



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL
LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

Doctor en Matemática

EN EL CAMPO DE: **Análisis**

TÍTULO DE LA TESIS:

Regularidad Besov espacio temporal de temperaturas

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET, UNL)

Departamento de Matemática, FIQ (UNL)

AUTOR:

Ivana Gómez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Hugo Aimar

CODIRECTOR DE TESIS:

Dra. Bibiana Iaffei

JURADO DE LA TESIS COMPUESTO POR:

Dr. Julián Fernández Bonder, Dr. Francisco Javier Martín-Reyes, Dra. Gladis Pradolini

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2008

Agradecimientos

Este trabajo fue posible por la guía, el empeño y el esfuerzo de mis directores Hugo Aimar y Bibiana Iaffei. Gracias por los días, los atardeceres y la noche cayendo sobre los papeles, escritos con cuentas, con intuiciones, con dibujos, con colores, con lo que guardamos. Aún, es como que no puedo estimar lo que aprendí con ellos.

Mi doctorado y su resultado final, esta tesis, fueron desarrollados por medio de la beca doctoral que me otorgó el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

Al jurado, gracias por leer este trabajo, por sus opiniones y comentarios.

Quiero agradecer al IMAL, y a todos sus integrantes, por darme un ámbito. En especial, a mis compañeros diarios de oficina en “Casa Blanca”, por los momentos durante el andar del doctorado.

Gracias a Marilina, por estar ahí al lado, por su tenacidad y su amistad. Y por su Franco.

A mis hermanos y a mis padres por esa presencia y ese apoyo invaluable.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	VII
Introducción	IX
Antecedentes. El caso elíptico	IX
El problema central de este trabajo. El caso parabólico	IX
Etapas en la resolución del problema. Técnicas de análisis real usadas	X
Organización de la tesis	XI
Capítulo 1. Preliminares	1
1.1. Dominios	1
1.2. Métrica parabólica	1
1.3. Descomposición y localización de $\Omega = D \times (0, T)$	2
1.4. Operadores maximales de tipo Hardy-Littlewood	3
1.5. Espacios de regularidad de Besov	6
1.6. Espacios de interpolación	7
1.7. Operadores maximales de tipo Calderón	9
Capítulo 2. Fórmulas del valor medio	13
2.1. Fórmulas del valor medio elípticas	13
2.2. Dos fórmulas básicas del valor medio para soluciones de la ecuación del calor	14
2.3. Fórmulas del valor medio parabólicas con núcleos suaves en la variable espacial	17
Capítulo 3. Aproximaciones de la identidad para el núcleo del valor medio calórico	23
3.1. Aproximaciones de la identidad laterales parabólicas	24
3.2. Estimaciones maximales para el núcleo del valor medio	25
Capítulo 4. Derivadas espaciales del núcleo del valor medio	31
4.1. Fórmula de representación de las derivadas para $d = 1$	32
4.2. Análisis de las derivadas del núcleo del valor medio parabólico	34
4.3. Otra representación “integral” de la distribución $D^\alpha K$	37
4.4. Derivadas del operador inducido por el núcleo K como operador de convolución	38
Capítulo 5. Estimaciones maximales para gradientes de temperaturas	39

5.1.	Estimaciones por funciones maximales del operador inducido por las derivadas del núcleo del valor medio	39
5.2.	Estimaciones para las derivadas espaciales y temporales de temperaturas sobre dominios cilíndricos	41
5.3.	Estimaciones L^p para gradientes espacio-tiempo de temperaturas en términos de normas mixtas de tipo Lebesgue-Besov	43
5.4.	Una prueba alternativa de las estimaciones L^p	45
Capítulo 6.	Aplicación: Regularidad simultánea espacio temporal a partir de integrabilidad de regularidad espacial	49
6.1.	Estimaciones del gradiente para truncaciones suaves de temperaturas	49
6.2.	Los espacios de Besov parabólicos como espacios de interpolación	50
6.3.	Prueba del Teorema 27	51
	Conclusiones	59
	Bibliografía	61

Resumen

El tema central de esta tesis es el estudio de la regularidad de soluciones de la ecuación del calor medida en términos de normas de Besov.

Jerison y Kenig prueban que la finitud de una norma de Besov de una función armónica en un dominio Lipschitz es suficiente para la integrabilidad de una potencia del gradiente de la solución ponderada por otra potencia de la distancia a la frontera, y además, con técnicas de interpolación, muestran que estimaciones de normas de Lebesgue del gradiente de una función armónica son suficientes para su regularidad Besov. Estos resultados sugieren que, para soluciones de la ecuación del calor en dominios cilíndricos con base Lipschitz, propiedades de regularidad Besov espacial podrían convertirse bajo la difusión en propiedades de regularidad espacio temporal. El resultado final de esta tesis demuestra que éste es el caso si la regularidad espacial es integrable en el tiempo en un sentido preciso.

Para obtener esa integrabilidad en el tiempo de la regularidad espacial, usamos una estimación puntual de ponderaciones por potencias adecuadas de la distancia parabólica a la frontera parabólica del dominio cilíndrico, de gradientes espacio temporales de temperaturas en términos de la iteración de dos operadores maximales bien estudiados en análisis armónico: maximales de Hardy-Littlewood laterales en el tiempo y maximales de Calderón en el espacio.

El esquema de demostración tiene su punto de partida, como el caso elíptico, en una identidad del valor medio, es decir, calculamos las derivadas espaciales usando una representación de soluciones como convoluciones de las mismas con núcleos que tengan suavidad espacial para tiempo fijo. A partir de estas fórmulas del valor medio parabólicas con regularidad adecuada se aborda el problema del análisis de los operadores que se obtienen por convolución con derivaciones espaciales de aquellos núcleos. A diferencia del núcleo del valor medio, que es integrable, los correspondientes derivados son singulares. La estructura de estos núcleos singulares es complicada, en el sentido que las variables espaciales y temporales no están separadas. No obstante, es posible estimarlos, en términos de la composición de un operador espacial y de otro temporal. El operador temporal involucrado es de convolución con un núcleo monótono soportado en una semirrecta, lo que conduce a su control por uno de Hardy-Littlewood lateral. El operador espacial, en cambio es el que registra la regularidad en el espacio y es de tipo Calderón. Cuando esos operadores se aplican a temperaturas, es la propia ecuación del calor la que nos provee de las correspondientes estimaciones para derivadas temporales. Las estimaciones en norma de Lebesgue son consecuencia de la estimación puntual y del análisis de acotación de

los dos operadores maximales involucrados sobre los espacios adecuados: espacios de Lebesgue para la variable temporal y espacios de Besov para la variable espacial.

Para medir regularidad conjunta en las variables espacio y tiempo se introducen espacios y normas de Besov parabólicos, como interpolación entre espacios de Lebesgue y de Sobolev anisotrópicos, y se usa la técnica de trazas para la estimación de las normas de interpolación.

Introducción

Antecedentes. El caso elíptico

Una función armónica en un dominio de \mathbb{R}^d es infinitamente diferenciable. Este hecho es consecuencia de las identidades del valor medio que caracterizan el comportamiento local de las funciones armónicas. Contrastando con esta regularidad interior total, las funciones armónicas y sus derivadas pueden perder integrabilidad debido a su comportamiento en las proximidades de la frontera. Una estrategia usada por Jerison y Kenig en [JK] es estudiar la regularidad de las soluciones en un sentido más débil, o tal vez más sutil, pero global, para obtener estimaciones en L^p para las derivadas en términos de normas de espacios que midan esa regularidad como los de Besov.

Jerison y Kenig demostraron en [JK, Teorema 4.1] que la finitud de una norma de Besov de una función armónica u en un dominio Lipschitz es suficiente para la integrabilidad de una potencia del gradiente de u ponderada por otra potencia de la distancia a la frontera. De la fórmula del valor medio cuyo núcleo es suave obtienen una estimación puntual para el gradiente de una solución por una potencia de la distancia a la frontera. Las normas de Besov miden regularidad de funciones en términos del tamaño de sus módulos de continuidad en espacios de Lebesgue. En las mismas están presentes parámetros de regularidad e integrabilidad. En [DD], Dahlke y DeVore utilizan el resultado de Jerison-Kenig para probar que para funciones armónicas el parámetro de regularidad se incrementa a expensas del de integrabilidad. Dahlke y DeVore hacen otra prueba del resultado de Jerison y Kenig, la diferencia es que en la estimación puntual luego de usar la propiedad del valor medio, obtienen una estimación que involucra un operador maximal que mide la suavidad, del tipo Calderón, y entonces el problema en términos de normas es ahora un problema de acotación de este operador maximal por normas de Besov.

Por otra parte, en el mismo trabajo que mencionamos arriba, Jerison y Kenig, usando técnicas de interpolación, muestran que, estimaciones de normas de Lebesgue de adecuadas ponderaciones del gradiente de una función armónica son suficientes para su regularidad Besov.

El problema central de este trabajo. El caso parabólico

La solución del problema $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ en $\mathbb{R}_+^{d+1} = \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ con $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ y f en un espacio adecuado de distribuciones está dada por $u(x, t) = (W_t * f)(x)$, con W_t el núcleo de Gauss-Weierstrass. Así, independientemente de las irregularidades de f , $u(x, t)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1})$ y además a medida que t crece las oscilaciones de f se amortiguan y la solución u es

todavía más suave. Esa propiedad elemental revela un hecho profundo que se pone de manifiesto muchas veces en el análisis de regularidad de difusiones. La desigualdad de Harnack parabólica puede verse también como una manifestación de este principio de regularización intrínseco a la difusión.

En otra dirección, podemos preguntarnos qué propiedades de regularidad espaciales se transfieren en regularidad de Besov espacio temporal. Observamos que no están prescritas condiciones iniciales ni tampoco de frontera, sólo se tiene una temperatura en un dominio cilíndrico de la que se conocen propiedades de regularidad espaciales a tiempo fijo y se pretende obtener regularidad global simultánea en espacio y tiempo.

Para el caso de soluciones de la ecuación del calor en dominios cilíndricos Ω con base Lipschitz, los resultados elípticos mencionados sugieren que propiedades de regularidad Besov espacial podrían, o tal vez deberían, convertirse bajo la difusión en propiedades de regularidad espacio-temporal. El resultado final de esta Tesis, contenido en el Teorema 27 del Capítulo 6 demuestra que este es el caso si la regularidad espacial es integrable en el tiempo.

Etapas en la resolución del problema. Técnicas de análisis real usadas

- **Fórmulas del valor medio parabólicas.** Como en el caso elíptico, nuestro punto de partida para el cálculo de las derivadas espaciales es la representación de soluciones como convoluciones de las mismas con núcleos que tengan suavidad espacial para tiempo fijo. Mencionamos que en la literatura específica hay varios trabajos relativos a representaciones del valor medio de temperaturas, tales son los casos de [Pin1, Pin2, Ful, Wat2, Wat1, SW] que contienen resultados obtenidos por Pini, Fulks, Watson y Suzuki. Sin embargo para nuestros fines, hemos obtenido de dos maneras fórmulas del valor medio con núcleos suaves en la variable espacial.
- **Operadores de los núcleos derivados.** Una vez obtenidas fórmulas del valor medio parabólicas con regularidad adecuada se presenta el problema del análisis de los operadores que se obtienen por convolución con derivaciones espaciales de aquellos núcleos. A diferencia del núcleo del valor medio, que es integrable, los correspondientes derivados son singulares. Esto se refleja en el hecho que la representación de derivadas espaciales de soluciones de la ecuación del calor tiene forma de convolución con una distribución. El estudio de esta distribución para órdenes arbitrarios de derivación, requiere un análisis detallado de la estructura del núcleo.
- **El resultado principal.** Obtenemos estimaciones puntuales en términos de funciones maximales de Hardy-Littlewood laterales temporales y de Calderón espaciales para los operadores de derivación inducidos por los núcleos distribucionales. Esta estimación está contenida en el Teorema 19. En los trabajos básicos de [Cal] y [CS] se estudian los operadores que nosotros llamamos de Calderón, y en [DS] se muestra la comparación

con los espacios de Besov. Mientras las maximales del tipo de Calderón miden la suavidad de los núcleos de convolución y controlan las derivadas de las funciones armónicas y son operadores acotados entre espacios de Besov y de Lebesgue, la maximal de Hardy-Littlewood lateral detecta la evolución en el tiempo de una temperatura, se adapta mejor que la maximal clásica de Hardy-Littlewood porque los promedios se toman en intervalos a izquierda del punto sobre el que se evalúa el operador. Entre las técnicas usadas que hemos desarrollado especialmente para la estimación de aquellos operadores, mencionamos una extensión de acotaciones por maximales de Hardy-Littlewood laterales de ciertos operadores con núcleos temporales soportados en semirrectas. Estos resultados extienden otros bien conocidos que se pueden encontrar en [dG] y [Ste].

Cuando esos operadores se aplican a temperaturas, es la propia ecuación del calor la que nos provee de las correspondientes estimaciones para derivadas temporales. Este es el esquema básico en la prueba del mencionado Teorema 19.

- **Estimaciones en normas.** Las estimaciones en norma de Lebesgue ($L^p, 1 < p < \infty$) son consecuencia de la estimación puntual y del análisis de acotación de los dos operadores maximales involucrados sobre los espacios adecuados: espacios de Lebesgue para la variable temporal y espacios de Besov para la variable espacial. Las propiedades de acotación en espacios de Lebesgue de las maximales de Hardy-Littlewood laterales en el caso unidimensional están extensamente estudiadas, mencionamos los trabajos de Sawyer [Saw] y de Martín-Reyes [MR]. La acotación en L^p del operador maximal de Calderón por normas de Besov se trata en [DS].
- **El resultado final.** Con el fin de medir regularidad conjunta en las variables espacio y tiempo, y como aplicación del resultado principal, se introducen como interpolación entre espacios de Lebesgue y de Sobolev anisotrópicos, espacios y normas de Besov parabólicos. Se usa la técnica de trazas, antes mencionada, para la estimación de las normas de interpolación de estos espacios parabólicos. El método de trazas da una forma equivalente para las normas de los espacios de interpolación, y es un buscador de espacios intermedios de regularidad. En [BL] se puede seguir un enfoque abstracto para espacios de Banach generales, y en [LM] en espacios de Hilbert y especialmente en los espacios de regularidad. En [JK] este método es útil para estimar la norma de los espacios de Besov, es decir entre un espacio de Lebesgue y otro de Sobolev, cuando la solución está cerca de la frontera del dominio. Extendemos la técnica de trazas al caso parabólico para probar en el Teorema 27 la regularidad global.

Organización de la tesis

El Capítulo 1 contiene tanto algunas definiciones, notación y resultados básicos conocidos en los diversos aspectos que se exponen y necesitan en los capítulos siguientes, como ciertos resultados y construcciones que son específicos de nuestro contexto.

El Capítulo 2 está dedicado exclusivamente a las fórmulas del valor medio parabólicas y a obtener un tipo de fórmula del valor medio con un núcleo de convolución tan suave como sea posible. Para nuestros propósitos será importante contar con regularidad espacial del núcleo para tiempo fijo.

Nos dedicamos a las aproximaciones de la identidad parabólicas en el Capítulo 3, obtenemos estimaciones de los operadores maximales parabólicos por la iteración de otros conocidos.

El detalle del análisis de la estructura de los núcleos para órdenes arbitrarios de derivación espacial y el estudio de sus propiedades más relevantes están en el Capítulo 4.

En el Capítulo 5 mostramos las estimaciones maximales puntuales que están contenidas en el resultado principal que es el Teorema 19 y en normas de Lebesgue en el Corolario 23 para los gradientes de temperaturas.

Finalmente en el Capítulo 6 probamos la aplicación del resultado principal en el estudio de la regularidad Besov simultánea en espacio y tiempo de temperaturas. Esta aplicación está contenida en el Teorema 27.

CAPÍTULO 1

Preliminares

El fin de este primer capítulo es introducir conceptos básicos y resultados específicos que usaremos en los capítulos que siguen.

1.1. Dominios

Primero condensamos en algunos renglones notación elemental sobre el ambiente de trabajo. Sea el espacio-tiempo $\mathbb{R}^{d+1} = \{(x, t) : x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \text{ y } t \in \mathbb{R}\}$. Sean $\mathbb{R}_+^{d+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : t > 0\}$ y $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$. Denotamos por $B(x, r)$ a la bola euclídea abierta con centro $x \in \mathbb{R}^d$ y radio r . Dado un conjunto medible A , usamos $|A|$ para la medida de Lebesgue de A . Sea $1 \leq p \leq \infty$, el espacio L^p consiste de todas las funciones medibles f tales que $\|f\|_{L^p} = (\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx)^{1/p}$ es finita. Para $p = \infty$ tomamos la norma del supremo. Dado un conjunto A medible, $L^p(A)$ es el espacio de las funciones medibles f tales que $f \chi_A$ pertenece a L^p .

Un dominio es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^d o de \mathbb{R}^{d+1} .

Consideraremos dominios con características especiales. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado. D se llama un dominio Lipschitz, con constante Lipschitz menor o igual a M , si existe $r > 0$ tal que para todo $x_0 \in \partial D$ existe un sistema de coordenadas ortonormal tal que $B(x_0, r) \cap D = \{x = (x', x_d) : x_d > \varphi(x')\} \cap B(x_0, r)$, donde $\varphi : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función Lipschitz, con constante Lipschitz menor o igual que M , es decir, $|\varphi(x') - \varphi(y')| \leq M|x' - y'|$ para todo $x', y' \in \mathbb{R}^{d-1}$, con $\varphi(0) = 0$. El dominio se llama un dominio C^1 si las funciones φ pueden ser elegidas de clase \mathcal{C}^1 .

Un dominio cilíndrico en \mathbb{R}^{d+1} es de la forma $\Omega = D \times (0, T)$ donde D es un dominio en \mathbb{R}^d y $T > 0$. La frontera parabólica de un dominio cilíndrico Ω está dada por $\partial_{\text{par}} \Omega = (\partial D \times [0, T]) \cup (D \times \{0\})$.

1.2. Métrica parabólica

La homogeneidad apropiada asociada a la ecuación del calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ está dada por la dilatación parabólica $T_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$ que deja invariante la ecuación. Entonces parece natural que los núcleos de los operadores de convolución que estudiamos en los capítulos siguientes (capítulos 3, 4 y 5), que provienen de la identidad básica del valor medio para temperaturas, presenten homogeneidades de naturaleza parabólica. Las propiedades de diferenciación y acotación de los respectivos operadores maximales asociados a los núcleos del valor medio se cumplen

usando estas dilataciones parabólicas en el ambiente geométrico determinado por una métrica ρ que satisfaga $\rho(T_\lambda(x, t)) = \lambda\rho(x, t)$ para todo $\lambda > 0$ y $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$.

A continuación describimos la métrica ρ asociada a la dilatación parabólica. Para $x \in \mathbb{R}^d$ y $t \in \mathbb{R}$ con $|x|^2 + t^2 > 0$, la única solución positiva de la ecuación

$$(1.1) \quad \frac{|x|^2}{\rho^2} + \frac{t^2}{\rho^4} = 1,$$

es decir el único número positivo ρ tal que $T_{1/\rho}(x, t)$ es el único punto en la curva $\{T_\lambda(x, t) : \lambda > 0\}$ que pertenece a la frontera del elipsoide de radio uno (que es la esfera unitaria de \mathbb{R}^{d+1}), y que denotamos por $\rho(x, t)$, define por $\rho(x-y, t-s)$ una métrica en \mathbb{R}^{d+1} . Como la ρ -bola $\mathcal{B}(0, 0; r)$ es el elipsoide de \mathbb{R}^{d+1} centrado en el origen de semidiámetros r, \dots, r, r^2 , tenemos que la medida de Lebesgue $d+1$ dimensional de $\mathcal{B}(0, 0; r)$ está dada por $c r^{d+2}$ donde la constante c depende sólo de la dimensión d . En efecto, $\mathcal{B}(0, 0; r)$ está dada por $T_r(\mathcal{B}(0, 0; 1))$. Más aún, dado que la bola unitaria asociada a la distancia ρ es la misma que la bola euclídea unitaria $B(0, 0; 1)$, tenemos que $\mathcal{B}(0, 0; r) = T_r(B(0, 0; 1))$.

Si en lugar de tomar la norma euclídea en (1.1) tomamos la norma del máximo obtenemos la métrica parabólica usual $\rho(x-y, t-s) = \max\{|x-y|, \sqrt{|t-s|}\}$. En este caso las ρ -bolas de radio r centradas en el origen son los rectángulos $(-r, r) \times \dots \times (-r, r) \times (-r^2, r^2)$.

Definimos la función $\delta(x, t)$ en un dominio Ω de \mathbb{R}^{d+1} como la distancia parabólica de $(x, t) \in \Omega$ a la frontera parabólica de Ω , más precisamente,

$$(1.2) \quad \delta(x, t) = \inf \left\{ \max \left\{ |x-y|, \sqrt{|t-s|} \right\}; (y, s) \in \partial_{\text{par}}\Omega \right\}$$

donde $\partial_{\text{par}}\Omega$ es la frontera parabólica de Ω .

REESCALAMIENTO PARABÓLICO. Dada una función k y $\varepsilon > 0$, $k_\varepsilon(x)$ denota el reescalamiento elíptico usual $\frac{1}{\varepsilon^d} k(\frac{x}{\varepsilon})$ que preserva la norma L^1 . Para $\delta > 0$ denotamos como

$$k_\delta(x, t) = \frac{1}{\delta^{d+2}} k\left(T_{\frac{1}{\delta}}(x, t)\right) = \frac{1}{\delta^{d+2}} k\left(\frac{x}{\delta}, \frac{t}{\delta^2}\right)$$

al correspondiente reescalamiento parabólico.

1.3. Descomposición y localización de $\Omega = D \times (0, T)$

Describimos un argumento de localización para puntos cercanos a la frontera parabólica de $\Omega = D \times (0, T)$, con respecto a la escala básica $r > 0$ para el cual la frontera ∂D del dominio espacial D se vuelve el gráfico de una función real Lipschitz definida en un dominio $d-1$ dimensional pequeño. Seguiremos, tanto como nos sea posible, la notación elíptica introducida en [JK]. Precisamente, el conjunto D es un conjunto abierto y acotado en \mathbb{R}^d para el cual existe un número positivo r tal que para cada punto $x_0 \in \partial D$ el conjunto $D \cap B(x_0, r)$ es el conjunto que está por arriba del gráfico de una función Lipschitz φ de $d-1$ variables x' en algún sistema local de coordenadas ortogonales (x', y) alrededor de x_0 . Como ∂D es compacto existe una constante M independiente de $x_0 \in \partial D$ tal que $|\nabla\varphi| \leq M$.

Esta localización en los puntos de la frontera del dominio elíptico D , induce una clasificación de los puntos en $\Omega = D \times (0, T)$ en cuatro tipos diferentes de acuerdo a su posición relativa con respecto a puntos esencialmente diferentes de la frontera parabólica de Ω . Precisamente, con $r > 0$ dado por el carácter Lipschitz de ∂D , escribiremos \mathcal{O}_I para denotar el conjunto de los puntos en Ω con distancia parabólica a la frontera parabólica, $\partial_{\text{par}}\Omega$, de Ω más grande que $\frac{r}{2}$. En otros términos,

$$\mathcal{O}_I = \{(x, t) \in \Omega : \delta(x, t) > \frac{r}{2}\} = \{(x, t) \in \Omega : d(x, \partial D) > \frac{r}{2} \text{ y } t > r^2\}$$

donde d es la distancia euclídea en \mathbb{R}^d . Por \mathcal{O}_{II} denotaremos cualquiera de los dominios cilíndricos de la forma $B(x, r) \times (r^2, T)$ con $x \in \partial D$. Hacemos

$$\mathcal{O}_{III} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in D, d(x, \partial D) > \frac{r}{2} \text{ y } |t| < 2r^2\}.$$

Finalmente, \mathcal{O}_{IV} denotará cualquiera de los dominios cilíndricos de la forma $B(x, r) \times (-2r^2, 2r^2)$ con $x \in \partial D$.

Como ∂D es compacto, la familia de conjuntos abiertos que contiene a \mathcal{O}_I , \mathcal{O}_{III} y a un número finito de conjuntos de tipo II y de tipo IV proporciona un cubrimiento abierto de la clausura parabólica de Ω (que es igual a $\Omega \cup \partial_{\text{par}}\Omega$). De esta forma podemos encontrar una sucesión finita $\{\zeta_i : i = 1, \dots, i_0\}$ de funciones en \mathcal{C}^∞ cada una con soporte (parabólico) contenido en algún conjunto abierto del cubrimiento dado, tal que $\sum_{i=1}^{i_0} \zeta_i \equiv 1$ en la clausura parabólica de Ω .

Usaremos esta descomposición de Ω en el Capítulo 6 para estudiar la pertenencia de truncaciones de temperaturas a espacios de Besov parabólicos. Diremos que una $\zeta = \zeta_i$ de esta descomposición es de tipo I, II, III ó IV según sea el tipo del abierto que la soporta.

