UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de **Doctor en Matemática** en el campo del **Análisis Armónico**.

Desigualdades con dos pesos para operadores fraccionarios asociados al operador de Schrödinger

Institución donde se realizó:
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET - UNL)
Facultad de Ingeniería Química (UNL)

Autora:
María Amelia Vignatti.
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Director:
Oscar Mario Salinas.
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Codirectora:
Silvia Inés Hartzstein
FIQ (UNL)

Jurados:

Sheldy Ombrosi
INMABB, (UNS-CONICET)
Carlos Pérez
BCAM (Univ. del País Vasco)
Roberto Scotto
FIQ (UNL)

SANTA FE - ARGENTINA
2017

Dedicado a mis directores Oscar y Silvia

Agradecimientos

Gracias, de corazón, a mis directores, los doctores Oscar Mario Salinas y Silvia Inés Hartzstein. Gracias por su paciencia, dedicación, motivación, criterio y aliento. Han hecho fácil lo difícil y por sobre todas las cosas confiaron en mi. Ha sido un privilegio poder contar con su guía, ayuda y consejos. Gracias por brindarme sus conocimientos con tanta humildad y hacer de cada reunión de trabajo un encuentro cálido, donde la pizarra siempre estaba repleta de cuentas, algunas salían, otras no, momentos de risas y a la vez de preocupación por no encontrarle la vuelta a los problemas que queríamos investigar, pero nunca sola, siempre en equipo, siempre motivada.

Gracias a todas las personas del Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL) por su atención, amabilidad, buena energía y acompañamiento. Por incentivarme cuando veía imposible lo posible, ayudándome cuando alguna palabrita del tex no me dejaba compilar, compartir conmigo sus experiencias que me fueron útiles en ese momento y convidarme un matecito que me daba la energía justa para seguir.

Y por encima de todo, gracias a los míos, a mi familia, por su amor, confianza, fuerzas, contención y apoyo, en especial a mi amor Luciano, quien fue mi oído en las tantas pruebas de la defensa de la tesis, que a pesar de ser un tema desconocido para el nunca faltó su atención, siempre alentándome. Un agradecimiento especial también, a mi hermana melli Sol que estuvo acompañando cada paso de mi trayecto, junto a mi sobrino y ahijado Patricio que desde la pancita de su mamá me daba la medida justa de cariño que necesitaba. En fin gracias a todos, los que están, y lamentablemente los que no lo están, pero se que de alguna forma me acompañan, y desde su lugar me dieron fuerzas y energías positivas para poder llegar a donde hoy estoy. Gracias por tanto!, los quiero muchísimo.

Índice general

Resumen

Sea $\mathcal{L} = -\Delta + V$ el operador de Schrödinger en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, donde Δ es el operador Laplaciano en $\mathbb{R}^n$ y V una función no negativa que satisface una desigualdad de Hölder inversa de orden q_0, para algún $q_0 \geq \frac{n}{2}$, esto es

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q V(y)^{q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q V(y) dy,$$

para alguna constante C y para toda bola $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Relacionada al potencial V, está definida una función llamada radio crítico ρ,

$$\rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\},$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$.Esta función tiene un importante papel en la estimación de operadores asociados a $\mathcal{L}$. En particular, en nuestro trabajo, nos ocuparemos, de la integral fraccionaria. Este operador puede ser expresado en términos del semigrupo del calor generado por $\mathcal{L}$ en la forma

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = \mathcal{L}^{-\frac{\alpha}{2}} f(x) = \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}} f(x) t^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{t}, \quad 0 < \alpha < n.$$

Aquí, para cada $t > 0$, el operador $e^{-t\mathcal{L}}$ es un operador integral con un núcleo $k_t(x, y)$. Además, consideramos su correspondiente conmutador

$$\mathcal{I}_{\alpha,b} f = b\mathcal{I}_\alpha f - \mathcal{I}_\alpha(bf),$$

donde b es una función es un espacio asociado a la función de radio crítico ρ y más amplio que el espacio BMO de funciones de oscilación media acotada.

En este trabajo se determinan condiciones suficientes, relacionadas con ρ, sobre pares de pesos (μ, ν) que garantizan desigualdades débiles y fuertes en $\mathbb{R}^n$ entre espacios L^p con pesos para $\mathcal{I}_\alpha$ e $\mathcal{I}_{\alpha,b}$. Los métodos utilizados, involucran la demostración de acotaciones con dos pesos de adecuados operadores maximales definidos en el contexto Schrödinger y desigualdades de tipo Fefferman-Stein, que permiten relacionar los operadores de interés en norma fuerte y débil entre espacios L^q con pesos con los operadores maximales definidos, extendiendo algunos resultados clásicos. Además, con argumentos análogos a los

empleados para $\mathcal{I}_\alpha$ e $\mathcal{I}_{\alpha,b}$, logramos extender las desigualdades fuertes para los conmutadores de orden superior $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$, obteniendo como consecuencia de estos resultados, que el operador $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$ es acotado de $L^p(\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)\rho^{\alpha(p-s)})$ a $L^p(\omega)$ para $s \leq p$ con $\alpha s < n$, donde $\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}$ es el operador maximal fraccionario Schrödinger y $M^{[(m+1)p]}$ es el operador maximal de Hardy- Littlewood iterado $[(m+1)p]$ veces, donde $[(m+1)p]$ es la parte entera de $(m+1)p$ y ω es una función no negativa localmente integrable en $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, exploramos nuevamente una desigualdad de tipo débil para la integral fraccionaria pero bajo condiciones diferentes sobre los pares de pesos que, en cierto sentido, resultan menos exigentes que las anteriores, suprimiendo la condición pedida al peso de llegada μ y fortaleciendo la condición al par de pesos (μ, ν), con una "power-bump"sobre el peso μ.

Introducción y preliminares

Consideremos el operador de Schrödinger en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, definido por

$$\mathcal{L} = -\Delta + V,$$

donde $V \geq 0$ es una función que satisface una desigualdad de Hölder inversa de orden q_0, para algún $q_0 \geq \frac{n}{2}$, esto es

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q V(y)^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q V(y)dy,$$

para alguna constante C y para toda bola $Q \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto de funciones con esta propiedad usualmente es denotado por RH_{q_0}.

En los últimos años este operador ha sido objeto de estudio por diversos autores (ver [19], [20], [18], [24] y [39], entre otros). En particular, se han estudiado una serie de operadores derivados de $\mathcal{L}$, tales como las transformadas de Riesz y las integrales fraccionarias. En dichos estudios juega un papel fundamental la siguiente función

$$\rho(x) = \sup\{r > 0 : \frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)} V \leq 1\},$$

para $x \in \mathbb{R}^n$. Esta función es conocida como función de radio crítico y tiene, como dijimos, tanto un importante papel en la estimación de operadores asociados a $\mathcal{L}$, así como en la descripción de los espacios relacionados (ver, por ejemplo, [5], [6], [18], [19], [20] y [39]). En particular, ella establece, informalmente hablando, un "límite", dentro del cual los operadores guardan una estrecha semejanza con los operadores clásicos y más allá de él, tienen un comportamiento mejor. Éste es, precisamente, el concepto en el que se basan muchos de los trabajos sobre el tema para dividir el estudio de los operadores en local y global. Con respecto a la función ρ, una de sus propiedades fundamentales es la siguiente, que indica un modo de comparar sus valores en puntos distintos.

Proposición 1. *[39]*

1. *Para toda* $x \in \mathbb{R}^n, 0 < \rho(x) < \infty$

2. *Existe* C_0 *y* $N_0 \geq 1$*, tal que*

$$C_0^{-1}\rho(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N_O} \leq \rho(y) \leq C_0\rho(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}} \tag{2}$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$.

A lo largo de nuestro trabajo, consideraremos $\mathbb{R}^n$ con la métrica uniforme, por lo tanto una bola $B(x,r)$ con tal métrica será un cubo con centro en x y lados paralelos a los ejes coordenados de longitud $2r$, el cual será denotado por $Q(x,r)$. Además, dado que la métrica uniforme y la métrica euclídea son métricas equivalentes, podemos escribir la propiedad 2 de la función ρ en términos de la métrica uniforme de la forma

$$C_0^{-1}n^{-\frac{N_0}{2}}\rho(x)\left(1+\frac{d(x,y)}{\rho(x)}\right)^{-N_0} \leq \rho(y) \leq C_0 n^{\frac{N_0}{2(N_0+1)}}\rho(x)\left(1+\frac{d(x,y)}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}. \tag{3}$$

Una obvia consecuencia de la propiedad anterior es la siguiente.

Proposición 4. *Sean* $\tau > 0$ *y* $x, y \in Q(x_Q, \tau r)$*, donde* $Q = Q(x_Q, r)$ *es tal que* $r \leq \rho(x_Q)$*, entonces*

$$\rho(x) \leq C\rho(y)$$

para una constante C *que depende de* τ, n *y las constantes de* (3).

Demostración. Sea $Q = Q(x_Q, \rho(x_Q))$, asi por (3) resulta

$$C_0^{-1}n^{-\frac{N_0}{2}}\,\rho(x_Q)\left(1+\frac{d(x,x_Q)}{\rho(x_Q)}\right)^{-N_0} \leq \rho(x) \leq C_0 n^{\frac{N_0}{2(N_0+1)}}\,\rho(x_Q)\left(1+\frac{d(x,x_Q)}{\rho(x_Q)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}.$$

Luego

$$C_0^{-1}n^{-\frac{N_0}{2}}\,(1+\tau)^{-N_0}\,\rho(x_Q) \leq \rho(x) \leq C_0 n^{\frac{N_0}{2(N_0+1)}}\,(1+\tau)^{\frac{N_0}{N_0+1}}\,\rho(x_Q)$$

para toda $x \in \tau Q$.
Por lo tanto, para $x, y \in \tau Q$ es inmediato que

$$\rho(x) \leq C_0 n^{\frac{N_0}{2(N_0+1)}}\,(1+\tau)^{\frac{N_0}{N_0+1}}\,\rho(x_Q) \leq C_0^2 n^{\frac{2N_0+N_0^2}{2(N_0+1)}}\,(1+\tau)^{\frac{N_0}{N_0+1}+N_0}\,\rho(y).$$

□

A su vez, esta relación es el punto de partida para cubrir el espacio $\mathbb{R}^n$ con bolas que llamaremos "críticas" y que servirán para analizar comportamientos locales.

Proposición 5. *[19] Existe una sucesión de puntos* $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ *en* $\mathbb{R}^n$*, tal que la familia de bolas críticas* $Q_j = Q(x_j, \rho(x_j)), j \geq 1$*, satisface*

1. $\bigcup_j Q_j = \mathbb{R}^n$.

2. Para todo $\beta \geq 1$, existen constantes C, N_1, tales que $\sum_j \chi_{\beta Q_j} \leq C\beta^{N_1}$

Ahora, llamando críticas a bolas de la forma $Q(x, \rho(x))$, para $x \in \mathbb{R}^n$, y utilizando para ellas la notación Q_x, podemos probar la siguiente relación de proximidad.

Proposición 6. *Sea Q_x un cubo crítico. Luego existe $\beta \geq 1$, que depende sólo de las constantes en* (3) *tal que*

$$\bigcup_{\substack{Q_y \\ Q_y \bigcap Q_x \neq \emptyset}} Q_y \subset \beta Q_x \doteq \widetilde{Q}_x.$$

Demostración. Sea Q_y tal que, $Q_y \bigcap Q_x \neq \emptyset$. Sea $w \in Q_y \bigcap Q_x$.

Sea $z \in Q_y$; luego dado que $y, w \in Q_y$; $w, x \in Q_x$ por Proposición 4 resulta $\rho(y) \cong \rho(w)$, y $\rho(w) \cong \rho(x)$, con constante C dependiente sólo de las constantes en (3) y en consecuencia

$$\begin{aligned} d(z,x) &\leq d(z,w) + d(w,x) \\ &\leq 2\rho(y) + \rho(x) \\ &\leq 2C\rho(w) + \rho(x) \\ &\leq 2C^2\rho(x) + \rho(x) \\ &\leq (2C^2+1)\rho(x). \end{aligned}$$

Así la proposición queda probada tomando $\beta = 2C^2 + 1$. □

Volviendo al tema de los operadores relacionados con el operador de Schrödinger, en nuestro trabajo nos ocuparemos, en particular, de la integral fraccionaria. Este operador puede ser expresado en términos del semigrupo del calor generado por $\mathcal{L}$ en la forma

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = \mathcal{L}^{-\frac{\alpha}{2}} f(x) = \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}} f(x) t^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{t}, \quad 0 < \alpha < n.$$

Aquí, para cada $t > 0$, el operador $e^{-t\mathcal{L}}$ es un operador integral con un núcleo $k_t(x,y)$ que tiene un mejor comportamiento lejos de la diagonal que el núcleo clásico del calor (el asociado al operador $\mathcal{L}$ con $V = 0$, esto es, el Laplaciano), en el sentido de que decae muy rápido (ver [26]). Además, está acotado superiormente por el núcleo del operador clásico del calor, lo que arroja como conclusión inmediata, por ejemplo, que esta integral fraccionaria también es un operador acotado de L^p en L^q, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Con el mismo razonamiento es claro que también valen las mismas acotaciones entre espacios de Lebesgue con pesos que para el operador clásico. En particular, tenemos que si $\omega^{\frac{q}{p}}$ está en la clase $A_{1+\frac{q}{p'}}$ de Muckenhoupt, luego $\mathcal{I}_\alpha$ es un operador acotado de $L^p(\omega)$ en $L^q(\omega^{\frac{q}{p}})$, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, (ver [28]). Sin embargo, como mencionamos, el núcleo tiene "mejor" comportamiento con respecto al clásico y esto se puede ver inmediatamente a través de los resultados de los lemas que presentamos a continuación.

Lema 7. *[26] Dado $N>0$, existe C_N, tal que para toda $x,y\in\mathbb{R}^n$:*

$$k_t(x,y)\leq C_N t^{-n/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{5t}}\left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}+\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N}.$$

Como consecuencia del lema anterior se tiene

$$\mathcal{K}_\alpha(x,y)\leq\frac{C}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

para toda $x,y\in\mathbb{R}^n$, donde $\mathcal{K}_\alpha(x,y)=\int_0^\infty k_t(x,y)t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}$, para $0<\alpha<n$, es el núcleo de $\mathcal{I}_\alpha$. Así, es obvio que

$$\mathcal{I}_\alpha(f)(x)\leq CI_\alpha(f)(x)$$

donde I_α denota la integral fraccionaria clásica, relación de la que ya habíamos hablado.

El segundo lema se refiere a la suavidad del núcleo.

Lema 8. *[21] Dado $N>0$, y $0<\delta<min(1,2-\frac{n}{q_0})$, entonces existe una constante $C>0$ tal que*

$$|k_t(x,y)-k_t(x_0,y)|\leq C\left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{t}}\right)^\delta t^{-n/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{5t}}\left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}+\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}$$

para toda $x,y\in\mathbb{R}^n$ con $|x-x_0|<\sqrt{t}$.

Teniendo en cuenta este mejor comportamiento, cabe preguntarse si los resultados de acotación no pueden probarse para clases de pesos más amplias. Efectivamente, en este sentido, en [5] se introducen clases de pesos más generales que las de Muckenhoupt que resultan suficientes para que valga la citada acotación con un peso. Más concretamente, estas clases, dado $p\geq 1$, están formadas por funciones no negativas ω que para algún par de constantes $C>0$ y $\theta\geq 0$ satisfacen

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(y)dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1}\leq C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta,$$

con las obvias modificaciones cuando $p=1$, donde ρ es la función de radio crítico. Los pesos que verifican la condición anterior se dice que están en la clase $A_p^{\rho,\theta}$.

Siguiendo con línea de esa investigación, en nuestro trabajo nos dedicamos, en un primer lugar, en el Capítulo 1, a la determinación de condiciones suficientes sobre pares de pesos (μ,ν) que aseguren la acotación débil y fuerte de ciertas maximales fraccionarias que están relacionadas de manera natural, tanto puntual como en norma, con la integral fraccionaria Schrödinger y sus conmutadores. El capítulo tiene sus antecedentes en [30] y [37] para el caso clásico, así como también en [3] para la integral fraccionaria usual pero en el ámbito de espacios de tipo homogéneo.

Posteriormente, en el Capítulo 2, nos dedicaremos a probar una desigualdad que relaciona maximales con maximales “sharp” asociadas al operador de Schrödinger, esto es, una extensión de la conocida desigualdad de Fefferman-Stein a la presente situación. Luego, aplicaremos esta desigualdad para obtener resultados de acotación con dos pesos tanto para la integral fraccionaria como para sus conmutadores. Aquí hemos extendido tanto argumentos como teoremas de [40]. Nuestras conclusiones están en la línea de [35], [38], [36], [14], [8], [12], [13] y [17].

En el Capítulo 3 presentamos resultados correspondientes a conmutadores de orden superior de la integral fraccionaria Schrödinger que resultan una versión al ámbito de este trabajo de los contenidos en [2] para el caso clásico en espacios de tipo homogéneo.

Por su parte, el Capítulo 4 está dedicado a ofrecer una alternativa a los métodos de demostración seguidos en el 2. En particular, se aplican técnicas basadas en la descomposición de los operadores en una parte local y una global que ya fueron aplicadas en [5] y [7].

Por último, en el Capítulo 5 exploramos nuevamente una desigualdad de tipo débil para la integral fraccionaria pero bajo condiciones diferentes sobre los pares de pesos. Las técnicas que utilizamos están inspiradas en las aplicadas por J. M. Martell en [27], en el contexto de espacios de tipo homogéneos con anillos no vacíos y constituyen, creemos, un aporte en sí mismo porque la adaptación es a un espacio de medida finita en donde dicha propiedad no se cumple.

Capítulo 1

Acotación con dos pesos para Operadores Maximales-Schrödinger

1.1. Preliminares.

1.1.1. Clase A_p de Muckenhoupt.

Un peso ω en $\mathbb{R}^n$ es una función no negativa localmente integrable que toma valores en $(0, \infty)$ en casi todo punto. Luego, si ω es un peso y $\frac{1}{\omega}$ es localmente integrable, entonces $\frac{1}{\omega}$ también es un peso.

Dado un peso ω y un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$, usaremos la notación

$$\omega(E) = \int_E \omega dx$$

para denotar la ω-medida del conjunto E. Dado que los pesos son funciones localmente integrables, $\omega(E) < \infty$ para todo conjunto medible E contenido en alguna bola. Los espacios L^p con la medida ωdx serán denotados por $L^p(\mathbb{R}^n, \omega)$ o simplemente $L^p(\omega)$, así

$$L^p(\mathbb{R}^n, \omega) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx < \infty \right\}.$$

Las desigualdades con pesos surgen naturalmente en el análisis de Fourier. Por ejemplo, la teoría de pesos desempeña un papel importante en el estudio de problemas con valores en la frontera de la ecuación de Laplace en dominios, así como en estimaciones de ciertas clases de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Las ideas relacionadas con desigualdades con pesos aparecieron casi simultáneamente con el nacimiento de las integrales singulares y en los años setenta fueron estimulados por la caracterización de Muckenhoupt de funciones positivas w localmente integrables para las cuales el operador

Maximal de Hardy-Littlewood, M, lleva $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en sí mismo. Esta caracterización condujo a la introducción de la clase de pesos A_p cuya definición será presentada a continuación.

Definición 1.1.1. Un peso ω pertenece a la clase A_p de Muckenhoupt, $1 < p < \infty$ si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas en $\mathbb{R}^n$. Dicho supremos es llamado *constante característica de Muckenhoupt A_p* para ω y será denotado por $[\omega]_{A_p}$.

Un peso ω pertenece a la clase A_1 de Muckenhoupt si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right) \parallel \omega^{-1} \parallel_{L^\infty} < \infty,$$

y este supremo será llamado *constante característica de Muckenhoupt A_1* para ω y será denotado por $[\omega]_{A_1}$.

A continuación presentaremos uno de los principales resultados de la teoría de pesos, la desigualdad de Hölder inversa para pesos A_p, la cual asegura que todo peso A_p que se encuentra a priori en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, se encuentra en un espacio mejor $L^{1+\sigma}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para algunos $\sigma > 0$ dependiendo del peso, tal como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2. *Sea ω un peso en la clase A_p, para $1 \leq p < \infty$. Existen constantes $C, \gamma > 0$, dependiente unicamente de la dimensión n, p y la constante característica $[\omega]_{A_p}$ tal que para toda bola Q de $\mathbb{R}^n$ se tiene*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\gamma}(y)dy\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \leq C\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)dy.$$

Es fácil probar que para $1 \leq p < q < \infty$, se tiene que $A_p \subset A_q$. Más aún, como consecuencia de la desigualdad de Hölder inversa resulta

Corolario 1.1.3. *Sea $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$, luego existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega \in A_{p-\epsilon}$.*

Como se mencionó anteriormente, las clases A_p crecen cuando p aumenta y por lo tanto es natural considerar su límite cuando $p \to \infty$.

Definición 1.1.4. Se define la clase de pesos A_∞ de Muckenhoupt como

$$A_\infty = \bigcup_{p\geq 1} A_p.$$

Las siguientes proposiciones caracterizan a los pesos en la clase A_∞.

Proposición 1.1.5. *Un peso ω esta en la clase A_∞ si y sólo si, existen constantes C, δ tal que para todas las bolas Q de $\mathbb{R}^n$ y todos los subconjuntos medibles E de Q se verifica*

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq C \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta}. \tag{1.1.6}$$

Se puede probar que 1.1.6 es equivalente a una desigualdad similar en donde la medida de Lebesgue aparece en lugar de ω y viceversa.

Proposición 1.1.7. *Un peso ω esta en la clase A_∞ si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todas las bolas Q de $\mathbb{R}^n$ y todos los subconjuntos medibles E de Q se verifica*

$$|E| \leq \delta|Q| \Longrightarrow \omega(E) \leq \epsilon\omega(Q).$$

Las demostraciones de estos resultados pueden consultarse en [23] (capítulo 9).

1.1.2. Espacios de Tipo Homogéneo. Definiciones y Resultados.

Dado un conjunto X, una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ es llamada casi-métrica en X si las siguientes condiciones se verifican,

1. para toda $x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. para toda $x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$
3. existe una constante $K \geq 1$, tal que:

$$d(x, y) \leq K(d(x, z) + d(z, y))$$

para toda $x, y, z \in X$.

Una casi-métrica $d(.,.)$ define una estructura uniforme en X.

Sea μ una medida positiva en la σ-álgebra de subconjuntos de X generada por las $d - bolas$. Asumimos que μ satisface una condición de duplicación, esto es, existe una constante A tal que:

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq A\,\mu(B(x, r)) < \infty$$

para toda $x \in X$ y $r > 0$.

Una estructura (X, d, μ), con d y μ como arriba, es llamada *espacio de tipo homogéneo* (e.t.h.). Las constantes K y A son llamadas las constantes del espacio.

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Para $0 \leq \gamma < 1$, denotaremos por M_γ al operador maximal fraccionario definido por,

$$M_\gamma f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)^{1-\gamma}} \int_B |f(y)| \, d\mu(y),$$

para toda f en $L^1_{loc}(X, d\mu)$.

Considerando X en lugar $\mathbb{R}^n$, la casi-métrica d en lugar de la métrica uniforme y la medida duplicante μ en lugar de la medida de Lebesgue, se obtienen la correspondientes definiciones de pesos en el *e.t.h*, (X, d, μ), como así también la de pesos A_p de Muckenhoupt $1 \leq p < \infty$, A_∞ y sus correspondientes propiedades mencionadas en la sección anterior.

Bernardis y Salinas ([3]) probaron el siguiente teorema.

Teorema 1.1.8. *[3] Sean (X, d, μ) e.t.h, $0 \leq \gamma < 1$, $1 < p \leq q < \infty$ y (ω, ν) un par de pesos con $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}}$ en A_∞. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(1.1.9) $$M_\gamma : L^p(X, \nu d\mu) \to L^q(X, \omega d\mu).$$

(1.1.10) $$\frac{\omega(Q)^{\frac{p}{q}} \sigma(Q)^{p-1}}{\mu(Q)^{(1-\gamma)p}} \leq C < \infty \quad \textit{para toda} \quad Q \subset X.$$

Observación 1.1.11. El Teorema anterior fue probado por Carlos Pérez en [30] en el contexto Euclídeo.

Definición 1.1.12. Sean $0 \leq \gamma < 1$, $1 < p \leq q < \infty$. Un par de pesos (ω, ν), que verifica la condición (1.1.10) con $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}}$ se dice que está en la clase $A^\gamma_{p,q}$. Si $p = 1$, definimos la clase $A^\gamma_{1,q}$, como el conjunto de pesos (ω, ν) que verifican

$$\frac{\mu(Q)^{\frac{1}{q}}}{|Q|^{1-\gamma}} \sup_Q \nu^{-1} \leq C < \infty$$

para todas las bolas $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Observación 1.1.13. Notar que para $\gamma = 0$, $p = q$ y pesos iguales ($\omega = \nu$), $(\omega, \omega) \in A^0_{p,p}$ sí y sólo si $\omega \in A_p$.

El siguiente teorema explora las acotaciones de tipo débil para M_γ.

Teorema 1.1.14. *Sean (X, d, μ) e.t.h, $0 \leq \gamma < 1$, $1 \leq p \leq q < \infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(1.1.15) $$M_\gamma : L^p(X, \nu d\mu) \to L^{q,\infty}(X, \omega d\mu).$$

(1.1.16) $$(\omega, \nu) \in A^\gamma_{p,q}.$$

Para la demostración de este Teorema utilizaremos el siguiente lema de cubrimiento probado por Coifman y Weiss ([9], pag 69 Teorema 1.2).

Lema 1.1.17. *Sean (X,d,μ) e.t.h, $E \subset X$, E acotado y $\{B(x,r(x))\}$ un cubrimiento de E. Entonces existe una sucesión de bolas disjuntas $\{B(x_i,r_i)\}_i$ tal que la colección de bolas dilatadas $\{B(x_i,kr_i)\}_i$ forma un cubrimiento de E. La constante k depende sólo de las constantes del espacio X.*

Demostración del Teorema 1.1.14. Supongamos que (1.1.15) se verifica. Veamos que (1.1.16) se cumple. Sea Q una bola en (X,d,μ). De (1.1.15) resulta, en particular, para $f=\sigma\chi_Q$ y $\lambda = \frac{\sigma(Q)}{2\,\mu(Q)^{1-\gamma}}$ donde $\sigma=\nu^{-\frac{1}{p-1}}$ que

$$\frac{\sigma(Q)^q}{2\,\mu(Q)^{(1-\gamma)q}}\,\omega\left(\left\{x\in X: M_\gamma(\sigma\chi_Q)(x) > \frac{\sigma(Q)}{2\,\mu(Q)^{1-\gamma}}\right\}\right) \le C\left(\int_X \nu^{-\frac{p}{p-1}}\chi_Q\,\nu\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Esto es,

$$\frac{\sigma(Q)^q}{\mu(Q)^{(1-\gamma)q}}\,\omega\left(\left\{x\in X: M_\gamma(\sigma\chi_Q)(x) > \frac{\sigma(Q)}{2\,\mu(Q)^{1-\gamma}}\right\}\right) \le C\sigma(Q)^{\frac{q}{p}}.$$

Dado que para toda x en Q, se verifica

$$M_\alpha(\sigma\chi_Q)(x) \ge \frac{\sigma(Q)}{\mu(Q)^{1-\gamma}} > \frac{\sigma(Q)}{2\mu(Q)^{1-\gamma}},$$

la desigualdad anterior nos conduce a

$$\frac{\sigma(Q)^p}{\mu(Q)^{(1-\gamma)p}}\omega(Q)^{\frac{p}{q}} \le C\sigma(Q),$$

de donde es inmediato que (ω,ν) está en la clase $A^\gamma_{p,q}$, lo que prueba (1.1.16).

Inversamente, supongamos que (1.1.16) se cumple. Usando un argumento de densidad, será suficiente con probar (1.1.15) para funciones acotadas y de soporte compacto en X. Sea $\lambda>0$, definimos

$$E_\lambda = \{x\in X : M_\gamma f(x) > \lambda\}.$$

Para cada $M\in\mathbb{N}$ definimos $E_{\lambda,M} = E_\lambda \bigcap B(x_0,M)$, con $x_0\in X$ fijo. Luego, para cada $x\in E_{\lambda,M}$ existe una bola B^M_x que contiene a x tal que

$$\frac{1}{\mu(B^M_x)^{1-\gamma}}\int_{B^M_x} |f(y)|d\mu(y) > \lambda. \qquad (1.1.18)$$

Así, $E_{\lambda,M}$ es un subconjunto acotado del espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) y $\{B^M_x\}$ es un cubrimiento de $E_{\lambda,M}$. Luego por Lema 1.1.17, existe una sucesión de bolas disjuntas $\{B^M_i\}$ tales que la familia $\{kB^M_i\}$ forma un cubrimiento de E^M_λ, donde k depende sólo de las constantes de X.

Luego usando que $p\le q$, 1.1.18 y la propiedad de duplicación de μ resulta,

$$\omega(E^M_\lambda)^{\frac{p}{q}} \le \left(\int_{\bigcup_i kB^M_i} \omega(x)d\mu\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_i^{\infty} \int_{kB_i^M} \omega(x)dx\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq \sum_i^{\infty} \omega(kB_i)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq \sum_i^{\infty} \left(\frac{\omega(kB_i)^{\frac{1}{q}}}{\mu(B_i^M)^{1-\gamma}} \frac{1}{\lambda} \int_{B_i^M} |f(y)| d\mu(y)\right)^p \\
&\leq C \sum_i^{\infty} \frac{\omega(kB_i)^{\frac{p}{q}}}{\mu(kB_i^M)^{(1-\gamma)p}} \frac{1}{\lambda^p} \left(\int_{B_i^M} |f(y)| d\mu(y)\right)^p.
\end{aligned}
$$

Luego, si $p > 1$, aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, el hecho que el par de pesos (ω, ν) esta en la clase $A_{p,q}^{\gamma}$ y que las bolas $\{B_i^M\}$ son disjuntas se obtiene,

$$
\begin{aligned}
\omega(E_\lambda^M)^{\frac{p}{q}} &\leq C \sum_i^{\infty} \frac{\omega(kB_i)^{\frac{p}{q}}}{\mu(kB_i^M)^{(1-\gamma)p}} \frac{1}{\lambda^p} \left(\int_{B_i^M} |f(y)| \nu^{\frac{1}{p}}(y) \nu^{-\frac{1}{p}}(y) d\mu(y)\right)^p \\
&\leq C \sum_i^{\infty} \frac{\omega(kB_i)^{\frac{p}{q}} \nu^{-\frac{1}{p-1}}(kB_i^M)^{p-1}}{\mu(kB_i^M)^{(1-\gamma)p}} \frac{1}{\lambda^p} \left(\int_{B_i^M} |f(y)|^p \nu(y) d\mu(y)\right) \\
&\leq C \sum_i^{\infty} \frac{1}{\lambda^p} \left(\int_{B_i^M} |f(y)|^p \nu(y) d\mu(y)\right) \\
&\leq C \frac{1}{\lambda^p} \int_X |f(y)|^p \nu(y) d\mu(y).
\end{aligned}
$$

El caso $p = 1$ se obtiene siguiendo las mismas líneas de razonamiento con obvias modificaciones.

Luego para todo $M \in \mathbb{N}$,

$$
\omega(E_\lambda^M) \leq C \frac{1}{\lambda^q} \left(\int_X |f(y)|^p \nu(y) d\mu(y)\right)^{\frac{q}{p}}.
$$

Finalmente, haciendo $M \to \infty$ resulta,

$$
\omega(E_\lambda) \leq C \frac{1}{\lambda^q} \left(\int_X |f(y)|^p \nu(y) d\mu(y)\right)^{\frac{q}{p}}
$$

lo que completa la prueba. □

1.1.3. Espacios de Orlicz. Definiciones y Propiedades Básicas.

Una función $B : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es llamada función de Young si es continua, convexa, creciente, $B(0) = 0$ y si $B(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Definición 1.1.19. Sean A y B dos funciones de Young,

1. Diremos que A es equivalente a B y denotamos esto por $A \approx B$, si existen constantes t_0, C_1 y C_2 tales que,
$$C_1 A(t) \leq B(t) \leq C_2 A(t)$$
para toda t, $t \geq t_0$.

2. Diremos que B domina a A y denotamos esto por $A \preceq B$ si existe $c > 0$ tal que,
$$A(t) \leq B(ct)$$
para toda t, $t > 0$. Si esto es cierto para toda $t \geq t_0 > 0$, diremos que $A \preceq B$ asintóticamente.

3. B se dice duplicante si existe una constante positiva C tal que,
$$B(2t) \leq CB(t)$$
para toda t, $t > 0$.

4. B es llamada submultiplicativa si existe una constante positiva C tal que,
$$B(st) \leq CB(s)B(t)$$
para todo $s, t > 0$.

Claramente $B(t) = t^r$ con $r \geq 1$ es submultiplicativa. A partir de un cálculo sencillo se puede probar que $B(t) = t^a \left[\log(e + t)\right]^b$, con $a \geq 1, b > 0$ es también submultiplicativa.

Dado un conjunto no vacío E en $\mathbb{R}^n$ y una función de Young B, el espacio de Orlicz $L_B(E)$ es el espacio de Banach de las funciones f medibles Lebesgue tal que $B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)$ es integrable Lebesgue en E, para algún $\lambda > 0$. Este espacio es equipado con la norma de Luxemburgo,
$$\|f\|_{L_B(E)} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_E B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)\, dx \leq 1\right\}.$$
Cuando E tiene medida finita (por ejemplo, un cubo) se puede normalizar la medida reemplazándola por $\frac{dx}{|E|}$. En particular, dada una bola Q de $\mathbb{R}^n$ y una función f definida en Q, se define la norma media de Luxemburgo de f en Q por
$$\|f\|_{B,Q} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q B\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}.$$
Cuando $B(t) = t^r$ con $1 \leq r < \infty$,
$$\|f\|_{B,Q} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^r dx\right)^{1/r}$$

la cual coincide con la norma (normalizada) en $L^r(Q)$.

De la definición de norma media de Luxemburgo resulta que si $A \preceq B$ asintóticamente entonces existe una constante C, dependiente de A y B, tal que para todos los cubos Q y funciones f,

$$\|f\|_{A,Q} \leq C\|f\|_{B,Q}$$

Definición 1.1.20. Dada una función de Young B la función de Young complementaria, $\overline{B}$, es definida por

$$\overline{B} = \sup_{s>0}\{st - B(s)\}, \quad t > 0.$$

B y $\overline{B}$ verifican la siguiente desigualdad: $t \leq B^{-1}(t)\overline{B}^{-1}(t) \leq 2t$.

A lo largo de nuestro trabajo necesitaremos la siguiente versión generalizada de la desigualdad de Hölder, la cual fue probada por O'Neil [29].

Lema 1.1.21. *Dada una función de Young B para todas f y g y todos los cubos Q resulta*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |fg|dx \leq 2\|f\|_{B,Q}\|g\|_{\overline{B},Q}$$

Más generalmente, si A, B y C son funciones de Young tales que para todo $t > 0$,

$$B^{-1}(t)C^{-1}(t) \leq A^{-1}(t),$$

entonces

$$\|fg\|_{A,Q} \leq 2\|f\|_{B,Q}\|g\|_{C,Q}.$$

1.2. Acotación con dos pesos para operadores Maximales Schrödinger.

Debemos recordar que en el estudio de la integral fraccionaria clásica, una de las herramientas principales la constituye el operador maximal fraccionario, ya que es posible probar que guardan una estrecha relación que hace que muchas de las propiedades de la maximal se trasladen a la integral fraccionaria o permitan deducir otras de manera rápida. En nuestra investigación sobre la integral fraccionaria asociada al operador de Schrödinger los operadores maximales que presentamos a continuación juegan el mismo papel.

Definición 1.2.1. Sean $0 \leq \eta < \infty$, $0 \leq \alpha < n$, f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, el **operador maximal fraccionario Schrödinger** $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ se define por,

$$\mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f)(x) \doteq \sup_{x\in Q} \psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_Q |f(y)|dy;$$

donde el supremo se toma sobre todos las bolas Q que contienen a x y $\psi(Q) = \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)$, $Q = Q(x_0, r)$.

Para el caso particular $\alpha = 0$, se obtiene el **operador maximal Schrödinger** $\mathcal{M}_{0,\eta}$, el cual por simplicidad será denotado por $\mathcal{M}_\eta$ esto es,

$$\mathcal{M}_\eta(f)(x) \doteq \sup_{x\in Q} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|} \int_Q |f(y)|dy$$

El **operador maximal sharp Schrödinger**, $\mathcal{M}_\eta^\sharp$, se define por:

$$\mathcal{M}_\eta^\sharp(f)(x) \doteq \sup_{\substack{x\in Q(x_0,r)\\ r<\rho(x_0)}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|dy + \sup_{\substack{x\in Q(x_0,r)\\ r\geq\rho(x_0)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|} \int_Q |f(y)|dy,$$

donde $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy$.

Observación 1.2.2. Al igual que en el caso clásico, se puede probar la siguiente equivalencia

$$\sup_{\substack{x\in Q(x_0,r)\\ r<\rho(x_0)}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|dy \cong \sup_{\substack{x\in Q(x_0,r)\\ r<\rho(x_0)}} \inf_C \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - C|dy. \tag{1.2.3}$$

Para más detalles ver [16].

Observación 1.2.4. Para el caso clásico tenemos $V = 0$ y la definición de ρ lleva a $\rho = \infty$ y por lo tanto, con nuestra definición de la maximal, $\psi(Q) \equiv 1$, en consecuencia $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$, $\mathcal{M}_\eta$ y $\mathcal{M}_\eta^\sharp$ y coinciden con sus respectivas versiones clásicas M_α, M y $M^\sharp$.

Observación 1.2.5. Para $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}_{\alpha,\eta} f(x) < \infty$ c.t.p $x \in \mathbb{R}^n$. En efecto, sea Q_0 una bola tal que *sopf* $\subset Q_0$, luego, para cualquier bola $Q \subset \mathbb{R}^n$ de radio r tenemos

$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_Q |f(y)|dy \leq \frac{1}{(2r)^{n-\alpha}} \|f\|_{L^1(Q_0)} \to 0, \quad si \quad r \to \infty,$$
$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_Q |f(y)|dy \leq |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \|f\|_\infty \leq \delta^{\frac{\alpha}{n}} \|f\|_\infty, \quad si \quad r \leq \delta.$$

Definición 1.2.6. Sea $B : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función de Young, $0 \leq \alpha < n$, $0 \leq \eta < \infty$ y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. El **operador maximal fraccionario Orlicz- Schrödinger**, $\mathcal{M}_{B,\alpha,\eta}$, se define por

$$\mathcal{M}_{B,\alpha,\eta}(f)(x) = \sup_{x\in Q} \psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}} \|f\|_{B,Q}.$$

Observación 1.2.7. Para el caso clásico tenemos $V = 0$ y $\mathcal{M}_{B,\alpha,\eta}$ coincide con su versión clásica $M_{B,\alpha}$. Si $B(t) = t$ se obtiene el operador Maximal Fraccionario Schrödinger $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$.

Para las aplicaciones posteriores estaremos interesados en la función de Young $B(t) = t\log(e+t)$ y denotaremos por $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ a su correspondiente función Maximal Fraccionaria Orclicz-Schrödinger.

Observación 1.2.8. Para $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}_{B,\alpha,\eta}f(x) < \infty$ c.t.p $x \in \mathbb{R}^n$. En efecto, dado que B es duplicante, se tiene que existe p_0 tal que para todo $\theta \geq 1$ y todo r, $B(\theta r) \leq C\theta^{p_0}B(r)$, en particular

$$B(t) \leq Ct^{p_0}, \quad para \quad t \geq 1$$

lo que demuestra que $B(t) \preceq t^{p_0}$ en el infinito, luego

$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,Q}$$
$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{p_0,Q}$$
$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_\infty \left(\frac{|Q \cap sopf|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{p_0}} = I,$$

y tenemos

$I \to 0$, cuando $|Q| \to \infty$, si η es suficientemente grande o $p_0 < \frac{n}{\alpha}$ (para $B(t) = t\log(e+t)$ $p_0 = 1+\epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$).

$I \leq C\|f\|_\infty$, si $|Q| \leq 1$.

Uno de nuestros objetivos es caracterizar los pares de pesos (μ, ν) para los cuales $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ es un operador acotado de $L^p(\mathbb{R}^n, \nu)$ a $L^q(\mathbb{R}^n, \mu)$, para $1 < p \leq q < \infty$. Pérez en [30] demuestra que si $\nu^{-\frac{1}{p-1}}$ es un peso en la clase A_∞, el operador Maximal fraccionario clásico, M_α, es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$ para $1 < p \leq q < \infty$, si y sólo si el par $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^\alpha$. Teniendo en cuenta este resultado y el hecho que $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}f(x) \leq M_\alpha f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, resulta que las mismas hipótesis aseguran que $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ es un operador acotado de $L^p(\mathbb{R}^n, \nu)$ a $L^q(\mathbb{R}^n, \mu)$. Ahora bien, si tenemos en cuenta que en el operador $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$, es precisamente, un operador más pequeño que M_α, nos parece natural preguntarnos si podemos tomar los pesos en una clase más amplia que las consideradas. Bongioanni, Harboure y Salinas en [5], con el objeto de obtener desigualdades con pesos para operadores relacionados al operador de Schrödinger, definen una clase de pesos en términos de la función de radio crítico ρ y que contiene a la clase A_p de Muckenhoupt. Concretamente,

Definición 1.2.9. Sea $\theta \geq 0$. Un peso ω esta en la clase $A_p^{\rho,\theta}$, si existe una constante $C > 0$ tal que para toda bola $Q(x, r)$ se tiene,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C\psi(Q)^\theta; \quad 1 < p < \infty \tag{1.2.10}$$

$$.\frac{1}{|Q|}\int_Q w \leq C\psi(Q)^\theta \inf_Q w; \quad p = 1. \tag{1.2.11}$$

donde como antes $\psi(Q) = \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)$.

Observación 1.2.12. Para el caso clásico $V = 0$, resulta $\rho \equiv \infty$ y se obtiene la condición A_p de Muckenhoupt.

Claramente las clases $A_p^{\rho,\theta}$ son crecientes con θ y para $\theta = 0$ se obtiene la clase A_p de Muckenhoupt. Se define la clase de pesos $A_p^{\rho,\infty}$ como

$$A_p^{\rho,\infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_p^{\rho,\theta}$$

Tomando $\rho \equiv 1$ y $\omega(x) = 1+|x|^\gamma$, con $\gamma > n(p-1)$ puede verse que la inclusión $A_p \subset A_p^{\rho,\infty}$ es propia.

Por otro lado, la clase $A_p^{\rho,loc}$ se define como la de los pesos ω que satisfacen (1.2.10) o (1.2.11) para bolas $Q = Q(x,r)$ subcríticas, es decir con $r \leq \rho(x)$. En [5] se prueba el siguiente resultado,

Proposición 1.2.13. *Sea $1 \leq p < \infty$. Luego $A_p^{\rho,loc} = A_p^{\beta\rho,loc}$ para cada $\beta > 1$.*

Propiedades análogas a las de los pesos A_p de Muckenhoupt son satisfechas también por los pesos en las clases $A_p^{\rho,\infty}$. Las traslaciones, dilataciones y múltiplos escalares de pesos $A_p^{\rho,\infty}(A_p^{\rho,loc})$ son también pesos $A_p^{\rho,\infty}(A_p^{\rho,loc})$, tal como lo enuncia la siguiente proposición .

Proposición 1.2.14. *Sea $\omega \in A_p^{\rho,\infty}(A_p^{\rho,loc})$, para todo $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\omega(\lambda x) \in A_p^{\rho,\infty}(A_p^{\rho,loc}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.2.15}$$

$$\omega(x - z) \in A_p^{\rho,\infty}(A_p^{\rho,loc}), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.16}$$

$$\lambda\omega \in A_p^{\rho,\infty}(A_p^{\rho,loc}), \quad \forall \lambda > 0. \tag{1.2.17}$$

Estos resultados se obtienen mediante un sencillo cambio de variables.

A continuación, definiremos a los pesos duplicantes en el contexto Schrödinger. Diremos que un peso ω es $\rho-$ *duplicante*, si existen constantes $C, \eta > 0$ tales que

$$\omega(Q(x,2r)) \leq C\omega(Q(x,r)) \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\eta, \tag{1.2.18}$$

para toda bola $Q(x,r)$ en $\mathbb{R}^n$.

La siguiente proposición establece que todo peso en $A_p^{\rho,\infty}$ es $\rho-$ *duplicante* y se demuestra siguiendo las líneas del caso clásico (ver Proposición 9.1.5 en [23]).

Proposición 1.2.19. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p^{\rho,\infty}$ entonces existen constantes positivas C y η tales que*

$$\omega(Q(x,2r)) \leq C\omega(Q(x,r)) \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\eta,$$

para toda bola $Q(x,r)$ en $\mathbb{R}^n$.

Otra propiedad de los pesos en $A_p^{\rho,\infty}$, es la desigualdad de Hölder inversa, la cual fue probada por Bongioanni, Harboure y Salinas en [5].

Lema 1.2.20. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p^{\rho,\infty}$ entonces existen constantes positivas δ, η, C tal que*
$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\eta},$$
para toda bola Q en $\mathbb{R}^n$.

Como en la teoría clásica de pesos, del resultado anterior se desprende la siguiente proposición.

Proposición 1.2.21. *Si $w \in A_p^{\rho,\infty}, 1 < p < \infty$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\epsilon}^{\rho,\infty}$.*

Las clases $A_p^{\rho,\infty}$ ($A_p^{\rho,loc}$) son crecientes en p y por lo tanto tiene sentido considerar la unión de todas estas clases obteniendo una nueva clase de pesos.

Definición 1.2.22.
$$A_\infty^{\rho,\infty} = \bigcup_{p\geq 1} A_p^{\rho,\infty}$$
$$A_\infty^{\rho,loc} = \bigcup_{p\geq 1} A_p^{\rho,loc}.$$

Observación 1.2.23. Claramente $A_\infty^{\rho,loc} \supset A_\infty^{\rho,\infty}$, sin embargo esta contención es estricta y se prueba con el siguiente ejemplo.

Consideremos $\rho \equiv 1$, que corresponde al caso $V = cte > 0$ y el peso $\mu(x) = e^{|x|}$.

En primer lugar probaremos que μ está en $A_p^{\rho,loc}$ para todo $1 < p < \infty$ y por lo tanto en $A_\infty^{\rho,loc}$. Para ello basta probar que para toda bola subcrítica, esto es $B = B(x_0, r), r \leq \rho(x_0) \equiv 1$, se tiene
$$\mu(B)\left(\mu^{-\frac{1}{p-1}}(B)\right)^{p-1} \leq C|B|^p.$$
Sea $B = B(x_0, r)$ con $r \leq 1$. Consideraremos dos casos

- $|x_0| \geq 2r$. Para este caso, teniendo en cuenta que $B(x_0, r) \subset B(0, |x_0|+r)\backslash B(0, |x_0|-r)$, tenemos
$$\begin{aligned}\left(\int_B e^{|x|}dx\right)\left(\int_B e^{-\frac{|x|}{p-1}}dx\right)^{p-1} &\leq Ce^{|x_0|+r}r^n\left(\int_{B(x_0,r)} e^{-\frac{|x_0|+r}{p-1}}dx\right)^{p-1}\\ &\leq Ce^{|x_0|+r}e^{-|x_0|+r}\\ &\leq C.\end{aligned}$$

- $|x_0| < 2r$.
$$\left(\int_B e^{|x|}dx\right)\left(\int_B e^{-\frac{|x|}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leq Ce^{|x_0|+r}r^n(r^n)^{p-1}$$

$$\leq Ce^{3r}$$
$$\leq C$$

De ambos casos resulta que $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$.

Probaremos que $\mu \notin A_\infty^{\rho,\infty}$ y para ello será suficiente con mostrar que μ no es $\rho-$*duplicante* (Proposición 1.2.19). Lo probaremos para el caso particular $n = 3$, el caso general resulta siguiendo las mismas líneas.

Supongamos que μ es ρ duplicante, asi por (1.2.18) existen constantes $C, \eta > 0$ tales que

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leq C\mu(B(x_0, r)) \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\eta, \tag{1.2.24}$$

para toda bola $B = B(x_0, r) \in \mathbb{R}^3$. Tomemos en particular las bolas de $\mathbb{R}^3$ con centro en el origen de coordenadas, esto es $B = B(0, r)$. Luego

$$\begin{aligned}\mu(B(0, 2r)) &= \int_{B(0,2r)} e^{|x|} dx \\ &= S_2 \int_0^{2r} e^t t^2 dt \\ &= S_2 \left(4r^2 e^{2r} - 4re^{2r} + 2e^{2r} - 2\right).\end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene

$$\begin{aligned}\mu(B(0, r)) &= \int_{B(0,2r)} e^{|x|} dx \\ &= S_2 \left(r^2 e^r - 2e^r + 2e^r - 2\right).\end{aligned}$$

Luego, dado que suponemos μ $\rho -$ *duplicante*, en virtud de (1.2.24) se debería verificar

$$S_2 \left(4r^2 e^{2r} - 4re^{2r} + 2e^{2r} - 2\right) \leq CS_2 \left(r^2 e^r - 2e^r + 2e^r - 2\right) (1 + r)^\eta$$

para todo r. En particular, para r grande se tendría

$$\begin{aligned}4e^{2r} r^2 &\leq Ce^r r^2 (1 + r)^\eta. \\ \frac{e^r}{(1 + r)^\eta} &\leq C,\end{aligned}$$

lo que es absurdo. Luego μ no es $\rho -$ *duplicante* y por lo tanto no es un peso en $A_\infty^{\rho,\infty}$.

Análogamente, se prueba que $\mu(x) = e^{-|x|}$ está en $A_\infty^{\rho,loc}$ y no está en $A_\infty^{\rho,\infty}$.

Luego, de la Proposición 1.2.14 (1.2.15), resulta que para cualquier $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\mu(x) = e^{\beta|x|} \in A_\infty^{\rho,loc}$ y no está en $A_\infty^{\rho,\infty}$.

La siguiente proposición es la versión para pesos locales de la Proposición 1.1.5. La demostración sigue las mismas líneas.

Proposición 1.2.25. *Si $w \in A_{\infty}^{\rho,\infty}$, entonces existen constantes $C, \delta > 0$ tales que para toda bola $Q = Q(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ con $r < \rho(x_0)$ y todo conjunto medible $E, E \subset Q$, se tiene*

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta_1}. \tag{1.2.26}$$

Se puede probar que 1.2.26 es equivalente a una desigualdad similar en donde la medida de Lebesgue aparece en lugar de ω y viceversa.

A partir de las clases de pesos en términos de la función de radio crítico ρ mencionadas anteriormente, definimos una clase de pares de pesos asociada a ρ que contiene a la clase $A_{p,q}^{\alpha}$ ya conocida.

Definición 1.2.27. Sean $0 \leq \alpha < n$ y $\theta \geq 0$. Diremos que el par de pesos (μ, ν) pertenece a $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\theta}$ si existe una constante $C > 0$ tal que para toda bola $Q(x,r)$ se tiene

$$\left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\right)^p \mu(Q)^{\frac{p}{q}}\ \nu^{\frac{-1}{p-1}}(Q)^{p-1} \leq C\psi(Q)^{\theta}, \quad 1 < p \leq q < \infty.$$

$$\frac{\mu(Q)^{\frac{1}{q}}}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \sup_{Q} \nu^{-1} \leq C\psi(Q)^{\theta}, \quad p = 1.$$

donde, como antes, $\psi(Q) = \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)$.

También, como antes, consideramos la unión sobre $\theta \geq 0$ de las clases, $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_{p,q}^{\alpha,\rho,\theta}$.

A continuación construiremos un ejemplo de pares de pesos en esta nueva clase.

Sean $1 \leq p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < n$ y $\rho \equiv 1$. Consideremos los pesos

$$\mu(x) = |x|^{\beta},\ \beta > -n$$
$$\nu(x) = |x|^{\gamma} + 1, \gamma > -n.$$

Determinaremos β y γ, para que $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$.

Resulta sencillo probar que $\mu, \nu \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ para $\beta, \gamma > -n$.
En primer lugar, consideremos $1 < p \leq q < \infty$. Debemos probar que existen constantes $C, \theta > 0$, tales que

$$\frac{\mu(B)^{\frac{p}{q}} \nu^{-\frac{1}{p}-1}(B)^{p-1}}{|B|^{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p}} \leq C\left(1 + r\right)^{\theta} \tag{1.2.28}$$

para toda bola $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$.

