



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL
GRADO ACADÉMICO DE

Magíster en Tecnología Química

TÍTULO DE LA TESIS:

Análisis numérico de un modelo de lubricación visco-elastohidrodinámico aplicado a prótesis de rodilla.

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC-UNL-CONICET)
en conjunto con la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos
(FI-UNER).

AUTOR:

Bioing. Marcelo Eduardo Berli

Director de Tesis:

Dr. José Di Paolo

Codirector de Tesis:

Dr. Fernando A. Saita

Miembros del Jurado:

Dr. Alfredo Huespe

Dr. Raúl Bortolozzi

Dr. Ariel Braidot

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2010

Agradecimientos

A mi director y co-director, José Di Paolo y Fernando A. Saita, quienes me han acompañado en este trabajo y a quienes agradezco el comfortable ambiente de trabajo que me han brindado.

A los evaluadores de esta tesis, Dres. Ariel Braidot, Alfredo Hueste y Raúl Bortolozzi, quienes tan amablemente han mostrado una excelente predisposición en la evaluación de esta tesis.

A la Facultad de Ingeniería de la UNER, lugar donde he dado mis primeros pasos y me abrió las puertas para realizar parte de este trabajo.

Al INTEC-UNL, instituto que me brindó todas las posibilidades para que esta tesis pueda llevarse a cabo.

Finalmente, a mi esposa Daniela, mi hija Isabella y mi hijo Martín, quienes llenan mi corazón y cuyo amor es mi principal motor en la vida.

Índice

Índice	I
Resumen	IV
1.Introducción	1
<i>1-1 Problema motivador</i>	1
<i>1-2 Antecedentes del modelo y modificaciones actuales</i>	3
<i>1-3 Organización de la tesis.....</i>	6
2. Anatomía y Modelo Geométrico de las Prótesis	9
<i>2-1 Anatomía de la rodilla.</i>	9
<i>2-2 Relación con las prótesis.....</i>	13
<i>2-3 Geometría equivalente de una prótesis de rodilla.....</i>	14
3. Histología, materiales de Reemplazo y Deformación	18
<i>3-1 Histología general de los tejidos articulares.</i>	18
3-1.1 Introducción.....	18
3-1.2 Cartílago articular hialino.....	18
3-1.3 Meniscos	19
<i>3-2 Materiales de las prótesis actuales</i>	20
<i>3-3 Deformación del material.</i>	21
3-3.1 Introducción.....	21
3-3.2 Definición del problema para el sólido deformable	23
3-3.3 Principio de correspondencia	29
3-3.4 Modelo de deformación viscoelástica de columna.....	32
3-3.4_a) Modelo de Voigt	33
3-3.4_b) Sólido Estándar Lineal	35
<i>3-4 Capacidad de exudación-absorción</i>	37
3-4.1 Introducción.....	37
3-4.2 Desarrollo	37

4. Biomecánica y Teoría de Lubricación	39
4-1 <i>Fisiología de la rodilla.</i>	39
4-1.1 Introducción.....	39
4-1.2 Función del cartílago articular.....	39
4-1.3 Función del líquido sinovial.....	41
4-2 <i>Biomecánica de la marcha y teoría de lubricación.</i>	46
4-2.1 Introducción.....	46
4-2.2 Fases de la marcha normal.....	46
4-2.3 Lubricación de la rodilla.....	48
4-3 <i>Ecuaciones de conservación.</i>	51
4-3.1 Introducción.....	51
4-3.2 Balance de cantidad de movimiento.....	52
4-3.3 Ecuación Reynolds modificada.....	54
4-3.4 Balance de masa: Ecuación del caudal.....	56
4-4 <i>Carga total.</i>	58
4-5 <i>Coefficiente de fricción.</i>	59
5. Modelo adimensional	61
5-1 <i>Fundamentos.</i>	61
5-2 <i>Adimensionalización</i>	61
5-3 <i>Resumen de las hipótesis simplificadoras</i>	62
5-4 <i>Ecuaciones a resolver.</i>	64
5-5 <i>Parámetros físicos representativos</i>	66
6. Método de resolución	68
6-1 <i>Método.</i>	68
6-1.1 Introducción.....	68
6-1.2 Breve descripción de la técnica numérica.....	69
6-1.3 Residuos	77
6-1.4 Discretización adaptable.....	78
6-1.5 Implementación de las ecuaciones de deformación.....	82
6-2 <i>Software.</i>	85

7. Resultados y discusiones.....	88
7-1 <i>Introducción.....</i>	88
7-2 <i>Resultados para el modelo de material elástico.....</i>	89
7-3 <i>Modelo de Voigt (VG)</i>	92
7-3.1 <i>Resultados para el modelo VG con módulo $E=20$ MPa</i>	93
7-3.2 <i>Resultados para el modelo VG con módulo $E=500$ MPa.</i>	103
7-4 <i>Sólido Estándar Lineal (SEL).....</i>	109
7-4.1 <i>Resultados para el modelo SEL con módulo $E_{eq}=20$ MPa</i>	110
7-4.2 <i>Resultados para el modelo SEL con módulo $E_{eq}=500$ MPa.</i>	124
7-5 <i>Material con capacidad de exudación. Casos: SEL con módulo $E_{eq}=20$ MPa y VG con módulo $E=500$ MPa.</i>	128
7-6 <i>Inferencias mecánicas sobre el uso de lubricantes Newtonianos en el ensayo de polímeros para prótesis de rodilla</i>	133
8. Conclusiones	139
8-1 <i>Limitaciones del modelo</i>	142
8-2 <i>Futuros trabajos.....</i>	143
Apéndice A	A.1
Apéndice B	B.1
Apéndice C	C.1
Referencias	D.1

Resumen

El desgaste del polietileno que conforma el componente tibial de las prótesis de rodilla, es reconocido como el principal problema limitante en la duración de estos implantes. La dificultad de realizar mediciones in vivo de las variables elasto-hidrodinámicas que influyen sobre el desgaste del polímero en la zona de contacto del implante, motivó el estudio numérico de modelos teóricos. Trabajos anteriores se centraron en el estudio de los espesores de la película lubricante (H , separación en la zona de contacto), campos de presiones (P , tensiones sobre el polímero) y coeficiente de fricción (ϕ), mostrando una optimización en la lubricación de la junta ante la presencia de un material elástico de baja rigidez, con capacidad de exudar y absorber fluido. No obstante, los materiales deformables (no-metálicos) actualmente utilizados o investigados para ser empleados en prótesis articulares son viscoelásticos, pudiendo esta característica modificar las predicciones previas y por consiguiente las propuestas de diseño basadas en ellas. En este trabajo se presenta un modelo de lubricación de una prótesis de rodilla compuesta por un componente femoral metálico y un componente tibial conteniendo en su superficie articular un material viscoelástico lineal. Debido al alto acoplamiento entre las ecuaciones y a la no linealidad del modelo, se utiliza un método numérico basado en el método de elementos finitos (Galerkin) para resolver el sistema. Los resultados muestran que las variables H , P y ϕ sufren modificaciones de considerable magnitud al comparar los resultados de modelos elásticos previos con el propuesto en este trabajo. Para idénticas condiciones de trabajo, el modelo con material viscoelástico predice espesores lubricantes que indicarían un contacto directo entre los materiales y por lo tanto la posibilidad del desgaste abrasivo, mientras que el modelo elástico predice un funcionamiento libre de contacto. Esto podría derivar en conclusiones erróneas al diseñar un material previo a la experimentación. Finalmente, se extraen conclusiones dirigidas a la optimización de la lubricación del implante a través de las propiedades materiales del polímero, de las propiedades reológicas del fluido y de una hipotética capacidad de exudación del material adherido al componente tibial.

CAPÍTULO 1

Introducción

1-1 Problema motivador.

Las articulaciones (unión entre diferentes huesos) sinoviales del cuerpo humano permiten, en general, su movilidad y estabilidad. Gracias al correcto funcionamiento de las mismas, y en ausencia de patologías irreversibles, un individuo puede desenvolverse con facilidad sin depender de otras personas para realizar las tareas básicas en el hogar o en su trabajo. Dentro del tipo de articulaciones mencionadas, las articulaciones sinoviales diartrodiales son las de mayor movilidad, de las cuales se destaca la rodilla por ser la más grande y una de las más complejas del aparato locomotor. Dicha articulación está ubicada en un punto en el cual deben permitirse amplios rangos de movimiento y soportar varias veces el peso del cuerpo (sin tener en cuenta cargas adicionales) en la fase de apoyo de la marcha normal (fase en que un pie está apoyado y el otro se encuentra balanceándose). Al mismo tiempo debe estar restringida en los grados de libertad del movimiento para un manejo más controlado de la estabilidad y mejor distribución del centro de masa total del cuerpo con el objeto de disminuir el gasto de energía en el movimiento. Todo esto lleva a intuir el complejo conjunto de estructuras de esta articulación, y hace notar la gran importancia de la rodilla en la función motora del sistema osteoartromuscular.

Cuando debido a la edad, alguna patología (adquirida o congénita) o accidente, la articulación de la rodilla se desgasta o se destruye severamente, hay que recurrir a una sustitución parcial o total de la superficie afectada para devolverle al paciente la movilidad que le permita seguir llevando su ritmo de vida habitual con un mínimo de restricciones. En la actualidad, esto se soluciona reemplazando la articulación dañada por una endoprótesis o simplemente prótesis de rodilla, que consta de un componente femoral metálico y un componente tibial de base metálica y superficie polimérica (polietileno de ultra alto peso molecular (PUAPEM)). Aunque se han logrado similitudes muy aceptables, una rodilla artificial no es como una rodilla normal, pero puede ser la diferencia entre un estilo de vida restringido y un estilo de vida que le permitirá realizar prácticamente cualquier actividad de la vida diaria.

No obstante el beneficio de los implantes articulares, surge el inconveniente de que la vida útil de los mismos no supera (en el mejor de los casos) los 15 años. En personas jóvenes y/o con un alto grado de actividad, esto puede devenir en nuevas intervenciones para sustituir el reemplazo deteriorado con padecimientos psico-físicos de importancia. Esta situación contiene el agravante de que una prótesis aflojada no siempre puede ser recambiada pues los resultados de una segunda operación no son tan buenos, ya que el organismo queda sensibilizado y hay un mayor riesgo de presentar complicaciones quirúrgicas y rechazos del implante.

Dentro de las causas más importantes de la falla a largo plazo de estas prótesis se encuentran el desgaste del polímero del componente tibial (PUAPEM), cuyas partículas permanecen en la articulación desencadenando un proceso inmunológico que repercute en el aflojamiento de los componentes y el deterioro de los materiales. Varios trabajos [1 - 7] manifiestan que, habiendo optimizado la geometría y la técnica quirúrgica de colocación, uno de los mayores problemas actuales de estos implantes son los materiales con los que se construyen, reconociendo al desgaste del PUAPEM como el principal limitante en la longevidad de los implantes.

Adicionalmente, en las últimas dos décadas ha existido un gran incremento a nivel mundial en la colocación de prótesis totales de rodilla. Por ejemplo, la cifra anual de reemplazos en EUA supera las 500.000 prótesis [1, 8], con un incremento cada vez mayor debido a un aumento del promedio de vida de la población.

Es fundamental entonces que se puedan desarrollar nuevos materiales u optimizar los ya existentes para que resulten más resistentes al desgaste y que, por ende, las prótesis de las que forman parte sean más duraderas. Esta tesis se centrará en aportar predicciones sobre las variables mecánicas relevantes en el desgaste producido por el funcionamiento de la junta, como ser el espesor de la película lubricante interpuesta entre los materiales, los campos de presión desarrollados en el film lubricante y el coeficiente de fricción. Para lograr estos objetivos, se abordará el problema mediante el estudio del fenómeno de lubricación de la junta artificial, orientando los resultados a aquellas predicciones que tiendan a mejorar el comportamiento mecánico del material adherido al componente tibial.

Por otro lado, es conocido el beneficio aportado por el avance de los métodos computacionales en la resolución de problemas de ingeniería [8]. Mediante estas técnicas pueden modelarse problemas complejos en los cuales la medición experimental es dificultosa o directamente imposible. En una computadora pueden

probarse varias configuraciones alternativas antes de construir el primer prototipo, lo cual trae aparejado una reducción muy significativa en los costos y en los tiempos de prueba de nuevas prótesis. Además, se pueden delimitar los rangos de los parámetros materiales para focalizar los esfuerzos en valores adecuados. Por lo tanto, resulta sumamente beneficioso el análisis computacional del problema en estudio, tanto en lo económico como en lo técnico, para lograr un aporte en la investigación de nuevos materiales para prótesis de rodilla.

En síntesis, este trabajo está orientado a la obtención de predicciones numéricas por medio de la solución de un modelo matemático de lubricación visco-elastohidrodinámica de una junta artificial en pleno movimiento (movimiento de la articulación en estado estacionario durante la fase más exigente de la caminata para la junta) y lubricada con fluido sinovial no newtoniano, utilizando para tal fin una robusta técnica numérica basada en el método de elementos finitos y el método iterativo de Newton. El código computacional, cuya base fuera confeccionada por Di Paolo et al. para trabajos previos [9 - 15], puede ser ejecutado en computadoras personales actuales.

1-2 Antecedentes del modelo y modificaciones actuales.

Este trabajo constituye un avance en la línea de investigación comenzada previamente en el Grupo Biomecánica Computacional de la FI-UNER. Los primeros trabajos del grupo han explorado las condiciones de lubricación de una articulación de rodilla humana, considerando a la misma compuesta por cartílagos naturales perfectamente elásticos con capacidad de exudar y absorber fluido, lubricados con fluido Newtoniano. El enfoque mecánico del problema hizo posible la formulación de un modelo cuyas bases se originan en el estudio de los procesos elastohidrodinámicos (EHD) donde se evidencian, a la vez, fenómenos de flujo de fluido y deformaciones elásticas de las fronteras sólidas que confinan dicho flujo [9 - 20].

Ante un estado de movimiento pleno (por ejemplo, caminata normal) y sujetas a cargas elevadas, las superficies articulares entran en contacto a la vez que se encuentran rotando y trasladando relativamente entre sí, generando el arrastre del fluido sinovial que las rodea hacia la zona de máximo acercamiento. El fluido entra así a un canal estrecho formado entre las superficies articulares, manteniéndolas separadas gracias a un campo de presiones generado en el seno del líquido. Dicho

campo es altamente dependiente del canal formado entre las superficies, lo cual responde entre otros factores a la velocidad de operación de la junta, a las propiedades del fluido, a la carga actuante y a la capacidad de deformación del material que conforma las superficies articulares. A su vez, la deformación de los sólidos depende de la presión del fluido, generándose un alto acoplamiento entre las ecuaciones de flujo y de elasticidad. Una de las ecuaciones más importantes del modelo es la ecuación de lubricación de Reynolds que gobierna la generación de presiones en una película de fluido lubricante, desarrollada por Osborne Reynolds hacia fines del siglo XIX, quien sentó las bases en el análisis de los fenómenos de lubricación [21]. Adicionalmente, la relación entre las deformaciones de los materiales y la presión ha sido descrita mediante el conocido modelo de columna [22], derivado de la teoría de elasticidad lineal aplicada a un estado de deformación plana.

El sistema de ecuaciones que conformaba el modelo completo presentaba importantes dificultades para su resolución analítica debido a que constaba de ecuaciones no lineales con un alto acoplamiento entre las variables. Adicionalmente, dichas ecuaciones deben ser resueltas en un dominio con una frontera libre, dado que a priori no se conoce la posición de las superficies que confinan el fluido [9 - 16]. Estas dificultades dieron origen a una metodología de resolución eficiente aplicada por Saita [23] en la resolución del fenómeno EHD del recubridor de hoja flexible y posteriormente implementado por Di Paolo et al. [9] para resolver un problema de contacto lineal entre cojinetes industriales, quien luego utilizó dicha metodología para la solución del modelo EHD aplicado a la lubricación de juntas sinoviales. El método seleccionado para resolver numéricamente las ecuaciones está basado en el método de elementos finitos, la utilización de un proceso de continuación paramétrica y la implementación del método iterativo de Newton que permite resolver el sistema en forma simultánea para cualquier condición operativa. Este robusto esquema permitió investigar las variables EHD de una junta sinovial que intenta imitar a una rodilla sana en pleno funcionamiento, como ser canales de lubricación, campos de presión y coeficiente de fricción, y sus modificaciones en presencia de cierta capacidad de exudación del cartílago, resaltando a esta característica como una de las principales causas del buen funcionamiento de las articulaciones humanas [10 - 12]. Los resultados del modelo pudieron ser comparados con trabajos previos, mostrando un excelente acuerdo con los resultados de trabajos referentes en la temática [17].

Luego, partiendo de una ley constitutiva del tipo ley de potencia y utilizando un método de perturbación, Di Paolo et al. [13] arribaron a una ecuación de lubricación de

Reynolds modificada válida para fluido sinovial no Newtoniano. Con esta modificación, se amplió el conocimiento sobre las bases mecánicas del óptimo funcionamiento de una articulación natural sana, concluyendo en los resultados que la característica no Newtoniana del fluido sinovial reduce los esfuerzos de corte ante un estrechamiento del espesor lubricante, mostrando que una junta arroja coeficientes de fricción significativamente más bajos si, en lugar de fluido Newtoniano, está lubricada con fluido pseudoplástico. Este modelo ha sido contrastado con mediciones experimentales [13] mostrando un acuerdo muy aceptable entre los resultados numéricos y los valores experimentales para las condiciones de trabajo de una articulación humana (altas cargas y bajas velocidades).

Posteriormente, las potencialidades de este modelo y el método de resolución permitieron aplicar sus resultados a la investigación del fenómeno de lubricación de juntas artificiales, manteniendo el modelo de deformación elástico de los trabajos anteriores. Los resultados previos predicen que las propiedades elásticas del polietileno actual no permiten desarrollar un modo de lubricación de película completa, elevando así las posibilidades de desgaste por abrasión y desarrollando valores de presión en el líquido lubricante que exceden los límites propuestos por los fabricantes. Así, los resultados reportados [13 - 15] se han orientado a la búsqueda de las condiciones mecánicas óptimas para generar un proceso de lubricación de película completa sin el riesgo de un contacto directo entre los materiales, concluyendo que este objetivo podría lograrse utilizando materiales elásticos con un módulo elástico del orden del cartílago natural como material adherido al componente tibial, cuya estructura permita contar con una capacidad de exudación. Dichos trabajos [13 - 15] sugieren que el bajo módulo elástico permitiría desarrollar espesores de canal suficientemente amplios para evitar el contacto entre las rugosidades superficiales de los materiales y reducir los valores de presión para evitar el fenómeno de fatiga, mientras que la exudación del material contribuye a elevar el caudal de fluido lubricante en la zona de contacto, incrementando el espesor de la película lubricante en la zona de contacto y reduciendo el coeficiente de fricción con un requerimiento menor de líquido desde el entorno que rodea a la junta.

No obstante los buenos resultados obtenidos con modelos elásticos de deformación, las aplicaciones tanto a las juntas artificiales actuales como al desarrollo de nuevos materiales (por ejemplo el hidrogel poli-vinil-alcohol [24]) para reemplazo de cartílago, requiere de modelos constitutivos más acordes a los sólidos en estudio. En este sentido, todos los materiales de baja rigidez actualmente utilizados en el reemplazo de

tejidos articulares son viscoelásticos, los cuales al poseer elementos disipativos en sus modelos constitutivos presentan cierta resistencia a la deformación que podría modificar las predicciones extraídas de los modelos EHD previos.

El principal aporte de este trabajo es la deducción de dos ecuaciones de deformación viscoelástica del sólido adherido al componente tibial de la junta, fundadas en la teoría de elasticidad lineal, en los modelos viscoelásticos lineales de Voigt y Sólido Estándar Lineal y aplicando el principio de correspondencia elástico-viscoelástico que permite partir de una solución elástica lineal conocida para obtener la nueva solución viscoelástica lineal. La incorporación de las nuevas ecuaciones al modelo implicó la modificación del código computacional preexistente, requiriendo para tal fin el conocimiento completo del programa y la técnica numérica utilizada. Los resultados estarán orientados principalmente a mostrar las modificaciones que experimentan las variables visco-elastohidrodinámicas (VEHD) ante la inclusión de la ecuación propuesta respecto a las predicciones sobre modelos elásticos. Además, se incluyen inferencias sobre el posible efecto que aportaría la inclusión de cierta capacidad de exudación del material viscoelástico y se exponen finalmente las posibles implicancias sobre el empleo de lubricantes Newtonianos para el ensayo experimental de nuevos materiales para prótesis de rodilla, a sabiendas de que el implante funcionará en el organismo lubricado con líquido sinovial de características pseudoplásticas.

1-3 Organización de la tesis.

Con el objetivo de mostrar más estrechamente la relación entre las ecuaciones del modelo y las características biológicas y mecánicas modeladas, en este trabajo se intercalarán los fundamentos matemáticos con conceptos anatómicos, fisiológicos y biomecánicos, intentando incluir las nociones fundamentales y al mismo tiempo no exceder el volumen de datos que podría tornar tediosa la lectura de los primeros capítulos.

En el capítulo 2, se introducirán las bases anatómicas que fundamentan la aproximación del modelo geométrico, mostrando al final la deducción de la ecuación del canal de lubricación que surge al simplificar la geometría de la junta artificial.

En el capítulo 3 se desarrollan las nociones sobre las propiedades de los tejidos reemplazados por una prótesis de rodilla y seguidamente se exponen sintéticamente

las propiedades elásticas de los materiales de dicha prótesis que deberán actuar en lugar de los tejidos reemplazados. En relación a las propiedades mecánicas de los materiales, los grados de libertad de la articulación y las características geométricas del implante, se desarrollan luego los nuevos modelos de deformación del material adherido al componente tibial y posteriormente, se introducirá conceptualmente sobre el modelo simplificado a utilizar de la capacidad de exudación que intenta imitar la habilidad del cartílago natural para autolubricarse.

El capítulo 4 introduce sintéticamente las características generales sobre la biomecánica de la marcha normal y los fenómenos de lubricación presentes en cada una de sus fases, para luego justificar las condiciones de funcionamiento en las cuales se desarrolla el modelo de lubricación y donde además se manifiesta el proceso de exudación del material. En este capítulo se mostrarán también las ecuaciones que permiten calcular la carga sobre la articulación y los esfuerzos de corte en las fronteras del canal de lubricación.

El capítulo 5 está dedicado a una recapitulación del modelo completo. Debido a que la implementación computacional de las ecuaciones se realizó en forma adimensional, se mostrarán los parámetros adimensionales utilizados y las ecuaciones adimensionales finales. No obstante, los resultados se expondrán luego en forma dimensional para mostrar más claramente las posibles aplicaciones del modelo y contrastar los valores obtenidos con algunos resultados extraídos de la bibliografía.

El capítulo 6 muestra en forma sintética el método de resolución utilizado para trabajos previos y acondicionados para la tesis actual. Debido a que las ecuaciones del modelo mostrarán un alto acoplamiento y una naturaleza no lineal, se utiliza un método numérico basado en el método de elementos finitos para obtener los valores de la presión en puntos discretos del dominio y en un postproceso, se calculan los valores de deformación viscoelástica del material en dichos puntos.

En el capítulo 7 se expondrán los resultados del modelo. En primer lugar se mostrarán los resultados para un modelo viscoelástico de Voigt, considerando al mismo como el modelo que mejor aproxima a un ensayo de fluencia del PUAEM. Luego, se explican los resultados para el Sólido Estándar Lineal en relación al modelo de Voigt y al sólido elástico de anteriores trabajos. En las últimas dos secciones de este capítulo, se expondrán los resultados para un material viscoelástico con capacidad de exudación y luego se compararán los valores de las variables obtenidas para fluido Newtoniano y no Newtoniano.

Finalmente, en el capítulo 8 se enumeran las conclusiones de este trabajo.

Sin más preámbulos, deseo que el lector de este trabajo pueda disfrutarlo. Muchos desarrollos matemáticos pueden ser obviados sin perder conocimiento del problema, pero espero igualmente que la lectura sea crítica y que puedan satisfacerse las inquietudes que lo motivaron a consultar este material.

CAPÍTULO 2

Anatomía y Modelo Geométrico de las Prótesis

2-1 Anatomía de la rodilla.

Como ya se mencionó en la introducción, esta es una articulación con una estructura compleja. Su descripción detallada escapa a los fines de este trabajo, ya que para entender las estructuras que se reemplazarán con estas prótesis es necesaria la comprensión de algunas partes fundamentales de la rodilla y el resto puede ser tratado en forma general sin que ello signifique una pérdida de información para el problema en cuestión.

En primer lugar, se describirán brevemente los huesos que intervienen en esta articulación. La rodilla es el punto de unión entre el muslo y la pierna, por lo tanto estarán presentes los huesos de ambas partes más un hueso particular: la rótula o patela, cuya función es la de cambiar el ángulo de inserción del tendón correspondiente al músculo cuádriceps. Esta función le da la denominación de *hueso sesamoideo*.

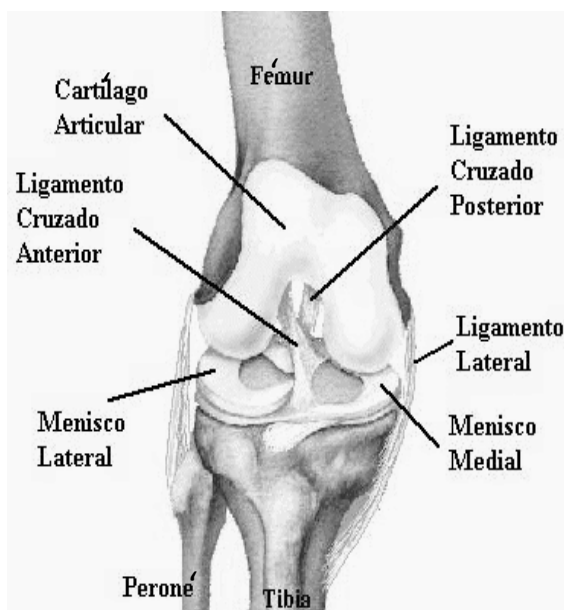


Figura 2.1: Huesos y ligamentos de la rodilla, extraído de [26].

Por el lado del muslo, encontramos la parte distal del fémur (figura 2.1), el hueso más largo y pesado del organismo. Este extremo se ensancha con respecto al cuerpo del hueso, dando lugar a los condilos (del griego *nudillos*) lateral y medial que se articulan con la tibia y la rótula y se encuentran separados por una profunda *fosa intercondílea*, importante porque alberga dos de los ligamentos estabilizadores de la rodilla (los ligamentos cruzados). Dicha fosa termina anteriormente en la cara rotuliana, lugar

donde la cara posterior de la rótula se desliza en la flexión o extensión de la rodilla. Los cóndilos son convexos en ambos sentidos.

En el caso de la pierna, tenemos los extremos proximales de la tibia y el peroné o fibula. De estos huesos, la que realmente se articula con el fémur y forma una parte importante en cuanto al reemplazo total, es la tibia (figura 2.1), por lo que de ahora en adelante describiremos solamente a esta. No obstante, vale la pena mencionar al peroné porque en él se insertan músculos y ligamentos importantes y además ayuda a aumentar la resistencia de la tibia a la flexión y torsión.

Como muestra la figura 2.2, la superficie articular (superior) de la tibia se compone de los *cóndilos o platillos tibiales* medial (interno) y lateral (externo), de superficie aplanada con una leve curvatura complementaria de los *cóndilos femorales* (figura 2.3), o sea cóncava, algo así como una silla de montar. La *eminencia intercondílea* de la tibia une a los cóndilos tibiales y se introduce en la *fosa intercondílea* del fémur sin llegar a presionar a los ligamentos cruzados.

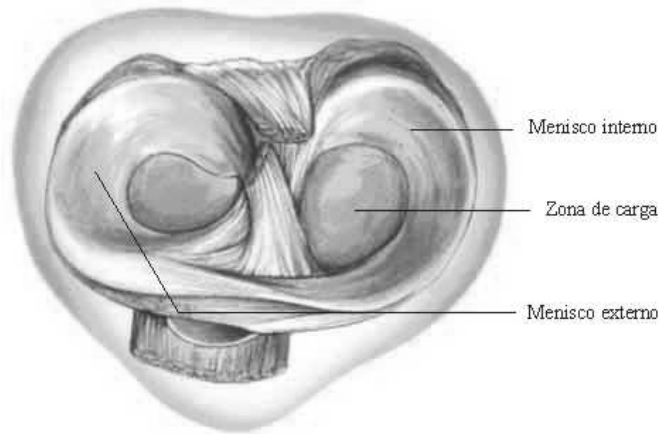


Figura 2.2: Vista superior de la superficie articular de la tibia, extraído de [25].



Figura 2.3: Cartílagos articulares en un corte sagital, extraído de [25].

Las dos superficies articulares anteriormente mencionadas (Cóndilos femorales y tibiales) más la cara posterior de la rótula están recubiertos de un tejido con propiedades singulares: el cartílago articular (ver la línea blanca que recubre los huesos en la figura 2.3), cuyas propiedades y función serán descritas en los capítulos siguientes, pero aquí mencionaremos que es un tejido que pertenece al molde cartilaginosa fetal y que permanece luego de su osificación, permitiendo que las superficies articulares deslicen con un mínimo de fricción y resguardando al hueso del desgaste y dolor intenso que se produce cuando, por alguna patología, estos cartílagos se destruyen. La tibia posee además otra estructura bien conocida por los deportistas exigentes, los meniscos. Su sección transversal es triangular, su estructura histológica es similar a la de los cartílagos y su principal función es la de aumentar la superficie de contacto entre los

cóndilos femorales y tibiales, distribuyendo mejor las altas cargas soportadas aquí y transformando los contactos de puntuales a aproximadamente lineales.



Figura 2.4: Vista frontal o anterior de la rodilla y sus estructuras. Imagen extraída de [25].

Todas las estructuras (excepto la cápsula articular) que se reemplazan con las prótesis actuales ya han sido descritas y podemos entender la forma que tomarán los reemplazos totales, pero necesitamos saber qué es lo que se preserva y cómo será la estabilidad de la rodilla luego de la operación, de manera tal de tener en cuenta en nuestro futuro modelo las condiciones de trabajo de la rodilla artificial.

La cápsula articular es una cápsula fibrosa muy fuerte, especialmente en las zonas donde se producen los engrosamientos o ligamentos intrínsecos que rodean la articulación (colaterales, rotuliano y poplíteos). Ésta cubre toda la articulación desde los bordes articulares de los cóndilos del fémur hasta el borde articular de la tibia (las inserciones poseen más detalles que pueden verse en [25]). La cápsula está recubierta en la cara interna por la membrana sinovial y se inserta en los bordes de los cartílagos articulares. Esta membrana tiene la importante función de generar el fluido sinovial, el cual es un ultrafiltrado de la sangre y el lubricante de las superficies articulares en

contacto, como así también la de llevar los nutrientes a los cartílagos articulares los cuales no poseen vascularización.

Los grados de libertad de la rodilla se encuentran limitados por los siguientes ligamentos:

- Los ligamentos laterales refuerzan la cápsula articular en los lados interno y externo. Cuando se extiende la pierna, se produce un estiramiento tenso de los mismos que impide la rotación lateral de la tibia y medial del peroné. Como en flexión se relajan, se observa cierto grado de rotación de la tibia sobre el fémur en esta posición [25]. Estos ligamentos también participan en la estabilidad rotatoria de la rodilla.
- Los ligamentos cruzados de la rodilla se encuentran dentro de la cápsula articular, pero fuera de la cavidad sinovial. Son bandas redondas y fuertes que se cruzan entre sí oblicuamente en forma de X y otorgan una estabilidad antero-posterior, sobre todo cuando se flexiona la rodilla. En muchos reemplazos, estas estructuras se ven comprometidas ya que la gran mayoría de las veces se extraen junto con dichos condilos, aunque algunos nuevos diseños y técnicas quirúrgicas mantienen el ligamento cruzado posterior o ambos. No obstante la rodilla tiene otras estructuras que pueden suplantar bastante bien la función de los ligamentos cruzados.
- En la parte posterior, la cápsula articular está reforzada por elementos fibrosos potentes, el ligamento poplíteo arqueado.
- En la cara anterior, encontramos el ligamento rotuliano, una gruesa y robusta banda ligamentaria que se continúa superiormente con el tendón del músculo cuádriceps femoral e inferiormente con la cápsula fibrosa de la rodilla.

Pero el tejido más importante en los refuerzos para la estabilidad de la rodilla es el muscular, ya que la rodilla funciona sorprendentemente bien después de un esguince ligamentario en personas con un adecuado desarrollo muscular [25]. Esta función es sumamente importante ya que los músculos son tejidos que pueden desarrollarse para adaptarse a las exigencias de la articulación, lo cual no sucede con los ligamentos. Los más importantes son:

- Cara anterior: Cuádriceps
- Cara posterior: Gemelos.

- Cara postero-interno: Sartorio, recto interno y semitendinoso.
- Cara postero-externa: Poplíteo y bíceps.

A continuación, se describirán brevemente las prótesis que más se utilizan actualmente para conocer su geometría, la cual se constituirá como la base para la formulación del modelo geométrico.

2-2 Relación con las prótesis.

Las prótesis actuales de rodilla tratan de imitar la forma y función de las partes que reemplazarán. Básicamente lo que se reemplaza con una prótesis de rodilla son las siguientes estructuras:

- Los cóndilos femorales (Componente femoral de la prótesis).
- Los cóndilos tibiales junto con los meniscos (Componente tibial).
- La parte posterior de la rótula (una pequeña porción para adaptarla a la nueva geometría y al material de la prótesis).

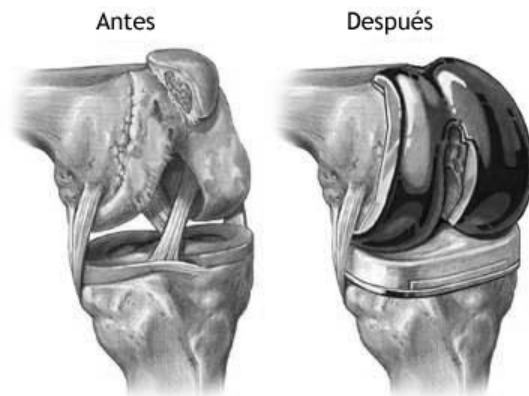


Figura 2.5: Antes: rodilla con artrosis. Después: rodilla con reemplazo. Extraída de [26].

En la figura 2.5 mostramos en forma gráfica una rodilla sin y con reemplazo. Es obvio que el objetivo de la prótesis es reemplazar a la zona dañada de la articulación y por ello no se puede alterar en gran medida la forma de la misma, ya que podría repercutir tanto sobre el resto del sistema osteoartromuscular del miembro inferior como sobre las estructuras ligamentarias de la rodilla.

No entraremos en detalle sobre las características mecánicas de los materiales de estos reemplazos, que será tratado en la siguiente sección, pero los mencionaremos brevemente.

El componente femoral es metálico, pudiendo ser de acero inoxidable, aleaciones de Co-Cr (Cobalto-Cromo) o aleaciones de Ti. Consta de una superficie articular que es

similar a los cóndilos femorales naturales (ver figura 2.5). Este componente se adhiere normalmente al fémur mediante un pegamento (PMMA, Polimetil-metacrilato).

El componente tibial está constituido por una base metálica y en su superficie se adhiere un material polimérico, siendo el polietileno de ultra alto peso molecular (PUAPEM) el más utilizado actualmente. Se fija al hueso de la misma manera que el anterior pero siempre lleva un vástago que se introduce en la médula ósea de la tibia. La superficie articular se confecciona con una pequeña depresión en el PUAPEM por la que deslizan los cóndilos del componente femoral, de forma tal que en todo momento el contacto entre ambas es aproximadamente lineal, aunque la deformación del PUAPEM genera una pequeña área de contacto.

El componente rotuliano es también un polímero (PUAPEM), y se adhiere en la parte posterior de la rótula.

De esta manera, el reemplazo articular presenta una geometría similar a la de la rodilla y con un diseño que permite mantener la mayoría de las estructuras estabilizantes. En una vista lateral (figura 2.6), observamos una aproximación a la zona de contacto de una rodilla mediante un equivalente cilíndrico, analogía que se basa en la hipótesis formulada anteriormente sobre el contacto aproximadamente lineal entre los elementos articulares. A continuación, se mostrará la deducción del equivalente matemático de la geometría bajo las consideraciones planteadas.

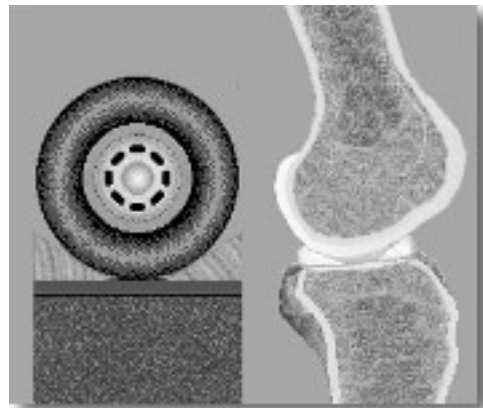


Figura 2.6: Corte sagital de la rodilla y su equivalente geométrico

2-3 Geometría equivalente de una prótesis de rodilla.

Hasta aquí, de la observación anatómica de la rodilla y las prótesis que la reemplazan, surgen las siguientes conclusiones que conducen a un modelo geométrico aproximado:

- El conjunto osteoartromuscular y ligamentario de la rodilla le permite tener principalmente un único grado de libertad, el de rotación en torno a un eje que pase aproximadamente por los cóndilos femorales, trabajando la rodilla como si fuera una bisagra. Un experimento de los hermanos Weber [25] demostró que la rodilla funciona

como un cilindro con movimiento de rotación y un pequeño movimiento de traslación sobre los platillos tibiales, dependiendo de la posición relativa de la articulación en la flexión o extensión, evidenciando mayor traslación en ángulos relativos pequeños entre el fémur y la tibia [25].

- La rodilla implantada mantiene suficientes estructuras estabilizantes, asegurando que los elementos en contacto mantendrán direcciones de movimiento y los grados de libertad a modelar se reducen. Las prótesis de rodilla tienen la misma forma que los elementos que reemplazan, por lo tanto las consideraciones del punto anterior se mantienen. Además, el componente femoral metálico, de alto módulo elástico, articula sobre el componente tibial de superficie polimérica, con un módulo elástico mucho menor que el anterior (los valores numéricos se verán en la próxima sección), existiendo una diferencia en el módulo de Young de ambos componentes que alcanza los 3 órdenes de magnitud [7]. Bajo estas consideraciones, se aproximará al primero como un material perfectamente rígido mientras que al segundo como un material deformable.
- En virtud de las pequeñas dimensiones de la zona de contacto frente a las dimensiones de los componentes de la prótesis, la curvatura de los cóndilos en sentido del eje de la rodilla es despreciable, pudiendo aproximar el contacto entre los cóndilos femorales y los platillos tibiales como lineal.
- La zona de contacto está lubricada por el líquido sinovial, por lo que se formaría un canal de lubricación interpuesto entre las superficies, que será tratado más adelante.

Entonces, en forma simplificada, se puede modelar cada contacto entre los cóndilos como un cilindro que apoya sobre una base de curvatura complementaria y en contacto longitudinal, lo cual se mantendrá a lo largo del movimiento pleno.

La figura 2.7 muestra una vista lateral de los cilindros en un hipotético estado indeformado en el cual el componente femoral se introduce en el tibial una distancia $2H_0$ representando la acción de una carga W en dirección diametral, perpendicular al eje X . De dicha figura, surgen las ecuaciones de las superficies cilíndricas (en estado no deformado) que son:

$$H_1^0(X) = R_1 \left(1 - \left[1 - \left(\frac{X}{R_1} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \quad (2-1)$$

$$H_2^0(X) = R_2 \left(1 - \left[1 - \left(\frac{X}{R_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - 2H_0 \quad (2-2)$$

Como en una articulación típica las relaciones X / R_1 y X / R_2 son ambas mucho menores que 1 [9], una buena aproximación de las expresiones anteriores en la zona de contacto se obtiene expandiéndolas en serie de Taylor alrededor de $X = 0$. Despreciando los términos de cuarto orden en adelante se obtiene:

$$H_1^0 = \frac{1}{2R_1} X^2 \quad (2-3)$$

$$H_2^0 = \frac{1}{2R_2} X^2 - 2H_0 \quad (2-4)$$

Como se mencionó anteriormente, el componente femoral podía ser tratado como completamente rígido, mientras que el tibial (parte polimérica) como elástico, de forma tal que ante las presiones que se producen en la rodilla cargada [9], el último sufrirá una deformación $D(X)$ que debe considerarse en la ecuación y que será fundamental en la formación de un canal de lubricación entre los componentes (ver sección 4). De esta manera, el espesor del canal de flujo $H = (H_2^0) - (H_1^0 - D)$ está dado por:

$$H(X) = -2H_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] X^2 + D(X) \quad (2-5)$$

Definiendo $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] = \frac{1}{R}$, donde R es el radio equivalente, la ecuación anterior queda

$$H(X) = -2H_0 + \frac{1}{R} X^2 + D(X) \quad (2-6)$$

La ecuación (2-6) es la versión final del canal formado entre las superficies, esto es, de la separación entre los elementos articulares en la zona de máximo acercamiento (zona de contacto), lugar donde se produce el fenómeno de lubricación.

La deformación $D(X)$ dependerá, entre otros factores, de la tensión soportada por el material deformable, de las propiedades del material (módulo de Young, coeficiente de

Poisson, espesor) y de la ecuación constitutiva que describa su deformación en función de las tensiones que debe soportar, lo cual será tratado en el próximo capítulo.

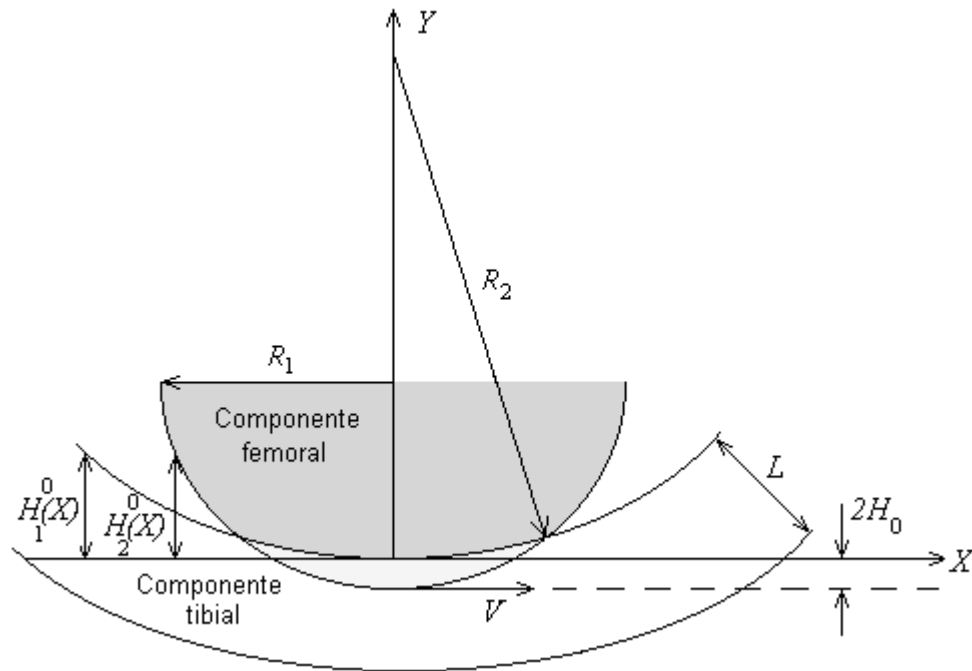


Figura 2.7: Representación simplificada de la región de contacto lubricado de una junta sinovial cargada en un hipotético estado indeformado.

CAPÍTULO 3

Histología, Materiales de Reemplazo y Deformación

3-1 Histología general de los tejidos articulares.

3-1.1 Introducción

Los tejidos que constituyen la rodilla son altamente especializados para la función mecánica que desempeñan. Las estructuras anatómicas mencionadas en el capítulo anterior serán descritas en este capítulo como tejidos. Por ejemplo, la parte distal del fémur se compone de tejido óseo esponjoso rodeado por una fina capa de tejido óseo compacto en su superficie, sobre la que se deposita el cartílago articular. Los cóndilos tibiales tienen una composición ósea similar a la del fémur, pero al cartílago articular se le suman los meniscos, de un tejido similar al cartílago pero con diferencias importantes según su función. Rodeando la articulación encontramos la membrana sinovial, que está formada de un tejido conectivo especializado y que se continúa con la membrana fibrosa de tejido conectivo fibroso.

A continuación se describirán brevemente los tejidos articulares reemplazados con una prótesis de rodilla, que poseen mayor importancia mecánica y distinguen al implante artificial de la articulación natural.

3-1.2 Cartílago Articular Hialino

El extremo articular de los huesos está recubierto por un tejido cartilaginoso hialino. Es un material mecánicamente apto para la función de recubrimiento superficial en las

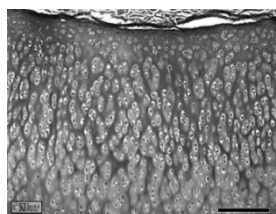


Figura 3.1.
Extraída de [26]

articulaciones sinoviales y tiene solo unos pocos milímetros de espesor. Es un material poroso y viscoelástico con una topografía determinada por una estructura de fibras de colágeno que subyacen en su seno. La composición que varía a través del espesor del cartílago (figura 3.1), consiste en general de un 22 % en peso de una matriz sólida compuesta no uniforme y un 78 % en peso de agua. La matriz sólida a su vez consiste

esencialmente de fibrillas de colágeno (65 % de peso seco), intercalada por agregados de proteoglicanos (25 % de peso seco [25]). Dentro de este entramado se encuentran

las células encargadas de mantener las propiedades mecánicas de la matriz: los condrocitos. Estas células ocupan el 1% del volumen cartilaginoso. Ante lesiones traumáticas leves del cartílago, los condrocitos recambian los componentes deteriorados de la matriz sólida. Pero cuando las lesiones son severas o se ve comprometida la homeostasis del tejido por alguna enfermedad (por ejemplo osteoartritis), la integridad del cartílago peligra ya que los condrocitos poseen escasa capacidad de crecimiento y no pueden migrar hacia la zona dañada. Este hecho sumado a que la velocidad de reparación de los condrocitos es baja, muestra la vulnerabilidad de este tejido ante traumatismos severos o enfermedades degenerativas.

Tanto la molécula proteica de colágeno como los proteoglicanos son hidrofílicos y mantienen a las moléculas polares de agua almacenadas en su seno, pudiendo exudarlas hacia el exterior cuando se lo compacta y absorberlas cuando se lo expande. En el adulto, la base del cartílago articular (cartílago osificado) es impermeable al agua y es dificultoso para esta última fluir a través de la sustancia cartilaginosa debido al entramado de fibras de colágeno y proteoglicanos. Por eso, el camino de menor resistencia para el líquido intersticial del cartílago es a través de la superficie articular. Este fenómeno trae como consecuencia el aporte de fluido a la zona de contacto para favorecer la lubricación de la rodilla y el intercambio de nutrientes entre la matriz y el líquido sinovial, hecho importante ya que el cartílago articular carece de vasos sanguíneos para su nutrición.

Ante cargas aplicadas a alta velocidad, el cartílago responde en forma elástica, mientras que si la carga se aplica con velocidades moderadas o bajas, su respuesta es fundamentalmente viscoelástica. El modelo reológico que asemeja a este comportamiento es el sólido estándar lineal [27], cuyo desarrollo se verá en la sección 3-3.3.

3-1.3 Meniscos

Son estructuras fibrocartilaginosas, que soportan y distribuyen una parte significativa de la carga que pasa por la articulación. Además, tienen una función de absorción de la energía provocada por los impactos y la lubricación articular junto con otras estructuras.

A través de los meniscos se transmite más del 50% de la carga en extensión, cifra que llega al 85% cuando la flexión alcanza los 90°. Los efectos locales de las meniscectomías son el incremento de las presiones por reducción del área de contacto,

a tal punto que una meniscectomía medial reduce el área de transmisión de cargas entre un 50 y un 70%. Además del incremento de estos niveles tensionales, las meniscectomías tanto totales como parciales provocan una importante variación en la distribución de las deformidades en la tibia proximal, lo que ocasiona variaciones en el hueso subcondral a corto y medio plazo.

3-2 Materiales de las prótesis actuales.

Los materiales que conforman las prótesis de rodilla más utilizadas en la actualidad son básicamente los siguientes:

a) Metal: el componente femoral y la base del componente tibial están formados por una aleación de Co-Cr-Mo, aleaciones de Ti o acero inoxidable. Es un material rígido, cuyo módulo elástico es mayor a 100 GPa (ver tabla 3.I). En la mayoría de los casos, el metal se adhiere al hueso mediante un cemento óseo, que es polimetilmetacrilato (PMMA), de módulo elástico significativamente menor, aproximadamente 3 GPa. El hueso posee un módulo de Young de 30 GPa. Esta marcada diferencia hace que en la zona en la cual se encuentran en contacto el hueso con el implante, este último (implante) soporte gran parte de la carga que antes soportaba el hueso pudiendo como consecuencia producir desmineralización ósea que, en personas de edad avanzada, puede devenir en fractura.

b) Polímero: el polímero que se utiliza actualmente en el componente tibial de las prótesis es polietileno de ultra alto peso molecular (PUAPEM). Este material ha sido elegido por su bajo coeficiente de fricción (ver tabla 3.I) y excelente biocompatibilidad, además de tener menor desgaste que el PTFE (teflón) inicialmente utilizado en prótesis de cadera. No obstante, uno de los principales motivos por los cuales se produce la falla de los reemplazos totales es el desgaste del PUAPEM. Las partículas desprendidas por los distintos mecanismos de desgaste provocan inflamación de la rodilla y un consecuente aflojamiento por osteólisis en la interfaz hueso-implante. Esto sumado a la destrucción parcial o total del PUAPEM lleva al paciente a una nueva intervención quirúrgica en no más de 15 años.

Existen ensayos de fluencia [28] de cuyas gráficas se puede inferir que el comportamiento mecánico del polietileno se puede representar en forma aproximada por un modelo viscoelástico de Voigt (VG), ya que además, el mismo no posee la respuesta elástica ante cargas rápidas como el cartílago natural, lo cual es

característico de un modelo Sólido Estándar Lineal (SEL). El módulo elástico del PUAPEM se encuentra entre 500 MPa y 1GPa (en algunos casos sobrepasa este último valor), mientras que el módulo de Young efectivo del cartílago articular en condiciones normales de funcionamiento está entre 10 y 20 MPa [7] pudiendo variar este último entre 1 MPa y 170 MPa (tabla 3.1). Aquí se observa otra diferencia importante en la rigidez de los materiales. Si bien el objetivo de utilizar PUAPEM no es realmente reemplazar al cartílago, ambos son los materiales menos rígidos de la articulación (artificial y natural, respectivamente), lo cual juega un papel importante en el tipo de lubricación que tendrá la junta artificial.

Tabla 3.1 (Extraída de [7])

MATERIAL	MÓDULO ELÁSTICO E(GPa)
Cartílago articular	0.001 – 0.17
Poliuretano	0.5
PUAPEM	0.5
Cemento óseo (PMMA)	3.0
Hueso	10 – 30
Aleación Ti-Al-Va	106
Acero inoxidable	205
Aleación Co-Cr-Mo	230
Alúmina	350

3-3 Deformación del material.

3-3.1 Introducción

Tanto el PUAPEM utilizado en las prótesis como el cartílago articular presentan un comportamiento viscoelástico cuando se someten a cargas, lo cual significa que su respuesta no solo depende de la magnitud de la tensión generada sobre los mismos sino también del tiempo que permanecen cargados.

Las dos respuestas fundamentales de los materiales viscoelásticos son la fluencia lenta y la relajación de tensiones. La primera expresa el aumento de deformación progresivo ante una carga constante súbitamente aplicada y la segunda, el descenso de tensión en el tiempo que se produce al efectuar una deformación del material en forma instantánea y mantenerla constante. Estas respuestas diferencian notablemente a los materiales viscoelásticos de los elásticos, ya que estos últimos responden instantáneamente a los estímulos mencionados.

Ante pequeñas deformaciones, condiciones de carga determinadas y en rangos de temperatura acotados, algunos materiales viscoelásticos se comportan aproximadamente como materiales elásticos. Sumado a esto, la sencillez de las ecuaciones de elasticidad lineal alentó su utilización en la mayoría de los trabajos teóricos previos a esta tesis [9 – 20, 29], los cuales consideraron a los materiales deformables de la articulación (natural o artificial) como perfectamente elásticos. Basados en esta hipótesis, los modelos de lubricación elastohidrodinámicos (EHD) de junta sinovial han estimado las dimensiones de la película de fluido interpuesta entre los materiales en contacto (canal de lubricación) con aceptable aproximación, considerando a esta variable como uno de los parámetros más importantes para entender el fenómeno de lubricación de las articulaciones naturales y para el diseño de materiales en articulaciones artificiales [7, 29].

Si bien los modelos EHD son muy útiles en la estimación del orden de magnitud de las variables (canal de lubricación, presión, coeficiente de fricción), el análisis más detallado requiere una adecuada representación en las ecuaciones constitutivas. Esta afirmación se basa en que estudios anteriores sobre modelos elásticos [13 - 15] predicen canales de lubricación con valores muy cercanos a las rugosidades superficiales, de forma tal que pequeñas modificaciones de dichos resultados podrían modificar la predicción del modo de lubricación en que trabaja la junta y, por lo tanto, de su posibilidad de desgaste. Al mismo tiempo, el coeficiente de fricción es una variable de fundamental importancia en la performance mecánica de una junta de contacto, y su valor es altamente dependiente de los materiales utilizados [13].

En este trabajo se considerará al material ubicado sobre el componente tibial como un material viscoelástico lineal e isotrópico trabajando en forma isotérmica. Si bien algunos materiales se encontrarán mejor representados que otros, el trabajo apunta fundamentalmente a estudiar la tendencia de los resultados respecto a las predicciones previas sobre materiales elásticos. No obstante, existe una vasta cantidad de

materiales cuya ecuación constitutiva se aproxima aceptablemente mediante los modelos a desarrollar en este capítulo.

