecto

$$\begin{aligned} \|T_j^* T_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|T_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ k=1, \dots, 2^n-1}} \left| \langle f, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ k=1, \dots, 2^n-1}} \|f\|_{L^2(\text{sop } \bar{b}_J^{k,\epsilon})}^2 \left\| \bar{b}_J^{k,\epsilon} \right\|_{L^2(\text{sop } \bar{b}_J^{k,\epsilon})}^2, \end{aligned}$$

debido a que la familia $\{\text{sop } \bar{b}_J^{k,\epsilon}, J \in \mathcal{D}^j\}$ es disjunta, y que

$$\left\| \bar{b}_J^{k,\epsilon} \right\|_{L^2(\text{sop } \bar{b}_J^{k,\epsilon})}^2 = \int_{\text{sop } \bar{b}_J^{k,\epsilon}} \left| \bar{b}_J^{k,\epsilon} \right|^2 dx \leq \frac{C}{|J|} |\text{sop } \bar{b}_J^{k,\epsilon}| = C\epsilon,$$

obtenemos la desigualdad (2.2.4).

Por otro lado, procediendo como en (2.1.4)

$$(2.2.5) \quad \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^n-1}} \left(\sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ k=1, \dots, 2^n-1}} \langle f, h_J^k \rangle \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle \right)^2.$$

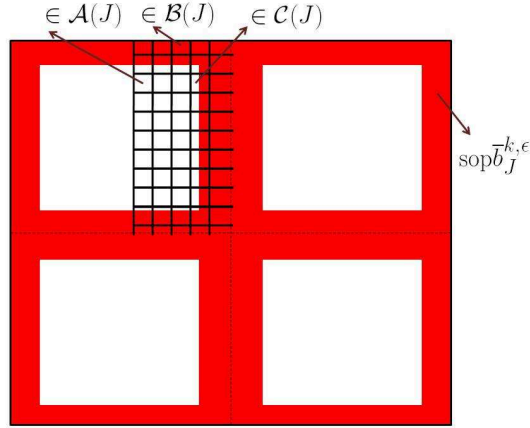
Para estimar (2.2.5) podemos usar de nuevo el Lema de Schur o hacer las consideraciones que siguen.

Si $i > j$, para todo $Q \in \mathcal{D}^i$ hay sólo un $J(Q) \in \mathcal{D}^j$ tal que $Q \subset J(Q)$ y por consiguiente para cada $Q \in \mathcal{D}^i$ hay a lo sumo un $J(Q)$ tal que $\text{sop}(\bar{b}_Q^{m,\epsilon}) \cap \text{sop}(\bar{b}_{J(Q)}^{k,\epsilon}) \neq \emptyset$ para algún m y algún k , por lo tanto podemos escribir la suma en (2.2.5) como

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^n-1}} \left(\sum_{k=1}^{2^n-1} |\langle f, h_{J(Q)}^k \rangle| \left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_{J(Q)}^{k,\epsilon} \rangle \right| \right)^2 \\ &\leq C(n) \sum_{k=1}^{2^n-1} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^n-1}} |\langle f, h_{J(Q)}^k \rangle|^2 \left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_{J(Q)}^{k,\epsilon} \rangle \right|^2 \\ &\leq C(n) \sum_{k=1}^{2^n-1} \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \sum_{m=1}^{2^n-1} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ Q \subset J}} |\langle f, h_J^k \rangle|^2 \left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle \right|^2 \\ &\leq C(n) \sum_{k,m=1}^{2^n-1} \sum_{J \in \mathcal{D}^j} |\langle f, h_J^k \rangle|^2 \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ Q \subset J}} \left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle \right|^2, \end{aligned}$$

ya que $\mathcal{D}^i = \bigcup_{J \in \mathcal{D}^j} \{Q \in \mathcal{D}^i : Q \subset J\}$.

Procedemos a estimar la suma interior. Para cada $J \in \mathcal{D}^i$ distinguiremos tres tipos de cubos $Q \subset J$ dependiendo de su posición en el interior de J . Diremos que $Q \in \mathcal{A}(J)$ si el soporte de $\bar{b}_Q^{m,\epsilon}$ no interseca al soporte de $\bar{b}_J^{k,\epsilon}$, entonces es evidente que el producto $\left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle \right|$ se anula. Por otro lado denotaremos con $\mathcal{B}(J)$ a la familia de cubos Q tales que $Q \subset \text{sop}(\bar{b}_J^{k,\epsilon})$, entonces $\bar{b}_J^{k,\epsilon}$ es constante sobre el soporte de $\bar{b}_Q^{m,\epsilon}$, y debido a que $\bar{b}_Q^{m,\epsilon}$ tiene promedio nulo resulta que $\left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle \right| = 0$ en este caso. Por lo tanto los únicos cubos Q que debemos considerar en la suma $\sum_{Q \subset J} \left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_{J(Q)}^{k,\epsilon} \rangle \right|^2$ son aquellos que intersecan tanto al soporte de $\bar{b}_J^{k,\epsilon}$ como a su complemento relativo a J , a esta familia la denotamos por $\mathcal{C}(J)$. Como el soporte de $\bar{b}_J^{k,\epsilon}$ está contenido en el conjunto $J \setminus E_J^\epsilon$ entonces los cubos Q en $\mathcal{C}(J)$ son aquellos que intersecan la frontera de E_J^ϵ , debido a que cada E_J^ϵ es la unión de abiertos convexos tales que su clausura son los conjuntos $K_{J'}^\epsilon$ con $J' \in \mathcal{O}(J)$, entonces los cubos en $\mathcal{C}(J)$ son aquellos cubos en \mathcal{D}^i tal que intersecan la frontera de algún $K_{J'}^\epsilon$. La figura ilustra el caso en que $K_{Q'}$ es un cubo de lados paralelos a los ejes coordenados concéntricos con Q' .



Específicamente, fijado $J \in \mathcal{D}^j$, debemos considerar aquellos cubos Q contenidos en J , tales que intersequen a la frontera de E_J^ϵ . Como E_J^ϵ es la unión de $K_{J'}$ con $J' \subset J$, y cada $K_{J'}^\epsilon$ es convexo entonces su frontera tiene dimensión $n-1$ y la medida $n-1$ dimensional de su frontera es equivalente a $2^{-j(n-1)}$ que es esencialmente la medida $n-1$ dimensional de la frontera de J' . Por lo tanto la frontera de E_J^ϵ tiene dimensión $n-1$ y la cantidad de cubos, del nivel i , que la intersecan es de orden $2^{(i-j)(n-1)}$, entonces el cardinal de $\mathcal{C}(J)$ es $c2^{(i-j)(n-1)}$, con c dependiente sólo de la dimensión n , por lo tanto aplicando la desigualdad (2.2.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{Q \subset J} \left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_{J(Q)}^{k,\epsilon} \rangle \right|^2 &= \sum_{Q \in \mathcal{C}(J)} \left| \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_{J(Q)}^{k,\epsilon} \rangle \right|^2 \\ &\leq \#\mathcal{C}(J) C \epsilon^2 2^{-(i-j)n} 2^{(i-j)(n-1)} = C \epsilon^2 2^{-(i-j)}. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$(2.2.6) \quad \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C \epsilon^2 2^{-(i-j)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ k=1, \dots, 2^n-1}} |\langle f, h_J^k \rangle|^2 \leq C \epsilon^2 2^{-(i-j)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

Por otro lado si $j > i$, con la notación anterior, para $Q \in \mathcal{D}^i$ dividimos la familia \mathcal{D}^j del siguiente modo $\mathcal{D}^j = \mathcal{A}(Q) \cup \mathcal{B}(Q) \cup \mathcal{C}(Q)$, donde

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(Q) &= \{J \in \mathcal{D}^j / (J \setminus E_J) \cap (Q \setminus E_Q) = \emptyset\}, \\ \mathcal{B}(Q) &= \{J \in \mathcal{D}^j / \bar{b}_Q^{m,\epsilon} \chi_{J \setminus E_J} \text{ es constante y no nula}\}, \\ \mathcal{C}(Q) &= \mathcal{D}^j \setminus \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.\end{aligned}$$

Como en el caso anterior $\mathcal{C}(Q)$ consiste en todos aquellos cubos $J \in \mathcal{D}^j$ que intersecan a la frontera de E_Q , y como E_Q tiene dimensión n entonces su frontera tiene dimensión $n - 1$, de lo que se deduce que $\#\mathcal{C}(Q) \leq C2^{(j-i)(n-1)}$.

Aplicando la desigualdad de Schwartz, la desigualdad (2.2.2) y el hecho de que las familias $\mathcal{C}(Q)$ son disjuntas al cambiar $Q \in \mathcal{D}^i$, obtenemos

$$\begin{aligned}& \sum_{m=1, \dots, 2^{n-1}} \left(\sum_{\substack{J \in \mathcal{C}(Q) \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} \langle f, h_J^k \rangle \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle \right)^2 \\ & \leq \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^{n-1}}} \left(\sum_{\substack{J \in \mathcal{C}(Q) \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} |\langle f, h_J^k \rangle|^2 \right) \left(\sum_{\substack{J \in \mathcal{C}(Q) \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} |\langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_J^{k,\epsilon} \rangle|^2 \right) \\ & \leq (2^n - 1) \#\mathcal{C}(Q) C \epsilon^2 2^{-(j-i)n} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^{n-1}}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{C}(Q) \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} |\langle f, h_J^k \rangle|^2 \\ (2.2.7) \quad & \leq C \epsilon^2 2^{-(j-i)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\end{aligned}$$

De las estimaciones para $\|T_i^* T_j f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ y $\|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R})}$, tenemos que la sucesión numérica $\{s(j) = C \epsilon 2^{\frac{-|j|}{2}}\}$ establece la propiedad de casi-ortogonalidad para la sucesión de operadores $\{T_j\}$. De aquí que, por el Lema de Cotlar 1.1.1, el operador T dado en (2.2.3) está acotado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y su norma es menor que $C\sqrt{\epsilon}$, por lo tanto la sucesión de diferencias $\{\bar{b}_Q^{m,\epsilon}\}$ es una sucesión de Bessel con cota $C^2 \epsilon$. Tomando $\epsilon < C^{-2}$ y aplicando el Teorema 1.5.1 obtenemos el resultado deseado. \square

Es importante notar que el mismo resultado puede probarse para conjuntos $K_{J'}^\epsilon$, con $J' \in \mathcal{O}(J)$ mucho más generales siempre que mantenga la relación dimensional entre perímetro y volumen.

2.3. Bases de Riesz en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ de perturbaciones del sistema de wavelets de Haar desbalanceadas

En lo que sigue probaremos un resultado de estabilidad por aproximación de soportes de wavelets de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt. Notablemente la condición A_∞ de los pesos de Muckenhoupt será la propiedad relevante para hacer posible la aplicación del Lema de Cotlar en este contexto en el que la autosimilaridad se pierde. De alguna manera la condición A_∞ garantiza una casi-autosimilaridad que será la clave en la prueba del resultado principal de esta sección.

Como mencionamos en la introducción, en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ existen versiones desbalanceadas del sistema de Haar asociado a una familia diádica \mathcal{D} , que son bases

ortonormales de $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$. Sea $\mathcal{H}^w = \{h_Q^{w,m}, Q \in \mathcal{D}, m = 1, \dots, 2^n - 1\}$ uno de tales sistemas.

Dada $h_Q^{w,m} \in \mathcal{H}^w$. Denotaremos con $Q' \subset Q$ a un cubo diádico perteneciente a la resolución siguiente a la que pertenece Q , es decir, Q' es un hijo de Q .

Se sabe que $h_Q^{w,m}$ es constante sobre cada Q' , denotamos a esa constante $C_{Q'}^{m,Q}$, esto es

$$h_Q^{w,m} = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} \chi_{Q'},$$

además, como \mathcal{H}^w es ortogonal y en particular cada $h_Q^{w,m}$ es perpendicular a las constantes en Q , resulta

$$(2.3.1) \quad \int_Q h_Q^{w,m} w dx = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} w(Q') = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$ definimos

$$(2.3.2) \quad K_{Q'}^{m,\epsilon} := \{x \in Q' / d(x, Q'^c) \geq \rho_{Q'}^{m,\epsilon}\}$$

donde elegimos los valores de $\rho_{Q'}^{m,\epsilon}$ todos positivos de modo que

$$(2.3.3) \quad w(Q' \setminus K_{Q'}^{m,\epsilon}) \leq \epsilon 2^{-n} w(Q'),$$

y

$$(2.3.4) \quad \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} w(K_{Q'}^{m,\epsilon}) = 0.$$

La identidad (2.3.4) implica que la perturbación $\bar{h}_Q^{w,m,\epsilon} := h_Q^{w,m} \chi_{\{\cup_{Q' \subset Q} K_{Q'}^{m,\epsilon}\}}$ tiene promedio nulo. Podemos calcular una cota del valor de $\rho_{Q'}^{m,\epsilon}$, en efecto, observamos de la definición de $K_{Q'}^{m,\epsilon}$ que la medida de Lebesgue de $Q' \setminus K_{Q'}^{m,\epsilon}$ es $c \rho_{Q'}^{m,\epsilon} 2^{-(n-1)(j+1)}$, con c dependiendo de n . Por lo tanto si suponemos que $Q \in \mathcal{D}^j$, de la desigualdad para pesos de Muckenhoupt (1.2.3) sabemos que existe γ tal que

$$\frac{w(Q' \setminus K_{Q'}^{m,\epsilon})}{w(Q')} \leq c \left(\frac{|Q' \setminus K_{Q'}^{m,\epsilon}|}{|Q'|} \right)^\gamma \leq c \left(\frac{C \rho_{Q'}^{m,\epsilon} 2^{-(n-1)(j+1)}}{2^{-n(j+1)}} \right)^\gamma = c (\rho_{Q'}^{m,\epsilon} 2^j)^\gamma$$

por lo tanto para satisfacer (2.3.3) será suficiente tomar $\rho_{Q'}^{m,\epsilon} \leq c 2^{-j} (\epsilon 2^{-n})^{\frac{1}{\gamma}}$ para alguna constante c que depende de n y del peso w .

Por otro lado siempre es posible construir subconjuntos que cumplan la condición (2.3.4), debido a que la medida $w dx$ es continua, y entonces resulta que la función

$$f(\rho) := \int_{\{x \in Q' / d(x, Q'^c) > \rho\}} w(x) dx$$

crece continuamente a $w(Q')$ cuando ρ tiende a cero. Por lo tanto siempre podemos lograr que el vector $(w(K_{Q'}^{m,\epsilon}))_{Q' \subset Q}$ sea un múltiplo del vector $(w(Q'))_{Q' \subset Q}$. Precisamente esta es la propiedad que buscamos, pues ambas sumas en (2.3.1) y (2.3.4) pueden verse como un producto escalar entre dos vectores.

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

TEOREMA 2.3.5. *Sea w un peso en la clase A_∞ de Muckenhoupt, y \mathcal{H}^w el sistema de wavelets de Haar desbalanceadas en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$. Dado $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño, consideramos la familia $\{K_Q^{m,\epsilon}, Q \in \mathcal{D}, m = 1, \dots, 2^n - 1\}$ definida como en (2.3.2), que satisface (2.3.3) y (2.3.4). Las perturbaciones por aproximación de soportes de las wavelets de \mathcal{H}^w definidas por*

$$(2.3.6) \quad \bar{h}_Q^{w,m,\epsilon} = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} \chi_{K_{Q'}^{m,\epsilon}}, \quad Q \in \mathcal{D}, \quad m = 1, \dots, 2^n - 1.$$

Constituyen una base de Riesz de $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$, con cotas Riesz $A_\epsilon^w = [1 - (c\epsilon)^{1/2}]^2$ y $B_\epsilon^w = [1 + (c\epsilon)^{1/2}]^2$.

En la demostración de Teorema 2.3.5 trabajaremos con las diferencias $\bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} := h_Q^{w,m} - \bar{h}_Q^{w,m,\epsilon}$. Enunciamos el siguiente resultado, el cual reúne las propiedades más importantes de las funciones $\bar{b}_Q^{w,m,\epsilon}$. Aquí $\langle f, g \rangle_w := \int fg w dx$.

LEMA 2.3.7. *Dado $i \in \mathbb{Z}$, $m \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ y $Q \in \mathcal{D}^i$ fijos, entonces las siguientes estimaciones se cumplen,*

- $\int_Q \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} w dx = 0$,
- $\left| \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon}(x) \right| \leq c w(Q)^{-1/2}$, con c dependiente de w y de la dimensión n ,
- si $j < i$, $J \in \mathcal{D}^j$, $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ y $J \subset Q$ entonces

$$\left| \left\langle \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon}, \bar{b}_J^{w,k,\epsilon} \right\rangle_w \right| \leq \frac{w \left(Q \setminus \bigcup_{Q' \subset Q} K_{Q'}^{m,\epsilon} \right)}{w(J)^{\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{2}}} \leq c\epsilon \left(\frac{w(Q)}{w(J)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\epsilon 2^{-\frac{n}{2}(i-j)\gamma},$$

donde γ es el exponente de la desigualdad (1.2.3) correspondiente al peso w ,

- $\left\| \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)} \leq c\epsilon^{1/2}$.

La demostración del Lema 2.3.7 se deja para el final de la sección. A continuación damos la prueba del Teorema 2.3.5.

PRUEBA DEL TEOREMA 2.3.5. Aplicaremos el Teorema de estabilidad de bases de Favier y Zalik 1.5.1, comparando la base de Riesz \mathcal{H}^w con las perturbaciones $\{\bar{h}_Q^{w,m,\epsilon}\}$. Sea

$$Tf := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^n-1}} \left\langle f, \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \right\rangle_w h_Q^{w,m} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} T_i f,$$

con $\bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} := h_Q^{w,m} - \bar{h}_Q^{w,m,\epsilon}$.

Veremos que el operador T está acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ y su norma está acotada por $c\epsilon^{1/4}$, con c dependiendo sólo de la dimensión n y del peso w . En efecto, aplicamos el Lema de Cotlar 1.1.1 con la sucesión de operadores $\{T_i\}$. Un cálculo sencillo muestra que

$$T_i^* f = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^n-1}} \left\langle f, h_Q^{w,m} \right\rangle_w \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon}.$$

Como \mathcal{H}^w es un sistema ortonormal entonces

$$T_i^* T_j f = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^{n-1}}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} \langle f, \bar{b}_J^{w,k,\epsilon} \rangle_w \langle h_J^{w,k}, h_Q^{w,m} \rangle_w \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} = 0,$$

para todo $i \neq j$.

Por otro lado si $i = j$, debido a que la familia de soportes $\{\text{sop } \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}\}$ es disjunta y al Lema 2.3.7, obtenemos

$$\begin{aligned} \|T_j^* T_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2 &= \|T_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2 = \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} \left| \langle f, \bar{b}_J^{w,k,\epsilon} \rangle_w \right|^2 \\ &\leq \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} \|f\|_{L^2(\text{sop } \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}, wdx)}^2 \left\| \bar{b}_J^{w,k,\epsilon} \right\|_{L^2(\text{sop } \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}, wdx)}^2 \\ &\leq c\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\|T_j^* T_j\| \leq c\epsilon$.

Nos resta analizar el operador $T_i T_j^*$. Por la ortogonalidad del sistema \mathcal{H}^w obtenemos que

$$\begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2 &= \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^{n-1}}} \left| \langle T_j^* f, \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^{n-1}}} \left| \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} \langle f, h_J^{w,k} \rangle_w \langle \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}, \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \rangle_w \right|^2. \end{aligned}$$

Si $i > j$, dado $Q \in \mathcal{D}^i$, existe a lo sumo un único $J = J(Q)$ tal que $\langle \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}, \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \rangle_w \neq 0$, en cuyo caso aplicando el Lema 2.3.7 resulta

$$\begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2 &= \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^{n-1}}} \left| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \langle f, h_J^k \rangle_w \langle \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}, \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \rangle_w \right|^2 \\ &\leq c \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^{n-1}}} \left| \langle f, h_J^{w,k} \rangle_w \right|^2 \left| \langle \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}, \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \rangle_w \right|^2 \\ &\leq c\epsilon^2 2^{-n(i-j)\gamma} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^{n-1}}} \left| \langle f, h_J^{w,k} \rangle_w \right|^2 \\ &\leq c\epsilon^2 2^{-n(i-j)\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2, \end{aligned}$$

por lo tanto $\|T_i T_j^*\| \leq c\epsilon 2^{-(n/2)(i-j)\gamma}$ si $i > j$ con c dependiente de la dimensión y del peso w .

Si $j > i$ dividimos la familia \mathcal{D}^j en tres subconjuntos como sigue,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(Q, m) = \{J \in \mathcal{D}^j / J \cap \text{sop } \bar{b}_Q^{w, m, \epsilon} = \emptyset\},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, m) = \{J \in \mathcal{D}^j / J \subset \text{sop } \bar{b}_Q^{w, m, \epsilon}\},$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(Q, m) = \mathcal{D}^j \setminus \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Notemos que si $J \in \mathcal{A}$ entonces $\left| \left\langle \bar{b}_J^{w, k, \epsilon}, \bar{b}_Q^{w, m, \epsilon} \right\rangle_w \right| = 0$, por otro lado si $J \in \mathcal{B}$ entonces J está incluido en algún hijo $Q' \in \mathcal{O}(Q)$ y de aquí $\bar{b}_Q^{w, m, \epsilon}$ es constante sobre J , debido al promedio nulo de $\bar{b}_J^{w, k, \epsilon}$ (ver Lema 2.3.7) resulta otra vez que $\left| \left\langle \bar{b}_J^{w, k, \epsilon}, \bar{b}_Q^{w, m, \epsilon} \right\rangle_w \right| = 0$.

En consecuencia

$$\begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2 &= \sum_{m=1, \dots, 2^{n-1}} \sum_{Q \in \mathcal{D}^i} \left| \sum_{k=1, \dots, 2^{n-1}} \sum_{J \in \mathcal{C}} \left\langle f, h_J^{w, k} \right\rangle_w \left\langle \bar{b}_J^{w, k, \epsilon}, \bar{b}_Q^{w, m, \epsilon} \right\rangle_w \right|^2 \\ &\leq \sum_{m=1, \dots, 2^{n-1}} \sum_{Q \in \mathcal{D}^i} \sum_{k=1, \dots, 2^{n-1}} \left| \left\langle f, h_J^{w, k} \right\rangle_w \right|^2 \sum_{J \in \mathcal{C}} \left| \left\langle \bar{b}_J^{w, k, \epsilon}, \bar{b}_Q^{w, m, \epsilon} \right\rangle_w \right|^2, \end{aligned}$$

Notar que \mathcal{C} consiste en aquellos cubos $J \in \mathcal{D}^j$ cuya intersección con la frontera de $K_{Q'}^{m, \epsilon}$ es distinta de vacío para algún $Q' \in \mathcal{O}(Q)$. De la definición se desprende el hecho de que la frontera de cada $K_{Q'}^{m, \epsilon}$ tiene dimensión $n - 1$ y sus diámetros son comparables con $(1/2)^i$, por lo tanto la medida de Lebesgue $n - 1$ dimensional de cada conjunto es comparable con $(1/2)^{i(n-1)}$. Por otro lado la intersección de cada $J \in \mathcal{C}$ con la frontera de $K_{Q'}^{m, \epsilon}$ tiene también dimensión $n - 1$ y sus diámetros son comparables con $(1/2)^j$, en consecuencia la medida de Lebesgue $n - 1$ dimensional de cada intersección es comparable a $(1/2)^{j(n-1)}$. Como la familia de intersecciones de cada $J \in \mathcal{C}$ con cada $K_{Q'}^{m, \epsilon}$ es un cubrimiento disjunto de su frontera y $\#\mathcal{O}(Q) = 2^n$ entonces podemos decir que $\#\mathcal{C}(1/2)^{j(n-1)} = c(1/2)^{i(n-1)}$, por lo tanto $\#\mathcal{C} = c(1/2)^{(i-j)(n-1)}$, con c dependiendo sólo de la dimensión del espacio.

En consecuencia aplicando el Lema 2.3.7, el hecho de que los cubos en \mathcal{C} son disjuntos y la estimación (1.2.3) resulta

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{J \in \mathcal{C} \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} \left| \left\langle \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}, \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \right\rangle_w \right|^2 &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sum_{J \in \mathcal{C}} \left(\int_{\text{sop } \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}} \bar{b}_J^{w,k,\epsilon} \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} w dx \right)^2 \\
&\leq c \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sum_{J \in \mathcal{C}} \left[\frac{w(\text{sop } \bar{b}_J^{w,k,\epsilon})}{w(J)^{1/2} w(Q)^{1/2}} \right]^2 \\
&\leq c\epsilon^2 \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sum_{J \in \mathcal{C}} \frac{w(J)}{w(Q)} = c\epsilon^2 \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{w(\bigcup_{J \in \mathcal{C}} J)}{w(Q)} \\
&\leq c\epsilon^2 \left(\frac{|\bigcup_{J \in \mathcal{C}} J|}{|Q|} \right)^\gamma \\
&\leq c\epsilon^2 \left(\#\mathcal{C} \frac{|J|}{|Q|} \right)^\gamma = c\epsilon^2 (\#\mathcal{C} (1/2)^{(j-i)n})^\gamma \\
&\leq c\epsilon^2 (1/2)^{(j-i)\gamma}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned}
\|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2 &\leq c\epsilon^2 (1/2)^{(j-i)\gamma} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ m=1, \dots, 2^{n-1}}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{C} \\ k=1, \dots, 2^{n-1}}} \left| \left\langle f, h_J^{w,k} \right\rangle_w \right|^2 \\
&\leq c\epsilon^2 (1/2)^{(j-i)\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2,
\end{aligned}$$

lo cual implica que la $\|T_i T_j^*\| \leq c\epsilon (1/2)^{(j-i)\gamma/2}$ cuando $j > i$. Junto con las demás estimaciones podemos deducir que la sucesión $s(j) = c\epsilon (1/2)^{|j|\gamma/2}$ establece la propiedad de casi ortogonalidad, en el sentido de Cotlar, para la sucesión de operadores $\{T_j\}$, y de aquí que $\|T\| \leq c\epsilon^{1/2}$, con c dependiente sólo de la dimensión y del peso w . Por otro lado, por definición de T , esto implica que la sucesión de diferencias $\{\bar{b}_Q^{w,m,\epsilon}\}$ constituyen una sucesión de Bessel sobre $L^2(\mathbb{R}^n, w dx)$ con cota $c\epsilon$. Tomando ϵ suficientemente pequeño podemos aplicar el Teorema de estabilidad de Favier y Zalik 1.5.1 y de aquí se sigue el resultado deseado. \square

Finalmente damos la demostración del Lema 2.3.7.

PRUEBA DEL LEMA 2.3.7. Notemos primero que como los conjuntos $\{K_Q^{m,\epsilon}\}$ cumplen la estimación (2.3.4) entonces, de la definición de la función $\bar{h}_Q^{w,m,\epsilon}$ obtenemos que $\int_Q \bar{h}_Q^{w,m,\epsilon} w dx = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{m,Q} w(K_{Q'}^{m,\epsilon}) = 0$, por otro lado la wavelet $h_Q^{w,m}$ también tiene promedio nulo, por lo tanto de aquí se tiene que la diferencia $\bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} = h_Q^{w,m} - \bar{h}_Q^{w,m,\epsilon}$ también tiene integral nula sobre su soporte, lo cual prueba el primer ítem del Lema. El segundo ítem del Lema se deduce del hecho de que $|C_{Q'}^{m,Q}| \leq C w(Q)^{-1/2}$, por lo tanto podemos ver que $|\bar{b}_Q^{w,m,\epsilon}| \leq c w(Q)^{-1/2}$.

Para el tercer ítem observemos que, de la definición de cada diferencia $\bar{b}_Q^{w,m,\epsilon}$, se puede ver que $\text{sop } \bar{b}_J^{w,k,\epsilon} = \bigcup_{J' \subset J} J' \setminus K_{J'}^{w,k,\epsilon}$, entonces por la estimación anterior, (2.3.3) y (1.2.3) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon}, \bar{b}_J^{w,k,\epsilon} \right\rangle_w \right| &\leq \int_{\text{sop } \bar{b}_J^{w,k,\epsilon}} \left| \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \right| \left| \bar{b}_J^{w,k,\epsilon} \right| w dx \\
&\leq c \frac{w \left(\bigcup_{J' \subset J} J' \setminus K_{J'}^{w,k,\epsilon} \right)}{w(J)^{1/2} w(Q)^{1/2}} \leq c\epsilon \left(\frac{w(J)}{w(Q)} \right)^{1/2} \leq c\epsilon \left(\frac{|J|}{|Q|} \right)^{\gamma/2} \\
&\leq c\epsilon (1/2)^{(j-i)n\gamma/2}.
\end{aligned}$$

Finalmente si $m = k$ e $i = j$ podemos reproducir una estimación análoga a la anterior y resulta

$$\left\| \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)} = \left\langle \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon}, \bar{b}_Q^{w,m,\epsilon} \right\rangle_w^{1/2} \leq c\epsilon^{1/2}.$$

□

Regularización del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R})$

Como ya dijimos en la introducción, el afán por encontrar wavelets regulares que conserven las ventajas de las wavelets de Haar ([33]) y de las de Littlewood-Paley (0.0.5), se remonta a los comienzos del estudio de las transformadas wavelets. En este aspecto Ingrid Daubechies en [23], combina resultados de S. Mallat por un lado y de P. Burt y E. Adelson por otro, para construir un base ortonormal de wavelets $\{\psi_{mn}(x) := 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}x - n)\}$ de soportes compactos, correspondiente a una función básica $\psi \in C^k$. Los tamaños de los soportes crecen linealmente con la regularidad requerida de ψ .

Un base de Riesz de funciones con soporte compacto, que caracteriza $L^2(\mathbb{R})$ y sus soportes no crecen con la regularidad de la función básica, ha sido construido por Govil - Zalik ([31]). En [4] se obtiene una regularización por convolución del sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R})$ que resulta una base de Riesz con cotas Riesz cercanas a uno. En dicho trabajo se construyen funciones regulares que tienen soporte compacto con solapamiento acotado, los cuales resultan ser ϵ -entornos de los soportes de las wavelets de Haar, es decir, entornos de los intervalos diádicos cuya medidas resultan un múltiplo $(1 + \epsilon)$ de la medida de estos intervalos. En la prueba del resultado principal los autores utilizan propiedades de funciones de variación acotada en \mathbb{R} . Combinando estos resultados con el trabajo de Zalik ([53], Lema 2.5) se pueden extender los resultados a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En las siguientes secciones mostramos algunos resultados concernientes a la regularización de bases ortonormales de tipo Haar. Lo que, entendemos, es la herramienta novedosa en el enfoque es el Lema de Cotlar de acotación de sumas de operadores casi ortogonales en $L^2(\mathbb{R})$.

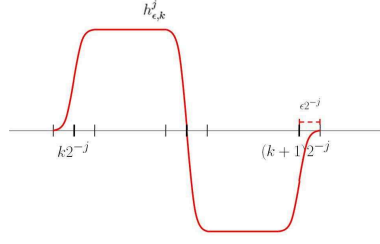
3.1. Regularización por convolución de las funciones de Haar

Sea $h(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}(x)$ la función de Haar en \mathbb{R} y $\phi \in C^\infty$, con soporte incluido en el $(-1, 1)$, par y decreciente a la derecha del cero, dado $\epsilon > 0$ con ϕ_ϵ denotaremos como antes la función $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi(\frac{x}{\epsilon})$. Sea $h_\epsilon(x) = h * \phi_\epsilon(x)$.

Dados j y k en \mathbb{Z} consideramos las funciones

$$(3.1.1) \quad h_{\epsilon,k}^j(x) = 2^{\frac{j}{2}}h_\epsilon(2^jx - k)$$

La figura muestra esquemáticamente una de las $h_{\epsilon,k}^j$.



Enunciamos a continuación el teorema principal de esta sección.

TEOREMA 3.1.2. *Para todo $\delta \in (0, 1)$ existe $\epsilon > 0$ tal que la familia $\{h_{\epsilon,k}^j\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ definida en (3.1.1) es una base de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$ con cotas Riesz $A_\delta = 1 - \delta$ y $B_\delta = 1 + \delta$.*

Para demostrar el Teorema 3.1.2 haremos uso de la autosimilaridad inherente al sistema de Haar y a su regularización por convolución. Sean A y B subconjuntos finitos y arbitrarios de \mathbb{Z} , sea $T_{A,B}f := \sum_{(j,k) \in A \times B} \langle f, b_{\epsilon,k}^j \rangle h_k^j = \sum_{j \in A} T_j f$, donde $b_{\epsilon,k}^j = h_k^j - h_{\epsilon,k}^j$ y

$$(3.1.3) \quad T_j f(x) = \sum_{k \in B} \langle f, b_{\epsilon,k}^j \rangle h_k^j(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\sum_{k \in B} b_{\epsilon,k}^j(y) h_k^j(x) \right) dy.$$

LEMA 3.1.4 (Autosimilaridad). *Sea $\Delta_t : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ la isometría en $L^2(\mathbb{R})$ definida por $\Delta_t g = t^{\frac{1}{2}} g(tx)$, y sea T_j el operador definido en (3.1.3), entonces*

1. $\Delta_t^* = \Delta_{t^{-1}}$,
2. $T_j = \Delta_{2^j} T_0 \Delta_{2^{-j}}$,
3. $T_j^* = \Delta_{2^j} T_0^* \Delta_{2^{-j}}$,
4. $T_i T_j^* = \Delta_{2^i} T_0 T_{j-i}^* \Delta_{2^{-i}} = \Delta_{2^j} T_{i-j} T_0^* \Delta_{2^{-j}}$,
5. $T_i^* T_j = \Delta_{2^i} T_0^* T_{j-i} \Delta_{2^{-i}} = \Delta_{2^{-j}} T_{i-j}^* T_0 \Delta_{2^{-j}}$,
6. $\|T_i T_j^*\| = \|T_0 T_{j-i}^*\| = \|T_{i-j} T_0^*\|$, $\|T_i^* T_j\| = \|T_0^* T_{j-i}\| = \|T_{i-j}^* T_0\|$.

DEMOSTRACIÓN.

1. $\langle \Delta_t f, g \rangle = \int t^{\frac{1}{2}} f(tx) g(x) dx = \int f(y) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} g\left(\frac{y}{t}\right) dy = \left\langle f, \Delta_{\frac{1}{t}} g \right\rangle$.
2. Dado que $\Delta_{2^{-j}} f(x) = 2^{-\frac{j}{2}} f(2^{-j}x)$ entonces

$$\begin{aligned} T_0(\Delta_{2^{-j}} f)(x) &= \int 2^{-\frac{j}{2}} f(2^{-j}y) \sum_{k \in B} b_{\epsilon,k}^0(y) h_k^0(x) dy \\ &= \int f(y) \sum_{k \in B} 2^{\frac{j}{2}} b_{\epsilon,k}^0(2^j y) h_k^0(x) dy \\ &= \int f(y) \sum_{k \in B} b_{\epsilon,k}^j(y) h_k^0(x) dy \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \Delta_{2^j}(T_0 \Delta_{2^{-j}} f)(x) &= \int f(y) \sum_{k \in B} b_{\epsilon,k}^j(y) 2^{\frac{j}{2}} h_k^0(2^j x) dy \\ &= \int f(y) \sum_{k \in B} b_{\epsilon,k}^j(y) h_k^j(x) dy = T_j f(x). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 T_j^* f(x) &= \int f(y) \sum_k b_{\epsilon,k}^j(x) h_k^j(y) dy = \int f(y) 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k \in B} b_{\epsilon,k}^0(2^j x) 2^{\frac{j}{2}} h_k^0(2^j y) dy \\
 &= 2^{\frac{j}{2}} \int 2^{-\frac{j}{2}} f(2^{-j} y) \sum_{k \in B} b_{\epsilon,k}^0(2^j x) h_k^0(y) dy \\
 &= 2^{\frac{j}{2}} T_0^* (\Delta_{2^{-j}} f)(2^j x) = (\Delta_{2^j} T_0^* \Delta_{2^{-j}}) f(x)
 \end{aligned}$$

4. Primero vemos que

$$\begin{aligned}
 \Delta_{2^{-i}} T_j^* f(x) &= \Delta_{2^{-i}} \left(\int f(y) \sum_{k \in B} 2^{\frac{j}{2}} b_{\epsilon,k}^0(2^j \cdot) h_k^j(y) dy \right) \\
 &= \int f(y) \sum_{k \in B} 2^{\frac{j-i}{2}} b_{\epsilon,0}^0(2^{j-i} x - k) 2^{\frac{j}{2}} h_0^0(2^j y - k) dy \\
 &= \int 2^{-\frac{i}{2}} f(2^{-i} z) \sum_{k \in B} 2^{\frac{j-i}{2}} b_{\epsilon,0}^0(2^{j-i} x - k) 2^{\frac{j-i}{2}} h_0^0(2^{j-i} z - k) dz \\
 &= \int \Delta_{2^{-i}} f(z) \sum_{k \in B} b_{\epsilon,k}^{j-i}(x) h_k^{j-i}(z) dz \\
 (3.1.5) \quad &= T_{j-i}^* \Delta_{2^{-i}} f(x).
 \end{aligned}$$

Ahora usando 2 obtenemos

$$T_i T_j^* = \Delta_{2^i} T_0 \Delta_{2^{-i}} T_j^* = \Delta_{2^i} T_0 T_{j-i}^* \Delta_{2^{-i}}.$$

Por otro lado como

$$\begin{aligned}
 T_i \Delta_{2^j} f(x) &= \int \Delta_{2^j} f(y) \sum_{k \in B} 2^{\frac{j}{2}} b_{\epsilon,k}^0(2^j y) 2^{\frac{j}{2}} h_k^0(2^i x) dy \\
 &= \int 2^{\frac{j}{2}} f(2^j y) \sum_{k \in B} 2^{\frac{j}{2}} b_{\epsilon,k}^0(2^j y) 2^{\frac{j}{2}} h_k^0(2^{i-j} x 2^j) dy \\
 &= 2^{\frac{j}{2}} \int f(z) \sum_{k \in B} 2^{\frac{i-j}{2}} b_{\epsilon,k}^0(2^{i-j} z) 2^{\frac{i-j}{2}} h_k^0(2^{i-j} x 2^j) dz \\
 &= 2^{\frac{j}{2}} \int f(z) \sum_{k \in B} 2^{\frac{i-j}{2}} b_{\epsilon,k}^0(2^{i-j} z) 2^{\frac{i-j}{2}} h_k^{i-j}(2^j x) dz \\
 &= \Delta_{2^j} T_{i-j} f(x),
 \end{aligned}$$

con lo cual resulta

$$T_i T_j^* = T_i (\Delta_{2^j} T_0^* \Delta_{2^{-j}}) = \Delta_{2^j} T_{i-j} T_0^* \Delta_{2^{-j}}.$$

5. De la ecuaciones en 4 podemos escribir en forma similar a lo hecho en (3.1.5)

$$\Delta_{2^{-i}} T_j = T_{j-i} \Delta_{2^{-i}},$$

luego, usando 3

$$T_i^* T_j = \Delta_{2^i} T_0^* \Delta_{2^{-i}} T_j = \Delta_{2^i} T_0^* T_{j-i} \Delta_{2^{-i}}.$$

Por otra parte de (3.1.5)

$$T_i^* \Delta_{2^j} = \Delta_{2^j} T_{i-j}^*$$

luego por 2

$$T_i^* T_j = T_i^* \Delta_{2^j} T_0 \Delta_{2^{-j}} = \Delta_{2^{-j}} T_{i-j}^* T_0 \Delta_{2^{-j}}.$$

6. Como Δ_t es una isometría en L^2 de 4. podemos deducir que

$$\|T_i T_j^*\| = \|T_0 T_{j-i}^*\| = \|T_{i-j} T_0^*\|.$$

□

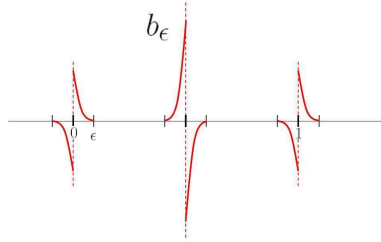
DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.1.2. Si i, j son números enteros cualesquiera el ítem 6 del Lema 3.1.4 tenemos que $\|T_i^* T_j\| = \|T_0^* T_{j-i}\|$. Por lo tanto en lugar de analizar la norma del operador $T_i^* T_j$ podemos concentrarnos en el operador $T_0^* T_j$. Para A y B como antes

$$\begin{aligned} T_0^* T_j f(x) &= \sum_{k \in B} \langle h_k^0, T_j f \rangle b_{\epsilon, k}^0(x) = \sum_{k \in B} \left\langle h_k^0, \sum_{k' \in B} \langle f, b_{\epsilon, k'}^j \rangle h_{k'}^j \right\rangle b_{\epsilon, k}^0(x) \\ &= \sum_{k \in B} b_{\epsilon, k}^0(x) \sum_{k' \in B} \langle f, b_{\epsilon, k'}^j \rangle \langle h_k^0, h_{k'}^j \rangle. \end{aligned}$$

Notar que si $j \neq 0$ entonces $T_0^* T_j = 0$. Por otro lado para $j = 0$ obtenemos $\|T_0^* T_0 f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|T_0 f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{k \in B} |\langle f, b_{\epsilon, k}^0 \rangle|^2$ donde

$$|\langle f, b_{\epsilon, k}^0 \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) b_{\epsilon}(x - k) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x + k) b_{\epsilon}(x) dx \right|.$$

La función b_{ϵ} es distinta de cero sólo sobre los intervalos $[-\epsilon, \epsilon]$, $[\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon]$ y $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$.