Sea $B = B(x_0, r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$. Se verifica ([23], ejemplo 9.1.6),

$$\int_{B(x_0,r)} |x|^{\beta} dx \cong \begin{cases} r^{\beta+n}; & |x_0| < 2r \\ r^n |x_0|^{\beta}; & |x_0 \geq 2r \end{cases}$$

Consideremos dos casos,

- $|x_0| < 2r$

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\int_{B(x_0,r)} |x|^\beta dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{B(x_0,r)} (1+|x|^\gamma)^{-\frac{1}{p-1}}\, dx\right)^{p-1}}{|B(x_0,r)|^{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p}}\\
&\leq C\frac{r^{(\beta+n)\frac{p}{q}} r^{n(p-1)}}{r^{np-\alpha p}}\\
&\leq Cr^{(\beta+n)\frac{p}{q}-n+\alpha p}.
\end{aligned}$$

Para que 1.2.28 se verifique, basta tener $0 \leq (\beta+n)\,\frac{p}{q} - n + \alpha p \leq \theta$.

- $|x_0| \geq 2r$

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\int_{B(x_0,r)} |x|^\beta dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{B(x_0,r)} (1+|x|^\gamma)^{-\frac{1}{p-1}}\, dx\right)^{p-1}}{|B(x_0,r)|^{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p}}\\
&\leq C\left(r^n|x_0|^\beta\right)^{\frac{p}{q}} r^{n(p-1)} r^{-np+\alpha p}\\
&\leq Cr^{n\frac{p}{q}-n+\alpha p}|x_0|^{\beta\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Luego, si $\beta \leq 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\int_{B(x_0,r)} |x|^\beta dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{B(x_0,r)} (1+|x|^\gamma)^{-\frac{1}{p-1}}\, dx\right)^{p-1}}{|B(x_0,r)|^{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p}} &\leq Cr^{(\beta+n)\frac{p}{q}-n+\alpha p}\\
&\leq C\,(1+r)^\theta .
\end{aligned}$$

Esto último, eligiendo, como en el caso anterior, $0 \leq (\beta+n)\,\frac{p}{q} - n + \alpha p \leq \theta$.

Luego

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= |x|^\beta, \quad -n < \beta < 0\\
\nu(x) &= 1+|x|^\gamma, \quad -n < \gamma\\
0 &\leq (\beta+n)\,\frac{p}{q} - n + \alpha p,
\end{aligned}$$

verifican $(\mu,\nu) \in A^{\alpha,\rho,\theta}_{p,q}$, para $\rho \equiv 1$, $\theta \geq (\beta+n)\,\frac{p}{q} - n + \alpha p$ y por lo tanto $(\mu,\nu) \in A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}$.

Veamos si existe β que verifique las condiciones dadas.

De la condiciones, $0 \leq (\beta+n)\,\frac{p}{q} - n + \alpha p$ y $\beta < 0$, resulta $\left(n - \alpha p - \frac{np}{q}\right)\frac{q}{p} \leq \beta < 0$, por lo tanto existirán $\beta's$ siempre y cuando $\left(n - \alpha p - \frac{np}{q}\right)\frac{q}{p} < 0$ y esto último se cumple sí y sólo si $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

A continuación veremos el caso $p = 1$, esto es la existencia de β y γ, tal que

$$\frac{\mu(B)^{\frac{1}{q}}}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \leq C \inf_B \nu \,(1+r)^\theta ,$$

para toda bola $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$, donde C, θ son constantes positivas.

Sea $B = B(x_0, r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$, análogamente al caso $p > 1$, consideremos dos casos

- $|x_0| < 2r$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\int_B |x|^\beta dx\right)^{1/q}}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} &\leq C\frac{r^{(\beta+n)\frac{1}{q}}}{r^{n-\alpha}} \\ &\leq Cr^{\frac{\beta}{q}+\frac{n}{q}-n+\alpha}. \end{aligned}$$

  Luego, si tenemos $\frac{\beta}{q} + \frac{n}{q} - n + \alpha \geq 0$, teniendo en cuenta, además, que $\operatorname*{ínf}_B \nu \geq 1$ para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\left(\int_B |x|^\beta dx\right)^{1/q}}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} &\leq C\left(1+r\right)^{\frac{\beta}{q}+\frac{n}{q}-n+\alpha} \operatorname*{ínf}_B \nu \\ &\leq C\left(1+r\right)^{\theta} \operatorname*{ínf}_B \nu, \end{aligned}$$

  para $\theta \geq \frac{\beta}{q} + \frac{n}{q} - n + \alpha$.

- $|x_0| \geq 2r$.

$$\begin{aligned} \frac{\left(\int_B |x|^\beta dx\right)^{1/q}}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} &\leq C\frac{|x_0|^{\frac{\beta}{q}} r^{\frac{n}{q}}}{r^{n-\alpha}} \\ &\leq C|x_0|^{\frac{\beta}{q}} r^{\frac{n}{q}-n+\alpha}. \end{aligned}$$

  Si tomamos $\beta < 0$, teniendo $\frac{\beta}{q} + \frac{n}{q} - n + \alpha \geq 0$, la desigualdad anterior nos lleva a

$$\frac{\left(\int_B |x|^\beta dx\right)^{1/q}}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \leq C \operatorname*{ínf}_B \nu \left(1+r\right)^{\theta}$$

  para $\theta \geq \frac{\beta}{q} + \frac{n}{q} - n + \alpha$.

Luego,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= |x|^\beta, \quad -n < \beta < 0 \\ \nu(x) &= 1 + |x|^\gamma, \quad -n < \gamma \\ 0 &\leq (\beta + n)\,\frac{1}{q} - n + \alpha \end{aligned}$$

verifica $(\mu, \nu) \in A_{1,q}^{\alpha,\rho,\theta}$ para $\rho \equiv 1$, $\theta \geq (\beta + n)\,\frac{1}{q} - n + \alpha$ y por lo tanto $(\mu, \nu) \in A_{1,q}^{\alpha,\rho,\infty}$. Como en el caso $p > 1$, notemos que para asegurar la existencia de $\beta's$ que cumplan las condiciones mencionadas, se deberá tener $\frac{1}{q} > 1 - \frac{\alpha}{n}$.

Luego, resumiendo, para $1 \leq p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < n$ con $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\rho \equiv 1$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= |x|^{\beta}, \quad -n < \beta < 0 \\ \nu(x) &= 1 + |x|^{\gamma}, \quad -n < \gamma \\ 0 &\leq (\beta + n)\frac{p}{q} - n + \alpha p, \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

son tales $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$.

Por otra parte, $\mu \in A_{\infty}^{\rho,\infty}$, ya que $\mu(x) = |x|^{\beta}$ con $-n < \beta < 0$ está en $A_p^{\rho,\infty}$ para cualquier $p \geq 1$ (en [23], se prueba que $|x|^a$ es un peso A_p, $1 < p < \infty$ si y sólo si $-n < a < n(p-1)$ y $|x|^a$ es un peso A_1 si y sólo si, $-n < a \leq 0$). Siguiendo un razonamiento similar, a partir del hecho que $\nu \in A_p^{\rho,\infty}$ para todo $p > 1$, resulta que $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{\infty}^{\rho,\infty}$ para cualquier $\gamma > -n$.

En la teoría clásica de pesos, que el par (μ, ν) esté en $A_{p,q}^{\alpha}$ no garantiza necesariamente que $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{\infty}$. Es por ello que ambas condiciones deben suponerse para demostrar que el operador maximal M_{α} es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$ para $1 < p \leq q < \infty$ (C.Pérez, [30]). Lo mismo sucede para pesos en $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$. Pese a que en (1.2.29) hemos construido pesos (μ, ν) en $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ con ambos μ, σ en $A_{\infty}^{\rho,\infty}$, no es una regla general. Para visualizar este hecho, consideremos para $1 \leq p \leq q < \infty$, $\rho \equiv 1$, los pesos

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{-|x|} \\ \nu(x) &= e^{\beta|x|}, \quad \beta > 0 \\ n\frac{p}{q} &- n + \alpha p \geq 0 \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

Por Observación 1.2.23, resulta que $\mu, \sigma \in A_{\infty}^{\rho,loc}$, más aún $\mu, \sigma \notin A_{\infty}^{\rho,\infty}$. Resta probar que $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$. Lo haremos para $p > 1$, el caso $p = 1$ se obtiene de manera similar.

Sea $B = B(x_0, r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$, dado que $\beta > 0$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{\left(\int_B e^{-|x|} dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_B e^{-\frac{\beta|x|}{p-1}} dx\right)^{p-1}}{|B|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} &\leq C \frac{r^{n\frac{p}{q}} r^{n(p-1)}}{r^{np-\alpha p}} \\ &\leq C r^{n\frac{p}{q} - n + \alpha p} \end{aligned}$$

como además $n\frac{p}{q} - n + \alpha p \geq 0$, se obtiene

$$\frac{\left(\int_B e^{-|x|} dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_B e^{-\frac{\beta|x|}{p-1}} dx\right)^{p-1}}{|B|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} \leq C(1+r)^{\theta}$$

para $\theta \geq n\frac{p}{q} - n + \alpha p$. Notemos que la condición $n\frac{p}{q} - n + \alpha p \geq 0$ es equivalente a pedir $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Esto muestra que existen valores de α, p y q que verifican la condición pedida.

A continuación, presentaremos una propiedad de los pesos en $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$.

Proposición 1.2.31. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$, luego $A_{p,q}^{\alpha,\rho,loc} = A_{p,q}^{\alpha,\beta\rho,loc}$ para cada $\beta > 1$.*

La demostración de la proposición anterior se obtiene de manera similar a la de la Proposición 1.2.13 (para más detalles ver Corolario 1 en [5]).

En el siguiente teorema, bajo ciertas condiciones iniciales, caracterizamos los pares de pesos para los cuales $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$.

Teorema 1.2.32. *Supongamos que $0 \leq \alpha < n$, $1 < p \leq q < \infty$. Sea (μ,ν) un par de pesos con $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty^{\rho,loc}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

$$\exists C > 0, \eta_0 \geq 0, \|\mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f)\|_{L^q(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\nu)}, \quad \eta \geq \eta_0. \tag{1.2.33}$$

$$(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}. \tag{1.2.34}$$

Observación 1.2.35. El resultado anterior extiende el obtenido por Lin Tang para un peso. Para más detalles, ver Teorema 2.2 en [40].

Demostración. Supongamos que la desigualdad 1.2.33 se verifica. Veamos que 1.2.34 se cumple. Sea $Q = Q(y,r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$. Por definición de $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ se tiene que para todo $x \in Q$

$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_Q \nu^{-\frac{1}{p-1}}(y)dy \leq \mathcal{M}_{\alpha,\eta}(\nu^{-\frac{1}{p-1}}\chi_Q)(x).$$

En consecuencia

$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\sigma(Q)\mu(Q)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_Q |\mathcal{M}_{\alpha,\eta}(\nu^{-\frac{1}{p-1}}\chi_Q)(x)|^q\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Luego, de 1.2.33 con $f(x) = \nu^{-\frac{1}{p-1}}\chi_Q(x)$, la desigualdad anterior nos conduce a

$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\sigma(Q)\mu(Q)^{\frac{1}{q}} \leq \sigma(Q)^{\frac{1}{p}},$$
$$\frac{\mu(Q)^{\frac{p}{q}}\sigma(Q)^{p-1}}{|Q|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} \leq C\Psi(Q)^{\eta p}.$$

Así $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\theta}$, para $\theta \geq \eta p$ y por lo tanto, $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$.

Inversamente, supongamos que (1.2.34) se cumple. Usando un argumento de densidad bastará con probar 1.2.33 para funciones acotadas y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.

Descomponemos el operador $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ como suma de los operadores

$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}(f)(x) = M_{\alpha,\eta}(f\chi_{Q(x,\rho(x))})(x),$$
$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob}(f)(x) = M_{\alpha,\eta}(f\chi_{Q^c(x,\rho(x))})(x).$$

Probaremos

$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc} : L^p(\nu) \to L^q(\mu) \tag{1.2.36}$$

$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob} : L^p(\nu) \to L^q(\mu) \tag{1.2.37}$$

Veamos 1.2.36. Sea $\{Q_j\}$ el cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ dado en la Proposición 5. La Proposición 6 asegura la existencia de $\beta \geq 1$, independiente de j, tal que si denotamos $\widetilde{Q}_j \doteq \beta Q_j$, resulta

$$\bigcup_{x \in Q_j} Q(x, \rho(x)) \subseteq \widetilde{Q}_j$$

y, en consecuencia,

$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}(f)(x) \leq \sum_j \chi_{Q_j}(x)\mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f\chi_{Q(x,\rho(x))})(x) \leq \sum_j \chi_{Q_j}(x)M_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x). \tag{1.2.38}$$

Además,

$$M_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) \lesssim M_{\alpha,j}(f)(x), \quad \forall x \in Q_j \tag{1.2.39}$$

donde, para cada j, $M_{\alpha,j}$ denota a la maximal fraccionaria en el espacio de tipo homogéneo $\widetilde{Q}_j$ con la métrica uniforme y la medida de Lebesque restringida en $\widetilde{Q}_j$. Veamos 1.2.39

$$M_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) = \sup_{x\in Q}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_Q |f\chi_{\widetilde{Q}_j}(y)|dy$$

Sea $x \in Q_j$ y $Q = Q(x_Q, r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in Q$, luego, si $x_Q \in \widetilde{Q}_j$, $Q \bigcap \widetilde{Q}_j$ es una bola en el espacio de tipo homogéneo $\widetilde{Q}_j$ y por lo tanto;

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_Q |f\chi_{\widetilde{Q}_j}(y)|\,dy &\leq \frac{1}{|Q\bigcap \widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{Q\bigcap\widetilde{Q}_j} |f\chi_{\widetilde{Q}_j}(y)|\,dy \\ &\leq M_{\alpha,j}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x).\end{aligned}$$

Por otra parte, si $x_Q \notin \widetilde{Q}_j$, dado que $d(x, \partial\widetilde{Q}_j) \geq (\beta-1)\rho(x_j)$, donde $\partial\widetilde{Q}_j$ denota la frontera de $\widetilde{Q}_j$, existe un cubo $Q^* \subset Q\bigcap\widetilde{Q}_j$ tal que $x \in Q^*$ y $|Q^*| \cong |\widetilde{Q}_j|$. Luego;

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_Q |f\chi_{\widetilde{Q}_j}(y)|dy &\leq \frac{1}{|Q^*|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\widetilde{Q}_j} |f\chi_{\widetilde{Q}_j}(y)|dy \\ &\leq \frac{C}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\widetilde{Q}_j} |f\chi_{\widetilde{Q}_j}(y)|\,dy \\ &\leq CM_{\alpha,j}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x).\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo (1.2.39) en (1.2.38), obtenemos

$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}(f)(x) \lesssim \sum_j \chi_{\widetilde{Q}_j}(x)M_{\alpha,j}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x). \tag{1.2.40}$$

Luego, usando la propiedad de solapamiento controlado de $\{Q_j\}_j$ (ver Proposición 5), del hecho que $q > 1$, se tiene

$$\|(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}f\|_{L^q(\mu)}{}^q \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}f(x)^q\mu(x)\,dx$$

$$\leq C\sum_j \int_{Q_j}\left(\sum_k \chi_{\widetilde{Q}_k}(x)M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x)\right)^q \mu(x)\,dx$$
$$\leq C\sum_j \int_{Q_j}\sum_k \chi_{\widetilde{Q}_k}(x)M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x)^q \mu(x)\,dx$$
$$\leq C\sum_j \sum_k \int_{Q_j\bigcap\widetilde{Q}_k} |M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x)|^q \mu(x)\,dx$$
$$\leq C\sum_k \sum_j \int_{\widetilde{Q}_k} \chi_{Q_j}(x)M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x)^q \mu(x)\,dx$$
$$\leq C\sum_k \int_{\widetilde{Q}_k}\left(\sum_j \chi_{Q_j}(x)\right)M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x)^q \mu(x)\,dx$$
$$\leq C\sum_k \int_{\widetilde{Q}_k} M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x)^q \mu(x)\,dx. \tag{1.2.41}$$

Por lo tanto bastará con probar que para cada k, $M_{\alpha,k} : L^p(\widetilde{Q}_k, \nu\,dx) \to L^q(\widetilde{Q}_k, \mu\,dx)$, con constante independiente de k. Dado que $M_{\alpha,k}$ denota la Maximal Fraccionaria en el espacio de tipo homogéneo $(\widetilde{Q}_k, d, dx/\widetilde{Q}_k)$, veamos que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.1.8.

1. $\sigma \in A_\infty(\widetilde{Q}_k)$. En efecto, debemos probar que existen $C, \delta > 0$ tales que para toda bola $Q = Q(x_Q, r)$ en $\widetilde{Q}_k$, y todo conjunto medible $E, E \subset Q$
$$\frac{|E|}{|Q|} \leq C\left(\frac{\sigma(E)}{\sigma(Q)}\right)^\delta.$$
Sean $Q = Q(x_Q, r)$ una bola en el espacio $\widetilde{Q}_k$ y E un conjunto medible $E \subset Q$. Luego $x_Q \in \widetilde{Q}_k$. Es claro que basta con considerar $r \leq 2r(\widetilde{Q}_k) = 2\beta\rho(x_k)$. Como $x_Q \in \widetilde{Q}_k$ es inmediato que existe una bola $Q'(x_Q, r)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $Q = Q'\bigcap\widetilde{Q}_k$ y, además, $|Q| > \frac{|Q'|}{2^n}$. Ahora bien, como $x_Q \in \widetilde{Q}_k$, en virtud de la Proposición 4, resulta $\rho(x_k) \cong \rho(x_Q)$ con constante dependiente de n, C_0, N_0 y de la dilatación β. Así $r \leq C(\beta, n, C_0, N_0)\rho(x_Q) = \tau\rho(x_Q)$. Luego, por Proposición 1.2.13, resulta que $\sigma \in A_\infty^{\tau\rho,loc}$ y, en consecuencia,
$$\frac{|E|}{|Q|} \leq 2^n\frac{|E|}{|Q'|} \leq 2^nC\left(\frac{\sigma(E)}{\sigma(Q')}\right)^\delta \leq C\left(\frac{\sigma(E)}{\sigma(Q)}\right)^\delta. \tag{1.2.42}$$

2. $(\mu,\nu) \in A^\alpha_{p,q}(\widetilde{Q}_k)$. Para ello debemos probar
$$\frac{\mu(Q)^{\frac{p}{q}}\sigma(Q)^{p-1}}{|Q|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} \leq C, \quad \text{para toda bola}\, Q\, \text{en}\, \widetilde{Q}_k.$$
Sea $Q = Q(x_Q, r)$ una bola en el espacio $\widetilde{Q}_k$ y Q' como en 1.

Por Proposición 1.2.31 $A^{\alpha,\rho,loc}_{p,q} = A^{\alpha,\tau\rho,loc}_{p,q}, \forall\tau > 1$, con constante dependiente de τ, luego

$$\frac{\mu(Q)^{\frac{p}{q}}\sigma(Q)^{p-1}}{|Q|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} \leq \frac{2^{(n-\alpha)p}\mu(Q')^{\frac{p}{q}}\sigma(Q')^{p-1}}{|Q'|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} \leq C. \tag{1.2.43}$$

donde en la última desigualdad, hemos usado que $(\mu,\nu) \in A^{\alpha,\tau\rho,loc}_{p,q}$, para $Q' = Q'(x_Q, r)$ con $r \leq \tau\rho(x_Q)$, donde τ es la constante dada en 1.

Luego estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.1.8, de donde se sigue que, para todo k, $M_{\alpha,k} : L^p(\widetilde{Q}_k, \nu dx) \to L^q(\widetilde{Q}_k, \mu dx)$, con constante independiente de k. Además, usando el hecho que $q \geq p$ y nuevamenete la propiedad de solapamiento controlado de $\{Q_k\}_k$ dada en la Proposición 5, la desigualdad (1.2.41 conduce a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc} f(x)|^q \mu(x)\,dx &\leq C \sum_k \left(\int_{\widetilde{Q}_k} |f\chi_{\widetilde{Q}_k}(x)|^p \nu(x) dx \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \left(\sum_k \int_{\widetilde{Q}_k} |f\chi_{\widetilde{Q}_k}(x)|^p \nu(x) dx \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_k \chi_{\widetilde{Q}_k} \right) |f(x)|^p \nu(x) dx \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \|f\|^q_{L^p(\nu)},
\end{aligned}$$

lo que completa la demostracción de 1.2.36.

Veamos ahora 1.2.37. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q = Q(x_Q, r)$ tal que $x \in Q$. Luego, por la Propiedad 3 de la función ρ, resulta

$$\begin{aligned}
\psi(Q) &= \left(1 + \frac{r}{\rho(x_Q)}\right) \\
&\geq 1 + \frac{r}{C_0\sqrt{n}\,\rho(x)\left(1 + \frac{d(x,x_Q)}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}} \\
&\geq \frac{C_0^{-1}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \left(1 + \frac{d(x,x_Q)}{\rho(x)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}}\right) \\
&\geq \frac{C_0^{-1}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{d(x,x_Q)}{\rho(x)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right) \\
&\geq \frac{C_0^{-1}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{N_0+1}}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, para toda $y \in Q \bigcap Q^c(x, \rho(x))$ resulta $r \geq \frac{d(y,x)}{2}$ y, por lo tanto, de la estimación anterior

$$\psi(Q)^{-\eta} \leq C(C_0, n) \left(1 + \frac{d(y,x)}{\rho(x)}\right)^{-\frac{\eta}{N_0+1}} \tag{1.2.44}$$

entonces

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob}(f)(x) &= \sup_{x\in Q}\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\alpha/n-1}\int_Q |f\chi_{Q^c(x,\rho(x))}(y)|dy\\
&= C\sup_{x\in Q}\int_Q \frac{|f\chi_{Q^c(x,\rho(x))}|(y)}{\psi(Q)^{\eta}\, r^{n-\alpha}}dy\\
&\leq C(C_0,n)\sup_{x\in Q}\int_{Q\bigcap Q^c(x,\rho(x))}\frac{|f(y)|}{d(y,x)^{n-\alpha}\left(1+\frac{d(y,x)}{\rho(x)}\right)^{\frac{\eta}{N_0+1}}}dy\\
&\leq C\rho(x)^{\frac{\eta}{N_0+1}}\int_{Q^c(x,\rho(x))}\frac{|f(y)|}{d(y,x)^{n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}}}dy\\
&\leq C\rho(x)^{\frac{\eta}{N_0+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kQ_x\backslash 2^{k-1}Q_x}\frac{|f(y)|}{d(y,x)^{n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}}}dy\\
&\leq C\rho(x)^{\frac{\eta}{N_0+1}}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\left(n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}\right)}\rho(x)^{\alpha-n-\frac{\eta}{N_0+1}}\int_{Q_x^k}|f(y)|dy\\
&\lesssim \rho(x)^{\alpha-n}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\left(n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}\right)}\int_{Q_x^k}|f(y)|dy.
\end{aligned}$$

donde, para cada k, $Q_x^k \doteq Q(x,2^k\rho(x))$. Nuevamente consideramos la colección de bolas críticas $\{Q_j\}$ dadas en la Proposición 5 y $\beta\geq 1$ dado en la Proposición 6. Denotemos $\widetilde{Q}_j \doteq \beta Q_j$ y $\widetilde{Q}_j^k \doteq 2^k\widetilde{Q}_j$. Luego, la elección de β asegura que $2^kQ_x\subset \widetilde{Q}_j^k$ para toda x en Q_j. De la estimación anterior resulta,

$$\begin{aligned}
&\|\ (M_{\alpha,\eta})_{glob}(f)\ \|_{L^q(\mu)}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|(M_{\alpha,\eta})_{glob}(f)(x)|^q\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho(x)^{(\alpha-n)}2^{-k\left(n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}\right)}\int_{2^kQ_x}|f(y)|dy\right)^q\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\rho(x)^{(\alpha-n)}2^{-k\left(n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}\right)}\int_{2^kQ_x}|f(y)|dy\right)^q\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\left(n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}\right)}\left(\sum_j\int_{Q_j}\rho(x)^{(\alpha-n)q}\left(\int_{2^kQ_x}|f(y)|dy\right)^q\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\left(n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}\right)}\left(\sum_j\rho(x_j)^{(\alpha-n)q}\int_{Q_j}\left(\int_{\widetilde{Q}_j^k}|f(y)|dy\right)^q\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\left(n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}\right)}\left(\sum_j\rho(x_j)^{(\alpha-n)q}\mu(Q_j)\left(\int_{\widetilde{Q}_j^k}|f(y)|\nu^{\frac{1}{p}}(y)\nu^{-\frac{1}{p}}(y)dy\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\left(n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}\right)} \left(\sum_j \rho(x_j)^{(\alpha-n)q} \mu(\widetilde{Q}_j^k) \left(\int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)|^p \nu(y) dy \right)^{\frac{q}{p}} \nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}_j^k)^{\frac{q}{p'}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Recordemos que $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, $\widetilde{Q}_j^k = Q(x_j, 2^k \beta \rho(x_j))$ con lo cual tenemos

$$\mu(\widetilde{Q}_j^k)\sigma(\widetilde{Q}_j^k)^{\frac{q}{p'}} \leq C \left(1 + \frac{2^k \beta \rho(x_j)}{\rho(x_j)}\right)^{\frac{\theta q}{p}} (2^k \beta \rho(x_j))^{(n-\alpha)q} \lesssim (2^k)^{\frac{\theta q}{p}+(n-\alpha)q} \rho(x_j)^{(n-\alpha)q}$$

donde $\theta, C \geq 0$.

Así, de esta última desigualdad, el hecho que $q \geq p$ y el solapamiento controlado de $\{Q_j\}_j$, resulta

$$\begin{aligned}
&\| (\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob}(f) \|_{L^q(\mu)} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\left(n-\alpha+\frac{\eta}{N_0+1}\right)} \left(\sum_j \rho(x_j)^{(\alpha-n)q} (2^k)^{\frac{\theta q}{p}+(n-\alpha)q} \rho(x_j)^{(n-\alpha)q} \left(\int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)|^p \nu(y) dy \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\left(\frac{\eta}{N_0+1}-\frac{\theta}{p}\right)} \left(\sum_j \left(\int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)|^p \nu(y) dy \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\left(\frac{\eta}{N_0+1}-\frac{\theta}{p}\right)} \left(\sum_j \int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(x)|^p \nu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\left(\frac{\eta}{N_0+1}-\frac{\theta}{p}\right)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x) \left(\sum_j \chi_{\widetilde{Q}_j^k}(x) \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\left(\frac{\eta}{N_0+1}-\frac{\theta}{p}-N_1\right)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\left(\frac{\eta}{N_0+1}-\frac{\theta}{p}-N_1\right)} \| f \|_{L^p(\nu)} .
\end{aligned}$$

Luego tomando η tal que $\eta \geq (N_1 + \frac{\theta}{p})(N_0 + 1) = \eta_0$ resulta,

$$\| (\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob}(f) \|_{L^q(\mu)} \lesssim \| f \|_{L^p(\nu)} .$$

□

Observación 1.2.45. Notemos que, para probar que el operador global $(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$ para $\eta \geq \eta_0$, sólo hemos usado del par (μ, ν) que está en $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$.

Observación 1.2.46. Notemos que en el Teorema 1.2.32, le hemos pedido al peso $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}}$ que esté en $A_\infty^{\rho,loc}$ en lugar de $A_\infty^{\rho,\infty}$, lo cual por Observación 1.2.23 resulta ser una condición menos exigente. Además, tomamos pesos $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$. En (1.2.30) hemos dado un ejemplo de pesos en $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ con $\mu, \sigma \notin A_\infty^{\rho,\infty}$, pero sí $\sigma \in A_\infty^{\rho,loc}$. Sin embargo este hecho no es una regla general, es por ello que ambas condiciones se incluyen en las hipótesis del Teorema 1.2.32. A continuación daremos un ejemplo de pesos $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, con $\sigma \notin A_\infty^{\rho,loc}$.

Consideremos para $1 < p = q < \infty$, $\alpha = 0$, $\rho \equiv 1$, los pesos

$$\mu(x) = 1$$
$$\nu(x) = e^{(p-1)e^{\frac{1}{|x|}}}.$$

Probaremos, en primer lugar, que $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$. Sea B una bola en $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\left(\int_B 1\, dx\right)\left(\int_B e^{-e^{\frac{1}{|x|}}}\, dx\right)^{p-1}}{|B|^p} \le C\frac{r^n r^{n(p-1)}}{r^{np}} \le C.$$

A continuación, probaremos que $\sigma(x) = e^{-e^{\frac{1}{|x|}}} \notin A_\infty^{\rho,loc}$ y para ello será suficiente con mostrar que σ no es localmente duplicante. Supongamos que σ es localmente duplicante. Sea $B = B(x,r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$ con $r << 1$ y consideremos las bolas $B_1(x_1, \frac{r}{4})$, $B_2(x_2, \frac{r}{4})$ con $x_1 = (\frac{r}{4}, 0, \ldots, 0)$ y $x_2 = (\frac{3}{4}r, 0, \ldots, 0)$ contenidas en B. Luego, dado que suponemos σ localmente duplicante tenemos

$$\sigma(B_1(x_1, \frac{r}{4})) \cong \sigma(B_2(x_2, \frac{r}{4})). \tag{1.2.47}$$

Luego, sea $\widetilde{B}_1(\widetilde{x}_1, \frac{r}{8})$ con $\widetilde{x}_1 = (\frac{r}{8}, 0, \ldots, 0)$. Nuevamente, usando la condición de duplicación de σ y el hecho que σ es una función creciente resulta,

$$\sigma(B_1(x_1, \frac{r}{4})) \le C\sigma(\widetilde{B}_1(\widetilde{x}_1, \frac{r}{8})) \le Cr^n e^{-e^{\frac{4}{r}}}. \tag{1.2.48}$$

Además, teniendo en cuenta nuevamente que σ es creciente se tiene

$$\sigma(B_2(x_2, \frac{r}{4})) \ge Cr^n e^{-e^{\frac{2}{r}}}. \tag{1.2.49}$$

De (1.2.47), (1.2.48) y (1.2.49) obtenemos

$$e^{-e^{\frac{2}{r}}} \le Ce^{-e^{\frac{4}{r}}},$$

y, en consecuencia

$$e^{e^{\frac{2}{r}}(e^{\frac{2}{r}}-1)} \le C,$$

para todo $r << 1$. Haciendo $r \to 0$ se obtiene una contradicción. Así, σ no es localmente duplicante y, por lo tanto, no es un peso en $A_\infty^{\rho,loc}$.

Al igual que para M_α (Teorema 1.1.14), el operador $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ verifica una desigualdad tipo débil (p,q) con dos pesos que incluye el caso límite $p=1$, resultado que enunciamos a continuación.

Teorema 1.2.50. *Supongamos que $0 \leq \alpha < n$, $1 \leq p \leq q < \infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

$$\exists C > 0, \eta_0 \geq 0, \|\mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f)\|_{L^{q,\infty}(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\nu)}, \quad \eta \geq \eta_0. \tag{1.2.51}$$

$$(\mu,\nu) \in A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}. \tag{1.2.52}$$

Demostración. Supongamos que (1.2.51) se verifica. Sea Q una bola en $\mathbb{R}^n$. De (1.2.51) resulta, en particular para $f = \sigma\chi_Q$ y $\lambda = \frac{\sigma(Q)}{2\,\psi(Q)^\eta|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}$ donde $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}}$, que

$$\frac{\sigma(Q)^q}{\psi(Q)^{\eta q}|Q|^{(1-\frac{\alpha}{n})q}}\,\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\alpha,\eta}(\sigma\chi_Q)(x) > \frac{\sigma(Q)}{2\,\psi(Q)^\eta|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\right\}\right) \leq C\sigma(Q)^{\frac{q}{p}},$$

pero, dado que para toda x en Q,

$$\mathcal{M}_{\alpha,\eta}(\sigma\chi_Q)(x) \geq \frac{\sigma(Q)}{\psi(Q)^\eta|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} > \frac{\sigma(Q)}{2\,\psi(Q)^\eta|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}},$$

la desigualdad anterior nos lleva a

$$\frac{\sigma(Q)^q}{\psi(Q)^{\eta q}|Q|^{(1-\frac{\alpha}{n})q}}\mu(Q) \leq C\sigma(Q)^{\frac{q}{p}}$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{\mu(Q)^{\frac{p}{q}}\sigma(Q)^{p-1}}{|Q|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} \leq C\psi(Q)^{\eta p}.$$

Así (μ,ν) esta en la clase $A^{\alpha,\rho,\theta}_{p,q}$ para $\theta \geq \eta p$, lo que demuestra (1.2.52).

Inversamente, supongamos que (1.2.52) se verifica. Por un argumento de densidad es suficiente probar (1.2.51) para funciones acotadas y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Procederemos de manera similar a lo hecho en la demostración del Teorema 1.2.32, esto es descomponemos el operador $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ como suma de operadores local y global, donde

$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}(f)(x) = \mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f\chi_{Q(x,\rho(x))})(x) \quad y$$
$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob}(f)(x) = \mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f\chi_{Q^c(x,\rho(x))})(x)$$

y probaremos que cada uno es acotado de $L^p(\nu)$ a $L^{q,\infty}(\mu)$. De la Observación 1.2.45 resulta que existe $\eta_0 \geq 0$ tal que $(M_{\alpha,\eta})_{glob}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$ para $\eta \geq \eta_0$ y por lo tanto se verifica la correspondiente desigualdad tipo débil.

Resta ver que $(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^{q,\infty}(\mu)$.

Nuevamente consideramos el cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ por bolas críticas $\{Q_j\}$ dado en la Proposición 5. Para cada j, consideramos $I_j = \{k : Q_k \bigcap Q_j \neq \emptyset\}$.

Recordemos que en la demostración del Teorema 1.2.32, hemos obtenido la siguiente estimación para $(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}$ (ver (1.2.40))

$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}(f)(x) \leq C \sum_j \chi_{Q_j}(x) M_{\alpha,j}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donde para cada j, $M_{\alpha,j}$, denota a la Maximal Fraccionaria en el espacio de tipo homogéneo $\widetilde{Q}_j$, con la métrica uniforme y la medida de Lebesgue restringida a $\widetilde{Q}_j$. Con esta estimación, para $\lambda > 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc} f(x) > \lambda\} &\subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_k \chi_{Q_k}(x) M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x) > \frac{\lambda}{C} \right\} \\
&\subset \bigcup_j \left\{ x \in Q_j : \sum_k \chi_{Q_k}(x) M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x) > \frac{\lambda}{C} \right\} \\
&\subset \bigcup_j \bigcup_{k \in I_j} \left\{ x \in Q_j \bigcap Q_k : M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x) > \frac{\lambda}{CM} \right\} \\
&\subset \bigcup_k \left\{ x \in Q_k : M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x) > \frac{\lambda}{CM} \right\}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc} f(x) > \lambda\}\right) &\leq \sum_k \mu\left(\left\{ x \in Q_k : M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x) > \frac{\lambda}{CM} \right\} \right) \\
&\leq \sum_k \mu\left(\left\{ x \in \widetilde{Q}_k : M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x) > \frac{\lambda}{CM} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, bastará con probar que, para cada k, $M_{\alpha,k} : L^p(\widetilde{Q}_k, \nu dx) \to L^{q,\infty}(\widetilde{Q}_k, \mu dx)$ con constante independiente de k. Ahora bien, dado que $M_{\alpha,k}$ denota la maximal fraccionaria en el espacio de tipo homogéneo $(\widetilde{Q}_k, d, dx/\widetilde{Q}_k)$ y el par de pesos $(\mu, \nu) \in A^{\alpha}_{p,q}(\widetilde{Q}_k)$ con constante independiente de k (probado en el Teorema 1.2.32), dicho resultado queda asegurado a partir del Teorema 1.1.14. Así, dado que $q \geq p$, y teniendo en cuenta el solapamiento controlado de $\{Q_k\}_k$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&\lambda^q \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc} f(x) > \lambda\}\right) \\
&\quad \leq (CM)^q \sum_k \left(\frac{\lambda}{CM}\right)^q \mu\left(\left\{ x \in \widetilde{Q}_k : M_{\alpha,k}(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x) > \frac{\lambda}{CM} \right\} \right) \\
&\quad \leq C \sum_k \left(\int_{\widetilde{Q}_k} |f(y)|^p \nu(y) dy \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\quad \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_k \chi_{\widetilde{Q}_k}(y) \right) |f(y)|^p \nu(y) dy \right)^{\frac{q}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}},$$

lo que, combinando con el resultado ya probado para $(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob}$, prueba (1.2.51). □

Hasta el momento hemos obtenido resultados de acotación con dos pesos para el operador maximal fraccionario Schrödinger $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$. Ahora, nuestro propósito es obtenerlos para el operador maximal fraccionario Schrödinger $L\log L$. Claramente, $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}f \leq \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f$ y por lo tanto no podemos asegurar que las condiciones exigidas a los pesos μ,ν en el Teorema 1.2.32 aseguren que $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ sea un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$, pero, como se verá a continuación, $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f$ puede controlarse por determinados operadores maximales fraccionarios Schrödinger $\mathcal{M}_{\alpha',\eta'}$, con α',η' dependientes de α y η, que sumado a una condición más exigente al peso ν nos permitirán probar lo deseado. Como se verá en el capítulo siguiente, los resultados de acotación de $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ serán útiles para demostrar los correspondientes del conmutador de la integral fraccionaria de Schrödinger. En el siguiente teorema, bajo ciertas condiciones iniciales, caracterizamos los pares de pesos para los cuales $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$.

Teorema 1.2.53. *Supongamos que $0\leq\alpha<n$, $1<p\leq q<\infty$. Sea (μ,ν) un par de pesos con $\sigma=\nu^{-\frac{1}{p-1}}\in A_\infty^{\rho,\infty}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1.2.54) $\exists C>0,\eta_0\geq 0, \|\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)\|_{L^q(\mu)}\leq C\|f\|_{L^p(\nu)}, \quad \eta\geq\eta_0.$

(1.2.55) $(\mu,\nu)\in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}.$

Cruz Uribe y Fiorenza (Teorema 4.2, en [12]), demuestran desigualdades en norma con dos pesos para el operador maximal fraccionario Orlicz clásico, $M_{\alpha,B}$, donde B es una función de Young sujeta a ciertas condiciones.

Para probar este teorema utilizaremos las siguientes proposiciones.

Proposición 1.2.56. *Sean $0\leq\eta<\infty$ y $0\leq\alpha<n$ entonces*

$$\mathcal{M}_{\alpha,\eta}f(x)\leq\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x),$$

para toda x en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. El resultado es inmediato, a partir de que para toda Q en $\mathbb{R}^n$ se verifica

$$|Q|^{-1}\int_Q|f(y)|dy\leq\| f \|_{L\log L,Q}\ .$$

□

Proposición 1.2.57. *Sea $0\leq\eta<\infty$ y $r>1$ tal que $0\leq\alpha r<n$ entonces*

$$\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x)\leq C\mathcal{M}_{\alpha r,\eta r}(|f|^r)^{\frac{1}{r}}(x), \tag{1.2.58}$$

para toda x en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Por definición,

$$\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) = \sup_{x\in Q}\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}} \parallel f \parallel_{L\log L,Q}$$

Denotemos por $B(t) = t\,\log(e+t)$, luego $B^{-1}(t) \cong \frac{t}{\log(e+t)}$, ([29]). Sea $r > 1$ tal que $0 \leq \alpha r < n$ entonces

$$B^{-1}(t) \cong t^{\frac{1}{r}}\frac{t^{\frac{1}{r'}}}{\log(e+t)} \doteq \phi_1^{-1}(t)\phi_2^{-1}(t),$$

donde $\phi_1(t) = t^r$ y $\phi_2(t) \cong t^{r'}\log(e+t)$. Por lo tanto, aplicando el Lema 1.1.21) para toda bola Q tenemos

$$\|f\|_{L\log L,Q} \leq 2\|f\|_{L^r,Q}\|\chi_Q\|_{\phi_2,Q}.$$

Ahora bien, dado que $\|\chi_Q\|_{\phi_2,Q} = 1$, resulta

$$\|f\|_{L\log L,Q} \leq 2\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^r dy\right)^{\frac{1}{r}}$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) \leq C\sup_{x\in Q}\left(\psi(Q)^{-\eta r}|Q|^{\frac{\alpha r}{n}}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^r dy\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\mathcal{M}_{\alpha r,\eta r}(|f|^r)^{\frac{1}{r}}(x).$$

□

Demostración del Teorema 1.2.53. De la Proposición 1.2.56 y Teorema 1.2.32 se sigue trivialmente que (1.2.54) implica (1.2.55).

Ahora supongamos que (1.2.55) se cumple. Por un argumento de densidad será suficiente probar (1.2.54) para funciones acotadas y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.

A partir de la Proposición 1.2.57 sabemos que, para todo $r > 1$ con $0 \leq \alpha r < n$,

$$\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)(x) \leq C\left(M_{\alpha r,\eta r}(|f|^r)\right)^{\frac{1}{r}}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego teniendo en cuenta los resultados de acotación con dos pesos del Operador Maximal Fraccionario Schrödinger (Teorema 1.2.32), bastará con probar que existe r, $1 < r < p \leq q < \infty$ tal que se verifiquen las siguientes condiciones

$$\nu^{\frac{-1}{\frac{p}{r}-1}} \in A_\infty^{\rho,loc} \tag{1.2.59}$$

$$(\mu,\nu) \in A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}^{\alpha r,\rho,\infty} \tag{1.2.60}$$

Veamos 1.2.59. De la hipótesis resulta que $\sigma \in A_l^{\rho,\infty}$ para algún l, $1 < l < \infty$ y por lo tanto $\sigma^{-\frac{1}{l-1}} \in A_{l'}^{\rho,\infty}$. Luego, σ y $\sigma^{-\frac{1}{l-1}}$ verifican una desigualdad de Hölder inversa (Lema 1.2.20), esto es existen constantes positivas $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2, \eta_1, \eta_2$ tales que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma^{1+\delta_1}\right)^{\frac{1}{1+\delta_1}} \leq C_1\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma\right)\psi(Q)^{\eta_1},$$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma^{-\frac{1}{l-1}(1+\delta_2)}\right)^{\frac{1}{1+\delta_2}} \leq C_2\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma^{-\frac{1}{l-1}}\right)\psi(Q)^{\eta_2},$$

para toda bola Q de $\mathbb{R}^n$. Sea $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ luego de éstas dos últimas desigualdades resulta

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma^{1+\delta}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma^{-\frac{1+\delta}{l-1}}\right)^{l-1}\\
&\quad\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma\right)^{1+\delta}\left(\int_Q \sigma^{-\frac{1}{l-1}}\right)^{(l-1)(1+\delta)}\psi(Q)^{(\eta_1+\eta_2)(1+\delta)}\\
&\quad\leq C\left(\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma\right)\left(\int_Q \sigma^{-\frac{1}{l-1}}\right)^{l-1}\right)^{1+\delta}\psi(Q)^{(\eta_1+\eta_2)(1+\delta)}\\
&\quad\leq C\psi(Q)^{(\theta_1+\eta_1+\eta_2)(1+\delta)},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que $\sigma \in A_l^{\rho,\theta_1}$ para algún $\theta_1 \geq 0$. Así, $\sigma^{1+\delta} = \nu^{-\frac{1+\delta}{p-1}} \in A_l^{\rho,\infty}$ y por lo tanto en $A_\infty^{\rho,loc}$. En consecuencia, tomando r tal que $\frac{1+\delta}{p-1} = \frac{1}{\frac{p}{r}-1}$ esto es, $r = \frac{1+\delta}{p+\delta}p$ se obtiene (1.2.59) con $1 < r < p$. Dado que $\alpha < n$ y δ se puede elegir suficientemente pequeño, es posible elegir δ tal que también se verifique $\alpha r < n$.

Ahora veamos (1.2.60) se verifica. Sea Q una bola en $\mathbb{R}^n$. La elección de δ asegura

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(Q)^{\frac{\frac{p}{r}}{\frac{q}{r}}}}{|Q|^{(1-\frac{\alpha r}{n})\frac{p}{r}}}\,\nu^{-\frac{1}{\frac{p}{r}-1}}(Q)^{\frac{p}{r}-1} &= \frac{\mu(Q)^{\frac{p}{q}}}{|Q|^{(1-\frac{\alpha r}{n})\frac{p}{r}}}|Q|^{\frac{p}{r}-1}\left(\frac{\nu^{-\frac{1+\delta}{p-1}}(Q)}{|Q|}\right)^{\frac{p-1}{1+\delta}}\\
&\leq C_1^{p-1}\frac{\mu(Q)^{\frac{p}{q}}|Q|^{\frac{p}{r}-1}}{|Q|^{(1-\frac{\alpha r}{n})\frac{p}{r}}}\left(\frac{\nu^{\frac{-1}{p-1}}(Q)}{|Q|}\right)^{p-1}\psi(Q)^{\eta_1(p-1)}\\
&\leq C\frac{\mu(Q)^{\frac{p}{q}}\,\nu^{-\frac{1}{p-1}}(Q)^{p-1}}{|Q|^{\frac{p}{r}-\frac{\alpha p}{n}-\frac{p}{r}+1+p-1}}\psi(Q)^{\eta_1(p-1)}\\
&\leq C\frac{\mu(Q)^{\frac{p}{q}}\nu^{-\frac{1}{p-1}}(Q)^{p-1}}{|Q|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}}\psi(Q)^{\eta_1(p-1)},\\
&\leq C\psi(Q)^{\eta_1(p-1)+\theta}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\theta}$ para algún $\theta \geq 0$.

Ahora estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.2.32, con lo que se tiene

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{M}_{\alpha r,\eta r}(|f|^r)(x)^{\frac{q}{r}}\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\nu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\eta \geq 0$ con $\eta r \geq (N_1 + \frac{\eta_1(p-1)+\theta}{\frac{p}{r}})(N_0+1)$, donde $r = \frac{1+\delta}{p+\delta}p$.

Finalmente, de la Proposición 1.2.57 y la desigualdad anterior, resulta que para todo $\eta \geq \eta_0 = (N_1 + \frac{\eta_1(p-1)+\theta}{\frac{p}{r}})(\frac{N_0+1}{r})$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)(x)^q \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_{\alpha r,\eta r}(|f|^r)(x)^{\frac{q}{r}}\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)^r|^{\frac{p}{r}}\nu(x)dx\right)^{\frac{r}{p}\frac{1}{r}}\\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\nu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

lo que finaliza la demostración. □

Teorema 1.2.61. *Supongamos que $0 \leq \alpha < n$ y $1 < p \leq q < \infty$. Sea (μ,ν) un par de pesos en $A^{\alpha r,\rho,\theta}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$ para algún $\theta \geq 0$ y r tal que $1 < r < p$ y $\alpha r < n$. Entonces existe $\eta_0 \geq 0$ para el cual $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta} : L^p(\nu) \to L^{q,\infty}(\mu)$ para $\eta \geq \frac{\eta_0}{r}$.*

Demostración. Por hipótesis $(\mu,\nu) \in A^{\alpha r,\rho,\theta}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$, por lo tanto, por Teorema 1.2.50 $\mathcal{M}_{\alpha r,\eta r}$ es un operador acotado de $L^{\frac{p}{r}}(\nu)$ a $L^{\frac{q}{r},\infty}(\mu)$ para $\eta r \geq \eta_0$. Finalmente, de la Proposición 1.2.57 se sigue lo deseado. □

Los resultados de acotación para el operador Maximal $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ en el punto límite $p = 1$ requieren una técnica más compleja que los obtenidos para el caso $p > 1$ y para ello nos hemos basado en las usadas por D. Cruz-Uribe y A. Fiorenza, quienes prueban desigualdades tipo débil con y sin pesos para la correspondiente versión clásica $M_{L\log L,\alpha}$, (ver [12] y [13]) y las de Lin Tang ([40]), que prueba una desigualdad modular punto límite con un peso para $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ análoga a la obtenida por Cruz-Uribe y A.Fiorenza. Es imporante destacar que el resultado de Cruz-Uribe y Fiorenza sin pesos se refiere, más precisamente, a operadores maximales Orlicz más generales. Para presentarlo, introducimos la siguiente definición.

Definición 1.2.62. ([12]) Dada una función de Young B, se define la función h_B por

$$h_B(s) = \sup_{t>0}\frac{B(st)}{B(t)}, \quad 0 \leq s < \infty. \tag{1.2.63}$$

Observación 1.2.64. Dado que B es creciente, se sigue que h_B es finita para $0 \leq s \leq 1$. Si además, B es duplicante entonces es finita para toda $0 \leq s < \infty$.

Observación 1.2.65. Si B es duplicante entonces h_B es duplicante.

Observación 1.2.66. Para cualquier función de Young B, para todo $s,t \geq 0$, $B(st) \leq h_B(s)B(t)$. Si además B es submultiplicativa $h_B \cong B$.

Ahora podemos enunciar siguiente desiguladad modular punto límite para $M_{B,\alpha}$.

Teorema 1.2.67. *([12]) Dado $0 \leq \alpha < n$, sea B una función de Young tal que $\frac{B(t)}{t^{\frac{n}{\alpha}}}$ es decreciente para toda $t > 0$ y $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{B(t)}{t^{\frac{n}{\alpha}}} = 0$. Luego existe una constante C dependiente unicamente de B, tal que para toda $t > 0$, $M_{B,\alpha}$ satisface la siguiente desigualdad modular tipo débil*

$$\Phi\left(|\{x \in \mathbb{R}^n : M_{B,\alpha}f(x) > t\}|\right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) dx,$$

para toda función no negativa $f \in L_B(\mathbb{R}^n)$, donde Φ es una función tal que:

$$\Phi(s) \leq C_1 \Phi_1(s) = \begin{cases} 0 & si\ s = 0, \\ \frac{s}{h_B(s^{\frac{\alpha}{n}})} & si\ s > 0. \end{cases}$$

Para la demostración de este resultado, se usan los siguientes lemas.

Lema 1.2.68. *(Lema 3.1 en [11]) Si B es una función de Young luego, h_B es no negativa, submultiplicativa, creciente en $[0, \infty)$, estrictamente creciente en $[0, 1]$ y $h_B(1) = 1$.*

Lema 1.2.69. *(Lema 3.12 en [12]) Dado α, $0 \leq \alpha < n$, sea B una función de Young tal que $\frac{B(t)}{t^{\frac{n}{\alpha}}}$ es decreciente para toda $t > 0$. Luego la función Φ_1 en el Teorema 1.2.67 es creciente, y $\frac{\Phi_1(s)}{s}$ es decreciente. Más aún, existe una función Φ tal que $\Phi(s) \leq C_1 \Phi_1(s)$ con Φ invertible.*

Lema 1.2.70. *([25]) Si $\frac{\Phi(t)}{t}$ es decreciente, luego para toda sucesión positiva $\{x_j\}_j$,*

$$\Phi\left(\sum_j x_j\right) \leq \sum_j \Phi(x_j).$$

Lema 1.2.71. *Dada una función f no negativa, localmente integrable y $0 \leq \alpha < n$, supongamos que para alguna función de Young B, una bola Q y $t > 0$,*

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}} \|f\|_{B,Q} > t.$$

Entonces existe un cubo diádico P tal que $Q \subset 3P$ y una constante positiva $C_{\alpha,n}$, dependiente únicamente de α y n, tal que

$$|P|^{\frac{\alpha}{n}} \|f\|_{B,P} > C_{\alpha,n} t.$$

Este Lema fue probado en [10] para $B(t) = t$. El caso general se prueba siguiendo un razonamiento similar con obvias modificaciones.

Para el caso particular $B(t) = t \log(e + t)$, los mismos autores prueban en [13] la siguiente versión con un peso del Teorema 1.2.67.

Teorema 1.2.72. *Dado α, $0 \leq \alpha < n$, $B(t) = t \log(e + t)$, $\Phi(t) = \frac{t^{1-\frac{\alpha}{n}}}{\log(e+t^{\frac{\alpha}{n}})}$ y $\Psi(t) = \left(t \log(e + t^{\frac{\alpha}{n}})\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$. Luego, si $\omega \in A_1$, existe una constante C tal que*

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{B,\alpha}f(x) > t\}\right) \leq C\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) h_\Phi(\omega(x)) dx\right).$$

Observación 1.2.73. Con respecto a la función h_Φ de la desigualdad anterior notemos que, $h_\Phi \cong \Theta$, donde $\Theta(t) = t^{1-\frac{\alpha}{n}} \log(e + t^{-\frac{\alpha}{n}}) = t\, B(t^{-\frac{\alpha}{n}})$. En efecto, en primer lugar, de la definición de Φ, el hecho que h_B es submultiplicativa (Lema 1.2.68) y que $h_B \cong B$, resulta

$$\begin{aligned} h_\Phi(s) &= \sup_{t>0} \frac{\Phi(st)}{\Phi(t)} \\ &= \sup_{t>0} \frac{st}{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}})} \frac{h_B(t^{\frac{\alpha}{n}})}{t} \\ &= s \sup_{t>0} \frac{h_B(t^{\frac{\alpha}{n}})}{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}})} \\ &= s \sup_{t>0} \frac{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}} s^{-\frac{\alpha}{n}})}{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}})} \\ &\leq C s \sup_{t>0} \frac{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}}) h_B(s^{-\frac{\alpha}{n}})}{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}})} \\ &\leq C s B(s^{-\frac{\alpha}{n}}) \\ &\leq C\Theta(s). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando nuevamente que $h_B \cong B$, tenemos

$$\begin{aligned} h_\Phi(s) &= \sup_{t>0} \frac{\Phi(st)}{\Phi(t)} \\ &\geq \frac{\Phi(ss^{-1})}{\Phi(s^{-1})} \\ &= C \frac{h_B(s^{-\frac{\alpha}{n}})}{s^{-1}} \\ &\geq C s B(s^{-\frac{\alpha}{n}}) \\ &= C\Theta(s). \end{aligned}$$

En 2015, Lin Tang ([40]) obtiene, siguiendo las ideas de D. Cruz Uribe y A. Fiorenza, la siguiente desigualdad modular punto límite con un peso para el operador maximal fraccionario Orlicz - Schrödinger.