1.4. Operadores maximales de tipo Hardy-Littlewood

Por M denotaremos la función maximal de Hardy-Littlewood, definida sobre bolas euclídeas en \mathbb{R}^d para $f \in L^1_{\text{loc}}$

$$(1.3) \quad Mf(z) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(z, r)|} \int_{B(z, r)} |f(\zeta)| d\zeta.$$

En algunas situaciones escribiremos M_d para indicar la maximal de Hardy-Littlewood cuando las bolas se toman en \mathbb{R}^d . Se sabe que para $1 < p \leq \infty$ la maximal de Hardy-Littlewood satisface la desigualdad $\|Mf\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}$ para alguna constante c independiente de f . Esto se resume diciendo que M es de tipo fuerte (p, p) o es un operador acotado en L^p .

Más aún, la desigualdad $\|M_1 f\|_{L^p(wds)} \leq c\|f\|_{L^p(wds)}$ es válida si y sólo si w es un peso de la clase A_p de Muckenhoupt. Recordemos que una función no negativa, no trivial y localmente integrable w pertenece a A_p si existe una constante c tal que $\left(\int_I w\right) \left(\int_I w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq c|I|^p$ para todo intervalo I de \mathbb{R} . Observamos que la afirmación precedente está formulada en un contexto unidimensional sólo con fines prácticos, para la caracterización de la acotación del operador

maximal de Hardy-Littlewood d dimensional por pesos de Muckenhoupt basta reemplazar intervalos por bolas en \mathbb{R}^d .

La función maximal de Hardy-Littlewood lateral está definida, sobre una función localmente integrable g de una variable real t , por

$$(1.4) \quad M^-g(t) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |g(s)| ds.$$

En este trabajo usaremos un operador maximal iterado M^-M_d que a cada f en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{d+1})$ asigna la función

$$M^-M_d f(x, t) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \left(\sup_{r>0} \frac{1}{r^d} \int_{B(x,r)} |f(y, s)| dy \right) ds.$$

Como $M^-g \leq 2M_1g$, entonces la acotación de M^- en $L^p(dt)$ ($1 < p \leq \infty$) sigue de la misma propiedad para M_1 . Sin embargo una desigualdad en el sentido contrario no es posible. Para ver esto, sea $g(t) = \mathcal{X}_{(a,b)}(t)$ donde (a, b) es un intervalo cualquiera. Podemos ver que $M^-g(t) = 0$ si $t \leq a$, y que $M_1g(t) > 0$ para todo valor de t , y por lo tanto M_1g no puede ser estimado puntualmente por M^-g .

También notamos que el operador M^-M_1 no es comparable al operador 2 dimensional M_2 . En efecto, sea la función $h(x, t) = \mathcal{X}_{(0,1) \times (0,1)}(x, t)$. Puede verse fácilmente que el operador iterado es en realidad de variables separadas $M^-(M_1h(\cdot, \star))(x)(t) = M^- \mathcal{X}_{(0,1)}(t) M_1 \mathcal{X}_{(0,1)}(x)$. De la definición de maximal lateral, $M^- \mathcal{X}_{(0,1)}(t) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \mathcal{X}_{(0,1)}(s) ds$, de donde vemos que $M^- \mathcal{X}_{(0,1)}(t) = 0$ si t está en la semirrecta a la izquierda del cero. Y por otro lado, se tiene que $M_2 \mathcal{X}_{(0,1) \times (0,1)}(x, t)$ es positivo para cualquier punto (x, t) . Así una desigualdad del tipo $M_2h(x, t) \leq C(M^-M_1)h(x, t)$ no se puede dar.

Más aún, tampoco son comparables M_1M_1 y M_2 . Existen constantes c_1 y c_2 tales que $\frac{c_2}{|x|} \leq M_1 \mathcal{X}_{(0,1)}(x) \leq \frac{c_1}{|x|}$ para $|x| \geq 1$. Por lo tanto, también el operador iterado $(M_1M_1)h(x, y)$ que es igual a $M_1 \mathcal{X}_{(0,1)}(x) \cdot M_1 \mathcal{X}_{(0,1)}(y)$ es comparable a $\frac{1}{|xy|}$ mientras que $M_2h(x, y)$ a $\frac{1}{x^2+y^2}$ ambas para $|x| \geq 1$ y $|y| \geq 1$. Así vemos que no es posible que $(M_1M_1)h(x, y) \leq CM_2h(x, y)$.

Por otro lado la acotación de M^- como un operador sobre espacios de Lebesgue pesados ha sido obtenida por Sawyer [Saw] y Martín-Reyes [MR]. En realidad estos resultados proveen una clase de pesos la cual es estrictamente más grande que la usual A_p de Muckenhoupt que está asociada a M_1 . Definimos en el párrafo siguiente esta clase lateral de pesos.

Sea $1 < p < \infty$, una función no negativa, no trivial y localmente integrable w satisface la condición A_p^- si y sólo si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$(1.5) \quad \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} w \right) \left(\frac{1}{h} \int_{t-h}^t w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C,$$

vale para todo $h > 0$ y para todo número real t . La maximal de Hardy-Littlewood lateral M^- satisface la desigualdad $\int_{\mathbb{R}} (M^-g)^p w \leq C \int_{\mathbb{R}} |g|^p w$ para alguna constante C y para toda función medible g , si y sólo si w pertenece a la clase A_p^- .

Señalamos que puede definirse un operador maximal lateral a la derecha análogo a M^- y una clase de pesos laterales asociada.

Observamos que los parámetros que definen $M^-g(t)$ pueden también escribirse en la forma $\kappa_h * |g|(t)$, donde $\kappa_h(s) = \frac{1}{h} \mathcal{X}_{[0,1]}(\frac{s}{h})$. Esta manera de escribir las medias laterales induce una generalización natural de M^- que será útil en futuros capítulos y que, bajo adecuadas hipótesis, permanece puntualmente acotado por M^- . Dado un núcleo κ en $L^1(\mathbb{R})$, dada una función g en $L^1(\mathbb{R})$ y dado un número positivo δ , definimos el operador maximal

$$(1.6) \quad \kappa^*g(t) = \sup_{\delta > 0} \left| \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} \kappa\left(\frac{s}{\delta}\right) g(t-s) ds \right|.$$

LEMA 1. *Sea κ un núcleo no negativo integrable, decreciente y con soporte en \mathbb{R}^+ . Entonces existe una constante C tal que $\kappa^*g(t) \leq CM^-g(t)$ para toda función integrable g definida en \mathbb{R} .*

DEMOSTRACIÓN. Por descomposición diádica de \mathbb{R}^+ y como κ es decreciente, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} \kappa\left(\frac{s}{\delta}\right) g(t-s) ds \right| &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\delta} \int_{\delta 2^j \leq s < \delta 2^{j+1}} \kappa\left(\frac{s}{\delta}\right) |g(t-s)| ds \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\delta} \kappa(2^j) \int_{0 \leq s < \delta 2^{j+1}} |g(t-s)| ds \\ &= 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \kappa(2^j) \left(\frac{1}{\delta 2^{j+1}} \int_{0 \leq s < \delta 2^{j+1}} |g(t-s)| ds \right) \\ &\leq 2 \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \kappa(2^j) \right) M^-g(t). \end{aligned}$$

y también

$$\int_{\mathbb{R}^+} \kappa(s) ds = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{2^{j-1}}^{2^j} \kappa(s) ds \geq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \kappa(2^j) (2^j - 2^{j-1}) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \kappa(2^j).$$

Tomando supremo en δ se tiene la tesis del lema. \square

En el Capítulo 5 usaremos el resultado anterior aplicado a un núcleo particular que por el momento es como extraño, en el siguiente corolario lo dejamos escrito.

COROLARIO 2. *Sea $\kappa(t) = t^\vartheta \left(\ln \frac{1}{t}\right)^\theta \mathcal{X}_{(0,1)}(t)$ con $-1 < \vartheta < 0$ y $\theta > 0$. Entonces, existe una constante C que depende sólo de ϑ y θ tal que $\kappa^*g(t) \leq CM^-g(t)$ para toda función integrable g definida en \mathbb{R} .*

DEMOSTRACIÓN. Para mostrar la integrabilidad del núcleo especial $\kappa(t) = t^\vartheta \left(\ln \frac{1}{t}\right)^\theta \mathcal{X}_{(0,1)}(t)$ notamos que con $\vartheta - \varepsilon > -1$ y $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\kappa(t) = t^{\vartheta - \varepsilon} \cdot t^\varepsilon \left(\ln \frac{1}{t}\right)^\theta \mathcal{X}_{(0,1)}(t)$$

y que $t^\varepsilon \left(\ln \frac{1}{t}\right)^\theta$ es acotada en $(0, 1]$. Es fácil ver para $t \in (0, 1)$ que κ es decreciente. \square

1.5. Espacios de regularidad de Besov

Entre tantas maneras de medir regularidad de funciones reales hay una extremadamente relevante, tanto por su carácter obicuo cuanto por la diversidad casi incontable de sus formulaciones. Esta es la de Besov-Taibleson. Usualmente los espacios de funciones con esas regularidades se llaman espacios de Besov, pero el desarrollo simultáneo de la teoría por ambos autores está fuera de duda. Entre todas las formulaciones la que mejor se adapta a nuestro punto de vista y a nuestras necesidades de aplicación en EDP es la de interpolación. Esto se debe a que nos permite intuir la regularidad Besov como un modo intermedio entre la “regularidad nula” de L^p y la “regularidad extrema” de los espacios de Sobolev. Lo asombroso, y a su vez muy útil de los espacios de Besov son sus formulaciones a través de módulos de continuidad en espacios de Lebesgue o a través del comportamiento del contenido frecuencial (transformada de Fourier) en cada escala diádica. Como valor de borde de funciones armónicas con un comportamiento preciso en el semiespacio superior o a través de los coeficientes en adecuadas bases de wavelets. Aún a riesgo de privilegiar un enfoque esquemático pero atendiendo a cierta completitud que merece o requiere este trabajo, incluimos un resumen de las formulaciones más básicas y usuales. Digamos, finalmente, que nuestros teoremas que involucran normas de Besov admiten la lectura del resultado a partir de cualquiera de las formulaciones que siguen, en particular a partir de aquellas de las formulaciones que resulten más confortables o intuitivas a cada lector.

MÓDULO CONTINUIDAD. Sea $0 < \lambda < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Para $h \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ sea el módulo de continuidad $\omega(f, t)_{L^p} = \sup_{|h| \leq t} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p}$. Las funciones f en L^p con

$$\int_0^\infty \left(\frac{\omega(f, t)_{L^p}}{t^\lambda} \right)^q \frac{dt}{t} < \infty$$

forman el espacio $B_p^{\lambda, q}$. Cuando $q = \infty$ tomamos la norma del supremo. Para definir espacios de Besov con el índice de regularidad $\lambda \geq 1$ se consideran módulos de continuidad de orden mayor que se obtienen por composición sucesiva de diferencias finitas de f .

DERIVACIÓN FRACCIONARIA. Sea $0 < \lambda < 1$ y $1 \leq p, q \leq \infty$. El espacio $B_p^{\lambda, q}$ es el de las funciones f en L^p con

$$(1.7) \quad \int_{y \in \mathbb{R}^d} \left(\int_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\frac{d}{q} + \lambda}} \right)^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dy < \infty.$$

POISSON. Sea $0 < \lambda < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, el espacio $B_p^{\lambda, q}$ es el conjunto de las funciones f en L^p para las cuales es finita la integral

$$\int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p} \right)^q \frac{dt}{t},$$

donde $u(x, t) = (P_t * f)(x)$ con $P_t(y) = \frac{c_d y}{(t^2 + |y|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$.

FOURIER. Sean $\lambda > 0$ y $1 \leq p, q \leq \infty$. Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, con el soporte de $\widehat{\phi}$ contenido en $\{\xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$ y $|\widehat{\phi}(\xi)| > c > 0$ en $\{\xi \in \mathbb{R}^d : \frac{2}{5} \leq |\xi| \leq \frac{5}{3}\}$ para alguna constante c positiva. El espacio de Besov $B_p^{\lambda, q}$ es el conjunto de funciones $f \in L^p$ para las cuales

$$\int_0^\infty \left(\frac{\|f * \phi_\tau\|_{L^p}}{\tau^\lambda} \right)^q \frac{d\tau}{\tau} < \infty.$$

WAVELETS. Sean $\lambda > 0$ y $1 < p \leq \infty$. Denotamos por \mathcal{D} el conjunto de cubos diádicos en \mathbb{R}^d . Sean ψ^0 una función escala de variable real y ψ^1 la wavelet correspondiente, denotamos por Ψ al conjunto de las $2^d - 1$ funciones de la forma $\psi^e(x_1, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^d \psi^{e_j}(x_j)$ donde e es un vértice del cubo unitario en \mathbb{R}^d . Formamos la base ortonormal de wavelets $\{\varphi_I\}_{I \in \mathcal{D}}$ con soporte compacto y suficientes momentos nulos, donde

$$\varphi_I := 2^{\frac{jd}{2}} \varphi(2^j \cdot -k), \quad I = 2^{-j}k + 2^{-j}[0, 1]^d, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \in \Psi.$$

Una función f en L^p pertenece al espacio $B_p^{\lambda, q}$ si y sólo si la suma

$$\sum_{j \geq 0} 2^{j[\lambda + d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})]q} \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_j \\ \varphi \in \Psi}} |\langle f, \varphi_I \rangle|^p \right)^{\frac{q}{p}}$$

es finita y donde \mathcal{D}_j denota los intervalos diádicos del nivel 2^{-j} .

Por simplicidad denotaremos por B_p^λ al espacio $B_p^{\lambda, p}$.

Dado un conjunto D abierto, siempre es posible definir el espacio $B_p^{\lambda, q}(D)$ como el de las funciones f definidas sobre D tales que existe $\tilde{f} \in B_p^{\lambda, q}$ de modo que $f = \tilde{f}|_D$. La norma en $B_p^{\lambda, q}(D)$ para f se define como el ínfimo de las normas $\|\tilde{f}\|_{B_p^{\lambda, q}}$ sobre el conjunto de todas las \tilde{f} en $B_p^{\lambda, q}$ tales que $f = \tilde{f}|_D$. Es claro, entonces que si $f \in B_p^{\lambda, p}(D)$ y $\tilde{f}|_D = f$, se tiene que $\int_D \int_D \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{d + p\lambda}} dx dy < \infty$. La ventaja de esta última expresión como una norma para $B_p^{\lambda, p}(D)$ es su formulación intrínseca a D . Pero la equivalencia de esta cantidad con la norma de Besov $B_p^{\lambda, p}(D)$ sólo es cierta si ∂D tiene alguna regularidad. En particular si D es un dominio Lipschitz.

Como mencionamos este es sólo un resumen de algunas formulaciones para los espacios de Besov. Recomendamos lecturas de Peetre [Pee], Stein [Ste], los trabajos de Taibleson [Tai1, Tai2, Tai3], y las tesis de Iaffei [Iaf] y Naibo [Nai].

1.6. Espacios de interpolación

En nuestro desarrollo ulterior estaremos interesados en estudiar normas de regularidad Besov. Los espacios de Besov en \mathbb{R}^d (elípticos) admiten diversos enfoques, como ya vimos en la sección anterior, algunos de ellos pueden resultar más naturales en ciertos contextos. Si bien, el enfoque original de la integrabilidad de los módulos de continuidad en L^p , parece mostrar mejor la forma débil de la regularidad que tienen las funciones de dichos espacios, desde el punto

de vista de las EDP, es tal vez el método de interpolación (real) el que sugiere una idea más adecuada de regularidad. En este sentido los métodos de interpolación permiten entender la regularidad Besov como una situación intermedia entre la regularidad en L^p , que sólo implica la convergencia a cero del módulo de continuidad de las funciones de ese espacio, y la regularidad de Sobolev.

Fijamos $1 \leq p \leq \infty$ y sea k un entero no negativo. El espacio de Sobolev $W_p^k(D)$ consiste de todas las funciones localmente integrables v definidas en el dominio D tal que para cada multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha v$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^p(D)$. La norma está dada por

$$\|v\|_{W_p^k(D)} = \|v\|_{L^p(D)} + \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(D)}.$$

Tal vez, la principal conexión entre los espacios de Sobolev y espacios de Besov es el resultado de interpolación real que dice que $B_p^{\gamma k, q}$ es el espacio de interpolación entre L^p y W_p^k cuando $1 \leq p, q \leq \infty$ y $0 < \gamma < 1$, donde k es cualquier entero positivo.

La teoría de interpolación real está desarrollada con una gran generalidad en espacios de Banach. Más aún, la misma admite varias formulaciones equivalentes. Tres apariciones exhaustivas de estos métodos pueden encontrarse en los libros [BL], [BS], [LM]. Entre aquellas formulaciones equivalentes usaremos el llamado *trace method* porque es el que mejor se adapta a los resultados del Capítulo 6 y porque como muestran Jerison y Kenig en [JK] los mismos ya son útiles en problemas elípticos. El método de trazas es debido a J. L. Lions. Expondremos brevemente el método de trazas tomándolo como punto de partida para definir espacios de interpolación entre dos espacios de Banach dados.

Sean A_0 y A_1 espacios de Banach compatibles con normas $\|\cdot\|_0$ y $\|\cdot\|_1$. Llamamos $[A_0, A_1]_{\gamma, p}$ a los espacios obtenidos por interpolación real entre A_0 y A_1 para valores de $0 < \gamma < 1$ y $1 \leq p \leq \infty$.

Seguimos la notación de [BL, pág.70]. Más precisamente, supongamos que $\eta_0 > 0$, $\eta_1 < m$ y $1 \leq p_j < \infty$ para $j = 0, 1$. Ponemos

$$\gamma = \frac{\eta_0}{\eta_0 + m - \eta_1}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1 - \gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{p_1}.$$

Entonces definimos

$$(1.8) \quad \|a\|_{[A_0, A_1]_{\gamma, p}} = \inf_{f(0)=a} \max \left\{ \left(\int_0^\infty \|s^{\eta_0} f(s)\|_0^{p_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{p_0}}, \left(\int_0^\infty \|s^{\eta_1} f^{(m)}(s)\|_1^{p_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{p_1}} \right\}$$

donde f es una función sobre $(0, \infty)$ con valores en $A_0 + A_1$ y $f^{(m)}$ es la derivada m -ésima de f .

Cabe mencionar que estos espacios de interpolación son los mismos que los obtenidos por los métodos un poco más usuales como el del K-funcional o el J-funcional, ver nuevamente [BL].

Este enfoque nos servirá en el Capítulo 6 para definir espacios parabólicos de regularidad.

1.7. Operadores maximales de tipo Calderón

Calderón en [Cal] y más tarde Calderón y Scott en [CS] introducen el operador maximal N_q^λ para un estudio conjunto de integrales singulares, diferenciación e inmersiones de espacios de Sobolev. Primero presentamos el operador maximal de Calderón. La finitud de este tipo de operadores refleja alguna regularidad de las funciones en espacios de Lebesgue. La idea de aproximación polinomial en un punto x en norma de Lebesgue puede formularse cuantitativamente postulando la finitud de un operador maximal de promedios de tipo $\sup_{r>0} |B(x,r)|^{-\lambda/d} \left(|B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y) - P_x(y)|^q dy \right)^{1/q}$ donde $1 \leq q \leq \infty$ y $\lambda \geq 0$, y $P_x(y)$ es un polinomio de grado menor que λ en la variable y y $f \in L^q$ localmente integrable. Puesto que la finitud del supremo en $r > 0$ de los promedios garantiza la unicidad de P_x , estará bien definido el operador maximal

$$(1.9) \quad N_q^\lambda f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{\frac{\lambda}{d}}} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - P_x(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

si existe un polinomio P_x de grado menor que λ tal que el supremo es finito y $N_q^\lambda f(x) = +\infty$ en otro caso. El caso $\lambda = 0$ y $q = 1$ da la usual maximal de Hardy-Littlewood. Los resultados clásicos contenidos en los trabajos originales de Calderón y Scott incluyen el análisis de las propiedades de esos polinomios aproximantes que, en algún sentido, son similares a las de los polinomios de Taylor.

En [DS] DeVore y Sharpley tratan con una variedad de este tipo de operadores maximales de los cuales muchos resultan equivalentes. Brevemente mencionamos algunos de ellos.

Por \mathcal{P}_m denotamos el espacio de todos los polinomios de grado a lo sumo m . Denotamos por $[\lambda]$ al entero más grande menor o igual que λ , y por (λ) al mayor entero estrictamente menor que λ . Para cualquier cubo Q en \mathbb{R}^d , la proyección ortogonal π_Q^k de $L^2(Q)$ sobre \mathcal{P}_k se extiende naturalmente a $L^1(Q)$. Dados un número no negativo λ y una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, definimos

$$\mathfrak{M}^{\#, \lambda} f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\lambda}{d}}} \int_Q |f(y) - \pi_Q^{[\lambda]}(y)| dy,$$

donde $\pi_Q^{[\lambda]}$ es la proyección de $L^1(Q)$ sobre $\mathcal{P}_{[\lambda]}$, y

$$\mathfrak{M}^{b, \lambda} f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\lambda}{d}}} \int_Q |f(y) - \pi_Q^{(\lambda)}(y)| dy$$

donde $\pi_Q^{(\lambda)}$ es la proyección de $L^1(Q)$ sobre $\mathcal{P}_{(\lambda)}$ y el supremo se toma entre todos los cubos Q que contienen al punto x . Notar que si λ no es entero resulta $\mathfrak{M}^{\#, \lambda} f(x) = \mathfrak{M}^{b, \lambda} f(x)$.

Otro operador consiste en tomar el ínfimo entre los polinomios de grado k . Precisamente,

$$M^{\#, \lambda} f(x) = \sup_{r>0} \inf_{P \in \mathcal{P}_{[\lambda]}} \frac{1}{|B(x,r)|^{1+\frac{\lambda}{d}}} \int_{B(x,r)} |f(y) - P(y)| dy.$$

En el Lema 2.1 en [DS] se prueba que si λ es positivo y $k = [\lambda]$, $M^{\#, \lambda}$ es equivalente a $\mathfrak{M}^{\#, \lambda}$; y que si $k = (\lambda)$ entonces $M^{\#, \lambda}$ es equivalente a $\mathfrak{M}^{b, \lambda}$. Como consecuencia, si $\lambda > 0$ tenemos que $\mathfrak{M}^{\#, \lambda} f(x) \leq c \mathfrak{M}^{b, \lambda} f(x)$ para alguna constante c y para toda $f \in L^1_{\text{loc}}$.

Además notamos que a diferencia de las definiciones de $\mathfrak{M}^{\#, \lambda}$ y $\mathfrak{M}^{b, \lambda}$, en la definición de N_q^λ el polinomio no varía con Q . Sin embargo, N_1^λ y $\mathfrak{M}^{b, \lambda}$ resultan equivalentes. Para la prueba se definen otros operadores maximales del tipo $\mathfrak{M}^{b, \lambda}$ con extensión a la norma L^q en lugar de L^1 . Esto está contenido en el capítulo 5 del trabajo [DS], precisamente en el Corolario 5.4.

De hecho, en el Capítulo 5 vamos a tratar con el operador maximal definido para cualquier función suave y para $k > \lambda > 0$ con $k \in \mathbb{N}$, dado por

$$(1.10) \quad M^{\#, \lambda, k} f(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|^{1 + \frac{\lambda}{d}}} \int_{B(x, r)} |f(y) - P_x(y)| dy$$

donde $P_x(y)$ es el polinomio de Taylor de grado $k - 1$ de f en x . Notar que cuando λ no es un número entero y $k = [\lambda] + 1$, es el operador maximal (1.9) cuando $q = 1$. Dada una función suave f sobre un dominio D , también definimos la versión local de la función maximal de Calderón de orden λ

$$(1.11) \quad M_D^{\#, \lambda, k} f(x) = \sup_{0 < \delta < \delta(x)} \frac{1}{|B(x, \delta)|^{1 + \frac{\lambda}{d}}} \int_{B(x, \delta)} |f(y) - P_x(y)| dy$$

donde $\delta(x) = \inf \{|x - y| : y \in \partial D\}$ y P_x es el polinomio de Taylor de grado $k - 1$ para f en x .

El enunciado que sigue es el Corolario 11.6 en [DS] (y nota al pie en la página 7 en [DD]) y muestra que la regularidad Besov con parámetros λ , p , p es suficiente para la regularidad inducida por estos operadores maximales. Más precisamente, para $1 \leq p \leq \infty$ y $\lambda > 0$ sea

$$C_p^\lambda(D) = \left\{ f \in L^p(D) : \mathfrak{M}^{\#, \lambda} f \in L^p(D) \right\}.$$

TEOREMA 3 (Corolario 11.6 [DS]). *Sea D un dominio Lipschitz y sea $1 \leq p \leq \infty$. Se tiene que $B_p^{\lambda, p}(D) \hookrightarrow C_p^\lambda(D)$ continuamente.*

En la prueba de este resultado se usa la continuidad del operador extensión de D a \mathbb{R}^d tanto en C_p^λ como en $B_p^{\lambda, p}$ para reducirlo al caso \mathbb{R}^d . El análisis de la extensión de funciones $C_p^\lambda(D)$ a $C_p^\lambda(\mathbb{R}^d)$ cuando D es un dominio Lipschitz puede hallarse en el Capítulo 11 de [DS]. El correspondiente a normas de Besov en [JK] usando interpolación. La prueba del Teorema 3 cuando D se sustituye por \mathbb{R}^d está contenida en el Teorema 7.1 de [DS].