Por lo tanto

$$|\langle f, b_{\epsilon, k}^0 \rangle| = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x + k) b_{\epsilon}(x) dx + \int_{\frac{1}{2} - \epsilon}^{\frac{1}{2} + \epsilon} f(x + k) b_{\epsilon}(x) dx + \int_{1 - \epsilon}^{1 + \epsilon} f(x + k) b_{\epsilon}(x) dx,$$

si aplicamos la desigualdad de Schwartz en la primer integral resulta

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x + k) b_{\epsilon}(x) dx \right| &\leq \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x + k)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |b_{\epsilon}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (2\epsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x + k)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Procediendo análogamente con las otras dos integrales y sumando sobre $k \in B$ deducimos que

$$\begin{aligned} \|T_0 f\|_2^2 &\leq \sum_{k \in B} 18\epsilon \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x+k)|^2 dx + \int_{\frac{1}{2}-\epsilon}^{\frac{1}{2}+\epsilon} |f(x+k)|^2 dx + \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} |f(x+k)|^2 dx \right) \\ &\leq c\epsilon \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Para el análisis del operador $T_i T_j^*$ recordemos que $(T_i T_j^*)^* = T_j T_i^*$, por lo tanto como $\|T_i T_j^*\| = \|(T_i T_j^*)^*\| = \|T_j T_i^*\|$ podemos aplicar el Lema 3.1.4, ítem 6, para deducir que

$$\|T_0 T_{j-i}^*\| = \|T_i T_j^*\| = \|T_j T_i^*\| = \|T_0 T_{i-j}^*\|,$$

o lo que es lo mismo $\|T_0 T_j^*\| = \|T_0 T_{-j}^*\|$. Podemos suponer, entonces, sin pérdida de generalidad que $j > 0$, y en consecuencia $2^j \in \mathbb{Z}$. La ortogonalidad del sistema de Haar nos permite deducir la siguiente igualdad

$$\|T_0 T_j^* g\|_2^2 = \sum_{k \in B} \left| \sum_{l \in B} \langle g, h_l^j \rangle \langle b_{\epsilon, l}^j, b_{\epsilon, k}^0 \rangle \right|^2.$$

Por un lado aplicando el cambio de variable $y = x - k$ obtenemos

$$\langle b_{\epsilon, l}^j, b_{\epsilon, k}^0 \rangle = \int 2^{\frac{j}{2}} b_{\epsilon}(2^j y + 2^j k - l) b_{\epsilon}(y) dy = \langle b_{\epsilon, l-2^j k}^j, b_{\epsilon, 0}^0 \rangle.$$

Luego si denotamos con $\tilde{B} = \{l - 2^j k, l \in B\}$ resulta

$$\begin{aligned} \|T_0 T_j^* g\|_2^2 &= \sum_k \left(\sum_{l \in B} |\langle g, h_l^j \rangle| |\langle b_{\epsilon, l}^j, b_{\epsilon, k}^0 \rangle| \right)^2 \\ &= \sum_k \left(\sum_{l \in B} |\langle g, h_l^j \rangle| |\langle b_{\epsilon, l-2^j k}^j, b_{\epsilon, 0}^0 \rangle| \right)^2 \\ &= \sum_k \left(\sum_{l \in \tilde{B}} |\langle g, h_{l+2^j k}^j \rangle| |\langle b_{\epsilon, l}^j, b_{\epsilon, 0}^0 \rangle| \right)^2. \end{aligned}$$

Dividimos el conjunto \tilde{B} en los siguientes subconjuntos disjuntos

- $\mathcal{A} = \{l \in \tilde{B} / \text{sop} b_{\epsilon, 0}^0 \cap \text{sop} b_{\epsilon, l}^j = \emptyset\}$,
- $\mathcal{B} = \{l \in \tilde{B} / b_{\epsilon, 0}^0 \text{ sea continua y no idénticamente nula sobre el soporte de } b_{\epsilon, l}^j\}$,
- $\mathcal{C} = \tilde{B} \setminus \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Notar que si $l \in \mathcal{A}$ entonces el producto entre $b_{\epsilon, 0}^0$ y $b_{\epsilon, l}^j$ es cero, por lo tanto

$$\|T_0 T_j^* g\|_2^2 \leq 4 \sum_k \left[\left(\sum_{l \in \mathcal{B}} \right)^2 + \left(\sum_{l \in \mathcal{C}} \right)^2 \right].$$

Observemos que \mathcal{C} consiste de todos aquellos subíndices l correspondientes a las diferencias $b_{\epsilon, l}^j$ cuyos soportes contienen algunos de los puntos de discontinuidad de $b_{\epsilon, 0}^0$ o bien contienen alguno de los puntos donde la función pasa de valores distintos de cero a anularse. Por lo tanto si suponemos que ϵ es lo suficientemente pequeño como para que los soportes de las diferencias $b_{\epsilon, l}^j$ de la resolución j se solapen sólo

si son vecinas, entonces para j grande el cardinal de \mathcal{C} es a lo sumo 6. Notemos también que independientemente de l y de j , las normas de las diferencias están acotadas por una constante, por lo tanto la desigualdad de Schwartz nos permite obtener la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |\langle b_{\epsilon,0}^0, b_{\epsilon,l}^j \rangle| &\leq \int_{\text{sop} b_{\epsilon,l}^j} |b_{\epsilon,0}^0(x)| |b_{\epsilon,l}^j(x)| dx \leq \max |b_{\epsilon,0}^0| \int_{\text{sop} b_{\epsilon,l}^j} |b_{\epsilon,l}^j(x)| dx \\ &\leq c \left(\int_{\text{sop} b_{\epsilon,l}^j} |b_{\epsilon,l}^j(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} |\text{sop} b_{\epsilon,l}^j|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c (6\epsilon 2^{-j})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_k \left(\sum_{l \in \mathcal{C}} \langle g, h_{l+2^j k}^j \rangle \langle b_{\epsilon,l}^j, b_{\epsilon,0}^0 \rangle \right)^2 &\leq c\epsilon 2^{-j} \sum_k \left(\sum_{l \in \mathcal{C}} \langle g, h_{l+2^j k}^j \rangle \right)^2 \\ &\leq c\epsilon 2^{-j} \sum_k \left[\left(\sum_{l \in \mathcal{C}} |\langle g, h_{l+2^j k}^j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\#\mathcal{C})^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &= c\epsilon 2^{-j} \sum_k \sum_{l \in \mathcal{C}} |\langle g, h_{l+2^j k}^j \rangle|^2 \\ &\leq c\epsilon 2^{-j} \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

Para analizar que pasa sobre \mathcal{B} debemos notar que el subíndice l también identifica la posición del intervalo diádico I_l^j . Debido a que el soporte de la función $b_{\epsilon,0}^0$ mide 6ϵ tenemos que el cardinal de \mathcal{B} es del orden de $\epsilon 2^j$.

Por otro lado podemos ver fácilmente de la definición de $h_\epsilon = h_{\epsilon,0}^0$ que $\left| \frac{dh_{\epsilon,0}^0}{dx} \right| \leq \epsilon^{-1} \max |\phi'|$. Lo mismo se deduce para $\left| \frac{db_{\epsilon,0}^0}{dx} \right|$ en sus intervalos de diferenciabilidad. En consecuencia debido a que $b_{\epsilon,l}^j$ tiene promedio nulo, aplicando el teorema del valor medio en la región de diferenciabilidad de $b_{\epsilon,0}^0$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\text{sop} b_{\epsilon,l}^j} b_{\epsilon,l}^j(x) b_{\epsilon,0}^0(x) dx \right| &= \sum_{p=1}^3 \left| \int_{\text{sop}^p(b_{\epsilon,l}^j)} b_{\epsilon,l}^j(x) (b_{\epsilon,0}^0(x) - b_{\epsilon,0}^0(x_{j,l}^p)) dx \right| \\ &\leq \sum_{p=1}^3 \int_{\text{sop}^p(b_{\epsilon,l}^j)} |b_{\epsilon,l}^j(x)| |b_{\epsilon,0}^0(x) - b_{\epsilon,0}^0(x_{j,l}^p)| dx \\ &\leq \max_{\text{sop} b_{\epsilon,l}^j} \left| \frac{db_{\epsilon,0}^0}{dx} \right| \sum_{p=1}^3 \int_{\text{sop}^p(b_{\epsilon,l}^j)} |b_{\epsilon,l}^j(x)| |x - x_{j,l}^p| dx \\ &\leq \frac{c2^{\frac{j}{2}}}{\epsilon} \sum_{p=1}^3 \int_{\text{sop}^p(b_{\epsilon,l}^j)} |x - x_{j,l}^p| dx \\ &\leq \frac{c2^{\frac{j}{2}}}{\epsilon} c\epsilon 2^{-j} \sum_{p=1}^3 \int_{\text{sop}^p(b_{\epsilon,l}^j)} dx \leq c2^{-\frac{3}{2}j} \epsilon \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación $\text{sop}^p(b_{\epsilon,k}^j)$ con $p = 1, 2, 3$ para referirnos a los intervalos que constituyen el soporte de $b_{\epsilon,k}^j$ y $x_{j,l}^p$ es un punto cualquiera del interior de $\text{sop}^p(b_{\epsilon,k}^j)$. Con esto último obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_k \left(\sum_{l \in \mathcal{B}} |\langle g, h_{l+2^j k}^j \rangle| |\langle b_{\epsilon,l}^j, b_{\epsilon,0}^0 \rangle| \right)^2 &\leq c 2^{-3j} \epsilon^2 \sum_k \left(\sum_{l \in \mathcal{B}} |\langle g, h_{l+2^j k}^j \rangle| \right)^2 \\ &\leq c \epsilon^2 2^{-3j} \#\mathcal{B} \sum_k \sum_{l \in \mathcal{B}} |\langle g, h_{l+2^j k}^j \rangle|^2 \\ &\leq c \epsilon^3 2^{-2j} \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

Si recopilamos todos los resultados obtenemos que $\|T_i T_j^*\| \leq c \epsilon^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{|i-j|}{2}}$, $\|T_i^* T_j\| = 0$ si $j \neq i$, y también que $\|T_j^* T_j\| \leq c \epsilon^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto definiendo la sucesión numérica s como

$$s(j) = 2^{-\frac{|j|}{2}} c \epsilon^{\frac{1}{2}}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

entonces $\sum_j s(j)^{\frac{1}{2}} < \infty$, $\|T_i^* T_j\| \leq s(i-j)$ y $\|T_i T_j^*\| \leq s(i-j)$, por lo tanto podemos aplicar el Lemma de Cotlar 1.1.1 y obtener la acotación del operador $T_{A,B}$ sobre $L^2(\mathbb{R})$. Por otro lado como la norma es independiente de A y B obtenemos que el operador definido por

$$Tf = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \langle f, b_{\epsilon,k}^j \rangle h_k^j$$

está acotado de L^2 en L^2 con $\|T\| \leq c \epsilon^{\frac{1}{4}}$. Esto quiere decir que la sucesión $\{b_{\epsilon,k}^j\}$ es una sucesión de Bessel con cota $c \epsilon^{\frac{1}{2}}$. Aplicando aquí el Teorema de Favier y Zalik 1.5.1 obtenemos el resultado deseado. \square

3.2. Regularización de perturbaciones por aproximación de soportes del sistema de Haar

En esta sección usaremos los resultados del Capítulo I y perturbamos una base de Riesz para obtener otra base de Riesz que ahora es regular y con menor solapamiento de soportes.

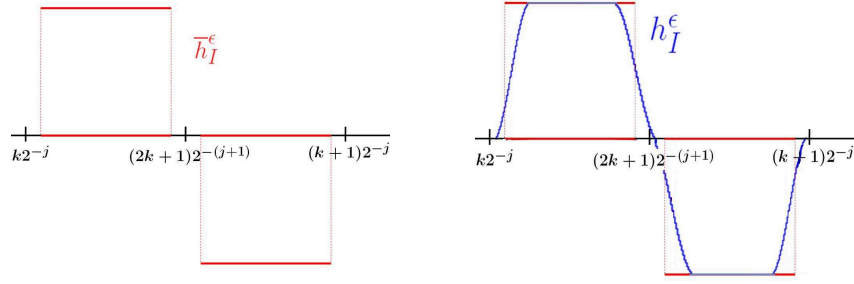
A continuación trabajamos con la base de Riesz $\{\bar{h}_I^\epsilon, I \in \mathcal{D}\}$ del Teorema 2.1.1. Siguiendo las ideas generales de [4], procedemos a convolucionar estas con una dilatación conveniente de una función $\varphi \in C^\infty(-1, 1)$, y así lograr funciones regulares soportadas sobre intervalos diádicos.

Comenzamos tomando una función infinitamente diferenciable φ , no negativa, par, decreciente a la derecha del cero, con soporte en $(-1, 1)$ y tal que $\int_{-1}^1 \varphi dx = 1$.

Si $\epsilon > 0$ es el mismo que en el Teorema 2.1.1, para cada $I \in \mathcal{D}$ definimos las funciones

$$(3.2.1) \quad h_I^\epsilon := \bar{h}_I^\epsilon * \varphi_{\epsilon|I|}, \quad I \in \mathcal{D},$$

donde $\varphi_{\epsilon|I|}(x) := \frac{1}{\epsilon|I|} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon|I|}\right)$. Debido a las propiedades de la operación convolución, las nuevas funciones $\{h_I^\epsilon, I \in \mathcal{D}\}$ resultan regulares y con soporte contenido en el correspondiente intervalo I . En la siguiente figura se esquematiza la situación.



Estamos ahora en condiciones de enunciar el teorema principal de esta sección.

TEOREMA 3.2.2. *La familia $\{h_I^\epsilon, I \in \mathcal{D}\}$ constituye una base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$ con cotas Riesz tan cercanas a 1 como se desee dependiendo de la elección de ϵ . Más específicamente $\{h_I^\epsilon, I \in \mathcal{D}\}$ es una base y además si A_ϵ y B_ϵ son las constantes del Teorema 2.1.1, existe $C > 0$ independiente de $I \in \mathcal{D}$ y $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que si llamamos*

$$\underline{C}_\epsilon = \left[1 - \left(\frac{\epsilon C}{A_\epsilon} \right)^{1/2} \right]^2 A_\epsilon, \quad \bar{C}_\epsilon = \left[1 + \left(\frac{\epsilon C}{B_\epsilon} \right)^{1/2} \right]^2 B_\epsilon$$

resulta

$$(3.2.3) \quad \underline{C}_\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, h_I^\epsilon \rangle|^2 \leq \bar{C}_\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

DEMOSTRACIÓN. Como en el Teorema 2.1.1 probaremos que las diferencias $b_I^\epsilon := \bar{h}_I^\epsilon - h_I^\epsilon$ constituyen un sistema de Bessel con constante chica. Sea $T_i f(x) := \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \langle f, b_I^\epsilon \rangle h_I(x)$ y $Tf(x) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} T_i f(x)$. Aquí la función h_I es la wavelet de Haar en $L^2(\mathbb{R})$ soportada sobre el intervalo diádico I .

Nuevamente $T_i^* f = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \langle f, h_I \rangle b_I^\epsilon$. Para ver que el operador T está acotado sobre $L^2(\mathbb{R})$ usamos el Lema de Cotlar 1.1.1. Por la ortogonalidad de la familia $\mathcal{H} = \{h_I, I \in \mathcal{D}\}$, resulta que

$$T_i^* T_j f(x) = 0, \quad \text{si } i \neq j.$$

Si $i = j$, por definición de b_J^ϵ observamos que

$$\|b_J^\epsilon\|_2^2 = \int_{\text{sop } b_J^\epsilon} |b_J^\epsilon|^2 \leq |J|^{-1} |\text{sop } b_J^\epsilon| \leq c\epsilon$$

y entonces como en la prueba de (2.1.3), obtenemos $\|T_j^* T_j f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Por lo tanto para funciones f con norma igual a uno, se obtiene que $\|T_i^* T_i f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c\epsilon$. Para ponernos en la hipótesis del Lema 1.1.1, podemos escribir que

$$(3.2.4) \quad \|T_i^* T_j\| \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \leq c\epsilon & \text{si } i = j. \end{cases} ,$$

Analizamos ahora

$$(3.2.5) \quad \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, h_J \rangle \langle b_J^\epsilon, b_I^\epsilon \rangle \right)^2$$

Notemos que la doble suma en (3.2.5) puede verse como la norma en $L^2(\mathcal{D}^i)$ del operador

$$\Upsilon g(I) := \sum_{J \in \mathcal{D}^j} g(J) K^\epsilon(I, J)$$

definido para funciones sobre \mathcal{D}^j , cuando en ambos espacios consideramos la medida contadora correspondiente, si el núcleo K^ϵ se define como el producto $K^\epsilon(I, J) = \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle$ y $g(J) = \langle f, h_J \rangle$.

Para acotar el operador Υ podemos aplicar el Lema de Schur 1.3.1. En efecto, fijando $J \in \mathcal{D}^j$ analizamos primero el caso en que $j \geq i$, de esta manera existe un único $I(J) \in \mathcal{D}^i$ tal que $J \subset I(J)$. Si $\text{sop } b_{I(J)}^\epsilon \cap \text{sop } b_J^\epsilon \neq \emptyset$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{D}^i} |K^\epsilon(I, J)| &= |\langle b_{I(J)}^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| \leq \int_{\text{sop } b_J^\epsilon} |b_{I(J)}^\epsilon(x)| |b_J^\epsilon(x)| dx \leq C \frac{\epsilon |J|}{|I(J)|^{\frac{1}{2}} |J|^{\frac{1}{2}}} \\ (3.2.6) \qquad \qquad \qquad &\leq C \epsilon \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{|I(J)|^{\frac{1}{2}}} \leq C \epsilon 2^{-\frac{i-j}{2}}. \end{aligned}$$

Por otro lado si $i > j$ muchos intervalos en \mathcal{D}^i pueden intersecar el soporte de b_J^ϵ , por lo tanto procedemos a hacer una partición de \mathcal{D}^i en tres conjuntos.

$$\mathcal{A}(J) = \{I \in \mathcal{D}^i / \text{sop } b_I^\epsilon \cap \text{sop } b_J^\epsilon = \emptyset\}$$

$$\mathcal{B}(J) = \{I \in \mathcal{D}^i / \text{sop } b_I^\epsilon \cap \text{sop } b_J^\epsilon \neq \emptyset \text{ y } b_J^\epsilon \text{ es continua sobre } \text{sop } b_I^\epsilon\}$$

$$\mathcal{C}(J) = \mathcal{D}^i \setminus \mathcal{A}(J) \cup \mathcal{B}(J).$$

Con esta notación

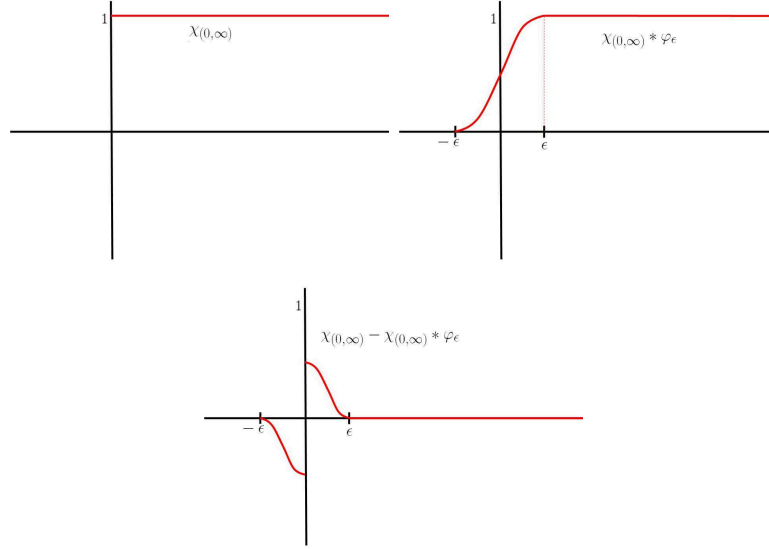
$$\sum_{I \in \mathcal{D}^i} |K^\epsilon(I, J)| = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| = \sum_{I \in \mathcal{A}(J)} + \sum_{I \in \mathcal{B}(J)} + \sum_{I \in \mathcal{C}(J)}.$$

Notemos que si $I \in \mathcal{A}(J)$ entonces $|\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| = 0$. Por otro lado, para estimar la segunda suma utilizamos dos propiedades de las diferencias. La primera de ellas es la regularidad de b_J^ϵ . En efecto, si $I \in \mathcal{B}(J)$, como b_J^ϵ es continua, entonces I está totalmente incluido en uno de los intervalos que componen el $\text{sop } b_J^\epsilon$, entonces, si x, y están en el mismo intervalo donde b_J^ϵ es continua y distinta de cero resulta $\bar{h}_J^\epsilon(x) = \bar{h}_J^\epsilon(y)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |b_J^\epsilon(x) - b_J^\epsilon(y)| &= \left| \bar{h}_J^\epsilon * \varphi_{\epsilon|J|}(x) - \bar{h}_J^\epsilon * \varphi_{\epsilon|J|}(y) \right| \\ &= \left| \int_{\substack{|x-z| < \epsilon|J| \\ |y-z| < \epsilon|J|}} \bar{h}_J^\epsilon(z) \frac{1}{\epsilon|J|} \left[\varphi\left(\frac{x-z}{\epsilon|J|}\right) - \varphi\left(\frac{y-z}{\epsilon|J|}\right) \right] dz \right| \\ &\leq \|\varphi'\|_\infty \int_{\substack{|x-z| < \epsilon|J| \\ |y-z| < \epsilon|J|}} |\bar{h}_J^\epsilon(z)| \frac{1}{\epsilon^2 |J|^2} |x-y| dz \\ &\leq C \|\varphi'\|_\infty \frac{|x-y|}{\epsilon^2 |J|^2} \epsilon |J| \frac{1}{|J|^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{C}{\epsilon |J|^{\frac{3}{2}}} |x-y|. \end{aligned}$$

La segunda propiedad a la que hacemos referencia establece que el soporte de b_I^ϵ puede ser dividido en cuatro intervalos, todos de longitud $\epsilon|I|$, sobre los cuales

la integral de b_I^ϵ es nula. Haciendo un re-escalamiento y una traslación conveniente, será suficiente demostrar que $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} [\chi_{(0,\infty)}(x) - \chi_{(0,\infty)} * \varphi_\epsilon(x)] dx = 0$.



Notar que

$$\chi_{0,\infty}(x) - (\chi_{(0,\infty)} * \varphi_\delta)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \delta \\ \chi_{0,\delta}(x) - (\chi_{(0,\delta)} * \varphi_\delta)(x) & \text{si } |x| < \delta. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (3.2.7) \quad \int_{-\delta}^{\delta} [\chi_{0,\infty}(x) - (\chi_{(0,\infty)} * \varphi_\delta)(x)] dx &= \int_{-\delta}^{\delta} [\chi_{0,\delta}(x) - (\chi_{(0,\delta)} * \varphi_\delta)(x)] dx \\ &= \delta - \int_{-\delta}^{\delta} \left(\int_0^{\delta} \frac{1}{\delta} \varphi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) dy \right) dx \\ &= \delta - \int_0^{\delta} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\delta} \varphi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) dx \right) dy \\ &= \delta - \int_0^{\delta} dy = 0 \end{aligned}$$

Volviendo al caso general, si llamamos $\text{sop}^p(b_I^\epsilon)$, $p = 1, \dots, 4$ a cada uno de los intervalos en los que se divide el soporte de b_I^ϵ y $x_p \in \text{sop}^p(b_I^\epsilon)$ y utilizando las propiedades anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| &= \left| \sum_{p=1}^4 \int_{\text{sop}^p(b_I^\epsilon)} b_I^\epsilon(x) [b_J^\epsilon(x) - b_J^\epsilon(x_p)] dx \right| \\ &\leq \frac{C}{\epsilon |J|^{\frac{3}{2}}} \sum_{p=1}^4 \int_{\text{sop}^p(b_I^\epsilon)} |b_I^\epsilon(x)| |x - x_p| dx \\ &\leq \frac{C}{\epsilon |J|^{\frac{3}{2}}} \frac{\epsilon |I|}{|I|^{\frac{1}{2}}} \epsilon |I| = C \epsilon 2^{-\frac{(i-j)3}{2}} \quad \forall I \in \mathcal{B}(J). \end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\#\mathcal{B}(J) \lesssim \frac{|J|}{|I|} = 2^{-(j-i)}$, obtenemos

$$\sum_{I \in \mathcal{B}(J)} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| \leq C\epsilon 2^{-\frac{i-j}{2}}.$$

Por último observando que $\#\mathcal{C}(J) \leq 8$ podemos escribir $\sum_{I \in \mathcal{C}(J)} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| \leq 8\epsilon 2^{-\frac{i-j}{2}}$. Con esto arribamos a que si $i > j$ resulta

$$\sum_{I \in \mathcal{D}^i} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| = \sum_{I \in \mathcal{A}(J)} + \sum_{I \in \mathcal{B}(J)} + \sum_{I \in \mathcal{C}(J)} \leq C\epsilon 2^{-\frac{i-j}{2}}.$$

Junto con (3.2.6) concluimos que $\sum_{I \in \mathcal{D}^i} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| \leq C\epsilon 2^{-\frac{|i-j|}{2}} \forall J \in \mathcal{D}^j$ y análogamente podemos probar que $\sum_{J \in \mathcal{D}^j} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| \leq C\epsilon 2^{-\frac{|i-j|}{2}}$, $I \in \mathcal{D}^i$.

Aplicando el Lema de Schur 1.3.1 resulta que el operador Υ está acotado de $L^2(\mathcal{D}^j)$ en $L^2(\mathcal{D}^i)$ y su norma es $\|\Upsilon\| \leq C\epsilon 2^{-\frac{|i-j|}{2}}$, por lo tanto poniendo $g(J) = \langle f, h_J \rangle$ resulta

$$\|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\Upsilon g\|_{L^2(\mathcal{D}^i)}^2 \leq C\epsilon^2 2^{-|i-j|} \|g\|_{L^2(\mathcal{D}^j)}^2 \leq C\epsilon^2 2^{-|i-j|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

y por el Lema de Cotlar 1.1.1 deducimos que $\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, b_I^\epsilon \rangle|^2 = \|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.

En definitiva, hemos probado que la sucesión $\{b_I^\epsilon = \bar{h}_I^\epsilon - h_I^\epsilon, I \in \mathcal{D}\}$ es una sucesión de Bessel con cota $C\epsilon$. Si combinamos este resultado con el Teorema 1.5.1 y A_ϵ y B_ϵ son las constantes del Teorema 2.1.1, llamando

$$\underline{C}_\epsilon = \left[1 - \left(\frac{\epsilon C}{A_\epsilon} \right)^{1/2} \right]^2 A_\epsilon, \quad \bar{C}_\epsilon = \left[1 + \left(\frac{\epsilon C}{B_\epsilon} \right)^{1/2} \right]^2 B_\epsilon$$

concluimos que

$$\underline{C}_\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, h_I^\epsilon \rangle|^2 \leq \bar{C}_\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

Lo que prueba el Teorema 3.2.2. □

Estabilidad de bases de Haar desbalanceadas por pesos de Muckenhoupt

Este capítulo está dedicado a la regularización de sistemas de Haar en los espacios $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$, para pesos w de Muckenhoupt.

Veremos cómo la condición A_∞ de Muckenhoupt aparece, como en muchos otros problemas de análisis armónico, de un modo natural.

4.1. Construcción de la regularización, enunciado y demostración del Teorema

En lo que sigue construiremos un sistema de perturbaciones suaves del sistema de Haar desbalanceado y aplicaremos el Lema de Cotlar 1.1.1 para demostrar que éste resulta una Base de Riesz con propiedades de soporte localizado para el espacio $L^2(wdx)$ donde w es un peso de Muckenhoupt.

Para introducir el problema comenzamos dando algunas ilustraciones simples. Sea ψ una wavelet de Daubechies de soporte compacto en \mathbb{R} . Asumimos que $\text{sop}\psi \subset [-N, N]$. El sistema $\{\tilde{\psi}_k^j(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x^3 - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de funciones con soportes compactos para $L^2(\mathbb{R}, 3x^2 dx)$. Mas generalmente si $w(x)$ es una función localmente integrable y no negativa sobre \mathbb{R} y $W(x) = \int_0^x w(y)dy$, entonces el sistema $\{\bar{\psi}_k^j(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j W(x) - k)\}$ es una base ortonormal para $L^2(wdx)$. En efecto, cambiando de variables

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}_k^j(x) \bar{\psi}_m^l(x) w(x) dx &= 2^{\frac{l+j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi(2^j W(x) - k) \psi(2^l W(x) - m) w(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi_k^j(z) \psi_m^l(z) dz, \end{aligned}$$

donde ψ_k^j como es usual denota la función $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, obtenemos la ortonormalidad del sistema $\{\bar{\psi}_k^j : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ en $L^2(\mathbb{R}, wdx)$. Es fácil de verificar en el caso de $w(x) = 3x^2$, para j fijo la longitud del soporte de $\bar{\psi}_k^j$ tiende a cero con $|k| \rightarrow +\infty$. Por otro lado para $k = 0$ el parámetro de escala es $2^{-\frac{1}{3}}$.

Notar también que si w está acotado por arriba y por debajo por constantes positivas la sucesión $\{\bar{\psi}_k^j\}$ es una base ortonormal para $L^2(wdx)$ con un control métrico sobre el tamaño de los soportes provisto por la escala.

En esta sección damos condiciones suficientes sobre pesos w más generales que $0 < c_1 \leq w(x) \leq c_2 < \infty, x \in \mathbb{R}$, con el objeto de construir un sistema $\Psi = \{\psi_I, I \in \mathcal{D}\}$ con las siguientes propiedades,

1. Ψ es una base de Riesz para $L^2(wdx)$ con cotas cercanas a uno,
2. cada ψ_I es continua,

3. existen constantes A_1 y A_2 tal que las desigualdades

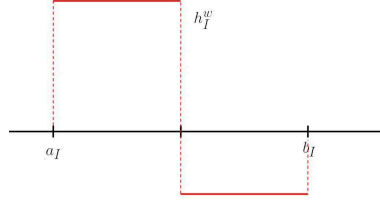
$$A_1 |I| \leq |\text{sop} \psi_k^j| \leq A_2 |I|$$

se cumplen para cualquier $j \in \mathbb{Z}$ y cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

Notar primero que si $0 < c_1 \leq w(x) \leq c_2 < \infty$, entonces $\overline{\psi}_k^j(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j W(x) - k)$, con ψ una wavelet de Daubechies, resuelve el problema. Por otro lado, para un peso mas general w , como podemos mostrar en el ejemplo anterior con $w(x) = 3x^2$, obtenemos que $\{\overline{\psi}_k^j\}$ satisface 1 y 2 pero no 3.

Una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R}, w dx)$ que satisface 3 pero no 2 cuando w es localmente integrable, es la versión desbalanceada del sistema de Haar de la Definición 1.6.1 (ver [51]).

$$(4.1.1) \quad h_I^w(x) = \frac{1}{\sqrt{w(I)}} \left\{ \sqrt{\frac{w(I_r)}{w(I_l)}} \chi_{I_l}(x) - \sqrt{\frac{w(I_l)}{w(I_r)}} \chi_{I_r}(x) \right\}.$$



donde $w(E) = \int_E w dx$, I_l es la mitad izquierda de I y I_r es la mitad derecha. Frecuentemente usaremos a_I y b_I para denotar los extremos izquierdo y derecho de I respectivamente, para cada $I \in \mathcal{D}$.

Los números reales con la distancia usual y $d\mu = w dx$ y w un peso de Muckenhoupt, constituyen un espacio de tipo homogéneo. Algunas construcciones de bases tipo wavelets sobre espacios de tipo homogéneo están contenidas en [6] y [10]. Las de [6] no son regulares y las de [10] no están compactamente soportadas. En la parte B de esta tesis consideraremos este contexto general.

En estas sección veremos que la condición A_∞ de los pesos de Muckenhoupt es suficiente para construir bases de Riesz satisfaciendo las propiedades 1, 2 y 3.

LEMA 4.1.2. Si $w \in A_p$ para algún $p > 1$, la función $W(x) = \int_0^x w(y) dy$ define un cambio de variable uno a uno y sobreyectivo sobre \mathbb{R} con Jacobiano w .

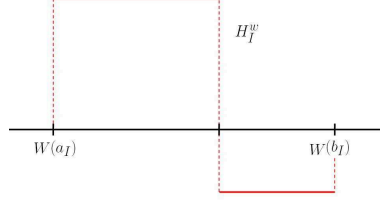
DEMOSTRACIÓN. La inyectividad se deduce de (1.2.2), puesto que esto implica que si $y < x$ entonces $W(x) - W(y) = \int_y^x w(z) dz \neq 0$. Por otro lado la sobreyectividad se deduce de la absoluta continuidad de W y la no integrabilidad de w . \square

Para obtener la regularización del sistema $\{h_I^w\}$ de (4.1.1) primero definimos el cambio de variables W^{-1} y tenemos otra base ortonormal $\{H_I^w\}$ en el espacio $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Luego regularizamos estas últimas por convolución con una función φ suave y con soporte compacto. Producimos así una base de Riesz sobre $L^2(\mathbb{R}, dx)$ la cual será denotada por $\{H_I^{w,\epsilon}\}$. Finalmente para obtener la regularización deseada $h_I^{w,\epsilon}$ de $\{h_I^w\}$ regresaremos a $L^2(\mathbb{R}, w dx)$ mediante el cambio de variables $x \rightarrow W(x)$. Como la función regularizante φ puede asumirse tan suave como se desee, la regularidad de cada $h_I^{w,\epsilon}$ está sólo limitada por la regularidad de $W(x)$ la cual es, al menos,

absolutamente continua localmente. Precisamente definimos las tres familias $\{H_I^w\}$, $\{H_I^{w,\epsilon}\}$ y $\{h_I^{w,\epsilon}\}$.

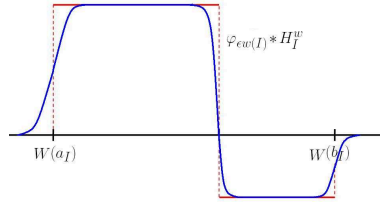
Para cada $I \in \mathcal{D}$ sea $H_I^w = h_I^w \circ W^{-1}$. Notar que

$$(4.1.3) \quad H_I^w(x) = \frac{1}{\sqrt{|I'|}} \left\{ \sqrt{\frac{|I'_r|}{|I'_l|}} \chi_{I'_l}(x) - \sqrt{\frac{|I'_l|}{|I'_r|}} \chi_{I'_r}(x) \right\}$$



donde $I' = \{W(y), y \in I\}$. Ahora tomamos una función φ en C^∞ , no negativa, no-creciente a derecha del 0, par y soportada en $(-1, 1)$ con $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Con la notación estándar $\varphi_t(x) = \frac{1}{t} \varphi(\frac{x}{t})$, $t > 0$, definimos

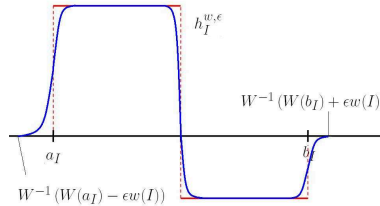
$$(4.1.4) \quad H_I^{w,\epsilon}(x) = (\varphi_{\epsilon w(I)} * H_I^w)(x)$$



Finalmente, sea

$$(4.1.5) \quad h_I^{w,\epsilon}(x) = (H_I^{w,\epsilon} \circ W)(x)$$

para ϵ lo suficientemente pequeño y positivo.



El resultado principal de este capítulo está contenido en el siguiente enunciado.

TEOREMA 4.1.6. *Sea w un peso en la clase $A_\infty(\mathbb{R})$. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ dependiendo sólo de w tal que*

- para cada $\epsilon < \epsilon_0$, el sistema $\{h_I^{w,\epsilon}, I \in \mathcal{D}\}$ es una base de Riesz para $L^2(wdx)$ de funciones absolutamente continuas,
- las cotas Riesz de $\{h_I^{w,\epsilon}, I \in \mathcal{D}\}$ pueden resultar tan cercanas a uno como se desee tomando ϵ lo suficientemente pequeño,

- c) el soporte de cada $h_I^{w,\epsilon}$ es un intervalo $I^\epsilon = [a_I^\epsilon, b_I^\epsilon]$. Además $a_I^\epsilon \nearrow a_I$, $b_I^\epsilon \searrow b_I$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y $0 < \frac{|I^\epsilon|}{|I|} - 1 < C\epsilon^{\frac{1}{p}}$ si $w \in A_p$ para alguna constante C .

Observemos que la regularidad de $h_I^{w,\epsilon}$ es mayor si w es suave.

4.1.1. Demostración del Teorema 4.1.6. Comenzamos la sección mostrando cómo (1.2.2) nos permite acotar uniformemente el solapamiento de ciertos intervalos que aparecerán naturalmente en la prueba del Teorema 4.1.6.

LEMA 4.1.7. *Sea w un peso en A_p . Para un intervalo diádico I , sean a_I , b_I y c_I el extremo izquierdo de I , el extremo derecho y el centro de I , respectivamente. Sean I_l y I_r las mitades izquierda y derecha de I . Entonces*

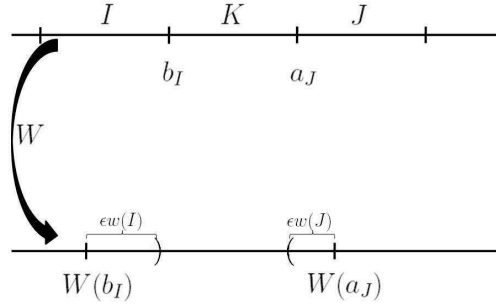
- a) Si C es la constante en (1.2.2) y $\epsilon < (\frac{1}{2})^p \frac{1}{2C}$ obtenemos que $2\epsilon w(I) < w(I_l)$ y $2\epsilon w(I) < w(I_r)$;
b) con C como antes y $\epsilon < \frac{1}{C} \frac{1}{3^p}$ también tenemos que $\sum_{I \in \mathcal{D}^j} \chi_{W^\epsilon(I)}(x) \leq 2$ para cualquier $j \in \mathbb{Z}$, donde $W^\epsilon(I)$ es el $\epsilon w(I)$ -entorno del intervalo $W(I)$, en otras palabras $W^\epsilon(I) = (W(a_I) - \epsilon w(I), W(b_I) + \epsilon w(I))$.

DEMOSTRACIÓN. a) Usando (1.2.2) con $J = I$, $E = I_l$ obtenemos

$$\frac{w(I_l)}{w(I)} \geq \frac{1}{C} \left(\frac{|I_l|}{|I|} \right)^p = \frac{1}{C2^p} > 2\epsilon.$$

La misma desigualdad es cierta para I_r en lugar de I_l .

b) Consideramos I , K y J tres intervalos consecutivos en \mathcal{D}^j con $b_I = a_K$ y $b_K = a_J$. Sea M el intervalo obtenido de la unión de I , J y K .



de (1.2.2) vemos que

$$\epsilon < \frac{1}{C} \frac{1}{3^p} = \frac{1}{C} \left(\frac{|K|}{|M|} \right)^p \leq \frac{w(K)}{w(M)}$$

Aquí $\epsilon(w(I) + w(J)) \leq \epsilon w(M) \leq \epsilon w(K) = W(a_J) - W(b_I)$, por lo que $W(b_I) + \epsilon w(I) < W(a_J) - \epsilon w(J)$. Entonces, ningún punto $x \in \mathbb{R}$ puede pertenecer a más de dos intervalos W_I^ϵ .

□

PRUEBA DEL TEOREMA 4.1.6. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ escribiremos E' para denotar la imagen de E por W . En otras palabras $E' = \{W(x), x \in E\}$. Sea $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ la familia de todos los intervalos diádicos en \mathbb{R} , donde \mathcal{D}^j es la colección de todos los intervalos diádicos con longitud 2^{-j} . Escribimos $\mathcal{D}' = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}'_j$ para denotar la familia de todas las imágenes I' de los intervalos $I \in \mathcal{D}$ por W .

Para cada $I \in \mathcal{D}$ usaremos H_I^w para denotar la composición $h_I^w \circ W^{-1}$. Es fácil ver que $H_I^w(x) = \frac{1}{\sqrt{|I'|}} \left\{ \sqrt{\frac{|I'_l|}{|I'_r|}} \chi_{I'_l}(x) - \sqrt{\frac{|I'_r|}{|I'_l|}} \chi_{I'_r}(x) \right\}$ y que $\{H_I^w, I \in \mathcal{D}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}, dx)$. En efecto, para $f \in L^2(dx)$ obtenemos $\langle f, H_I^w \rangle_{L^2(dx)} = \langle f \circ W, h_I^w \rangle_{L^2(wdx)}$ para cualquier $I \in \mathcal{D}$. Además

$$\sum_{I \in \mathcal{D}} \left| \langle f, H_I^w \rangle_{L^2(dx)} \right|^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}} \left| \langle f \circ W, h_I^w \rangle_{L^2(wdx)} \right|^2 = \|f \circ W\|_{L^2(wdx)}^2 = \|f\|_{L^2(dx)}^2.$$

Seguidamente regularizamos por convolución la función H_I^w para $I \in \mathcal{D}$ para obtener $H_I^{w,\epsilon}$ definida por $H_I^{w,\epsilon} = \varphi_{\epsilon w(I)} * H_I^w$; $I \in \mathcal{D}$ donde φ es como la descrita anteriormente y ϵ es tan pequeño como en el Lema 4.1.7.

Para demostrar el ítem *a*) del Teorema 4.1.6 aplicamos el teorema de estabilidad de Favier-Zalik (Teorema 1.5.1), por lo que estimaremos la cota Bessel en $L^2(dx)$ para la diferencia $b_I^\epsilon = H_I^w - H_I^{w,\epsilon}$ entre H_I^w y su regularización $H_I^{w,\epsilon}$.

Precisamente, se define

$$T_\epsilon f = \sum_{I \in \mathcal{D}} \langle f, b_I^\epsilon \rangle H_I^w$$

y $T_j f = \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, b_J^\epsilon \rangle H_J^w$ entonces $T_\epsilon = \sum_j T_j$. Por lo tanto como $\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, b_I^\epsilon \rangle|^2 = \left\| \sum_{I \in \mathcal{D}} \langle f, b_I^\epsilon \rangle H_I^w \right\|_2^2 = \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j f \right\|_2^2$, para probar que $\{b_I^\epsilon : I \in \mathcal{D}\}$ es una sucesión de Bessel con cota pequeña, aplicamos el Lema de Cotlar (Lema 1.1.1) a la sucesión $\{T_j\}$ de operadores en $L^2(\mathbb{R})$. Comenzamos estimando $\|T_i^* T_j\|$ y $\|T_i T_j^*\|$ donde T_i^* es el operador adjunto de T_i dado por $T_j^* f = \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle b_J^\epsilon$.

