XX Encuentro de Jóvenes Investigadores
de la Universidad Nacional del Litoral
18 y 19 de Octubre de 2016

EL PROBLEMA DE DIRICHLET Y DE NEUMANN PARA DOMINIOS PARTICULARES. FUNCIONES ESPECIALES.

Serván Mariana
Facultad de Ingeniería Química UNL

Área: Ciencias Exactas
Sub-Área: Matemática
Grupo: X

Palabras clave: Funciones de Bessel, Problema de Dirichlet, Problema de Neumann

INTRODUCCIÓN

Resolver un problema de Dirichlet en un dominio es hallar una función armónica que se pueda extender hasta el borde del dominio y que valga un dato prefijado allí. Por otro lado, resolver un problema de Neumann es buscar una solución, usando el operador laplaciano, tal que su derivada normal en el borde sea igual a un dato dado. En este trabajo consideramos dominios que se pueden escribir, en forma simple, en coordenadas cilíndricas, los cuales surgen al considerar problemas que vienen de la física y de la ingeniería. La búsqueda de tales soluciones se hace a través del método de separación de variables. Más precisamente, este método nos lleva a buscar soluciones de cierta ecuación diferencial ordinaria, llamada ecuación de Bessel, cuyas soluciones son funciones especiales, denominadas funciones de Bessel.

OBJETIVOS

El objetivo de esta investigación es una formación básica complementaria a la obtenida en la carrera de grado y un mayor conocimiento en las aplicaciones de la matemática a problemas concretos motivados, en este caso, por las ciencias aplicadas.

METODOLOGIA

La metodología a aplicar es la habitual en matemática. Esto implica, en este caso, la formación básica acerca de los sistemas de funciones ortogonales usando los libros de Lebedev (1972) y Watson (1962), el estudio específico de las funciones cilíndricas, la resolución de ejercicios planteados en dichos libros sobre sus propiedades y la aplicación de los mismos a problemas de la física y de la ingeniería.

RESUMEN

En este período inicial de investigación nos dedicamos a estudiar el comportamiento

Proyecto: Análisis armónico asociado a sistemas ortogonales, código: 50120110100250LI / 205/13
Director del proyecto: Roberto Scotto
Director del becario/tesista: Roberto Scotto – Estefanía Dalmasso

analítico de las funciones de Bessel. A las mismas se las mira como funciones definidas en dominios que están contenidos en **C**, el conjunto de los números complejos. Se prueba que el espacio vectorial de las soluciones de la ecuación de Bessel es de dimensión 2, encontrando que las funciones de Bessel de primera y segunda especies son soluciones linealmente independientes de esta ecuación y generan dicho espacio vectorial.

Además, hemos estudiado los comportamientos asintóticos de tales funciones al igual que los de las funciones de Bessel de tercera especie, también llamadas funciones de Hankel. Para estudiar dicho comportamiento asintótico se necesita expresar a estas funciones como una integral de línea, la que se obtiene al considerar una representación integral, sobre los bien conocidos caminos de Hankel, del inverso multiplicativo de la función Gamma.

Por último, al tratar de resolver un problema de Dirichlet que tiene condiciones de borde que se deben satisfacer, esto lleva a resolver un problema de valores iniciales donde la ecuación involucrada es la de Bessel con cierta condición inicial prefijada. Es así que aparece una expansión en series de funciones de Bessel, y resulta necesario investigar la convergencia puntual de la misma.

Al igual que como se trabaja con las series de Fourier, para estudiar la convergencia de la mencionada expansión, se expresa la n-ésima suma parcial como una integral del dato inicial contra un núcleo que, en el caso de Bessel, lo denotamos por $T_n(t,x)$. La convergencia puntual de esta serie está relacionada con estimaciones puntuales del valor absoluto de núcleo $T_n(t,x)$, el cual, debido a que posee oscilaciones, no puede ser acotardo directamente por la suma de los valores absolutos de los términos de dicho núcleo. Puesto que $T_n(t,x)$ no tiene una representación explícita, como sí ocurre con el núcleo de Dirichlet (núcleo que surge de estudiar la convergencia puntual de las series de Fourier), se necesita aplicar una técnica alternativa para estimarlo. Para ello, se usa el Teorema de los Residuos de variable compleja, escribiendo a $T_n(t,x)$ como una integral de línea en cuyo integrando intervienen las funciones de Bessel. Usando su comportamiento asintótico, se obtienen las acotaciones necesarias para probar la convergencia puntual de las expansiones en series de funciones de Bessel.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Lebedev, N.N., 1972. Special Functions and its Applications. Dover Publications, Inc. New York.

Watson, G. N., 1962. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Second edition, Cambridge University Press, London.