Teorema 1.2.74. *[40] Dado α, $0 \leq \alpha < n$, $B(t) = t \log(e + t)$ y $\omega \in A_1^{\rho,\infty}$, luego existen constantes $C > 0$ y $\eta_0 \geq 0$ tal que para todo $t > 0$*

$$\Phi\left(\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta} f(x) > t\}\right)\right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) h_\Phi(\omega(x)) dx$$

para todo $\eta \geq \eta_0$, donde $\Phi(t) = \frac{t^{1-\frac{\alpha}{n}}}{\log(e+t^{\frac{\alpha}{n}})}$.

Nuestro objetivo es extender el resultado de Lin Tang a dos pesos. En particular, probaremos

Teorema 1.2.75. *Supongamos que* α, $0 \le \alpha < n$, $1 \le q < \infty$ *y* $B(t) = t\log(e+t)$. *Sea* (μ, ν) *un par de pesos en* $A_{1,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, *entonces existen constantes* $C > 0$ *y* $\eta_0 \ge 0$ *tal que para todo* $t > 0$

$$\Phi_0\left((\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta} f(x) > t\}))^{\frac{1}{q}}\right) \le C \int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) h_{\Phi_0}(\nu(x))dx.$$

para todo $\eta \ge \eta_0$, *donde* $\Phi_0(t) = \frac{t}{\log(e+t)}$.

Para probar nuestro resultado, necesitamos el siguiente Lema el cual demostramos usando una adaptación de las técnicas aplicadas para probar el Lema 3.14 en [10].

Lema 1.2.76. *Dada una función* f *no negativa localmente integrable y* α, $0 \le \alpha < n$, *supongamos que para alguna función de Young* B, *una bola* $Q = Q(x,r)$ *y* $t > 0$ *se verifica*

$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,Q} > t,$$

donde $\psi(Q) = \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)$. *Entonces existe un cubo diádico* P *tal que* $Q \subset 3P$ *y una constante positiva* C *tal que,*

$$\psi(P)^{-\frac{\eta}{N_0+1}}|P|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,P} > Ct.$$

Demostración. Sea $Q = Q(x,r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{k-1} < 2r \le 2^k$. Es claro que existen cubos diádicos $P_1, P_2, \ldots.., P_N$, $1 \le N \le 2^n$, de lado 2^k, que cortan al interior de Q. Dado que, para todo j, $|Q| \le |P_j|$ y P_j corta al interior de Q resulta $Q \subset 3P_j$. Más aún $|Q| \cong |P_j|$.

En virtud de la hipótesis;

$$\left\|\frac{\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}} f}{t}\right\|_{B,Q} > 1.$$

Luego por definición de norma media de Luxemburgo resulta

$$1 < \frac{1}{|Q|}\int_Q B\left(\frac{\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}|f(x)|}{t}\right)dx \le \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{|Q|}\int_{P_j} B\left(\frac{\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}|f(x)|}{t}\right)dx.$$

En consecuencia, existe un cubo diádico $P = P(x_P, r_P)$, $P = P_j$ para algún j, $j = 1, ..., N$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_P B\left(\frac{\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}|f(x)|}{t}\right)dx > \frac{1}{N} > \frac{1}{2^n},$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que $|Q| > \frac{|P|}{2^n}$, resulta,

$$1 < \frac{2^{2n}}{|P|}\int_P B\left(\frac{\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}|f(x)|}{t}\right)dx. \tag{1.2.77}$$

Por propiedad de la función de radio crítico (desigualdad 3), el hecho que $r > \frac{r_P}{2}$ y $Q \subset 3P$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\psi(Q) = 1 + \frac{r}{\rho(x)} &\geq 1 + \frac{1}{2} r_P \, C_0^{-1} \sqrt{n}^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \frac{1}{\rho(x_P)} \left(1 + \frac{d(x, x_P)}{\rho(x_P)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \\
&\geq 1 + C \frac{r_P}{\rho(x_P)} \left(1 + \frac{3r_P}{\rho(x_P)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \\
&\geq 1 + C \frac{r_P}{\rho(x_P)} \left(1 + \frac{r_P}{\rho(x_P)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \\
&\geq \left(1 + \frac{r_P}{\rho(x_P)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} + C \frac{r_P}{\rho(x_P)} \left(1 + \frac{r_P}{\rho(x_P)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \\
&\geq \left(1 + \frac{r_P}{\rho(x_P)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \left(1 + C \frac{r_P}{\rho(x_P)}\right) \\
&\geq C \left(1 + \frac{r_P}{\rho(x_P)}\right)^{\frac{1}{N_0+1}} \\
&\geq C \psi(P)^{\frac{1}{N_0+1}}
\end{aligned}$$

Ahora, usando esta última desigualdad, el hecho que B es creciente y convexa y recordando que $|Q| \leq |P|$, la desigualdad 1.2.77 nos conduce a

$$\begin{aligned}
1 &< \frac{2^{2n}}{|P|} \int_P B\left(\frac{\psi(Q)^{-\eta} |Q|^{\frac{\alpha}{n}} |f(x)|}{t}\right) dx \\
&\leq \frac{1}{|P|} \int_P B\left(\frac{C 2^{2n} \psi(P)^{-\frac{\eta}{N_0+1}} |P|^{\frac{\alpha}{n}} |f(x)|}{t}\right) dx.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\left\| \frac{C \, \psi(P)^{-\frac{\eta}{N_0+1}} |P|^{\frac{\alpha}{n}} \, f}{t} \right\|_{B,P} > 1,$$

o equivalentemente,

$$\psi(P)^{-\frac{\eta}{N_0+1}} |P|^{\frac{\alpha}{n}} \, \|f\|_{B,P} > \frac{t}{C},$$

donde C es una constante $C = C(C_0, N_0, n)$, que es lo que queríamos probar. □

Demostración del Teorema 1.2.75. Probaremos el Teorema para $f \geq 0$ acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. El caso general se sigue através de un argumento de densidad. Para $t > 0$ definimos

$$E_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L \log L, \alpha, \eta} f(x) > t \right\}.$$

Si t es tal que E_t es vacío, no hay nada que probar. En otro caso para cada x en E_t existe una bola Q_x que contiene a x tal que

$$\psi(Q_x)^{-\eta}|Q_x|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,Q_x} > t.$$

Luego, por Lema 1.2.76, existe un cubo diádico P_x tal que $Q_x \subset 3P_x$ y una constante C tal que

$$\psi(P_x)^{-\frac{\eta}{N_0+1}}|P_x|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,P_x} > Ct \quad . \tag{1.2.78}$$

Así obtenemos un cubrimiento numerable de E_t, $\{3P_x\}_{x\in E_t}$, del que podemos extraer una subcubrimiento $\{3P_j\}_j$ tal que los $\{P_j\}_j$ son disjuntos. En efecto, dado que dos cubos diádicos son disjuntos o bien uno esta contenido dentro del otro, agrupamos a los cubos diádicos $\{P_x\}$ en cadenas de inclusión y probaremos que cada cadena tiene un elemento maximal. Estos maximales nos darán el subcubrimiento buscado.

Dado que f es acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$\|f\|_{B,P_x} \leq \|f\|_{L^\infty}\frac{1}{B^{-1}\left(\frac{|P_x|}{|P_x\bigcap sopf|}\right)} \quad . \tag{1.2.79}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|P_x|}\int_{P_x} B\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)dy &\leq \frac{1}{|P_x|}\int_{P_x\bigcap sopf} B\left(\frac{\|f\|_\infty}{\lambda}\right)dy\\ &\leq \frac{1}{|P_x|}\int_{P_x} B\left(\frac{\chi_{P_x\bigcap sopf}(y)}{\frac{\lambda}{\|f\|_\infty}}\right)dy,\end{aligned}$$

lo que prueba

$$\|f\|_{B,P_x} \leq \|f\|_{L^\infty}\|\chi_{P_x\bigcap sopf}\|_{B,P_x}.$$

pero, dado que $\|\chi_{P_x\bigcap sopf}\|_{B,P_x} = \frac{1}{B^{-1}(\frac{|P_x|}{|P_x\bigcap sopf|})}$, se obtiene la desigualdad (1.2.79). Entonces, de (1.2.78) y (1.2.79), resulta

$$\begin{aligned}Ct &< \psi(P_x)^{-\frac{\eta}{N_0+1}}|P_x|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,P_x}\\ &\leq \psi(P_x)^{-\frac{\eta}{N_0+1}}|P_x|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L^\infty}\frac{1}{B^{-1}\left(\frac{|P_x|}{|P_x\cap sopf|}\right)}\\ &\leq \|f\|_{L^\infty}\frac{\left(\frac{|P_x|}{|P_x\cap sopf|}\right)^{\frac{\alpha}{n}}}{B^{-1}\left(\frac{|P_x|}{|P_x\cap sopf|}\right)}|P_x\cap sopf|^{\frac{\alpha}{n}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si los cubos diádicos P_x no tienen tamaño acotado, teniendo en cuenta que $\lim_{t\to\infty}\frac{B(t)}{t^{\frac{n}{\alpha}}} = 0$, haciendo $|P_x| \to \infty$ en la desigualdad anterior llegamos a una contradicción. Esto demuestra que cada cadena tiene un elemento maximal. Sea $\{P_j\}_j$ la subcolección disjunta maximal. Cada P_j verifica (1.2.78), esto es,

$$\left\|\frac{\psi(P_j)^{-\frac{\eta}{N_0+1}}|P_j|^{\frac{\alpha}{n}}f}{Ct}\right\|_{B,P_j} > 1.$$

Luego, dado que $B(st) \leq h_B(s)B(t)$, B y h_B son crecientes y submultiplicativas, se tiene

$$\begin{aligned}
1 &< \frac{1}{|P_j|}\int_{P_j} B\left(\frac{\psi(P_j)^{-\frac{\eta}{N_0+1}}|P_j|^{\frac{\alpha}{n}}f(y)}{Ct}\right)dy \\
&\leq \frac{3^n}{|3P_j|}h_B\left(\frac{|P_j|^{\frac{\alpha}{n}}}{C}\right)\int_{P_j} B\left(\frac{\psi(P_j)^{-\frac{\eta}{N_0+1}}f(y)}{t}\right)dy \\
&\leq \frac{3^n}{|3P_j|}h_B\left(\frac{|P_j|^{\frac{\alpha}{n}}}{C}\right)B\left(\psi(P_j)^{-\frac{\eta}{N_0+1}}\right)\int_{P_j} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)dy \\
&\leq \frac{3^n\log(e+1)\,h_B(C^{-1})\,h_B\left(|3P_j|^{\frac{\alpha}{n}}\right)}{|3P_j|\,\psi(3P_j)^{\frac{\eta}{N_0+1}}}\int_{P_j} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)dy \\
&\leq C\frac{h_B\left(\left(|3P_j|\psi(3P_j)^{\frac{\eta}{N_0+1}}\right)^{\frac{\alpha}{n}}\right)}{|3P_j|\psi(3P_j)^{\frac{\eta}{N_0+1}}}\int_{P_j} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)dy \\
&\leq C\frac{1}{\Phi_0\left(\left(|3P_j|\psi(3P_j)^{\frac{\eta}{N_0+1}}\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}\right)}\int_{P_j} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)dy, \qquad (1.2.80)
\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, se ha usado que $\frac{h_B(t^{\frac{\alpha}{n}})}{t} \cong \frac{1}{\Phi_0(t^{1-\frac{\alpha}{n}})}$. Esta estimación, se sigue del hecho que para cada $p > 0$, $\log(e+t^p) \cong 1+\log^+ t$, en efecto

$$\begin{aligned}
\frac{h_B(t^{\frac{\alpha}{n}})}{t} &\cong \frac{t^{\frac{\alpha}{n}}\log(e+t^{\frac{\alpha}{n}})}{t} \\
&\cong \frac{\log(e+t^{\frac{\alpha}{n}})}{t^{1-\frac{\alpha}{n}}} \\
&\cong \frac{\log(e+t^{1-\frac{\alpha}{n}})}{t^{1-\frac{\alpha}{n}}} \\
&\cong \frac{1}{\Phi_0(t^{1-\frac{\alpha}{n}})}. \qquad (1.2.81)
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $E_t \subset \bigcup_j 3P_j$ y $q \geq 1$ aplicando el Lema 1.2.70 se obtiene,

$$\Phi_0(\mu(E_t)^{\frac{1}{q}}) \leq \Phi_0\left(\mu\left(\bigcup_j 3P_j\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leq \Phi_0\left(\sum_j \mu(3P_j)^{\frac{1}{q}}\right) \leq \sum_j \Phi_0\left(\mu(3P_j)^{\frac{1}{q}}\right).$$

La desigualdad anterior y 1.2.80 nos llevan a

$$\begin{aligned}
\Phi_0(\mu(E_t)^{\frac{1}{q}}) &\leq C\sum_j \frac{\Phi_0\left(\mu(3P_j)^{\frac{1}{q}}\right)}{\Phi_0\left(\left(|3P_j|\psi(3P_j)^{\frac{\eta}{N_0+1}}\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}\right)}\int_{P_j} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)dy \\
&\leq C\sum_j h_{\Phi_0}\left(\frac{\mu(3P_j)^{\frac{1}{q}}}{\left(|3P_j|\psi(3P_j)^{\frac{\eta}{N_0+1}}\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}}\right)\int_{P_j} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)dy.
\end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta que el par de pesos (μ,ν) está en $A_{1,q}^{\alpha,\rho,\theta}$, para algún $\theta\geq 0$ y h_{Φ_0} es creciente y duplicante (ver Lema 1.2.68 y Observación 1.2.65) tomando η tal que $\eta\geq\theta(N_0+1)\frac{n}{n-\alpha}=\eta_0$, resulta

$$\begin{aligned}
\Phi_0(\mu(E_t)^{\frac{1}{q}}) &\leq C\sum_j h_{\Phi_0}\left(C\inf_{3P_j}\nu\right)\int_{P_j} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)dy\\
&\leq C\sum_j\int_{P_j} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)h_{\Phi_0}\left(\inf_{3P_j}\nu\right)dy\\
&\leq C\sum_j\int_{P_j} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)h_{\Phi_0}\left(\nu(y)\right)dy\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f(y)}{t}\right)h_{\Phi_0}\left(\nu(y)\right)dy,
\end{aligned}$$

que es el resultado que buscábamos. □

Observación 1.2.82. Nuestro resultado (Teorema 1.2.75) extiende el resultado de Lin Tang (Teorema 1.2.74) a dos pesos, en efecto, sean $0\leq\alpha<n$ y $\omega\in A_1^{\rho,\infty}$, así existe $\theta_1\geq 0$ tal que $\omega\in A_1^{\rho,\theta_1}$. Luego, para toda bola Q de $\mathbb{R}^n$ se verifica

$$\left(\frac{\omega(Q)}{|Q|}\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}C\leq\psi(Q)^{\theta_1(1-\frac{\alpha}{n})}\inf_Q\omega^{1-\frac{\alpha}{n}}.$$

Lo que demuestra que el par de pesos $(\omega,\omega^{1-\frac{\alpha}{n}})$ pertenece a $A_{1,\frac{n}{n-\alpha}}^{\alpha,\rho,\theta}$ para $\theta\geq\theta_1(1-\frac{\alpha}{n})$ y, por lo tanto, en $A_{1,\frac{n}{n-\alpha}}^{\alpha,\rho,\infty}$. En consecuencia, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.2.75 para $q=\frac{n}{n-\alpha}$. Así, existen constantes $C>0$ y $\eta_0\geq 0$ tal que para todo $t>0$

$$\Phi_0\left(\omega\left(\{x\in\mathbb{R}^n: M_{L\log L,\alpha,\eta}f(x)>t\}\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}\right)\leq C\int_{\mathbb{R}^n}B\left(\frac{f(x)}{t}\right)h_{\Phi_0}(\omega^{1-\frac{\alpha}{n}}(x))dx.$$

para $\eta\geq\eta_0$. Pero $\Phi_0(t^{1-\frac{\alpha}{n}})\cong\Phi(t)$. En efecto, dado que $\log(e+t^p)\cong 1+\log^+ t$ para cada $p>0$, resulta

$$\begin{aligned}
\Phi_0(t^{1-\frac{\alpha}{n}}) &= \frac{t^{1-\frac{\alpha}{n}}}{\log(e+t^{1-\frac{\alpha}{n}})}\\
&\cong \frac{t^{1-\frac{\alpha}{n}}}{1+\log^+ t}\\
&\cong \frac{t^{1-\frac{\alpha}{n}}}{\log(e+t^{\frac{\alpha}{n}})}\\
&= \Phi(t),
\end{aligned}$$

lo que demuestra que en este caso, los miembros izquierdos de los Teoremas 1.2.74 y 1.2.75 son equivalentes.

Comparemos los miembros derechos. Para ello notemos que $h_{\Phi_0}(t^{1-\frac{\alpha}{n}}) \lesssim h_\Phi(t)$. En efecto, recordando $\frac{h_B(t^{\frac{\alpha}{n}})}{t} \cong \frac{1}{\Phi_0(t^{1-\frac{\alpha}{n}})}$ ((1.2.81)), h_B es submultiplicativa y $h_B \cong B$, resulta

$$\begin{aligned}
h_{\Phi_0}(t^{1-\frac{\alpha}{n}}) &= \sup_{s>0} \frac{\Phi_0(t^{1-\frac{\alpha}{n}}s)}{\Phi_0(s)} \\
&= \sup_{s>0} \frac{\Phi_0((st)^{1-\frac{\alpha}{n}})}{\Phi_0(s^{1-\frac{\alpha}{n}})} \\
&= C(\alpha, n) \sup_{s>0} \frac{st}{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}})} \frac{h_B(s^{\frac{\alpha}{n}})}{s} \\
&\cong \sup_{s>0} \frac{t\, h_B(s^{\frac{\alpha}{n}})}{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}})} \\
&\cong t \sup_{s>0} \frac{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}} t^{-\frac{\alpha}{n}})}{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}})} \\
&\lesssim t \sup_{s>0} \frac{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}}) h_B(t^{-\frac{\alpha}{n}})}{h_B((st)^{\frac{\alpha}{n}})} \\
&\cong t\, h_B(t^{-\frac{\alpha}{n}}) \\
&\cong C\, t^{1-\frac{\alpha}{n}} \log(e + t^{-\frac{\alpha}{n}}) \\
&\cong h_\Phi(t),
\end{aligned}$$

con lo que queda probado que nuestro resultado implica el del Teorema [40].

1.3. Condiciones de tipo Sawyer sobre los pesos

En [37] E. T. Sawyer prueba el siguiente resultado sobre desigualdades en norma con dos pesos para el operador maximal fraccionario clásico, M_α, para $0 < \alpha < n$ y el maximal de Hardy-Littlewood ($\alpha = 0$).

Teorema 1.3.1. *Sean p y q, $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha, 0 \leq \alpha < n$ y (μ, ν) un par de pesos, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Si $\sigma = \nu^{1-p'}$, luego para toda bola Q,*

$$\left(\int_Q M_\alpha(\sigma \chi_Q)^q \mu dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_Q \sigma dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

2. *Existe $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p(\nu)$ se verifica*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha f)^q \mu dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \nu dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nuestro objetivo aquí es probar una versión de este teorema para la maximal fraccionaria Schrödinger $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$. Para presentar nuestro resultado, introducimos la siguiente clase de pares de pesos.

Definición 1.3.2. Sean $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq \alpha < n$ y $\tau \geq 0$. Diremos que el par de pesos (μ, ν) esta en la clase $M_{p,q}^{\alpha,\rho,\tau}$, si existe una constante $C \geq 0$ tal que para toda bola Q de $\mathbb{R}^n$ se tiene;

$$\left(\int_Q \mathcal{M}_{\alpha,\tau}(\sigma\chi_Q)^q \mu dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_Q \sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

donde $\sigma = \nu^{1-p'}$.
Además definimos la clase $M_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ como la unión sobre $\tau \geq 0$ de las clases $M_{p,q}^{\alpha,\rho,\tau}$, esto es $M_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty} = \bigcup_{\tau\geq 0} M_{p,q}^{\alpha,\rho,\tau}$.

Ahora podemos enunciar nuestro teorema.

Teorema 1.3.3. *Sean $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq \alpha < n$ y (μ, ν) un par de pesos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1.3.4)$(\mu, \nu) \in M_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$.

(1.3.5)$\exists C > 0,\ \eta_0 \geq 0,\ \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_{\alpha,\eta} f)^q \mu dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \nu dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall \eta \geq \eta_0.$

Observación 1.3.6. Notar que (1.3.4) implica que el par de pesos (μ, ν) esta en la clase $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$. En efecto, sean (μ, ν) un par de pesos en la clase $M_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, luego existen $\tau, C \geq 0$ tal que para toda bola Q de $\mathbb{R}^n$

$$\left(\int_Q \mathcal{M}_{\alpha,\tau}(\sigma\chi_Q)^q \mu dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_Q \sigma dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De aquí fácilmente se sigue que

$$\left(\psi(Q)^{-\tau q} |Q|^{(\frac{\alpha}{n}-1)q} \sigma(Q)^q \mu(Q)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_Q \sigma dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

que es equivalente a

$$|Q|^{(\frac{\alpha}{n}-1)p} \sigma(Q)^{p-1} \mu(Q)^{\frac{p}{q}} \leq C\psi(Q)^{\tau p}.$$

Así (μ, ν) está en $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\theta}$, para $\theta \geq \tau p$ y, por lo tanto, en $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$.

Demostración. Claramente (1.3.5) implica (1.3.4), basta con sustituir en (1.3.5) f por $\sigma\chi_Q$, donde Q es una bola de $\mathbb{R}^n$.

Inversamente, supongamos que (1.3.4) se cumple. Probaremos (1.3.5) para $f \geq 0$ acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. El caso general se sigue através de un argumento de densidad. Como en la demostración del Teorema 1.2.32, descomponemos el operador $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ como suma del operador global y local definidos por

$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}(f)(x) = \mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f\chi_{Q_x})(x)$$
$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob}(f)(x) = \mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f\chi_{Q_x^c})(x),$$

donde $Q_x = Q(x, \rho(x))$ denota la bola crítica centrada en x. Probaremos que cada uno de ellos es un operador acotado de $L^p(\mu)$ a $L^q(\nu)$.

De la Observación 1.3.6 resulta que (1.3.4) implica que el par de pesos (μ, ν) está en la clase $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ y, en consecuencia existen constantes $C_1 > 0$ y $\eta_1 \geq 0$ tal que $\|(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{glob}\|_{L^q(\mu)} \leq C_1\|f\|_{L^p(\nu)}$ para $\eta \geq \eta_1$ (ver Observación 1.2.45). Para el caso del operador local, notemos que

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}f(x) &= \mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f\chi_{Q_x})(x)\\ &= \sup_{x\in Q(x_0,r)} \psi(Q)^{-\eta}\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_Q |f\chi_{Q_x}(y)|dy\\ &\leq \sup_{x\in Q(x_0,r)} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{Q\bigcap Q_x} |f(y)|dy.\end{aligned}$$

Entonces, para el cálculo de la maximal local será suficiente con tomar cubos de radio $\rho(x)$ como máximo. En efecto, si $x \in Q = Q(x_0, r)$ con $r > \rho(x)$ luego,

$$\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{Q\bigcap Q_x} |f(y)|dy < \frac{1}{|Q_x|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{Q_x} |f(y)|dy.$$

Así tenemos

$$(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}f(x) \leq \sup_{\substack{x\in Q(x_0,r)\\ r\leq\rho(x)}} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{Q\bigcap Q_x} |f(y)|dy \doteq M_{\alpha,\rho}f(x). \tag{1.3.7}$$

Ahora, para $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\Omega_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^k < M_{\alpha,\rho}f(x) \leq 2^{k+1}\right\}.$$

Entonces, para cada $x \in \Omega_k$, existe un cubo $Q^{x,k}$ de radio $r \leq \rho(x)$, que contiene a x, para el cual se verifica

$$\frac{1}{|Q^{x,k}|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{Q^{x,k}\bigcap Q_x} |f(y)|dy > 2^k.$$

Luego, por el Lema 1.2.71, sabemos que existe un cubo diádico $P^{x,k}$ tal que $Q^{x,k} \subset 3P^{x,k}$ y $|P^{x,k}| \cong |Q^{x,k}|$ para el cual se verifica,

$$\frac{1}{|P^{x,k}|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{P^{x,k}} |f(y)|dy > C\,2^k, \tag{1.3.8}$$

para alguna constante C. Así obtenemos un cubrimiento numerable de Ω_k, $\{3P^{x,k}\}_{x\in\Omega_k}$, del que, siguiendo un razonamiento similar al de la prueba del Teorema 1.2.75, podemos extraer una subcubrimiento $\{3P_j^k\}$ tal que los $\{P_j^k\}$ son disjuntos. Luego, $\Omega_k \subset \bigcup_j 3P_j^k$ y cada P_j^k verifica la desigualdad 1.3.8.

Definimos la siguiente partición de Ω_k

$$\begin{aligned}
E_1^k &= 3P_1^k \bigcap \Omega_k \\
E_2^k &= \left(3P_2^k \backslash 3P_1^k\right) \bigcap \Omega_k \\
&\dots \\
E_j^k &= \left(3P_j^k \backslash \bigcup_{i=1}^{j-1} 3P_i^k\right) \bigcap \Omega_k
\end{aligned}$$

Luego, para todo $k \in \mathbb{Z}$ $\Omega_k = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} E_j^k$. Así, de la desigualdad (1.3.7), de la definición de los $\Omega_k' s$ y la desigualdad (1.3.8), resulta

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\eta})_{loc} f(x)^q \, \mu(x) dx \\
&\quad \leq \sum_k \int_{\Omega_k} (M_{\alpha,\rho}) f(x)^q \, \mu(x) dx \\
&\quad \leq 2^q \sum_{j,k} \mu(E_j^k) 2^{kq} \\
&\quad \leq 2^q C_{\alpha,n}^{-q} \sum_{j,\,k} \mu(E_j^k) \left(\frac{1}{|P_j^k|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{P_j^k} |f(y)| dy \right)^q \\
&\quad \leq 2^q C_{\alpha,n}^{-q} 3^{(n-\alpha)q} \sum_{j,\,k} \mu(E_j^k) \left(\frac{1}{|3P_j^k|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{3P_j^k} \sigma(y) dy \right)^q \left(\frac{\int_{P_j^k} |\frac{f}{\sigma}(y)| \sigma(y) dy}{\int_{3P_j^k} \sigma(y) dy} \right)^q \\
&\quad = C(\alpha, n, q) \int_X T\left(\frac{f}{\sigma}\right)^q d\omega.
\end{aligned}$$

donde X es el espacio $\mathbb{N}\ X\ \mathbb{Z}$, con la medida ω dada por

$$\omega(j,k) = \mu(E_j^k) \left(\frac{1}{|3P_j^k|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{3P_j^k} \sigma(y) dy \right)^q.$$

y, para toda función no negativa, medible h, el opertador T está definido por

$$Th(j,k) = \frac{\int_{P_j^k} h\sigma dx}{\int_{3P_j^k} \sigma dx}.$$

Es claro que si T es un operador acotado de $L^p(\mathbb{R}^n, \sigma)$ a $L^q(X, \omega)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\eta})_{loc} f^q \mu \leq C \int_X T\left(\frac{f}{\sigma}\right)^q \omega$$

$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{f}{\sigma}\right)^p\sigma\right)^{\frac{q}{p}}$$
$$= C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p\,\nu\right)^{\frac{q}{p}},$$

lo cual implica la desigualdad (1.3.5). Veamos que, efectivamente, lo es. En primer lugar, T es un operador acotado en L^∞ en efecto, pues si $h\in L^\infty(\sigma)$ resulta

$$\begin{aligned}|Th(j,k)| &\leq \frac{\int_{P_j^k}|h|\sigma dx}{\int_{3P_j^k}\sigma dx}\\ &\leq \|h\|_{L^\infty(\sigma)}\frac{\sigma(P_j^k)}{\sigma(3P_j^k)}\\ &\leq \|h\|_{L^\infty(\sigma)}.\end{aligned}$$

para toda (j,k) en X. Luego

$$\|Th\|_{L^\infty(\omega)}\leq \|h\|_{L^\infty(\sigma)}.$$

Luego, por el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz será suficiente probar que T es de tipo débil $(1,\frac{q}{p})$. Para ello consideramos h acotada y de soporte compacto.

Para $\lambda>0$ y $N\in\mathbb{N}$, sean

$$\begin{aligned}F_\lambda &= \{(j,k)\in X : Th(j,k)>\lambda\} \quad y,\\ F_\lambda^N &= \{(j,k)\in F_\lambda : 1\leq j\leq N \;\wedge -N\leq k\leq N\}.\end{aligned}$$

Claramente $F_\lambda^N\nearrow F_\lambda$, para $N\to\infty$. Dado que, por (1.3.4), el par de pesos (μ,ν) está en la clase $M_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, existe $\tau\geq 0$ tal que $(\mu,\nu)\in M_{p,q}^{\alpha,\rho,\tau}$, luego

$$\begin{aligned}\omega(F_\lambda^N) &= \sum_{(j,k)\in F_\lambda^N}\omega(j,k)\\ &= \sum_{(j,k)\in F_\lambda^N}\mu(E_j^k)\left(\frac{1}{|3P_j^k|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{3P_j^k}\sigma\right)^q\\ &= \sum_{(j,k)\in F_\lambda^N}\int_{E_j^k}\left(\frac{1}{|3P_j^k|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{3P_j^k}\sigma\right)^q\mu(x)\,dx\\ &= \sum_{(j,k)\in F_\lambda^N}\psi(3P_j^k)^{\tau q}\int_{E_j^k}\left(\frac{\psi(3P_j^k)^{-\tau}}{|3P_j^k|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{3P_j^k}\sigma\chi_{3P_j^k}\right)^q\mu(x)\,dx\\ &\leq C\sum_{(j,k)\in F_\lambda^N}\int_{E_j^k}\mathcal{M}_{\alpha,\tau}(\sigma\chi_{3P_j^k})^q\mu\,dx,\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, se ha usado que $\psi(3P_j^k)\cong C$ donde C es una constante independiente de j y k. Esto vale porque siendo $P_j^k=Q(x_j^k,r_j^k)$ un cubo diádico tal que $3P_j^k$ contiene al menos un cubo crítico Q_x con $x \in \Omega_k$ y que, por construcción se verifica que $r_j^k \leq 2\rho(x)$, resulta que el cubo crítico dilatado $6Q_x$ contiene a $3P_j^k$. En consecuencia, de la Proposición 4, $\rho(x_j^k) \cong \rho(x)$ con constantes independientes de j y k, lo que demuestra nuestra afirmación.

Dado que F_λ^N tiene una cantidad finita de elementos, existe una subcolección disjunta maximal $\{P_i\}$ de $\{P_j^k : (j,k) \in F_\lambda^N\}$. Además, teniendo en cuenta que los conjuntos E_j^k son disjuntos dos a dos y $E_j^k \subset 3P_j^k$ para todo j,k y por lo tanto $\bigcup_{\substack{(j,k)\in F_\lambda^N \\ P_j^k \subset P_i}} E_{j,k} \subset 3P_i$, resulta

$$\omega(F_\lambda^N) \leq C \sum_i \sum_{\substack{(j,k)\in F_\lambda^N \\ P_j^k \subset P_i}} \int_{E_j^k} \mathcal{M}_{\alpha,\tau}(\sigma\chi_{3P_j^k})^q \mu \, dx \leq C \sum_i \int_{3P_i} \mathcal{M}_{\alpha,\tau}(\sigma\chi_{3P_i})^q \mu \, dx.$$

Dado que el par de pesos (μ,ν) esta en la clase $M_{p,q}^{\alpha,\rho,\tau}$ resulta

$$\omega(F_\lambda^N) \leq C \sum_i \left(\int_{3P_i} \sigma \, dx \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Para cada i, $P_i = P_j^k$ para algún $(j,k) \in F_\lambda^N$. Por lo tanto, por definición de F_λ^N, teniendo en cuenta que los $P_i's$ son disjuntos y $\frac{q}{p} \geq 1$ resulta

$$\begin{aligned} \omega(F_\lambda^N) &\leq C \sum_i \left(\frac{1}{\lambda} \int_{P_i} h\,\sigma \right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq C \left(\sum_i \frac{1}{\lambda} \int_{P_i} h\,\sigma \right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq C \left(\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} h\,\sigma \right)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $N \to \infty$, se obtiene que T es débil $(1, \frac{q}{p})$ y, en consecuencia $(\mathcal{M}_{\alpha,\eta})_{loc}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$. □

Capítulo 2

Desigualdades de Fefferman-Stein

2.1. Desigualdades de tipo Fefferman-Stein.

En el capítulo anterior hemos definido la maximal Schrödinger $\mathcal{M}_\eta$ y la maximal sharp Schrödinger $\mathcal{M}_\eta^\sharp$. Aquí vamos a probar conexiones entre ellas a través de desigualdades de tipo Fefferman-Stein, esto es relaciones a través de normas fuertes y débiles. Éstas juegan un importante papel para probar resultados de acotación con dos pesos para la integral fraccionaria Schrödinger y su conmutador.

Nuestras desigualdades, en realidad, muestran una relación entre versiones ligeramente más generales de las maximales citadas. Más precisamente entre los operadores

$$\mathcal{M}_{\delta,\eta}f(x) = \mathcal{M}_\eta(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}(x)$$
$$\mathcal{M}_{\delta,\eta}^\sharp f(x) = \mathcal{M}_\eta^\sharp(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}(x),$$

con $\delta, \eta > 0$ y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Efectivamente, con esta notación tenemos

Teorema 2.1.1. *Desigualdad fuerte de Fefferman-Stein.*
Sean $0 < q, \delta, \eta < \infty$, $\delta < q$, μ un peso en $A_\infty^{\rho,loc}$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que, para toda g en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\delta,\eta}\, g(x)^q \mu(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\delta,\eta}^\sharp g(x)^q \mu(x)dx.$$

Teorema 2.1.2. *Desigualdad débil de Fefferman-Stein.*
Sean $\eta \geq 0$, $0 < \delta \leq 1$. Si μ es un peso en $A_\infty^{\rho,loc}$ y $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ una función creciente y duplicante, entonces existe una constante positiva C tal que

$$\sup_{\lambda>0} \phi(\lambda)\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\eta,\delta}f(x) > \lambda\}\right) \leq C \sup_{\lambda>0} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\eta,\delta}^\sharp f(x) > \lambda\right\}\right)$$

para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 2.1.3. La desigualdad fuerte de Fefferman-Stein, fue probada de alguna manera por Bongioanni, Harboure y Cabral (Teorema 4, [4]), aunque con un método distinto. Por otro lado, Lin Tang obtiene las correspondientes versiones diádicas de estas desigualdades, con condiciones más exigentes sobre el peso μ, más precisamente considera a $\mu \in A_\infty^{\rho,\infty}$ (Corolario 2.1, [40]).

Para probar el Teorema 2.1.1, es necesario introducir algunos operadores maximales auxiliares. Los mismos ya fueron considerados en [6].

Definición 2.1.4. Sea $\beta > 0$, se definen las siguientes maximales para g localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y x en $\mathbb{R}^n$

$$M_{\rho,\beta}g(x) = \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r\leq\beta\rho(y)}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |g|.$$

$$M^\sharp_{\rho,\beta}g(x) = \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r\leq\beta\rho(y)}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |g-g_Q|.$$

Dado un cubo fijo $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$, $x \in Q_0$

$$M_{Q_0}g(x) = \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ y\in Q_0}} \frac{1}{|Q\bigcap Q_0|}\int_{Q\bigcap Q_0} |g|.$$

$$M^\sharp_{Q_0}g(x) = \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ y\in Q_0}} \frac{1}{|Q\bigcap Q_0|}\int_{Q\bigcap Q_0} |g-g_{Q\bigcap Q_0}|.$$

Notar que si consideramos g restringida al cubo Q_0 $M_{Q_0}g$ y $M^\sharp_{Q_0}g$ coinciden con las definiciones estándar de la función maximal de Hardy-Littlewood y la función maximal sharp en Q_0, considerando a Q_0 como un espacio de tipo homogéneo con la métrica uniforme y la medida de Lebesgue restringida a Q_0.

Para los operadores recién definidos podemos probar.

Lema 2.1.5. *Sean $1 < p < \infty$ y μ un peso en la clase $A_\infty^{\rho,loc}$, entonces existen constantes $C > 0$, $\beta < 1$ y $\gamma > 1$ tal que si $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ es una colección de bolas críticas que cumplen las condiciones de la Proposición 5 entonces;*

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_{\rho,\beta}g(x)^p\mu(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp_{\rho,\gamma}g(x)^p\mu(x)dx + C\sum_k \mu(Q_k)\left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{2Q_k}|g(x)|dx\right)^p$$

para toda $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 2.1.6. Bongioanni, Harboure y Salinas en [6] probaron este lema en $\mathbb{R}^n$ sin pesos. La demostración de esta versión con pesos es similar, con obvias modificaciones, a la dada por ellos.

Ahora estamos en condiciones de proceder con la demostración de nuestro primer teorema.

Demostración del Teorema 2.1.1. Sean $\beta < 1, \gamma > 1$ las constantes mencionadas en el Lema 2.1.5. Luego,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\delta,\eta} g(x)^q \mu(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_\eta(|g|^\delta)(x)^{\frac{q}{\delta}} \mu(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sup_{x\in Q(y,r)} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|} \int_Q |g(z)|^\delta dz \right)^{\frac{q}{\delta}} \mu(x)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r\leq\beta\rho(y)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|} \int_Q |g(z)|^\delta \right)^{\frac{q}{\delta}} \mu(x)dx + \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r>\beta\rho(y)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|} \int_Q |g(z)|^\delta \right)^{\frac{q}{\delta}} \mu(x)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} M_{\rho,\beta}(|g|^\delta)(x)^{\frac{q}{\delta}} \mu(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r>\beta\rho(y)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|} \int_Q |g(z)|^\delta \right)^{\frac{q}{\delta}} \mu(x)dx \\
&\doteq \qquad I_1 \qquad + \qquad I_2.
\end{aligned}$$

Entonces, dado que, por hipótesis, $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$ y $\delta < q$, por Lema 2.1.5 resulta

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} M_{\rho,\beta}(|g|^\delta)(x)^{\frac{q}{\delta}} \mu(x)dx \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp_{\rho,\gamma}(|g|^\delta)(x)^{\frac{q}{\delta}} \mu(x)dx + \sum_k \mu(Q_k) \left(\frac{1}{|Q_k|} \int_{2Q_k} |g(z)|^\delta dz \right)^{\frac{q}{\delta}} \right) \\
&\lesssim \qquad I_{1,1} \qquad + \qquad I_{1,2}.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
&M^\sharp_{\rho,\gamma}(|g|^\delta)(x) \\
&\qquad = \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r\leq\gamma\rho(y)}} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| |g|^\delta - \left(|g|^\delta\right)_Q \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r<\rho(y)}} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left||g|^\delta - \left(|g|^\delta\right)_Q\right| + \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ \rho(y)\leq r<\gamma\rho(y)}} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left||g|^\delta - \left(|g|^\delta\right)_Q\right| \\
&\leq \mathcal{M}^\sharp_\eta(|g|^\delta)(x) + \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ \rho(y)\leq r<\gamma\rho(y)}} \frac{2}{|Q|}\int_Q |g|^\delta \\
&\leq \mathcal{M}^\sharp_\eta(|g|^\delta)(x) + \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ \rho(y)\leq r<\gamma\rho(y)}} 2\psi(Q)^\eta \frac{1}{\psi(Q)^\eta|Q|}\int_Q |g|^\delta \\
&\leq C\mathcal{M}^\sharp_\eta(|g|^\delta)(x).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^\sharp_\eta(|g|^\delta)(x)^{\frac{q}{\delta}}\,\mu(x)dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}g(x)^q\mu(x)dx.
\end{aligned}$$

Para estimar $I_{1,2}$ teniendo en cuenta que las bolas Q_k tienen solapamiento controlado y $\psi(2Q_k)$ es una constante para todo k, resulta

$$\begin{aligned}
I_{1,2} &\leq C\sum_k \mu(Q_k)\left(\frac{1}{|2Q_k|\psi(2Q_k)^\eta}\int_{2Q_k}|g(z)|^\delta dz\right)^{\frac{q}{\delta}} \\
&\leq C\sum_k \int_{Q_k}\left(\frac{1}{|2Q_k|\psi(2Q_k)^\eta}\int_{2Q_k}|g(z)|^\delta dz\right)^{\frac{q}{\delta}}\mu(x)dx \\
&\leq C\sum_k \int_{Q_k} \mathcal{M}^\sharp_\eta(|g|^\delta)(x)^{\frac{q}{\delta}}\mu(x)dx \\
&\leq C\sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_k}(x)\mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}g(x)^q\mu(x)dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_k \chi_{Q_k}(x)\right)\mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}g(x)^q\mu(x)dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}g(x)^q\mu(x)dx.
\end{aligned}$$

Así, de las estimaciones de $I_{1,1}$ y $I_{1,2}$, se sigue;

$$I_1 \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}g(x)^q\mu(x)dx$$

.

Veamos I_2. Denotando por Q_y al cubo crítico con centro en y, tenemos

$$\sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r>\beta\rho(y)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta|Q|}\int_Q |g|^\delta$$

$$\leq \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ \beta\rho(y)<r<\rho(y)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|}\int_Q |g|^\delta + \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r\geq\rho(y)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|}\int_Q |g|^\delta$$
$$\leq \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ \beta\rho(y)<r<\rho(y)}} \frac{|Q_y|}{|Q|}\left(\frac{\psi(Q_y)}{\psi(Q)}\right)^\eta \frac{1}{\psi(Q_y)^\eta |Q_y|}\int_{Q_y} |g|^\delta + \mathcal{M}^\sharp_\eta(|g|^\delta)(x)$$
$$\leq \frac{1}{\beta^{n+\eta}} \sup_{x\in Q(y,\rho(y)} \frac{1}{\psi(Q_y)^\eta |Q_y|}\int_{Q_y} |g|^\delta + \mathcal{M}^\sharp_\eta(|g|^\delta)(x)$$
$$\leq C\mathcal{M}^\sharp_\eta(|g|^\delta)(x),$$

donde hemos usado que $\psi(Q)\geq \beta\psi(Q_y)$.

Luego,

$$I_2 \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^\sharp_\eta(|g|^\delta)(x)^{\frac{q}{\delta}}\mu(x)dx$$
$$= C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}(g)(x)^q\mu(x)dx.$$

Finalmente las estimaciones de I_1 e I_2 nos permiten obtener la conclusión del Teorema. $\square$

Demostración del Teorema 2.1.2. Bastará con probar el teorema para $\delta = 1$. En efecto, pues, para $0<\delta<1$, denotando $\varrho(\lambda)=\lambda^{\frac{1}{\delta}}$, claramente ϱ es creciente y duplicante en $(0,\infty)$ y, por lo tanto, lo es la función compuesta $\phi\circ\varrho$. Luego, si suponemos que el teorema se verifica para $\delta=1$, resulta

$$\sup_{\lambda>0}\phi(\lambda)\mu\left(\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\eta,\delta}f(x)>\lambda\}\right) = \sup_{\lambda>0}\phi\circ\varrho(\lambda^\delta)\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta(|f|^\delta)(x)>\lambda^\delta\right\}\right)$$
$$\leq C\sup_{\lambda>0}\phi\circ\varrho(\lambda^\delta)\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_\eta(|f|^\delta)(x)>\lambda^\delta\right\}\right)$$
$$= C\sup_{\lambda>0}\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_{\eta,\delta}(|f|)(x)>\lambda\right\}\right)$$

Veamos el caso $\delta=1$. De la definición de $\mathcal{M}_\eta$ se sigue,

$$\mathcal{M}_\eta f(x) \leq \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r<\rho(y)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|}\int_Q |f(z)|dz + \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r\geq\rho(y)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|}\int_Q |f(z)|dz$$
$$\doteq \quad \mathcal{M}^{sub}_\eta f(x) \quad + \quad \mathcal{M}^{sup}_\eta f(x).$$

Notemos, en primer lugar, que trivialmente, de la definición de $\mathcal{M}^\sharp_\eta$, se sigue que $\mathcal{M}^{sup}_\eta f(x)\leq \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x)$. Por otra parte, para $N\in\mathbb{N}$, consideremos la bola $B=B(0,N)$ y tomemos $\{Q_j\}_j$ una colección de bolas críticas que cumplen las condiciones de la Proposición 5. Dado que $\overline{B(0,N)}$ es compacto, existe una subfamilia finita de $\{Q_j\}_{j_1}^{j_N}$, tal que $\overline{B(0,N)}\subseteq\bigcup_{j=j_1}^{j_N} Q_j$. Así,

$$\phi(\lambda)\mu\left(\{x\in B(0,N) : \mathcal{M}_\eta f(x)>\lambda\}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in B(0,N) : \mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \\
&\quad \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in B(0,N) : \mathcal{M}_\eta^{sup} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&\leq \phi(\lambda)\sum_j \mu\left(\left\{x \in B(0,N)\bigcap Q_j : \mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \\
&\quad \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta^{\sharp} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&\leq \phi(\lambda)\sum_{j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in Q_j : \mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta^{\sharp} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\phi(\lambda)\mu\left(\{x \in B(0,N) : \mathcal{M}_\eta f(x) > \lambda\}\right) \\
&\leq \phi(\lambda)\sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in Q_j : \mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta^{\sharp} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right).
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

A continuación, estimaremos $\mu\left(\left\{x \in Q_j : \mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)$. En primer lugar notemos que, sea $x \in Q_j$;

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) &= \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r<\rho(y)}} \frac{1}{\psi(Q)^\eta |Q|}\int_Q |f(z)|dz \\
&\leq \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r<\rho(y)}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(z)|dz.
\end{aligned}$$

Así, dado que por Proposición 6, existe $\beta \geq 1$ independiente de j tal que,

$$\bigcup_{\substack{Q_y\\ Q_y\bigcap Q_j\neq\emptyset}} Q_y \subset \beta Q_j \doteq \widetilde{Q}_j$$

resulta,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) &\leq \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ r<\rho(y)}} \frac{1}{|Q\bigcap \widetilde{Q}_j|}\int_{Q\bigcap \widetilde{Q}_j} |f\chi_{\widetilde{Q}_j}(z)|dz \\
&\leq M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)
\end{aligned}$$

para toda x en Q_j donde, para cada j, M_j denota al operador maximal clásico en el espacio de tipo homogéneo $\widetilde{Q}_j$ con la métrica uniforme y la medida de Lebesgue restringida en

$\widetilde{Q}_j$. Luego, para todo $\lambda > 0, j = j_1, j_2, ..., j_N$, tenemos

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda)\mu &\left(\left\{x \in Q_j : \mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&\leq \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in Q_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&\leq \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right). \qquad (2.1.8)
\end{aligned}$$

Ahora bien, si $0 < \lambda < 4f_{\widetilde{Q}_j}$, dado que $\psi(\widetilde{Q}_j) = (1+\beta)$ podemos escribir

$$\frac{1}{\psi(\widetilde{Q}_j)^\eta |\widetilde{Q}_j|} \int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)| dy > \frac{\lambda}{4(1+\beta)^\eta}.$$

Así, para cada $x \in \widetilde{Q}_j$, $\mathcal{M}_\eta^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{4(1+\beta)^\eta}$ y por lo tanto

$$\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : \mathcal{M}_\eta^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{4(1+\beta)^\eta}\right\}\right), \quad (2.1.9)$$

para toda $\lambda < 4f_{\widetilde{Q}_j}$.

Por otra parte si $\lambda \geq 4f_{\widetilde{Q}_j}$, dado que, por hipótesis $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$, lo cual implica que $\mu \in A_\infty(\widetilde{Q}_j)$ con constante independiente de j (probado en el Teorema 1.2.32), aplicando un razonamiento análogo al mencionado en la Proposición 3.4 en [34] (p.85) se obtiene,

$$\begin{aligned}
\mu &\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \qquad (2.1.10) \\
&\leq C\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j^\sharp(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2A}\right\}\right) + \frac{C}{A^{\delta_1}}\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{4}\right\}\right) \qquad (2.1.11)
\end{aligned}$$

donde δ_1 es la constante de la condición $A_\infty^{\rho,loc}$ para el peso μ y la constante $A > 1$ es arbitraria y será elegida convenientemente.

Recordemos que, en el espacio de tipo homogéneo $\widetilde{Q}_j$ es suficiente tomar bolas de tamaño limitado, a saber $r \leq 2\beta\rho(x_j)$. Así, para $x \in \widetilde{Q}_j$,

$$\begin{aligned}
M_j^\sharp(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) &= \sup_{\substack{x \in Q(y,r) \\ y \in \widetilde{Q}_j}} \frac{1}{|Q \cap \widetilde{Q}_j|} \int_{Q \cap \widetilde{Q}_j} \left| f\chi_{\widetilde{Q}_j} - \left(f\chi_{\widetilde{Q}_j}\right)_{Q \cap \widetilde{Q}_j} \right| \\
&\leq \sup_{\substack{x \in Q(y,r) \\ y \in \widetilde{Q}_j,\, r < \rho(y)}} \frac{1}{|Q \cap \widetilde{Q}_j|} \int_{Q \cap \widetilde{Q}_j} \left| f\chi_{\widetilde{Q}_j} - \left(f\chi_{\widetilde{Q}_j}\right)_{Q \cap \widetilde{Q}_j} \right| + \\
&\quad \sup_{\substack{x \in Q(y,r) \\ y \in \widetilde{Q}_j,\, \rho(y) \leq r \leq 2\beta\rho(y)}} \frac{1}{|Q \cap \widetilde{Q}_j|} \int_{Q \cap \widetilde{Q}_j} \left| f\chi_{\widetilde{Q}_j} - \left(f\chi_{\widetilde{Q}_j}\right)_{Q \cap \widetilde{Q}_j} \right|
\end{aligned}$$

$$= \; I \; + \; II$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
I = & \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ y\in \widetilde{Q}_j,\, r<\rho(y)}} \frac{1}{|Q\bigcap \widetilde{Q}_j|}\int_{Q\bigcap \widetilde{Q}_j} \left|f\chi_{\widetilde{Q}_j} - f_Q\right| + \left|\left(f\chi_{\widetilde{Q}_j}\right)_{Q\bigcap \widetilde{Q}_j} - f_Q\right| \\
\leq & \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ y\in \widetilde{Q}_j,\, r<\rho(y)}} \frac{1}{|Q\bigcap \widetilde{Q}_j|}\int_{Q\bigcap \widetilde{Q}_j} |f - f_Q| + \left|\frac{1}{|Q\bigcap \widetilde{Q}_j|}\int_{Q\bigcap \widetilde{Q}_j} f\chi_{\widetilde{Q}_j} - f_Q\right| \\
\leq & \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ y\in \widetilde{Q}_j,\, r<\rho(y)}} \frac{2^n}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| + \frac{2^n}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| \\
\leq & \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ y\in \widetilde{Q}_j,\, r<\rho(y)}} \frac{2^{n+1}}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| \\
\leq & \; 2^{n+1}\mathcal{M}^{\sharp}_{\eta} f(x).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
II \leq & \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ y\in \widetilde{Q}_j\; \rho(y)\leq r\leq \beta\rho(y)}} \frac{2}{|Q\bigcap \widetilde{Q}_j|}\int_{Q\bigcap \widetilde{Q}_j} \left|f\chi_{\widetilde{Q}_j}\right| \\
\leq & \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ y\in \widetilde{Q}_j,\, \rho(y)\leq r\leq \beta\rho(y)}} \frac{2^{n+1}}{|Q|}\int_Q |f| \\
\leq & \; (1+2\beta)^{\eta}\, 2^{n+1} \sup_{\substack{x\in Q(y,r)\\ y\in \widetilde{Q}_j,\, \rho(y)\leq r\leq \beta\rho(y)}} \frac{1}{|Q|\psi(Q)^{\eta}}\int_Q |f| \\
\leq & \; 2^{\eta+n+1}\,(1+\beta)^{\eta}\,\mathcal{M}^{\sharp}_{\eta} f(x).
\end{aligned}$$

De las estimaciones de I y II se sigue

$$M^{\sharp}_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) \leq 2^{\eta+n+2}\,(1+\beta)^{\eta}\,\mathcal{M}^{\sharp}_{\eta} f(x), \quad \forall x\in \widetilde{Q}_j.$$

En consecuencia, (2.1.11) nos lleva a

$$\mu\left(\left\{x\in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \tag{2.1.12}$$

$$\leq C\mu\left(\left\{x\in \widetilde{Q}_j : \mathcal{M}^{\sharp}_{\eta}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2^{\eta+n+3}A(1+\beta)^{\eta}}\right\}\right) + \tag{2.1.13}$$

$$\frac{C}{A^{\delta}}\mu\left(\left\{x\in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{4}\right\}\right), \tag{2.1.14}$$

para todo $\lambda \geq 4f_{\widetilde{Q}_j}$.