En analogía con la definición de $C_p^\lambda(D)$ escribimos $\mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D)$ para denotar el espacio de todas aquellas funciones f en $L^p(D)$ para las cuales la maximal $M_D^{\#, \lambda, m} f$ pertenece a $L^p(D)$ equipada con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D)} = \|f\|_{L^p(D)} + \left\| M_D^{\#, \lambda, m} f \right\|_{L^p(D)}.$$

Como ya notamos que cuando λ es un número positivo no entero, $\mathfrak{M}^{\#, \lambda}$ es puntualmente equivalente al operador maximal N_1^λ que a su vez es equivalente a $M^{\#, \lambda, 1 + [\lambda]}$, de esta manera

$\mathcal{C}_p^{\lambda, [\lambda]+1}(D) = C_p^\lambda(D)$. Así, de la inmersión contenida en el Teorema 3 cuando D es un dominio Lipschitz, concluimos que $B_p^{\lambda, p}(D) \hookrightarrow \mathcal{C}_p^{\lambda, [\lambda]+1}(D)$ el cual, para un dominio acotado D está continuamente inmerso en $\mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D)$ para $m \geq [\lambda] + 1$. Pues, salvo en el caso trivial en que $m = [\lambda] + 1$, si $P_x^j(y)$ denota el polinomio de Taylor de grado j en x , entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B(x, r)|^{1+\frac{\lambda}{d}}} \int_{B(x, r)} |f(y) - P_x^{m-1}(y)| dy \\ & \leq M^{\#, \lambda, [\lambda]+1} f(x) + \frac{1}{|B(x, r)|^{1+\frac{\lambda}{d}}} \int_{B(x, r)} \left| P_x^{[\lambda]}(y) - P_x^{m-1}(y) \right| dy \end{aligned}$$

no es difícil ver, puesto que el polinomio en el último término involucra sólo monomios de grados mayores que $[\lambda] + 1$, que el último término está uniformemente acotado.

Para finalizar esta sección, introducimos los espacios en norma mixta, que usaremos en los capítulos 5 y 6, $L^q(\mathbb{R}^+; \mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D))$ y $L^q(\mathbb{R}^+; B_p^\lambda(D))$ con $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\lambda > 0$. Las normas correspondientes para funciones v de $d + 1$ variables son

$$(1.12) \quad \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^+; \mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D))} = \left(\int_{\mathbb{R}^+} \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

y

$$(1.13) \quad \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^+; B_p^\lambda(D))} = \left(\int_{\mathbb{R}^+} \|v(\cdot, t)\|_{B_p^\lambda(D)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

CAPÍTULO 2

Fórmulas del valor medio

En la demostración de propiedades de regularidad de soluciones de EDP, las fórmulas denominadas “del valor medio” juegan un papel muy importante. Estas fórmulas consisten básicamente en la reproducción del valor de la solución en un punto en términos de promedios de la misma alrededor del mismo punto.

Las soluciones de la ecuación de Laplace, funciones armónicas, tienen muchas propiedades especiales, entre ellas la fórmula del valor medio. En realidad, hay toda una familia de fórmulas del valor medio en las que se preserva la simetría central. Estas fórmulas del valor medio admiten interpretaciones que las hacen plausibles desde el punto de vista probabilístico. Las soluciones de la ecuación del calor, temperaturas, también satisfacen fórmulas del valor medio en las que el valor de la temperatura en un punto y en un instante se puede obtener por integración de la temperatura contra un núcleo adecuado en los “alrededores” de ese punto del espacio tiempo. Hay al menos dos diferencias estructurales entre las formas elíptica y parabólica de la fórmula del valor medio. En primer lugar los “alrededores” del punto de evaluación ya no responden, en el caso parabólico, a simetría central en espacio tiempo, aunque si en el espacio para tiempo fijo. En particular el punto de evaluación de la temperatura en estas fórmulas está en la frontera de la región de integración. La otra diferencia esencial es que, en el caso parabólico, los núcleos que obtenemos no son funciones características, ni siquiera son acotados.

En este capítulo, luego de un breve repaso de las fórmulas del valor medio elípticas, introducimos los resultados análogos conocidos en el contexto parabólico y finalmente probamos la validez de una fórmula del valor medio para temperaturas en la que el núcleo integral es suave como función de la variable espacial para tiempo fijo y que será aplicada en los capítulos siguientes.

2.1. Fórmulas del valor medio elípticas

La invariancia por rotaciones del operador Laplaciano se refleja de muchas maneras en el análisis armónico. Desde el punto de vista de las propiedades de las soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en un dominio D de \mathbb{R}^d , esa invariancia se manifiesta en la simetría central en las fórmulas del valor medio. De un modo general, si ν es una medida de Borel en \mathbb{R}^d , diremos que ν es radial si $\nu(R(A)) = \nu(A)$ para todo boreliano A en \mathbb{R}^d y para toda rotación R actuando sobre \mathbb{R}^d . Si u es una función armónica en D y $x \in D$, r tal que $\overline{B(x, r)} \subset D$ y si ν es una

medida radial en \mathbb{R}^d soportada en $B(0, r)$, entonces la identidad

$$(2.1) \quad u(x) = (\nu * u)(x)$$

es una forma general de la identidad del valor medio que contiene los tres casos particulares más conocidos y usados:

(I) **Valores medios sobre cáscaras esféricas.** Para cada $x \in D$ y cada bola $B(x, r) \subset D$,

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|_{d-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y),$$

donde $|\cdot|_{d-1}$ es la medida de superficie en \mathbb{R}^d . Esta fórmula coincide con (2.1) si $\nu(A) = \frac{|A \cap \partial B(0, r)|_{d-1}}{|\partial B(0, r)|_{d-1}}$ para A boreliano.

(II) **Valores medios sobre bolas de la norma euclídea.** Para cada $x \in D$ y cada bola $B(x, r) \subset D$,

$$u(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy.$$

Aquí tomamos la medida $\nu(A) = \frac{|A \cap B(0, r)|}{|B(0, r)|}$ en (2.1).

(III) **Valores medios con núcleo radial suave.** Para todo $x \in D$ y para toda función radial φ de \mathbb{R}^d , localmente integrable, con soporte contenido en la bola unitaria de \mathbb{R}^d ,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x - y) u(y) dy$$

donde el reescalamiento elíptico $\varphi_\varepsilon(x)$ está dado por $\frac{1}{\varepsilon^d} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ con $\varepsilon > 0$. En este caso la correspondiente medida es $\nu(A) = \int_A \varphi_\varepsilon(y) dy$.

Por integración en la variable radial las formas (II) y (III) y aún la forma general de la identidad del valor medio pueden obtenerse de (I). Para probar (I) ver por ejemplo [Eva].

De las tres fórmulas presentadas (III) es la que, por tener un núcleo suave, permite obtener información sobre las derivadas de las funciones armónicas.

2.2. Dos fórmulas básicas del valor medio para soluciones de la ecuación del calor

Una amplia reseña sobre las fórmulas del valor medio para temperaturas y algunas aplicaciones usuales y otras posibles, se puede seguir en la introducción del trabajo de Fabes y Garófalo [FG] donde prueban algunas de estas fórmulas para el caso de soluciones de ecuaciones parabólicas con coeficientes variables.

Las temperaturas, soluciones $u(x, t) = u(x_1, \dots, x_d, t)$ de la ecuación del calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ en el dominio parabólico $\Omega = D \times (0, T)$, satisfacen una fórmula del valor medio la cual en algún sentido se asemeja al caso elíptico. En efecto, la temperatura u en (x, t) puede ser obtenida como el valor medio de u sobre objetos geométricos, construidos a través de conjuntos de nivel de la solución fundamental

$$W_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Mencionamos dos libros esenciales sobre ecuaciones parabólicas y regularidad clásica de sus soluciones: Friedman [Fri] y Lieberman [Lie]. Desde el punto de vista del análisis real o armónico asociado a estas fórmulas del valor medio parabólico, como ya mencionamos, no sólo difieren en la forma de estos objetos sino también, y tal vez más importante después de las desigualdades en el Teorema 19, en que (x, t) está localizado en un punto preciso de la frontera de los objetos sobre los cuales los valores medios se calculan.

Tomamos como fórmula básica del valor medio para las temperaturas a la dada en términos de integrales de volumen sobre las “bolas calóricas” en \mathbb{R}^{d+1} . Watson prueba este clásico resultado en [Wat2, Lema 4, pág. 390] a partir de fórmulas del valor medio sobre superficies probadas por Pini [Pin1, Pin2] y Fulks [Ful]. En [Eva, §2.3.2, Teorema 3] puede encontrarse, tal vez expuesto en una forma más clara, donde se obtiene directamente la fórmula sobre “sólidos” sin emplear una sobre “cáscaras”.

Para $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$ una bola calórica está definida por

$$(2.2) \quad E(x, t; r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{d+1} : s \leq t, W_{t-s}(x - y) \geq \frac{1}{r^d} \right\}.$$

Las bolas calóricas son una familia de subconjuntos convexos de \mathbb{R}^{d+1} invariantes por traslaciones. En efecto, $\mathcal{X}_{E(x,t;r)}(y, s) = \mathcal{X}_{E(0,0;r)}(x - y, s - t)$. Más aún, para cada $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$ las bolas calóricas $E(x, t; r)$ son crecientes como función de r y se contraen a (x, t) cuando $r \rightarrow 0$.

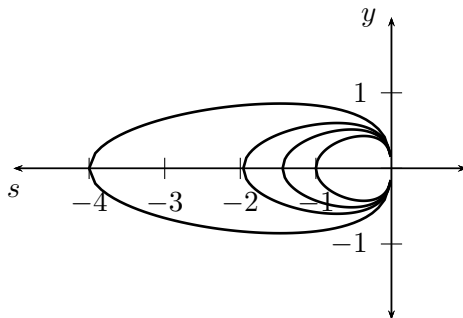


FIGURA 1. Algunas bolas calóricas en el origen en \mathbb{R}^2

TEOREMA 4 ([Eva]). *Sea u una temperatura en Ω . Entonces*

$$(2.3) \quad u(x, t) = \frac{1}{4r^d} \iint_{E(x,t;r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

si $E(x, t; r)$ está contenido en el dominio Ω de la temperatura u .

DEMOSTRACIÓN. Por completitud escribimos la demostración contenida en [Eva].

De la invariancia por traslaciones de las soluciones basta probar (2.3) para $x = 0$ y $t = 0$. Denotamos por $E(r)$ a la bola calórica $E(0, 0; r)$ centrada en el origen y de “radio” r . Hacemos

$\phi(r) = \frac{1}{r^d} \iint_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds$. Un cambio de coordenadas nos da

$$\phi(r) = \iint_{E(1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

Para calcular la derivada de ϕ respecto de r , sólo tenemos que derivar la expresión de adentro $u(ry, r^2s)$, y esto nos da

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \iint_{E(1)} \left(\sum_{i=1}^d u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2ru_s \frac{|y|^2}{s} \right) dy ds,$$

si ahora hacemos el cambio inverso al de antes tenemos

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} \left(\sum_{i=1}^d u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} \right) dy ds = A + B$$

aquí u_{y_i} denota la derivada parcial de u respecto de la variable y_i y u_s denota la derivada parcial respecto de la variable tiempo.

Para (y, s) en la frontera de $E(r)$ tenemos que $W_{-s}(y) = r^{-d}$, esto es $(4\pi(-s))^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{|y|^2}{4s}} = r^{-d}$, de donde se satisface que

$$\gamma(y, s) := -\frac{d}{2} \ln 4\pi(-s) + \frac{|y|^2}{4s} + d \ln r = 0 \quad (y, s) \in \partial E(r).$$

Como $\gamma_{y_i}(y, s) = \frac{y_i}{2s}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 2u_s \frac{|y|^2}{s} dy ds \\ &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4 \sum_{i=1}^d u_{y_i} y_i \gamma_{y_i} dy ds \\ &= -\frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4du_s \gamma + 4 \sum_{i=1}^d u_{s y_i} y_i \gamma dy ds \end{aligned}$$

donde hemos aplicado integración por partes respecto de y_i y el hecho que γ es cero en $\partial E(r)$.

Ahora integrando por partes pero respecto de s , vemos que

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} -4du_s \gamma dy ds + \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4 \sum_{i=1}^d u_{y_i} y_i \gamma_s dy ds \\ &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} -4du_s \gamma dy ds + \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4 \sum_{i=1}^d u_{y_i} y_i \left(-\frac{d}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} -4du_s \gamma - \frac{2d}{s} \sum_{i=1}^d u_{y_i} y_i dy ds - A. \end{aligned}$$

Pero u es una temperatura, es decir $u_s = \Delta u$, entonces

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = A + B$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} -4d \Delta u \gamma - \frac{2d}{s} \sum_{i=1}^d u_{y_i} y_i dy ds \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 4d u_{y_i} \gamma_{y_i} - \frac{2d}{s} u_{y_i} y_i dy ds \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{1}{r^{d+1}} \iint_{E(r)} 2d u_{y_i} \left(2\gamma_{y_i} - \frac{y_i}{s} \right) dy ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde hemos usado de nuevo integración por partes y el valor de γ_{y_i} en la última igualdad. Por lo tanto, ϕ es constante, y como $\frac{1}{\tau^d} \iint_{E(\tau)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4$, obtenemos que

$$\phi(r) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \phi(\tau) = u(0,0) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\tau^d} \iint_{E(\tau)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \right) = 4u(0,0).$$

Así está probada la fórmula (2.3) del valor medio para temperaturas. \square

De (2.3) usando coordenadas esféricas para la variable espacial, tomando derivadas con respecto a la variable radial, obtenemos la siguiente fórmula del valor medio en “cáscaras”.

TEOREMA 5. *Sea u una temperatura en un dominio Ω . Sean (x, t) en Ω y $r > 0$ tales que $E(x, t; r) \subset \Omega$. Entonces*

$$(2.4) \quad u(x, t) = -\frac{1}{2r^d} \int_{-\frac{r^2}{4\pi}}^0 \left(\int_{S^{d-1}} u(x + R_r(s)w, t + s) dw \right) \frac{R_r(s)^d}{s} ds,$$

$$\text{con } R_r(s) = \sqrt{-2sd \ln \frac{r^2}{4\pi s}}.$$

2.3. Fórmulas del valor medio parabólicas con núcleos suaves en la variable espacial

En esta sección obtenemos dos fórmulas del valor medio con un núcleo suave en la variable espacial, una construida como límite de sumas de valores medios sólidos dados por la fórmula básica (2.3) y otra partir de la versión sobre cáscaras de bolas del calor deducida también de dicha fórmula básica en la sección anterior.

En el siguiente teorema enunciamos la fórmula.

TEOREMA 6. *Sea u una temperatura en $\Omega = D \times (0, T)$, donde D es un conjunto abierto en \mathbb{R}^d y $0 < T \leq \infty$. Entonces existe una función real η no negativa, \mathcal{C}^∞ , compactamente soportada en $(0, 1)$ tal que*

$$(2.5) \quad u(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} K_\delta(x - y, t - s) u(y, s) dy ds$$

para todo $(x, t) \in \Omega$ y $0 < \delta < \delta(x, t)$, donde

$$K_\delta(x, t) = \frac{1}{\delta^{d+2}} K\left(\frac{x}{\delta}, \frac{t}{\delta^2}\right)$$

y K es el núcleo dado por

$$(2.6) \quad K(x, t) = \frac{1}{4} \eta\left((4\pi t)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{|x|^2}{4dt}}\right) \frac{|x|^2}{t^2}.$$

Notar que (2.5) es (2.3) si $\eta = \mathcal{X}_{(0,1)}$.

Comenzamos construyendo una función auxiliar suave ψ la cual nos llevará, en la demostración del Teorema 6, a la función η que buscamos.

LEMA 7. *Sea $d \in \mathbb{N}$ dado. Existe una función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

- (7.a) $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$;
- (7.b) $\text{sop } \psi \subset \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$;
- (7.c) $\int_0^1 \psi(a) da = 1$;
- (7.d) $\int_0^1 \frac{\psi(a)}{a^d} da = 0$;
- (7.e) $\int_\sigma^1 \frac{\psi(a)}{a^d} da > 0$ para cada $\sigma \in \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos considerando el caso $d = 1$. Notamos primero que la función simple

$$\psi^0(a) = 4 \left[(1 + \lambda) \mathcal{X}_{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}(a) - \lambda \mathcal{X}_{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}(a) \right]$$

donde $\lambda = \frac{\log(3/2)}{\log(4/3)}$, definida para $a > 0$, satisface (7.b) a (7.e) con $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ en lugar de $\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$.

Ahora procederemos a regularizar ψ^0 para producir la ψ que deseamos. Para lograr nuestro objetivo usaremos la estructura de grupo definida por el producto usual sobre \mathbb{R}^+ para la cual $\frac{da}{a}$ es la medida invariante de Haar. Tomamos una función φ no negativa, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \varphi(a) da = 1$ y con soporte contenido en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right)$ y definimos, para $x > 0$,

$$\psi(x) = \int_0^\infty \psi^0(a) \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \frac{da}{a}$$

la cual no es más que la convolución de ψ^0 y φ con respecto a la estructura de grupo sobre \mathbb{R}^+ con el producto usual. Notar que la integral que define $\psi(x)$ es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Vamos a comprobar que ψ satisface (7.a) a (7.e). La suavidad de ψ sigue de los argumentos usuales y de la regularidad y las propiedades del soporte de φ . Para probar (7.b), notamos que $\text{sop } \psi \subseteq \text{sop } \psi^0 \cdot \text{sop } \varphi \subseteq \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right) = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$. Las propiedades (7.c), (7.d) y (7.e) para $d = 1$ siguen del Teorema de Fubini y cambios de variables apropiados,

$$(7.c) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \psi(x) dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \psi^0(t) \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right) dx \\ &= \int_0^\infty \psi^0(t) \left(\int_0^\infty \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dx}{t} \right) dt \\ &= \left(\int_0^\infty \psi^0(t) dt \right) \left(\int_0^\infty \varphi(y) dy \right) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7.d) \quad \int_0^\infty \psi(x) \frac{dx}{x} &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \psi^0(t) \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right) \frac{dx}{x} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \psi^0\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(t) \frac{dt}{t} \right) \frac{dx}{x} \\
&= \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t} \left(\int_0^\infty \psi^0\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dx}{x} \right) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t} \left(\int_0^\infty \psi^0(z) \frac{dz}{z} \right) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t} \cdot 0 dt = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7.e) \quad \text{Para } z > \frac{1}{8}, \quad \int_z^\infty \psi(x) \frac{dx}{x} &= \int_z^\infty \left(\int_0^\infty \psi^0(t) \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right) \frac{dx}{x} \\
&= \int_0^\infty \frac{\psi^0(t)}{t} \left(\int_z^\infty \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dx}{x} \right) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\psi^0(t)}{t} \left(\int_{z/t}^\infty \varphi(y) \frac{dy}{y} \right) dt \\
&= \int_0^\infty \varphi(y) \left(\int_{t=z/y}^\infty \frac{\psi^0(t)}{t} dt \right) \frac{dy}{y} > 0.
\end{aligned}$$

Ahora consideramos cualquier $d \in \mathbb{N}$. Denotamos por ψ_1 a la función construida para $d = 1$. Tomamos $\psi(a) = \frac{1}{c} \psi_d(a) = \frac{1}{c} a^{d-1} \psi_1(a)$ donde $c = \int_{\mathbb{R}^+} a^{d-1} \psi_1(a) da$ es positiva como puede ser probado otra vez por el Teorema de Fubini, ya que

$$\int_{\mathbb{R}^+} t^{d-1} \psi^0(t) dt = \frac{4}{d2^d} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^d - 1 + \lambda \left(\frac{3^d + 1 - 2^{d+1}}{2^d} \right) \right] > 0.$$

□

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6. Fijamos $(x, t) \in \Omega$ y $m = 2, 3, \dots$. Para $j \in \mathbb{N}$ hacemos $E_j = E(0, 0; \frac{j}{m})$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ tal que $(x, t) + E_j \subset \Omega$, del Teorema 4 tenemos que

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \left(\frac{m}{j} \right)^d \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} u(y, s) \mathcal{X}_{E_j}(x - y, s - t) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds.$$

Tomamos $0 < \delta < \delta(x, t)$ y ψ una función continua en \mathbb{R}^+ con soporte contenido en el intervalo $(0, 1)$ y cuya integral es distinta de cero. Hacemos $\psi_\delta(a) = \frac{1}{\delta} \psi\left(\frac{a}{\delta}\right)$. Notar que, como $\sigma_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^\infty \psi_\delta\left(\frac{j}{m}\right)$ es una suma de Riemann para la integral de $\psi_\delta(a)$, entonces $\sum_{j=1}^\infty \psi_\delta\left(\frac{j}{m}\right) \neq 0$.

Multiplicando la ecuación de arriba por $\psi_\delta\left(\frac{j}{m}\right)$ y sumando en $j \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$(2.7) \quad u(x, t) = \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} u(y, s) S_m(x - y, s - t) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

con

$$S_m = \frac{1}{\sigma_m} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{m}{j} \right)^d \psi_\delta\left(\frac{j}{m}\right) \mathcal{X}_{E_j}$$

$$= \frac{\Sigma_m}{\sigma_m}$$

y $\Sigma_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{m}{j}\right)^d \psi_{\delta} \left(\frac{j}{m}\right) \mathcal{X}_{E_j}$.

Comenzamos identificando el límite puntual de S_m . Como ya hemos notado σ_m tiende a $\int_0^1 \psi_{\delta}(a) da \neq 0$. En cuanto a Σ_m observamos que para $j \geq 2$, $E_j = E_1 \cup \cup_{h=2}^j C_h$ con $C_h = E_h \setminus E_{h-1}$, el anillo calórico definido por las bolas calóricas. Por lo tanto,

$$\Sigma_m = \Sigma_m^1 + \Sigma_m^2,$$

donde $\Sigma_m^1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{m}{j}\right)^d \psi_{\delta} \left(\frac{j}{m}\right) \mathcal{X}_{E_1}$. Como $E_1 = E(0, 0; \frac{1}{m})$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{m}{j}\right)^d \psi_{\delta} \left(\frac{j}{m}\right)$ es una suma de Rieman que aproxima a la integral $\int_0^{\infty} \frac{\psi_{\delta}(a)}{a^d} da$ la cual es finita, $\text{sop } \psi_{\delta} \subset \mathbb{R}^+$ y ψ_{δ} es continua, tenemos que el límite cuando $m \rightarrow \infty$ de Σ_m^1 es nada más que $\int_0^{\infty} \frac{\psi_{\delta}(a)}{a^d} da$ veces la función característica del origen $(0, 0) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Para Σ_m^2 tenemos que

$$\begin{aligned} \Sigma_m^2 &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{m} \psi_{\delta} \left(\frac{j}{m}\right) \left(\frac{m}{j}\right)^d \sum_{h=2}^j \mathcal{X}_{C_h} \\ &= \sum_{h=2}^{\infty} \mathcal{X}_{C_h} \sum_{j=h}^{\infty} \frac{1}{m} \psi_{\delta} \left(\frac{j}{m}\right) \left(\frac{m}{j}\right)^d. \end{aligned}$$

Notar ahora que para un punto dado (ξ, τ) con $\xi \in \mathbb{R}^d$ y $\tau > 0$ debe existir M tal que $(\xi, \tau) \notin E(0, 0; \frac{1}{m})$ para ningún $m \geq M$. Por lo tanto para cada uno de estos m existe uno y sólo un valor de $h = 2, 3, \dots$ tal que $\frac{h-1}{m} < W^{-\frac{1}{d}}(\xi, \tau) \leq \frac{h}{m}$. Así que $\Sigma_m^2(\xi, \tau)$ está dado por la expresión $\sum_{j=h}^{\infty} \psi_{\delta} \left(\frac{j}{m}\right) \left(\frac{m}{j}\right)^d \frac{1}{m}$, la cual, excepto por un primer término, es una suma de Rieman para la integral de $\frac{\psi_{\delta}(a)}{a^d}$ sobre la semirrecta $(W^{-\frac{1}{d}}(\xi, \tau), \infty)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_m^2(\xi, \tau) &= \int_{(W(\xi, \tau))^{-\frac{1}{d}}}^{\infty} \frac{\psi_{\delta}(a)}{a^d} da \\ &= \int_{(W(\xi, \tau))^{-\frac{1}{d}}}^{\infty} \frac{\psi \left(\frac{a}{\delta}\right)}{a^d} \frac{da}{\delta} \\ &= \frac{1}{\delta^d} \int_{\frac{(W(\xi, \tau))^{-\frac{1}{d}}}{\delta}}^{\infty} \frac{\psi(a)}{a^d} da \\ &= \frac{1}{\delta^d} \eta \left(\frac{1}{\delta} W(\xi, \tau)^{-\frac{1}{d}}\right). \end{aligned}$$

donde $\eta(\sigma) = \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(a)}{a^d} da$.