3-3.2 Definición del problema para el sólido deformable

En un estado de movimiento pleno (hipotético movimiento de la articulación en estado estacionario durante la fase más exigente para la junta durante una caminata, cuyo detalle se estudia en el capítulo 4), los componentes tibial y femoral de la junta artificial, tienen entre sí movimientos relativos de traslación y rotación. En la zona de análisis (máximo acercamiento), este estado se traduce en dos movimientos de traslación de las superficies en contacto. Suponiendo velocidades constantes de los elementos, se puede traducir este movimiento a una forma equivalente donde el elemento femoral permanece fijo y el elemento tibial se mueve con una velocidad relativa $V_r=(V_1 - V_2)$, donde V_1 y V_2 son las velocidades tangenciales de las superficies en la zona de contacto. Como se verá en el capítulo 4, la ecuación de lubricación de Reynolds modificada contiene la velocidad media V en su expresión, pudiendo arribar a dicha ecuación planteando un problema equivalente en el cual una de las superficies (cualquiera de ellas) se desplaza a la velocidad V mientras la otra permanece inmóvil [9]. Para reducir la cantidad de parámetros, se puede expresar la velocidad relativa V_r en función de la velocidad media V de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} V_r = V_1 - V_2 \\ V = \frac{V_1 + V_2}{2} \end{array} \right\} V_r = 2 \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} V, \text{ o definiendo } \alpha = 2 \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}, \text{ entonces}$$

$$V_r = \alpha V \quad (3-1)$$

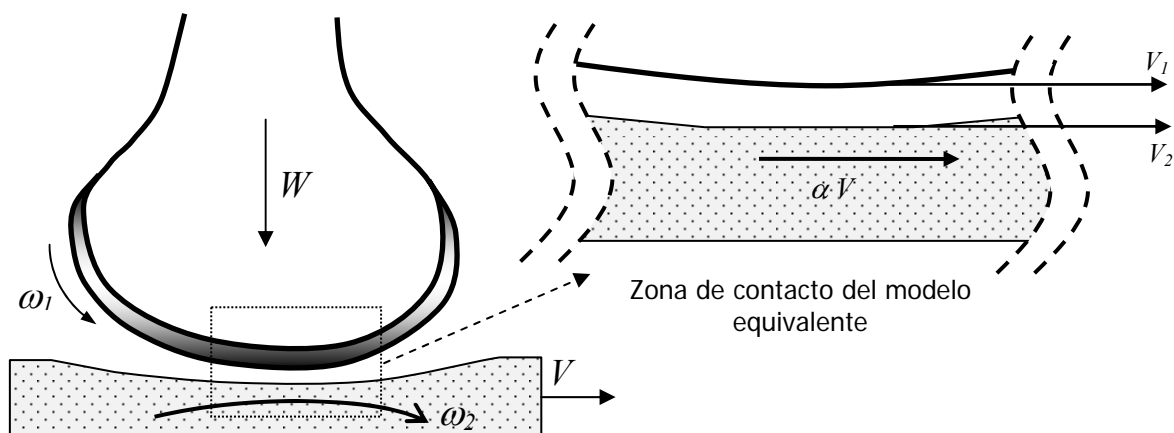


Figura 3.2: Representación de la junta en movimiento y de la zona de contacto del modelo equivalente.

En el esquema equivalente, la traslación del material tibial respecto al componente femoral implica que el campo de deformaciones se moverá sobre el primero. No obstante, debido a que la velocidad de traslación, la carga aplicada y las propiedades del material se consideran constantes, los campos de presión y deformación tendrán la misma forma en la zona de contacto. Para ilustrar esta idea, imaginemos un rodillo moviéndose con velocidad constante sobre un material deformable delgado y de grandes dimensiones superficiales (figura 3.3) que permanece estático. Si bien el rodillo al trasladarse deforma distintas zonas del material en tiempos diferentes (figura 3.3 (b)), un observador ubicado junto con el rodillo observará en esa zona una deformación que no se modifica en el tiempo (figura 3.3 (c)).

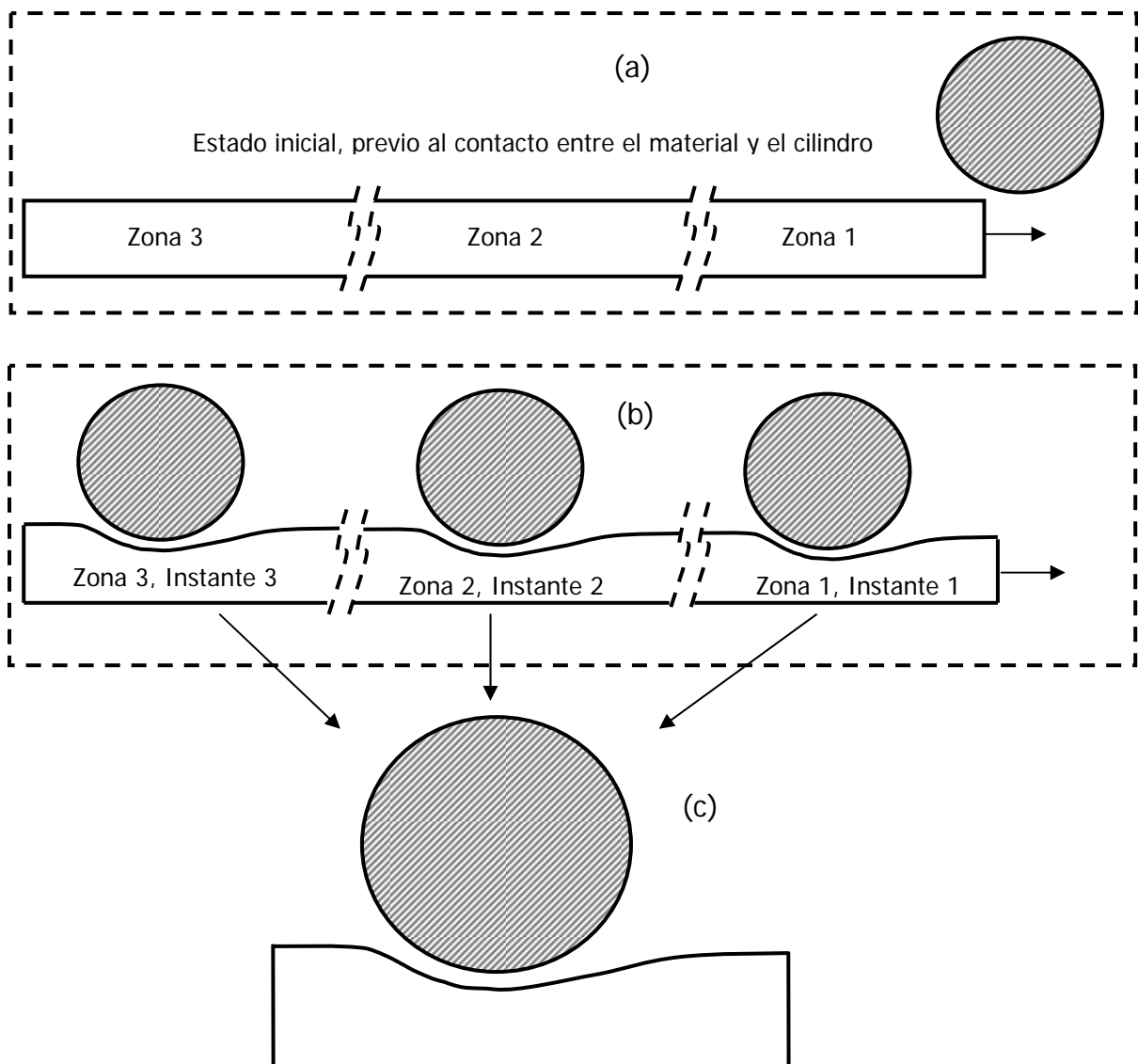


Figura 3.3: (a): El sólido deformable (inferior), se traslada hacia la derecha, previo al contacto con el rodillo rígido (círculo gris). (b): El sólido deformable se mueve debajo del rodillo y al trasladarse, se deforman distintas zonas del material en distintos instantes, tal que debajo del rodillo, se observa siempre la misma deformación (c).

Supongamos entonces que un elemento puntual del material se mueve con velocidad constante αV por un campo de presiones que es dependiente de la coordenada X (enfoque Lagrangiano, ver esquema en figura 3.4), de forma tal que la presión actúa como una carga puntual normal al elemento en cada posición. Así, la coordenada X del elemento será:

$$X = X_0 + \alpha V t \Rightarrow dX = \alpha V dt \quad (3-2)$$

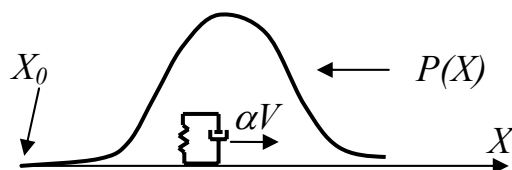


Figura 3.4: Representación de un elemento del material deformable moviéndose a velocidad constante bajo la curva de presiones estática.

En la ecuación (3-2) X_0 es un punto alejado del contacto donde se encuentra el elemento para $t=0$ s. Si bien desde el punto de vista Lagrangiano cada punto del material experimenta variaciones temporales conforme se mueve (lo cual estimula la aparición de los efectos viscoelásticos), desde un punto de vista Euleriano (en un sistema fijo junto con la curva de presión, ver figura 3.3 (c)) el campo de deformaciones bajo la curva de presiones solo dependerá de la coordenada espacial. El objetivo de este trabajo es determinar la deformación del material en la zona de lubricación y no la evolución particular de cada elemento o punto del material en el tiempo. Como ambos enfoques deben mostrar el mismo resultado, el enfoque Euleriano deberá manifestar los efectos viscoelásticos que aparecen con las variaciones temporales del enfoque Lagrangiano.

Se debe resolver entonces un problema de valores de frontera estacionario que permita encontrar una solución a la deformación del material alojado en el componente tibial, producto de su interacción con el fluido lubricante y con las estructuras que lo delimitan. En el capítulo anterior, para la formulación del modelo geométrico se consideró a la junta sinovial como un contacto de bisagra (contacto axial entre dos cilindros). De esta manera, si el material es más delgado que la longitud de la zona de contacto y si además se estima que la carga se distribuye uniformemente a lo largo de la longitud axial, las deformaciones serán las mismas en cualquier plano perpendicular al eje principal de los cilindros. Como consecuencia, el material deformable del

componente tibial se encuentra en un *estado de deformación plana*, lo cual significa que el problema puede ser resuelto en un plano perpendicular al eje de los cilindros.

Las hipótesis simplificatorias para este problema son:

- H1. Deformaciones pequeñas.
- H2. Zona de lubricación mucho mayor que el espesor del material, pero mucho más pequeña que las otras dimensiones.
- H3. Distribución uniforme de la carga a lo largo del eje de los cilindros en contacto.
- H4. Zona de lubricación alejada de los límites del material.
- H5. Propiedades elásticas constantes.

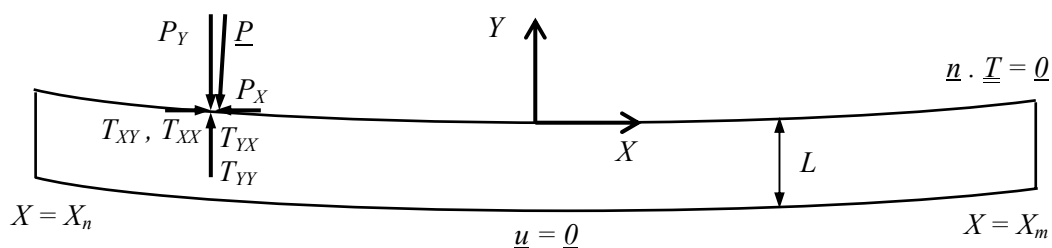


Figura 3.5: Esquema del material deformable sujeto a las condiciones de contorno.

Bajo estas hipótesis, el problema tridimensional se simplifica a uno bidimensional que involucra condiciones de contorno mixtas de tensiones y desplazamientos. El enunciado de las condiciones de contorno para este problema es el siguiente:

- I. Sobre la superficie en contacto con el líquido ($Y=0$), existe un campo de presiones que, gracias a la escasa curvatura del elemento (ver figuras 3.5 y 3.6), se considera actuando en forma aproximadamente normal a la superficie en la dirección Y .
- II. $\underline{n} \cdot \underline{T} = \underline{0} \Rightarrow$ Condición de tracción nula sobre los planos $X = X_n$ y $X = X_m$ suficientemente alejados de la zona de contacto.
- III. $\underline{u} = \underline{0} \Rightarrow$ Deformación cero sobre la base del material (plano $Y = -L$), donde se une a una plataforma metálica de elevada rigidez.



Figura 3.6. Obtenida de [26]

Teniendo en cuenta las hipótesis y condiciones de borde planteadas, debe abordarse la solución del problema resolviendo un conjunto de ecuaciones que consta de:

- Ecuación de equilibrio: ante un hipotético estado estacionario, se resuelve la siguiente ecuación de equilibrio para el sólido deformable:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{T} = \underline{0} \quad (3-3)$$

• Ecuaciones cinemáticas: relacionan deformación con desplazamiento. Dado que la deformación de un cuerpo se puede evaluar si se conocen los desplazamientos de cada punto del mismo, es posible calcular las deformaciones específicas partiendo de componentes de desplazamiento. Se escribirá la ecuación simplificada para pequeños desplazamientos en notación indicial. La ecuación completa puede verse en [30]:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \right) \quad (3-4)$$

donde u_{ik} son las deformaciones y U_i los desplazamientos.

• Ecuaciones constitutivas: Relacionan tensiones con deformaciones. Para un material elástico, lineal e isotrópico resulta la ley de Hooke generalizada. Utilizando notación indicial, esta expresión es la siguiente:

$$T_{ik} = 2u_{ik} \mu + \lambda u_{jj} \delta_{ik} \quad (3-5)$$

donde μ y λ son las constantes de Lamé, y se definen como:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3-6)$$

E y ν son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del material respectivamente.

La ecuación (3-5) también puede expresarse de la siguiente manera:

$$S_{ij} = 2G e_{ij} \quad (3-7 a)$$

$$\sigma_{ii} = 3K \varepsilon_{ii} \quad (3-7 b)$$

Donde S_{ij} y e_{ij} son las componentes deviatorias de los tensores tensión y deformación respectivamente, mientras que σ_{ii} y ε_{ii} las componentes volumétricas de dichos tensores (también respectivamente). En las ecuaciones (3-7), G es el módulo de corte y K el módulo volumétrico, que para un material elástico isotrópico se expresan en función de las constantes elásticas de la siguiente manera:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3-8)$$

Además, las deformaciones deviatorias se relacionan con las deformaciones angulares (γ_{ij}) de la siguiente manera: $e_{ij} = (1/2) (\gamma_{ij})$ (para $i \neq j$, [30]).

Para el caso de un material viscoelástico, no se pueden utilizar directamente las ecuaciones (3-7), ya que en las ecuaciones constitutivas deben figurar las variaciones en el tiempo de las variables. Si bien el problema a resolver estará modelado en estado estacionario, en el desarrollo de las bases teóricas aparecerán variaciones respecto del tiempo, pero en el presente modelo las variaciones temporales se expresarán como variaciones espaciales utilizando la ecuación (3-2).

Para materiales viscoelásticos lineales, las ecuaciones (3-7) son modificadas de la siguiente manera [31 - 33]:

$$\{P\} S_{ij} = 2 \{Q\} e_{ij} \quad (3-9 a)$$

$$\{M\} \sigma_{ii} = 3 \{N\} \varepsilon_{ii} \quad (3-9 b)$$

donde $\{P\}$, $\{Q\}$, $\{M\}$ y $\{N\}$ son operadores diferenciales lineales que contienen derivadas temporales y propiedades del material, y cuya expresión depende del modelo viscoelástico considerado. Por ejemplo, supongamos un estado unidimensional de corte simple con tensiones y deformaciones no nulas S_{12} y e_{12} sobre un material que responde a un modelo viscoelástico de Voigt. La relación entre tensión y deformación es la siguiente [32]:

$$G \gamma_{12} + \eta \frac{d\gamma_{12}}{dt} = S_{12} \quad \Rightarrow \quad (G + \eta \frac{d}{dt}) \gamma_{12} = S_{12} \quad (3-10)$$

donde η es el coeficiente de viscosidad del amortiguador; entonces, para este problema, los operadores diferenciales de (3-9 a) son:

$$\{P\} = 1 \text{ y } \{Q\} = \left(G + \eta \frac{d}{dt} \right)$$

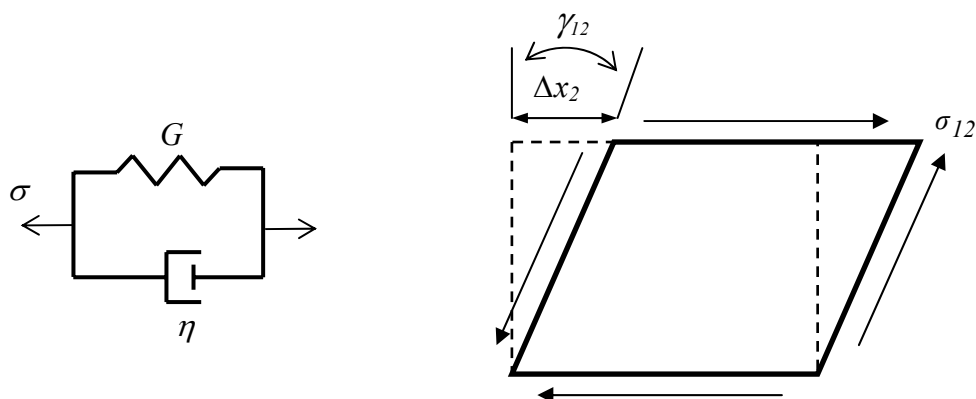


Figura 3.5: Elemento de corte simple, representando un cubo elemental sujeto a un estado de corte puro.

Numerosos experimentos han mostrado que prácticamente todos los materiales utilizados en ingeniería se comportan elásticamente en dilatación (componente volumétrica) [32], de modo que sin perder generalidad en el análisis, las ecuaciones (3-9) se asumirán de la siguiente forma:

$$\{P\} S_{ij} = 2 \{Q\} e_{ij} \quad (3-11 a)$$

$$\sigma_{ij} = 3K \varepsilon_{ij} \quad (3-11 b)$$

donde al considerar un comportamiento elástico de componente volumétrica, entonces se reemplazó $M=1$ y $N=1$ en la ecuación (3-9 b) para obtener (3-11 b).

Las ecuaciones (3-3), (3-4) y (3-11) constituyen el sistema completo de ecuaciones a resolver bajo las condiciones de contorno I, II y III, y sujetas a las hipótesis H1, H2, H3, H4 y H5. Resolver este sistema de ecuaciones para un problema tridimensional resulta relativamente sencillo cuando el material estudiado es elástico. En el caso de un material viscoelástico, el número de problemas tridimensionales que pueden ser resueltos mediante integración directa de las ecuaciones es bastante limitado o puede requerir de extensos desarrollos matemáticos. Existe una forma práctica de encontrar una solución a la mayoría de los problemas tridimensionales en viscoelasticidad lineal, a través de la utilización del *Principio de correspondencia*.

3-3.3 Principio de correspondencia

En materiales elásticos, las tensiones y desplazamientos que constituyen las condiciones de contorno, pueden depender del tiempo y del espacio sin afectar la solución, ya que el tiempo aparece solo como un parámetro debido a que no existen derivadas temporales en las ecuaciones gobernantes. Como se vio en la sección anterior, para un material viscoelástico las relaciones tensión-deformación se

transforman en ecuaciones diferenciales con derivadas temporales, lo cual complica el proceso de solución. No obstante, en muchos casos las ecuaciones poseen ciertas propiedades matemáticas que permiten obtener la solución relativamente fácil, como se verá a continuación.

El principio de correspondencia permite adaptar una solución elástica disponible previamente para poder aplicarla a un modelo viscoelástico lineal, de modo tal que no es necesario resolver el sistema de ecuaciones desde un inicio (partiendo desde **(3-3)**, **(3-4)** y **(3-5)**) para encontrar la nueva solución.

Si un problema mecánico, los materiales involucrados, y las condiciones de contorno de tracción y desplazamiento pueden ser transformados mediante la *transformada de Laplace*, es frecuente que los aspectos espaciales no sean alterados, de modo que el problema tendrá la misma forma espacial en ambos planos (original y transformado). Solo los aspectos dependientes del tiempo, como ser las propiedades materiales, sufrirán modificaciones en la transformación. La versión del problema en el plano transformado de Laplace se puede interpretar como la representación del problema elástico equivalente en el campo original con la misma geometría que el sólido viscoelástico, de modo que la solución para el material elástico en el plano original podrá aplicarse al material viscoelástico correspondiente en el plano de Laplace [31].

Existe una excepción para esta correspondencia: aunque la forma física del cuerpo no se modifique al pasar al plano de Laplace, las condiciones de contorno de tracción o desplazamiento pueden ser alteradas espacialmente en la transformación. Por ejemplo, si la tracción impuesta es $\sigma = \cos(xt)$, entonces su transformada es $\tilde{\sigma} = \frac{S}{(S^2 + X^2)}$

[32]; esta última ecuación tiene obviamente una forma espacial diferente de la función en el campo temporal. No obstante, si la función admite una separación de variables (esto es, producto entre funciones que dependen solamente del espacio y funciones que dependen solamente del tiempo), entonces no será modificada la parte espacial en la transformación. Esto significa que el análisis de tensiones para problemas cuyas condiciones de contorno son independientes del tiempo o está formada por funciones de variables tiempo y espacio separables, entonces las expresiones espaciales tendrán la misma forma en el plano actual y en el plano de Laplace.

Examinaremos ahora con cierto detalle el método de correspondencia reescribiendo en primer lugar las ecuaciones básicas de elasticidad lineal en notación indicial:

$$\text{Equilibrio:} \quad \sigma_{ij,j}(X) = 0 \quad (3-12 \text{ a})$$

$$\text{Cinemática:} \quad 2 \varepsilon_{ij}(X) = U_{i,j}(X) + U_{j,i}(X) \quad (3-12 \text{ b})$$

$$\text{Ecuaciones constitutivas:} \quad S_{ij}(X) = 2G e_{ij}(X) \quad (3-12 \text{ c})$$

$$\sigma_{ii}(X) = 3K \varepsilon_{ii}(X) \quad (3-12 \text{ d})$$

Por otro lado, las ecuaciones viscoelásticas asociadas en el dominio de Laplace suponiendo condiciones iniciales nulas, son:

$$\text{Equilibrio} \quad \tilde{\sigma}_{ij,j}(X,S) = 0 \quad (3-13 \text{ a})$$

$$\text{Cinemática:} \quad 2 \tilde{\varepsilon}_{ij}(X,S) = \tilde{U}_{i,j}(X,S) + \tilde{U}_{j,i}(X,S) \quad (3-13 \text{ b})$$

$$\text{Ecuaciones constitutivas} \quad \tilde{P}(S) \tilde{S}_{ij}(X,S) = 2 \tilde{Q}(S) \tilde{e}_{ij}(X,S) \quad (3-13 \text{ c})$$

$$\tilde{\sigma}_{ii}(X,S) = 3K \tilde{\varepsilon}_{ii}(X,S) \quad (3-13 \text{ d})$$

donde las cantidades con pestañas significan transformadas. En la ecuación (3-13 c), $\tilde{P}(S)$ y $\tilde{Q}(S)$ son polinomios en la variable S y representan la transformada de los operadores diferenciales $\{P\}$ y $\{Q\}$ respectivamente. Por ejemplo, la transformada de Laplace de la ecuación (3-10) es la siguiente:

$$G \tilde{\gamma}_{12}(S) + \eta \left[S \tilde{\gamma}_{12}(S) - \tilde{\gamma}_{12}(0) \right] = \tilde{S}_{12}(S) \quad (3-14)$$

Si $\tilde{\gamma}_{12}(0) = 0$ (deformación inicial nula), entonces la ecuación anterior queda:

$$G \tilde{\gamma}_{12}(S) + \eta S \tilde{\gamma}_{12}(S) = \tilde{S}_{12}(S) \Rightarrow 2(G + \eta S) \tilde{e}_{12}(S) = \tilde{S}_{12}(S) \quad (3-15)$$

donde se utilizó la relación $e_{ij} = (1/2)\gamma_{ij}$ y donde puede observarse que $\tilde{Q}(S) = (G + \eta S)$ y $\tilde{P}(S) = 1$. En este ejemplo se puede notar el motivo por el cual en las ecuaciones (3-13) se consideraron condiciones iniciales nulas (consideración acorde a este problema, como se verá más adelante). Además, el mismo ejemplo es útil para ilustrar que, al ser $\{Q\}$ y $\{P\}$ operadores lineales, se cumplen las relaciones

$$\ell(\{Q\} e_{ij}) = \tilde{Q}(S) e_{ij}(S) \quad (3-16 a)$$

$$\ell(\{P\} S_{ij}) = \tilde{P}(S) S_{ij}(S), \quad (3-16 b)$$

donde ℓ indica transformada de Laplace. Entonces, las ecuaciones (3-13) solo poseen derivadas espaciales, mientras que las derivadas temporales se transforman en polinomios que pueden ser tratados como constantes al resolver el problema espacial en el dominio transformado.

Comparando las ecuaciones (3-12) y (3-13), puede notarse que una completa analogía se obtiene estableciendo una equivalencia entre la relación $\tilde{Q}(S)/\tilde{P}(S)$ y el módulo de corte G , lo cual permite enunciar el principio de correspondencia de la siguiente forma [32]: "si la solución de un problema elástico es conocida, la transformada de Laplace de la solución del problema viscoelástico asociado se construye sustituyendo el cociente $\tilde{Q}(S)/\tilde{P}(S)$ en lugar del módulo de corte G , y las variables actuales dependientes del tiempo por sus transformadas" [31].

Para este trabajo, se recurrirá a una solución elástica muy utilizada en problemas de lubricación de contacto lineal: el modelo de deformación de columna [8], el cual a pesar de su sencillez, ha demostrado adecuadas aptitudes en las predicciones sobre el espesor de película lubricante [34]. Debido a que la solución elástica estará expresada en función del módulo elástico E y el coeficiente de Poisson ν , se puede encontrar una relación entre estos parámetros y sus correspondientes en el plano transformado. Utilizando la correspondencia entre G y $\tilde{Q}(S)/\tilde{P}(S)$ y siguiendo un procedimiento extraído del texto de Mase [32], estas relaciones son:

$$E(S) \xrightarrow{\text{es reemplazado por}} \frac{9 K \tilde{Q}(S)}{3 K \tilde{P}(S) + \tilde{Q}(S)} \quad (3-17 a)$$

$$\nu(S) \xrightarrow{\text{es reemplazado por}} \frac{3 K \tilde{P}(S) - 2 \tilde{Q}(S)}{6 K \tilde{P}(S) + 2 \tilde{Q}(S)} \quad (3-17 b)$$

3-3.4 Modelo de deformación viscoelástica de columna

Utilizando el principio de correspondencia, la solución elástica de partida es el modelo de deformación de columna, el cual se expresa mediante la siguiente relación [10 - 15] (ver Apéndice B):

$$\frac{D(X)}{L} = \frac{P(X)}{E''} \quad (3-18)$$

donde $P(X)$ es la presión del líquido lubricante que interacciona con el material, L el espesor del material, $D(X)$ el desplazamiento vertical de la superficie y E'' es el módulo elástico equivalente [12, 13]:

$$E'' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3-19)$$

Christensen [33] resolvió un problema de similares características al de este trabajo para encontrar la deformación de un sólido semi-infinito sujeto a un campo de presiones con forma de escalón unitario ($U(t)$) moviéndose a velocidad constante sobre el material. Utilizando un procedimiento similar al empleado por Christensen [33] y considerando las relaciones (3-2) podemos definir el equivalente viscoelástico de (3-18) en el plano de Laplace, ya que para un punto del material tibial, la variable X contiene implícitamente el tiempo transcurrido al recorrer el trayecto comprendido entre $X = -B$ y $X=X$ [33]. Desde el punto de vista Lagrangiano, solo la presión y las propiedades del material variarán en el tiempo, manteniendo constante la geometría y el resto de las condiciones de contorno. Entonces, el principio de correspondencia puede aplicarse a este problema.

3-3.4_a) Modelo de Voigt (VG)

Utilizando las relaciones (3-17) y definiendo la transformada de Laplace de $P(X)$ como en [33], la expresión viscoelástica correspondiente de la ecuación (3-18) en el dominio de Laplace (para un material que responde al modelo de Voigt) es la siguiente (ver Apéndice C):

$$\frac{D(S)}{L} = \frac{P(S)}{\alpha V n'' \left(\frac{E''}{\alpha V n''} + S \right)} \quad (3-20)$$

donde $\eta'' = (4/3) \eta$; η es el coeficiente de viscosidad del material y V es el promedio de la velocidad tangencial de los componentes (ver ecuación (3-1)).

El problema de encontrar una solución analítica de (3-20) reside en el hecho de que a priori, la presión no es conocida y constituye una incógnita del problema. Por tal motivo, se obtendrá una expresión para el campo de deformaciones que será resuelta junto con el sistema de ecuaciones finales. Para esto, realizamos la transformada

inversa de Laplace de la ecuación **(3-20)**, observando que el producto entre $P(S)$ y

$\left[I / \alpha V n'' \left(\frac{E''}{\alpha V n''} + S \right) \right]$ en el dominio transformado implica una convolución entre

$P(X)$ y la función exponencial $e^{-\frac{E''}{\alpha V n''}(X)}$ respectivamente en el dominio original:

$$\frac{D(X)}{L} = \int_{-B}^X \frac{I}{\alpha V n''} e^{-\frac{E''}{\alpha V n''}(X-S)} P(S) dS \quad (3-21)$$

Donde $X = -B$ es una posición alejada del centro del contacto en la cual comienza el fenómeno de lubricación, que corresponde al valor de X_0 para $t=0$ s de la relación **(3-2)**.

Debido a que el modelo es lineal, podemos separar la ecuación **(3-21)** en una respuesta elástica y otra viscosa del elemento. Para ello, integramos la ecuación **(3-21)** por partes:

$$\varepsilon(X) = \frac{D(x)}{L} = \frac{P(S)}{E''} e^{-\frac{E''}{\alpha V \eta''}(X-S)} \Big|_{-B}^X - \int_{-B}^X \frac{1}{E''} e^{-\frac{E''}{\alpha V \eta''}(X-S)} \frac{dP(S)}{dS} dS \quad (3-22)$$

La condición de contorno que debe respetar la ecuación **(3-22)** es que en una zona alejada del centro canal ($X = -B$), la presión toma el valor de la presión que rodea al elemento, la cual se considera de referencia, o sea $P(-B)=0$. Allí, la deformación entonces será nula, como se comentó en la sección anterior (condición inicial nula para un observador lagrangiano). Adicionalmente, para $s=X$ la exponencial toma el valor unitario. Entonces la ecuación **(3-22)** quedará:

$$\frac{D(x)}{L} = \frac{P(X)}{E''} - \int_{-B}^X \frac{1}{E''} e^{-\frac{E''}{\alpha V \eta''}(X-S)} \frac{dP(S)}{dS} dS \quad (3-23)$$

En el segundo miembro de la ecuación **(3-23)** quedan claramente separados el término elástico (primer término) del viscoso (segundo término). Para un valor de viscosidad muy grande ($\eta'' \rightarrow \infty$), el conjunto se torna completamente rígido y la deformación que sufrirá ante cualquier carga será nula. En el caso opuesto ($\eta'' \rightarrow 0$), la integral se anula debido al término exponencial, y la respuesta del elemento es puramente elástica. Resumiendo:

Tabla 3.11: Análisis de la ecuación (3-23) para valores extremos del coeficiente de viscosidad η'' .

η''	$e^{-\frac{E''}{\alpha V \eta''}(X-S)}$	$\int_{-B}^X \frac{1}{E''} e^{-\frac{E''}{\alpha V \eta''}(X-S)} \frac{dP(S)}{dS} dS$	$\varepsilon(X)$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow \frac{P(X)}{E''}$	$\rightarrow 0$
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow \frac{P(X)}{E''}$

Para valores intermedios de viscosidad ($0 < \eta'' < \infty$) la deformación elástica del elemento se verá afectada dependiendo del signo y valor del gradiente de la presión. Si la presión está creciendo ($dP/dS > 0$) en una zona del dominio, la deformación del material viscoelástico será menor a la observada para un material puramente elástico. Esto se debe a que estamos en la zona donde el campo de presiones aumenta la compresión del elemento conforme este se mueve, y es evidente que un conjunto viscoelástico, al contar con el elemento amortiguador, se deforma más lentamente que un elemento puramente elástico, motivo por el cual su deformación en cada punto será menor en dicha zona. En el caso contrario, al disminuir la presión conforme se mueve el elemento ($dP/dS < 0$), se produce la descompresión y en este tramo el amortiguador retarda el retorno del conjunto a su forma original. Cuanto mayor sea el valor del gradiente de presiones, más notorios serán estos efectos.

Puede notarse que la ecuación (3-23) se puede obtener resolviendo la ecuación diferencial siguiente, la cual será tomada en cuenta en la implementación numérica:

$$\frac{d\varepsilon(X)}{dX} + \frac{E''}{\eta'' \alpha V} \varepsilon(X) = \frac{1}{\eta'' \alpha V} P(X) \quad (3-24)$$

3-3.4_ b) Sólido Estándar Lineal (SEL)

El modelo que representa al sólido estándar lineal en su versión de Kelvin-Voigt, está representado en la figura 3.7. En este modelo, debe cumplirse que la tensión en el resorte 1 debe igualarse a la tensión en el elemento de Voigt, mientras que la deformación total sea igual a la suma de las deformaciones de cada elemento, esto es:

$$P_1 = P_2 = P(X) \quad (3-25)$$

$$D(X) = D_1(X) + D_2(X) \tag{3-26}$$

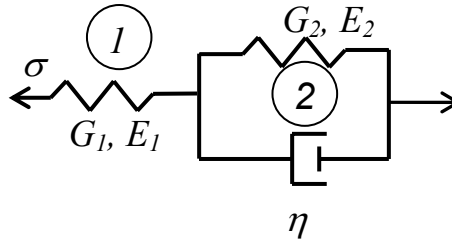


Figura 3.7: Sólido estándar lineal en su versión de Kelvin-Voigt. En la figura se indican el número de cada resorte encerrado en un círculo, a los cuales se hará referencia en el capítulo de resultados.

Como puede verse, la deformación $D_2(X)$ es la correspondiente al modelo de Voigt, que responde a la ecuación (3-23), mientras que la deformación $D_1(X)$ corresponde al resorte lineal, cuya expresión responde a la ecuación (3-18). Finalmente, para el sólido estándar lineal podemos escribir la deformación de la siguiente manera:

$$\varepsilon(X) = \frac{D(x)}{L} = P(X) \left(\frac{1}{E''_1} + \frac{1}{E''_2} \right) - \int_{-B}^X \frac{1}{E''_2} e^{-\frac{E''_2}{\alpha V \eta''} (X-S)} \frac{dP(S)}{dS} dS \tag{3-27}$$

Realizando el mismo análisis que para la ecuación (3-23), los resultados de la ecuación (3-25) para valores extremos de η'' se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 3.III: Análisis de la ecuación (3-27) para valores extremos del coeficiente de viscosidad η'' .

η''	$e^{-\frac{E''_2}{\alpha V \eta''} (X-S)}$	$\int_{-B}^X \frac{1}{E''_2} e^{-\frac{E''_2}{\alpha V \eta''} (X-S)} \frac{dP(S)}{dS} dS$	$\varepsilon(X)$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow \frac{P(X)}{E''_2}$	$\rightarrow \frac{P(X)}{E''_1}$
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow P(X) \left(\frac{1}{E''_1} + \frac{1}{E''_2} \right)$

Evidentemente, el sólido estándar lineal predice una deformación instantánea que lo distingue del modelo de Kelvin. Este último podría entenderse como un caso particular del sólido estándar cuando el módulo elástico del resorte 1 tiende a infinito.

3-4 Capacidad de exudación-absorción.

3-4.1 Introducción

Con el propósito de entender de qué manera una rodilla humana sana funciona óptimamente desde el punto de vista mecánico, Di Paolo y Corvalán [10 - 12] realizaron un estudio computacional sobre un modelo de rodilla natural. Dicho modelo contempla la capacidad del cartílago articular para exudar líquido intersticial cuando se lo comprime y absorberlo cuando se lo expande. Esta característica confiere al cartílago un mecanismo de autolubricación que ante altas cargas y en movimiento pleno, contribuye a la formación de un canal de lubricación. Esto significa la existencia de una pequeña película de líquido sinovial entre las superficies articulares que las mantiene separadas, logrando coeficientes de fricción muy bajos (entre 0.005 y 0.0025 [7]). Este mecanismo contribuye a preservar el cartílago articular con bajas tasas de desgaste y alto rendimiento mecánico.

Por otro lado, McClure et al. [34] concluyen de sus experiencias con hidrogeles permeables, como material polimérico en prótesis de cadera, que la porosidad de estos materiales es beneficiosa para reducir los altos valores de fricción que se producen en el arranque de la marcha, luego de un período prolongado de estancamiento.

La introducción de la capacidad de exudación en el material deformable, podría contribuir a la preservación de un film lubricante entre las superficies. Por este motivo se definirá a continuación un modelo simplificado de exudación, cuya influencia en el caudal que circula por el canal de lubricación será considerado en el próximo capítulo.

3-4.2 Desarrollo

La fase líquida del cartílago articular se encuentra contenida en poros que se forman en el entramado mencionado. Algunos de estos poros se comunican con la cavidad articular mientras que otros se encuentran aislados. Es por eso que no todo el volumen de líquido contenido en el cartílago puede ser exudado. Por lo tanto puede definirse una fracción θ que representa la fracción de fluido que puede ser efectivamente expulsado del cartílago cuando se lo comprime y deforma. Entonces:

$$\theta = \frac{\text{Volumen de fluido exudado}}{\text{Variación total de volumen}} \quad (3-28)$$

Si bien θ no es una medida directa de la porosidad del sustrato, en algunos trabajos se utiliza esta definición como una medida de porosidad. En general, llamaremos a θ "coeficiente de exudación" y se considerará constante en cualquier punto dentro del sustrato, pero en algunos casos se lo puede mencionar como la porosidad del material.

La relación (3-28) se puede apreciar mejor en la figura 3.8. Allí se observa que la carga aplicada externamente se distribuirá de alguna manera sobre el sustrato debido a la presión generada en el líquido sinovial para equilibrarla. Esto provocará una deformación del material, el que se desplazará una distancia D , la cual dependerá de la distribución de presiones a lo largo de la coordenada X , como se vio anteriormente. Dicha deformación (que implica una variación de volumen $D dX$ por unidad de longitud axial) obligará al sustrato a exudar una cantidad de fluido $\theta D dX$ hacia el canal de lubricación, contribuyendo al caudal circulante, lo que genera un proceso de autolubricación. No obstante, como se predice en [10], además del fenómeno de liberación de fluido también existe un fenómeno de absorción en distintas zonas del material, lo cual es necesario para reconstituir el contenido de líquido del tejido.

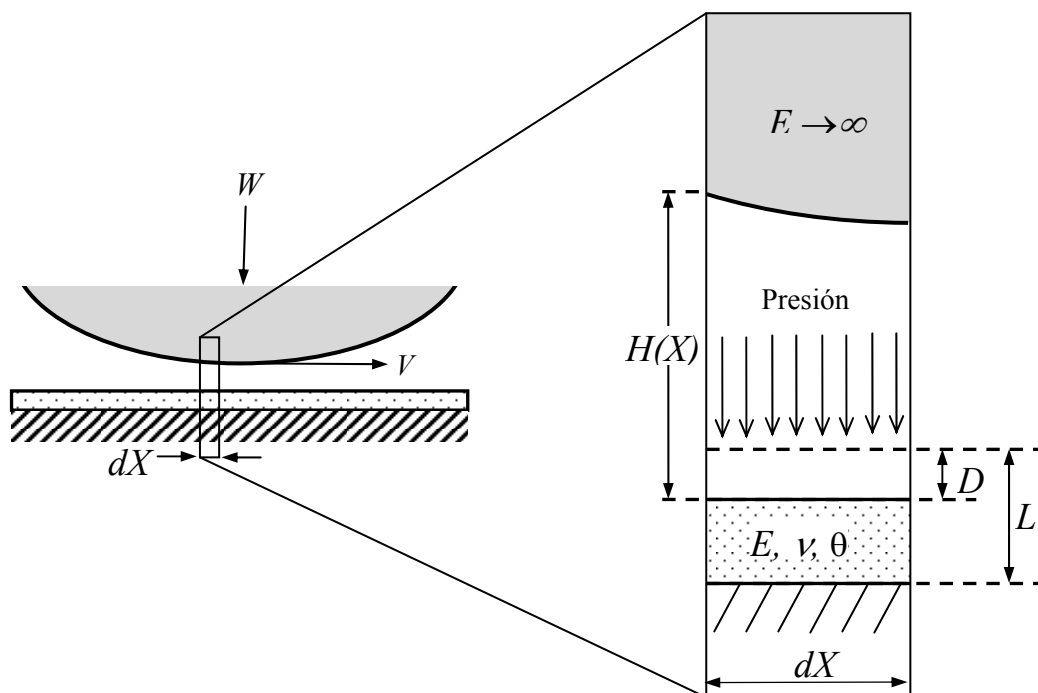


Figura 3.8: A la izquierda: esquema simplificado de la prótesis de rodilla. A la derecha: Ampliación de la zona seleccionada.

CAPÍTULO 4.

Biomecánica y Teoría de Lubricación

4-1 Fisiología de la rodilla.

4-1.1 Introducción

Una articulación es considerada en algunos casos como un órgano, ya que se trata de una organización de múltiples tejidos con actividades funcionales especiales. Un cambio en cualquiera de estos tejidos repercutirá sobre los otros. En este capítulo se describirá sintéticamente la función de los tejidos relevantes para el modelo (reemplazados con una prótesis) y sus respuestas ante la acción de cargas y en estado de movimiento pleno de la articulación, para mostrar luego las ecuaciones relacionadas con la fisiología de la rodilla.

Al igual que en el anterior capítulo, debido al excelente funcionamiento de la rodilla natural, expondremos brevemente las características mecánicas que diferencian a la articulación humana de los materiales desarrollados por el hombre para la construcción de articulaciones artificiales.

4-1.2 Función del cartílago articular

El cartílago articular actúa como una superficie de muy bajo coeficiente de fricción, distribuye las cargas y transmite las tensiones generadas en la articulación [35]. Está diseñado para deformarse bajo presiones, y una vez retiradas estas últimas, retoma su forma original debido a su elasticidad y al flujo osmótico de líquido que regresa al seno del material para reconstituir su estado original. Este flujo de retorno se origina principalmente para satisfacer la carga eléctrica desbalanceada que queda en el material cuando el líquido es exudado por compactación (figura 4.1). Dicha carga se debe a que las moléculas de proteoglicano están altamente sulfatadas y atraen a la parte positiva (hidrógeno) de la molécula de agua para mantener hidratado al cartílago. De esta manera, se crea un mecanismo de lubricación dependiente de la presión, tal que a mayor presión generada en la articulación, mayor será la cantidad de líquido aportado desde el cartílago a la zona de contacto para favorecer la existencia de una película de fluido entre las superficies [10 - 12].

La lubricación hidrostática es el mecanismo más efectivo para lubricar superficies altamente cargadas [35]. No obstante, cuando una articulación se encuentra en movimiento existen dos fuentes que aportan fluido a la zona de contacto: el ya mencionado fluido aportado por el cartílago articular y el fluido sinovial que existe en toda articulación diartrodial (como la rodilla) que es arrastrado hacia la zona de contacto por el movimiento relativo entre los componentes de la junta. Estos fenómenos (arrastre y exudación), que serán tratados en las sucesivas secciones dentro de este capítulo, sumados a la deformación del material articular generan un mecanismo de lubricación denominado poro-elastohidrodinámico, considerado una de las causas fundamentales del buen funcionamiento de la rodilla [10 - 12].

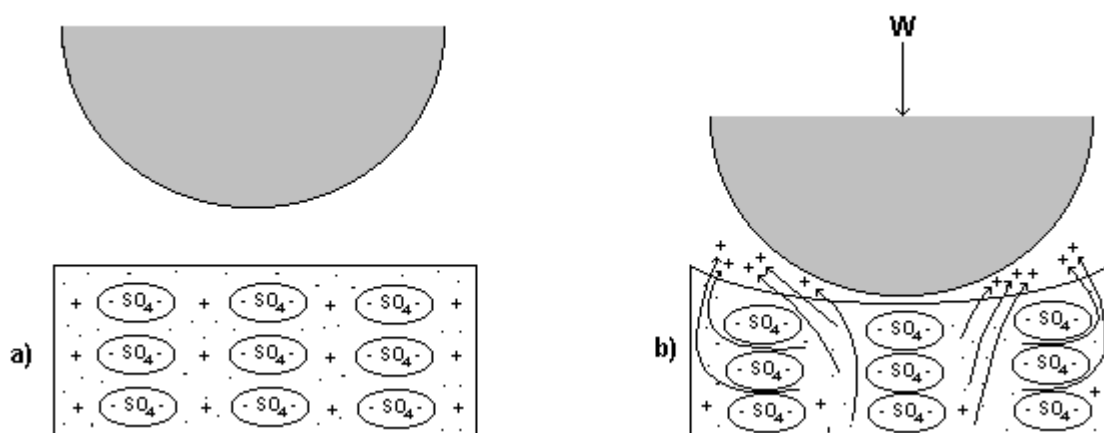


Figura 4.1: a) Representación de la rodilla en ausencia de cargas. b) Ante la acción de una carga se produce el efecto de exudación de líquido debido a la deformación del cartílago.

Otra función importante del cartílago es la distribución de la fuerza intraarticular. Esta fuerza es un múltiplo del peso del cuerpo debido a que las cargas sobre la rodilla son casi siempre excéntricas en relación al centro de gravedad del cuerpo [35]. La mayor parte de la carga es creada por contracción de los músculos, los cuales expanden la articulación en movimiento o se contraen para balancear al organismo en un estado estático, denominado como estancamiento prolongado (ver sección 4-3.3). Ante las altas exigencias de esta articulación, el cartílago contribuye a aliviarlas debido a que al deformarse distribuye las cargas, de manera que las tensiones que se generan para equilibrar las fuerzas mencionadas adquieren valores menores que en un material con poca capacidad de deformación. De esta forma, si no se realizan esfuerzos extremos, se atenúan los picos de tensiones preservando al cartílago articular de la fatiga. Los meniscos colaboran con esta tarea y su función ya fue explicada en la sección 3-1.3.

En [35], se propone que al aplicar una carga sobre el cartílago, gran parte de dicha carga es soportada por la presión hidrostática generada en el seno del tejido gracias a su alto contenido de líquido, y el resto es soportado por la matriz sólida. Esta interacción es reconocida como una de las causas fundamentales en el bajo deterioro del tejido sano, ya que los componentes elásticos se ven aliviados de las altas tensiones gracias a la presencia del líquido intersticial. Debido a que los materiales actuales para reemplazo articular no poseen la misma estructura que el cartílago, y considerando que el interés estará principalmente enfocado en el fenómeno de lubricación y no en la estructura interna, en este trabajo no se considerará la separación entre los componentes líquido y sólido cuando el material tenga la capacidad de exudación, sino que se tendrá en cuenta su efecto neto sobre el fenómeno de lubricación a través de la respuesta viscoelástica que dicha estructura manifiesta y del efecto de exudación sobre el caudal lubricante.

4-1.3 Función del líquido sinovial

El líquido sinovial es un líquido viscoso que tiene funciones biológicas y mecánicas. Está constituido principalmente por un ultrafiltrado de la sangre, el cual es llevado a cabo por la membrana sinovial. A esto se le agregan dos moléculas glucoproteicas que intervienen en la viscosidad y lubricación de la rodilla: ácido hialurónico y lubricin (sintetizadas por la membrana sinovial).

Desde el punto de vista biológico, el líquido sinovial interviene, por ejemplo, en la nutrición del cartílago articular y el transporte de sustancias metabólicas, mientras que su función mecánica más importante es la lubricación de la junta, además de contribuir a la absorción de altas cargas provocadas por golpes. En este sentido, la viscoelasticidad del fluido sinovial ha sido reportada como fundamental en la absorción de cargas dinámicas [36]. Esta característica no será considerada en esta tesis, quedando para explorar su efecto en futuros trabajos. No obstante, la viscoelasticidad del líquido sinovial tiene poca influencia en el régimen de lubricación considerado en este trabajo (carga constante).

Las características reológicas de la superficie articular y el fluido sinovial son los responsables de una excelente lubricación, permitiendo que la articulación sinovial funcione óptimamente a lo largo de toda la vida de un individuo (en ausencia de patologías). El coeficiente de fricción logrado con los mecanismos lubricantes previamente mencionados presentan valores entre 0.005 y 0.0025 en articulaciones

[7], lo cual no ha podido ser alcanzado por las juntas fabricadas actualmente por el hombre, inclusive las prótesis de rodilla.

Por otro lado, se han realizado pruebas mecánicas con fluido sinovial ex vivo y se concluyó que el mismo posee características no-Newtonianas [7, 35, 37].

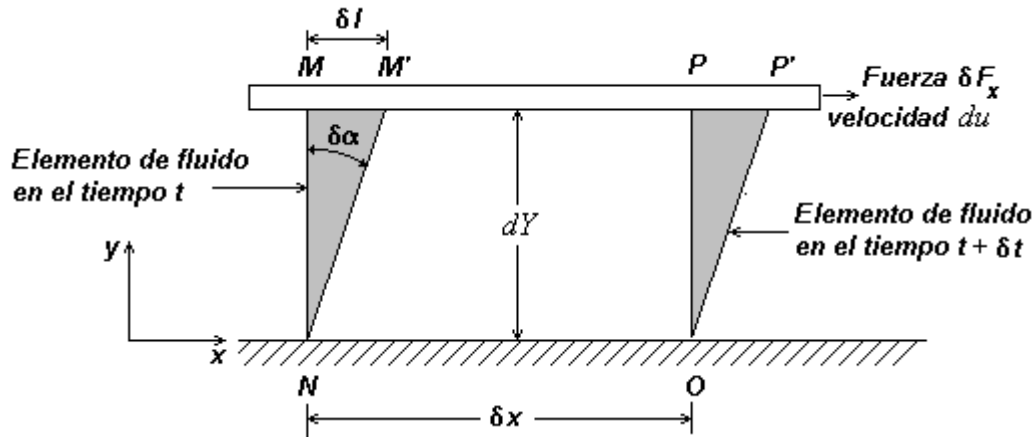


Figura 4.2: Deformación de un elemento de fluido. El líquido se mueve por el arrastre de la placa superior, sin estar sometido a un gradiente de presiones.

Cuando el elemento de fluido de la figura 4.2 se somete a un esfuerzo de corte τ_{yx} experimentará una relación de deformación (relación de corte) dada por du/dY . Los fluidos en los que el esfuerzo de corte es directamente proporcional a la tasa de deformación son *fluidos Newtonianos*. Los fluidos más comunes como el agua y la gasolina, son Newtonianos en condiciones normales.

Entonces, si el fluido de la figura 4.2 es Newtoniano, su esfuerzo de corte para un flujo unidimensional estará sujeto a la siguiente ley:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dY} \quad (4-1)$$

denominada ley de viscosidad de Newton, donde la constante de proporcionalidad μ se llama *viscosidad absoluta (o dinámica)*. Sin embargo, no todos los fluidos verifican la relación de la ecuación (4-1), sino que existen fluidos (como el líquido sinovial) en los cuales el esfuerzo de corte no es directamente proporcional a la relación de deformación, a los cuales se los denomina *no Newtonianos*. Un gran número de ecuaciones empíricas se han propuesto para modelar las relaciones observadas entre τ_{yx} y du/dY para fluidos no Newtonianos independientes del tiempo. No obstante, para muchas aplicaciones de ingeniería pueden representarse de manera adecuada

mediante el modelo de ley de potencia, el cual se convierte para un flujo unidimensional en

$$\tau_{yx} = m \left(\frac{du}{dY} \right)^n \quad (4-2)$$

donde el exponente n se llama índice de comportamiento del fluido y m el índice de consistencia. Esta relación se reduce a la ley de viscosidad de Newton para $n = 1$ y $m = \mu$.

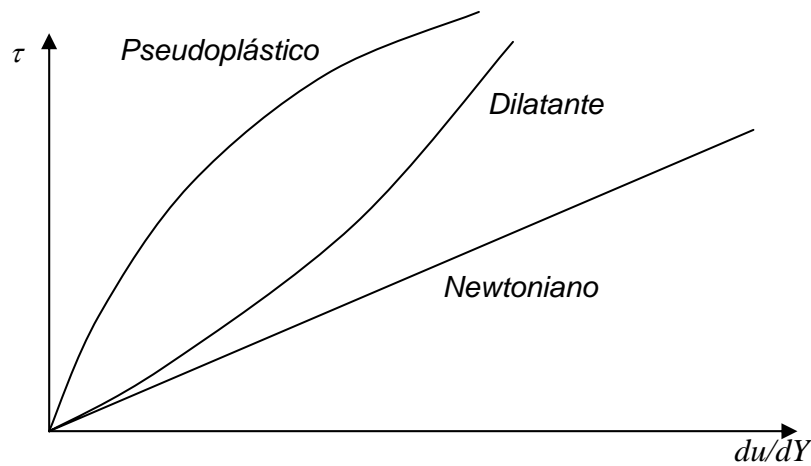


Figura 4.3: Comportamiento reológico de los fluidos. Esfuerzo de corte en función de la velocidad de corte o gradiente de velocidad.