Luego, de (2.1.9) y (2.1.14), se tiene que para $j = j_1, j_2, ..., j_N$ y para cada $\lambda > 0$ se verifica

$$\begin{aligned}
&\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)\\
&\quad\leq \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{4(1+\beta)^\eta}\right\}\right) +\\
&\quad C\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : \mathcal{M}^\sharp_\eta (f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2^{\eta+n+3}(1+\beta)^\eta A}\right\}\right) +\\
&\quad\frac{C}{A^\delta}\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{4}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, sumando en j, resulta

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=j_1}^{j_N}\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)\\
&\quad\leq \sum_{j=j_1}^{j_N}\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{B_1}\right\}\right) +\\
&\quad C\sum_{j=j_1}^{j_N}\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : \mathcal{M}^\sharp_\eta (f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{B_2 A}\right\}\right) +\\
&\quad\frac{C}{A^{\delta_1}}\sum_{j=j_1}^{j_N}\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{4}\right\}\right).
\end{aligned}$$

donde $B_1 = 4(1+\beta)^\eta$ y $B_2 = 2^{\eta+n+3}(1+\beta)^\eta$.

Entonces, usando la propiedad de solapamiento controlado de los cubos $\{Q_j\}$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=j_1}^{j_N}\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{B_1}\right\}\right)\\
&\quad\leq \phi(\lambda)\sum_j \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{B_1}\}} \chi_{\widetilde{Q}_j}(x)\mu(x)dx\\
&\quad\leq \phi(\lambda)\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{B_1}\}} \left(\sum_j \chi_{\widetilde{Q}_j}(x)\right)\mu(x)dx\\
&\quad\leq C\beta^{N_1}\phi(\lambda)\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{B_1}\}} \mu(x)dx\\
&\quad= C\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : M^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{B_1}\right\}\right),
\end{aligned}$$

y analogamente para la segunda suma

$$\sum_{j=j_1}^{j_N}\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : \mathcal{M}^\sharp_\eta (f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{B_2 A}\right\}\right)$$

$$\leq C\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{B_2 A}\right\}\right).$$

Luego,

$$\sum_{j=j_1}^{j_N} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)$$
$$\leq C\phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{B_2 A}\right\}\right) +$$
$$\frac{C}{A^{\delta_1}} \sum_{j=j_1}^{j_N} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{4}\right\}\right).$$

donde se ha usado que $B_1 < B_2 A$. Sea $t > 0$. Tomando el supremo para λ de 0 a t a ambos lados de la desigualdad anterior resulta,

$$\sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)$$
$$\leq C \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \frac{\lambda}{B_2 A}\right\}\right) +$$
$$\sup_{0<\lambda<t} \frac{C}{A^{\delta_1}} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \frac{\lambda}{4}\right\}\right).$$

Dado que la función ϕ es creciente y duplicante, resulta $\phi(B_2 A\lambda) \leq C(B_2 A)^r \phi(\lambda)$, para algún r dependiente de la duplicación. Luego, haciendo un cambio de variables se tiene,

$$\sup_{0<\lambda<\frac{t}{2}} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \lambda\right\}\right)$$
$$\leq CA^r \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_\eta f(x) > \lambda\right\}\right) +$$
$$\frac{C}{A^{\delta_1}} \sup_{0<\lambda<\frac{t}{2}} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \lambda\right\}\right).$$

Teniendo en cuenta que,

$$\sup_{0<\lambda<\frac{t}{2}} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \lambda\right\}\right) \leq \phi\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu(\widetilde{Q}_j) < \infty,$$

se sigue que

$$\left(1 - \frac{C}{A^{\delta_1}}\right) \sup_{0<\lambda<\frac{t}{2}} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \lambda\right\}\right)$$

$$\leq CA^r \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta^\sharp f(x) > \lambda\right\}\right).$$

Entonces, eligiendo A tal que $1 - \frac{C}{A^{\delta_1}} > 0$, podemos escribir

$$\sup_{0<\lambda<\frac{t}{2}} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \lambda\right\}\right)$$
$$\leq C \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta^\sharp f(x) > \lambda\right\}\right).$$

Con esta estimación podemos, ahora, sumar en (2.1.8) en j de $j = j_1$ a $j = j_N$. Luego, tomando el supremo para λ de 0 a t, haciendo cambio de variables y usando la estimación anterior resulta,

$$\sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in Q_j : \mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)$$
$$\leq C \sup_{0<\lambda<\frac{t}{2}} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_j : M_j(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) > \lambda\right\}\right)$$
$$\leq C \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta^\sharp f(x) > \lambda\right\}\right).$$

A su vez, con esta desigualdad, tomando en (2.1.7) el supremo para λ de 0 a t se obtiene,

$$\sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\{x \in B(0,N) : \mathcal{M}_\eta f(x) > \lambda\}\right)$$
$$\leq \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda) \sum_{j=j_1}^{j_N} \mu\left(\left\{x \in Q_j : \mathcal{M}_\eta^{sub} f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) +$$
$$+ \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right).$$
$$\leq C \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : M_\eta^\sharp f(x) > \lambda\right\}\right).$$

En consecuencia para cada λ en $(0,t)$ y N en $\mathbb{N}$ tenemos

$$\phi(\lambda)\mu\left(\{x \in B(0,N) : \mathcal{M}_\eta f(x) > \lambda\}\right) \leq C \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta^\sharp f(x) > \lambda\right\}\right)$$

Así, con $N \to \infty$ y tomando luego el supremo para λ en $(0,t)$ resulta,

$$\sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta f(x) > \lambda\}\right) \leq C \sup_{0<\lambda<t} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\eta^\sharp f(x) > \lambda\right\}\right),$$

donde $t > 0$ es arbitrario. Finalmente, haciendo $t \to \infty$ se obtiene lo deseado. $\square$

2.2. Aplicaciones.

2.2.1. Desigualdades con dos pesos para $\mathcal{I}_\alpha$

Recordemos que la integral fraccionaria de Schrödinger de orden α, $0<\alpha<n$, puede escribirse como

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_\alpha(x,y) f(y)\, dy$$

donde $\mathcal{K}_\alpha(x,y) = \int_0^\infty k_t(x,y) t^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{t}$, siendo k_t el núcleo del operador de semigrupo $e^{-t\mathcal{L}}$, para el cual, en la introducción, hemos presentado algunas estimaciones que nos serán útiles aquí. Recordemos que, a partir del Lema 7, se obtiene la siguiente estimación de $\mathcal{K}_\alpha$,

$$\mathcal{K}_\alpha(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{n-\alpha}} \tag{2.2.1}$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$, de donde resulta

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) \leq C I_\alpha f(x), \tag{2.2.2}$$

donde I_α es el operador integral fraccionario clásico (V=0). De esta última estimación tenemos que para f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{I}_\alpha f(x) < \infty$.

Nuestro objetivo es obtener desigualdades con dos pesos para $\mathcal{I}_\alpha$. Para la versión clásica, I_α, Muckenhoupt y Wheeden en [28] caracterizan los pesos ω para los cuales $I_\alpha : L^p(\omega^p) \to L^q(\omega^q)$ para $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ e $I_\alpha : L^p(\omega^p) \to L^{q,\infty}(\omega^q)$, para $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Para la obtención de estos resultados, los autores comparan la integral fraccionaria con la maximal fraccionaria. Más precisamente, prueban que para pesos $\omega \in A_\infty$, $0 < p < \infty$, se verifican las siguientes desigualdades

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q \omega(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |M_\alpha f(x)|^q \omega(x) dx \tag{2.2.3}$$

$$\sup_{a>0} a^q \omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > a\}\right) \leq C \sup_{a>0} a^q \omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(x)| > a\}\right). \tag{2.2.4}$$

Luego, los resultados deseados se obtienen a partir de demostrar los mismos para M_α. Posteriormente, C. Pérez, en [30], teniendo también en cuenta (2.2.3) y (2.2.4), prueba la siguiente versión para dos pesos de Muckenhout y Wheeden.

Teorema 2.2.5. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p \leq q < \infty$ y (μ, ν) un par de pesos con $\mu, \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(2.2.6) $$(\mu, \nu) \in A^\alpha_{p,q}$$

(2.2.7) $$I_\alpha : L^p(\nu) \to L^q(\mu).$$

Por lo mencionado en (2.2.2),

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) \leq C I_\alpha f(x),$$

luego, es inmediato que las condiciones sobre los pesos dadas por C. Pérez, aseguran que $\mathcal{I}_\alpha$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$, para $1 < p \leq q < \infty$. Ahora bien el Lema 7, nos proporciona mejor información. En efecto, de el se deduce que el núcleo de la integral fraccionaria de Schrödinger tiene un mayor decaimiento en el infinito que el correspondiente a la versión clásica y por lo tanto podría esperarse que la acotación se verifique para pesos con condiciones menos exigentes. En efecto, probaremos aquí que vale el siguiente resultado

Teorema 2.2.8. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 \leq p \leq q < \infty$, (μ, ν) un par de pesos tal que $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$ y $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\theta}$ para algún $\theta \geq 0$, luego*

(2.2.9) *Si* $1 < p \leq q < \infty$, $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty^{\rho,loc}$, *entonces* $\mathcal{I}_\alpha : L^p(\nu) \to L^q(\mu)$.
(2.2.10)*Si* $1 \leq p \leq q < \infty$, *entonces* $\mathcal{I}_\alpha : L^p(\nu) \to L^{q,\infty}(\mu)$.

Observación 2.2.11. En el Capítulo 1, (1.2.30), proporcionamos un ejemplo de par de pesos (μ,ν) que cumplen las condiciones del teorema anterior.

Nuestras técnicas también se basan en comparar la integral fraccionaria con una adecuada maximal fraccionaria, más especificamente con $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$, el operador considerado en el Capítulo 1. En particular nuestros resultados de comparación están enunciados en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.12. *Sean $0 < q, \eta < \infty$ y μ un peso en $A_\infty^{\rho,loc}$. Existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_\alpha f(x)|^q \mu(x)dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\alpha,\eta} f(x)^q \mu(x)dx \tag{2.2.13}$$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^q \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_\alpha f(x)| > \lambda\}\right) \leq C_2 \sup_{\lambda>0} \lambda^q \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\alpha,\eta} f(x) > \lambda\}\right), \tag{2.2.14}$$

para toda f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.

Para la prueba de este teorema emplearemos la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein y una estimación puntual que relaciona $\mathcal{I}_\alpha$ y $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$.

Proposición 2.2.15. *Sean $0 < \eta < \infty$ y $0 < \delta < 1$, entonces existe una constante C tal que*

$$\mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x) \leq C \mathcal{M}_{\alpha,\eta} f(x), \quad \textit{para casi toda}\, x \in \mathbb{R}^n$$

para toda f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$.

Observación 2.2.16. Adams, D.R en [1] prueba el resultado anterior para el caso clásico $(V = 0)$.

Para la demostración de esta última proposición, utilizaremos la desigualdad de Kolmogorov y un lema técnico probado por Crescimbeni, Hartzstein y Salinas.

Lema 2.2.17. *Desigualdad de Kolmogorov [22]*
Sea $0 < r < l < \infty$. Definimos,

$$N_{l,r}(f) = \sup_E \frac{\|f\chi_E\|_r}{\|\chi_E\|_s}, \qquad \frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{l}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los conjuntos medibles E con $0 < |E| < \infty$ y χ_E denota la función característica de E. Luego

$$\|f\|_{L^{l,\infty}} \leq N_{l,r}(f) \leq \left(\frac{l}{l-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{l,\infty}}.$$

Lema 2.2.18. *Dados s, ρ y β reales positivos y $N \geq 0$, existe una constante C tal que,*

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho})^N} e^{-\frac{s^2}{t}} \frac{dt}{t} \leq C \frac{1}{s^\beta (1+\frac{s}{\rho})^N}. \tag{2.2.19}$$

Dados $s > \sigma$, $N \geq 0$, $\rho > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ luego para cada $M > \beta + N$ existe una constante C_M tal que,

$$\int_0^{\sigma^2} \frac{t^{-\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho})^N} e^{-\frac{s^2}{t}} \frac{dt}{t} \leq C_M \left(\frac{\sigma}{s}\right)^{M-N} \frac{1}{\sigma^\beta (1+\frac{s}{\rho})^N}. \tag{2.2.20}$$

Demostración. Veamos (2.2.19). Haciendo el cambio de variables $u = \frac{s^2}{t}$ tenemos,

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho})^N} e^{-\frac{s^2}{t}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{s^\beta} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{s}{\rho\sqrt{u}})^N} e^{-u} \frac{du}{u}.$$

Si $\frac{s}{\rho} \leq 1$ entonces $1 + \frac{s}{\rho} \leq 2$ y, por lo tanto $\frac{u^{\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{s}{\rho\sqrt{u}})^N} \leq u^{\frac{\beta}{2}} \leq 2 \frac{u^{\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{s}{\rho})^N}$. Por otro lado, si $\frac{s}{\rho} > 1$ entonces $1 + \frac{s}{\rho} \leq 2\frac{s}{\rho}$ y, por lo tanto, $\frac{u^{\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{s}{\rho\sqrt{u}})^N} \leq \frac{u^{\frac{\beta+N}{2}}}{(\frac{s}{\rho})^N} \leq 2^N \frac{u^{\frac{\beta+N}{2}}}{(1+\frac{s}{\rho})^N}$. Luego,

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho})^N} e^{-\frac{s^2}{t}} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{s^\beta (1+\frac{s}{\rho})^N} \int_0^\infty (u^{\frac{\beta}{2}} + u^{\frac{\beta+N}{2}}) e^{-u} \frac{du}{u} \leq C \frac{1}{s^\beta (1+\frac{s}{\rho})^N}.$$

Veamos (2.2.20). Haciendo el mismo cambio de variables que para probar (2.2.19), el hecho que $\sup_{t>1} t^M e^{-t} \leq C_M$ para toda $M > 0$ y para alguna constante C_M, y siguiendo los mismos pasos que en la prueba de (2.2.19), se sigue

$$\begin{aligned}\int_0^{\sigma^2} \frac{t^{-\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho})^N} e^{-\frac{s^2}{t}} \frac{dt}{t} &= \frac{1}{s^\beta} \int_{(\frac{s}{\rho})^2}^\infty \frac{u^{\frac{\beta}{2}}}{(1+\frac{s}{\rho\sqrt{u}})^N} e^{-u} \frac{du}{u} \\ &\leq C \frac{1}{s^\beta (1+\frac{s}{\rho})^N} \int_{(\frac{s}{\rho})^2}^\infty (u^{\frac{\beta-M}{2}} + u^{\frac{\beta+N-M}{2}}) \frac{du}{u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\frac{1}{s^{\beta}(1+\frac{s}{\rho})^{N}}\left((\frac{s}{\sigma})^{\beta-M}+(\frac{s}{\sigma})^{\beta+N-M}\right)\\
&\leq C\frac{1}{s^{\beta}(1+\frac{s}{\rho})^{N}}(\frac{s}{\sigma})^{\beta+N-M}\\
&\leq C\frac{\sigma^{M-N-\beta}}{s^{M-N}(1+\frac{s}{\rho})^{N}}.
\end{aligned}$$

□

A partir de estos resultados, podemos proceder con nuestra demostración.

Demostración de la Proposición 2.2.15. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $Q = Q(x_0, r)$ una bola que contiene a x. Descomponemos $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f\chi_{\widetilde{Q}}$, $\widetilde{Q} = 2Q = Q(x_0, 2r)$. De (1.2.3), resulta

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}^{\sharp}_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x)\\
&= \mathcal{M}^{\sharp}_{\eta}(|\mathcal{I}_\alpha f|^{\delta})^{\frac{1}{\delta}}(x)\\
&\leq \sup_{\substack{x\in Q(x_0,r)\\ r<\rho(x_0)}} \inf_C \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q ||\mathcal{I}_\alpha f(y)|^{\delta} - C^{\delta}|dy\right)^{\frac{1}{\delta}} + \sup_{\substack{x\in Q(x_0,r)\\ r\geq\rho(x_0)}} \left(\psi(Q)^{-\eta}\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha(f)(y)|^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}}
\end{aligned}$$

Consideraremos dos casos respecto de r, $r < \rho(x_0)$ y $r \geq \rho(x_0)$.

Caso 1. $r < \rho(x_0)$. Fijemos $C = |\left(\mathcal{I}_\alpha f_2\right)_Q|$, luego dado que $0 < \delta < 1$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q ||\mathcal{I}_\alpha f(y)|^{\delta} - |\left(\mathcal{I}_\alpha f_2\right)_Q|^{\delta}|dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\qquad\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q ||\mathcal{I}_\alpha f(y)| - |\left(\mathcal{I}_\alpha f_2\right)_Q||^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\qquad\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f(y) - \left(\mathcal{I}_\alpha f_2\right)_Q|^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\qquad\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f_1(y)|^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f_2(y) - \left(\mathcal{I}_\alpha f_2\right)_Q|^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}}.\\
&\qquad= I + II.
\end{aligned}$$

Para estimar I, aplicando la desigualdad de Kolmogorov (Lema 2.2.17), teniendo en cuenta que $\mathcal{I}_\alpha$ es de tipo débil $(1, \frac{n}{n-\alpha})$ y que $\psi(\widetilde{Q}) \cong 1$ resulta

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{C}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\|\mathcal{I}_\alpha f\|_{L^{\frac{n}{n-\alpha},\infty}}\\
&\leq \frac{C}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\widetilde{Q}} |f(y)|dy
\end{aligned}$$

$$\leq C|\widetilde{Q}|^{\frac{\alpha}{n}-1}\psi(\widetilde{Q})^{-\eta}\int_{\widetilde{Q}}|f(y)|dy$$
$$\leq C\mathcal{M}_{\alpha,\eta}f(x).$$

Veamos II. Dado que $0<\delta<1$ resulta

$$II \leq \frac{C}{|Q|^2}\int_Q\int_Q\int_{\widetilde{Q}^c}|\mathcal{K}_\alpha(y,w)-\mathcal{K}_\alpha(z,w)|\,|f(w)|\,dwdz\,dy,$$

donde, $\mathcal{K}_\alpha$ denota al núcleo de la integral fraccionaria de Schrödinger. Ahora bien, para $y,z\in Q, w\in\widetilde{Q}^c$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_\alpha(y,w)-\mathcal{K}_\alpha(z,w)| &= \left|\int_0^\infty k_t(y,w)t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}-\int_0^\infty k_t(z,w)t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}\right|\\
&\leq \int_0^{4nr^2}|k_t(y,w)-k_t(z,w)|t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}+\int_{4nr^2}^\infty|k_t(y,w)-k_t(z,w)|t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}\\
&= \qquad K_1 \qquad + \qquad K_2
\end{aligned}$$

Para K_2, teniendo en cuenta que $t\geq 4nr^2$ y por lo tanto $|y-z|<\sqrt{t}$ para cualesquiera y,z en Q, resulta en virtud del Lema 8 que para cualquier $N>0$, $0<\nu<min(1,2-\frac{n}{q_0})$ y w en $\mathbb{R}^n$, existe una constante C tal que

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_{4nr^2}^\infty|k_t(y,w)-k_t(z,w)|t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}\\
&\leq C\int_{4nr^2}^\infty\left(\frac{|y-z|}{\sqrt{t}}\right)^\nu t^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|y-w|^2}{Ct}}\left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}\\
&\leq Cr^\nu\int_{4nr^2}^\infty\frac{t^{-\frac{n+\nu-\alpha}{2}}}{\left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^N}e^{-\frac{|y-w|^2}{Ct}}\frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

Luego, usando el Lema 2.2.18 (2.2.19) con un cambio de variables se sigue,

$$K_2\leq Cr^\nu\frac{1}{|y-w|^{n+\nu-\alpha}}\left(1+\frac{|y-w|}{\rho(y)}\right)^{-N}.$$

Notemos que, dado que y está en $Q(x_0,r)$ y w en $\widetilde{Q}(x_0,2r)^c$ resulta $|y-w|\cong|x_0-w|$. Por otro lado, por ser Q subcrítico, $\rho(y)\cong\rho(x_0)$, así

$$K_2\leq Cr^\nu\frac{1}{|x_0-w|^{n+\nu-\alpha}}\left(1+\frac{|x_0-w|}{\rho(x_0)}\right)^{-N}. \tag{2.2.21}$$

Para K_1 usando el Lema 7, resulta que, para cualquier $N>0$, existe una constante C_N tal que para cualesquiera y,w,z en $\mathbb{R}^n$ se cumple

$$K_1\leq\int_0^{4nr^2}k_t(y,w)t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}+\int_0^{4nr^2}k_t(z,w)t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_0^{4nr^2} t^{-\frac{n-\alpha}{2}} e^{-\frac{|y-w|^2}{Ct}} \left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N} \frac{dt}{t} + \int_0^{4nr^2} t^{-\frac{n-\alpha}{2}} e^{-\frac{|z-w|^2}{Ct}} \left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(z)}\right)^{-N} \frac{dt}{t}.$$

Luego, dado que para cualesquiera y en Q y w en $\widetilde{Q}^c$ tenemos $|y-w| \cong |x_0-w| > 2r$ (análogamente para z en lugar de y), aplicando en la expresión anterior el Lema 2.2.18 (2.2.20), se obtiene que, para cada $M > n-\alpha+N$, existe una constante C_M tal que

$$K_1 \leq C_M \left(\frac{r}{|y-w|}\right)^{M-N} \frac{1}{r^{n-\alpha}\left(1+\frac{|y-w|}{\rho(y)}\right)^N} + C_M \left(\frac{r}{|z-w|}\right)^{M-N} \frac{1}{r^{n-\alpha}\left(1+\frac{|z-w|}{\rho(z)}\right)^N}.$$

Al igual que en la estimación de K_2, $|y-w| \cong |x_0-w|$ y $\rho(y) \cong \rho(x_0)$ para todo y en Q y w en $\widetilde{Q}^c$. Luego, tomando $M = n-\alpha+N+\nu$, se obtiene la siguiente estimación para K_1

$$K_1 \leq C r^{\nu} \frac{1}{|x_0-w|^{n+\nu-\alpha}} \left(1+\frac{|x_0-w|}{\rho(x_0)}\right)^{-N}. \tag{2.2.22}$$

Ahora, de 2.2.21 y 2.2.22, resulta

$$|\mathcal{K}_\alpha(y,w) - \mathcal{K}_\alpha(z,w)| \leq C r^{\nu} \frac{1}{|x_0-w|^{n+\nu-\alpha}} \left(1+\frac{|x_0-w|}{\rho(x_0)}\right)^{-N}, \quad \forall y,z \in Q, w \in \widetilde{Q}^c. \tag{2.2.23}$$

Denotando por $Q_k = Q(x_0, 2^k r)$ y aplicando la estimación de los núcleos recién obtenida, II se puede, a su vez, estimar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} II &\leq C r^{\nu} \int_{\widetilde{Q}^c} \frac{1}{|w-x_0|^{n+\nu-\alpha}} |f(w)| \left(1+\frac{|w-x_0|}{\rho(x_0)}\right)^{-N} dw \\ &\leq C r^{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k r)^{n+\nu-\alpha}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^N} \int_{Q_{k+1}-Q_k} |f(w)| dw \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\nu} |Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1} \psi(Q_k)^{-N} \int_{Q_{k+1}} |f(w)| dw \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\nu} \psi(Q_k)^{-N+\eta} \psi(Q_k)^{-\eta} |Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{Q_k} |f(w)| dw \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\nu} \psi(Q_k)^{-N+\eta} \mathcal{M}_{\alpha,\eta} f(x). \end{aligned}$$

Recordemos que $N > 0$ es arbitrario. Así, eligiendo $N > \eta$, se obtiene

$$II \leq C \mathcal{M}_{\alpha,\eta} f(x).$$

lo que completa la prueba en el caso 1.

Caso 2. $r \geq \rho(x_0)$. Con la división planteada para f tenemos

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\psi(Q)^\eta}\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\quad = \frac{1}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\quad = \frac{1}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f_1(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} + \frac{1}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f_2(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\quad \doteq I + II.
\end{aligned}$$

Para I, siguiendo un razonamiento análogo al considerado en el caso 1, se obtiene

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{C}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{\widetilde{Q}} |f(y)|dy\\
&\leq \frac{C}{\psi(\widetilde{Q})^{\frac{\eta}{\delta}-\eta}}\psi(\widetilde{Q})^{-\eta}|\widetilde{Q}|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{\widetilde{Q}} |f(y)|dy\\
&\leq C\mathcal{M}_{\alpha,\eta}f(x),
\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, se ha usado que $0 < \delta < 1$ y por lo tanto $\frac{\eta}{\delta} - \eta > 0$.

Para II, teniendo en cuenta otra vez que $0 < \delta < 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f_2(y)|dy\\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \int_{\widetilde{Q}^c} |f(w)|\,|\mathcal{K}_\alpha(y,w)|\,dw\,dy
\end{aligned}$$

A partir del Lema 7, resulta que para cada $N > 0$, existe una constante C_N tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\alpha(y,w) &\leq C_N \int_0^\infty t^{-\frac{n-\alpha}{2}} e^{-\frac{|y-w|^2}{Ct}} \left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}\frac{dt}{t}\\
&\leq C\frac{1}{|w-x_0|^{n-\alpha}\left(1+\frac{|w-x_0|}{\rho(y)}\right)^N},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene del Lema 2.2.18 (2.2.19) y del hecho que $|y-w| \cong |w-x_0|$ para todo y en $Q = Q(x_0, r)$ y w en $\widetilde{Q}^c$. Luego, denotando $Q_k = Q(x_0, 2^k r)$, II se convierte en

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q \int_{\widetilde{Q}^c} |f(w)|\,\frac{1}{|w-x_0|^{n-\alpha}\left(1+\frac{|w-x_0|}{\rho(y)}\right)^N}\,dw\,dy\\
&\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q \sum_{k=1}^{\infty}\int_{Q_{k+1}-Q_k} |f(w)|\,\frac{1}{|w-x_0|^{n-\alpha}\left(1+\frac{|w-x_0|}{\rho(y)}\right)^N}\,dw\,dy
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q \sum_{k=1}^{\infty}\int_{Q_{k+1}-Q_k}|f(w)|\frac{1}{(2^k r)^{n-\alpha}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(y)}\right)^N}\,dw\,dy. \tag{2.2.24}$$

Aplicando la propiedad de la función de radio crítico citada en (3), dado que y está en $Q(x_0, r)$ y $r \geq \rho(x_0)$, resulta;

$$C\frac{1}{\rho(x_0)}\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \leq \frac{1}{\rho(y)} \leq C\frac{1}{\rho(x_0)}\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{N_0}.$$

Entonces, para todo y en Q,

$$\begin{aligned}
1+\frac{2^k r}{\rho(y)} &\geq 1 + C\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \\
&\geq C\frac{\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}} + \frac{2^k r}{\rho(x_0)}}{\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}} \\
&\geq C\frac{1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}} \\
&= C\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{1}{N_0+1}},
\end{aligned}$$

y, por lo tanto, (2.2.24) se transforma en

$$\begin{aligned}
II &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1}\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{-\frac{N}{N_0+1}}\int_{Q_k}|f(w)\,dw \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\psi(Q_k)^{\eta-\frac{N}{N_0+1}}\psi(Q_k)^{-\eta}|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{Q_k}|f(w)\,dw \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\psi(Q_k)^{\eta-\frac{N}{N_0+1}}\mathcal{M}_{\alpha,\eta}f(x),
\end{aligned}$$

donde $N > 0$ es arbitrario. Luego, dado que $r \geq \rho(x_0)$ resulta que $\psi(Q_k) = 1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)} \geq 2^k$, y, en consecuencia, eligiendo N tal que $\eta - \frac{N}{N_0+1} < 0$, se obtiene

$$II \leq C\mathcal{M}_{\alpha,\eta}f(x).$$

lo que completa la prueba del caso 2 y por lo tanto concluye la prueba de la Proposición. $\square$

Notemos que en la demostración de la Proposición 2.2.15 (ver (2.2.23)), hemos obtenido la siguiente estimación relativa a $\mathcal{K}_\alpha$.

Lema 2.2.25. *Dado $N > 0$, y $0 < \nu < min(1, 2 - \frac{n}{q_0})$, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|\mathcal{K}_\alpha(y, w) - \mathcal{K}_\alpha(z, w)| \leq Cr^\nu \frac{1}{|x_0 - w|^{n+\nu-\alpha}} \left(1 + \frac{|x_0 - w|}{\rho(x_0)}\right)^{-N},$$

para todo y, z en $Q(x_0, r)$ y w en $\widetilde{Q}(x_0, 2r)^c$, donde $r \leq \rho(x_0)$.

Nuestra intención para probar el Teorema 2.2.12, es aplicar la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein (Teorema 2.1.1) a la función $\mathcal{I}_\alpha f$, donde f es una función acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ para ello, en primer lugar, debemos verificar que $\mathcal{I}_\alpha f$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.2.26. *Sea $q \geq 1$ entonces $\mathcal{I}_\alpha f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para toda f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$*

Demostración. Será suficiente demostrar que para f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{I}_\alpha f$ es acotada. En efecto, sea $Q_0(x_0, r_0)$ una bola en $\mathbb{R}^n$ tal que sop$f \subset Q_0$, luego de la estimación (2.2.1) de $\mathcal{K}_\alpha$ obtenemos

$$|\mathcal{I}_\alpha f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\mathcal{K}_\alpha(x, y)dy \leq \|f\|_\infty \int_{Q_0(x_0,r_0)} \frac{1}{|x - y|^{n-\alpha}}dy. \tag{2.2.27}$$

Consideraremos dos casos. Si $x \notin 2Q_0$, dado que $y \in Q_0$, resulta $|x - y| \cong |x - x_0|$ y dado que además $|x - x_0| \geq 2r_0$, (2.2.27) se convierte en

$$|\mathcal{I}_\alpha f(x)| \lesssim \|f\|_\infty r_0^{\alpha-n} r_0^n \cong \|f\|_\infty r_0^\alpha. \tag{2.2.28}$$

Si $x \in 2Q_0$, dado que además $y \in Q_0$, entonces $d(x - y, 0) \leq |x - y| \leq 4\sqrt{n}r_0$, luego haciendo un cambio de variables y pasando a coordenadas polares, (2.2.27) toma la forma

$$|\mathcal{I}_\alpha f(x)| \leq \|f\|_\infty \int_{Q(0,4\sqrt{n}r_0)} \frac{1}{|z|^{n-\alpha}}dz = C\|f\|_\infty \int_0^{4\sqrt{n}r_0} \rho^{\alpha-n}\rho^{n-1}d\rho \cong \|f\|_\infty r_0^\alpha \tag{2.2.29}$$

De las desigualdades (2.2.28), (2.2.29) y (2.2.27) obtenemos

$$|\mathcal{I}_\alpha f(x)| \lesssim \|f\|_\infty r_0^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

obteniendo de esta manera que $\mathcal{I}_\alpha f$ es acotada, y por lo tanto está en $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \geq 1$. □

Con las herramientas introducidas estamos en condiciones de probar fácilmente el Teorema 2.2.12.

Demostración del Teorema 2.2.12. Sea $\delta < q$. Teniendo en cuenta que $w \in A_\infty^{\rho,loc}$ y que $\mathcal{I}_\alpha f$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ (ver Proposición 2.2.26), la inmediata estimación $\mathcal{I}_\alpha f \leq \mathcal{M}_\eta(|\mathcal{I}_\alpha f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}} = \mathcal{M}_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)$, nos permite obtener, a partir del Teorema 2.1.1,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_\alpha f(x)|^q \mu(x)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x)^q \mu(x)dx \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x)^q \mu(x)dx \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\alpha,\eta} f(x)^q \mu(x)dx.\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha aplicado la Proposición 2.2.15. Análogamente, aplicando el Teorema 2.1.2 resulta

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda>0}\lambda^q \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_\alpha f(x)| > \lambda\}\right) &\leq C\sup_{\lambda>0}\lambda^q \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x) > \lambda\}\right) \\ &\leq C\sup_{\lambda>0}\lambda^q \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x) > \lambda\right\}\right) \\ &\leq C\sup_{\lambda>0}\lambda^q \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\alpha,\eta}(f)(x) > \lambda\}\right).\end{aligned}$$

donde como antes, en la última desigualdad se ha aplicado la Proposición 2.2.15. □

A su vez, el teorema anterior arroja como rápida consecuencia el Teorema 2.2.8.

Demostración del Teorema 2.2.8. El Teorema 2.2.12, nos permite trasladar el problema de acotación de $\mathcal{I}_\alpha$ al operador maximal $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$. Así, el Teorema 2.2.8 es inmediato a partir del teorema anterior y los Teoremas 1.2.32 y 1.2.50 probados en el Capítulo 1. □

2.2.2. Desigualdades con dos pesos para $\mathcal{I}_{\alpha,b}$

Para alguna función b consideremos el conmutador de primer orden del operador $\mathcal{I}_\alpha$, $\mathcal{I}_{\alpha,b}$, definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\alpha,b} f(x) &= b(x)\mathcal{I}_\alpha f(x) - \mathcal{I}_\alpha(bf)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))\, \mathcal{K}_\alpha(x,y)\, f(y)dy,\end{aligned}$$

donde $\mathcal{K}_\alpha(x,y)$ denota el núcleo de $\mathcal{I}_\alpha$.

Recordemos la definición del espacio BMO.

Definición 2.2.30. Sea b una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Se define

$$\|b\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |b(x) - b_Q|\, dx,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las bolas Q de $\mathbb{R}^n$. La función b es llamada de oscilación media acotada si $\|b\|_{BMO} < \infty$ y $BMO(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ con $\|b\|_{BMO} < \infty$.

Es conocido que $\|\|_{BMO}$ no es una norma. El problema es que si $\|b\|_{BMO} = 0$, no implica que $b = 0$, pero sí implica que b es una constante. Luego si identificamos los elementos en BMO que difieren en una constante, $\|\|_{BMO}$ resulta una norma.

Los conmutadores $I_{\alpha,b}$ fueron introducidos por primera vez por Chanillo [8], quien prueba que, para $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ y $b \in BMO$, vale la acotación $I_{\alpha,b} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$. Esto se corresponde con las desigualdades en norma satisfechas por I_α. Ahora bien, para el caso límite, $p = 1$, I_α verifica la siguiente desigualdad tipo débil $(1, \frac{n}{n-\alpha})$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x) > t|\}| \leq C \left(\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \right)^{\frac{n}{n-\alpha}}, \quad \forall t > 0.$$

Sin embargo, un cálculo sencillo con $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ y $b(x) = \log(1+x)\chi_{(1,\infty)}(x)$, muestra que $I_{\alpha,b}$ no es débil $(1, \frac{n}{n-\alpha})$. D. Cruz Uribe y A. Fiorenza, en [12], prueban que $I_{\alpha,b}$ verifica una desigualdad tipo débil $L \log L$. Más precisamente

Teorema 2.2.31. *Sean $0 < \alpha < n$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y las funciones $B(t) = t\log(e+t)$, $\psi(t) = \left(t\log(e + t^{\frac{\alpha}{n}})\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$. Luego, existe una constante positiva C tal que para toda $t > 0$,*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_{\alpha,b} f(x)| > t\}| \leq C\psi \left(\int_{\mathbb{R}^n} B \left(\|b\|_{BMO} \frac{|f(x)|}{t} \right) dx \right).$$

Este resultado de acotación se obtiene a través de una comparación con el operador maximal fraccionario Orlicz $M_{L\log L,\alpha}$ para el que, estos autores, prueban que cumple una desigualdad análoga a la expuesta. Además, en ese mismo trabajo, prueban la siguiente desigualdad fuerte (p, q) con un peso para $I_{\alpha,b}$, la cual generaliza el resultado original de Chanillo.

Teorema 2.2.32. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y q con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Sea ω un peso que satisface la condición $A_{p,q}$, esto es para toda bola $Q \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C < \infty.$$

Luego, dada una función $b \in BMO$, $I_{\alpha,b}$ satisface la siguiente desigualdad tipo fuerte (p, q),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_{\alpha,b} f|^q \omega^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C\|b\|_{BMO} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \omega^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación 2.2.33. Notemos que $\omega \in A_{p,q}$ si y sólo si $\omega^q \in A_{1+\frac{q}{p'}}$.

La condición $A_{p,q}$ es equivalente a la acotación fuerte (p,q) con un peso para I_α, resultado probado por Muckenhoupt y Wheeden en [28]. Dado esto, D. Cruz Uribe y A. Fiorenza, conjeturaron que, para el caso límite $p=1$, $q=\frac{n}{n-\alpha}$, la condición que asegura el tipo débil $(1,\frac{n}{n-\alpha})$ para I_α, esto es $\omega^q\in A_1$ (también probado por Muckenhoupt y Wheeden) podría ser suficiente para que valga una versión con un peso del Teorema 2.2.31. Sin embargo, en [12] construyen un ejemplo que muestra que esta conjetura no es cierta. Finalmente, en [13], prueban el siguiente resultado.

Teorema 2.2.34. *[13] Sean $0<\alpha<n$, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ y las funciones $B(t)=t\log(e+t)$, $\Psi(t)=\left(t\log(e+t^{\frac{\alpha}{n}})\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$ y $\theta(t)=t^{1-\frac{\alpha}{n}}\log(e+t^{-\frac{\alpha}{n}})$. Si $\omega\in A_1$, entonces existe una constante positiva C tal que para toda $t>0$,*

$$\omega\left(\{x\in\mathbb{R}^n:|I_{\alpha,b}f(x)|>t\}\right)\le C\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n}B\left(\|b\|_{BMO}\frac{|f(x)|}{t}\right)\theta(\omega(x))dx\right).$$

Por Lema 7, el núcleo de la integral fraccionaria de Schrödinger tiene un mayor decaimiento en el infinito que el correspondiente a la versión clásica y por lo tanto es natural preguntarse si para obtener resultados de acotación para $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ las funciones símbolo b podrían tomarse en un espacio de funciones más amplio que el BMO, como así también los pesos considerados. A este respecto, Bongioanni, Harboure y Salinas, en [6], definen el siguiente espacio de funciones.

Definición 2.2.35. Sea $\theta\ge 0$, el espacio $BMO_\theta(\rho)$ esta dada por el conjunto de funciones b localmente integrables que verifican,

$$\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|b(y)-b_Q|dy\le C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta \tag{2.2.36}$$

para toda $x\in\mathbb{R}^n$ y $r>0$, donde $b_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q b$. Una norma para $b\in BMO_\theta(\rho)$, denotada por $\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}$, está dada por el ínfimo de las constantes en (2.2.36), luego de identificar las funciones que difieren en una constante.

Definimos $BMO_\infty(\rho)=\bigcup\limits_{\theta\ge 0}BMO_\theta(\rho)$.

Observación 2.2.37. Claramente $BMO\subset BMO_\theta(\rho)\subset BMO_{\theta'}(\rho)$ para $0<\theta\le\theta'$ y por lo tanto $BMO\subset BMO_\infty(\rho)$. Sin embargo, es una clase más amplia. Como ejemplo, cuando ρ es constante (el cual corresponde al caso en que V es una constante positiva) las funciones $b_j(x)=|x_j|, 1\le j\le n$, están en $BMO_\infty(\rho)$, pero no en BMO (ver [6]).

También en [6], se prueban algunas propiedades de este espacio.

Proposición 2.2.38. *Sean $\theta>0$ y $1\le s<\infty$. Si $b\in BMO_\theta(\rho)$ entonces,*

$$\left(\frac{1}{|Q|}|b-b_Q|^s\right)^{\frac{1}{s}}\lesssim\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta'}$$

para toda bola $Q=Q(x,r)$ con $x\in\mathbb{R}^n$, $r>0$, donde $\theta'=(N_0+1)\theta$ y N_0 es la constante que aparece en (2).

En [40], Lin Tang prueba el siguiente análogo de la desigualdad de John-Niremberg en el espacio $BMO_\theta(\rho)$, $\theta \geq 0$. Antes de enunciarlo, recordemos que para $Q(x,r)$ bola de $\mathbb{R}^n$, $\psi(Q) = (1 + \frac{r}{\rho(x)})$.

Proposición 2.2.39. *Si $b \in BMO_\theta(\rho)$, $\theta \geq 0$, entonces existen constantes positivas C_1, C_2, dependientes unicamente de la dimensión n, tal que dado cualquier bola Q en $\mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$, se tiene*

$$|\{x \in Q : |b(x) - b_Q| > \lambda\}| \leq C_1 |Q| e^{-\frac{C_2 \lambda}{\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \psi(Q)^{\theta'}}}.$$

donde, como en la Proposición 2.2.38, $\theta' = (N_0 + 1)\theta$.

Corolario 2.2.40. *Si $b \in BMO_\theta(\rho)$, $\theta \geq 0$, entonces existen constantes positivas C y β tal que*

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q e^{\frac{\beta}{\|b\|_{BMO_\theta(\rho)\psi(Q)^{\theta'}}} |b(x) - b_Q|} dx \leq C.$$

Siguiendo las ideas de D. Cruz Uribe y A. Fiorenza en [12] y [13], Lin Tang (ver [40]) obtiene desigualdades con un peso para $\mathcal{I}_{\alpha,b}$. Para explotar la propiedad de decaimiento de $\mathcal{K}_\alpha$, Lin Tang considera las funciones símbolo b en el espacio $BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta \geq 0$, y a los pesos en una clase más amplia que la $A_{p,q}$ (Teorema 2.2.32) y en término de la función de radio crítico ρ, más precisamente, sea $\theta \geq 0$. Un peso ω pertenece a a clase $A_{p,q}^{\rho,\theta}$ si existe una constante positiva C tal que para toda bola $Q(x,r)$ se tiene

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta \quad 1 < p \leq q < \infty.$$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \|\omega^{-1}\|_{L^\infty} \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^\theta, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Además, $A_{p,q}^{\rho,\infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_{p,q}^{\rho,\theta}$.

Con estas definiciones estamos en condiciones de introducir los resultados de Lin Tang.

Teorema 2.2.41. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{\alpha}{n}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si $b \in BMO_\theta(\rho)$, para algún $\theta \geq 0$ y ω es un peso en la clase $A_{p,q}^{\rho,\infty}$ entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b} f(x)|^q \omega(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 2.2.42. *Sean $0 < \alpha < n$, $b \in BMO_\theta(\rho)$ y las funciones $B(t) = t \log(e + t)$, $\Psi(t) = \left(t \log(e + t^{\frac{\alpha}{n}})\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$ y $\theta(t) = t^{1-\frac{\alpha}{n}} \log(e + t^{-\frac{\alpha}{n}})$. Si $\omega \in A_1^{\rho,\infty}$, entonces existe una constante positiva C tal que para toda $t > 0$,*

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b} f(x)| > t\}\right) \leq CB(B(\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}))\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) \theta(\omega(x)) dx\right).$$

Nuestro objetivo es obtener extensiones para el caso de dos pesos de los teoremas anteriores. Para ello, adaptaremos las técnicas de D. Cruz Uribe, A. Fiorenza y Lin Tang. En primer lugar probamos el siguiente resultado que establece una comparación en norma $L^q(\mu)$ entre los operadores $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ y $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$.

Teorema 2.2.43. *Sean $0<\alpha<n$, $q>0$ y $b\in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta\geq 0$. Si μ está en la clase $A_\infty^{\rho,loc}$, existe una constante positiva C, tal que para todo $\eta\geq 0$ suficientemente grande, y toda f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, se cumple*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)|^q\,\mu(x)\,dx \leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x)^q\,\mu(x)\,dx.$$

Observación 2.2.44. De la Proposición 2.2.38 resulta que si $b\in BMO_\theta(\rho)$ entonces $b\in L^s(K)$, para todo $s>1$ y todo compacto K. Esto garantiza la buena definición del conmutador $\mathcal{I}_{\alpha,b}f$ para f acotada y de soporte compacto.

Para demostrar el resultado anterior serán claves la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein y una comparación puntual relativa a $\mathcal{I}_{\alpha,b}$, $\mathcal{I}_\alpha$ y $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ que enunciamos a continuación.

Proposición 2.2.45. *Sean $0<\alpha<n$, δ,ϵ tales que $0<2\delta<\epsilon<1$ y $b\in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta\geq 0$. Entonces existe una constante positiva C tal que para todo $\eta\geq 0$ suficientemente grande y toda función f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ se tiene*

$$\mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}f)(x)\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\left(\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x)+\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x)\right),\quad p.c.t\,x\in\mathbb{R}^n.$$

Observación 2.2.46. Resultados para el caso clásico ($V=0$) fueron obtenidos en [12] por D. Cruz Uribe y A. Fiorenza y en [15] por Ding Yong, Lu Shanzhen y Zhang Pu.

Demostración. Para cualquier constante λ, dado que $|\mathcal{I}_\alpha f(x)|<\infty$ e $\mathcal{I}_\alpha$ es un operador lineal, resulta,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)&=b(x)\mathcal{I}_\alpha f(x)-\mathcal{I}_\alpha(bf)(x)\\&=(b(x)-\lambda)\,\mathcal{I}_\alpha f(x)-\mathcal{I}_\alpha(bf-\lambda f)(x)\\&=(b(x)-\lambda)\,\mathcal{I}_\alpha f(x)-\mathcal{I}_\alpha((b-\lambda)f)(x).\end{aligned}\tag{2.2.47}$$

Sea $x\in\mathbb{R}^n$ y $Q=Q(x_0,r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$ que contiene a x. Tomemos la descomposición $f=f_1+f_2$, donde $f_1=f\chi_{\widetilde{Q}}$, $\widetilde{Q}=2Q$. Para probar el teorema, consideraremos dos casos respecto de r, esto es $r<\rho(x_0)$ y $r\geq\rho(x_0)$.

Caso 1. $r<\rho(x_0)$. Dado que $0<\delta<1$, para λ y C_Q a determinar se tiene

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big||\mathcal{I}_{\alpha,b}f(y)|^\delta-|C_Q|^\delta\big|\,dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\&\qquad\leq\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(y)-C_Q|^\delta\,dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |(b(y)-\lambda)\,\mathcal{I}_\alpha f(y) - \mathcal{I}_\alpha((b-\lambda)f)(y) - C_Q|^\delta\, dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |(b(y)-\lambda)\,\mathcal{I}_\alpha f(y)|^\delta\, dy\right)^{\frac{1}{\delta}} + C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha((b-\lambda)f_1)(y)|^\delta\, dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\quad + C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha((b-\lambda)f_2)(y) - C_Q|^\delta\, dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\doteq I \quad + \quad II \quad + \quad III.
\end{aligned}
$$

Para estimar I fijamos $\lambda = b_{\widetilde{Q}}$ el promedio de b sobre $\widetilde{Q}$. Luego, para todo γ tal que $1 < \gamma < \frac{\epsilon}{\delta}$, aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1$, utilizando la Proposición 2.2.38 y el hecho que $\psi(\widetilde{Q}) \cong 1$ resulta,

$$
\begin{aligned}
I &\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|b(y) - b_{\widetilde{Q}}\right|^{\delta\gamma'} dy\right)^{\frac{1}{\delta\gamma'}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f(y)|^{\gamma\delta} dy\right)^{\frac{1}{\delta\gamma}}\\
&\lesssim \|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\psi(\widetilde{Q})^{(N_0+1)\theta}\left(\frac{\psi(Q)^{-\eta}}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f(y)|^\epsilon dy\right)^{\frac{1}{\epsilon}}\\
&\lesssim \|b\|_{BMO_\theta(\rho)} M_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x).
\end{aligned}
$$

Para estimar II, aplicando la desigualdad de Kolmogorov (Lema 2.2.17) y el hecho que $\mathcal{I}_\alpha$ es de tipo débil $(1, \frac{n}{n-\alpha})$ resulta

$$
\begin{aligned}
II &\leq \frac{C}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\|\mathcal{I}_\alpha(b-b_{\widetilde{Q}})f_1\|_{L^{\frac{n}{n-\alpha},\infty}}\\
&\leq \frac{C}{|\overline{Q}|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\widetilde{Q}} |(b-b_{\overline{Q}})f(y)|dy.
\end{aligned}
$$

Luego, aplicando la desigualdad de Hölder generalizada (Lema 1.1.21) para la función de Young $B(t) = t\log(e+t)$ y su complementaria $\overline{B}$ con $\overline{B}(t) \cong e^t - 1$, se obtiene

$$
II \leq C|\widetilde{Q}|^{\frac{\alpha}{n}}\|b - b_{\widetilde{Q}}\|_{\overline{B},\widetilde{Q}}\|f\|_{B,\widetilde{Q}}.
$$

Por Corolario 2.2.40, existen constantes positivas β y C (en particular se puede tomar $C \geq 2$) tal que

$$
\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}} e^{\frac{\beta}{\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\psi(\widetilde{Q})^{(N_0+1)\theta}}|b(x)-b_{\widetilde{Q}}|}\, dx \leq C.
$$

Así es inmediato que

$$
\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}} \frac{1}{C}\left(e^{\frac{\beta}{\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\psi(\widetilde{Q})^{(N_0+1)\theta}}|b(x)-b_{\widetilde{Q}}|} - 1\right) \quad dx \leq 1,
$$

lo que, utilizando la convexidad del integrando, nos lleva a

$$\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}} e^{\frac{\beta}{C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\psi(\widetilde{Q})^{(N_0+1)\theta}}|b(x)-b_{\widetilde{Q}}|}-1 \quad dx \leq 1.$$

Luego, dado que $\overline{B}(t)\cong e^t-1$, por definición de norma media de Luxemburgo,

$$\|b-b_{\widetilde{Q}}\|_{\overline{B},\widetilde{Q}} \leq \frac{C\,\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\psi(\widetilde{Q})^{(N_0+1)\theta}}{\beta},$$

con lo que tenemos la siguiente estimación para II,

$$\begin{aligned} II &\leq C|\widetilde{Q}|^{\frac{\alpha}{n}}\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\psi(\widetilde{Q})^{(N_0+1)\theta+\eta}\psi(\widetilde{Q})^{-\eta}\|f\|_{B,\widetilde{Q}} \\ &\lesssim \|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x), \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $\psi(\widetilde{Q})\cong 1$.