Si usamos una función ψ dada por el Lema 7, de (7.a), (7.b) y (7.d), vemos que $\eta \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$, más aún el soporte de η está contenido en el intervalo $(\frac{1}{8}, \frac{7}{8})$. De (7.e) también tenemos que $\eta \geq 0$. Así de (7.d) y (7.c), S_m es uniformemente convergente a la función $\frac{1}{\delta^d} \eta \left(\frac{1}{\delta} W(\xi, \tau)^{-\frac{1}{d}}\right)$. Teniendo en cuenta (2.6) observamos que,

$$\frac{1}{\delta^d} \eta \left(\frac{1}{\delta} W(\xi, \tau)^{-\frac{1}{d}}\right) \frac{|\xi|^2}{\tau^2} = \frac{1}{\delta^{d+2}} \eta \left(W^{-\frac{1}{d}} \left(\frac{\xi}{\delta}, \frac{\tau}{\delta^2}\right)\right) \frac{\left(\frac{|\xi|}{\delta}\right)^2}{\left(\frac{\tau}{\delta^2}\right)^2} = K_{\delta}(\xi, \tau).$$

Nos falta comprobar que podemos usar el Teorema de la Convergencia Dominada en (2.7) para mostrar (2.5). En efecto, los soportes de cada $u(y, s)S_m(x - y, s - t)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}$ como función de (y, s) para (x, t) fijo están contenidos en un conjunto compacto fijo C de \mathbb{R}^{d+1} . De este modo $u(y, s)S_m(x - y, s - t)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}$ es uniformemente acotada por arriba por una constante veces $\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\mathcal{X}_C(y, s)$. Finalmente, notamos que la expresión anterior es integrable como una función de (y, s) para $\delta > 0$. Por la homogeneidad del núcleo, por el Teorema de Tonelli y la definición de las fronteras de las bolas calóricas tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{E(0,0;1)} \frac{\xi^2}{\tau^2} d\xi d\tau &\leq \int_0^1 \int_{B(0, \sqrt{d\tau \ln \frac{1}{\sqrt{\tau}}})} \frac{|\xi|^2}{\tau^2} d\xi d\tau \\ &= c(d) \int_0^1 \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\sqrt{d\tau \ln \frac{1}{\sqrt{\tau}}}} r^2 r^{d-1} dr d\tau \\ &= c(d) \int_0^1 \frac{1}{\tau^2} \left(\tau \ln \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right)^{1+\frac{d}{2}} d\tau \\ &= c(d) \int_0^1 \tau^{\frac{d}{2}-1} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right)^{1+\frac{d}{2}} d\tau < \infty. \end{aligned}$$

□

Observamos que el Teorema 6 dice que existe una función η suave en la variable espacial para el núcleo del valor medio, sin embargo, el Teorema 5 nos permite probar que vale una identidad del valor medio de ese tipo para casi toda η .

COROLARIO 8. *Sea η una función $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, no negativa soportada en $[0, 1]$ que satisface que $d \int_0^1 \eta(r)r^{d-1}dr = 1$. Entonces para toda temperatura u tenemos que*

$$(2.8) \quad u(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} K_\delta(x - y, t - s)u(y, s)dyds$$

donde K es como en el Teorema 6.

DEMOSTRACIÓN. Como antes basta probar la fórmula (2.8) para $(x, t) = (0, 0)$. Tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño de tal forma que la clausura de $E(0, 0; \delta)$ esté contenida en el dominio de la temperatura u . Multiplicando ambos lados de (2.4) por $2d\eta(\frac{r}{\delta})r^{d-1}$ e integrando con respecto a r en el intervalo $(0, \delta)$, obtenemos

$$(2.9) \quad \begin{aligned} u(0, 0) \int_0^\delta 2d\eta\left(\frac{r}{\delta}\right)r^{d-1}dr \\ = -d \int_0^\delta \int_{-\frac{r^2}{4\pi}}^0 \left(\int_{S^{d-1}} u(R_r(s)w, s)dS(w) \right) \frac{R_r(s)^d}{s} ds \eta\left(\frac{r}{\delta}\right) \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Observamos que la elección del soporte de η nos permite aplicar el Teorema de Fubini para intercambiar los órdenes de integración en (2.9). Entonces, para s fijo, realizando el cambio de

variables $r \mapsto \tau = R_r(s)$ y teniendo en cuenta que $\frac{dR_r(s)}{dr} = -2sd\tau^{-1}r^{-1}$ de donde $\frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2sd}d\tau$, obtenemos la fórmula que queremos,

$$\begin{aligned}
2\delta^d u(0,0) &= -d \int_{-\frac{\delta^2}{4\pi}}^0 \frac{1}{s} \int_{\sqrt{-4\pi s}}^{\delta} \int_{S^{d-1}} u(R_r(s)w, s) dS(w) R_r(s)^d \eta\left(\frac{r}{\delta}\right) \frac{dr}{r} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\delta^2}{4\pi}}^0 \frac{1}{s} \int_{R_{\sqrt{-4\pi s}}(s)}^{R_\delta(s)} \int_{S^{d-1}} u(\tau w, s) dS(w) \frac{\tau^{d+1}}{s} \eta(r(\tau)) d\tau ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\delta^2}{4\pi}}^0 \frac{1}{s^2} \int_0^{R_\delta(s)} \tau^{d+1} \int_{S^{d-1}} u(\tau w, s) dS(w) \eta\left(\frac{1}{\delta}(-4\pi s)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\tau^2}{4ds}}\right) d\tau ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\delta^2}{4\pi}}^0 \int_{B(0; R_\delta(s))} u(y, s) \eta\left(\frac{1}{\delta}(-4\pi s)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-|y|^2}{4ds}}\right) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds,
\end{aligned}$$

en la tercera igualdad hemos usado que $R_{\sqrt{-4\pi s}}(s) = 0$. Aquí $B(0; R_\delta(s))$ denota la bola euclídea d -dimensional centrada en el origen de radio $R_\delta(s)$. \square

Notamos que la función η que obtenemos en la demostración del Teorema 6 tiene soporte en el intervalo abierto $(0, 1)$, en el corolario anterior el soporte de η puede ser el intervalo cerrado $[0, 1]$.

CAPÍTULO 3

Aproximaciones de la identidad para el núcleo del valor medio calórico

Como vimos en el capítulo anterior, la fórmula del valor medio básica para temperaturas en \mathbb{R}^{d+1} , afirma que si u es una solución de la ecuación del calor en el dominio Ω de \mathbb{R}^{d+1} , la identidad

$$u(x, t) = \iint_{\Omega} k_{\delta}(x - y, t - s)u(y, s) dy ds$$

es cierta para todo $(x, t) \in \Omega$ y para todo $\delta > 0$ para el cual el soporte de $k_{\delta}(x - \cdot, t - \cdot)$ que es $\frac{1}{\delta^{d+2}}k(\frac{x-\cdot}{\delta}, \frac{t-\cdot}{\delta^2})$ está contenido en Ω . El núcleo k está dado por $k(x, t) = \frac{1}{4} \frac{|x|^2}{t^2} \mathcal{X}_{E(0,0;1)}(x, -t)$ donde $E(0, 0; 1)$ es la bola calórica en el origen del espacio-tiempo de “radio” uno, dada por

$$E(0, 0; 1) = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : t \leq 0, (-4\pi t)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \leq 1 \right\}$$

Para $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{d+1})$ y $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$, hacemos

$$(k_{\delta} * f)(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} k_{\delta}(x - y, t - s)f(y, s) dy ds.$$

En este capítulo buscamos estimaciones para el operador maximal $k^*f = \sup_{\delta > 0} |k_{\delta} * f|$ en términos de operadores de tipo Hardy-Littlewood los cuales preserven, en lo posible, las dos características básicas de los núcleos k_{δ}

- la forma parabólica de los soportes,
- el comportamiento lateral de k_{δ} como funciones de t .

Además de los operadores M^- y M_d introducidos en el Capítulo 1, en este capítulo haremos uso de otras dos funciones maximales de Hardy-Littlewood parabólicas,

$$\mathcal{M}f(x, t) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|\mathcal{B}(x, t; r)|} \iint_{\mathcal{B}(x, t; r)} |f(y, s)| dy ds$$

donde $\mathcal{B}(x, t; r) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^{d+1} : (\frac{|x-y|}{r})^2 + (\frac{|t-s|}{r^2})^2 < 1\}$. Por $\mathcal{M}^-f(x, t)$ denotamos el operador maximal parabólico con respecto a los “semitplanos inferiores” de las bolas parabólicas

$$\mathcal{M}^-f(x, t) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|\mathcal{B}^-(x, t; r)|} \iint_{\mathcal{B}^-(x, t; r)} |f(y, s)| dy ds$$

donde $\mathcal{B}^-(x, t; r) = \{(y, s) \in \mathcal{B}(x, t; r) : s \leq t\}$.

3.1. Aproximaciones de la identidad laterales parabólicas

Dada una función medible real \mathcal{K} definida en \mathbb{R}^{d+1} y un número real positivo δ , hacemos $\mathcal{K}_\delta(x, t) = \frac{1}{\delta^{d+2}} \mathcal{K}\left(\frac{x}{\delta}, \frac{t}{\delta^2}\right)$. Consideramos la siguiente función de una variable decreciente definida en \mathbb{R}^+ por

$$(3.1) \quad \kappa(\lambda) = \sup_{\rho(x,t) \geq \lambda} |\mathcal{K}(x, t)|.$$

Aquí ρ es la métrica parabólica y T_r la dilatación parabólica que definimos en la Sección 1.2 del Capítulo 1.

TEOREMA 9. *Sea \mathcal{K} un núcleo medible en \mathbb{R}^{d+1} el cual se anula para $t < 0$. Supongamos que ρ es la métrica parabólica y κ está dada por (3.1), la función $\kappa \circ \rho(x, t) = \kappa(\rho(x, t))$ está en $L^1(\mathbb{R}^{d+1})$. Entonces existe una constante C , que depende sólo de la dimensión d y de la norma L^1 de $\kappa \circ \rho$, tal que la desigualdad*

$$\mathcal{K}^* f(x, t) \leq C \mathcal{M}^- f(x, t)$$

vale para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$, donde $\mathcal{K}^* f(x, t) = \sup_{\delta > 0} |(\mathcal{K}_\delta * f)(x, t)|$.

DEMOSTRACIÓN. Para $\delta > 0$ fijo y $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |(\mathcal{K}_\delta * f)(x, t)| &\leq \iint_{\{s \geq 0\}} |\mathcal{K}_\delta(y, s)| |f(x - y, t - s)| dy ds \\ &= \frac{1}{\delta^{d+2}} \iint_{\{s \geq 0\}} |\mathcal{K}\left(\frac{y}{\delta}, \frac{s}{\delta^2}\right)| |f(x - y, t - s)| dy ds \\ &\leq \frac{1}{\delta^{d+2}} \iint_{\{s \geq 0\}} \kappa\left(\rho\left(T_{\frac{1}{\delta}}(y, s)\right)\right) |f(x - y, t - s)| dy ds \\ &= \frac{1}{\delta^{d+2}} \iint_{\{s \geq 0\}} \kappa\left(\frac{\rho(y, s)}{\delta}\right) |f(x - y, t - s)| dy ds. \end{aligned}$$

Como de costumbre, pero con la distancia parabólica en lugar de la euclídea, procedemos a descomponer el dominio de integración en una sucesión de anillos diádicos con respecto a ρ . Como κ es decreciente y de las observaciones presentadas en la sección 1.2 concerniente a la medida de las ρ -bolas tenemos que

$$\begin{aligned} |(\mathcal{K}_\delta * f)(x, t)| &\leq \frac{1}{\delta^{d+2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \kappa(2^j) \iint_{\{(y,s): s \geq 0, \delta 2^j \leq \rho(y,s) < \delta 2^{j+1}\}} |f(x - y, t - s)| dy ds \\ &\leq \left(\frac{1}{\delta^{d+2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{B}^-(0, 0; \delta 2^{j+1})| \kappa(2^j) \right) \mathcal{M}^- f(x, t) \\ &= c \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{(d+2)(j+1)} \kappa(2^j) \right) \mathcal{M}^- f(x, t). \end{aligned}$$

Basta solamente comprobar que la serie converge. Pero, por la monotonía de κ podemos ir hacia atrás de la serie a la integral

$$\iint_{\mathbb{R}^{d+1}} \kappa(\rho(y, s)) dy ds.$$

□

Nos gustaría observar que el resultado anterior puede ser extendido, con el mismo método, a dilataciones más generales que las T_r usadas aquí (ver por ejemplo [dG, Capítulo 11]).

3.2. Estimaciones maximales para el núcleo del valor medio

En esta sección enunciamos y demostramos el teorema que contiene las estimaciones puntuales para $k^* f = \sup_{\delta > 0} |k_\delta * f|$, el operador maximal asociado al núcleo del valor medio para la ecuación del calor, tomando $\mathcal{K}(x, t) = k(x, t) = \frac{1}{4} \frac{|x|^2}{t^2} \mathcal{X}_{E(0,0;1)}(x, -t)$.

TEOREMA 10. *Las siguientes estimaciones son ciertas para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$, y para alguna constante dimensional C :*

$$(10.a) \quad k^* f(x, t) \leq CMf(x, t);$$

$$(10.b) \quad k^* f(x, t) \leq C M^- M_d f(x, t),$$

donde el lado derecho es el operador maximal iterado que se obtiene por la composición de M_d actuando sobre la variable espacial, para el tiempo fijo, y M^- , el operador maximal lateral uno dimensional en la variable tiempo, explícitamente

$$M^- M_d f(x, t) = \sup_{h > 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \left(\sup_{r > 0} \frac{1}{r^d} \int_{B(x,r)} |f(y, s)| dy \right) ds.$$

Más aún,

$$(10.c) \quad k^* f(x, t) \leq CM^- f(x, t).$$

Notamos que las desigualdades

$$\mathcal{M}^- f(x, t) \leq 2\mathcal{M}f(x, t) \quad \text{y} \quad \mathcal{M}^- f(x, t) \leq M^- M_d f(x, t)$$

se deducen fácilmente de la definición misma de todas aquellas funciones maximales y del hecho que las secciones para tiempos fijos de las ρ -bolas son bolas euclídeas en \mathbb{R}^d . Así para probar el Teorema 10 sólo basta probar que (10.c) es cierta.

Con respecto al significado y a las consecuencias de (10.a) y de (10.b), queremos señalar que la primera de ellas nos da un tipo débil (1,1) de k^* y, como subproducto, un teorema de diferenciación para la familia de núcleos k_δ cuando $\delta \rightarrow 0$ para cualquier $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{d+1})$. Además (10.a) muestra que la clase de Muckenhoupt $A_p(\mathcal{B})$ definida sobre las bolas parabólicas \mathcal{B} provee “buenos” pesos $w(x, t)$ para la acotación en $L^p(\mathbb{R}^{d+1}, w dx dt)$ de k^* , cuando $1 \leq p < \infty$. La desigualdad (10.b), con un lado derecho dado por la iteración de dos operadores maximales, no da tal información sobre el comportamiento de k^* en espacios L^1 , da lugar a otra información

de la acotación $L^p(\mathbb{R}^{d+1}, w dx dt)$ de k^* cuando $p > 1$. En efecto, de los resultados de [Saw] y [MR], se deduce que hay pesos que no pertenecen a $A_p(\mathcal{B})$ que satisfacen aún la desigualdad

$$\|k^* f\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1}, w dx dt)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1}, w dx dt)}.$$

Por otra parte (10.c) muestra que k^* y \mathcal{M}^- son equivalentes, ya que la estimación en el otro sentido es directa. Por lo tanto el problema de caracterizar los pesos en \mathbb{R}^{d+1} para los cuales k^* es acotado en L^p coincide con el de caracterizar los pesos para los cuales \mathcal{M}^- es acotado en L^p . Nuestros resultados sólo dan condiciones suficientes y el problema de caracterización está vinculado con la difícil cuestión del análisis “lateral” en dimensiones mayores. Primeros resultados en esta dirección pueden verse en [Omb], [FMRO].

También observamos que, como para funciones continuas f definidas en \mathbb{R}^{d+1} , tenemos que $k_\delta * f(x)$ converge a $f(x)$ en todo punto x , estas estimaciones de tipo L^p para k^* implican que $\{k_\delta * f : \delta > 0\}$ es una buena aproximación de la identidad en cada uno de aquellos espacios de Lebesgue.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 10. Mostraremos que el núcleo

$$k(x, t) = \frac{1}{4} \frac{|x|^2}{t^2} \mathcal{X}_{E(0,0;1)}(x, -t)$$

satisface las hipótesis del Teorema 9. De la definición del conjunto $E(0, 0; 1)$ se sigue inmediatamente que k se anula para $t < 0$. Queremos obtener una estimación superior para

$$\kappa(\lambda) = \sup_{\rho(x,t) \geq \lambda} k(x, t), \quad \lambda > 0.$$

Denotamos por $E^*(0, 0; 1)$ a la reflexión de $E(0, 0; 1)$ con respecto al hiperplano $\{t = 0\}$. En otras palabras, $E^*(0, 0; 1) = -E(0, 0; 1)$. Primero notamos que si $\lambda > \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, entonces el conjunto $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : \rho(x, t) \geq \lambda\}$ no interseca al soporte de k . Así podemos tomar $\kappa(\lambda) = 0$ para $\lambda > \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. Por otro lado, para todo $\lambda_0 > 0$ el núcleo $\kappa(\lambda)$ está acotado por arriba en el semiplano $\lambda \geq \lambda_0$ por una constante la cual, por supuesto, depende de λ_0 . Así, sólo tenemos que tener cuidado en el comportamiento de κ para valores de λ suficientemente pequeños. Más aún, será suficiente acotar $\sup_{\lambda_0 > \rho(x,t) \geq \lambda} k(x, t)$ para algún λ_0 pequeño y para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$. La intersección de las fronteras de $E^*(0, 0; 1)$ y de $\mathcal{B}(0, 0; \lambda)$ está dada por

$$(3.2) \quad \partial E^*(0, 0; 1) \cap \partial \mathcal{B}(0, 0; \lambda) = S(0, r(\lambda)) \times \{t(\lambda)\}$$

para ciertos números positivos $r(\lambda)$ y $t(\lambda)$, donde $S(0, r)$ es la superficie esférica euclídea $d - 1$ dimensional centrada en el origen de \mathbb{R}^d de radio r . En efecto, como la ecuación para $\partial E^*(0, 0; 1)$ está dada por

$$(3.3) \quad |x|^2 = 2dt \ln \frac{1}{4\pi t}$$

y $\partial \mathcal{B}(0, 0; \lambda)$ está implícitamente definida por

$$(3.4) \quad \frac{|x|^2}{\lambda^2} + \frac{t^2}{\lambda^4} = 1,$$

sustituyendo (3.3) en (3.4) tenemos una ecuación en t y λ la cual para λ pequeño tiene una y sólo una solución $t(\lambda) > 0$. Así (3.2) es cierta para $r^2(\lambda) = 2dt(\lambda) \ln \frac{1}{4\pi t(\lambda)}$. Notar ahora que de la definición de $k(x, t)$, tenemos que para cualesquiera puntos interiores (x, t_1) y (x, t_2) del conjunto $E^*(0, 0; 1)$ con $t_1 < t_2$, $k(x, t_1) \geq k(x, t_2)$. También, si (x, t) y (y, t) pertenecen a $E^*(0, 0; 1)$ y $|x| \leq |y|$ entonces $k(x, t) \leq k(y, t)$. A continuación vamos a estudiar a la restricción de k a la frontera de $E^*(0, 0; 1)$. Teniendo en cuenta (3.3) obtenemos que $k|_{\partial E^*}$ está dada, como una función de $t > 0$, por

$$(3.5) \quad \frac{d}{2t} \ln \frac{1}{4\pi t},$$

la cual es sin dudas una función decreciente como función de t . Las observaciones anteriores muestran que el supremo de $k(x, t)$ adentro del anillo parabólico $\lambda_0 > \rho(x, t) \geq \lambda$ se alcanza en cualquier punto de la superficie esférica $S(0, r(\lambda)) \times \{t(\lambda)\}$, y de (3.5),

$$(3.6) \quad \sup_{\lambda_0 > \rho(x, t) \geq \lambda} k(x, t) = \frac{d}{2t(\lambda)} \ln \frac{1}{4\pi t(\lambda)}.$$

Sustituyendo (3.3) en (3.4) tenemos una expresión cuadrática en $\frac{t}{\lambda^2}$ dada por

$$\left(\frac{t}{\lambda^2}\right)^2 + 2d \ln \frac{1}{4\pi t} \left(\frac{t}{\lambda^2}\right) - 1 = 0.$$

Así, como $t > 0$, tenemos la siguiente relación para t y λ

$$\frac{t}{\lambda^2} = -d \ln \frac{1}{4\pi t} + \sqrt{d^2 \ln^2 \frac{1}{4\pi t} + 1},$$

de la cual resulta $\lambda(t) = \frac{\sqrt{t}}{a(t)}$ donde

$$a(t) = \sqrt{\sqrt{d^2 \ln^2 \frac{1}{4\pi t} + 1} - d \ln \frac{1}{4\pi t}}.$$

Las siguientes propiedades de la función $\lambda(t)$ son fáciles de comprobar y nos proveen de una cota inferior para $t(\lambda)$ cuando λ es suficientemente pequeño, y nos conduce a obtener una cota superior integrable para $\kappa \circ \rho$.

(I) Para $t > 0$ suficientemente pequeño, $\lambda'(t) > 0$.

(II) Para todo $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ existe $t_0(\varepsilon) > 0$ tal que $\lambda(t) \leq t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ para todo $t \in (0, t_0(\varepsilon))$.

Primero demostramos cómo el Teorema 10 sigue de (I) y de (II). De (I) la desigualdad en (II) puede ser reescrita en términos de las funciones inversas como

$$t(\lambda) \geq \lambda^{\frac{2}{1-2\varepsilon}}$$

para $0 < \lambda < \lambda(t_0(\varepsilon))$. Sustituyendo la desigualdad de arriba en (3.6), para aquellos valores de λ , obtenemos la estimación

$$\sup_{\lambda(t_0(\varepsilon)) > \rho(x, t) \geq \lambda} k(x, t) \leq \frac{d}{2\lambda^{\frac{2}{1-2\varepsilon}}} \ln \frac{1}{4\pi \lambda^{\frac{2}{1-2\varepsilon}}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{d}{1-2\varepsilon} \lambda^\varepsilon \ln \left(\frac{(4\pi)^{\frac{2\varepsilon-1}{2}}}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{1-2\varepsilon}+\varepsilon}} \\ &\leq \frac{c}{\lambda^\beta} \end{aligned}$$

donde $\beta = \frac{2}{1-2\varepsilon} + \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{8}$ y $\lambda_0 = \lambda(t_0(\frac{1}{8}))$, tenemos que $\beta < 3 \leq d+2$ para $d = 1, 2, 3, \dots$. Así para todo $(x, t) \in \mathcal{B}(0, 0; \lambda_0)$ tenemos que

$$\kappa(\rho(x, t)) \leq \frac{c}{\rho^\beta(x, t)}$$

para $\beta < d+2$. Ahora descomponiendo diádicamente la ρ -bola centrada en $(0, 0)$ de radio λ_0 , obtenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{B}(0, 0; \lambda_0)} \frac{dxdt}{\rho^\beta(x, t)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \iint_{\{(x, t): \lambda_0 2^{-(j+1)} \leq \rho(x, t) < \lambda_0 2^{-j}\}} \frac{dxdt}{\rho^\beta(x, t)} \\ &\leq \lambda_0^{-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} |\mathcal{B}(0, 0; \lambda_0 2^{-j})| 2^{\beta(j+1)} \\ &= c(\lambda_0, d) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(d+2-\beta)j} < \infty. \end{aligned}$$

Así de estas estimaciones y de la observación al comienzo de la demostración obtenemos que $\kappa \circ \rho \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$ y el Teorema 9 puede ser aplicado.

Finalmente esbozamos las demostraciones de (I) y de (II). Hacemos $s = d \ln \frac{1}{4\pi t}$, para probar (I), sólo tenemos que comprobar que $\Lambda'(s) < 0$ para s suficientemente grande donde $\Lambda(s)$ es la solución positiva de $4\pi\Lambda^2(s) = e^{-\frac{s}{d}} / (\sqrt{s^2+1} - s)$. A su vez, esto es equivalente a mostrar que la derivada de la última expresión es negativa para s grande. Esta derivada nos conduce inmediatamente a la desigualdad $1 + \frac{s}{d} - \frac{1}{d}\sqrt{s^2+1} - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} < 0$, la cual es cierta para $s \geq s_0$ para algún s_0 . Para probar (II), dado que $\lambda(t) = \frac{\sqrt{t}}{a(t)} = \Lambda(s) = e^{-\frac{s}{2d}} / (\sqrt{4\pi}A(s))$, con $A^2(s) = \sqrt{s^2+1} - s$, sólo necesitamos mostrar que para s suficientemente grande $A^2(s) \geq \frac{1}{(4\pi)^{2\varepsilon}} e^{-\frac{2s}{d}\varepsilon}$. Pero la última desigualdad es equivalente a

$$\ln \frac{\sqrt{s^2+1} + s}{(4\pi)^{2\varepsilon}} \leq \frac{2\varepsilon}{d}s,$$

la cual es cierta para $s \geq s_0(\varepsilon, d)$. Esto termina la demostración del Teorema 10. \square

Para finalizar mostramos que para $d = 1$ la mínima mayorante “radial-elíptica” no pertenece a $L^1(\mathbb{R}^2)$.