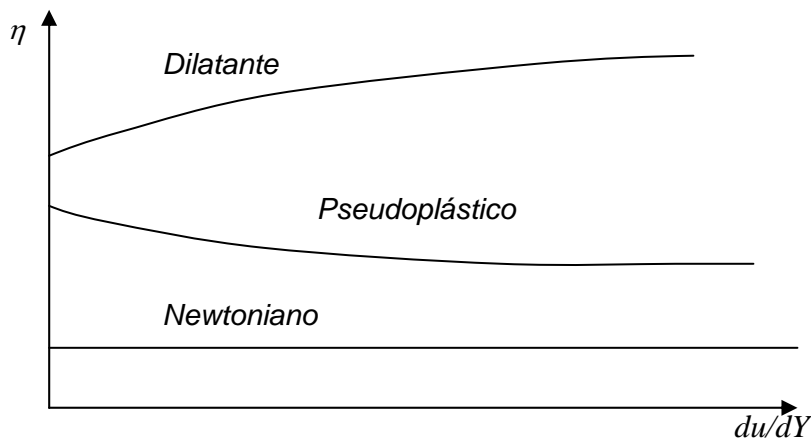


Figura 4.4: Comportamiento reológico de los fluidos. Viscosidad equivalente en función de la velocidad de corte o gradiente de velocidad.

La ecuación (4-2) puede reescribirse en la forma

$$\tau_{yx} = m \left| \frac{du}{dY} \right|^{n-1} \frac{du}{dY} = \eta \frac{du}{dY} \quad (4-3)$$

entonces $\eta = m \left| \frac{du}{dY} \right|^{n-1}$ se denomina viscosidad aparente o equivalente.

Los fluidos en los cuales la viscosidad equivalente aumenta con el incremento de la relación de deformación ($n > 1$) se llaman dilatantes. Las suspensiones de almidón y de arena son ejemplos de fluidos dilatantes. Si la viscosidad equivalente disminuye con el aumento de la velocidad de corte ($n < 1$), el fluido se llama pseudoplástico. Gran parte de los fluidos no Newtonianos entran en este grupo. Las figuras 4.3 y 4.4 muestran el comportamiento de los distintos fluidos representados por la ecuación (4-3).

Como ya se mencionó anteriormente, experiencias realizadas con líquido sinovial ex vivo, extraído de articulaciones humanas, demostró que el mismo responde a un modelo no Newtoniano con características pseudoplásticas (ver figura 4.5), lo cual indica que su comportamiento puede ser representado mediante la ecuación (4-3) para valores de $n < 1$. Los resultados experimentales han arrojado distintos valores del parámetro n dependiendo del estado de salud de la articulación, de la edad del individuo, etc. La figura 4.5 muestra un reograma extraído de [37] para varias muestras de líquido sinovial pertenecientes a cuatro articulaciones: una sana, dos osteoartíticas y una reumática. La figura 4.6 muestra el ajuste aproximado de las curvas mostradas en la figura 4.5 (excepto para el caso reumático) utilizando el modelo de ley de potencia (4-3), e indicando el valor del exponente n para cada caso. Este ajuste se realizó mediante una sencilla implementación de la ecuación (4-3) dentro de un código construido en el entorno de programación Matlab, y confeccionando luego las gráficas con los ejes en escala logarítmica. Como puede observarse, los valores experimentales n son muy variables y no es posible contar con un valor que represente a todas las situaciones. Por este motivo, en la obtención de los resultados se tendrá en cuenta un valor del índice de comportamiento $n = 0.60$, ya que la enfermedad más frecuente que conduce a un reemplazo articular es la oteoartritis, observando de la figura 4.6 que los valores de n para esta enfermedad se encuentran cercanos al valor elegido.

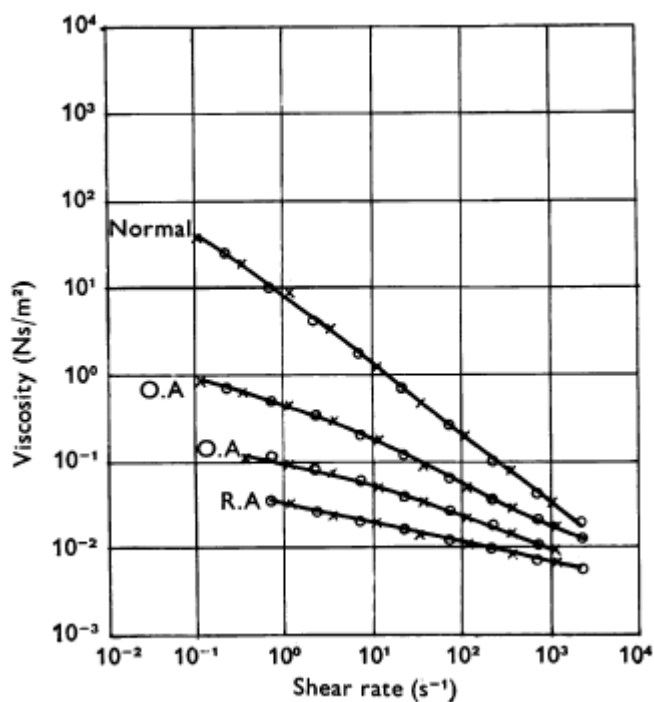


Figura 4.5: Comportamiento no Newtoniano del líquido Sinovial, extraído de [37].

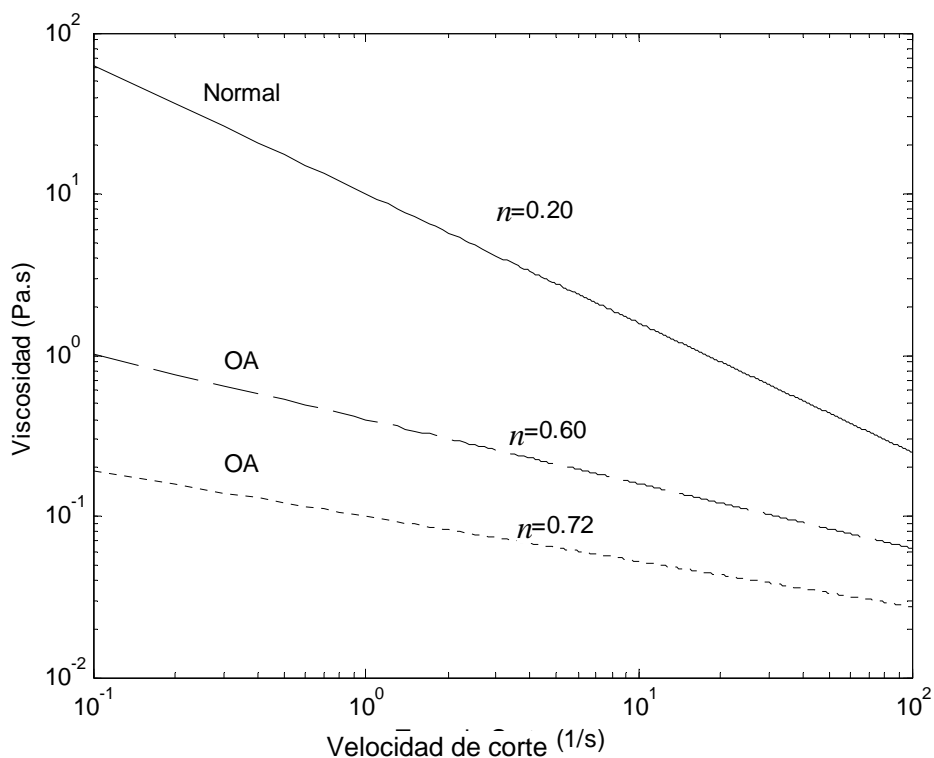


Figura 4.6: Reproducción de los datos correspondientes a fluido de articulación normal, y a los dos casos de líquido extraído de articulaciones oosteoartríticas (OA) de la figura 4.5, mostrando el valor del exponente de la ley de potencia que se ajusta a cada curva.

4-2 Biomecánica de la marcha y teoría de lubricación.

4-2.1 Introducción

El estudio de la marcha normal es una de las principales áreas de la biomecánica que permiten estudiar, detectar y corregir varias patologías locomotoras de un individuo. Su estudio detallado es muy amplio y está fuera de los alcances de esta tesis. No obstante, expondremos una breve síntesis de la marcha normal junto con los mecanismos de lubricación presentes en la misma. De esta manera se podrá estimar en qué momento de la caminata de un paciente es conveniente realizar un estudio donde puedan observarse la mayoría de las variables mecánicas relevantes en el proceso de desgaste del componente tibial de las prótesis.

4-2.2 Fases de la marcha normal

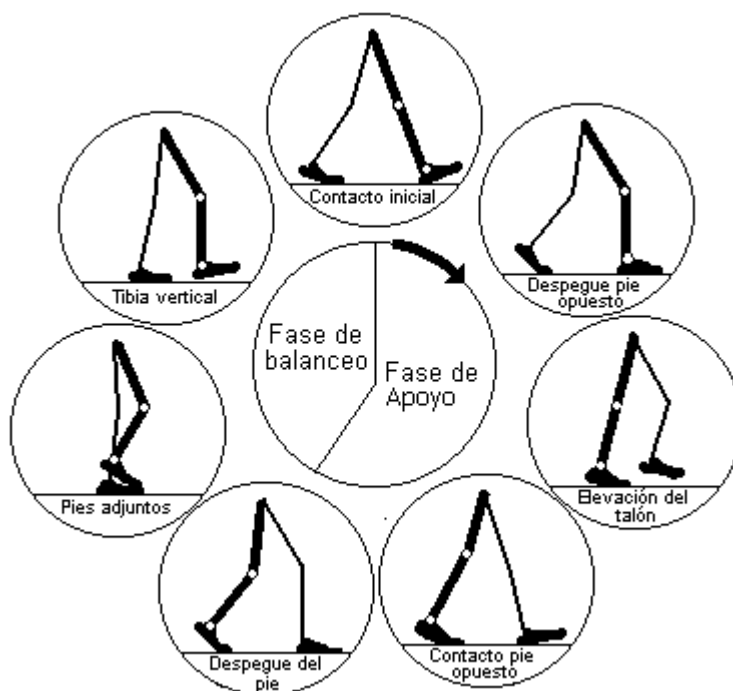


Figura 4.7: Fases de la marcha normal.

La marcha humana normal se puede entender como un método de locomoción que involucra el uso de las dos piernas alternativamente para proveer soporte y propulsión al cuerpo. Debido a que en un paciente con reemplazo de rodilla se le prohíbe realizar actividades que exijan demasiado la articulación, excluirémos el acto de correr para

nuestro análisis. Con esta consideración, un individuo que realiza una caminata tiene en todo momento al menos un pié apoyado sobre el suelo.

El ciclo de la marcha normal se define como el intervalo de tiempo entre dos sucesivas ocurrencias de uno de los eventos repetitivos de la caminata. El pie izquierdo realiza exactamente la misma serie de eventos que el derecho, pero desplazado en el tiempo una mitad del período total del ciclo.

La figura 4.7 muestra los eventos en los cuales se divide la marcha para su análisis. La fase de estancamiento es aquella en la que el pie de referencia para el cual se describen los eventos de la marcha está apoyado sobre una superficie, realizando al mismo tiempo un movimiento relativo hacia la parte posterior del cuerpo. Esta fase es la más larga del ciclo (60 % del tiempo total) y es aquella en la cual la rodilla de dicho pie se encuentra sujeta a las mayores exigencias. Esto se debe a que:

- Al ser la única pierna apoyada, recibe todo el peso del cuerpo.
- Se producen contracciones excéntricas del músculo cuádriceps, aumentando la carga que debe soportar la rodilla a valores mayores que el peso del individuo.
- Hay un movimiento relativo entre las superficies articulares. Este movimiento se efectúa en presencia de velocidades de operación bajas ante cargas altas, situación en la que podrían generarse elevados valores de fricción.

La fase de balanceo es aquella en la cual la pierna de referencia se encuentra realizando un movimiento pendular hacia la parte anterior del cuerpo sin estar apoyada sobre una superficie. Esto requiere un mínimo de esfuerzo por parte de la articulación por dos razones:

- El peso es soportado por la otra pierna.
- Al estar suspendidas durante toda esta fase, las superficies articulares están separadas por efecto gravitatorio y solo hay un mínimo de rozamiento debido al fluido viscoso que circula con el movimiento de la junta y a una pequeña carga generada por la contracción del cuádriceps para llevar la pierna hacia adelante.

Resulta evidente que la fase más comprometida desde el punto de vista mecánico es la de estancamiento. No obstante, en una articulación sana el mecanismo de lubricación presente en cada fase evita el desgaste excesivo de la articulación natural,

independientemente de las exigencias a las que está sometida. A continuación se expondrán estos mecanismos y en qué fases de la marcha están presentes.

4-2.3 Lubricación de la rodilla

Como las condiciones de trabajo de la articulación varían a través del ciclo de la marcha, es necesario disponer de distintos modos de lubricación para los distintos eventos. La figura 4.8 muestra los principales mecanismos presentes en cada etapa de la marcha que se describirán a continuación.

Un estado de estancamiento prolongado (estado en que una persona está parada sin moverse, el cual no se ilustra en la figura 4.8) no es una fase de la marcha normal, pero necesita de un mecanismo de lubricación particular. Este caso es uno de los más exigentes de la junta, ya que, cuando el individuo está parado, la articulación queda estática el tiempo suficiente como para que las superficies desalojen el fluido existente entre las mismas y entren en contacto directo los sólidos, exigiendo a los materiales articulares en el arranque de la marcha. El tipo de lubricación es por contacto seco, donde las irregularidades ofrecen puntos de contacto mínimos, existiendo líquido alojado entre las rugosidades, disponible para disminuir el rozamiento cuando la junta comienza a moverse. Una rodilla natural posee la capacidad de autolubricación del cartílago, de manera tal que la exudación de fluido disminuiría el contacto directo entre los materiales en el arranque, mientras que las prótesis de rodilla no cuentan con este mecanismo y su exigencia sería mayor.

En el contacto inicial, actúa el mecanismo de película formada por compresión de la articulación (squeeze film en inglés). Una junta artificial (por ejemplo una prótesis de rodilla) expelería el fluido existente entre las superficies hacia la periferia, pero la alta viscosidad del fluido sinovial y la deformación del cartílago articular permiten mantener una capa de fluido entre las superficies articulares. La figura 4.8 muestra en forma simplificada este fenómeno. La carga sobre la articulación comprime al cartílago, el cual responde deformándose y exudando líquido hacia la zona de contacto, mientras que el fluido sinovial, al ser viscoso, contribuye a amortiguar la carga actuante. Sin este mecanismo, las superficies entrarían en contacto en este evento de la marcha, lo cual generaría fricciones elevadas debido a la alta carga soportada por la rodilla y al alto coeficiente de rozamiento debido al contacto directo sólido-sólido.

A lo largo de toda la fase de apoyo, el mecanismo actuante es el poro-elastohidrodinámico (PEHD) [37], en el cual existe en todo momento una película de

fluido completa, sin contacto directo entre los materiales. Como ya se ha expuesto anteriormente en este capítulo, este mecanismo es considerado como uno de los responsables del bajo coeficiente de rozamiento logrado por la rodilla en la fase más exigente de la marcha. Las superficies de la articulación en movimiento generan arrastre del fluido sinovial periférico hacia la zona de contacto, permitiendo la existencia de una capa de fluido lubricante que mantiene separadas a las superficies evitando el contacto directo entre los sólidos. Además, el cartílago articular continúa deformándose a lo largo de toda esta fase en distintas zonas del mismo a medida que las superficies se mueven relativamente entre sí, facilitando la exudación de líquido y contribuyendo al caudal circulante entre los sólidos en movimiento. Los valores de separación entre las superficies (canal de lubricación) medidos mediante interferometría óptica en esta fase son los más pequeños de todo el ciclo [34], por lo que es relevante para el funcionamiento de las prótesis ya que el polietileno no tiene la capacidad de deformación del cartílago y carece de un mecanismo de autolubricación, comprometiendo la existencia de la película lubricante y albergando la posibilidad de un contacto directo causante del fenómeno de abrasión. Los valores de las rugosidades del polietileno y de las asperezas del metal del componente femoral también jugarán un papel importante en las pequeñas dimensiones del canal en esta fase.

En el evento de despegue del pie se produce un fenómeno de lubricación mixta. En realidad, en casi todos los eventos está presente más de un proceso lubricante, pero siempre prevalece el más favorable para la situación mecánica correspondiente. No obstante, aquí hay una combinación de dos de ellos:

- i) Como está en la etapa de finalización de estancamiento, todavía sigue actuando la lubricación PEHD, pero en menor medida ya que las superficies han comenzado a separarse y no son necesarios los procesos de deformación y autolubricación.
- ii) El despegue de las superficies deja lugar a que el líquido sinovial se introduzca en la zona de contacto junto con las moléculas de ácido hialurónico y lubricin. Este es un mecanismo de lubricación de película límite que mantendrá separadas a las superficies.

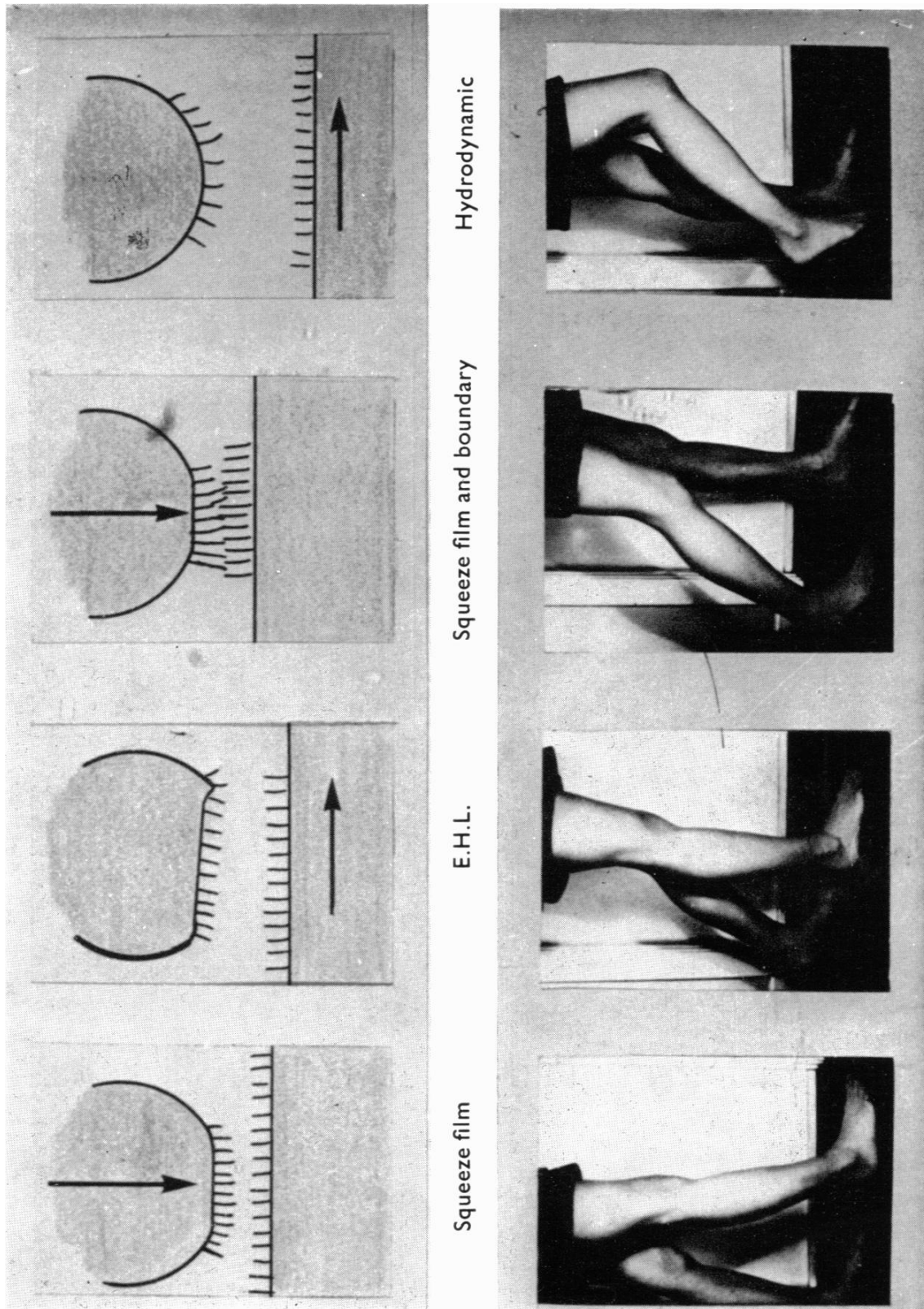


Figura 4.8: Ilustración de los principales mecanismos de lubricación en distintas etapas de una caminata normal, extraída de [37].

En toda la fase de balanceo el principal fenómeno lubricante es el hidrodinámico. En todo momento se interpone una película de fluido entre las superficies en movimiento. La contracción del cuádriceps en esta etapa realiza un esfuerzo pequeño sobre la rodilla que podría juntar las superficies, pero es contrarrestado por efecto gravitatorio que tiende a separar la pierna del muslo y a la presión hidrodinámica que se autogenera en el seno del fluido existente en el contacto.

Por lo expuesto hasta aquí, resulta evidente que realizar una simulación de todo el ciclo de la marcha implica analizar un fenómeno que tiene la complicación de ser variable en el tiempo, con procesos no estacionarios completamente diferentes entre sí. Un análisis del ciclo completo complicaría demasiado la tarea necesaria para resolver las ecuaciones de flujo y elasticidad. Además, como el propósito de este trabajo no es estudiar la marcha sino el comportamiento de materiales con diferentes propiedades mecánicas, el estudio de la situación más desfavorable para el funcionamiento de la rodilla puede arrojar datos indicativos sobre las posibles causas mecánicas del desgaste del polietileno y el posible funcionamiento de algunos materiales en estudio, ya que las variables mecánicas estarían en su nivel más exigido y es aquí donde se encuentran comprometidos los materiales protésicos.

Del análisis del ciclo de la marcha y los mecanismos de lubricación, resulta evidente que la fase de apoyo es la más exigida en todos los aspectos, pudiendo extraer inferencias modelándola mediante el *movimiento pleno* de la articulación con una *velocidad relativa promedio* (ver capítulo 3) en *estado estacionario*, sujeto a la mayor carga que soporta la articulación en esta fase. Si bien el estancamiento prolongado también presenta complicaciones, se dejará su estudio para proyectos posteriores dedicando este trabajo al estudio del fenómeno de lubricación en la fase mencionada (apoyo), de la cual se intentará obtener resultados que quizás beneficien también al estancamiento prolongado.

4-3 Ecuaciones de conservación.

4-3.1 Introducción

Una vez determinada la fase para la cual se obtuvo el modelo y el mecanismo de lubricación presente en la misma, se mostrarán las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fluido ante lubricación poro-elastohidrodinámica, completando así

el conjunto de ecuaciones junto con la del canal de lubricación obtenido en el capítulo 2 y la ecuación de elasticidad del capítulo 3.

Las ecuaciones para el fluido surgen de aplicar los principios básicos de la mecánica de fluidos: conservación de la cantidad de movimiento y conservación de la masa. A continuación se aplicará cada principio por separado, derivando luego en las ecuaciones gobernantes del modelo.

4-3.2 Balance de cantidad de movimiento

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (segunda ley de Newton) en su versión diferencial aplicada a un fluido en movimiento, se puede escribir en notación de Gibbs de la siguiente manera:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \nabla) \underline{V} \right) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{T} \quad (4-4)$$

En la ecuación (4-4), se desprecia el término gravitatorio debido a que en los procesos de lubricación elastohidrodinámicos, el espesor del fluido lubricante es muy pequeño. Además, las fuerzas que dominan en el fenómeno de lubricación son las provenientes del campo de presiones desarrollado y de los esfuerzos viscosos, las cuales interactúan entre sí sin contribución apreciable de los efectos gravitatorios [9].

En el miembro izquierdo de la ecuación (4-4) el término de aceleración es la derivada material de la velocidad del fluido. En el mismo puede verse que existen dos causas mediante las cuales una partícula de fluido puede adquirir aceleración:

- Debido a la variación local de la velocidad en el tiempo, que implica al término $\frac{\partial \underline{V}}{\partial t}$.

Esto significa que en un punto fijo del canal la velocidad del líquido tiene que estar variando en el tiempo. Como el modelo será desarrollado para un estado estacionario, este término se desprecia en el presente trabajo.

- Debido a una variación de la velocidad en distintas zonas del canal, que implica al término $(\underline{V} \cdot \nabla) \underline{V}$. Por ejemplo, en el flujo estable a través de una tobera, en la cual por definición, el campo de velocidad no es una función del tiempo, una partícula de fluido se acelerará conforme se mueva a través de la tobera, esto es, la partícula se lleva hacia una región de velocidad más alta. En resumen, esto significa que dicha partícula recibe una *aceleración convectiva*.

El término de aceleración convectiva es fuertemente no lineal, lo cual agrega una complejidad extra a la ecuación (4-4). Sin embargo, si este término puede despreciarse o es nulo, la ecuación se simplifica facilitándose enormemente su resolución y análisis. Esto ocurre, por ejemplo, en flujos paralelos donde la sección transversal al flujo no varía a lo largo del dominio.

En virtud de que el espesor del canal de flujo es pequeño respecto a los radios de los cilindros que representan a los componentes femoral y tibial (ver capítulo 2), la inclinación de las superficies en la región de interés es muy pequeña por lo que el flujo es prácticamente unidireccional y puede ser bien representado a través una simplificación conocida como *aproximación de lubricación*. El análisis completo de esta aproximación puede ser visto en [9], pero aquí solo mencionaremos que es un procedimiento utilizado en análisis de problemas de lubricación [9 - 20] y se basa en el análisis de órdenes de magnitud en la zona de contacto. Esto es, la relación entre la altura característica del canal de lubricación ($O(-6)$) y la extensión del canal ($O(-2)$) es muy pequeña, y adimensionalizando convenientemente la ecuación (4-4), los términos de aceleración por convección quedan multiplicados por dicha relación [9], resultando un valor muy pequeño (menor a 10^{-4}). Esto significa que el espesor del canal y su variación, son muy pequeños comparados con la extensión del mismo, lo cual torna despreciable el término en cuestión.

La consideración anterior más la justificación del capítulo 2, de que el problema puede aproximarse mediante un tratamiento unidimensional, nos lleva a la siguiente forma de las ecuaciones de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial \tau}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial X} \quad (4-5)$$

Para un fluido Newtoniano, la ecuación (4-5) se resuelve fácilmente. Como el líquido que lubrica a una junta artificial implantada tiene características no Newtonianas, siguiendo un procedimiento extraído de [18], Di Paolo et al [13] utilizaron un método de perturbación para obtener una ecuación de lubricación de Reynolds modificada válida para un fluido cuyo perfil de velocidades en el canal de lubricación es predominantemente Couette y que responde reológicamente a una ley de potencia. Debido a que la ecuación obtenida resulta compleja y el significado de sus componentes no es sencillo de deducir a partir de la ecuación de Reynolds para fluidos Newtonianos, se incluye en el apéndice A el procedimiento mediante el cual se arribó a

la ecuación utilizada en el presente trabajo, ya que el mismo no se puede encontrar en las publicaciones de referencia. Aquí solo se mostrará la versión final de dicha ecuación y se describirá brevemente el significado de cada término.

4-3.3 Ecuación de Reynolds modificada

Luego del procedimiento mostrado en el apéndice A, aplicado por Di Paolo et al. para el trabajo citado en la referencia [13], la forma diferencial de la ecuación de Reynolds queda:

$$\frac{dP}{dX} = 12 n \mu_o \left[\frac{H(-\infty)}{H(x)} \right]^{n-1} \frac{V H(X) - Q_e(X)}{H(X)^3} \quad (4-6)$$

La solución numérica de la ecuación de Reynolds en su forma diferencial presenta sobreestimaciones y fuertes oscilaciones en el campo de presión que en muchos casos invalidan los resultados. Para evitar estas oscilaciones, siguiendo lo mostrado por Di Paolo et al. [10] se utilizará la ecuación en forma integral, versión que presenta un mejor comportamiento numérico a cambio de mayor tiempo de cómputo. Esta es:

$$P(X) = 12 n \mu_o \int_{-B}^X \left[\frac{H(-B)}{H(X)} \right]^{n-1} \frac{V H(X) - Q_e(X)}{H(X)^3} dx \quad (4-7)$$

donde n es el exponente de la ley de potencias que describe el comportamiento no Newtoniano. Para fluidos pseudoplásticos, n toma valores menores a 1. Además, μ_o es viscosidad dinámica del líquido sinovial que rodea a la junta artificial,

$\mu_o \left[\frac{H(-B)}{H(x)} \right]^{n-1}$ es la viscosidad *equivalente* promediada en la altura del canal, siendo

$H(-B)$ la altura en un punto alejado de la zona de lubricación, lugar donde la viscosidad equivalente toma el valor de de la viscosidad dinámica del líquido que rodea a la junta, V es la velocidad promediada, cuya expresión se mostró en el capítulo 3 y $Q_e(X)$ es el caudal en cada sección del canal de lubricación.

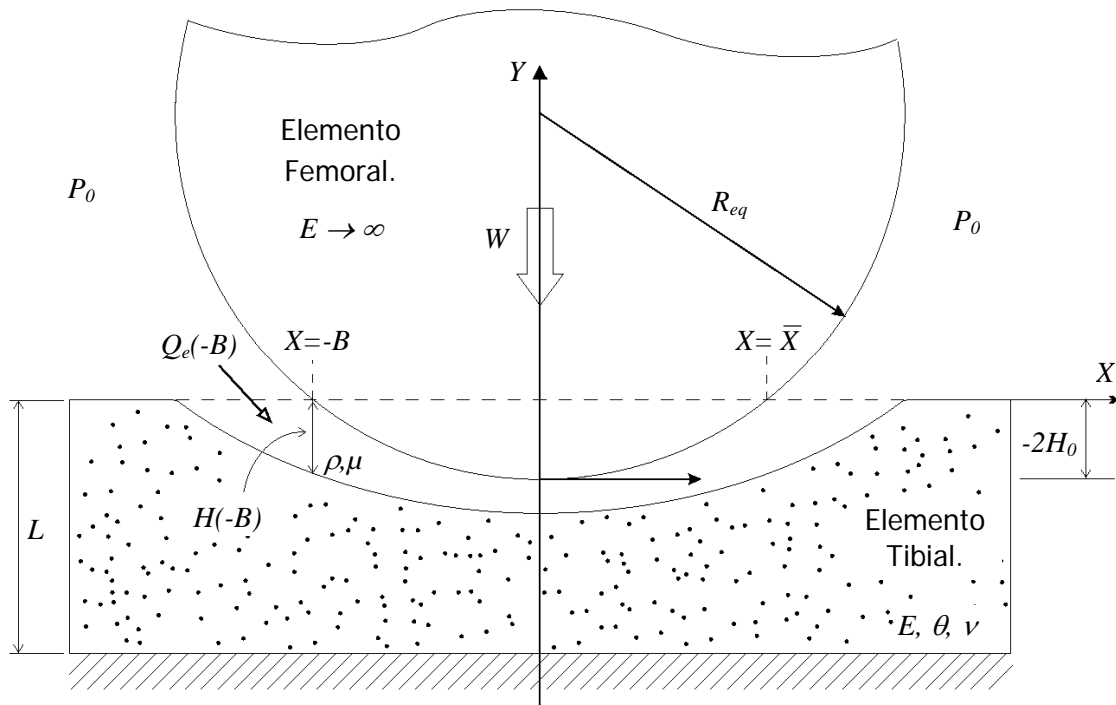


Figura 4.9: Esquema de la geometría equivalente, fuera de escala para una mejor comprensión. La línea de puntos del Elemento Tibial indica la posición de su superficie en un estado indeformado, mientras que la línea curva sólida en dicha ubicación esquematiza el material deformado debido a la acción de la presión del líquido que circula por el canal.

La ecuación (4-6) gobierna la generación de presión en todo el dominio. Debido al término $H(X)^{-3}$ en la ecuación (4-6) la presión tendrá valores elevados en las zonas donde el canal es estrecho (zona de contacto, centro de la figura 4.9). Por el contrario, en los extremos del dominio donde la altura del canal es grande la presión se reduce a los valores ambientales (P_0 , ver figura 4.9). Dicha presión ambiente será tomada como presión de referencia y considerada cero.

Para evitar que en los resultados aparezcan presiones subambientales espúreas, se adoptan las llamadas condiciones de contorno de Reynolds [9, 10]: a la entrada del contacto, donde el canal de flujo es convergente, la presión toma el valor de referencia (nulo) lejos del centro de la zona de contacto ($X = -B$) y, a la salida del contacto, donde el canal es divergente, la presión se anula en un punto cuya ubicación \bar{X} se desconoce (ver figura 4.9). Asimismo, a la salida del contacto, la presión se reduce suavemente hacia el valor ambiental para satisfacer el balance de masa en dicha región. En suma, las condiciones de contorno que debe cumplir la ecuación de Reynolds son:

$$X = -B, \quad P = 0 \tag{4-8}$$

$$X = \bar{X}, \quad P = dP / dX = 0$$

La determinación de la ubicación de \bar{X} involucra una incógnita adicional que se resuelve a través de la condición de gradiente de presión nulo en \bar{X} . Esta condición introducida en la ecuación (4-6) permite escribir:

$$VH(\bar{X}) - Q_e = 0 \quad (4-9)$$

En forma análoga, la introducción de la condición de presión nula en \bar{X} , introducida en la ecuación (4-6), permite obtener una ecuación para el caudal de entrada $Q_e(-B)$:

$$\int_{-B}^{\bar{X}} \left[\frac{H(-\infty)}{H} \right]^{n-1} \frac{VH - Q_e}{H^3} dX = 0 \quad (4-10)$$

4-3.4 Balance de masa: Ecuación del caudal

Debido a que las juntas artificiales no cuentan con un mecanismo de autolubricación, en esta sección se desarrollará la ecuación que manifieste dicho fenómeno, basando el análisis en el proceso de exudación-absorción presente en el cartílago natural, que luego podrá aplicarse a un hipotético material artificial.

Como se ha mencionado en la sección 4-3.3, la lubricación de las articulaciones diartrodiales en la fase de estancamiento de la marcha normal se realiza mediante la formación de una capa de fluido entre las dos superficies. Dicho fluido proviene de dos fuentes. Una es fluido sinovial secretado por la membrana sinovial arrastrado hacia la zona de contacto por el movimiento de las superficies articulares. La otra es fluido intersticial de composición similar al sinovial que es exudado por el cartílago debido a la deformación que éste experimenta cuando se lo somete a una carga. Cuanto mayor sea la carga, mayor será la deformación y por lo tanto mayor cantidad de fluido será exudado por el cartílago [35]. No obstante, es importante tener en cuenta que no todo el líquido atrapado en el cartílago puede ser expelido. El tamaño efectivo de los poros está entre aproximadamente 20Å y 65Å, siendo la permeabilidad muy baja, de aproximadamente 10^{-16} (m⁴/Ns) [35].

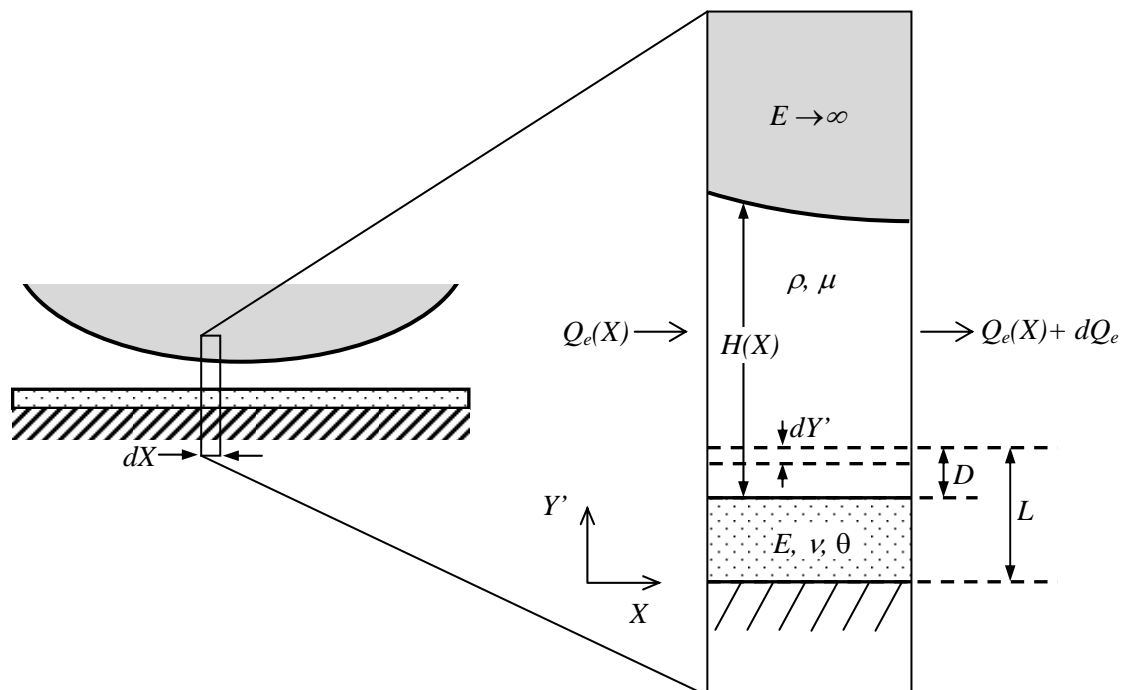


Figura 4.10: Representación del aporte de fluido al caudal por unidad de longitud axial circulante en una pequeña porción del dominio. En la figura, L es el espesor del material deformable en un estado previo a experimentar su deformación D , ρ y μ la densidad y viscosidad del líquido sinovial respectivamente, E y ν el módulo elástico y el coeficiente de Poisson del material deformable y θ el factor de exudación de este último.

A pesar de la baja permeabilidad del cartílago, el mecanismo de lubricación es tan efectivo que se logran valores de coeficiente de fricción muy bajos, de manera tal que en un estado de movimiento pleno, el 99 % de la fricción se debe a la producida en los tejidos blandos que rodean a la articulación y solo el 1% al rozamiento cartílago-cartílago [35].

Como se puede ver en la figura 4.10, entre dos secciones cualesquiera distanciadas un dX , el caudal por unidad de longitud axial (en adelante, solo caudal) entrante y saliente difiere en lo agregado o absorbido por el material debido a la compactación o expansión sufrida por las variaciones de presión. Como no hay flujo transversal, el caudal solo depende de X . Para establecer esta dependencia, se analiza el balance de masa entre dos secciones del canal muy próximas una de otra. Es sencillo ver que la diferencia de caudal entre estas secciones, es el caudal aportado o absorbido por la deformación del material en el tiempo (t) en que las partículas de fluido traspasan ambas secciones; es decir:

$$dQ_e = dY' \frac{dX}{dt} \theta = 2V\theta dY' \quad (4-11)$$

donde $2V = \frac{dX}{dt}$ y θ es el denominado coeficiente de exudación y fue definido en el capítulo 3 (sección 3-4.2). El coeficiente θ guarda una relación directa pero desconocida con la porosidad y puede medirse experimentalmente a través de ensayos de compactación convenientes. Su utilización como parámetro en el algoritmo, permite encontrar su valor más recomendable para el mejor funcionamiento de la junta.

Integrando miembro a miembro la ecuación (4-11), se tiene:

$$\int_{Q_e(-B)}^{Q_e(X)} dQ_e = 2V\theta \int_{L-D}^L dY' \quad (4-12)$$

donde $(-B)$ es una posición suficientemente alejada de la entrada del canal.

Por último, el caudal de fluido en cada posición del canal es:

$$Q_e(X) = Q_e(-B) + 2V\theta D(X) \quad (4-13)$$

La ecuación (4-13) muestra explícitamente la influencia de la exudación del material sobre el caudal circulante entre las superficies articulares. Puede observarse que en el caso de un material sin esta capacidad, el valor del coeficiente de exudación sería cero y el caudal resultaría constante en todo el dominio considerado. Si embargo, la existencia del material permeable poroso genera un caudal variable dependiendo de la deformación del mismo en la zona de lubricación.

4-4 Carga total.

La carga total que debe soportar la rodilla en la fase de estancamiento es normalmente mayor que el peso del individuo. Un estudio realizado en [38] muestra que a velocidades bajas de operación, la rodilla soporta picos de carga de más de tres veces el peso del paciente considerado. Estos picos se producen en forma cíclica a lo largo de todo el tiempo de duración de esta fase. En función de simular una situación exigente, se considerará el valor de 3 veces el peso de una persona de peso promedio (aproximadamente 75 kg de masa). Esta carga se aplica en forma constante (estado

estacionario) y su valor se mantendrá igual para la obtención de todos los resultados finales.

Anteriormente se mencionó que el campo de presiones generado en la zona de contacto por el líquido sinovial, contrarresta la carga soportada por la rodilla. De esta manera, la carga resultará de integrar la curva de presión en el dominio considerado, es decir:

$$W = \int_{-B}^{\bar{X}} P(X) dX \quad (4-$$

14)

4-5 Coeficiente de fricción.

El coeficiente de fricción calculado en este trabajo se debe exclusivamente al arrastre de líquido sinovial por el canal de lubricación. Las superficies articulares se considerarán lisas sin rugosidades, entre las cuales existirá en todo momento una película de fluido que las mantiene separadas. Por más pequeña que sea esta película lubricante, los sólidos no llegan a tocarse en los resultados teóricos, aunque el espesor lubricante permitirá predecir el posible contacto directo entre los materiales de la junta.

De esta manera, el valor del coeficiente de fricción no incluye el efecto de abrasión entre las superficies. No obstante, tendremos en cuenta estas simplificaciones en la discusión de los resultados.

La fuerza de fricción sobre la superficie del material deformable se obtiene de integrar los esfuerzos cortantes que genera el fluido sobre la misma a lo largo del dominio del problema. La expresión del esfuerzo de corte se obtiene de aplicar la ecuación (4-3) a la ecuación (A-1) del apéndice A en la cual debe reemplazarse el gradiente de presiones con la expresión (4-6), resultando en la siguiente ecuación [13]:

$$\tau_{1,2} = \mp 12 \left[\frac{H(-B)}{H(X)} \right]^{n-1} \frac{VH(X) - Q_e(X)}{H(X)^2} - \left[\frac{H(-B)}{H(X)} \right]^{n-1} \frac{2V}{H(X)} \quad (4-15)$$

donde los subíndices 1 y 2 hacen referencia a las superficies polimérica (-) y metálica (+) respectivamente.

Integrando la ecuación **(4-15)** se obtiene la fuerza de fricción sobre la superficie del material:

$$F_{YX} = \int_{-B}^{\bar{X}} \tau_{YX} dX \quad \text{(4-16)}$$

Finalmente, el coeficiente de fricción se define como el cociente entre las fuerzas de fricción que genera el líquido circulante sobre las superficies y la carga considerada sobre la articulación:

$$\phi = \frac{F_{YX}}{W} \quad \text{(4-17)}$$

CAPÍTULO 5

Modelo adimensional

5-1 Fundamentos.

Este capítulo está dedicado a mostrar el resumen del conjunto de ecuaciones finales que forman el modelo simplificado de prótesis de rodilla, trabajando en movimiento pleno en la fase de estancamiento de la marcha y bajo la acción de una carga. Como pudo observarse a lo largo del desarrollo del modelo, se han realizado simplificaciones para representar la situación real ya que, como en todo proceso de modelización, es muy complicado y a veces resulta imposible tener en cuenta todos los aspectos físicos y geométricos reales. No obstante, las simplificaciones están fundamentadas en función de las características particulares del fenómeno, y utilizadas en trabajos anteriores publicados en la literatura internacional [10 - 15].

5-2 Adimensionalización.

Mediante la solución de las ecuaciones en forma adimensional, pueden representarse innumerables situaciones dimensionales, con la consecuente generalización de los resultados obtenidos (se pueden comparar situaciones dimensionales que difieran en varios órdenes de magnitud). Al obtener resultados numéricos, las variables adimensionales son más sencillas de manejar, pudiendo luego ser dimensionalizadas para entender la verdadera magnitud de las variables en juego.

Para este trabajo se utilizaron las variables características de la tabla 5.I para el proceso de adimensionalización de las ecuaciones. Los valores de los parámetros involucrados se listan en la tabla 5.II.

Todas las variables del modelo fueron hasta aquí escritas con letras mayúsculas representando una situación dimensional (excepto la variable tiempo, para no ser confundida con tensión). A partir de la definición de las variables características, en adelante se escribirán las variables adimensionales en letras minúsculas, para mayor claridad. Por ejemplo, la coordenada X a la entrada del canal se simbolizó

con la letra B , y en lo sucesivo (siempre que estemos mostrando magnitudes adimensionales) la escribiremos como b , que resulta de $b=B/(R L)^{1/2}$.

Tabla 5.1: Variables características para el proceso de adimensionalización.

<i>Denominación</i>	<i>Variable característica</i>
Presión característica	$\frac{\mu_o V}{L} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2} 10^5$
Longitud característica para adimensionalizar el dominio (eje X)	$(R L)^{1/2}$
Longitud característica para adimensionalizar la altura del canal y las deformaciones.	L
Caudal característico por unidad de longitud axial.	$2 V L$
Viscosidad característica del fluido.	μ_o

5-3 Resumen de las hipótesis simplificatorias.

La figura 5.1 indica (fuera de escala para mayor claridad) la geometría equivalente del contacto cargado, donde la forma original puede representarse por un cilindro en contacto longitudinal sobre un plano. El radio del cilindro equivalente es tal que su curvatura es igual a la suma de la curvatura de los elementos originales. Se considerará que la curvatura de la prótesis en la dirección del eje de la articulación (perpendicular a la hoja) es lo suficientemente pequeña como para ser despreciada.

El modelo de ecuaciones finales que debe ser resuelto, ha surgido del planteo de las ecuaciones de conservación sobre el esquema de la figura 5.1. Para encontrar la distribución de presión en el fluido y la forma del canal de flujo, que es producto de la deformación de los sólidos en contacto, se plantearon las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento para la fase líquida y se consideró la ecuación de equilibrio para el sólido poroso deformable.

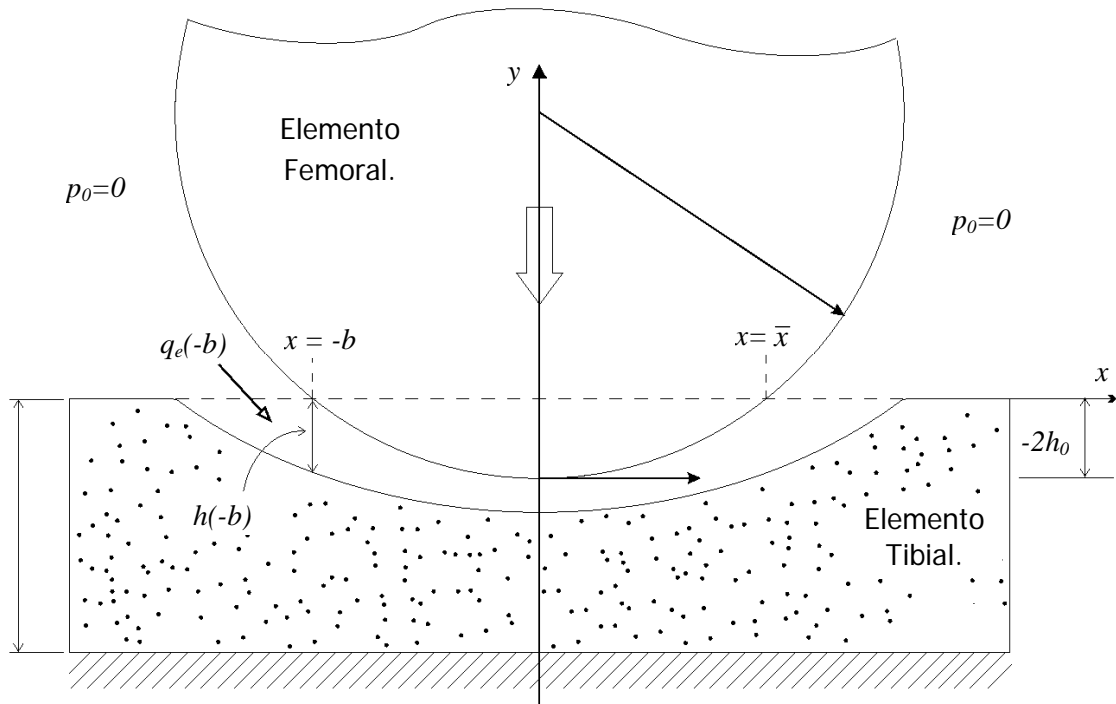


Figura 5.1: Reproducción de la figura 4.8 para el caso de variables adimensionales, representando del contacto equivalente fuera de escala. Figura confeccionada por el autor de este trabajo para la publicación citada en la referencia [13].

El resumen de las hipótesis simplificadoras asumidas a lo largo de los capítulos 2, 3 y 4 es el siguiente:

- Aproximación de lubricación ($h(-b) \ll b$) y fluido incompresible.
- Fluido no Newtoniano (pseudoplástico) modelado como ley de potencia.
- Flujo estacionario, unidireccional, laminar y Couette dominante.
- Componente femoral indeformable.
- Componente tibial viscoelástico en estado de deformación plana y con capacidad de exudar o absorber fluido por compactación o expansión.
- Flujos internos (en dirección del eje de la rodilla) despreciables.
- Zona de carga ($\approx 2 B$) mucho mayor que el espesor del material deformable (L).
- Rugosidad superficial despreciable.
- Temperatura constante.

Estas hipótesis junto con los análisis realizados en los capítulos mencionados, derivan en el siguiente conjunto de ecuaciones adimensionales, que son las que se resolverán computacionalmente.

5-4 Ecuaciones a resolver.

a) **Ecuación del canal de lubricación:** Surge de adimensionalizar la ecuación (2-6):

$$h(x) = -2h_0 + x^2 + d(x) \quad (5-1)$$

donde $2h_0 = 2H_0 / L$ es el cruzamiento de los sólidos en estado indeformado y $d(x) = D(X) / L$ es la deformación local adimensional.

b) **Ecuación de la deformación del material sobre el componente tibial:** Surge adimensionalizando las ecuaciones (3-20) y (3-24). Para la primera, se arriba a la siguiente expresión:

$$d(x) = N_e \left(p(x) - \int_{-b}^x \frac{dp}{ds} e^{-\frac{(x-s)}{ND}} ds \right) \quad (5-2)$$

donde $N_e = \mu_0 V / [L E'' (R / L)^{1/2}]$ es un número adimensional que relaciona las fuerzas viscosas del fluido y las fuerzas elásticas del material (E'' fue definido en el capítulo 3) y $ND = \eta'' \alpha V / [L E'' (R / L)^{1/2}]$ relaciona las fuerzas viscosas del material y las fuerzas elásticas del mismo (η'' fue definido en el capítulo 3).

Para el sólido estándar lineal, la inclusión del resorte en serie con el modelo de Voigt lleva a la siguiente ecuación que surge de adimensionalizar la ecuación (3-24):

$$d(x) = N_e^1 p(x) + N_e^2 \left(p(x) - \int_{-b}^x \frac{dp}{ds} e^{-\frac{(x-s)}{ND}} ds \right) \quad (5-3)$$

Donde N_e^1 es el número elástico para el resorte 1 y N_e^2 para el resorte 2 de la figura 3.7 del capítulo 3.

c) Ecuación de lubricación de Reynolds modificada (forma integral): Surge adimensionalizando la ecuación (4-7):

$$p(x) = 12 \times 10^{-5} n \int_{-b}^x \left[\frac{h(-\infty)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{h - 2q_e}{h^3} dx \quad (5-4)$$

donde se han definido la presión y el caudal adimensional en la tabla 5-1. Las condiciones de contorno adimensionales quedarán entonces:

$$x = -b, p = 0 \quad (5-5 a)$$

$$x = \bar{x}, p = dp / dx = 0 \quad (5-5 b)$$

La satisfacción de las condiciones de borde (ecuaciones (4-8)) aplicadas a la ecuación (4-7) y su derivada, permite obtener las siguientes ecuaciones:

$$0 = \int_{-b}^{\bar{x}} \left[\frac{h(-b)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{h - 2q_e}{h^3} dx \quad (5-6)$$

$$h|_{\bar{x}} = 2q_e|_{\bar{x}} \quad (5-7)$$

d) Ecuación del caudal circulante por el canal: Surge de adimensionalizar la ecuación (4-13), resultando en la siguiente expresión:

$$q_e(x) = q_e(-b) + \theta d(x) \quad (5-8)$$

e) Carga de contacto: Adimensionalizando la ecuación (4-14), nos queda:

$$w = \int_{-b}^{\bar{x}} p(x) dx. \quad (5-9)$$

f) Factor de fricción: Las fuerzas tangenciales de fricción $F_{1,2}$, por unidad de longitud axial en cada una de las superficies articulares, están dadas por la integral del esfuerzo cortante τ_{yx} en toda la extensión del contacto. Adimensionalizando los esfuerzos cortantes (ver ecuación (4-15)) con la presión característica, se tiene:

$$f_{1,2} = \int_{-b}^{\bar{x}} \tau_{1,2} dx \quad (5-10)$$

El esfuerzo cortante se determina aproximando el canal en cada posición como dos

pequeñas placas paralelas separadas por una distancia igual a la altura local del canal.

En forma adimensional:

$$\tau_{1,2} = \mp \frac{1}{2} N_{FR} \left[\frac{h(-b)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{h-2q_e}{h^2} - \left[\frac{h(-b)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{2N_{FD}}{h} \quad (5-11)$$

donde $N_{FR} = 12 (L/R)^{1/2} 10^{-5}$ y $N_{FD} = N_{FR}/12$

Por último, se define el factor de fricción ϕ en cada superficie articular como el cociente entre la fuerza de fricción y la carga actuante sobre el contacto, es decir:

$$\phi_{1,2} = \frac{F_{1,2}}{W} = \frac{f_{1,2}}{w} \quad (5-12)$$

5-5 Parámetros físicos representativos.