Como la familia $\{H_I^w, I \in \mathcal{D}\}$ es ortonormal, entonces para $i \neq j$ obtenemos $T_i^* T_j f = \sum_{J \in \mathcal{D}^j, I \in \mathcal{D}^i} \langle f, b_J^\epsilon \rangle \langle H_J^w, H_I^w \rangle b_I^\epsilon = 0$. Por otro lado para $i = j$

$$\|T_j^* T_j f\|_2 = \|T_j f\|_2^2 = \sum_{J \in \mathcal{D}^j} |\langle f, b_J^\epsilon \rangle|^2.$$

Como H_J^w es constante a trozos, para ϵ suficientemente pequeño el soporte de b_J^ϵ se puede dividir en tres intervalos, cada uno centrado en la imagen por W de los dos puntos extremos a_J, b_J de J y su centro c_J . Todos ellos tienen la misma longitud $2\epsilon w(J)$. Precisamente si denotamos con S_J^ϵ al soporte de b_J^ϵ obtenemos que $S_J^\epsilon = \bigcup_{m=1}^3 S_J^{\epsilon,m}$, donde $S_J^{\epsilon,1} = (W(a_J) - w(J)\epsilon, W(a_J) + w(J)\epsilon)$, $S_J^{\epsilon,2} = (W(c_J) - w(J)\epsilon, W(c_J) + w(J)\epsilon)$ y $S_J^{\epsilon,3} = (W(b_J) - w(J)\epsilon, W(b_J) + w(J)\epsilon)$. Ahora, por la desigualdad de Schwartz obtenemos

$$\langle f, b_J^\epsilon \rangle^2 \leq \left(\int_{S_J^\epsilon} |f|^2 \right) \left(\int |b_J^\epsilon|^2 \right)$$

Para estimar $\int |b_J^\epsilon|^2$, primero notemos que $|b_I^\epsilon| \leq |H_I^w| + |H_I^{w,\epsilon}| \leq 2|H_I^w| \leq \frac{2}{\sqrt{w(I)}} \max \left\{ \sqrt{\frac{w(I_r)}{w(I_l)}}, \sqrt{\frac{w(I_l)}{w(I_r)}} \right\}$. Como $w dx$ es una medida doblante tenemos que

$\max \left\{ \sqrt{\frac{w(I_r)}{w(I_l)}}, \sqrt{\frac{w(I_l)}{w(I_r)}} \right\} \leq C$ que depende sólo de w , por lo tanto $|b_I^\epsilon| \leq Cw(I)^{-1/2}$.
Entonces $\int |b_I^\epsilon|^2 \leq \frac{C^2}{w(I)} |S_I^\epsilon| = 6C^2\epsilon$.

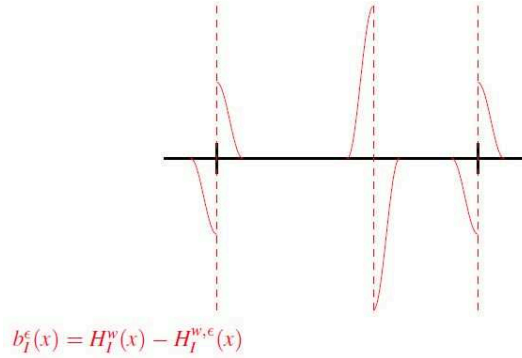
Entonces, de b) en el Lema 4.1.7 obtenemos

$$\begin{aligned} \|T_j^* T_j f\| &\leq 6C^2\epsilon \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \int_{S_J^\epsilon} |f|^2 \leq 6C^2\epsilon \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \int_{W^\epsilon(J)} |f|^2 \\ &\leq 6C^2\epsilon \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \chi_{W^\epsilon(J)} \right) |f|^2 \leq 12C^2\epsilon \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T_j^* T_j\| \leq 12C^2\epsilon$, y como $\|T_i^* T_j\| = 0$ para $i \neq j$, cualquier $s(k)$ con $s(0) \geq 12C^2\epsilon$ y $s(k) \geq 0$ para $k \neq 0$ es admisible para la estimación $\|T_i^* T_j\| \leq s(i-j)$ requerida por el Lema de Cotlar.

El comportamiento de la sucesión $\|T_i T_j^*\|$ es un poco mas sutil pues $T_i T_j^* f = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_J^\epsilon, b_I^\epsilon \rangle H_I^w$, y ahora las funciones $\{b_J^\epsilon\}$ no son ortogonales. En este caso la suavidad Lipschitz de cada b_J^ϵ fuera de sus puntos de discontinuidad y sus propiedades de promedio nulos jugaran un rol importante. Estas propiedades se enuncian en las siguientes afirmaciones, las cuales se probaran al final de la sección.

Afirmación 1: Para cada $I \in \mathcal{D}$ con $I = [a_I, b_I)$ centrado en c_I , sobre cada uno de los segmentos $\sigma_1 = (-\infty, W(a_I))$, $\sigma_2 = (W(a_I), W(c_I))$, $\sigma_3 = (W(c_I), W(b_I))$ y $\sigma_4 = (W(b_I), \infty)$ la función b_I^ϵ es de clase Lipschitz con norma acotada por una constante veces $\epsilon w(I)^{-\frac{3}{2}}$.



Afirmación 2: Sobre cada una de las tres componentes conexas $S_I^{\epsilon,m}$ de su soporte obtenemos $\int_{S_I^{\epsilon,m}} b_I^\epsilon = 0$ $m = 1, 2, 3$.

Asumimos que las afirmaciones 1 y 2 se cumplen y continuamos con la prueba del Teorema.

Para estimar $\|T_i T_j^*\|$ observemos que, debido a que $\{H_I^w, I \in \mathcal{D}\}$ es una base ortonormal, obtenemos

$$(4.1.8) \quad \|T_i T_j^* f\|_2^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2.$$

Asumimos primero que $j > i$. Para $I \in \mathcal{D}^i$ fijo, consideramos la partición de \mathcal{D}^j provista por los tres conjuntos, $\mathcal{A}(I) = \{J \in \mathcal{D}^j : S_J^\epsilon \cap S_I^\epsilon = \emptyset\}$; $\mathcal{B}(I) = \{J \in \mathcal{D}^j \setminus \mathcal{A} :$

b_I^ϵ es continua y no idénticamente nula sobre S_J^ϵ y $\mathcal{C}(I) = \mathcal{D}^j \setminus (\mathcal{A}(I) \cup \mathcal{B}(I))$. Para $J \in \mathcal{A}$ obtenemos que $\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle = 0$, entonces, por la desigualdad de Schwartz,

$$\begin{aligned}
\|T_i T_j^* f\|_2^2 &= \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{B}(I) \cup \mathcal{C}(I)} \langle f, H_J^w \rangle \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle \right)^2 \\
&\leq \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{B}(I) \cup \mathcal{C}(I)} \langle f, H_J^w \rangle^2 \right) \left(\sum_{J \in \mathcal{B}(I) \cup \mathcal{C}(I)} \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle^2 \right) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{B}(I) \cup \mathcal{C}(I)} \langle f, H_J^w \rangle^2 \right) \left(\sum_{J \in \mathcal{C}(I)} \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle^2 \right) \\
&\quad + \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{J \in \mathcal{B}(I) \cup \mathcal{C}(I)} \langle f, H_J^w \rangle^2 \right) \left(\sum_{J \in \mathcal{B}(I)} \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle^2 \right) \\
&\leq A + B
\end{aligned}$$

Para estimar A notamos que $\mathcal{C}(I)$ tiene a lo sumo seis elementos. Por otro lado, de (1.2.3)

$$\begin{aligned}
|\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| &\leq \int_{S_J^\epsilon} |b_I^\epsilon(x)| |b_J^\epsilon(x)| dx \\
&\leq C \frac{\epsilon w(J)}{(w(I)w(J))^{\frac{1}{2}}} \leq C \epsilon \frac{1}{2^{(j-i)\frac{\gamma}{2}}},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
A &\leq C \epsilon^2 2^{-\gamma(j-i)} \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \sum_{J \in \mathcal{B}(I) \cup \mathcal{C}(I)} \langle f, H_J^w \rangle^2 \\
(4.1.9) \quad &\leq C \epsilon^2 2^{-\gamma(j-i)} \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle^2 \#\{I \in \mathcal{D}^i : J \notin \mathcal{A}(I)\} \leq C \epsilon^2 2^{-\gamma(j-i)} \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Estimamos ahora B . Debido a que para $J \in \mathcal{B}(I)$ la función b_J^ϵ es Lipschitz sobre el soporte de b_I^ϵ , por lo tanto por la Afirmación 1 y 2 y aplicando otra vez (1.2.3)

obtenemos, con x_J^m el centro de la m -ésima componente conexas del soporte de b_J^ϵ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{J \in \mathcal{B}} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle|^2 &= \sum_{J \in \mathcal{B}} \left| \sum_{m=1}^3 \int_{S_J^{\epsilon, m}} b_J^\epsilon(x) (b_I^\epsilon(x) - b_I^\epsilon(x_J^m)) dx \right|^2 \\
&\leq \sum_{J \in \mathcal{B}} \frac{C}{\epsilon^2 w(I)^3} \left(\sum_{m=1}^3 \int_{S_J^{\epsilon, m}} |b_J^\epsilon(x)| |x - x_J^m| dx \right)^2 \\
&\leq C \sum_{I \in \mathcal{B}} \frac{1}{\epsilon^2 w(I)^3} |S_J^\epsilon|^2 \frac{1}{w(J)} \epsilon^2 w(J)^2 \\
&\leq C \epsilon^2 \sum_{J \in \mathcal{B}} \left(\frac{w(J)}{w(I)} \right)^2 \frac{w(J)}{w(I)} \\
&\leq C \epsilon^2 \sum_{J \in \mathcal{B}} \left(\frac{|J|}{|I|} \right)^{2\gamma} \frac{1}{w(I)} \int_J w(x) dx \\
&\leq C \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{2(j-i)\gamma} \frac{1}{w(I)} \int_{\mathbb{R}} \sum_{J \in \mathcal{B}} \chi_J(x) w(x) dx \\
&\leq C \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{2\gamma(j-i)} \frac{w(\tilde{I})}{w(I)} \\
&\leq C \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{2\gamma(j-i)}
\end{aligned}$$

donde \tilde{I} es el intervalo concéntrico con I y una constante veces su longitud.

Así para $j > i$

$$(4.1.10) \quad \sum_{J \in \mathcal{B}(I)} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle|^2 \leq C \epsilon^2 2^{-2(j-i)\gamma}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
(4.1.11) \quad B &\leq C \epsilon^2 2^{-2(j-i)\gamma} \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \sum_{J \in \mathcal{B}(I) \cup \mathcal{C}(I)} \langle f, H_J^w \rangle^2 \\
&\leq C \epsilon^2 2^{-2(j-i)\gamma} \|f\|_2^2,
\end{aligned}$$

finalmente, de (4.1.9) y (4.1.11)

$$\|T_i T_j^* f\|_2^2 \leq A + B \leq C \epsilon^2 2^{-\gamma(j-i)} \|f\|_2^2.$$

Por lo que, para $j > i$ tomando $s(j-i) = C \epsilon^2 2^{-\frac{\gamma}{2}(j-i)}$ tenemos una sucesión que cumple con las hipótesis del Lema de Cotlar.

Para $i \geq j$ e $I \in \mathcal{D}^i$ no hay más de dos intervalos $J \in \mathcal{D}^j$ tales que $S_I^\epsilon \cap S_J^\epsilon \neq \emptyset$, con lo cual la suma interior en (4.1.8) tiene a lo sumo dos sumandos y entonces, con

la notación anterior, dado $J \in \mathcal{D}^j$, obtenemos las tres clases $\mathcal{A}(J)$, $\mathcal{B}(J)$ y $\mathcal{C}(J)$,

$$\begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_2^2 &\leq C \sum_{I \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{\{J \in \mathcal{D}^j / S_I^\epsilon \cap S_J^\epsilon \neq \emptyset\}} \langle f, H_J^w \rangle^2 \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle^2 \right) \\ &\leq C \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle^2 \left(\sum_{I \in \mathcal{C}(J) \cup \mathcal{B}(J)} \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle^2 \right) \\ &\leq C \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle^2 \left(\sum_{I \in \mathcal{C}(J)} \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle^2 \right) + C \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle^2 \left(\sum_{I \in \mathcal{B}(J)} \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle^2 \right) \end{aligned}$$

Para el primer sumando, notemos que si $I \in \mathcal{C}(J)$, obtenemos de (1.2.3) como antes

$$\begin{aligned} |\langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle| &\leq \int_{S_I^\epsilon} |b_J^\epsilon(x)| |b_I^\epsilon(x)| dx \\ &\leq C \frac{\epsilon w(I)}{w(J)^{\frac{1}{2}} w(I)^{\frac{1}{2}}} \leq C \epsilon 2^{-(i-j)\frac{\gamma}{2}}, \end{aligned}$$

como el número de elementos de $\mathcal{C}(J)$ está acotado resulta

$$\sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle^2 \left(\sum_{I \in \mathcal{C}(J)} \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle^2 \right) \leq C \epsilon^2 2^{-\gamma(i-j)} \|f\|_2^2.$$

Para el segundo término observamos que si $I \in \mathcal{B}(J)$ e y_I^m es el centro del intervalo $S_I^{\epsilon, m}$ entonces, por la Afirmación 1

$$\begin{aligned} \langle b_I^\epsilon, b_J^\epsilon \rangle^2 &\leq \left(\sum_{m=1}^3 \int_{S_I^{\epsilon, m}} b_I^\epsilon(y) (b_J^\epsilon(y) - b_J^\epsilon(y_I^m)) d\mu(y) \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{C}{\epsilon w(J)^{\frac{3}{2}}} \sum_{m=1}^3 \int_{S_I^{\epsilon, m}} b_I^\epsilon(y) |y - y_I^m| d\mu(y) \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{3C\epsilon w(I) |S_I^\epsilon|}{\epsilon w(J)^{\frac{3}{2}} w(I)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \leq C \epsilon^2 \left(\frac{w(I)}{w(J)} \right)^3, \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_2^2 &\leq C \epsilon^2 2^{-(i-j)\gamma} \|f\|_2^2 + C \epsilon^2 2^{-(i-j)2\gamma} \sum_{J \in \mathcal{D}^j} \langle f, H_J^w \rangle^2 \left(\frac{1}{w(J)} \sum_{I \in \mathcal{B}(J)} w(I) \right) \\ &\leq C \epsilon^2 2^{-(i-j)\gamma} \|f\|_2^2 + C \epsilon^2 2^{-(i-j)2\gamma} \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

De este modo obtenemos que $\|T_i T_j^*\| \leq C \epsilon 2^{-\frac{\gamma}{2}(i-j)}$, para $i \geq j$.

Por lo tanto tenemos las hipótesis del Lema de Cotlar 1.1.1 para la sucesión $\{T_j\}$ con $s(k) = C \epsilon 2^{-\frac{\gamma}{2}|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$. Entonces por el Lema de Cotlar vemos que $\|T_\epsilon\| \leq C \epsilon^{\frac{1}{2}}$, $0 < \epsilon < \epsilon_0 = \min\{\frac{2-p}{2C}, 3^{-p}C\}$ donde C es la constante en la ecuación (1.2.2). Ahora del Teorema de estabilidad de Favier-Zalik (Teorema 1.5.1), obtenemos que

$\{H_I^{w,\epsilon} : I \in \mathcal{D}\}$ es una base de Riesz para $L^2(\mathbb{R}, dx)$ con cotas $(1 - \sqrt{C\epsilon^{\frac{1}{2}}})^2$ y $(1 + \sqrt{C\epsilon^{\frac{1}{2}}})^2$. Como $h_I^{w,\epsilon} = H_I^{w,\epsilon} \circ W$ y para $f \in L^2(wdx)$ obtenemos la identidad

$$\sum_{I \in \mathcal{D}} \langle f, h_I^{w,\epsilon} \rangle_{L^2(wdx)}^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}} \langle f \circ W^{-1}, H_I^{w,\epsilon} \rangle_{L^2(dx)}^2$$

inmediatamente vemos que $\{h_I^{w,\epsilon} : I \in \mathcal{D}\}$ es una base de Riesz para $L^2(\mathbb{R}, wdx)$ con cotas $(1 \pm \sqrt{C\epsilon^{\frac{1}{2}}})^2$. Esto prueba *a*).

La absoluta continuidad de cada $h_I^{w,\epsilon}$ sigue de la regularidad de $H_I^{w,\epsilon}$ y la absoluta continuidad de W . La parte *b*) en el enunciado del Teorema 4.1.6 se sigue directamente de la forma que presentan las cotas Riesz de $\{h_I^{w,\epsilon} : I \in \mathcal{D}\}$ obtenidas anteriormente.

Para probar *c*). Con a_I y b_I los extremos izquierdo y derecho de I tenemos que el soporte de $h_I^{w,\epsilon}$ es el intervalo $I_\epsilon = [W^{-1}(W(a_I) - \epsilon w(I)), W^{-1}(W(b_I) + \epsilon w(I))] = [a_I^\epsilon, b_I^\epsilon]$ conteniendo a I . Notemos que $W(a_I) - W(a_I^\epsilon) = \epsilon w(I)$ y $W(b_I^\epsilon) - W(b_I) = \epsilon w(I)$, de la continuidad de W^{-1} se sigue que $a_I^\epsilon \rightarrow a_I$ y $b_I^\epsilon \rightarrow b_I$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Una estimación más cuantitativa de esta aproximación puede obtenerse usando otra vez (1.2.2). En efecto, denotamos con I^* al intervalo concéntrico con I y tres veces su longitud. Sea J el intervalo $[a_I^\epsilon, a_I]$, entonces de (1.2.2)

$$\frac{a_I - a_I^\epsilon}{3|I|} = \frac{|J|}{|I^*|} \leq C \left(\frac{w(J)}{w(I^*)} \right)^{\frac{1}{p}} = C \left(\frac{\epsilon w(I)}{w(I^*)} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C\epsilon^{\frac{1}{p}}.$$

De manera similar $\frac{b_I^\epsilon - b_I}{|I|} \leq C\epsilon^{\frac{1}{p}}$. Por lo tanto $\frac{|I_\epsilon|}{|I|} = 1 + \frac{a_I - a_I^\epsilon}{|I|} + \frac{b_I^\epsilon - b_I}{|I|}$ y $0 < \frac{|I_\epsilon|}{|I|} - 1 < C\epsilon^{\frac{1}{p}}$ donde C depende de la constante A_p de w . Notar que la velocidad de aproximación mejora con p tendiendo a 1. □

Finalmente probamos las afirmaciones (1) y (2).

PRUEBA DE LA AFIRMACIÓN 1: Para $x, y \in \sigma_i$, $i = 1, \dots, 4$. obtenemos que $H_I(x) = H_I(y)$, entonces

$$\begin{aligned} |b_I^\epsilon(x) - b_I^\epsilon(y)| &= |H_I^w * \varphi_{\epsilon w(I)}(x) - H_I^w * \varphi_{\epsilon w(I)}(y)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{H_I^w(z)}{\epsilon w(I)} \left(\varphi\left(\frac{x-z}{\epsilon w(I)}\right) - \varphi\left(\frac{y-z}{\epsilon w(I)}\right) \right) dz \right| \end{aligned}$$

Como φ es suave, aplicando el teorema del valor medio resulta

$$\begin{aligned} |b_I^\epsilon(x) - b_I^\epsilon(y)| &\leq \frac{\|\varphi'\|_\infty}{\epsilon^2 w(I)^2} |x - y| \int_{\{|x-z| \leq \epsilon w(I)\} \cup \{|y-z| \leq \epsilon w(I)\}} |H_I^w(z)| dz \\ &\leq c \frac{\|\varphi'\|_\infty}{\epsilon w(I)^{\frac{3}{2}}} |x - y| \end{aligned}$$

como pretendíamos. □

PRUEBA DE LA AFIRMACIÓN 2: Es fácil ver que $\int b_I^\epsilon dx = 0$. En efecto, podemos observar de 4.1.3

$$\begin{aligned} \sqrt{|I'|} \int_{I'} H_I^w(x) dx &= \frac{\sqrt{|I'_r|}}{\sqrt{|I'_l|}} \int_{I'} \chi_{I'_l}(x) dx - \frac{\sqrt{|I'_l|}}{\sqrt{|I'_r|}} \int_{I'} \chi_{I'_r}(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{|I'_r|}}{\sqrt{|I'_l|}} |I'_l| - \frac{\sqrt{|I'_l|}}{\sqrt{|I'_r|}} |I'_r| = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\int \varphi(z) dz = 1$, también obtenemos que $\int H_I^{w,\epsilon} dx = 0$.

Notar que, luego de la normalización, $\int_{S_I^{\epsilon,1}} b_I^\epsilon dx = 0$ debido a que $\int_{-\delta}^{\delta} [\chi_{(0,\infty)}(x) - (\chi_{(0,\infty)} * \varphi)(x)] dx = 0$ para $\delta > 0$. Como un argumento similar prueba que $\int_{S_I^{\epsilon,3}} b_I^\epsilon dx = 0$ y $\int b_I^\epsilon = 0$ obtenemos también $\int_{S_I^{\epsilon,2}} b_I^\epsilon dx = 0$.

□

Bases de Riesz continuas para espacios L^2 con pesos de variables separadas en \mathbb{R}^n

Hemos notado en las situaciones descritas hasta aquí que, en los casos de regularización de sistemas de Haar, dos propiedades han sido cruciales:

(1) la relación dimensional entre los intervalos diádicos y sus fronteras y (2) la anulación de la integral de las perturbaciones sobre las componentes conexas de sus soportes. Como veremos en la Parte B, la propiedad (1) puede obtenerse en contextos más generales. En cambio la propiedad (2) es más sutil y es en particular la que nos induce la restricción de que los pesos que consideramos en este capítulo sean de variables separadas, esto es $w(x) = w(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n w_i(x_i)$ con $w_i \in A_\infty(\mathbb{R})$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Para simplificar diremos que un peso con esas características es un peso en $A_\infty^{v.s}(\mathbb{R}^n)$. Es claro que $A_\infty^{v.s}(\mathbb{R}^n) \subset A_\infty(\mathbb{R}^n)$, pero también que la inclusión es estricta, puesto que los pesos que son potencias de la distancia al origen en \mathbb{R}^n no tienen variables separadas.

Con estas condiciones en w el espacio $L^2(wdx)$ tiene una estructura particular dado que su medida es de nuevo una medida producto. En efecto $w dx = \prod_{i=1}^n w_i dx_i$.

Al menos dos construcciones de bases de Riesz suaves para $L^2(wdx)$ con $w \in A_\infty^{v.s}(\mathbb{R}^n)$ y soportes compactos son posibles usando los resultados del Capítulo 4. La primera, más elemental aprovechando la estructura del peso, es la de producto tensorial (caso multiparamétrico). La segunda (caso “uni” paramétrico), más delicada, pretende recuperar a los cubos diádicos de \mathbb{R}^n como los (casi) soportes de las funciones básicas. Abordaremos ambas en dos secciones separadas.

5.1. Caso multiparamétrico

En la literatura clásica sobre wavelets, ver por ejemplo la Proposición 5.1 en el capítulo 5 del libro de Wojtaszczyk [52], se obtiene una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ como producto tensorial de wavelets unidimensionales con escalamientos multiparamétricos. En esta sección extenderemos los resultados en dos sentidos. Las bases ortonormales pueden sustituirse por bases de Riesz y los espacios L^2 por espacios con medidas no invariantes por traslaciones absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

TEOREMA 5.1.1. *Sea w_i , $i = 1, \dots, n$, funciones medibles no negativas y localmente integrables y sea $w(x) := \prod_{i=1}^n w_i(x_i)$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$. Sea Λ una familia de índices y $\{\psi_l^{(i)}, l \in \Lambda\}$ una base de Riesz en $L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)$, con cotas A_i y B_i*

respectivamente. Dado $\lambda = (l_1, \dots, l_n) \in \Lambda^n$, sea

$$\psi_\lambda(x) = \prod_{i=1}^n \psi_{l_i}^{(i)}(x_i).$$

Entonces la familia $\{\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda^n\}$ es una base de Riesz sobre $L^2(\mathbb{R}^n, w dx)$. Además las cotas Riesz se pueden obtener como producto de las cotas Riesz de las bases factores, mas específicamente, si $A = \prod_{i=1}^n A_i$ y $B := \prod_{i=1}^n B_i$, resulta

$$A \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda^n} \langle f, \psi_\lambda \rangle^2 \leq B \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Veremos primero que $\{\psi_\lambda\}$ satisface las desigualdades que la definen como marco, luego veremos que es exacto. En efecto, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, de la definición de ψ_λ , y de la estructura del peso w se puede deducir la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_\lambda \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi_{l_n}^{(n)} \left[\int_{\mathbb{R}} \psi_{l_{n-1}}^{(n-1)} \left(\dots \int_{\mathbb{R}} \psi_{l_1}^{(1)} f(x_1, \dots, x_n) w_1 dx_1 \dots \right) w_{n-1} dx_{n-1} \right] w_n dx_n \\ &= \left\langle \psi_{l_n}^{(n)}, \left\langle \psi_{l_{n-1}}^{(n-1)}, \dots \left\langle \psi_{l_1}^{(1)}, f \right\rangle \right\rangle \right\rangle, \end{aligned}$$

donde cada producto escalar $\langle \psi_{l_i}^{(k)}, g \rangle$ debe entenderse en dimensión uno con respecto a la variable x_k y con el peso $w_k(x_k)$, mientras que las eventuales restantes variables de g se piensan fijas en esta operación.

Por lo tanto, usando las hipótesis acerca del carácter Riesz de los sistemas $\psi_{l_i}^{(k)}$, obtenemos las siguientes estimaciones.

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda^n} |\langle f, \psi_\lambda \rangle|^2 &= \sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{l_{n-1} \in \mathbb{Z}} \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle \psi_{l_n}^{(n)}, \left\langle \psi_{l_{n-1}}^{(n-1)}, \dots \left\langle \psi_{l_1}^{(1)}, f \right\rangle \right\rangle \right\rangle \right|^2 \\ &\leq B_n \sum_{l_1 \in \Lambda} \dots \sum_{l_{n-1} \in \Lambda} \left\| \left\langle \psi_{l_{n-1}}^{(n-1)}, \dots \left\langle \psi_{l_1}^{(1)}, f \right\rangle \right\rangle \right\|_{L^2(\mathbb{R}, w_n dx_n)}^2 \\ &\leq B_n \int_{\mathbb{R}} \sum_{l_1 \in \Lambda} \dots \sum_{l_{n-1} \in \Lambda} \left| \left\langle \psi_{l_{n-1}}^{(n-1)}, \dots \left\langle \psi_{l_1}^{(1)}, f \right\rangle \right\rangle \right|^2 w_n dx_n \\ &\leq B_n B_{n-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{l_1 \in \Lambda} \dots \sum_{l_{n-2} \in \Lambda} \left| \left\langle \psi_{l_{n-2}}^{(n-2)}, \dots \left\langle \psi_{l_1}^{(1)}, f \right\rangle \right\rangle \right|^2 w_{n-1} dx_{n-1} w_n dx_n \\ &\vdots \\ &\leq \prod_{i=1}^n B_i \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2, \end{aligned}$$

y $\sum_{\lambda \in \Lambda^n} \langle f, \psi_\lambda \rangle^2 \geq (\prod_{i=1}^n A_i) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2$. Esto prueba que $\{\psi_\lambda : \lambda \in \Lambda^n\}$ es un frame. Para concluir que es una base de Riesz, según [15] (Teorema 6.1.1) nos resta ver que la familia $\{\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda^n\}$ es un marco exacto. Esto es, que si sacamos un elemento de la sucesión entonces esta deja de ser un marco. Sea $\lambda^0 = (l_1^0, \dots, l_n^0) \in \Lambda^n$, veamos que la familia $\{\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda^n\} \setminus \{\psi_{\lambda^0}\}$ no es un marco.

Como $\{\psi_l^{(i)}, l \in \lambda\}$ es una base de Riesz sobre $L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)$, entonces la familia $\{\psi_l^{(i)}, l \in \Lambda, l \neq l_i^0\}$ no es un marco, por lo tanto cualquiera sea la sucesión numérica $\{c_k\}$ tal que $c_k \rightarrow 0$ con $k \rightarrow \infty$ necesariamente existe $f_k^i \in L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)$ tal que

$$\sum_{\substack{l \in \Lambda \\ l \neq l_i^0}} \left| \langle f_k^i, \psi_l^{(i)} \rangle \right|^2 < (c_k)^{1/n} \|f_k^i\|_{L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)}.$$

Por lo tanto al definir $f_k(x) := \prod_{i=1}^n f_k^i(x_i)$, obtenemos que $f_k \in L^2(\mathbb{R}^n, w dx)$ y además

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda^n \\ \lambda \neq \lambda^0}} |\langle f_k, \psi_\lambda \rangle|^2 &= \sum_{\substack{l_1 \in \Lambda \\ l_1 \neq l_1^0}} \dots \sum_{\substack{l_n \in \Lambda \\ l_n \neq l_n^0}} \prod_{i=1}^n \left| \langle f_k^i, \psi_{l_i}^{(i)} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{\substack{l_1 \in \Lambda \\ l_1 \neq l_1^0}} \dots \sum_{\substack{l_{n-1} \in \Lambda \\ l_{n-1} \neq l_{n-1}^0}} \prod_{i=1}^{n-1} \left| \langle f_k^i, \psi_{l_i}^{(i)} \rangle \right|^2 \sum_{\substack{l_n \in \Lambda \\ l_n \neq l_n^0}} \left| \langle f_k^n, \psi_{l_n}^{(n)} \rangle \right|^2 \\ &\leq (c_k)^{1/n} \|f_k^n\|_{L^2(\mathbb{R}, w_n dx_n)}^2 \sum_{\substack{l_1 \in \Lambda \\ l_1 \neq l_1^0}} \dots \sum_{\substack{l_{n-1} \in \Lambda \\ l_{n-1} \neq l_{n-1}^0}} \prod_{i=1}^{n-1} \left| \langle f_k^i, \psi_{l_i}^{(i)} \rangle \right|^2 \\ &\vdots \\ &\leq c_k \prod_{i=1}^n \|f_k^i\|_{L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)}^2 = c_k \|f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2. \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos que la desigualdad de la izquierda en la definición de marco no puede cumplirse para la familia $\{\psi_\lambda, \lambda \neq \lambda^0\}$, como queríamos. \square

COROLARIO 5.1.2. *Dado $\epsilon > 0$, sean w_i , con $i = 1, \dots, n$, pesos de Muckenhoupt pertenecientes a las clases $A_\infty(\mathbb{R})$. Sean $\{h_I^{w_i, \epsilon}, I \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$, el sistema de Riesz en $L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)$, dado en (4.1.5). Dado $\vec{J} = (J_1, \dots, J_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^n$, sea*

$$\psi_{\vec{J}}^\epsilon := \prod_{i=1}^n h_{J_i}^{w_i, \epsilon}.$$

Entonces el sistema $\{\psi_{\vec{J}}^\epsilon, \vec{J} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^n\}$, es una base de Riesz sobre $L^2(\mathbb{R}^n, w dx)$, donde $w = \prod_{i=1}^n w_i$. Cada $\psi_{\vec{J}}^\epsilon$ es continua y tiene soporte compacto.

La demostración del Corolario 5.1.2 consiste en aplicar los resultados del Teorema 4.1.6 y el Teorema 5.1.1.

Es importante observar que las constantes de la base de Riesz $\{\psi_{\vec{J}}^\epsilon, \vec{J} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^n\}$ son tan cercanas a uno como se desee, y esto se desprende de que cada cota de Riesz de las bases $\{h_I^{w_i, \epsilon}, I \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$ lo son y que los soportes \vec{J} no necesariamente son cubos diádicos en \mathbb{R}^n pero si son productos de intervalos diádicos uno dimensionales.

5.2. Caso uniparamétrico

El carácter uniparamétrico que pretende reflejar el título de la sección es sólo por contraste de la Sección 5.1. Nos referimos a que las bases de Riesz regulares que construiremos en esta sección tienen soportes en entornos pequeños de cubos diádicos de \mathbb{R}^n y no de rectángulos o paralelepípedos con aristas diádicas en \mathbb{R}^1 . De los dos casos éste es el más interesante y también el más difícil. Un teorema de R. Zalik (ver [53]) da un criterio cuantitativo para obtener sistemas de Bessel en \mathbb{R}^n como producto de sistemas de Bessel en \mathbb{R}^1 con cotas explícitas para las constantes de Bessel. Esto permite obtener regularizaciones de wavelets de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ a partir de la construcción de regularizaciones de Haar unidimensionales.

El Lema 2.5 de [53], sin embargo no se aplica directamente al caso de espacios L^2 no invariantes por traslaciones como es el de las medidas inducidas por pesos de A_∞ que nos ocupa en esta sección.

El resultado principal de esta sección debe verse más como la construcción de un sistema de Riesz, suave de funciones soportadas en los diádicos dilatados levemente, que como un resultado de estabilidad ya que no estamos perturbando cualquier sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$.

Como antes $w(x) = \prod_{i=1}^n w_i(x_i)$ con cada $w_i \in A_\infty(\mathbb{R})$. Dado un cubo Q diádico de \mathbb{R}^n , denotaremos con $\pi_i(Q)$ al intervalo diádico de \mathbb{R} con el mismo nivel que Q que se obtiene proyectando Q sobre el eje x_i . En otros términos, si $Q = \vec{k}2^j + 2^j Q_0$, entonces $\pi_i(Q) = (k_i 2^j, (k_i + 1)2^j)$.

Comenzamos por construir un sistema de funciones de tipo Haar soportadas en los cubos diádicos de \mathbb{R}^n que resultará ser una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$. Usamos la notación del Capítulo 4, en particular, con $h_I^{w_i}$ denotaremos la función de Haar desbalanceada de la variable unidimensional x_i dada por (4.1.1) con el peso w_i .

Consideremos las funciones características de los intervalos diádicos normalizadas en $L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)$

$$\chi_I^{w_i} = \frac{\chi_I}{w_i(I)^{\frac{1}{2}}},$$

y las n bases ortogonales, cada una correspondiente a $L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)$, $\{h_I^{w_i}, I \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$ con $i = 1, \dots, n$, dadas en 4.1.1.

Sea $\Lambda = \{0, 1\}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$. Dado $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda$ y $Q = \prod_{i=1}^n \pi_i(Q) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definimos la wavelet de Haar desbalanceada en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ como

$$(5.2.1) \quad \mathfrak{h}_Q^{w, \lambda}(x) := \prod_{i=1}^n \left[(1 - \lambda_i) \chi_{\pi_i(Q)}^{w_i}(x_i) + \lambda_i h_{\pi_i(Q)}^{w_i}(x_i) \right] = \prod_{i=1}^n \mathfrak{h}_{Q,i}^{w, \lambda}(x_i),$$

donde $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w, \lambda}(x_i) = (1 - \lambda_i) \chi_{\pi_i(Q)}^{w_i}(x_i) + \lambda_i h_{\pi_i(Q)}^{w_i}(x_i)$.

PROPOSICIÓN 5.2.2. *El sistema $\{\mathfrak{h}_Q^{w, \lambda}, Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que $\{\mathfrak{h}_Q^{w, \lambda}\}$ es ortonormal, en efecto, si Q y J son dos cubos diádicos distintos, dados λ y γ en Λ es fácil ver que $\langle \mathfrak{h}_Q^{w, \lambda}, \mathfrak{h}_J^{w, \gamma} \rangle_w = 0$ debido al carácter de medida producto de $w dx$ y al hecho de que la familia $\{h_I^{w_i}\}$ es ortogonal y que cada función $h_I^{w_i}$ tiene promedio nulo para todo $i = 1, \dots, n$. Por otro lado si $Q = J$ y $\lambda \neq \gamma$, entonces existe i tal que $\lambda_i \neq \gamma_i$, podemos suponer

sin pérdida de generalidad que $\lambda_i = 1$ y $\gamma_i = 0$, en consecuencia en el producto $\left\langle \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda}, \mathfrak{h}_Q^{w,\gamma} \right\rangle_w$ aparece el factor $\left\langle h_{\pi_i(Q)}^{w_i}, \chi_{\pi_i(Q)}^{w_i} \right\rangle_{w_i} = 0$, por lo tanto otra vez por el carácter de medida producto de $w dx$ obtenemos que $\left\langle \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda}, \mathfrak{h}_Q^{w,\gamma} \right\rangle_w = 0$. Como $\|\chi_I^{w_i}\|_{L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)} = \|h_I^{w_i}\|_{L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)} = 1$, es fácil ver que $\left\| \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)} = 1$.

Como el espacio V_Q de las funciones en Q que son constantes en cada $Q' \in \mathcal{O}(Q)$ tiene dimensión 2^n , y como las funciones simples sobre cubos diádicos son densas en L^2 nos basta demostrar que para Q fijo en \mathcal{D} la familia $\{h_Q^{w,\lambda} : \lambda \in \Lambda \setminus \overline{0}\}$ que junto con $\chi_Q/\sqrt{w(Q)}$ forman una base de V_Q es linealmente independiente. Pero ya probamos que estas funciones son ortonormales. \square

Como vimos antes, dado $\epsilon > 0$, cada sistema $\{h_I^{w_i}\}$ tiene una base de Riesz asociada, en $L^2(\mathbb{R}, w_i dx_i)$, de funciones regulares $\{h_I^{w_i, \epsilon}\}$, con cotas Riesz tan cercanas a uno como se desee.

Recordemos que, en la construcción de cada función $h_I^{w_i, \epsilon}$, intervino una función regular φ^i , y que cada elemento del sistema de Riesz se puede escribir como

$$h_I^{w_i, \epsilon} = [(h_I^{w_i} \circ W_i^{-1}) * \varphi_{\epsilon w_i(I)}^i] \circ W_i,$$

donde $W_i(t) = \int_0^t w_i(x_i) dx_i$. Las funciones φ^i pueden tomarse todas iguales pero el modo preciso de regularizar no es relevante.

Aplicando el mismo proceso de regularización a las funciones $\chi_I^{w_i}$, obtenemos

$$\chi_I^{w_i, \epsilon} := [(\chi_I^{w_i} \circ W_i^{-1}) * \varphi_{\epsilon w_i(I)}^i] \circ W_i.$$

Podemos ver, por la analogía de su construcción, que las funciones $\chi_I^{w_i, \epsilon}$ son de clase Lipschitz y además que la constante de la desigualdad lipschitz es la misma que la de las funciones $h_I^{w_i, \epsilon}$. Reunimos ésta y otras propiedades en el siguiente lema.

LEMA 5.2.3. *Sea w un peso de Muckenhoupt en la clase $A_\infty(\mathbb{R})$ entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

a) *Fijado $I \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $x, y \in I$ resulta*

$$|h_I^{w, \epsilon}(x) - h_I^{w, \epsilon}(y)| \leq \frac{c}{\epsilon w(I)^{\frac{3}{2}}} \left| \int_x^y w(z) dz \right|.$$

b) *Para $I \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $x, y \in I$.*

$$|\chi_I^{w, \epsilon}(x) - \chi_I^{w, \epsilon}(y)| \leq \frac{c}{\epsilon w(I)^{\frac{3}{2}}} \left| \int_x^y w(z) dz \right|.$$

c) *Dado $I = [a_I, b_I] \in \mathcal{D}$, si denotamos con c_I al centro del intervalo I , podemos dividir el soporte de la función $h_I^{w, \epsilon}$ en cinco subconjuntos, a saber,*

- $I_1^{w, \epsilon} = [W^{-1}(W(a_I) - \epsilon w(I)), W^{-1}(W(a_I) + \epsilon w(I))] = W^{-1}(S_I^{\epsilon, 1})$.
- $I_2^{w, \epsilon} = [W^{-1}(W(a_I) + \epsilon w(I)), W^{-1}(W(c_I) - \epsilon w(I))]$.
- $I_3^{w, \epsilon} = [W^{-1}(W(c_I) - \epsilon w(I)), W^{-1}(W(c_I) + \epsilon w(I))] = W^{-1}(S_I^{\epsilon, 2})$.
- $I_4^{w, \epsilon} = [W^{-1}(W(c_I) + \epsilon w(I)), W^{-1}(W(b_I) - \epsilon w(I))]$.
- $I_5^{w, \epsilon} = [W^{-1}(W(b_I) - \epsilon w(I)), W^{-1}(W(b_I) + \epsilon w(I))] = W^{-1}(S_I^{\epsilon, 3})$.

d) *Dado $I \in \mathcal{D}$, la diferencia $h_I^w - h_I^{w, \epsilon}$ tiene integral nula sobre cada componente conexa $I_k^{w, \epsilon}$ con $k = 1, \dots, 5$.*

e) Si $I = [a_I, b_I] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, al igual que las funciones regulares $h_I^{w,\epsilon}$, el soporte de las funciones $\chi_I^{w,\epsilon}$ es el intervalo

$$[W^{-1}(W(a_I) - \epsilon w(I)), W^{-1}(W(b_I) + \epsilon w(I))].$$

f) Dado $I \in \mathcal{D}$, la diferencia $\chi_I^w - \chi_I^{w,\epsilon}$ tiene integral nula sobre cada componente conexa $I_k^{w,\epsilon}$ con $k = 1, \dots, 5$, del soporte de $\chi_I^{w,\epsilon}$

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba del ítem a) aplicamos la misma técnica que en la demostración de la Afirmación 1, utilizada en la prueba del Teorema 4.1.6, en efecto, por la definición de $h_I^{w,\epsilon}$ obtenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |h_I^{w,\epsilon}(x) - h_I^{w,\epsilon}(y)| &= |H_I^{w,\epsilon} \circ W(x) - H_I^{w,\epsilon} \circ W(y)| \\ &= |[H_I^w * \varphi_{\epsilon w(I)}](W(x)) - [H_I^w * \varphi_{\epsilon w(I)}](W(y))| \\ &\leq \int |H_I^w(z)| \frac{1}{\epsilon w(I)} \left| \varphi\left(\frac{W(x) - z}{\epsilon w(I)}\right) - \varphi\left(\frac{W(y) - z}{\epsilon w(I)}\right) \right| dz \\ &\leq \frac{\|\varphi'\|_\infty}{\epsilon^2 w(I)^2} |W(x) - W(y)| \int_{\{|W(x)-z| < \epsilon w(I)\} \cup \{|W(y)-z| < \epsilon w(I)\}} |H_I^w(z)| dz \\ &\leq \frac{\|\varphi'\|_\infty w(I)^{-1/2} 2\epsilon w(I)}{\epsilon^2 w(I)^2} |W(x) - W(y)| = \frac{c}{\epsilon w(I)^{3/2}} \left| \int_x^y w(z) dz \right|. \end{aligned}$$

La prueba del ítem b) es análoga a la anterior puesto que sólo hemos usado la norma infinito de H_I que es la misma que la de χ_I^w .

Para el ítem c) observemos que por la definición de $H_I^{w,\epsilon}$ sabemos que $\text{sop } H_I^{w,\epsilon} = [W(a_I) - \epsilon w(I), W(b_I) + \epsilon w(I)]$. Esto último implica que

$$\text{sop } h_I^{w,\epsilon} = [W^{-1}(W(a_I) - \epsilon w(I)), W^{-1}(W(b_I) + \epsilon w(I))],$$

y el resultado sigue, notando que $I_k^{w,\epsilon}$ son intervalos que lo cubren.