Finalmente, para estimar III, elegimos $C_Q=(\mathcal{I}_\alpha(b-b_{\widetilde{Q}})f_2)_Q$, esto es el promedio de $\mathcal{I}_\alpha(b-b_{\widetilde{Q}})f_2$ en Q. Dado que $0<\delta<1$ resulta,

$$\begin{aligned} III &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\mathcal{I}_\alpha((b-b_{\widetilde{Q}})f_2)(y)-(\mathcal{I}_\alpha(b-b_{\widetilde{Q}})f_2)_Q\right|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\ &\leq C\,\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\mathcal{I}_\alpha((b-b_{\widetilde{Q}})f_2)(y)-(\mathcal{I}_\alpha(b-b_{\widetilde{Q}})f_2)_Q\right| dy \\ &= C\,\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n-\widetilde{Q}}(b(w)-b_{\widetilde{Q}})f(w)\mathcal{K}_\alpha(y,w)dw\,dz\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n-\widetilde{Q}}(b(w)-b_{\widetilde{Q}})f(w)\mathcal{K}_\alpha(z,w)dw\,dz\right| dy \\ &\leq \frac{C}{|Q|^2}\int_Q\int_Q\int_{\mathbb{R}^n-\widetilde{Q}}|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|\,|f(w)||\mathcal{K}_\alpha(y,w)-\mathcal{K}_\alpha(z,w)|\,dw\,dz\,dy, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{K}_\alpha$ es el núcleo de la integral fraccionaria Schrödinger, esto es

$$\mathcal{K}_\alpha(y,w)=\int_0^\infty k_t(y,w)\,t^{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{dt}{t}.$$

Luego, en virtud del Lema 2.2.25 y teniendo en cuenta que $\widetilde{Q}^c=\bigcup_{k=1}Q_{k+1}-Q_k$, donde $Q_k=Q(x_0,2^kr)$ se obtiene la siguiente estimación para III,

$$\begin{aligned} III &\leq Cr^\nu\int_{\widetilde{Q}^c}\frac{|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|}{|w-x_0|^{n+\nu-\alpha}}|f(w)|\left(1+\frac{|w-x_0|}{\rho(x_0)}\right)^{-N} dw \\ &\leq Cr^\nu\sum_{k=1}^\infty\int_{Q_{k+1}-Q_k}\frac{|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|}{|w-x_0|^{n+\nu-\alpha}}|f(w)|\left(1+\frac{|w-x_0|}{\rho(x_0)}\right)^{-N} dw \\ &\leq Cr^\nu\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(2^kr)^{n+\nu-\alpha}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\right)^N}\int_{Q_{k+1}}|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|f(w)|dw \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Cr^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1}}{(2^k r)^{\nu}\psi(Q_k)^N}\int_{Q_k}|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|f(w)|dw\\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}}{\psi(Q_k)^N}|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}}\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|b(w)-b_{Q_k}|f(w)dw\\
&\quad+C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}}{\psi(Q_k)^N}|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1}b_{\widetilde{Q}}-|b_{Q_k}|\int_{Q_k}|f(w)|dw\\
&=III_1+III_2,
\end{aligned}
$$

donde $0<\nu<min(1,2-\frac{n}{q_0})$. En III_1, aplicando la desigualdad de Hölder generalizada para la función de Young $B(t)=t\log(e+t)$ y su complementaria $\overline{B}(t)\cong e^t-1$ y usando nuevamente el Corolario 2.2.40 se obtiene

$$
\begin{aligned}
III_1&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}}{\psi(Q_k)^N}|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}}\|b-b_{Q_k}\|_{\overline{B},Q_k}\|f\|_{L\log L,Q_k}\\
&\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}}{\psi(Q_k)^{N-\theta(N_0+1)-\eta}}|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}}\psi(Q_k)^{-\eta}\|f\|_{L\log L,Q_k}\\
&\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}}{\psi(Q_k)^{N-\theta(N_0+1)-\eta}}.
\end{aligned}
$$

Entonces, eligiendo N lo suficientemente grande como para que $N-\theta(N_0+1)-\eta>0$, resulta

$$III_1\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\,\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x).$$

Para estimar III_2, usamos que, para toda k, $|b_{\widetilde{Q}}-b_{Q_k}|\leq Ck\psi(Q_k)^{\theta}\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}$, en efecto, recordando que, $Q_k=Q(x_0,2^k r)$ y $\widetilde{Q}=Q_1$, resulta

$$
\begin{aligned}
|b_{\widetilde{Q}}-b_{Q_k}|&\leq\sum_{j=2}^{k}|b_{Q_{j-1}}-b_{Q_j}|\\
&\leq\sum_{j=2}^{k}\frac{2^n}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b-b_{Q_j}|\\
&\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\sum_{j=2}^{k}\left(1+\frac{2^j r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta}\\
&\leq Ck\psi(Q_k)^{\theta}\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}.
\end{aligned}
\tag{2.2.48}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
III_2&\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}k}{\psi(Q_k)^{N-\theta-\eta}}\psi(Q_k)^{-\eta}|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{Q_k}|f(w)|dw\\
&\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{\alpha,\eta}f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}k}{\psi(Q_k)^{N-\theta-\eta}}.
\end{aligned}
$$

Notando que $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}f(x) \leq \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x)$ y recordando nuestra elección de N tenemos

$$III_2 \leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x).$$

Combinando las estimaciones de III_1 e III_2, podemos escribir

$$III \leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x),$$

lo que concluye el Teorema para el caso 1.

Caso 2. $r \geq \rho(x_0)$. Como antes

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\psi(Q)^\eta|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(y)|^\delta\, dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq \frac{1}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |(b(y)-\lambda)\mathcal{I}_\alpha f(y) - \mathcal{I}_\alpha((b-\lambda)f)(y)|^\delta\, dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq \frac{C}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y)-\lambda|^\delta|\mathcal{I}_\alpha f(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\quad + \frac{C}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha((b-\lambda)f_1)(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\quad + \frac{C}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha((b-\lambda)f_2)(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

Para estimar I, siguiendo un razonamiento análogo al considerado en el caso 1 se obtiene,

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{C}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|b(y)-b_{\widetilde{Q}}\right|^{\delta\gamma'} dy\right)^{\frac{1}{\delta\gamma'}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f(y)|^{\gamma\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta\gamma}} \\
&\leq C\psi(Q)^{\frac{\eta}{\epsilon}-\frac{\eta}{\delta}}\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\psi(\widetilde{Q})^{(N_0+1)\theta}\left(\frac{\psi(Q)^{-\eta}}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha f(y)|^\epsilon dy\right)^{\frac{1}{\epsilon}} \\
&\leq C\psi(Q)^{\frac{\eta}{\epsilon}-\frac{\eta}{\delta}+\theta(N_0+1)}\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x).
\end{aligned}$$

Así, tomando $\eta \geq \frac{\theta(N_0+1)}{\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\epsilon}}$ resulta

$$I \leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x).$$

Para estimar II, nuevamente siguiendo un razonamiento análogo al considerado en el caso 1, se obtiene

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{C}{\psi(Q)^{\frac{\eta}{\delta}}}|\widetilde{Q}|^{\frac{\alpha}{n}}\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\psi(\widetilde{Q})^{(N_0+1)\theta}\|f\|_{B,\widetilde{Q}} \\
&\leq C\psi(\widetilde{Q})^{\theta(N_0+1)-\frac{\eta}{\delta}+\eta}\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}|\widetilde{Q}|^{\frac{\alpha}{n}}\psi(\widetilde{Q})^{-\eta}\|f\|_{B,\widetilde{Q}}
\end{aligned}$$

$$\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x),$$

donde en la última desigualdad, se ha usado la elección de η considerada en I y por lo tanto $\theta(N_0+1)-\frac{\eta}{\delta}+\eta\leq 0$.

Por último, para estimar III, teniendo en cuenta que $0<\delta<1$ y $\psi(Q)\geq 1$, resulta

$$\begin{aligned} III &\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha((b-\lambda)f_2)(y)|dy \\ &\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n-\widetilde{Q}} \mathcal{K}_\alpha(y,w)\,|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|\,|f(w)|\,dw\,dy \end{aligned}$$

A partir del Lema 7, resulta que para cada $N>0$ existe una constante C_N tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\alpha(y,w) &\leq C_N\int_0^\infty t^{-\frac{n-\alpha}{2}}\,e^{-\frac{|y-w|^2}{Ct}}\left(1+\frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}\frac{dt}{t} \\ &\leq C\frac{1}{|w-x_0|^{n-\alpha}\left(1+\frac{|w-x_0|}{\rho(y)}\right)^N},. \end{aligned} \tag{2.2.49}$$

donde la última desigualdad se obtiene del Lema 2.2.18 (2.2.19) y del hecho que $|y-w|\cong|w-x_0|$, para todo y en $Q=Q(x_0,r)$ y w en $\widetilde{Q}^c$. Luego, denotando $Q_k=Q(x_0,2^kr)$, se obtiene la siguiente estimación para III

$$\begin{aligned} III &\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q\sum_{k=1}^\infty\int_{Q_{k+1}-Q_k}\frac{1}{|w-x_0|^{n-\alpha}\left(1+\frac{|w-x_0|}{\rho(y)}\right)^N}|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|\,|f(w)|\,dw\,dy \\ &\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q\sum_{k=1}^\infty\int_{Q_{k+1}-Q_k}\frac{1}{(2^kr)^{n-\alpha}\left(1+\frac{2^kr}{\rho(y)}\right)^N}|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|\,|f(w)|\,dw\,dy. \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de la función de radio crítico citada en (3), teniendo en cuenta que y está en $Q(x_0,r)$ y $r\geq\rho(x_0)$, resulta

$$C\frac{1}{\rho(x_0)}\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}}\leq\frac{1}{\rho(y)}\leq C\frac{1}{\rho(x_0)}\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{N_0},$$

entonces, para todo y en Q

$$\begin{aligned} 1+\frac{2^kr}{\rho(y)} &\geq 1+C\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}} \\ &\geq C\frac{\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}}{\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq C \frac{1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}} \\
&= C\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{1}{N_0+1}}. \qquad (2.2.50)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
III &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_{k+1}} \frac{|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1}}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{N}{N_0+1}}} |b(w)-b_{\widetilde{Q}}|\,|f(w)|\,dw \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}}}{\psi(Q_k)^{\frac{N}{N_0+1}}} \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |b(w)-b_{Q_k}|\,|f(w)|dw \\
&\quad + C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1}}{\psi(Q_k)^{\frac{N}{N_0+1}}} |b_{Q_k}-b_{\widetilde{Q}}| \int_{Q_k} |f(w)|dw \\
&= III_1 + III_2.
\end{aligned}
$$

Para estimar III_1 razonamos primero como en III_1 del caso $r \leq \rho(x_0)$ para obtener

$$
\begin{aligned}
III_1 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}}}{\psi(Q_k)^{\frac{N}{N_0+1}}} \|b-b_{Q_k}\|_{\overline{B},Q_k} \|f\|_{L\log L,Q_k} \\
&\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(Q_k)^{-\frac{N}{N_0+1}+\eta+\theta(N_0+1)} \psi(Q_k)^{-\eta} |Q_k|^{\frac{\alpha}{n}} \|f\|_{L\log L,Q_k} \\
&\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta} f(x) \sum_{k=1}^{\infty} \psi(Q_k)^{-\frac{N}{N_0+1}+\eta+\theta(N_0+1)}
\end{aligned}
$$

Ahora, eligiendo $N>0$ tal que $-\frac{N}{N_0+1}+\eta+\theta(N_0+1)<0$ y recordando que $\frac{r}{\rho(x_0)} \geq 1$, de donde resulta $\psi(Q_k) \geq 2^k$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
III_1 &\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta} f(x) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(-\frac{N}{N_0+1}+\eta+\theta(N_0+1))} \\
&\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta} f(x).
\end{aligned}
$$

Para estimar III_2, otra vez como en III_2 del caso $r \leq \rho(x_0)$, podemos probar que

$$
\begin{aligned}
III_2 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} k\,\psi(Q_k)^{\frac{N}{N_0+1}+\eta+\theta} |Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1} |\psi(Q_k)^{-\eta} \int_{Q_k} |f(w)|dw \\
&\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \mathcal{M}_{\alpha,\eta} f(x) \sum_{k=1}^{\infty} k\,\psi(Q_k)^{-\frac{N}{N_0+1}+\eta+\theta} \\
&\leq C\|b\|_{BMO_\infty(\rho)} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta} f(x) \sum_{k=1}^{\infty} k\,\psi(Q_k)^{-\frac{N}{N_0+1}+\eta+\theta}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, de la elección de N realizada en la estimación de III_1, resulta que $-\frac{N}{N_0+1}+\theta+\eta<0$, así

$$\begin{aligned} III_2 &\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x)\sum_{k=1}^{\infty} k\, 2^{-k(\frac{N}{N_0+1}-\eta-\theta)} \\ &\leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x). \end{aligned}$$

Finalmente, de los casos 1 y 2, la demostración queda completa. □

Para probar el Teorema 2.2.43, aplicaremos la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein (Teorema 2.1.1) a la función $\mathcal{I}_{\alpha,b}f$, donde f es acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Para ello, en primer lugar, debemos verificar que $\mathcal{I}_{\alpha,b}f$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, resultado que exponemos a continuación.

Proposición 2.2.51. *Sea $q\geq 1$, $b\in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta\geq 0$, luego $\mathcal{I}_{\alpha,b}f\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para toda f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Como en la demostración de la Proposición 2.2.26, bastará con probar que para f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, $b\in BMO_\theta$, $\mathcal{I}_{\alpha,b}f$ es acotado. En efecto, sea $Q_0(x_0,r_0)$ una bola en $\mathbb{R}^n$ tal que $\text{sop} f\subset Q_0$, luego teniendo en cuenta la igualdad (2.2.47), $\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)=(b(x)-b_{Q_0})\mathcal{I}_\alpha f(x)-\mathcal{I}_\alpha((b-b_{Q_0})f)(x)$, la Proposición 2.2.26 y la estimación (2.2.1) de $\mathcal{K}_\alpha$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| &\leq |b(x)-b_{Q_0}|\,\|\mathcal{I}_\alpha f\|_\infty+\int_{Q_0}|f(y)||b(y)-b_{Q_0}|\mathcal{K}_\alpha(x,y)dy \\ &\leq |b(x)-b_{Q_0}|\,\|\mathcal{I}_\alpha f\|_\infty+\|f\|_\infty\int_{Q_0}|b(y)-b_{Q_0}|\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy. \end{aligned} \tag{2.2.52}$$

Resta por probar que el segundo término de (2.2.52) esta acotado. Sea s tal que $1<s<\frac{n}{n-\alpha}$, aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$ resulta

$$|\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)|\leq\left(\int_{Q_0}|b(y)-b_{Q_0}|^{s'}dy\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\int_{Q_0}\frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)s}}dy\right)^{\frac{1}{s}}$$

Dado que por hipótesis $b\in BMO_\theta(\rho)$, se obtiene de la Proposición 2.2.38

$$\left(\int_{Q_0}|b(y)-b_{Q_0}|^{s'}dy\right)^{\frac{1}{s'}}\lesssim\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}|Q_0|^{\frac{1}{s'}}\left(1+\frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{\theta'}<\infty,$$

con $\theta'=(N_0+1)\theta$.

Por último, siguiendo un razonamiento análogo al de la demostración de la Proposición 2.2.26, resulta que para $1<s<\frac{n}{n-\alpha}$,

$$\left(\int_{Q_0}\frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)s}}dy\right)^{\frac{1}{s}}\lesssim r_0^{\alpha-n+\frac{n}{s}}<\infty$$

Luego, $\mathcal{I}_{\alpha,b}f$ es acotado, y por lo tanto está en $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para todo $q\geq 1$. □

Con el resultado anterior, estamos en condiciones de demostrar el Teorema 2.2.43.

Demostración del Teorema 2.2.43. Sean δ, ϵ tales que $0 < 2\delta < \epsilon < 1$ y η lo suficientemente grande para poder aplicar las Proposiciones 2.2.15 y 2.2.45.

Dado que $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$, $\mathcal{I}_\alpha f, \mathcal{I}_{\alpha,b} f$ son localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ (Proposiciones 2.2.26 y 2.2.51), aplicando la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein (Teorema 2.1.1), resulta tomando $\delta < q$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b} f(x)|^q \, \mu(x)dx \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b} f)(x)^q \mu(x)dx \\
&\qquad \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b} f)(x)^q \mu(x)dx.
\end{aligned}$$

Luego de las Proposiciones 2.2.45 y 2.2.15, y haciendo uso nuevamente de la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x)^q \mu(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)(x)^q \mu(x)dx \right) \\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^\sharp_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x)^q \mu(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)(x)^q \mu(x)dx \right) \\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{\alpha,\eta} f(x)^q \mu(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)(x)^q \mu(x)dx \right) \\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)(x)^q \mu(x)dx.
\end{aligned}$$

□

A partir del Teorema 2.2.43 y los resultados de acotación con dos pesos para el operador maximal $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ obtenidos en el Capítulo 1, Teorema 1.2.53, resulta inmediata la acotación fuerte con dos pesos para el conmutador $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ tal como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 2.2.53. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p \leq q < \infty$ y $b \in BMO_\theta(\rho)$, para algún $\theta \geq 0$. Si (μ, ν) está en $A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}$, $\mu \in A^{\rho,loc}_\infty$ y $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho,\infty}_\infty$ entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b} f(x)|^q \mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

para toda f en $L^p(\mathbb{R}^n, \nu)$.

Observación 2.2.54. En la acotación con un peso para $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ enunciada en el Teorema 2.2.41 (Lin Tang, [40]) sólo se supone que el peso ω está en $A^{\rho,\infty}_{p,q}$, debido a que esta condición implica $\omega^q \in A_\infty^{\rho,\infty}$ y, de esta manera, es posible aplicar la desigualdad de Fefferman-Stein con el peso ω^q. En contraste, en nuestro resultado, la hipótesis $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ no implica necesariamente que $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$ y $\sigma \in A_\infty^{\rho,\infty}$ (ver (1.2.30), capítulo 1). Así, para poder aplicar un método similar en nuestro caso, reforzamos las hipótesis pidiendo que el peso de llegada esté en la clase $A_\infty^{\rho,loc}$. De esta manera, podemos aplicar el Teorema 2.1.1 y trasladar el problema de acotación al operador maximal $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$. Por otra parte, también reforzamos la hipótesis con la condición $\sigma \in A_\infty^{\rho,\infty}$ para poder asegurar que el operador maximal $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$ (Teorema 1.2.53). A continuación desarrollamos un ejemplo de pesos que cumplen exactamente las condiciones del Teorema 2.2.53.

Sea $1 \le p \le q < \infty$, $\rho \equiv 1$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{-|x|} \\ \nu(x) &= 1 + |x|^\gamma, \quad -n < \gamma \\ n\frac{p}{q} &- n + \alpha p \ge 0. \end{aligned}$$

Por Observación 1.2.23, se sigue que $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$, más aún $\mu \notin A_\infty^{\rho,\infty}$. Como ya se vio en (1.2.30) $\sigma \in A_\infty^{\rho,\infty}$. Resta probar que $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$. Lo haremos para $p > 1$, el caso $p = 1$ se obtiene de manera similar.

Sea $B = B(x_0, r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\int_B e^{-|x|}dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_B (1+|x|^\gamma)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}}{|B|^{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p}} &\le C\frac{r^{n\frac{p}{q}} r^{n\,(p-1)}}{r^{n(1-\frac{\alpha}{n})p}} \\ &\le r^{n\frac{p}{q}-n+\alpha p}. \end{aligned}$$

Luego, si $\theta \ge n\frac{p}{q} - n + \alpha p$ tenemos

$$\frac{\mu(B)^{\frac{p}{q}}\,\sigma(B)^{p-1}}{|B|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} \le C(1+r)^\theta$$

Así $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$. Notemos que la condición $n\frac{p}{q} - n + \alpha p \ge 0$ es equivalente a pedir $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Esto muestra que existen valores de α, p y q que verifican la condición pedida.

Para el caso límite, $p = 1$, obtenemos que $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ verifica la siguiente desigualdad modular $L\log L$, la cual siguiendo los argumentos mencionados en en la Observación 1.2.82, resulta que extiende el resultado de Lin Tang a dos pesos (Teorema 2.2.42). Antes de enunciar nuestro resultado, recordemos que en el Capítulo 1, sección 1.2, hemos definido, para una función de Young arbitraria Φ, la función h_Φ dada por

$$h_\Phi(s) = \sup_{t>0}\frac{\Phi(st)}{\Phi(t)}, \quad 0 \le s < \infty.$$

En ese mismo capítulo también se mencionan ciertas propiedades que verifica la función h_Φ.

Teorema 2.2.55. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 \leq q < \infty$, $b \in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta \geq 0$, $B(t) = t\log(e+t)$ y $\Phi_0(t) = \frac{t}{\log(e+t)}$. Si el par de pesos (μ, ν) está en la clase $A_{1,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ y $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$, existe una constante C tal que para todo $t > 0$;*

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > t\}\right)^{\frac{1}{q}} \leq CB(B(\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}))\, B\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) h_{\Phi_0}(\nu(x))dx\right).$$

Demostración. Bastará con probar el teorema para f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, pues el resultado general se sigue utilizando un conocido argumento de densidad. También será suficiente con probar la desigualdad para $\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} = 1$, esto es

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > t\}\right)^{\frac{1}{q}} \leq CB\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) h_{\Phi_0}(\nu(x))dx\right), \tag{2.2.56}$$

ya que si $\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} = 0$, luego b es constante y el resultado es trivial, mientras que si $\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \neq 0$, aplicando (2.2.56) para $\widetilde{b} = \frac{b}{\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}}$ y $g = \|b\|_{BMO_\theta(\rho)}f$, y recordando que B es submultiplicativa resulta

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > t\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,\widetilde{b}}\, g(x)| > t\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \leq CB\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{|g(x)|}{t}\right) h_{\Phi_0}(\nu(x))dx\right) \\
&\quad \leq CB\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\frac{|f(x)|}{t}\right) h_{\Phi_0}(\nu(x))dx\right) \\
&\quad \leq CB(B(\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}))B\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) h_{\Phi_0}(\nu(x))dx\right).
\end{aligned}$$

Veamos (2.2.56). Por homogeneidad será suficiente probar el resultado para $t = 1$. Para ello notemos que

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > 1\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad = B(B(1))\frac{1}{B(B(1))}\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > 1\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \leq C\sup_{t>0}\frac{1}{B(B(\frac{1}{t}))}\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > t\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \leq C\sup_{t>0}\frac{1}{B(B(\frac{1}{t}))}\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}f)(x) > t\}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Entonces, dado que $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$, $\phi(t) = \frac{1}{B(B(\frac{1}{t}))}$ es creciente y duplicante y que $\mathcal{I}_{\alpha,b}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 2.2.51), es posible aplicar la desigualdad débil de Fefferman-Stein (Teorema 2.1.2) para obtener,

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > 1\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C \sup_{t>0} \phi(t)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^{\sharp}_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}f)(x) > t\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq C \sup_{t>0} \phi(t)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha}f)(x) + \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) > \frac{t}{C}\right\}\right)^{\frac{1}{q}},$$

donde, en la última desigualdad, se ha aplicado la Proposición 2.2.45 tomando δ, ϵ arbitrarios con $0 < 2\delta < \epsilon < 1$ y η suficientemente grande. Luego, usando la propiedad de duplicación de la función ϕ, un sencillo cambio de variables y nuevamente la desigualdad débil de Fefferman-Stein, resulta

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > 1\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\leq C \sup_{t>0} \phi(t)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha}f)(x) > \frac{t}{C}\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + C \sup_{t>0} \phi(t)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) > \frac{t}{C}\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\leq C \sup_{t>0} \phi\left(\frac{t}{C}\right)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha}f)(x) > \frac{t}{C}\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + C \sup_{t>0} \phi\left(\frac{t}{C}\right)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) > \frac{t}{C}\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\leq C \sup_{t>0} \phi(t)\,\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^{\sharp}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha}f)(x) > t\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + C \sup_{t>0} \phi(t)\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) > t\}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Así, usando Proposición 2.2.15, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > 1\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\leq C \sup_{t>0} \phi(t)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) > \frac{t}{C}\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + C \sup_{t>0} \phi(t)\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) > \frac{t}{C}\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\leq C \sup_{t>0} \phi(t)\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) > t\}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, para probar el Teorema será suficiente con probar la desigualdad análoga para el operador maximal Orlicz Schrödinger $L\log L$. De esta manera, recordando que $\phi(t) = \frac{1}{B(B(t))}$, teniendo en cuenta el Teorema 1.2.75 y el hecho que B es submultiplicativa, podemos probar

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > 1\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\leq C \sup_{t>0} \phi(t)B(C)B\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) h_{\Phi_0}(\nu(x))dx\right)
\end{aligned}$$

$$\leq C\sup_{t>0} \frac{1}{B(B(\frac{1}{t}))} B(B(\frac{1}{t}))B\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(|f(x)|\right)\, h_{\Phi_0}(\nu(x))dx\right)$$

$$\leq CB\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(|f(x)|\right)\, h_{\Phi_0}(\nu(x))dx\right),$$

lo que concluye nuestra demostración. □

Capítulo 3

Desigualdades con dos pesos para conmutadores de orden superior

3.1. Introducción

Sean $0 < \alpha < n$, $b \in BMO_\theta(\rho)$ y f una función acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Definimos el conmutador de orden $m \in \mathbb{N}_0$ de la integral fraccionaria de Schrödinger como

$$\mathcal{I}^m_{\alpha,b} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m \, \mathcal{K}_\alpha(x,y) f(y) dy.$$

Recordemos que el núcleo de la integral fraccionaria de Schrödinger, $\mathcal{K}_\alpha(x,y)$, es no negativo. Si colocamos valor absoluto a la diferencia $b(x) - b(y)$ obtenemos un nuevo operador, el cual denotaremos por $\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}$ esto es

$$\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b(y)|^m \, \mathcal{K}_\alpha(x,y) f(y) dy.$$

Claramente para toda $f \geq 0$,

$$|\mathcal{I}^m_{\alpha,b} f(x)| \leq \mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b} f(x).$$

En el Teorema 2.2.53 hemos obtenido desigualdades fuertes con dos pesos para el conmutador de orden 1 de la Integral Fraccionaria de Schrödinger, $\mathcal{I}_{\alpha,b}$, para $1 < p \leq q < \infty$. Este resultado fue obtenido por comparación en norma $L^q(\mu)$ del conmutador $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ con el operador maximal fraccionario Orlicz-Schrödinger $L\log L$, $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ (Teorema 2.2.43), trasladando de esta manera el problema a este operador maximal para el cual ya se habían obtenido resultados de acotación (Teorema 1.2.53). Para obtener la comparación en norma $L^q(\mu)$ entre estos operadores, resultan claves la desiguadad fuerte de Fefferman-Stein (Teorema 2.1.1) y una estimación puntual relativa a $\mathcal{I}_{\alpha,b}$, $\mathcal{I}_\alpha$ y $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$ (Teorema 2.2.45).

En este capítulo demostraremos dos tipos de desigualdades con pesos en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$. La primera establece que, para pesos en $A^{\rho,loc}_\infty$, el operador $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$ es controlado en norma L^q con pesos por el operador maximal fraccionario Orlicz-Schrödinger $\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}$, donde B_m es la función de Young dada por $B_m(t) = t(\log(e+t))^m$. La segunda desigualdad es una consecuencia de la primera y muestra que el operador $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$ es acotado de $L^p(\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)\rho^{\alpha(p-s)})$ a $L^p(\omega)$ para $s \leq p$ con $\alpha s < n$, donde $\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}$ es el operador maximal fraccionario Schrödinger y $M^{[(m+1)p]}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood iterado $[(m+1)p]$ veces, donde $[(m+1)p]$ es la parte entera de $(m+1)p$ y ω es una función no negativa localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. De la primera desigualdad también se obtienen desigualdades con dos pesos de L^p a L^q para $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$ generalizando los resultados obtenidos previamente para $\mathcal{I}_\alpha$ e $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ (Capítulo 2).

3.2. Espacios de Orlicz y la función maximal asociada: definiciones y resultados preliminares

En el Capítulo 1, sección 1.1, hemos definido funciones de Young y espacios de Orlicz y mencionamos algunas de las propiedades relacionados con ellos. A continuación definiremos una clase de funciones de Young que desempeñan un papel clave en los resultados que expondremos en este capítulo.

Definición 3.2.1. Sea $1 < p < \infty$. Diremos que una función de Young duplicante ϕ satisface una condición B_p si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\int_c^\infty \frac{\phi(t)}{t^p}\frac{dt}{t} \cong \int_c^\infty \left(\frac{t^{p'}}{\overline{\phi}(t)}\right)^{p-1}\frac{dt}{t} < \infty.$$

donde $\overline{\phi}$ denota la función de Young complementaria asociada a ϕ (Definición 1.1.20).

Ejemplos simples de funciones de Young que verifican la condición B_p son $t^{p-\beta}$ y $t^p\left(\log(1+t)\right)^{-1-\beta}$ con $\beta > 0$.

La reelevancia de la condición B_p deriva de su relación con la acotación de la siguiente función maximal, definida en términos de ϕ,

$$M_\phi f(x) = \sup_{x\in Q}\|f\|_{\phi,Q}$$

donde $\|f\|_{\phi,Q}$ denota la norma media de Luxemburgo en el espacio de Orlicz $L_\phi(Q)$, la cual ya fue introducida como caso particular en el Capítulo 1.

Pradolini y Salinas en [33] probaron el siguiente teorema para M_ϕ en el contexto de espacios de tipo homogéneo (X, d, μ). Cabe mencionar que el mismo resultado fue probado por R. Wheeden y C.Pérez en [32], pero bajo la hipótesis adicional de que todo anillo en (X, d, μ) es no vacío.

Teorema 3.2.2. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo con $\mu(X) = \infty$, $1 < p < \infty$ y ϕ una función de Young duplicante. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

$$\phi \in B_p. \tag{3.2.3}$$

Existe una constante positiva C tal que

$$\int_X (M_\phi f(x))^p \, d\mu(x) \leq C \int_X |f(x)|^p d\mu(x), \tag{3.2.4}$$

para todas las funciones medibles f.

3.3. Desigualdades con dos pesos para $\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}$

En el capítulo 1 sección 1.2, se ha definido el operador maximal fraccionario Orlicz-Schrödinger $\mathcal{M}_{B,\alpha,\eta}$, donde B es una función de Young arbitraria, $0 \leq \alpha < n$ y $\eta \geq 0$. Como hemos mencionado al comienzo del capítulo, para cada $m \in \mathbb{N}_0$, denotaremos por B_m a cada una de las funciones de Young $B_m(t) = t\,(\log(e+t))^m$. En particular, utilizaremos $\mathcal{M}_{B_0,\alpha,\eta} = \mathcal{M}_{\alpha,\eta}$ y $\mathcal{M}_{B_1,\alpha,\eta} = \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$.

En el Teorema 1.2.53 se ha probado el siguiente resultado para $m = 1$. La misma demostración, con adaptaciones menores, se puede aplicar al caso general para $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.3.1. *Supongamos que $0 \leq \alpha < n$, $1 < p \leq q < \infty$. Sean (μ, ν) un par de pesos con $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty^{\rho,\infty}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

$$\exists C > 0, \eta_0 \geq 0, \|\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}(f)\|_{L^q(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\nu)}, \quad \eta \geq \eta_0. \tag{3.3.2}$$

$$(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}. \tag{3.3.3}$$

3.4. Desigualdades con dos pesos para $\mathcal{I}_{\alpha,b}^m$

A continuación, presentamos unos de los principales resultados del capítulo.

Teorema 3.4.1. *Sean $0 < \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}_0$, $1 < p \leq q < \infty$ y $b \in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta \geq 0$. Si (μ, ν) está en $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$ y $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty^{\rho,\infty}$, entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b}^m f(x)|^q \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como ya se mencionó al comienzo del capítulo, para probar el resultado anterior será suficiente demostrar el siguiente teorema, que establece una comparación en norma $L^q(\mu)$ de $\mathcal{I}_{\alpha,b}^m$ con $\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}$.

Teorema 3.4.2. *Sean $0 < \alpha < n$, $B_m(t) = t\,(t\log(e+t))^m$ con $m \in \mathbb{N}_0$, $q > 0$ y $b \in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta \geq 0$. Si μ está en $A_\infty^{\rho,loc}$, existe una constante positiva C tal que para todo $\eta \geq 0$ suficientemente grande y toda f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ resulta*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b}^m f(x)|^q \mu(x)dx \leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}^{mq} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta} f(x)^q \mu(x)dx.$$

Como en la demostración del Teorema 2.2.43, un punto clave para la prueba de este resultado es una desigualdad puntual que compara un conmutador con otros de menor orden.

Lema 3.4.3. *Sean $0 < \alpha < n$, δ, ϵ tales que $0 < 2\delta < \epsilon < 1$, $B_m(t) = t\,(\log(e+t))^m$ con $m \in \mathbb{N}$ y $b \in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta \geq 0$. Entonces existe una constante positiva C tal que para todo $\eta \geq 0$ suficientemente grande y toda función $f \geq 0$ acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ se tiene*

$$\mathcal{M}_{\delta,\eta}^\sharp(\mathcal{I}_{\alpha,b}^{m,+} f)(x) \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|b\|_{BMO_\theta(\rho)}^{m-k} \mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}^{k,+} f)(x) + \|b\|_{BMO_\theta(\rho)}^m \mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta} f(x) \right),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observación 3.4.4. El caso particular $m = 1$ de este lema lo hemos probado en el Capítulo 2 sección 2.2 (Proposición 2.2.45). Resultados análogos para el caso clásico ($V = 0$) fueron obtenidos en [15] por Ding Yong, LU Shanzhen y Zhang Pu en $\mathbb{R}^n$ y en [2] por Bernardis, Pradolini y Hartzstein en el contexto de espacios de tipo homogéneo .

Para probar el Lema 3.4.3 necesitaremos el siguiente lema técnico.

Lema 3.4.5. *Sean $0 < \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$, $b \in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta \geq 0$ y $c, \lambda \in \mathbb{R}$. Luego existe una constante $C = C(m)$ tal que*

$$\left|\mathcal{I}_{\alpha,b}^{m,+} f(x) - c\right| \leq C \sum_{k=0}^{m-1} |b(x) - \lambda|^{m-k} \mathcal{I}_{\alpha,b}^{k,+} f(x) + |\mathcal{I}_\alpha(|b-\lambda|^m f)(x) - c| \tag{3.4.6}$$

para toda $f \geq 0$ acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ y toda $y \in \mathbb{R}^n$.

La demostración de este resultado sigue las líneas de razonamiento de Bernadis, Pradolini y Hartzstein (Lema 5.3 en [2]), en el que prueban nuestro resultado para el caso clásico, por lo tanto sólo expondremos un esquema de la demostración.

Demostración. Si λ es una constante arbitraria, podemos escribir (ver [31])

$$\mathcal{I}_{\alpha,b}^m f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} C_{k,m}(b(x) - \lambda)^{m-k} \mathcal{I}_{\alpha,b}^k f(x) + \mathcal{I}_\alpha((\lambda - b)^m f)(x), \tag{3.4.7}$$

donde $C_{k,m}$ son las constantes que aparecen en la fórmula de Newton. Claramente si m es par $\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x) = \mathcal{I}^m_{\alpha,b}f(x)$, y por lo tanto (3.4.6) se sigue de (3.4.7). Ahora, asumamos que m es impar. Escribiendo $b(x) - b(y) = (b(x) - \lambda) + (\lambda - b(y))$, es fácil mostrar que

$$\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x) \leq |b(x) - \lambda|\mathcal{I}^{m-1,+}_{\alpha,b}f(x) + \mathcal{I}^{m-1,+}_{\alpha,b}(|b - \lambda|f)(x), \quad y \tag{3.4.8}$$

$$\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x) \geq \mathcal{I}^{m-1,+}_{\alpha,b}(|b - \lambda|f)(x) - |b(x) - \lambda|\mathcal{I}^{m-1,+}_{\alpha,b}f(x). \tag{3.4.9}$$

Por otro lado, resulta sencillo ver que

$$\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f(x) \leq \mathcal{I}^{k+1,+}_{\alpha,b}f(x) + |b(x) - \lambda|\mathcal{I}^k_{\alpha,b}f(x). \tag{3.4.10}$$

Luego, como $m - 1$ es par, usando (3.4.7), (3.4.8) y finalmente (3.4.10) obtenemos

$$\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \widetilde{C}_{k,m}|b(x) - \lambda|^{m-k}\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f(x) + \mathcal{I}_\alpha(|b - \lambda|^m f)(x), \tag{3.4.11}$$

donde $\widetilde{C}_{k,m} = |C_{k,m}|$.

Análogamente, de (3.4.7), (3.4.9) y (3.4.10) se obtiene

$$\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x) \geq -\sum_{k=0}^{m-1} \widetilde{C}_{k,m}|b(x) - \lambda|^{m-k}\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f(x) + \mathcal{I}_\alpha(|b - \lambda|^m f)(x). \tag{3.4.12}$$

Luego, (3.4.6) se sigue para m impar de (3.4.11) si $\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x) - c > 0$ y de (3.4.12) si $\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x) - c < 0$. □

Para la prueba del Lema 3.4.3, seguiremos los argumentos utilizados para concluir la Proposición 2.2.45, es por ello que solo desarrollaremos un esquema de la demostración.

Demostración del Lema 3.4.3. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q = Q(x_0, r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$ que contiene a x. Tomemos la descomposición $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f\chi_{\widetilde{Q}}$, $\widetilde{Q} = 2Q$. Para probar el teorema, consideraremos dos casos respecto de r, esto es $r < \rho(x_0)$ y $r \geq \rho(x_0)$.

Caso 1. $r < \rho(x_0)$. Dado que $0 < \delta < 1$, aplicando el Lema 3.4.5 para $\lambda = b_{\widetilde{Q}}$ y $C = C_Q = (\mathcal{I}_{\alpha,b}(|b - b_{\widetilde{Q}}|^m f_2))_Q$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left||\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(y)|^\delta - |C_Q|^\delta\right| dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(y) - C_Q\right|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\sum_{k=0}^{m-1} |b(y) - b_{\widetilde{Q}}|^{m-k}\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f(y) + |\mathcal{I}_\alpha(|b - b_{\widetilde{Q}}|^m f)(y)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \; (\mathcal{I}_{\alpha,b}(|b - b_{\widetilde{Q}}|^m f_2))_Q|\right)^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lesssim \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y)-b_{\widetilde{Q}}|^{(m-k)\delta}|\mathcal{I}_{\alpha,b}^{k,+}f(y)|^{\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}+C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha(|b-b_{\widetilde{Q}}|^m f_1)(y)|^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}}\\ &\quad +C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha(|b-b_{\widetilde{Q}}|^m f_2)(y)-(\mathcal{I}_{\alpha,b}(|b-b_{\widetilde{Q}}|^m f_2))_Q|^{\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}\\ &\doteq I+II+III.\end{aligned}$$

Para estimar I, II y III, seguimos los argumentos detallados en el caso respectivo ($r \leq \rho(x_0)$) de la Proposición 2.2.45, esto es, para estimar I aplicamos la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$, donde $1<\gamma<\frac{\epsilon}{\delta}$, luego la Proposición 2.2.38 y finalmente el hecho que $\psi(\widetilde{Q})\cong 1$, obteniendo de esta manera

$$I \lesssim \sum_{k=0}^{m-1}\|b\|_{BMO_\theta(\rho)^{m-k}}\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}^{k,+}f)(x).$$

Para estimar II, aplicando la desigualdad de Kolmogorov (Lema 2.2.17), el hecho que $\mathcal{I}_\alpha$ es de tipo débil $(1,\frac{n}{n-\alpha})$, la desigualdad de Hölder generalizada para la función de Young $B_m(t)=t(\log(e+t))^m$ y su complementaria $\overline{B}_m$ con $\overline{B}_m(t)\cong e^{t^{\frac{1}{m}}}$, la propiedad de las funciones en $BMO_\theta(\rho)$ dada por el Corolario 2.2.40 y el hecho que $\psi(\widetilde{Q})\cong 1$, se obtiene

$$II \lesssim \|b\|_{BMO_\theta(\rho)}^m \mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}f(x).$$

Finalmente, para estimar III, teniendo en cuenta que $0<\delta<1$, obtenemos

$$III \leq \frac{C}{|Q|^2}\int_Q\int_Q\int_{\mathbb{R}^n-\widetilde{Q}}|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|^m\,|f(w)||\mathcal{K}_\alpha(y,w)-\mathcal{K}_\alpha(z,w)|\,dw\,dz\,dy,$$

donde $\mathcal{K}_\alpha$ es el núcleo de la integral fraccionaria Schrödinger. Luego, en virtud del Lema 2.2.25 y teniendo en cuenta que $\widetilde{Q}^c=\bigcup_{k=1}Q_{k+1}-Q_k$, donde $Q_k=Q(x_0,2^k r)$ se obtiene la siguiente estimación para III,

$$\begin{aligned}III &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}}{\psi(Q_k)^N}|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}}\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|b(w)-b_{Q_k}|^m|f(w)dw\\ &\quad + C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}}{\psi(Q_k)^N}|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1}|b_{Q_k}-b_{\widetilde{Q}}|^m\int_{Q_k}|f(w)|dw\\ &= III_1+III_2,\end{aligned}$$

donde $0<\nu<min(1,2-\frac{n}{q_0})$ y $N>0$ es arbitrario y será elegido convenientemente. En III_1, aplicando la desigualdad de Hölder generalizada para la función de Young B_m y su complementaria $\overline{B}_m$ y usando nuevamente el Corolario 2.2.40 se obtiene

$$III_1 \leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}^m\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k\nu}}{\psi(Q_k)^{N-m\theta(N_0+1)-\eta}}.$$

Entonces, eligiendo N lo suficientemente grande como para que $N - m\theta(N_0+1) - \eta > 0$, resulta

$$III_1 \leq C\|b\|^m_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}f(x).$$

Para estimar III_2, tenemos en cuenta que, para toda k, $|b_{Q_k} - b_{\widetilde{Q}}| \leq Ck\psi(Q_k)^\theta\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}$ (ver (2.2.48)). Así,

$$III_2 \leq C\|b\|^m_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}f(x).$$

Caso 2. $r \geq \rho(x_0)$. Teniendo en cuenta que $0 < \delta < 1$ y aplicando nuevamente el Lema 3.4.5, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\psi(Q)^\eta|Q|}\int_Q |\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(y)|^\delta\,dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\lesssim \psi(Q)^{-\frac{\eta}{\delta}}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y)-\lambda|^{(m-k)\delta}\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f(y)^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\qquad + \psi(Q)^{-\frac{\eta}{\delta}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha(|b-\lambda|^m f)(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\lesssim \psi(Q)^{-\frac{\eta}{\delta}}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y)-\lambda|^{(m-k)\delta}\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f(y)^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\qquad + \psi(Q)^{-\frac{\eta}{\delta}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha(|b-\lambda|^m f_1)(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\qquad + \psi(Q)^{-\frac{\eta}{\delta}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathcal{I}_\alpha(|b-\lambda|^m f_2)(y)|^\delta dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

Fijemos $\lambda = b_{\widetilde{Q}}$. Para estimar I, siguiendo un razonamiento análogo al considerado en el caso 1 se obtiene,

$$I \lesssim \psi(\widetilde{Q})^{-\frac{\eta}{\delta}+\theta(N_0+1)m+\frac{\eta}{\delta\gamma}}\sum_{k=0}^{m-1}\|b\|^{m-k}_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f)(x),$$

donde γ es tal que $1 < \gamma < \frac{\epsilon}{\delta}$. Eligiendo η tal que $-\frac{\eta}{\delta}+\theta(N_0+1)m+\frac{\eta}{\delta\gamma} < 0$, la estimación anterior se convierte en

$$I \lesssim \sum_{k=0}^{m-1}\|b\|^{m-k}_{BMO_\theta(\rho)}\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f)(x).$$

Para estimar II, nuevamente siguiendo los mismos argumentos que en el caso 1, se obtiene

$$II \lesssim \psi(\widetilde{Q})^{-\frac{\eta}{\delta}+\theta(N_0+1)m}|\widetilde{Q}|^{\frac{\alpha}{n}}\|b\|^m_{BMO_\theta(\rho)}\|f\|_{B_m,\widetilde{Q}}.$$

Tomando $\eta \geq \delta\theta(N_0+1)m$, obtenemos

$$II \lesssim \|b\|^m_{BMO_\theta(\rho)} \mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta} f(x).$$

La estimación de III, se obtiene siguiendo las líneas de razonamiento empleadas en el respectivo caso de la demostración de la Proposición 2.2.45, obteniendo de esta manera

$$\begin{aligned}
III &\lesssim \frac{1}{|Q|}\int_Q \int_{\mathbb{R}^n-\widetilde{Q}} \mathcal{K}_\alpha(y,w)\,|b(w)-b_{\widetilde{Q}}|^m\,|f(w)|\,dw\,dy \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}}}{\psi(Q_k)^{\frac{N}{N_0+1}}} \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |b(w)-b_{Q_k}|^m\,|f(w)|dw \\
&\quad + C\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q_k|^{\frac{\alpha}{n}-1}}{\psi(Q_k)^{\frac{N}{N_0+1}}} |b_{Q_k}-b_{\widetilde{Q}}|^m \int_{Q_k} |f(w)|dw \\
&= III_1 + III_2,
\end{aligned}$$

donde como antes, $Q_k = Q(x_0, 2^k r)$ y $N > 0$ es arbitrario y será elegido convenientemente. Para estimar III_1 razonamos primero como en III_1 del caso $r \leq \rho(x_0)$ para obtener

$$III_1 \lesssim \|b\|^m_{BMO_\theta(\rho)} \mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta} f(x) \sum_{k=1}^{\infty} \psi(Q_k)^{-\frac{N}{N_0+1}+\eta+\theta(N_0+1)m}.$$

Ahora, eligiendo $N > 0$ tal que $-\frac{N}{N_0+1}+\eta+\theta(N_0+1)m < 0$ y recordando que $\frac{r}{\rho(x_0)} \geq 1$, de donde resulta $\psi(Q_k) \geq 2^k$, se obtiene

$$III_1 \lesssim C\|b\|^m_{BMO_\theta(\rho)} \mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta} f(x).$$

Para estimar III_2, otra vez como en III_2 del caso $r \leq \rho(x_0)$, podemos probar que

$$III_2 \lesssim \|b\|^m_{BMO_\infty(\rho)} \mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta} f(x) \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k})^{\frac{N}{N_0+1}-\theta m-\eta-m}.$$

Ahora bien, la elección de N considerada en la estimación de III_1, asegura que $\frac{N}{N_0+1} - \theta m - \eta - m > 0$, así

$$III_2 \lesssim \|b\|^m_{BMO_\infty(\rho)} \mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta} f(x).$$

Finalmente, de los casos 1 y 2, la demostración queda completa. □

Además para la prueba del Teorema 3.4.2 serán útiles las siguientes proposiciones.

Proposición 3.4.13. *Sea $f \geq 0$ acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, $b \in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta \geq 0$. Luego para toda $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b} f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \geq 1$.*

Demostración. Procederemos utilizando el método de inducción.

Notemos que para $m=0$, $\mathcal{I}^{0,+}_{\alpha,b}f=\mathcal{I}_\alpha f$, y la tesis se cumple en virtud de la Proposición 2.2.26.

Para $m=1$, sean $\widetilde{q}=max\{q,\frac{n}{n-\alpha}+1\}$ y $Q(y,r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$. Notemos que $\widetilde{q}>\frac{n}{n-\alpha}$. Aplicando el Lema 3.4.5, la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$ donde $\gamma\geq 1$ y teniendo en cuenta que $\widetilde{q}\geq q$ resulta

$$\begin{aligned}
&\left(\int_Q|\mathcal{I}^+_{\alpha,b}f|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim\left(\int_Q|b-\lambda|^q|\mathcal{I}_\alpha f|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_Q|\mathcal{I}_\alpha(|b-\lambda|f)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim\left(\int_Q|b-\lambda|^{\gamma q}\right)^{\frac{1}{\gamma q}}\left(\int_Q|\mathcal{I}_\alpha f|^{q\gamma'}\right)^{\frac{1}{q\gamma'}}+|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\widetilde{q}}}\left(\int_Q|\mathcal{I}_\alpha(|b-\lambda|f)|^{\widetilde{q}}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}}}. \qquad (3.4.14)
\end{aligned}$$

Dado que, por hipótesis, $b\in BMO_\theta(\rho)$, tomando $\lambda=b_Q$ se obtiene, en virtud de la Proposición 2.2.38,

$$\left(\int_Q|b-\lambda|^{\gamma q}\right)^{\frac{1}{\gamma q}}\lesssim\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}|Q|^{\frac{1}{\gamma q}}\left(1+\frac{r}{\rho(y)}\right)^{\theta'}<\infty$$

para $Q=Q(y,r)$, $\theta'=(N_0+1)\theta$, donde N_0 es la constante que aparece en 2. Así, dado que el resultado es válido para $m=0$, el primer sumando de (3.4.14) resulta finito.

Por último, para estimar la segunda suma de 3.4.14, teniendo en cuenta que $\mathcal{I}_\alpha:L^p\to L^{\widetilde{q}}$, donde $\frac{1}{p}=\frac{1}{\widetilde{q}}+\frac{\alpha}{n}$, f es acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ y nuevamente la Proposición 2.2.38 se obtiene

$$\left(\int_Q|\mathcal{I}_\alpha(|b-\lambda|f)|^{\widetilde{q}}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}}}\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|b-b_Q|^p|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\|f\|_\infty\left(\int_{sopf}|b-b_Q|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Lo que concluye la proposición para el caso $m=1$.

Ahora supongamos que $\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para todo $q\geq 1$ y para toda $m=0,1,\dots,k-1$ donde $k\in\mathbb{N},k>1$. Probaremos que la propiedad es válida para $m=k$.

Sean $\widetilde{q}$ y Q otra vez como antes. Aplicando el Lema 3.4.5 y luego la desigualdad de Hölder para $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$ donde $\gamma\geq 1$ es arbitrario resulta

$$\begin{aligned}
&\int_Q|\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f|^q\\
&\lesssim\sum_{j=0}^{k-1}\left(\int_Q|b-b_Q|^{(k-j)q}|\mathcal{I}^{j,+}_{\alpha,b}f|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_Q|\mathcal{I}_\alpha(|b-b_Q|^kf)|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{k-1}\left(\int_Q |b-b_Q|^{(k-j)\gamma q}\right)^{\frac{1}{\gamma q}}\left(\int_Q |\mathcal{I}_{\alpha,b}^{j,+}f|^{\gamma' q}\right)^{\frac{1}{\gamma' q}}+\left(\int_Q |\mathcal{I}_\alpha(|b-b_Q|^k f)|^{\widetilde{q}}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}}}.$$

Luego, cada término de la suma sobre j es finito, en virtud de la hipótesis inductiva y la Proposición 2.2.38. Con respecto al $k+1-$ésimo término, recordando que $\mathcal{I}_\alpha : L^p \to L^{\widetilde{q}}$ con $\frac{1}{p}=\frac{1}{\widetilde{q}}+\frac{\alpha}{n}$, f es acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ y nuevamente la Proposición 2.2.38, obtenemos que esta última expresión es finita lo que concluye la prueba. □

De la proposición anterior, es inmediato el siguiente corolario

Corolario 3.4.15. *$\mathcal{I}_{\alpha,b}^m f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para toda $q \geq 1$ y f acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 3.4.16. *Sean $b \in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta \geq 0$, ϵ y q tales que $\epsilon < q$, μ un peso en $A_\infty^{\rho,loc}$ y $\eta \geq 0$ suficientemente grande. Luego para toda $k \in \mathbb{N}_0$,*

$$\|\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}^{k,+}f)\|^q_{L^q(\mu)} \lesssim C_k \|b\|^{kq}_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{B_k,\alpha,\eta}f\|^q_{L^q(\mu)}$$

para toda $f \geq 0$ acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Nuevamente aplicaremos el método de inducción.

Para $k=0$, la desigualdad se verifica como consecuencia de la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein, Teorema 2.1.1, y la Proposición 2.2.15 dada en el Capítulo 2.

Veamos el caso $k=1$. En virtud de la Proposición 3.4.13, $\mathcal{I}_{\alpha,b}^{1,+}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, luego aplicando la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein (Teorema 2.1.1) seguidamente el Lema 3.4.3 para $0 < 2\epsilon < \epsilon_1 < 1$ y usando el resultado para $k=0$ resulta

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}^{1,+}f)\|^q_{L^q(\mu)} &\leq C\|\mathcal{M}^\sharp_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}^{1,+}f)\|^q_{L^q(\mu)}\\ &\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{\epsilon_1,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)\|^q_{L^q(\mu)}+C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{B_1,\alpha,\eta}(f)\|^q_{L^q(\mu)}.\\ &\lesssim \|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{B_1,\alpha,\eta}(f)\|^q_{L^q(\mu)}.\end{aligned}$$

Luego la estimación es válida para $k=1$.

Supongamos que el resultado es cierto para $m=0,1,2,\ldots,k-1$, donde $k \in \mathbb{N}, k>1$. Probaremos que se verifica para $m=k$, esto es

$$\|\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}^{k,+}f)\|^q_{L^q(\mu)} \lesssim C_k\|b\|^{kq}_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{B_k,\alpha,\eta}(f)\|^q_{L^q(\mu)}.$$

Nuevamente en virtud de la Proposición 3.4.13, $\mathcal{I}_{\alpha,b}^{k,+}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, luego aplicando la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein y seguidamente el Lema 3.4.3 para $0 < 2\epsilon < \epsilon_1 < 1$ resulta

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}^{k,+}f)\|^q_{L^q(\mu)}\\ &\quad\leq C\|\mathcal{M}^\sharp_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}^{k,+}f)\|^q_{L^q(\mu)}\end{aligned}$$

$$\leq C\sum_{j=0}^{k-1}\|b\|^{(k-j)q}_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{\epsilon_1,\alpha,\eta}(\mathcal{I}^{j,+}_{\alpha,b}f)\|^q_{L^q(\mu)}+C\|b\|^{kq}_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{B_k,\alpha,\eta}(f)\|^q_{L^q(\mu)}.$$

Luego, aplicando la hipótesis inductiva y el hecho que para toda $j=0,1,\ldots,k-1$ $\|\mathcal{M}_{B_j,\alpha,\eta}(f)\|^q_{L^q(\mu)}\leq\|\mathcal{M}_{B_k,\alpha,\eta}(f)\|^q_{L^q(\mu)}$ obtenemos

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f)\|^q_{L^q(\mu)}\\&\quad\leq\sum_{j=0}^{k-1}C_j\|b\|^{(k-j)q}_{BMO_\theta(\rho)}\|b\|^{jq}_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{B_j,\alpha,\eta}(f)\|^q_{L^q(\mu)}+C\|b\|^{kq}_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{B_k,\alpha,\eta}(f)\|^q_{L^q(\mu)}\\&\quad\leq C_k\|b\|^{kq}_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{B_k,\alpha,\eta}(f)\|^q_{L^q(\mu)}.\end{aligned}$$

□

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 3.4.2.