La resolución numérica del conjunto de ecuaciones anteriores requiere de la definición de los valores de los parámetros funcionales de una rodilla en el estado de movimiento pleno, como así también de los parámetros materiales y geométricos de los elementos modelados. La siguiente tabla muestra dichos valores. Aquellos obtenidos de la bibliografía están referenciados dentro de la misma tabla, mientras que los demás son parámetros variables o propuestos en este trabajo en función de las hipótesis simplificadoras, pero que concuerdan con datos utilizados en publicaciones anteriores.

Debido al desconocimiento previo y a la intención de utilizarla como parámetro de continuación, la viscosidad del material (η) no se reporta como un dato en la tabla 5.11, cuyo rango dependerá del rango de variación de ND . No obstante, el interés de este trabajo es investigar los posibles efectos de la viscosidad del material a través de la variación de ND y no el valor específico de la misma.

En este capítulo se han obtenido las ecuaciones adimensionales ya que es la forma en que fueron implementadas en el código numérico. Pero para una mejor comprensión de los resultados, la exposición del capítulo de resultados se realizará en forma dimensional debido a que se consideró la mejor forma de poder contrastarlos con las posibles aplicaciones prácticas

Tabla 5.II: Parámetros físicos y operativos de una articulación de rodilla, extraídos de las referencias citadas en la columna *Denominación*.

<i>Denominación</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Magnitud</i>
Radio del cilindro equivalente [19, 39]	R	0.700 m
Velocidad tangencial media de las superficies en contacto [19, 39]	V	1.91×10^{-2} m/s
Viscosidad del fluido sinovial a la entrada del canal [11, 12]	$\mu(-B) = \mu_0$	1.00 Pa s
Módulo elástico del material deformable	E	2.0×10^7 Pa, 5.0×10^8 Pa
Exponente de viscosidad del fluido lubricante [13]	n	0.60
Coefficiente de exudación	θ	0.00 – 0.016
Coefficiente de Poisson del material deformable [19, 39]	ν	0.40
Espesor del material deformable [13]	L	1.00×10^{-3} m
Posición de ingreso a la zona de contacto lubricado [13]	$-B$	-3.97×10^{-2} m
Carga sobre el contacto [38]	W	7.36×10^4 N/m
Parámetro viscoelástico	ND	0.00 - 6.00

CAPÍTULO 6

Método de resolución

6-1 Método.

6-1.1 Introducción

Como se pudo ver en el capítulo anterior, la resolución analítica y numérica de las ecuaciones del modelo presentan un alto grado de complejidad debido a:

- El fuerte acoplamiento que existe entre la ecuación de Reynolds modificada y las ecuaciones de deformación.
- La presencia de la frontera libre, lo cual genera el desconocimiento del dominio en el cual deben resolverse numéricamente las ecuaciones.
- La no linealidad de la ecuación de Reynolds.

Para la solución de estos problemas se han utilizado, en otros trabajos, algoritmos computacionales que se basan en el desacoplamiento de las ecuaciones y en fuertes hipótesis predictivas de los resultados que permiten inicializar adecuadamente dichos algoritmos para su posterior convergencia. No obstante, estos métodos de cálculo son aplicables en ciertos rangos de cargas, para los cuales se construye específicamente el algoritmo y su inicialización [9].

Para resolver numéricamente el modelo de este trabajo, se utilizó un algoritmo previamente desarrollado por Di Paolo [9], implementado con una técnica robusta de resolución computacional basado en:

1. Discretización de las ecuaciones por el método de elementos finitos y los residuos ponderados de Galerkin.
2. Solución simultánea de las ecuaciones por medio del método de Newton, involucrando en cada iteración la determinación del dominio del problema (ubicación de la frontera libre).

3. Discretización adaptable en función de cada nueva posición de la frontera libre \bar{x} y de una distribución nodal inicial.
4. Continuación paramétrica con control del paso del parámetro utilizado.

Esta técnica computacional permite resolver numéricamente las ecuaciones en forma simultánea y ha demostrado elevadas aptitudes para explorar amplios rangos de valores en los parámetros que definen al sistema.

En esta sección se expondrán en forma sintética las bases generales del método numérico utilizado. Debido a que la novedad de este trabajo es la inclusión de un modelo viscoelástico de deformación y no el desarrollo del método numérico, no entraremos en detalle sobre dicho método el cual, además de ser una técnica muy utilizada en diversos trabajos previos [9 - 16], ya fue desarrollado y presentado por Di Paolo [9]. No obstante, la inclusión de las nuevas ecuaciones en el código previamente desarrollado, ha requerido una tarea de importante esfuerzo y el conocimiento del método completo.

6-1.2 Breve descripción de la técnica numérica

El *método de elementos finitos* (MEF) tiene por objeto transformar el sistema de ecuaciones diferenciales, integrales o integrodiferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas más sencillas de resolver computacionalmente, donde las incógnitas de las mismas son los valores de las variables del sistema original en puntos seleccionados del dominio espacial denominados *nodos* (figura 6.1). Para ello, el dominio donde se definen las ecuaciones originales, es dividido en porciones colindantes denominados *elementos* en los cuales se aproximan las variables por medio de funciones de aproximación polinómicas conocidas.

Los nodos mencionados se ubican en las fronteras de cada elemento y puede también haber algunos en el interior del mismo cuando las funciones de aproximación deban ser de segundo orden en adelante, lo cual no sucede en este trabajo.

Si se consideran los valores de las variables en los nodos, y utilizando funciones polinómicas de aproximación que valgan 1 en un nodo y 0 en los restantes nodos del dominio (ver figura 6.1), en cada porción podrían expresarse las variables del sistema como una expansión en serie de las funciones de aproximación y los valores nodales como coeficientes de dicha serie.

$$u \cong \bar{u} = \sum_j \bar{u}(j) \phi(j), \quad j = 1, \dots, NN \quad (6-1)$$

Donde $\phi(j)$ son las funciones de aproximación (también denominadas funciones de forma o de prueba) y los $\bar{u}(j)$ son los valores nodales de la función de aproximación que constituyen las incógnitas a obtener en el sistema de ecuaciones algebraicas producto de la discretización de las ecuaciones gobernantes. Para este problema, las $\bar{u}(j)$ serían por ejemplo los valores de la presión en cada nodo. Las expresiones matemáticas de las funciones de forma en un elemento genérico i cualquiera son (ver figura 6.2):

$$\phi(i) = \frac{X(i+1) - X}{X(i+1) - X(i)}, \quad \phi(i+1) = \frac{X - X(i)}{X(i+1) - X(i)} \quad (6-2)$$

Generalmente, es conveniente trabajar en el elemento con coordenadas locales, es decir:

$$\varepsilon = \frac{X - X(i)}{X(i+1) - X(i)} \quad (6-3)$$

Con las coordenadas locales, las funciones de prueba (o de forma) tienen la siguiente expresión:

$$\phi(i) = 1 - \varepsilon, \quad \phi(i+1) = \varepsilon \quad (6-4)$$

Uno de los métodos más utilizados para minimizar el error de la ecuación (6-1), es el método de los *residuos ponderados de Galerkin*. Mediante este método se minimiza el error (haciéndolo cero) ponderando el residuo de la ecuación en la cual se encuentra la incógnita distribuída a resolver con la misma función de aproximación, e integrando en cada elemento, para que se satisfaga la ecuación original junto con las condiciones de frontera para cada elemento. Esto es:

$$Rp = \int_{\Omega} \phi(i) R(L\bar{u} + A) d\Omega = 0 \quad (6-5)$$

donde:

Rp : Residuo ponderado.

Ω : Dominio en el cual se resuelven las ecuaciones.

$\phi(i)$: Función de peso (iguales a las funciones base o de forma en el método de Galerkin).

R : Residuo. Son simplemente las ecuaciones a discretizar (por ejemplo la ecuación de Reynolds) igualadas a cero.

L : Operador diferencial, integral o integrodiferencial.

A : Término independiente.

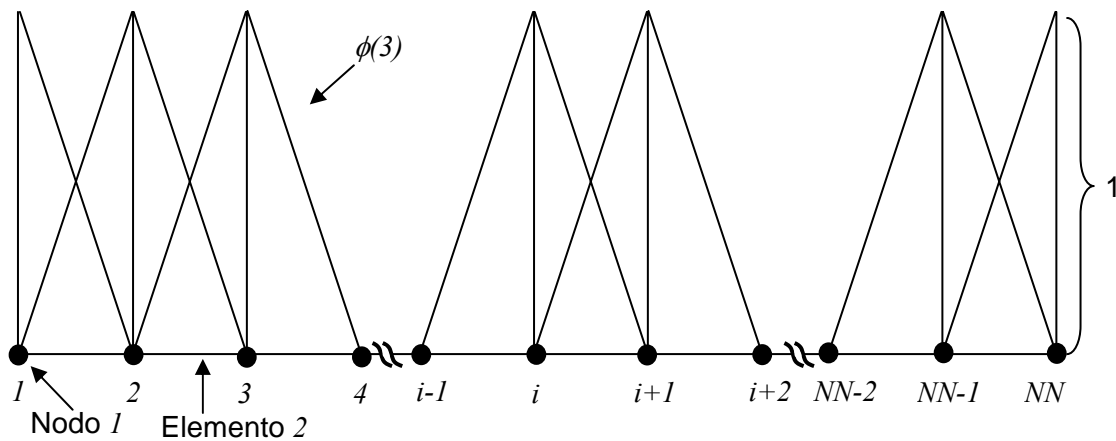


Figura 6.1: Esquema de la discretización del dominio y las funciones de forma para el MEF. Cada función de forma tiene valor 1 en el nodo correspondiente y 0 en los restantes, ocupando dos elementos.

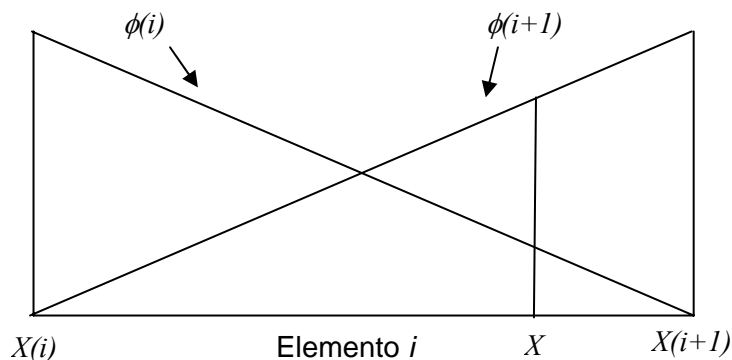


Figura 6.2: Representación esquemática de un elemento genérico i y las funciones de forma distintas de cero en el mismo.

Debe destacarse que una de las ecuaciones que formarán un residuo es la ecuación de Reynolds, la cual es altamente no lineal. En problemas no lineales, el conjunto de

ecuaciones algebraicas debe resolverse iterativamente hasta conseguir que la diferencia de los valores nodales de las variables entre dos iteraciones sucesivas, no excedan cierto error admisible (convergencia). Una vez lograda la convergencia, los valores nodales obtenidos constituyen una solución numérica aproximada del sistema de ecuaciones original.

Se necesita entonces un método iterativo para encontrar la solución que está formada por las raíces de las funciones residuo que hay que aproximar a cero. El método utilizado para este problema en particular es el *método de Newton* (cuyo detalle puede encontrarse en [9]), que se explicará sintéticamente a continuación.

Si se expanden en serie de Taylor los residuos ponderados de la iteración $N+1$ alrededor de la solución de la iteración N y se desprecian los términos de orden ≥ 2 , se tiene:

$$\underline{Rp}^{N+1} = \underline{Rp}^N + [\underline{U}(N+1) - \underline{U}(N)] \frac{\partial \underline{R}^N}{\partial \underline{U}} + (\text{Términos de orden } \geq 2, \text{ despreciables}) = 0 \dots\dots$$

(6-6)

donde:

\underline{Rp}^N : Vector de residuos ponderados en la iteración N .

$\underline{U}(N)$: Vector solución para la iteración N .

$$\frac{\partial \underline{R}^N}{\partial \underline{U}} = \underline{J}(N) : \text{Matriz jacobiana cuyas componentes son } J(i, j) = \frac{\partial R(i)}{\partial U(j)}.$$

La igualación a 0 de la ecuación (6-5) se debe a que los residuos deben tender a 0 para encontrar el valor de las variables del vector solución \underline{U} que satisfacen las ecuaciones del sistema para un conjunto de parámetros definido. De esta manera, la ecuación (6-5) resulta en:

$$[\underline{U}(N+1) - \underline{U}(N)] \bullet \underline{J}(N) = - \underline{Rp}^N \quad (6-7)$$

Entonces, en cada iteración se resuelve un sistema de ecuaciones como el (6-7) donde se hallan los valores con los que debe incrementarse la solución de la iteración anterior (iteración N) para encontrar la solución actual (iteración $N+1$), es decir se puede despejar de (6-7) $[\underline{U}(N+1) - \underline{U}(N)]$, a lo cual será denominado $\Delta \underline{U}$.

La solución encontrada en cada convergencia del método de Newton corresponde a un conjunto de valores de los parámetros del modelo, esto es, la carga aplicada, el módulo elástico, la viscosidad del material, el coeficiente de exudación, etc. No obstante, para obtener una solución deseada no siempre es posible comenzar con el valor correspondiente de los parámetros. Por ejemplo, si intentamos encontrar una solución para una carga elevada, en virtud de lograr convergencia en el método de Newton tenemos que comenzar con valores muy pequeños de carga asegurando que el método de Newton convergirá rápidamente para los valores propuestos inicialmente para las variables. Para llegar al valor final de carga deseada, debemos incrementar sucesivamente el parámetro (carga en este caso), lo cual en este trabajo se implementa utilizando la técnica de *continuación paramétrica de orden cero*.

En el proceso de continuación paramétrica de orden cero, la inicialización de las variables para el próximo valor del parámetro a variar, se obtiene utilizando los valores del paso anterior de dicho parámetro. Supongamos una curva realizada con la norma de los resultados definida como:

$$\|\underline{U}\| = \left\{ \sum_i [U(i)]^2 \right\}^{1/2} \quad (6-8)$$

La figura 6.3 muestra que para alcanzar los nuevos valores de las variables obtenidos al resolver numéricamente el sistema para el valor del parámetro que estamos modificando (como ser viscosidad del material, módulo elástico, etc), comenzamos con la solución obtenida para el valor anterior de dicho parámetro, y luego el método de Newton dirige la solución hacia la que satisface el sistema de ecuaciones (minimiza los residuos ponderados), lo cual constituye la solución buscada. El error de esta solución, se puede evaluar calculando la norma de los residuos definida como:

$$\|\underline{Rp}\| = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{NN} [Rp(i)]^2}{NN} \right\}^{1/2} \quad (6-9)$$

La figura 6.3 ilustra además que el proceso de continuación de orden cero requiere un especial cuidado en el valor del salto del parámetro ($PPI-PP_0$) sobre el cual se realiza continuación paramétrica, ya que si el mismo es muy grande, la nueva solución del sistema para el valor PPI (1 en la gráfica) podría estar muy alejada de la inicialización

de las variables (proveniente de la solución \mathcal{O}), y el método de Newton podría requerir muchos pasos e inclusive divergir.

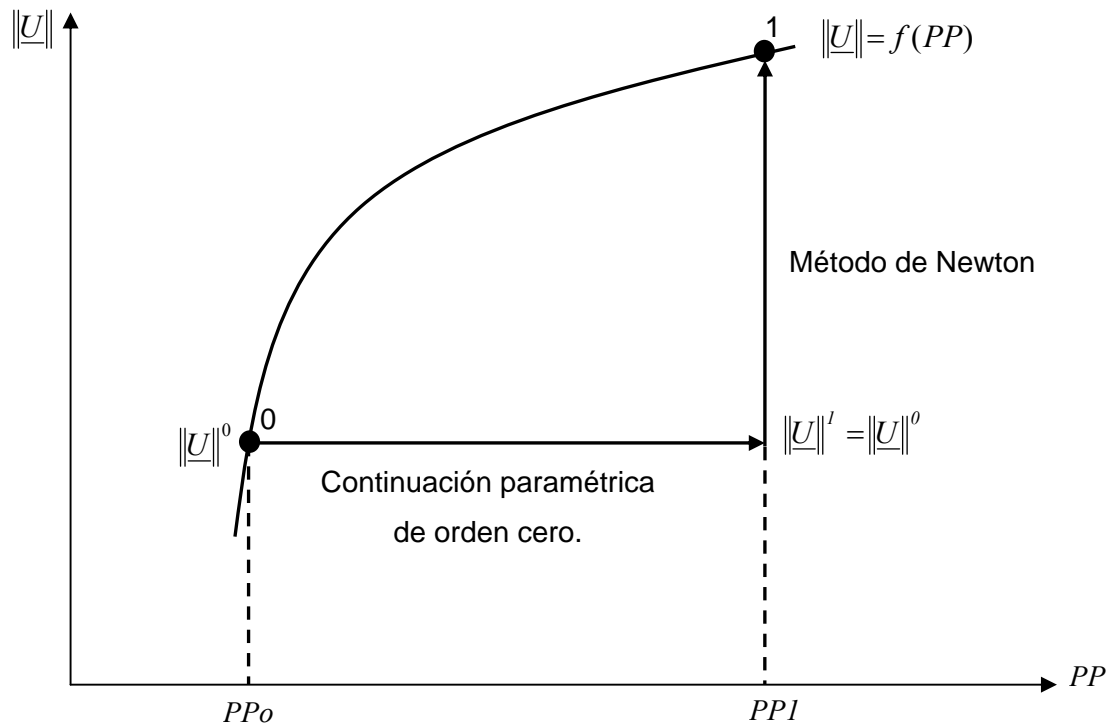


Figura 6.3: Representación gráfica de acción del Método de Newton y de la continuación paramétrica en la determinación de una solución.

Sintéticamente, la implementación del método completo se presenta en la figura 6.4 como diagrama de flujo. La sucesión de eventos de dicha figura se describe a continuación:

1. Se inicializan las variables incógnitas y el valor del parámetro. Por ejemplo, se desea llegar a la carga W y no se cuenta con resultados previos. Entonces, se inicializan las variables (por ejemplo: presión) en valores muy bajos y el valor de la carga inicial con un valor muy pequeño (En este caso, la carga es el parámetro de continuación).
2. Se evalúan los residuos ponderados integrando numéricamente (6-5) para las ecuaciones del sistema sobre las que se calculan residuos. Debido a que las funciones de prueba son válidas localmente, esta integración se realiza en cada elemento. Pero como las funciones de prueba son nulas fuera del intervalo elemental, entonces la integral (6-5) solo se evalúa en los elementos donde la función ponderante y las funciones de prueba de las ecuaciones son distintas de cero.

3. Se genera la matriz jacobiana.
4. Mediante (6-7), se calcula ΔU .
5. Se evalúa la norma de ΔU . Si es menor a un valor determinado (por ejemplo 10^{-6}) entonces el método de Newton ha convergido para el valor actual del parámetro y el método avanza mediante continuación hacia el próximo valor, incrementando o decrementando al parámetro. Si el método no converge, se chequea si el número de iteraciones no excede un cierto valor, para lo cual el método podría estar divergiendo. Si hubo convergencia, la anterior solución es utilizada para inicializar las variables en un nuevo ciclo de Newton.
6. Una vez que converge el método de Newton, si el valor del parámetro no ha llegado a su valor final, se incrementa (o decrementa) el mismo. Aquí se realiza una impresión de resultados en dos archivos de texto.
7. El programa termina su ejecución si el parámetro llegó a su valor final o si el número de iteraciones superó un valor determinado.

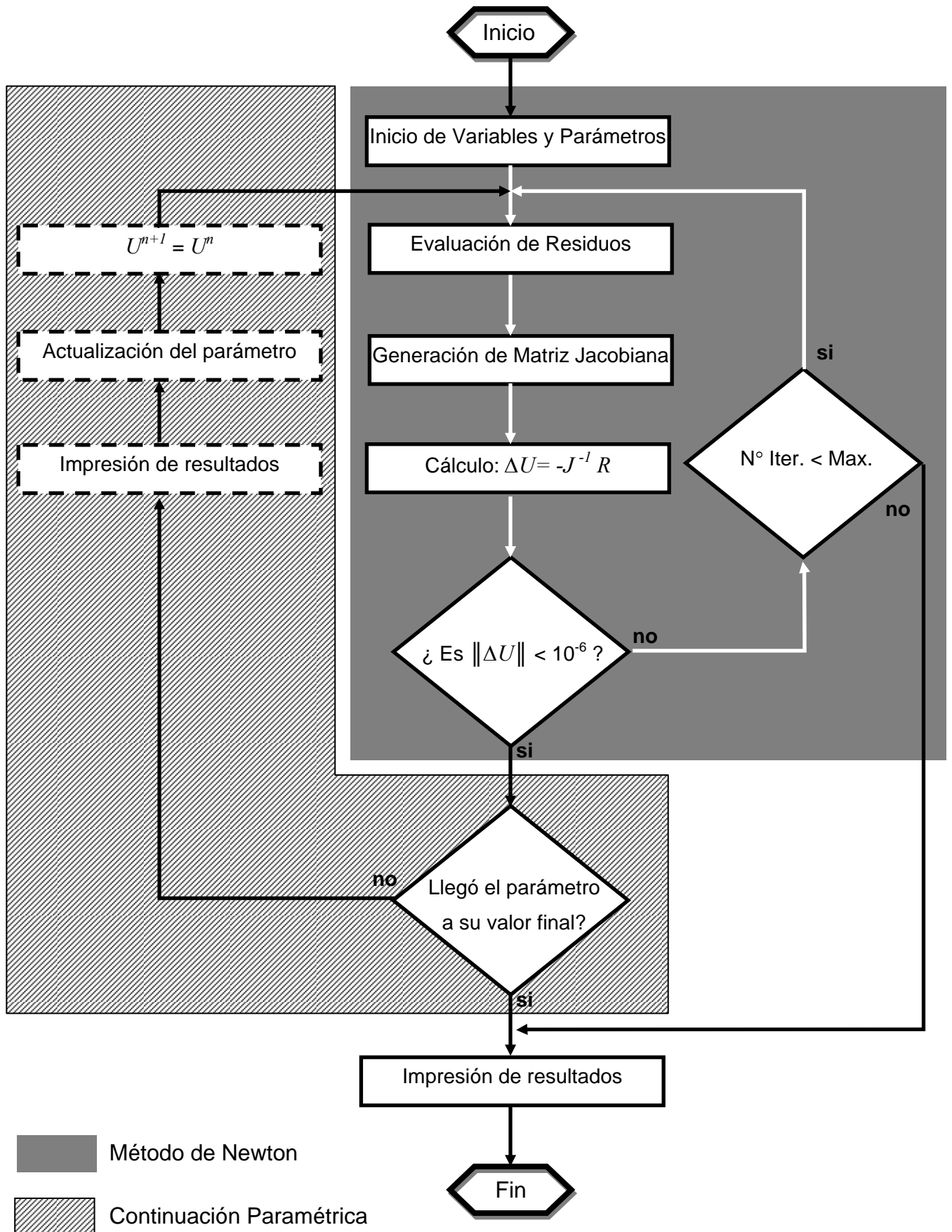


Figura 6.4: Diagrama de flujo que describe el procedimiento numérico en líneas generales.

6-1.3 Residuos

Las ecuaciones sobre las cuales se calculan los residuos son las siguientes:

- Ecuación de Reynolds modificada (ecuación (5-4)): Es utilizado para determinar el valor de la presión en cada nodo.
- Ecuación (5-6): Se utiliza para el cálculo del caudal de entrada al canal de lubricación ($q(-\infty)$), el cual es a priori desconocido.
- Ecuación (5-7): Se utiliza para el cálculo de la ubicación de la frontera libre (\bar{x}).
- Ecuación (5-9): Se utiliza para el avance en el entrecruzamiento ($yc=2h_0$) entre los elementos indeformados.

A continuación se expondrá en forma genérica el residuo para cada uno de los anteriores ítems:

- Residuo de la ecuación de Reynolds modificada: Se plantea sobre la siguiente ecuación:

$$0 = p(x) - 12 \times 10^{-5} n \int_{-b}^x \left[\frac{h(-\infty)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{h - 2q_e}{h^3} dx \quad (6-10)$$

Realizando la siguiente expansión: $EH(j) = \sum \frac{h(j) - 2q_e(j)}{h(j)^3} \phi(j)$, el residuo

ponderado $Rp_i(p)$ queda de la siguiente manera:

$$Rp_i(p) = \int_{\Omega} \phi(i) \left(\sum_j p(j) \phi(j) d\Omega - 12 \times 10^{-5} n \int_{\Omega} \phi(i) \left[\int_{-b}^x \sum_j \left[\frac{h(-\infty)}{h(j)} \right]^{n-1} EH(j) \phi(j) dx \right] d\Omega \right) \quad (6-11)$$

Este residuo genera las primeras NN componentes del vector Rp .

- Residuo ponderado para resolver el caudal circulante. Se realiza sobre la siguiente ecuación:

$$0 = \int_{-b}^{\bar{x}} \left[\frac{h(-b)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{h - 2q_e}{h^3} dx \quad (6-12)$$

Como este residuo no se calcula en cada nodo, no es necesario aplicar el método de Galerkin, y solo debe integrarse la ecuación anterior. Entonces el residuo $NN+1$ queda:

$$Rp_{NN+1}(Q) = \int_{-b}^{\bar{x}} \sum_j \left[\frac{h(-b)}{h(j)} \right]^{n-1} EH(j) \phi(j) dx, \text{ o también:}$$

$$Rp_{NN+1}(Q) = \sum_j \left[\frac{h(-b)}{h(j)} \right]^{n-1} EH(j) \int_{-b}^{\bar{x}} \phi(j) dx \quad (6-13)$$

c) Residuo ponderado para resolver la ubicación de la frontera libre. Se realiza sobre la siguiente ecuación:

$$h|_{\bar{x}} - 2q_e|_{\bar{x}} = 0 \quad (6-14)$$

Al igual que el caso anterior, como los valores se calculan sobre un solo nodo (NN) ubicado en la localización de la frontera libre, este residuo no requiere del método de Galerkin, quedando el residuo $NN+2$ de la siguiente manera:

$$Rp_{NN+2}(\bar{x}) = h(NN) - 2q_e(NN) \quad (6-15)$$

d) Residuo ponderado para la determinación del entrecruzamiento de los elementos en un hipotético estado indeformado en el centro del contacto. Para ello se calcula el residuo sobre la ecuación de la carga. Esto es, debido a que el acercamiento (estrechamiento del canal) implica un aumento de la carga, se utiliza esta ecuación para este residuo, la cual se escribe a continuación:

$$w - \int_{-b}^{\bar{x}} p(x) dx = 0 \quad (6-16)$$

Al igual que los incisos b) y c), no se utiliza Galerkin para generar este residuo. Entonces, el residuo $NN+3$ queda de la siguiente manera:

$$Rp_{NN+3}(yd) = w - \sum_j p(j) \int_{-b}^{\bar{x}} \phi(j) dx \quad (6-17)$$

6-1.4 Discretización adaptable

El manejo de la frontera libre \bar{x} y la adaptabilidad de la discretización nodal en función de ella, consiste en una implementación unidimensional del método de los spines creado para la localización de superficies libres. En este caso, los nodos cuya posición se varía en cada iteración, son los que se encuentran desde el centro del dominio hasta la frontera libre mientras que los restantes se mantienen fijos (ver figura 6.5). La metodología de solución descrita fue también empleada por Di Paolo et al. [13, 15, 16] para la solución del problema de contacto lineal en sus formulaciones elastohidrodinámica y termo-elastohidrodinámica. En este caso, como ya se explicó anteriormente, se utiliza el residuo (6-14).

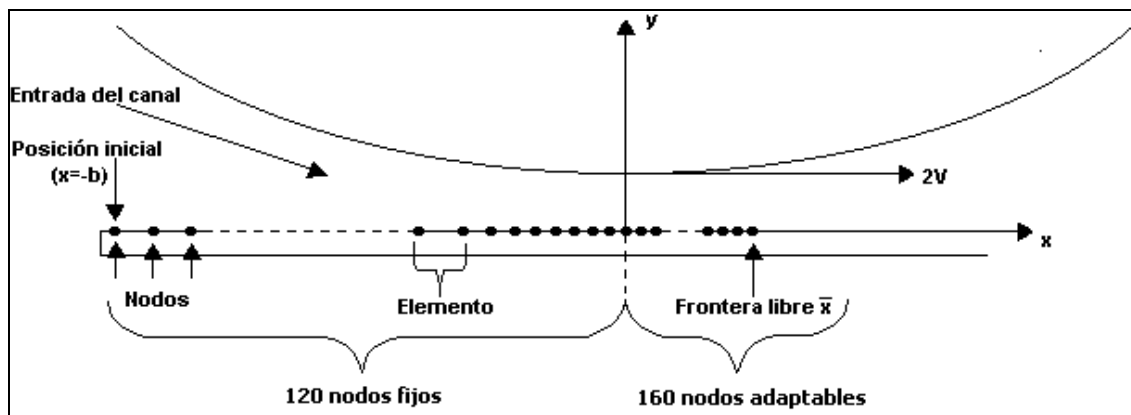


Figura 6.5: Representación de la distribución nodal a lo largo del dominio. Ejemplo para una discretización de 280 nodos.

La determinación de la frontera libre es importante porque permite aplicar la condición de gradiente de presión nulo descrita en el capítulo 4, sin la cual aparecerían presiones subambientales que darían lugar al fenómeno de cavitación observado en cojinetes industriales pero no en rodillas humanas.

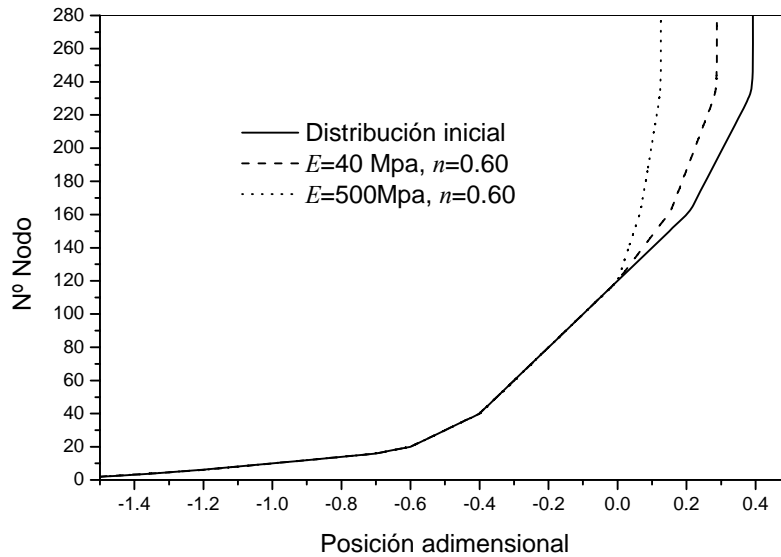


Figura 6.6: Variación de la ubicación de la frontera libre.

Por ejemplo, para una discretización con 280 nodos (discretización para la cual se realizaron las primeras pruebas), la figura 6.6 muestra una distribución nodal para tres conjuntos de valores diferentes de los parámetros, evidenciando la adaptabilidad del dominio a cada situación particular requerida.

Desde $x = 0.0$ a $x = \bar{x}$, la densidad de nodos va en aumento casi exponencial para describir adecuadamente la zona de descompresión en la cual el modelo de deformación requiere una fina discretización para definir correctamente el canal de flujo [13]. La inclusión de la viscoelasticidad en la ecuación de deformación, ha requerido una discretización más fina de la malla mostrada en la figura 6.5 en ciertos segmentos dentro del dominio. Ante ciertos valores del parámetro viscoelástico $ND > 0.00$, ha sido necesario refinar la zona de descompresión, ya que en la misma se manifiestan oscilaciones carentes de sentido físico (ver figura 6.7). Por otro lado, como se verá en los resultados, existe una zona a la entrada del canal de lubricación en la cual se desarrollan gradientes de presión muy elevados comparados con los resultados del modelo elástico. Como estos gradientes tienen sentido físico, se consideró pertinente refinar la malla en esta localización para describir adecuadamente los elevados cambios y corroborar al mismo tiempo que los mismos no se deben a errores numéricos. La necesidad de efectuar los refinamientos mencionados implicó elevar el número de nodos de todo el dominio para tener una discretización suficientemente uniforme, ya que dos elementos contiguos con dimensiones muy diferentes conllevan a la aparición de oscilaciones. La distribución nodal final requirió 700 nodos, de los cuales 500 pertenecen a la zona fija y 200 a la zona móvil.

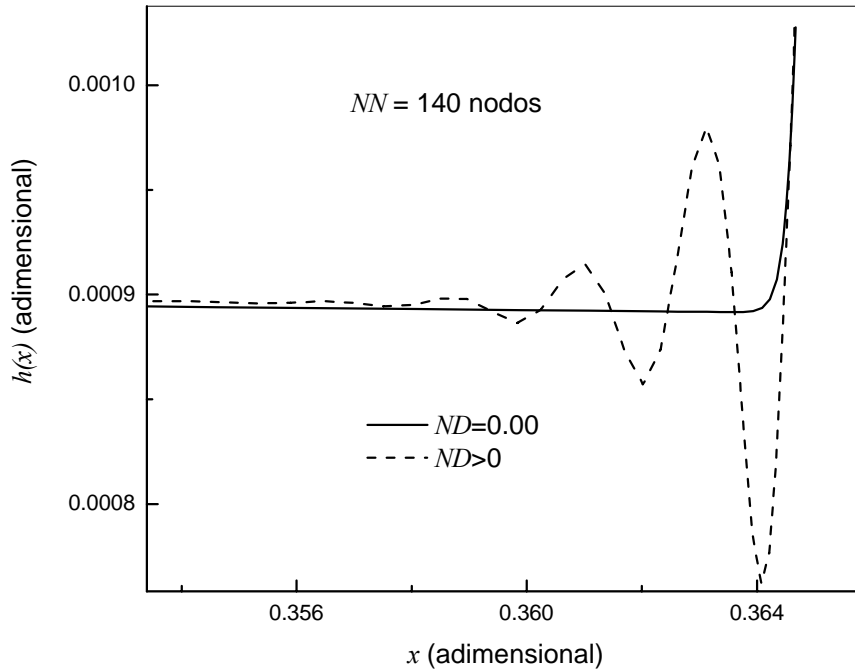


Figura 6.7: Canal de lubricación adimensional en la zona de descompresión. Notar que para un material viscoelástico ($ND>0$) aparecen oscilaciones no deseadas.

Entonces, con la discretización final, la distribución de nodos resulta como la mostrada en la figura 6.8.

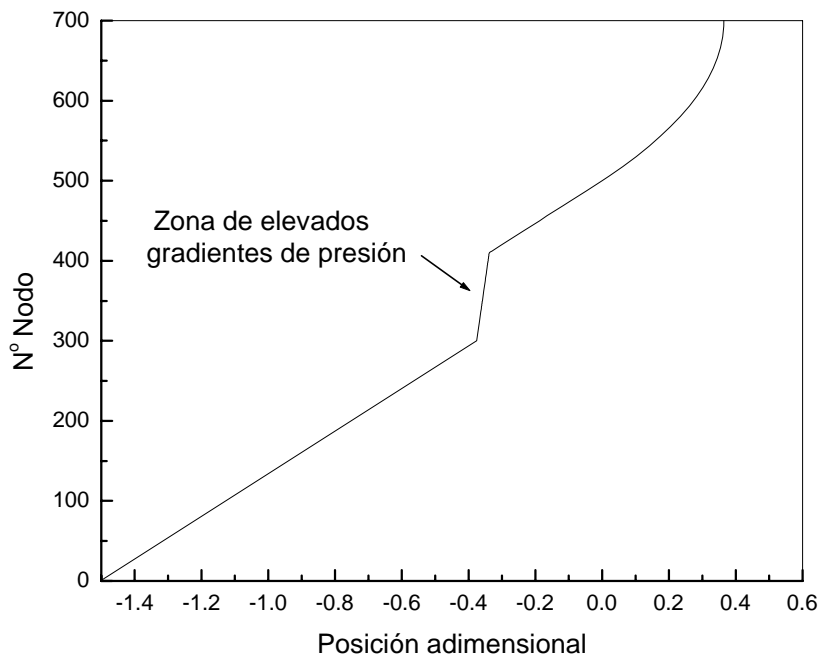


Figura 6.8: Ejemplo de la distribución nodal correspondiente a la discretización utilizada para la obtención de los resultados.

6-1.5 Implementación de las ecuaciones de deformación

La ecuación de deformación se resuelve externamente al sistema de ecuaciones (residuos) generado por el MEF. Para un campo de presiones conocido (calculado en cada lazo de Newton), la deformación se puede obtener resolviendo numéricamente la ecuación (3-22) (en una versión que contenga variables adimensionales) mediante diferencias finitas o integrando numéricamente la ecuación (3-21) utilizando el método de cuadratura de Gauss. La resolución de la ecuación (3-25) es equivalente.

En este trabajo se seleccionaron dos métodos de prueba. Para el método de diferencias finitas se utilizó un esquema Euler hacia atrás mientras que para la integración numérica se utilizó cuadratura de Gauss con ocho puntos, que permite calcular en forma exacta una integral definida cuyo integrando contenga funciones de grado menor o igual a 15. El primer método es fuertemente dependiente de la discretización del dominio, teniendo un error del orden del tamaño de la discretización [40]. Por otro lado, la aproximación del método de Gauss dependerá del grado del integrando. Esto es, la función exponencial se puede aproximar mediante serie de Taylor cuya representación es la siguiente:

$$e^{(s-x)} = 1 + (s-x) + \frac{(s-x)^2}{2} + \dots = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(s-x)^N}{N!} \quad (6-18)$$

Para 8 puntos de Gauss, se puede aproximar en forma exacta su integral hasta $N=15$, tal que los términos para $N > 15$ arrojan un valor menor a 10^{-6} si consideramos que la longitud del dominio de resultados mostrados anteriormente [13-15] presenta una longitud menor a 2.5 unidades adimensionales de longitud ($(s-x) < 2.5$). Como las funciones de forma utilizadas son lineales, independientemente de la discretización del dominio, el gradiente de presión en cada elemento será constante (función de orden 0), asegurando una integración numérica con un grado de aproximación aceptable, cuyo error será menor a 10^{-6} . Esto indica que ante una discretización determinada del dominio, el error cometido por el método de diferencias finitas puede reducirse mediante la integración de Gauss, permitiendo aumentar el tamaño de los elementos lo cual repercutiría en una reducción de los cálculos al resolver el sistema de la ecuación (6-6).

Previo a su utilización en el programa principal, se estudiaron estas afirmaciones simulando un campo de presiones (figura 6.9) cuya morfología es similar al campo de

presiones característico del fenómeno de lubricación elastohidrodinámica para el problema del contacto lineal, exceptuando la extensión del dominio. Cabe aclarar que esta no es una simulación del problema, ya que en la solución del sistema, una variación en la deformación del canal modificará la distribución de presiones y viceversa, modificándose ambos hasta llegar a un equilibrio. En este caso, se fijó un perfil de presiones y se calcula la deformación con ambos métodos para diferentes discretizaciones del dominio.

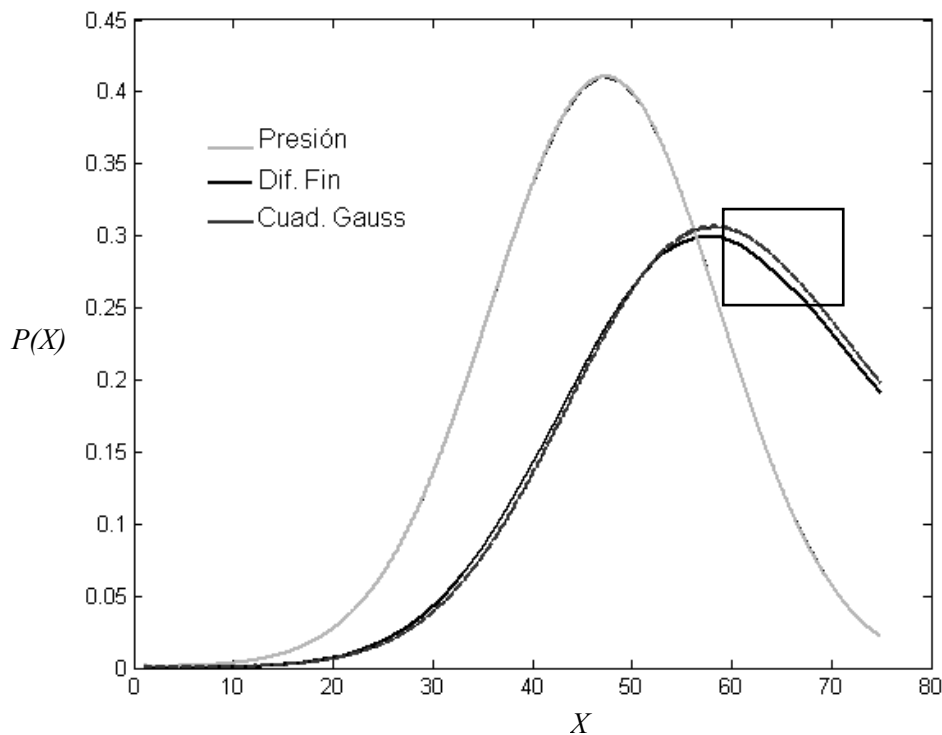


Figura 6.9: Deformación calculada mediante los métodos de diferencia finita y cuadratura de Gauss en respuesta al perfil de presión impuesto. Las curvas obtenidas para los métodos testeados corresponden a la deformación de un material viscoelástico que se mueve debajo del campo de presiones (ver capítulo 3). Ver detalle de las curvas para los dos métodos en la ampliación del recuadro en la figura 6.10.

Las figuras 6.9 y 6.10 muestran la respuesta de cada método al perfil planteado. De la figura 6.10 puede inferirse que en ambos métodos, cuanto más refinado sea el dominio la solución tenderá a la solución real.

Los errores cometidos para la integración numérica están fuertemente ligados a la aproximación del gradiente de presiones en cada intervalo, lo cual depende de la discretización. Esta es la dependencia que liga a la integración numérica del modelo de deformación planteado con el grado de refinamiento del dominio. Por otro lado, los

errores en el método de diferencias finitas son del orden del tamaño de la discretización [41], lo cual es altamente notorio cuando el dominio es poco refinado.

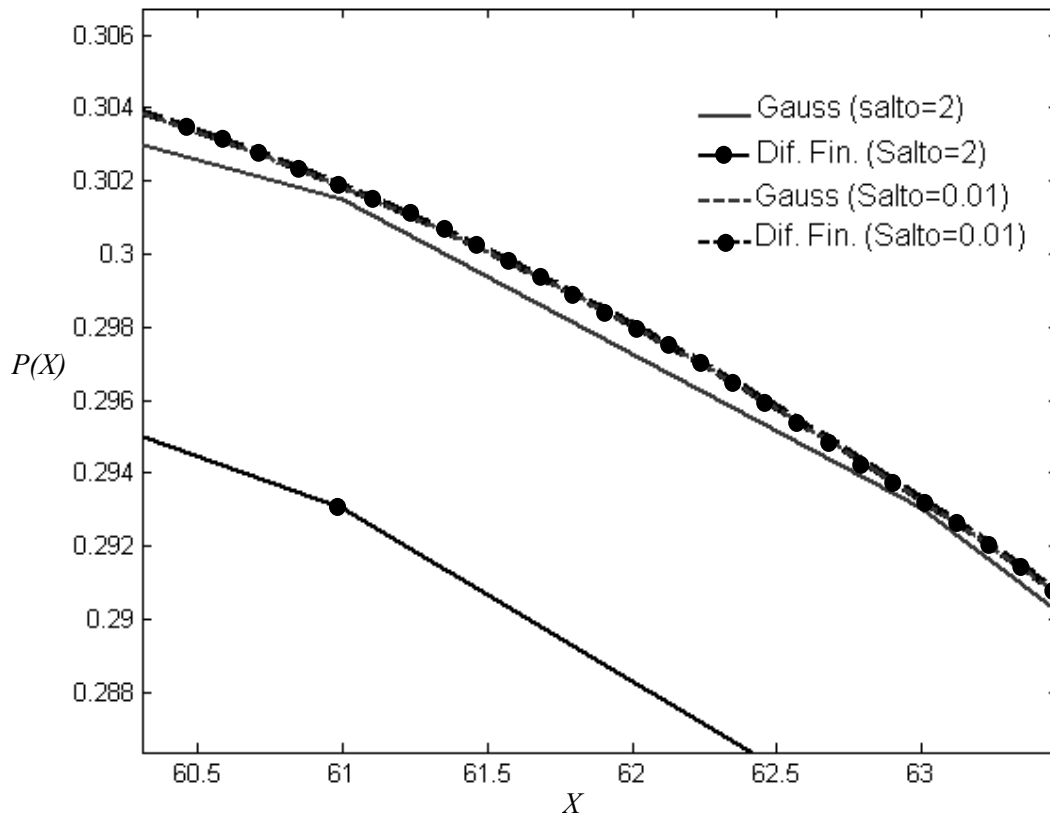


Figura 6.10: Ampliación de la zona en recuadro de la figura 6.9. Para una discretización fina con un salto en el dominio de 0.01 (distancia entre dos puntos), las curvas obtenidas mediante el método de Gauss y el método de diferencias finitas prácticamente coinciden.

En lo que respecta a la velocidad de cada método para arrojar una solución, la integración numérica necesita realizar más cálculos para determinar el valor de la deformación en cada punto, lo cual depende de la cantidad de puntos de Gauss que se requiera. En este sentido, el método de diferencias finitas requiere menor cantidad de cálculos para cada determinación de la deformación. Ante una discretización determinada, y para los puntos de Gauss mencionados anteriormente, los resultados mostraron que el método de diferencias finitas arroja resultados en un tiempo 5 veces menor que la integración numérica, pero esto puede ser compensado por el método de Gauss reduciendo los puntos del dominio para aproximar la solución.

En líneas generales se concluye que:

- El método de Gauss necesita mayor cantidad de cálculos por cada bucle en el cálculo de la deformación, pero requiere una discretización menos refinada y por ende menos puntos en el dominio para lograr una mejor aproximación de la solución
- El método de diferencias finitas con un esquema Euler hacia atrás requiere menor cantidad de cálculos por cada bucle, pero un mayor refinamiento del dominio para aproximar la solución.

Como se ve en las gráficas 6.9 y 6.10, el método de Gauss asegura una aproximación más cercana a la solución para cualquier discretización. Si bien el método de diferencias finitas ha resultado ser más rápido a igualdad de discretización, no se puede asegurar un determinado refinamiento del dominio para el cual la aproximación será la más satisfactoria debido que a priori la solución es desconocida. Por otro lado, un refinamiento muy fino implicaría tiempos muy largos de cálculo en el resto de las variables, elevando las componentes del residuo R_p y de la matriz jacobiana. Podemos entonces compensar la mayor cantidad de cálculos requeridos por la integración numérica con un refinamiento más grueso del dominio.

En este trabajo se utilizará el método de Gauss ya que asegura una mejor aproximación de los resultados a la solución.

6-2 Software.

El software base en el cual se ha implementado la ecuación de deformación ha sido desarrollado previamente por Di Paolo [9]. El algoritmo computacional fue programado en lenguaje FORTRAN y puede ser ejecutado eficientemente en computadoras personales. El mismo fue preparado de manera que las únicas incógnitas a resolver fueran: la presión en cada nodo, el entrecruzamiento ($-2h_0$), el caudal de ingreso al canal ($q_e(-b)$) y la posición de la frontera libre; es decir que para NN nodos seleccionados en el dominio de solución, habrá $NN+3$ incógnitas a resolver. El resto de las variables, como la altura del canal, la deformación, el caudal en cada posición del canal (esto es en cada nodo), la viscosidad del fluido y los esfuerzos cortantes fueron tomadas como funciones implícitas de las incógnitas antes mencionadas. El exponente de viscosidad (n), el coeficiente de exudación (θ), la carga, el número elástico (N_e) y el número viscoelástico (ND), se toman como parámetros sobre los cuales se pueden

realizar procesos de continuación paramétrica. Las ecuaciones con las cuales se han generado los $NN+3$ residuos son las número (6-11), (6-13), (6-15) y (6-17).

Una ejecución típica del código computacional se realiza utilizando como parámetro de continuación a la carga, cuyo primer valor debe ser muy pequeño, prácticamente cero (necesariamente distinto de cero para posibilitar la primer convergencia), donde las presiones y sus derivadas (y por ende las deformaciones) pueden inicializarse con ceros, el entrecruzamiento con un valor positivo (es decir $h_0 > 0$), la posición de la frontera libre puede ubicarse muy cerca del centro del contacto y el caudal de ingreso al canal, inicializarse con $|h_0|$. Ello debido a que al partir de carga nula se consideró nulo el proceso de exudación-imbibición y el caudal es constante en todo el canal, y como en el centro del contacto existe prácticamente flujo Couette, entonces $q_e = |h_0|$. La distribución nodal inicial se establece de manera que, al readaptarse en el proceso de modificación del parámetro (aumento de la carga) hasta llegar al valor deseado, ésta sea apropiada para una correcta discretización de los resultados; como se ha dicho este hecho conlleva un proceso de pruebas sucesivas hasta encontrar la distribución nodal más adecuada.

Generalmente, hasta alcanzar el valor de carga deseado, es necesario realizar varios procesos de continuación paramétrica ya que a medida que aumenta la carga las superficies se acercan cada vez más, las dimensiones del canal se tornan muy pequeñas y el programa se detiene por falta de convergencia. Esto se debe a que, como se vio en los capítulos 4 y 6, en la ecuación de Reynolds hay una dependencia con $1/h^3(x)$ y esto perjudica la convergencia para valores de $h(x) \ll 1$. Por lo tanto, hay que modificar el salto de la continuación paramétrica para cada corrida en los archivos de inicialización hasta alcanzar el valor deseado. Similares dificultades se han encontrado al variar el parámetro viscoelástico ND , ya que como se verá en los resultados, para el modelo de Voigt por ejemplo, los canales se tornan muy estrechos comprometiendo la convergencia del programa, motivo por el cual para algunos casos no se pudieron obtener resultados para valores elevados de ND .

Los primeros resultados se obtienen para un determinado conjunto de variables físicas y operativas del sistema (ver Tabla 6.II), para los parámetros n y θ igual a 1.00 (fluido Newtoniano) y 0.00 (material sin capacidad de exudación) respectivamente, para un modelo de deformación elástico ($ND=0.00$) y para un valor de carga preestablecido, al cual se llega desde carga cero con el proceso de continuación paramétrica efectuado

sobre ella. Luego, a carga constante, se modificó el exponente de viscosidad n hasta alcanzar el valor de 0.60 para el cual se obtuvieron la mayoría de los resultados, excepto en la comparación de las variables para fluido Newtoniano y no Newtoniano. Posteriormente, pueden obtenerse resultados modificando un parámetro a la vez manteniendo a los otros constantes, también efectuando continuación paramétrica sobre ellos.

Los tiempos que se necesitan para cada corrida dependen de la diferencia entre los valores inicial y final del parámetro de continuación y del tamaño del salto paramétrico. Los resultados obtenidos en esta tesis han demandado un tiempo de ejecución en el rango de 1 minuto hasta 10 horas. Como se aprecia en el capítulo 5, el modelo permite modificar una cantidad importante de parámetros, permitiendo obtener un mapa detallado del comportamiento del sistema a través de una cantidad muy grande de resultados. Debido a que la exposición de los mismos sería muy extensa, en el siguiente capítulo se expondrán los resultados más relevantes para la explicación de los procesos físicos involucrados en el efecto de los modelos viscoelásticos sobre las variables VEHD, como así también en las posibles aplicaciones para el diseño de nuevos materiales y para las prácticas en el ensayo de los mismos.

CAPÍTULO 7

Resultados y Discusiones

7-1 Introducción.

La obtención de resultados en los cuales las variables se encuentran en forma adimensional permite, además de mejorar la convergencia de los códigos computacionales, representar numerosas situaciones dimensionales. No obstante, en razón de que la geometría y el movimiento de las prótesis de rodilla están bastante acotados, para una mejor interpretación de los resultados estos serán expuestos en forma dimensional.

Los resultados han sido obtenidos para una carga igual a tres veces el peso de un individuo promedio (735 N). Se ha considerado que la carga se divide en cada uno de los cóndilos de la prótesis y se ha estipulado para ellos, una longitud axial igual al ancho de la curva de presión (≈ 0.015 m) [13].

En primer lugar, se estudiarán las variables visco-elasto-hidrodinámicas (VEHD) de la junta para un modelo elástico, no poroso y lubricado con fluido no Newtoniano, el cual se constituirá como la base de comparación para los resultados siguientes. Luego, se expondrán los resultados para una junta considerando al material alojado sobre el componente tibial como viscoelástico, suponiendo al mismo no poroso y por ende sin la capacidad de exudar y absorber fluido. Para este análisis, se mostrarán las modificaciones que experimentan las variables VEHD más comprometidas en los procesos de desgaste mecánico del polietileno, modificando el carácter viscoelástico del material a través de su viscosidad. Para ambos modelos de deformación viscoelástica (Voigt (VG) y Sólido Estándar Lineal (SEL)), se tendrán en cuenta materiales de baja y elevada rigidez, representados por los módulos de Young de 20.0 MPa y 500 MPa respectivamente. Luego, se mostrarán resultados sobre los efectos que confieren a la junta la capacidad de exudación de un material poroso y, debido al interés práctico que presentan, sólo se incluirá la capacidad de exudación en un modelo Sólido Estándar Lineal (SEL) de módulo $E=20.0$ MPa (representando a ciertos hidrogeles) y un modelo de Voigt (VG) de módulo $E=500$ MPa (representando al PUAPEM).

Por último, se realizarán comparaciones entre las variables VEHD obtenidas para fluido Newtoniano y no Newtoniano, modificando en cada caso el parámetro ND . El principal objetivo de esta comparación es determinar si el ensayo de implantes in vitro con fluido Newtoniano (como ser suero bovino) puede arrojar valores similares a los que se observarían una vez implantado en un entorno rodeado por fluido sinovial no Newtoniano. En este último caso, solamente se mostrarán los resultados para un modelo VG de $E=500$ MPa ya que la mayoría de los ensayos in vitro se realizan sobre el polietileno de las prótesis actuales.