Para probar el ítem d) notamos que por la Afirmación 2, utilizada en la prueba del Teorema 4.1.6, sabemos que la diferencia $b_I^\epsilon = H_I^w - H_I^{w,\epsilon}$ tiene integral nula sobre cada componente conexa $S_I^{\epsilon,m}$ con $m = 1, 2, 3$.

Si k es impar, aplicamos el cambio de variable $z = W^{-1}(x)$ y utilizamos el resultado de la Afirmación 2 par obtener

$$\int_{I_k^{w,\epsilon}} (h_I^w(z) - h_I^{w,\epsilon}(z)) w(z) dz = \int_{S_I^{\epsilon,m}} (H_I^w(x) - H_I^{w,\epsilon}(x)) dx = 0.$$

Si k es par, como $H_I^w = H_I^{w,\epsilon}$ sobre $W(I_k^{w,\epsilon})$, aplicando el mismo cambio de variable $z = W^{-1}(x)$ obtenemos

$$\int_{I_k^{w,\epsilon}} (h_I^w(z) - h_I^{w,\epsilon}(z)) w(z) dz = \int_{W(I_k^{w,\epsilon})} H_I^w(x) - H_I^{w,\epsilon}(x) dx = 0.$$

El resultado del ítem e) se deduce de la definición de $\chi_I^{w,\epsilon}$.

Para la prueba del ítem f) notemos que la diferencia $\chi_I^w - \chi_I^{w,\epsilon}$ se anula en los intervalos centrales de su soporte $I_k^{w,\epsilon}$, $k = 2, 3, 4$. Por otro lado para $k = 1, 2$ aplicamos el cambio de variable $z = W^{-1}(y)$ y obtenemos

$$\int_{I_k^{w,\epsilon}} [\chi_I^w(z) - \chi_I^{w,\epsilon}(z)] w(z) dz = \int_{W(I_k^{w,\epsilon})} [(\chi_I^w \circ W^{-1})(y) - (\chi_I^w \circ W^{-1}) * \varphi_{\epsilon w(I)}(y)] dy,$$

re-escalando la prueba se sigue como en 3.2.7.

□

Dado $Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $Q = \prod_{i=1}^n \pi_i(Q)$ y $\lambda \in \Lambda$, definimos las funciones regulares en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ sustituyendo en (5.2.1) cada función por su correspondiente regularizada en el sentido descrito,

$$(5.2.4) \quad \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x) := \prod_{i=0}^n \left[(1 - \lambda_i) \chi_{I_i(Q)}^{w_i,\epsilon}(x_i) + \lambda_i h_{I_i(Q)}^{w_i,\epsilon}(x_i) \right] = \prod_{i=0}^n \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}(x_i),$$

donde $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}(x_i) = (1 - \lambda_i) \chi_{I_i(Q)}^{w_i,\epsilon}(x_i) + \lambda_i h_{I_i(Q)}^{w_i,\epsilon}(x_i)$.

Notar que el soporte de cada función $\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ es el producto cartesiano de los soportes de la funciones $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$, como el soporte de cada una de éstas es un ϵ entorno del intervalo diádico $\pi_i(Q)$ obtenemos que el soporte de $\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ está incluido en un ϵ entorno de Q .

Estamos en condición de enunciar el resultado principal de esta sección.

TEOREMA 5.2.5. *Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la familia de funciones $\{\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}\}$ definida en (5.2.4) es una base de Riesz de funciones continuas en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ con cotas tan cercanas a uno y con soportes tan ajustados a los cubos diádicos como se quiera.*

Para demostrar este resultado usaremos el Teorema de estabilidad de Favier y Zalik 1.5.1. En otras palabras, veremos que la sucesión de diferencias $\{b_Q^{w,\lambda,\epsilon} = \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}, Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Lambda\}$ es una sucesión de Bessel con cota que tiende a cero cuando ϵ tiende a cero. Siendo $\{\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda}, Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Lambda\}$ la base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ definida en (5.2.1). Como en el caso unidimensional, para probar la condición de Bessel para esta sucesión usaremos el Lema de Cotlar 1.1.1.

Antes de comenzar la demostración del Teorema 5.2.5 enunciaremos el lema siguiente, cuya prueba será dada al final de la sección.

LEMA 5.2.6. *a) Dado $\lambda \in \Lambda$, fijo, podemos escribir*

$$b_Q^{w,\lambda,\epsilon} = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{n-k} \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} \right) \left(\mathfrak{h}_{Q,n-k+1}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,n-k+1}^{w,\lambda,\epsilon} \right) \left(\prod_{i=n-k+2}^n \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon} \right).$$

donde, para simplificar la notación convenimos que $\prod_{i=n+1}^n \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon} = \prod_{i=1}^0 \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} = 1$.

b) Existe $c > 0$ tal que, dado $Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \Lambda$ fijos, el soporte de la función $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ tiene medida mas chica que $c\epsilon w(Q)$ en (\mathbb{R}^n, wdx) . Esto es

$$w(\text{sop } b_Q^{w,\lambda,\epsilon}) = \int_{\text{sop } b_Q^{w,\lambda,\epsilon}} wdx \leq c\epsilon w(Q).$$

c) Dado $Q \in \mathcal{D}$ y $\lambda \in \Lambda$ fijos, existen constantes positivas $m(\lambda, n, \epsilon, w) \approx 1/\epsilon^{n-1}$ y c independiente de Q y λ tal que, el soporte de la función $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$

puede escribirse como la unión de rectángulos n -dimensionales R_m , con $m = 1, \dots, m(\lambda, n, \epsilon, w)$ tales que se cumplen las siguientes desigualdades

$$\int_{R_m} b_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x)w(x)dx = 0, \quad \text{para todo } m = 1, \dots, m(\lambda, n, \epsilon, w),$$

$$\left| \int_{x_i}^{y_i} w_i(t)dt \right| \leq c\epsilon w_i(\pi_i(Q)) \quad \text{para } x, y \in R_m, \text{ para todo } m = 1, \dots, m(\lambda, n, \epsilon, w), \text{ y}$$

$$w(R_m) = \int_{R_m} w dx \leq c\epsilon^n w(Q) \quad \text{para todo } m = 1, \dots, m(\lambda, n, \epsilon, w).$$

d) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathcal{D}$ y $\lambda \in \Lambda$ entonces se cumple la siguiente desigualdad de tipo Lipschitz

$$\left| \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x) - \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}(y) \right| \leq \frac{c}{\epsilon w(Q)^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k(\pi_k(Q))} \left| \int_{x_k}^{y_k} w_k(t)dt \right|.$$

Admitiendo la validez del lema anterior, continuamos ahora con la demostración del resultado principal de esta sección.

PRUEBA DEL TEOREMA 5.2.5. Como el cardinal de Λ es $2^n - 1$, podemos fijar $\lambda \in \Lambda$ y acotar sobre $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ el operador

$$\begin{aligned} T_\lambda f &:= \sum_{Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \langle f, b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \rangle \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \langle f, b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \rangle \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} T_i f. \end{aligned}$$

Aplicaremos el Lema de Cotlar 1.1.1 a la sucesión de operadores $\{T_i\}$ para ver que el operador T_λ está acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ con norma tan pequeña como se desee.

Nuevamente tenemos que $T_i^* f = \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \langle f, \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda} \rangle b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$. Por lo tanto, la ortogonalidad del sistema $\{\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda}\}$ implica que

$$T_i^* T_j f = \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \sum_{J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n)} \langle f, b_J^{w,\lambda,\epsilon} \rangle \langle \mathfrak{h}_J^{w,\lambda}, \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda} \rangle b_Q^{w,\lambda,\epsilon} = 0 \quad \text{para } i \neq j.$$

Por otro lado, si $i = j$, tomando $f \in L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ tal que $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)} = 1$, la ortogonalidad del sistema $\{\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda}\}$ junto con el resultado del Lema 5.2.6 y el hecho de que $|b_Q^{w,\lambda,\epsilon}| \leq cw(Q)^{-\frac{1}{2}}$ nos permite escribir

$$\begin{aligned}
\|T_i^* T_i f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)} &= \|T_i f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2 = \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \left| \langle f, b_Q^{w, \lambda, \epsilon} \rangle \right|^2 \\
&\leq \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\text{sop } b_Q^{w, \lambda, \epsilon}, w dx)}^2 \int_{\text{sop } b_Q^{w, \lambda, \epsilon}} \left| b_Q^{w, \lambda, \epsilon} \right|^2 w dx \\
&\leq c\epsilon \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\text{sop } b_Q^{w, \lambda, \epsilon}, w dx)}^2 \\
&\leq c\epsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2 = c\epsilon.
\end{aligned}$$

Para el análisis de la composición $T_i T_j^*$ vemos que, por la ortonormalidad del sistema $\{b_Q^{w, \lambda, \epsilon}\}$, resulta

$$\|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2 = \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n)} \langle f, b_J^{w, \lambda, \epsilon} \rangle \langle b_J^{w, \lambda, \epsilon}, b_Q^{w, \lambda, \epsilon} \rangle \right)^2.$$

Si suponemos primero que $i \geq j$, tomando ϵ lo suficientemente pequeño, podemos lograr que los soportes de las diferencias $b_J^{w, \lambda, \epsilon}$ tengan solapamiento acotado por una constante que depende sólo de la dimensión n y del peso w . Por lo tanto, teniendo en cuenta que, dado $Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)$, existe a lo sumo un único $J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n)$ tal que $Q \subset J$, entonces la cantidad de funciones $b_J^{w, \lambda, \epsilon}$, tales que sus soportes intersecan el soporte de $b_Q^{w, \lambda, \epsilon}$, esta acotado por la cota del solapamiento de los soportes. De este modo resulta

$$\|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2 \leq c \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n) \\ \text{sop } b_Q^{w, \lambda, \epsilon} \cap \text{sop } b_J^{w, \lambda, \epsilon} \neq \emptyset}} \left| \langle f, b_J^{w, \lambda, \epsilon} \rangle \right|^2 \left| \langle b_J^{w, \lambda, \epsilon}, b_Q^{w, \lambda, \epsilon} \rangle \right|^2.$$

Por otro lado, aplicando el resultado del Lema 5.2.6 y la desigualdad (1.2.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| \langle b_J^{w, \lambda, \epsilon}, b_Q^{w, \lambda, \epsilon} \rangle \right| &\leq \int_{\text{sop } b_Q^{w, \lambda, \epsilon}} \left| b_Q^{w, \lambda, \epsilon} \right| \left| b_J^{w, \lambda, \epsilon} \right| w dx \\
&\leq c w(Q)^{-\frac{1}{2}} w(J)^{-\frac{1}{2}} w(\text{sop } b_Q^{w, \lambda, \epsilon}) \\
(5.2.7) \qquad &\leq c\epsilon \left(\frac{w(Q)}{w(J)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\epsilon \left(\frac{|Q|}{|J|} \right)^{\frac{\gamma}{2}}
\end{aligned}$$

$$(5.2.8) \qquad \leq c\epsilon \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{(i-j)n}{2} \gamma},$$

por lo tanto, para $i \geq j$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2 &\leq c\epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{(i-j)n\gamma} \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n) \\ \text{sop } b_Q^{w, \lambda, \epsilon} \cap \text{sop } b_J^{w, \lambda, \epsilon} \neq \emptyset}} \left| \langle f, b_J^{w, \lambda, \epsilon} \rangle \right|^2 \\
&\leq c\epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{(i-j)n\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2.
\end{aligned}$$

Para el caso en que $i \leq j$, dado $Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)$, partimos el conjunto $\{J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n) / \text{sop } b_J^{w,\lambda,\epsilon} \cap \text{sop } b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \neq \emptyset\}$ en dos subconjuntos.

Sea $\mathcal{B}(Q) := \{J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n) / \text{sop } b_J^{w,\lambda,\epsilon} \cap \text{sop } b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \neq \emptyset \text{ y } b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \chi_J \text{ es continua y no idénticamente nula}\}$.

Sea $\mathcal{C}(Q) := \{J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n) / \text{sop } b_J^{w,\lambda,\epsilon} \cap \text{sop } b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \neq \emptyset\} \setminus \mathcal{B}(Q)$.

Obtenemos así

$$(5.2.9) \quad \begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, w dx)}^2 &= \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \left(\sum_{\mathcal{C}(Q) \cup \mathcal{B}(Q)} \langle f, \mathfrak{h}_J^{w,\lambda} \rangle \langle b_J^{w,\lambda,\epsilon}, b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \rangle \right)^2 \\ &\leq \sum_{Q \in \mathcal{D}^i(\mathbb{R}^n)} \sum_{\mathcal{C}(Q) \cup \mathcal{B}(Q)} \left| \langle f, \mathfrak{h}_J^{w,\lambda} \rangle \right|^2 \sum_{\mathcal{C}(Q) \cup \mathcal{B}(Q)} \left| \langle b_J^{w,\lambda,\epsilon}, b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \rangle \right|^2. \end{aligned}$$

Notar que $\mathcal{C}(Q)$ consiste en los cubos $J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n)$ en donde $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ es discontinua. La expresión del Lema 5.2.6 nos permite ver que si $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ es discontinua en $x = (x_1, \dots, x_n)$, entonces debe existir x_i tal que la diferencia $\mathfrak{h}_{I_i(Q)}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{I_i(Q)}^{w,\lambda,\epsilon}$ es discontinua en x_i , pero este hecho ocurre sólo cuando x_i es uno de los extremos o el centro del intervalo $\pi_i(Q)$. Esto implica que $x \in \bigcup_{Q' \subset Q} \partial Q'$.

Por lo tanto $\mathcal{C}(Q)$ consiste en los cubos $J \in \mathcal{D}^j(\mathbb{R}^n)$ tales que intersecan a $\bigcup_{Q' \subset Q} \partial Q'$. Como ∂Q tiene dimensión $n-1$ y los cubos $J \in \mathcal{C}(Q)$ tienen diámetros comparables a $(1/2)^j$, entonces el cardinal de $\mathcal{C}(Q)$ es comparable con el cociente de los diámetros, elevado a la potencia $n-1$, mas específicamente

$$\#\mathcal{C}(Q) \approx \left(\frac{\text{diam}(Q)}{\text{diam}(J)} \right)^{n-1} = c \left(\frac{1}{2} \right)^{(i-j)(n-1)}.$$

En consecuencia, si llamamos Q^* al cubo concéntrico con Q pero cuyo diámetro es el doble del de Q , tomamos ϵ lo suficientemente pequeño como para asegurar que $J \subset Q^*$ para todo $J \in \mathcal{C}(Q)$, por 5.2.7 obtenemos

$$(5.2.10) \quad \begin{aligned} \sum_{J \in \mathcal{C}(Q)} \left| \langle b_J^{w,\lambda,\epsilon}, b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \rangle \right|^2 &\leq \frac{c\epsilon^2}{w(Q)} \sum_{J \in \mathcal{C}(Q)} w(J) \\ &= c\epsilon^2 \frac{w\left(\bigcup_{J \in \mathcal{C}(Q)} J\right)}{w(Q)} \leq c\epsilon^2 \left(\frac{\left|\bigcup_{J \in \mathcal{C}(Q)} J\right|}{|Q^*|} \right)^\gamma \\ &\leq c\epsilon^2 \left(\#\mathcal{C}(Q) \left(\frac{1}{2} \right)^{(j-i)n} \right)^\gamma \\ &\leq c\epsilon^2 (1/2)^{(j-i)\gamma}, \end{aligned}$$

donde γ es el exponente de la desigualdad 1.2.3 para w .

Por otro lado, debido a que los cubos de $\mathcal{C}(Q)$ son los que intersecan a las fronteras de los hijos Q' de Q , entonces los cubos $J \in \mathcal{B}(Q)$ están ubicados en sectores del soporte de $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ en donde se cumple que $\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda}(x) = \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda}(y)$, para todo $x, y \in J$. Esto

implica que, si aplicamos el Lema 5.2.6, y suponemos que $x^m \in R_m$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle b_J^{w,\lambda,\epsilon}, b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \right\rangle \right| &= \left| \int_{\text{sop } b_J^{w,\lambda,\epsilon}} b_J^{w,\lambda,\epsilon}(x) b_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x) w dx \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{m(\lambda)} \int_{R_m} b_J^{w,\lambda,\epsilon}(x) \left(b_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x) - b_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x^m) \right) w dx \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{m(\lambda)} \int_{R_m} b_J^{w,\lambda,\epsilon}(x) \left(\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x) - \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x^m) \right) w dx \right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{m(\lambda)} \int_{R_m} \left| b_J^{w,\lambda,\epsilon}(x) \right| \left| \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x) - \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x^m) \right| w dx \\
&\leq \frac{c}{w(J)^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=1}^{m(\lambda)} \int_{R_m} \left| \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x) - \mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}(x^m) \right| w dx \\
&\leq \frac{c}{w(J)^{\frac{1}{2}} \epsilon w(Q)^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=1}^{m(\lambda)} \int_{R_m} \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k(\pi_k(Q))} \left| \int_{x_k}^{x_k^m} w(t) dt \right| w dx \\
&\leq \frac{c\epsilon}{w(J)^{\frac{1}{2}} \epsilon w(Q)^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=1}^{m(\lambda)} \int_{R_m} \sum_{k=1}^n \frac{w_k(\pi_k(J))}{w_k(\pi_k(Q))} w dx \\
&\leq \frac{c}{w(J)^{\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=1}^{m(\lambda)} \int_{R_m} \sum_{k=1}^n \left(\frac{|\pi_k(J)|}{|\pi_k(Q)|} \right)^{\gamma_k} w dx \\
&\leq \frac{c}{w(J)^{\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2} \right)^{(j-i) \min_k(\gamma_k)} \sum_{m=1}^{m(\lambda)} \int_{R_m} w dx \\
&\leq \frac{c}{w(J)^{\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2} \right)^{(j-i) \min_k(\gamma_k)} w(\text{sop } b_J^{w,\lambda,\epsilon}) \\
&\leq \frac{c}{w(J)^{\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2} \right)^{(j-i) \min_k(\gamma_k)} \epsilon w(J) \\
&\leq c\epsilon (1/2)^{(j-i) \min_k(\gamma_k)} \left(\frac{w(J)}{w(Q)} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si Q^* es el cubo concéntrico con Q y cuyas aristas miden el doble que las de Q , para ϵ suficientemente pequeño podemos decir que $J \subset Q^*$ para todo $J \in \mathcal{B}(Q)$. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{J \in \mathcal{B}(Q)} \left| \left\langle b_J^{w,\lambda,\epsilon}, b_Q^{w,\lambda,\epsilon} \right\rangle \right|^2 &\leq c\epsilon^2 (1/2)^{2(j-i) \min_k(\gamma_k)} \frac{1}{w(Q)} \sum_{J \in \mathcal{B}(Q)} w(J) \\
&\leq c\epsilon^2 (1/2)^{2(j-i) \min_k(\gamma_k)} \frac{1}{w(Q^*)} \sum_{J \in \mathcal{B}(Q)} w(J) \\
(5.2.11) \qquad &\leq c\epsilon^2 (1/2)^{2(j-i) \min_k(\gamma_k)}.
\end{aligned}$$

Si juntamos los resultados en (5.2.10) y (5.2.11) con la expresión obtenida en la desigualdad (5.2.9) obtenemos

$$\begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2 &\leq \left(c\epsilon^2 (1/2)^{(j-i)\gamma} + c\epsilon^2 (1/2)^{2(j-i)\min_k(\gamma_k)} \right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2 \\ &\leq c\epsilon^2 (1/2)^{(j-i)\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, wdx)}^2. \end{aligned}$$

En definitiva, hemos probado que la sucesión de operadores $\{T_j\}$ cumple la propiedad de casi ortogonalidad, y que una posible sucesión que controla la norma de las composiciones $T_i^* T_j$ y $T_i T_j^*$ es $s(i-j) = c\epsilon (1/2)^{\frac{|i-j|\gamma}{2}}$. Lo cual, por el Lema de Cotlar, garantiza que el operador T_λ está acotado en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ con norma $c\epsilon^{\frac{1}{2}}$. Como la prueba no depende de $\lambda \in \Lambda$, podemos deducir del Teorema de estabilidad de Favier y Zalik 1.5.1, que la sucesión $\{\mathfrak{h}_Q^{w,\lambda,\epsilon}, Q \in \mathcal{D}, \lambda \in \Lambda\}$ es una base de Riesz en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$ con cotas Riesz tan cercanas a uno como se desee. Esto culmina la prueba del Teorema 5.2.5. \square

A continuación probamos el Lema 5.2.6.

PRUEBA DEL LEMA 5.2.6. Para probar el ítem *a*) y simplificar la notación llamamos $f_i = \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda}$, $f = \prod_{i=1}^n f_i$, $g_i = \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$ y $g = \prod_{i=1}^n g_i$. Por lo tanto $b_Q^{w,\lambda,\epsilon} = f - g$. Procedemos por inducción. Para $n = 2$ obtenemos

$$f_1 f_2 - g_1 g_2 = f_1(f_2 - g_2) + (f_1 - g_1)g_2$$

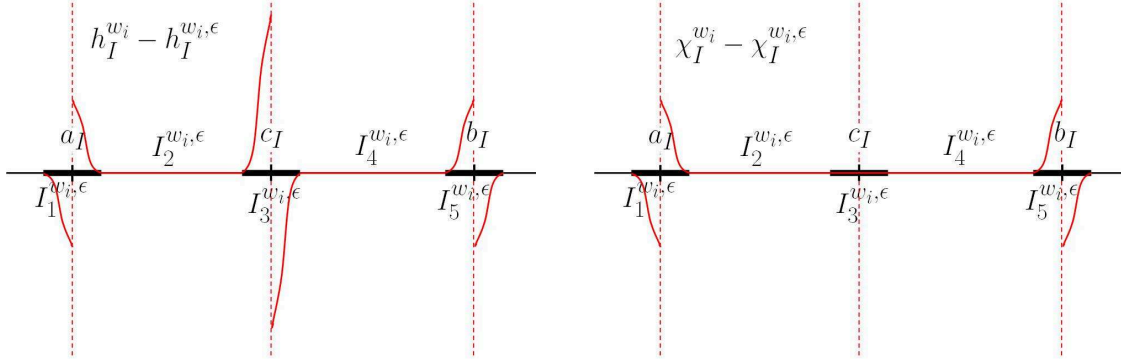
por el caso $n = 2$ y suponiendo que la igualdad es verdadera para n resulta

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1} f_i - \prod_{i=1}^{n+1} g_i &= \left(\prod_{i=1}^n f_i \right) f_{n+1} - \left(\prod_{i=1}^n g_i \right) g_{n+1} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n f_i \right) (f_{n+1} - g_{n+1}) + \left(\prod_{i=1}^n f_i - \prod_{i=1}^n g_i \right) g_{n+1} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n f_i \right) (f_{n+1} - g_{n+1}) + \\ &\quad \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{n-k} f_i \right) (f_{n-k+1} - g_{n-k+1}) \left(\prod_{i=n-k+2}^n g_i \right) g_{n+1} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n f_i \right) (f_{n+1} - g_{n+1}) + \\ &\quad \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{n-k} f_i \right) (f_{n-k+1} - g_{n-k+1}) \left(\prod_{i=n-k+2}^{n+1} g_i \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\prod_{i=1}^{n+1-k} f_i \right) (f_{n+1-k+1} - g_{n+1-k+1}) \left(\prod_{i=n+1-k+2}^{n+1} g_i \right). \end{aligned}$$

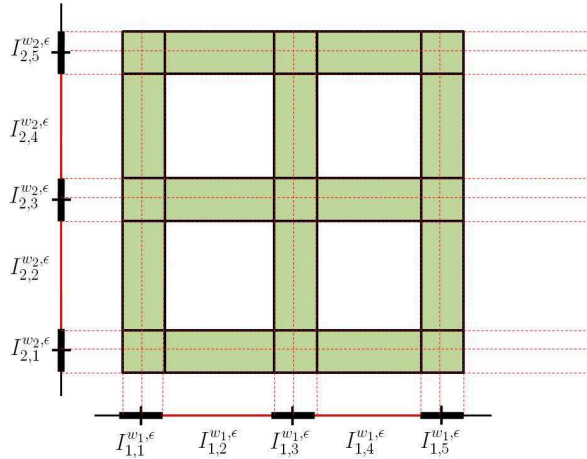
Para el ítem *b*) utilizamos el resultado del ítem *a*) el cual nos permite deducir propiedades de $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ a partir de las propiedades de las diferencias $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$. En efecto, del Lema 5.2.3 sabemos que el soporte de cada función $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$ puede ser

dividido en cinco intervalos $\pi_i(Q)^{w_i,\epsilon}$ con $k = 1, \dots, 5$. Esto permite encontrar el soporte de las diferencias $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$, puesto que dependiendo de la coordenada λ_i , la diferencia $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$, es la diferencia $h_{\pi_i(Q)}^{w_i} - h_{\pi_i(Q)}^{w_i,\epsilon}$ (para $\lambda_i = 1$) o $\chi_{\pi_i(Q)}^{w_i} - \chi_{\pi_i(Q)}^{w_i,\epsilon}$ (para $\lambda_i = 0$).

En el primer caso $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$ es cero sobre los intervalos $\pi_i(Q)^{w_i,\epsilon}$ con $k = 2, 4$, mientras que en el segundo, es cero para $k = 2, 3, 4$, podemos ver esta situación en la siguiente figura.



Por la expresión del ítem a) observamos que $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ será distinta de cero sobre rectángulos n -dimensionales tales que, al menos una de las diferencias $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$ sea distinta de cero. Esto ocurre cuando el rectángulo en cuestión es el producto de intervalos donde, al menos uno de ellos, es un intervalo $\pi_i(Q)^{w_i,\epsilon}$ en el que $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$ no se anula. Por lo tanto podemos dividir el soporte de $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ en, a lo sumo, una cantidad N de rectángulos de la forma $\prod_{i=1}^n \pi_i(Q)^{w_i,\epsilon}$ tales que existe i que verifica que $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$ es distinta de cero sobre $\pi_i(Q)^{w_i,\epsilon}$. Además la constante N sólo depende de la dimensión n . En la siguiente figura se ilustra esta situación para $n = 2$ y $\lambda = (1, 1)$.



Debemos observar que las diferencias $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$ son distintas de cero, sólo sobre intervalos que, en $(\mathbb{R}, w_i dx_i)$, miden $2\epsilon w_i(\pi_i(Q))$. Esto implica que cada uno de los rectángulos n -dimensionales que cubren el soporte de la función $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ es el producto de intervalos donde al menos uno de ellos tiene longitud $2\epsilon w_i(\pi_i(Q))$ por consiguiente $w(\text{sup } b_Q^{w,\lambda,\epsilon}) \leq c\epsilon w(Q)$.

Observemos también que si todas las diferencias $\mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,i}^{w,\lambda,\epsilon}$ son distintas de cero sobre los intervalos $\pi_i(Q)_{k(i)}^{w_i,\epsilon}$, entonces el rectángulo n -dimensional $\prod_{i=1}^n \pi_i(Q)_{k(i)}^{w_i,\epsilon}$ es tal que cada intervalo $\pi_i(Q)_{k(i)}^{w_i,\epsilon}$ mide $2\epsilon w_i(\pi_i(Q))$ por lo tanto es un cubo n dimensional de medida $2^n \epsilon^n w(Q)$, más importante aún es que si x e y pertenecen a este cubo entonces cada componente x_i, y_i cumple que $\left| \int_{x_i}^{y_i} w_i(t) dt \right| \leq c\epsilon w_i(\pi_i(Q))$.

Si no estamos en el caso anterior en el que la longitud de todos los intervalos $\pi_i(Q)_{k_i}^{w_i,\epsilon}$ es $2\epsilon w_i(\pi_i(Q))$, entonces dividimos aquellos intervalos $\pi_i(Q)_{k_i}^{w_i,\epsilon}$ que tengan longitud comparable con $w_i(\pi_i(Q))$ en sub-intervalos de longitud comparable a $\epsilon w_i(\pi_i(Q))$. Por ejemplo, si $\pi_n(Q)_{k(n)}^{w_n,\epsilon}$ no tiene longitud $2\epsilon w_n(\pi_n(Q))$ entonces es uno de los intervalos donde $\mathfrak{h}_{Q,n}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,n}^{w,\lambda,\epsilon}$ es cero, por lo tanto dividimos este intervalo en sub-intervalos J_s^n , con $s = 1, \dots, r(\lambda, \epsilon, w_n)$ de longitud comparable a $\epsilon w_n(\pi_n(Q))$ por lo que $r(\lambda, \epsilon, w_n) \approx 1/\epsilon$ y como $\mathfrak{h}_{Q,n}^{w,\lambda} - \mathfrak{h}_{Q,n}^{w,\lambda,\epsilon}$ es cero sobre todo $\pi_n(Q)_{k(n)}^{w_n,\epsilon}$, en particular lo es sobre cada J_s^n , lo cual implica que

$$\int_{\prod_{i=1}^{n-1} \pi_i(Q)_{k(i)}^{w_i,\epsilon} \times J_s^n} b_Q^{w,\lambda,\epsilon} w dx = 0,$$

además $\pi_n(Q)_{k(n)}^{w_n,\epsilon} = \bigcup_{s=1}^{r(\lambda,\epsilon,w_n)} J_s^n$.

Luego cada conjunto $\prod_{i=1}^n \pi_i(Q)_{k_i}^{w_i,\epsilon}$ puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \pi_i(Q)_{k_i}^{w_i,\epsilon} &= \prod_{i=1}^n \left(\bigcup_{s_i=1}^{r(\lambda,\epsilon,w_i)} J_{s_i}^i \right) \\ &= \bigcup_{m=1}^{\prod_{i=1}^n r(\lambda,\epsilon,w_i)} R_m, \end{aligned}$$

en particular si $\pi_i(Q)_{k_i}^{w_i,\epsilon}$ es uno de los intervalos que tiene longitud $2\epsilon w_i(\pi_i(Q))$ entonces $r(\lambda, \epsilon, w_i) = 1$ y $J_{s_i}^i = \pi_i(Q)_{k_i}^{w_i,\epsilon}$, de esta manera R_m es el producto cartesiano de intervalos cuyo i -ésimo factor tiene longitud comparable a $\epsilon w_i(\pi_i(Q))$ y por consiguiente $w(R_m) \approx \epsilon^n w(Q)$, además

$$\int_{R_m} b_Q^{w,\lambda,\epsilon} w dx = 0,$$

y debido a la longitud de los intervalos factores de R_m se tiene que si $x, y \in R_m$ entonces

$$\left| \int_{y_i}^{x_i} w_i dx_i \right| \leq c\epsilon w_i(\pi_i(Q)).$$

Por lo tanto el soporte de $b_Q^{w,\lambda,\epsilon}$ puede escribirse como la unión de conjuntos R_m , $m = 1, \dots, m(\lambda, \epsilon, w)$, por último como en los productos $\prod_{i=1}^n \pi_i(Q)_{k_i}^{w_i,\epsilon}$ siempre hay al menos un intervalo tal que $r(\lambda, \epsilon, w_i) = 1$ entonces $m(\lambda, n, \epsilon, w) \approx 1/\epsilon^{n-1}$.

En la siguiente figura se representa esta situación para el caso en que $n = 2$ y $\lambda = (1, 1)$.

Parte B - Contexto Abstracto

Espacios de tipo homogéneo

En este capítulo presentamos algunas definiciones y resultados de Análisis Armónico sobre espacios de tipo homogéneo y en el contexto de espacios de funciones definidas sobre estos. Mucha de la teoría clásica de Análisis Armónico contienen resultados que podrían clasificarse de orden cero o de orden fraccionario según los máximos grados de regularidad involucrados en los teoremas. La mayor parte de ellos puede extenderse a espacios casi métricos con medida duplicantes. Los fractales autosimilares, las variedades Rimanianas y muchísimas otras estructuras presentan una estructura austera como ésta. El triángulo de Sierpinsky es una imagen clara de un espacio no euclídeo que tiene excelentes propiedades en la relación métrica y medida cuando esta última es la de Hausdorff del orden correcto. La consideración de casi métricas está asociada a la necesidad de contemplar estructuras bastantes heterogéneas que al normalizarse producen auténticas casi métricas que no son distancias.

6.1. Espacios de tipo homogéneo

Comenzamos definiendo la noción de casi métrica en un conjunto.

DEFINICIÓN 6.1.1. *Una casi-métrica sobre un conjunto X es una función $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ tal que*

- $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para todo $x, y \in X$;
- existe $K > 1$ tal que $\rho(x, y) \leq K(\rho(x, z) + \rho(z, y))$ para todo $x, y, z \in X$.

Cuando la constante K en la definición anterior es igual a uno entonces la función ρ es una métrica y la denotamos con d en lugar de ρ . Un espacio casi-métrico (X, ρ) es un conjunto X dotado de una casi-métrica ρ .

Invitamos al lector interesado en fisgar más sobre espacios métricos a la lectura [17], [12], ver también [41].

La interacción adecuada entre una casi-métrica ρ y una medida de Borel μ , sobre un mismo conjunto X , son la base de la estructura necesaria en un espacio que hace de éste un lugar idóneo para el análisis armónico.

DEFINICIÓN 6.1.2. *Un espacio de tipo homogéneo (X, ρ, μ) a un espacio casi-métrico con una medida μ , doblante respecto de la casi-métrica ρ , esto es, existe $A > 0$ tal que para todo $r > 0$ se verifica*

$$\mu(B_\rho(x, 2r)) \leq A\mu(B_\rho(x, r)) \text{ para todo } x \in X$$

Donde $B_\rho(x, r) := \{y \in X / \rho(x, y) < r\}$ es la bola de centro x y radio r .

Se sabe que las ρ -bolas no son generalmente conjuntos abiertos. Sin embargo en [41], R. Macías y C. Segovia probaron que si ρ es una casi-métrica sobre X , entonces existe una métrica d y un número $\kappa \geq 1$ tal que ρ es equivalente a d^κ , y las d^κ -bolas

son conjuntos abiertos. Debido a esto podemos, en algunos problemas, considerar que (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo donde d es una métrica sobre X .

Para poder aplicar el teorema de diferenciación de Lebesgue supondremos que las funciones continuas son densas en $L^1(X, \mu)$.

DEFINICIÓN 6.1.3. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Diremos que X es α -Ahlfors si existen c_1 y c_2 constantes positivas tales que*

$$c_1 r^\alpha \leq \mu(B(x, r)) \leq c_2 r^\alpha$$

para cualquier $0 < r < \text{diam}X$, y todo $x \in X$.

6.2. Familias diádicas

Una construcción de familias del tipo diádica en espacios casi-métricos, con control métrico de la medida de los conjuntos diádicos, fue dada por Christ en [14]. En un espacio de tipo homogéneo siempre existen familias diádicas que tienen propiedades análogas a los cubos diádicos en \mathbb{R}^n . Precisamente presentamos a continuación la construcción dada por Christ en [14]. Dado (X, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo con una casi-métrica ρ y una medida duplicante μ , para $\delta \in (0, 1)$, diremos que una familia $Z^j = \{x_k^j, k \in I^j \subset \mathbb{Z}\} \subset X$, $j \in \mathbb{Z}$, es una familia δ^j -dispersa en X , si $\rho(x_m^j, x_k^j) \geq \delta^j$, siempre que $m \neq k$. Por otro lado si Z^j es una familia δ^j -dispersa maximal diremos que Z^j es una δ^j -red en X . Notar que el hecho de que Z^j sea una familia δ^j -dispersa maximal implica que, si $x \in X$, existe al menos un elemento $x_k^j \in Z^j$ tal que $\rho(x, x_k^j) < \delta^j$. Por supuesto las δ^j -redes no son únicas en X . Sea $\{Z^j, j \in \mathbb{Z}\}$ una sucesión de familias que son δ^j -redes en X . El proceso de construcción de cubos diádicos dado por Christ asocia a cada cubo un “centro” que es precisamente un elemento de las δ^j -redes con las que estamos trabajando. Para entender mejor el proceso de selección de los “centros” es preciso definir un orden parcial en la familia de pares $\mathcal{A} := \{(j, k), j \in \mathbb{Z}, k \in I^j\}$. Si K es la constante de la desigualdad triangular de la casi-métrica ρ , entonces definimos el orden parcial \preceq , “descendiente de”, sobre \mathcal{A} como sigue: dado $(j-1, k) \in \mathcal{A}$ diremos que el par (j, m) desciende de $(j-1, k)$, $(j, m) \preceq (j-1, k)$, si $\rho(x_m^j, x_k^{j-1}) \leq \frac{1}{2K} \delta^{j-1}$. Como Z^{j-1} es una δ^{j-1} -red, dado $(j, m) \in \mathcal{A}$ siempre existen elementos $x_k^{j-1} \in Z^{j-1}$ tal que $\rho(x_m^j, x_k^{j-1}) < \delta^{j-1}$ pero podría no existir ningún elemento $x_k^{j-1} \in Z^{j-1}$ tal que $\rho(x_m^j, x_k^{j-1}) < \frac{1}{2K} \delta^{j-1}$, si este es el caso elegimos arbitrariamente un único “ancestro” del par (j, m) de entre los pares $(j-1, k)$ tal que $\rho(x_m^j, x_k^{j-1}) < \delta^{j-1}$. Finalmente la relación \preceq es un orden parcial sobre \mathcal{A} si además le pedimos reflexividad, $(j, k) \preceq (j, k)$, y transitividad, si $(j, k) \preceq (l, m)$ y $(l, m) \preceq (n, p)$ entonces $(j, k) \preceq (n, p)$. Cada conjunto diádico de Christ Q_k^j se define a partir de los elementos de \mathcal{A} descendientes del par (j, k) , más precisamente, dado $a_1 \in (0, 1)$ definimos el cubo diádico de la resolución $j \in \mathbb{Z}$ y la posición $k \in I^j$ como sigue,

$$Q_k^j := \bigcup_{(l, m) \preceq (j, k)} B(x_m^l, a_1 \delta^l).$$

Denotaremos con \mathcal{D}^j a los cubos diádicos pertenecientes a la resolución j y $\mathcal{D} := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ es una familia diádica en X .

Si los parámetros δ y a_1 se eligen adecuadamente entonces se puede probar el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [37] (Teorema 3.6).

TEOREMA 6.2.1. *Para la familia diádica \mathcal{D} , existen constantes $\delta \in (0, 1)$, $a_1 \in (0, 1)$, $\eta > 0$, $a_2 < \infty$, $C < \infty$ y $N \in \mathbb{N}$ dependiendo de la constante geométrica K y de la constante de duplicación A tal que los siguientes enunciados se cumplan,*

- (a) *cada $Q_k^j \in \mathcal{D}$ es abierto,*
- (b) *cada $Q_k^j \in \mathcal{D}$ contiene a la bola $B(x_k^j, a_1 \delta^j)$,*
- (c) *para cada $Q_k^j \in \mathcal{D}$ se cumple que $\text{diam}(Q_k^j) < a_2 \delta^j$,*
- (d) *para cada $Q_k^j \in \mathcal{D}$, y $l < j$ existe un único $m \in I^l$ tal que $Q_k^j \subset Q_m^l$,*
- (e) *si $j \geq l$, $k \in I^j$ y $m \in I^l$ entonces sucede uno de las siguientes afirmaciones,*
o $Q_k^j \subset Q_m^l$ o $Q_k^j \cap Q_m^l = \emptyset$,
- (f) *para cada $Q_k^j \in \mathcal{D}$ se cumple*

$$\#\{Q_m^{j+1} \in \mathcal{D}^{j+1} : Q_m^{j+1} \subset Q_k^j\} \leq N,$$

- (g) *para cada $j \in \mathbb{Z}$*

$$\mu \left(X \setminus \bigcup_{k \in I^j} Q_k^j \right) = 0,$$

- (h) *para cada $Q_k^j \in \mathcal{D}$*

$$\mu \left(\{x \in Q_k^j : \rho(x, \overline{Q_k^j}) < t \delta^j\} \right) \leq C t^\eta \mu(Q_k^j),$$

para todo $t > 0$, donde $\overline{Q_k^j}$ es la clausura de Q_k^j .

La familia diádica construida por Christs no es única, es suficiente cambiar el valor de δ para obtener una familia distinta que cumpla las mismas propiedades, más aún, cualquier familia de conjuntos que cumpla las propiedades establecidas en el teorema anterior permite construir, sobre $L^2(X)$, un análisis de multiresolución, es por ello que es necesario definir el tipo de familias diádicas con las que trabajaremos.

DEFINICIÓN 6.2.2. *Decimos que $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ es una familia diádica sobre X con parámetro $\delta \in (0, 1)$, abreviadamente que \mathcal{D} pertenece a $\mathfrak{D}(\delta)$, si cada \mathcal{D}^j es una familia de conjuntos abiertos Q de X , tal que*

- (d,1) *Para cualquier $j \in \mathbb{Z}$ los cubos en \mathcal{D}^j son disjuntos de a pares.*
- (d,2) *Para cualquier $j \in \mathbb{Z}$ la familia \mathcal{D}^j cubre casi todo X en el sentido que $\mu(X - \bigcup_{Q \in \mathcal{D}^j} Q) = 0$.*
- (d,3) *Si $Q \in \mathcal{D}^j$ y $i < j$, entonces existe un único $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^i$ tal que $Q \subseteq \tilde{Q}$.*
- (d,4) *Si $Q \in \mathcal{D}^j$ y $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^i$ con $i \leq j$, entonces $Q \subseteq \tilde{Q}$ o $Q \cap \tilde{Q} = \emptyset$.*
- (d,5) *Existen dos constantes a_1 y a_2 tales que para cada $Q \in \mathcal{D}^j$ existe un punto $x \in Q$ para el cual $B(x, a_1 \delta^j) \subseteq Q \subseteq B(x, a_2 \delta^j)$.*

Las propiedades principales de la familia diádica \mathcal{D} definida antes están dadas en el siguiente resultado (ver [6]).

PROPOSICIÓN 6.2.3. *Sea \mathcal{D} una familia diádica en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces*

- (d,6) *Existe un entero positivo N , dependiendo sólo de la constante de duplicación, tal que para cualquier $j \in \mathbb{Z}$ y todo $Q \in \mathcal{D}^j$ la desigualdad $1 \leq \#(\mathcal{O}(Q)) \leq N$ se cumple. Donde $\mathcal{O}(Q) = \{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}$.*
- (d,7) *X está acotado si y sólo si existe un cubo diádico Q en \mathcal{D} tal que $X = Q$.*
- (d,8) *Las familias $\tilde{\mathcal{D}}^j = \{Q \in \mathcal{D}^j : \#(\{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subseteq Q\}) > 1\}$, $j \in \mathbb{Z}$ son disjuntas de a pares.*

6.3. Funciones maximales

En esta sección presentamos la definiciones de los operadores maximales con los que trabajaremos en esta parte de la monografía.