Demostración del Teorema 3.4.2. Sea f acotada y de soporte compacto. Como ya se mencionó al comienzo del capítulo

$$|\mathcal{I}^m_{\alpha,b}f(x)|\leq\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x)$$

para toda $f\geq 0$. Luego sera suficiente probar

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x)|^q\mu(x)dx\leq C\|b\|^{mq}_{BMO_\theta(\rho)}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}f(x)|^q\mu(x)dx.$$

para toda $f\geq 0$ acotada y de soporte compacto. El caso general para cualquier f acotada y de soporte compacto se sigue del hecho que $|\mathcal{I}^m_{\alpha,b}f|\leq\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}|f|$.

Notemos que, a partir de la Proposición 3.4.13, sabemos que $\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f$ es localmente integrable. Luego, considerando $0<2\delta<\epsilon<1$, $\delta<q$ y η suficientemente grande, una aplicación de la desigualdad fuerte de Fefferman-Stein (Teorema 2.1.1) seguida del Lema 3.4.3 nos conduce a

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x)|^q\mu(x)dx\\&\quad\leq\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{M}_{\delta,\eta}(\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f)(x)|^q\mu(x)dx\\&\quad\leq\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{M}^\sharp_{\delta,\eta}(\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f)(x)|^q\mu(x)dx\\&\quad\leq C\sum_{k=0}^{m-1}\|b\|_{BMO_\theta}(\rho)^{(m-k)q}\|\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}^{k,+}_{\alpha,b}f)\|^q_{L^q(\mu)}+C\|b\|^{mq}_{BMO_\theta(\rho)}\|\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}f\|^q_{L^q(\mu)}.\end{aligned}$$

Finalmente, el hecho que para toda $k\leq m$, $\mathcal{M}_{B_k,\alpha,\eta}f(x)\leq\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}f(x)$ para toda $x\in\mathbb{R}^n$ y la Proposición 3.4.16 nos conducen a

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{I}^{m,+}_{\alpha,b}f(x)|^q\mu(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{k=0}^{m-1} C_k \|b\|_{BMO_\theta}(\rho)^{(m-k)q} \|b\|^{kq}_{BMO_\theta(\rho)} \|\mathcal{M}_{B_{k,\alpha,\eta}} f\|^q_{L^q(\mu)} + \|b\|^{mq}_{BMO_\theta(\rho)} \|\mathcal{M}_{B_{m,\alpha,\eta}} f\|^q_{L^q(\mu)} \\
&\lesssim C_m \|b\|_{BMO_\theta}(\rho)^{mq} \|\mathcal{M}_{B_{m,\alpha,\eta}} f\|^q_{L^q(\mu)} + \|b\|^{mq}_{BMO_\theta(\rho)} \|\mathcal{M}_{B_{m,\alpha,\eta}} f\|^q_{L^q(\mu)} \\
&\lesssim C_m \|b\|^{mq}_{BMO_\theta(\rho)} \|\mathcal{M}_{B_{m,\alpha,\eta}} f\|^q_{L^q(\mu)}.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.4.17. Denotemos por $\mathcal{I}^{m,*}_{\alpha,b}$ al operador adjunto de $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$. Es fácil ver que $\mathcal{K}^*_\alpha(x,y) = \mathcal{K}_\alpha(y,x)$ para toda x, y en $\mathbb{R}^n$ y dado que además $\mathcal{K}_\alpha$ es simétrico, resulta que el Teorema 3.4.2 también se verifica para su adjunto, esto es, para todo peso $\mu \in A^{\rho,loc}_\infty$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}^{m,*}_{\alpha,b} f(x)|^q \mu(x) dx \leq C \|b\|^{mq}_{BMO_\theta(\rho)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{B_{m,\alpha,\eta}} f(x)^q \mu(x).$$

A partir del Teorema 3.4.2, el cual establece una comparación en norma $L^q(\mu)$ entre los operadores $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$ y $\mathcal{M}_{B_{m,\alpha,\eta}}$, y el Teorema 3.3.1, que determina condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{M}_{B_{m,\alpha,\eta}}$ sea un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$, para $1 < p \leq q < \infty$, resulta inmediata la demostración del Teorema 3.4.1.

Demostración del Teorema 3.4.1. Basta con probar este resultado para $f \geq 0$ acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, ya que el caso general se sigue a través de un argumento de densidad.

Dado que, por hipótesis, $\mu \in A^{\rho,loc}_\infty$, por Teorema 3.4.2 resulta

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}^m_{\alpha,b} f(x)|^q \mu(x) dx \leq C \|b\|^{mq}_{BMO_\theta(\rho)} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_{B_{m,\alpha,\eta}} f(x)|^q \mu(x)$$

para $\eta \geq 0$ suficientemente grande. Teniendo en cuenta que, también por hipótesis, $\sigma \in A^{\rho,\infty}_\infty$ y el par de pesos (μ, ν) está en la clase $A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}$ resulta por Teorema 3.3.1 que el operador maximal $\mathcal{M}_{B_{m,\alpha,\eta}}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\nu)$ y, en consecuencia, lo mismo se sigue para $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$. □

A continuación probaremos un resultado de acotación para $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$ bajo condiciones muy generales sobre el peso ω.

Teorema 3.4.18. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \geq 0$. Si $b \in BMO_\theta(\rho)$, para algún $\theta \geq 0$ entonces existe una constante C tal que para todo $\eta \geq 0$ suficientemente grande*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{I}^m_{\alpha,b} f(x)\right|^p \omega(x) dx \leq C \|b\|^{mp}_{BMO_\theta(\rho)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \rho(x)^{\alpha(p-s)} \mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)(x) dx$$

para toda $s \leq p$ tal que $0 < \alpha s < n$, donde $M^{[(m+1)p]}$ es el operador maximal de Hardy Littlewood iterado $[(m+1)p]$ y $[(m+1)p]$ representa la parte entera de $(m+1)p$.

Observación 3.4.19. En el caso $\alpha p < n$ el rango de s permite $s = p$.

El teorema anterior fue probado por Pérez y Wheeden en [32] para operadores integrales que abarcan la integral fraccionaria clásica ($V = 0, m = 0$) en el contexto de espacios de tipo homogéneo. Sin embargo los espacios de tipo homogéneo considerados en su trabajo satisfacen la condición que todos los anillos son no vacíos. Esta restricción implica, en particular, que los espacios son de medida infinita. Más adelante Bernardis, Pradolini y Hartzstein en [2] probaron el Teorema anterior para el caso clásico en el contexto de espacios de tipo homogéneo más generales que los considerados en [32].

Para la prueba de este teorema necesitaremos los siguientes resultados.

Lema 3.4.20. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $\eta \geq 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ y $B_m(t) = t\log(e+t)^m$. Luego existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}f(x) \leq C\mathcal{M}_{\alpha,\eta}(M^m f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $M^m f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 3.4.21. Este lema fue probado para el caso clásico ($V = 0$) en [15] dentro del contexto Euclídeo y en [2] en el contexto de espacios de tipo homogéneo. Para la demostración de nuestro resultado usamos una combinación de ideas de ambos trabajos.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y Q una bola que contiene a x. En [15] (p.886, Lema 3.1), se prueba

$$\|f\|_{B_m,Q} \leq C|Q|^{-1}\int_Q M^m f(y)dy.$$

Luego,

$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B_m,Q} \leq C\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_Q M^m f(y)dy, \leq \mathcal{M}_{\alpha,\eta}(M^m f)(x)$$

y por lo tanto

$$\mathcal{M}_{B_m,\alpha,\eta}f(x) \leq C\mathcal{M}_{\alpha,\eta}(M^m f)(x)$$

lo que completa la prueba. □

Lema 3.4.22. *Sea $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \gamma < n$, $\eta \geq 0$ y $0 < \epsilon < 1$ entonces $(\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g)^\epsilon \in A_1^{\rho,\infty}$.*

Demostración. Será suficiente probar que existe constantes no negativas C y θ tal que para toda bola $Q(x_Q, r_Q)$ de $\mathbb{R}^n$, se verifica

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g)^\epsilon \leq C\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^\theta \inf_Q (\mathcal{M}_{\gamma,\eta})^\epsilon. \tag{3.4.23}$$

Separamos $g = g_1 + g_2$, con $g_1 = g\chi_{3Q}$. Luego por ser $\mathcal{M}_{\gamma,\eta}$ un operador sublineal, podemos acotar el primer miembro de 3.4.23 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g)^\epsilon &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g_1)^\epsilon + \frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g_2)^\epsilon \\ &\doteq \qquad I \qquad + \qquad II.\end{aligned}$$

Para I, dado que $0 < \epsilon < \frac{n}{n-\gamma}$, usando la desigualdad de Kolmogorov (Lema 2.2.17) y luego teniendo en cuenta que $\mathcal{M}_{\gamma,\eta}$ es de tipo débil $(1, \frac{n}{n-\gamma})$ resulta

$$\begin{aligned}I &\leq \frac{C}{|Q|^{(1-\frac{\gamma}{n})\epsilon}}\|\mathcal{M}_{\gamma,\eta}(g_1)\|^\epsilon_{L^{\frac{n}{n-\gamma},\infty}} \\ &\leq C\left(\frac{1}{|3Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}}\|g_1\|_{L^1}\right)^\epsilon \\ &= C\psi(3Q)^{\eta\epsilon}\left(\frac{\psi(3Q)^{-\eta}}{|3Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}}\int_{3Q}|g|\right)^\epsilon \\ &\leq C\left(1+\frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^{\eta\epsilon}\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g(x) \quad \forall x \in Q.\end{aligned}$$

Luego,

$$I \leq C\left(1+\frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^{\eta\epsilon}\inf_Q\,(\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g)^\epsilon$$

Para estimar II, observemos en primer lugar que para cualesquiera $y, z \in Q$

$$\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g_2(y) \leq C\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g_2(z). \tag{3.4.24}$$

En efecto, sea Q' una bola tal que $y \in Q'$. Como $g_2 = g\chi_{(3Q)^c}$ para que la bola Q' proporcione un promedio no nulo se debe verificar que $2r_{Q'} \geq 2r_Q$ y por lo tanto $Q \subset 3Q'$. Entonces,

$$\begin{aligned}&|Q'|^{\frac{\gamma}{n}-1}\psi(Q')^{-\eta}\int_{Q'}|g_2(t)|dt \\ &\qquad\leq C|3Q'|^{\frac{\gamma}{n}-1}\psi(3Q')^{-\eta}\int_{3Q'}|g_2(t)|dt \\ &\qquad\leq C\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g_2(z) \quad \forall z \in Q\end{aligned}$$

lo que prueba (3.4.24). Luego elevando ambos miembros a la potencia ϵ, fijando y y variando z se obtiene

$$(\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g_2)^\epsilon(y) \leq C\inf_Q\,(\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g)^\epsilon.$$

Tomando a ambos lados promedio sobre Q resulta

$$II = \frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{M}_{\gamma,\eta}g_2)^\epsilon$$

$$\begin{aligned}&\leq C \operatorname*{ínf}_{Q} (\mathcal{M}_{\gamma,\eta} g)^{\epsilon} \\ &\leq C \left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^{\eta\epsilon} \operatorname*{ínf}_{Q} (\mathcal{M}_{\gamma,\eta} g)^{\epsilon}.\end{aligned}$$

Luego, de las estimaciones de I y II, resulta que $(\mathcal{M}_{\gamma,\eta} g)^{\epsilon} \in A_1^{\rho,\theta}$, para todo $\theta \geq \eta\epsilon$, y por lo tanto, es un peso en $A_1^{\rho,\infty}$. □

La aparición del factor $\rho(x)^{\alpha(p-s)}$ en el resultado del Teorema 3.4.18 introduce una novedad con respecto al caso clásico ($V = 0$), (Teorema 1.2 en [2]), particularmente cuando $\alpha p \geq n$ (si $\alpha p < n$ siempre podemos elegir $s = p$ y recuperar el aspecto de la desigualdad cuando $V = 0$). Al respecto, cabe mencionar que en dicho caso $M_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega) = \infty$ *c.t.p* x, lo que aquí no necesariamente es cierto. El siguiente lema aporta información sobre el factor extra que aparece en el Teorema 3.4.18 respecto a su correspondiente versión clásica, la que nos resultará útil en la demostración del Teorema.

Lema 3.4.25. *$\rho(x)^{-\delta} \in A_1^{\rho,\infty}$ para toda $\delta > 0$.*

Demostración. Es suficiente probar que existen constantes no negativas C y θ tales que para toda bola $Q_0 = Q(x_0, r_0)$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \rho(x)^{-\delta} dx \leq C \left(1 + \frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{\theta} \operatorname*{ínf}_{x\in Q_0} \rho(x)^{-\delta}.$$

En virtud de la propiedad de la función de radio crítico citada en 3 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \rho(x)^{-\delta} dx &\leq \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} C_0^{\delta} (\sqrt{n})^{N_0\delta} \rho(x_0)^{-\delta} \left(1 + \frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{N_0\delta} \\ &\leq C_0^{\delta} (\sqrt{n})^{N_0\delta} \rho(x_0)^{-\delta} \left(1 + \frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{N_0\delta}. \qquad (3.4.26)\end{aligned}$$

Sea $x \in Q_0$, nuevamente aplicando la mencionada propiedad de la función de radio crítico obtenemos

$$\rho(x)^{-\delta} \geq C_0^{-\delta} (\sqrt{n})^{-\frac{\delta N_0}{N_0+1}} \rho(x_0)^{-\delta} \left(1 + \frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{\frac{-\delta N_0}{N_0+1}},$$

y en consecuencia

$$\operatorname*{ínf}_{x\in Q_0} \rho(x)^{-\delta} \geq C \rho(x_0)^{-\delta} \left(1 + \frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{-\frac{\delta N_0}{N_0+1}}.$$

Ahora, aplicando esta estimación en 3.4.26 se obtiene

$$\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \rho(x)^{-\delta} dx \leq C \operatorname*{ínf}_{x\in Q_0} \rho(x)^{-\delta} \left(1 + \frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{\delta N_0 (\frac{1}{N_0+1} + 1)}.$$

Esto demuestra que $\rho(x)^{-\delta} \in A_1^{\rho,\theta}$ para $\theta \geq \delta N_0(\frac{1}{N_0+1} + 1)$ y, por consiguiente, el resultado que buscamos. □

La siguiente proposición es una extensión al caso de los pesos $A_p^{\rho,\infty}$ de un bien conocido resultado para pesos A_p. Su demostración sigue las mismas líneas del caso clásico (ver Teorema 9.5.1 en [23]).

Proposición 3.4.27. *Sean $\omega_1, \omega_2 \in A_1^{\rho,\infty}$, $1 < p < \infty$, entonces $\omega_1 \omega_2^{1-p} \in A_p^{\rho,\infty}$.*

La siguiente estimación también será útil para demostrar el Teorema 3.4.18.

Proposición 3.4.28. *Sean $\beta, \eta > 0$ tal que $\eta > n\beta(N_0+1)$ entonces*

$$\sup_{x \in Q} \frac{|Q|^\beta}{\psi(Q)^\eta} \leq C\rho(x)^{n\beta}$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $Q = Q(x_Q, r_Q)$ una bola tal que $x \in Q$. Por propiedad de la función de radio crítico citada en (3) resulta

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right) &\geq \left(1 + C(C_0, n)\frac{r_Q}{\rho(x)\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}}\right) \\
&\geq C\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x)}\right)^{-\frac{N_0}{N_0+1}}\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x)}\right) \\
&= C\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x)}\right)^{\frac{1}{N_0+1}}
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\frac{|Q|^\beta}{\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^\eta} \leq C\frac{r_Q^{n\beta}}{\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x)}\right)^{\frac{\eta}{N_0+1}}} = C\frac{\rho(x)^{\frac{\eta}{N_0+1}} r_Q^{n\beta}}{(\rho(x) + r_Q)^{\frac{\eta}{N_0+1}}}. \tag{3.4.29}$$

Si $r_Q \leq \rho(x)$, dado que $\beta > 0$ de la desigualdad 3.4.29 resulta

$$\frac{|Q|^\beta}{\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^\eta} \leq C\frac{\rho(x)^{\frac{\eta}{N_0+1} + n\beta}}{\rho(x)^{\frac{\eta}{N_0+1}}} \leq C\rho(x)^{n\beta}.$$

Por el contrario, si $r_Q > \rho(x)$, dado que $\frac{\eta}{N_0+1} > n\beta$, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{|Q|^\beta}{\left(1 + \frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^\eta} &\leq C\,\frac{\rho(x)^{\frac{\eta}{N_0+1}} r_Q^{n\beta}}{r_Q^{\frac{\eta}{N_0+1}}} \\
&\leq C\rho(x)^{\frac{\eta}{N_0+1}} r_Q^{n\beta - \frac{\eta}{N_0+1}} \\
&\leq C\rho(x)^{n\beta}
\end{aligned}$$

lo que completa la prueba. $\square$

Ahora estamos en condiciones de proceder con la demostración del Teorema 3.4.18.

Demostración del Teorema 3.4.18. Es claro que, utilizando un argumento de dualidad es suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{I}_{\alpha,b}^{m,*} f(x)\right|^{p'} \rho(x)^{\alpha(p-s)(1-p')}\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)(x)^{1-p'}dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'}\omega(x)^{1-p'}dx. \tag{3.4.30}$$

Elegimos $r > p'$. Luego $0 < \frac{p'-1}{r-1} < 1$ y en consecuencia por Lema 3.4.22 resulta

$$\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)(x)^{\frac{p'-1}{r-1}} \in A_1^{\rho,\infty}.$$

Dado que, además, por Lema 3.4.25 $\rho(x)^{\alpha(p-s)(1-p')} \in A_1^{\rho,\infty}$, resulta, de la Proposición 3.4.27

$$\rho^{\alpha(p-s)(1-p')}\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)^{1-p'} = \rho^{\alpha(p-s)(1-p')}\left\{\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)^{\frac{p'-1}{r-1}}\right\}^{1-r}$$

es un peso en $A_r^{\rho,\infty} \subset A_\infty^{\rho,\infty}$. Luego aplicando Teorema 3.4.2 y el Lema 3.4.20 obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{I}_{\alpha,b}^{m,*} f(x)\right|^{p'} \rho(x)^{\alpha(p-s)(1-p')}\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)(x)^{1-p'}dx \\
&\quad\leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_{B_m,\alpha,2\eta}f(x)|^{p'}\rho(x)^{\alpha(p-s)(1-p')}\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)(x)^{1-p'}dx \\
&\quad\leq C\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_{B_m,\alpha,2\eta}f(x))^{p'}\rho(x)^{\alpha(p-s)(1-p')}\mathcal{M}_{B_{[(m+1)p]},\alpha s,\eta}\omega(x)^{1-p'}dx.
\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

Tomando η suficientemente grande y aplicando Proposición 3.4.28 resulta,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{B_m,\alpha,2\eta}f(x)^{p'} &\leq \sup_{\substack{x\in Q\\ Q(x_Q,r_Q)}} \frac{|Q|^{\frac{\alpha}{n}p'}}{\left(1+\frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^{2\eta p'}}\|f\|_{B_m,Q}^{p'} \\
&\leq \left(\sup_{\substack{x\in Q\\ Q(x_Q,r_Q)}} \frac{|Q|^{\frac{\alpha}{n}(p-s)(p'-1)}}{\left(1+\frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^{\eta p'}}\right)\left(\sup_{\substack{x\in Q\\ Q(x_Q,r_Q)}} \frac{|Q|^{\frac{\alpha}{n}p'-\frac{\alpha}{n}(p-s)(p'-1)}}{\left(1+\frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^{\eta p'}}\|f\|_{B_m,Q}^{p'}\right) \\
&\leq C\rho(x)^{\alpha(p-s)(p'-1)}\left(\sup_{\substack{x\in Q\\ Q(x_Q,r_Q)}} \frac{|Q|^{\frac{\alpha}{n}\left(1-(p-s)\frac{p'-1}{p'}\right)}}{\left(1+\frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^{\eta}}\|f\|_{B_m,Q}\right)^{p'} \\
&\leq C\rho(x)^{\alpha(p-s)(p'-1)}\left(\sup_{\substack{x\in Q\\ Q(x_Q,r_Q)}} \frac{|Q|^{\frac{\alpha s}{np}}}{\left(1+\frac{r_Q}{\rho(x_Q)}\right)^{\eta}}\|f\|_{B_m,Q}\right)^{p'} \\
&\leq C\rho(x)^{\alpha(p-s)(p'-1)}\left(\mathcal{M}_{B_m,\frac{\alpha s}{p},\eta}f(x)\right)^{p'}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (3.4.31) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{I}_{\alpha,b}^{m,*} f(x)\right|^{p'} \rho(x)^{\alpha(p-s)(1-p')} \mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)(x)^{1-p'} dx \\
&\quad \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)^{\alpha(p-s)(p'-1)} \left(\mathcal{M}_{B_m,\frac{\alpha s}{p},\eta} f(x)\right)^{p'} \rho(x)^{\alpha(p-s)(1-p')} \mathcal{M}_{B_{[(m+1)p]},\alpha s,\eta}\omega(x)^{1-p'} dx \\
&\quad \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M}_{B_m,\frac{\alpha s}{p},\eta} f(x)\right)^{p'} \mathcal{M}_{B_{[(m+1)p]},\alpha s,\eta}\omega(x)^{1-p'} dx.
\end{aligned}$$

Entonces, para probar (3.4.30) será suficiente mostrar

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M}_{B_m,\frac{\alpha s}{p},\eta} f(x)\right)^{p'} \mathcal{M}_{B_{[(m+1)p]},\alpha s,\eta}\omega(x)^{1-p'} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'} \omega(x)^{1-p'} dx.$$

Tomando $g = f\omega^{-\frac{1}{p}}$ la desigualdad anterior puede escribirse

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M}_{B_m,\frac{\alpha s}{p},\eta}(g\omega^{\frac{1}{p}})(x)\right)^{p'} \mathcal{M}_{B_{[(m+1)p]},\alpha s,\eta}\omega(x)^{1-p'} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p'} dx.$$

Para $B_m(t) = t\log(e+t)^m$ no es difícil ver que $B_m^{-1}(t) \cong \frac{t}{\log(e+t)^m}$. Sea $\epsilon > 0$, luego

$$B_m^{-1}(t) \cong \frac{t^{\frac{1}{p}}}{\log(e+t)^{m+\frac{p-1+\epsilon}{p}}}\, t^{\frac{1}{p'}} \log(e+t)^{\frac{p-1+\epsilon}{p}} = \psi^{-1}(t)\phi^{-1}(t),$$

con $\psi(t) \cong t^p \log(e+t)^{(m+1)p-1+\epsilon}$ y $\phi(t) = t^{p'} \log(e+t)^{-(1+(p'-1)\epsilon)}$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y Q una bola tal que $x \in Q$. Luego por Lema 1.1.21 obtenemos

$$\|g\omega^{\frac{1}{p}}\|_{B_m,Q} \leq 2\|g\|_{\phi,Q}\|\omega^{\frac{1}{p}}\|_{\psi,Q},$$

de donde, eligiendo $\epsilon > 0$ tal que $(m+1)p - 1 + \epsilon = [(m+1)p]$ obtenemos

$$\|g\omega^{\frac{1}{p}}\|_{B_m,Q} \leq 2\|g\|_{\phi,Q}\|\omega\|_{B_{[(m+1)p]},Q}^{\frac{1}{p}}.$$

Multiplicando a ambos miembros por $\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha s}{np}}$ resulta

$$\psi(Q)^{-\eta}|Q|^{\frac{\alpha s}{np}}\|g\omega^{\frac{1}{p}}\|_{B_m,Q} \leq 2\|g\|_{\phi,Q}\left(\psi(Q)^{-\eta p}|Q|^{\frac{\alpha s}{n}}\|\omega\|_{B_{[(m+1)p]},Q}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora, tomando el supremo a ambos lados, se obtiene

$$\mathcal{M}_{B_m,\frac{\alpha s}{p},\eta}(g\omega^{\frac{1}{p}})(x) \leq CM_\phi g(x)\mathcal{M}_{B_{[(m+1)p]},\alpha s,\eta}\omega(x)^{\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, dado que es fácil ver que ϕ satisface una condición $B_{p'}$, el Teorema 3.2.2 nos conduce a

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M}_{B_m,\frac{\alpha s}{p},\eta}(g\omega^{\frac{1}{p}})(x)\right)^{p'} \mathcal{M}_{B_{[(m+1)p]},\alpha s,\eta}\omega(x)^{1-p'} dx \\
&\quad \leq C \int_{\mathbb{R}^n} M_\phi g(x)^{p'} \mathcal{M}_{B_{[(m+1)p]},\alpha s,\eta}\omega(x)^{\frac{p'}{p}} \mathcal{M}_{B_{[(m+1)p]},\alpha s,\eta}\omega(x)^{1-p'} dx \\
&\quad \leq C \int_{\mathbb{R}^n} M_\phi g(x)^{p'} dx \\
&\quad \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p'} dx
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Capítulo 4

Otro Método

En el capítulo 2, a partir de una adecuada desigualdad de tipo Fefferman - Stein y, usando resultados de acotación de ciertos operadores maximales asociados al operador de Schrödinger desarrollados en el Capítulo 1, probamos acotaciones fuertes y débiles con dos pesos para $\mathcal{I}_\alpha$ y su conmutador $\mathcal{I}_{\alpha,b}$. En este capítulo exploraremos otro método para probar algunos de los resultados de acotación de $\mathcal{I}_\alpha$ e $\mathcal{I}_{\alpha,b}$. En particular, la idea es descomponer los operadores como suma de un operador local y otro global, donde, para funciones f acotadas y de soporte compacto y para cada x en $\mathbb{R}^n$, el operador local consiste en evaluar $\mathcal{I}_\alpha$ (o $\mathcal{I}_{\alpha,b}$) en f cortada en la bola crítica $Q(x,\rho(x))$ y el operador global consiste en evaluar los correspondientes operadores en la función f cortada en el complemento de dicha bola crítica. Esta descomposición permite obtener los resultados de acotación probándolos para los operadores locales y globales. Como ya se verá más adelante, en el operador local se usarán resultados de acotación de los operadores clásicos en ciertos espacios de tipo homogéneo, mientras que en la parte global las estimaciones del núcleo del operador de semigrupo del calor, $e^{-t\mathcal{L}}$, nos serán de suma utilidad. Esta técnica fue utilizada por Bongioanni, Harboure y Salinas para obtener acotaciones con un peso para varios operadores asociados al operador de Schrödinger (ver [5] y [7]).

4.1. Desigualdades con dos pesos para $\mathcal{I}_\alpha$

4.1.1. Preliminares

En el marco de un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) (Capítulo 1, sección 1.1.2), para una función f definida en X acotada y de soporte compacto, la integral fraccionaria clásica de orden γ, I_γ, con $0<\gamma<1$, se define por

$$I_\gamma f(x)=\int_X \frac{|f(y)|}{\mu(B(y,d(x,y)))^{1-\gamma}}d\mu(y).$$

En lo que sigue, denotaremos por $L_c^\infty(X, d\mu)$ al conjunto de funciones acotadas y con soporte compacto en X.

En el Capítulo 1, sección 1.1.2, mencionamos resultados de acotación con dos pesos de la maximal fraccionaria, M_γ, en espacios de tipo homogéneo (Teoremas 1.1.8 y 1.1.14). Como consecuencia, ahora, probando las siguientes relaciones en norma $L^q(X,\mu)$ y $L^{q,\infty}(X,\mu)$ entre M_γ e I_γ para el espacio de tipo homogéneo particular $X = Q_0$, con Q_0 bola de $\mathbb{R}^n$ que, como se verá más adelante, es el que necesitaremos, obtendremos las correspondientes acotaciones con dos pesos de I_γ en Q_0.

Teorema 4.1.1. *En el espacio $(Q_0, d, dx/Q_0)$, sean $0 < \alpha < n$, $0 < q < \infty$ y ω un peso en A_∞, entonces existen constantes $C_1, C_2 > 0$, tales que*

$$\sup_{a>0} a^q \omega\left(\{x \in Q_0 : |I_\alpha f(x)| > a\}\right) \le C_1 \sup_{a>0} a^q \omega\left(\{x \in Q_0 : |M_\alpha f(x)| > a\}\right) \tag{4.1.2}$$

$$\int_{Q_0} |I_\alpha(f)(x)|^q \omega(x)dx \le C_2 \int_{Q_0} |M_\alpha(f)(x)|^q \omega(x)dx \tag{4.1.3}$$

para toda $f \in L_c^\infty(Q_0, dx)$.

Para demostrar este resultado, seguiremos las lineas de B.Muckenhoup y R.Wheeden ([28]), quienes prueban el Teorema 4.1.1 en el contexto Euclídeo $\mathbb{R}^n$ estableciendo, previamente, el siguiente lema.

Lema 4.1.4. *[28] Sea $0 < \alpha < n$, existen constantes B, K dependientes unicamente de α y de n tales que si $a > 0$, $d > 0$, $b \ge B$, f no negativa, Q es una bola en Q_0 tal que $I_\alpha(f)(x) \le a$ para algún $x \in Q$ y E es el subconjunto de Q donde ambos condiciones $I_\alpha(f)(x) > ab$ y $M_\alpha(f)(x) \le ad$ se verifican, entonces*

$$|E| \le K|Q| \left(\frac{d}{b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Ademas, para la prueba del Teorema 4.1.1, necesitaremos el siguiente lema de cubrimiento probado en [9].

Teorema 4.1.5. *[9] Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $A \subsetneq X$ abierto, entonces existe una colección de bolas $B_i = B(x_i, r_i)$ tales que*

1. *$A = \bigcup_i^\infty B(x_i, r_i)$.*
2. *Cada punto de A puede estar en a lo más M bolas B_i.*
3. *Las bolas $hB_i = B(x_i, hr_i)$ cortan al complemento de A.*

   Las constantes M, h dependen de X.

Demostración del Teorema 4.1.1. Sea $f \in L_c^\infty(Q_0)$. Asumimos que f es no negativa, ya que reemplazando f por $|f|$ únicamente crece el lado izquierdo de (4.1.2) (o (4.1.3)) y no afecta el lado derecho.

En primer lugar probaremos (4.1.2). Sea $a > 0$, definimos

$$E_a = \{x \in Q_0 : I_\alpha(f)(x) > a\}$$

Por Lema 4.1.5, E_a se puede escribir como la unión de bolas $B_i(x_i, r_i)$ en Q_0, tal que todo punto de E_a puede estar en a lo sumo M bolas B_i, y para cada i, $I_\alpha(f)(x) \le a$ para algún punto de hB_i, donde h dependende de n.

Sean B, K, las constantes del Lema 4.1.4 y $b = max(1, B)$. Sea δ correspondiente a $\epsilon = \frac{1}{2M} b^{-q}$ en la Proposición 1.1.7 ($\omega \in A_\infty$). Elijo D tal que $\delta = Kh^n \left(\frac{D}{b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$. Sea d satisfaciendo $0 < d \le D$.

Sea $E_i = \{x \in hB_i$: $I_\alpha(f)(x) > ab \wedge M_\alpha(f)(x) \le ad\}$. Dado que hB_i es una bola en Q_0 tal que $I_\alpha(f)(x) \le a$ para algún x y $E_i \subset hB_i$, donde se verifican $I_\alpha(f)(x) > ab$ y $M_\alpha(f)(x) \le ad$ es posible aplicar el Lema 4.1.4, obteniendo

$$\begin{aligned}
|E_i| &\le K|hB_i| \left(\frac{d}{b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \\
&\le Kh^n \left(\frac{D}{b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} |B_i| \\
&\le \delta |B_i|,
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado $\delta = Kh^n \left(\frac{D}{b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$. Luego dado que ω es un peso A_∞, se tiene

$$\omega(E_i) \le \epsilon \omega(B_i), \quad \forall i = 1, \dots, M.$$

Sumando en i resulta,

$$\begin{aligned}
\omega\left(\bigcup_i E_i\right) &\le \sum_i \omega(E_i) \\
&\le \frac{1}{2M} b^{-q} \sum_i \omega(B_i) \\
&\le \frac{1}{2M} b^{-q} M\omega(E_a) \\
&\le \frac{1}{2} b^{-q} \omega(E_a).
\end{aligned}$$

Luego, de la definición de los E_i, obtenemos

$$\omega(\{x \in Q_0 : I_\alpha(f)(x) > ab \wedge M_\alpha(f)(x) \le ad\}) \le \frac{1}{2} b^{-q} \omega(E_a), \quad \forall d, 0 < d \le D.$$

De aquí resulta por ser ω localmente integrable que

$$\omega(\{x \in Q_0 : I_\alpha(f)(x) > ab\}) \le \frac{1}{2} b^{-q} \omega(\{x \in Q_0 : I_\alpha(f)(x) > a\})$$

$$+\,\omega(\{x\in Q_0 : M_\alpha(f)(x>ad)\}), \qquad (4.1.6)$$

para todo d, $0 < d \leq D$. Multiplicando ambos lados de (4.1.6) por a^q y tomando el supremo para $0 < a < N$ con $N \in \mathbb{N}$, (4.1.6) se transforma en

$$\begin{aligned}\sup_{0<a<N} a^q\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>ab\}) \leq \frac{1}{2}b^{-q}&\sup_{0<a<N} a^q\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>a\})\\ &+\sup_{0<a<N} a^q\omega(\{x\in Q_0 : M_\alpha(f)(x>ad)\}). \quad (4.1.7)\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned}\sup_{0<a<N} a^q\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>ab\}) &= \sup_{0<a<bN} a^q b^{-q}\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>a\}).\\ \sup_{0<a<N} a^q\omega(\{x\in Q_0 : M_\alpha(f)(x>ad)\}) &= \sup_{0<a<Nd} a^q d^{-q}\omega(\{x\in Q_0 : M_\alpha(f)(x>a)\}),\end{aligned}$$

y usando el hecho que $b \geq 1$, (4.1.7) se transforma en

$$\begin{aligned}\sup_{0<a<bN} a^q b^{-q}\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>a\}) \leq \frac{1}{2}b^{-q}&\sup_{0<a<Nb} a^q\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>a\})\\ &+\sup_{0<a<Nd} a^q d^{-q}\omega(\{x\in Q_0 : M_\alpha(f)(x>a)\}).\end{aligned}$$

Usando nuevamente que ω es localmente integrable la desigualdad anterior se convierte en

$$\frac{1}{2}b^{-q}\sup_{0<a<Nb} a^q\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>a\}) \leq d^{-q}\sup_{0<a<Nd} a^q\omega(\{x\in Q_0 : M_\alpha(f)(x>a)\}).$$

Finalmente, haciendo $N\to\infty$ se tiene

$$\sup_{a>0} a^q\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>a\}) \leq 2b^q d^{-q}\sup_{a>0} a^q\omega(\{x\in Q_0 : M_\alpha(f)(x>a)\}),$$

completando de esta manera la prueba de (4.1.2).

Para probar (4.1.3), basta con multiplicar ambos lados de (4.1.6) por a^{q-1} y luego integrando respecto de a, de 0 a N, donde N es un número natural arbitrario se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^N a^{q-1}\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>ab\})da \leq \frac{1}{2}b^{-q}&\int_0^N a^{q-1}\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>a\})da\\ &+\int_0^N a^{q-1}\omega(\{x\in Q_0 : M_\alpha(f)(x>ad)\})da.\end{aligned} \qquad (4.1.8)$$

Luego de un sencillo cambio de variables, (4.1.8) se transforma en

$$b^{-q}\int_0^{Nb} a^{q-1}\omega(\{x\in Q_0 : I_\alpha(f)(x)>a\})da$$

$$\leq \frac{1}{2}b^{-q}\int_0^N a^{q-1}\omega(\{x \in Q_0 : I_\alpha(f)(x) > a\})da$$
$$+ d^{-q}\int_0^{Nd} a^{q-1}\omega(\{x \in Q_0 : M_\alpha(f)(x > a)\})da. \tag{4.1.9}$$

Dado que $b \geq 1$, el intervalo de integración $(0, N)$ de la primera integral del lado derecho de (4.1.9) puede sustituirse por el intervalo de integración de $(0, Nb)$, y como además, ω es localmente integrable el primer término de (4.1.9) es finito, obteniendo

$$\frac{1}{2}b^{-q}\int_0^{Nb} a^{q-1}\omega(\{x \in Q_0 : I_\alpha(f)(x) > a\})da$$
$$\leq d^{-q}\int_0^{Nd} a^{q-1}\omega(\{x \in Q_0 : M_\alpha(f)(x > a)\})da.$$

Haciendo $N \to \infty$ se obtiene

$$\frac{b^{-q}}{2q}\int_{Q_0} |I_\alpha f(x)|^q\omega(x)dx \leq \frac{d^{-q}}{q}\int_{Q_0} |M_\alpha(f)(x)|^q\omega(x)dx,$$

que era lo que esperábamos. □

Como dijimos antes, de los Teoremas 1.1.8, 1.1.14 y 4.1.1, es inmediato el siguiente resultado.

Teorema 4.1.10. *Consideremos el espacio de tipo homogéneo* $(Q_0, d, dx/Q_0)$, $0 < \alpha < n$, $1 \leq p \leq q < \infty$ *y* (ω, ν) *un par de pesos, luego*

(4.1.11) *Si* $p > 1, \omega, \sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty(Q_0)$, *entonces* $I_\alpha : L^p(Q_0, \nu) \to L^q(Q_0, \omega)$ *sí y sólo si* $(\omega, \nu) \in A^\alpha_{p,q}(Q_0)$.

(4.1.12) *Si* $p \geq 1$ *y* $\omega \in A_\infty(Q_0)$, *entonces* $I_\alpha : L^p(Q_0, \nu) \to L^{q,\infty}(Q_0, \omega)$ *sí y sólo si* $(\omega, \nu) \in A^\alpha_{p,q}(Q_0)$.

4.2. El Teorema 2.2.8 revisitado

Recordemos el enunciado del Teorema 2.2.8.

Teorema 2.2.8 Sean $0 < \alpha < n$, $1 \leq p \leq q < \infty$, (μ, ν) un par de pesos tal que $\mu \in A^{\rho,loc}_\infty$ y $(\mu, \nu) \in A^{\alpha,\rho,\theta}_{p,q}$ para algún $\theta \geq 0$, luego

(4.2.1) *Si* $1 < p \leq q < \infty$, $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho,loc}_\infty$, *entonces* $\mathcal{I}_\alpha : L^p(\nu) \to L^q(\mu)$.

(4.2.2) *Si* $1 \leq p \leq q < \infty$, *entonces* $\mathcal{I}_\alpha : L^p(\nu) \to L^{q,\infty}(\mu)$.

Demostración. Es obvio que podemos asumir que f es no negativa. También asumiremos que f es acotada y de soporte compacto, ya que, en este caso, un argumento clásico de densidad nos conduce al resultado general.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ descomponemos el operador $\mathcal{I}_\alpha$ como

$$\mathcal{I}_\alpha f = (\mathcal{I}_\alpha)_{loc} f + (\mathcal{I}_\alpha)_{glob} f,$$

donde

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_\alpha)_{loc} f(x) &= \mathcal{I}_\alpha(f\chi_{Q_x})(x).\\ (\mathcal{I}_\alpha)_{glob} f(x) &= \mathcal{I}_\alpha(f\chi_{Q_x^c})(x),\end{aligned}$$

para Q_x la bola crítica centrada en x. Luego será suficiente probar que, bajo las hipótesis dadas, cada uno de estos operadores, local y global, verifican los correspondientes resultados de acotación.

Veamos (4.2.1).

Para empezar, notemos que

$$|(\mathcal{I}_\alpha)_{glob} f(x)| \leq \int_0^\infty \left(\int_{Q(x,\rho(x))^c} |f(y)| k_t(x,y) dy \right) t^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{t}.$$

Por lema 7, dado $N > 0$ existe una constante C_N tal que para toda x, y en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}k_t(x,y) &\leq C_N t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{5t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}\\ &\leq C_N t^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{5t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N}\end{aligned}$$

Por otro lado, dado $M > 0$, sabemos que existe C_M tal que

$$e^s \geq C_M s^{M/2}.$$

Luego, dados $N, M > 0$, existen C_N y C_M tales que, para todos x, y en $\mathbb{R}^n$, se verifica

$$\begin{aligned}k_t(x,y) &\leq \frac{C_N}{C_M} t^{-n/2} \frac{(5t)^{M/2}}{|x-y|^M} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N}\\ &\lesssim \frac{t^{\frac{M-n}{2}}}{|x-y|^M} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}|(\mathcal{I}_\alpha)_{glob} f(x)| &\lesssim \int_0^\infty \left(\int_{Q(x,\rho(x))^c} |f(y)| \frac{t^{\frac{M-n}{2}}}{|x-y|^M} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N} dy \right) t^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{t}\\ &\lesssim \left(\int_0^\infty \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N} t^{\frac{M-n+\alpha}{2}} \frac{dt}{t} \right) \left(\int_{Q(x,\rho(x))^c} \frac{|f(y)|}{|x-y|^M} dy \right)\end{aligned}$$

$$\lesssim \qquad\qquad\qquad I_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad I_2$$

Elegimos $N \geq M > n - \alpha$, así $M - n + \alpha > 0$ y $M - n + \alpha - N < 0$. Luego

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{-N} t^{\frac{-n+M+\alpha}{2}} \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^{\rho(x)^2} t^{\frac{-n+M+\alpha}{2}} \frac{dt}{t} + \rho(x)^N \int_{\rho(x)^2}^\infty t^{\frac{-n+M+\alpha-N}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \frac{\rho(x)^{-n+M+\alpha}}{\frac{-n+M+\alpha}{2}} + \rho(x)^N \frac{\rho(x)^{-n+M+\alpha-N}}{\frac{n-M-\alpha+N}{2}} \\
&\lesssim \rho(x)^{-n+M+\alpha}.
\end{aligned}$$

Y, también,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{Q(x,\rho(x))^c} \frac{|f(y)|}{|x-y|^M} dy \\
&\leq \sum_{k=1}^\infty \int_{2^k Q_x \setminus 2^{(k-1)M} Q_x} \frac{|f(y)|}{2^{k-1}\rho(x)^M} dy \\
&\leq C \sum_{k=0}^\infty 2^{-kM} \rho(x)^{-M} \int_{2^k Q_x} |f(y)| dy.
\end{aligned}$$

Con estas estimaciones tenemos

$$|(\mathcal{I}_\alpha)_{glob} f(x)| \lesssim \rho(x)^{-n+\alpha} \sum_{k=0}^\infty 2^{-kM} \int_{2^k Q_x} |f(y)| dy. \tag{4.2.3}$$

Sea $\{Q_j\}$ el cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ dado en la Proposición 5. La Proposición 6, por su parte, asegura la existencia de $\beta \geq 1$ independiente de j tal que si $\widetilde{Q}_j \doteq \beta Q_j$ tenemos

$$\bigcup_{x \in Q_j} Q_x \subseteq \widetilde{Q}_j.$$

Denotemos por $\widetilde{Q}_j^k$ a $2^k \widetilde{Q}_j$. Luego, para toda $x \in Q_j$, $2^k Q_x \subset \widetilde{Q}_j^k$ y, por lo tanto, en virtud de la Proposición 4, se tiene $\rho(x) \cong \rho(x_j)$. Así podemos probar que

$$\begin{aligned}
&\| (\mathcal{I}_\alpha)_{glob}(f) \|_{L^q(\mu)} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=0}^\infty \rho(x)^{-n+\alpha} 2^{-kM} \int_{2^k Q_x} |f(y)| dy \right)^q \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\rho(x)^{-n+\alpha} 2^{-kM} \int_{2^k Q_x} |f(y)| dy \right)^q \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kM} \left(\sum_j \int_{Q_j} \rho(x)^{(-n+\alpha)q} \left(\int_{2^k Q_x} |f(y)|dy \right)^q \mu(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kM} \left(\sum_j \int_{Q_j} \rho(x_j)^{(-n+\alpha)q} \left(\int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)|dy \right)^q \mu(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kM} \left(\sum_j \rho(x_j)^{(-n+\alpha)q} \mu(Q_j) \left(\int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)|dy \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kM} \left(\sum_j \rho(x_j)^{(-n+\alpha)q} \mu(\widetilde{Q}_j^k) \left(\int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)|dy \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kM} \left(\sum_j \rho(x_j)^{(-n+\alpha)q} \mu(\widetilde{Q}_j^k) \left(\int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)|^p \nu(y)dy \right)^{\frac{q}{p}} \nu^{\frac{-p'}{p}}(\widetilde{Q}_j^k)^{\frac{q}{p'}} \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{4.2.4}
$$

Recordemos que $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, con lo cual tenemos

$$
\begin{aligned}
\mu(\widetilde{Q}_j^k)\nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}_j^k)^{\frac{q}{p'}} &\leq C \left(1 + \frac{2^k \beta \rho(x_j)}{\rho(x_j)} \right)^{\theta \frac{q}{p}} (2^k \beta \rho(x_j))^{(n-\alpha)q} \\
&\leq C(2^k)^{\theta \frac{q}{p} + (n-\alpha)q} \rho(x_j)^{(n-\alpha)q},
\end{aligned}
$$

donde $\theta, C \geq 0$. Luego, teniendo en cuenta la estimación anterior, el hecho que $q \geq p$ y el solapamiento controlado de los $\{\widetilde{Q}_j^k\}_j$ (ver Proposición 5), la desigualdad 4.2.4 nos lleva a

$$
\begin{aligned}
\| (\mathcal{I}_\alpha)_{glob}(f) \|_{L^q(\mu)} &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(M-\frac{\theta}{p}-n+\alpha)} \left(\sum_j \left(\int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)|^p \nu(y)dy \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(M-\frac{\theta}{p}-n+\alpha)} \left(\sum_j \int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)|^p \nu(y)dy \right)^{\frac{q}{p}\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(M-\frac{\theta}{p}-n+\alpha)} \left(\sum_j \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \chi_{\widetilde{Q}_j^k}(y) \nu(y)dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(M-\frac{\theta}{p}-n+\alpha)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \left(\sum_j \chi_{\widetilde{Q}_j^k}(y) \right) \nu(y)dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(M-\frac{\theta}{p}-n+\alpha-N_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \nu(y)dy \right)^{1/p} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(M-\frac{\theta}{p}-n+\alpha-N_1)} \|f\|_{L^p(\nu)}.
\end{aligned}
$$

Así, eligiendo M suficientemente grande, se obtiene el resultado deseado.

Notar que para probar que $(\mathcal{I}_\alpha)_{glob}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$, sólo hemos usado la hipótesis que el par de pesos (μ,ν) está en la clase $A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}$. Por lo tanto, resulta que $(\mathcal{I}_\alpha)_{glob}$ también es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^{q,\infty}(\mu)$.

Veamos ahora que $(\mathcal{I}_\alpha)_{loc} : L^p(\nu) \to L^q(\mu)$. Como antes, sea $\{Q_j\}_j$ la colección de bolas críticas dada en la Proposición 5, $\widetilde{Q}_j = \beta Q_j$ donde $\beta \geq 1$ es dado por la Proposición 6 y es tal que $\bigcup_{x\in Q_j} Q_x \subset \widetilde{Q}_j$. Definimos

$$(I_\alpha)_0(f) = \sum_j \chi_{Q_j} |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})|.$$

Luego

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}_\alpha)_{loc}(f)(x) &\leq C \int_{Q_x} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\leq C \sum_j \chi_{Q_j}(x) \int_{Q_x} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\leq C \sum_j \chi_{Q_j}(x) \int_{\widetilde{Q}_j} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&= C (I_\alpha)_0(f)(x) \quad .
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Por lo tanto, bastará con probar que, $(I_\alpha)_0 : L^p(\nu) \to L^q(\mu)$. Para ello notemos que

$$\begin{aligned}
\|(I_\alpha)_0(f)\|^q_{L^q(\mu)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_j \chi_{Q_j}(x) |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)| \right)^q \mu(x)dx \\
&\leq \sum_k \int_{Q_k} \left(\sum_j \chi_{Q_j}(x) |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)| \right)^q \mu(x)dx \\
&\lesssim \sum_k \int_{Q_k} \sum_j \chi_{Q_j}(x) |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^q \mu(x)dx \\
&\lesssim \sum_k \sum_j \int_{Q_k} \chi_{Q_j}(x) |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^q \mu(x)dx \\
&\lesssim \sum_j \sum_k \int_{Q_k} \chi_{Q_j}(x) |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^q \mu(x)dx \\
&\lesssim \sum_j \sum_{\{k: Q_k \bigcap Q_j \neq \varnothing\}} \int_{Q_k \bigcap Q_j} \chi_{Q_j \bigcap Q_k}(x) |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^q \mu(x)dx \\
&\lesssim \sum_j \int_{Q_j} \left(\sum_{\{k: Q_k \bigcap Q_j \neq \varnothing\}} \chi_{Q_k}(x) \right) |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^q \mu(x)dx
\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_j \int_{\widetilde{Q}_j} |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})|^q \mu(x)dx, \tag{4.2.6}$$

donde, en el último paso, se ha usado la Proposición 5. Así, será suficiente probar que, para cada j, I_α es un operador acotado de $L^p(\widetilde{Q}_j,\nu)$ a $L^q(\widetilde{Q}_j,\mu)$ con constante independiente de j, considerando cada $\widetilde{Q}_j$, con la métrica uniforme d y la medida de Lebesgue restringida a $\widetilde{Q}_j$ como un espacio de tipo homogéneo. Para ello utilizaremos el Teorema 4.1.10 (item (4.1.11)). De manera similar a lo hecho para el Teorema 1.2.32, donde se prueba 1.2.36, se puede verificar que las hipótesis aseguran que μ y σ están en $A_\infty(\widetilde{Q}_j)$ y que el par de pesos (μ,ν) está en la clase $A^\alpha_{p,q}(\widetilde{Q}_j)$ con constante independiente de j (ver (1.2.42) y (1.2.43)). En consecuencia, por Teorema 4.1.10, resulta que I_α es un operador acotado de $L^p(\widetilde{Q}_j,\nu)$ a $L^q(\widetilde{Q}_j,\mu)$ con constante independiente de j. Así 4.2.6 nos lleva a

$$\begin{aligned}
\|(I_\alpha)_0(f)\|^q_{L^q(\mu)} &\lesssim \sum_j \int_{\widetilde{Q}_j} |f\chi_{\widetilde{Q}_j}(x)|^p\nu(x)dx \\
&\lesssim \sum_j \int_{\widetilde{Q}_j} |f(x)|^p\nu(x)dx \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_j \chi_{\widetilde{Q}_j}\right) |f(x)|^p\nu(x)dx \\
&\lesssim \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n,\nu dx)},
\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, se ha usado la propiedad de solapamiento controlado de la colección de bolas críticas $\{Q_j\}$ dada en la Proposición 5. Esto completa la prueba de (4.2.1) para f acotada y de soporte compacto.

Veamos (4.2.2).

Dado que ya hemos probado que $(\mathcal{I}_\alpha)_{glob}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$, solo resta probar dicha acotación para $(\mathcal{I}_\alpha)_{loc}$. Nuevamente consideremos el cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ por bolas críticas $\{Q_j\}$ dado en la Proposición 5. Para cada j, sea $I_j \doteq \{k : Q_k \bigcap Q_j \neq \emptyset\}$. Sea $a > 0$, luego, de 4.2.5, resulta

$$\begin{aligned}
\{x\in\mathbb{R}^n : |(\mathcal{I}_\alpha)_{loc}| > a\} &\subset \{x\in\mathbb{R}^n : (I_\alpha)_0(f)(x) > \frac{a}{C}\} \\
&\subset \bigcup_j \{x\in Q_j : \sum_k \chi_{Q_k}(x)|I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x)| > \frac{a}{C}\} \\
&\subset \bigcup_j \bigcup_{k\in I_j} \{x\in Q_j\cap Q_k : |I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x)| > \frac{a}{CM}\} \\
&\subset \bigcup_k \{x\in Q_k : I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_k})(x)| > \frac{a}{CM}\},
\end{aligned}$$

donde M es tal que $\sum_j \chi_{Q_j} \leq M$. Luego,

$$\mu\left(\{x\in\mathbb{R}^n : |(\mathcal{I}_\alpha)_{loc}| > a\}\right) \leq \sum_k \mu\left(\left\{x\in Q_k : I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_k})| > \frac{a}{CM}\right\}\right)$$

$$\leq \sum_k \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_k : I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_k})| > \frac{a}{CM}\right\}\right). \tag{4.2.7}$$

Por lo tanto, bastará con probar que, para cada k, I_α es un operador acotado de $L^p(\widetilde{Q}_k,\nu)$ a $L^{q,\infty}(\widetilde{Q}_k,\mu)$ con constante independiente de k. Nuevamente las hipótesis aseguran que μ es un peso en la clase $A_\infty(\widetilde{Q}_k)$ y el par de pesos (μ,ν) está en la clase $A^\alpha_{p,q}(\widetilde{Q}_k)$ con constante independiente de k (ver (1.2.42) y (1.2.43), Teorema 1.2.32) y, por lo tanto, por Teorema 4.1.10 (item (4.1.12)), usando el hecho que $q \geq p$ y la Proposición 5 resulta

$$\begin{aligned}
a^q\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |(\mathcal{I}_\alpha)_{loc}| > a\}\right) &\leq (CM)^q \sum_k \left(\frac{a}{CM}\right)^q \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_k : I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_k})| > \frac{a}{CM}\right\}\right)\\
&\leq C\sum_k \left(\int_{\widetilde{Q}_k} |f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\leq C\left(\sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \left(\chi_{\widetilde{Q}_k}(y)\right)|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_k \chi_{\widetilde{Q}_k}(y)\right)|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba de (4.2.2) para f acotada y de soporte compacto.