Los valores mencionados de módulo elástico son representativos de un cartílago natural ($E=20.0$ MPa) y del mínimo valor encontrado para el polietileno ($E=500$ MPa). La selección de estos valores obedece a la inquietud de contrastar la respuesta de un polímero como el actual con un material cuyas propiedades elásticas se aproximen al cartílago natural, para el cual el funcionamiento de la junta sinovial sea óptimo [11, 12].

7-2 Resultados para el modelo de material elástico.

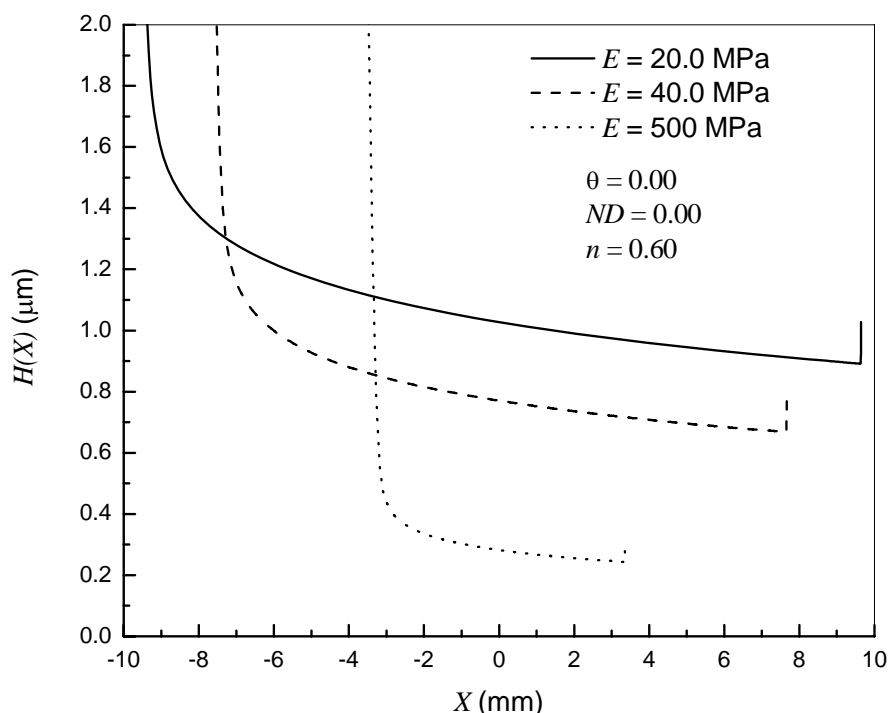


Figura 7.1: Espesor del canal de lubricación para modelos de materiales elásticos ($ND=0.00$).

Las predicciones previas a este trabajo [13, 14, 15] sobre modelos de lubricación con un modelo elástico de deformación indican que un material de baja rigidez podría generar canales de lubricación cuyos espesores superan ampliamente el valor de las

rugosidades superficiales de los materiales. En el polietileno de las prótesis actuales, se pueden lograr rugosidades que varían entre $0.20 \mu\text{m}$ y $0.36 \mu\text{m}$, mientras que para el metal, se han logrado acabados superficiales con rugosidades de alrededor de $0.02 \mu\text{m}$ [5]. Si bien el modelo no contempla la rugosidad superficial, examinando la figura 7.1 se puede inferir que aquellos materiales elásticos ($ND=0.00$) con módulos elásticos menores a 20.0 MPa , podrían favorecer a la existencia de un espesor del lubricante mayor a $0.90 \mu\text{m}$, valor 125% superior que la suma de las rugosidades de los componentes. Para las mismas condiciones de trabajo, la figura 7.1 ilustra que un material cuyo módulo elástico supere los 500 MPa para las mismas condiciones, generaría películas lubricantes menores a $0.25 \mu\text{m}$, valor que se encuentra en el orden de las mínimas rugosidades de los materiales mencionados. Aunque el modelo no permite predecir el contacto directo, estos resultados indican que para un material elástico de elevada rigidez ($E > 500 \text{ MPa}$), no puede asegurarse un régimen de lubricación de película completa de fluido, existiendo la posibilidad de que se desarrolle un modo de lubricación mixta en la cual existe el contacto directo entre los materiales con el consiguiente riesgo de desgaste abrasivo.

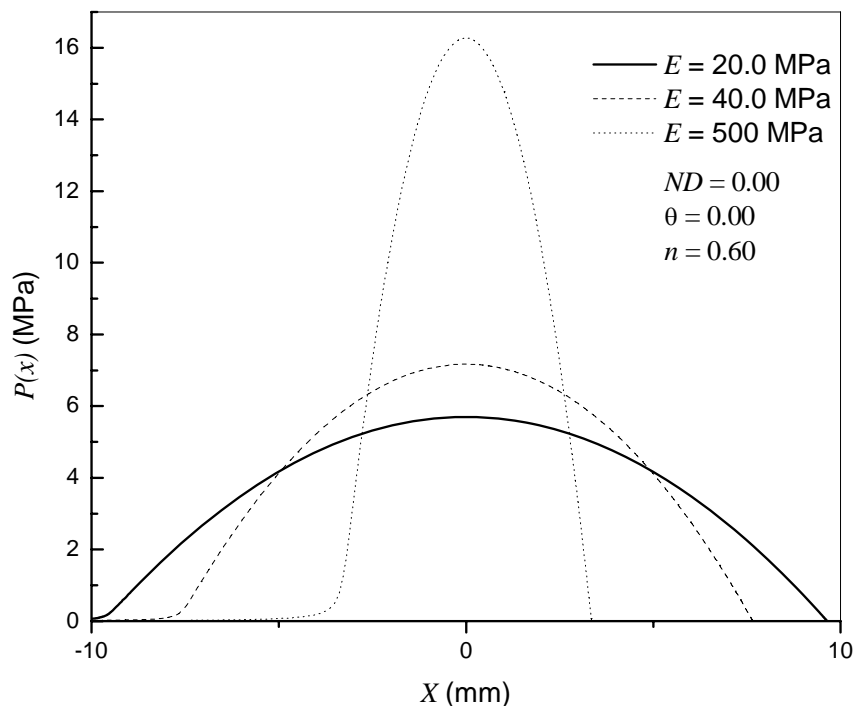


Figura 7.2: Campo de presiones.

Existen datos experimentales que concuerdan cualitativamente con estas afirmaciones. Scholes et al. [41] han estudiado experimentalmente las condiciones de lubricación de distintos materiales para prótesis verificando un modo de lubricación mixta para el polietileno con elevados coeficientes de fricción respecto del poliuretano de grado

médico (elastómero de baja rigidez). Este último mostró excelentes habilidades para generar una lubricación de película completa arrojando coeficientes de fricción inferiores al logrado con el polietileno.

La capacidad de deformarse le confiere al material la habilidad de distribuir la carga en una zona amplia. Cuanto más rígido (mayor módulo elástico) es un material, resigna su capacidad de deformarse concentrando la carga en áreas más pequeñas, elevando así las tensiones que debe soportar. La figura 7.2 muestra que para el material de módulo $E=20$ MPa, el valor máximo de presión (tensión sobre el material) se encontraría por debajo de los 6 MPa mientras que para el material de módulo $E=500$ MPa, la tensión que debe soportar podría superar los 16.0 MPa, valor que excede en un 167 % al primero.

Furmanski y Pruitt [42], a través de un análisis con base experimental, predicen que la intensidad de los picos de tensión son determinantes en la propagación de las fallas por fatiga del polietileno. En este sentido, los resultados de la figura 7.2 predicen que un material elástico de $E=500$ MPa tiene posibilidades mucho más elevadas de sufrir una fatiga temprana frente a un material de $E=20.0$ MPa. No obstante, en el mismo trabajo [42] los autores indican que, además de los picos de tensión, la viscoelasticidad es fundamental en la aparición y crecimiento de la fatiga.

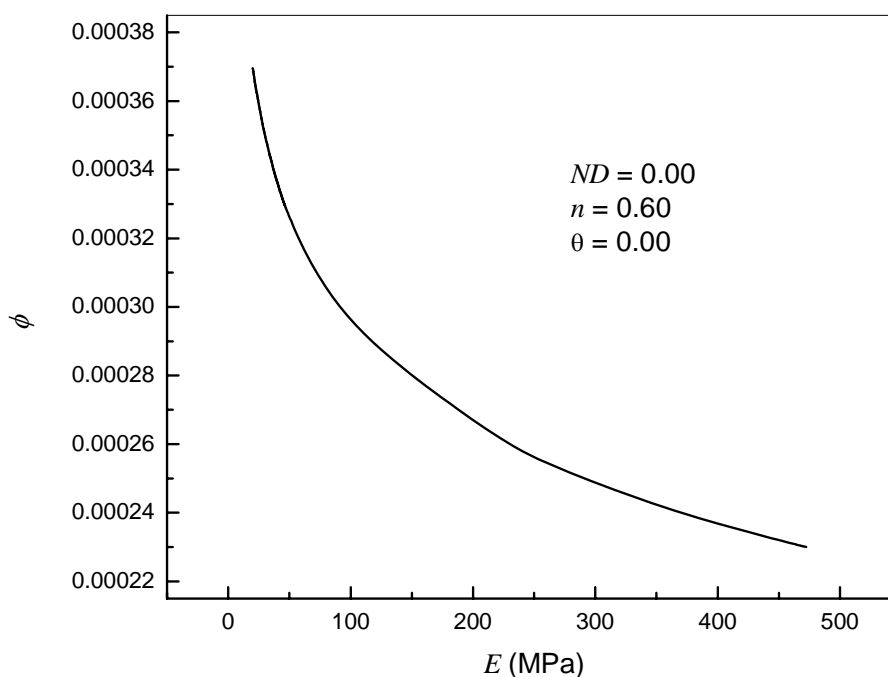


Figura 7.3: Coeficiente de fricción en función módulo elástico E .

Por otro lado, uno de los métodos más utilizados en la práctica para evaluar la performance mecánica de una junta artificial es a través de la medición del coeficiente

de fricción. La figura 7.3 muestra la evolución del coeficiente de fricción sobre el componente tibial conforme crece el módulo elástico. Dicha figura predice una reducción de la fricción a medida que el material se torna más rígido. Una de las causas de esta tendencia es la extensión de la superficie de fricción, lo cual puede observarse en la figura 7.1 a través de la longitud del canal de lubricación, que para el material con un módulo de $E=20.0$ MPa resulta ser 3 veces superior al obtenido para $E=500$ MPa. Este resultado indicaría que el material más rígido mejora el funcionamiento mecánico de la junta, pero debe tenerse en cuenta que el modelo permite calcular solamente el coeficiente de fricción hidrodinámico, no pudiendo predecir la fricción ante un contacto directo. Como las predicciones de espesores de canal obtenidas para el material de $E=500$ MPa inducen a pensar que existirá el contacto directo entre las asperezas, es probable que el coeficiente de fricción sea muy superior al mostrado en la figura 7.3, hecho que fue comprobado en el trabajo [41].

Con el objetivo de completar los resultados mostrados para un modelo de material elástico, en las siguientes secciones se presentarán los resultados para los dos modelos de deformación viscoelásticos lineales desarrollados en el capítulo 3. Los mismos permitirán extender las predicciones previas sobre un espectro más amplio de materiales, que incluyen al polietileno actual y algunos hidrogeles en estudio para reemplazo de cartílago natural.

En los resultados a mostrar, una variación del número ND implica variación solo de la viscosidad del material sólido, ya que el resto de los parámetros que definen a ND (ver capítulo 5) permanecen constantes.

7-3 Modelo de Voigt (VG).

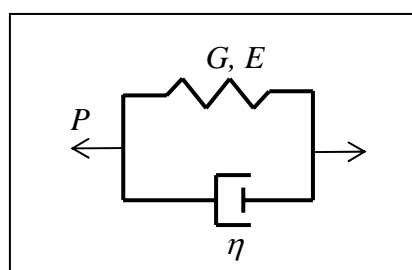


Figura 7.4

7-3.1 Resultados para el modelo VG con módulo $E = 20.0$ MPa

Los resultados para un modelo de material elástico de baja rigidez han mostrado que el mismo permitiría optimizar la lubricación de la junta y reducir las posibilidades de desgaste en el movimiento pleno. En la realidad, la mayoría de los materiales de baja rigidez utilizados en biomedicina son viscoelásticos (polímeros, hidrogeles, etc), motivo por el cual surgen los siguientes interrogantes: ¿es posible que un material viscoelástico de baja rigidez genere los mismos beneficios que uno elástico?. Si un material es seleccionado por su baja rigidez, ¿es indistinto que el mismo sea elástico o viscoelástico?. ¿Podemos utilizar las predicciones de modelos previos sobre materiales elásticos en el diseño de nuevos materiales viscoelásticos para implantes articulares?. A continuación intentaremos dirigir el estudio a responder estos interrogantes.

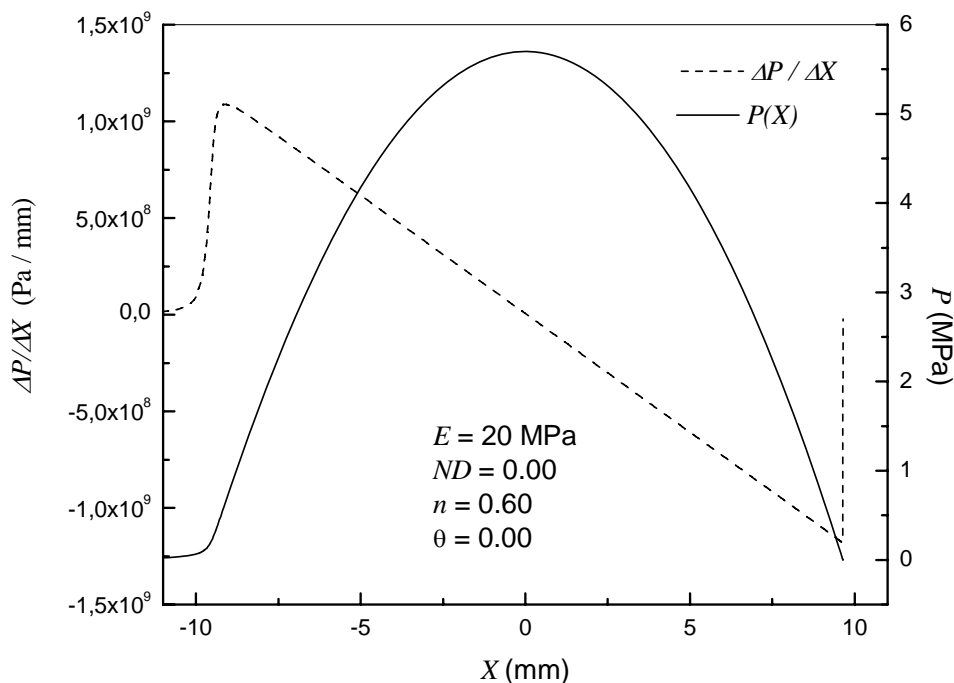


Figura 7.5: Gradiente de presiones superpuesto a la distribución de presiones correspondiente al material elástico de $E=20.0$ MPa de la figura 7.2.

Como se describió en el desarrollo de la ecuación (3-21), la deformación del modelo viscoelástico está íntimamente relacionada con el gradiente de presiones, ya que para una partícula que viaja sobre el material (observador lagrangiano) dicho gradiente se traduce en la velocidad de aplicación de la carga puntual (presión). Si obtenemos el gradiente de presiones de la figura 7.2 para el modelo elástico ($ND=0.00$) de $E=20.0$ MPa (ver figura 7.5), podemos ver que el inicio y el fin del canal son los puntos donde el gradiente alcanza los valores más elevados (en valor absoluto). La diferencia entre estos puntos es que a la entrada, el gradiente es positivo indicando que el

material estaría sujeto a una abrupta compresión y es la ubicación donde el fenómeno elastohidrodinámico tiene su inicio, mientras que a la salida el gradiente es negativo, significando que el material experimenta la descompresión y es el lugar donde finaliza la zona de lubricación. De este análisis para el caso elástico, se puede inferir que dichas zonas (entrada y salida del canal) serán las más comprometidas para la deformación del material viscoelástico ya que son los puntos donde el efecto viscoso del sólido tendrá mayor actuación dependiendo del valor del parámetro ND .

Cabe aclarar que la figura 7.5 muestra el campo y el gradiente de presiones para el modelo de material elástico, y es útil para predecir y entender los fenómenos que se describen a continuación. No obstante, debe tenerse en cuenta que dicha curva sufrirá modificaciones para el caso viscoelástico.

Los efectos sobre el material predichos al analizar la figura 7.5, se reflejan en los canales de lubricación mostrados en la figura 7.6 (a). El aumento en la viscosidad del material (ND en este caso) disminuye su capacidad de deformarse instantáneamente ante la aplicación de una tensión, retardando la deformación en la compresión y la recuperación en la descompresión. De esta manera, a la entrada del canal de lubricación, el espesor disminuye respecto al caso elástico y luego, hacia la desembocadura del canal, el material retorna más lentamente a su estado original, dando como resultado canales más planos y estrechos a medida que aumenta ND . De esta manera, el efecto benéfico que confiere la baja rigidez de un material elástico sobre el espesor del lubricante, puede revertirse si el material utilizado responde al modelo viscoelástico de Voigt. Por ejemplo, para $ND = 0.04$ el espesor mínimo de la película lubricante es de $0.15 \mu\text{m}$, valor más pequeño que el obtenido para el modelo elástico de $E=500 \text{ MPa}$ (ver figura 7.1), y que además es inferior a la mínima suma de las rugosidades superficiales de los implantes actuales, para lo cual no puede asegurarse una lubricación de película de fluido completa. Cabe aclarar que para el caso $E=20.0 \text{ MPa}$ y $ND=0.04$ de la figura 7.6 (a), el canal presenta una pendiente distinta de cero, pero lo suficientemente pequeña como para no ser notada en las escalas de dicha figura. Esto puede observarse en la figura 7.6 (b) en la cual, además de la pendiente mencionada, se observa la aparición de pequeñas oscilaciones (respecto del espesor del canal), las cuales puede deberse a la dificultad del método para obtener resultados ante canales tan pequeños y cambios muy pronunciados en dicha curva.

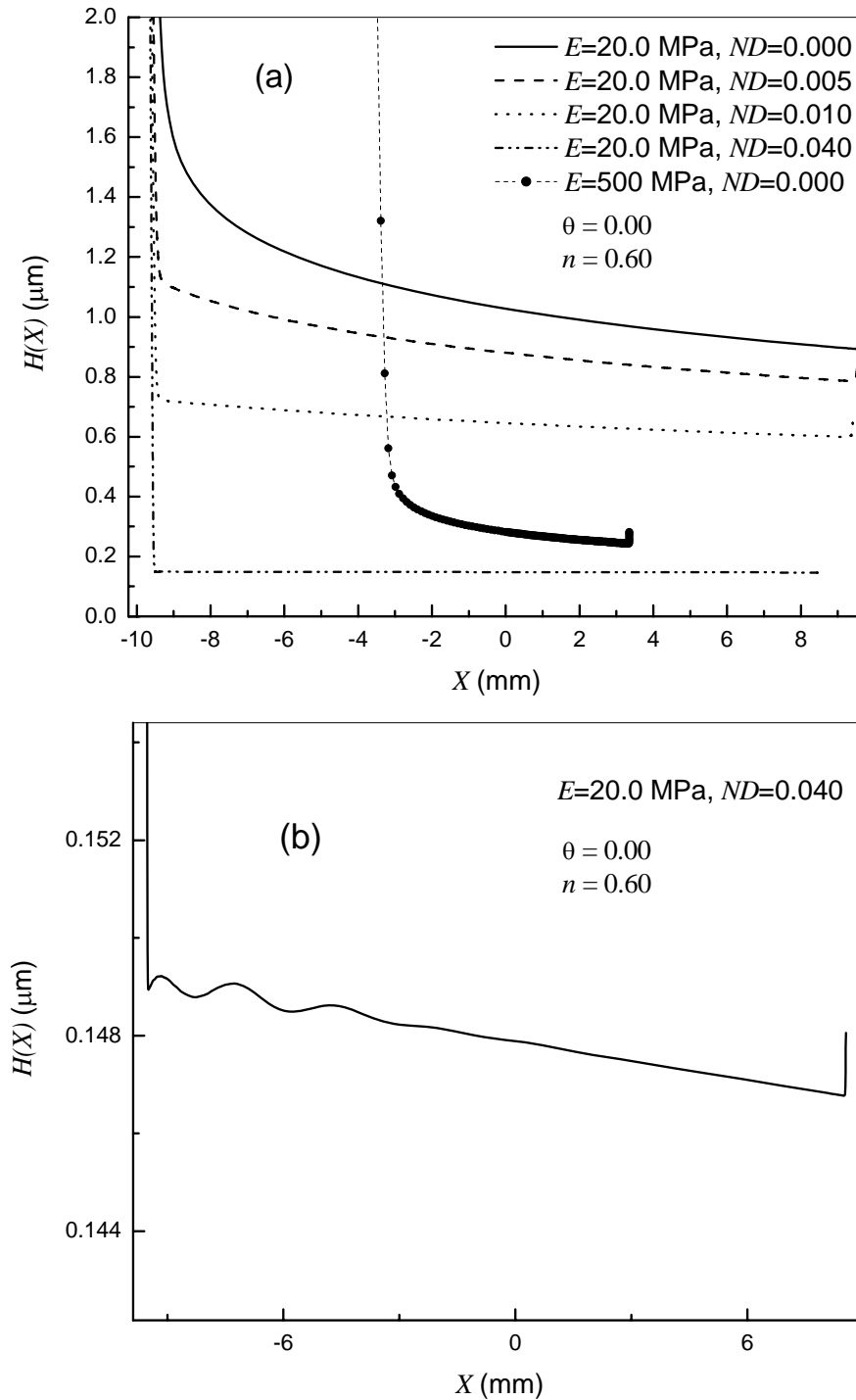


Figura 7.6: (a) Canal de lubricación para distintos valores del parámetro ND . (b) Ampliación del canal para el caso $E=20.0$ MPa y $ND=0.04$ de la figura 7.6 (a).

La morfología de los canales de la figura 7.6 depende, entre otras variables, de una interacción entre las componentes elástica y viscoelástica de la ecuación de deformación (3-21). La figura 7.7 muestra el campo de deformaciones total ($D(x)$), la componente elástica de esta deformación ($De(X)$) y la componente viscosa de la misma ($Dv(x)$) para $ND=0.04$. Puede observarse que en el inicio del canal, la deformación elástica ($De(x)$) que tendría el material de no existir el amortiguador del

modelo (elemento viscoso), se ve afectado por la resistencia viscosa al desplazamiento ($Dv(x)$), reduciendo la deformación del conjunto en las zonas de mayor actuación del amortiguador (ver ecuación **(3-21)**). En el extremo final de la zona de lubricación (a la derecha, desembocadura del canal) aparece otra característica que merece notarse. Por la condición de contorno **(5-5, b)**, en este punto la carga local (presión) debe retornar al valor del entorno que rodea la junta, localizando allí el punto donde el fenómeno de lubricación culmina. Cuanto más rápidas son las modificaciones de las cargas sobre un modelo de material de Voigt, más lentamente responde su parte viscosa, lo cual en el caso de una descompresión se traduce en una deformación negativa de la componente viscosa ($Dv(x)$). La consecuencia de esta respuesta es la existencia de una deformación total ($D(x)$) distinta de cero al finalizar la zona de lubricación, lo cual significa que el material quedaría deformado. Su recuperación dependerá de la viscosidad del amortiguador y del tiempo transcurrido hasta que el material vuelva a ser cargado (por ejemplo, de cuán rápido camine una persona).

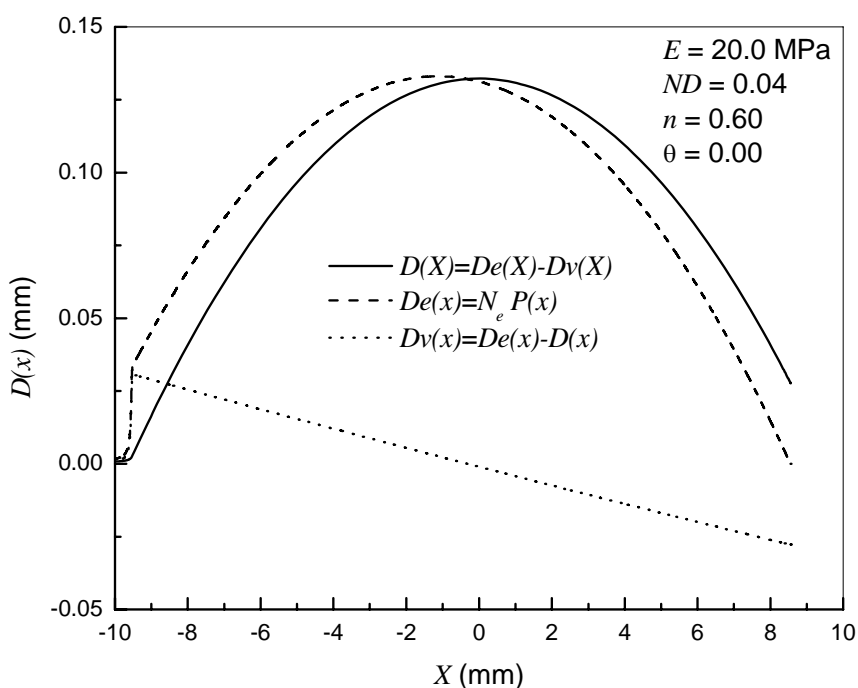


Figura 7.7: Deformación del material viscoelástico de baja rigidez. En esta figura se grafica la deformación total ($D(X)$), y las componentes elástica ($De(X)$) y viscoelástica ($Dv(X)$) de la ecuación **(3-21)**.

La disminución en los espesores del canal, implica una reducción en el caudal circulante entre las superficies articulares, como puede verse en la figura 7.8, y esto es acompañado por notables modificaciones en la curva de presión (ver figuras 7.9 (a) y (b)).

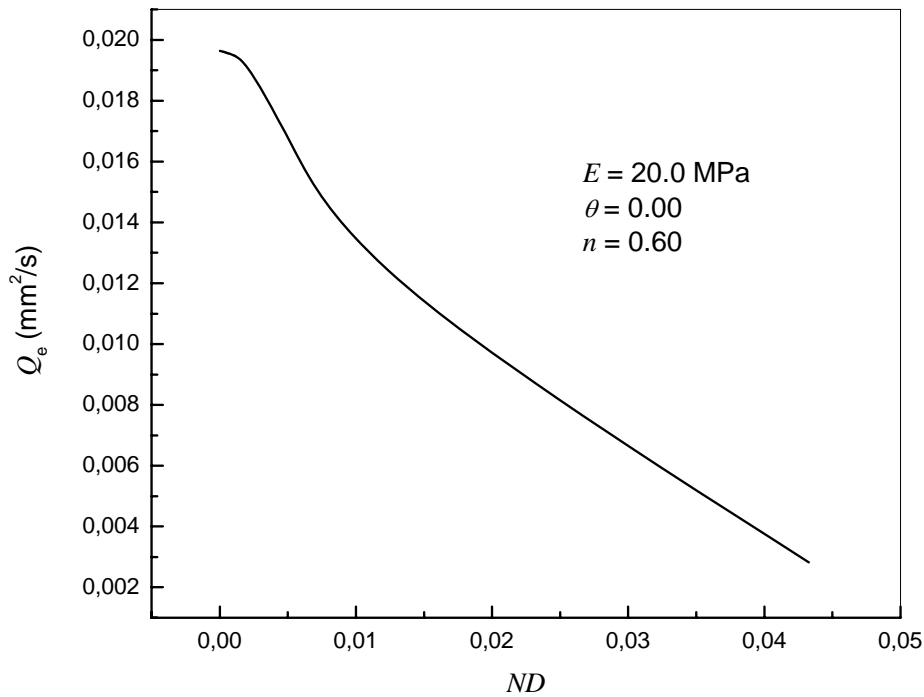


Figura 7.8: Caudal por unidad de longitud axial dentro del canal de lubricación.

Como se explicó en el desarrollo del modelo, las superficies en movimiento relativo impulsan fluido por arrastre hacia la zona de contacto. En dicha zona, se desarrolla el perfil de presiones que, además de soportar a la carga y compensar los esfuerzos viscosos, regula el caudal circulante por el canal. Debido a que la velocidad de operación de la junta no se modifica, el fluido arrastrado hacia la zona de contacto por las superficies desde el entorno de la junta es el mismo para todos los canales mostrados en la figura 7.7, y la curva de presiones acompaña la reducción de la película lubricante con un aumento de su gradiente a la entrada del canal. Como el canal de lubricación se reduce un 84 % entre los extremos del rango considerado de ND , el caudal experimenta una reducción similar debido a que, por hipótesis, el perfil de velocidades dentro del canal es predominantemente Couette. Por lo tanto, el gradiente de presiones a la entrada del canal debe evitar que ingrese el excedente de fluido arrastrado por la superficie tibial, generando así un rechazo del líquido remanente que intenta ingresar a la zona de carga. Como fue explicado en el capítulo 6, puede notarse en la figura 7.9 (b) que el aumento de la densidad de nodos en la zona de elevados gradientes fue necesario para describir adecuadamente los pronunciados cambios en esta zona.

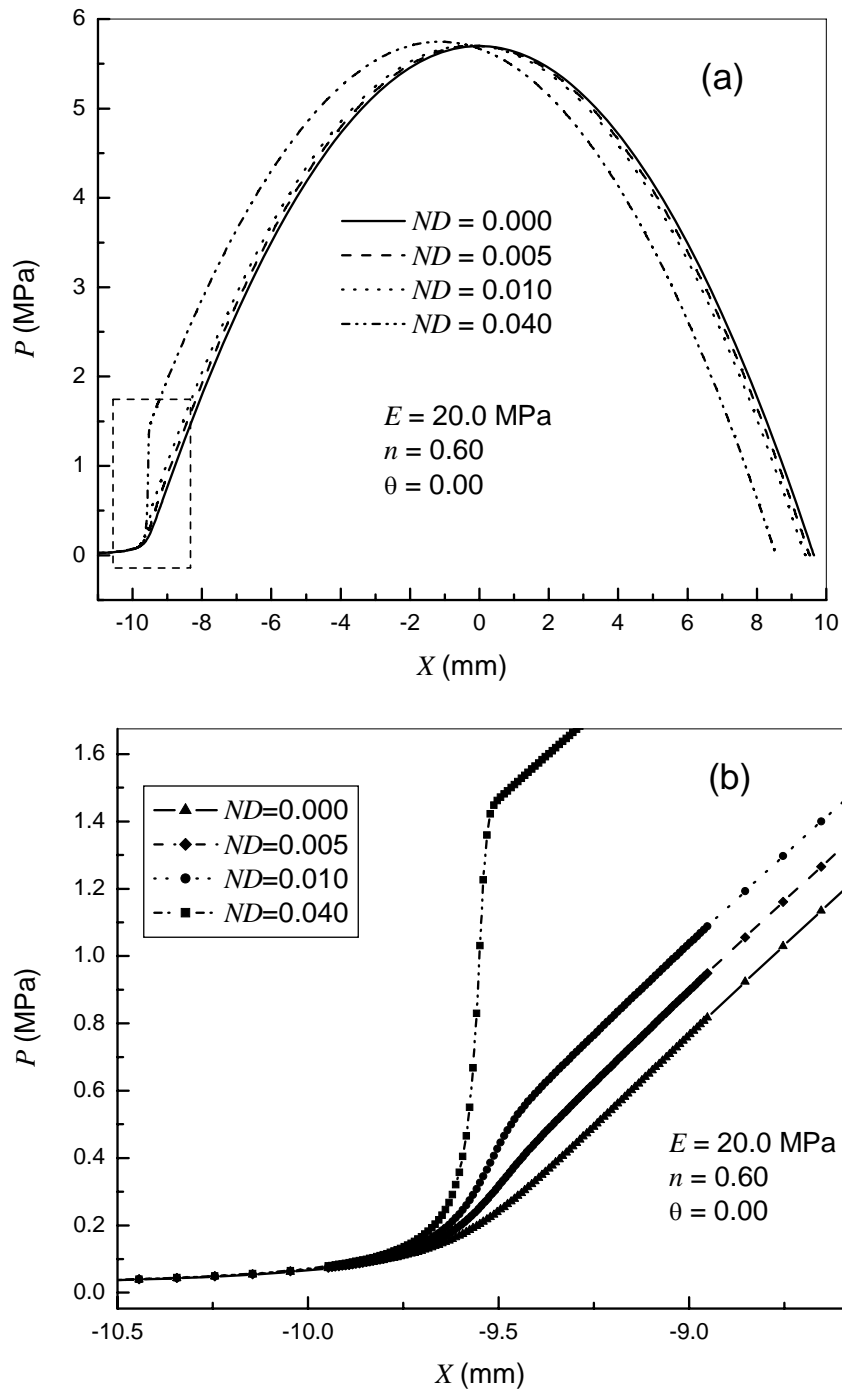


Figura 7.9: (a) Campo de presiones para distintos valores del parámetro ND . (b) Ampliación de la zona de altos gradientes de presión a la entrada del canal (ver zona rectangular en líneas de trazo de la figura 7.8 (a)). Notar en (b) el aumento de la densidad de nodos en la zona de elevado gradiente.

Para mayor claridad, se grafican en las figuras 7.10 (a) y (b) el gradiente de presiones para un modelo viscoelástico VG ($ND=0.04$) y su ampliación en el inicio del canal, respectivamente. Puede observarse que el gradiente de presiones se eleva rápidamente a la entrada del canal, lugar donde debe ajustar el flujo de entrada y

expulsar el excedente. Una vez establecido el flujo que ingresa al canal, el gradiente continúa con una morfología similar al caso elástico (figura 7.11).

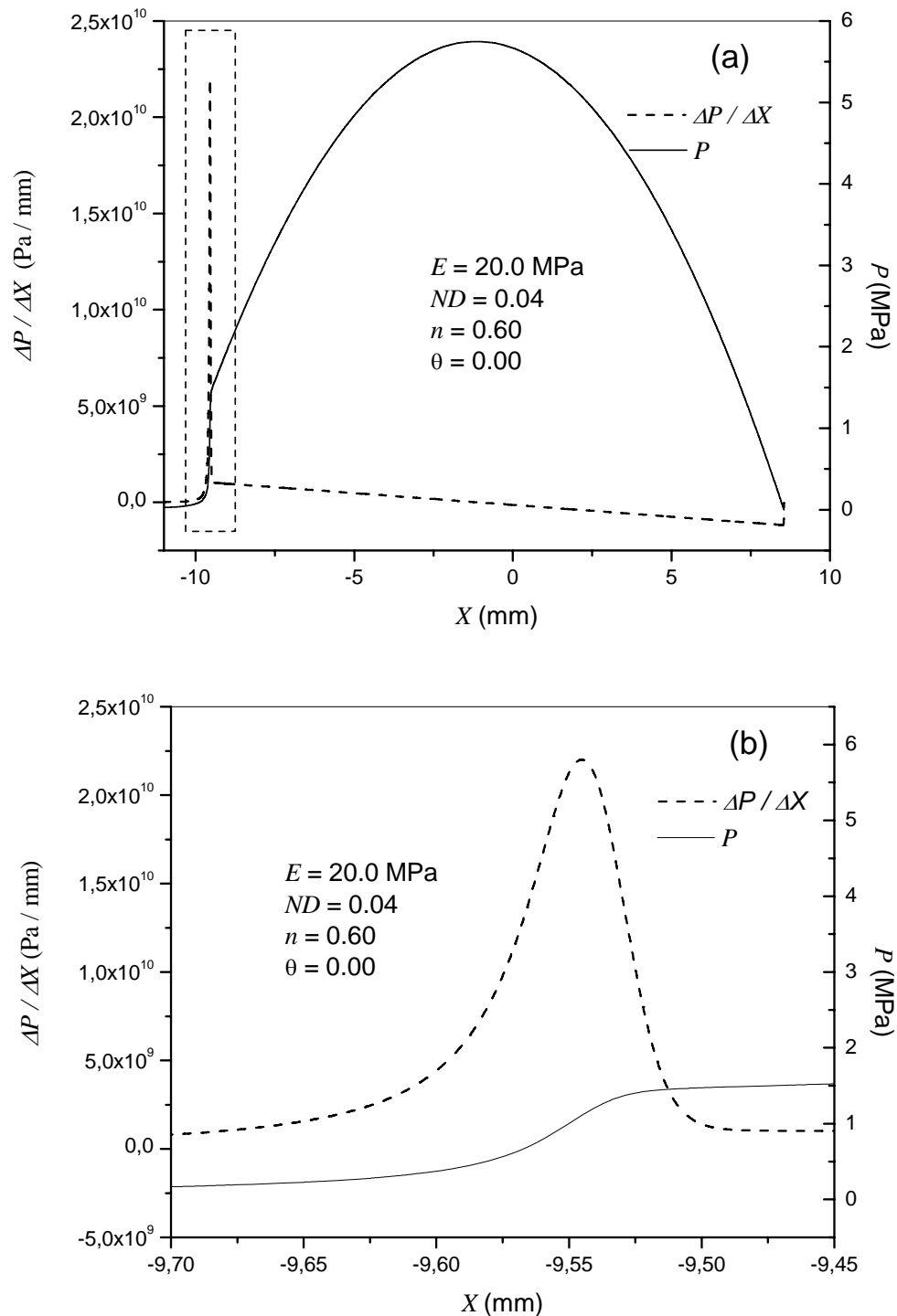


Figura 7.10: (a) Gradiente de presiones superpuesto al campo de presiones para un valor de $ND=0.04$. (b) Ampliación de la zona seleccionada en la figura 7.10 (a)

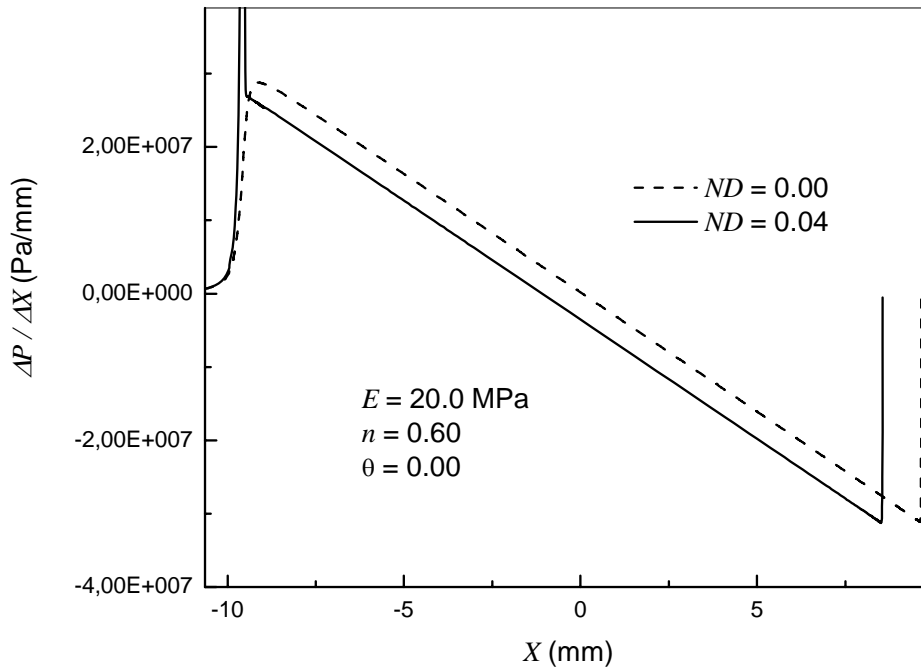


Figura 7.11: Comparación entre los gradientes de presión en la zona del canal de lubricación para los casos elástico ($ND=0.00$) y viscoelástico ($ND=0.04$).

Otra modificación que se observa en la curva de presiones (figura 7.9 (a)) respecto al caso elástico, es un corrimiento del valor máximo desde el centro ($X=0.00$ mm) hacia la entrada del canal. Obteniendo el momento de torsión que realiza el campo de presiones respecto del centro del contacto ($X=0.00$ mm), podemos determinar la ubicación del punto de acción de la fuerza resultante debido a la Presión (FP, cuyo valor iguala a la carga) sobre los componentes. Para el caso elástico ($ND=0.00$), debido a la simetría de la curva, el momento es nulo y el punto de aplicación de FP se ubica en el centro del contacto, mientras que para un valor de $ND=0.04$, de la figura 7.9 (a) se obtiene que el momento tiene un valor de -11.46 Nm (sentido horario) y el punto de aplicación de FP se ubica en un valor de $X=-1.04$ mm, valor donde aproximadamente se sitúa el valor máximo de presión ($X=-1.09$ mm). Si observamos nuevamente el esquema del movimiento de la junta en la figura 3.2 (capítulo 3) podemos deducir que este momento actúa sobre el componente femoral en sentido horario y sobre el componente tibial en sentido antihorario, o sea, oponiéndose al movimiento que realizan los componentes. Consecuentemente, como resultado de la asimetría en la curva de presiones para el modelo viscoelástico, estas predicciones indican que podría aparecer un momento de resistencia a la rodadura con el consiguiente aumento en el esfuerzo de desplazamiento, lo cual concuerda cualitativamente con los resultados mostrados por Goryacheva [43].

Observando nuevamente la figura 7.9 (a), se puede notar que para el rango de valores explorados del parámetro ND , los cambios más importantes en la curva de presión respecto al modelo elástico son la modificación de su gradiente en el inicio del canal y el desplazamiento de la curva de presiones, pero no se observan cambios significativos en los valores máximos, por lo que las conclusiones presentadas en trabajos anteriores [13 - 15] se mantienen.

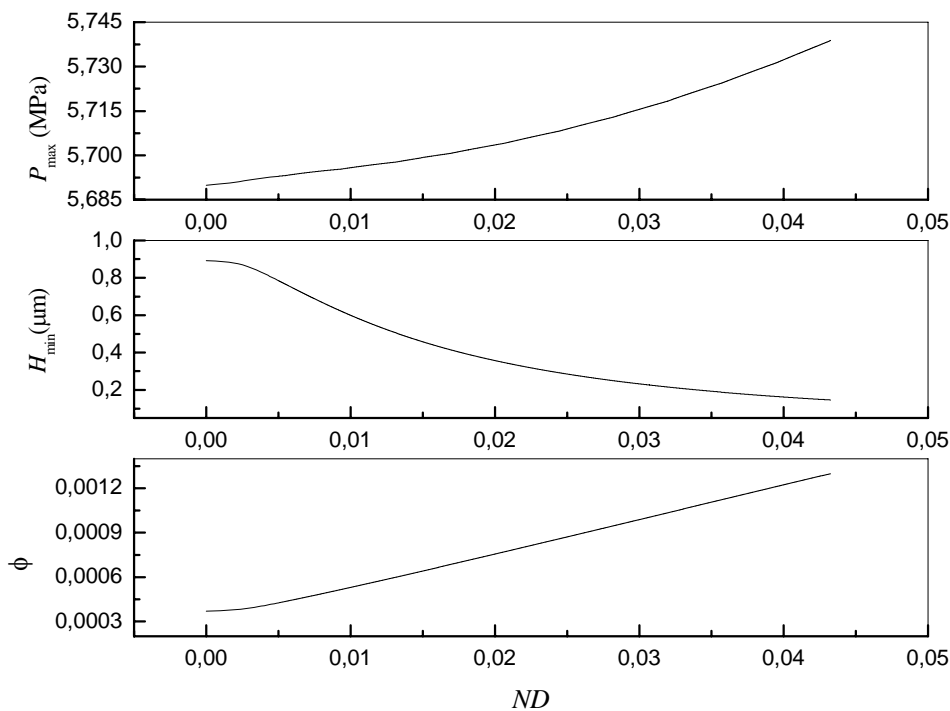


Figura 7.12: Evolución del valor máximo de la presión, mínimo espesor del canal y coeficiente de fricción con al aumento del parámetro ND .

La figura 7.12, muestra la evolución del máximo valor de la presión, el mínimo espesor del lubricante (canal) y el coeficiente de fricción en la superficie del material tibial con el aumento del parámetro ND . La presión máxima sufre un aumento de solo el 0.88 % para el rango de ND explorado, mientras que el mínimo espesor del lubricante se reduce en un 85 %. Como la carga no se modifica, de acuerdo con la definición del coeficiente de fricción (ecuación (5-12)), el aumento del mismo significa que al disminuir el canal deben crecer los esfuerzos cortantes. Esta afirmación no es tan evidente para un fluido no Newtoniano de naturaleza pseudoplástica ya que, como muestra la figura 7.13, la viscosidad equivalente del líquido disminuye ante un estrechamiento del canal. A pesar de que este efecto no Newtoniano contribuye a reducir el coeficiente de fricción en las articulaciones naturales [13], para el modelo de material viscoelástico VG los esfuerzos de corte crecen con el aumento de ND como muestra la figura 7.14, y esto se debe principalmente a un aumento en los gradientes

de velocidad (ver ecuación (4-3)). Para $ND=0.04$, por ejemplo, la viscosidad equivalente dentro del canal se reduce en promedio alrededor de un 50 %, mientras que los gradientes de velocidad aumentan aproximadamente un 85 %. En todo el rango explorado del parámetro ND , el coeficiente de fricción sufre un incremento que alcanza un 224 % (ver figura 7.11) respecto del caso elástico ($ND=0.00$).

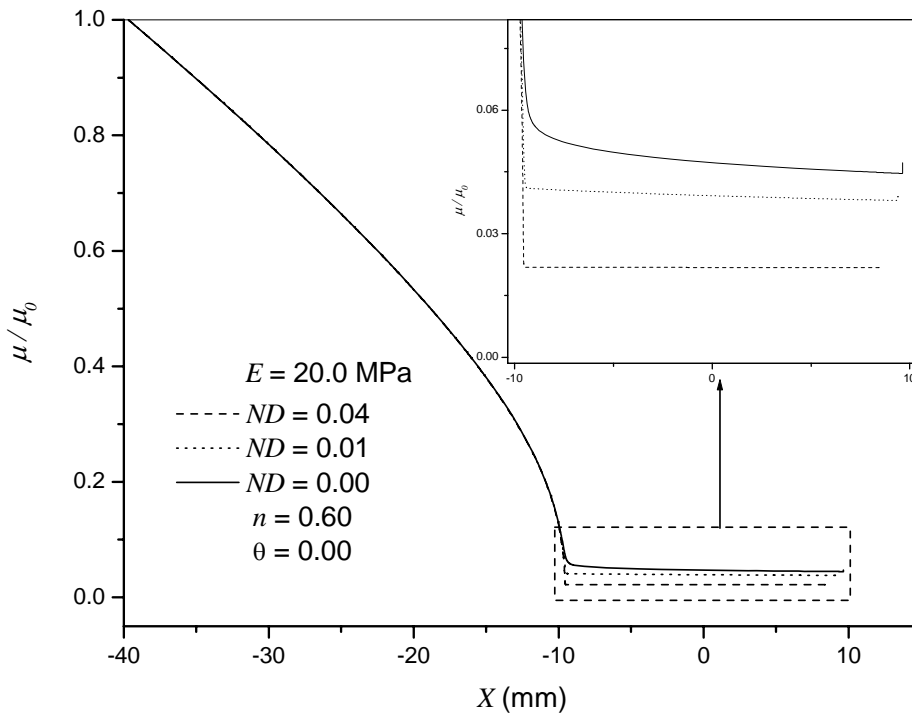


Figura 7.13: Viscosidad equivalente en todo el dominio.

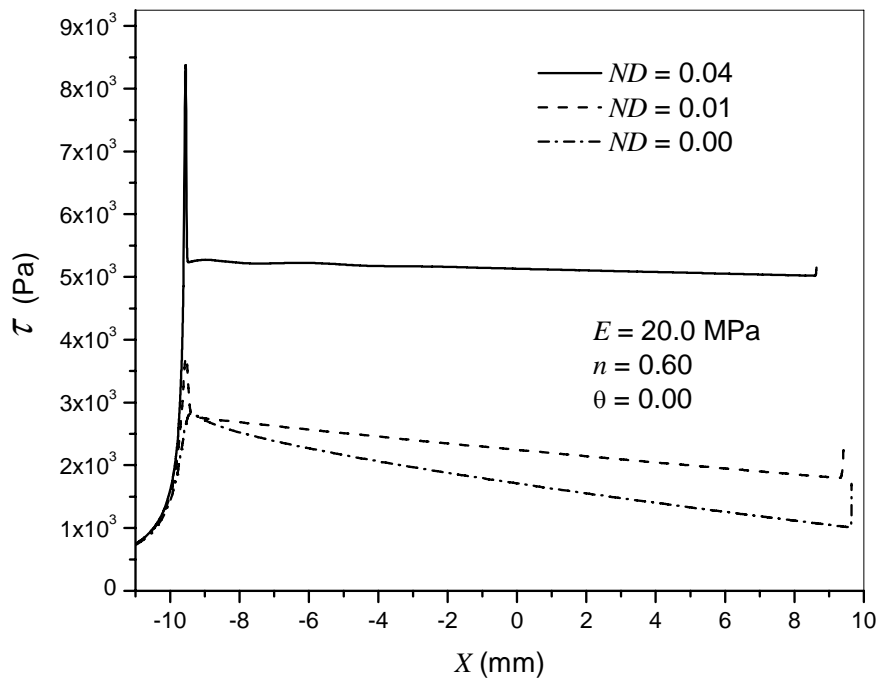


Figura 7.14: Esfuerzos de corte sobre el material deformable.

Los resultados hasta aquí mostrados indicarían que un material viscoelástico de baja rigidez que responde al modelo de Voigt genera condiciones de lubricación de inferior calidad mecánica respecto de los materiales elásticos de igual módulo de Young. Existen rangos de la viscosidad del material para el cual la lubricación no sería la adecuada, mostrando indicios de elevada posibilidad de contacto directo que llevaría al desgaste por abrasión de los materiales. Además, el elevado aumento del coeficiente de fricción en el rango explorado y la aparición de una resistencia a la rodadura posicionaría a estos materiales como poco eficientes en el fenómeno de lubricación. Estas y otras reflexiones que serán expuestas en las conclusiones, constituyen los motivos por los cuales los interrogantes planteados al principio de esta sección tendrían una respuesta negativa en ambos casos.

Debido a que, como se verá a continuación, el material de baja rigidez tiene una sensibilidad más elevada a variaciones de la viscosidad del modelo, esta sección fue confeccionada principalmente para dilucidar los fenómenos físicos que explican la morfología de las curvas obtenidas. Si bien los valores en las curvas para un modelo VG de $E=500$ MPa presentarán diferencias notorias con los aquí mostrados, los fenómenos físicos involucrados son equivalentes y sus justificaciones han sido expuestas en esta sección.

7-3.2 Resultados del modelo VG para $E = 500$ MPa

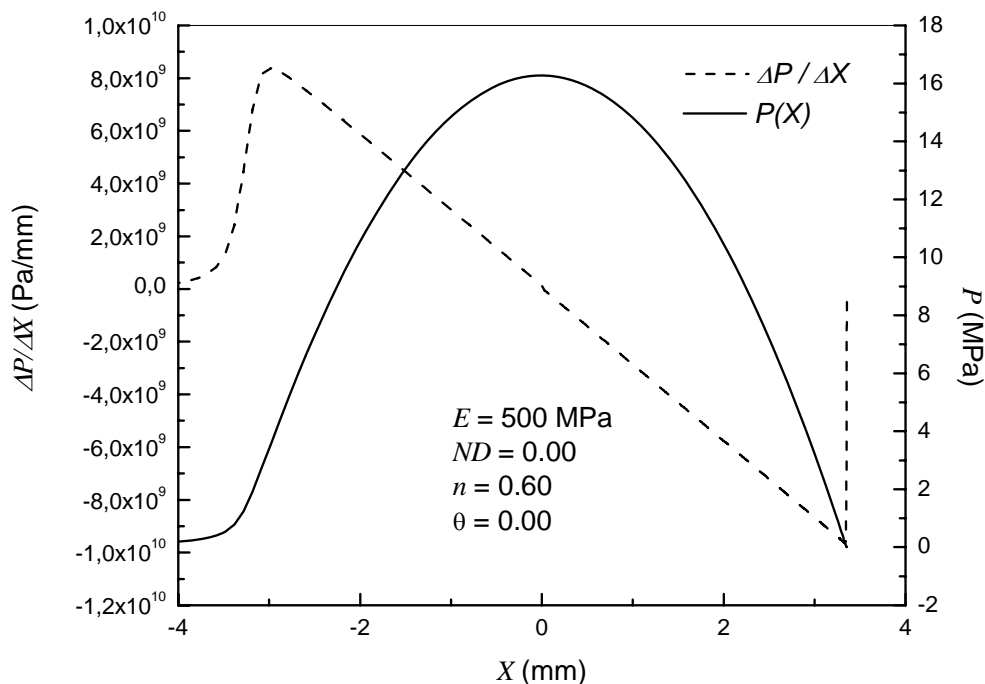


Figura 7.15: Gradiente de presiones superpuesto a la curva de presiones de un material elástico ($ND=0.00$) de módulo $E=500$ MPa.

El material utilizado actualmente para conformar la superficie articular del componente tibial en la mayoría de los implantes articulares (polietileno), tiene un módulo elástico mínimo de $E=500$ MPa y su respuesta a la fluencia se ajusta en forma aproximada al modelo de Voigt (ver curva deformación-tiempo en la referencia [28]). Debido a que el modelo de deformación es el mismo, es evidente que las tendencias de los resultados para este material serán similares a las analizadas para el material de $E=20.0$ MPa. Pero en este caso, a pesar de que los gradientes de presiones de la figura 7.15 son 8 veces superiores que los mostrados en la figura 7.5, el módulo elástico es 25 veces superior, motivo por el cual la influencia de la interacción entre los elementos que conforman el modelo de Voigt sobre los valores de las variables no es claramente predecible. Debido a que la respuesta de este material tiene interés práctico, merecen estudiarse las modificaciones que sufrirán los valores de las variables respecto del material con $E=20.0$ MPa.