DEFINICIÓN 6.3.1. Dada $f \in L^1_{loc}(X)$ el operador Maximal de Hardy-Littlewood se define como

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \int_{B(x,r)} \int_B |f(y)| d\mu(y),$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B centradas en x y radio $r > 0$.

DEFINICIÓN 6.3.2. El operador maximal diádico de Hardy-Littlewood asociado a \mathcal{D} está definido, para una función localmente integrable f , por

$$M^{dy}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| d\mu,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos diádicos $Q \in \mathcal{D}$ conteniendo a x , y cero fuera de la unión de los diádicos.

Dado $Q \in \mathcal{D}$ y f localmente integrable, denotamos al promedio sobre el cubo Q de f como

$$m_Q f = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| d\mu.$$

DEFINICIÓN 6.3.3. Dada f localmente integrable definimos el Operador Maximal Sharp Diádico de Hardy-Littlewood asociado a la familia diádica \mathcal{D} como

$$M^{\sharp, dy}f(x) := \sup_{\mathcal{D} \ni Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y) - m_Q f| d\mu(y)$$

Donde el supremo se toma sobre todos los cubos diádicos en \mathcal{D} que contienen a x .

6.4. Pesos de Muckenhoupt sobre (X, d, μ)

En esta sección damos las definiciones general y diádica de pesos de Muckenhoupt en el contexto de espacios métricos con medida. La característica fundamental de los pesos de Muckenhoupt es que la condición A_p es necesaria y suficiente para el tipo debil $(1, 1)$ y fuerte (p, p) , $1 < p < \infty$, del operador maximal de Hardy-Littlewood.

DEFINICIÓN 6.4.1. a) Sea $1 < p < \infty$, una función w no negativa y localmente integrable sobre X pertenece a la clase A_p si y sólo si existe una constante finita y positiva C tal que para toda bola B se cumple la siguiente desigualdad

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^p \leq C.$$

b) El peso w está en la clase A_1 si existe C finita y positiva tal que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_Q w d\mu \leq C \inf_B w,$$

para toda bola B .

Para referirnos a un peso w de Muckenhoupt diremos que w pertenece a la clase $A_\infty := \bigcup_{p \geq 1} A_p$.

A continuación damos las definiciones de las cases diádicas de Muckenhoupt en el contexto de espacios de tipo homogéneo.

DEFINICIÓN 6.4.2. *Sea $\mathcal{D}(X) \in \mathfrak{D}(\delta)$ una familia de cubos diádicos en X .*

- Asociado a \mathcal{D} definimos la clase de pesos diádicos A_p^{dy} para $1 < p < \infty$ como las funciones medibles ν loc. int., no negativas tales que

$$\left(\int_Q \nu d\mu \right) \left(\int_Q \nu^{-\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{p-1} \leq C \mu(Q)^p, \quad \forall Q \in \mathcal{D}$$

- $\nu \in A_1^{dy}$ si $\exists C$ tal que

$$(6.4.3) \quad \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \nu d\mu \leq C \inf_Q \nu \quad \forall Q \in \mathcal{D}$$

- $A_\infty^{dy} = \bigcup_{p \geq 1} A_p^{dy}$

En [5] se probó que $A_p \Rightarrow A_{p-\epsilon}$ además también se obtiene la caracterización

$$\nu \in A_p^{dy} \Leftrightarrow \exists C, \delta / \frac{\nu(E)}{\nu(Q)} \leq C \left(\frac{\mu(E)}{\mu(Q)} \right)^\delta \quad \forall Q \in \mathcal{D}, Q \subset E \text{ medible.}$$

A continuación enunciamos un resultado referente a la acotación del operador maximal diádico M^{dy} . La prueba se encuentra desarrollada en ([6], Teorema 4.1), ver también ([47], Proposición 3.4).

TEOREMA 6.4.4. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Entonces*

- i) *Si $w \in A_p^{dy}$, $1 \leq p < \infty$, la desigualdad débil (p, p)*

$$w(\{x \in X : M^{dy} f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{p,w}^p,$$

se cumple para alguna constante positiva C , para cualquier $\lambda > 0$ y cualquier función localmente integrable f .

- ii) *Si $w \in A_p^{dy}$, $1 < p < \infty$, existe una constante C tal que la desigualdad*

$$\|M^{dy} f\|_{p,w} \leq C \|f\|_{p,w}$$

se cumple para cualquier función localmente integrable f .

- iii) *Si $w \in A_p^{dy}$, $1 < p < \infty$, existe una constante C dependiente de p , de la constante A_∞^{dy} de w y de las constante geométricas del espacio tales que la desigualdad*

$$\int_X [M^{dy} f]^p w d\mu \leq C \left\{ w(X) [m_X |f|]^p + \int_X [M^{\#, dy} f]^p w d\mu \right\}$$

se cumple para cualquier f tal que $M^{dy} f \in L^p(w)$.

6.5. Integrales Singulares

La teoría clásica de integrales singulares de Calderón-Zygmund tiene como modelo clásico a la transformada de Hilbert en \mathbb{R}^n cuyo núcleo es la distribución v.p. $\frac{1}{x}$ y cuya transformada de Fourier es la función $-i\text{signo}(\xi)$. En dimensión $n > 1$, las transformadas de Riesz R_i ($i = 1, \dots, n$) son operadores de convolución con núcleos dados por $K_j(x) = \text{v.p.} \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ cuyas transformadas de Fourier son $\hat{K}_j(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}$. Más generalmente los núcleos clásicos de Calderón-Zygmund tienen la forma $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, donde Ω es homogénea de grado cero, suave fuera del origen y tiene promedio nulo. Una formulación más general para la teoría de integrales singulares introducida por Coifman y Meyer en [16] se presenta a continuación.

DEFINICIÓN 6.5.1. Si $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}^n\}$ decimos que $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es un núcleo estándar si existen $\gamma > 0$ y $C > 0$ tales que

$$(6.5.2) \quad |K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n},$$

$$(6.5.3) \quad |K(x, y) - K(x, z)| \leq C \frac{|y - z|^\gamma}{|x - y|^{n+\gamma}} \text{ si } |x - y| > 2|y - z|,$$

$$(6.5.4) \quad |K(x, y) - K(w, y)| \leq C \frac{|x - w|^\gamma}{|x - y|^{n+\gamma}} \text{ si } |x - y| > 2|x - w|.$$

DEFINICIÓN 6.5.5. Sea $K(x, y)$ un núcleo estándar, y sea T un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$, que tiene la siguiente representación integral para toda f con soporte compacto

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)dy, \quad x \notin \text{sopf.}$$

El operador T así definido se denomina operador de Calderón-Zygmund.

TEOREMA 6.5.6. Si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces T es de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo fuerte (p, p) , para $1 < p < \infty$. Esto es

$$|\{x \in \mathbb{R}^n / |Tf(x)| > \lambda\}| \leq C/\lambda \|f\|_1,$$

$$\|Tf\|_p \leq C \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Este resultado se puede ver por ejemplo en el libro de Duandikoetxea ([25], pág. 99).

Una de las herramientas más importantes en la teoría de integrales singulares es la descomposición de Calderón-Zygmund.

TEOREMA 6.5.7 (Descomposición de Calderón-Zygmund). Dada f no negativa e integrable y λ positivo, entonces existe $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$, la familia de cubos diádicos, tal que

- CZ1) Si $I \neq J$ y ambos están en \mathcal{F} entonces $I \cap J = \emptyset$,
- CZ2) $\frac{1}{|I|} \int_I f > \lambda$ para todo $I \in \mathcal{F}$,
- CZ3) $\frac{1}{|I|} \int_I f \leq \lambda$ para todo I en \mathcal{D} tal que existe $J \in \mathcal{F}$ con $I \subsetneq J$,
- CZ4) $\frac{1}{|I|} \int_I f \leq \lambda$ para todo $I \in \mathcal{D}$ tal que $I \cap (\bigcup_{J \in \mathcal{F}} J) = \emptyset$,
- CZ5) $\{M_\lambda f(x) > \lambda\} = \bigcup_{J \in \mathcal{F}} J := O_\lambda$,

CZ6) la función f se puede escribir como $f = g + b$, donde $b = \sum_{I \in \mathcal{F}} b_I$ y cada b_I se define como $b_I = \left(f - \frac{1}{|I|} \int_I f \right) \chi_I$,

CZ7) $|g(x)| \leq c\lambda$,

CZ8) $\int_{\mathbb{R}} b_I = 0$,

CZ9) $\|b\|_1 \leq 2\|f\|_1$.

Una prueba de este teorema puede hallarse por ejemplo en [25] (pag. 34) y una versión mas general para espacios de tipo homogéneo está desarrollada en [2].

Presentamos a continuación otra herramienta central del análisis armónico: el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, el cual es muy utilizado en la teoría de integrales singulares, por ejemplo en la prueba del Teorema 6.5.6.

Si (X, μ) y (Y, ν) son dos espacios de medida y T es un operador de $L^p(X, d\mu)$ en el espacio de las funciones medibles de Y en \mathbb{C} , diremos que T es del tipo débil (p, q) , $q < \infty$, si existe $C > 0$ tal que

$$\nu(\{y \in Y / |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C \|f\|_p}{\lambda} \right)^q.$$

TEOREMA 6.5.8. [Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz]

Sean (X, μ) e (Y, ν) dos espacios de medida, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, y sea T un operador sublineal de $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ a las funciones medibles definidas sobre Y , tal que es débil (p_0, p_0) y (p_1, p_1) . Entonces T es fuerte (p, p) para $p_0 < p < p_1$.

Más específicamente, si A_0 y A_1 son las constantes de las desigualdades débiles (p_0, p_0) y (p_1, p_1) de T respectivamente, y dado $0 < \theta < 1$ sea $1/p := \theta/p_1 + (1 - \theta)/p_0$, entonces

$$\|Tf\|_{L^p(Y)} \leq 2p^{1/p} [1/(p - p_0) + 1/(p_1 - p)] A_0^{1-\theta} A_1^\theta \|f\|_{L^p(X)}.$$

Una prueba de este teorema se puede hallar por ejemplo en [25] (Teorema 2.4, pág. 29).

La definición de núcleo de Calderón-Zygmund provee una suerte de estimación superior de la “monstruosidad” posible para una singularidad. Pero nada obliga a la “maldad”. Así el núcleo $K(x, y) \approx 0$ es un núcleo de Calderón-Zygmund. Entonces ¿la autenticidad de un núcleo de Calderón-Zygmund en cuanto a su “maldad” cómo puede medirse?

Una respuesta estándar: si su acotación implica la de la maximal de Hardy-Littlewood. Para esto bastaría saber que la acotación del operador en $L^p(wd\mu)$ implica que $w \in A_p$. ¿Son suficientemente “malas” las integrales singulares que hemos construido?. De otra manera ¿basta, como en \mathbb{R}^n , un número chico de integrales singulares acotadas en $L^p(wdx)$ para que $w \in A_p$?

A continuación enunciamos un resultado muy utilizado en el contexto de integrales singulares, para ello usaremos la notación $\Delta := \{(x, x) \in X\}$ para referirnos a la diagonal en el espacio producto $X \times X$.

TEOREMA 6.5.9. Sea T acotado sobre $L^2(X)$ y sea K una función sobre $X \times X \setminus \Delta$ tal que, si $f \in L^2(X)$ tiene soporte compacto, entonces

$$Tf(x) = \int_X K(x, y)f(y) d\mu(y), \quad \forall x \notin \text{sopf}$$

Además supongamos que K satisface

$$(6.5.10) \quad \int_{d(x,y) > 2d(y,z)} |K(x,y) - K(x,z)| d\mu(x) \leq C$$

$$(6.5.11) \quad \int_{d(x,y) > 2d(x,w)} |K(x,y) - K(w,y)| d\mu(y) \leq C$$

Entonces T es débil $(1, 1)$ y fuerte (p, p) , $1 < p < \infty$.

La demostración de este teorema para el caso euclídeo se puede hallar en [25] (Teorema 5.10), y en espacios métricos con medida ver [1]. Las condiciones (6.5.10) y (6.5.11) se denominan condiciones de Hörmander.

DEFINICIÓN 6.5.12. Sea (X, d, μ) un espacio α -Ahlfors, la función $K : X \times X \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ es un Núcleo Estándar si existe $\gamma > 0$ tal que

$$(6.5.13) \quad |K(x, y)| \leq \frac{C_1}{d(x, y)^\alpha}$$

$$(6.5.14) \quad |K(x, y) - K(x, z)| \leq C_2 \frac{d(y, z)^\gamma}{d(x, y)^{\alpha+\gamma}} \quad \text{si } d(x, y) > 2d(y, z)$$

$$(6.5.15) \quad |K(x, y) - K(w, y)| \leq C_3 \frac{d(x, w)^\gamma}{d(x, y)^{\alpha+\gamma}} \quad \text{si } d(x, y) > 2d(x, w)$$

PROPOSICIÓN 6.5.16. Si X es normal α entonces un núcleo estándar K cumple las condiciones de Hörmander (6.5.10) y (6.5.11).

A continuación damos una breve demostración de este resultado.

DEMOSTRACIÓN. Para ver (6.5.10) usamos (6.5.14) para escribir

$$\begin{aligned} \int_{d(x,y) > 2d(y,z)} |K(x,y) - K(x,z)| d\mu(x) &\leq C_2 \int_{d(x,y) > 2d(y,z)} \frac{d(y,z)^\gamma}{d(x,y)^{\alpha+\gamma}} d\mu(x) \\ &\leq C_2 d(y,z)^\gamma \int_{d(x,y) > 2d(y,z)} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+\gamma}} d\mu(x) \\ &\leq C_2 d(y,z)^\gamma \sum_{k \geq 1} \int_{2^{k+1}d(y,z) > d(x,y) > 2^k d(y,z)} \frac{1}{d(x,y)^{\alpha+\gamma}} d\mu(x) \\ &\leq C_2 d(y,z)^\gamma \sum_{k \geq 1} \frac{\mu\{x \in X / 2^{k+1}d(y,z) > d(x,y) > 2^k d(y,z)\}}{2^{k(\alpha+\gamma)} d(y,z)^{\alpha+\gamma}} \\ &\leq C_2 \sum_{k \geq 1} \frac{c 2^{k\alpha} (2^\alpha - 1) d(y,z)^\alpha}{2^{k(\alpha+\gamma)} d(y,z)^\alpha} \leq C_2 c \end{aligned}$$

Para ver (6.5.11) se procede análogamente. □

DEFINICIÓN 6.5.17. Un operador T se dice Operador de Calderon-Zygmund generalizado si

1. T está acotado en $L^2(X)$.

2. Existe un núcleo estándar K tal que para $f \in L^2(X)$ con soporte compacto se tiene que

$$Tf(x) = \int_X K(x, y)f(y) d\mu(y) \quad x \notin \text{sup}(f).$$

6.6. Espacios de Banach de funciones y teorema de extrapolación

Sea (X, μ) un espacio de medida σ -finita. Escribiremos \mathcal{M}_μ para denotar el conjunto de todas las funciones μ -medibles $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ y \mathcal{M}_μ^+ al subconjunto de \mathcal{M}_μ de las funciones cuyos valores están en $[0, \infty]$, respectivamente. Una norma es una función $\rho : \mathcal{M}_\mu^+ \rightarrow [0, \infty]$ tal que para todo f, g y f_n en \mathcal{M}_μ^+ , $n \in \mathbb{Z}$, los siguientes enunciados se cumplen

- $\rho(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$ μ -a.e.,
- para todo $a > 0$ obtenemos que $\rho(af) = a\rho(f)$,
- $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$,
- si $0 \leq g \leq f$ μ -a.e., entonces $\rho(g) \leq \rho(f)$,
- si $0 \leq f_n \nearrow f$ μ -a.e., entonces $\rho(f_n) \nearrow \rho(f)$,
- si $E \subseteq X$ con $\mu(E) < \infty$, entonces $\rho(\chi_E) < \infty$,
- para cada $E \subseteq X$ con $\mu(E) < \infty$, existe una constante positiva C tal que $\int_E f d\mu \leq C\rho(f)$.

Un E.B.F $\mathbb{B} = \{f \in \mathcal{M}_\mu : \|f\|_{\mathbb{B}} < \infty\}$ es un espacio de Banach normado donde la norma esta dada por $\|f\|_{\mathbb{B}} = \rho(|f|)$.

Si \mathbb{B} denota un espacio de Banach de funciones definidas sobre X con norma dada por $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$, definimos el espacio escala \mathbb{B}^r , $0 < r < \infty$ como el conjunto de funciones f μ -medibles tales que $|f|^r \in \mathbb{B}$, con norma dada por $\|f\|_{\mathbb{B}^r} = \| |f|^r \|_{\mathbb{B}}^{\frac{1}{r}}$. Si $r \geq 1$, entonces \mathbb{B}^r es un E.B.F. Sin embargo, si $r < 1$, entonces \mathbb{B}^r no es necesariamente un E.B.F., un simple ejemplo es el caso de $\mathbb{B} = L^1(X)$ ([13]).

El espacio asociado \mathbb{B}' es el conjunto de las funciones μ -medibles $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ tales que

$$\sup \left\{ \int_X |f(x)g(x)| d\mu(x), g \in \mathbb{B}, \|g\|_{\mathbb{B}} \leq 1 \right\}$$

es finito. Este espacio \mathbb{B}' es un E.B.F. y la siguiente desigualdad de Hölder generalizada se cumple

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \|f\|_{\mathbb{B}} \|g\|_{\mathbb{B}'},$$

para toda $f \in \mathbb{B}$ y $g \in \mathbb{B}'$.

Una importante herramienta utilizada para la prueba del Teorema 9.1.1 es un teorema de extrapolación en E.B.F. que generaliza los resultados conocidos, cuya autoría se debe a Rubio de Francia. Para enunciar el teorema de extrapolación damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 6.6.1. (*Familia \mathbb{B} -admisibles*) Sea \mathfrak{F} una familia de pares ordenados (f, g) de funciones no negativas y medibles sobre X . Decimos que \mathfrak{F} es \mathbb{B} -admisibles si dada $(f, g) \in \mathfrak{F}$ el siguiente enunciado se cumple

- $(\int_X f(x)^{p_0} w(x) d\mu(x))^{\frac{1}{p_0}} < \infty$ para algún $p_0 > 1$ y para cualquier $w \in A_{p_0}^{dy}$.

$$\blacksquare \|f\|_{\mathbb{B}} < \infty.$$

Ahora estamos en posición de enunciar el teorema de extrapolación.

TEOREMA 6.6.2. (Extrapolación) *Sea \mathcal{D} una familia diádica sobre X tal que \mathcal{D} pertenece a $\mathfrak{D}(\delta)$. Sea \mathbb{B} un E.B.F. sobre X . Sea $\mathfrak{F} = \{(f, g)\}$ una familia \mathbb{B} -admisibile. Suponemos que existe $p_1 > 1$ tal que \mathbb{B}^{1/p_1} es un E.B.F. y*

$$(6.6.3) \quad \|M^{dy}v\|_{\left(\mathbb{B}^{\frac{1}{p_1}}\right)'} \leq C \|v\|_{\left(\mathbb{B}^{\frac{1}{p_1}}\right)'}$$

para cualquier función $v \in \left(\mathbb{B}^{\frac{1}{p_1}}\right)'$.

Si existe $p_0 \in (1, \infty)$ tal que para todo $w \in A_{p_0}^{dy}$

$$(6.6.4) \quad \|f\|_{L^{p_0}(X, w d\mu)} \leq C_0 \|g\|_{L^{p_0}(X, w d\mu)} \quad \forall (f, g) \in \mathfrak{F}$$

con $C_0 = C_0(w, p_0)$ independiente de (f, g) , entonces la desigualdad

$$(6.6.5) \quad \|f\|_{\mathbb{B}^q} \leq C_1 \|g\|_{\mathbb{B}^q} \quad \forall (f, g) \in \mathfrak{F}$$

se cumple con $C_1 = C_1(\mathbb{B}, q)$ independiente de (f, g) , y $1/p_1 < q$.

En el contexto euclídeo, este resultado fue probado en [20] y [19], ver también [30]. El mismo resultado puede obtenerse como un corolario del siguiente resultado de extrapolación (ver Teorema 5.1 en [46]).

TEOREMA 6.6.6. *Sea \mathcal{D} una familia diádica sobre X tal que \mathcal{D} pertenece a la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ y sea \mathbb{B} un E.B.F. sobre X . Sea \mathcal{F} una familia \mathbb{B} -admisibile. Suponemos que para algún p_0 , $0 < p_0 < \infty$, y cualquier $w \in A_1^{dy}$,*

$$\int_X f(x)^{p_0} w(x) d\mu(x) \leq C \int_X g(x)^{p_0} w(x) d\mu(x).$$

Si existe q_0 , $p_0 \leq q_0 < \infty$, tal que \mathbb{B}^{1/q_0} es un E.B.F. y M_{dy} está acotada sobre $(\mathbb{B}^{1/q_0})'$, entonces

$$\|f\|_{\mathbb{B}} \leq C \|g\|_{\mathbb{B}}.$$

En \mathbb{R}^n el teorema anterior fue probado en [19], (Teorema 3.7) para una familia más general que la clases de cubos diádicos, y la misma prueba puede ser adaptada al contexto de espacios de tipo homogéneo.

6.7. Sistema de Haar

La estructura algebraica en el contexto de espacios euclídeos es crucial para la construcción de sistemas de wavelets. De hecho, ellas pueden obtenerse por dilatación y traslación de una función escala. En el contexto mas general de espacios de tipo homogéneo esta estructura no está dada y debemos reemplazarla por argumentos geométricos.

Para una familia diádica \mathcal{D} en la clase $\mathfrak{D}(\delta)$ fue probado en [3] y [6] que siempre podemos construir una base de tipo Haar \mathcal{H} , de funciones reales h , medibles Borel y satisfaciendo las siguientes propiedades .

(h,1) Para cada $h \in \mathcal{H}$ existe una única $j \in \mathbb{Z}$ y un cubo $Q = Q(h) \in \mathcal{D}^j$ tal que $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subseteq Q$, y esta propiedad no se cumple para ningún cubo en \mathcal{D}^{j+1} .

(h,2) Para cualquier $Q \in \mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ existe exactamente $M_Q = \#\mathcal{O}(Q) - 1 \geq 1$ funciones $h \in \mathcal{H}$ tales que (h,1) se cumple. Escribiremos \mathcal{H}_Q para denotar el conjunto de todas esas funciones h .

(h,3) Para cada $h \in \mathcal{H}$ obtenemos que $\int_X h d\mu = 0$.

(h,4) Para cada $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ sea V_Q el espacio vectorial de todas las funciones sobre Q que son constantes sobre $Q' \in \mathcal{O}(Q)$. Entonces el sistema $\{\chi_{Q'} \mu(Q)^{-1/2}\} \cup \mathcal{H}_Q$ es una base ortonormal para V_Q . Además, si $h_Q \in \mathcal{H}_Q$ entonces $h_Q = \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} C_{Q'}^Q \chi_{Q'}$ y las constantes $C_{Q'}^Q$ pueden elegirse de modo que $|C_{Q'}^Q| \approx \mu(Q)^{-1/2}$ para todo $Q' \in \mathcal{O}(Q)$.

Por $\tilde{\mathcal{H}}$ denotaremos el sistema de Haar \mathcal{H} cuando $\mu(X) = \infty$ y $\mathcal{H} \cup \{\mu(X)^{-1/2}\}$ cuando la $\mu(X) < \infty$.

Como una consecuencia de las propiedades anteriores, en [6] los autores obtienen el siguiente resultado. En este contexto $L^{p_0}(X, w d\mu) = \{f : (\int_X |f|^{p_0} w d\mu)^{1/p_0} < \infty\}$.

TEOREMA 6.7.1. *Sea \mathcal{D} una familia diádica sobre X tal que \mathcal{D} pertenece a la clase $\mathfrak{D}(\delta)$. Entonces el sistema de tipo Haar $\tilde{\mathcal{H}}$ asociado a \mathcal{D} es una base ortonormal en $L^2(X, \mu)$.*

También se prueba que un sistema de tipo Haar asociado a los cubos diádicos de Christ son una base incondicional para los espacios $L^{p_0}(X, w d\mu)$ con $w \in A_{p_0}^{dy}$ y $1 < p_0 < \infty$, más específicamente demuestran el siguiente resultado.

TEOREMA 6.7.2. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea $\tilde{\mathcal{H}}$ un sistema de tipo Haar asociado a la familia diádica \mathcal{D} ; sea S la función cuadrado. Si $1 < p_0 < \infty$ y $w \in A_{p_0}^{dy}$ entonces existen dos constantes positivas C_1 y C_2 dependiendo de la constante $A_{p_0}^{dy}$ de w tal que para toda $f \in L^{p_0}(X, w d\mu)$ obtenemos que*

$$C_1 \|f\|_{L^{p_0}(X, w d\mu)} \leq \|S(f)\|_{L^{p_0}(X, d w \mu)} \leq C_2 \|f\|_{L^{p_0}(X, w d\mu)}.$$

Además, $\tilde{\mathcal{H}}$ es una base incondicional para $L^{p_0}(X, w d\mu)$.

Finalmente queremos mostrar que, como enunciamos en la sección 1.6, pueden contruirse las wavelets de Haar de manera que $|h_Q^m| \approx 1/\sqrt{Q}$ para todo Q . Dado $Q \in \mathcal{D}(X)$ y $1 \leq m \leq \#\mathcal{O}(Q) - 1$, sea

$$h_Q^m(x) = \sum_{l=1}^{\#\mathcal{O}(Q)} c_l^{m,Q} \mu(Q_l)^{-1/2} \chi_{Q_l},$$

buscamos condiciones sobre las constantes $c_l^{m,Q}$ de modo que todas ellas sean distintas de cero, estén acotadas inferior y superiormente por constantes independientes de Q y m y que la familia $\{h_Q^m\}$ sea una base ortonormal en $L^2(X, d, \mu)$ y que además cumplan que sus promedios se anulan sobre su soporte. Esta última condición

implica que

$$\begin{aligned}
 \int_Q h_Q^m d\mu &= \sum_{l=1}^{\#\mathcal{O}(Q)} c_l^{m,Q} \mu(Q'_l)^{1/2} \int_Q \chi_{Q'_l} d\mu \\
 (6.7.3) \qquad &= \sum_{l=1}^{\#\mathcal{O}(Q)} c_l^{m,Q} \mu(Q'_l)^{-1/2} = 0.
 \end{aligned}$$

Si analizamos (6.7.3) desde un punto de vista vectorial observamos que es equivalente a que el vector $\overrightarrow{c^{m,Q}} = (c_1^{m,Q}, \dots, c_{\#\mathcal{O}(Q)}^{m,Q})$ y el vector $\overrightarrow{u_Q} = (\mu(Q'_1)^{-1/2}, \dots, \mu(Q'_{\#\mathcal{O}(Q)})^{-1/2})$ sean ortogonales en $\mathbb{R}^{\#\mathcal{O}(Q)}$. Esto implica que se pueden elegir a lo sumo $\#\mathcal{O}(Q) - 1$ vectores $\overrightarrow{c^{m,Q}}$, $m = 1, \dots, \#\mathcal{O}(Q) - 1$, ortogonales entre sí, y a su vez, ortogonales al vector $\overrightarrow{u_Q}$. Elegimos entonces vectores $\overrightarrow{c^{m,Q}}$ ortogonales entre sí en el ecomplemento ortogonal de $\overrightarrow{u_Q}$. El hecho que estos vectores sean ortogonales entre sí implica que si $1 \leq m, s \leq \#\mathcal{O}(Q) - 1$, $m \neq s$, entonces

$$\begin{aligned}
 \int_Q h_Q^m h_Q^s d\mu &= \sum_{l=1}^{\#\mathcal{O}(Q)} c_l^{m,Q} c_l^{s,Q} \mu(Q'_l)^{-1} \int_Q \chi_{Q'_l} d\mu \\
 &= \left\langle \overrightarrow{c^{m,Q}}, \overrightarrow{c^{s,Q}} \right\rangle_{\mathbb{R}^{\#\mathcal{O}(Q)}} = 0.
 \end{aligned}$$

En consecuencia, la elección de tales vectores junto con las propiedades de los cubos diádicos nos permiten asegurar que el sistema $\{h_Q^m\}$ es ortogonal. Para lograr que cada h_Q^m tenga norma en $L^2(X)$ igual a uno es suficiente elegir los vectores $\overrightarrow{c^{m,Q}}$ con módulo igual a uno, en efecto

$$\begin{aligned}
 \|h_Q^m\|_{L^2(X)} &= \left(\int_Q |h_Q^m|^2 d\mu \right)^{1/2} = \left(\sum_{l=1}^{\#\mathcal{O}(Q)} |c_l^{m,Q}|^2 \mu(Q'_l)^{-1} \mu(Q'_l) \right)^{1/2} \\
 &= \left\| \overrightarrow{c^{m,Q}} \right\|_{\mathbb{R}^{\#\mathcal{O}(Q)}} = 1.
 \end{aligned}$$

Finalmente para obtener la existencia de constantes c_1 y c_2 tales que

$$(6.7.4) \qquad c_1 \mu(Q)^{-1/2} < |h_Q^m(x)| < c_2 \mu(Q)^{-1/2},$$

para casi todo $x \in Q$, debemos elegir vectores unitarios $\overrightarrow{c^{m,Q}}$ de modo que el módulo de cada componente $c_l^{m,Q}$, $l = 1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)$ esté acotada superior e inferiormente por c_1 y c_2 respectivamente y que estas constantes sean independientes de m , l y Q . Es decir

$$(6.7.5) \qquad c_1 < |c_l^{m,Q}| < c_2,$$

para todo $Q \in \mathcal{D}$, todo $l = 1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)$, y todo $m = 1, \dots, \#\mathcal{O}(Q) - 1$.

Una posible manera de hacer la elección es la de usar la información del vector unitario $\frac{\overrightarrow{u_Q}}{\|\overrightarrow{u_Q}\|_{\mathbb{R}^{\#\mathcal{O}(Q)}}}$. En efecto, como se sabe que existen constanes a_1 y a_2 mayores que cero tal que

$$a_1 \mu(Q) < \mu(Q'_l) < a_2 \mu(Q),$$

para todo $Q \in \mathcal{D}$ y todo $l = 1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)$, entonces

$$a_1^{1/2} < \left(\frac{\mu(Q'_l)}{\mu(Q)} \right)^{1/2} < a_2^{1/2}.$$

Como $\|\vec{u}_Q\|_{\mathbb{R}^{\#\mathcal{O}(Q)}} = \mu(Q)^{1/2}$ entonces la componente l -ésima del vector $\frac{\vec{u}_Q}{\|\vec{u}_Q\|_{\mathbb{R}^{\#\mathcal{O}(Q)}}}$ está acotada inferiormente por $a_1^{1/2}$ y superiormente por $a_2^{1/2}$, con a_1 y a_2 independientes de $Q \in \mathcal{D}$ y de los índices m y l . Si consideramos la base canónica $\{e_1, \dots, e_{\#\mathcal{O}(Q)}\}$ de $\mathbb{R}^{\#\mathcal{O}(Q)}$ y una rotación R_Q "adecuada" de modo que $R_Q(e_{\#\mathcal{O}(Q)}) = \frac{\vec{u}_Q}{\|\vec{u}_Q\|_{\mathbb{R}^{\#\mathcal{O}(Q)}}$ y las componentes de los vectores rotados de $R_Q(e_m)$, $m = 1, \dots, \#\mathcal{O}(Q) - 1$ conserven la propiedad de que sus módulos estén acotados inferior y superiormente por $a_1^{1/2}$ y $a_2^{1/2}$ respectivamente, eligiendo $\vec{c}^{m, Q} = R_Q(e_m)$, para $m = 1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)$ entonces obtenemos (6.7.5) con $c_1 = a_1^{1/2}$ y $c_2 = a_2^{1/2}$. Bajo estas consideraciones el sistema $\{h_Q^m\}$ es una base ortonormal de $L^2(X)$ cumpliendo (6.7.4).

Perturbaciones de bases de Haar por aproximación de soportes en espacios Ahlfors

En este capítulo consideramos el problema análogo al del Capítulo 2 en espacios de tipo homogéneo α -Ahlfors. Conviene, después de tanto uso del Lema de Cotlar, compararlo aunque sea brevemente con el Lema de Schur. Por decirlo de alguna manera comparativa, el Lema de Schur es una generalización de la desigualdad de Young para la convolución con núcleos de L^1 , en cambio el Lema de Cotlar describe mejor la convolución con valores principales de núcleos no integrables aunque con cancelación.

Sea $\mathcal{H} = \{h_Q^m, Q \in \mathcal{D}, m = 1, \dots, \mathcal{O}(Q) - 1\}$ una base de Haar en el espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) . Sea $C_{Q'}^{Q,m}$ el valor constante que h_Q^m toma sobre $Q' \in \mathcal{O}(Q)$. Sean $\epsilon_{Q'}^{Q,m}(x)$ funciones soportadas en Q' y acotadas. Consideraremos las perturbaciones de h_Q^m dadas por

$$\hat{h}_Q^m(x) = \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \left(C_{Q'}^{Q,m} + \epsilon_{Q'}^{Q,m} \right) \chi_{Q'}(x).$$

Entonces

$$\hat{h}_Q^m(x) - h_Q^m(x) = \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \epsilon_{Q'}^{Q,m} \chi_{Q'}(x).$$

Si queremos encontrar condiciones en las perturbaciones $\epsilon_{Q'}^{Q,m}(x)$ bajo las cuales se pueda aplicar el Lema de Schur usando las estrategias descritas en los capítulos precedentes, tendremos que

$$\begin{aligned} \sum_Q \sum_m \left| \langle f, \hat{h}_Q^m - h_Q^m \rangle \right|^2 &= \sum_Q \sum_m \left[\sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \int_{Q'} \epsilon_{Q'}^{Q,m} f d\mu \right]^2 \\ &= \left\| \sum_Q \sum_m \left[\sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \int_{Q'} \epsilon_{Q'}^{Q,m} f d\mu \right] h_Q^m \right\|_{L^2(X)}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto la acotación del primer miembro es lo mismo que acotar el operador cuyo núcleo es

$$\begin{aligned}
K(x, y) &= \sum_{Q, m} \left[\sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \epsilon_{Q'}^{Q, m}(y) \chi_{Q'}(y) \right] h_Q^m(x) \\
&= \sum_{Q, m} \left[\sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \epsilon_{Q'}^{Q, m}(y) \chi_{Q'}(y) \right] \left[\sum_{Q'' \in \mathcal{O}(Q)} C_{Q''}^{Q, m} \chi_{Q''}(x) \right] \\
&= \sum_Q \sum_m \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \sum_{Q'' \in \mathcal{O}(Q)} \epsilon_{Q'}^{Q, m}(y) C_{Q''}^{Q, m} \chi_{Q'}(y) \chi_{Q''}(x).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|K(x, y)| &\leq \sum_Q \sum_m \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \sum_{Q'' \in \mathcal{O}(Q)} \left| \epsilon_{Q'}^{Q, m}(y) \right| \left| C_{Q''}^{Q, m} \right| \chi_{Q'}(y) \chi_{Q''}(x) \\
&\leq \sum_Q \sum_m \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \sum_{Q'' \in \mathcal{O}(Q)} \left\| \epsilon_{Q'}^{Q, m} \right\|_{\infty} \left| C_{Q''}^{Q, m} \right| \chi_{Q'}(y) \chi_{Q''}(x)
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\int |K(x, y)| d\mu(y) &\leq c \sum_Q \sum_m \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} \sum_{Q'' \in \mathcal{O}(Q)} \left\| \epsilon_{Q'}^{Q, m} \right\|_{\infty} \mu(Q)^{-1/2} \mu(Q') \chi_{Q''}(x) \\
&\leq c \sum_Q \sup_{m, Q'} \left\| \epsilon_{Q'}^{Q, m} \right\|_{\infty} \mu(Q)^{1/2} \chi_Q(x).
\end{aligned}$$

Como lo mismo vale para $\int |K(x, y)| d\mu(x)$ si las perturbaciones se eligen de modo que el último miembro en las desigualdades precedentes sea pequeño, podemos aplicar el Teorema de Favier y Zalik y obtener que las perturbaciones constituyen un sistema de Bessel con cota menor que uno y por consiguiente el sistema \hat{h}_Q^m es una base de Riesz. Por otra parte para las aproximaciones por soportes de las wavelets de Haar el Lema de Cotlar es más sensible que el de Schur. Este capítulo tiene el propósito de abordar este problema en espacios de tipo homogéneo. Obtenemos condiciones geométricas suficientes para la estabilidad de perturbaciones de soportes. Para ello introducimos variantes de la dimensión “box” asociada a los cubos diádicos de M. Christs.

7.1. Perturbaciones de soportes de sistemas de Haar

De las técnicas desarrolladas en los capítulos precedentes surge naturalmente que un punto clave para la estabilidad por perturbación de soporte, es que éstas tengan lugar en conjuntos pequeños en relación con el soporte de la wavelet que perturban. A la pequeñez de esos conjuntos se suma que la dimensión de las fronteras de los conjuntos diádicos debe ser chica. En particular es importante que la dimensión de las fronteras de los cubos sea estrictamente menor que la de los cubos mismos. Esto no es un hecho trivial dado el carácter general de la construcción de Christ.

Aprovecharemos los cubos diádicos de la familia \mathcal{D} , de parámetro δ , del espacio para introducir (replicar) la idea de “upper box counting dimension” (u.b.c.d.) en espacios de tipo homogéneo usando precisamente a los cubos diádicos como cajas.

Supondremos en lo que sigue que (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo y que \mathcal{D} es una familia diádica con parámetro $\delta < 1$.

Sea F un subconjunto de X , para $j \in \mathbb{Z}$ fijo llamamos $N_j(F)$ al cardinal del conjunto de los $Q \in \mathcal{D}^j$ tales que \overline{Q} corta a F . Es decir

$$N_j(F) = \#\left(\{Q \in \mathcal{D}^j : \overline{Q} \cap F \neq \emptyset\}\right).$$

DEFINICIÓN 7.1.1. *Definimos la dimensión “box diádica superior” de F con respecto a \mathcal{D} , como*

$$\overline{\dim}_{B, \mathcal{D}}(F) := \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log_{\Delta} N_j(F)}{j},$$

donde $\Delta = 1/\delta$.

Este concepto brinda indirectamente un criterio de comparación que será fundamental en el resultado central del capítulo.

LEMA 7.1.2. *Sea (X, d, μ) un espacio α -Ahlfors y sea F un subconjunto medible de X tal que $\overline{\dim}_{B, \mathcal{D}}(F) = \beta < \alpha$. Entonces $\mu(F) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\overline{\dim}_{B, \mathcal{D}}(F) = \beta$ entonces para todo $\eta > 0$ existe $J \in \mathbb{Z}$ tal que si $j \geq J$ vale que

$$\frac{\log_{\Delta} N_j(F)}{j} < \beta + \eta.$$

Entonces $N_j(F) \leq \Delta^{(\beta+\eta)j}$ para todo $j \geq J$. Por otra parte los cubos de \mathcal{D}^j que tocan a F forman un cubrimiento de F , es decir

$$F \subset \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ Q \cap F \neq \emptyset}} Q,$$

para todo $j \geq J$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ Q \cap F \neq \emptyset}} \mu(Q) \leq c \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ Q \cap F \neq \emptyset}} \delta^{j\alpha} \\ &\leq c N_j(F) \delta^{j\alpha} < c \Delta^{(\beta+\eta)j} \delta^{j\alpha} = c \delta^{j(\alpha-\beta-\eta)}. \end{aligned}$$

Como $\beta < \alpha$ podemos elegir $\eta > 0$ tal que $\beta + \eta < \alpha$ y tenemos que el último miembro en las estimaciones precedentes tiende a cero cuando $j \rightarrow \infty$ y por consiguiente $\mu(F) = 0$. \square

Diremos que una familia $\{F(t), t \in T\}$ de subconjuntos medibles de X tiene “dimensión box diádica superior (d.b.d.s) uniforme menor que β ” si

$$\limsup_{J \rightarrow \infty} \sup_{j \geq J} \frac{\log_{\Delta}(N_j(F(t)))}{j} < \beta,$$

uniformemente en $t \in T$. Esto es, existe un J independiente de $t \in T$ tal que

$$\sup_{j \geq J} \frac{\log_{\Delta} N_j(F(t))}{j} < \beta,$$

para todo $t \in T$.

Los siguientes lemas serán cruciales en la prueba del teorema principal

PROPOSICIÓN 7.1.3. *Si $\{F(t), t \in T\}$ es una familia de subconjuntos de X con d.b.d.s. uniforme menor que β entonces existe un $J \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$N_j(F(t)) = \#(\{Q \in \mathcal{D}^j : \overline{Q} \cap F(t) \neq \emptyset\}) \leq \Delta^{j\beta},$$

para todo $j \geq J$ y para todo $t \in T$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición existe J tal que para todo $j \geq J$ y para todo $t \in T$ vale que

$$\frac{\log_{\Delta} N_j(F(t))}{j} < \beta.$$

De aquí que $N_j(F) < \Delta^{j\beta}$ para todo $j \geq J$ y para todo $t \in T$. \square

LEMA 7.1.4. *Supongamos ahora que (X, d, μ) es α -Ahlfors para algún $\alpha > 0$. Sea $Q \in \mathcal{D}$ y sea $K_Q(\rho) := \{x \in Q : d(x, \partial Q) > \rho\}$. Supongamos que la familia $\{\partial K_Q(\rho) : \rho \geq 0\}$ tiene d.b.d.s. uniforme menor que β , con $\beta < \alpha$. Entonces la función $\mu(K_Q(\rho))$ es monótona creciente y continua y por consiguiente $\mu(Q \setminus K_Q(\rho))$ también es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\nu > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(K_Q(\rho + \nu)) - \mu(K_Q(\rho)) &= \mu(K_Q(\rho + \nu) \setminus K_Q(\rho)) \\ &= \mu(\{x \in Q : \rho \leq d(x, \partial Q) \leq \rho + \nu\}). \end{aligned}$$

Por la Proposición 7.1.3 existe $J \in \mathbb{Z}$ tal que para todo ρ positivo y para todo $i \geq J$ tenemos

$$N_i(\partial K_Q) = \#(\{I \in \mathcal{D}^i : I \cap \partial K_Q(\rho) \neq \emptyset\}) \leq \Delta^{i\beta}.$$

Entonces para $\delta^{i+1} < \nu < \delta^i$ con $i \geq J$ y alguna constante c tenemos que

$$K_Q(\rho + \nu) - K_Q(\rho) \subset \bigcup_{\{k: I_k^i \in \mathfrak{F}_i(\rho)\}} B(x_k^i, c\delta^i),$$

donde $\mathfrak{F}_i(\rho) := \{I \in \mathcal{D}^i : I \cap \partial K_Q(\rho) \neq \emptyset\}$.