□

4.3. Desigualdades con dos pesos para $\mathcal{I}_{\alpha,b}$

4.3.1. Preliminares

En el Capítulo 2, sección 2.2.2, hemos definido el espacio $BMO_\infty(\rho)$. Observemos que una función en este espacio tiene, en particular, oscilación media acotada sobre bolas sub-críticas, esto es bolas $Q(x,r)$ con $r \leq \rho(x)$. Denotaremos por $BMO_{loc}(\rho)$ al conjunto de funciones con esta propiedad.

En [7], Bongioanni, Harboure y Salinas demuestran la siguiente propiedad relativa a $BMO_{loc}(\rho)$.

Proposición 4.3.1. *[7] Para cualquier constante $C > 0$, $BMO_{loc}(\rho) = BMO_{loc}(C\rho)$ y las normas son equivalentes con constante dependiente de C.*

Para la demostración del Teorema 2.2.53 nos serán útiles los siguientes resultados.

Lema 4.3.2. *[7] Sean $b \in BMO_\theta(\rho)$ para algún $\theta \geq 0$, μ un peso que verifica una desigualdad de Hölder inversa para bolas subcríticas, esto es existe $\delta > 1$ tal que*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \mu^\delta\right)^{\frac{1}{\delta}} \lesssim \frac{1}{|Q|}\int_Q \mu,$$

para toda bola Q subcrítica. Luego, para cualesquiera $q, \xi > 0$, existe una constante $H > 0$ tal que

$$\int_B \mu(x)\left(\int_{\lambda B}|b(x)-b(y)|^\xi dy\right)^{\frac{q}{\xi}} dx \lesssim \lambda^H \|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}|B|^{\frac{q}{\xi}}\mu(B)$$

para toda bola subcrítica B y todo $\lambda \geq 1$.

En el Capítulo 1 hemos presentado algunas estimaciones satisfechas por $k_t(x,y)$ (núcleo del operador del calor $e^{-t\mathcal{L}}$). Ahora también necesitaremos una estimación para el núcleo

$$q_t(x,y) = k_t(x,y) - \widetilde{k}_t(x,y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, donde $\widetilde{k}_t(x,y)$ es el núcleo del operador cásico del calor $e^{-t\Delta}$. Esta estimación ha sido probada por J. Dziubański y J. Zienkiewicz en [19]. Antes de enunciarla es necesaria la siguiente definición.

Definición 4.3.3. Una función ϱ tiene decrecimiento rápido si, para todo $N > 0$, existe una constante C_N tal que

$$|\varrho(x)| \leq C_N\,(1+|x|)^{-N}$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Si ϱ es una función real en $\mathbb{R}^n$ y $t > 0$, definimos

$$\varrho_t(x) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\varrho\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Lema 4.3.4. *([19]) Existe una función de decrecimiento rápido $\varrho \geq 0$, tal que*

$$|q_t(x,y)| \leq C\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{2-\frac{n}{q_0}} \varrho_t(x-y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, donde q_0 es tal que $V \in RH_{q_0}$.

Wenming Li, Xuefang Yan y Xiauwu Yu en [41] derivan, en el contexto de espacios de tipo homogéneo, desigualdades con dos pesos para conmutadores de operadores de tipo potencial, los cuales incluyen a I_α. Las condiciones requeridas sobre los pesos involucran "Orlicz- bump". Los operadores considerados son integrales potenciales T_K en espacios de tipo homogéneo (X, d, μ) definidos por,

$$T_K f(x) = \int_X K(x,y) f(y)\,d\mu(y),$$

donde el núcleo $K(x,y)$ es una función medible, no negativa, definida para $x \neq y$. Asociado con T_K se define un funcional ϕ, sobre bolas $B \subset X$ de la siguiente manera

$$\phi(B) = \sup_{\substack{x,y \in B \\ d(x,y) \geq cr(B)}} K(x,y),$$

donde c es una constante geométrica suficientemente pequeña (ver [35]). En este trabajo, asumen que existe una constante C_ϕ tal que

(a) El funcional ϕ es duplicante, esto es

$$\phi(2B) \leq C_\phi \phi(B) \tag{4.3.5}$$

para todas las bolas $B \subset X$.

(b) Existe $\epsilon > 0$ tal que, dada una bola B_0,

$$\phi(B)\mu(B) \leq C_\phi \left(\frac{r(B)}{r(B_0)}\right)^\epsilon \phi(B_0)\mu(B_0)$$

para todas las bolas $B \subset B_0$.

Para nuestro interés, $T_K = I_\alpha$, la integral fraccionaria clásica, cuyo núcleo es $K(x,y) = \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}$. Luego tenemos, $\phi(B) = |B|^{\frac{\alpha}{n}-1}$, que trivialmente verifica las condiciones (a) y (b) citadas arriba.

Así el resultado de [41] (Teorema 2.3) se puede enunciar de la siguiente manera.

Teorema 4.3.6. *[41] Sean $1 < p \leq q < \infty$, $n \geq 0$ un entero, $\Psi_n, \widetilde{\Psi}_n, \Theta_n$ y $\widetilde{\Theta}_n$ funciones de Young tales que*

$$\Theta_n \in B_p,\ \widetilde{\Theta}_n \in B_{q'},\ \Theta_n^{-1}(t)\Psi_n^{-1}(t) \leq \Phi_n^{-1}(t),\ \ \widetilde{\Theta}_n^{-1}(t)\widetilde{\Psi}_n^{-1}(t) \leq \Phi_n^{-1}(t),$$

donde $\Phi_n(t) = t\log(e+t)^n$. Sea T_K un operador potencial, ϕ el funcional asociado a T_K definido en (4.3.5) y $b \in BMO$. Si el par de pesos, (u,v) es tal que

$$\phi(B)\mu(B)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}}\|u\|_{\widetilde{\Psi}_n,B}\|v^{-1}\|_{\Psi_n,B} \leq C,$$

para toda bola $B \subset X$, entonces el conmutador $T_K^{b,n}$ satisface la siguiente desigualdad fuerte (p,q)

$$\left(\int_X |T_K^{b,n}f(x)|^q u(x)^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_X |f(x)|^p v(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

4.3.2. El Teorema 2.2.53 revisitado

Recordemos el enunciado del Teorema 2.2.53.

Teorema 2.2.53 Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p \leq q < \infty$ y $b \in BMO_\theta(\rho)$, para algún $\theta \geq 0$. Si el par de pesos (μ, ν) esta en la clase $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ y además $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$ y $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty^{\rho,\infty}$ entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b} f(x)|^q \mu(x)\right)^{1/q} \leq \|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x)\right)^{1/p}$$

para toda f en $L^p(\mathbb{R}^n, \nu)$.

Demostración. Asumimos que, sin pérdida de generalidad, f es acotada y de soporte compacto. Como en la prueba del Teorema 2.2.8, sección 4.2, descomponemos el operador $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ como suma de los operadores local y global, esto es

$$\mathcal{I}_{\alpha,b} f = (\mathcal{I}_{\alpha,b})_{loc} f + (\mathcal{I}_{\alpha,b})_{glob} f$$

Luego, otra vez, será suficiente probar que, bajo las hipótesis dadas, cada uno de estos últimos operadores verifican los correspondientes resultados de acotación.

Veamos que $(\mathcal{I}_{\alpha,b})_{glob} : L^p(\mathbb{R}^n, \nu dx) \to L^q(\mathbb{R}^n, \mu dx)$. En efecto, siguiendo un razonamiento análogo al usado en el operador $(\mathcal{I}_\alpha)_{glob}$ (Teorema 2.2.8, sección 4.2) para obtener la desigualdad 4.2.3, se puede probar

$$|(\mathcal{I}_{\alpha,b})_{glob} f(x)| \lesssim \sum_k \rho(x)^{-n+\alpha} 2^{-kM} \int_{2^k Q_x} |f(y)||b(y) - b(x)| dy.$$

donde $M > 0$ es arbitraria.

Sea nuevamente $\{Q_j\}$ el cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ dado por la Proposición 5 y $\beta \geq 1$ la constante de la Proposición 6, tal que si $\widetilde{Q}_j \doteq \beta Q_j$, resulta

$$\bigcup_{x \in Q_j} Q_x \subseteq \widetilde{Q}_j.$$

Denotemos por $\widetilde{Q}_j^k = 2^k \widetilde{Q}_j$. Luego $2^k Q_x \subset \widetilde{Q}_j^k$ y, por lo tanto, en virtud de 4, se tiene $\rho(x) \cong \rho(x_j)$ para toda $x \in Q_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{I}_{\alpha,b})_{glob} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,\mu dx)} \\
&\quad \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_k \rho(x)^{-n+\alpha} 2^{-kM} \int_{2^k Q_x} |f(y)||b(y) - b(x)| dy\right)^q \mu(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \lesssim \sum_k \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)^{(\alpha-n)q} 2^{-kMq} \left(\int_{2^k Q_x} |f(y)||b(y) - b(x)| dy\right)^q \mu(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \lesssim \sum_k 2^{-kM} \left(\sum_j \int_{Q_j} \rho(x_j)^{(\alpha-n)q} \left(\int_{\widetilde{Q}_j^k} |f(y)||b(y) - b(x)| dy\right)^q \mu(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_k 2^{-kM}\left(\sum_j \rho(x_j)^{\alpha q}\int_{Q_j}\left(\frac{1}{\rho(x_j)^n}\int_{\widetilde{Q}_j^k}|f(y)||b(y)-b(x)|dy\right)^q \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.3.7}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\widetilde{Q}_j^k = Q(x_j, 2^k\beta\rho(x_j))$ y aplicando Hölder con ζ,γ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\gamma}=1$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_j}\left(\frac{1}{\rho(x_j)^n}\int_{\widetilde{Q}_j^k}|f(y)||b(y)-b(x)|dy\right)^q \mu(x)dx\\
&= (2\beta)^{nq}2^{knq}\int_{Q_j}\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j^k|}\int_{\widetilde{Q}_j^k}|f(y)||b(y)-b(x)|dy\right)^q \mu(x)dx\\
&= C2^{knq}\int_{Q_j}\frac{1}{|\widetilde{Q}_j^k|^q}\left(\int_{\widetilde{Q}_j^k}|f(y)|\nu^{\frac{1}{p}}(y)|b(y)-b(x)|\nu^{-\frac{1}{p}}(y)dy\right)^q \mu(x)dx\\
&\lesssim \frac{2^{knq}}{|\widetilde{Q}_j^k|^q}\left(\int_{\widetilde{Q}_j^k}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{\widetilde{Q}_j^k}\nu^{-\frac{\gamma}{p}}(y)dy\right)^{\frac{q}{\gamma}}\int_{Q_j}\mu(x)\left(\int_{\widetilde{Q}_j^k}|b(y)-b(x)|^\zeta dy\right)^{\frac{q}{\zeta}}dx.
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Por Lema 4.3.2, resulta que existe una constante $H>0$ tal que

$$\int_{Q_j}\mu(x)\left(\int_{\widetilde{Q}_j^k}|b(y)-b(x)|^\zeta dy\right)^{\frac{q}{\zeta}}dx \le (2^k\beta)^H\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\mu(Q_j)|Q_j|^{\frac{q}{\zeta}}.$$

Además, por hipótesis, $\sigma\in A_\infty^{\rho,\infty}$ y, por lo tanto, por Lema 1.2.20, σ verifica una desigualdad de Hölder inversa, esto es existen constantes $C,\delta,\xi>0$ tales que para toda bola $Q(x,r)$ en $\mathbb{R}^n$ se satisface

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \nu^{-\frac{1}{p-1}(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \le C\frac{1}{|Q|}\int_Q \nu^{-\frac{1}{p-1}}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^\xi.$$

Así podemos escribir

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \nu^{-\frac{1+\delta}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{1+\delta}} \le C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \nu^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\xi(p-1)}.$$

Eligiendo $\gamma>0$ tal que $\frac{\gamma}{p}=\frac{1+\delta}{p-1}$, la desigualdad anterior para la bola $Q=\widetilde{Q}_j^k$ se convierte en

$$\left(\frac{\nu^{-\frac{\gamma}{p}}(\widetilde{Q}_j^k)}{|\widetilde{Q}_j^k|}\right)^{\frac{p}{\gamma}} \le C\left(\frac{\nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}_j^k)}{|\widetilde{Q}_j^k|}\right)^{p-1}(2^k\beta)^{\xi(p-1)}.$$

Recolectando estas estimaciones y aplicándolas en (4.3.8) podemos escribir

$$\int_{Q_j}\left(\frac{1}{\rho(x_j)^n}\int_{\widetilde{Q}_j^k}|f(y)||b(y)-b(x)|dy\right)^q \mu(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\frac{2^{knq}}{|\widetilde{Q}^k_j|^{q-\frac{q}{\zeta}}}(2^k\beta)^H\mu(Q_j)\|f\|^q_{L^p(\widetilde{Q}^k_j,\nu)}\nu^{-\frac{\gamma}{p}}(\widetilde{Q}^k_j)^{\frac{q}{\gamma}}\\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\frac{2^{knq+kH}}{|\widetilde{Q}^k_j|^{(1-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\zeta})q}}\left(\mu(\widetilde{Q}^k_j)^{\frac{p}{q}}\left(\frac{\nu^{-\gamma/p}(\widetilde{Q}^k_j)}{|\widetilde{Q}^k_j|}\right)^{\frac{p}{\gamma}}\right)^{\frac{q}{p}}\|f\|^q_{L^p(\widetilde{Q}^k_j,\nu)}\\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\frac{2^{knq+k\xi(q-\frac{q}{p})+kH}}{|\widetilde{Q}^k_j|^{\frac{q}{p}}}\left(\mu(\widetilde{Q}^k_j)^{\frac{p}{q}}\left(\frac{\nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}^k_j)}{|\widetilde{Q}^k_j|}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}\|f\|^q_{L^p(\widetilde{Q}^k_j,\nu)}\\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\frac{2^{k(nq+\xi(q-\frac{q}{p})+H)}}{|\widetilde{Q}^k_j|^{\frac{q}{p}+q-\frac{q}{p}}}\left(\mu(\widetilde{Q}^k_j)^{\frac{p}{q}}\left(\nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}^k_j)\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}\|f\|^q_{L^p(\widetilde{Q}^k_j,\nu)}.
\end{aligned}
$$

Dado que $(\mu,\nu)\in A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}$, resulta

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_j}\left(\frac{1}{\rho(x_j)^n}\int_{\widetilde{Q}^k_j}|f(y)||b(y)-b(x)|dy\right)^q\mu(x)dx\\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\frac{2^{k(nq+\xi(q-\frac{q}{p})+H+\theta\frac{q}{p})}}{|\widetilde{Q}^k_j|^{q-(1-\frac{\alpha}{n})q}}\|f\|^q_{L^p(\widetilde{Q}^k_j,\nu)}\\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}2^{k(nq+\xi(q-\frac{q}{p})+H+\theta\frac{q}{p}-\alpha q)}\rho(x_j)^{-\alpha q}\|f\|^q_{L^p(\widetilde{Q}^k_j,\nu)}.
\end{aligned}
$$

para algún $\theta\geq 0$. Consecuentemente, de la estimación anterior y del hecho que $q\geq p$, (4.3.7) se convierte en

$$
\begin{aligned}
&\|(\mathcal{I}_{\alpha,b})_{glob}f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,\mu)}\\
&\quad\lesssim\sum_k 2^{-kM}\left(\sum_j\rho(x_j)^{\alpha q}\int_{Q_j}\left(\frac{1}{\rho(x_j)^n}\int_{\widetilde{Q}^k_j}|f(y)||b(y)-b(x)|dy\right)^q\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\lesssim\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\sum_k 2^{-k(M-nq-\xi(q-\frac{q}{p})-H-\theta\frac{q}{p}+\alpha q)}\left(\sum_j\rho(x_j)^{\alpha q-\alpha q}\|f\|^q_{L^p(\widetilde{Q}^k_j,\nu)}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\lesssim\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\sum_k 2^{-k(M-nq-\xi(q-\frac{q}{p})-H-\theta\frac{q}{p}+\alpha q)}\left(\sum_j\left(\int_{\widetilde{Q}^k_j}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\lesssim\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\sum_k 2^{-k(M-nq-\xi(q-\frac{q}{p})-H-\theta\frac{q}{p}+\alpha q)}\left(\sum_j\int_{\widetilde{Q}^k_j}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\lesssim\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\sum_k 2^{-k(M-nq-\xi(q-\frac{q}{p})-H-\theta\frac{q}{p}+\alpha q)}\left(\sum_j\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\widetilde{Q}^k_j}(y)|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\lesssim\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}\sum_k 2^{-k(M-nq-\xi(q-\frac{q}{p})-H-\theta\frac{q}{p}+\alpha q+N_1)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

Finalmente, dado que $M>0$ es arbitario, eligiendo $M > nq+\xi(q-\frac{q}{p})+H+\theta\frac{q}{p}-\alpha q-N_1$ se obtiene el resultado deseado.

Ahora verifiquemos que $(\mathcal{I}_{\alpha,b})_{loc} : L^p(\mathbb{R}^n,\nu dx) \to L^q(\mathbb{R}^n,\mu dx)$. En efecto, dado que $|\,(I_{\alpha,b})_{loc}f| < \infty$ (f es acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$), podemos escribir

$$\begin{array}{rcccc} |\,(\mathcal{I}_{\alpha,b})_{loc}f| &=& |\,\big((\mathcal{I}_{\alpha,b})_{loc}-(I_{\alpha,b})_{loc}\big)f| &+& |\,(I_{\alpha,b})_{loc}f|. \\ &\doteq& I_1 &+& I_2. \end{array}$$

En primer lugar estimaremos I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= |\mathcal{I}_{\alpha,b}(f\chi_{Q_x})(x)-I_{\alpha,b}(f\chi_{Q_x})(x)| \\ &\le \int_{Q_x}|f(y)||b(y)-b(x)|\int_0^\infty \left|k_t(x,y)-\widetilde{k}_t(x,y)\right| t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}dy \\ &= \int_{Q_x}|f(y)||b(y)-b(x)|\int_0^\infty |q_t(x,y)|t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}dy. \end{aligned}$$

Por Lema 4.3.4, existe una función con decrecimiento rápido $\varrho\ge 0$ tal que

$$|q_t(x,y)| \le C\left(\frac{\sqrt{t}}{\rho(x)}\right)^{2-\frac{n}{q_0}}\varrho_t(x-y)$$

para toda $t>0$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, donde q_0 es tal que $V\in RHq_0$ y $\varrho_t(x)=\frac{1}{t^{n/2}}\varrho\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. Además, por ser ϱ una función con decrecimiento rápido, para cada $N>0$ existe una constante C_N, tal que

$$\varrho_t(x-y) \le C_N\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\left(1+\frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^{-N}.$$

Luego, de estas estimaciones, resulta

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty |q_t(x,y)|t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t} \\ &\qquad \le C_N\frac{|x-y|^{-N}}{\rho(x)^{2-\frac{n}{q_0}}}\int_0^{\rho(x)^2} t^{1-\frac{n}{2q_0}-\frac{n}{2}+\frac{N}{2}+\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t} + \frac{C_N}{\rho(x)^{2-\frac{n}{q_0}}}\int_{\rho(x)^2}^\infty t^{1-\frac{n}{2q_0}-\frac{n}{2}+\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Dado que $V\in RHq_0$, con $q_0\ge\frac{n}{2}$, podemos suponer que $q_0\approx\frac{n}{2}$, y así la segunda integral es convergente. Por otro lado, la primer integral converge eligiendo $N>0$ tal que $\frac{N}{2} > -1+\frac{n}{2q_0}+\frac{n-\alpha}{2}$, es decir $N=-2+\frac{n}{q_0}+n-\alpha+\epsilon$, con $\epsilon>0$ a determinar, teniendo en cuenta, además, que para $y\in Q_x$, $|x-y|\le\sqrt{n}\rho(x)$, obtenemos

$$\int_0^\infty |q_t(x,y)|t^{\frac{\alpha}{2}}\frac{dt}{t} \lesssim \rho(x)^{\alpha-n}\left(\frac{\rho(x)}{|x-y|}\right)^N.$$

En consecuencia, obtenemos la siguiente acotación para I_1

$$I_1 \lesssim \int_{Q_x}|f(y)||b(y)-b(x)|\frac{\rho(x)^{\alpha-n+N}}{|x-y|^N}\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q(x,2^{-k}\rho(x))\setminus Q(x,2^{-(k+1)}\rho(x))} |f(y)||b(y)-b(x)| \frac{\rho(x)^{\alpha-n+N}}{|x-y|^N} dy \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(2-\frac{n}{q_0}-n+\alpha-\epsilon)} \rho(x)^{\alpha-n} \int_{Q(x,2^{-k}\rho(x))} |f(y)||b(y)-b(x)|dy \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(2-\frac{n}{q_0}-\epsilon)} 2^{k(n-\alpha)} \rho(x)^{\alpha-n} \int_{Q(x,2^{-k}\rho(x))} |f(y)||b(y)-b(x)|dy \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(2-\frac{n}{q_0}-\epsilon)} h_k(x),
\end{aligned}
$$

donde $h_k(x) = 2^{k(n-\alpha)}\rho(x)^{\alpha-n}\int_{Q(x,2^{-k}\rho(x))}|f(y)||b(y)-b(x)|dy$. Luego,

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |\left((\mathcal{I}_{\alpha,b})_{loc} - (I_{\alpha,b})_{loc}\right) f(x)|^q \mu(x)dx \lesssim \sum_k 2^{-k(2-\frac{n}{q_0}-\epsilon)} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)^q \mu(x)dx \quad . \tag{4.3.9}
$$

Nuevamente consideremos el cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ por bolas críticas $\{Q_j\}$ dado en la Proposición 5. Aplicando descomposición diádica, es claro, para cada j,k, existen 2^{nk} bolas de radio $2^{-k}\rho(x_j)$, $Q_l^{j,k} = Q(x_l^{j,k}, 2^{-k}\rho(x_j))$, tales que $Q_j \subset \bigcup_{l=1}^{2^{nk}} Q_l^{j,k} \subset 2Q_j$, salvo un conjunto de medida nula, y $\sum_{l=1}^{2^{nk}} \chi_{Q_l^{j,k}} \leq 2^n$. Más aún, esta construcción puede hacerse de manera tal que, para cada k, la familia de una dilatación fija $\{\widetilde{Q}_l^{j,k}\}_{j,l}$ sea un cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ y

$$
\sum_j \sum_{l=1}^{2^{nk}} \chi_{\widetilde{Q}_l^{j,k}} \leq C,
$$

donde C es una constante independiente de k. Para nuestro propósito tomamos una dilatación $\widetilde{Q}_l^{j,k} = C(C_0, N_0, N)Q_l^{j,k}$, tal que

$$
\bigcup_{x\in Q_l^{j,k}} 2^{-k}Q_x \subset \widetilde{Q}_l^{j,k}
$$

Veamos que existe una dilatación así. Sea $x \in Q_l^{j,k}$ y sea $z \in 2^{-k}Q_x$, luego

$$
\begin{aligned}
d(z, x_l^{j,k}) &\leq d(z,x) + d(x, x_l^{j,k}) \\
&\leq 2^{-k}\rho(x) + 2^{-k}\rho(x_j) \\
&\leq C(C_0, N_0, n)2^{-k}\rho(x_j),
\end{aligned}
$$

donde, en la última desigualdad, hemos usado que $x, x_j \in 2Q_j$ y por lo tanto $\rho(x) \cong \rho(x_j)$ (Proposición 4). Así, para cada k,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)^q\mu(x)dx &\leq \sum_j \int_{Q_j} h_k(x)^q \mu(x)dx \\
&\leq \sum_j \sum_{l=1}^{2^{nk}} \int_{Q_l^{j,k}} h_k(x)^q\mu(x)dx.
\end{aligned}
$$

A continuación, estimaremos $\int_{Q_l^{j,k}} h_k(x)\mu(x)dx$.

Teniendo en cuenta que para cada $x \in Q_l^{j,k}$, $2^{-k}Q_x \subset \widetilde{Q}_l^{j,k}$, aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{p}+\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\gamma}=1$ con ζ y γ a determinar, resulta

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_l^{j,k}} h_k(x)^q \mu(x)dx \\
&\quad \le \int_{Q_l^{j,k}} 2^{k(n-\alpha)q}\rho(x)^{(\alpha-n)q}\left(\int_{2^{-k}Q_x}|f(y)||b(y)-b(x)|dy\right)^q \mu(x)dx \\
&\quad \le C\int_{Q_l^{j,k}} 2^{k(n-\alpha)q}\rho(x_j)^{(\alpha-n)q}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|f(y)||b(y)-b(x)|dy\right)^q \mu(x)dx \\
&\quad \le C2^{k(n-\alpha)q}\rho(x_j)^{(\alpha-n)q}\int_{Q_l^{j,k}}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|f(y)|\nu^{\frac{1}{p}}(y)\nu^{-\frac{1}{p}}(y)|b(y)-b(x)|dy\right)^q \mu(x)dx \\
&\quad \le C2^{k(n-\alpha)q}\rho(x_j)^{(\alpha-n)q}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}\nu^{-\frac{\gamma}{p}}(y)dy\right)^{\frac{q}{\gamma}} \\
&\quad \int_{Q_l^{j,k}}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|b(y)-b(x)|^{\zeta}dy\right)^{\frac{q}{\zeta}}\mu(x)dx.
\end{aligned}$$

Como en la estimación de $(\mathcal{I}_{\alpha,b})_{glob}$, para el factor relacionado con la función símbolo b usamos Lema 4.3.2 y para el asociado al peso $\sigma=\nu^{-\frac{1}{p-1}}$ la desigualdad de Hölder inversa. Así, con $\gamma=\frac{p}{p-1}(1+\delta)$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_l^{j,k}} h_k(x)^q \mu(x)dx \\
&\quad \le C(C_0,N_0,n)^H 2^{k(n-\alpha)q}\rho(x_j)^{(\alpha-n)q}[b]_\theta^q\,|Q_l^{j,k}|^{\frac{q}{\zeta}+\frac{q}{\gamma}-(p-1)\frac{q}{p}}\mu(Q_l^{j,k})\,\nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}_j^{j,k})^{(p-1)\frac{q}{p}} \\
&\quad \left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Dado que $(\mu,\nu)\in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ tenemos

$$\mu(\widetilde{Q}_l^{j,k})\nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}_l^{j,k})^{(p-1)\frac{q}{p}} \le C|\widetilde{Q}_l^{j,k}|^{(1-\frac{\alpha}{n})q}.$$

Así podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_l^{j,k}} h_k(x)^q \mu(x)dx \\
&\quad \le C2^{k(n-\alpha)q}\,\rho(x_j)^{(\alpha-n)q}\,\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}^q\,|Q_l^{j,k}|^{\frac{q}{\zeta}+\frac{q}{\gamma}-(p-1)\frac{q}{p}+(1-\frac{\alpha}{n})q}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C 2^{k(n-\alpha)q}\,\rho(x_j)^{(\alpha-n)q}\,\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\,|Q_l^{j,k}|^{\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{p-1}{p}+1-\frac{\alpha}{n}\right)q}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\leq C 2^{k(n-\alpha)q}\,\rho(x_j)^{(\alpha-n)q}\,\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\,|Q_l^{j,k}|^{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)q}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta la estimación anterior, el hecho que $q \geq p$ y el solapamiento controlado de los $\{\widetilde{Q}_l^{j,k}\}$, resulta

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)^q\mu(x)dx &\leq \sum_j\sum_{l=1}^{2^{nk}}\int_{Q_l^{j,k}} h_k(x)^q\mu(x)dx\\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\sum_j\sum_{l=1}^{2^{nk}}\left(\int_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\left(\sum_j\sum_{l=1}^{2^{nk}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\widetilde{Q}_l^{j,k}}(y)|f(y)|^p\nu(y)dy\right)\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}
$$

Luego, combinando esto con 4.3.9, se sigue

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}|\left((\mathcal{I}_{\alpha,b})_{loc}-(I_{\alpha,b}))_{loc}\right)f(x)|^q\mu(x)dx\\
&\qquad\lesssim \sum_k 2^{-k(2-\frac{n}{q_0}-\epsilon)}\int_{\mathbb{R}^n}h_k(x)^q\mu(x)dx\\
&\qquad\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\sum_k 2^{-k(2-\frac{n}{q_0}-\epsilon)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, eligiendo ϵ tal que $2-\frac{n}{q_0}-\epsilon>0$, se obtiene que $I_1 : L^p(\mu)\to L^q(\nu)$.

Resta probar que $(I_{\alpha,b})_{loc}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$. Para ello, una vez más, tomamos el cubrimiento de $\{Q_j\}$ dado en la Proposición 5. Luego, aplicando la Proposición 6, con $\widetilde{Q}_j=\beta Q_j$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left\|(I_{\alpha,b})_{loc}f\right\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n,\mu)}\\
&\qquad\leq \sum_j\int_{Q_j}|(I_{\alpha,b})_{loc}f(x)|^q\mu(x)dx
\end{aligned}
$$

$$\leq \sum_j \int_{Q_j} |(I_{\alpha,b})_{loc}f(x) - I_{\alpha,b}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^q \mu(x)dx + \sum_j \int_{Q_j} |I_{\alpha,b}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^q \mu(x)dx$$
$$= \sum_j \int_{Q_j} I_2^j(x)^q\, \mu(x)\, dx + \sum_j \int_{\widetilde{Q}_j} I_{\alpha,b}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^q \mu(x)\, dx, \tag{4.3.10}$$

donde, para cada j, $I_2^j(x) = |(I_{\alpha,b})_{loc}f(x) - I_{\alpha,b}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|$. Consideremos, para cada j, el espacio de tipo homogéneo $(\widetilde{Q}_j, d, dx/\widetilde{Q}_j)$, donde como antes, d representa la métrica uniforme y $dx/\widetilde{Q}_j$ la medida de Lebesgue restringida a $\widetilde{Q}_j$. Probaremos que el conmutador de la integral fraccionaria clásica, $I_{\alpha,b}$, es acotado de $L^p(\widetilde{Q}_j, \nu)$ en $L^q(\widetilde{Q}_j, \mu)$, con constante independiente de j. Para ello utilizaremos el Teorema 4.3.6. Veamos que se verifican sus hipótesis. Aquí sabemos que, $b \in BMO_\theta(\rho)$, $\theta \geq 0$, en consecuencia $b \in BMO(\widetilde{Q}_j)$ con constante independiente de j. Denotemos por $u = \mu^{\frac{1}{q}}$ y $v = \nu^{\frac{1}{p}}$. Debemos encontrar funciones de Young $\Psi, \widetilde{\Psi}, \Theta$ y $\widetilde{\Theta}$ que verifiquen las condiciones del Teorema 4.3.6.

Definamos,

$$\widetilde{\Psi}(t) = t^{q_\delta},\ \Psi(t) = t^{p'_\epsilon}$$

donde $q_\delta = q(1+\delta)$, $p'_\epsilon = p'(1+\epsilon)$ con $\delta, \epsilon > 0$ las constantes de la desigualdad de Hölder inversa para μ, σ (por hipótesis $\mu, \sigma \in A_\infty^{\rho,loc}$, por lo tanto siguiendo los argumentos de (1.2.42), Teorema 1.2.32, resulta que $\mu, \sigma \in A_\infty(\widetilde{Q}_j)$, para todo j).

$$\widetilde{\Theta}(t) = \begin{cases} (t\log(e+t))^{q'_\delta}; & t \leq 1 \\ \log(e+1)^{q'_\delta} t^{q^*}; & t > 1 \end{cases}$$

con $q'_\delta < q^* < q'$.

$$\Theta(t) = \begin{cases} (t\log(e+t))^{p'_\epsilon}; & t \leq 1 \\ \log(e+1)^{p'_\epsilon} t^{p^*}; & t > 1 \end{cases}$$

con $p'_\epsilon < p^* < p$. Claramente, de la definición de $\Psi, \widetilde{\Psi}, \Theta$ y $\widetilde{\Theta}$ resulta $\Theta \in B_p$, $\widetilde{\Theta} \in B_{q'}$, $\Theta^{-1}(t)\Psi^{-1}(t) \leq \frac{t}{\log(e+t)}$ y $\widetilde{\Theta}^{-1}(t)\widetilde{\Psi}^{-1}(t) \leq \frac{t}{\log(e+t)}$. Sea Q una bola en el espacio de tipo homogéneo $\widetilde{Q}_j$, luego

$$\begin{aligned} |Q|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}-1+\frac{\alpha}{n}} \|u\|_{\widetilde{\Psi},Q} \|v^{-1}\|_{\Psi,Q} &\leq C|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}} \left(\frac{\mu(Q)}{|Q|}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{\nu^{-\frac{1}{p-1}}(Q)}{|Q|}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} \mu(Q)^{\frac{1}{q}} \nu^{-\frac{1}{p-1}}(Q)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha usado que $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ y por lo tanto $(\mu, \nu) \in A_{p,q}(\widetilde{Q}_j)$ con constante independiente de j (ver (1.2.43), Teorema 1.2.32). Luego, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 4.3.6, donde concluímos que $I_{\alpha,b} : L^p(\widetilde{Q}_j, \nu) \to$

$L^q(\widetilde{Q}_j,\mu)$, con constante independiente de j y por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_j \int_{\widetilde{Q}_j} |I_{\alpha,b}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^q \mu(x)dx &\leq C\sum_j \int_{\widetilde{Q}_j} |f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)|^p \nu(x)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_j \chi_{\widetilde{Q}_j})(x)\right)|f(x)|^p\nu(x)dx \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\nu(x)dx, \qquad (4.3.11)\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado el solapamiento controlado de las bolas $\{\widetilde{Q}_j\}$ (Proposición 5).

A continuación, para cada j, $x \in Q_j$, estimaremos $I_2^j(x)$

$$\begin{aligned}I_2^j(x) &= \left|(I_{\alpha,b})_{loc}f(x) - I_{\alpha,b}(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)\right| \\ &= \left|I_\alpha(bf\chi_{Q_x})(x) - b(x)I_\alpha(f\chi_{Q_x})(x) - I_\alpha(bf\chi_{\widetilde{Q}_j})(x) + b(x)I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_j})(x)\right| \\ &= \left|I_\alpha(-bf\chi_{\widetilde{Q}_j\backslash Q_x})(x) - b(x)I_\alpha(-f\chi_{\widetilde{Q}_j\backslash Q_x})(x)\right| \\ &= \left|I_{\alpha,b}(-f\chi_{\widetilde{Q}_j\backslash Q_x})(x)\right| \\ &\leq \int_{\widetilde{Q}_j\backslash Q_x} |f(y)|\frac{|b(y)-b(x)|}{|x-y|^{n-\alpha}}dy\end{aligned}$$

dado que $y \in \widetilde{Q}_j\backslash Q_x$, $x \in Q_j$ y por lo tanto $\rho(x) \cong \rho(x_j)$ (Proposición 4) resulta,

$$\begin{aligned}I_2^j(x) &\leq C\frac{1}{\rho(x_j)^{n-\alpha}}\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)||b(y)-b(x)|dy \\ &\lesssim \frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)||b(x)-b_{\widetilde{Q}_j}|dy + \frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)||b(y)-b_{\widetilde{Q}_j}|dy.\end{aligned}$$

Luego aplicando en la segunda integral la desigualdad de Hölder con s tal que $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, se obtiene

$$\begin{aligned}I_2^j(x) \lesssim |b(x)-b_{\widetilde{Q}_j}|\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|dy\right) + \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}s}}\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|^s dy\right)^{\frac{1}{s}} \\ \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j}|b(y)-b_{\widetilde{Q}_j}|^{s'}dy\right)^{\frac{1}{s'}}.\end{aligned}$$

Recordemos que, por hipótesis, $b \in BMO_\theta(\rho)$. Así, en virtud de la Proposición 2.2.38, resulta

$$\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j}|b(y)-b_{\widetilde{Q}_j}|^{s'}dy\right)^{\frac{1}{s'}} \leq C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}.$$

Entonces, para toda $x \in Q_j$

$$I_2^j(x) \lesssim |b(x) - b_{\widetilde{Q}_j}| \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|dy \right) + \|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}s}} \int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} &\sum_j \int_{Q_j} \left(I_2^j\right)^q \mu(x)dx \\ &\lesssim \sum_j \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|dy \right)^q \int_{Q_j} |b(x) - b_{\widetilde{Q}_j}|^q \mu(x)dx \\ &\quad + \|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}s}} \int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^s dy \right)^{\frac{q}{s}} \mu(Q_j). \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Dado que $b \in BMO_\theta(\rho)$ y, como ya sabemos, $\mu \in A_\infty^{\rho,loc} = A_\infty^{\beta\rho,loc}$, teniendo en cuenta la Proposición 2.2.38 y la desigualdad de Hölder inversa para μ, es fácil probar que

$$\int_{\widetilde{Q}_j} |b(x) - b_{\widetilde{Q}_j}|^q \mu(x)dx \leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \mu(\widetilde{Q}_j).$$

Por lo tanto el primer término en (4.3.12) se puede acotar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\sum_j \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|dy \right)^q \int_{Q_j} |b(x) - b_{\widetilde{Q}_j}|^q \mu(x)dx \\ &\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|dy \right)^q \mu(\widetilde{Q}_j) \\ &\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{(1-\frac{\alpha}{n})q}} \left(\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|\nu^{\frac{1}{p}}(y)\nu^{-\frac{1}{p}}(y)dy \right)^q \mu(\widetilde{Q}_j) \\ &\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{(1-\frac{\alpha}{n})q}} \left(\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^p \nu(y)dy \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{\widetilde{Q}_j} \nu^{-\frac{p'}{p}}(y)dy \right)^{\frac{q}{p'}} \mu(\widetilde{Q}_j) \\ &\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{(1-\frac{\alpha}{n})p}} \mu(\widetilde{Q}_j)^{\frac{p}{q}} \nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}_j)^{p-1} \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^p \nu(y)dy \right)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta que $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, $q \geq p$ y el solapamiento controlado de las bolas $\{\widetilde{Q}_j\}$, resulta

$$\begin{aligned} &\sum_j \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|dy \right)^q \int_{Q_j} |b(x) - b_{\widetilde{Q}_j}|^q \mu(x)dx \\ &\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \left(\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^p \nu(y)dy \right)^{\frac{q}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\left(\sum_j\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\left(\sum_j\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p\chi_{\widetilde{Q}_j}(y)\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Para el segundo término de 4.3.12 tenemos

$$\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\sum_j\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}s}}\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|^s dy\right)^{\frac{q}{s}}\mu(Q_j)$$

$$\leq \|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\sum_j\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{\left(\frac{1}{s}-\frac{\alpha}{n}\right)q}}\left(\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|^s\nu(y)^{\frac{s}{p}}\nu(y)^{-\frac{s}{p}}dy\right)^{\frac{q}{s}}\mu(\widetilde{Q}_j)$$

$$\leq \|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\sum_j\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{\left(\frac{1}{s}-\frac{\alpha}{n}\right)q}}\left(\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{\widetilde{Q}_j}\nu(y)^{-\frac{s}{p}\left(\frac{p}{s}\right)'}dy\right)^{\frac{q}{s}\frac{1}{\left(\frac{p}{s}\right)'}}\mu(\widetilde{Q}_j),$$

donde en la última desigualdad se ha aplicado la desigualdad de Hölder con el exponente $\frac{p}{s}$, para $s>1$ a elegir. Luego, dado que $\left(\frac{p}{s}\right)'=\frac{p}{p-s}$, obtenemos

$$\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\sum_j\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}s}}\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|^s dy\right)^{\frac{q}{s}}\mu(Q_j)$$

$$\leq \|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\sum_j\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{\left(\frac{1}{s}-\frac{\alpha}{n}\right)q}}\left(\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{\widetilde{Q}_j}\nu(y)^{-\frac{s}{p-s}}dy\right)^{\frac{q}{s}\frac{p-s}{p}}\mu(\widetilde{Q}_j).$$

En virtud de la hipótesis, $\nu^{-\frac{1}{p-1}}\in A_\infty^{\rho,\infty}$, y por lo tanto verifica una desigualdad de Hölder inversa, esto es existen constantes $C,\epsilon,\eta_1>0$ tales que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\nu^{-\frac{1}{p-1}(1+\epsilon)}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}\leq C\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\eta_1}\frac{1}{|Q|}\int_Q\nu^{-\frac{1}{p-1}},$$

para toda bola $Q(x,r)$. Luego, eligiendo s tal que, $\frac{s}{p-s}=\frac{1+\epsilon}{p-1}$, esto es $s=\frac{(1+\epsilon)p}{p+\epsilon}$, se tiene

$$\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\sum_j\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}s}}\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|^s dy\right)^{\frac{q}{s}}\mu(Q_j)$$

$$\leq \|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)}\sum_j\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{\left(\frac{1}{s}-\frac{\alpha}{n}\right)q-\frac{q}{s}\frac{p-s}{p}}}\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j}\nu(y)^{-\frac{s}{p-s}}dy\right)^{\frac{q}{s}\frac{p-s}{p}}$$

$$\mu(\widetilde{Q}_j)\left(\int_{\widetilde{Q}_j}|f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq \|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{\left(\frac{1}{s}-\frac{\alpha}{n}\right)q-\frac{q}{s}\frac{p-s}{p}}} \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j} \nu(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{(p-1)\frac{q}{p}}$$

$$\mu(\widetilde{Q}_j)\left(\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{\left(\frac{1}{s}-\frac{\alpha}{n}\right)q-\frac{q}{s}\frac{p-s}{p}+(p-1)\frac{q}{p}}} \nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}_j)^{(p-1)\frac{q}{p}}$$

$$\mu(\widetilde{Q}_j)\left(\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\frac{q}{p}\left(\frac{p}{s}-\frac{\alpha}{n}p-\frac{p-s}{s}+p-1\right)=q\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)$, la hipótesis $(\mu,\nu)\in A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}$, el hecho que $q\geq p$ y el solapamiento controlado de $\{\widetilde{Q}_j\}$ de $\mathbb{R}^n$, resulta

$$\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{1-\frac{\alpha}{n}s}}\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^s dy\right)^{\frac{q}{s}} \mu(Q_j)$$

$$\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \sum_j \frac{1}{|\widetilde{Q}_j|^{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)q}} \nu^{-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{Q}_j)^{p-1\frac{q}{p}}\mu(\widetilde{Q}_j)$$

$$X\left(\int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \left(\sum_j \int_{\widetilde{Q}_j} |f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Luego

$$\sum_j \int_{Q_j} I_2^j(x)^q\mu(x)dx \leq C\|b\|^q_{BMO_\theta(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\nu(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{4.3.13}$$

Finalmente, de (4.3.10), (4.3.11) y (4.3.13), resulta que $(I_{\alpha,b})_{loc}$ es un operador acotado de $L^p(\mu)$ a $L^q(\nu)$, lo que concluye la prueba. $\square$

Capítulo 5

Condición de tipo "power-bump"

5.1. Introducción

En los Capítulos 2 y 4 hemos probado por distintos métodos, que $\mathcal{I}_\alpha$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^{q,\infty}(\mu)$ para $1 \leq p \leq q < \infty$ donde el par de pesos (μ, ν) está en la clase $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ y el peso de llegada, μ, en $A_\infty^{\rho,loc}$. En este capítulo probaremos este resultado de acotación suprimiendo la condición sobre μ y pidiendo al par de pesos (μ, ν) que verifique una condición $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ con una "power-bump" sobre el peso μ. Precisamente, obtenemos el siguiente resultado;

Teorema 5.1.1. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 \leq p \leq q < \infty$ y (μ, ν) un par de pesos para los cuales existen $r > 1$, $\theta \geq 0$ tales que para toda bola $Q = Q(x, l)$ en $\mathbb{R}^n$,*

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \mu(y)^r dy \right)^{\frac{1}{rq}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu(y)^{1-p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(1 + \frac{l}{\rho(x)} \right)^\theta, \quad p > 1 \qquad (5.1.2)$$

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}-1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \mu(y)^r dy \right)^{\frac{1}{rq}} \left(\inf_Q \nu(y) \right)^{-1} \leq C \left(1 + \frac{l}{\rho(x)} \right)^\theta, \quad p = 1 \qquad (5.1.3)$$

entonces $\mathcal{I}_\alpha$ verifica la siguiente desigualdad tipo débil (p, q)

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \, \mu \left(\{ x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_\alpha f(x)| > \lambda \} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \nu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación 5.1.4. Claramente, aplicando la desigualdad de Hölder, las condiciones (5.1.2) y (5.1.3) aseguran que el par de pesos (μ, ν) se encuentra en la clase $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, pero no aseguran que el peso de llegada μ se encuentre en $A_\infty^{\rho,loc}$. Para visualizar este hecho, consideremos para $1 < p = q < \infty$, $\alpha = 0$, $\rho \equiv 1$, los pesos

$$\mu(x) = e^{-e^{\frac{1}{|x|}}}$$
$$\nu(x) = 1.$$

Siguiendo argumentos análogos a los dados en la Observación 1.2.46, se puede probar que el par (μ,ν) verifica la condición (5.1.2) para cualquier $r>1$ y sin embargo $\mu \notin A_\infty^{\rho,loc}$. A partir de este ejemplo podemos decir que, en cierto sentido, las condiciones (5.1.2) y (5.1.3) sobre los pesos μ,ν son menos exigentes que las dadas en el Teorema 2.2.8, (item (2.2.10)).

Para probar el Teorema 5.1.1, consideramos la descomposición de $\mathcal{I}_\alpha$ como suma de su parte local y global usada en el Capítulo 4, esto es

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = (\mathcal{I}_\alpha)_{loc} f(x) + (\mathcal{I}_\alpha)_{glob} f(x).$$

Esta descomposición, como ya sabemos, permite obtener los resultados de acotación probándolos para cada uno de los operadores local y global. La demostración de la parte global resulta trivial, ya que, si observamos la demostración del Teorema 2.2.8 dada en el capítulo 4, se ha probado que $(\mathcal{I}_\alpha)_{glob}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^{q,\infty}(\mu)$ para $1 \le p \le q < \infty$ sólo con la hipótesis (μ,ν) en $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, condición que se verifica en virtud de la Observación 5.1.4. Así, resta probar el Teorema 5.1.1 para $(\mathcal{I}_\alpha)_{loc}$. Análogamente, como en la demostración del Teorema 2.2.8 (Capítulo 4), para el operador local se usarán resultados de acotación de la integral fraccionaria clásica en espacios de tipo homogéneo de la forma $(Q_0, d, dx/Q_0)$, donde Q_0 es una bola en $\mathbb{R}^n$. Esto hace necesario probar el siguiente resultado

Teorema 5.1.5. *Para Q_0 una bola en $\mathbb{R}^n$, consideremos el espacio de tipo homogéneo $(Q_0, d, dx/Q_0)$. Sean $0<\alpha<n$, $1 \le p \le q < \infty$ y (μ,ν) un par de pesos para los que existen $r>1$, $\theta \ge 0$ tal que, para toda bola $Q = Q(x,l)$ en Q_0, se tiene*

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \mu(y)^r dy \right)^{\frac{1}{rq}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu(y)^{1-p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \le C, \quad si\, p>1 \tag{5.1.6}$$

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}-1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \mu(y)^r dy \right)^{\frac{1}{rq}} \left(\inf_Q \nu(y) \right)^{-1} \le C, \quad si\, p=1 \tag{5.1.7}$$

entonces I_α verifica la siguiente desigualdad tipo débil (p,q) en Q_0,

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, \mu\left(\{x \in Q_0 : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{Q_0} |f(x)|^p \, \nu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.1.8}$$

J.M.Martell, en [27], prueba el Teorema 5.1.5 para operadores potenciales más generales en espacios de tipo homogéneo (X,d,μ) que cumplen con la condición adicional de que todo anillo en X es no vacío, esto es, para toda $x \in X$ y $0<r<R$, $B(x,R)\backslash B(x,r) \ne \emptyset$. Claramente esta condición no es satisfecha en los espacios de tipo homogéneo de nuestro interés. Sin embargo adaptando algunas de las técnicas de Martell podemos probar el Teorema 5.1.5 en el espacio de tipo homogéneo $(Q_0, d, dx/Q_0)$, cuyos anillos podrían ser vacíos.

5.2. Cubos diádicos y la función maximal de Hardy-Littlewood

En lo que sigue consideraremos el espacio de tipo homogéneo $(Q_0, d, dx/Q_0)$, donde Q_0 es una bola en $\mathbb{R}^n$, d es la métrica uniforme y dx/Q_0 denota la medida de Lebesgue restringida a Q_0. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, denotamos por $\mathcal{D}_m$ la colección de cubos diádicos en Q_0 con lados de longitud al menos $\frac{l(Q_0)}{2^m}$, esto es, comenzamos con una red fija de cubos diádicos en Q_0 y donde los ancestros están definidos sólo hasta llegar a Q_0. Asociada con los cubos de $\mathcal{D}_m$, se define para cualquier función $f \in L^1_{loc}(Q_0)$ la función maximal diádica de Hardy-Littlewood,

$$M^d_m f(x) = \sup_{\substack{x\in D\\ D\in\mathcal{D}_m}} \frac{1}{|D|}\int_D |f(y)|dy.$$

Recordar que, las longitudes de los lados de los cubos en $\mathcal{D}_m$ son de al menos $\frac{l(Q_0)}{2^m}$ y, por lo tanto, los promedios de este operador maximal son tomados sobre conjuntos que no son arbitrariamente pequeños.

Se puede probar que M^d_m es de tipo débil $(1,1)$ a través del siguiente lema de cubrimiento, cuya demostración puede hacerse fácilmente siguiendo las líneas de la descomposición de Calderón-Zygmund.

Lema 5.2.1. *Sea $f \geq 0$, $f \in L^1_{loc}(Q_0)$. Para $\lambda > 0$, sea $\Omega_\lambda = \{x \in Q_0 : M^d_m f(x) > \lambda\}$. Luego, existe una colección de cubos diádicos $\{Q^\lambda_j\}_j \subset \mathcal{D}_m$ disjuntos dos a dos tal que,*

$$\Omega_\lambda = \bigcup_j Q^\lambda_j \quad y \quad \frac{1}{|Q^\lambda_j|}\int_{Q^\lambda_j} f(y)dy > \lambda.$$

Más aún, estos cubos diádicos son maximales, esto es, si $D \in \mathcal{D}_m$ y $f_D > \lambda$ entonces $D \subset Q^\lambda_j$ para algún j. Por otro lado, para $D \supsetneq Q^\lambda_j$ se tiene $f_D \leq \lambda$.

A continuación, presentamos un funcional introducido en [14].

Definición 5.2.2. Dado $r > 1$ y un peso μ, se define la función de conjunto A^r_μ sobre conjuntos medibles $E \subset Q_0$ por,

$$A^r_\mu(E) = |E|^{\frac{1}{r'}}\left(\int_E \mu(x)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = |E|\left(\frac{1}{|E|}\int_E \mu(x)^r dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

donde la segunda igualdad se verifica siempre que $|E| > 0$.

En [14] (Lema 3.2) se prueban algunas de las propiedades del funcional A^r_μ, las cuales nos resultarán útiles en el desarrollo de este Capítulo.

Lema 5.2.3. *Para toda $r > 1$ y todo peso μ, la función de conjunto A^r_μ tiene las siguientes propiedades*

1. *Si* $E \subset F$ *entonces*
$$A^r_\mu(E) \leq \left(\frac{\mu(E)}{\mu(F)}\right)^{\frac{1}{r'}} A^r_\mu(F).$$

2. $\mu(E) \leq A^r_\mu(E)$.

3. *Si* $\{E_j\}_j$ *es una colección de conjuntos disjuntos y* $\bigcup_j E_j = E$, *entonces*
$$\sum_j A^r_\mu(E_j) \leq A^r_\mu(E).$$

Para probar el Teorema 5.1.5 también será útil el siguiente resultado.