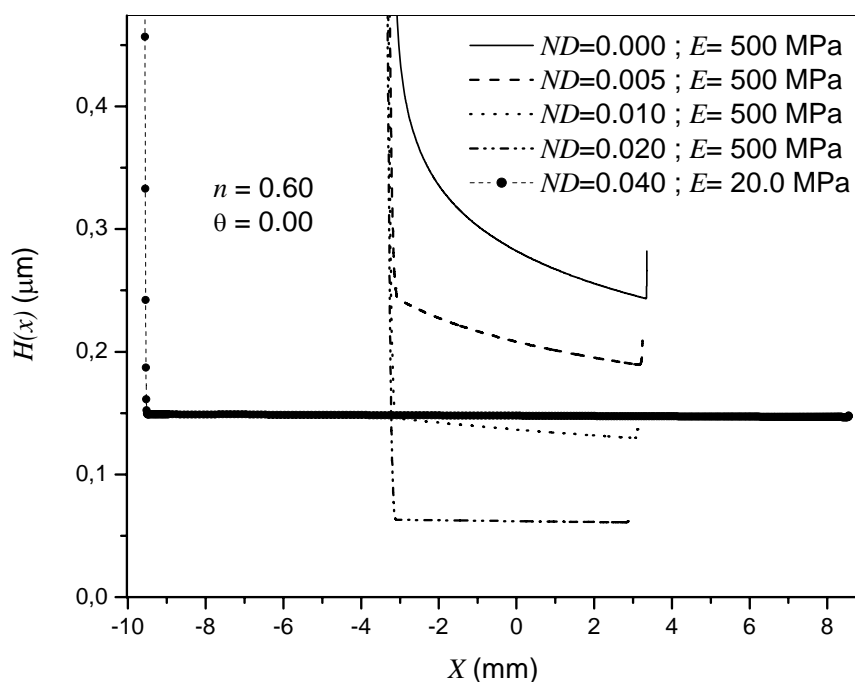


Figura 7.16: Canales de lubricación para un material viscoelástico de módulo $E=500$ MPa y cuatro valores de ND superpuestos al canal de un material de módulo $E= 20.0$ MPa y $ND=0.04$.

La figura 7.16 muestra la evolución del canal de lubricación conforme aumenta el parámetro ND . El rango de variación de ND para este caso ha sido menor que para el material de $E=20.0$ MPa ya que cuando el espesor de los canales de lubricación se tornan demasiado pequeños, la convergencia del programa está comprometida debido a que, como se mencionó en el capítulo 5, pequeñas variaciones de $H(x)$ generan elevados cambios en los valores de la presión (ver ecuación (4-7) o (5-4)).

La tendencia en los canales de la figura 7.16 muestra que un material viscoelástico cuyo módulo de Young es $E=500$ MPa presentaría también efectos perjudiciales ante aumentos de ND respecto de su equivalente elástico, generando por ejemplo canales con espesores del orden de los $0.06 \mu\text{m}$ para $ND=0.02$. Evidentemente, la hipótesis de lubricación por película de fluido que da sustento al modelo, no puede asegurarse para este caso al arrojar valores de canal en rangos que se acercan a las asperezas del metal. Con estas dimensiones, sería necesario incluir las fuerzas de interacción superficial y/o molecular, como las fuerzas de Van der Waals y las fuerzas de solvatación, para predecir adecuadamente el valor de las variables VEHD [44, 45]. No obstante, es posible predecir que un material viscoelástico de Voigt de elevada rigidez y con una viscosidad elevada, no podría generar condiciones de lubricación de película completa de fluido, favoreciendo el contacto directo entre los materiales con la consiguiente abrasión.

Pero si queremos comparar la respuesta de materiales viscoelásticos con diferentes módulos elásticos para una viscosidad determinada, no podemos utilizar directamente el parámetro ND porque el mismo contiene el módulo de Young del material, sino que debemos considerar la relación $\eta'' = E'' ND (RL)^{0.5} / V$ (ver capítulo 5). Por ejemplo, si intentamos comparar la respuesta a una viscosidad determinada entre un material de $E=20.0$ MPa y $ND=0.04$ y un material de $E=500$ MPa, el valor de ND que corresponde a este último debe ser $ND=0.16 \times 10^{-2}$. Es evidente que la superior rigidez del polietileno (500 MPa) lo torna menos sensible a los efectos de la viscosidad respecto al material de $E=20.0$ MPa, ya que de la figura 7.16 se infiere que las variaciones en el canal para $E=500$ MPa y $ND=0.16 \times 10^{-2}$ respecto de su equivalente elástico ($ND=0.00$) son muy pequeñas comparadas con las variaciones sufridas por el material de $E=20.0$ MPa con $ND=0.04$ (también respecto de su equivalente elástico). El material de $E=500$ MPa debe alcanzar un valor de $ND=0.01$ para adquirir espesores lubricantes de dimensiones similares a las observadas para $E=20.0$ MPa y $ND=0.04$. Esto significa que el primer material ($E=500$ MPa) necesita tener una viscosidad 6.25 veces mayor que el segundo ($E=20.0$ MPa) en esta comparación para tener el mismo espesor lubricante. En este sentido, a pesar de que ningún material viscoelástico muestra un comportamiento beneficioso sobre el fenómeno de lubricación respecto de los materiales elásticos, las variaciones en las condiciones de lubricación para juntas con materiales viscoelásticos de baja rigidez son más sensibles al efecto de la viscosidad.

La figura 7.17 ilustra el campo de deformaciones para un valor de $ND=0.01$, destacando la influencia de la parte viscosa al inicio de la deformación y su valor distinto de cero al final del canal, con morfologías similares a las mostradas en la 7. 7. Por lo expuesto en la sección anterior, la deformación no nula en la desembocadura del canal puede resultar perjudicial en los implantes actuales, ya que las sucesivas deformaciones que podrían generarse en una caminata normal, inducirían condiciones de tensión y deformación internas propicias para su fatiga. Esto es, al quedar deformado el material al final del canal de lubricación, como la presión en su superficie es nula, las tensiones del elemento viscoso (amortiguador de la figura 7.4) se compensan con las del elemento elástico, por lo que este último soporta tensiones hasta recuperar el estado de deformación nula. Sumando a este hecho, la curva de presión mostrada en la figura 7.18 se mantiene en valores cercanos a los mostrados en la figura 7.2 para el caso elástico. Si bien el límite elástico del polietileno se sitúa alrededor de 21.0 MPa [5], los fabricantes recomiendan no sobrepasar los 10.0 Mpa, sugiriendo una tensión de 5.00 MPa [46] como valor de diseño para evitar la fatiga temprana. Por otra parte, existen datos experimentales mostrando que el polietileno tardaría alrededor de 30 minutos para recuperarse completamente de una deformación [5] mientras que en la marcha se generan picos de presión repetidos en pocos segundos. Estos picos llegan a tomar valores mayores a los 16.0 MPa para polietilenos de $E = 500$ MPa de módulo elástico como muestra la figura 7.18. Sólo para $E = 20.0$ MPa, la presión máxima está por debajo de los 5.00 MPa.

De esta discusión se extrae que dada la deformación no nula que se observa al final del canal de la figura 7.17, los elevados picos de presión de la figura 7.18, la repetición de un paso cada segundo y los 30 minutos necesarios para la recuperación del material, la viscoelasticidad del polímero podría ser una importante causa mecánica en la aparición de puntos internos de falla por fatiga. Como la sensibilidad a la viscosidad del material que responde al modelo de Voigt ha mostrado ser dependiente del módulo elástico, es probable que una solución a corto plazo pueda ser rigidizar al polietileno. No obstante, debe tenerse en cuenta los reducidos canales y la concentración de tensiones que esto puede acarrear, necesitando probablemente mejorar la congruencia entre los elementos para reducir los elevados picos de presión y elevar el espesor lubricante entre los materiales.

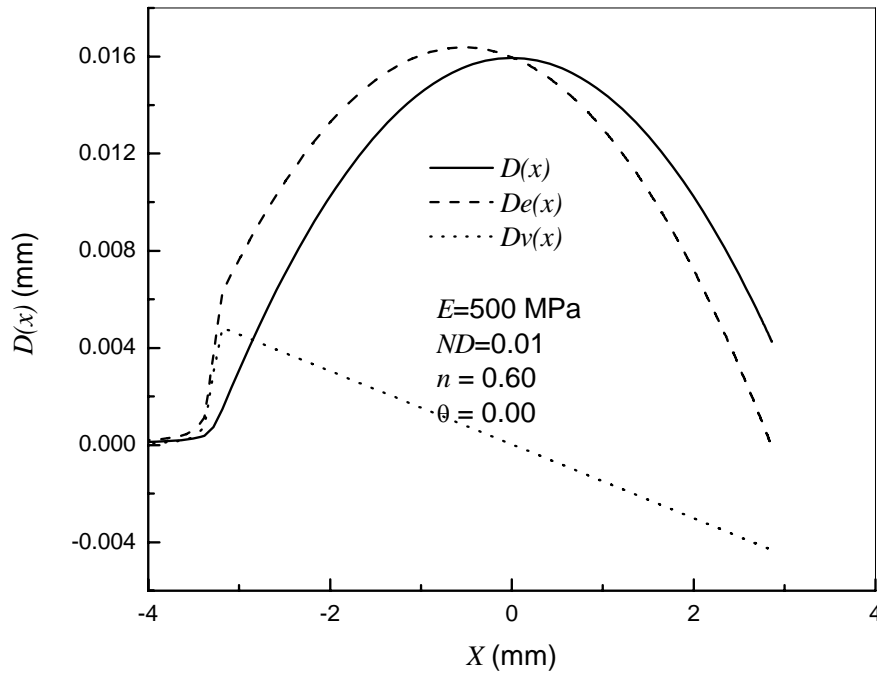


Figura 7.17: Desplazamiento total ($D(x)$) de la superficie del componente tibial, superpuesto a la componente elástica ($De(x)$) y la componente viscosa ($Dv(x)$) de la ecuación (3-21).

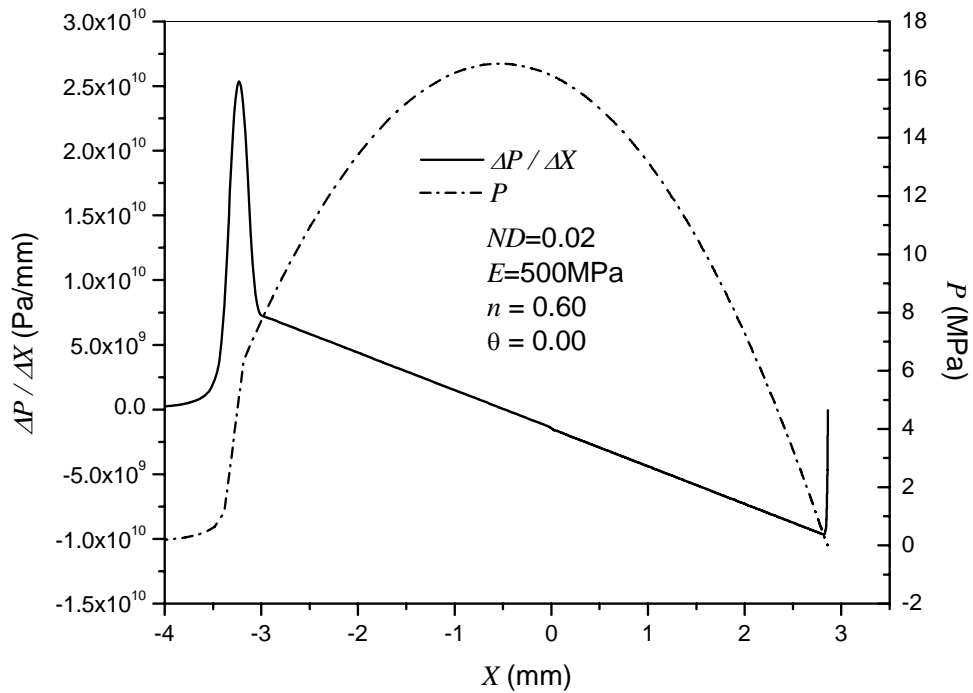


Figura 7.18: Campo de presiones superpuesto al gradiente de presiones, para un material de 500 MPa de módulo elástico y $ND=0.02$.

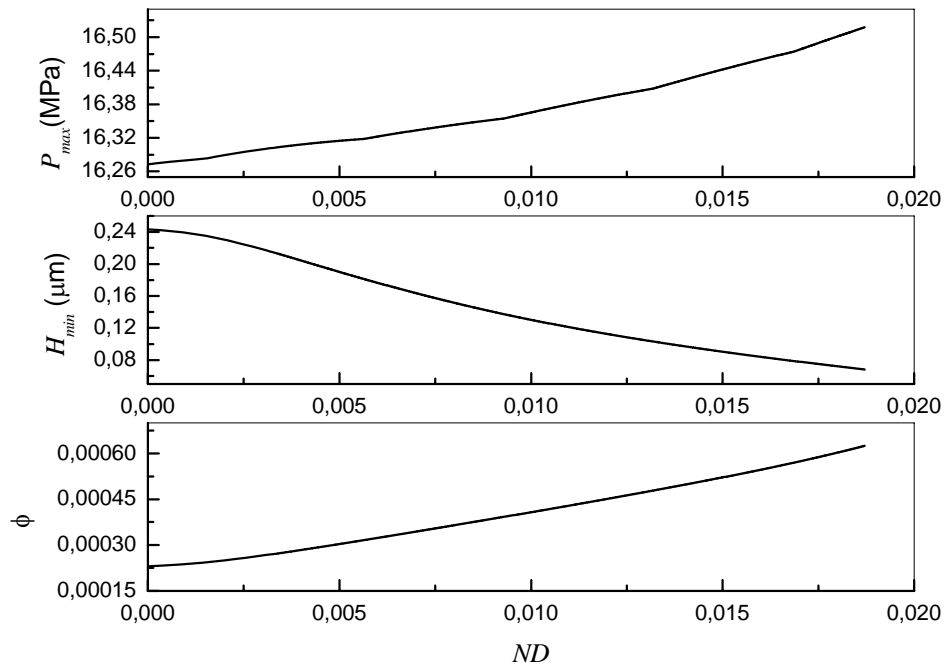


Figura 7.19: Evolución de la presión máxima, el mínimo espesor del canal y el coeficiente de fricción a medida que aumenta el parámetro viscoelástico ND .

La figura 7.19 muestra la evolución de las variables con el aumento de ND . Al igual que para el material de 20.0 MPa, la presión presenta pequeñas modificaciones en el rango de ND explorado, alcanzando un aumento del 1.8 %. Esto no sucede con el canal, el cual sufre una reducción de aproximadamente el 72 % en todo el rango de ND , motivo por el cual es posible predecir que el aumento del coeficiente de fricción observado en las predicciones de la sección anterior se manifiesten también para este caso. Este aumento alcanza el 170 % entre los extremos de ND . Si bien el aumento del coeficiente de fricción es elevado, no puede explicar por sí solo el hecho de que el polietileno arroje coeficientes de fricción más elevados que el poliuretano en el trabajo de Scholes et al. [41]. Es posible que indirectamente la viscoelasticidad sea responsable, en el sentido de que el elevado estrechamiento del canal evitaría la existencia de una lubricación por película de fluido completa, favoreciendo así el contacto directo entre los materiales, con altas posibilidades de desgaste por abrasión y coeficientes de fricción más elevados que los mostrados en la figura 7.19.

Todas las modificaciones que la viscoelasticidad introduce en las variables para un material de $E=500$ MPa, elevan aún más las posibilidades de desgaste predichas para el caso elástico. Si bien los canales mostrados en la figura 7.1 ponen en duda la posibilidad de un contacto directo entre los materiales que conforman la junta artificial, la inclusión de la viscoelasticidad en el modelo confirman dichas hipótesis mostrando espesores lubricantes muy inferiores a las rugosidades superficiales. Resulta entonces

razonable suponer que el polietileno de las prótesis actuales, cuyo módulo elástico ronda el valor de $E=1.00$ GPa, no puede generar un modo de lubricación por película completa de fluido.

En general, al predecir el comportamiento de una junta de lubricación con material viscoelástico, se utiliza un solo modelo reológico del material, siendo este el modelo de Maxwell [47] o el Sólido Estándar Lineal [43]. Pero los trabajos mencionados no indican las posibles modificaciones que podrían ocurrir si el material respondiese a otro modelo de deformación. Entonces surgen nuevos interrogantes: ¿Es indistinto utilizar cualquier modelo viscoelástico para predecir el comportamiento de un material a ser utilizado en una junta artificial?. De ser así, puede utilizarse el modelo más sencillo para el diseño de nuevos materiales para juntas artificiales y obtener resultados mas rápidamente, pero ¿es válido realizar predicciones con cualquier modelo?. En general, ¿todos los modelos viscoelásticos arrojan predicciones de similares características mecánicas?. En las siguientes secciones mostraremos los resultados para un Sólido Estándar Lineal con los objetivos de dilucidar estos interrogantes y al mismo tiempo, intentar predecir el comportamiento de una junta artificial con un material que responda al modelo Sólido Estándar Lineal.

7-4 Sólido Estándar Lineal (SEL).

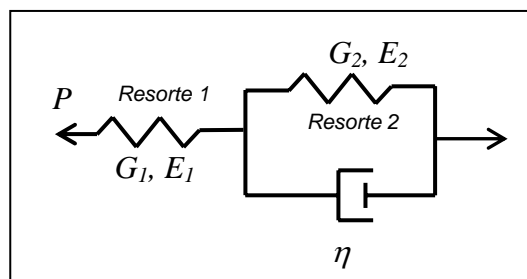


Figura 7.20

Al estudiar la respuesta de la junta artificial para el Sólido Estándar Lineal, surge el inconveniente de que el modelo (ver figura 7.20) contiene 3 parámetros que deben determinarse, lo cual dificulta la elección de los mismos al carecer de datos experimentales. Para el caso anterior (modelo de Voigt), se puede fijar el valor del módulo elástico y dejar como parámetro en el proceso de continuación paramétrica la viscosidad del material (a través del parámetro ND). En este caso (modelo SEL), se puede fijar el valor del módulo elástico de un solo resorte de la figura 7.20, quedando otros dos parámetros para ser explorados mediante continuación paramétrica, lo cual

arrojaría un volumen de resultados demasiado extenso y probablemente de poca utilidad para las aplicaciones prácticas que se intentan dar a estos resultados.

En este trabajo se seleccionará el módulo elástico de ambos resortes de la figura 7.20 de manera tal que cuando el amortiguador tenga viscosidad cero, el módulo elástico equivalente (E_{eq}) del conjunto sea el valor que hemos considerado hasta ahora para cada material (20.0 MPa o 500 MPa). En todo el rango de variación del parámetro ND , para $\eta''=0.00$ ($ND=0.00$), actúan los dos resortes en serie, tal que $1/E_{eq}=1/E_1+1/E_2$, mientras que para $\eta''\rightarrow\infty$ ($ND\rightarrow\infty$), actúa solamente el resorte individual (resorte 1, ver figura 7.20). De esta manera, para que E_{eq} sea por ejemplo 20.0 MPa cuando $ND=0.00$, entonces una combinación posible de módulos elásticos sería $E_1=E_2=40.0$ MPa.

Cabe aclarar que la denominación de resorte se utiliza para una ilustración gráfica, haciendo referencia a los elementos elásticos representados por los módulos elásticos E_1 y E_2 .

7-4.1 Resultados para el modelo SEL con módulo $E_{eq}=20.0$ MPa.

Retornando a la figura 7.5, podemos nuevamente intuir que el inicio y final del canal serán las ubicaciones donde se deben manifestar los efectos más notorios de la viscosidad del material dependiendo del valor de ND . Pero para el Sólido Estándar Lineal, la diferencia radica en que el resorte en serie con el elemento de Voigt aportará una deformación elástica independiente del gradiente de presiones. Por este motivo, si el resorte 1 de la figura 7.20 tiene un módulo elástico bajo, su deformación a la entrada y salida del canal atenuará los efectos de la viscosidad respecto a los resultados obtenidos con el modelo de Voigt. Esto puede observarse en la figura 7.21, en la cual se comparan los canales de lubricación de materiales elásticos de módulos $E=20.0$ MPa y $E=500$ MPa ($ND=0.00$) con otros dos materiales viscoelásticos de módulo $E=20.0$ MPa que responden a modelos diferentes (VG y SEL) para un valor de $ND=0.04$. Puede notarse una marcada diferencia entre los valores de los canales obtenidos para el modelo VG y el modelo SEL con $E=20.0$ MPa. Mientras que para el primero hemos visto que el canal de lubricación adquiere espesores menores al material elástico de módulo $E=500$ MPa, el segundo (modelo SEL) muestra un espesor mayor a $0.69\ \mu\text{m}$, sugiriendo que para los valores de los parámetros seleccionados ($E_1=E_2=40.0$ MPa, $ND=0.04$), el modelo SEL pueda predecir un régimen de lubricación de película completa con valores de viscosidad para los cuales el modelo VG no lo hace. Incluso, al observar los valores de mínimo espesor del lubricante (H_{min}) en

la figura 7.22, el valor más pequeño de H_{min} (para $ND=ND_{min}$) es mayor a $0.64 \mu\text{m}$, evidenciando la existencia de un canal con mayor dimensión que las rugosidades superficiales para cualquier valor de ND . Esto significa que, a pesar de que la viscoelasticidad del material SEL reduce el espesor lubricante, dicha reducción tiene un límite máximo tal que el espesor del canal resultante supera las rugosidades superficiales y, por lo tanto, para un material que se comportara así se reduciría la posibilidad de un contacto directo entre los materiales.

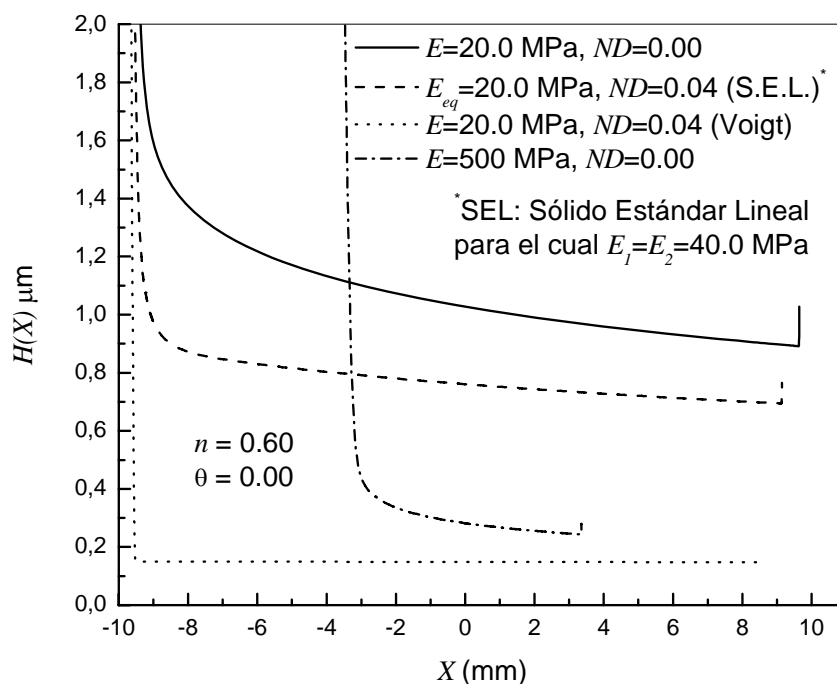


Figura 7.21: Espesores del canal de lubricación para materiales elásticos de módulos $E=20.0 \text{ MPa}$ y 500 MPa comparados con un material VG ($E= 20.0 \text{ MPa}$ y $ND=0.04$.) y un material SEL ($E_{eq}= 20.0 \text{ MPa}$ y $ND=0.04$).

La figura 7.22 muestra además que para un valor muy grande de ND , el valor del espesor mínimo tenderá al resultado que obtendríamos para un material elástico con módulo $E= 40.0 \text{ MPa}$ ($H_{min}=0.67 \mu\text{m}$, ver figura 7.1), ya que cuando la viscosidad del amortiguador tiende a infinito, solo estaría actuando el resorte individual.

En todo el rango explorado del parámetro ND de la figura 7.22, el espesor mínimo tiene un marcado descenso al inicio llegando hasta su valor más bajo para $ND=3.03 \times 10^{-1}$ luego del cual asciende nuevamente para finalmente tender en forma asintótica al valor $H_{min}=0.67 \mu\text{m}$. Puede observarse que los efectos viscoelásticos sobre el H_{min} se manifiestan principalmente en el rango $0.00 < ND < 1.00$, demostrando mayor sensibilidad para valores bajos de ND . Esto es, las variaciones más pronunciadas de H_{min} se manifiestan en el rango $0.00 < ND < ND_{min}$. De acuerdo a la

definición de ND (ver capítulo 5) $Hmin$ experimenta un mínimo ($ND=3.03 \times 10^{-1}$) para una viscosidad equivalente tal que $\eta''/E''=0,5$ s. Pero estos valores dependen de la combinación de los módulos elásticos de los resortes. Con el fin de ilustrar esta afirmación, se obtuvieron resultados para distintas combinaciones en los valores de los resortes mostrados en la figura 7.23, tal que el módulo elástico equivalente (E_{eq}) del conjunto para $ND=0.00$ sea $E_{eq}=20.0$ MPa. Correspondientemente, la figura 7.24 muestra la curva de $Hmin$ relacionada a cada combinación de la figura 7.23, resaltando que en el caso 5 se arriba al elemento de Voigt para el cual, debido a problemas numéricos, no se pudieron obtener resultados para valores de ND mayores a 0.55×10^{-1} . Las curvas de la figura 7.24 muestran entonces la tendencia de los resultados a medida que se reduce el valor del resorte individual (resorte 1) y crece el módulo elástico del resorte en paralelo al amortiguador (resorte 2). Puede notarse que un material logrará los valores más elevados del espesor lubricante para todo el rango de ND conforme el mismo tienda a la situación elástica ($E_2 \rightarrow \infty$), mientras que adquirirá los espesores más pequeños a medida que se acerque a un esquema de Voigt (caso 5, $E_1 \rightarrow \infty$).

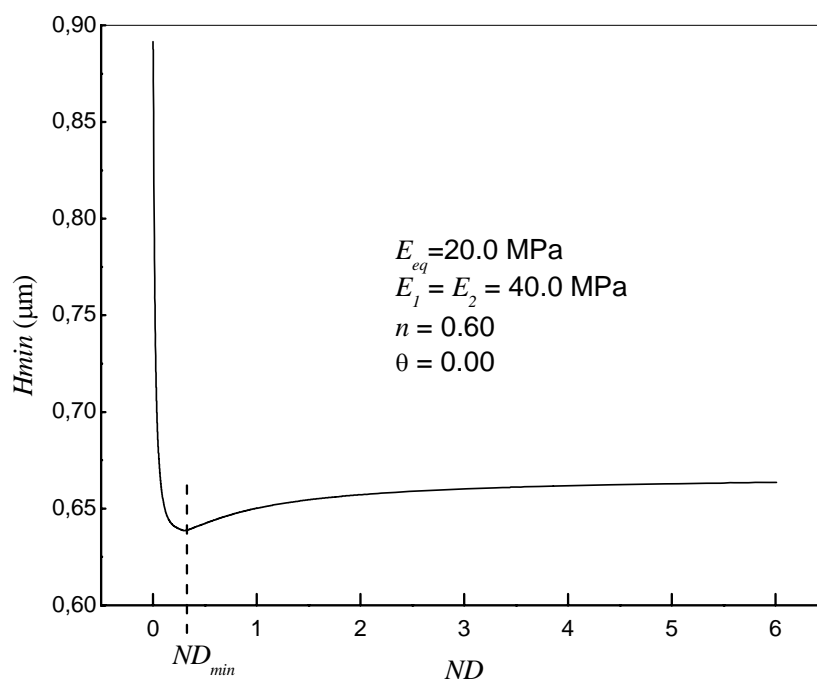


Figura 7.22: Mínimo espesor del lubricante ($Hmin$) en función del parámetro ND para un material SEL cuyos valores elásticos se muestran en la figura.

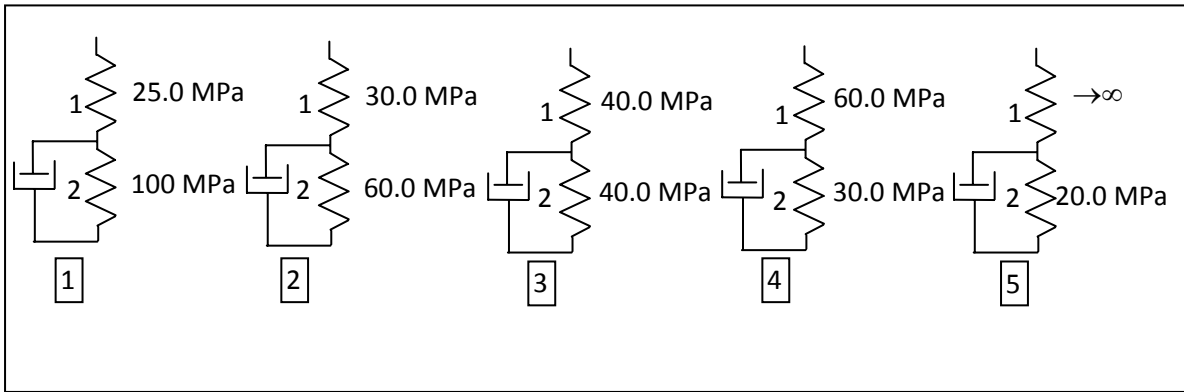


Figura 7.23: Sólido Estándar Lineal para distintas combinaciones en los módulos elásticos de los resortes. En el texto, E_1 es el módulo elástico del elemento elástico superior (Resorte 1, individual) y E_2 es módulo elástico del elemento elástico inferior (Resorte 2, paralelo al amortiguador). El módulo elástico equivalente $E_{eq}=(E_1E_2/(E_1+E_2))$ es el mismo para todos los casos ($E_{eq}=20.0$ MPa).

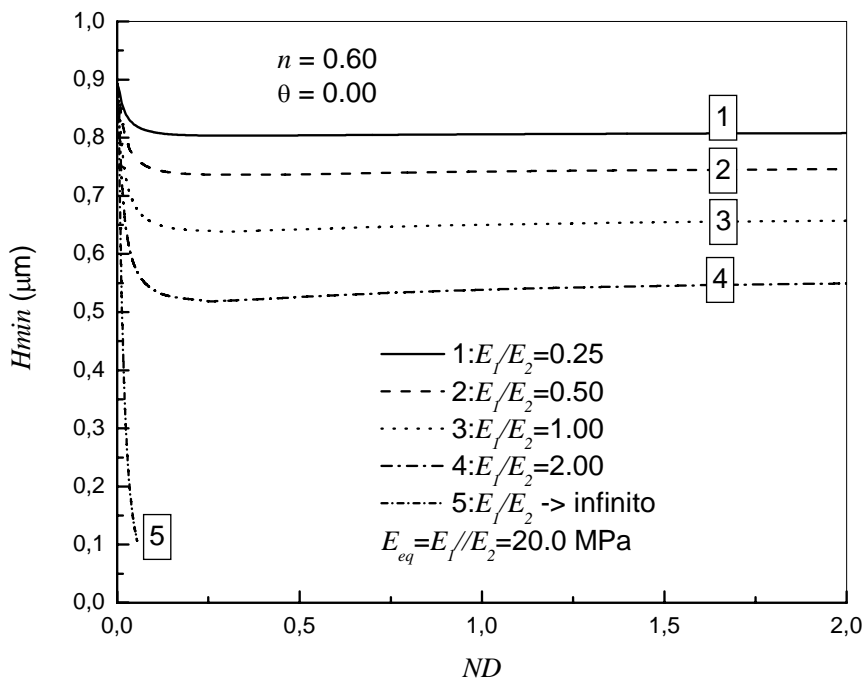


Figura 7.24: Valor mínimo del espesor lubricante (H_{min}) en función de ND correspondiente a las combinaciones de la figura 7.23.

Observando detenidamente las curvas de la figura 7.24 es notable la similitud morfológica de las mismas. Luego de realizar una gran cantidad de cálculos, en este trabajo se ha formulado la hipótesis de que la diferencia entre $H_{min}(ND \rightarrow \infty)$ y $H_{min}(ND_{min})$ parece tener un patrón de crecimiento relacionado con la diferencia entre $H_{min}(ND=0.00)$ y $H_{min}(ND \rightarrow \infty)$. Con el objetivo de encontrar una relación entre los valores de H_{min} mencionados, se han graficado en la figura 7.25 el valor de

$Hmin(ND_{min})$ obtenido de las simulaciones para cada caso de la figura 7.23 superpuesta a los valores calculados de la siguiente relación propuesta por el autor de este trabajo:

$$(Hmin(ND \rightarrow \infty) - Hmin(ND_{min})) / (Hmin(ND=0.00) - Hmin(ND \rightarrow \infty)) = 0.15 \quad (R1)$$

Puede verse la estrecha cercanía entre las curvas, lo cual permite inferir que la relación R1 podría ser utilizada para estimar en forma aproximada cuál será el valor de $Hmin(ND_{min})$ dentro del rango de ND explorado ante una combinación determinada de los módulos elásticos de los resortes (para $E_{eq}=20.0$ MPa), conociendo el valor de $Hmin$ en los casos puramente elásticos extremos, esto es para $ND=0.00$ y para $ND \rightarrow \infty$. Más adelante veremos que esta relación también se cumple para las combinaciones exploradas en el caso de E_{eq} 500 MPa. Si bien no puede asegurarse que la relación R1 se puede utilizar para cualquier otro caso, lo cual queda por investigar en futuros trabajos, para los valores explorados en esta tesis dicha relación permite deducir que el mínimo valor posible para $Hmin$ será cercano al valor que el mismo adquiere para $ND \rightarrow \infty$, y siempre será menor a este. Una posible explicación de este fenómeno se expondrá más adelante en esta sección.

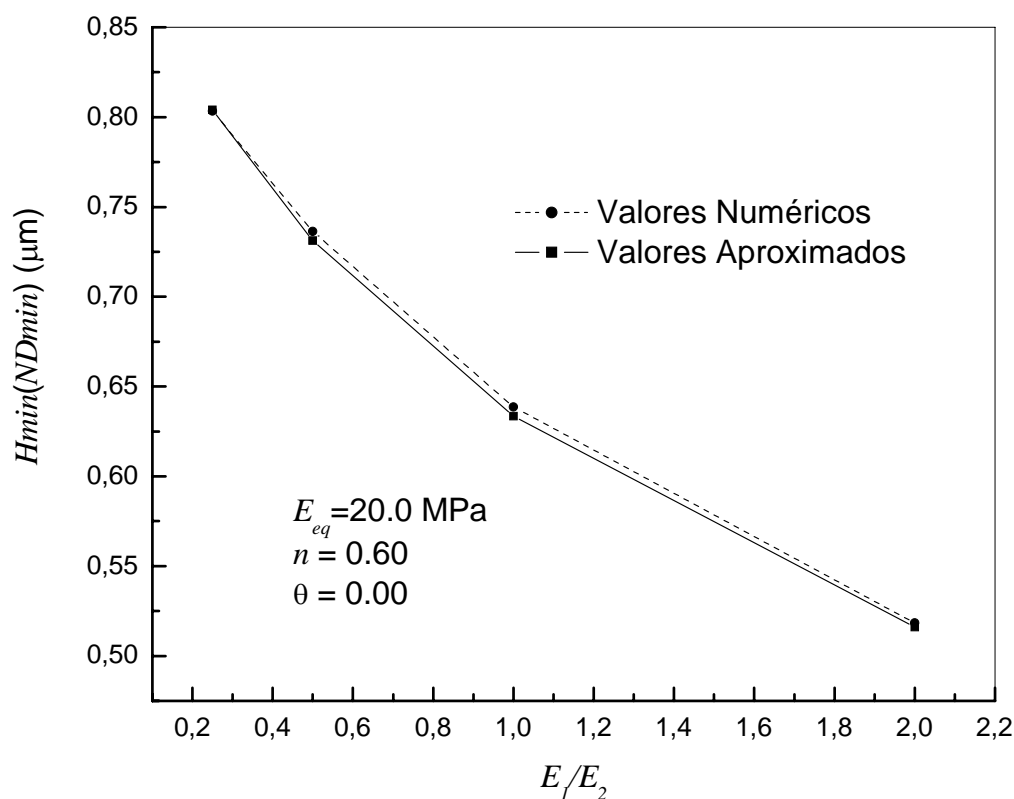


Figura 7.25: Comparación entre los valores de $Hmin(ND_{min})$ obtenidos en las simulaciones y el calculado mediante la relación (R1).

Tomando como ejemplo los valores de los resortes correspondiente al caso 2 de la figura 7.23, la mejor respuesta del SEL (no válido para el caso 5) respecto del modelo VG en cuanto a los espesores lubricantes, se debe en gran medida a la existencia del resorte individual (Resorte 1, ver figura 7.20) que le confiere la elasticidad necesaria para que, independientemente del valor de la viscosidad del material, exista siempre una deformación elástica. Para ilustrar esta afirmación, la figura 7.26 muestra las deformaciones del material para una combinación $E_1=E_2=40.0$ MPa y para un valor $ND=6.00$. Puede observarse que debido al valor elevado de la viscosidad del material, la deformación total ($D(X)$) adquiere valores muy próximos a la deformación que aporta el resorte individual ($DE_1(X)$), y deberían ser iguales para $ND \rightarrow \infty$. Al mismo tiempo, la figura 7.26 corrobora el análisis mostrado en la tabla 1 del capítulo 3, en el cual se predice que conforme la viscosidad del material tiende a infinito, el resultado de la integral de la ecuación (3-25) ($D_v(X)$) tiende a una solución puramente elástica, compensando las deformaciones que tendría el resorte en paralelo al amortiguador (resorte 2 de la figura 7.20). Con estas afirmaciones, a pesar de no haber podido obtener resultados para valores elevados de ND , resulta razonable suponer que en el modelo VG la junta se comportará como un cojinete de materiales perfectamente rígidos si la viscosidad tiende a infinito, ya que al no poseer un resorte individual su deformación será nula. Si obtenemos el valor de H_{min} para un cojinete de materiales rígidos, suponiendo válida la relación R1 para este caso, podríamos estimar el valor aproximado de $H_{min}(ND_{min})$ para el material VG. Observando los valores de H_{min} obtenidos para un material elástico de $E=500$ MPa, resulta razonable pensar que para $E_1 \rightarrow \infty$, $H_{min}(ND_{min})$ podría tender a cero, justificando los problemas de convergencia experimentados para este trabajo con el modelo VG para obtener resultados a altos valores de ND .

Otra causa de la mejor respuesta predicha para el modelo SEL en los casos 1 a 4 frente al modelo VG, está relacionada con un valor de E_2 que supera los 20.0 MPa. Las combinaciones de la figura 7.23 fueron seleccionadas de forma tal que cuando la viscosidad del material sea nula ($ND=0.00$), el módulo elástico equivalente sea de 20.0 MPa. Esto nos permite barrer un gran rango de materiales partiendo de una situación elástica ($E_1=20.0$ MPa y $E_2 \rightarrow \infty$) y desembocando en el modelo VG ($E_1 \rightarrow \infty$ y $E_2=20.0$ MPa). Por lo tanto el resorte 2 en paralelo al amortiguador, siempre tiene un módulo elástico $E_2 > 20.0$ MPa (excepto para VG), lo cual repercute en una atenuación en la respuesta del amortiguador respecto del modelo VG. Estas afirmaciones se ilustran en la figura 7.27, en la cual se grafican las componentes viscosas de la

ecuación (3-25) (integral) para los casos 2, 3 y 4. Puede notarse que a medida que el módulo elástico del resorte 2 se reduce, el componente viscoso de la deformación ($D_v(X)$) crece. Como $D_v(X)$ repercute negativamente sobre la deformación total (ver ecuación (3-25)), y por lo tanto sobre el canal de lubricación, cuanto mayor sea el valor E_2 crecerá la atenuación del componente viscoso.

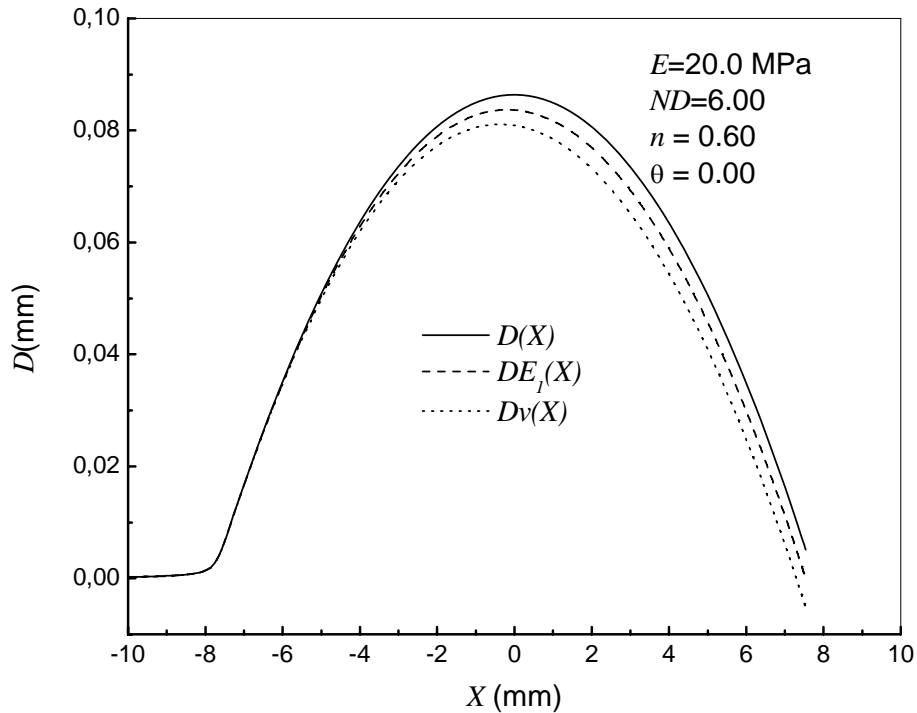


Figura 7.26: Deformación total ($D(X)$), componente viscosa de la ecuación de deformación (3-25) ($D_v(X)$) y deformación del resorte individual 1 ($DE_1(X)$).

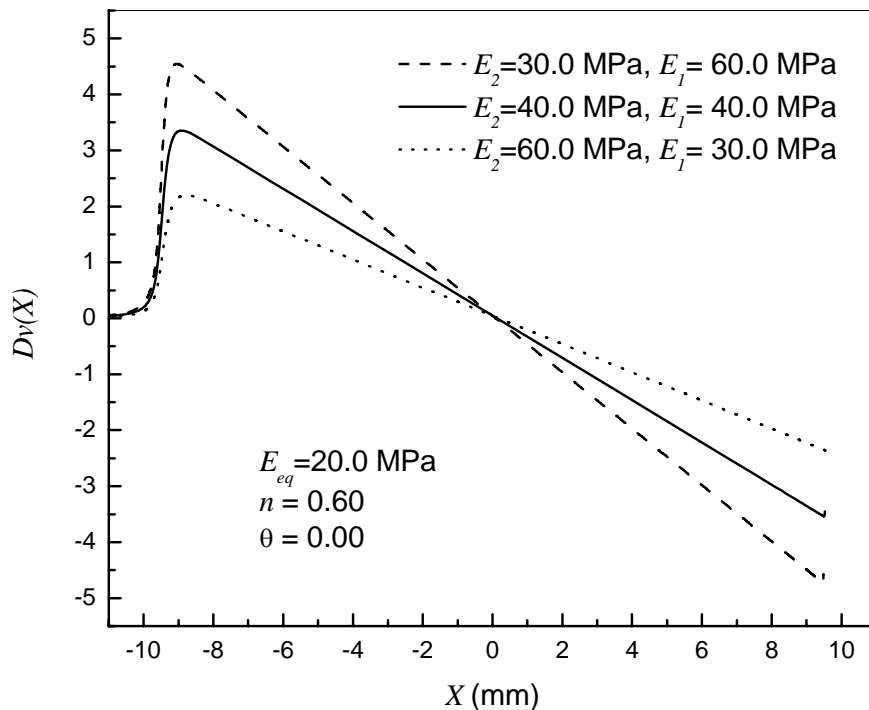


Figura 7.27: Componente viscosa de la ecuación de deformación (3-25) del capítulo 3.

Como conclusiones previas, podemos decir que la mejor respuesta mecánica de la junta se logrará para el menor valor del resorte individual E_1 y el mayor valor del resorte en paralelo con el amortiguador E_2 , o sea, para una situación que se acerque al material elástico puro. Queda por investigar para futuros trabajos la respuesta de la junta manteniendo constante un módulo elástico a la vez (resorte 1 y luego resorte 2) a modo de encontrar los límites posibles en los valores de E_1 y E_2 para lograr un proceso de lubricación de película completa.

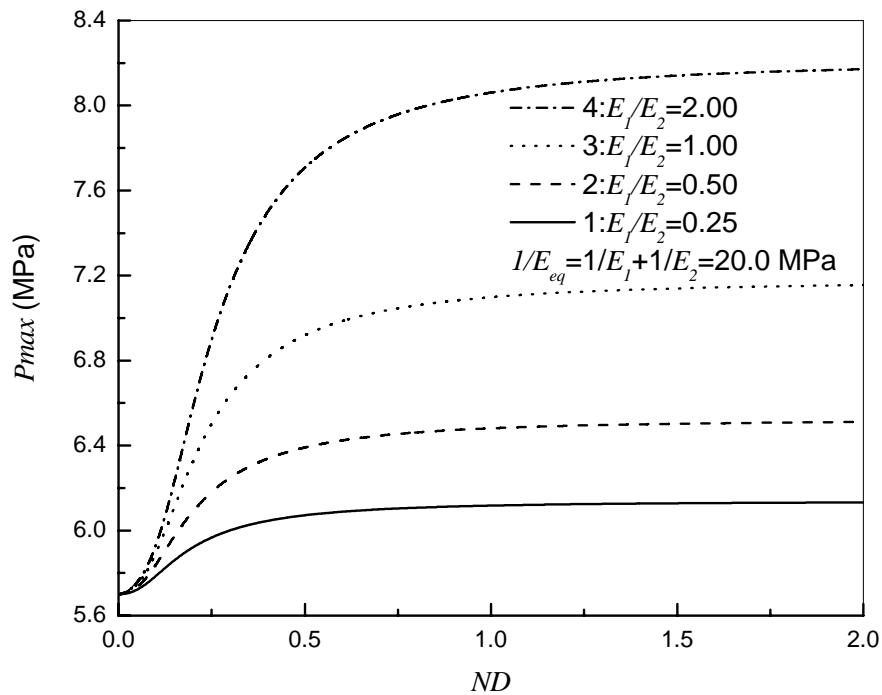


Figura 7.28: Valor máximo de la presión (P_{max}) para cada combinación de la figura 21 (excepto el caso 5) en función de ND .

El modelo SEL permite entonces recorrer todo el rango de valores del parámetro ND (excepto, por problemas numéricos, para el caso de VG) partiendo de una situación elástica para desembocar luego en otra situación elástica pero con un módulo de Young más elevado que el inicial, lo cual significa que la curva de presiones sufrirá modificaciones en sus valores máximos (P_{max}). La figura 7.28 muestra la evolución de la presión máxima (P_{max}) conforme crece la viscosidad del material (ND) para las combinaciones de los resortes de la figura 7.23 (excepto para el caso 5). El valor inicial corresponde al pico máximo de la curva mostrada en la figura 7.2 para el caso elástico y luego, para $ND \rightarrow \infty$, el valor de P_{max} tiende al máximo valor alcanzado para un material elástico con el módulo de Young del resorte 1. Para disminuir los riesgos de una temprana fatiga, es evidente que para un material SEL debería evitarse la zona de altas presiones. Esto implica diseñar un material que deba reducir al mínimo posible el

efecto de la viscosidad, pero con el riesgo de que a viscosidades bajas la sensibilidad en el cambio de las variables ante cambios de ND sea elevada.

Entre los valores extremos de P_{max} , la curva de presión sufre nuevamente un desplazamiento del pico máximo hacia un costado del centro del contacto, como muestra la figura 7.29. La ubicación del valor máximo de presión depende de la combinación de módulos elásticos, lo cual puede observarse con mayor claridad en la figura 7.30 la cual muestra los máximos desplazamientos de P_{max} para cada combinación de resortes de la figura 7.23.

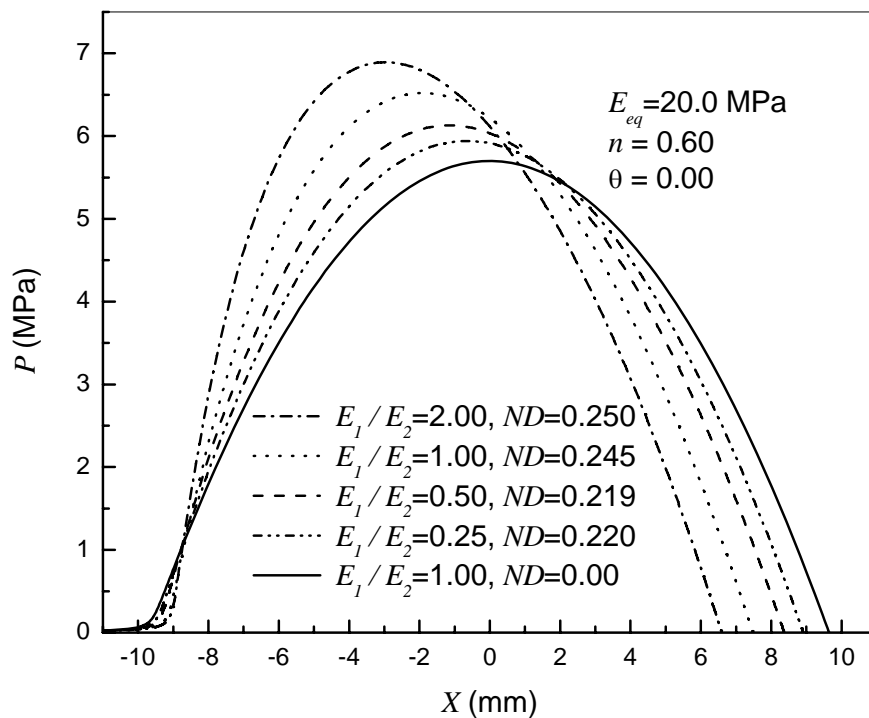


Figura 7.29: campo de presiones para un material SEL con módulo $E_{eq}=20.0 \text{ MPa}$. Las distintas curvas se grafican para los valores de ND que producen el máximo corrimiento de $P_{máx}$ (ver figura 7.30) desde el centro del contacto ($X=0.00 \text{ mm}$).

El desplazamiento en la ubicación de P_{max} significa la aparición de un momento que se opondría a la rodadura, de la misma manera que se explicó en el modelo VG. El desplazamiento del pico máximo de presión depende de la combinación entre los módulos elásticos de los resortes (ver figura 7.30), ubicándose más lejos del centro a medida que la relación E_1/E_2 crece, o sea, a medida que nos alejamos de la combinación puramente elástica para la cual P_{max} se ubica en el centro del contacto.

Las figuras 7.29 y 7.30 nos permiten además proponer una explicación a la morfología de las curvas de H_{min} . Observando el modelo SEL (Figura 7.23) podemos ver que la deformación total tiene dos componentes, una debido al resorte 1 ($Re1$) y otra debido al paralelo entre el resorte 2 y el amortiguador ($Re2-A$) (ver ecuación (3-25)). Conforme

ND crece, $Re2-A$ va reduciendo su capacidad de deformarse, y podría pensarse que $Hmin$ se reduciría en forma monótona hasta alcanzar su mínimo para $ND \rightarrow \infty$, donde $Re2-A$ ya no se deforma y $Re1$ actúa solo. Esta situación es la que se produce al incrementar continuamente el valor del resorte 2 (en ausencia del amortiguador), cuya curva se muestra en la figura 7.31. Pero la curva de $Hmin$ para un material SEL, muestra un valor $Hmin (ND_{min})$ menor al valor de $Hmin (ND \rightarrow \infty)$, esto es, una curva diferente a la figura 7.31. Si bien esto deja abierta la discusión sobre las posibles causas de la curva para $Hmin$, a continuación se propone una hipótesis basada en la asimetría de la curva de presiones.

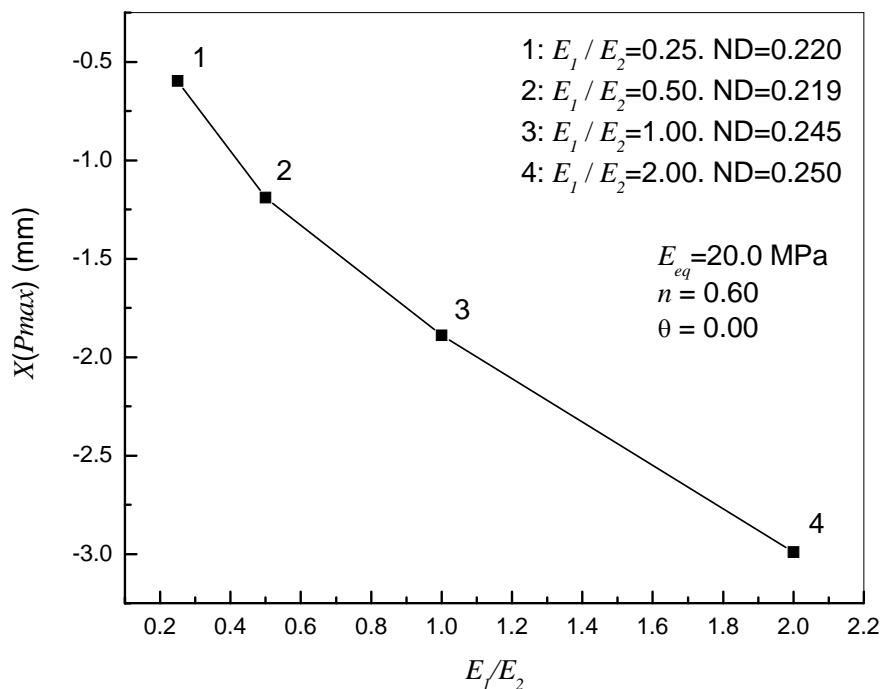


Figura 7.30: Máximo desplazamiento desde el centro del contacto para cada combinación en los resortes.