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \mu(K_Q(\rho + \nu) - K_Q(\rho)) &\leq \sum_{\{k: I_k^i \in \mathfrak{F}_i(\rho)\}} \mu(B(x_k^i, c\delta^i)) \\ &\leq c\#(\mathfrak{F}_i(\rho)) \delta^{j\alpha} \\ &\leq \tilde{c}\Delta^{i\beta} \delta^{i\alpha} = \tilde{c}\delta^{i(\alpha-\beta)} = c\nu^{(\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

En realidad hemos probado que la función $\mu(K_Q(\rho))$ es Lipschitz $\alpha - \beta$. \square

La autosimilaridad en la estructura euclídea se pierde en los contextos generales en los que estamos trabajando. Sin embargo todo el tiempo estamos recurriendo a argumentos de casi autosimilaridad. La siguiente hipótesis sobre la dimensión de las fronteras de aproximantes internos de los cubos diádicos de \mathcal{D} tiene ese ingrediente.

DEFINICIÓN 7.1.5. *Hipótesis $H(\beta)$.*

Para (X, d, μ) y \mathcal{D} en las condiciones precedentes, diremos que (X, d, μ, \mathcal{D}) satisface la hipótesis $H(\beta)$ si para cada $Q \in \mathcal{D}$ y cada $\rho > 0$ los conjuntos $\partial K_Q(\rho)$ con $K_Q(\rho) = \{x \in Q : d(x, \partial Q) > \rho\}$ tienen d.b.d.s. menor que β uniforme relativa a la escala de Q . Precisamente, existe $J \in \mathbb{Z}$ independiente de ρ y de $Q \in \mathcal{D}^j$ tal que, si $I \in \mathcal{D}^i$

$$\sup_{j \geq J+i} \frac{\log_{\Delta} N_j(\partial K_I(\rho))}{j-i} < \beta.$$

Observamos que en los casos euclídeos la existencia de la medida “de superficie” $n-1$ dimensional sobre las fronteras de los $K_Q(\rho)$ convierten a estos conjuntos en espacios β -Ahlfors con $\beta < \alpha$, entonces, $H(\beta)$ se cumple.

El siguiente Lema es la clave en el conteo de los cubos de la clase \mathcal{C} , con la notación que hemos venido usando en la Parte A.

LEMA 7.1.6. *Sea (X, d, μ) α -Ahlfors y \mathcal{D} una familia diádica con parámetro δ . Supongamos que cumple al hipótesis $H(\beta)$, con $\beta < \alpha$. Entonces para cada cubo $I \in \mathcal{D}^i$ y cada $\rho > 0$, el cardinal de los cubos $Q \in \mathcal{D}^j$ tal que $j > i + J$ que cortan a la frontera de $K_I(\rho)$ está acotado superiormente por $\Delta^{(j-i)\beta} = \delta^{(i-j)\beta}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como

$$\sup_{j-i \geq J} \frac{\log_{\Delta} N_j(\partial K_I(\rho))}{j-i} < \beta,$$

entonces

$$\frac{\log_{\Delta} N_j(\partial K_I(\rho))}{j-i} < \beta$$

para todo $j \geq J + i$, de donde se sigue que

$$N_j(\partial K_I(\rho)) < \Delta^{(j-i)\beta} = \delta^{(i-j)\beta}.$$

□

La conservación del promedio nulo y el control de la medida de los soportes de las onditas perturbadas serán, como antes, esenciales.

LEMA 7.1.7. *Sea (X, d, μ) un espacio α -Ahlfors, \mathcal{D} una familia diádica con parámetro δ que satisface $H(\beta)$ para algún $\beta < \alpha$ y $\mathcal{H} = \{h_Q^m, Q \in \mathcal{D}, 1 \geq m \geq \#\mathcal{O}(Q) - 1\}$ un sistema de Haar en $L^2(X)$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ fijo y para cada $h_Q^m \in \mathcal{H}$ podemos elegir $\{\rho_{Q'}^{m,\epsilon}, Q' \in \mathcal{O}(Q)\}$ todos estrictamente positivos tales que si*

$$(7.1.8) \quad K_{Q'}^{m,\epsilon} := \{x \in Q' / d(x, \partial Q') > \rho_{Q'}^{m,\epsilon}\},$$

tenemos,

$$(A) \int_X h_Q^m(x) \chi_{\cup_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} K_{Q'}^{m,\epsilon}}(x) d\mu(x) = \int_X h_Q^m d\mu = 0.$$

$$(B) \mu(Q' \setminus K_{Q'}^{m,\epsilon}) \leq c\epsilon \mu(Q').$$

DEMOSTRACIÓN. Notar que la propiedad de anulación de la integral de h_Q^m puede verse como la perpendicularidad de los vectores en \mathbb{R}^p con $p = \#\mathcal{O}(Q)$. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q h_Q^m d\mu = \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} C_{Q'}^{Q,m} \int_{Q'} \chi_{Q'} d\mu \\ &= \sum_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} C_{Q'}^{Q,m} \mu(Q'). \end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{c^{Q,m}}$ denota el vector de las constantes y $\overrightarrow{u_Q}$ el de las medidas tenemos que $\overrightarrow{c^{Q,m}} \perp \overrightarrow{u_Q}$. Como además todas las componentes de $\overrightarrow{u_Q}$ son positivas y del mismo orden, podemos achicarlas a todas manteniendo la perpendicularidad. Por el Lema 7.1.4 esto puede hacerse eligiendo $\rho_{Q'}^{m,\epsilon}$ chico y tomando, en lugar de $\mu(Q')$ el número $\mu(K_{Q'}^{m,\epsilon})$. En particular eligiendo los $\rho_{Q'}^{m,\epsilon}$ podemos conseguir (A) y (B). \square

Estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado principal del capítulo.

TEOREMA 7.1.9. *Sea (X, d, μ) un espacio α -Ahlfors con $\alpha > 0$. Sea \mathcal{D} una familia diádica con parámetro δ . Supongamos que el sistema (X, d, μ, \mathcal{D}) satisface la propiedad $H(\beta)$ para algún $0 < \beta < \alpha$. Sea \mathcal{H} un sistema de Haar asociado a \mathcal{D} . Sea $\overline{\mathcal{H}}$ el conjunto de las funciones*

$$(7.1.10) \quad \overline{h_Q^{m,\epsilon}} = h_Q^m \chi_{\bigcup_{Q' \in \mathcal{O}(Q)} K_{Q'}^{m,\epsilon}} = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \chi_{K_{Q'}^{m,\epsilon}}.$$

Entonces para ϵ suficientemente chico se tiene que $\overline{\mathcal{H}}$ es una base de Riesz para $L^2(X, \mu)$ con cotas Riesz tan cercanas a uno como se quiera.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la del Teorema 2.1.1. Por el Teorema 1.5.1 es suficiente ver que la sucesión de diferencias $\{\overline{b_Q^\epsilon} = h_Q - \overline{h_Q^\epsilon}, Q \in \mathcal{D}\}$ es una sucesión de Bessel en $L^2(X)$ con cota Bessel tan pequeña como se desee.

Sea $f \in L^2(X)$, escribimos

$$(7.1.11) \quad Tf(x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, \overline{b_Q^{m,\epsilon}} \rangle h_Q^m(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j f(x).$$

Procedemos a aplicar el Lema de Cotlar 1.1.1 para acotar el operador T .

Debido a la ortogonalidad de \mathcal{H} se puede ver que $T_i^* T_j f(x) = 0$ si $i \neq j$. Por otro lado si $i = j$ entonces, como $\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon} = Q \setminus \bigcup_{Q' \subset Q} K_{Q'}^{m,\epsilon}$, por el Lema 7.1.7 resulta

$$\begin{aligned} \|T_j^* T_j f\|_2 &= \|T_j\|_2^2 = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, \bar{b}_Q^{m,\epsilon} \rangle^2 \\ &= \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \|f\|_{L^2(\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon})}^2 \|\bar{b}_Q^{m,\epsilon}\|_{L^2(\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon})}^2 \\ &\leq \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \|f\|_{L^2(\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon})}^2 \frac{\mu(\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon})}{\mu(Q)} \\ &\leq C\epsilon \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \|f\|_{L^2(\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon})}^2 \\ &\leq C\epsilon \|f\|_{L^2(X)}^2. \end{aligned}$$

Para el análisis de

$$(7.1.12) \quad \|T_i T_j^* f\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle \right)^2,$$

consideramos en primera instancia $i \geq j$. En este caso, dados m y n fijos, tomando $I \in \mathcal{D}^i$ podría no existir $Q \in \mathcal{D}^j$ tal que $\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon} \cap \text{sop } \bar{b}_I^{n,\epsilon} \neq \emptyset$; en cuyo caso $\langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle = 0$. Pero si existe $Q \in \mathcal{D}^j$ tal que $\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon} \cap \text{sop } \bar{b}_I^{n,\epsilon} \neq \emptyset$ entonces es único. Por lo tanto (7.1.12) nos queda

$$\begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_{L^2(X)}^2 &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{m=1}^{\#\mathcal{O}(Q(I))-1} \langle f, h_{Q(I)}^m \rangle \langle \bar{b}_{Q(I)}^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle \right)^2 \\ &\leq c \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \sum_{m=1}^{\#\mathcal{O}(Q(I))-1} \langle f, h_{Q(I)}^m \rangle^2 \langle \bar{b}_{Q(I)}^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle^2, \end{aligned}$$

por el Lema 7.1.7 obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \langle \bar{b}_{Q(I)}^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle \right|^2 &\leq \left(\int_{\text{sop } \bar{b}_I^{n,\epsilon}} |\bar{b}_I^{n,\epsilon}(x)| |\bar{b}_{Q(I)}^{m,\epsilon}(x)| d\mu(x) \right)^2 \\ &\leq \left[\frac{C\epsilon\mu(I)}{\mu(I)^{\frac{1}{2}}\mu(Q(I))^{\frac{1}{2}}} \right]^2 = C\epsilon^2 \frac{\delta^{i\alpha 2}}{\delta^{i\alpha}\delta^{j\alpha}} = C\epsilon^2 \delta^{(i-j)\alpha}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|T_i T_j^* f\|_2^2 \leq C\epsilon^2 \delta^{(i-j)\alpha} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \sum_{m=1}^{\#\mathcal{O}(Q(I))-1} \langle f, h_{Q(I)}^m \rangle^2 \leq C\epsilon^2 \delta^{(i-j)\alpha} \|f\|_2^2.$$

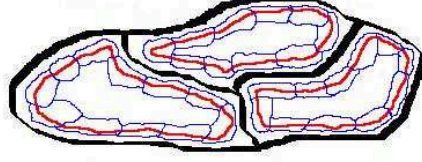
Por otro lado si $j > i$, para cada m y n fijos e $I \in \mathcal{D}^i$, dividimos la familia \mathcal{D}^j en los siguientes tres subconjuntos,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{m,n}(I) &= \{Q \in \mathcal{D}^j / \text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon} \cap \text{sop } \bar{b}_I^{n,\epsilon} = \emptyset \text{ o } \bar{b}_I^{n,\epsilon}(x) \chi_{\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon}} = 0\} \\ \mathcal{B}^{m,n}(I) &= \{Q \in \mathcal{D}^j / \bar{b}_I^{n,\epsilon}(x) \chi_{\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon}} = \text{cte} \neq 0\} \\ \mathcal{C}^{m,n}(I) &= \mathcal{D}^j \setminus \mathcal{A}^{m,n}(I) \cup \mathcal{B}^{m,n}(I).\end{aligned}$$

Si $Q \in \mathcal{A}^{m,n}(I)$ entonces $\langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle = 0$. Por otro lado si $Q \in \mathcal{B}^{m,n}(I)$, debido a que $\bar{b}_Q^{m,\epsilon}$ tiene promedio nulo y $\bar{b}_I^{n,\epsilon}$ es constante y distinto de cero entonces obtenemos otra vez $\langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle = 0$. Por lo tanto la suma interna de (7.1.12) se realiza sólo sobre los cubos de $\mathcal{C}^{m,n}(I)$, en consecuencia obtenemos

$$\begin{aligned}\|T_i T_j^* f\|_{L^2(X)}^2 &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle \right)^2 \\ &\leq \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle^2 \right) \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle^2 \right) \\ &\leq \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle^2 \right) \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} C\epsilon^2 \frac{\mu(Q)^2}{\mu(Q)\mu(I)} \right) \\ (7.1.13) \quad &\leq C\epsilon^2 \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle^2 \right) \delta^{(j-i)\alpha} \max_{m,n} \#\mathcal{C}^{m,n}(I)\end{aligned}$$

Usaremos el Lema 7.1.6 y por lo tanto la hipótesis dimensional $H(\delta)$ para hallar una cota para $\max_{m,n} \#\mathcal{C}^{m,n}(I)$. Por definición, dados $i < j$, $I \in \mathcal{D}^i$, m y n fijos; $\mathcal{C}^{m,n}(I)$ consiste en todos los cubos Q en \mathcal{D}^j que intersecan la unión de las fronteras de los conjuntos $K_{I'}^{n,\epsilon}$ con $I' \subset I$. Una gráfica que la situación es la siguiente.



Por lo tanto $\#\mathcal{C}_I^{m,n} = \sum_{I' \in \mathcal{O}(I)} N_j(\partial K_{I'}^{n,\epsilon})$. Como $I' \in \mathcal{D}^{i+1}$ si $j - (i + 1) > J$, por el Lema 7.1.6 $N_j(\partial K_{I'}^{n,\epsilon}) < \delta^{(i+1-j)\beta} = c\delta^{(i-j)\beta}$, por lo tanto $\#\mathcal{C}^{m,n}(I) \leq c\#\mathcal{O}(Q)\delta^{(i-j)\beta}$ entonces en (7.1.13) resulta

$$\begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_{L^2(X)}^2 &\leq C\epsilon^2 \delta^{(j-i)(\alpha-\beta)} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle^2 \right) \\ &\leq C\epsilon^2 \delta^{(j-i)(\alpha-\beta)} \|f\|_{L^2(X)}^2 \end{aligned}$$

para $j > J + i + 1$

Si $j - (i + 1) \leq J$, esto es $j - i < J - 1$, acotamos el cardinal de $\mathcal{C}^{m,n}(I)$ por la cantidad total de cubos $Q \in \mathcal{D}^j$ con $Q \subset I$. Como $\mu(I) = \sum_{Q \subset I} \mu(Q)$ entonces $\delta^{i\alpha} \approx \#\{Q \subset I\} \delta^{j\alpha}$, en consecuencia $\#\mathcal{C}^{m,n}(I) \leq \#\{Q \subset I\} \leq c\delta^{(i-j)\alpha}$. Entonces aplicando nuevamente el Lema 7.1.7 procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \|T_i T_j^* f\|_{L^2(X)}^2 &\leq \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle^2 \right) \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle \bar{b}_Q^{m,\epsilon}, \bar{b}_I^{n,\epsilon} \rangle^2 \right) \\ &\leq \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle^2 \right) \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \frac{\mu(\text{sop } \bar{b}_Q^{m,\epsilon})^2}{\mu(Q)\mu(I)} \right) \\ &\leq c\epsilon^2 \#\mathcal{C}^{m,n}(I) \delta^{(j-i)\alpha} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}^{m,n}(I) \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle^2 \right) \\ &\leq c\epsilon^2 \|f\|_{L^2(X)}^2 \end{aligned}$$

para todo $0 < j - i \leq J - 1$.

Por lo tanto la sucesión de operadores $\{T_j\}$ cumple la propiedad de casi ortogonalidad y una posible sucesión que controla las normas de las composiciones $T_i T_j^*$ y

$T_i^* T_j$ es

$$s(j) = \begin{cases} C\epsilon & \text{si } 0 < |j| < J - 1 \\ C\epsilon\delta^{|j|(\frac{\alpha-\beta}{2})} & \text{si } |j| \geq J - 1 \end{cases}$$

Finalmente, aplicando el Lema de Cotlar 1.1.1, el operador T dado en (7.1.11) está acotado en $L^2(X)$ y su norma es del orden de $c\epsilon^{\frac{1}{2}}$, que es el resultado deseado. \square

Con respecto al modo “box” de dimensionar las fronteras de los aproximantes $K_Q^{m,\epsilon}$, referimos a Falconer [27] donde se prueba que

$$\dim_{\text{H}}(F) \leq \underline{\dim}_{\text{MB}}(F) \leq \overline{\dim}_{\text{MB}}(F) = \dim_{\text{P}}(F) \leq \underline{\dim}_{\text{B}}(F),$$

donde \dim_{H} denota la dimensión de Hausdorff, \dim_{P} denota la dimensión Packing y $\underline{\dim}_{\text{MB}}$ es la dimensión box modificada. Nuestra hipótesis de finitud y acotación uniforme de las dimensiones de las fronteras es la más fuerte en esta escala. También más fuerte que la finitud y acotación de la dimensión de Hausdorff de $\partial K_Q^{m,\epsilon}$ es el supuesto que sobre cada $\partial K_Q^{m,\epsilon}$ haya una medida de Borel ν con la que $(\partial K_Q^{m,\epsilon}, d, \nu)$ resulte un espacio β -Ahlfors con $\beta < \alpha$. Hipótesis que también es suficiente para el conteo de las clases $\mathcal{C}^{m,n}$, pero que luce estructuralmente más exigente que el enfoque que propusimos en este capítulo.

Integrales Singulares y sumabilidad de perturbaciones regulares de sistemas de Haar

En el teorema de caracterización de espacios de Lebesgue L^p con $1 < p < \infty$, usando wavelets de Haar, juega un rol central el comportamiento de una familia de operadores integrales singulares de la forma

$$(8.0.14) \quad Tf = \sum_{I \in \mathcal{D}} \vartheta_I \langle f, h_I \rangle h_I$$

con $\vartheta = \{\vartheta_I, I \in \mathcal{D}\}$ una sucesión numérica con $|\vartheta_I| = 1$.

La acotación uniforme en ϑ de tales operadores en los espacios L^p ($1 < p < \infty$) sigue de su evidente acotación en L^2 y de su tipo débil $(1, 1)$ uniforme en ϑ . Precisamente la propiedad de tipo débil $(1, 1)$ para estos $T_{0,0}^\vartheta$ no se obtiene, como es de uso en la teoría de integrales singulares, de condiciones de Hörmander dado que los núcleos heredan las discontinuidades del sistema de Haar. La prueba es debida a Y. Meyer y se basa en las propiedades de soporte de las wavelets de Haar usando descomposiciones de Calderón-Zygmund con soporte diádicos.

Con los procesos de regularización del sistema de Haar introducidos en los capítulos precedentes, podemos considerar los operadores inducidos análogos a los de la familia $\{T_{0,0}^\vartheta\}$ pero usando ahora alguna versión regularizada h_I^ϵ de h_I . En particular veremos que estos son operadores de Calderón-Zygmund en los que se recupera la regularidad del núcleo, en un sentido aún más fuerte que el de la condición de Hörmander. Sin embargo el comportamiento de esta regularidad empeora al disminuir ϵ . Esto conduce a que, finalmente, y salvo para $p = 2$ las cotas de las normas de operadores como

$$(8.0.15) \quad Tf(x) := \sum_{I \in \mathcal{D}} \vartheta_I \langle f, h_I^\epsilon \rangle h_I^\epsilon(x),$$

donde h_I^ϵ se definen como en (3.2.1), tiendan a infinito cuando ϵ tiende a cero.

Los operadores clásicos de Calderón-Zygmund tienen núcleo homogéneo de grado $-n$. Por ejemplo las transformadas de Riesz $R_j f$ tienen núcleo $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} = K_j$. La familia de núcleos de sumabilidad de wavelets en \mathbb{R}^n tienen una propiedad de homogeneidad débil similar en escalas diádicas. En efecto si

$$K_\vartheta(x, y) = \sum_{\substack{I \\ m=1, \dots, 2^n-1}} \vartheta_I^m \psi_I^m(x) \psi_I^m(y),$$

donde $\psi_I^m(x) = 2^{nj/2}\psi^m(2^jx - k)$ si $I = k + 2^jQ_0$ con $k \in \mathbb{Z}^n$, $j \in \mathbb{Z}$ y $Q_0 = [0, 1)^n$, entonces

$$\begin{aligned} K_{\vartheta}(2^l x, 2^l y) &= \sum_{\substack{I \\ m=1, \dots, 2^n-1}} \vartheta_I^m \psi_I^m(2^l x) \psi_I^m(2^l y) \\ &= 2^{-ln} \sum_{\substack{I \\ m=1, \dots, 2^n-1}} \vartheta_{I_l}^m \psi_I^m(x) \psi_I^m(y) \\ &= 2^{-ln} K_{\vartheta(l)}(x, y), \end{aligned}$$

donde si $I = k + 2^{-j}Q_0$ entonces $I_l = k + 2^{-(j-l)}Q_0$ y $\vartheta(l) = \{\vartheta(l)_I^m\}$ es tal que $\vartheta(l)_I^m = \vartheta_{I_l}^m$.

En este capítulo estudiamos los operadores que tienen el aspecto general

$$(8.0.16) \quad Tf = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_{\lambda} \langle f, \alpha_{\lambda} \rangle \beta_{\lambda},$$

donde $\{\alpha_{\lambda}\}$ y $\{\beta_{\lambda}\}$ son sistemas de Riesz asociados y $\{m_{\lambda}\}$ es un multiplicador de $l^{\infty}(\Lambda)$. La asociación en $\{\alpha_{\lambda}\}$ y $\{\beta_{\lambda}\}$ estará definida por los procesos de regularización introducidos hasta aquí. En particular cuando $\alpha_{\lambda} = \beta_{\lambda}$ y ambas sean regularizaciones de un sistema de Haar tendremos que T es un operador de Calderón-Zygmund con un núcleo estándar. El objetivo de este capítulo es la construcción de una familia profusa de operadores de Calderón-Zygmund asociados a estos métodos de sumabilidad. Los problemas centrales serán tres: 1) la acotación en $L^2(X, \mu)$, y 2) la acotación en $L^p(X, \mu)$, ($1 < p < \infty$) y 3) la acotación en espacios con pesos. Las técnicas serán: otra vez el Lema de Cotlar para el problema 1), la Teoría de Calderón-Zygmund generalizada para el problema 2) y la teoría de pesos de Muckenhoupt para el 3). Para facilitar los enunciados del capítulo describiremos a continuación todos los operadores involucrados en un modo que pretende ser unificado y al mismo tiempo registrar todos los ingredientes importantes en la construcción de cada uno de ellos.

La notación general tendrá el siguiente aspecto

$$T_{i,j}^{\vartheta, \epsilon \max\{i,j\}, k, l} f.$$

Los subíndices i, j tomarán los valores 0 o 1. El índice i será cero si α_{λ} en (8.0.16) son discontinuas y uno si son continuas. El índice j será cero si las β_{λ} son discontinuas y uno si son continuas. El primer supra-índice será siempre ϑ la sucesión acotada del multiplicador y reservamos otros supra-índices para denotar el parámetro de regularización y para describir el contexto, de acuerdo a las siguientes convenciones. El número positivo ϵ será el parámetro de regularización. La variable k denotará el contexto. Cuando k sea 1 entenderemos que estamos trabajando en \mathbb{R}^1 . Cuando k sea n entenderemos que estamos trabajando en el espacio euclídeo n -dimensional y cuando k sea X en un espacio de tipo homogéneo. En los casos que sea necesario aclararemos el carácter general, o Ahlfors de X , que siempre vendrá equipado con su métrica d y su medida μ . El último índice, l , registrará tomando el valor (simbólico) w o 1 si estamos usando pesos de Muckenhoupt generales en la construcción de operador o solamente la medida subyacente en el espacio.

Esperamos que la siguiente proposición comience a justificar el despropósito notacional para nuestra familia de operadores.

PROPOSICIÓN 8.0.17. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Sea $w \in \mathcal{A}_\infty(X, d, \mu)$. Sea \mathcal{H} un sistema de Haar desbalanceado en $(X, d, w d\mu)$. Sea $1 < p < \infty$ y $v \in A_p(X, d, w d\mu)$.*

Entonces la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,w}$ está acotada en $L^p(X, v w d\mu)$ uniformemente para $|\vartheta(h)| \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Como $w \in A_\infty(X, d, \mu)$ la nueva medida $d\nu = w d\mu$ también es duplicante y (X, d, ν) también es un espacio de tipo homogéneo. En este contexto pueden aplicarse los resultados en [9] y [6]. \square

Desde el punto de vista de la teoría clásica nos interesan más los operadores para los que alguno de los dos sub-índices son no nulos. La familia más parecida se obtiene cuando los dos sub-índices son 1.

El valor 1 en un subíndice está asociado a un procedimiento de regularización de un sistema de Haar \mathcal{H} que procedemos a describir. Dado $Q \in \mathcal{D}^j$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, se define el conjunto K_Q^ϵ como sigue

$$K_Q^\epsilon := \overline{\{x \in Q / d(x, Q^c) > \epsilon \delta^j\}}, .$$

que resulta compacto si (X, d) es completo.

Asociado a cada subconjunto K_Q^ϵ definimos las funciones

$$(8.0.18) \quad \phi_Q^\epsilon(x) := \frac{d(x, Q^c)}{d(x, Q^c) + d(x, K_Q^\epsilon)}.$$

definimos las funciones

$$(8.0.19) \quad \psi_Q^\epsilon := \frac{\phi_Q^\epsilon}{\int \phi_Q^\epsilon d\mu}.$$

DEFINICIÓN 8.0.20. *Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y sea $\{\psi_Q^\epsilon\}$ la sucesión de funciones dadas en (8.0.19). Dada la wavelet de Haar $h_Q^m = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \chi_{Q'}$, definimos su “función regular asociada” como*

$$\tilde{h}_Q^{m,\epsilon} := \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \mu(Q') \psi_{Q'}^\epsilon.$$

Tomando el sistema de Haar $\mathcal{H} = \{h_Q^m\}$ y el correspondiente sistema de regulares asociadas $\tilde{H} = \{\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}\}$ podemos construir las cuatro familias de operadores correspondientes a tomar $i, j \in \{0, 1\}$. Ya sabemos que los operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,k,l}$ son todos acotados en los correspondientes espacios de Lebesgue. Nos dedicaremos en este capítulo sólo a los casos en los que alguno de los sub-índices sea no nulo $T_{0,1}^{\vartheta,\epsilon,k,l}$, $T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,k,l}$ y $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,k,l}$. El capítulo se divide en cinco secciones. En la Sección 1 estudiaremos la acotación en L^2 de estos operadores. En la Sección 2 estudiaremos que propiedades de “Núcleo Estándar” tienen los núcleos de esos operadores. En la Sección 3 desarrollamos la teoría L^p . En la Sección 4 estudiamos el operador cuadrático S_ϵ y en la Sección 5 investigamos la acotación con pesos de los operadores T .

8.1. La Teoría L^2

Observamos primer que si en la expresión formal

$Tf = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda \langle f, \alpha_\lambda \rangle \beta_\lambda$ los dos sistemas $\{\alpha_\lambda\}$ y β_λ son bases de Riesz entonces T es acotado en L^2 . En efecto, por el Teorema 1.4.5, la acotación de $\{m_\lambda\}$ y (1.4.2)

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_2^2 &= \left\| \sum m_\lambda \langle f, \alpha_\lambda \rangle \beta_\lambda \right\|_2^2 \\
&\leq C \sum |m_\lambda|^2 |f, \alpha_\lambda|^2 \\
&\leq C \sup_\lambda |m_\lambda|^2 \sum |\langle f, \alpha_\lambda \rangle|^2 \\
&\leq \bar{C} \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Por consiguiente tenemos la acotación en L^2 para todos los operadores $T_{i,j}^{\theta,\epsilon,k,l}$ para los que hayamos probado que la regularizadas son bases ortonormales.

8.1.1. $T_{1,0}^{\theta,\epsilon,X,1}$. Suponemos que (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo

Recordemos que dado $Q \in \mathcal{D}^j$ existen constantes a_1 y a_2 , que sólo dependen de las constantes del espacio X , y un elemento $x_Q \in Q$ tal que

$$(8.1.1) \quad B_d(x_Q, a_1 \delta^j) \subset Q \subset B_d(x_Q, a_2 \delta^j),$$

para todo $Q \in \mathcal{D}^j$ y todo $j \in \mathbb{Z}$, (ver Definición 6.2.2).

Dado $Q \in \mathcal{D}$, denotamos a su complemento como Q^c y definimos las funciones

$$(8.1.2) \quad \phi_Q(x) = \frac{d(x, Q^c)}{d(x_Q, Q^c)}.$$

Observemos que la desigualdad (8.1.1) implica que $0 \leq \phi_Q(x) \leq a_2/a_1$.

Más adelante necesitaremos que nuestras funciones bases tengan integral uno, por lo cual definimos la sucesión de funciones $\{\psi_Q, Q \in \mathcal{D}\}$ de la siguiente forma,

$$(8.1.3) \quad \psi_Q(x) = \frac{\phi_Q(x)}{\int_X \phi_Q d\mu}$$

Utilizaremos las funciones ψ_Q para construir una sucesión de funciones regulares como sigue. Dada una wavelet de Haar $h_Q^m = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \chi_{Q'}$, sea

$$(8.1.4) \quad \tilde{\chi}_Q^m = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \mu(Q') \psi_{Q'}.$$

Comenzamos estableciendo una proposición que contiene propiedades que serán usadas para probar el resultado y que demostraremos al final de la subsección.

PROPOSICIÓN 8.1.5. *Si $Q \in \mathcal{D}^j$ y ϕ_Q^ϵ está dada por (8.0.18), dados x e y en X , se cumple que*

$$(A) \quad |\phi_Q^\epsilon(x) - \phi_Q^\epsilon(y)| \leq \frac{c}{\epsilon \delta^j} d(x, y).$$

(B) *Dado $Q \in \mathcal{D}^j$, sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $B(x_Q, a_1 \delta^j/2) \subset K_Q^\epsilon \subset Q$. Entonces, dados x e y en X la función ψ_Q^ϵ es Lipschitz uno y se cumple que*

$$|\psi_Q^\epsilon(x) - \psi_Q^\epsilon(y)| \leq \frac{c}{\epsilon \delta^j \mu(Q)} d(x, y).$$

(C) *La familia de funciones de la Definición 8.0.20 $\{\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}, Q \in \mathcal{D}, m = 1, \dots, \#\mathcal{O}(Q) - 1\}$, cumple las siguientes propiedades:*

$$C1 \quad \int_Q \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} d\mu = 0.$$

C2 $\left\| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \right\|_{L^2(X)} \leq c$, donde c es independiente de Q y de m .

C3 Si x e y están en X entonces

$$\left| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) - \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y) \right| \leq \frac{c}{\epsilon \delta^j \mu(Q)^{\frac{1}{2}}} d(x, y).$$

C4 Si $I \in \mathcal{D}^i$, $Q \in \mathcal{D}^j$, $i \geq j$ y m, n están fijos, existe $c > 0$, independiente de Q, I, m y n , tal que

$$\left| \left\langle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}, \tilde{h}_I^{n,\epsilon} \right\rangle \right| \leq \frac{c}{\epsilon} \frac{\mu(I)^{\frac{1}{2}}}{\mu(Q)^{\frac{1}{2}}} \delta^{i-j} \leq \frac{c}{\epsilon} \delta^{i-j}.$$

El resultado principal de esta subsección queda expresado en el siguiente teorema.

TEOREMA 8.1.6. *Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la sucesión de funciones $\{\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}, Q \in \mathcal{D}, m = 1, \dots, \#\mathcal{O}(Q) - 1\}$, dadas en la Definición 8.0.20, constituyen una sucesión de Bessel en $L^2(X)$ de funciones con soporte localizado, lo que es equivalente a decir que el operador $T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ dado en (8.1.7) está acotado en $L^2(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que existe una constante c , que sólo depende del espacio X , tal que

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \left| \left\langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \right\rangle \right|^2 \leq c \|f\|_{L^2(X)}^2.$$

Como antes, escribimos al operador $T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ como sigue

$$\begin{aligned} (8.1.7) \quad T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f &:= \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \left\langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \right\rangle h_Q^m = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \left\langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \right\rangle h_Q^m \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j f, \end{aligned}$$

y aplicamos el lema de Cotlar 1.1.1. Por lo tanto, el objetivo de esta demostración es ver que la sucesión de operadores $\{T_j\}$ cumple la condición de casi ortogonalidad.

Analizamos primero la expresión de la composición $T_i^* T_j$. Un cálculo sencillo muestra que $T_i^* f = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \vartheta_I^n \left\langle f, h_I^n \right\rangle \tilde{h}_I^{n,\epsilon}$. Entonces, de la ortogonalidad del sistema de Haar, si $i \neq j$ obtenemos que

$$T_i^* T_j f = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \left\langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \right\rangle \vartheta_I^n \vartheta_Q^m \left\langle h_Q^m, h_I^n \right\rangle \tilde{h}_I^{n,\epsilon} = 0.$$

Por otro lado, si tomamos $f \in L^2(X)$ tal que $\|f\|_{L^2(X)} = 1$ y consideramos $i = j$, aplicando el resultado de la Proposición 8.1.5, ítem C2, resulta

$$\begin{aligned}
\|T_j^* T_j\|_{L^2(X)} &= \|T_j f\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \left| \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \right|^2 \\
&\leq \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \|f\|_{L^2(Q)}^2 \left\| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \right\|_{L^2(Q)}^2 \\
&\leq c \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \|f\|_{L^2(Q)}^2 \\
&\leq c \|f\|_{L^2(X)}^2 = c.
\end{aligned}$$

En consecuencia, para una $f \in L^2(X)$ arbitraria, obtenemos que $\|T_j^* T_j f\|_{L^2(X)} \leq c \|f\|_{L^2(X)}$.

Para el análisis de la composición $T_i T_j^*$ vemos que por la ortogonalidad del sistema de Haar resulta

$$\|T_i T_j^* f\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \langle f, h_Q^m \rangle \langle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}, \tilde{h}_I^{n,\epsilon} \rangle \right)^2.$$

Si suponemos primero que $i \geq j$ entonces dado $I \in \mathcal{D}^i$, n y m fijos, existe a lo sumo un único cubo $Q \in \mathcal{D}^j$ tal que $\langle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}, \tilde{h}_I^{n,\epsilon} \rangle \neq 0$, denotando a este cubo $Q(I)$ y aplicando el resultado de la Proposición 8.1.5, ítem C4, resulta

$$\begin{aligned}
\|T_i T_j^* f\|_{L^2(X)}^2 &\leq c \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \sum_{m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1} |\langle f, h_{Q(I)}^m \rangle|^2 \left| \langle \tilde{h}_{Q(I)}^{m,\epsilon}, \tilde{h}_I^{n,\epsilon} \rangle \right|^2 \\
&\leq \frac{c}{\epsilon^2} \delta^{(i-j)2} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \sum_{m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1} |\langle f, h_{Q(I)}^m \rangle|^2 \\
&\leq \frac{c}{\epsilon^2} \delta^{(i-j)2} \|f\|_{L^2(X)}^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos $j > i$, podemos aplicar nuevamente la desigualdad del ítem C4 de la Proposición 8.1.5 para obtener

$$\begin{aligned}
\|T_i T_j^* f\|_{L^2(X)}^2 &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j, Q \subset I \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \langle f, h_Q^m \rangle \langle \tilde{h}_Q^{m, \epsilon}, \tilde{h}_I^{n, \epsilon} \rangle \right)^2 \\
&\leq \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j, Q \subset I \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} |\langle f, h_Q^m \rangle|^2 \right) \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j, Q \subset I \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} |\langle \tilde{h}_Q^{m, \epsilon}, \tilde{h}_I^{n, \epsilon} \rangle|^2 \right) \\
&\leq \frac{c}{\epsilon^2} \delta^{(j-i)2} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j, Q \subset I \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle^2 \right) \left(\frac{1}{\mu(I)} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j, Q \subset I \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \mu(Q) \right) \\
&\leq \frac{c}{\epsilon^2} \delta^{(j-i)2} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(I)-1}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^j, Q \subset I \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \langle f, h_Q^m \rangle^2 \\
&\leq \frac{c}{\epsilon^2} \delta^{(j-i)2} \|f\|_{L^2(X)}^2.
\end{aligned}$$

En conclusión vemos que la sucesión $\{s(j) = c\delta^{|j|}/\epsilon\}$ puede considerarse para mostrar que la familia de operadores $\{T_j\}$ cumple la condición de casi ortogonalidad. Por lo tanto, aplicando el Lema de Cotlar, obtenemos que el operador $T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1}$ está acotado sobre $L^2(X)$, lo cual nos conduce al resultado deseado. \square

Finalizamos esta subsección con las demostraciones de las proposiciones utilizadas en la prueba del teorema anterior.

PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 8.1.5. (A) Es suficiente probar el resultado para $x, y \in Q \setminus K_Q^\epsilon$. Vemos primero que por definición de los conjuntos K_Q^ϵ , dado $z \in Q \setminus K_Q^\epsilon$ se cumple que

$$\epsilon \delta^j \leq d(Q^c, K_Q^\epsilon) \leq d(z, Q^c) + d(z, K_Q^\epsilon) \leq 2\epsilon \delta^j.$$

Para continuar supondremos sin pérdida de generalidad que $\phi_Q^\epsilon(x) \geq \phi_Q^\epsilon(y)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
|\phi_Q^\epsilon(x) - \phi_Q^\epsilon(y)| &= \frac{d(x, Q^c)}{d(x, Q^c) + d(x, K_Q^\epsilon)} - \frac{d(y, Q^c)}{d(y, Q^c) + d(y, K_Q^\epsilon)} \\
&= \frac{d(x, Q^c)}{d(x, Q^c) + d(x, K_Q^\epsilon)} - \frac{d(y, Q^c)}{d(y, Q^c) + d(y, K_Q^\epsilon)} \pm \frac{d(x, Q^c)}{d(y, Q^c) + d(y, K_Q^\epsilon)} \\
&= \frac{d(x, Q^c) - d(y, Q^c)}{d(y, Q^c) + d(y, K_Q^\epsilon)} \\
&\quad + d(x, Q^c) \left(\frac{1}{d(x, Q^c) + d(x, K_Q^\epsilon)} - \frac{1}{d(y, Q^c) + d(y, K_Q^\epsilon)} \right) \\
&\leq \frac{d(x, y)}{d(y, Q^c) + d(y, K_Q^\epsilon)} \\
&\quad + \epsilon \delta^j \left(\frac{d(y, Q^c) + d(y, K_Q^\epsilon) - d(x, Q^c) - d(x, K_Q^\epsilon)}{(\epsilon \delta^j)^2} \right) \\
&\leq \frac{d(x, y)}{\epsilon \delta^j} + \left(\frac{d(y, Q^c) - d(x, Q^c) + d(y, K_Q^\epsilon) - d(x, K_Q^\epsilon)}{(\epsilon \delta^j)^2} \right) \\
&\leq \frac{d(x, y)}{(\epsilon \delta^j)^2} + \left(\frac{2d(x, y)}{c\epsilon \delta^j} \right) \\
&\leq \frac{c}{\epsilon \delta^j} d(x, y),
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

(B) Como $B(x_Q, a_1 \delta^j / 2) \subset K_Q^\epsilon \subset Q$ podemos ver primero que

$$\begin{aligned}
\int_Q \phi_Q^\epsilon(z) d\mu(z) &= \int_Q \frac{d(z, Q^c)}{d(z, Q^c) + d(z, K_Q^\epsilon)} d\mu \\
&\geq \int_{B(x_Q, \frac{a_1}{2} \delta^j)} d\mu = \mu(B(x_Q, a_1 \delta^j / 2)) \\
(8.1.8) \quad &\geq c\mu(Q),
\end{aligned}$$

por lo tanto, aplicando el resultado de la Proposición 8.1.5 obtenemos

$$\begin{aligned}
|\psi_Q^\epsilon(x) - \psi_Q^\epsilon(y)| &= \frac{|\phi_Q^\epsilon(x) - \phi_Q^\epsilon(y)|}{\int \phi_Q^\epsilon d\mu} \\
&\leq \frac{c}{\epsilon \delta^j \mu(Q)} d(x, y),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

(C)

(C1) La primera propiedad se deduce del hecho de que las funciones ψ_Q^ϵ dadas en (8.0.19) tienen integral igual a uno. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_Q \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} d\mu &= \int_Q \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \mu(Q') \psi_{Q'}^\epsilon d\mu \\ &= \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \mu(Q') \int_Q \psi_{Q'}^\epsilon d\mu \\ &= \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \mu(Q') \\ &= \int_Q h_Q^m d\mu = 0. \end{aligned}$$

(C2) Como $0 \geq \phi_Q^\epsilon \leq 1$ para cualquier $Q \in \mathcal{D}$, utilizando la desigualdad probada en (8.1.8) podemos escribir

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}\|_{L^2(X)}^2 &= \int_X \left| \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \mu(Q') \psi_{Q'}^\epsilon \right|^2 d\mu \\ &= \sum_{Q' \subset Q} \left| C_{Q'}^{Q,m} \right|^2 \mu(Q')^2 \int_{Q'} |\psi_{Q'}^\epsilon|^2 d\mu \\ &\leq \sum_{Q' \subset Q} \left| C_{Q'}^{Q,m} \right|^2 \mu(Q')^2 \frac{\int_{Q'} |\phi_{Q'}^\epsilon|^2 d\mu}{\left(\int_{Q'} \phi_{Q'}^\epsilon d\mu \right)^2} \\ &\leq \sum_{Q' \subset Q} \left| C_{Q'}^{Q,m} \right|^2 \mu(Q')^2 \frac{\mu(Q')}{c\mu(Q')^2} = c \sum_{Q' \subset Q} \left| C_{Q'}^{Q,m} \right|^2 \mu(Q') \\ &= c \|h_Q^m\|_{L^2(X)}^2 = c. \end{aligned}$$

(C3) Basta ver el caso en que x e y están en $Q' \setminus K_{Q'}^\epsilon$. Recordemos que si $h_Q^m = \sum_{Q' \subset Q} C_{Q'}^{Q,m} \chi_{Q'}$ entonces cada constante $C_{Q'}^{Q,m} \approx \mu(Q)^{-\frac{1}{2}}$. Si ϵ cumple las condiciones de la Proposición 8.1.5 se puede ver fácilmente

$$\begin{aligned} \left| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) - \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y) \right| &\leq |C_{Q'}^{Q,m}| \mu(Q') |\psi_{Q'}^\epsilon(x) - \psi_{Q'}^\epsilon(y)| \\ &\leq c \frac{1}{\mu(Q)^{\frac{1}{2}}} \mu(Q') \frac{d(x,y)}{\epsilon \delta^j \mu(Q')} \\ &= \frac{c}{\epsilon \delta^j \mu(Q)^{\frac{1}{2}}} d(x,y). \end{aligned}$$

(C4) Para probar la última propiedad de la Proposición 8.1.5 aplicamos la definición de $\tilde{h}_I^{n,\epsilon}$ para obtener

$$\begin{aligned}
\int_I |\tilde{h}_I^{n,\epsilon}| d\mu &= \int_I \left| \sum_{I' \subset I} C_{I'}^{I,n} \mu(I') \psi_{I'}^\epsilon \right| d\mu \\
&= \sum_{I' \subset I} |C_{I'}^{I,n}| \mu(I') \int_I |\psi_{I'}^\epsilon| d\mu \\
&\leq c \mu(I)^{-\frac{1}{2}} \sum_{I' \subset I} \mu(I') \\
(8.1.9) \qquad &\leq c \mu(I)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

donde la constante c sólo depende del espacio. Por lo tanto, aplicando la desigualdad del ítem 1 y la del ítem 3 podemos escribir

$$\begin{aligned}
|\langle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}, \tilde{h}_I^{n,\epsilon} \rangle| &= \left| \int_I \tilde{h}_I^{n,\epsilon} \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} d\mu \right| \\
&= \left| \int_I \tilde{h}_I^{n,\epsilon}(x) (\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) - \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x_I)) d\mu(x) \right| \\
&\leq \int_I |\tilde{h}_I^{n,\epsilon}(x)| |\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) - \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x_I)| d\mu(x) \\
&\leq \frac{c}{\epsilon \delta^j \mu(Q)^{\frac{1}{2}}} \int_I |\tilde{h}_I^{n,\epsilon}(x)| d(x, x_I) d\mu(x) \\
&\leq \frac{c \delta^i}{\epsilon \delta^j \mu(Q)^{\frac{1}{2}}} \int_I |\tilde{h}_I^{n,\epsilon}(x)| d\mu(x) \\
&\leq \frac{c \delta^{i-j}}{\epsilon} \frac{\mu(I)^{\frac{1}{2}}}{\mu(Q)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{c}{\epsilon} \delta^{i-j}.
\end{aligned}$$

□

8.1.2. Acotación de $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$. Procedemos primero a escribir el operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ como sigue

$$\begin{aligned}
T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f &:= \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(J)-1}} \vartheta_J^m \langle f, \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(J)-1}} \vartheta_J^m \langle f, \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_j f.
\end{aligned}$$

TEOREMA 8.1.10. *Si X es α -Ahlfors entonces el operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ está acotado sobre $L^2(X)$ con cota independiente de la sucesión ϑ . Más precisamente*

$$\left\| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right\|_{L^2(X)} \leq \frac{c}{\epsilon^{1/2}} \|f\|_{L^2(X)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como vimos, el operador $T_{1,1}^{\theta,\epsilon,X,1}$ se puede escribir como la suma de los operadores $\tilde{T}_j = \sum_{m=1,\dots,\#\mathcal{O}(J)-1} \vartheta_J^m \langle f, \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_J^{m,\epsilon}$, y además, se puede mostrar que $\tilde{T}_j = \tilde{T}_j^*$. Luego, mostraremos la acotación de $T_{1,1}^{\theta,\epsilon,X,1}$ utilizando el Lema de Cotlar 1.1.1, analizando solamente la composición $\tilde{T}_i \tilde{T}_j$.