LEMA 11. *Para $d = 1$, en un pequeño entorno del origen de \mathbb{R}^2 la desigualdad*

$$\sup_{|(y, s)| \geq |(x, t)|} k(y, s) \geq \frac{c}{|(x, t)|^2}$$

es cierta para alguna constante positiva c .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que probar que $\bar{\kappa}(r) = \sup_{|(y,s)| \geq r} k(y,s) \geq \frac{c}{r^2}$ para $r > 0$ suficientemente pequeño. Para obtener una cota inferior de $k(y,s)$ cuando $|(y,s)| \geq r$, procedemos como lo hicimos en la demostración del Teorema 10, sustituyendo la ecuación (3.4) por la superficie esférica euclídea en \mathbb{R}^{d+1} de radio r : $|x|^2 + t^2 = r^2$. De esta manera, para los puntos en la intersección de las fronteras de $E^*(0,0;1)$ y de $B(0,0;r)$, obtenemos

$$t^2 + \left(2d \ln \frac{1}{4\pi t}\right) t = r^2(t).$$

Notar que $\bar{\kappa}(r) \geq \frac{1}{4} \frac{|x|^2}{t^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{r^2(t)}{t^2} - 1\right)$ para (x,t) en el conjunto $\partial E^*(0,0;1) \cap \partial B(0,0;r)$. Así $\bar{\kappa}(r) \geq \frac{d}{2t} \ln \frac{1}{4\pi t}$ para $r = r(t)$. Dado que para t chico la función $(t + 2d \ln \frac{1}{4\pi t}) \ln \frac{1}{4\pi t}$ está acotada por abajo por una constante positiva, tenemos que $\bar{\kappa}(r) \geq \frac{c}{r^2}$ para alguna constante c . \square

Mencionamos que los resultados de este capítulo están contenidos en [AG11].

CAPÍTULO 4

Derivadas espaciales del núcleo del valor medio

El propósito de este capítulo es obtener una fórmula explícita para las derivadas espaciales del núcleo K_δ que hemos introducido en el Capítulo 2. Recordamos que $K(x, t) = \frac{1}{4} \frac{|x|^2}{t^2} \eta(\nu(x, t))$ donde η es una función no negativa, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, soportada en $[0, 1]$ y satisface que $d \int_0^1 \eta(r) r^{d-1} dr = 1$ y $\nu(x, t) = (4\pi t)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{|x|^2}{4dt}}$. También probaremos aquí algunas propiedades estructurales útiles de la familia de los núcleos que representan aquellas derivadas.

Para cada $\delta > 0$ fijo se tiene que para t en \mathbb{R} fijo la función $K_\delta(x, t)$ es infinitamente diferenciable como función de x . Denotemos con $N^\alpha(x, t)$ a la derivada (clásica) $\partial^\alpha K = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_d^{\alpha_d} \dots \partial x_1^{\alpha_1}} K$ de K donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ es un multi-índice de enteros no negativos ($\alpha \in \mathbb{N}_0^d$). Notemos que, $N^\alpha(x, t) = 0$ si $t \geq 0$. Pero puesto que $K \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$ también podemos preguntarnos por la forma de sus derivadas espaciales como distribuciones. Como es frecuente en problemas de análisis armónico que involucran singularidades en los núcleos, las derivadas distribucionales *coinciden* con las clásicas en algunas regiones del espacio pero no *son* las clásicas como entes globales.

Denotamos por $D^\alpha K$ la derivada distribucional de K . Aún cuando estas derivadas no son generalmente funciones, podemos probar algunas fórmulas de representación integrales. El resultado preciso está contenido en el Teorema 15 y en el Teorema 16. Los paréntesis angulares $\langle \cdot, \cdot \rangle$ los usaremos para la dualidad distribucional de $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ y \mathcal{E}' el espacio de las distribuciones de soporte compacto.

Observamos que N^α en general no es una función integrable en \mathbb{R}^{d+1} . En efecto, por ejemplo para $d = 1$ y $\alpha = 1$, con $\eta_1(s) = s\eta'(s)$ tenemos que

$$(4.1) \quad N^\alpha(x, t) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{t^3} \eta_1(\nu(x, t)) + 2 \frac{x}{t^2} \eta(\nu(x, t)).$$

Es fácil ver que si por ejemplo η es una constante positiva sobre el intervalo $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, tenemos que $\iint_{\{(x,t): \frac{1}{4} < \nu(x,t) < \frac{3}{4}, x > 0\}} \frac{x}{t^2} \eta(\nu(x, t)) dx dt = +\infty$. Por otro lado, como $\eta_1(s)$ se anula para $s \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, vemos que

$$\iint_{\{(x,t): \frac{1}{4} < \nu(x,t) < \frac{3}{4}, x > 0\}} |N^\alpha(x, t)| dx dt = \iint_{\{(x,t): \frac{1}{4} < \nu(x,t) < \frac{3}{4}, x > 0\}} \frac{2x}{t^2} \eta(\nu(x, t)) dx dt = +\infty.$$

4.1. Fórmula de representación de las derivadas para $d = 1$

En esta sección demostraremos la fórmula de representación para la derivada primera en el espacio unidimensional para la variable espacial, remarcando los pasos esenciales que luego extenderemos a más dimensiones en la sección siguiente. Para simplificar la notación, en esta sección llamaremos N a N^α cuando $d = 1$ y $\alpha = 1$.

LEMA 12. *Para toda v en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ y para todo $\delta > 0$ tenemos que*

$$(4.2) \quad D(K_\delta * v)(x, t) = \frac{1}{\delta^4} \iint_{\mathbb{R}^2} N\left(\frac{x-y}{\delta}, \frac{t-s}{\delta^2}\right) [v(y, s) - v(x, s)] dy ds.$$

DEMOSTRACIÓN. Como K_δ es una distribución con soporte compacto, para $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ tenemos que $D(K_\delta * v) = (DK_\delta) * v$. Mostraremos que

$$(4.3) \quad \langle DK_\delta, \varphi \rangle = \frac{1}{\delta^4} \iint_{\mathbb{R}^2} N\left(\frac{y}{\delta}, \frac{s}{\delta^2}\right) [\varphi(y, s) - \varphi(0, s)] dy ds$$

para cualquier función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Así, de esta igualdad se deduce (4.2).

Sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Por definición de derivada débil, dado que el núcleo $K_\delta \in L^1(\mathbb{R}^2)$ y tiene soporte acotado, y luego aplicando el teorema de Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle D_x K_\delta, \varphi \rangle &= - \langle K_\delta, \partial_x \varphi \rangle \\ &= - \iint_{\mathbb{R}^2} K_\delta(x, t) \partial_x \varphi(x, t) dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} K_\delta(x, t) \partial_x \varphi(x, t) dx \right\} dt \end{aligned}$$

Integramos por partes en la variable x la expresión entre llaves en la última integral, usamos que K_δ tiene soporte acotado, así obtenemos que

$$(4.4) \quad \langle D_x K_\delta, \varphi \rangle = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} N_\delta(x, t) \varphi(x, t) dx \right\} dt,$$

donde se obtiene la fracción $\frac{1}{\delta}$ en el lado derecho porque derivamos una vez en la variable espacial al núcleo K_δ . Notar que no podemos cambiar el orden en la integración iterada puesto que, como ya lo observamos, N no es integrable en \mathbb{R}^2 , y por lo tanto tampoco lo es $N_\delta \varphi$ para φ arbitraria.

Sin embargo, puesto que para s fijo, $N(y, s)$ es la derivada con respecto a y de una función suave con soporte compacto, $K(y, s)$, se tiene que $\int_{\mathbb{R}} N_\delta(y, s) dy = 0$ para cada s . Luego (4.4) es equivalente a

$$(4.5) \quad \langle D_x K_\delta, \varphi \rangle = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} N_\delta(x, t) [\varphi(x, t) - \varphi(0, t)] dx \right\} dt$$

para cada $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $\delta > 0$. Por lo tanto, si probamos que para $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ la función $N(x, t) [\varphi(x, t) - \varphi(0, t)]$ es absolutamente integrable en \mathbb{R}^2 , por el teorema de Fubini aplicado en (4.5) obtenemos (4.3).

Por el teorema del valor medio aplicado a $\varphi(x, t)$ como función de x , y como además η y η_1 tienen soporte acotado,

$$\begin{aligned} |N(x, t) [\varphi(x, t) - \varphi(0, t)]| &= \left| \frac{1}{2} \frac{x^3}{t^3} \eta_1(\nu(x, t)) + 2 \frac{x}{t^2} \eta(\nu(x, t)) \right| |\varphi(x, t) - \varphi(0, t)| \\ &\leq c |x| \left| \frac{1}{2} \frac{x^3}{t^3} \eta_1(\nu(x, t)) + 2 \frac{x}{t^2} \eta(\nu(x, t)) \right|. \end{aligned}$$

Así, para mostrar la absoluta integrabilidad de $N(x, t) [\varphi(x, t) - \varphi(0, t)]$ basta ver la finitud de las dos integrales siguientes

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{x^4}{t^3} \eta_1(\nu(x, t)) \right| dx dt \quad \text{y} \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{x^2}{t^2} \eta(\nu(x, t)) \right| dx dt.$$

En efecto, como η_1 es continua con soporte en $[0, 1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{x^4}{t^3} \eta_1(\nu(x, t)) \right| dx dt &\leq c \iint_{E^*(0,0;1)} \frac{x^4}{t^3} dx dt \\ &= c \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{t^3} \int_{|x| \leq (2t \ln \frac{1}{4\pi t})^{1/2}} x^4 dx dt \\ &\leq c \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{t^3} (2t \ln \frac{1}{4\pi t})^{\frac{4}{2}} 2(2t \ln \frac{1}{4\pi t})^{\frac{1}{2}} dt \\ &= c \int_0^{\frac{1}{4\pi}} t^{-\frac{1}{2}} (\ln \frac{1}{4\pi t})^{\frac{5}{2}} dt \end{aligned}$$

donde la última integral es finita. Análogamente,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{x^2}{t^2} \eta(\nu(x, t)) \right| dx dt &\leq c \iint_{E^*(0,0;1)} \frac{x^2}{t^2} dx dt \\ &= 2c \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{t^2} \int_0^{(2t \ln \frac{1}{4\pi t})^{\frac{1}{2}}} x^2 dx dt \\ &= c \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{t^2} \frac{1}{3} (2t \ln \frac{1}{4\pi t})^{\frac{3}{2}} dt \\ &= c \int_0^{\frac{1}{4\pi}} t^{-\frac{1}{2}} (\ln \frac{1}{4\pi t})^{\frac{3}{2}} dt. \end{aligned}$$

□

Notar que el paso clave en la demostración anterior fue restar una función constante en la variable espacial (un polinomio de grado cero) en (4.5), de esta manera “disimulamos” la singularidad de N .

4.2. Análisis de las derivadas del núcleo del valor medio parabólico

Volviendo a dimensión d , nos proponemos extender la fórmula de representación (4.2) a dimensión arbitraria. La mayor dificultad reside en hallar una expresión general para las derivadas del núcleo K . Dicha fórmula, (4.6), está contenida en el Lema 13 y su forma nace en la demostración del Lema 14.

Dada φ una función $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ escribimos $P_k\varphi(x, t)$ para denotar el polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ (MacLaurin) de grado k para la función definida en \mathbb{R}^d por $x \mapsto \varphi(x, t)$ para t fijo.

Usaremos la notación que sigue. Para $m \in \mathbb{N}_0$, $h(m)$ es igual $\frac{m}{2}$ si m es par y $\frac{m-1}{2}$ si m es impar. Dado un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ escribimos $h(\alpha)$ para denotar el d -vector de enteros dado por $h(\alpha) = (h(\alpha_1), h(\alpha_2), \dots, h(\alpha_d))$.

LEMA 13. Para $\delta > 0$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un multi-índice fijo con $|\alpha| > 0$, tenemos que,

(13.I) para todo t real, $K(x, t)$ es una función \mathcal{C}^∞ de $x \in \mathbb{R}^d$ y

$$(4.6) \quad N^\alpha(x, t) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^3 \sum_{0 \leq \beta \leq h(\alpha - (j-1)e_i)} \frac{x^{\alpha + (4-2j)e_i + 2\beta}}{t^{|\alpha| - |\beta| + 3 - j}} \eta_\beta^{ij}(\nu(x, t))$$

donde η_β^{ij} son funciones \mathcal{C}^∞ de una variable real con soporte contenido en el soporte de η .

(13.II) Para $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ y para cada $s \in \mathbb{R}$ la función de y dada por $N^\alpha(y, s)\varphi(y, s)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^d)$. Más aún, la función de la variable s , $\int_{\mathbb{R}^d} N^\alpha(y, s)\varphi(y, s)dy$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y la distribución $D^\alpha K$ está dada como la integral iterada

$$(4.7) \quad \langle D^\alpha K, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} N^\alpha(y, s)\varphi(y, s) dy \right\} ds.$$

(13.III) Para cada t y para todo $0 \leq |\beta| < |\alpha|$, la función $N^\alpha(x, t)x^\beta$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^d)$ y además $\int_{\mathbb{R}^d} N^\alpha(x, t)x^\beta dx = 0$.

(13.IV) $N^\alpha[\varphi - P_{|\alpha|-1}\varphi] \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$.

Para la demostración de (13.I) en el Lema 13 haremos uso de una, de alguna manera, explícita expresión para las derivadas espaciales de $\phi(\nu(x, t))$ cuando ϕ es cualquier función \mathcal{C}^∞ de una variable real.

LEMA 14. Sea ϕ una función \mathcal{C}^∞ de una variable real positiva. Entonces para cualquier multi-índice $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ tenemos

$$\partial^\gamma(\phi(\nu(x, t))) = \sum_{0 \leq \beta \leq h(\gamma)} \frac{x^{\gamma - 2\beta}}{t^{|\gamma| - |\beta|}} \phi_\beta^\gamma(\nu(x, t))$$

donde cada ϕ_β^γ es una función \mathcal{C}^∞ de una variable real positiva con soporte contenido en el soporte de ϕ .

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos mostrando por inducción en m que para cada $i = 1, \dots, d$, la fórmula

$$(4.8) \quad \frac{\partial^m}{\partial x_i^m}(\phi(\nu(x, t))) = \sum_{0 \leq n \leq h(m)} \frac{x_i^{m-2n}}{t^{m-n}} \phi_n^m(\nu(x, t))$$

vale para funciones suaves ϕ_n^m soportadas en el soporte de ϕ . Cuando $m = 1$, (4.8) se lee $\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(\nu(x, t))) = \frac{x_i}{t} \phi_0^1(\nu(x, t))$ donde $\phi_0^1(s) = s\phi'(s)$. Supongamos que (4.8) vale para derivadas de orden m . Supongamos que m es par. El caso de m impar puede ser manejado de forma similar. Así

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(\phi(\nu(x, t))) \\ &= \sum_{0 \leq n \leq \frac{m}{2}} \frac{1}{t^{m-n}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{m-2n} \phi_n^m(\nu(x, t)) \right) \\ &= \frac{1}{t^{\frac{m}{2}}} \frac{d\phi_{m/2}^m}{ds}(\nu(x, t)) \nu(x, t) \frac{x_i}{t} + \\ & \quad + \sum_{0 \leq n < \frac{m}{2}} \frac{1}{t^{m-n}} \left[(m-2n) x_i^{m-2n-1} \phi_n^m(\nu(x, t)) + x_i^{m-2n} \frac{d\phi_n^m}{ds}(\nu(x, t)) \nu(x, t) \frac{x_i}{t} \right] \\ &= \sum_{0 \leq n < \frac{m}{2}} \frac{x_i^{(m+1)-2(n+1)}}{t^{(m+1)-(n+1)}} \phi_n^m(\nu(x, t)) + \sum_{0 \leq n \leq \frac{m}{2}} \frac{x_i^{(m+1)-2n}}{t^{(m+1)-n}} \tilde{\phi}_n^m(\nu(x, t)). \end{aligned}$$

Como en el caso m par tenemos que $h(m+1) = \frac{m}{2}$, únicamente tenemos que observar que cada término en las dos sumas de arriba pueden ser identificados con alguno de los términos de la siguiente

$$\sum_{0 \leq k \leq \frac{m}{2}} \frac{x_i^{(m+1)-2k}}{t^{(m+1)-k}} \psi_k^{m+1}(\nu(x, t))$$

para ψ_k^{m+1} adecuada con soporte contenido en el soporte de ϕ . El resultado deseado para un multi-índice arbitrario γ sigue por iteración de (4.8). \square

DEMOSTRACIÓN DE (13.1). De la Regla de Leibniz, obtenemos que

$$\begin{aligned} N^\alpha(x, t) &= \sum_{i=1}^d \partial^\alpha \left(\frac{x_i^2}{t^2} \eta(\nu(x, t)) \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^d \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta (x^{2e_i}) \partial^{\alpha-\beta}(\eta(\nu(x, t))) \\ &= \sum_{i=1}^d \binom{\alpha}{0} \frac{x_i^2}{t^2} \partial^\alpha \eta(\nu(x, t)) + \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^d 2 \binom{\alpha}{e_i} \frac{x_i}{t^2} \partial^{\alpha - e_i} \eta(\nu(x, t)) +$$

$$\sum_{i=1}^d 2 \binom{\alpha}{2e_i} \frac{1}{t^2} \partial^{\alpha - 2e_i} \eta(\nu(x, t)).$$

Para cada una de las tres derivadas en el último término de arriba, aplicamos el Lema 14. La primera nos da los términos en (4.6) que corresponden a $j = 1$. La segunda los de $j = 2$ y la tercera los de $j = 3$. \square

DEMOSTRACIÓN DE (13.II). Tomamos φ en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ y $s \in \mathbb{R}$. Si $s \geq 0$, tenemos que $N^\alpha(y, s)\varphi(y, s) \equiv 0$ en \mathbb{R}^d . Para $s < 0$, la función de y definida por $N^\alpha(y, s)$ es acotada y tiene soporte acotado. Así que $N^\alpha(y, s)\varphi(y, s)$ está en $L^1(\mathbb{R}^d)$ como una función de $y \in \mathbb{R}^d$. Por otro lado, como para s fijo $K(y, s)$ está en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ de y , integrando por partes, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} N^\alpha(y, s)\varphi(y, s) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} K(y, s)\partial^\alpha \varphi(y, s) dy.$$

Notar ahora que $K(y, s)\partial^\alpha \varphi(y, s)$ es absolutamente integrable en \mathbb{R}^{d+1} ya que K pertenece a $L^1(\mathbb{R}^{d+1})$, K tiene soporte compacto y $\partial^\alpha \varphi$ es acotada en el soporte de K . Así, del Teorema de Fubini la función de s dada por $\int_{\mathbb{R}^d} K(y, s)\partial^\alpha \varphi(y, s) dy$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$. También $\int_{\mathbb{R}^d} N^\alpha(y, s)\varphi(y, s) dy$. Finalmente, comprobamos (4.7). Por la misma integración por partes en la integral respecto de y realizada antes,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} N^\alpha(y, s)\varphi(y, s) dy \right\} ds &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} K(y, s)\partial^\alpha \varphi(y, s) dy \right\} ds \\ &= (-1)^{|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} K(y, s)\partial^\alpha \varphi(y, s) dy ds \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle K, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle D^\alpha K, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

\square

DEMOSTRACIÓN DE (13.III). La integrabilidad de $\partial^\alpha K(x, t)x^\beta$ como funciones de x se puede comprobar fácilmente. En efecto, para $t \geq 0$ la función de x dada por $\partial^\alpha K(x, t)$ es idénticamente cero. Para $t < 0$, $\partial^\alpha K(\cdot, t)$ tiene soporte compacto y es acotada como una función de x . Integrando por partes, con $0 \leq |\beta| < |\alpha|$, tenemos entonces que $\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha K(x, t)x^\beta dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} K(x, t)\partial^\alpha(x^\beta) dx = 0$. \square

DEMOSTRACIÓN DE (13.IV). Escribimos φ_t para denotar la función de la variable $x \in \mathbb{R}^d$ definida por $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ cuando $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$. El polinomio de MacLaurin para φ_t de orden $|\alpha| - 1$ está dado por

$$P_{|\alpha|-1} \varphi_t(x) = \sum_{k=0}^{|\alpha|-1} \frac{1}{k!} \sum_{|\gamma|=k} \partial^\gamma \varphi_t(0) x^\gamma,$$

y

$$\varphi_t(x) - P_{|\alpha|-1}\varphi_t(x) = \frac{1}{(|\alpha|-1)!} \sum_{|\gamma|=|\alpha|} x^\gamma \int_0^1 \partial^\gamma \varphi_t(\sigma x) (1-\sigma)^{|\alpha|-1} d\sigma.$$

Para probar que $N^\alpha[\varphi - P_{|\alpha|-1}\varphi]$ como función de (x, t) pertenece a $L^1(\mathbb{R}^{d+1})$ únicamente tenemos que comprobar que cada función de la forma $x^\gamma N^\alpha(x, t)$, con $|\gamma| = |\alpha|$, pertenece a $L^1(\mathbb{R}^{d+1})$. Por otro lado, usando la fórmula (4.6) para N^α , será suficiente mostrar que cada función de la forma $\tilde{\eta}(\nu(x, t)) \frac{x^{\alpha+(4-2j)e_i+2\beta}}{t^{|\alpha|-|\beta|+3-j}} x^\gamma$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^{d+1})$ cuando $|\gamma| = |\alpha|$; $i=1, \dots, d$; $j=1, 2, 3$; $0 \leq \beta \leq h(\alpha - (j-1)e_i)$ y $\tilde{\eta}$ es una función acotada de variable real con soporte contenido en el de η . Así que será suficiente mostrar que

$$\iint_{E^*(0,0;1)} \frac{|x^{\alpha+(4-2j)e_i+2\beta+\gamma}|}{t^{|\alpha|-|\beta|+3-j}} dx dt < \infty$$

para $E^*(0,0;1) = \{(x, t) : (x, -t) \in E(0,0;1)\}$ y aquellos valores de α, β, γ, i y j . La integral de arriba puede ser estimada después de una aplicación del Teorema de Fubini y la introducción de coordenadas esféricas en \mathbb{R}^d por una integral de la forma

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{-|\alpha|+|\beta|-3+j} \left(\int_0^{R_1(-t)} \rho^{|\alpha|+4-2j+2|\beta|+|\gamma|+d-1} d\rho \right) dt \\ &= c \int_0^1 t^{-|\alpha|+|\beta|-3+j} \left(R_1(-t) \right)^{2|\alpha|+4-2j+2|\beta|+d} dt \\ &= c \int_0^1 t^{-|\alpha|+|\beta|-3+j} t^{|\alpha|+2-j+|\beta|+\frac{d}{2}} \left(\ln \frac{1}{4\pi t} \right)^{|\alpha|+2-j+|\beta|+\frac{d}{2}} dt \\ &= c \int_0^1 t^{2|\beta|+\frac{d}{2}-1} \left(\ln \frac{1}{4\pi t} \right)^\varepsilon dt \end{aligned}$$

para algún número positivo ε . Como la última integral es finita, terminamos la demostración. \square

4.3. Otra representación “integral” de la distribución $D^\alpha K$

Notamos que (4.7) es en algún sentido una representación “integral” de $D^\alpha K$ pero que la integral sólo tiene sentido como integral iterada. El teorema siguiente es una consecuencia de las propiedades básicas de las derivadas de K demostradas en la sección anterior y la integral múltiple es ahora absolutamente convergente.

TEOREMA 15. *Para $\delta > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un multi-índice de enteros no negativos y para toda $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ tenemos que*

$$(4.9) \quad \langle D^\alpha(K_\delta), \varphi \rangle = \delta^{-|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} (N^\alpha)_\delta(x, t) [\varphi(x, t) - P_{|\alpha|-1}\varphi(x, t)] dx dt$$

donde la integral en el lado derecho converge absolutamente.