Al trasladarse $Pmax$ hacia un lado del centro del contacto para un material viscoelástico, el canal de lubricación debe estrecharse hacia el punto de traslación de $Pmax$ en mayor proporción que en una situación elástica, ya que de acuerdo a la ecuación de Reynolds modificada, el valor de la presión está relacionado inversamente con el espesor del lubricante. Como a ambos lados del centro de contacto la separación entre los elementos en un hipotético estado indeformado es mayor, entonces el entrecruzamiento en el centro del contacto Yc ($Yc=2H_0$) (ver ecuación 2.33) será mayor si la presión se traslada a un lado comparada con una curva de presión similar ubicada en el centro ($X=0.00$). Debido a que el mínimo valor de $H(X)$ se produce hacia la desembocadura del canal, con la traslación de la carga, $Hmin$

ahora queda más cerca del centro del contacto, como muestra la figura 7.32, esto es, H_{min} se acerca al lugar donde los elementos en un hipotético estado indeformado presentarían mayor acercamiento. Esto sumado al ejemplo que se expone a continuación, hace presumir que el valor mínimo de $H_{min} < H_{min}(ND \rightarrow \infty)$ para un material viscoelástico se produce debido a la asimetría en la curva de presión y, por lo tanto, a la traslación de la fuerza resultante hacia un lado del centro del contacto.

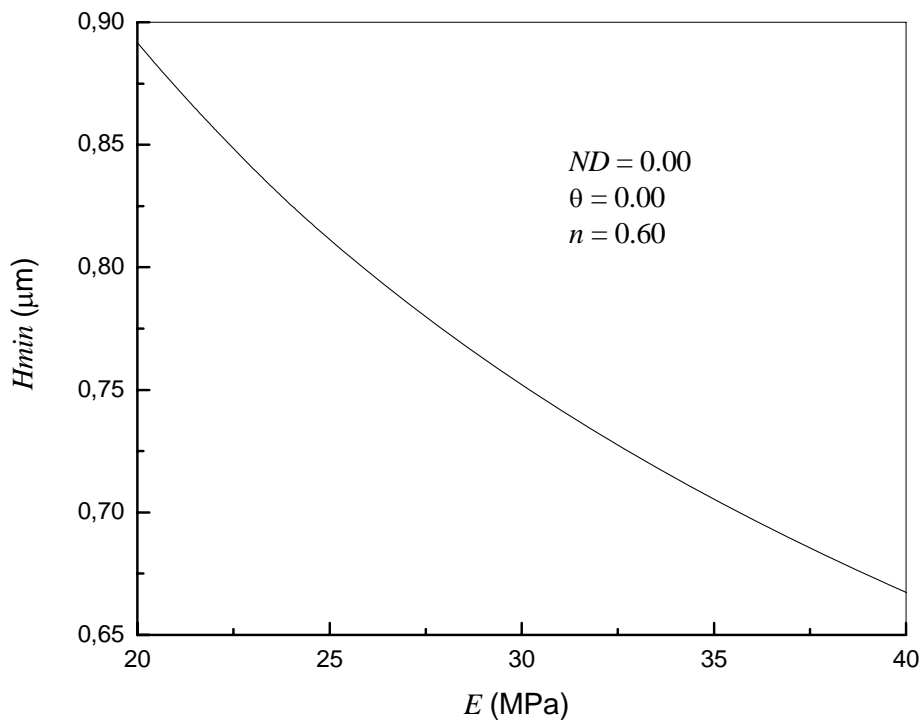


Figura 7.31: Mínimo canal de lubricación en función del módulo elástico para un material puramente elástico.

Es difícil contrastar un resultado para material viscoelástico con otro elástico que presenten valores similares en las variables para verificar estas afirmaciones. Pero a modo de ejemplo, la figura 7.33 muestra dos campos de presión con igual valor de P_{max} , uno centrado en $X=0.00$ mm para un material elástico de $E=32.0$ MPa y otro asimétrico para material viscoelástico SEL con $E_1 = E_2 = 40.0$ MPa y $ND = 3.03 \times 10^{-1}$. Para lograr el mismo valor de P_{max} (y una morfología similar en las curvas), el modelo elástico centrado en $X=0.00$ requiere de un entrecruzamiento $Y_c = -0.096$ mm y un valor de $H_{min} = 0.73$ μm, mientras que el modelo viscoelástico muestra un valor de $Y_c = -0.12$ mm y un $H_{min} = 0.64$ μm, esto es, mayor entrecruzamiento y menor espesor que en el caso elástico. En el primer caso (elástico) $X(P_{max}) = 0.00$ mm mientras que en el segundo (viscoelástico) $X(P_{max}) = -2$ mm.

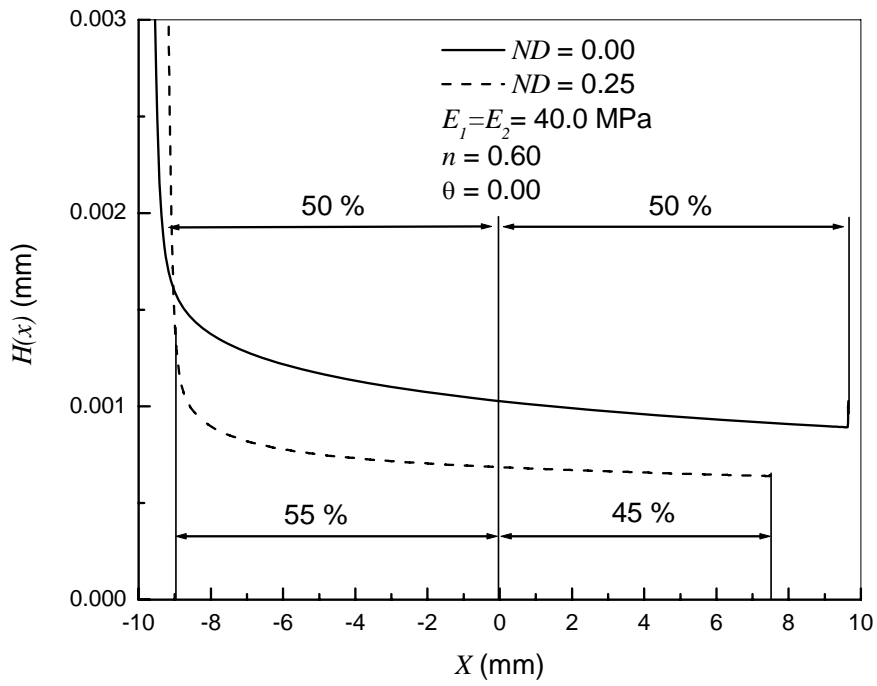


Figura 7.32: Traslación del canal de lubricación hacia la entrada del canal para el caso viscoelástico ($ND=0.25$) respecto del caso elástico ($ND=0.00$).

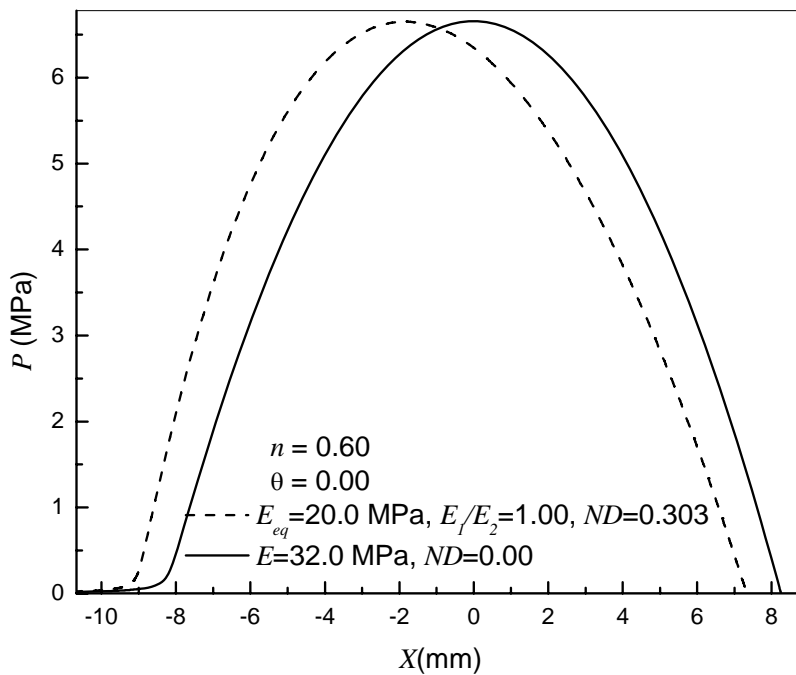


Figura 7.33: Campo de presión para un material elástico con módulo $E=32.0$ MPa y un material viscoelástico con $E_{eq}=20.0$ MPa, relación $E_1/E_2=1$ y $ND=3.06 \times 10^{-1}$.

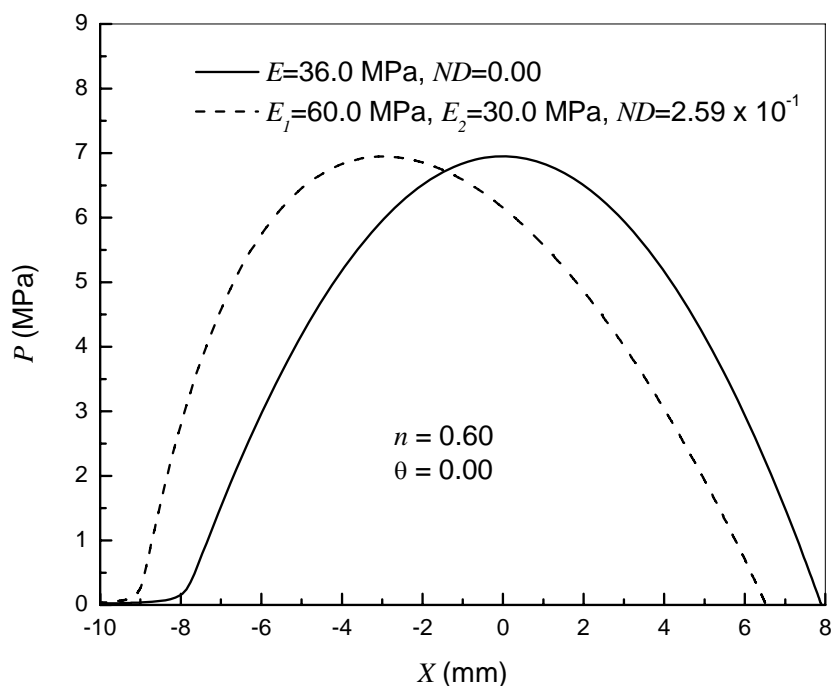


Figura 7.34: Campo de presión para un material elástico con módulo $E=36.0$ MPa y un material viscoelástico con $E_{eq}=20.0$ MPa, relación $E_1/E_2=2$ y $ND=2.59 \times 10^{-1}$.

Otro ejemplo se grafica en la figura 7.34. En el caso elástico, el modelo presenta un módulo $E=36.0$ MPa, con un entrecruzamiento de $Y_c=-0.0885$ mm con un $H_{min}=0.69$ μm , mientras que en el caso viscoelástico, el mismo pertenece al caso 4 de la figura 7.23 con un valor de $ND=2.59 \times 10^{-1}$, para el cual $Y_c=-0.116$ mm y $H_{min}=0.52$ μm . El valor de P_{max} para ambos es el mismo, pero su ubicación es diferente, siendo $X(P_{max})=0.00$ mm para el caso elástico y $X(P_{max})=-3.00$ mm para el caso viscoelástico.

Queda planteado para futuros trabajos explorar más detalladamente este aspecto en la curva de H_{min} , para investigar la validez de la hipótesis planteada.

Los resultados mostrados hasta aquí, ilustran que la viscoelasticidad del material genera cambios desfavorables en las variables que podrían influir sobre el desgaste del componente tibial. La posibilidad de utilizar un material SEL en una junta artificial muestra ser altamente dependiente del valor del módulo elástico equivalente y de la combinación entre los módulos elásticos de la figura 7.23. Si dicha combinación se acerca al caso 1, es posible que el material pueda generar un régimen de lubricación de película completa y distribuir la carga de manera tal que el valor máximo de presión no supere los valores permitidos por los fabricantes; y todo esto puede lograrse para todo el rango explorado del parámetro ND . Pero si la situación se aleja de este caso, entonces la respuesta del material quedará altamente sujeta al valor de la viscosidad del mismo, con el agravante de que el funcionamiento óptimo de la junta se logra para

valores muy pequeños de ND donde la respuesta del material presenta su sensibilidad más elevada a los cambios en su viscosidad.

De acuerdo a estos resultados, un material que se acerque a la situación 5 de la figura 7.23 con alta viscosidad no sería recomendable para ser utilizado en una junta de lubricación. Además de la resistencia a la rodadura que dificulta el movimiento rotatorio de la junta, las figuras 7.35 y 7.36 muestran que el valor máximo del coeficiente de fricción crece en una zona donde el material muestra mayor sensibilidad a cambios en su viscosidad a medida que aumenta la relación E_1/E_2 . Para valores elevados de E_1/E_2 , se puede observar que el coeficiente de fricción sufre un pronunciado aumento cuando el parámetro ND experimenta pequeñas variaciones a partir de su valor inicial ($ND=0.00$). Luego, para $ND \rightarrow \infty$, el coeficiente de fricción se reduce a medida que aumenta E_1/E_2 ya que esto implica un aumento de E_1 .

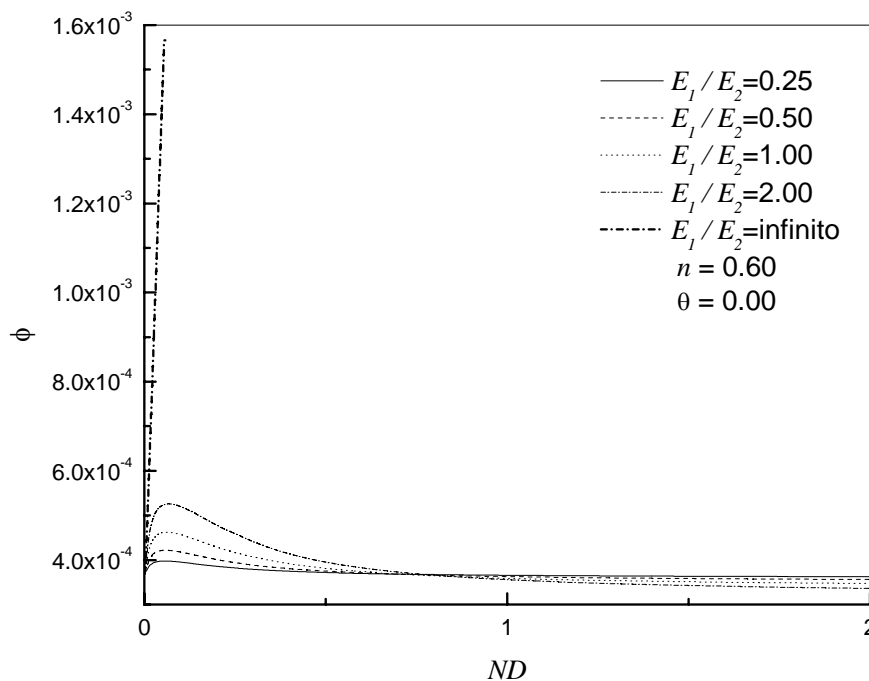


Figura 7.35: Coeficiente de fricción en función del parámetro ND para las combinaciones 1, 2, 3, 4 y 5 de la figura 7.23.

Es razonable pensar que un material viscoelástico tendrá un comportamiento en un rango de ND alejado de los extremos, ya que para estos últimos ($ND=0.00$ y $ND \rightarrow \infty$) el comportamiento es elástico. Por ejemplo, en la figura 7.37 se agrupan las gráficas 7.24, 7.28 y 7.36 para el caso de $E_1/E_2=1$, notando que los efectos viscoelásticos se manifiestan principalmente en la zona $0.00 < ND < 1.00$. Allí las tendencias de las variables reafirman que un material viscoelástico genera condiciones adversas para una adecuada lubricación de la junta.

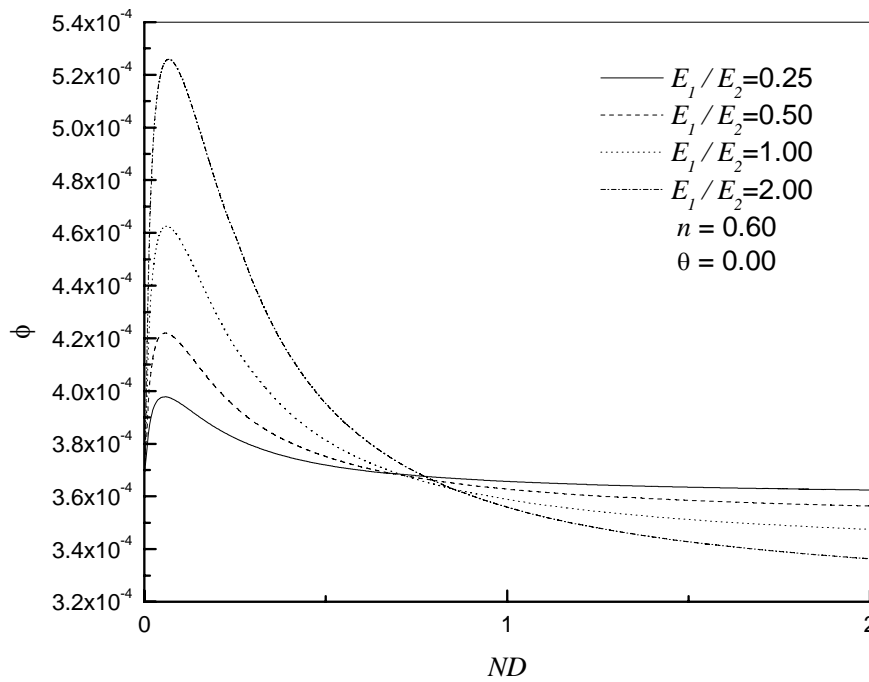


Figura 7.36: Coeficiente de fricción en función del parámetro ND para las combinaciones 1, 2, 3 y 4 de la figura 7.23.

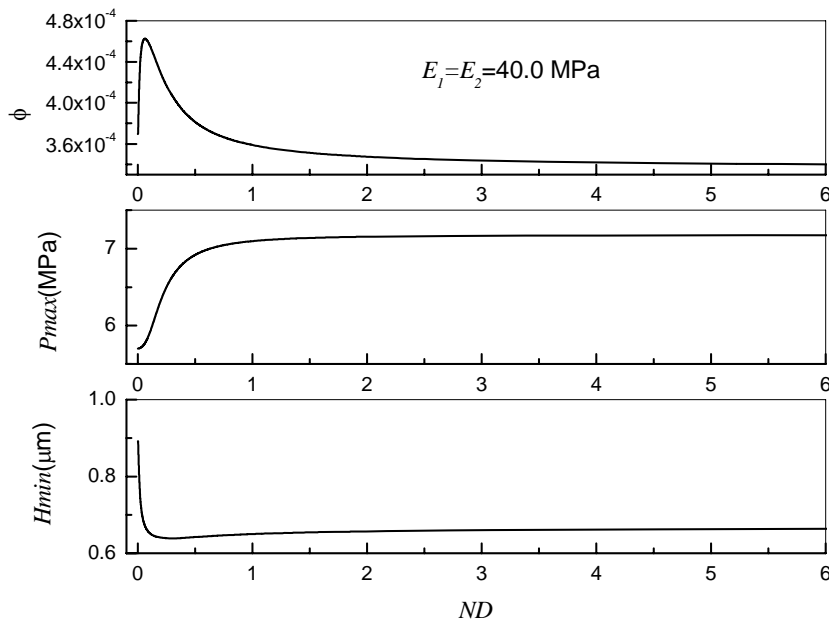


Figura 7.37: Evolución del coeficiente de fricción, presión máxima y mínimo espesor del lubricante en función de ND para un material SEL con módulo $E_{eq}=20.0$ MPa y relación $E_1/E_2=1.00$.

7-4.2 Resultados para el modelo SEL con módulo $E_{eq}=500$ MPa

En la práctica, la mayoría de los materiales viscoelásticos de interés para reemplazo de cartílago articular que asemejan su comportamiento al SEL, tienen un módulo elástico bajo, del orden del cartílago articular [24, 27]. No obstante, en esta sección se expondrán sintéticamente algunos resultados de este modelo para un material de

elevada rigidez a modo de evaluar su posible performance en la lubricación de la junta articular.

La figura 7.38 muestra los canales de lubricación para un SEL para el cual $E_1=E_2=1.00$ GPa, de forma tal que $E_{eq} = 500$ MPa, comparados con un material elástico de módulo $E=500$ MPa y un material que responde al modelo de Voigt también con módulo $E=500$ MPa. Es notable la diferencia entre los canales de lubricación desarrollados para un material VG y un material SEL para $ND=0.01$, cuya diferencia porcentual en los valores mínimos alcanza el 40 % (favorable para el segundo). Adicionalmente, la figura 7.38 muestra que para un valor $ND=0.02$, el SEL desarrolla espesores superiores al alcanzado para el VG con $ND=0.01$.

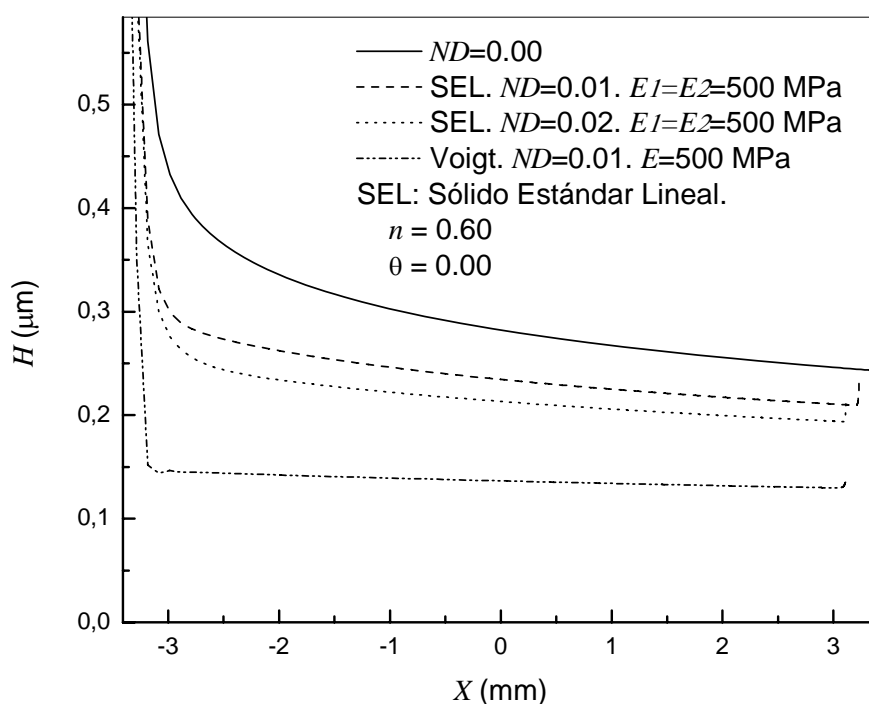


Figura 7.38: Canal de lubricación (espesor lubricante) para: Un material elástico con módulo $E=500$ MPa, un material SEL con $E_{eq}=500$ MPa y $ND=0.01$, un material SEL con $E_{eq}=500$ MPa y $ND=0.02$ y un material VG con módulo $E=500$ MPa y $ND=0.01$. Ambos materiales SEL responden a la relación $E_1/E_2=1.00$.

La tendencia en los valores mínimos del canal mostrados en la figura 7.39 son similares a los obtenidos en la figura 7.22 para $E_{eq}=20.0$ MPa, pero con la razonable diferencia en los valores. Si bien resta por explorar un gran volumen de combinaciones de parámetros, las tendencias aquí mostradas podrían indicar que la morfología en las curvas de H_{min} en función de ND es una característica en el fenómeno de lubricación viscoelastohidrodinámico de juntas con un elemento sólido y otro conteniendo en su

superficie un material SEL lineal, cuya explicación se ha propuesto en la sección anterior.

Todas las curvas mostradas en la figura 7.39 parten de un H_{min} (para $ND=0.00$) cuyo valor se encuentra en el orden de las rugosidades superficiales de los componentes. Por tal motivo, cualquier combinación en los módulos elásticos de los resortes conduce a espesores lubricantes más pequeños que comprometen la posibilidad de generar un proceso de lubricación de película completa. Así, en el hipotético caso de que el polietileno actual responda a un modelo viscoelástico SEL, resultaría difícil que el mismo pueda evitar el contacto directo entre los materiales y por ende el desgaste por abrasión, más aún si suponemos que la respuesta del polietileno se asemeja a un modelo VG como lo hemos planteado anteriormente.

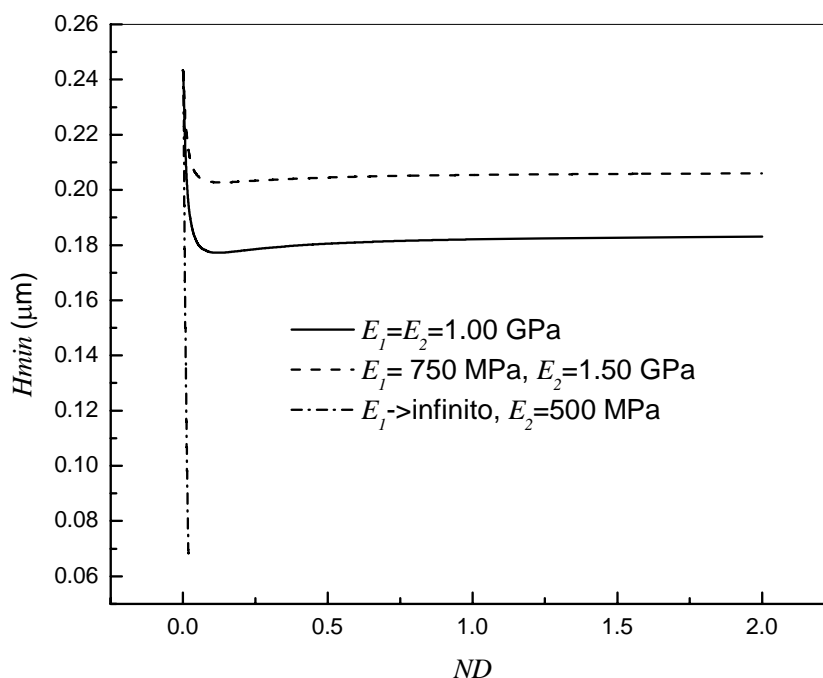


Figura 7.39: Mínimo espesor de lubricante para un material SEL con $E_{eq}=500$ MPa y tres combinaciones diferentes de los módulos elásticos de los resortes 1 y 2.

La figura 7.40 ilustra una nueva comparación entre los valores mínimos extraídos de la figura 7.39 y los predichos por la relación R1 para distintas combinaciones en los resortes del modelo SEL tal que $E_{eq}=500$ MPa. La cercanía en los valores evidencia nuevamente la proximidad entre el valor mínimo de H_{min} y su valor para $ND \rightarrow \infty$, y plantea la posibilidad de utilizar la relación R1 para obtener el mínimo valor de H_{min} para cualquier combinación de módulos elásticos dentro del rango explorado.

Por otro lado, los altos valores de presión sobre el material elástico de $E=500$ MPa (correspondiente al material SEL de $E_{eq}=500$ MPa y $ND=0.00$) se elevan con el crecimiento de ND , como muestra la figura 7.41. Debido al rango muy pequeño que

hemos podido explorar para el modelo VG, sus valores no son notorios en la figura frente a las otras curvas, motivo por el cual no fue incluido en la gráfica.

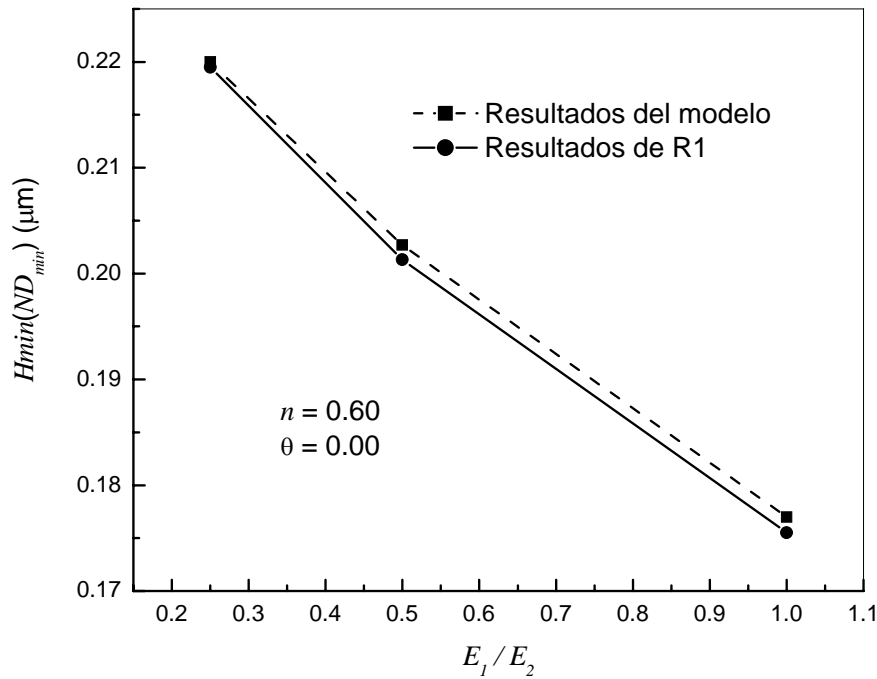


Figura 7.40: Comparación entre los valores de $H_{min}(ND_{min})$ obtenidos en las simulaciones y el calculado mediante la relación (R1) para un material SEL con módulo $E_{eq}=500$ MPa.

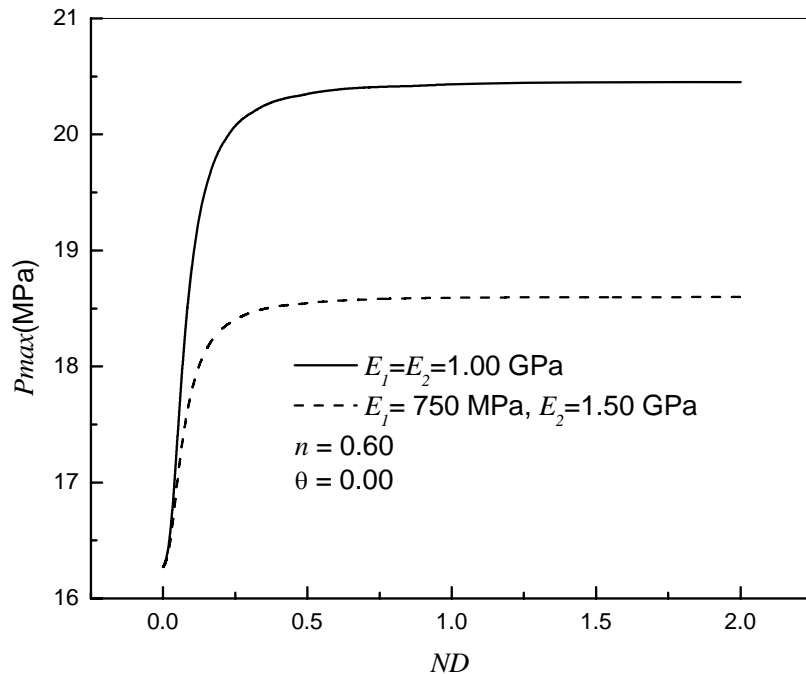


Figura 7.41: Presión máxima sobre el componente tibial en función del parámetro viscoelástico ND .

Los valores de P_{max} de la figura 7.41 parten todos de un valor que excede el límite de diseño [46]. Dependiendo de la relación entre los módulos elásticos de los resortes,

P_{max} experimenta un rápido ascenso para valores de $ND < 0.50$, esto es, para valores de la relación $\eta''/E'' < 0.70$.

La inclusión de la viscoelasticidad en el modelo de deformación estaría indicando entonces la baja capacidad del polímero actual para distribuir las cargas y aliviar al material de las altas tensiones, independientemente del modelo al cual responda.

A modo de mostrar que el desplazamiento del máximo valor de la presión (y por ende de la fuerza resultante) es una característica de los sistemas viscoelastohidrodinámicos estudiados en este trabajo, la figura 7.42 muestra los campos de presión para un material de $E_{eq}=500$ MPa en los casos $ND=0.00$ (elástico) y $ND=0.01$ (viscoelástico), notando que dicho corrimiento se manifiesta equivalentemente al caso estudiado en la sección anterior. De esta manera, las explicaciones para la resistencia a la rodadura y la morfología en la curva de H_{min} se aplican también al material SEL con $E_{eq}=500$ MPa.

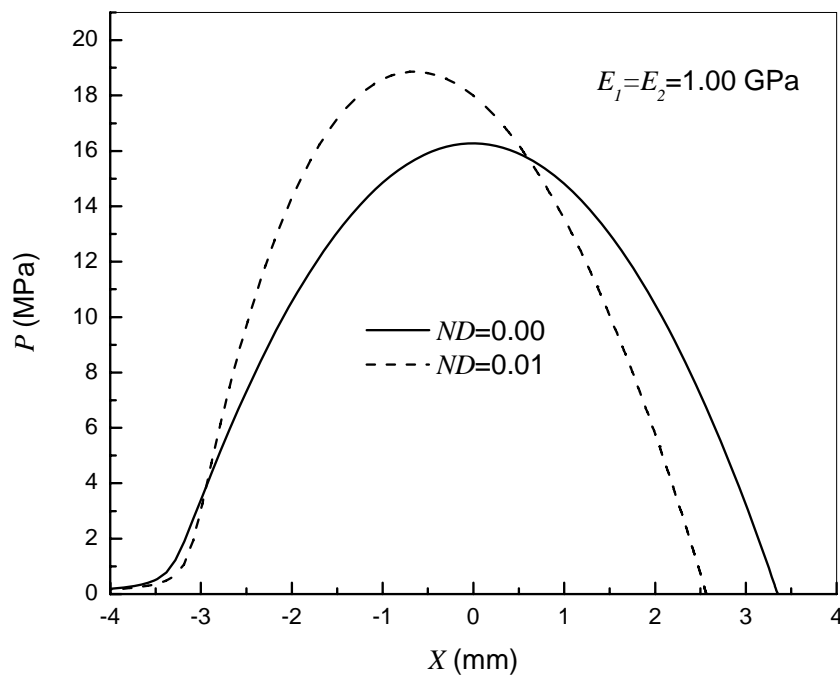


Figura 7.42: Curvas de presión para un material SEL con $E_{eq}=500$ MPa.

7-5) Material con capacidad de exudación. Casos: SEL para $E_{eq}= 20.0$ MPa y VG para $E=500$ MPa.

La figura 7.43 muestra la evolución del coeficiente de fricción conforme el coeficiente de exudación crece para un material viscoelástico correspondiente al caso 3 de la figura 7.23 con un valor de $ND=3.06 \times 10^{-1}$. El coeficiente de fricción (ϕ) disminuye con el aumento de θ hasta un valor θ_{min} mas allá del cual ϕ comienza a crecer. De

continuar creciendo ϕ con el aumento de θ , este fenómeno indicaría que la capacidad de exudación del material genera beneficios a la junta solamente en un rango acotado dentro del cual los efectos de la exudación sobre el material realzarían la lubricación de la articulación.

En la zona $0 < \theta < \theta_{\min}$, el coeficiente de fricción disminuye debido principalmente a que el espesor lubricante debe crecer en la mayor parte de la extensión del canal para alojar el caudal adicional de fluido aportado por el material, como muestra la figura 7.44. Puede observarse además que la extensión donde este aumento se produce depende del valor de θ . Por ejemplo, para un valor $\theta=0.005$, el canal de lubricación experimenta un crecimiento en toda la zona de lubricación, con una elevación en el centro del contacto de un 70 % respecto del canal obtenido para $\theta=0.00$ y con una reducción del coeficiente de fricción del 40 %, mientras que para $\theta=0.015$ el canal experimenta un aumento del 100 % promediado en el 90 % de su extensión, pero se reduce en más de un 80 % en el otro 10 % de dicha extensión.

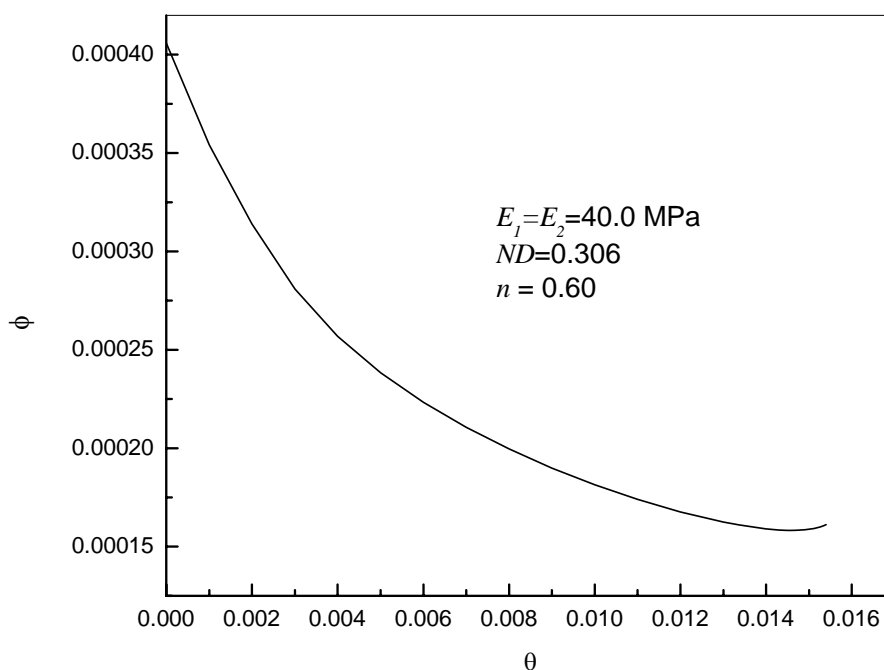


Figura 7.43: Coeficiente de fricción ϕ en función del coeficiente de exudación θ , para un material SEL con módulo $E_{eq}=20.0$ MPa y $ND=3.06 \times 10^{-1}$.

A medida que θ crece, los espesores se elevan aún más a la entrada del canal, pero en la desembocadura del mismo el efecto es el contrario ya que el espesor se reduce respecto de $\theta = 0.00$. De esta manera, podemos definir dos zonas; la zona 1 es aquella en la cual el canal para $\theta > 0.00$ es superior al canal para $\theta=0.00$, mientras que en la zona 2 el efecto es inverso, observando que la longitud de dichas zonas depende del valor de θ . A partir de θ_{\min} , el coeficiente de fricción crece ya que la zona

2 proporciona canales muy estrechos en extensiones cada vez más amplias. Estos resultados podrían explicar desde el punto de vista mecánico, por qué la baja permeabilidad del cartílago articular mencionada en el capítulo 4 es suficiente para generar los beneficios en la lubricación de la junta y, al mismo tiempo, evitaría llegar a los valores de θ para los cuales el coeficiente de fricción comienza a crecer y los canales se harían muy estrechos en la desembocadura del mismo.

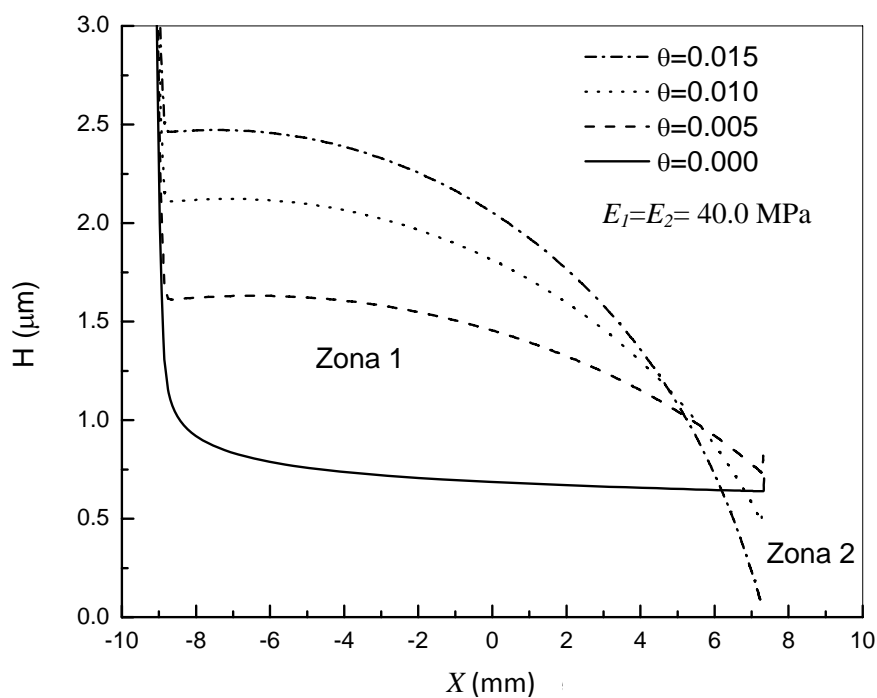


Figura 7.44: Canal de lubricación para distintos valores del coeficiente de exudación θ , para un material viscoelástico SEL con módulo $E_{\text{eq}}=20.0 \text{ MPa}$ y $ND=3.06 \times 10^{-1}$.

Por otro lado, la figura 7.45 indica que el material con capacidad de exudación presenta mayor habilidad para autolubricarse para un valor más bajo de ND . Esto es, para $ND=1.80 \times 10^{-1}$, el caudal circulante en la zona de contacto es aproximadamente un 10 % superior que para el caso de $ND=3.06 \times 10^{-1}$, mostrando que la capacidad de autolubricación se optimizaría para materiales elásticos puros.

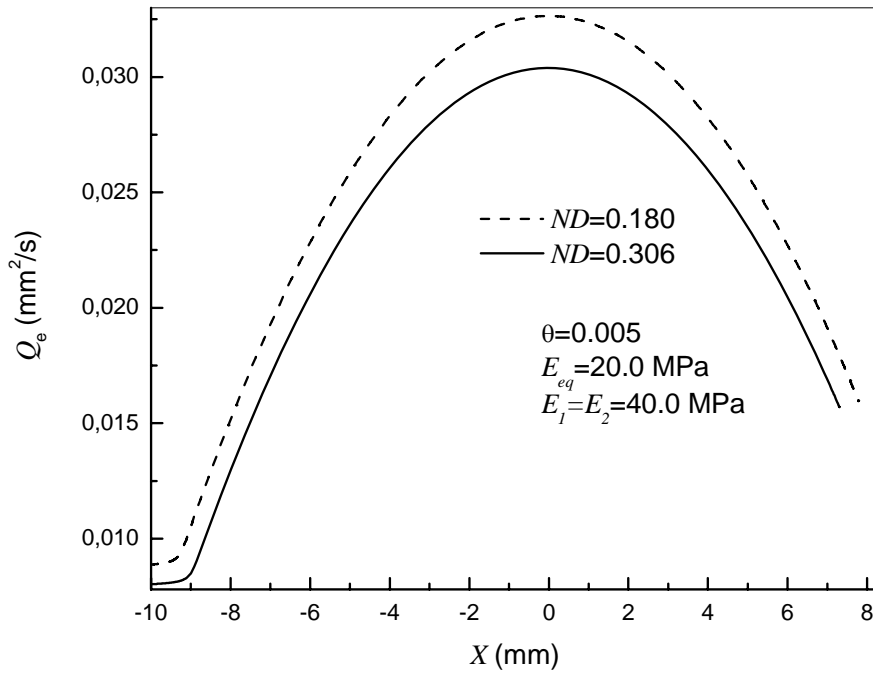


Figura 7.45: Caudal circulante en la zona de contacto para dos materiales de igual módulo equivalente y diferente viscoelasticidad. Ambos materiales muestran capacidad de exudación, evidenciando la mejor respuesta el material con menor valor de ND .

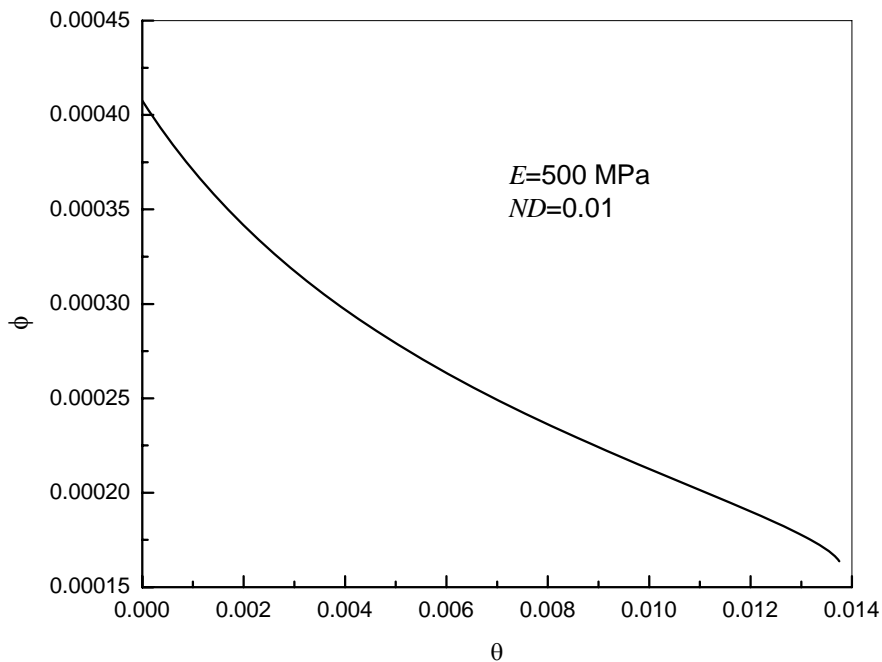


Figura 7.46: Coeficiente de fricción ϕ en función del coeficiente de exudación θ , para un material VG con módulo $E=500$ MPa y $ND=0.01$.

Estos resultados podrían guiar la experimentación sobre los materiales actuales en los cuales la inclusión de cierta capacidad de exudación generaría los beneficios aquí mostrados. La figura 7.46, muestra la evolución del coeficiente de fricción conforme crece el parámetro de exudación θ para un material VG de módulo $E=500$ MPa, con $ND=0.01$. En todo el rango explorado de θ , el coeficiente de fricción disminuye

aproximadamente un 60 %, mostrando una mejoría en cuanto a la lubricación. Como muestra la figura 7.47, el crecimiento en el canal que deviene del proceso de exudación, puede elevar el espesor lubricante a valores que superen la suma de las rugosidades superficiales en la mayor parte de la extensión del canal. Esto significa que una estructura porosa con la capacidad de exudación podría mejorar notablemente la lubricación de la junta artificial actual reduciendo el coeficiente de fricción y, al mismo tiempo, separando los componentes a través de un crecimiento en el espesor lubricante respecto del material sin esta habilidad.

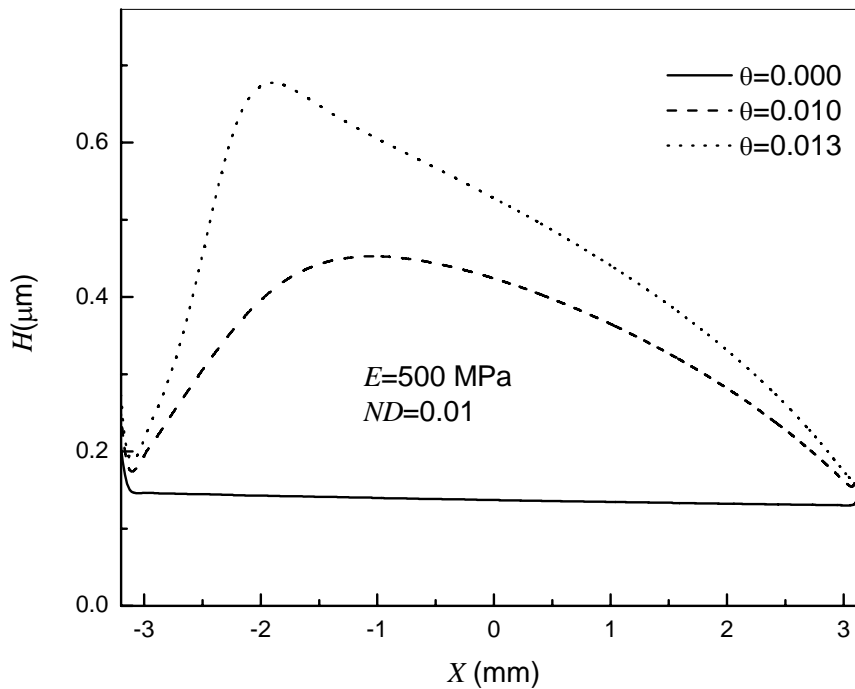


Figura 7.47: Canal de lubricación para distintos valores del coeficiente de exudación θ , para un material viscoelástico VG con módulo $E=500$ MPa y $ND=0.01$.

Finalmente, la figura 7.48 muestra que un material con la capacidad de exudación genera un proceso de autolubricación mediante el cual en la zona de contacto eleva el caudal circulante respecto al material sin esta capacidad a través del aporte de líquido contenido en su estructura. Al mismo tiempo, la figura 7.48 muestra que el material con capacidad de exudación requiere de un menor aporte de fluido externo al contacto para lubricar a la junta, generando coeficientes de fricción más bajos y canales más elevados.

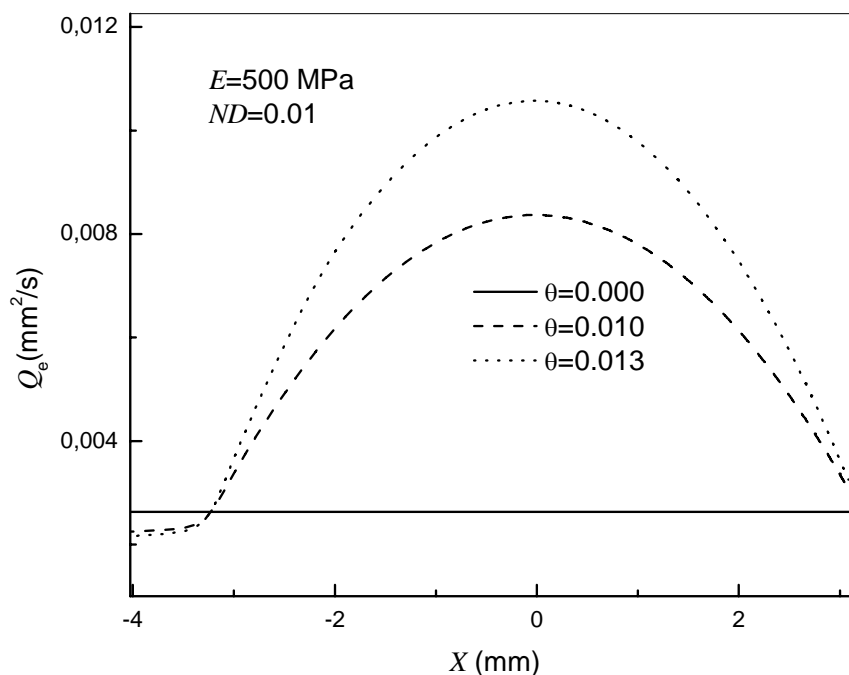


Figura 7.48: Caudales en la zona de lubricación. Notar que a medida que θ crece, el caudal en dicha zona crece, mientras que a la entrada ($X < -3.5$) del canal se reduce.

7-6 Inferencias mecánicas sobre el uso de lubricantes Newtonianos en el ensayo de polímeros para prótesis de rodilla.

Con el objetivo de testear la respuesta al desgaste para el diseño del polietileno actualmente utilizado en las prótesis de rodilla, se han desarrollado simuladores de junta artificial para realizar ensayos in vitro del implante [48]. Dichos ensayos, deben considerar condiciones de funcionamiento que se asemejen a las condiciones in vivo en las cuales deberá funcionar el implante. En este sentido, el lubricante ha sido identificado como un parámetro crucial que afecta notablemente los estudios tribológicos in vitro de los reemplazos articulares [49]. Varios lubricantes han sido testeados en ensayos de implantes, como ser agua destilada, solución fisiológica y suero bovino, en búsqueda del lubricante más apropiado. Finalmente, varios autores han concluido que el suero bovino produce partículas de polietileno de desgaste con similar morfología que las encontradas en articulaciones humanas, motivo por el cual la ASTM (American Standard for Testing Materials) ha recomendado el uso de este fluido como lubricante artificial para el ensayo del polietileno [50]. No obstante, algunos autores han cuestionado luego el uso de suero bovino argumentando que este lubricante por si solo no puede imitar las propiedades del fluido sinovial a través de

todo el rango de valores de los parámetros relevantes para un reemplazo total de rodilla [51].

La figura 7.49 (extraída de [50]) muestra un reograma comparando las mediciones de viscosidad de fluido sinovial de una rodilla con osteoartritis y dos lubricantes artificiales, Suero Bovino (BS) y suero bovino con agregado de ácido hialurónico (BS+HA). Todos los lubricantes muestran características pseudoplásticas reduciendo su viscosidad conforme crece la tasa de corte (gradiente de velocidades), excepto el Suero bovino (BS) el cual muestra un comportamiento Newtoniano. No obstante los resultados del trabajo citado [50], el suero bovino continúa siendo utilizado como lubricante artificial, por lo que cabe la pregunta: para las variables estudiadas en este trabajo (espesor del canal, campo de presiones y coeficiente de fricción), ¿existen respuestas significativamente distintas si en los ensayos de juntas artificiales se utilizan fluidos Newtonianos (NW) o no Newtonianos (NN)?.