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{T}_i \tilde{T}_j f \right\|_{L^2(X)}^2 &= \left\langle \tilde{T}_i \tilde{T}_j f, \tilde{T}_i \tilde{T}_j f \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\substack{Q_1 \in \mathcal{D}^i \\ n_1=1,\dots,\#\mathcal{O}(Q_1)-1}} \vartheta_{Q_1}^{n_1} \langle \tilde{T}_j f, \tilde{h}_{Q_1}^{n_1,\epsilon} \rangle \tilde{h}_{Q_1}^{n_1,\epsilon}, \sum_{\substack{Q_2 \in \mathcal{D}^i \\ n_2=1,\dots,\#\mathcal{O}(Q_2)-1}} \vartheta_{Q_2}^{n_2} \langle \tilde{T}_j f, \tilde{h}_{Q_2}^{n_2,\epsilon} \rangle \tilde{h}_{Q_2}^{n_2,\epsilon} \right\rangle \\ &= \sum_{\substack{Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}^i \\ n_1, n_2=1,\dots,\#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_{Q_1}^{n_1} \vartheta_{Q_2}^{n_2} \langle \tilde{T}_j f, \tilde{h}_{Q_1}^{n_1,\epsilon} \rangle \langle \tilde{T}_j f, \tilde{h}_{Q_2}^{n_2,\epsilon} \rangle \langle \tilde{h}_{Q_1}^{n_1,\epsilon}, \tilde{h}_{Q_2}^{n_2,\epsilon} \rangle. \end{aligned}$$

Por un lado, como $\text{sop } \tilde{h}_Q^n \subset Q$ entonces $\langle \tilde{h}_{Q_1}^{n_1,\epsilon}, \tilde{h}_{Q_2}^{n_2,\epsilon} \rangle = 0$ si $Q_1 \neq Q_2$, además por el resultado de la Proposición 8.1.5, ítem 2, obtenemos que

$$\left| \langle \tilde{h}_Q^{n_1,\epsilon}, \tilde{h}_Q^{n_2,\epsilon} \rangle \right| \leq \left\| \tilde{h}_Q^{n_1,\epsilon} \right\|_{L^2(X)} \left\| \tilde{h}_Q^{n_2,\epsilon} \right\|_{L^2(X)} \leq c,$$

con c independiente de Q , n_1 y n_2 . Por lo tanto podemos escribir

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{T}_i \tilde{T}_j f \right\|_{L^2(X)}^2 &\leq c \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ n_1, n_2=1,\dots,\#\mathcal{O}(Q)-1}} \left| \langle \tilde{T}_j f, \tilde{h}_Q^{n_1,\epsilon} \rangle \right| \left| \langle \tilde{T}_j f, \tilde{h}_Q^{n_2,\epsilon} \rangle \right| \\ &\leq c \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ n_1, n_2=1,\dots,\#\mathcal{O}(Q)-1}} \prod_{s=1}^2 \left| \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j \\ m=1,\dots,\#\mathcal{O}(J)-1}} \vartheta_J^m \langle f, \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \rangle \langle \tilde{h}_J^{m,\epsilon}, \tilde{h}_Q^{n_s,\epsilon} \rangle \right| \\ &\leq c \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ n_1, n_2=1,\dots,\#\mathcal{O}(Q)-1}} \prod_{s=1}^2 \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j, J \cap Q \neq \emptyset \\ m=1,\dots,\#\mathcal{O}(J)-1}} \left| \langle f, \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \rangle \right| \left| \langle \tilde{h}_J^{m,\epsilon}, \tilde{h}_Q^{n_s,\epsilon} \rangle \right| \\ &\leq c \sum_{Q \in \mathcal{D}^i} \sum_{n_1=1}^{\#\mathcal{O}(Q)-1} \sum_{n_2=1}^{\#\mathcal{O}(Q)-1} \prod_{s=1}^2 \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j, J \cap Q \neq \emptyset \\ m=1,\dots,\#\mathcal{O}(J)-1}} \left| \langle f, \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \rangle \right| \left| \langle \tilde{h}_J^{m,\epsilon}, \tilde{h}_Q^{n_s,\epsilon} \rangle \right| \\ &\leq c \sum_{Q \in \mathcal{D}^i} \left(\sum_{n=1,\dots,\#\mathcal{O}(Q)-1} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j, J \cap Q \neq \emptyset \\ m=1,\dots,\#\mathcal{O}(J)-1}} \left| \langle f, \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \rangle \right| \left| \langle \tilde{h}_J^{m,\epsilon}, \tilde{h}_Q^{n,\epsilon} \rangle \right| \right)^2 \\ &\leq c \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ n=1,\dots,\#\mathcal{O}(Q)-1}} \left(\sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j, J \cap Q \neq \emptyset \\ m=1,\dots,\#\mathcal{O}(J)-1}} \left| \langle f, \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \rangle \right| \left| \langle \tilde{h}_J^{m,\epsilon}, \tilde{h}_Q^{n,\epsilon} \rangle \right| \right)^2. \end{aligned}$$

Si $i \geq j$, dado $Q \in \mathcal{D}^i$, existe un único $J = J(Q) \in \mathcal{D}^j$ tal que $J \cap Q \neq \emptyset$. Por lo tanto, aplicando el resultado de la Proposición 8.1.5, ítem C4, y el Teorema 8.1.6, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{T}_i \tilde{T}_j f \right\|_{L^2(X)}^2 &\leq \frac{c}{\epsilon^2} \delta^{(i-j)^2} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \sum_{m=1, \dots, \#\mathcal{O}(J)-1} \left| \langle f, \tilde{h}_{J(Q)}^{m, \epsilon} \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{c}{\epsilon^2} \delta^{(i-j)^2} \|f\|_{L^2(X)}^2. \end{aligned}$$

Por otro lado si $j \geq i$, otra vez aplicamos la Proposición 8.1.5, ítem C4, y el Teorema 8.1.6, para obtener

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{T}_i \tilde{T}_j f \right\|_{L^2(X)}^2 &\leq c \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j, J \cap Q \neq \emptyset \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(J)-1}} \left| \langle f, \tilde{h}_J^{m, \epsilon} \rangle \right|^2 \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j, J \cap Q \neq \emptyset \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(J)-1}} \left| \langle \tilde{h}_J^{m, \epsilon}, \tilde{h}_Q^{n, \epsilon} \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{c}{\epsilon^2} \delta^{(i-j)^2} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}^i \\ n=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j, J \cap Q \neq \emptyset \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(J)-1}} \left| \langle f, \tilde{h}_J^{m, \epsilon} \rangle \right|^2 \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}^j, J \cap Q \neq \emptyset \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(J)-1}} \mu(J) \\ &\leq \frac{c}{\epsilon^2} \delta^{(i-j)^2} \|f\|_{L^2(X)}^2. \end{aligned}$$

De este modo se probó que la sucesión de operadores $\{\tilde{T}_j\}$ cumple la propiedad de casi ortogonalidad, y que la norma de los operadores $\tilde{T}_i^* \tilde{T}_j$ y $\tilde{T}_i \tilde{T}_j^*$ está controlada por $c\delta^{|i-j|}/\epsilon$. Por el Lema de Cotlar, el operador $T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, X, 1}$ está acotado sobre $L^2(X)$ y su norma está acotada por $c/\epsilon^{1/2}$, que es lo que queríamos demostrar. \square

8.2. Los Núcleos

Los núcleos de los operadores $T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, X, 1}$ tienen especial interés pues, como veremos a continuación, resultan ser núcleos estándar lo cual refleja la naturaleza de integrales singulares de estos operadores.

8.2.1. Núcleo de $T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, 1, 1}$. Si definimos el núcleo

$$(8.2.1) \quad K_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, 1, 1}(x, y) := \sum_{I \in \mathcal{D}} \vartheta_I h_I^\epsilon(x) h_I^\epsilon(y),$$

entonces el operador $T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, 1, 1}$ tiene la siguiente representación integral

$$T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, 1, 1} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) K_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, 1, 1}(x, y) dy,$$

al menos cuando f es una combinación lineal de funciones h_I^ϵ .

Este se comporta como una integral singular y, como lo veremos a continuación, tiene las mismas propiedades que un operador singular de Calderón-Zygmund. Precisamente el siguiente teorema muestra que aunque el operador no es de convolución su núcleo tiene las propiedades de “núcleo estándar”, en el sentido de la Definición 6.5.1.

TEOREMA 8.2.2. *El núcleo $K_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, 1, 1}$ dado en (8.2.1) es un núcleo estándar.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar (6.5.2) notemos primero que si x e y tienen distinto signo entonces no existe ningún intervalo diádico que los contenga simultáneamente, por lo que $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) = 0$. Es decir $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ se anula en el segundo y cuarto cuadrante de \mathbb{R}^2 . Por otro lado si $x \neq y$ y tienen el mismo signo, denotamos con $I_0 \in \mathcal{D}^{j_0}$ al intervalo diádico más pequeño que los contiene a ambos. Entonces $\sum_{I \in \mathcal{D}^j} h_I^\epsilon(x)h_I^\epsilon(y) = 0$ para todo $j > j_0$. Notemos también que $|x - y| < |I_0| = 2^{-j_0}$. Teniendo en cuenta que los intervalos diádicos de una misma resolución son disjuntos resulta

$$\left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) \right| = \left| \sum_{I \supseteq I_0} \vartheta_I h_I^\epsilon(x)h_I^\epsilon(y) \right| \leq \sum_{I \supseteq I_0} \frac{1}{|I|} = \sum_{j \leq j_0} 2^j \approx 2^{j_0+1} \leq \frac{2}{|x-y|},$$

lo que prueba (6.5.2).

Notemos primero que cualquiera sean y y z en \mathbb{R} , la regularidad del núcleo regularizante φ nos permite afirmar que para cada $I \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} |h_I^\epsilon(y) - h_I^\epsilon(z)| &= \left| \int_{\{|y-\tau| < \epsilon|I|\} \cup \{|z-\tau| < \epsilon|I|\}} h_I(\tau) \frac{1}{\epsilon|I|} \left[\varphi\left(\frac{y-\tau}{\epsilon|I|}\right) - \varphi\left(\frac{z-\tau}{\epsilon|I|}\right) \right] d\tau \right| \\ &\leq C \frac{|y-z|}{\epsilon|I|^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Para obtener las estimaciones en (6.5.3) bajo el supuesto que $|x-y| > 2|y-z|$, supondremos que $x > 0$ ya que el caso $x < 0$ tiene un trato similar. Si $y < 0$ y $z < 0$ entonces $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) = 0$ y $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z) = 0$ y no hay nada que probar.

Supongamos que $y > 0$ y $z < 0$. En este caso $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z) = 0$. Si tomamos $I_0 \in \mathcal{D}$ el menor diádico tal que x e y están ambos en I_0 tenemos

$$\begin{aligned} \left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) - K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z) \right| &= \left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) \right| = \left| \sum_{I \in \mathcal{D}} \vartheta_I h_I^\epsilon(x) [h_I^\epsilon(y) - h_I^\epsilon(z)] \right| \\ &\leq C \frac{|y-z|}{\epsilon} \sum_{I \supseteq I_0} \frac{|h_I^\epsilon(x)|}{|I|^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq C \frac{|y-z|}{\epsilon} \sum_{I \supseteq I_0} \frac{1}{|I|^2} \\ &\leq C \frac{|y-z|}{\epsilon} \frac{1}{|I_0|^2} \leq C \frac{|y-z|}{\epsilon|x-y|^2}. \end{aligned}$$

Si consideramos ahora $y < 0$ y $z > 0$ de un modo enteramente análogo obtenemos $\left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) - K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z) \right| \leq C \frac{|y-z|}{\epsilon|x-z|^2}$. Puesto que $|x-y| > 2|y-z|$, tenemos que $|x-z| \leq 3/2|x-y|$ y por consiguiente $\left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) - K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z) \right| \leq \tilde{C} \frac{|y-z|}{\epsilon|x-y|^2}$.

El caso restante $y > 0$ y $z > 0$ procede de la misma manera tomando $I_0(x,y)$ como el menor intervalo diádico que contiene a x y a y y $I_0(x,z)$ el menor diádico que contiene a x y a z . Como x pertenece a ambos uno de ellos contiene al otro. Ese intervalo $I_0(x,y,z)$ contiene a los tres y

$$\begin{aligned}
(8.2.3) \quad \left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) - K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z) \right| &= \left| \sum_{I \in \mathcal{D}} \vartheta_I h_I^\epsilon(x) [h_I^\epsilon(y) - h_I^\epsilon(z)] \right| \\
&\leq C \frac{|y-z|}{\epsilon} \sum_{I \supseteq I_0} \frac{|h_I^\epsilon(x)|}{|I|^{\frac{3}{2}}} \\
&\leq C \frac{|y-z|}{\epsilon} \sum_{I \supseteq I_0} \frac{1}{|I|^2} \\
&\leq C \frac{|y-z|}{\epsilon} \frac{1}{|I_0|^2} \leq C \frac{|y-z|}{\epsilon |x-y|^2}.
\end{aligned}$$

lo que prueba (6.5.3) con $\gamma = 1$. En conclusión obtenemos que $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ es un núcleo estándar, que es lo que queríamos probar. \square

8.2.2. Núcleo de $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$. Dada $f \in L^2(X) \cap L^p(X)$, con X α -Ahlfors podemos escribir al operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ como sigue

$$\begin{aligned}
T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f(x) &= \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \\
&= \int_X \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y) \right) f(y) d\mu(y) \\
&= \int_X K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}(x,y) f(y) d\mu(y).
\end{aligned}$$

TEOREMA 8.2.4. *El núcleo $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ del operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ es un núcleo estándar.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos (6.5.13). Dados $x, y \in X$, $x \neq y$, notemos que el producto $\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y)$ es distinto de cero sólo si x e y pertenecen al cubo Q . Si suponemos que $Q \in \mathcal{D}^j$, por la Definición 6.2.2 existen $x_Q \in X$, a_1 y a_2 constantes positivas tales que $B(x_Q, a_1 \delta^j) \subset Q \subset B(x_Q, a_2 \delta^j)$. Esto implica que si $d(x, y) > a_2 \delta^j$ entonces

$$\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y) = 0.$$

Luego, solo se debe considerar $j \in \mathbb{Z}$ tal que $d(x, y) < a_2 \delta^j$.

Por lo tanto, como los cubos en \mathcal{D}^j son disjuntos obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}(x,y) \right| &\leq \sum_{\substack{j < \ln(\frac{d(x,y)}{a_2})/\ln(\delta) \\ x,y \in Q \in \mathcal{D}^j}} \sum_{m=1}^{\#\mathcal{O}(Q)-1} \left| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right| \left| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y) \right| \\
&\leq c \sum_{\substack{j < \ln(\frac{d(x,y)}{a_2})/\ln(\delta) \\ x,y \in Q \in \mathcal{D}^j}} \frac{1}{\mu(Q)} \leq c \sum_{\substack{j < \ln(\frac{d(x,y)}{a_2})/\ln(\delta) \\ x,y \in Q \in \mathcal{D}^j}} \frac{1}{\delta^{j\alpha}} \\
&\leq c \left(\frac{1}{\delta^\alpha} \right)^{\ln(\frac{d(x,y)}{a_2})/\ln(\delta)} = \frac{c}{\delta^{\frac{1}{\ln(\delta)} \ln(cd(x,y)^\alpha)}} \\
&\leq \frac{c}{d(x,y)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Para ver (6.5.14) tomamos $x, y, z \in X$ tal que $d(x, y) > 2d(y, z)$.

Debemos considerar la resolución desde donde los productos $\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x)\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y) \neq 0$ y $\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x)\tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(z) \neq 0$.

La desigualdad $d(x, y) > 2d(y, z)$ implica que

$$\frac{d(x, y)}{2} > d(y, z) \geq d(x, z) - d(x, y),$$

por lo tanto, $(3/2)d(x, y) > d(x, z)$. En consecuencia consideramos los cubos en \mathcal{D}^j tal que $a_2\delta^j \geq d(x, y) > (2/3)d(x, z)$. Aplicando el resultado de la Proposición 7.1.3, ítem C, obtenemos las siguientes estimaciones.

$$\begin{aligned}
\left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}(x,y) - K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}(x,z) \right| &\leq \sum_{\substack{j < \ln(\frac{d(x,y)}{a_2})/\ln(\delta) \\ x,y \in Q \in \mathcal{D}^j}} \sum_{m=1}^{\#\mathcal{O}(Q)-1} \left| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right| \left| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(y) - \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(z) \right| \\
&\leq c \frac{d(y, z)}{\epsilon} \sum_{\substack{j < \ln(\frac{d(x,y)}{a_2})/\ln(\delta) \\ x,y \in Q \in \mathcal{D}^j}} \sum_{m=1}^{\#\mathcal{O}(Q)-1} \frac{\left| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right|}{\delta^j \mu(Q)^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq c \frac{d(y, z)}{\epsilon} \sum_{\substack{j < \ln(\frac{d(x,y)}{a_2})/\ln(\delta) \\ x,y \in Q \in \mathcal{D}^j}} \frac{1}{\delta^j \mu(Q)} \\
&\leq c \frac{d(y, z)}{\epsilon} \sum_{j < \ln(\frac{d(x,y)}{a_2})/\ln(\delta)} \frac{1}{\delta^{j(\alpha+1)}} \\
&\leq c \frac{d(y, z)}{\epsilon d(x, y)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Debido a que $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ es simétrico, el análisis para (6.5.15) es análogo al de (6.5.14). Por lo tanto, podemos concluir que $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ es un núcleo estándar. \square

8.3. La Teoría L^p

En esta sección mostraremos las acotaciones en L^p de los operadores $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$, $T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ y $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$.

8.3.1. Acotación en $L^p(\mathbb{R})$ de $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$.

TEOREMA 8.3.1. *Dado $\epsilon > 0$, sea $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ el operador definido en (8.0.15). Si $1 < p < \infty$ entonces existe c tal que*

$$\left\| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} f \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \begin{cases} \frac{c}{\epsilon^{\frac{2}{p}-1}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ \frac{c}{\epsilon^{\frac{2}{p}-1}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} & \text{si } 2 < p < \infty. \end{cases}$$

PRUEBA DEL TEOREMA 8.3.1. Debido a que la acotación sobre $L^2(\mathbb{R})$ de $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ y que $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ es un núcleo estándar en el Teorema 8.2.2, el resultado principal de que $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ es de tipo débil $(1,1)$ y acotado en $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, se deduce del Teorema 6.5.6. Por lo tanto, nos resta hacer las estimaciones correspondientes a las cotas de las normas del operador.

Para estimar la constante en la desigualdad de tipo débil $(1,1)$, dada $f \in L^1 \cap L^2$, aplicamos la descomposición de Calderón-Zygmund (ver Teorema 6.5.7) y obtenemos que $f = g + \sum_{I \in \mathcal{F}} b_I = g + b$, por lo tanto

$$|\{ |T_{\vartheta}^{\epsilon} f| > \lambda \}| \leq |\{ |T_{\vartheta}^{\epsilon} g| > \lambda/2 \}| + |\{ |T_{\vartheta}^{\epsilon} b| > \lambda/2 \}|.$$

Como g pertenece a $L^2(\mathbb{R})$, para el primer sumando por el Teorema 6.5.7, CZ7 y CZ9 obtenemos

$$\begin{aligned} |\{ |T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} g| > \lambda/2 \}| &\leq \int_{\{|T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} g| > \lambda/2\}} \left(\frac{2 |T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} g(x)|}{\lambda} \right)^2 dx \\ &\leq \frac{4}{\lambda^2} c_2 \int_{\mathbb{R}} |g|^2 dx \leq \frac{c}{\lambda} \|g\|_1 \\ (8.3.2) \quad &\leq \frac{c}{\lambda} (\|b\|_1 + \|f\|_1) \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Por otro lado dado $I \in \mathcal{F}$ denotamos con I^* al intervalo concéntrico con I y tal que $|I^*| = 4|I|$. Entonces si $x \in I^{*c}$ y $z, y \in I$ entonces $|x - y| > 2|y - z|$. Luego llamando $O_{\lambda}^* = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I^*$ obtenemos de CZ5) que $|O_{\lambda}^*| \leq k|O_{\lambda}| \leq c \frac{\|f\|_1}{\lambda}$, entonces

$$\begin{aligned} |\{ |T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} b| > \lambda/2 \}| &\leq |O_{\lambda}^*| + |\{ x \notin O_{\lambda}^* : |T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} b| > \lambda/2 \}| \\ &\leq c \frac{\|f\|_1}{\lambda} + 2/\lambda \int_{\{x \notin O_{\lambda}^* : |T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} b| > \lambda/2\}} |T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} b(x)| dx \\ &\leq c \frac{\|f\|_1}{\lambda} + \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R} \setminus O_{\lambda}^*} |T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1} b(x)| dx. \end{aligned}$$

Por un lado por CZ6) y CZ8), dado $I \in \mathcal{F}$ si $z_I \in I$ entonces

$$\begin{aligned} T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}b(x) &= \int_{\mathbb{R}} b(y)K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{I \in \mathcal{F}} b_I(y)K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) \\ &= \sum_{I \in \mathcal{F}} \int_I b_I(y) \left(K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) - K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z_I) \right) dy, \end{aligned}$$

como $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$ cumple la desigualdad (8.2.3), entonces

$$\begin{aligned} \int_{|x-y|>2|y-z|} \left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) - K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z) \right| dx &\leq \frac{c}{\epsilon} \int_{|x-y|>2|y-z|} \frac{|y-z|}{|x-y|^2} dx \\ &\leq \frac{c}{\epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k+1}|y-z|>|x-y|>2^k|y-z|} \frac{|y-z|}{|x-y|^2} dx \\ &\leq \frac{c}{\epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k2} |y-z|} \int_{2^{k+1}|y-z|>|x-y|>2^k|y-z|} dx \\ &\leq \frac{c}{\epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1} |y-z| 2 - 2^k |y-z| 2}{2^{k2} |y-z|} \\ &= \frac{c}{\epsilon}, \end{aligned}$$

aplicando CZ9) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus O_\lambda^*} \left| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}b(x) \right| dx &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus O_\lambda^*} \sum_{I \in \mathcal{F}} \int_I |b_I(y)| \left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) - K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z_I) \right| dy dx \\ &= \sum_{I \in \mathcal{F}} \int_I |b_I(y)| \int_{\mathbb{R} \setminus O_\lambda^*} \left| K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,y) - K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}(x,z_I) \right| dx dy \\ &\leq \frac{c}{\epsilon} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Con esto último probamos que $\left| \left\{ \left| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}b \right| > \lambda/2 \right\} \right| \leq \frac{c}{\epsilon\lambda} \|f\|_1$, en consecuencia por la desigualdad probada en (8.3.2) obtenemos

$$\left| \left\{ \left| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}f \right| > \lambda \right\} \right| \leq c \|f\|_1 / \epsilon\lambda.$$

Finalmente aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz 6.5.8 con $A_0 = c/\epsilon$ y $A_1 = c_2$, donde c_2 es la constante en la acotación en L^2 de $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,1,1}$, obtenemos el resultado deseado. \square

8.3.2. Acotación en $L^p(X)$ de $T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$. En esta subsección aplicaremos la teoría de integrales singulares en espacios de tipo homogéneo desarrollada en [2] para obtener resultados análogos a los ya conocidos para el sistema de Haar. Por el Teorema 8.1.6 tenemos que el operador $T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ está acotado en $L^2(X)$, y que su norma es menor que $c\epsilon^{-\frac{1}{2}}$. Veremos a continuación que este tipo de operadores también están acotados sobre $L^p(X)$ con $2 < p < \infty$ y su adjunto sobre $L^p(X)$ para

$1 < p < 2$. La herramienta principal de la prueba es el resultado de la descomposición de Calderón-Zygmund expuesto en el Teorema 6.5.7.

El resultado principal de esta subsección es el siguiente.

TEOREMA 8.3.3. *Si (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo α -Ahlfors y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, entonces el operador $T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1}$ definido en (8.1.7), está acotado sobre $L^p(X)$ para $2 \leq p < \infty$ con cota dependiente de ϵ . Por lo tanto, por dualidad, $(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^*$ está acotado en $L^p(X)$ para $1 < p \leq 2$ con cota dependiente de ϵ . Más específicamente $\left\| (T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^* f \right\|_{L^p(X)} \leq c\epsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(X)}$, $1 < p \leq 2$ y $\left\| T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f \right\|_{L^p(X)} \leq c\epsilon^{-\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p(X)}$, $2 \leq p < \infty$.*

PRUEBA DEL TEOREMA 8.3.3. Dada $f \geq 0$, $f \in L^1(X)$, utilizaremos la descomposición de Calderón-Zygmund expresada en el Teorema 6.5.7. Si $\mu(X) < \infty$ entonces tomamos

$$0 < \lambda \leq m_X f = \frac{1}{\mu(X)} \int_X |f| d\mu,$$

por lo tanto

$$\mu(\{|(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^* f| > \lambda\}) \leq \mu(X) \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Si $m_X f < \lambda$ por CZ,6) podemos escribir $f = g + b$ y obtener

$$\mu\left(\{|(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^* f| \geq \lambda\}\right) \leq \mu\left(\{|(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^* g| \geq \frac{\lambda}{2}\}\right) + \mu\left(\{|(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^* b| \geq \frac{\lambda}{2}\}\right).$$

Como $g \in L^2(X)$, por CZ,7) y CZ,9) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_X |g|^2 d\mu &\leq c\lambda \int_X |g| d\mu \leq c\lambda \left(\int_X |b| d\mu + \int_X |f| d\mu \right) \\ &\leq c\lambda \|f\|_1, \end{aligned}$$

entonces, por la desigualdad de Chebyshev y la acotación en $L^2(X)$ de $(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^*$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{|(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^* g| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) &\leq \frac{4}{\lambda^2} \int_X |(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^* g|^2 d\mu \\ &\leq \frac{c}{\epsilon\lambda^2} \int_X |g|^2 d\mu \\ &\leq \frac{c\lambda}{\epsilon\lambda^2} \|f\|_{L^1(X)} \\ &\leq \frac{c\|f\|_{L^1(X)}}{\epsilon\lambda}. \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\{|(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^* b| > \frac{\lambda}{2}\} \subset O_\lambda$, para ello probaremos que si $x \notin O_\lambda$ entonces $(T_{1,0}^{\vartheta, \epsilon, X, 1})^* b(x) = 0$. En efecto, sabemos que $\sum_{Q \in \mathcal{F}} b_Q$ converge en $L^1(X)$ a

b. Por otro lado

$$\begin{aligned} (T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1})^* b(x) &= \sum_{Q \in \mathcal{F}} (T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1})^* b_Q(x) \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{F}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#O(J)-1}} \vartheta_J^m \tilde{h}_J^{m,\epsilon}(x) \int_X b_Q(y) h_J^m(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Si $Q \cap J = \emptyset$ entonces $\int_X b_Q(y) h_J^m(y) d\mu(y) = 0$. Por otra parte si $Q \cap J \neq \emptyset$ y $J \subseteq Q$, como $x \notin O_\lambda$ resulta que $x \notin J$, por lo tanto $\tilde{h}_J^{m,\epsilon}(x) = 0$. Supongamos ahora que $Q \cap J \neq \emptyset$ y $Q \subseteq J$. Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ entonces h_J^m es constante sobre Q y por CZ,8) obtenemos

$$\int_X b_Q(x) h_J^m(x) d\mu(x) = c \int_X b_Q(y) d\mu(y) = 0,$$

por lo tanto $(T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1})^* b(x) = 0$ si $x \notin O_\lambda$. Luego $\left\{ \left| (T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1})^* b \right| > \frac{\lambda}{2} \right\} \subset O_\lambda$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \mu \left(\left\{ \left| (T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1})^* b \right| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) &\leq \mu(O_\lambda) \leq \sum_{Q \in \mathcal{F}} \mu(Q) \\ &\leq \sum_{Q \in \mathcal{F}} \frac{1}{\lambda} \int_Q f d\mu \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Con esto último arribamos a que $(T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1})^*$ es débil $(1, 1)$ con cota independiente de ϑ , pero dependiente de ϵ en la forma c/ϵ . Usando el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz (ver [25], pág.30) deducimos que $(T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1})^*$ está acotado en $L^p(X)$ para $1 < p \leq 2$, específicamente

$$\left\| (T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1})^* f \right\|_{L^p(X)} \leq c\epsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(X)}.$$

Luego, por dualidad, obtenemos $\left\| T_{1,0}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right\|_{L^p(X)} \leq c\epsilon^{-\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p(X)}$ para $2 \leq p < \infty$.

Que es lo que queríamos probar. \square

8.3.3. Acotación en $L^p(X)$ de $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$. Aplicaremos a continuación la teoría de integrales singulares sobre espacios de tipo homogéneo, para probar la acotación en $L^p(X)$ del operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$.

TEOREMA 8.3.4. *Si X es α -Ahlfors entonces el operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ está acotado sobre $L^p(X)$ para $1 < p < \infty$. Más específicamente*

$$\begin{aligned} \left\| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right\|_p &\leq \frac{c}{\epsilon^{1/p}} \|f\|_p & 1 < p \leq 2 \\ \left\| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right\|_p &\leq \frac{c}{\epsilon^{1/p'}} \|f\|_p & 2 \leq p < \infty. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 8.1.10 el operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ está acotado en $L^2(X)$ además como vimos antes si $f \in L^2(X) \cap L^p(X)$ entonces

$$T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f(x) = \int_X K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}(x, y) f(y) d\mu(y),$$

y por el Teorema 8.2.4 sabemos que $K_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ es un núcleo estándar, luego aplicando el Teorema 6.5.9 y la Proposición 6.5.16, obtenemos la acotación de $\tilde{T}_{\epsilon,\vartheta}$ sobre $L^p(X)$.

Para hallar la constante de la desigualdad débil (1, 1) se aplican los métodos estándar de acotación de operadores integrales singulares análogamente a lo hecho en la prueba del Teorema 8.3.3, y se obtiene que $\mu(\{|T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f| > \lambda\}) \leq (c/\epsilon) \|f\|_{L^1(X)}$. Como la norma en $L^2(X)$ es $c/\epsilon^{\frac{1}{2}}$, aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz se obtiene el resultado deseado. \square

8.4. El Operador Cuadrático S_ϵ

En esta sección introducimos el *operador cuadrático*, o también denominado *función cuadrado*, S_ϵ asociado a la familia de funciones regulares $\{\tilde{h}_J^{m,\epsilon}\}$ de la Definición 8.0.20, como sigue.

$$(8.4.1) \quad S_\epsilon f(x) := \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \left| \langle f, \tilde{h}_J^{m,\epsilon} \rangle \right|^2 \left| \tilde{h}_J^{m,\epsilon}(x) \right|^2.$$

Mostraremos la acotación de este operador sobre $L^p(X)$. El resultado principal de esta sección saldrá como corolario del siguiente teorema, el cual establece un control de la norma en $L^p(X)$ de S_ϵ por la norma de $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$.

TEOREMA 8.4.2. *Dado $\epsilon > 0$, si $1 \leq p < \infty$, existe una constante positiva B_p , que depende de p y no de ϑ , tal que*

$$\|S_\epsilon f\|_{L^p(X)} \leq B_p \left\| T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right\|_{L^p(X)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos a ϑ_Q^m como una función constante definida sobre el $(0, 1)$, podemos aplicar la desigualdad de Khintchine (cf: [52], pág. 176 o [39], pág. 66) y deducir que, para x fijo, existe A_p y B_p , independientes de ϑ , tal que

$$\begin{aligned} A_p \left\| \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right\|_{L^p(0,1)} &\leq S_\epsilon f(x) \\ &\leq B_p \left\| \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right\|_{L^p(0,1)}. \end{aligned}$$

Elevando todo al exponente p resulta

$$\begin{aligned}
A_p^p \int_0^1 \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m(t) \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right)^p dt &\leq (S_\epsilon f(x))^p \\
&\leq B_p^p \int_0^1 \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m(t) \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right)^p dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
A_p^p \int_X \int_0^1 \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m(t) \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right)^p dt d\mu(x) &\leq \int_X |S_\epsilon f(x)|^p d\mu(x) \\
&\leq B_p^p \int_X \int_0^1 \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m(t) \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right)^p dt d\mu(x) \\
&\leq B_p^p \int_0^1 \int_X \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ m=1, \dots, \#\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m(t) \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right)^p d\mu(x) dt \\
&\leq B_p^p \left\| T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f \right\|_{L^p(X)}^p,
\end{aligned}$$

que es el resultado deseado. □

Teniendo en cuenta el resultado del Teorema 8.3.4 obtenemos el siguiente corolario del Teorema 8.4.2.

COROLARIO 8.4.3. *Si X es α -Ahlfors entonces el operador S_ϵ está acotado en $L^p(X)$.*

8.5. Acotación en $L^p(X, \nu d\mu)$ de $T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1}$

En esta sección veremos que el operador $T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1}$, está acotado sobre $L^p(X, \nu d\mu)$, cuando ν es un peso diádico de Muckenhoupt (ver Definición 6.4.2). Para la prueba del resultado principal, haremos uso de las propiedades y resultados de acotación de los operadores maximales M^{dy} y $M^{\#, \text{dy}}$ dados en las definiciones 6.3.2 y 6.3.3 respectivamente.

Finalizando la sección presentamos un resultado de suficiencia, vía wavelets de Haar, que deben cumplir un par de pesos (ν, w) para estar en la clase A_p^{dy}

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

TEOREMA 8.5.1. *Sea $1 < p < \infty$, $\nu \in A_p^{\text{dy}}$, entonces el operador $T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1}$ está acotado sobre $L^p(X, \nu)$, con constante c/ϵ . Más específicamente*

$$(8.5.2) \quad \left\| T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1} f \right\|_{L^p(X, \nu d\mu)} \leq \frac{c}{\epsilon} \|f\|_{L^p(X, \nu d\mu)}.$$

Antes de demostrar el resultado principal, cuya prueba incluiremos con el objeto de determinar la dependencia de la constante en (8.5.2) en función de ϵ , enunciemos un resultado intermedio que relaciona puntualmente a M^{dy} y $M^{\#, \text{dy}}$. Obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 8.5.3. *Si X es α -Ahlfors, dada f localmente integrable, $1 < s < \infty$ y $T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1}$ es el operador con el que venimos trabajando, entonces*

$$M^{\#, \text{dy}}(T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1} f)(x) \leq \frac{c}{\epsilon} [M^{\text{dy}}(f^s)(x)]^{\frac{1}{s}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $Q \in \mathcal{D}$, $f = f_1 + f_2$ donde $f_1 = f\chi_Q$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \left| T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1} f(y) - T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1} f_2(x) \right| d\mu(y) &\leq \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \left| T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1} f_1(y) \right| d\mu(y) \\ &\quad + \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \left| T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1} f_2(x) - T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1} f_2(y) \right| d\mu(y) \\ &\leq I + II. \end{aligned}$$

Sea c_s la constante de la acotación sobre $L^s(X)$ del operador $T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1}$, dada en el Teorema 8.3.4, esto es, $c_s = c/\epsilon^{1/s}$, si $1 < s < 2$, o $c_s = c/\epsilon^{1/s'}$, si $2 \leq s < \infty$. Podemos estimar I usando la desigualdad de Hölder, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{\mu(Q)} \left(\int_Q \left| T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1} f_1(y) \right|^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \mu(Q)^{\frac{1}{s'}} = \left(\frac{1}{\mu(Q)} \right)^{\frac{1}{s}} \left\| T_{1,1}^{\theta, \epsilon, X, 1} f_1 \right\|_{L^s(X)} \\ &\leq \frac{c_s}{\mu(Q)^{\frac{1}{s}}} \left(\int_Q |f_1|^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leq c_s [M^{\text{dy}}(f^s)(x)]^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

Para II procedemos de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \left| \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ n=1, \dots, \# \mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_J^n \langle f_2, \tilde{h}_J^{n, \epsilon} \rangle (\tilde{h}_J^{n, \epsilon}(x) - \tilde{h}_J^{n, \epsilon}(y)) \right| d\mu(y) \\ &\leq \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ n=1, \dots, \# \mathcal{O}(J)-1}} \left| \int_X f_2(z) \tilde{h}_J^{n, \epsilon}(z) d\mu(z) \right| \int_Q \left| \tilde{h}_J^{n, \epsilon}(x) - \tilde{h}_J^{n, \epsilon}(y) \right| d\mu(y) \end{aligned}$$

Por un lado, si $J \cap Q = \emptyset$ entonces $\int_Q \left| \tilde{h}_J^{n, \epsilon}(x) - \tilde{h}_J^{n, \epsilon}(y) \right| d\mu(y) = 0$. Además, como f_2 es cero sobre Q entonces $\int_X f_2(z) \tilde{h}_J^{n, \epsilon}(z) d\mu(z) = 0$ para todo $J \subseteq Q$. Por lo tanto, sólo consideramos los cubos $J = J(Q)$ tal que $Q \subsetneq J$. Si suponemos que $Q \in \mathcal{D}^i$ y $J(Q) \in \mathcal{D}^j$, entonces por el resultado de la Proposición 8.1.5, ítem C3, la estimación $\left| \tilde{h}_{J(Q)}^{n, \epsilon} \right| \approx \mu(J(Q))^{-\frac{1}{2}}$ y el hecho de que el diámetro de Q es equivalente a δ^i y la desigualdad de Hölder con s y s' , obtenemos la siguiente estimación de II .

$$\begin{aligned} II &\leq \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{\substack{j < i \\ n=1, \dots, \# \mathcal{O}(J(Q))-1}} \left| \int_{J(Q)} f_2(z) \tilde{h}_{J(Q)}^{n, \epsilon}(z) d\mu(z) \right| \int_Q \left| \tilde{h}_{J(Q)}^{n, \epsilon}(x) - \tilde{h}_{J(Q)}^{n, \epsilon}(y) \right| d\mu(y) \\ &\leq \frac{c}{\epsilon \mu(Q)} \sum_{\substack{j < i \\ n=1, \dots, \# \mathcal{O}(J(Q))-1}} \int_{J(Q)} |f_2(z)| \left| \tilde{h}_{J(Q)}^{n, \epsilon}(z) \right| d\mu(z) \frac{1}{\mu(J(Q))^{\frac{1}{2}}} \int_Q \frac{d(x, y)}{\delta^j} d\mu(y) \\ &\leq \frac{c}{\epsilon \mu(Q)} \sum_{\substack{j < i \\ n=1, \dots, \# \mathcal{O}(J(Q))-1}} \frac{1}{\mu(J(Q))} \int_{J(Q)} |f_2(z)| d\mu(z) \delta^{i-j} \mu(Q) \\ &\leq \frac{c}{\epsilon} \sum_{\substack{j < i \\ n=1, \dots, \# \mathcal{O}(J(Q))-1}} \frac{1}{\mu(J(Q))} \left(\int_{J(Q)} |f_2(z)|^s d\mu(z) \right)^{\frac{1}{s}} \mu(J(Q))^{\frac{1}{s'}} \delta^{i-j} \\ &\leq \frac{c}{\epsilon} \sum_{\substack{j < i \\ n=1, \dots, \# \mathcal{O}(J(Q))-1}} \left(\frac{1}{\mu(J(Q))} \int_{J(Q)} |f_2(z)|^s d\mu(z) \right)^{\frac{1}{s}} \delta^{i-j} \\ &\leq \frac{c}{\epsilon} [M^{\text{dy}}(f^s)(x)]^{\frac{1}{s}} \sum_{\substack{j < i \\ n=1, \dots, \# \mathcal{O}(J(Q))-1}} \delta^{i-j} \\ &\leq \frac{c}{\epsilon} [M^{\text{dy}}(f^s)(x)]^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \left| T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f(y) - T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f(x) \right| d\mu(y) \leq \left(c_s + \frac{c}{\epsilon} \right) [M^{\text{dy}}(|f|^s)(x)]^{\frac{1}{s}}.$$

Entonces deducimos que

$$M^{\#, \text{dy}}(T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f)(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{D}} \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \left| T_{1,1}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f(y) - a \right| d\mu(y) \leq \frac{c}{\epsilon} [M^{\text{dy}}(|f|^s)(x)]^{\frac{1}{s}},$$

que es lo que queríamos probar. \square

PRUEBA DEL TEOREMA 8.5.1. Sea $F \subset \mathcal{D}$ tal que $\sharp(F) < \infty$, trabajamos primero con el operador

$$T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f = \sum_{\substack{Q \in F \\ m=1,\dots,\sharp\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}.$$

Dada f localmente integrable, vemos que

$$\begin{aligned} \left| T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f(x) \right| &= \left| \sum_{\substack{Q \in F \\ m=1,\dots,\sharp\mathcal{O}(Q)-1}} \vartheta_Q^m \langle f, \tilde{h}_Q^{m,\epsilon} \rangle \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(x) \right| \\ &\leq c \sum_{\substack{Q \in F, Q \ni x \\ m=1,\dots,\sharp\mathcal{O}(Q)-1}} \frac{1}{\mu(Q)^{\frac{1}{2}}} \int_Q |f(z)| \left| \tilde{h}_Q^{m,\epsilon}(z) \right| d\mu(z) \\ &\leq c \sum_{\substack{Q \in F, Q \ni x \\ m=1,\dots,\sharp\mathcal{O}(Q)-1}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(z)| d\mu(z) \\ &\leq c \sharp F M^{\text{dy}} f(x). \end{aligned}$$

Como M^{dy} está acotada sobre $L^p(X, \nu)$, podemos deducir que $T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f$ está en $L^p(X, \nu)$. Podemos ahora aplicar el Teorema 6.4.4, ítem *iii*), y deducir la existencia de una constante c dependiente sólo de p , de la constante A_p^{dy} de ν y de las constantes geométricas del espacio, tal que

$$\begin{aligned} \int_X \left| T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right|^p \nu d\mu &\leq \int_X \left| M^{\text{dy}} \left(T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right) \right|^p \nu d\mu \\ (8.5.4) \quad &\leq c\nu(X) m_X \left(\left| T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right| \right)^p + c \int_X \left| M^{\sharp,\text{dy}} \left(T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right) \right|^p \nu d\mu. \end{aligned}$$

Recordemos que $m_X f = \frac{1}{\mu(X)} \int_X |f| d\mu$.