Proposición 5.2.4. *Consideremos el espacio de tipo homogéneo* $(Q_0, d, dx/Q_0)$ *y sean* $0 \leq f \in L^\infty_c(Q_0)$, $0 < q < \infty$, $r > 1$ *y* μ *un peso, entonces para cada* $\lambda \geq f_{Q_0}$, *existe una subcolección* $\{R^\lambda_j\} \subset \mathcal{D}_m$ *de cubos de la familia dada por el Lema 5.2.1, de manera tal que*

$$\text{(5.2.5)}\quad \frac{1}{|R^\lambda_j|}\int_{R^\lambda_j} |f(y) - f_{R^\lambda_j}|dy > \epsilon\lambda, \text{ y}$$

$$\text{(5.2.6)}\quad \sup_{\lambda>0} \lambda^q \mu\left(\{x \in Q_0 : M^d_m f(x) > \lambda\}\right) \leq C \sup_{\lambda \geq f_{Q_0}} \lambda^q \sum_j A^r_\mu(R^\lambda_j) + f^q_{Q_0} A^r_\mu(Q_0),$$

donde las constantes ϵ *y* C *dependen únicamente de* n, q *y* r.

Demostración. Sea $r_0 = min\{r, \frac{1}{1-q}\}$ para $0 < q < 1$ y $r_0 = r$ para $q \geq 1$. Notar que $r_0 > 1$. Como $r_0 \leq r$ se tiene que $A^{r_0}_\mu(E) \leq A^r_\mu(E)$ para todo conjunto medible E. Luego, será suficiente probar 5.2.6 para r_0. Podemos asumir que el lado derecho de 5.2.6 es finito ya que, en otro caso, no hay nada que probar. Por otro lado, podemos asumir que μ es acotado y con soporte compacto en Q_0. Para probar el caso general, tomamos $\mu_k = min\{\mu, k\}\chi_{B(x_{Q_0},k)}$, donde x_{Q_0} denota al centro de Q_0, que es acotado y tiene soporte compacto. Luego 5.2.6 se cumple para μ_k. Dado que $\mu_k \nearrow \mu$, el Teorema de la convergencia monótonona nos permite obtener la desigualdad deseada para μ.

Sean $\mu, f \in L^\infty_c(Q_0)$, $f \geq 0$ y $N = 1 + 2^n > 1$. Para $\lambda \geq f_{Q_0}$ obtenemos, a partir del Lema 5.2.1, que $\Omega_{N\lambda} = \bigcup_j Q^{N\lambda}_j \subset \Omega_\lambda = \bigcup_i Q^\lambda_i$ y, por la maximalidad, dado j, $Q^{N\lambda}_j \subset Q^\lambda_i$ para algún i. Entonces, a partir del Lema 5.2.3, resulta

$$\begin{aligned}
\lambda^q \mu\left(\Omega_{N\lambda}\right) &= \lambda^q \sum_j \mu\left(Q^{N\lambda}_j\right) \\
&\leq \lambda^q \sum_j A^{r_0}_\mu(Q^{N\lambda}_j) \\
&= \lambda^q \sum_i \sum_{\substack{j \\ Q^{N\lambda}_j \subset Q^\lambda_i}} A^{r_0}_\mu(Q^{N\lambda}_j)
\end{aligned}$$

$$\leq \lambda^q \sum_i A_\mu^{r_0} \left(\bigcup_{j:Q_j^{N\lambda} \subset Q_i^\lambda} Q_j^{N\lambda} \right)$$
$$\leq \lambda^q \sum_i A_\mu^{r_0} (\Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda). \tag{5.2.7}$$

Sea $0 < \epsilon < N^{-qr'_0}$. Separamos los índices i en dos conjuntos,

$$i \in F \quad si \quad \frac{1}{|Q_i^\lambda|} \int_{Q_i^\lambda} |f(y) - f_{Q_i}^\lambda| dy \leq \epsilon\lambda,$$
$$i \in G \quad si \quad \frac{1}{|Q_i^\lambda|} \int_{Q_i^\lambda} |f(y) - f_{Q_i}^\lambda| dy > \epsilon\lambda.$$

Dado que $\{Q_i^\lambda : i \in G\}$ serán la familia deseada, nos referiremos a sus cubos como $\{R_j^\lambda\}_j$. Por otro lado, notemos que, si $x \in \Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda$ y Q es un cubo diádico en $\mathcal{D}_m$ con $x \in Q$, ya que Q y Q_i^λ son cubos diádicos en $\mathcal{D}_m$ que tienen a x en común, se deberá tener $Q_i^\lambda \subset Q$ o bien $Q \subset Q_i^\lambda$. Si $Q_i^\lambda \subset Q$, por maximalidad $f_Q \leq \lambda < f_{Q_i^\lambda}$ y, por lo tanto, para el cálculo de $M_m^d f(x)$ será suficiente considerar cubos Q contenidos en Q_i^λ. Así

$$\begin{aligned} M_m^d f(x) &= \sup_{\substack{Q \in \mathcal{D}_m \\ x \in Q \wedge Q \subset Q_i^\lambda}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \\ &= \sup_{\substack{Q \in \mathcal{D}_m \\ x \in Q \wedge Q \subset Q_i^\lambda}} \frac{1}{|Q|} \int_Q (f\chi_{Q_i^\lambda})(y) dy \\ &= M_m^d (f\chi_{Q_i^\lambda})(x), \end{aligned}$$

para cada $x \in \Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} N\lambda &< M_m^d f(x) \\ &= M_m^d (f\chi_{Q_i^\lambda})(x) \\ &\leq M_m^d \left(|(f - f_{Q_i^\lambda} + f_{Q_i^\lambda})\chi_{Q_i^\lambda}| \right)(x) \\ &\leq M_m^d \left(|(f - f_{Q_i^\lambda}|\chi_{Q_i^\lambda} \right)(x) + M_m^d (f_{Q_i^\lambda}\chi_{Q_i^\lambda})(x) \\ &\leq M_m^d \left(|(f - f_{Q_i^\lambda}|\chi_{Q_i^\lambda} \right)(x) + f_{Q_i^\lambda}. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Ahora bien, sea $Q_i^{\lambda,*}$ el "padre" de Q_i^λ. Luego, por maximalidad, $f_{Q_i^{\lambda,*}} \leq \lambda$ y, entonces,

$$\frac{|Q_i^\lambda|}{|Q_i^{\lambda,*}|} f_{Q_i^\lambda} \leq \lambda,$$

o sea

$$f_{Q_i^\lambda} \leq 2^n \lambda.$$

Luego, de 5.2.8, se obtiene que, para todo $x \in \Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda$,

$$M_m^d \left(|(f - f_{Q_i^\lambda}| \chi_{Q_i^\lambda} \right)(x) > N\lambda - 2^n \lambda = \lambda. \tag{5.2.9}$$

Sea $i \in F$, usando (5.2.9) y por la desigualdad tipo débil $(1,1)$ de M_m^d en cada uno de los espacios de tipo homogéneo Q_i^λ, resulta

$$\begin{aligned}
|\Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda| &\leq \left| \left\{ x \in Q_i^\lambda : M_m^d \left(|(f - f_{Q_i^\lambda}| \chi_{Q_i^\lambda} \right)(x) > \lambda \right\} \right| \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \int_{Q_i^\lambda} |(f - f_{Q_i^\lambda})(y)| dy \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \epsilon \lambda |Q_i^\lambda| \\
&= \epsilon |Q_i^\lambda|,
\end{aligned}$$

donde, en la penúltima desigualdad, se ha usado que $i \in F$. Así hemos obtenido,

$$|\Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda| \leq \epsilon |Q_i^\lambda|, \quad \forall i \in F. \tag{5.2.10}$$

Puesto que $\Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda \subset Q_i^\lambda$, aplicando (1) del Lema 5.2.3 y luego 5.2.10, resulta que, para toda $i \in F$,

$$\begin{aligned}
A_\mu^{r_0}(\Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda) &\leq \left(\frac{|\Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda|}{|Q_i^\lambda|} \right)^{\frac{1}{r_0'}} A_\mu^{r_0}(Q_i^\lambda) \\
&\leq \epsilon^{\frac{1}{r_0'}} A_\mu^{r_0}(Q_i^\lambda). \qquad (5.2.11)
\end{aligned}$$

Entonces, de (5.2.7), separando los subíndices de la sumatoria según $i \in F$ o bien $i \in G$ y luego usando (5.2.11), se tiene, para $\lambda \geq f_{Q_0}$,

$$\begin{aligned}
\lambda^q \mu(\Omega_{N\lambda}) &\leq \lambda^q \sum_i A_\mu^{r_0}(\Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda) \\
&\leq \lambda^q \sum_{i \in F} A_\mu^{r_0}(\Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda) + \lambda^q \sum_{i \in G} A_\mu^{r_0}(\Omega_{N\lambda} \cap Q_i^\lambda) \qquad (5.2.12) \\
&\leq \lambda^q \epsilon^{\frac{1}{r_0'}} \sum_{i \in F} A_\mu^{r_0}(Q_i^\lambda) + \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(R_j^\lambda) \\
&\leq \lambda^q \epsilon^{\frac{1}{r_0'}} \sum_i A_\mu^{r_0}(Q_i^\lambda) + \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(R_j^\lambda). \qquad (5.2.13)
\end{aligned}$$

Sea $0 < \lambda < f_{Q_0}$. En este caso, notemos que los cubos del Lema 5.2.1 se reducen solamente a Q_0. Así, si además $N\lambda < f_{Q_0}$, entonces $\{Q_j^{N\lambda}\}_j = \{Q_0\}$. Por el contrario, si $N\lambda \geq f_{Q_0}$, entonces $Q_j^{N\lambda} \subset Q_0$ para todo j y, en consecuencia, a partir del Lema 5.2.3, resulta $\sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^{N\lambda}) \leq A_\mu^{r_0}(\bigcup_j Q_j^{N\lambda}) \leq A_\mu^{r_0}(Q_0)$. Luego, si $0 < \lambda < f_{Q_0}$,

$$\sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^{N\lambda}) \leq A_\mu^{r_0}(Q_0). \tag{5.2.14}$$

Tomando $\Lambda > 0$, podemos escribir

$$\sup_{0<\lambda<\frac{\Lambda}{N}} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^{N\lambda}) \leq \sup_{0<\lambda<f_{Q_0}} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^{N\lambda}) + \sup_{f_{Q_0}\leq\lambda<\frac{\Lambda}{N}} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^{N\lambda}). \quad (5.2.15)$$

Usando en el primer sumando la desigualdad (5.2.14) y en el segundo la (5.2.13) se obtiene

$$\begin{aligned}\sup_{0<\lambda<\frac{\Lambda}{N}} &\lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^{N\lambda}) \\ &\leq f_{Q_0}^q A_\mu^{r_0}(Q_0) + \epsilon^{\frac{1}{r_0'}} \sup_{f_{Q_0}\leq\lambda<\frac{\Lambda}{N}} \lambda^q \sum_i A_\mu^{r_0}(Q_i^\lambda) + \sup_{f_{Q_0}\leq\lambda<\frac{\Lambda}{N}} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(R_j^\lambda).\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variables en el primer miembro de la desigualdad anterior tenemos

$$\begin{aligned}\sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^\lambda) \leq & N^q f_{Q_0}^q A_\mu^{r_0}(Q_0) + N^q \epsilon^{\frac{1}{r_0'}} \sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^\lambda) \\ &+ N^q \sup_{f_{Q_0}\leq\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(R_j^\lambda). \quad (5.2.16)\end{aligned}$$

Notemos que $\sup\limits_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j^\infty A_\mu^{r_0}(Q_j^\lambda) < \infty$. En efecto

$$\begin{aligned}\sup_{0<\lambda<\Lambda} &\lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^\lambda) \\ &\leq \sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q A_\mu^{r_0}\left(\bigcup_j Q_j^{N\lambda}\right) \\ &\leq \sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q A_\mu^{r_0}(\Omega_\lambda) \\ &= \sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q |\Omega_\lambda| \left(\frac{1}{|\Omega_\lambda|}\int_{\Omega_\lambda} \mu(x)^{r_0}\right)^{\frac{1}{r_0}} \\ &= \sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q |\Omega_\lambda|^{\frac{1}{r_0'}} \|\mu\|_{L^{r_0}(Q_0)} \\ &\leq C\|\mu\|_{L^{r_0}(Q_0)} \sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^{q-\frac{1}{r_0'}} \|f\|_{L^1(Q_0)}^{\frac{1}{r_0'}}\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, se ha usado que el operador M_m^d es tipo débil $(1,1)$. Luego, teniendo en cuenta que $q > \frac{1}{r_0'}$, la desigualdad anterior nos permite asegurar que

$$\sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^\lambda) \leq C\Lambda^{q-\frac{1}{r_0'}} \|\mu\|_{L^{r_0}(Q_0)} \|f\|_{L^1(Q_0)}^{\frac{1}{r_0'}} < \infty,$$

debido a que $\mu, f \in L_c^\infty(Q_0)$. Así, (5.2.16) nos conduce a

$$\left(1 - N^q \epsilon^{\frac{1}{r_0'}}\right) \sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^\lambda) \leq N^q f_{Q_0}^q A_\mu^{r_0}(Q_0) + N^q \sup_{f_{Q_0}\leq\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(R_j^\lambda),$$

y, dado que $\epsilon < N^{-qr_0'}$, $1 - N^q\epsilon^{\frac{1}{r_0'}} > 0$ y, por lo tanto,

$$\sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(Q_j^\lambda) \leq C f_{Q_0}^q A_\mu^{r_0}(Q_0) + C \sup_{f_{Q_0}\leq\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j A_\mu^{r_0}(R_j^\lambda).$$

Puesto que $\mu(\Omega_\lambda) \leq \sum_j^\infty A_\mu^{r_0}(Q_j^\lambda)$, podemos escribir

$$\sup_{0<\lambda<\Lambda} \lambda^q \mu(\Omega_\lambda) \leq C f_{Q_0}^q A_\mu^{r_0}(Q_0) + C \sup_{f_{Q_0}\leq\lambda<\Lambda} \lambda^q \sum_j^\infty A_\mu^{r_0}(R_j^\lambda),$$

donde $\Lambda > 0$ es arbitrario. Finalmente, haciendo $\Lambda \to \infty$ se obtiene lo deseado. $\square$

5.3. Discretización de I_α

Sea $(Q_0, d, dx/Q_0)$ el espacio de tipo homogéneo considerado en la sección anterior. En lo que sigue asumimos f en $L_c^\infty(Q_0)$ y no negativa. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ y $x \in Q_0$ definimos el operador $I_\alpha^m f(x)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_\alpha^m f(x) &= \int_{B(x,\frac{l(Q_0)}{2^{m+1}})^c} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &= I_\alpha(f\chi_{B(x,\frac{l(Q_0)}{2^{m+1}})^c})(x). \end{aligned}$$

Notar que $I_\alpha^m f(x) \nearrow I_\alpha f(x)$ cuando $m \to \infty$, para toda $x \in Q_0$.

Consideremos ahora, nuevamente, $\mathcal{D}_m$, la colección de cubos diádicos en Q_0 con lados de longitud, al menos, $\frac{l(Q_0)}{2^m}$. Claramente $\mathcal{D}_m$ tiene una cantidad finita de elementos.

Para $x \in Q_0$, es inmediato que, para cada y en $B(x, \frac{l(Q_0)}{2^{m+1}})^c$, $d(x,y) > \frac{l(Q_0)}{2^{m+1}}$ y, en consecuencia, existe $k \leq m+1$ tal que $\frac{l(Q_0)}{2^k} < d(x,y) \leq \frac{l(Q_0)}{2^{k-1}}$. Por otro lado, como Q_0 puede escribirse como la unión disjunta de cubos diádicos de lado $\frac{l(Q_0)}{2^{k-1}}$, donde $k-1 \leq m$, existe un único cubo diádico D tal que $x \in D$ y $l(D) = \frac{l(Q_0)}{2^{k-1}}$. Denotemos por x_D el centro de D, luego

$$\begin{aligned} d(x_D, y) &\leq d(x_D, x) + d(x,y) \\ &\leq \frac{l(Q_0)}{2^k} + \frac{l(Q_0)}{2^{k-1}} \\ &= 3\frac{l(Q_0)}{2^k}, \end{aligned}$$

lo que demuestra que $y \in 3D$.

Luego, para $x \in Q_0$, $y \in B(x, \frac{l(Q_0)}{2^{m+1}})^c$, resulta

$$\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \leq \frac{1}{d(x,y)^{n-\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\left(\frac{l(Q_0)}{2^{k-1}}\right)^{n-\alpha}} \\
&= \frac{1}{|D|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \\
&\leq \sum_{D\in\mathcal{D}_m} \frac{1}{|D|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\, \chi_D(x)\, \chi_{3D}(y).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
I_\alpha^m f(x) &= \int_{B(x,\frac{l(Q_0)}{2^{m+1}})^c} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \\
&\leq \int_{B(x,\frac{l(Q_0)}{2^{m+1}})^c} f(y) \left(\sum_{D\in\mathcal{D}_m} \frac{1}{|D|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\chi_D(x)\chi_{3D}(y)\right) dy \\
&\leq \sum_{D\in\mathcal{D}_m} \left(\frac{1}{|D|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{3D} f(y)dy\right) \chi_D(x).
\end{aligned}$$

Definimos la versión discreta de I_α^m como,

$$\widetilde{I}_\alpha^m f(x) = \sum_{D\in\mathcal{D}_m} \left(\frac{1}{|D|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{3D} f(y)dy\right) \chi_D(x) = \sum_{D\in\mathcal{D}_m} a(D)\chi_D(x),$$

y, claramente, se tiene que $I_\alpha^m f(x) \leq \widetilde{I}_\alpha^m f(x)$.

Proposición 5.3.1. *Sean $m \in \mathbb{N}_0$ y f no negativa en $L_c^\infty(Q_0)$. Luego $\widetilde{I}_\alpha^m f$ es no negativa y está en $L_c^\infty(Q_0)$ y, por lo tanto, $\widetilde{I}_\alpha^m f \in L^q(Q_0)$ para todo $1 \leq q < \infty$.*

Demostración. Por su definición resulta $\widetilde{I}_\alpha^m f \geq 0$ en Q_0. Además, como $\mathcal{D}_m$ son cubos diádicos en Q_0, es inmediato que *sop* $\widetilde{I}_\alpha^m f \subset Q_0$. Por otra parte

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_\alpha^m f(x) &= \sum_{D\in\mathcal{D}_m} \left(\frac{1}{|D|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{3D} f(y)dy\right) \chi_D(x) \\
&\leq C \sum_{D\in\mathcal{D}_m} \frac{|D|}{|D|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \|f\|_\infty \chi_D(x) \\
&\leq C\|f\|_\infty \sum_{D\in\mathcal{D}_m} |D|^{\frac{\alpha}{n}} \chi_D(x) < \infty,
\end{aligned}$$

pues $\mathcal{D}_m$ tiene una cantidad finita de cubos. □

5.4. Resultados auxiliares y demostración del Teorema 5.1.1

La primer parte de esta sección está dedicada a obtener algunos lemas que serán usados para probar el Teorema 5.1.5. Los mismos fueron obtenidos por Martell ([27]) para operadores potenciales generales, los cuales incluyen a I_α, en espacios de tipo homogóneo (X, d, μ) arbitrarios. Esto genera constantes dependientes del espacio X y del potencial. Para el caso de nuestro interés (I_α en espacios de tipo homogéneo consistentes en bolas de $\mathbb{R}^n$) las constantes se simplifican, obteniendo de esta forma los siguientes resultados.

Lema 5.4.1. *Sean f no negativa en $L^1_{loc}(Q_0)$ y $\zeta \geq 1$. Luego existe una constante C, dependiente de la dimensión n, α y ζ, tal que para todo cubo $Q \in \mathcal{D}_m$,*

$$\sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m\\ D\subset Q}} |D|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{\zeta D} f(y)dy \leq C|Q|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{\zeta Q} f(y)dy.$$

Observación 5.4.2. Para el caso del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, este resultado fue obtenido por Sawyer y Wheeden en [35] para tratar la integral fraccionaria clásica.

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{D}_m$, así existe $k_0 \in \mathbb{N}_0, k_0 \leq m$ tal que $l(Q) = \frac{l(Q_0)}{2^{k_0}}$. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, denotemos $\mathcal{D}_m^k = \{D \in \mathcal{D}_m : l(D) = \frac{l(Q_0)}{2^k}\}$. Luego

$$\sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m\\ D\subset Q}} |D|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{\zeta D} f(y)dy \leq \sum_{k=k_0}^{m} \sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m^k\\ D\subset Q}} |D|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{\zeta Q} \chi_{\zeta D}(y) f(y)dy.$$

Ahora bien, para $D \in \mathcal{D}_m^k$, $D \subset Q$, tenemos

$$|D| = \left(\frac{l(Q_0)}{2^k}\right)^n = \left(\frac{2^{k_0} l(Q)}{2^k}\right)^n = \left(2^{k_0-k} l(Q)\right)^n = 2^{-n(k-k_0)}|Q|,$$

donde $k_0 \leq k \leq m$ y, en consecuencia,

$$|D|^{\frac{\alpha}{n}} = 2^{-\alpha(k-k_0)}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m\\ D\subset Q}} |D|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{\zeta D} f(y)dy &\leq |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{m-k_0} 2^{-\alpha k} \sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m^{k+k_0}\\ D\subset Q}} \int_{\zeta Q} \chi_{\zeta D}(y) f(y)dy \\ &\leq |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{m-k_0} 2^{-\alpha k} \int_{\zeta Q} \left(\sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m^{k+k_0}\\ D\subset Q}} \chi_{\zeta D}(y) \right) f(y)dy. \qquad (5.4.3) \end{aligned}$$

A continuación probaremos que $\sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m^{k+k_0}\\ D\subset Q}} \chi_{\zeta D}(y) \leq C(\zeta, n) < \infty$.

Sea $y \in \zeta Q$. Consideremos la bola $B(y, \frac{l(Q_0)}{2^{k+k_0+1}})$. Claramente

$$\sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m^{k+k_0}\\ D\subset Q}} \chi_{\zeta D}(y) \leq \# \left\{ D \in \mathcal{D}_m^{k+k_0} : \zeta D \cap B(y, \frac{l(Q_0)}{2^{k+k_0+1}}) \neq \emptyset \right\} \doteq M.$$

Estimemos M. Para ello, a continuación, mostraremos que el número de cubos diádicos (o diádicos dilatados) de una generación fija que cortan a una bola B es finita. Sea $\{D_j\}_{j=1}^M \subset \mathcal{D}_m^{k+k_0}$ tal que $\zeta D_j \cap B(y, \frac{l(Q_0)}{2^{k+k_0+1}}) \neq \emptyset$ para todo j. Luego $\zeta D_j \subset \widetilde{B}$, donde $\widetilde{B}$ denota una dilatación de B. En efecto, sean $x_j \in \zeta D_j \cap B(y, \frac{l(Q_0)}{2^{k+k_0+1}})$ y $z \in \zeta D_j$, luego

$$\begin{aligned} d(z,y) &\leq d(z,x_j) + d(y,x_j) \\ &\leq 2\zeta \frac{l(Q_0)}{2^{k+k_0+1}} + \frac{l(Q_0)}{2^{k+k_0+1}} \\ &= (3\zeta+1)\frac{l(Q_0)}{2^{k+k_0+1}}. \end{aligned}$$

Entonces, $\zeta D_j \subset (3\zeta+1)B$ para todo $1 \leq j \leq M$. Así, dado que la colección $\{D_j\}_{j=1}^M$ es disjunta (por ser cubos diádicos de una misma red), resulta

$$|(3\zeta+1)B| \geq \left|\bigcup_{j=1}^M D_j\right| = \sum_j^M |D_j| = M\left(\frac{l(Q_0)}{2^{k+k_0}}\right)^n,$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} M &\leq |(3\zeta+1)B| \left(\frac{2^{k+k_0}}{l(Q_0)}\right)^n \\ &= (3\zeta+1)^n \left(\frac{l(Q_0)}{2^{k+k_0}}\right)^n \left(\frac{2^{k+k_0}}{l(Q_0)}\right)^n \\ &= (3\zeta+1)^n. \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Aplicando esta estimación en (5.4.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m \\ D\subset Q}} |D|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{\zeta D} f(y)dy &\leq |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-\alpha})^k \int_{\zeta Q} (3\zeta+1)^n f(y)dy \\ &= \frac{1}{1-2^{-\alpha}}(3\zeta+1)^n |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{\zeta Q} f(y)dy \\ &= C|Q|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{\zeta Q} f(y)dy. \end{aligned}$$

□

Lema 5.4.5. *Sean f no negativa en $L_c^\infty(Q_0)$ y $Q \in \mathcal{D}_m$. Luego*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |\widetilde{I}_\alpha^m f(x) - (\widetilde{I}_\alpha^m f)_Q| dx \leq \frac{C}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{3Q} f(x)dx,$$

donde la constante C sólo depende de n y α.

Demostración. Tomando $Q \in \mathcal{D}_m$, separamos $\widetilde{I}_\alpha^m$ de la siguiente forma

$$\widetilde{I}_\alpha^m f(x)\chi_Q(x) = \left(\sum_{D\in\mathcal{D}_m} a(D)\chi_D(x)\right)\chi_Q(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m\\ D\subsetneq Q}} a(D)\chi_D(x) + \sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m\\ Q\subset D}} a(D)\chi_Q(x)\\
&= I(x) + II\chi_Q(x).
\end{aligned}
$$

Notemos que el segundo término es constante sobre Q. Luego, por Lema 5.4.1, resulta

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|}\int_Q |\widetilde{I}_\alpha^m f(x) - (\widetilde{I}_\alpha^m f)_Q|dx\\
&\quad\le \frac{1}{|Q|}\int_Q |I(x) - I_Q|dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q |II\chi_Q(x) - (II\chi_Q)_Q|dx\\
&\quad\le \frac{2}{|Q|}\int_Q I(x)dx\\
&\quad\le \frac{2}{|Q|}\int_Q \sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m\\ D\subset Q}} \left(|D|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3D} f(y)dy\right)\chi_D(x)dx\\
&\quad\le \frac{2}{|Q|}\sum_{\substack{D\in\mathcal{D}_m\\ D\subset Q}} |D|^{\frac{\alpha}{n}}\int_{3D} f(y)dy\\
&\quad\le C|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q} f(y)dy.
\end{aligned}
$$

que es el resultado buscado. □

Lema 5.4.6. *Sea f no negativa en $L^1_{loc}(Q_0)$, y sean $Q\in\mathcal{D}_m$, $\zeta\ge 1$ y $s>0$ tales que*

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{\zeta Q} f(y)dy > s. \tag{5.4.7}$$

Entonces existe un cubo diádico $P\in\mathcal{D}_m$ con $l(P)=l(Q)$ tal que $P\cap\zeta Q\neq\emptyset$ y

$$
\begin{aligned}
\zeta Q &\subset (2\zeta+1)P \doteq \tau_1 P\\
P &\subset (2+\zeta)Q \doteq \tau_2 Q
\end{aligned}
$$

y, para alguna constante C dependiente de n, α y ζ,

$$|P|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_P f(y)dy > Cs.$$

Demostración. Sea $Q\in\mathcal{D}_m$, así $l(Q)=\frac{l(Q_0)}{2^{k_0}}$, para algún $k_0\le m$. De manera similar a lo probado en (5.4.4) (Lema 5.4.1), se obtiene

$$\#\left\{D\in\mathcal{D}_m^{k_0} : D\cap\zeta Q\neq\emptyset\right\} \doteq M_0 \le (2+\zeta)^n,$$

$$\bigcup_{j=1}^{M_0} D_j \subset (2+\zeta)\,Q,\quad \text{para}\quad \{D_j\}_{j=1}^{M_0} = \left\{D\in\mathcal{D}_m^{k_0} : D\cap\zeta Q\neq\emptyset\right\}. \tag{5.4.8}$$

Ahora bien, dado que $\zeta Q \subset \bigcup_{j=1}^{M_0} D_j$, los cubos D_j son disjuntos y $|D_j| = |Q|$ resulta

$$\begin{aligned}|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{\zeta Q} f(y)dy &\leq \sum_{j=1}^{M_0} |Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{D_j} f(y)dy\\ &= \sum_{j=1}^{M_0} |D_j|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{D_j} f(y)dy.\end{aligned}$$

Así, de (5.4.7), resulta que existe un cubo D_j que denotaremos P, con $l(P) = l(Q)$, $P \cap \zeta Q \neq \emptyset$ tal que

$$|P|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_P f(y)dy > \frac{s}{M_0} = C(n,\zeta)s.$$

Además, de (5.4.8), es obvio que $P \subset (2+\zeta)Q \doteq \tau_2 Q$. Resta probar $\zeta Q \subset \tau_1 P$, para algún τ_1. Denotemos por x_P al centro de P y fijemos $z \in P \cap \zeta Q)$. Sea $x \in \zeta Q$, luego

$$\begin{aligned}d(x, x_P) &\leq d(x,z) + d(z, x_P)\\ &\leq 2\zeta\frac{l(Q_0)}{2^{k_0}+1} + \frac{l(Q_0)}{2^{k_0}+1}\\ &= (2\zeta+1)\frac{l(Q_0)}{2^{k_0}+1},\end{aligned}$$

lo que demuestra que $\zeta Q \subset (2\zeta+1)P \doteq \tau_1 P$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 5.1.5

Demostración del Teorema 5.1.5. Probaremos el teorema para $p > 1$. El caso $p = 1$ se prueba de manera análoga. Por un argumento de densidad, bastará con probar (5.1.8) para f no negativa en $L_c^\infty(Q_0)$. Además, dado que, para toda $x \in Q_0$, $I_\alpha^m f(x) \nearrow I_\alpha f(x)$ cuando $m \to \infty$ e $I_\alpha^m f(x) \leq C\widetilde{I}_\alpha^m(x)$ será suficiente, en virtud del Teorema de la convergencia monótona, demostrar (5.1.8) para cada una de las versiones discretas, $\widetilde{I}_\alpha^m$ con $m \in \mathbb{N}_0$, esto es

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^q \mu\left(\{x \in Q_0 : |\widetilde{I}_\alpha^m f(x)| > \lambda\}\right) \leq C\left(\int_{Q_0} f(x)^p \nu(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} \tag{5.4.9}$$

donde C es independiente de m.

Para $k = 0, 1, \ldots, m$, denotemos, como antes, $\mathcal{D}_m^{m-k} = \{D \in \mathcal{D}_m : l(D) = \frac{l(Q_0)}{2^{m-k}}\}$. Para cada $Q \in \mathcal{D}_m^m$, existe una sucesión de cubos $Q^0 = Q \subset Q^1 \subset Q^2 \subset \ldots \subset Q^m$, con $Q^k \in \mathcal{D}_m^{m-k}$. De esta manera,

$$\widetilde{I}_\alpha^m f(y)\chi_Q(y) = \sum_{D\in\mathcal{D}_m} a(D)\chi_D(y)\chi_Q(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{D \in \mathcal{D}_m^{m-k}} a(D) \chi_{D\cap Q}(y)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{m} a(Q^k) \right) \chi_Q(y).$$

Esto último demuestra que $\widetilde{I}_\alpha^m f$ es constante en Q. Luego, para $x \in Q$, tenemos

$$M_m^d(\widetilde{I}_\alpha^m f)(x) \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q \widetilde{I}_\alpha^m f(y)dy = \widetilde{I}_\alpha^m f(x).$$

Dado que esto se verifica para todo cubo Q en $\mathcal{D}_m^m$ y estos cubos cubren a Q_0, salvo conjunto de medida nula, resulta que $\widetilde{I}_\alpha^m f(x) \leq M_m^d(\widetilde{I}_\alpha^m f)(x)$ para casi todo $x \in Q_0$ y, por lo tanto, (5.4.9) se reduce a probar que, para toda $m \in \mathbb{N}_0$, M_m^d verifica la siguiente desigualdad con dos pesos

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^q \mu \left(\{x \in Q_0 : M_m^d(\widetilde{I}_\alpha^m f)(x) > \lambda\} \right) \leq C \left(\int_{Q_0} f(x)^p \, \nu(x)dx \right)^{\frac{q}{p}}. \tag{5.4.10}$$

Sabemos (Proposición 5.3.1) que $\widetilde{I}_\alpha^m f$ es no negativa y está en $L_c^\infty(Q_0)$ así, por Proposición 5.2.4, existen $\epsilon, C > 0$, dependientes de n, q y r, tal que, para todo $\lambda \geq (\widetilde{I}_\alpha^m f)_{Q_0}$, existe una colección de cubos diádicos $\{R_j^\lambda\}_{j=1}^J$ en $\mathcal{D}_m$, con $J < \infty$, disjuntos dos a dos, tal que las siguientes condiciones se verifican,

$$\frac{1}{|R_j^\lambda|} \int_{R_j^\lambda} |\widetilde{I}_\alpha^m f(x) - \left(\widetilde{I}_\alpha^m f\right)_{R_j^\lambda}| dx > \epsilon\lambda, \tag{5.4.11}$$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^q \mu \left(\{x \in Q_0 : M_m^d(\widetilde{I}_\alpha^m f)(x) > \lambda\} \right) \leq C \sup_{\lambda \geq (\widetilde{I}_\alpha^m f)_{Q_0}} \lambda^q \sum_j A_\mu^r(R_j^\lambda) + (\widetilde{I}_\alpha^m f)_{Q_0}^q A_\mu^r(Q_0). \tag{5.4.12}$$

Ahora, del Lema 5.4.5 y la desigualdad (5.4.11) obtenemos,

$$\epsilon\lambda < \frac{1}{|R_j^\lambda|} \int_{R_j^\lambda} |\widetilde{I}_\alpha^m f(x) - \left(\widetilde{I}_\alpha^m f\right)_{R_j^\lambda}| dx$$
$$\leq \frac{C_1}{|R_j^\lambda|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{3R_j^\lambda} f(x)dx,$$

para todo j, $1 \leq j \leq J$. Luego, el Lema 5.4.6 con $s = \epsilon\lambda C_1^{-1}$ asegura, para cada R_j^λ, $j = 1, 2, \ldots, J$, la existencia de $P_j^\lambda \in \mathcal{D}_m$, con $l(P_j^\lambda) = l(R_j^\lambda)$, y de las constantes τ_1, τ_2 y C_2 tal que

$$P_j^\lambda \cap 3R_j^\lambda \neq \emptyset, \quad 3R_j^\lambda \subset \tau_1 P_j^\lambda, \qquad P_j^\lambda \subset \tau_2 R_j^\lambda$$
$$\frac{1}{|P_j^\lambda|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{P_j^\lambda} f(x)dx > C_2\lambda. \tag{5.4.13}$$

Para la familia de cubos $\{P_j^\lambda\}_{j=1}^J$ tomamos la subcolección disjunta maximal $\{S_i\}_{i=1}^I$ con $1 \leq I \leq J$. De esta manera, todo S_i es un P_j^λ para algún j y, por lo tanto, (5.4.13) se cumple para S_i. Más aún, si $1 \leq j \leq J$, existe $1 \leq i \leq I$ tal que $P_j^\lambda \subset S_i$ y, por lo tanto, $\tau_1 P_j^\lambda \subset \tau_1 S_i$ y, dado que $R_j^\lambda \subset \tau_1 P_j^\lambda$, resulta también $R_j^\lambda \subset \tau_1 S_i$. Notar que los cubos $\{R_j^\lambda\}$ son disjuntos dos a dos. Luego, por Lema 5.2.3, resulta para todo $\lambda \geq (\widetilde{I}_\alpha^m f)_{Q_0}$

$$\lambda^q \sum_{j=1}^{J} A_\mu^r(R_j^\lambda) = \lambda^q \sum_{i=1}^{I} \sum_{\substack{j \\ R_j^\lambda \subset \tau_1 S_i}} A_\mu^r(R_j^\lambda) \leq \lambda^q \sum_{i=1}^{I} A_\mu^r\Big(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq J \\ R_j^\lambda \subset \tau_1 S_i}} R_j^\lambda\Big) \leq \lambda^q \sum_{i=1}^{I} A_\mu^r(\tau_1 S_i).$$

Así, recordando que, por Definición 5.2.2,

$$A_\mu^r(\tau_1 S_i) = |\tau_1 S_i| \left(\frac{1}{|\tau_1 S_i|} \int_{\tau_1 S_i} \mu^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

de la desigualdad (5.4.13), resulta

$$\begin{aligned}
&\lambda^q \sum_{j=1}^{J} A_\mu^r(R_j^\lambda) \\
&\leq \frac{1}{C_2^q} \sum_{i=1}^{I} |\tau_1 S_i| \left(\frac{1}{|\tau_1 S_i|} \int_{\tau_1 S_i} \mu^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{|S_i|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{S_i} f \right)^q \\
&\leq C \sum_{i=1}^{I} |\tau_1 S_i|^{1-(1-\frac{\alpha}{n})q} \left(\frac{1}{|\tau_1 S_i|} \int_{\tau_1 S_i} \mu^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{S_i} \nu^{1-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\int_{S_i} f^p \nu \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \sum_{i=1}^{I} \left(|\tau_1 S_i|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|\tau_1 S_i|} \int_{\tau_1 S_i} \mu^r \right)^{\frac{1}{rq}} \left(\frac{1}{|\tau_1 S_i|} \int_{\tau_1 S_i} \nu^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^q \left(\int_{S_i} f^p \nu \right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Luego, dado que el par de pesos (μ, ν) verifica (5.1.6), $q \geq p$ y usando que los cubos $\{S_i\}_{i=1}^I$ son disjuntos dos a dos, resulta

$$\begin{aligned}
\lambda^q \sum_{j=1}^{J} A_\mu^r(R_j^\lambda) &\leq C \sum_{i=1}^{I} \left(\int_{S_i} f^p \nu \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^{I} \int_{S_i} f^p \nu \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{\cup_i S_i} f^p \nu \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{Q_0} f^p \nu \right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Así, (5.4.12) nos conduce a

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^q \mu \left(\{ x \in Q_0 : M_m^d(\widetilde{I}_\alpha^m f)(x) > \lambda \} \right) \leq C \left(\int_{Q_0} f^p \, \nu \right)^{\frac{q}{p}} + (\widetilde{I}_\alpha^m f)_{Q_0}^q A_\mu^r(Q_0). \quad (5.4.14)$$

Resta probar que el segundo sumando de (5.4.14) se puede acotar por arriba por $\|f\|^q_{L^p(\mu)}$.

$$\begin{aligned}
\int_{Q_0} \widetilde{I}^m_\alpha f(x)dx &= \int_{Q_0} \sum_{D\in\mathcal{D}_m} a(D)\chi_D(x)dx \\
&= \int_{Q_0} \sum_{D\in\mathcal{D}_m} \frac{1}{|D|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{3D} f(y)dy\chi_D(x)dx \\
&= \sum_{D\in\mathcal{D}_m} |D|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{3D} f(y)dy \\
&\leq C|Q_0|^{\frac{\alpha}{n}} \int_{Q_0} f(y)dy,
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha aplicado el Lema 5.4.1. De la estimación anterior obtenemos

$$(\widetilde{I}^m_\alpha f)_{Q_0} \leq C|Q_0|^{\frac{\alpha}{n}} f_{Q_0}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{I}^m_\alpha f)^q_{Q_0} A^r_\mu(Q_0) \\
&\leq C f^q_{Q_0} |Q_0|^{1+\frac{\alpha q}{n}} \left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}\mu^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C|Q_0|^{1+\frac{\alpha q}{n}-q} \left(\int_{Q_0} f\nu^{\frac{1}{p}}\nu^{-\frac{1}{p}}\right)^q \left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}\mu^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C|Q_0|^{1+\frac{\alpha q}{n}-q+\frac{q}{p'}} \left(\int_{Q_0} f^p\nu\right)^{\frac{q}{p}} \left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}\nu^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}\mu^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C\left(|Q_0|^{\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}\nu^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}\mu^r\right)^{\frac{1}{rq}}\right)^q \left(\int_{Q_0} f^p\nu\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C\left(\int_{Q_0} f^p\nu\right)^{\frac{q}{p}},
\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, se ha usado (5.1.6). Por lo tanto de esto y (5.4.14) podemos concluir

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^q \mu\left(\{x\in Q_0 : \mathcal{M}^d_m(\widetilde{I}^m_\alpha f)(x) > \lambda\}\right) \leq C\left(\int_{Q_0} f^p\,\nu\right)^{\frac{q}{p}},$$

lo que completa la demostración de (5.4.10). □

Finalmente podemos proceder con el resultado principal de este capítulo.

Demostración del Teorema 5.1.1. Como mencionamos al comienzo del capítulo, para demostrar este teorema descomponemos, como en el Capítulo 4, el operador $\mathcal{I}_\alpha$ como suma de su parte local y global, esto es

$$\mathcal{I}_\alpha f = (\mathcal{I}_\alpha)_{loc} f + (\mathcal{I}_\alpha)_{glob} f.$$

La hipótesis (5.1.2) ((5.1.3)) sobre (μ, ν) implica claramente que $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$ $(A_{1,q}^{\alpha,\rho,\infty})$ y, por lo tanto, repitiendo el razonamiento aplicado en la demostración del Teorema 2.2.8 (Capítulo 4) resulta que $(\mathcal{I}_\alpha)_{glob}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^{q,\infty}(\mu)$.

Para probar que $(\mathcal{I}_\alpha)_{loc}$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^{q,\infty}(\mu)$, consideramos la desigualdad (4.2.7), probada en el Teorema 2.2.8 (Capítulo 4), esto es,

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |(\mathcal{I}_\alpha)_{loc} f(x)| > \lambda\}\right) \leq \sum_k \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_k : I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_k})| > \frac{\lambda}{C}\right\}\right)$$

para todo $\lambda > 0$, con C independiente de λ y f, donde $\{Q_k\}_k$ denota el cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ por bolas críticas dado en la Proposición 5 y $\widetilde{Q}_k = \beta Q_k$, con $\beta \geq 1$ independiente de k tal que $\bigcup_{x \in Q_k} Q_x \subseteq \widetilde{Q}_k$ (Proposición 6). Por lo tanto, bastará con probar, que para cada k, I_α es un operador acotado de $L^p(\widetilde{Q}_k, \nu dx)$ a $L^{q,\infty}(\widetilde{Q}_k, \mu dx)$ con constante independiente de k. Nuevamente la hipótesis (5.1.2) ((5.1.3)) dada en el Teorema 5.1.1 asegura que (μ, ν) verifica la condición (5.1.6) ((5.1.7)) en $\widetilde{Q}_k$, con constante independiente de k, y, en consecuencia, el Teorema 5.1.5 nos asegura que, para cada k, $I_\alpha : L^p(\widetilde{Q}_k, \nu) \to L^{q,\infty}(\widetilde{Q}_k, \mu)$. Luego, teniendo en cuenta, además, que $q \geq p$, la desigualdad anterior, y el solapamiento controlado de $\{Q_j\}$, nos permiten concluir

$$\begin{aligned}
\lambda^q \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |(\mathcal{I}_\alpha)_{loc} f(x)| > \lambda\}\right) &\leq C^q \sum_k \left(\frac{\lambda}{C}\right)^q \mu\left(\left\{x \in \widetilde{Q}_k : I_\alpha(f\chi_{\widetilde{Q}_k})| > \frac{\lambda}{C}\right\}\right) \\
&\leq C \sum_k \left(\int_{\widetilde{Q}_k} |f(y)|^p \nu(y) dy\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \left(\sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \left(\chi_{\widetilde{Q}_k}(y)\right) |f(y)|^p \nu(y) dy\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_k \chi_{\widetilde{Q}_k}(y)\right) |f(y)|^p \nu(y) dy\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \nu(y) dy\right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. $\square$

Conclusiones

- Es posible comparar el operador maximal Schrödinger, $\mathcal{M}_\alpha$, $\eta \geq 0$ y el operador maximal sharp Schrödinger, $\mathcal{M}^\sharp_\eta$, en $L^p(\mathbb{R}^n,\omega)$, $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n,\omega)$, $p>0$, donde el peso ω está en $A^{\rho,loc}_\infty$, obteniendo de este manera una desigualdad de tipo Fefferman-Stein en el contexto Schrödinger. Estas desigualdades, permiten comparar la integral fraccionaria de Schrödinger, $\mathcal{I}_\alpha$, $0<\alpha<n$, con la maximal fraccionaria Schrödinger $\mathcal{M}_{\alpha,\eta}$, extendiendo de esta manera el resultado clásico de Muckenhoupt y Wheeden. Además, permiten relacionar el conmutador de orden m con $m \in \mathbb{N}_0$ de la integral fraccionaria Schrödinger, $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$, con el operador maximal Orlicz Schrödinger $\mathcal{M}_{L(\log L)^m,\alpha,\eta}$.

- Para pares de pesos (μ,ν) en $A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}$, con el peso de llegada μ en $A^{\rho,loc}_\infty$ obtenemos que $\mathcal{I}_\alpha$, $0<\alpha<n$, es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^{q,\infty}(\mu)$ para $1\leq p\leq q<\infty$. Si, además, tenemos que $\sigma=\nu^{-\frac{1}{p-1}}$ esta en $A^{\rho,loc}_\infty$ obtenemos que $\mathcal{I}_\alpha$ es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$ para $1<p\leq q<\infty$. Estos resultados se obtienen siguiendo dos métodos distintos. Además, para el caso de las desigualdades débiles, hemos explorado condiciones, en cierto sentido, menos exigentes para los pesos, más precisamente logramos obtener dicho resultado de acotación para pesos (μ,ν) en una clase del tipo $A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}$ con una "power-bump"sobre el peso de llegada, μ, y ninguna condición extra es pedida al peso μ.

- El conmutador de orden m, con $m \in \mathbb{N}_0$, de la integral fraccionaria de Schrödinger, $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$, $0<\alpha<n$, $b \in BMO_\theta(\rho)$, para algún $\theta \geq 0$, es un operador acotado de $L^p(\nu)$ a $L^q(\mu)$, para $1<p\leq q<\infty$ y los pesos (μ,ν) en $A^{\alpha,\rho,\infty}_{p,q}$, μ en $A^{\rho,loc}_\infty$ y σ en $A^{\rho,\infty}_\infty$. Para el caso límite $p=1$, hemos obtenido resultados para el conmutador de orden 1, $\mathcal{I}_{\alpha,b}$, más precisamente, para pesos (μ,ν) en $A^{\alpha,\rho,\infty}_{1,q}$ y μ en $A^{\rho,loc}_\infty$, $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ verifica una desigualdad modular del tipo $L\log L$ en $\mathbb{R}^n$.

- El operador $\mathcal{I}^m_{\alpha,b}$ es acotado de $L^p(\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}(M^{[(m+1)p]}\omega)\rho^{\alpha(p-s)})$ a $L^p(\omega)$ para $s\leq p$ con $\alpha s<n$, donde $\mathcal{M}_{\alpha s,\eta}$ es el operador maximal fraccionario Schrödinger y $M^{[(m+1)p]}$ es el operador maximal de Hardy- Littlewood iterado $[(m+1)p]$ veces, donde $[(m+1)p]$ es la parte entera de $(m+1)p$ y ω es una función no negativa localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, es decir le permitimos a ω que valga cero en un conjunto de medida positiva.

  Trabajos pendientes:

  - Explorar condiciones de tipo power bump sobre los pares de pesos para obtener desigualdades fuertes de $L^p(\mu)$ a $L^q(\mu)$ para la integral fraccionaria Schrödinger, para $1 < p \leq q < \infty$. Además, explorar este tipo de condiciones sobre los pesos para obtener desigualdades fuertes y débiles con dos pesos de su correspondiente conmutador.

Bibliografía

[1] David R. Adams. A note on Riesz potentials. *Duke Math. J.*, 42(4):765–778, 1975.

[2] Ana Bernardis, Silvia Hartzstein, and Gladis Pradolini. Weighted inequalities for commutators of fractional integrals on spaces of homogeneous type. *J. Math. Anal. Appl.*, 322(2):825–846, 2006.

[3] Ana Bernardis and Oscar Salinas. Two-weight norm inequalities for the fractional maximal operator on spaces of homogeneous type. *Studia Math.*, 108(3):201–207, 1994.

[4] B. Bongioanni, A. Cabral, and E. Harboure. Lerner's inequality associated to a critical radius function and applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 407(1):35–55, 2013.

[5] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. Classes of weights related to Schrödinger operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 373(2):563–579, 2011.

[6] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. Commutators of Riesz transforms related to Schrödinger operators. *J. Fourier Anal. Appl.*, 17(1):115–134, 2011.

[7] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. Weighted inequalities for commutators of Schrödinger-Riesz transforms. *J. Math. Anal. Appl.*, 392(1):6–22, 2012.

[8] S. Chanillo. A note on commutators. *Indiana Univ. Math. J.*, 31(1):7–16, 1982.

[9] Ronald R. Coifman and Guido Weiss. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. Étude de certaines intégrales singulières.

[10] D. Cruz-Uribe. New proofs of two-weight norm inequalities for the maximal operator. *Georgian Math. J.*, 7(1):33–42, 2000.

[11] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza. The A_∞ property for Young functions and weighted norm inequalities. *Houston J. Math.*, 28(1):169–182, 2002.

[12] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza. Endpoint estimates and weighted norm inequalities for commutators of fractional integrals. *Publ. Mat.*, 47(1):103–131, 2003.

[13] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza. Weighted endpoint estimates for commutators of fractional integrals. *Czechoslovak Math. J.*, 57(132)(1):153–160, 2007.

[14] D. Cruz-Uribe and C. Pérez. Two-weight, weak-type norm inequalities for fractional integrals, Calderón-Zygmund operators and commutators. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(2):697–721, 2000.

[15] Yong Ding, Shanzhen Lu, and Pu Zhang. Weak estimates for commutators of fractional integral operators. *Sci. China Ser. A*, 44(7):877–888, 2001.

[16] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[17] Xuan Thinh Duong and Li Xin Yan. On commutators of fractional integrals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(12):3549–3557, 2004.

[18] J. Dziubański, G. Garrigós, T. Martínez, J. L. Torrea, and J. Zienkiewicz. *BMO* spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality. *Math. Z.*, 249(2):329–356, 2005.

[19] Jacek Dziubański and Jacek Zienkiewicz. H^p spaces for Schrödinger operators. 56:45–53, 2002.

[20] Jacek Dziubański and Jacek Zienkiewicz. H^p spaces associated with Schrödinger operators with potentials from reverse Hölder classes. *Colloq. Math.*, 98(1):5–38, 2003.

[21] Jacek Dziubański and Jacek Zienkiewicz. H^p spaces associated with Schrödinger operators with potentials from reverse Hölder classes. *Colloq. Math.*, 98(1):5–38, 2003.

[22] José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104.

[23] Loukas Grafakos. *Modern Fourier analysis*, volume 250 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2009.

[24] Zihua Guo, Pengtao Li, and Lizhong Peng. L^p boundedness of commutators of Riesz transforms associated to Schrödinger operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 341(1):421–432, 2008.

[25] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge, at the University Press, 1952. 2d ed.

[26] Kazuhiro Kurata. An estimate on the heat kernel of magnetic Schrödinger operators and uniformly elliptic operators with non-negative potentials. *J. London Math. Soc. (2)*, 62(3):885–903, 2000.

[27] José María Martell. Fractional integrals, potential operators and two-weight, weak type norm inequalities on spaces of homogeneous type. *J. Math. Anal. Appl.*, 294(1):223–236, 2004.

[28] Benjamin Muckenhoupt and Richard Wheeden. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192:261–274, 1974.

[29] Richard O'Neil. Fractional integration in Orlicz spaces. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 115:300–328, 1965.

[30] Carlos Pérez. Two weighted norm inequalities for Riesz potentials and uniform L^p-weighted Sobolev inequalities. *Indiana Univ. Math. J.*, 39(1):31–44, 1990.

[31] Carlos Pérez. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. *J. Funct. Anal.*, 128(1):163–185, 1995.

[32] Carlos Pérez and Richard L. Wheeden. Uncertainty principle estimates for vector fields. *J. Funct. Anal.*, 181(1):146–188, 2001.

[33] Gladis Pradolini and Oscar Salinas. Maximal operators on spaces of homogeneous type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(2):435–441, 2004.

[34] Gladis Pradolini and Oscar Salinas. Commutators of singular integrals on spaces of homogeneous type. *Czechoslovak Math. J.*, 57(132)(1):75–93, 2007.

[35] E. Sawyer and R. L. Wheeden. Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 114(4):813–874, 1992.

[36] Eric Sawyer. A two weight weak type inequality for fractional integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 281(1):339–345, 1984.

[37] Eric T. Sawyer. A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators. *Studia Math.*, 75(1):1–11, 1982.

[38] Eric T. Sawyer. A characterization of two weight norm inequalities for fractional and Poisson integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 308(2):533–545, 1988.

[39] Zhong Wei Shen. L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 45(2):513–546, 1995.

[40] Lin Tang. Weighted norm inequalities for Schrödinger type operators. *Forum Math.*, 27(4):2491–2532, 2015.

[41] Li Wenming, Yan Xuefang, and Xianowu Yu. Two-weight inequalities for commutators of potential operators on spaces of homogeneous type. *Potential Anal.*, 31(2):117–131, 2009.