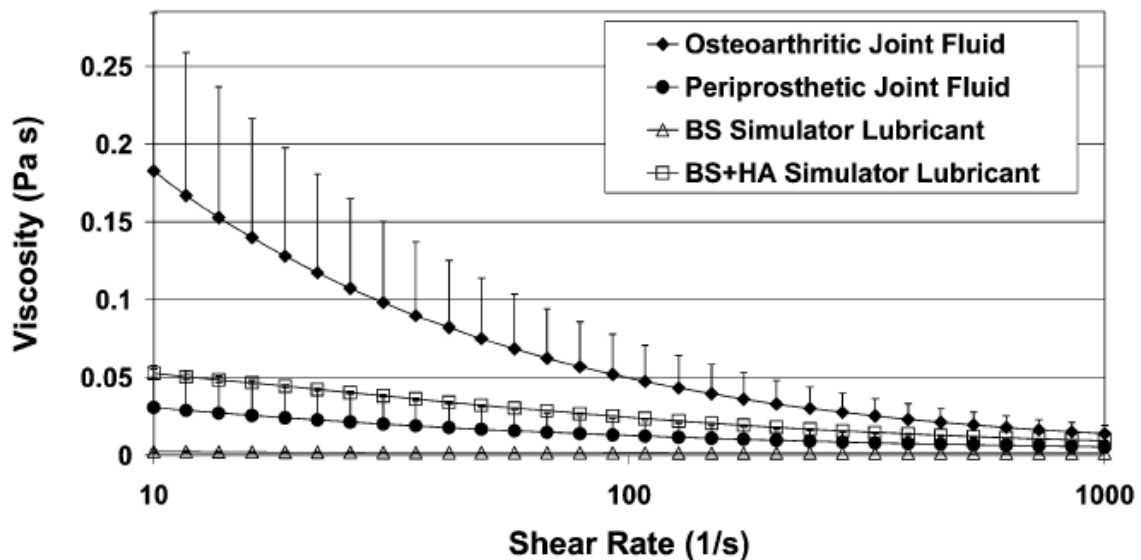


Figura 7.49. Reograma que compara las mediciones de viscosidad de un fluido sinovial aspirado de rodilla osteoartítica y de lubricantes artificiales, como ser suero bovino (BS) y suero bovino con agregados de ácido hialurónico (BS+HA). Esta figura fue extraída de [50].

Las figura 7.50 muestra los canales de lubricación para un material elástico ($ND=0.00$) y un material viscoelástico ($ND=0.01$) que responde al modelo VG para fluidos NW y NN. La selección de $ND=0.01$ se debe a que, como se mencionó en la sección 7-3.2, valores mayores de ND para $n = 0.60$, arrojan espesores lubricantes para los cuales no puede asegurarse el cumplimiento de la hipótesis de lubricación por película de fluido.

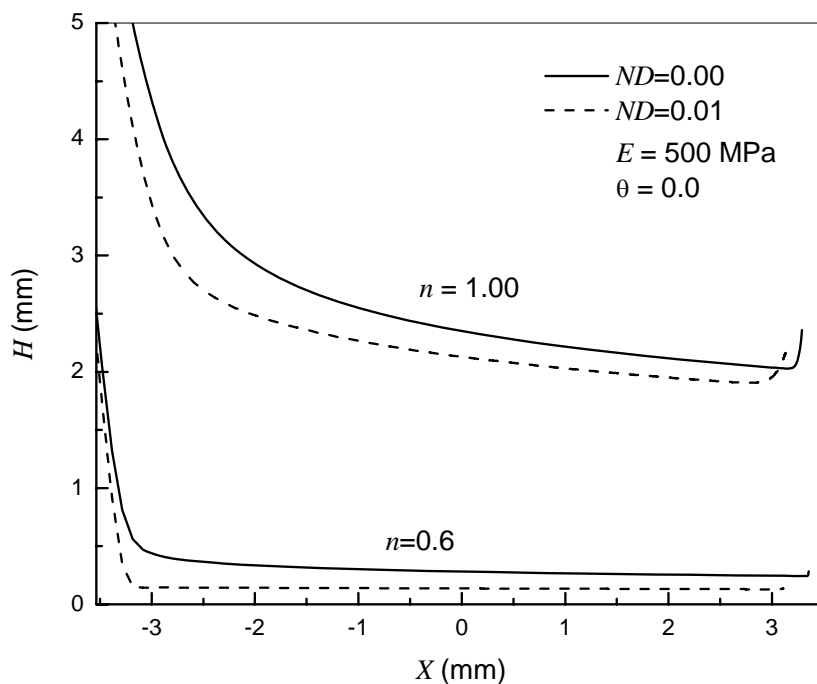


Figura 7.50: Canal de lubricación para fluidos Newtoniano y no Newtoniano y distintos valores de ND .

Los canales mostrados en la figura 7.50 evidencian variaciones poco significativas para el proceso de lubricación cuando el fluido es Newtoniano obteniendo espesores lubricantes que exceden ampliamente las dimensiones de las rugosidades superficiales de los materiales, mientras que para $n=0.60$ (fluido NN) los canales adquieren espesores del orden de dichas rugosidades. La figura 7.50 predice entonces que existirá una notoria diferencia en el modo de lubricación que cada fluido proporciona a la junta artificial. Ante las condiciones de funcionamiento consideradas en este trabajo (velocidad de operación, carga, etc), el polietileno con un Módulo elástico $E=500$ MPa lubricado con fluido NW podría generar condiciones de lubricación adecuadas para evitar el contacto directo entre los materiales, mientras que para el caso NN la situación sería totalmente opuesta.

Para una comparación más clara, las figuras 7.51 y 7.52 muestran la evolución de los valores extremos de las variables para ambos fluidos con el aumento del parámetro ND . Esta comparación se ha volcado numéricamente en las tablas 7.I y 7.II a través de valores porcentuales. Describiremos a continuación el significado de cada tabla.

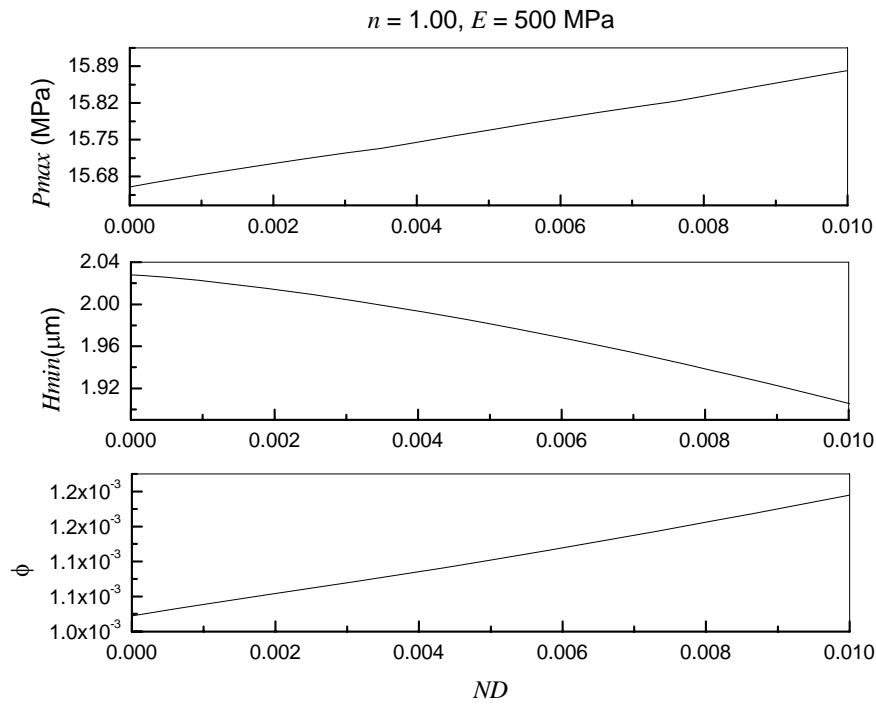


Figura 7.51: Evolución la máxima presión, el mínimo espesor de la película lubricante y el coeficiente de fricción con el parámetro viscoelástico ND para fluidos Newtonianos ($n=1.0$).

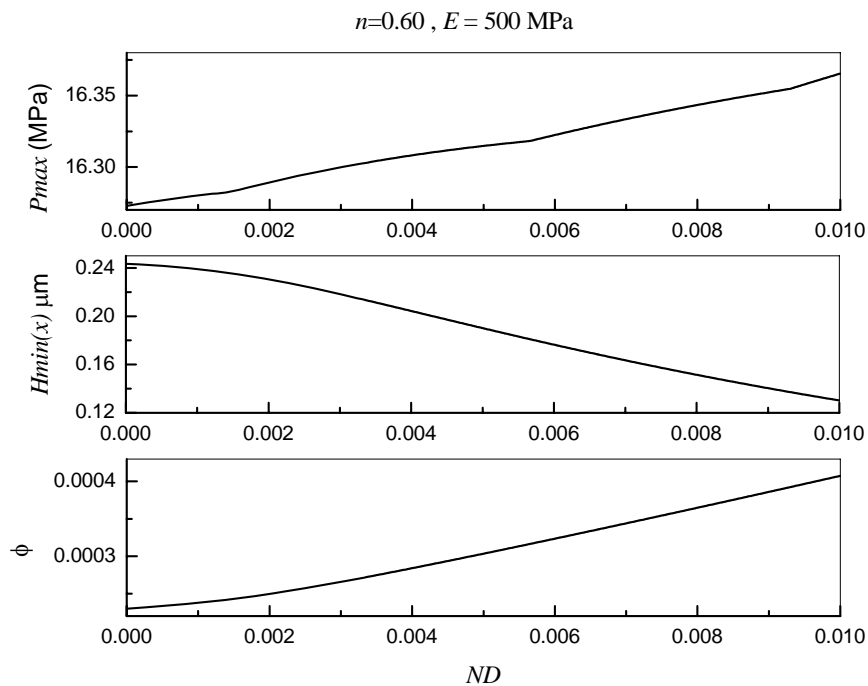


Figura 7.52: Evolución la máxima presión, el mínimo espesor de la película lubricante y el coeficiente de fricción con el parámetro viscoelástico ND para fluidos no Newtonianos ($n=0.6$).

La tabla 7.1 muestra el cambio porcentual de las variables entre los extremos del rango explorado para ND para cada fluido. Exceptuando el valor máximo de la presión, las diferencias porcentuales entre los valores de las variables para un material elástico

($ND=0.00$) y para un material VG con $ND=0.01$ son significativamente altas para fluido NN ($n=0.60$), mientras que para un fluido NW ($n=1.00$), solamente el coeficiente de fricción experimenta un cambio significativo. Es evidente que, si el líquido lubricante es Newtoniano, no existirían diferencias importantes al seleccionar un material elástico o viscoelástico dentro de los valores explorados para ND , mientras que es claramente visible que para una junta lubricada con fluido no Newtoniano ($n=0.60$) esta selección se vuelca apreciablemente hacia los materiales elásticos, principalmente en lo que respecta a evitar la posibilidad de un contacto directo ante la significativa reducción del espesor lubricante.

Tabla 7.I : Comparaciones en valores porcentuales para un rango $0 < ND < 0.43 \times 10^{-1}$ entre los valores mostrados en las figuras 7.51 y 7.52:

	$n = 1.0$	$n = 0.6$
Aumento de presión máxima	1.4 %	0.56 %
Reducción de espesor mínimo	6.1 %	46 %
Aumento en el Coef. De Fric.	20 %	77 %

Pero los cambios más importantes al utilizar fluidos de distinta naturaleza se observan en la tabla 7.II, la cual muestra el cambio porcentual de las variables al pasar de fluido NW a NN, para un material elástico ($ND=0.00$) y un material VG ($ND=0.01$). Excepto por el valor máximo de la presión, la diferencia en los valores porcentuales entre una junta funcionando con fluido NW y otra lubricada con fluido NN es muy elevada. Estas predicciones indican que los resultados de los ensayos de materiales para reemplazo de juntas artificiales son altamente dependientes de la naturaleza del fluido lubricante utilizado. Como consecuencia, el ensayo exitoso de un material in vitro lubricado con fluido Newtoniano puede resultar en fracaso al funcionar en una articulación humana.

Pero debe tenerse especial cuidado al comparar valores porcentuales, ya que existen datos importantes que se manifiestan al observar los valores de las variables. Por ejemplo, si bien el coeficiente de fricción aumenta más de 7 veces para un fluido NN respecto del fluido NW, su valor máximo se encuentra por debajo del mínimo valor alcanzado para el segundo. Al evaluar detalladamente las variables estudiadas, la presión no sufre importantes cambios y el coeficiente de fricción se ve favorecido al pasar de un fluido NW a otro NN, pero el espesor mínimo del canal es la variable más crítica a considerar en los ensayos in vitro, ya que su elevada disminución es la que

determinará, entre otras cosas, el posible contacto entre las rugosidades superficiales de los materiales. Para el caso NW, el mínimo espesor obtenido con un material VG es de 1.90 μm mientras que para el caso NN este espesor resulta ser menor a 0.13 μm . Para el fluido (NW), los canales superan en un 375 % a la suma de las rugosidades superficiales, mientras que para el NN, los canales son un 67.5% inferiores a la suma mencionada, posibilitando este último el contacto directo entre los materiales.

Tabla 7.II: Variaciones porcentuales entre los resultados para un fluido Newtoniano ($n = 1$) y no Newtoniano ($n = 0.6$), tomando como referencia el fluido Newtoniano:

	Elástico ($ND=0.00$)	Viscoelástico ($ND=0.01$)
Aumento de presión máxima	3.9 %	3.0 %
Reducción de espesor mínimo	88%	93%
Disminución del Coef. De Fric.	77%	63%

CAPÍTULO 8

Conclusiones

En este trabajo, se ha resuelto numéricamente un modelo de lubricación de una hipotética prótesis de rodilla lubricada con fluido no Newtoniano, conformada por un componente femoral metálico y un componente tibial sobre el cual se supone adherido un material viscoelástico delgado que puede tener la capacidad de exudar y absorber fluido, en función de imitar el eficiente funcionamiento del cartílago articular de las rodillas humanas sanas. La condición de operación considerada fue el movimiento pleno (estado estacionario) de la junta artificial, caracterizado por una velocidad promedio constante de las superficies articulares las cuales se encuentran sujetas a una carga igual a tres veces el peso (valor que se manifiesta en la fase de apoyo de la marcha normal) de un individuo de 75 kg de masa. Este modo de operación fue seleccionado por presentar las condiciones mecánicas más exigentes de todo el ciclo de la marcha.

Continuando con una línea de investigación iniciada en el Grupo Biomecánica Computacional de la FI-UNER, el aporte principal de este trabajo fue el desarrollo de un modelo de deformación viscoelástico lineal para el componente tibial, partiendo de la solución elástica de trabajos previos, lo cual pudo concretarse gracias a la utilización del principio de correspondencia elástico-viscoelástico. De este desarrollo surgieron dos modelos de deformación basados en los modelos viscoelásticos lineales de Voigt (VG) y sólido estándar lineal (SEL).

Cada modelo de deformación desarrollado, ha sido implementado en un código computacional previamente confeccionado en el Grupo Biomecánica Computacional de la FI-UNER. Para tal fin se utilizó el método de integración numérica de Gauss para determinar el campo de deformaciones ante cada campo de presiones obtenido luego de cada ciclo del método de Newton. Si bien no se han encontrado datos experimentales sobre las variables estudiadas que permitan validar el modelo, la tendencia de los campos de presión concuerda cualitativamente con trabajos previamente presentados por otros autores [43, 47].

A continuación se exponen los principales resultados de este trabajo:

- Para el modelo de deformación elástico, se observan canales de lubricación más amplios y valores de presión más pequeños conforme el módulo elástico disminuye, lo cual podría repercutir en una reducción del desgaste por abrasión

y por fatiga del material. De estas tendencias puede inferirse que una junta conteniendo un material elástico de baja rigidez adherido al componente tibial, como es el poliuretano de grado médico, reduciría las posibilidades de desgaste del implante.

- Para un modelo de deformación viscoelástico de Voigt (VG), las variables que influyen en el desgaste del material deformable manifiestan cambios que elevarían las posibilidades de desgaste del polímero respecto de los resultados del modelo elástico. Esto es, los canales de lubricación disminuyen notablemente, el coeficiente de fricción crece considerablemente y la curva de presión experimenta una traslación hacia un lado del centro del contacto generando un momento opuesto a la rodadura de la junta. Estas tendencias se producen para los dos módulos elásticos explorados, $E=20.0$ MPa y $E=500$ MPa, observando que para el caso de $E=20.0$ MPa el material sería notablemente más sensible a las variaciones de su viscosidad. Inclusive, dentro de ciertos rangos de viscosidad, los resultados predicen que para el material con módulo $E=20.0$ MPa, el espesor lubricante podría ser inferior que para un material con módulo $E=500$ MPa, contrariamente a lo que sucedería si ambos materiales fueran elásticos.
- Para un modelo viscoelástico VG, la curva de presión presenta un elevado gradiente en el inicio de la zona de lubricación, donde el modelo elástico muestra gradientes mucho más bajos. Esta diferencia se debe a que el modelo VG presenta una capacidad reducida para deformarse ante elevados cambios de la presión, derivando en un estrechamiento del canal a medida que crece el valor del parámetro viscoelástico ND , alcanzando valores que podrían propiciar el contacto directo entre los materiales articulares.
- Al mostrar importantes diferencias en las variables estudiadas, se puede inferir que el uso de modelos elásticos en las predicciones sobre espesores lubricantes para prótesis actuales, podrían derivar en inferencias erróneas si, considerando las curvas extraídas de los ensayos de fluencia, el material puede ser representado mediante un modelo de Voigt con un valor de ND suficientemente elevado.
- El fenómeno de lubricación se optimiza a medida que el modelo de deformación se acerca al caso puramente elástico. De esta manera, los materiales elásticos de bajo módulo de Young podrían constituirse como la elección más adecuada para optimizar la lubricación de la articulación artificial. No obstante, desde el punto de vista mecánico, la utilización de ciertos hidrogeles viscoelásticos de

baja rigidez [24, 27] que respondan a un modelo SEL, podría generar aceptables valores de espesor lubricante.

- Al explorar distintas combinaciones en los módulos elásticos del material SEL, se concluye que el modelo VG es un caso particular del anterior, constituyéndose como el extremo opuesto al caso elástico. Adicionalmente, el modelo VG ha mostrado las condiciones de lubricación menos propicias y con mayor riesgo para el desgaste del material.
- La curva obtenida al graficar el mínimo espesor del canal de lubricación para un modelo SEL en función del parámetro viscoelástico ND , muestra una morfología similar para todos los casos explorados. Esta curva presenta una disminución pronunciada para valores de ND menores a 1.00, mostrando una alta sensibilidad de las variables en este rango.
- Debido a que, independientemente del modelo utilizado, los resultados para un material viscoelástico de módulo $E=500$ MPa muestran tendencias que indicarían un modo de lubricación mixto, se puede inferir que ante la utilización del PUAPEM (cuyo módulo elástico es mayor a 500 MPa) en el componente tibial, no sería posible evitar el contacto directo y por lo tanto la abrasión del material.
- La inclusión de la capacidad de exudación tanto para modelo SEL con módulo equivalente $E_{eq}=20.0$ MPA como para un modelo VG con módulo $E=500$ MPa, conduce a una mejora en la lubricación de una junta, aumentando los espesores lubricantes, reduciendo el coeficiente de fricción y elevando el caudal circulante por el canal de lubricación. No obstante, solo un rango reducido del coeficiente de exudación θ genera beneficios sobre la lubricación de la junta, mientras que fuera de dicho rango los efectos sobre la lubricación pueden ser perjudiciales. Estos resultados pueden orientar la investigación sobre un hipotético polímero para reemplazo articular con capacidad de exudación adecuada.
- Los resultados numéricos para fluido Newtoniano y fluido no Newtoniano, indican que en el ensayo de materiales para reemplazos articulares, los resultados son altamente dependientes de la naturaleza del fluido utilizado. De acuerdo a las predicciones de este trabajo, el éxito de un ensayo ex vivo con fluido Newtoniano (por ejemplo, suero bovino [50]) puede resultar en fracaso al funcionar en la articulación con fluido sinovial no Newtoniano. Por ejemplo, para un modelo viscoelástico de Voigt con módulo $E=500$ MPa y $ND=0.01$, el espesor del lubricante interpuesto entre los componentes de la junta se reduce

en un 93 % al pasar del modelo con un fluido Newtoniano a otro con fluido no Newtoniano. El espesor mínimo mostrado para el primero (Newtoniano) es 1,9 μm , mientras que para el segundo dicho valor es de 0.13 μm el cual se encuentra por debajo de la suma de las rugosidades mencionadas (0.40 μm).

- Como aplicación en el campo del deporte, es bien conocido que una articulación tiene un mejor funcionamiento luego de realizar ejercicios de precalentamiento. Además de los posibles cambios experimentados por el líquido sinovial, esto podría indicar que la viscosidad de los tejidos articulares disminuye con el aumento de temperatura, llevando al material a comportarse más elásticamente y por lo tanto, mejorando la lubricación de la junta. De ser correcta esta hipótesis, los resultados han mostrado que para $ND \rightarrow 0.00$ (caso elástico al que se tendería con el precalentamiento), el espesor lubricante se amplía, las presiones disminuyen, el coeficiente de fricción se reduce y el proceso de autolubricación mejora notablemente.

Los resultados de este trabajo podrían aplicarse a una amplia variedad de fenómenos que involucren un proceso de lubricación de contacto lineal de juntas lubricadas que contengan un material viscoelástico, abarcando desde las prótesis de rodilla (aplicación principal de este trabajo) y nuevos materiales para reemplazo de cartílago articular hasta procesos de impresión litográfica [46], donde uno de los sólidos suele construirse con un polímero de bajo módulo elástico para proveer una mejor amortiguación y reducir el ruido de funcionamiento. Estas predicciones podrían además guiar la experimentación para delimitar rangos en los valores de los parámetros materiales al seleccionar un material que optimice la lubricación de la junta. En este sentido, los resultados sugieren dirigir la investigación hacia materiales elásticos de bajo módulo de Young con cierta capacidad de exudación, para los cuales el modelo de esta tesis ha mostrado obtener las mejores condiciones de lubricación, reduciendo todas las posibilidades del desgaste producidas durante el movimiento de la articulación cargada.

8-1 Limitaciones del modelo.

- El modelo fue desarrollado para predecir las variables VEHD en un estado de movimiento pleno en el cual no se consideran aceleraciones elevadas. El modelo de esta tesis no está confeccionado para predecir los posibles efectos de un material viscoelástico sobre la lubricación de la junta artificial ante una carga aplicada a una frecuencia superior que una caminata lenta.

- Los modelos viscoelásticos de deformación se desarrollaron partiendo de un modelo elástico de columna sujeto a deformación plana. Estas predicciones consideran un material delgado, por lo que la presencia de materiales de elevado espesor podrían requerir un modelo del tipo sólido semi-infinito.
- Los movimientos rotacionales de la rodilla, aunque son pequeños, no fueron considerados en el presente modelo.

8-2 Futuros trabajos.

De este trabajo se desprenden las siguientes posibilidades para futuros trabajos:

- Incluir un modelo de deformación de sólido semi-infinito viscoelástico para contrastar su respuesta con el modelo de este trabajo.
- Desarrollar un modelo en estado no estacionario que permita investigar las posibles modificaciones de las variables VEHD ante una carga variable similar a la producida en una marcha normal.
- Incluir en el modelo las fuerzas de Van der Waals y de solvatación [44, 45] para explorar resultados en los cuales los espesores lubricantes adquieran dimensiones menores a 50 nm.
- Plantear un modelo de lubricación 2D de contacto puntual para poder predecir las posibles consecuencias de una rotación de la rodilla y, al mismo tiempo, extender las predicciones de este trabajo a una prótesis de cadera.

Apéndice A

Método de velocidad perturbada: Ecuación Reynolds modificada.

El siguiente desarrollo de la ecuación de Reynolds modificada, válida para fluido no Newtoniano, fue desarrollado por Di Paolo et al para el trabajo publicado en la revista *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* [13]. Debido al extenso desarrollo de ecuaciones, solo se enumerarán dos, de las cuales una debe ser referenciada en el texto y otra es el resultado final.

La ley constitutiva utilizada para describir la característica reológica del fluido sinovial es la siguiente [38]:

$$\tau = m \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^n, \quad \text{ó} \quad \tau = m \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right),$$

donde $n < 1$ y donde puede definirse una viscosidad equivalente η^* , tal que:

$$\eta^* = m \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{n-1}; \quad \text{de esta forma, } \eta^* \text{ siempre será mayor que cero, luego}$$

$$\tau = \eta^* \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right).$$

El movimiento del fluido dentro del canal de flujo, se debe fundamentalmente al arrastre que ocasionan las superficies articulares durante su movimiento; esta causa imprime al flujo un perfil de velocidades Couette (perfil que varía linealmente a lo largo de la altura del canal) [9,13]. En la zona del contacto, la aparición de gradientes de presión dentro del fluido, superpone al flujo principal de Couette, un perfil de velocidades de Poiseuille (parabólico) cuando el fluido es newtoniano. En cada posición del canal, el perfil de velocidades posee entonces una parte lineal y una parabólica.

En el caso en análisis, el flujo del fluido no newtoniano, tendrá una componente de flujo principal y otra componente que se piensa como una perturbación de dicho flujo principal. Si se define una velocidad perturbada $U = U_o + \varepsilon U_1$, donde U_o es el perfil principal, U_1 un perfil de perturbación y ε un pequeño parámetro ($\ll 1$) de perturbación, U_o y U_1 deberán cumplir las siguientes condiciones de contorno:

$$Y = 0, \quad U_o = 0$$

$$Y = H_1, \quad U_o = 2V \quad (V: \text{velocidad media de operación de la rodilla})$$

$$Y = 0, \quad U_1 = 0$$

$$Y = H_1, \quad U_1 = 0$$

Luego:
$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial U_o}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial Y} = I; \quad \text{donde } I_o = \frac{\partial U_o}{\partial Y} \quad \text{y} \quad I_1 = \frac{\partial U_1}{\partial Y}.$$

La viscosidad equivalente η^* puede expandirse en serie de Taylor con centro en I_o de manera que:

$$\eta^* = \eta^*(I_o) + (I - I_o) \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial I} \right)_{I_o}$$

y sabiendo que

$$I - I_o = \frac{\partial U_o}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial Y} - \frac{\partial U_o}{\partial Y} = \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial Y},$$

$$\eta^* = \eta^*(I_o) + \varepsilon I_1 \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial I} \right)_{I_o}.$$

Si $\eta_o^* = \eta^*(I_o)$ y $\eta_1^* = I_1 \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial I} \right)_{I_o}$

$$\eta^* = \eta_o^* + \varepsilon \eta_1^*.$$

Luego, como $\eta^* = m \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{n-1} = m |I|^{n-1}$,

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial I} = m (n-1) \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{n-2} \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)}{\left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|}, \quad (\text{ver análisis auxiliar luego de la ecuación de Reynolds})$$

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial I} = m (n-1) \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{n-3} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)$$

De las condiciones de equilibrio en una partícula de fluido en estado estacionario (ecuación **(4-5)**), se tiene:

$$\frac{\partial \tau}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial X}; \quad \frac{\partial}{\partial Y} (\eta^* I) = \frac{\partial P}{\partial X} = \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial X},$$

donde ψ es una función auxiliar. Esta sustitución del gradiente de presión (obtenida de [38]) es válida bajo la hipótesis de flujo Couette dominante. En virtud de que la componente de perturbación de la velocidad debe ser entonces pequeña, dicha sustitución implica que el gradiente de presión debe del mismo orden de magnitud. Luego

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\eta_o^* + \varepsilon \eta_1^*) \left(\frac{\partial U_o}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right) \right],$$

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\eta_o^* \frac{\partial U_o}{\partial Y} + \varepsilon \eta_o^* \frac{\partial U_1}{\partial Y} + \varepsilon \eta_1^* \frac{\partial U_o}{\partial Y} + \varepsilon^2 \eta_1^* \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right),$$

como $\varepsilon^2 \rightarrow 0$:

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\eta_o^* \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y} \left(\eta_o^* \frac{\partial U_1}{\partial Y} + \eta_1^* \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right).$$

De la igualdad anterior surge que:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\eta_o^* \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right) = 0 \Rightarrow \eta_o^* \frac{\partial U_o}{\partial Y} = cte.$$

Como η_o^* sólo depende de I_o , ambos deben ser constantes en la dirección Y para cualquier posición en X , entonces:

$$\frac{\partial U_o}{\partial Y} = C_1 \Rightarrow U_o = C_1 Y + C_2$$

que, con las condiciones de contorno se obtiene:

$$U_o = \frac{2V}{H} Y,$$

que es un perfil de Couette.

De la misma igualdad también surge que

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\eta_o^* \frac{\partial U_1}{\partial Y} + \eta_1^* \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(m \left| \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right|^{n-1} \frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_1}{\partial Y} m(n-1) \left| \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right|^{n-3} \frac{\partial U_o}{\partial Y} \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(m \left| \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right|^{n-1} \frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_1}{\partial Y} m(n-1) \left(\frac{\frac{\partial U_o}{\partial Y}}{\left| \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right|} \right)^2 \left| \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right|^{n-1} \right), \text{ con } \left(\frac{\frac{\partial U_o}{\partial Y}}{\left| \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right|} \right)^2 = 1.$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[m(1+n-1) \left| \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right|^{n-1} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right],$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[m n \left| \frac{2V}{H} \right|^{n-1} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right] = \frac{\partial}{\partial Y} \left[m n \left(\frac{2V}{H} \right)^{n-1} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right].$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = m n \left(\frac{2V}{H} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2}, \text{ y despejando } \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} = \frac{1}{m n} \left(\frac{H}{2V} \right)^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial X}.$$

Integrando luego para U_1 con las correspondientes condiciones de contorno, queda:

$$\frac{\partial U_1}{\partial Y} = \frac{1}{mn} \left(\frac{H}{2V} \right)^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial X} Y + C_1,$$

$$U_1 = \frac{1}{2mn} \left(\frac{H}{2V} \right)^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial X} Y^2 + C_1 Y + C_2$$

$$Y = 0 \rightarrow U_1 = 0$$

$$Y = H \rightarrow U_1 = 0$$

$$\text{con lo cual resulta: } C_2 = 0 \quad \text{y} \quad C_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \left(\frac{H}{2V} \right)^{n-1} \frac{H}{2mn},$$

$$U_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \left(\frac{H}{2V} \right)^{n-1} \frac{1}{2mn} (hY - Y^2).$$

El perfil U_1 es de un flujo perturbador cuasi Poiseuille.

$$\text{Como } U = U_o + \varepsilon U_1 \quad \text{y} \quad \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial X},$$

$$U = \frac{2V}{H} Y - \frac{\partial P}{\partial X} \left(\frac{H}{2V} \right)^{n-1} \frac{1}{2mn} (HY - Y^2) \quad \text{(A-1)}$$

que es un perfil Couette perturbado del fluido sinovial en cualquier sección del canal, como función de la coordenada Y , y de la coordenada X a través de las alturas del canal (H).

El cálculo del caudal de flujo del fluido sinovial en cada sección del canal, ofrece una promediación en la dirección transversal al flujo que permitirá eliminar las variaciones con respecto a la coordenada Y :

$$Q_e = \int_0^h U dY = \frac{2V}{H} \frac{Y^2}{2} \Big|_0^h - \frac{\partial P}{\partial X} \left(\frac{H}{2V} \right)^{n-1} \frac{1}{2mn} \left(H \frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3} \right) \Big|_0^h,$$

$$Q_e = V H - \frac{\partial P}{\partial X} \left(\frac{H}{2V} \right)^{n-1} \frac{1}{12mn} H^3,$$

de esta ecuación puede despejarse el gradiente de presión, para la ecuación modificada de Reynolds en su formulación diferencial:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = 12 m n \left(\frac{2V}{H} \right)^{n-1} \frac{V H - Q_e}{H^3},$$

Si se define $\mu(X) = m \left(\frac{2V}{H(X)} \right)^{n-1}$.

Podemos llamar μ_o a:

$$\mu(-\infty) = m \left(\frac{2V}{H(-\infty)} \right)^{n-1} = \mu_o,$$

donde $(-\infty)$ representa el comienzo del dominio, en un punto alejado del centro del contacto. Luego:

$$\frac{\mu}{\mu_o} = \left[\frac{H(-\infty)}{H(X)} \right]^{n-1}$$

Finalmente, la forma diferencial de la ecuación de Reynolds queda:

$$\frac{dP}{dX} = 12 n \mu_o \left[\frac{H(-\infty)}{H(x)} \right]^{n-1} \frac{V H - Q_e}{H^3}$$

La solución numérica de la ecuación de Reynolds en su forma diferencial presenta sobreestimaciones y fuertes oscilaciones en el campo de presión que en muchos casos invalidan los resultados. Para evitar estas oscilaciones, siguiendo lo mostrado en [10-12] se utilizará la ecuación en forma integral, versión que presenta un mejor comportamiento numérico a cambio de mayor tiempo de cómputo. Esta es:

$$P(X) = 12 n \mu_o \int_{-\infty}^X \left[\frac{H(-\infty)}{H} \right]^{n-1} \frac{VH - Q_e}{H^3} dx \quad \text{(A-2)}$$

Análisis auxiliar:

$$\text{Si } Y = |X| = \sqrt{X^2}, \text{ entonces } \frac{dY}{dX} = \frac{1}{2} (X^2)^{-1/2} 2X \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X}{\sqrt{X^2}} = \frac{X}{|X|}$$

Apéndice B

Obtención del modelo de columna de deformación para un material elástico.

Para un material, las tensiones, deformaciones y desplazamientos se relacionan entre sí a través de tres grupos de ecuaciones:

- a) **Ecuaciones de equilibrio:** Contienen las fuerzas por unidad de volumen:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial X_k} = 0 \quad (\text{B-1})$$

donde T_{ij} son las tensiones que se producen en el material.

Ademas, la causa de las deformaciones del material polimérico son las fuerzas externas que se deben balancear con las tensiones generadas en el material:

$$T_{ik} n_i = t_k \quad (\text{B-2})$$

Donde n_i son las componentes del vector normal a la superficie y t_i son las fuerzas externas por unidad de área generadas por la presión del fluido sinovial.

- b) **Ecuaciones cinemáticas:** Relacionan deformación con desplazamiento. Dado que la deformación de un cuerpo se puede evaluar si se conocen los desplazamientos de cada punto del mismo, es posible calcular las deformaciones específicas partiendo de componentes de desplazamiento. Se escribirá la ecuación simplificada para pequeños desplazamientos. La ecuación completa puede verse en [30].

$$\delta_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \right) \quad (\text{B-3})$$

donde δ_{ik} son las deformaciones y U_i los desplazamientos.

- c) **Ecuaciones constitutivas:** Relacionan tensiones con deformaciones. Para un material elástico, lineal e isotrópico resulta la ley de Hooke generalizada:

$$T_{ik} = 2u_{ik}\mu + \lambda u_{jj}\delta_{ik} \quad (\text{B-4})$$

donde μ y λ son las constantes de Lamé, y se definen como:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E y ν son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del sustrato respectivamente. Ambos son propiedades físicas del sustrato y sus valores pueden ser obtenidos mediante un ensayo de compresión.

Ante un estado de deformación plana, las componentes de deformación en dirección del eje Z serán nulas. Así, el grupo de ecuaciones anteriores quedará:

Ecuaciones de equilibrio

De (B-1), las ecuaciones de equilibrio quedan:

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial Y} = 0 \quad \text{(B-5)}$$

$$\frac{\partial T_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial Y} = 0$$

Ecuaciones cinemáticas:

$$\delta_{zz} = \delta_{xz} = \delta_{yz} = 0 = T_{xz} = T_{yz}$$

de lo cual

$$\delta_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial X} \quad , \quad \delta_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial Y} \quad , \quad \delta_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial X} + \frac{\partial U_x}{\partial Y} \right) \quad \text{(B-6)}$$

Ecuaciones constitutivas: De la expresión general (B-4) se desprenden las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= E' \left(\frac{\partial U_x}{\partial X} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial U_y}{\partial Y} \right) \\ T_{yy} &= E' \left(\frac{\partial U_y}{\partial Y} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial U_x}{\partial X} \right) \\ T_{yx} &= E \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial U_x}{\partial Y} + \frac{\partial U_y}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad \text{(B-7)}$$

donde $E' = E \frac{(1-\nu)}{[(1+\nu)(1-2\nu)]}$

Armstrong [22] desarrolló el modelo de columna, aplicando la teoría de perturbaciones en el análisis de tensiones de un delgado sustrato de cartílago articular.



Como se observa en la figura B.1, la curvatura del componente tibial es muy pequeña y suave. Por lo tanto, su normal es casi paralela a la coordenada Y (figura B.2). Entonces, la ecuación de equilibrio (B-2) queda:

$$T_{ik} n_i = t_k \Rightarrow T_{Yk} = t_k \Rightarrow \begin{cases} T_{yx} = t_x \\ T_{yy} = t_y \end{cases} \quad (\text{B-8})$$

Figura B.1: Reproducción de la figura 3.6

El vector tracción es el vector de fuerzas externas actuando sobre la superficie articular. Un análisis de la figura B.2 muestra que el vector que surge de la acción de la presión sobre una unidad de superficie tendrá como componentes:

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \quad (\text{B-9})$$

De dichas componentes, debido a la geometría del material en la zona de contacto, la componente X puede ser despreciada. Además, dado que en la operación de la junta sinovial las deformaciones que determinan el canal de flujo son las verticales, las cuales se consideran pequeñas, se pueden despreciar los efectos no locales de la presión y las deformaciones causadas por los esfuerzos cortantes del fluido manteniendo las principales características del problema. De esta manera, se considera solo el caso de deformación unidimensional perpendicular a la superficie (en el sentido Y). Entonces, los desplazamientos que se mantienen son los verticales (axialmente uniformes) δ_{yy} .

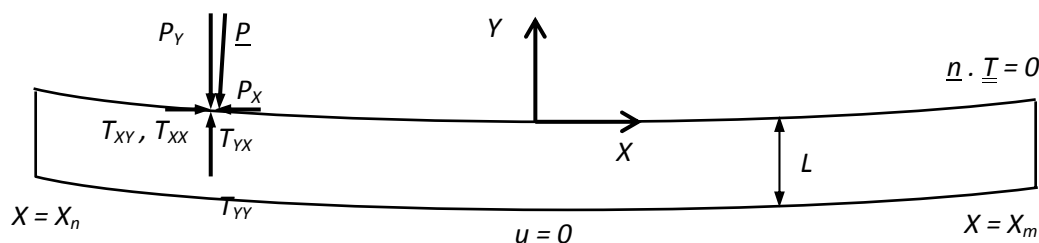


Figura B.2: Reproducción de la figura 3.5.

De las ecuaciones **(B-7)** se desprende:

$$T_{YY} = E''\delta_{YY} \quad \text{(B-10)}$$

y la ecuación de equilibrio de **(B-5)**:

$$\frac{\partial T_{YY}}{\partial Y} = 0 \quad \text{(B-11)}$$

Para resolver la ecuación diferencial **(B-11)**, se deben considerar las condiciones de contorno del material que se desprenden de la figura B.2:

- I. Fuerza normal a la superficie generada por la presión del fluido en la dirección Y .
- II. $\bar{n} \cdot \bar{T} = 0 \Rightarrow$ Condición de no tracción sobre los planos $X = X_n$ y $X = X_m$ suficientemente alejados.
- III. $\bar{u} = 0 \Rightarrow$ Deformación cero sobre el hueso (plano $Y = -L$).

La expresión **(B-11)** indica que no hay variación de tensión dentro del material a lo largo de Y , por lo cual es posible integrarla con las condiciones de contorno establecidas, en algún punto del eje X :

$$\int_{P(X)}^{T_{YY}(X)} dT(X) = 0 \Rightarrow T_{yy}(X) - P(X) = 0 \Rightarrow T_{yy}(X) = P(X) \quad \text{(B-12)}$$

La ecuación anterior expresa que la la presión del líquido sobre el sustrato es equilibrada por el esfuerzo desarrollado en la matriz del mismo, y que no depende de la coordenada Y (todos los puntos a lo largo de esta coordenada soportan la misma tensión). Reemplazando la ecuación **(B-10)** en la **(B-12)** se tiene:

$$\frac{du_y(X)}{dY} = \frac{P(X)}{E''} \quad \text{(B-13)}$$

Debido a que el lado izquierdo de esta relación es constante a lo largo del eje Y , puede reemplazarse por el cociente incremental $\Delta U_y(X)/L$:

$$\Delta U_y(X) = D(X) = \frac{P(X)}{E''} L \quad \text{(B-14)}$$

La ecuación **(B-14)** es la expresión final del desplazamiento (término de deformación) denominado modelo de columna.

Apéndice C

Módulo elástico equivalente en el dominio de Laplace.

El campo de deformaciones elástico de partida para obtener el modelo de deformación viscoelástica de Voigt es el siguiente:

$$\varepsilon(X) = \frac{P(X)}{E''} \quad (\text{C-1})$$

donde: $E'' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Para obtener el modelo correspondiente de (C-1) debemos obtener el equivalente de E'' en el campo transformado de Laplace. Esto se realiza a través de las relaciones (3-15), para lo cual es necesario contar con la expresión de los operadores $\{P\}$ y $\{Q\}$ del modelo de Voigt. Las mismas se han desarrollado en el capítulo 3 y son las siguiente:

$$\{P\} = 1 \quad \text{y} \quad \{Q\} = \left(G + \eta \frac{d}{dt}\right) \quad (\text{C-2})$$

Bajo los argumentos expuestos en el capítulo 3, la variable X estará sujeta a transformación como si fuera una variable temporal [33]. Utilizando la relación (3-2), el operador $\{Q\}$ queda:

$$\{Q\} = \left(G + \eta V \frac{d}{dX}\right) \Rightarrow Q(s) = (G + \eta \alpha V s) \quad (\text{C-3})$$

Utilizando las relaciones (3.11), E'' en el dominio de Laplace queda:

$$E''(s) = \frac{\frac{9KQ(s)}{3KP(s)+Q(s)} \left(1 - \frac{3KP(s)-2Q(s)}{6KP(s)+2Q(s)}\right)}{\left(1 + \frac{3KP(s)-2Q(s)}{6KP(s)+2Q(s)}\right) \left(1 - 2 \frac{3KP(s)-2Q(s)}{6KP(s)+2Q(s)}\right)} \quad (\text{C-4})$$

Simplificando y (C-4) considerando que $P(S) = 1$, tendremos

$$E''(s) = \frac{\frac{9KQ(s)}{3K+Q(s)} \left(1 - \frac{3KP-4Q(s)}{3K+Q(s)}\right)}{\left(\frac{9K}{3K+Q(s)}\right) \left(\frac{3Q(s)}{3K+Q(s)}\right)} \quad (\text{C-5})$$

Luego de simplificar, sabiendo que $K=E/[3(1-2\nu)]$, $G=E/[2(1+\nu)]$, y considerando **(C-3)**, nos queda:

$$E''(s) = \frac{4}{3} \alpha V \eta \left(\frac{3E''}{4\alpha V \eta} + s \right) \quad \text{(C-6)}$$

Finalmente, definiendo $\eta'' = (4/3) \eta$:

$$E''(s) = \alpha V \eta'' \left(\frac{E''}{\alpha V \eta''} + s \right) \quad \text{(C-7)}$$

Referencias

- [1] Ramirez J. C., Garduño E. V. and Méndez J. L. T., "Modelos estructurales de las prótesis de rodilla". *Revista Mexicana de Ortopedia y Traumatología*, 10 (3): p.99-103, (1996).
- [2] Comín M., "¿Cómo aumentar la vida media de las prótesis de rodilla?". *Implantes. Instituto de Biomecánica de Valencia*, 2: p.35 - 45, (1999).
- [3] Flannery M., Jones E. and Birkinshaw C., "Analysis of wear and friction of total knee replacements part II: Friction and lubrication as a function of wear". *Wear. Elsevier*, 265 (7): p.1009 -1016, (2008).
- [4] Zhao D., Sakoda H., Sawyer W. G., Banks S. A. and Fregly B. J., "Predicting knee replacement damage in a simulator machine using a computational model with a consistent wear factor". *Journal of Biomechanical Engineering. ASME*, 130 (1): p.1 -10, (2008).
- [5] Kurtz S. M., Muratoglu O. K., Evans M. And Edidin A. A., "Advances in the processing, sterilization and crosslinking of ultra-high molecular weight polyethylene for total joint arthroplasty". *Biomaterials. Elsevier*, 20 (18): p.1659 -1688, (1999).
- [6] Scholes S. C., Unsworth A. and Jones E., "Polyurethane unicondylar knee prostheses: simulator wear tests and lubrication studies". *Physics in Medicine and Biology. Institute of Physics Publishing*, 52 (1): p.197 - 212, (2007).
- [7] Dowson D., "Bio-Tribology of natural and replacement synovial joints". Mow V. C., Ratcliffe A. and Woo S. L. Y. *Biomechanics of Diarthrodial Joints. Volume II. Chapter 29: p.305 - 345, (1990).*
- [8] Brandt C. and Tarum G., "Knee implants – Review of models and biomechanics". *Materials and Design. Elsevier*, 30 (2): p.398 - 413, (2009).
- [9] Di Paolo J., "Resolución simultánea de las ecuaciones que gobiernan los sistemas elastohidrodinámicos del problema de contacto lineal". *Tesis de Magister. Universidad Nacional del Litoral, (1992).*
- [10] Di Paolo J., Corvalán C. M. y Saita F. A., "Análisis por elementos finitos del coeficiente de fricción en un modelo poroelastohidrodinámico de junta sinovial", *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, XX (1), (1999).

- [11] Corvalán C. M., Di Paolo J. and Saita F. A., "Elastohydrodynamic of porous substrates. Application to synovial joint analysis". *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. Taylor & Francis, 2: p.309 - 320, (1999).
- [12] Di Paolo J., Corvalán C. M. and Saita F. A., "The low friction coefficient of articular joints: a self-lubricated action induced by the cartilage exudation-imbibition process", publicado en los proceedings (CD-ROM) del IV World Congress on Computational Mechanics, (1998).
- [13] Di Paolo J. and Berli M., "Numerical analysis of the effects of material parameters on the lubrication mechanism for knee prosthesis". *Computer methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. Taylor & Francis, 9 (2): p.79 - 89, (2006).
- [14] Di Paolo J., Berli M. E., Campana D. M., Ubal S. and Cárdenes L. D., "Simulation of the filtration mechanism of hyaluronic acid in total knee prosthesis". 16th Argentine Bioengineering Congress and the 5th Conference of Clinical Engineering. *Journal of Physics: Conference Series*. Disponible en: <http://www.iop.org/EJ/toc/1742-6596/90/1>, 90: artículo n° 012051, (2007).
- [15] Berli M. E., Campana D. M., Ubal S. and Di Paolo J., "Lubrication model of a knee prosthesis, with non Newtonian fluid and porous rough material". *Latin American Applied Research*, 39 (2): p.105 -111, (2009).
- [16] Corvalán C. M., "Fenómeno de lubricación sobre sustratos poroelásticos". *Tesis Doctoral*. Universidad Nacional del Litoral, (1993).
- [17] Dowson D. and Higginson G. R., "Elasto-hydrodynamic lubrication". Pergamon Press, (1977).
- [18] Wang S. H. and Zhang H. H., "Combined effects of thermal and non-newtonian character of lubricant on pressure, film profile, temperature rise and shear stress in E.H.L.". *Journal of Tribology*. ASME, 109 (4): p.666 - 670, (1987).
- [19] Hlaváček M. and Vokoum D., "Lubrication of a cylindrical synovial joint considering motion and elastic incompressible cartilage". *Wear*. Elsevier, 165: p.1-7 (1993).
- [20] Jin Z. M., Dowson D. and Fisher J., "Fluid film lubrication of natural hip joints", *Thin Films in Tribology*. Elsevier. Sci. Pub., (1993).

-
- [21] Reynolds O., "On the theory of lubrication and its application to Mr Beachaump Tower's experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil". *Phil. Trans. R. Soc. Ser. A.*, (1886).
- [22] Amstrong C. G., "An analysis of the stress in a thin layer of articular cartilage in a synovial joint". *Eng Med.*, 15: p.55 - 65, (1986).
- [23] Saita F. A., "Elastohydrodynamics and flexible blade coating". PhD. Thesis. University of Minnesota, (1984).
- [24] Stammen J. A., Williams S., Ku D. N. and Guldberg R. E., "Mechanical properties of a novel PVA hydrogel in shear and unconfined compression". *Biomaterials. Elsevier.* 22: p.799 - 806 (2001).
- [25] Moore K. L., "Anatomía, con orientación clínica". Tercera Edición. Editorial Panamericana. (1993).
- [26] <http://arthritis.about.com/>
- [27] Spiller K. L., Laurencin S. J., Charlton D., Maher S. A. and Lowman A. M., "Superporous hydrogels for cartilage repair: Evaluation of the morphological and mechanical properties". *Acta Biomateriala. Elsevier.* 4 (1): 17 - 25. (2008)
- [28] Xue Y., Wu W., Jacobs O. and Schadel B., "Tribological behaviour of UHMWPE/HDPE blends reinforced with multi-wall carbon nanotubes". *Polymer Testing. Elsevier,* 25 (2): p.221 - 229, (2006).
- [29] Jin Z. M., Jagatia M. and Jalali-Vahid D., "Prediction of lubricating film thickness in uhmwpe hip joint replacements". Hutchings I. M., "Friction, Lubrication and Wear of Artificial Joints". Profesional Engineering Publishing. London UK, p.75 - 87, (2003).
- [30] Godoy L. A., Prato C. A., Flores F. G., "Introducción a la Teoría de Elasticidad". Asociación Argentina de Mecánica Computacional. Editorial Científica Universitaria. (1985).
- [31] Roylance D., "Engineering viscoelasticity". Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, MA 02139, (2001).
- [32] Mase G. T. and Mase G. E., "Continuum Mechanics for Engineers". CRC Press, (1999).

- [33] Christensen R. M., "Theory of viscoelasticity. An introduction". Academic Press, Inc, (1977).
- [34] McClure G., Jin Z.M., Fisher J. and Tighe B. J., "Determination of lubricating film thickness for permeable hydrogel and non-permeable polyurethane layers bonded to a rigid substrate with particular reference to cushion form hip joint replacements". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 210 (2): p.89 - 93, (1996).
- [35] Radin E. L. and Fyhrie D., "Joint physiology and biomechanics". Mow V. C., Ratckiffe A. and Woo S. L-Y. *Biomechanics of Diarthrodial Joints. Volume II, Chapter 31*: p.369 -384, (1990).
- [36] Ribitsch V.O., "Viscoelastic behaviour of sinovial fluids and artificial replacements". Van Mow V. C., Ratckiffe A. and Woo S. L-Y. *Biomechanics of Diarthrodial Joints. Volume II, Chapter28*: p.287 - 304, (1990).
- [37] Wright V. and Dowson D., "Lubrication and cartilage". *Journal of Anatomy. Wiley*, 121 (1): p.107 - 118, (1976).
- [38] Andriacchi T. P. and Hurwitz D. E., "Gait biomechanics and the evolution of total joint replacement", *Gait and Posture*, 5: p.256 - 264, (1997).
- [39] Dowson D. And Jin Z. M., "Microelastohydrodynamic lubrication of low-elastic-modulus solid on rigid substrates". *Journal of Physics. D: Appl. Phisiology*, 25: p.A116 - A123, (1992).
- [40] Zienkiewicz O. C. And Taylor R. L., "The Finite Element Method. The Basis". Butterworth Heinemann. Quinta edición. Volumen 1, (2000).
- [41] Scholes S. C., Smith S L, Ash H E and Unsworth A., "The lubrication and friction of conventional UHMWPE, novel compliant layer, and hard bearing surfaces for use in total hip prosthesis. *Friction, Lubrication and Wear of Artificial Joints*". Hutchings I. M. Professional Engineering Publishing, p.59 - 74, (2003).
- [42] Furmanski J. A. and Pruitt L. A., "Peak stress intensity dictates fatigue crack propagation in UHMWPE Polymer". *Elsevier*, 48 (12): p.3512 - 3519, (2007).
- [43] Goryacheva I. G., "A. YU. Ishlinskiï's researches in the field of rolling friction and their development". *Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Elsevier*, 67 (4): p.575 -588, (2003).

-
- [44] Abd-Al Samieh M. F. and Rahnejat H., "Nano-lubricant film formation due to combined elastohydrodynamic and surface force action under isothermal conditions". *Proceeding of the Institution of Mechanical Engineering. IMechE. Part C*, 215: p.1019 - 1029, (2001).
- [45] Teodorescu M., Balakrishnan S. and Rahnejat H., "Physics of ultra-thin surface films on molecular smooth surfaces". *Proceeding of the Institution of Mechanical Engineering. ImechE. IMechE. Part N: Journal Nanoengineering and Nanosystems.*, 220: p.7 - 19, (2006).
- [46] Pappas M. J., Makris G., and Buechel F. F., "Evaluation of contact stress in metal-plastic total knee replacement". *Biomaterials and Clinical Applications. Advances in Biomaterials. Elsevier*, 7: p.259 - 264, (1987).
- [47] Elsharkawy A. A., "Visco-elastohydrodynamic lubrication of line contacts". *Wear. Elsevier*, 199: p.45 - 55, (1996).
- [48] Burgess I. C., Kolar M., Cunningham J. L. and Dumbleton J. H., "Development of six-station knee wear simulator and preliminary wear results". *Proc Instn Mech. Engrs. Journal Engineering in Medicine*, 211 (H1): p.37 - 47, (1997).
- [49] Yao J. Q., Laurent M. P., Johnson T. S., Blanchard R. and Crowninshield R. D., "The influences of lubricant and material on polymer/CoCr sliding friction". *Wear. Elsevier*, 255: p.780 - 784, (2003).
- [50] DesJardins J., Aurora A., Tanner S. L., Pace T. B., Acampora K. B. and LaBerge M., "Increased total knee arthroplasty ultra-high molecular weight polyethylene wear using a clinically relevant hyaluronic acid simulator lubricant". *Proc. IMechE. Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 220 (5): p. 609 - 623, (2006).
- [51] Mazzucco D., McKinle G., Scott R. and Spector M., "Rheology of the joint fluid in total knee arthroplasty patients". *Journal of Orthopedic Research. Wiley*, 20: p.1157 - 1163, (2002).