El primer sumando de la última desigualdad sólo aparece cuando $\mu(X) < \infty$ y si este es el caso entonces existe $Q \in \mathcal{D}$ tal que $Q = X$. Si tomamos $s > 1$ sabemos, por el Teorema 8.3.4, que el operador $T_{1,1}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$ está acotado sobre $L^s(X)$ y que su norma es menor que c/ϵ , de aquí se deduce lo mismo para $T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1}$. Utilizando la desigualdad de Jensen podemos escribir

$$\begin{aligned} m_X \left(\left| T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right| \right)^s &\leq \frac{1}{\mu(X)} \int_X \left| T_{1,1,F}^{\vartheta,\epsilon,X,1} f \right|^s d\mu \\ &\leq \frac{c}{\epsilon^s \mu(X)} \int_X |f|^s d\mu = \frac{c}{\epsilon^s} m_X (|f|^s). \end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \nu(X) m_X \left(\left| T_{1,1,F}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f \right| \right)^p &= \int_X [m_X \left(\left| T_{1,1,F}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f \right| \right)^s]^{\frac{p}{s}} \nu d\mu \\ &\leq \frac{c}{\epsilon^p} \int_X m_X (|f|^s)^{\frac{p}{s}} \nu d\mu \\ &\leq \frac{c}{\epsilon^p} \int_X [M^{\text{dy}} (|f|^s)(x)]^{\frac{p}{s}} \nu(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Utilizando lo anterior junto con el resultado del Teorema 8.5.3 para el segundo sumando de (8.5.4), podemos concluir que

$$\int_X \left| T_{1,1,F}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f(x) \right|^p \nu(x) d\mu(x) \leq \frac{c}{\epsilon^p} \int_X [M^{\text{dy}} (|f|^s)(x)]^{\frac{p}{s}} \nu(x) d\mu(x),$$

donde c no depende de F ni de ϑ . Como $\nu \in A_p^{\text{dy}}$, existe $s > 1$ tal que $\nu \in A_{p/s}^{\text{dy}}$ (ver [5]). Por lo tanto, como M^{dy} está acotada sobre $L^{p/s}(X, \nu)$ obtenemos la siguiente estimación.

$$\left\| T_{1,1,F}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f \right\|_{L^p(X, \nu d\mu)}^p \leq \frac{c}{\epsilon^p} \|M^{\text{dy}} (|f|^s)\|_{L^{p/s}(X, \nu d\mu)}^{\frac{p}{s}} \leq \frac{c}{\epsilon^p} \| |f|^s \|_{L^{p/s}(X, \nu d\mu)}^{\frac{p}{s}} = \frac{c}{\epsilon^p} \|f\|_{L^p(X, \nu d\mu)}^p.$$

Por último, como c no depende de F ni de ϑ , resulta

$$\left\| T_{1,1,F}^{\vartheta, \epsilon, X, 1} f \right\|_{L^p(X, \nu d\mu)} \leq \frac{c}{\epsilon} \|f\|_{L^p(X, \nu d\mu)}$$

como queríamos demostrar. □

Finalmente abordamos el problema de la detección de A_p como condición necesaria para la acotación con pesos de integrales singulares como las consideradas antes. Comenzamos por el caso de las integrales singulares inducidas por las wavelets de Haar en espacios de tipo homogéneo. Sea \mathcal{H} un sistema de Haar en (X, d, μ) tal que si $h \in \mathcal{H}$ y Q es el soporte diádico de h entonces $|h(x)| \approx \mu(Q)^{-1/2}$ para todo $x \in Q$. Para abreviar diremos que $h \in Q$ si Q es el soporte diádico de h . Tomando

$$\vartheta_{\bar{h}}^1(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = \bar{h} \\ -1 & \text{si } h \neq \bar{h} \end{cases}$$

y

$$\vartheta^2(h) \equiv 1$$

tenemos que $1/2(\vartheta_{\bar{h}}^1 + \vartheta^2) = \delta_{h\bar{h}}$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(T_{0,0}^{\vartheta_{\bar{h}}^1, 0, X, 1} + T_{0,0}^{\vartheta^2, 0, X, 1} \right) (f)(x) &= \pi_{\bar{h}}(f)(x) \\ &= \langle \bar{h}, f \rangle \bar{h}(x). \end{aligned}$$

De modo que, si sabemos que los operadores de la familia $T_{0,0}^{\vartheta, 0, X, 1}$ ($\vartheta = \pm 1$) son acotadas en $L^p(wd\mu)$, uniformemente en ϑ , necesariamente cada π_h es acotado en $L^p(wd\mu)$ con cotas uniformes para $h \in \mathcal{H}$. Siguiendo de alguna manera, los lineamientos para la demostración ya clásica del hecho que A_p es necesaria en \mathbb{R}^n para la acotación de las n transformadas de Riesz podemos probar que la acotación

uniforme en $L^p(wd\mu)$ de $\{\pi_h : h \in \mathcal{H}\}$ implica que $w \in A_p(X, d\mu)$. Supondremos la siguiente propiedad que es trivial para los sistemas de Haar clásicos en el espacio euclídeo.

★ *Existe una constante $c > 0$ tal que para todo Q y para toda elección de x e y en elementos distintos de $\vartheta(Q)$ se tiene que*

$$- \sum_{h'' \in'' Q} h(x)h(y) \geq \frac{c}{\mu(Q)}.$$

Precisamente, si $x \in Q'_1$, $y \in Q'_2$ con Q'_1 y Q'_2 dos hijos distintos de Q entonces la suma $\sum_{h'' \in'' Q} h(x)h(y)$ es negativa y su valor absoluto es del orden de $\mu(Q)^{-1}$.

TEOREMA 8.5.5. *Supongamos que \mathcal{H} verifica ★. Si la familia de operadores $T_{0,0}^{\vartheta,0,X,1}$ está acotada uniformemente en $L^p(wd\mu)$ para toda sucesión ϑ con $|\vartheta| = 1$, con $1 < p < \infty$, entonces $w \in A_p(X, d, \mu)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por las observaciones que proceden al enunciado del Teorema sabemos que existe una constante \tilde{c} tal que para todo Q

$$\begin{aligned} (8.5.6) \quad w \left(\left\{ x \in X : \left| \sum_{h'' \in'' Q} \pi_h(f)(x) \right| > \lambda \right\} \right) &\leq \frac{1}{\lambda^p} \int_X \left| \sum_{h'' \in'' Q} \pi_h f(x) \right|^p w(x) d\mu(x) \\ &\leq \frac{\tilde{c}}{\lambda^p} \sum_{h'' \in'' Q} \int_X |\pi_h f(x)|^p w(x) d\mu \\ &\leq \frac{\tilde{c}}{\lambda^p} \int_X |f|^p w d\mu. \end{aligned}$$

Sea Q'_i uno cualquiera de los hijos de Q . Sea $f \geq 0$, con integral positiva soportada en Q'_i . Sea $x \in Q \setminus Q'_i = \bigcup_{l \neq i} Q'_l$. Entonces por la propiedad ★, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{h'' \in'' Q} \pi_h f(x) \right| &= \left| \int_{Q'_i} \left(\sum_{h'' \in'' Q} h(y)h(x) \right) f(y) d\mu(y) \right| \\ &\geq \frac{c}{\mu(Q)} \int_{Q'_i} f d\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $\lambda = \frac{c}{2\mu(Q)} \int_{Q'_i} f d\mu$ tenemos que el conjunto que w mide en el primer miembro de (8.5.6) contiene a $\bigcup_{l \neq i} Q'_l$. Entonces con esta observación y aquel valor de λ la desigualdad (8.5.6) nos informa que

$$\sum_{l \neq i} w(Q'_l) \leq \frac{c}{\left(\frac{1}{\mu(Q'_i)} \int_{Q'_i} f d\mu \right)^p} \int_{Q'_i} f^p w d\mu.$$

Si en particular tenemos $f \equiv 1$ en Q'_i y nula fuera, tenemos que

$$\sum_{l \neq i} w(Q'_l) \leq c w(Q'_i).$$

De aquí que

$$\begin{aligned} w(Q'_i) &\leq w(Q) = w(Q'_i) + \sum_{l \neq i} w(Q'_l) \\ &\leq (1+c)w(Q'_i). \end{aligned}$$

En otras palabras la medida $w d\mu$, como μ misma, tiene la propiedad de duplicación diádica. Entonces para alguna constante $a > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} a \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_{Q'_i} f d\mu \right)^p &\leq \left(\frac{1}{\mu(Q'_i)} \int_{Q'_i} f d\mu \right)^p \\ &\leq \frac{c}{w(Q)} \int_Q f^p w d\mu, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, \mathcal{O}(Q) - 1$. De aquí que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu \right)^p \leq \frac{c}{w(Q)} \int_Q f^p w d\mu.$$

Como es usual, tomando $f = w^{-\frac{1}{p-1}}$ se obtiene la condición A_p diádica para w . □

Sistemas de Haar y espacios de Banach de funciones definidas sobre espacios de tipo homogéneo

En este capítulo obtenemos caracterizaciones de espacios de Banach de funciones (E.B.F) en términos de coeficientes de Haar.

En el contexto de $L^2(\mathbb{R}^n)$ una de las propiedades más importantes de una base ortonormal de wavelets es que ellas constituyen una base incondicional para muchos espacios de funciones que aparecen en el análisis armónico. Por ejemplo, si Ψ es una de esas bases con ciertas propiedades dadas entonces el sistema Ψ es una base incondicional para los espacios pesados de Lebesgue $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ with $1 < p < \infty$, donde el peso w pertenece a la clase de pesos de Muckenhoupt A_p .

Lo mismo vale cuando consideramos los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p, q < \infty$.

La caracterización de esos espacios funcionales está dada en términos de los coeficientes wavelets en la representación de las funciones (ver por ejemplo [50]). Además si suponemos ciertas propiedades de regularidad sobre las funciones $\psi \in \Psi$, entonces se sabe que el sistema Ψ es también una base incondicional para una clase grande de espacios que incluyen los mencionados anteriormente como también los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ y los espacios de Hardy $H_p(\mathbb{R}^n)$ ([42], [22]).

En el contexto euclídeo, Izuki probó en [36] que las bases de wavelets con ciertas condiciones de regularidad son una base incondicional para el espacio de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Para probar el resultado en [36], el autor usó las técnicas de extrapolación debidas a Rubio de Francia ([48], [49]), debido al hecho de que la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood se satisface sobre $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Para aplicar el teorema de Extrapolación Izuki usa los resultados de [7].

En espacios de Lebesgue de exponente variable, muchos autores estudiaron las propiedades de continuidad de ciertos operadores que aparecen en conexión con ecuaciones diferenciales parciales modelando una alta variedad de situaciones. Particularmente, en [24] y [21] los autores probaron la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood sobre $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ suponiendo ciertas propiedades de continuidad sobre el exponente $p(\cdot)$, y en [34] el mismo resultado fue probado en el contexto de espacios métricos.

El sistema Ψ mencionado anteriormente caracteriza los espacios funcionales en el sentido de que la norma de la función f puede obtenerse en términos de los coeficientes wavelets $\langle \psi, f \rangle$ en la fórmula de representación $\sum \langle \psi, f \rangle \psi$. En esta sección adoptamos este punto de vista en el ámbito de espacios métricos con medida doblante o espacios de tipo homogéneo. Más precisamente, probamos que el los sistemas de tipo Haar son una base incondicional para ciertos espacios de Banach de funciones (E.B.F). Como una aplicación de nuestro resultado principal obtenemos la caracterización de varios espacios via los coeficientes wavelets, tales como los espacios de

Lorentz y Lebesgue sobre espacios de tipo homogéneo y sus versiones variables. La técnica usada es análoga a la de [36] y los resultados de [6].

9.1. Caracterización de espacios de Banach de funciones por wavelets de Haar

Para enunciar nuestro resultado principal damos algunas definiciones con las que trabajaremos. Denotamos L_c^∞ al espacio de las funciones acotadas con soporte compacto definido por

$$L_c^\infty = L_c^\infty(X, \mu) = \{f \in L^\infty(X) / \text{sop}(f) \subset B(x_0, r) \text{ para algún } x_0 \in X, r > 0\}.$$

Diremos que \mathbb{B} es un E.B.F. con la propiedad \mathfrak{A} , si L_c^∞ es denso en \mathbb{B} y existe un número real $p_1 > 1$ tal que \mathbb{B}^{1/p_1} es un E.B.F. cumpliendo que

$$\|M^{\text{dy}} f\|_{(\mathbb{B}^{1/p_1})'} \leq c \|f\|_{(\mathbb{B}^{1/p_1})'},$$

donde M^{dy} es el operador Maximal diádico de Hardy-Littlewood dado en la Definición 6.3.2.

Ahora estamos en condición de enunciar y probar el resultado principal del capítulo.

TEOREMA 9.1.1. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y \mathcal{H} un sistema de Haar. Sea \mathbb{B} un E.B.F. con la propiedad \mathfrak{A} . Entonces \mathcal{H} es una base incondicional para \mathbb{B} . Además, existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que, para cualquier $f \in \mathbb{B}$, las siguientes desigualdades se cumplen*

$$(9.1.2) \quad c_1 \|f\|_{\mathbb{B}} \leq \|Sf\|_{\mathbb{B}} \leq c_2 \|f\|_{\mathbb{B}},$$

donde

$$(9.1.3) \quad \mathcal{S}(f)(x) = \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} |\langle f, h \rangle|^2 |h(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Notemos que, en principio, dada una función arbitraria f en \mathbb{B} , la definición de Sf puede no tener sentido. Sin embargo como trabajamos sobre \mathbb{B} con la propiedad \mathfrak{A} , el operador S puede definirse usando un argumento de extensión.

PRUEBA DEL TEOREMA 9.1.1. Sea $f \in L_c^\infty$ y $F \subset \mathcal{H}$ con $\sharp(F) < \infty$ entonces

$$S_F f = \left(\sum_{h \in F} |\langle f, h \rangle|^2 |h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \in L_c^\infty \subset \mathbb{B}.$$

Definiendo $\mathfrak{F}_1 = \{(|f|, Sf) : f \in L_c^\infty\}$ y $\mathfrak{F}_{2,F} = \{(S_F f, |f|) : f \in L_c^\infty\}$, obtenemos dos familias \mathbb{B} -admisibles (ver Definición 6.6.1) y por el Teorema 6.7.2 es fácil verificar que las siguientes desigualdades se cumplen

$$C_1 \|f\|_{L^{p_0}(X, w d\mu)} \leq \|Sf\|_{L^{p_0}(X, w d\mu)} ; \|S_F f\|_{L^{p_0}(X, w d\mu)} \leq C_2 \|f\|_{L^{p_0}(X, w d\mu)} \quad \forall w \in A_{p_0}^{\text{dy}}.$$

Ahora, por hipótesis y aplicando el Teorema de Extrapolación 6.6.2 obtenemos la existencia de dos constantes positivas C'_1 y C'_2 tal que

$$(9.1.4) \quad \|f\|_{\mathbb{B}} \leq C'_1 \|Sf\|_{\mathbb{B}}$$

y

$$(9.1.5) \quad \|S_F f\|_{\mathbb{B}} \leq C'_2 \|f\|_{\mathbb{B}}.$$

Es importante notar que C'_2 no depende de $F \subset \mathcal{H}$.

Sea $\{F_n\}$ una sucesión tal que $F_n \subset F_{n+1}$ y $\cup F_n = \mathcal{H}$. Entonces para cualquier función $f \in L_c^\infty$ y $x \in X$ obtenemos que $S_{F_n} f(x) \nearrow S f(x)$, y de este modo, por las propiedades de E.B.F. y (9.1.5)

$$(9.1.6) \quad \|S f\|_{\mathbb{B}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{F_n} f\|_{\mathbb{B}} \leq c_2 \|f\|_{\mathbb{B}} \quad \text{para toda } f \in L_c^\infty(X).$$

Entonces, de (9.1.4) y (9.1.6) podemos concluir que

$$(9.1.7) \quad c_1 \|f\|_{\mathbb{B}} \leq \|S f\|_{\mathbb{B}} \leq c_2 \|f\|_{\mathbb{B}} \quad \text{para toda } f \in L_c^\infty(X).$$

El resultado general para $f \in \mathbb{B}$ se deduce aplicando un argumento de densidad, como sigue. Primero veamos que $\|S f\|_{\mathbb{B}} \leq c_2 \|f\|_{\mathbb{B}}$ para toda $f \in \mathbb{B}$. Sea $\{f_k\} \subset L_c^\infty$ tal que $\|f_k - f\|_{\mathbb{B}} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Usando el Lema de Fatou podemos escribir

$$S f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} S f_k(x)$$

y consecuentemente, por (9.1.7)

$$(9.1.8) \quad \|S f\|_{\mathbb{B}} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|S f_k\|_{\mathbb{B}} \leq c_2 \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{\mathbb{B}} \leq c_2 \|f\|_{\mathbb{B}} \quad \text{para toda } f \in \mathbb{B}.$$

Del hecho que $S f_k(x) \leq 2[S(f - f_k)(x) + S f(x)]$ la otra desigualdad puede obtenerse del caso previo, de la siguiente manera

$$(9.1.9) \quad \begin{aligned} \|f\|_{\mathbb{B}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{\mathbb{B}} \leq c \liminf_{k \rightarrow \infty} \|S f_k\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq c \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \|S(f_k - f)\|_{\mathbb{B}} + \|S f\|_{\mathbb{B}} \right) \\ &\leq c \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{\mathbb{B}} + \|S f\|_{\mathbb{B}} \right) \\ &\leq c \|S f\|_{\mathbb{B}} \quad \text{para toda } f \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de (9.1.2).

Ahora veremos que el sistema de Haar es una base incondicional para \mathbb{B} .

Dada $h \in \mathcal{H} \subset \mathbb{B}'$, definimos $h^* : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h^*(f) := \int_X h f d\mu = \langle f, h \rangle$. Estos operadores satisfacen

$$h^*(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{si } g \neq h \end{cases}.$$

Para $F \subset \mathcal{H}$ con $\sharp(F) < \infty$ definimos

$$T_F f = \sum_{h \in F} \langle f, h \rangle h.$$

Usamos el resultado previo para verificar que estos operadores están acotados en \mathbb{B} con constante independiente de F . En efecto, dada $f \in \mathbb{B}$ y $g \in \mathcal{H}$ obtenemos que

$$\langle T_F f, g \rangle = \sum_{h \in F} \langle h, f \rangle \langle h, g \rangle = \begin{cases} \langle f, g \rangle & \text{si } g \in F \\ 0 & \text{si } g \notin F \end{cases}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
 S(T_F f)(x) &= \left(\sum_{g \in \mathcal{H}} |\langle T_F f, g \rangle|^2 |g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\sum_{g \in F} |\langle f, g \rangle|^2 |g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 (9.1.10) \quad &\leq S(f)(x)
 \end{aligned}$$

Finalmente, por (9.1.9), (9.1.10) y (9.1.8) obtenemos

$$\|T_{\mathcal{F}} f\|_{\mathbb{B}} \leq C \|S(T_{\mathcal{F}} f)\|_{\mathbb{B}} \leq C \|S(f)\|_{\mathbb{B}} \leq C \|f\|_{\mathbb{B}}.$$

Ahora probaremos que el span lineal de $\tilde{\mathcal{H}}$ es denso en \mathbb{B} . Por las hipótesis sobre \mathbb{B} , es suficiente probar que el span lineal de $\tilde{\mathcal{H}}$ es denso sobre L_c^∞ con la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$. Sea $\epsilon > 0$ dado y $g \in L_c^\infty$. Como el span lineal de $\tilde{\mathcal{H}}$ es denso en $L_w^{p_0}(X)$ para $1 < p_0 < \infty$ y $w \in A_{p_0}^{\text{dy}}$ (ver [6], Teorema 9.1) y $g \in L_w^{p_0}(X)$, existe $f \in \text{span}(\tilde{\mathcal{H}})$ tal que

$$\|f - g\|_{L_w^{p_0}(X)} \leq \frac{\epsilon w(B)^{\frac{1}{p_0}}}{C_1 \|\chi_B\|_{\mathbb{B}}} = \left\| \frac{\epsilon w(B)^{\frac{1}{p_0}}}{C_1 \|\chi_B\|_{\mathbb{B}}} \frac{\chi_B}{w(B)^{\frac{1}{p_0}}} \right\|_{L_w^{p_0}(X)},$$

donde B es una bola fija en X y C_1 es la constante en (6.6.5).

Por otro lado, $f - g \in L_c^\infty(X) \subset \mathbb{B}$, $f - g \in L_w^{p_0}$ y $\|f - g\|_{\mathbb{B}} < \infty$.

Ahora consideramos la familia $\mathfrak{F} := \{(f - g, \epsilon \frac{\chi_B}{C_1 \|\chi_B\|_{\mathbb{B}}})\}$. Debido a que \mathbb{B} tiene la propiedad \mathfrak{A} podemos aplicar el Teorema 6.6.2 para obtener

$$\|f - g\|_{\mathbb{B}} \leq C_1 \left\| \epsilon \frac{\chi_B}{C_1 \|\chi_B\|_{\mathbb{B}}} \right\|_{\mathbb{B}} = \epsilon,$$

de este modo el resultado de densidad está probado. \square

9.1.1. Algunos casos particulares. En esta subsección mostramos algunos ejemplos de E.B.F. los cuales satisfacen las hipótesis del Teorema 9.1.1.

a) $\mathbb{B} = L^p(X, \mu)$, $1 < p < \infty$. El Teorema 9.1.1 no es más que el Teorema 6.7.2 (el cual es el Teorema 7.1 en [6]). De hecho, en [6] los autores probaron la acotación de M^{dy} en $L^p(X, \mu)$ para cualquier $1 < p < \infty$ y la densidad de $L_c^\infty(X, \mu)$ en $L^p(X, \mu)$, que es la propiedad \mathfrak{A} en este caso.

b) $\mathbb{B} = L^{p,q}(X, \mu)$ los espacios de Lorentz con $1 < p, q < \infty$, de todas las funciones medibles f definidas sobre X tal que $\|f\|_{p,q}^* := \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty (t^p f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$, donde f^* es la reordenada no creciente de f . Se sabe que $\|\cdot\|_{p,q}^*$ no es una norma en $L^{p,q}(X, \mu)$ pero podemos siempre definir una norma equivalente sobre ese espacio, (ver por ejemplo [35] y [40]).

En este contexto el Teorema 9.1.1 está contenido en el Teorema 6.1 de [46], debido a que en el mismo artículo el autor prueba que M^{dy} está acotada sobre $L^{p,q}(X, \mu)$ para cualquier $1 < p, q < \infty$.

c) $\mathbb{B} = L^{p(\cdot)}(X, \mu)$ los espacios de Lebesgue de exponente variable.

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo localmente compacto y $p : X \rightarrow [1, \infty)$ una función medible. Para $A \subset X$ definimos

$$p_A^- := \inf_{x \in A} p(x) \quad p_A^+ := \sup_{x \in A} p(x).$$

Por simplicidad denotamos $p^+ = p_X^+$, $p^- = p_X^-$. También supondremos que $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ para $x \in X$.

El espacio de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}(X) = L^{p(\cdot)}(X, \mu)$ consiste en las funciones μ -medibles f definidas sobre X tales que, para algún λ positivo, el funcional modular convexo $\rho(f/\lambda) := \int_X |f(x)/\lambda|^{p(x)} d\mu(x)$ es finito. Una norma de Luxemburg puede definirse en $L^{p(\cdot)}(X)$ tomando

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf \{ \lambda > 0 / \rho(f/\lambda) \leq 1 \}.$$

Esos espacios son un caso especial de espacios de Museliak-Orlicz, (ver [45]), y generalizan los espacios de Lebesgue clásicos.

Algunos de los siguientes resultados fueron obtenidos en el contexto euclídeo (ver por ejemplo [38]), pero puede probarse que también se cumplen en el contexto de espacios de tipo homogéneos (para espacios métricos ver [34]). Por ejemplo, puede verse que $(L^{p(\cdot)}(X), \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ es un E.B.F. por otro lado el espacio dual de $L^{p(\cdot)}(X)$ es $L^{p'(\cdot)}(X)$ y la desigualdad de Hölder se cumple, esto es

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq C \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}.$$

También fue probado en [34] que $C_0(X, \mu)$, y consecuentemente $L_c^\infty(X, \mu)$, son densos en $L^{p(\cdot)}(X, \mu)$ cuando X es un espacio localmente compacto. De este modo el Teorema 9.1.1 se cumple si pedimos que M esté acotada sobre $L^{p(\cdot)}$ con $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$. En [34] los autores probaron que si X es un espacio α -Ahlfors con medida finita y $p(\cdot)$ satisface las condiciones de continuidad log-Hölder

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{-\log(d(x, y))}$$

cuando $d(x, y) < \frac{1}{2}$, para alguna constante positiva C , entonces M está acotada sobre $L^{p(\cdot)}(X, \mu)$.

d) $\mathbb{B} = \mathcal{L}_w^{p(\cdot), q(\cdot)}(\Omega)$ los espacios de Lorentz pesados de exponente variable. Si Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , en [26] los autores definieron los espacios de Lorentz pesados de exponente variable, como el conjunto $\mathcal{L}_w^{p(\cdot), q(\cdot)}(\Omega)$ de las funciones medibles f tales que la norma $\|f\|_{\mathcal{L}_w^{p(\cdot), q(\cdot)}(\Omega)} := \left\| w(t) t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} f^*(t) \right\|_{L^{q(\cdot)}([0, |\Omega|])}$ es finita.

En el mismo artículo los autores prueban que este es un E.B.F. con la propiedad \mathfrak{A} (ver [26], Teorema 3.12), cuando $w(t) = t^{\gamma(t)}$, para una cierta función γ , y para $p, q \in \mathbb{P}_1([0, |\Omega|])$, que consiste en aquellas funciones r de $L^\infty([0, |\Omega|])$ tal existe el límite cuando $t \rightarrow 0$ y cuando $t \rightarrow |\Omega|$ de $r(t)$ y además $1 < r^- \leq r^+ < \infty$.

Conclusiones

- Si a cada wavelet de Haar h_Q en $L^2(\mathbb{R}^n, wdx)$, con w un peso de Muckenhoupt, se le achica su soporte, multiplicándola por la característica de un conjunto interior a éste χ_{E_Q} , la familia de funciones perturbadas constituye una base de Riesz, siempre y cuando el conjunto $Q \setminus E$ tenga medida suficientemente chica, y además la función perturbada conserve el promedio nulo.
- Hallamos bases de Riesz por perturbación de sistemas de Haar de funciones regulares y que además tienen soporte compacto y cercanos a los cubos diádicos.
- La estabilidad como base de Riesz de los sistemas de Haar perturbados por reducción de soporte está garantizada si la proporción en cada escala y cada lugar entre las medidas de los soportes perturbados y los soportes originales es uniformemente chica. En casos euclídeos.
- Obtenemos condiciones geométricas de dimensión para garantizar la validez de la estabilidad del punto anterior en espacios Ahlfors.
- Para espacios L^2 con pesos de variables separadas en \mathbb{R}^n las bases de Haar pueden regularizarse hasta continuidad prácticamente sin perder soporte.
- Las integrales singulares asociadas a sumabilidad de perturbaciones son de Calderón-Zygmund y su acotación en espacios L^p se extiende a los espacios de Lebesgue con pesos de Muckenhoupt.
- Hay suficiente integrales singulares en espacios de tipo homogéneo como para que los pesos de Muckenhoupt y por lo tanto la acotación de la maximal de Hardy-Littlewood, queden caracterizadas por la acotación de integrales singulares.
- Caracterizamos varios espacios funcionales entre ellos los de Lebesgue con exponentes variables, usando las wavelets de Haar en espacios de tipo homogéneos.
- Se pone en evidencia de nuevo, la versatilidad del Lema de Cotlar y de la Teoría de Calderón-Zygmund.

Bibliografía

- [1] Aimar, Hugo. *Singular integrals and approximate identities on spaces of homogeneous type*. Trans. Amer. Math. Soc. 292 (1985), no. 1, 135-153. (Reviewer: Douglas Kurtz) 42B20 (42B25).
- [2] Aimar Hugo. *Operadores integrales singulares y aproximaciones a la identidad en espacios de tipo homogéneo*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Biblioteca Central.(1983).
- [3] Aimar Hugo. *Construction of Haar type bases on quasi-metric spaces with finite Assouad dimension*, Anal. Acad. Nac. Cs. Ex., F. y Nat., Buenos Aires 54 (2004).
- [4] Aimar, H. A.; Bernardis, A. L.; Gorosito, O. P. *Perturbations of the Haar wavelet by convolution*. Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 12, 3619-3621. (Reviewer: Pierre Vandergheynst) 42C40.
- [5] Aimar, Hugo; Bernardis, Ana; Iaffei, Bibiana. *Comparison of Hardy-Littlewood and dyadic maximal functions on spaces of homogeneous type*. (English summary) J. Math. Anal. Appl. 312 (2005), no. 1, 105-120. 42B25 (42B35).
- [6] Aimar, Hugo; Bernardis, Ana; Iaffei, Bibiana. *Multiresolution approximations and unconditional bases on weighted Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type*. J. Approx. Theory 148 (2007), no. 1, 12-34. (Reviewer: Árpád Bényi) 42C15 (28C15 42B20 46E30).
- [7] Aimar, H. A.; Bernardis, A. L.; Martín-Reyes, F. J. *Multiresolution approximations and wavelet bases of weighted L_p spaces*. J. Fourier Anal. Appl. 9 (2003), no. 5, 497-510. (Reviewer: Alexander M. Lindner) 42C40 (42B35 46B15).
- [8] Aimar, Hugo; Bernardis, Ana; Nowak, Luis *Equivalence of Haar bases associated with different dyadic systems*. J. Geom. Anal. 21 (2011), no. 2, 288-304. (Reviewer: Ole Christensen) 42C40 (42B30 42C15).
- [9] Aimar, Hugo; Gorosito Osvaldo *unconditional Haar bases for Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type*. Proceeding of SPIE. 2000. San Diego.
- [10] Auscher, Pascal; Hytönen, Tuomas. *Orthonormal bases of regular wavelets in spaces of homogeneous type*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 34 (2013), no. 2, 266-296. (Reviewer: Joseph D. Lakey) 42C40 (42C05).
- [11] Calderón, A.-P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. 24 1964 113-190. (Reviewer: J. Peetre) 46.38 (46.10).
- [12] Coifman, Ronald R.; de Guzmán, Miguel *Singular integrals and multipliers on homogeneous spaces*. Collection of articles dedicated to Alberto González Domínguez on his sixty-fifth birthday. Rev. Un. Mat. Argentina 25 (1970/71), 137-143. (Reviewer: C. F. Dunkl) 43A85 (43A22).
- [13] Bennett, Colin; Sharpley, Robert. *Interpolation of operators*. Pure and Applied Mathematics, 129. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. xiv+469 pp. ISBN: 0-12-088730-4 (Reviewer: Mario Milman) 46-02 (46E30 46Exx 46M35).
- [14] Christ, Michael A T(b) theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. Colloq. Math. 60/61 (1990), no. 2, 601-628. (Reviewer: Michael J. Wilson) 42B20 (42B25 42B30).
- [15] Christensen, Ole. *An introduction to frames and Riesz bases*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003. xxii+440 pp. ISBN: 0-8176-4295-1 (Reviewer: R. A. Zalik) 42-02 (42C15 42C40 46B15 46C05).
- [16] Coifman, Ronald R.; Meyer, Yves *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*. (French) [Beyond pseudodifferential operators] With an English summary. Astérisque, 57. Société Mathématique de France, Paris, 1978. i+185 pp. 47G05 (35S05 42B20 58G15).

- [17] Coifman, Ronald R.; Weiss, Guido *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes.* (French) Étude de certaines intégrales singulières. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. v+160 pp. 43A85 (22E30).
- [18] Cotlar, M. *A combinatorial inequality and its applications to L_2 -spaces.* Rev. Mat. Cuyana 1 (1955), 41-55 (1956). (Reviewer: E. Hewitt) 46.1X.
- [19] Cruz-Uribe, David V.; Martell, José Maria; Pérez, Carlos. *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia.* Operator Theory: Advances and Applications, 215. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. xiv+280 pp. ISBN: 978-3-0348-0071-6 (Reviewer: Javier Duoandikoetxea) 42-02 (35A23 42B25 46B70 46E15).
- [20] Cruz-Uribe, D.; Fiorenza, A.; Martell, J. M.; Pérez, C. *The boundedness of classical operators on variable L_p spaces.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006), no. 1, 239-264. (Reviewer: Sergei F. Lukomskii) 42B25 (42B15 42B20 47B38).
- [21] Cruz-Uribe, D.; Fiorenza, A.; Neugebauer, C. J. *The maximal function on variable L_p spaces.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 28 (2003), no. 1, 223-238. (Reviewer: A. È. Djrbashian) 42B25 (42B35).
- [22] Daubechies, Ingrid. *Ten lectures on wavelets.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992. xx+357 pp. ISBN: 0-89871-274-2 (Reviewer: Albert Cohen) 42C15 (94A12).
- [23] Daubechies, Ingrid. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets.* Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), no. 7, 909-996. (Reviewer: Hans G. Feichtinger) 42C15 (92A25).
- [24] Diening, L. *Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$.* Math. Inequal. Appl. 7 (2004), no. 2, 245-253. (Reviewer: Lubos Pick) 42B25 (46E30).
- [25] Duoandikoetxea Javier. *Fourier Analysis.* American Mathematical Society (2000).
- [26] Ephremidze, Lasha; Kokilashvili, Vakhtang; Samko, Stefan. *Fractional, maximal and singular operators in variable exponent Lorentz spaces.* Fract. Calc. Appl. Anal. 11 (2008), no. 4, 407-420. 46E30 (42B25 47B38 47G10).
- [27] Falconer, Kenneth. *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition.* John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003. xxviii+337 pp. ISBN: 0-470-84861-8 (Reviewer: Esa A. Järvenpää) 28-01 (00A69 11K55 28A75 28A78 28A80 37C45 37F10).
- [28] Favier, S. J.; Zalik, R. A. *On the stability of frames and Riesz bases.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 2 (1995), no. 2, 160-173. 42C15 (46B15 46E99).
- [29] Folland, Gerald B.(1-WA). *Real analysis. Modern techniques and their applications.* Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. xvi+386 pp. ISBN: 0-471-31716-0 00A05 (26-01 28-01 46-01).
- [30] García-Cuerva, José(E-SALA); Rubio de Francia, José L.(E-MADA) *Weighted norm inequalities and related topics.* North-Holland Mathematics Studies, 116. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. x+604 pp. ISBN: 0-444-87804-1 42B20 (42B25 46Exx 47B38).
- [31] Govil, N. K.; Zalik, R. A. *Perturbations of the Haar wavelet.* Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 11, 3363-3370. (Reviewer: Xian Liang Shi) 42C99 (41A30).
- [32] de Guzmán, Miguel. *Real variable methods in Fourier analysis.* North-Holland Mathematics Studies, 46. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 75. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981. xiii+392 pp. ISBN: 0-444-86124-6 42B25 (42B20).
- [33] Haar, Alfred; *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.* (German) Math. Ann. 69 (1910), no. 3, 331-371.
- [34] Harjulehto, Petteri; Hästö, Peter; Pere, Mikko *Variable exponent Lebesgue spaces on metric spaces: the Hardy-Littlewood maximal operator.* Real Anal. Exchange 30 (2004/05), no. 1, 87-103. (Reviewer: Charles N. Moore) 42B20 (46E30).
- [35] Hunt, Richard A. *On $L(p,q)$ spaces.* Enseignement Math. (2) 12 1966 249-276. (Reviewer: C. Goulaouic) 46.35.
- [36] Izuki, Mitsuo *Wavelets and modular inequalities in variable L_p spaces.* Georgian Math. J. 15 (2008), no. 2, 281-293. 42C40 (42B35 42C15 46E30).
- [37] Konverpää, Janne. *Dyadic cubes in spaces of homogeneous type.* arXiv:1301.3678v1 [math.MG] 16 Jan. 2013.

- [38] Kováčik, Ondrej; Rákosník, Jiří. *On spaces $L_p(x)$ and $W_{k,p}(x)$* . Czechoslovak Math. J. 41(116) (1991), no. 4, 592-618. (Reviewer: H. Triebel) 46E35 (35J65 46E30 47H30).
- [39] Lindenstrauss, Joram; Tzafriri, Lior *Classical Banach spaces. I. Sequence spaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. xiii+188 pp. ISBN: 3-540-08072-4 (Reviewer: S. V. Kisljakov) 46-02 (46A45 46BXX).
- [40] Lorentz, G. G. *On the theory of spaces A* . Pacific J. Math. 1, (1951). 411-429. (Reviewer: G. Piranian) 46.3X.
- [41] Macías, Roberto A.; Segovia, Carlos. *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*. Adv. in Math. 33 (1979), no. 3, 257-270. (Reviewer: Sun Yung A. Chang) 32A35 (42B30).
- [42] Meyer, Yves Wavelets and operators. Translated from the 1990 French original by D. H. Salingler. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 37. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. xvi+224 pp. ISBN: 0-521-42000-8; 0-521-45869-2 42-02 (42C15 46E30 47G99).
- [43] Morana Federico. *El Lema de Cotlar y Aplicaciones*. Noticiero de la Unión Matemática Argentina. vol.52.Dic. (2012).
- [44] Hunt, Richard; Muckenhoupt, Benjamin; Wheeden, Richard. *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*. Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227-251. (Reviewer: P. G. Rooney) 42A40 (44A15 47G05).
- [45] Musielak, Julian. *Orlicz spaces and modular spaces*. Lecture Notes in Mathematics, 1034. Springer-Verlag, Berlin, 1983. iii+222 pp. ISBN: 3-540-12706-2 (Reviewer: K. Sundaresan) 46E30 (46-02 46A15).
- [46] Nowak, Luis *Haar type bases in Lorentz spaces via extrapolation*. Rev. Un. Mat. Argentina 53 (2012), no. 1, 71-83. (Reviewer: R. A. Zalík) 42C15 (28C15 42B20).
- [47] Pradolini, Gladis; Salinas, Oscar. *Commutators of singular integrals on spaces of homogeneous type*. Czechoslovak Math. J. 57(132) (2007), no. 1, 75-93. (Reviewer: Joan Mateu) 42B25.
- [48] Rubio de Francia, José Luis *Factorization and extrapolation of weights*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7 (1982), no. 2, 393-395. (Reviewer: Roberto A. Macías) 42B25.
- [49] Rubio de Francia, José Luis. *A new technique in the theory of A_p weights*. Topics in modern harmonic analysis, Vol. I, II (Turin/Milan, 1982), 571-579, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Rome, 1983. (Reviewer: Kenneth F. Andersen) 47B38 (42B25 47A68).
- [50] Soardi, Paolo M. *Wavelet bases in rearrangement invariant function spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 12, 3669-3673. (Reviewer: Eugenio Hernández) 42C15.
- [51] Stein, Elias M. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. With the assistance of Timothy S. Murphy*. Princeton Mathematical Series, 43. Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. xiv+695 pp. ISBN: 0-691-03216-5 (Reviewer: Michael Cowling) 42-02 (35Sxx 43-02 47G30).
- [52] Wojtaszczyk, P. *A mathematical introduction to wavelets*. London Mathematical Society Student Texts, 37. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. xii+261 pp. ISBN: 0-521-57020-4; 0-521-57894-9 (Reviewer: Rodolfo Torres) 42C15 (42B05 42C10).
- [53] Zalík, Richard A. *A class of quasi-orthogonal wavelet bases*. Wavelets, multiwavelets, and their applications (San Diego, CA, 1997), 81-94, Contemp. Math., 216, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. (Reviewer: Dinh Dung) 42C15 (46B15 46C99).