DEMOSTRACIÓN. Primero probaremos que la integral en el lado derecho de (4.9) es absolutamente convergente. De (13.IV) sabemos que esta propiedad es cierta cuando $\delta = 1$. Por otro lado, como para cualquier δ positivo tenemos que $P_{|\alpha|-1}\varphi_\delta = (P_{|\alpha|-1}\varphi)_\delta$, la convergencia

de la integral para δ general sigue de (13.IV) por un cambio de variables. De (13.II) y (13.III) tenemos, para cada $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$,

$$\langle D^\alpha K, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} N^\alpha(x, t) [\varphi(x, t) - P_{|\alpha|-1} \varphi(x, t)] dx \right\} dt.$$

Luego de (13.IV) y del Teorema de Fubini–Tonelli tenemos (4.9) para $\delta = 1$. Tomamos ahora cualquier $\delta > 0$. Por el cambio de variables $y = \frac{x}{\delta}$ y $s = \frac{t}{\delta^2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} \delta^{-|\alpha|} (N^\alpha)_\delta(x, t) [\varphi(x, t) - (P_{|\alpha|-1} \varphi)(x, t)] dx dt \\ &= \delta^{-|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} N^\alpha(y, s) [\varphi(\delta y, \delta^2 s) - (P_{|\alpha|-1} \varphi)(\delta y, \delta^2 s)] dy ds \\ &= \delta^{-|\alpha|-d-2} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} N^\alpha(y, s) \left[\varphi_{\frac{1}{\delta}}(y, s) - (P_{|\alpha|-1} \varphi_{\frac{1}{\delta}})(y, s) \right] dy ds. \end{aligned}$$

Ahora, aplicando el caso de $\delta = 1$ ya examinado con $\varphi_{\frac{1}{\delta}}$ en lugar de φ , vemos que el lado derecho en (4.9) está dado por

$$\begin{aligned} \delta^{-|\alpha|-d-2} \left\langle D^\alpha K, \varphi_{\frac{1}{\delta}} \right\rangle &= \delta^{-|\alpha|-d-2} (-1)^{|\alpha|} \left\langle K, \partial^\alpha \left(\varphi_{\frac{1}{\delta}} \right) \right\rangle \\ &= \delta^{-d-2} (-1)^{|\alpha|} \left\langle K, (\partial^\alpha \varphi)_{\frac{1}{\delta}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, como $K \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$,

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} \delta^{-|\alpha|} (N^\alpha)_\delta(x, t) [\varphi(x, t) - (P_{|\alpha|-1} \varphi)(x, t)] dx dt \\ &= (-1)^{|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} K(x, t) \partial^\alpha \varphi(\delta x, \delta^2 t) dx dt \\ &= \delta^{-d-2} (-1)^{|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} K\left(\frac{y}{\delta}, \frac{s}{\delta^2}\right) \partial^\alpha \varphi(y, s) dy ds \\ &= (-1)^{|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} K_\delta(y, s) \partial^\alpha \varphi(y, s) dy ds \\ &= \langle D^\alpha(K_\delta), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

4.4. Derivadas del operador inducido por el núcleo K como operador de convolución

Como del Teorema 15 tenemos que $D^\alpha K_\delta$ es una distribución de Schwartz con soporte compacto en \mathbb{R}^{d+1} que viene dada por (4.9), su convolución con una función $v(x, t)$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ está bien definida y no es nada más que la derivada débil de $K_\delta * v$.

TEOREMA 16. *Para cualquier v que pertenece a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ tenemos que*

$$\begin{aligned} D^\alpha(K_\delta * v)(x, t) &= (D^\alpha K_\delta) * v(x, t) \\ &= \frac{1}{\delta^{|\alpha|}} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} (N^\alpha)_\delta(x - y, t - s) [v(y, s) - P_{|\alpha|-1} v(y, s)] dy ds. \end{aligned}$$

Estimaciones maximales para gradientes de temperaturas

Nuestro propósito en este capítulo es develar la delicada estructura del núcleo de las derivadas parciales obtenido en el capítulo anterior. No resulta claro, por simple inspección que el correspondiente operador maximal esté dominado por una composición de operadores maximales conocidos. El detalle de esta estimación se encuentra en la Sección 1. En la Sección 2, transferimos las estimaciones espaciales a derivadas mixtas en espacio y tiempo aplicadas a soluciones de la ecuación del calor en dominios cilíndricos con los mismos operadores en versiones locales. Las estimaciones en norma y con pesos laterales en el tiempo están contenidos en la Sección 3. Al final mostramos estas estimaciones sin usar un operador maximal en la variable espacial.

5.1. Estimaciones por funciones maximales del operador inducido por las derivadas del núcleo del valor medio

Sabemos por el Teorema 16, que las derivadas de la convolución de K_δ ($\delta > 0$) con una función v que pertenece a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ están dadas por

$$(5.1) \quad D^\alpha(K_\delta * v)(x, t) = \delta^{-|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} (N^\alpha)_\delta(x-y, t-s) [v(y, s) - P_{|\alpha|-1}v(y, s)] dy ds.$$

Dado un número real positivo λ , y cualquier entero k más grande que λ , definimos el operador maximal

$$\mathcal{M}^{\lambda, k}v(x, t) = \sup_{\delta > 0} \delta^{k-\lambda} \left| \nabla^k(K_\delta * v)(x, t) \right|,$$

donde ∇^k es el vector de todas las derivadas espaciales de orden k . Como mencionamos el propósito es controlar $\mathcal{M}^{\lambda, k}(v)$ por operadores maximales conocidos. El resultado principal de esta sección es la siguiente estimación puntual para $\mathcal{M}^{\lambda, k}$.

TEOREMA 17. *Para $0 < \lambda < k < \lambda + d$ y $k \in \mathbb{N}$ existe una constante $C = C(\lambda, k, d)$ tal que la desigualdad*

$$(5.2) \quad \mathcal{M}^{\lambda, k}v(x, t) \leq CM^- [M^{\#, \lambda, k}v](x, t)$$

vale para toda función v definida sobre \mathbb{R}^{d+1} que pertenece a \mathcal{C}^∞ .

Conviene señalar que el lado derecho en (5.2) es la iteración de los operadores $M^{\#, \lambda, k}$ actuando sobre x y M^- actuando sobre la variable temporal, precisamente,

$$M^- [M^{\#, \lambda, k}v](x, t) = \sup_{h > 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \left(\sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|^{1+\frac{\lambda}{d}}} \int_{B(x, r)} |v(y, s) - P_x(y)| dy \right) ds.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 17. Tomamos $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ y fijamos $\delta > 0$. Para estimar $\nabla^k(K_\delta * v)$ consideraremos un multiíndice fijo α de longitud k y estimaremos $D^\alpha(K_\delta * v)$ usando la fórmula de representación (5.1). Ahora, de (13.I) en el Capítulo 4, el núcleo N^α se divide en una suma finita de núcleos $\sum_{i \in I} N_i^\alpha$ cada uno de los cuales está acotado por arriba en valor absoluto por núcleos de la siguiente forma básica $\tilde{N}_i^\alpha(x, t) = \mathcal{Q}_i^\alpha(|x|, t)\eta_i^\alpha(v(x, t))$ con η_i^α una función \mathcal{C}^∞ de una variable real con soporte compacto y $\mathcal{Q}_i^\alpha(|x|, t)$ es \mathcal{C}^∞ en $\mathbb{R}_+^{d+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : t > 0\}$, y creciente como función de $|x|$ para t fijo. También el núcleo \mathcal{Q}_i^α es parabólicamente homogéneo de grado $-|\alpha| - 2$, en otras palabras, $\mathcal{Q}_i^\alpha(\mu|x|, \mu^2 t) = \mu^{-|\alpha|-2}\mathcal{Q}_i^\alpha(|x|, t)$, $\mu > 0$. Como en la demostración de (13.IV) de hecho probamos que $N_i^\alpha[\varphi - P_{|\alpha|-1}\varphi]$ es integrable para cada $i \in I$, cada una de las integrales

$$\iint_{\mathbb{R}^{d+1}} (N_i^\alpha)_\delta(x - y, t - s) [v(y, s) - P_{|\alpha|-1}v(y, s)] dy ds$$

es absolutamente convergente y su suma para $i \in I$ nos da una representación de $D^\alpha(K_\delta * v)(x, t)$. Así para probar (5.2), tenemos que estimar el operador maximal inducido por cualesquiera de estos términos con núcleo $(N_i^\alpha)_\delta$. De la convergencia absoluta de la integral, y del Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,\delta}^\lambda v(x, t) &:= \delta^{k-\lambda} \left| \delta^{-|\alpha|} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} (N_i^\alpha)_\delta(x - y, t - s) [v(y, s) - P_{|\alpha|-1}v(y, s)] dy ds \right| \\ &\leq \delta^{-\lambda} \int_{t-\frac{\delta^2}{4\pi}}^t \int_{y \in B} (\tilde{N}_i^\alpha)_\delta(x - y, t - s) |v(y, s) - P_{|\alpha|-1}v(y, s)| dy ds, \end{aligned}$$

donde B es la bola euclídea $B(x, R_\delta(t - s))$ con

$$R_\delta(t - s) = \sqrt{2d(t - s) \ln \frac{\delta^2}{4\pi(t - s)}}.$$

A continuación multiplicamos y dividimos la integral espacial interior por la medida de Lebesgue de la bola B elevada a la potencia $1 + \frac{\lambda}{d}$ y usamos la acotabilidad de η_i^α para obtener la estimación superior

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,\delta}^\lambda v(x, t) &\leq c\delta^{-\lambda} \int_{t-\frac{\delta^2}{4\pi}}^t |B|^{1+\frac{\lambda}{d}} \left\{ \frac{1}{|B|^{1+\frac{\lambda}{d}}} \int_B (\mathcal{Q}_i^\alpha)_\delta(|x - y|, t - s) |v(y, s) - P_{|\alpha|-1}v(y, s)| dy \right\} ds \\ &\leq \frac{c}{\delta^2} \int_{t-\frac{\delta^2}{4\pi}}^t \delta^{2-\lambda+k-d} (R_\delta(t - s))^{d+\lambda} \mathcal{Q}_i^\alpha(R_\delta(t - s), t - s) M^{\#, \lambda, k} v(\cdot, s)(x) ds, \end{aligned}$$

donde la propiedad de monotonía de \mathcal{Q}_i^α en su primera variable junto con el hecho que $|x - y| < R_\delta(t - s)$, la homogeneidad de \mathcal{Q}_i^α y la definición de $M^{\#, \lambda, k}$ han sido usados. Notar que de la definición de $R_\delta(t - s)$ y la homogeneidad de \mathcal{Q}_i^α , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i^\alpha(R_\delta(t - s), t - s) &= \mathcal{Q}_i^\alpha\left((t - s)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2d \ln \frac{\delta^2}{4\pi(t - s)}}, t - s\right) \\ &= \frac{1}{(t - s)^{\frac{k+2}{2}}} \mathcal{Q}_i^\alpha\left(\sqrt{2d \ln \frac{\delta^2}{4\pi(t - s)}}, 1\right). \end{aligned}$$

Inspeccionando los términos en la expansión para N^α dada en (13.1) (Capítulo 4) vemos que para cada $i \in I$, tenemos que

$$\mathcal{Q}_i^\alpha \left(\sqrt{2d \ln \frac{\delta^2}{4\pi(t-s)}}, 1 \right) \leq c \left(\ln \frac{1}{4\pi \left(\frac{t-s}{\delta^2} \right)} \right)^{\theta_i} \quad \text{con } \theta_i > 0.$$

Así

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{i,\delta}^\lambda v(x, t) \\ & \leq \frac{c}{\delta^2} \int_{t-\frac{\delta^2}{4\pi}}^t \delta^{2-\lambda+k-d} \frac{(t-s)^{\frac{d+\lambda}{2}}}{(t-s)^{1+\frac{k}{2}}} \left(\ln \frac{1}{4\pi \left(\frac{t-s}{\delta^2} \right)} \right)^{\theta_i + \frac{d+\lambda}{2}} M^{\#, \lambda, k} v(\cdot, s)(x) ds \\ & = \frac{c}{\delta^2} \int_{t-\frac{\delta^2}{4\pi}}^t \left(\frac{t-s}{\delta^2} \right)^{\frac{d+\lambda-2-k}{2}} \left(\ln \frac{1}{4\pi \left(\frac{t-s}{\delta^2} \right)} \right)^{\theta_i + \frac{d+\lambda}{2}} M^{\#, \lambda, k} v(\cdot, s)(x) ds. \end{aligned}$$

Dada nuestra elección de k y λ , $\frac{d+\lambda-2-k}{2} > -1$. Por lo tanto, si aplicamos el Corolario 2 (Capítulo 1) con $\vartheta = \frac{d+\lambda-2-k}{2}$ y $\theta = \theta_i + \frac{d+\lambda}{2}$, la última integral está acotada por el operador maximal lateral de Hardy-Littlewood M^- para cada $\delta > 0$ y para cada $i \in I$, así $\mathcal{M}^{\lambda, k} v \leq CM^- [M^{\#, \lambda, k} v]$. \square

5.2. Estimaciones para las derivadas espaciales y temporales de temperaturas sobre dominios cilíndricos

En esta sección escribiremos Ω para denotar un dominio cilíndrico en \mathbb{R}^{d+1} de la forma $D \times \mathbb{R}^+$, donde D es un conjunto abierto de \mathbb{R}^d .

Usaremos la función $\delta(x, t)$ en Ω como la distancia parabólica de $(x, t) \in \Omega$ a la frontera parabólica de Ω . Más precisamente,

$$\delta(x, t) = \inf \left\{ \max \left\{ |x - y|, \sqrt{|t - s|} \right\} : (y, s) \in \partial_{\text{par}} \Omega \right\},$$

donde $\partial_{\text{par}} \Omega = (D \times \{0\}) \cup (\partial D \times \mathbb{R}^+)$ es la frontera parabólica de Ω .

Notar que para cualquier temperatura u en Ω , cualquier punto $(x, t) \in \Omega$ y cualquier $0 < \delta < \delta(x, t)$, la fórmula del valor medio (2.8) es válida ya que para aquellos valores de δ el soporte de $K_\delta(x - y, t - s)$ como función de (y, s) está contenido en Ω . Más aún, lo mismo es cierto para el soporte del núcleo $(N^\alpha)_\delta(x - y, t - s)$ cuando $0 < \delta < \delta(x, t)$. En particular la fórmula para las derivadas espaciales de $K_\delta * v$ dada en el Teorema 16 sigue siendo cierta en el caso que $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ para estos valores de δ .

De las observaciones de arriba y los resultados de la sección previa, fácilmente se pueden obtener estimaciones para una versión local de la función maximal $\mathcal{M}^{\lambda, k}$ en términos de versiones locales de M^- y de $M^{\#, \lambda, k}$.

Dado $\lambda > 0$, k cualquier entero más grande que λ y $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, definimos

$$\mathcal{M}_\Omega^{\lambda, k} v(x, t) = \sup_{0 < \delta < \delta(x, t)} \delta^{k-\lambda} \left| \nabla^k (K_\delta * v)(x, t) \right|.$$

Dada una función g en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ soportada en \mathbb{R}^+ y dado $t > 0$, escribimos

$$M_{\mathbb{R}^+}^- g(t) = \sup_{0 < h < t} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |g(s)| ds,$$

para denotar la versión local del operador maximal lateral restringido a \mathbb{R}^+ . Por otro lado dada una función suave f sobre D definimos la versión local de la función maximal de Calderón de orden λ por

$$M_D^{\#, \lambda, k} f(x) = \sup_{0 < \delta < \delta(x)} \frac{1}{|B(x, \delta)|^{1 + \frac{\lambda}{d}}} \int_{B(x, \delta)} |f(y) - P_x(y)| dy$$

donde $\delta(x) = \inf \{|x - y| : y \in \partial D\}$ y P_x es el polinomio de Taylor de grado $k - 1$ para f en x .

Por inspección de las demostraciones del Teorema 17 y del Lema 1, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 18. *Para $0 < \lambda < k < \lambda + d$ y $k \in \mathbb{N}$, existe una constante $C = C(\lambda, k, d)$ tal que para todo $\Omega = D \times \mathbb{R}^+$ con D abierto en \mathbb{R}^d la desigualdad*

$$\mathcal{M}_\Omega^{\lambda, k} v(x, t) \leq C M_{\mathbb{R}^+}^- [M_D^{\#, \lambda, k} v](x, t)$$

es válida para cualquier función v en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y para todo $(x, t) \in \Omega$.

Cuando este resultado es aplicado a una temperatura $u = u(x, t)$ en Ω tenemos la siguiente afirmación.

TEOREMA 19. *Si u es una temperatura en Ω , entonces*

$$\delta^{k-\lambda}(x, t) \left| \nabla^k u(x, t) \right| \leq C M_{\mathbb{R}^+}^- [M_D^{\#, \lambda, k} u](x, t)$$

para todo $(x, t) \in \Omega$, cuando $0 < \lambda < k < \lambda + d$, $k \in \mathbb{N}$.

Para obtener estimaciones para derivadas mixtas en espacio y tiempo de temperaturas, vamos a introducir algo de notación. Dada una función suave v en Ω escribimos $\nabla^{2,1} v(x, t)$ para denotar el $d^2 + 1$ -vector dado por las d^2 derivadas de segundo orden puramente espaciales de v y la derivada primera de v con respecto al tiempo, i.e., $\nabla^{2,1} v = \left(\nabla^2 v, \frac{\partial v}{\partial t} \right)$. También diremos que dado un multi-índice $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d; \alpha_{d+1})$ en \mathbb{N}_0^{d+1} la derivada $\partial^{\tilde{\alpha}} v$ es de orden parabólico $|\alpha| + 2\alpha_{d+1}$. Por $(\nabla^{2,1})^n(v)$, $n \in \mathbb{N}$ nos referimos al vector de todas las derivadas de orden parabólico $2n$ de la función suave v . Explícitamente, cada componente de $(\nabla^{2,1})^n(v)$ tiene la forma $\partial^{\tilde{\alpha}} v$ con $|\alpha| + 2\alpha_{d+1} = 2n$. De tal forma siempre tenemos, en cada una de estas derivadas, un número par de derivadas espaciales. Usaremos la notación $|(\nabla^{2,1})^n u|$ para la longitud euclídea de $(\nabla^{2,1})^n u$. El siguiente lema elemental nos permitirá transferir las estimaciones espaciales en el Teorema 19 a derivadas mixtas en espacio y tiempo de temperaturas.

LEMA 20. *Sea u una temperatura en Ω y $\tilde{\alpha} = (\alpha; \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}_0^{d+1}$ con $2n = |\alpha| + 2\alpha_{d+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces la derivada $\partial^{\tilde{\alpha}} u$ pertenece al espacio vectorial generado por $\nabla^{2n} u$.*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en α_{d+1} . Cuando $\alpha_{d+1} = 1$, tenemos que

$$\partial^{\tilde{\alpha}} u = \partial^{(\alpha;0)}(\partial^{(0;1)} u) = \partial^{(\alpha;0)}(\Delta u) \in \text{span } \nabla^{2n} u.$$

Asumiendo que el resultado vale para $\alpha_{d+1} = j \in \mathbb{N}$ vamos a probarlo para $\alpha_{d+1} = j + 1$,

$$\partial^{\tilde{\alpha}} u = \partial^{(\alpha;0)} \partial^{(0;j+1)} u = \partial^{(\alpha;0)} \partial^{(0;j)} \Delta u = \partial^{(\alpha;0)} \Delta \partial^{(0;j)} u.$$

Notar ahora que el último término es una combinación lineal de derivadas de la forma $\partial^{(\beta;0)} \partial^{(0;j)} u$, con $|\beta| = |\alpha| + 2$. De esta manera podemos aplicar la hipótesis inductiva a cada uno de estos términos para obtener que $\partial^{\tilde{\alpha}} u$ está en el espacio lineal generado por $\nabla^{2n} u$. \square

Como un corolario del Teorema 18, su corolario el Teorema 19 y de las consideraciones presentadas arriba, podemos obtener la validez de la siguiente afirmación.

TEOREMA 21. *Para $0 < \lambda < 2n < \lambda + d$ y $n \in \mathbb{N}$ existe una constante C tal que la desigualdad*

$$\delta^{2n-\lambda}(x, t) |(\nabla^{2,1})^n u(x, t)| \leq CM_{\mathbb{R}^+}^- [M_D^{\#, \lambda, 2n}(u)](x, t)$$

vale para toda temperatura u en Ω y para todo $(x, t) \in \Omega$.

5.3. Estimaciones L^p para gradientes espacio-tiempo de temperaturas en términos de normas mixtas de tipo Lebesgue-Besov

Como mencionamos en la Sección 1.7 al introducir los operadores maximales de Calderón, la regularidad Besov es suficiente para obtener la regularidad inducida por estos operadores maximales. Más aún, vemos que $B_p^\lambda(D) \hookrightarrow \mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D)$ para $m \geq [\lambda] + 1$ cuando D es un dominio Lipschitz, donde $\mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D)$ denota el espacio de todas aquellas funciones f en $L^p(D)$ para las cuales la maximal $M_D^{\#, \lambda, m} f$ pertenece a $L^p(D)$.

Como las estimaciones puntuales están en términos de una iteración de maximales de Calderón y Hardy-Littlewood lateral es natural que las estimaciones en norma involucren espacios en norma mixta como $L^q(\mathbb{R}^+; \mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D))$ y $L^q(\mathbb{R}^+; B_p^\lambda(D))$ con $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\lambda > 0$ con sus correspondientes normas dadas por

$$\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^+; \mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D))} = \left(\int_{\mathbb{R}^+} \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{C}_p^{\lambda, m}(D)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \text{ y } \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^+; B_p^\lambda(D))} = \left(\int_{\mathbb{R}^+} \|v(\cdot, t)\|_{B_p^\lambda(D)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

donde v es una función de $d + 1$ variables.

De estas observaciones y como corolario del Teorema 21 obtenemos el siguiente resultado básico.

TEOREMA 22. *Sea $\Omega = D \times \mathbb{R}^+$ con D un dominio acotado en \mathbb{R}^d . Sea $1 < p \leq \infty$ dado. Para $0 < \lambda < 2n < \lambda + d$ y $n \in \mathbb{N}$ existe una constante C_1 que depende de p , λ y n tal que para toda temperatura u en Ω tenemos*

$$\left\| \delta^{2n-\lambda} |(\nabla^{2,1})^n u| \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^+; \mathcal{C}_p^{\lambda, 2n}(D))}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sigue del Teorema 21 y de la acotación de $M_{\mathbb{R}^+}^-$ en $L^p(\mathbb{R})$ para $p > 1$. \square

Notar también que para $p = 1$ una desigualdad de tipo débil de la forma

$$\begin{aligned} \int_D \left| \{t \in \mathbb{R}^+ : \delta^{2n-\lambda}(x, t) |(\nabla^{2,1})^n u(x, t)| > \mu\} \right| dx \\ \leq \frac{C}{\mu} \int_D \left\| M_D^{\#, \lambda, 2n} u(x, \cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} dx \\ \leq \frac{C_1}{\mu} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{E}_1^{\lambda, 2n}(D))} \end{aligned}$$

sigue del tipo débil (1,1) del operador temporal $M_{\mathbb{R}^+}^-$.

COROLARIO 23. Si $\Omega = D \times \mathbb{R}^+$ con D un dominio Lipschitz acotado en \mathbb{R}^d , $1 < p \leq \infty$, λ un número positivo no entero y n un entero tal que $[\lambda] + 1 \leq 2n < \lambda + d$, entonces

$$\left\| \delta^{2n-\lambda} |(\nabla^{2,1})^n u| \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^+; B_p^\lambda(D))}$$

para alguna constante C_2 y para toda temperatura u en Ω .

La desigualdad contenida en el corolario precedente es una consecuencia de la desigualdad puntual del Teorema 21. Pero en ella no se refleja el hecho más sutil de la lateralidad del problema en el tiempo, ya que una acotación similar a la del Teorema 21 con $M_{\mathbb{R}^+}^- f(t) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I \cap \mathbb{R}^+|} \int_{|I \cap \mathbb{R}^+|} |f(s)| ds$ en lugar de $M_{\mathbb{R}^+}^-$ hubiera sido suficiente para obtenerla. Una aplicación más fina de la desigualdad en el Teorema 21 a la acotación de normas de Lebesgue de $\delta^{2n-\lambda} |(\nabla^{2,1})^n u|$ se obtiene si se aplican resultados de la teoría de pesos laterales (ver [Saw] y [MR]). Esta teoría está completamente desarrollada para M^- (y para su análogo con promedios a la derecha del punto) y se sabe que los pesos w para los cuales M^- es acotado en $L^p(wdx)$ son exactamente los que cumplen la condición A_p^- lateral de Muckenhoupt presentada en la Sección 1.4. Por otra parte dada f definida sobre \mathbb{R}^+ , si denotamos por \tilde{f} a su extensión a \mathbb{R} que vale cero en \mathbb{R}^- , tenemos que para $t > 0$, $M_{\mathbb{R}^+}^- f(t) \leq M^- \tilde{f}(t)$. Por consiguiente, si w es la restricción a \mathbb{R}^+ de un peso en A_p^- tendremos que

$$\int_0^\infty (M_{\mathbb{R}^+}^- f(t))^p w(t) dt \leq C \int_0^\infty |f(t)|^p w(t) dt,$$

para alguna constante C y para toda f medible definida en \mathbb{R}^+ . De esta forma obtenemos el siguiente corolario del Teorema 21.

COROLARIO 24. Sea $\Omega = D \times \mathbb{R}^+$ con D un dominio Lipschitz acotado en \mathbb{R}^d , $1 < p < \infty$, λ un número positivo no entero y n un entero tal que $[\lambda] + 1 \leq 2n < \lambda + d$. Sea w la restricción a \mathbb{R}^+ de un peso de A_p^- , entonces

$$(5.3) \quad \iint_\Omega \left(\delta^{2n-\lambda}(x, t) |(\nabla^{2,1})^n u(x, t)| \right)^p w(t) dx dt \leq C \int_0^\infty \|u(\cdot, t)\|_{B_p^\lambda(D)}^p w(t) dt$$

para alguna constante C y para toda temperatura u en Ω .

Observemos que la restricción a \mathbb{R}^+ de cualquier función decreciente no negativa en \mathbb{R} es un peso válido para la desigualdad (5.3) puesto que cualquier función decreciente no negativa está en A_p^- . Por otra parte si $w \in A_p(\mathbb{R}^+)$, es decir, si

$$\left(\int_{|I|} w \right) \left(\int_{|I|} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C |I|^p$$

para todo subintervalo I de \mathbb{R}^+ , entonces w también es la restricción a \mathbb{R}^+ de un peso A_p^- . En efecto, $w = \tilde{w}|_{\mathbb{R}^+}$ donde \tilde{w} es la extensión par de w a \mathbb{R} . En particular $w(t) = t^\alpha$ es un buen peso para la desigualdad (5.3) si $-1 < \alpha < p - 1$.

5.4. Una prueba alternativa de las estimaciones L^p

Como ya hemos mencionado, Jerison y Kenig en la demostración de la desigualdad puntual elíptica [JK, Teorema 4.1], utilizan una versión equivalente de norma de Besov dada en (1.7), y prescindien de los operadores maximales del tipo de Calderón que usan en su demostración Dahlke y DeVore [DD, Teorema 3.1].

Si bien, la estimación puntual que obtenemos por este método, que contiene un operador maximal y un operador integral (de diferenciación fraccionaria) es menos compacta que la del Teorema 21, una ventaja de este enfoque es su carácter intrínseco. Es decir la norma resultante, (1.7) con D en lugar de \mathbb{R}^d , está midiendo regularidad en D si necesidad de recurrir a funciones regulares en \mathbb{R}^d y, en particular evitando hipótesis de regularidad de la frontera de D .

Nos restringimos en espacio a una dimensión ($d = 1$) por simplicidad. Notamos que no debería extrañar el hecho que surjan en las estimaciones que mostraremos núcleos temporales con características conocidas.

TEOREMA 25. *Sean $0 < \lambda < 1$, $1 < p < \infty$. Existe una constante C tal que vale la desigualdad puntual*

$$(5.4) \quad \left| \delta(x, t)^{1-\lambda} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq C M^- \left(\int_D \frac{|u(y, \cdot) - u(x, \cdot)|^p}{|x - y|^{1+\lambda p}} dy \right) (t)$$

para toda temperatura u en $\Omega = D \times \mathbb{R}^+$.

Para la prueba del teorema necesitamos el siguiente lema. Primero definimos los núcleos de variable real que aparecen digamos, naturalmente en este tipo de estimaciones puntuales. Sean

$$(5.5) \quad k_1(\omega) = \omega^{\frac{\lambda}{2}-1} \left[\frac{1}{2} \ln(\omega^{-1}) \right]^{2+\frac{\lambda}{2}} \mathcal{X}_{(0,1)}(\omega)$$

$$(5.6) \quad k_2(\omega) = \omega^{\frac{\lambda}{2}-1} \left[\frac{1}{2} \ln(\omega^{-1}) \right]^{1+\frac{\lambda}{2}} \mathcal{X}_{(0,1)}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

LEMA 26. *Existe una constante C tal que*

$$(5.7) \quad \left| \delta(x, t)^{1-\lambda} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq C \left\{ k_1^* \left(\int_D \frac{|u(y, \cdot) - u(x, \cdot)|^p}{|x - y|^{1+\lambda p}} dy \right) (t) + k_2^* \left(\int_D \frac{|u(y, \cdot) - u(x, \cdot)|^p}{|x - y|^{1+\lambda p}} dy \right) (t) \right\}$$

se satisface para toda temperatura u en Ω .

DEMOSTRACIÓN. Usamos la fórmula (4.1) y que η y η_1 son acotadas para obtener la estimación siguiente para el núcleo derivado del valor medio en dimensión uno.

$$\begin{aligned} \left| N \left(\frac{x-y}{\delta(x,t)}, \frac{t-s}{\delta(x,t)^2} \right) \right| &\leq c(\eta, \eta_1) \left\{ \left(\frac{|x-y|}{\delta(x,t)} \right)^3 \cdot \left(\frac{\delta(x,t)^2}{t-s} \right)^3 + \frac{|x-y|}{\delta(x,t)} \cdot \left(\frac{\delta(x,t)^2}{t-s} \right)^2 \right\} \\ &= c(\eta, \eta_1) \delta(x,t)^3 \left\{ \frac{|x-y|^3}{(t-s)^3} + \frac{|x-y|}{(t-s)^2} \right\} \mathcal{X}_{E(x,t;\delta(x,t))}(y,s) \end{aligned}$$

donde $c(\eta, \eta_1)$ es la constante dada por $\max\{\sup|\eta|, \sup|\eta_1|\}$. Aplicamos módulo a ambos lados en la identidad (4.2) a una temperatura u , luego multiplicamos y dividimos por $\delta(x,t)^{1-\lambda}$, y usamos la estimación que acabamos de obtener para N , y tenemos que

$$(5.8) \quad \delta(x,t)^{1-\lambda} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right| \leq \frac{1}{\delta(x,t)^{3+\lambda}} \iint \left| N \left(\frac{x-y}{\delta(x,t)}, \frac{t-s}{\delta(x,t)^2} \right) \right| |u(y,s) - u(x,s)| dy ds \leq I(x,t) + II(x,t)$$

donde salvo constantes, resulta de la definición de los $E(x,t;\delta(x,t))$, que

$$\begin{aligned} I(x,t) &= \frac{1}{\delta(x,t)^\lambda} \int_{t-\delta(x,t)^2}^t \frac{1}{(t-s)^3} \int_{x-\sqrt{(t-s)\ln\frac{\delta(x,t)}{\sqrt{t-s}}}}^{x+\sqrt{(t-s)\ln\frac{\delta(x,t)}{\sqrt{t-s}}}} |x-y|^3 |u(y,s) - u(x,s)| dy ds, \\ II(x,t) &= \frac{1}{\delta(x,t)^\lambda} \int_{t-\delta(x,t)^2}^t \frac{1}{(t-s)^2} \int_{x-\sqrt{(t-s)\ln\frac{\delta(x,t)}{\sqrt{t-s}}}}^{x+\sqrt{(t-s)\ln\frac{\delta(x,t)}{\sqrt{t-s}}}} |x-y| |u(y,s) - u(x,s)| dy ds. \end{aligned}$$

Estimación para $I(x,t)$. Aplicamos la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, multiplicamos y dividimos por $|x-y|^{1+\lambda p}$, estimamos por el radio de la bola espacial centrada en x , y luego agrupamos convenientemente para obtener la cadena de desigualdades que siguen, con algún abuso de simplificación en la notación que no necesita explicación adicional.

$$\begin{aligned} I(x,t) &\leq \frac{1}{\delta(x,t)^\lambda} \int_{t-\delta(x,t)^2}^t \frac{1}{(t-s)^3} \left\{ \int_{x-\sqrt{-}}^{x+\sqrt{-}} |x-y|^{3p} |u(y,s) - u(x,s)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \left((t-s) \ln \frac{\delta(x,t)}{\sqrt{t-s}} \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\ &= \frac{1}{\delta(x,t)^\lambda} \int_{t-\delta(x,t)^2}^t \frac{1}{(t-s)^3} \left\{ \int_{x-\sqrt{-}}^{x+\sqrt{-}} |x-y|^{1+p(3+\lambda)} \frac{|u(y,s) - u(x,s)|^p}{|x-y|^{1+\lambda p}} dy \right\}^{\frac{1}{p}} \left((t-s) \ln \frac{\delta(x,t)}{\sqrt{t-s}} \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\ &\leq \frac{1}{\delta(x,t)^\lambda} \int_{t-\delta(x,t)^2}^t \frac{1}{(t-s)^3} \left((t-s) \ln \frac{\delta(x,t)}{\sqrt{t-s}} \right)^{\frac{1}{2p} + \frac{3+\lambda}{2} + \frac{1}{2p'}} \left\{ \int_{x-\sqrt{-}}^{x+\sqrt{-}} \frac{|u(y,s) - u(x,s)|^p}{|x-y|^{1+\lambda p}} dy \right\}^{\frac{1}{p}} ds \\ &= \frac{1}{\delta(x,t)^\lambda} \int_{t-\delta(x,t)^2}^t (t-s)^{\frac{\lambda}{2}-1} \left(\ln \frac{\delta(x,t)}{\sqrt{t-s}} \right)^{2+\frac{\lambda}{2}} \left\{ - \right\}^{\frac{1}{p}} ds \\ &= \int_{t-\delta(x,t)^2}^t \frac{1}{t-s} \left(\frac{t-s}{\delta(x,t)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \left(\ln \frac{\delta(x,t)}{\sqrt{t-s}} \right)^{2+\frac{\lambda}{2}} \left\{ - \right\}^{\frac{1}{p}} ds. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio $\omega = t - s$ en la línea anterior y estimamos la integral en y por D , así

$$\begin{aligned}
I(x, t) &\leq \frac{1}{\delta(x, t)^2} \int_0^{\delta(x, t)^2} \frac{\delta(x, t)^2}{\omega} \left(\frac{\omega}{\delta(x, t)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\delta(x, t)^2}{\omega} \right)^{2 + \frac{\lambda}{2}} \left\{ \int_D \frac{|u(y, t - \omega) - u(x, t - \omega)|^p}{|x - y|^{1 + \lambda p}} dy \right\}^{\frac{1}{p}} d\omega \\
&= \int \frac{1}{\delta(x, t)^2} \mathcal{X}_{(0, 1)} \left(\frac{\omega}{\delta(x, t)^2} \right) \left(\frac{\omega}{\delta(x, t)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2} - 1} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\delta(x, t)^2}{\omega} \right)^{2 + \frac{\lambda}{2}} \left\{ \int_D \frac{|u(y, t - \omega) - u(x, t - \omega)|^p}{|x - y|^{1 + \lambda p}} dy \right\}^{\frac{1}{p}} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} (k_1) \delta(x, t)^2(\omega) \left\{ \int_D \frac{|u(y, t - \omega) - u(x, t - \omega)|^p}{|x - y|^{1 + \lambda p}} dy \right\}^{\frac{1}{p}} d\omega
\end{aligned}$$

donde usamos el núcleo k_1 , luego estimamos por el ya muy conocido operador maximal k_1^* asociado a k_1 , y obtenemos

$$I(x, t) \leq C k_1^* \left(\int_D \frac{|u(y, \cdot) - u(x, \cdot)|^p}{|x - y|^{1 + \lambda p}} dy \right)^{\frac{1}{p}}(t).$$

Estimación para $II(x, t)$. Es similar a la de $I(x, t)$, salvo que aquí el núcleo que aparece en el lado derecho será k_2 . Las cuentas para las estimaciones son análogas, y obtenemos

$$II(x, t) \leq C k_2^* \left(\int_D \frac{|u(y, \cdot) - u(x, \cdot)|^p}{|x - y|^{1 + \lambda p}} dy \right)^{\frac{1}{p}}(t).$$

Finalmente, en (5.8) usamos las estimaciones obtenidas para I e II , y tenemos la desigualdad (5.7). \square

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 25. Aplicamos el Corolario 2 del Capítulo 1 a los núcleos k_1 y k_2 definidos en (5.5) y (5.6), con $\vartheta = \frac{\lambda}{2} - 1$ en ambos y con $\theta = 2 + \frac{\lambda}{2}$ en k_1 y $\theta = 1 + \frac{\lambda}{2}$ en el núcleo k_2 evaluados en la función $g(t) = \left\{ \int_D \frac{|u(y, \cdot) - u(x, \cdot)|^p}{|x - y|^{1 + \lambda p}} dy \right\}^{\frac{1}{p}}(t)$. Obtenemos puntualmente que

$$k_i^* \left(\left\{ \int_D \frac{|u(y, \cdot) - u(x, \cdot)|^p}{|x - y|^{1 + \lambda p}} dy \right\}^{\frac{1}{p}} \right)(t) \leq C_i M^- \left(\left\{ \int_D \frac{|u(y, \cdot) - u(x, \cdot)|^p}{|x - y|^{1 + \lambda p}} dy \right\}^{\frac{1}{p}} \right)(t)$$

para $i = 1, 2$. De la desigualdad (5.7) y esta última estimación para k_i^* , $i = 1, 2$, tenemos la desigualdad que buscamos

$$\left| \delta(x, t)^{1 - \lambda} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq c(\eta, \eta_1)(C_1 + C_2) M^- \left(\left\{ \int_D \frac{|u(y, \cdot) - u(x, \cdot)|^p}{|x - y|^{1 + \lambda p}} dy \right\}^{\frac{1}{p}} \right)(t).$$

\square

Mencionamos que algunos de los resultados del Capítulo 4 y del Capítulo 5 están contenidos en el trabajo [AG12].

Aplicación: Regularidad simultánea espacio temporal a partir de integrabilidad de regularidad espacial

Este capítulo contiene el resultado de regularidad Besov conjunta en espacio y tiempo de las soluciones u de la ecuación del calor cuando se tiene una regularidad Besov espacial p -integrable en el sentido que u pertenece a $L^p((0, T); B_p^\lambda(D))$. Precisamente nuestro objetivo es probar el siguiente resultado.

TEOREMA 27. *Sea D un dominio Lipschitz en \mathbb{R}^d y $T > 0$. Hacemos $\Omega = D \times (0, T)$. Para cada $0 < \lambda < 1$, cada $1 < p < \infty$ y cada $0 < \varepsilon < \lambda$, si u es una temperatura en Ω y pertenece a $L^p((0, T); B_p^\lambda(D))$, entonces u pertenece al espacio de Besov parabólico $\mathbb{B}_p^{\lambda-\varepsilon}(\Omega)$.*

Aquí $\mathbb{B}_p^\omega(\Omega)$ es el espacio de Besov parabólico, que es un espacio que involucra regularidad Besov de orden ω en la variable espacial y $\frac{\omega}{2}$ en el tiempo.

Como en el caso elíptico (ver [JK]), dado que las soluciones u son analíticas en Ω , un resultado como el Teorema 27, provee información sobre el comportamiento de u únicamente cerca de la frontera parabólica de Ω .

En la Sección 6.2 introducimos los espacios de Besov parabólicos por medio de interpolación real, en la Sección 6.1 probamos un lema que utilizaremos en la demostración del Teorema 27 y en la Sección 6.3 probamos el Teorema 27. La demostración de este resultado se basa fuertemente en las desigualdades obtenidas en el Capítulo 5.

6.1. Estimaciones del gradiente para truncaciones suaves de temperaturas

En este capítulo D es un dominio Lipschitz en \mathbb{R}^d . Comenzamos mostrando una versión local en el tiempo del Corolario 23. Dado un dominio Lipschitz acotado D en \mathbb{R}^d y $T > 0$ escribiremos $\delta = \delta(x, t)$ para denotar la distancia parabólica de $(x, t) \in \Omega = D \times (0, T)$ a la frontera parabólica de Ω , $\partial_{\text{par}}\Omega = (\partial D \times [0, T]) \cup (D \times \{0\})$.

TEOREMA 28. *Sean $0 < \lambda < 1$ y $1 < p \leq \infty$ dados. Existe una constante C que depende de p , λ y D pero no de T tal que para toda temperatura u en Ω tenemos las desigualdades*

$$(6.1) \quad \left\| \delta^{1-\lambda} |\nabla u| \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^p((0, T); B_p^\lambda(D))},$$

$$(6.2) \quad \left\| \delta^{2-\lambda} |\nabla^{2,1} u| \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^p((0, T); B_p^\lambda(D))}.$$

La demostración puede obtenerse usando el mismo argumento del Capítulo 5, Teoremas 19 y 21, después de una estimación de $\delta^{1-\lambda} |\nabla u|$ en términos de una iteración de dos operadores maximales. En la variable espacial obtenemos un operador maximal del tipo Calderón y en el tiempo obtenemos una versión local del operador maximal de Hardy-Littlewood lateral que también es acotado en L^p .

El objetivo de esta sección, teniendo en mente la demostración de nuestro resultado principal, es obtener un análogo del Teorema 28 para truncaciones suaves de temperaturas. Como para $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ la función $v = \zeta u$ ya no es una solución de la ecuación del calor, necesitamos comprobar que una función v de este tipo aún satisface desigualdades como (6.1) y (6.2). Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

LEMA 29. *Sea ζ una función en $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Sea u una temperatura en Ω que pertenece a $L^p((0, T); B_p^\lambda(D))$ con $0 < \lambda < 1$ y $1 < p \leq \infty$. Entonces la función $v = \zeta u$ satisface las desigualdades*

$$(6.3) \quad \|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^p((0, T); B_p^\lambda(D))},$$

$$(6.4) \quad \left\| \delta^{1-\lambda} \nabla v \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^p((0, T); B_p^\lambda(D))},$$

$$(6.5) \quad \left\| \delta^{2-\lambda} \nabla^{2,1} v \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^p((0, T); B_p^\lambda(D))}$$

para alguna constante C .

DEMOSTRACIÓN. Notamos primero que (6.3) sigue de la acotación de ζ y de la desigualdad $\|u\|_{L^p((0, T); B_p^\lambda(D))} \geq \|u\|_{L^p(\Omega)}$. Para probar (6.4) y (6.5), como $\frac{\partial v}{\partial x_i} = \zeta \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} u$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} = \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + 2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_j \partial x_i} u$, $\frac{\partial v}{\partial t} = \zeta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} u$ y todas las derivadas de ζ son acotadas, por el Teorema 28, basta probar que las normas $L^p(\Omega)$ de cada una de las funciones $\delta^{1-\lambda} u$, $\delta^{2-\lambda} u$, $\delta^{2-\lambda} |\nabla u|$ para $0 < \lambda < 1$, están acotadas por $\|u\|_{L^p((0, T); B_p^\lambda(D))}$. Como D es acotado tenemos que $|\delta^{1-\lambda} u| \leq C |u|$, $|\delta^{2-\lambda} u| \leq C |u|$ y $|\delta^{2-\lambda} \nabla u| \leq C |\delta^{1-\lambda} \nabla u|$ para alguna constante C . \square

6.2. Los espacios de Besov parabólicos como espacios de interpolación

En el Teorema 27 dos clases de espacios de Besov están involucradas. Por $B_p^\lambda(D)$ denotamos el espacio de Besov elíptico $B_p^{\lambda, p}(D)$ de las restricciones a D del clásico $B_p^{\lambda, q}(\mathbb{R}^d)$ cuando $q = p$. Por otro lado, el espacio de Besov parabólico $B_p^\lambda(\Omega)$ se obtiene por interpolación entre el espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$ y un espacio de tipo Sobolev no isotrópico. Describimos este contexto con más detalle. Denotamos por $\nabla^{2,1}$ al operador diferencial que se aplica a una función real suave $v = v(x, t)$ definida en Ω y produce el vector de todas las derivadas parciales espaciales de segundo orden de v y sus derivadas de primer orden en el tiempo. Para un entero positivo k usaremos la expresión $(\nabla^{2,1})^k$ para denotar el vector que se obtiene por iteración de $\nabla^{2,1}$ k veces. Notamos que una componente general de este vector puede ser brevemente escrita como $\partial^\alpha v$ donde $\alpha = (\alpha'; \alpha_{d+1}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_d; \alpha_{d+1})$ con $|\alpha'| + 2\alpha_{d+1} = 2k$ donde $|\alpha'| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$.

Escribimos A_k para denotar el conjunto de aquellos α para un $k \in \mathbb{N}$ dado. Extendemos esta notación al caso $k = 0$ por $A_0 = \{(0, \dots, 0; 0)\}$. El espacio de Sobolev no isotrópico $\mathbb{W}_p^k(\Omega)$ es la clausura de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma

$$\|v\|_{\mathbb{W}_p^k(\Omega)} = \sum_{\alpha \in A_k} \sum_{\beta \leq \alpha} \left\| \partial^\beta v \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

El caso más simple, cuando $k = 1$, puede ser descripto como el espacio de las funciones en $L^p(\Omega)$ para las cuales las derivadas débiles $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$ y $\frac{\partial}{\partial t}$ pertenecen a $L^p(\Omega)$.

Señalamos que si $v(x, t) = v(x)$ entonces $v \in \mathbb{W}_p^k(\Omega)$ si y sólo si $v \in \mathbb{W}_p^{2k}(D)$, el clásico espacio elíptico de Sobolev en D . En otras palabras, y a pesar de la notación, la regularidad espacial involucrada en $\mathbb{W}_p^k(\Omega)$ es dos veces el valor del índice k .

Ahora estamos en posición de introducir el espacio de Besov no isotrópico que se obtiene por interpolación real entre $L^p(\Omega)$ y $\mathbb{W}_p^k(\Omega)$. Más precisamente, y atendiendo a la observación del párrafo precedente, definimos $\mathbb{B}_p^\tau(\Omega) = [L^p(\Omega), \mathbb{W}_p^1(\Omega)]_{\frac{\tau}{2}, p}$ para $0 < \tau < 2$.

Notar que el parámetro τ en la escala de los espacios de Besov parabólicos involucra regularidad espacial de orden τ pero regularidad temporal de orden $\frac{\tau}{2}$ como reflejo de la anisotropía en el espacio de Sobolev parabólico.

Siguiendo la demostración del Teorema 4.1 en [JK], usaremos el enfoque de trazas a la norma de los espacios de Besov parabólicos obtenidos por interpolación real (ver Sección 1.6 del Capítulo 1). Introducimos dos formas diferentes de acotar la norma en $\mathbb{B}_p^\tau(\Omega)$ con $\tau = 2\omega$ y $0 < \omega < 1$ que serán usadas en tres situaciones geométricas diferentes para un punto en la frontera parabólica de Ω . Nos ponemos en el contexto de la Sección 1.6 del Capítulo 1 (pág. 8) con $A_0 = \mathbb{W}_p^1(\Omega)$; $A_1 = L^p(\Omega)$; $\gamma = 1 - \omega$; $p_0 = p_1 = p$ y dos casos particulares de m : $m = 1$ y $m = 2$, y recordando la relación $\gamma = \frac{\eta_0}{\eta_0 + m - \eta_1}$. Para estimar superiormente la norma de v en $\mathbb{B}_p^\tau(\Omega) = \mathbb{B}_p^{2\omega}(\Omega) = [L^p(\Omega), \mathbb{W}_p^1(\Omega)]_{\omega, p} = [\mathbb{W}_p^1(\Omega), L^p(\Omega)]_{\gamma, p}$ nos bastará encontrar un número η_0 y una función $f : [0, \infty) \rightarrow L^p(\Omega) + \mathbb{W}_p^1(\Omega)$ con $f(0) = v$ de modo que alguna de las expresiones siguientes sea finita

$$(i) \quad \int_0^\infty \|s^{\eta_0} f(s)\|_{\mathbb{W}_p^1(\Omega)}^p \frac{ds}{s} + \int_0^\infty \left\| s^{2 - \frac{\omega}{1-\omega} \eta_0} f''(s) \right\|_{L^p(\Omega)}^p \frac{ds}{s},$$

$$(ii) \quad \int_0^\infty \|s^{\eta_0} f(s)\|_{\mathbb{W}_p^1(\Omega)}^p \frac{ds}{s} + \int_0^\infty \left\| s^{1 - \frac{\omega}{1-\omega} \eta_0} f'(s) \right\|_{L^p(\Omega)}^p \frac{ds}{s}.$$

6.3. Prueba del Teorema 27

De acuerdo al argumento de localización expuesto en la Sección 1.3, para probar el teorema, mostraremos que ζu pertenece al espacio de Besov parabólico $\mathbb{B}_p^\lambda(\Omega)$ para cada uno de los cuatro tipos de funciones ζ involucradas, de acuerdo al tipo de conjunto abierto \mathcal{O} en el cual esté soportada. Dividiremos entonces nuestro análisis en los cuatro casos correspondientes a los cuatro distintos tipos de abiertos que intervienen en el cubrimiento abierto: \mathcal{O}_I , \mathcal{O}_{II} , \mathcal{O}_{III} y \mathcal{O}_{IV} .

ESTIMACIONES CUANDO ζ ES DE TIPO I. Como u es una solución de la ecuación del calor en Ω , entonces ζu , que es de clase \mathcal{C}^∞ y de soporte compacto, pertenece a cualquier espacio de Besov puesto que está en el correspondiente espacio de Sobolev parabólico. \square

Los casos II, III y IV involucran puntos en la frontera de Ω y todos ellos se basan en el Lema 29 y en el método de trazas a las normas de Besov parabólicas descritas en la Sección 6.2.

ESTIMACIONES CUANDO ζ ES DE TIPO II. Probaremos que para $\varepsilon > 0$ y suficientemente chico ($0 < \varepsilon < \lambda$), (i) es finita si tomamos $\omega = 1 - \frac{\lambda - \varepsilon}{2}$, $\eta_0 = 2 - \lambda + \varepsilon$ y $f(s) = f_{\text{II}}(s) = v(x', y + s; t)\theta(s)$, donde $v(x', y; t) = \zeta(x', y; t)u(x', y; t)$ (aquí $x = (x', y)$ con $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ e $y \in \mathbb{R}$), θ una función \mathcal{C}^∞ con soporte compacto contenido en el intervalo $(-\frac{r}{4}, \frac{r}{4})$, $\theta(s) = 1$ para $|s| < \frac{r}{8}$, y ζ una función cuyo soporte esta contenido en un conjunto del tipo \mathcal{O}_{II} . Por la invariancia por traslaciones de la ecuación del calor y sus soluciones, podemos suponer que el conjunto de tipo \mathcal{O}_{II} es de la forma $B(r) \times (r^2, T)$ con $B(r) = B(0, r)$, entonces el soporte de ζ está contenido en $B(r) \times (r^2, T)$ con $\zeta(x; t) = 1$ en $B(\frac{r}{2}) \times (r^2, T)$. Más precisamente, demostraremos que

$$(6.6) \quad \int_0^\infty \|s^{\eta_0} f_{\text{II}}(s)\|_{W_p^1(\Omega)}^p \frac{ds}{s} + \int_0^\infty \|s^{\eta_1} f_{\text{II}}''(s)\|_{L^p(\Omega)}^p \frac{ds}{s}$$

es finita con $\eta_0 = 2 - \lambda + \varepsilon = \eta_1$.

Notamos que $f(0) = v(x; t)$. El hecho que $f \in L^p(\Omega) + W_p^1(\Omega)$ se obtiene de que $u \in L^p((0, T); B_p^\lambda(D))$, y está contenida en la primera estimación de abajo.

Para estimar la primera integral en (6.6), tenemos que hacer estimaciones en integrales que involucran la norma $L^p(\Omega)$ para $f(s)$, $\nabla f(s) = \nabla v(x', y + s; t)\theta(s)$, y para $\nabla^{2,1} f(s) = \nabla^{2,1} v(x', y + s; t)\theta(s)$.

Comenzamos con la estimación para $f(s)$. En la primera desigualdad que sigue usamos que el soporte de θ está contenido en $(0, \frac{r}{4})$ y que θ está acotada. También, que el soporte de ζ está contenido en la bola $B(r) \times (r^2, T)$ y que ζ está acotada. Usamos que si $(x', y) \in (D + (0, s)) \cap B(r)$ y $0 < s < \frac{r}{8}$, entonces $(x', y) \in D \cap B(r)$.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty s^{\eta_0 p - 1} \|f(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds \\ &= \int_0^\infty s^{\eta_0 p - 1} \left(\iiint |v(x', y + s; t)\theta(s)|^p dx' dy dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{\frac{r}{4}} s^{\eta_0 p - 1} \left(\iiint |v(x', y + s; t)|^p dx' dy dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{\frac{r}{4}} s^{\eta_0 p - 1} \left(\int_{r^2}^T \iint_{D \cap B(r)} |v(x', y; t)|^p dx' dy dt \right) ds \\ &\leq c \|u\|_{L^p((0, T); B_p^\lambda(D))} \int_0^{\frac{r}{4}} s^{\eta_0 p - 1} ds. \end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos (6.3) en Lema 29, y la última integral es finita para cualquier $\eta_0 > 0$ en particular para el querido.

Estimamos $\nabla f(s)$. Aquí usamos que para los $(x', y) \in D \cap B(r)$, como D es Lipschitz, existe una constante c tal que $s \leq c\delta(x', y + s)$. Además que la distancia parabólica coincide con la euclídea $\delta(x', y) = \delta(x', y; t)$ y la desigualdad (6.4).

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty s^{\eta_0 p - 1} \left\| \frac{\partial f(s)}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p ds \\
&= \int_0^\infty s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1} \left(\iiint \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y + s; t)\theta(s) \right|^p dx' dy dt \right) ds \\
&\leq \int_0^{\frac{T}{4}} s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1} \left(\iiint \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y + s; t) \right|^p dx' dy dt \right) ds \\
&= \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1}}{s^{(1-\lambda)p}} \left(\iiint \left| s^{1-\lambda} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y + s; t) \right|^p dx' dy dt \right) ds \\
&\leq \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1}}{s^{(1-\lambda)p}} \left(\int_{r^2}^T \iint \left| \delta^{1-\lambda}(x', y + s; t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y + s; t) \right|^p dx' dy dt \right) ds \\
&= \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1}}{s^{(1-\lambda)p}} \left(\int_{r^2}^T \iint_{(D+(0,s)) \cap B(r)} \left| \delta^{1-\lambda}(x', y; t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y; t) \right|^p dx' dy dt \right) ds \\
&\leq \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1}}{s^{(1-\lambda)p}} \left(\int_{r^2}^T \iint_{D \cap B(r)} \left| \delta^{1-\lambda}(x', y; t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y; t) \right|^p dx' dy dt \right) ds \\
&\leq c \|u\|_{L^p((0,T); B_p^\lambda(D))}^p \int_0^{\frac{T}{4}} s^{p(1+\varepsilon)-1} ds
\end{aligned}$$

y la última integral es finita.

Para estimar las integrales correspondientes al $\nabla^{2,1} f$, es decir para las integrales

$$\int_0^\infty s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1} \left\| \frac{\partial^2 f(s)}{\partial x_i^2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p ds \quad \text{y} \quad \int_0^\infty s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1} \left\| \frac{\partial f(s)}{\partial t} \right\|_{L^p(\Omega)}^p ds$$

las cuentas son prácticamente análogas a las anteriores, salvo que tenemos $\delta^{2-\lambda}$ para tener la correcta desigualdad en norma a aplicar.

Estimamos la segunda integral en (6.6) con $\eta_1 = 2 - \lambda + \varepsilon$. Tenemos que $f'(s) = \frac{\partial v}{\partial y}(x', y + s; t)\theta(s) + v(x', y + s; t)\theta'(s)$, y derivando otra vez obtenemos que

$$f''(s) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x', y + s; t)\theta(s) + 2 \frac{\partial v}{\partial y}(x', y + s; t)\theta'(s) + v(x', y + s; t)\theta''(s).$$

Aplicando la desigualdad triangular, resta estimar y ver que las integrales siguientes son finitas.

$$\int_0^\infty s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x', y + s; t)\theta(s) \right\|_{L^p(\Omega)}^p ds,$$

$$\int_0^\infty s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1} \left\| \frac{\partial v}{\partial y}(x', y+s; t) \theta'(s) \right\|_{L^p(\Omega)}^p ds,$$

$$\int_0^\infty s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1} \|v(x', y+s; t) \theta''(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds.$$

Observar que estas integrales ya las hemos estimado, en estos casos además debemos usar que θ es $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con soporte acotado, por lo tanto θ , θ' y θ'' son acotadas. \square

ESTIMACIONES CUANDO ζ ES DE TIPO III. Probaremos que (ii) es finita si tomamos $\omega = 1 - \frac{\lambda}{2}$, $\eta_0 = 1 - \frac{\lambda}{2}$ y $f(s) = f_{\text{III}}(s) = v(x; t+s)\theta(s)$, donde el soporte de ζ está contenido en un conjunto de tipo \mathcal{O}_{III} , y el soporte de θ está contenido en el intervalo $(-r^2, r^2)$. En este caso el desplazamiento solo afecta la variable tiempo. Mostraremos que las integrales

$$(6.7) \quad \int_0^\infty \|s^{\eta_0} f_{\text{III}}(s)\|_{\mathbb{W}_p^1(\Omega)}^p \frac{ds}{s} + \int_0^\infty \|s^{\eta_1} f'_{\text{III}}(s)\|_{L^p(\Omega)}^p \frac{ds}{s}$$

son finitas si tomamos $\eta_0 = 1 - \frac{\lambda}{2} = \eta_1$.

Estimamos la primera integral en (6.7).

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{\eta_0 p-1} \|f_{\text{III}}(s)\|_{L^p}^p ds &= \int_0^\infty s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \left(\iint_{\Omega} |v(x; t+s)\theta(s)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \left(\iint_{\Omega} |v(x; t+s)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \left(\int_s^{r^2+s} \int_{D \cap B(r)} |v(x; t)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \left(\int_{r^2+s}^{T+s} \int_{D \cap B(r)} |v(x; t)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \left(\int_0^{2r^2} \int_{D \cap B(r)} |v(x; t)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \left(\iint_{\Omega} |v(x; t)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq c \|u\|_{L^p((0,T); B_p^\lambda(D))}^p \int_0^{r^2} s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} ds. \end{aligned}$$

El r es suficientemente pequeño, notar que la constante en el lado derecho de todas estas desigualdades depende del r pero no es relevante. Aquí volvimos a usar la desigualdad (6.3) de nuestro Lema 29 aplicado a una ζ de tipo III. La última integral resulta finita.

Las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(s)$, y $\frac{\partial f}{\partial t}(s)$ son análogas a la de f_{II} con la traslación en la variable del tiempo. Usamos que $0 < s < t < s+2r^2 < 3r^2$ para obtener la contención para $x \in D$

con $d(x, \partial D) > \frac{r}{2}$ fijo, $\{(s, t) : s < t < 2r^2 + s; 0 < s < r^2\} \subset \{(s, t) : 0 < t < 3r^2; 0 < s < t\}$. Luego aplicamos el Teorema de Fubini, y usamos que $\delta^2(x; t) \geq t$ para $(x; t)$ en \mathcal{O}_{III} .

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \left\| \frac{\partial f(s)}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p ds \\
&= \int_0^\infty s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \left(\iint_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x; t+s)\theta(s) \right|^p dx dt \right) ds \\
&\leq \int_0^\infty s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \theta^p(s) \iint_{\{x \in D, d(x, \partial D) > \frac{r}{2}; 0 < t < 2r^2\}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x; t+s) \right|^p dx dt ds \\
&\leq \int_0^{r^2} s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \iint_{\{x \in D, d(x, \partial D) > \frac{r}{2}; s < t < 2r^2+s\}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x; t) \right|^p dx dt ds \\
&\leq \int_{\{x \in D, d(x, \partial D) > \frac{r}{2}\}} \int_0^{3r^2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x; t) \right|^p \left(\int_0^t s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} ds \right) dt dx \\
&\leq \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{2})p} \int_0^{3r^2} \int_D \left| (\delta^2)^{1-\frac{\lambda}{2}}(x; t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x; t) \right|^p dt dx \\
&\leq \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{2})p} \iint_{\Omega} \left| \delta^{2-\lambda}(x; t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x; t) \right|^p dt dx \\
&\leq c \iint_{\Omega} \left| \delta^{1-\lambda}(x; t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x; t) \right|^p dt dx \\
&\leq c \|u\|_{L^p((0, T); B_p^\lambda(D))}^p
\end{aligned}$$

donde usamos la desigualdad (6.4) del Lema 29. Análoga a la anterior es la estimación para

$$\int_0^\infty s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \iint \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}(x; t+s)\theta(s) \right|^p dx dt ds$$

y para

$$\int_0^\infty s^{(1-\frac{\lambda}{2})p-1} \iint \left| \frac{\partial v}{\partial t}(x; t+s)\theta(s) \right|^p dx dt ds.$$

Para estimar la segunda integral, como $f'(s) = \frac{\partial v}{\partial t}(x; t+s)\theta(s) + v(x; t+s)\theta'(s)$, por la desigualdad triangular basta estimar las integrales

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty s^{\eta_1 p-1} \left(\iint_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(x; t+s)\theta(s) \right|^p dx dt \right) ds \\
& \int_0^\infty s^{\eta_1 p-1} \left(\iint_{\Omega} |v(x; t+s)\theta'(s)|^p dx dt \right) ds
\end{aligned}$$

Las integrales precedentes realmente ya fueron estimadas con $\eta_1 = 1 - \frac{\lambda}{2}$ y mostramos que son finitas salvo con θ en lugar de θ' . \square

ESTIMACIONES CUANDO ζ ES DE TIPO IV. En este caso mostraremos que para $\omega = 1 - \frac{\lambda - \epsilon}{2}$ y $\eta_0 = 2 - \lambda + \epsilon$ con ϵ pequeño y para la función con desplazamiento parabólico, s en el espacio y s^2 en el tiempo, $f(s) = f_{IV}(s) = v(x', y + s; t + s^2)\theta(s)$, la expresión (ii) es finita, donde $v(x', y; t) = \zeta(x', y; t)u(x', y; t)$ con el soporte de ζ contenido en $B(r) \times (-2r^2, 2r^2)$. Probaremos que

$$(6.8) \quad \int_0^\infty \|s^{\eta_0} f_{IV}(s)\|_{W_p^1(\Omega)}^p \frac{ds}{s} + \int_0^\infty \|s^{\eta_1} f'_{IV}(s)\|_{L^p(\Omega)}^p \frac{ds}{s}$$

es finita cuando $\eta_0 = 2 - \lambda + \epsilon$ y $\eta_1 = 1 - \lambda + \epsilon$. Como en los casos anteriores, empezamos con una estimación para f

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{\eta_0 p - 1} \|f_{IV}(s)\|_{L^p}^p ds &= \int_0^\infty s^{(2-\lambda+\epsilon)p-1} \left(\iint_{\Omega} |v(x', y + s; t + s^2)\theta(s)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(2-\lambda+\epsilon)p-1} \left(\iint_{\Omega} |v(x; t + s)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(2-\lambda+\epsilon)p-1} \left(\int_s^{r^2+s} \int_{D \cap B(r)} |v(x; t)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(2-\lambda+\epsilon)p-1} \left(\int_{r^2+s}^{T+s} \int_{D \cap B(r)} |v(x; t)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(2-\lambda+\epsilon)p-1} \left(\int_0^{2r^2} \int_{D \cap B(r)} |v(x; t)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq \int_0^{r^2} s^{(2-\lambda+\epsilon)p-1} \left(\iint_{\Omega} |v(x; t)|^p dx dt \right) ds \\ &\leq c \|u\|_{L^p((0,T); B_p^\lambda(D))}^p \int_0^{r^2} s^{(2-\lambda+\epsilon)p-1} ds \\ &\leq c \frac{r^{2p(2-\lambda+\epsilon)}}{p(2-\lambda+\epsilon)} \|u\|_{L^p((0,T); B_p^\lambda(D))}^p \end{aligned}$$

Para estimar $\nabla f(s)$ que es igual a $\nabla v(x', y + s, t + s^2)\theta(s)$, vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\| s^{\eta_0} \frac{\partial v}{\partial x_i} \theta \right\|_{L^p(\Omega)}^p \frac{ds}{s} &= \int_0^\infty s^{(2-\lambda+\epsilon)p-1} \theta^p(t) \left(\iiint_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y + s; t + s^2) \right|^p dx' dy dt \right) ds \\ (6.9) \quad &\leq \int_0^r s^{(2-\lambda+\epsilon)p-1} \left(\iiint_{\Omega_+(0,s;s^2)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y'; t') \right|^p dx' dy' dt' \right) ds \end{aligned}$$

Para $(x', y', t') \in \Omega_+(0, s, s^2)$ la región de integración para todas las variables (x', y, t, s) está dada por $R = \{(x', y, t, s) : 0 < s < r, |x'|_{d-1} < r, y > \phi(x') + s, |y - s| < r, s^2 < t < s^2 + r\}$. Podemos ver que $R \subseteq R_1 \cup R_2$, donde

$$R_1 = \{(x', y, t, s) : r^2 < t < 2r^2, \sqrt{t - r^2} < s < r, |x'|_{d-1} < r, \phi(x') + s < y < s + r\};$$

$$R_2 = \left\{ (x', y, t, s) : 0 < t < r^2, 0 < s < \sqrt{t}, |x'|_{d-1} < r, \phi(x') + s < y < s + r \right\}.$$

Luego basta estimar la integral (6.9) en R_1 y R_2 respectivamente. En R_1 , después de multiplicar y dividir por $\delta^{(1-\lambda)p}(x', y; t)$, y usar que $\delta(x', y; t) \geq cs$ para alguna constante c puesto que $\sqrt{t} > r > s$ y $\delta(x', y) \simeq y - \phi(x') > s$, vemos que

$$\begin{aligned} & \int_{r^2}^{2r^2} \int_{\sqrt{t-r^2}}^r s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1} \left(\int_{|x'| < r} \int_{\phi(x')+s}^{s+r} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y; t) \right|^p dy dx' \right) ds dt \\ & \leq c^{(\lambda-1)p} \int_{r^2}^{2r^2} \int_{\sqrt{t-r^2}}^r \frac{s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1}}{s^{(1-\lambda)p}} \left(\int_{|x'| < r} \int_{\phi(x')+s}^{s+r} \left(\delta^{(1-\lambda)}(x', y; t) \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y; t) \right| \right)^p dy dx' \right) ds dt \\ & \leq c^{(\lambda-1)p} \int_{r^2}^{2r^2} \int_0^r s^{(1+\varepsilon)p-1} \left(\iint_D \left(\delta^{(1-\lambda)}(x', y; t) \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y; t) \right| \right)^p dy dx' \right) ds dt \\ & = c^{(\lambda-1)p} r^{(1+\varepsilon)p} \int_{r^2}^{2r^2} \iint_D \left(\delta^{(1-\lambda)}(x', y; t) \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y; t) \right| \right)^p dy dx' dt \\ & \leq c(r, \varepsilon) \iint_{\Omega} \left(\delta^{(1-\lambda)}(x, t) \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x; t) \right| \right)^p dx dt \end{aligned}$$

y aplicamos la desigualdad (6.4), y tenemos que la integral en Ω es finita. En la región R_2 observamos que aunque s sea próximo a cero podemos casi repetir el argumento anterior. Como en R_2 se cumple que $t < r^2$ y $s < \sqrt{t}$ tenemos que $s^2 < t < r^2$, resulta también como antes que $\delta(x', y, t) \geq cs$, entonces la integral en (6.9) se puede estimar como sigue

$$\begin{aligned} & \int_0^r s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1} \left(\int_{s^2}^{r^2} \int_{|x'|_{d-1} < r} \int_{\phi(x')+s}^{s+r} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y; t) \right|^p dy dx' dt \right) ds \\ & \leq c^{(\lambda-1)p} \int_0^r \frac{s^{(2-\lambda+\varepsilon)p-1}}{s^{(1-\lambda)p}} \left(\int_{s^2}^{r^2} \int_{|x'|_{d-1} < r} \int_{\phi(x')+s}^{s+r} \left(\delta^{1-\lambda}(x', y; t) \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', y; t) \right| \right)^p dy dx' dt \right) ds \\ & \leq c^{(\lambda-1)p} r^{(1+\varepsilon)p} \iint_{\Omega} \left(\delta^{1-\lambda}(x, t) \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x; t) \right| \right)^p dx dt. \end{aligned}$$

Para estimar las derivadas segundas, como $\nabla^2 f(s) = \nabla^2 v(x', y + s; t + s^2)\theta(s)$, el argumento es análogo al anterior pero como tenemos derivadas segundas de v multiplicamos y dividimos por $s^{(2-\lambda)p}$, y entonces aplicamos la desigualdad (6.5). Para la derivada respecto de t , $\partial_t f(s) = 2s \partial_t v(x', y + s; t + s^2)\theta(s)$, tenemos una potencia más en s , pero la estimación es como antes en las regiones R_1 y R_2 , también multiplicamos y dividimos por $s^{(2-\lambda)p}$ y usamos de nuevo (6.5), como se muestra sintéticamente abajo.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty s^{\eta_0 p} \|s \partial_t v \theta\|_{L^p(\Omega)}^p \frac{ds}{s} \\ & \leq \int_0^\infty s^{(2-\lambda+\varepsilon+1)p-1} \left(\iiint_{\Omega+(0,s,s^2)} |\partial_t v(x, y; t)|^p dx dy dt \right) ds \\ & \leq \int_0^\infty \frac{s^{(3-\lambda+\varepsilon)p-1}}{s^{(2-\lambda)p}} \iint_{\Omega} \left(\delta^{2-\lambda}(x, t) |\partial_t v(x; t)| \right)^p dx dt \\ & \leq c r^{(1+\varepsilon)p} \|u\|_{L^p((0,T); B_p^\lambda(D))}. \end{aligned}$$

Para mostrar que la segunda integral en (6.8) es finita (la que depende de η_1), aplicamos la regla de la cadena y vemos que la derivada de f es $\left[\frac{\partial v}{\partial y}(x', y + s; t + s^2) + 2s \frac{\partial v}{\partial t}(x', y + s; t + s^2) \right] \theta(s) + v(x', y + s; t + s^2) \theta'(s)$. Y los términos involucrados aquí ya fueron estimados realmente, sólo hay que reescribir las estimaciones anteriores con $\eta_1 = 1 - \lambda - \varepsilon$ en lugar del $\eta_0 = 2 - \lambda + \varepsilon$. \square

Hemos terminado la demostración del Teorema 27.

Conclusiones

- A partir de fórmulas del valor medio para temperaturas con núcleos formados por funciones características es posible obtener fórmulas del valor medio con núcleos de convolución que tienen suavidad espacial en cada instante fijo.
- Aunque los núcleos del valor medio parabólico no tienen variables espaciales y temporales separadas, los operadores maximales de Hardy-Littlewood controlan a las soluciones, la maximal de Hardy-Littlewood a la parte espacial y la maximal lateral a la temporal y, por lo tanto, los teoremas básicos de convergencia del análisis armónico son válidos en este contexto.
- La composición de operadores de tipo Calderón y maximales laterales controlan puntualmente a las derivadas espaciales de las temperaturas, y por consiguiente a las temporales.
- La integrabilidad temporal de la regularidad espacial, medida en términos de normas de Besov asegura la integrabilidad de ponderaciones por potencias correctas de la distancia parabólica a un dominio cilíndrico de gradientes espacio temporales de temperaturas.
- La regularidad simultánea en las variables espacio y tiempo es consecuencia de la integrabilidad Lebesgue en el tiempo de la norma Besov elíptica de una temperatura.
- El resultado puede ser un insumo útil en el estudio de la automejora de la regularidad Besov espacio temporal de temperaturas y en el análisis de velocidad de convergencia para aproximaciones no lineales de soluciones.

Bibliografía

- [AGI1] Hugo Aimar, Ivana Gómez, and Bibiana Iaffei. Maximal function estimates for the parabolic mean value kernel. *Rev. Mat. Complut.*, 21(2):519–527, 2008.
- [AGI2] Hugo Aimar, Ivana Gómez, and Bibiana Iaffei. Parabolic mean values and maximal estimates for gradients of temperatures. *J. Funct. Anal.*, 255(8):1939–1956, 2008.
- [BL] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.
- [BS] Colin Bennett and Robert Sharpley. *Interpolation of operators*, volume 129 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [Cal] Alberto Calderón. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions. *Studia Math.*, 44:563–582, 1972. Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, VI.
- [CS] Alberto Calderón and Ridgway Scott. Sobolev type inequalities for $p > 0$. *Studia Math.*, 62(1):75–92, 1978.
- [DD] Stephan Dahlke and Ronald DeVore. Besov regularity for elliptic boundary value problems. *Comm. Partial Differential Equations*, 22(1-2):1–16, 1997.
- [dG] Miguel de Guzmán. *Real variable methods in Fourier analysis*, volume 46 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 75.
- [DS] Ronald DeVore and Robert Sharpley. Maximal functions measuring smoothness. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 47(293):viii+115, 1984.
- [Eva] Lawrence Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [FG] Gene Fabes and Nicola Garofalo. Mean value properties of solutions to parabolic equations with variable coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 121(2):305–316, 1987.
- [FMRO] Liliana Forzani, Francisco Martín-Reyes, and Sheldy Ombrosi. Weighted inequalities for the two-dimensional one-sided Hardy-Littlewood maximal function. Preprint.
- [Fri] Avner Friedman. *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [Ful] Watson Fulks. A mean value theorem for the heat equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17:6–11, 1966.
- [Iaf] Bibiana Iaffei. *Espacios Lipschitz generalizados y operadores invariantes por traslaciones*. PhD thesis, Universidad Nacional del Litoral, 1997.
- [JK] David Jerison and Carlos Kenig. The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 130(1):161–219, 1995.
- [Lie] Gary Lieberman. *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [LM] Jacques L. Lions and Enrico Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*. Springer-Verlag, New York, 1972. Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181.

- [MR] Francisco Martín-Reyes. New proofs of weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117(3):691–698, 1993.
- [Nai] Virginia Naibo. *Diferenciación rectangular de integrales de funciones de Besov*. PhD thesis, Universidad Nacional del Litoral, 2002.
- [Omb] Sheldy Ombrosi. Weak weighted inequalities for a dyadic one-sided maximal function in \mathbb{R}^n . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(6):1769–1775 (electronic), 2005.
- [Pee] Jaak Peetre. *New thoughts on Besov spaces*, volume 1 of *Duke University Mathematics Series*. Mathematics Department, Duke University, Durham, N.C., 1976.
- [Pin1] Bruno Pini. Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 32:179–204, 1951.
- [Pin2] Bruno Pini. Maggioranti e minoranti delle soluzioni delle equazioni paraboliche. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 37:249–264, 1954.
- [Saw] Eric Sawyer. Weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 297(1):53–61, 1986.
- [Ste] Elias Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [SW] Noriaki Suzuki and Neil Watson. Mean value densities for temperatures. *Colloq. Math.*, 98(1):87–96, 2003.
- [Tai1] Mitchell Taibleson. On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -space. I. Principal properties. *J. Math. Mech.*, 13:407–479, 1964.
- [Tai2] Mitchell Taibleson. On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -space. II. Translation invariant operators, duality, and interpolation. *J. Math. Mech.*, 14:821–839, 1965.
- [Tai3] Mitchell Taibleson. On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -space. III. Smoothness and integrability of Fourier transforms, smoothness of convolution kernels. *J. Math. Mech.*, 15:973–981, 1966.
- [Wat1] Neil Watson. On the definition of a subtemperature. *J. London Math. Soc. (2)*, 7:195–198, 1973.
- [Wat2] Neil Watson. A theory of subtemperatures in several variables. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 26:385–417, 1973.

Ivana Gómez

Dr. Hugo Aimar
Director

Dra. Bibiana Iaffei
Co-directora

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral
Güemes 3450
Santa Fe, noviembre de 2008.

Una mirada inquisitiva a las demostraciones analíticas rigurosas, necesitamos casi recurrentemente, para que la lejana ecuación del calor propuesta por Fourier para describir la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido, nos diga algo más que tal vez es esquivo a otras visiones matemáticas.